

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA



**Estrelas de Nêutrons: do gás de
nêutrons livres à inclusão de híperons
e campo magnético**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física da
Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos
para obtenção do Título de MESTRE EM FÍSICA.

Mestrando: Luiz Laercio Lopes

Orientadora: Prof. Dra. Débora Peres Menezes
FLORIANÓPOLIS, 13 DE MARÇO DE 2012

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de **Mestre em Física**, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Luis Guilherme C. Rego
(Coordenador do Curso)

Banca Examinadora

Prof^a. Dr^a. Débora Peres Menezes
(Orientadora - FSC/UFSC)

Dr^a. Débora P. Menezes
(Presidente - FSC/UFSC)

Dr. Alexandre Magno S. Santos
(UFSC - Curitiba)

Dr. César Augusto Vasconcellos
(IF - UFRGS)

Dr. Celso de Camargo B. Junior
(FSC/UFSC)

Resumo

O conhecimento obtido dos estudos da física nuclear é fundamental para que todo o processo de evolução estelar seja melhor compreendido. Vamos neste trabalho, estudar e descrever algumas das características físicas do interior das estrelas de nêutrons. Partiremos de um gás de Fermi livre, e depois estudaremos modelos com hádrons interagentes. Para se descrever as interações físicas entre os hádrons utilizaremos os modelos efetivo de Walecka linear e o não-linear. Feito isso, vamos refinar nossos resultados, a fim de deixar nossa descrição mais realística, incluindo todo o octeto bariônico e um forte campo magnético, e analisar como esses novos termos alteram as características principais das estrelas de nêutrons, como massa e raio, além de estimar como a composição química varia de acordo com a densidade. Ao final, poderemos comparar os diversos resultados obtidos com aqueles encontrados na literatura.

Palavras-chave:

Estrelas de nêutrons, pulsares, magnetares, objetos compactos

Abstract

The knowledge gained from the study of nuclear physics is fundamental to the understanding of the whole process of stellar evolution. In this work, we study and describe some of the physical characteristics of neutron star interior. Start from a free Fermi gas, and then we study models with interacting hadrons. To describe the physical interactions between hadrons we use the Walecka linear and non-linear effective models. Then, we refine our results in order to make our description more realistic, including all the baryon octet and a strong magnetic field. Finally analyze how these new terms affect the main features of neutron stars, like mass and radius, and estimate how the chemical composition varies with the density. In the end, we compare the different results obtained with those found in the literature.

Keywords

Neutron stars, pulsars, magnetars, compact objects

Sumário

Resumo	3
Abstract	3
1. Introdução	9
1.1 Considerações Iniciais	9
1.2 Por que Pulsares são estrelas de nêutrons?	11
1.3 Importância do estudo de estrelas de nêutrons	12
2. Gravitação	14
2.1 Gravitação newtoniana	14
2.2 Relatividade Geral	17
2.2.1 A solução de Schwarzschild	20
2.2.2 A equação de Oppenheimer-Volkoff	25
3. Modelo de Gás de Fermi Livre	33
3.1 Distribuição de Fermi-Dirac à temperatura zero	33
3.2 Temperatura de Fermi	35
3.3 Equação de Estado	36

3.4	Estabilidade Estelar	39
3.4.1	Princípio de Le Chantelier e a velocidade do som	39
3.4.2	Estabilidade, oscilações radiais e existência de uma massa máxima	40
3.5	Resultados	46
3.6	Estrelas de nêutrons atômicas	48
3.7	Neutralidade elétrica e equilíbrio químico	49
3.8	Equação de Estado	50
3.9	Resultados	51
4.	Interação Hadrônica: a QHD-I	54
4.1	Hadrodinâmica Quântica I	56
4.1.1	O formalismo da QHD-I	57
4.1.2	Equações de movimento	59
4.1.3	A aproximação de campo médio	60
4.2	Equação de Estado para a QHD-I	62
4.3	Aplicação às estrelas atômicas	66
4.3.1	Estabilidade Estelar	66
4.4	Resultados	67
4.5	Densidade de energia estacionária	69
4.6	Problemas da QHD-I	70
5.	Interação Hadrônica: a QHD-II	72
5.1	O formalismo da Hadrodinâmica Quântica II	72
5.1.1	Equação de movimento e a aproximação de campo médio	74
5.2	Equação de estado para a QHD-II	75
5.2.1	Aplicação às estrelas atômicas	78

5.3	Matéria estelar a baixas densidades	80
5.3.1	O núcleo ligado: o modelo da gota líquida	83
5.3.2	A equação de Baym-Bethe-Pethick	86
5.4	Resultados	88
5.5	Extensão do Formalismo: Inclusão de todo octeto bariônico e múons no interior estelar	90
5.5.1	Neutralidade elétrica e equilíbrio químico	93
5.5.2	Densidade lagrangiana para estrelas exóticas	94
5.5.3	Resultados	96
6.	Inclusão do Campo Magnético	100
6.1	Equação de Dirac na presença de um Campo Magnético Externo	101
6.1.1	Gás de Fermi e densidade de Estados	107
6.2	Aplicação elementar: Gás de Fermi livre	109
6.2.1	Neutralidade de carga e equilíbrio químico	109
6.2.2	Densidade de energia e pressão	110
6.2.3	Valor Máximo para os níveis de Landau	112
6.2.4	Equação de Estado	113
6.3	Campo Magnético dependente da densidade	114
6.3.1	O campo magnético e as equações de Oppenheimer- Volkoff	115
6.4	Estabilidade estelar	116
6.5	Resultados	117
7.	QHD-II com Campo Magnético	122
7.1	Estrelas atômicas	125
7.1.1	Resultados	127
7.2	Estrelas exóticas	130

7.2.1	Neutralidade de carga e equilíbrio químico	132
7.2.2	Resultados	133
8.	Conclusão e Perspectivas	137
A.	Anãs Brancas	144
A.1	Formalismo	145
B.	Tabelas de Valores numéricos	149

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Estrelas de nêutrons são objetos compactos pertencentes a uma classe comumente chamada de “estrelas mortas”, uma vez que elas se originam do “caroço” deixado por uma estrela com massa entre 10 a 25 massas solares que explodiu em supernova [1]. São compostas quase que exclusivamente por nêutrons cuja estabilidade gravitacional deriva do Princípio da Exclusão de Pauli [2].

Embora prevista teoricamente desde a descoberta do nêutron em 1932, sua primeira observação foi acidental em 1967, quando fontes de pulsos periódicos em ondas de rádio foram detectados. Essas fontes foram chamadas de pulsares.

Pulsares

Logo após a detecção dos pulsares, os mesmos foram interpretados como sendo estrelas de nêutrons com alta rotação e com um

grande campo magnético dipolar. Essa interpretação ganhou força quando um estudo sobre as linhas espectrais em aceleradores cíclotron mostraram que o padrão observado dos pulsares era o esperado para campos magnéticos da ordem de 10^8 T e período da ordem de 100 ms [3].

Propriedades

Uma estrela de nêutrons típica possui massa entre 1.0 e 2.0 massas solares, e um raio de aproximadamente 12 km. A densidade de uma estrela de nêutrons varia de $10^{-5}\text{MeV}/c^2\text{fm}^3$ na crosta até uma densidade de $10^3\text{MeV}/c^2\text{fm}^3$ no núcleo. A temperatura típica de uma estrela de nêutrons é da ordem de 10^6K , enquanto que seu campo magnético é de 10^8T [4].

Magnetares

Magnetar é um tipo de estrela de nêutron com um campo magnético extremamente alto (de até 10^{11}T na sua crosta). Magnetares também são a fonte dos chamados repetidores de raio gama, além de também serem a explicação mais aceita para pulsares anômalos em raio-X. Acredita-se que uma em cada dez estrelas de nêutrons seja, ou tenha sido um dia, um magnetar [5].

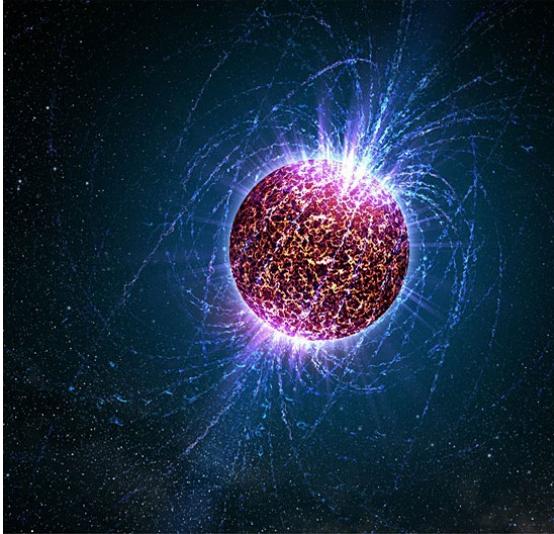


Fig. 1.1: *Concepção artística de uma estrela de nêutrons*

1.2 Por que Pulsares são estrelas de nêutrons?

Primeiramente conhecemos um pulsar com um período de apenas 1.6 ms [6]. Neste intervalo de tempo, a luz viaja 480 km fazendo com que nossa fonte tenha uma extensão máxima de 480 km . Os únicos objetos conhecidos que poderiam possuir essa característica são os chamados objetos compactos: anãs

brancas, estrelas de nêutrons e buracos negros. Anãs brancas possuem raios da ordem de 10 mil km e, portanto não podem ser pulsares. Buracos negros por sua vez não possuem estrutura interna, e um buraco negro em rotação só poderia emitir radiação através de acreção de matéria, porém buracos negros em rotação em geral são assimétricos e jamais poderiam emitir pulsos de maneira tão regular. Sendo assim somente estrelas de nêutrons possuem as características necessárias para descrever os pulsares.

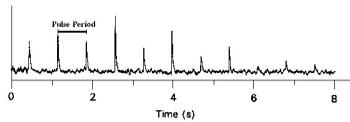


Fig. 1.2: *Sinal obtido do pulsar PSR B0329+54*
Taylor e Manchester - 1977

1.3 Importância do estudo de estrelas de nêutrons

Estrelas de nêutrons nos fornecem um laboratório único para testar as leis da física sob condições extremas. Por exemplo a correção da massa das estrelas de nêutrons por efeitos relativísticos pode ser superior a 50 % [7], mostrando então ser um ótimo laboratório para a relatividade geral. O pulsar binário PSR 1913+16 por exemplo, possui uma alta precessão em sua

órbita, em total acordo com a relatividade geral, além de ser até o momento a única evidência de radiação gravitacional [6]. Em relação à teoria de campos temos uma oportunidade única de estudar a matéria em campos magnéticos que podem chegar a $10^{12} T$, enquanto campo de “poderosos eletroímãs” geralmente não são superiores a $10 T$. Em relação a física nuclear temos também a possibilidade de conjecturar sob o comportamento da matéria em densidades altíssimas, chegando a mais de cinco vezes a densidade do núcleo de chumbo [4].

Capítulo 2

Gravitação

Devido a neutralidade de carga no interior estelar, e da saturação da força nuclear, a gravitação torna-se a mais importante força para descrever o interior das estrelas. Vamos neste capítulo construir as equações estruturais para descrever estrelas newtonianas e depois disso construir a generalização relativística.

2.1 Gravitação newtoniana

Newtonianamente o potencial gravitacional de uma distribuição arbitrária de massa é governado pela equação de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{2.1}$$

onde G é a constante de Newton e ρ é a densidade de massa. Sabemos também que um fluido perfeito em equilíbrio hidrostático obedece à chamada equação de Euler [8]:

$$\nabla p = \mathbf{f}, \quad (2.2)$$

onde p é a pressão e \mathbf{f} é a densidade de força. No nosso caso, a única força que existe no sistema é sua auto gravidade, onde para um fluido perfeito, essa força é dada por: $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é o campo gravitacional definido como: $\mathbf{g} \doteq -\nabla\Phi$. Destas definições, a equação de Euler assume a seguinte forma:

$$\nabla p = -\rho \nabla\Phi \quad \rightarrow \quad \frac{\nabla p}{\rho} = -\nabla\Phi, \quad (2.3)$$

aplicando-se agora o divergente de ambos os lados obtemos:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = -\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho, \quad (2.4)$$

e integrando agora as equações no volume temos:

$$\int \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) d^3r = -4\pi GM(\mathbf{r}), \quad (2.5)$$

onde definimos:

$$M \doteq \int \rho(\mathbf{r}) d^3r. \quad (2.6)$$

Utilizando agora o teorema de Gauss, podemos substituir a integração volumétrica por uma integral de superfície normal ao fluido. A equação (2.5) se torna:

$$\int_{S'} \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \cdot \hat{n} dS' = -4\pi GM. \quad (2.7)$$

Impondo agora simetria esférica, temos que:

$$\nabla p \rightarrow \frac{dp}{dr}; \quad \hat{n} \rightarrow \hat{r}; \quad dS' \rightarrow r^2 d\Omega.$$

com Ω sendo o elemento de ângulo sólido. A equação (2.7) fica:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} &= -4\pi GM(r) \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Através da equação de Einstein $E = mc^2$, podemos reescrever a densidade de massa em função da densidade de energia:

$$\epsilon = \rho c^2 \rightarrow \rho = \frac{\epsilon}{c^2} \quad (2.9)$$

De acordo com as equações (2.6), (2.8) e (2.9) temos então as duas equações estruturais básicas [9]:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon(r) M(r)}{c^2 r^2}, \quad (2.10)$$

$$\frac{dM}{dr} = \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2}. \quad (2.11)$$

Devemos então resolver essas duas equações diferenciais acopladas. Enquanto dM/dr é sempre positivo, dp/dr é sempre negativo e eventualmente alcança o valor zero. Quando $p = 0$ significa que a estrela alcançou sua superfície, ou seja, obtém-se um valor para o raio estelar. Além do mais o fato de dp/dr

ser sempre negativo garante o equilíbrio hidrostático de nossa estrela.

Para resolver estas equações precisamos então de uma equação de estado (relação entre densidade de energia e pressão). Estudar diferentes equações de estado será o trabalho proposto dos próximos capítulos.

Uma vez com a equação de estado em mãos, precisamos de duas condições de contorno. Geralmente escolhemos $M(0) = 0$ para evitar singularidades, além de uma certa pressão central $p(0) = p_0$. Os resultados obtidos então podem ser comparados com os dados observacionais.

2.2 Relatividade Geral

Logo após o desenvolvimento da relatividade restrita em 1905, Einstein percebeu que a gravitação newtoniana era incompatível com sua nova teoria, uma vez que a forma funcional newtoniana permite troca de informação de maneira instantânea. Einstein passou então os próximos 10 anos desenvolvendo uma teoria na qual conciliasse a gravitação com a relatividade.

O resultado desse esforço é hoje o que chamamos de Relatividade Geral [10]. A equação escalar de Poisson da gravitação newtoniana é substituída por uma equação tensorial de segunda ordem da relatividade geral.

Uma nota se faz necessária aqui: todas construções e definições a respeito das quantidades relevantes em relatividade geral podem ser encontradas no livro do Nightingale [11], exceto se outras referências estiverem explicitamente indicadas no texto.

As equações da relatividade que governam a gravitação são chamadas equações de campo de Einstein e são expressas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

$R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, que é um tensor simétrico de segunda ordem definido como uma contração do tensor de curvatura de Riemman da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} \doteq R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}. \quad (2.13)$$

$R^{\alpha}_{\mu\nu\beta}$ é o tensor curvatura de Riemman que é um tensor de quarta ordem. Este tensor possui toda informação da curvatura do espaço-tempo. Em outras palavras, se $R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = 0$ o espaço-tempo é plano. Caso contrário ele é curvo. Sempre que houver índices repetidos um na forma contravariante e outro na forma covariante, está implícito a convenção de soma de Einstein. O tensor curvatura de Riemman é definido da seguinte forma:

$$R^d_{abc} \doteq \Gamma^d_{ac, b} - \Gamma^d_{ab, c} + \Gamma^e_{ac}\Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{ab}\Gamma^d_{ec}, \quad (2.14)$$

onde a vírgula indica derivação parcial, ou seja para um vetor arbitrário λ_a temos que: $\lambda_{a, b} \doteq \partial_b \lambda_a$. Γ^a_{bc} é chamada conexão métrica, e é definida como:

$$\Gamma^a_{bc} \doteq \frac{1}{2}g^{ad}(g_{dc, b} + g_{bd, c} - g_{bc, d}). \quad (2.15)$$

Definindo-se uma Lagrangiana $L \doteq \frac{1}{2}g_{ab}(x^c)\dot{x}^a\dot{x}^b$ e aplicando-se as equações de Euler-Lagrange, a conexão métrica aparece como

os coeficientes dos termos quadráticos nas velocidades (neste caso o ponto indica derivada total em relação a um parâmetro afim; geralmente em relatividade geral usa-se o tempo próprio τ). Matematicamente podemos expressar essa relação da seguinte forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^c} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x}^c + \Gamma_{ab}^c \dot{x}^a \dot{x}^b = 0. \quad (2.16)$$

A segunda equação de (2.16) é chamada equação da geodésica e ela expressa o fato de que, na ausência de forças, as partículas em um espaço-tempo arbitrário devem seguir geodésicas. Fica claro também que a relatividade geral não vê a gravidade como força e sim como um agente dinâmico que modifica a curvatura do espaço-tempo, fazendo com que todas as partículas sujeitas unicamente a um campo gravitacional sejam partículas livres. Pela equação da geodésica podemos perceber que a conexão métrica é simétrica nos seus índices covariantes. $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico da relatividade geral e também é nossa variável das equações (2.12), o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski por sua vez é chamado de $\eta_{\mu\nu}$ e, em coordenadas cartesianas e esféricas respectivamente, é definido como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

R é o escalar de curvatura e é definido como uma contração do tensor de Ricci ou seja:

$$R \doteq R^\mu{}_\mu \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

E por fim $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia. O lado esquerdo da equação (2.12) está relacionado com a geometria do mundo enquanto o lado direito com a informação sobre massa e energia. Para o vácuo, na ausência de matéria e qualquer outra forma de energia temos que $T_{\mu\nu} = 0$. A teoria da relatividade geral de Einstein é uma teoria não-linear de 10 equações diferenciais acopladas, ou seja é uma teoria muito complexa e de difíceis soluções analíticas. Uma vez com todas as definições em mãos vamos tentar então encontrar algumas das soluções e tentar assim generalizar o equilíbrio hidrostático obtido newtonianamente.

2.2.1 A solução de Schwarzschild

As equações de Einstein se tornam mais fáceis se procuramos por soluções que possuam simetria. A primeira solução exata da relatividade geral foi encontrada por K. Schwarzschild em 1916 à partir das seguintes considerações:

1. campo gravitacional estático,
2. campo esfericamente simétrico,
3. espaço-tempo vazio (exceto em um único ponto),

4. espaço-tempo assintoticamente plano.

Com essas 4 considerações nosso elemento de linha pode ser escrito como:

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = c^2 d\tau^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.19)$$

O fato de $g_{\mu\nu}$ não depender de t é consequência da consideração 1. g_{22} e g_{33} são iguais a η_{22} e η_{33} como consequência de 2. $T_{\mu\nu} = 0$ como consequência de 3 e

$$A(r) \rightarrow c^2 \quad \text{e} \quad B(r) \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

como consequência de 4.

Como consequência de 3 temos então:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0.$$

Contraindo com $g^{\mu\nu}$ obtemos

$$R - 2R = 0 \quad \rightarrow \quad R = 0,$$

logo a equação de Schwarzschild pode ser expressa por:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.21)$$

É inacreditável que uma equação de aparência tão simples possa ser assim tão complicada como dizemos, mas ela o é. A solução de Schwarzschild é de extrema importância, pois ela

vai nos dar uma condição de contorno para a estrela (quando estivermos fora do interior estelar o espaço-tempo se torna novamente vazio e devemos recuperar a métrica de Schwarzschild). Vamos agora resolver a equação (2.21) com bastante cuidado para mostrar todas as sutilezas escondidas por trás da notação tensorial.

Primeiramente devemos nos lembrar de que o tensor de Ricci é dado por:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma, \nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu, \sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}, \quad (2.22)$$

e as conexões métricas são obtidas à partir da equação da geodésica. Aplicando-se então as equações de Euler-Lagrange obtemos:

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \frac{A'}{A} \dot{t} \dot{r} &= 0, \\ \ddot{r} + \frac{A'}{2B} \dot{t}^2 + \frac{B'}{2B} \dot{r}^2 - \frac{r}{B} \dot{\theta}^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{B} \dot{\phi}^2 &= 0, \\ \ddot{\theta} + 2 \frac{1}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 &= 0, \\ \ddot{\phi} + 2 \frac{1}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} &= 0. \end{aligned}$$

onde a linha indica derivação com respeito a r e o ponto em respeito ao tempo próprio. Comparando as equações acima com a equação da geodésica obtemos os seguintes valores para as conexões métrica:

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{A'}{2A}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B}, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta,\end{aligned}$$

pelas equações da geodésica vemos que estes são os únicos termos não-nulos. Com isso em mãos podemos resolver as equações (2.21). Utilizando as equações (2.22) encontramos:

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} = 0, \quad (2.23)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} = 0, \quad (2.24)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} = 0, \quad (2.25)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta = 0, \quad (2.26)$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{sempre que } \mu \neq \nu.$$

Graças as considerações de Schwarzschild as 10 equações originais foram resumidas a 3 equações independentes. Multiplicando a equação (2.23) por B e a equação (2.24) por A e somando essas duas equações obtemos $A'B + AB' = 0$, implicando que $AB = \text{constante}$. Pela quarta condição de Schwarzschild podemos identificar $AB = c^2$, fazendo com que $B = c^2/A$. Substituindo agora o valor de B na equação (2.25) obtemos:

$$rA' + A = c^2, \quad (2.27)$$

que é uma equação de Euler, cuja solução é $r^l + k$. Substituindo em (2.26) obtemos que $l = -1$, fazendo com que:

$$A(r) = (1 + k/r)c^2 \quad \text{e} \quad B(r) = (1 + k/r)^{-1}, \quad (2.28)$$

onde k é uma constante. Sabemos adicionalmente que k deve conter toda informação sobre o gerador do campo gravitacional. No limite de campo fraco sabemos que devemos recuperar a equação de Poisson para o potencial newtoniano. Identificamos então $k = -2GM/c^2$, e a solução de Schwarzschild para o espaço-tempo vazio, estático, somente com uma massa pontual M é:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 - 2GM/c^2r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - 2GM/c^2r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

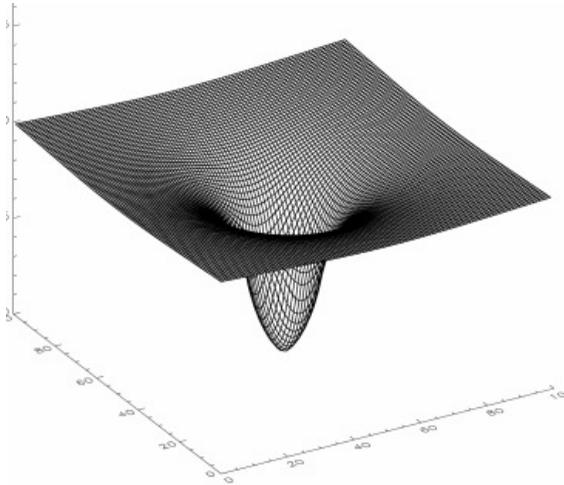


Fig. 2.1: *Representação do espaço-tempo de Schwarzschild em (2 + 1) dimensões*

2.2.2 A equação de Oppenheimer-Volkoff

Considere o tensor momento-energia definido da seguinte forma:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

onde u^μ é a 4-velocidade definida como:

$$u^\mu \doteq \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Queremos descrever a matéria no interior de uma estrela, para isso vamos fazer algumas considerações. Consideraremos nossa estrela como sendo um fluido perfeito, esfericamente simétrico e em equilíbrio hidrostático. Com isso temos que $T^{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$ e $u^\mu = 0$ se $\mu \neq 0$. Devido a simetria deste problema nossa métrica será diagonal como na métrica de Schwarzschild. Podemos defini-la como sendo:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 d\tau^2 = A(r)c^2 dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.31)$$

onde explicitamos agora a constante c^2 no termo g_{00} por questão de conveniência e Ω é o elemento de ângulo sólido tradicional.

Vamos agora construir nosso tensor momento-energia covariante como sendo:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

lembrando que $u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu$ e que $d/d\tau = A^{-1/2} d/dt$ pela equação (2.31) temos então que:

$$T_{\mu\nu} = \frac{g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}}{A} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) v^\alpha v^\beta - pg_{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

onde v^α é a 3-velocidade convencional com $v^0 = 1$.

Com isso temos que as componentes do tensor momento-energia são:

$$T_{00} = A\rho c^4, \quad T_{11} = Bp, \quad T_{22} = r^2p, \quad T_{33} = T_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.34)$$

Antes de avançar, vamos fazer uma pequena mudança na notação [10]. Vamos chamar $A = e^{\Phi}$ e $B = e^{\lambda}$, fazendo com que nossos tensores de Ricci definidos nas equações (2.23) a (2.26) fiquem da seguinte forma:

$$R_{00} = e^{(\Phi-\lambda)} c^2 \left(-\frac{\Phi''}{2} + \frac{\Phi'}{4}(\Phi' + \lambda') - \frac{\Phi'}{r} \right), \quad (2.35)$$

$$R_{11} = \left(+\frac{\Phi''}{2} - \frac{\Phi'}{4}(\Phi' + \lambda') - \frac{\lambda'}{r} \right), \quad (2.36)$$

$$R_{22} = -1 + e^{-\lambda} \left(1 + (\Phi' - \lambda') \frac{r}{2} \right), \quad (2.37)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.38)$$

Devemos também calcular o escalar de curvatura. Da equação (2.18) temos:

$$R \doteq g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} - g^{11} R_{11} - g^{22} R_{22} - g^{33} R_{33}$$

$$R = e^{-\lambda} \left(-\Phi'' + \frac{\Phi'}{2}(\Phi' - \lambda') - \frac{2}{r}(\Phi' - \lambda') - \frac{2}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2}. \quad (2.39)$$

Com isso em mãos obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} &= e^{\Phi}c^2 \left[e^{-\lambda} \left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right], \\
 R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} &= \left(-\frac{\Phi'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}e^{\lambda}, \\
 R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} &= e^{-\lambda}r^2 \left(-\frac{\Phi''}{2} + \frac{\Phi'}{4}(\Phi' - \lambda') - \frac{1}{2r}(\Phi' - \lambda') \right).
 \end{aligned}$$

De acordo então com as equações (2.12) e (2.34) temos que as equações de campo de Einstein são:

$$e^{-\lambda} \left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2, \quad (2.40)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\Phi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} p \quad (2.41)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\Phi''}{2} - \frac{\Phi'}{4}(\Phi' - \lambda') + \frac{1}{2r}(\Phi' - \lambda') \right) = \frac{8\pi G}{c^4} p. \quad (2.42)$$

Podemos agora obter mais informações estudando o fato da 4-divergência do tensor momento-energia ser nula, ou seja:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (2.43)$$

onde $T^{\mu\nu}{}_{;\mu}$ é a derivada covariante do tensor momento-energia (com a soma de Einstein implícita, significa uma 4-divergência covariante).

A derivada covariante é uma generalização da derivada parcial para espaços-tempo curvos. Para um tensor do tipo (2,0) pode ser definida como:

$$A^{\mu\nu}{}_{;\alpha} \doteq A^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\delta}^{\mu} A^{\delta\nu} + \Gamma_{\alpha\delta}^{\nu} A^{\mu\delta}. \quad (2.44)$$

A nulidade da 4-divergência do tensor momento-energia está relacionada com a equação da continuidade, ou de maneira ampla, na conservação da energia em relatividade geral (pelo menos localmente) [10], além de nos retornar a forma relativística da equação de Euler, que é justamente o que nos interessa.

Calculando então a 4-divergência do tensor momento-energia pela regra do produto temos:

$$\begin{aligned} (\rho u^{\mu})_{;\mu} u^{\nu} + \rho u^{\mu} u^{\nu}{}_{;\mu} + (p/c^2) u^{\mu}{}_{;\mu} u^{\nu} + (p/c^2) u^{\mu} u^{\nu}{}_{;\mu} + \\ + (c^{-2} u^{\mu} u^{\nu} - g^{\mu\nu}) p_{;\mu} = 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde a 4-divergência da métrica é nula pela própria construção da derivada covariante e das conexões métricas. Agora explorando o fato da 4-velocidade satisfazer: $u^{\nu} u_{\nu} = c^2$ implica que $(u^{\nu} u_{\nu})_{;\mu} = u^{\nu}{}_{;\mu} u_{\nu} + u^{\nu} u_{\nu}{}_{;\mu} = 0$. Contraindo então a equação (2.45) com u_{ν} e dividindo tudo por c^2 nos retorna:

$$(\rho u^{\mu})_{;\mu} = -(p/c^2) u^{\mu}{}_{;\mu}. \quad (2.46)$$

Substituindo este resultado na equação (2.45) obtemos:

$$(\rho + p/c^2) u^{\nu}{}_{;\mu} u^{\mu} = (g^{\mu\nu} - c^{-2} u^{\mu} u^{\nu}) p_{,\mu}. \quad (2.47)$$

Analizando a equação (2.47) e lembrando da convenção de soma temos que o lado esquerdo só não é nulo para $\mu = 0$ e $\nu = 1$, enquanto o lado direito não o é para $\mu = \nu = 1$. Substituímos também a derivada covariante da pressão pela derivada parcial

uma vez que a pressão é um escalar. A derivada covariante da 4-velocidade para $\mu = 0$ é então:

$$u^\nu{}_{;\mu} = u^\nu{}_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} u^\alpha = \Gamma^1_{00} u^0,$$

a equação (2.47) torna-se então:

$$\begin{aligned} (\rho + p/c^2)\Gamma^1_{00} u^0 u^0 &= g^{11} \frac{dp}{dr}, \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{\Phi'}{2}(\rho c^2 + p). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Estas equações expressam o equilíbrio hidrostático estelar e devemos então, encontrar o valor de Φ' . Porém vamos deixar esta equação de lado por um momento. Está na hora de atacarmos as equações de campo de Einstein. Considere inicialmente a equação (2.40). Quando $\rho = 0$ queremos recuperar a métrica de Schwarzschild, logo vamos impor que:

$$\begin{aligned} e^\lambda &\equiv \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right), \quad \rightarrow \quad (2.49) \\ \rightarrow \lambda' &= \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right) \left[\frac{2GM'(r)}{c^2 r} - \frac{2GM(r)}{c^2 r^2} \right]. \end{aligned}$$

Substituindo as equações (2.49) na equação (2.40) obtemos:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right) \left[\left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{2GM}{c^2 r^2} - \frac{2GM'(r)}{c^2 r} \right) \frac{1}{r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2, \end{aligned}$$

$$-\frac{2GM'(r)}{c^2 r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2,$$

$$\frac{dM}{dr} = \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2}, \quad (2.50)$$

onde usamos a equação (2.9). Esta é uma das nossas equações estruturais. Apesar de derivada dos cálculos da relatividade geral esta equação é, de maneira impressionante, igual a equação (2.11).

Vamos voltar a questão do Φ' . Podemos isolá-lo na equação (2.41) e obter:

$$\Phi' = \left(\frac{8\pi G}{c^4} pr + \frac{1}{r} \right) e^\lambda - \frac{1}{r}.$$

Usando agora a equação (2.49) obtemos:

$$\Phi' = \left(\frac{8\pi G}{c^4} pr + \frac{2GM(r)}{c^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1}. \quad (2.51)$$

Podemos obter agora nossa equação de equilíbrio hidrostático substituindo a equação (2.51) na equação (2.48) resultando em:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho c^2 + p)}{2} \left[\left(\frac{8\pi G}{c^4} pr + \frac{2GM(r)}{c^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \right]$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi p(r)r^3}{M(r)c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \quad (2.52)$$

Esta é a chamada equação de Oppenhemier-Volkoff [9, 10], e expressa o equilíbrio hidrostático de uma estrela totalmente relativística. Junto com a equação (2.50) são as equações mais importantes para descrever o interior estelar. Algumas das características devem ser enfatizadas aqui.

Primeiro, se tomarmos todos os colchetes igual a um, recuperamos o limite newtoniano dado pela equação (2.10). Segundo, todos os termos entre colchetes são positivo e maiores que um, ou seja a relatividade geral atua como se a gravidade newtoniana se tornasse mais forte a cada r . Terceiro, enquanto a pressão newtoniana tem a função de contrabalancear a gravidade, na relatividade geral ela própria é uma fonte adicional de gravitação, isso vem do fato que a fonte de gravitação da relatividade geral não é a massa, mas sim toda e qualquer forma de energia.

Com essas equações em mãos podemos dar continuidade ao nosso estudo de estrelas de nêutrons e buscar algumas equações de estados (EoS) para descrever o seu interior.

Capítulo 3

Modelo de Gás de Fermi Livre

3.1 Distribuição de Fermi-Dirac à temperatura zero

Do modo mais simples possível, podemos considerar uma estrela de nêutrons como sendo um gás de nêutrons não interagentes. Sendo nêutrons partículas de spin $1/2$, elas devem obedecer a estatística de Fermi-Dirac [12]. Então a densidade de estados disponíveis dn por momento k no zero absoluto é:

$$dn = (2S + 1) \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} = (2S + 1) \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (3.1)$$

onde S é o número quântico de spin.

Para nêutrons $S = 1/2$, então:

$$dn = \frac{8\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3.2)$$

A densidade numérica de estados disponíveis é então

$$n = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_f} k^2 dk = \frac{k_f^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad (3.3)$$

onde k_f é o momento de Fermi. Nenhuma partícula no zero absoluto pode ter um momento maior que o momento de Fermi (nem uma energia maior que a energia de Fermi). No espaço dos momentos, a distribuição de partículas é uma esfera de raio k_f . Todos os estados com raio abaixo de k_f estão ocupados, e todos acima estão livres.

A densidade de uma estrela de nêutrons em um determinado elemento de volume é naturalmente a razão da massa contida naquele elemento de volume:

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

Considerando uma estrela formada somente por nêutrons, então a massa de uma determinada região nada mais é que o número de nêutrons contido naquela região vezes a massa do nêutron. Se tivermos N nêutrons em um volume V , então:

$$\rho = \frac{N}{V}m_n = nm_n, \quad \text{ou} \quad n = \frac{\rho}{m_n}. \quad (3.4)$$

Das Equações (3.3) e (3.4) podemos tirar o momento de Fermi em função da densidade e da densidade numérica da seguinte forma:

$$k_f = \hbar \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_n} \right)^{1/3} = \hbar (3\pi^2 n)^{1/3}. \quad (3.5)$$

3.2 Temperatura de Fermi

Até o momento, estamos trabalhando somente no zero absoluto. Sabemos que um gás de nêutrons à temperatura arbitrária T obedece à estatística de Fermi-Dirac que é diferente da que foi apresentada. Então por que escolhemos $T = 0$?

A razão é que a distribuição se aproxima muito da equação (3.2) a menos que $T \sim T_f$, onde T_f é a temperatura de Fermi, definida por:

$$T_f = \frac{E_f}{k_b}, \quad (3.6)$$

e k_b é a constante de Boltzmann.

No limite de baixas energias, com $k_f \rightarrow 0$, temos que a energia

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (k_f c)^2} \approx mc^2.$$

Considerando então m como sendo a massa do nêutron iremos obter uma temperatura de Fermi da ordem de: $T_f \approx 10^{13} K$,

enquanto a temperatura de uma estrela de nêutrons é da ordem de $10^6 K$. Então mesmo para baixas densidades e momentos, a temperatura de Fermi está muito acima da temperatura típica de uma estrela de nêutrons. Logo a distribuição de gás de Fermi a temperatura zero é uma boa aproximação.

3.3 Equação de Estado

Uma equação de estado nada mais é que a relação entre energia (ou densidade de energia) e a pressão.

Sabemos que a energia de uma partícula é dada por:

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (kc)^2}. \quad (3.7)$$

Logo a densidade de energia pela densidade de estados disponíveis é:

$$d\epsilon = E dn.$$

De (3.2) e (3.7) temos:

$$d\epsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + (kc)^2} \cdot \frac{8\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3.8)$$

Então a densidade de energia pode ser obtida a partir da integração da Equação (3.8) [13].

$$\epsilon_{(k_f)} = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_f} \sqrt{(mc^2)^2 + (kc)^2} k^2 dk, \quad (3.9)$$

$$\epsilon_{(k_f)} = \frac{c}{8\pi^2\hbar^3} \left\{ k_f \sqrt{k_f^2 + m^2c^2} (2k_f^2 + m^2c^2) + \right. \\ \left. - m^4c^4 \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{k_f^2 + m^2c^2}}{mc} \right] \right\}. \quad (3.10)$$

Para conseguirmos a equação de estado precisamos relacionar a pressão com a densidade de energia.

Sabemos da primeira lei da termodinâmica que:

$$dU = TdS - pdV. \quad (3.11)$$

Como estamos em $T = 0$ o termo relacionado a entropia não interfere, e assim obtemos que: $p = -dU/dV$.

A energia U nada mais é que: $U = \epsilon V$, e $V = N/n$. Ficamos então com $U = \epsilon N/n$ com N constante.

dU passa então a ser $Nd(\epsilon/n)$ e $dV = Nd(1/n) = -N(1/n^2)dn$.

Obtemos assim a forma da equação de estado dada por:

$$p = -\frac{\partial U}{\partial V} = +n^2 \frac{d}{dn} (\epsilon/n) = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon, \quad (3.12)$$

onde a densidade de energia ϵ é dada pela equação (3.9). Além disso $d\epsilon/dn$ é a grandeza termodinâmica conhecida como potencial químico μ .

Já vimos que $d\epsilon = E dn$, então $E = d\epsilon/dn$. Da equação (3.12) temos:

$$p = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon = n\mu - \epsilon = nE - \epsilon. \quad (3.13)$$

Como $p = p(k)$ iremos diferenciar esta equação em relação ao momento:

$$\frac{dp}{dk} = \frac{dn}{dk} E + n \frac{dE}{dk} - \frac{d\epsilon}{dk}. \quad (3.14)$$

O termo dn/dk é dado pela equação (3.2), n é dado pela equação (3.3), a energia E é dada pela equação (3.7), e $d\epsilon/dk$ é dado pela equação (3.8).

Substituindo essas equações na equação (3.14) vemos que o primeiro e o terceiro termo se cancelam. Derivando E em função de k obtemos então que:

$$\frac{dp}{dk} = \frac{c^2}{3\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{k^4}{\sqrt{(mc^2)^2 + (kc)^2}}, \quad (3.15)$$

$$p(k_f) = \frac{c^2}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_f} \frac{k^4 dk}{\sqrt{(mc^2)^2 + (kc)^2}}, \quad (3.16)$$

$$p(k_f) = \frac{c}{24\pi^2 \hbar^3} \left\{ \frac{2k_f^5 - (mc)^2 k_f^3 - 3(mc)^4 k_f}{\sqrt{(mc)^2 + k_f^2}} + 3(mc)^4 \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{(mc)^2 + k_f^2}}{mc} \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Com um pouco de análise numérica podemos então obter a partir das equações (3.11) e (3.17) uma relação entre a densidade de energia e a pressão. Essa relação é justamente nossa procurada equação de estado $[p(\epsilon)]$. Uma vez com ela em mãos, podemos enfim resolver a Equação de Oppenheimer-Volkoff.

3.4 Estabilidade Estelar

As soluções das equações de Oppenheimer-Volkoff correspondem a uma configuração em equilíbrio hidrostático. Porém, como sabemos, equilíbrio não implica em estabilidade. Devemos então nos perguntar sobre a estabilidade das estrelas de nêutrons. Dada uma pequena perturbação, a estrela se mantém estável?

3.4.1 Princípio de Le Chantelier e a velocidade do som

Sabemos que a pressão e a densidade de energia não são constantes dentro de uma estrela compacta, variando com o raio. Caso um pequeno aumento na densidade de energia ocorra, a variação na pressão irá compensar de tal modo que voltaremos ao equilíbrio hidrostático?

O princípio de Le Chantelier [14] diz em sua forma forte que para obtermos estabilidade a seguinte desigualdade precisa ser satisfeita:

$$\frac{dp}{d\rho} > 0, \quad (3.18)$$

através da equação (2.9) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\rho} &= c^2 \frac{dp}{d\epsilon} = c^2 \frac{dp}{dk} \frac{dk}{d\epsilon} = c^2 \frac{dp/dk}{d\epsilon/dk}, \\ \frac{dp/dk}{d\epsilon/dk} &= \frac{1}{3} \frac{k^2}{(mc)^2 + k^2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

que é sempre positivo, implicando em estabilidade.

Adicionalmente sabemos que a quantidade $dp/d\rho$ nada mais é que o quadrado da velocidade do som [15]. Para não violar o princípio da causalidade devemos também requerer que a equação (3.19) seja sempre menor que um. Novamente, neste caso isso é satisfeito implicando que a causalidade é mantida para todo momento de Fermi finito. Essas condições de estabilidade possuem a mesma forma funcional sempre que tivermos um gás de Fermi livre.

3.4.2 Estabilidade, oscilações radiais e existência de uma massa máxima

Para pequenas alterações no volume da estrela, como oscilações radiais, a estrela ainda mantém seu equilíbrio hidrostático?

Vamos considerar primeiramente estrelas newtonianas politrópicas, isto é, estrelas que são descritas por uma equação de estado do tipo $P = K\epsilon^\gamma$ [13]. Para estrelas de nêutrons, no limite de baixas densidades, a pressão e a densidade de energia

se tornam não-relativísticas e ela se comporta como uma estrela politrópica com $\gamma = 5/3$. No limite de altas densidades a estrela se torna ultra relativística com $\gamma = 1$.

Considere agora uma estrela com as seguintes grandezas físicas [10]:

- raio R
- massa M
- densidade média $\bar{\rho} = 3M/(4\pi R^3)$
- pressão média \bar{p}
- índice adiabático médio $\gamma = (\bar{\rho}/\bar{p})(\partial\bar{p}/\partial\bar{\rho})$ [15]

Vamos requerer agora que nossa estrela saia do seu equilíbrio hidrostático e realize pequenas oscilações. Para obtermos oscilações estáveis devemos ter uma força do tipo restauradora, ou seja:

$$M\delta\ddot{R} = -k\delta R, \quad (3.20)$$

onde k é a nossa “constante elástica”. k deve ser uma grandeza estritamente positiva, e devemos determiná-la em termos das quantidades físicas conhecidas.

As únicas forças que atuam na nossa estrela é a força gravitacional e a pressão de degenerescência que contrabalança a gravitação. Podemos definir a densidade de força gravitacional como sendo:

$$f_g = \frac{F}{V} = G\frac{\bar{\rho}M}{R^2} = \frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}^2 R. \quad (3.21)$$

Para a pressão, temos que a densidade de força é:

$$f_p = \nabla p \simeq \frac{\bar{p}}{R}. \quad (3.22)$$

Quando a estrela oscila radialmente, seu raio deve variar por uma quantidade δR , fazendo como que o raio estelar mude $R \rightarrow R + \delta R$, causando uma variação na densidade e na pressão da seguinte forma:

$$\bar{\rho} \rightarrow \bar{\rho} + \delta\bar{\rho},$$

$$\bar{\rho} + \delta\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi(R + \delta R)^3},$$

para $R \gg \delta R$ podemos utilizar a expansão binomial obtendo:

$$\bar{\rho} + \delta\bar{\rho} \simeq \bar{\rho} - 3\bar{\rho}\frac{\delta R}{R}. \quad (3.23)$$

Para a pressão, vamos estudar como ela se comporta a partir de uma variação na densidade pela definição do índice adiabático médio γ . Primeiramente aproximamos $(\partial\bar{p}/\partial\bar{\rho})$ tal que:

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{\rho}} \simeq \frac{\delta\bar{p}}{\delta\bar{\rho}},$$

isso implica em:

$$\delta\bar{p} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{\rho}} \delta\bar{\rho} = \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)\gamma\delta\bar{\rho} = -3\gamma\bar{p}\left(\frac{\delta R}{R}\right). \quad (3.24)$$

Vamos nos concentrar agora na variação das forças. Para uma pequena variação δR no raio estelar, temos que a densidade de força da pressão de degenerescência varia da seguinte forma:

$$\delta f_p = \frac{\bar{p} + \delta\bar{p}}{R + \delta R} - \frac{\bar{p}}{R} \simeq \frac{\delta\bar{p}}{R} - \left(\frac{\bar{p}}{R^2} \right) \delta R + O(\delta^2),$$

através da expansão binomial. Usando agora o resultado da equação (3.24):

$$\delta f_p = \left(\frac{-3\gamma\bar{p}}{R} \right) \frac{\delta R}{R} - \left(\frac{\bar{p}}{R^2} \right) \delta R = -(3\gamma + 1)f_p \left(\frac{\delta R}{R} \right). \quad (3.25)$$

Para a força gravitacional temos:

$$\delta f_g = \frac{4\pi G}{3} (\bar{\rho} + \delta\bar{\rho})^2 (R + \delta R) - \frac{4\pi G}{3} \bar{\rho}^2 R \simeq \frac{4\pi G}{3} (\bar{\rho}^2 \delta R + 2\bar{\rho} \delta\bar{\rho} R),$$

onde novamente usamos a expansão binomial. Usando agora os dados da equação (3.23) obtemos:

$$\delta f_g = \frac{4\pi G}{3} \bar{\rho}^2 (-5\delta R) = -5f_g \left(\frac{\delta R}{R} \right). \quad (3.26)$$

Lembrando que todo nosso cálculo foi construído a partir do equilíbrio hidrostático, impomos que $f_g = f_p$. A densidade de força resultante é:

$$\delta f_g - \delta f_p = 3 \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) f_g \frac{\delta R}{R}. \quad (3.27)$$

A partir da segunda lei de Newton e das equações (3.20) e (3.21) obtemos que:

$$k = 4\pi GM \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) \bar{\rho}. \quad (3.28)$$

Logo para oscilações estáveis precisamos ter $\gamma > 4/3$. Como já dissemos, na aproximação politrópica nossa estrela tem índice adiabático $\gamma = 5/3$ para baixas densidades, chegando a $\gamma = 1$ no limite ultra relativístico, que como foi visto não pode ser estável fazendo com que haja um colapso gravitacional. Isso implica na existência de um momento de Fermi máximo que as partículas constituintes da estrela podem ter sem que esta se torne instável.

É muito difícil determinar qual é o momento de Fermi máximo tal que, se aproximarmos nossa equação de estado por uma equação politrópica, γ seja igual a $4/3$. Precisamos então encontrar uma formulação equivalente que não envolva uma dependência explícita em γ .

Começaremos analisando o equilíbrio hidrostático da estrela. Para manter o equilíbrio devemos ter $f_g = f_p$, e das equações (3.21) e (3.22) temos:

$$\frac{\bar{p}}{R} = \frac{GM}{R^2} \bar{\rho} \quad \rightarrow \quad \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}R} = \frac{GM}{R^2}. \quad (3.29)$$

Considerando agora que a pressão para uma estrela politrópica é do tipo $P = K\epsilon^\gamma = K\bar{\rho}^\gamma$, onde usamos a equação (2.9) e K é uma constante que irá absorver todas as outras constantes sempre que conveniente, temos de acordo com (3.29):

$$K\bar{\rho}^{\gamma-1} = \frac{M}{R}, \quad (3.30)$$

e lembrando que:

$$M = \frac{4\pi}{3}R^3\bar{\rho} \quad \rightarrow \quad R = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{M}{\bar{\rho}} \right)^{1/3},$$

implicando em:

$$K\bar{\rho}^{\gamma-1} = M \left(\frac{\bar{\rho}}{M} \right)^{1/3} = M^{2/3}\bar{\rho}^{1/3}. \quad (3.31)$$

Temos então uma expressão para massa dada por:

$$M = K\epsilon^{3/2(\gamma-4/3)}, \quad (3.32)$$

onde usamos novamente a equação (2.9) e K absorveu as várias constantes que apareceram. Se calcularmos agora $\partial M(\epsilon)/\partial\epsilon = 0$ obtemos que para isso ser satisfeito devemos ter $\gamma = 4/3$. Ora esse valor é justamente nosso limiar de estabilidade expresso pela equação (3.28). Logo a condição de estabilidade em relação a oscilações radiais pode ser dada por [7]:

$$\frac{dM(\epsilon_c)}{d\epsilon_c} > 0, \quad (3.33)$$

ou seja, se aumentarmos um pouco a densidade de energia central ϵ_c a massa também deve aumentar para que (3.33) se mantenha. Isso implica que temos uma massa máxima que é o ponto em que $dM(\epsilon_c)/d\epsilon_c = 0$. Como esse ponto é instável, qualquer aumento na densidade central gera um colapso gravitacional,

mostrando que um colapso pode ocorrer ainda que a densidade permaneça finita.

Devemos também lembrar que não trabalhamos na aproximação politrópica, além do mais nossas estrelas de nêutrons não são newtonianas, e sim completamente relativísticas, descritas pelas equações (2.50) e (2.52). O ponto importante aqui é que nossa condição de estabilidade (3.33) deve sempre ser satisfeita, mesmo no domínio da relatividade geral.

3.5 Resultados

A partir da resolução computacional das equações (2.50) e (2.52) nesse formalismo de um gás de nêutrons livres obtemos a seguinte relação para massa e raio para densidades numéricas centrais n_c entre 0.08 a $3.707 fm^{-3}$ (1.336×10^{17} a $6.178 \times 10^{18} kg/m^3$), obtemos então os seguintes resultados:

	Massa (M_{\odot})	Raio (km)	n_c (fm^{-3})
Massa Máxima	0.710	8.22	2.12

Essa densidade é 13.8 vezes maior que a densidade da saturação nuclear, ainda que o valor experimentalmente obtido da saturação nuclear varie de 0.148 à 0.170 fm^{-3} [7].

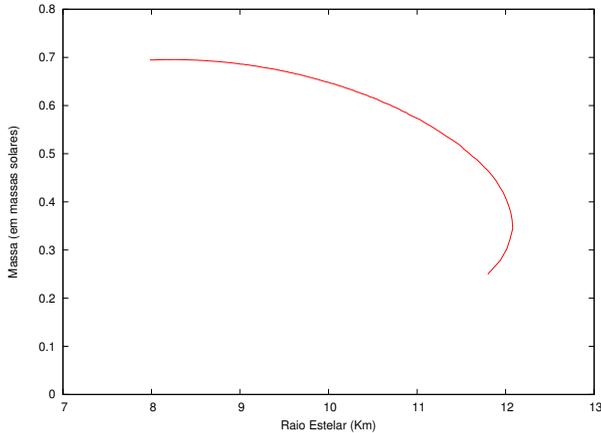


Fig. 3.1: *Relação Massa/Raio em função da densidade central*

Para valores de densidade numérica superiores à n_c encontrado, a expressão $dM(\epsilon_c)/d\epsilon_c$ passa a ter valores negativos, contrariando a condição de estabilidade dada pela equação (3.33) mostrando que todos valores obtidos com densidades superiores são instáveis e portanto devem colapsar formando provavelmente buracos negros.

A partir dos dados obtidos numericamente percebemos que um gás de nêutrons livres não pode descrever uma estrela de nêutrons real, pois dados observacionais indicam massas entre 1.0 e 2.0 massas solares. Devemos então incluir outros termos em nossa equação de estado para que passemos a reproduzir

resultados que estejam de acordo com aqueles obtidos através da observação desses objetos.

3.6 Estrelas de nêutrons atômicas

Estrelas de nêutrons não podem ser constituídas somente de nêutrons. A razão é simples: nêutrons livres devem decair devido a interação fraca em prótons, elétrons e neutrinos [16] através da seguinte expressão:

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}, \quad (3.34)$$

com um tempo de vida médio de aproximadamente 15 minutos. Algo deve então inibir esse decaimento (chamado de decaimento beta) e, o que o faz, é a presença de prótons e elétrons no interior da estrela.

O raciocínio é bem simples: Mesmo que a reação acima seja espontânea (a massa do nêutron sendo maior que a massa do seu produto), ela não pode continuar a ocorrer indefinidamente. Prótons e elétrons também são férmions e, uma vez criados, eles irão preencher os estados de menor valor energético disponíveis obedecendo ao princípio da exclusão de Pauli. Quando a energia dos prótons (que é dominante pela sua maior massa) for então superior à energia dos nêutrons, esses estarão inibidos a decair. A presença de elétrons no interior estelar é requerido para manter a neutralidade elétrica da estrela. Esse é o modo mais simples de corrigir o problema da estabilidade nuclear. Uma vez que essas estrelas serão constituídas pelas mesmas partículas que

constituem os átomos, as chamaremos de estrelas de nêutrons atômicas.

3.7 Neutralidade elétrica e equilíbrio químico

Para que a estrela mantenha sua neutralidade elétrica, vamos impor que $N_p = N_e$. Pelas equações (3.3) e (3.4) vemos que o número de partículas é determinado pelo momento de Fermi das mesmas. Logo se queremos igualdade numérica entre prótons e elétrons, vamos requerer que:

$$k_{f_p} = k_{f_e}. \quad (3.35)$$

Além da neutralidade de carga vamos querer também que a estrela esteja em equilíbrio químico, ou seja, se um nêutron decair vamos requerer que um próton e um elétron (além de um neutrino, cuja interação com a matéria pode ser desprezada) tome o seu lugar. Esse equilíbrio, como o nome sugere, é matematicamente expresso pela igualdades dos potenciais químicos:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e. \quad (3.36)$$

Uma vez que a equação (3.36) seja satisfeita, dizemos que nossa estrela está em equilíbrio beta. Sabemos da equação (3.13) que $\mu = E = \sqrt{(mc^2)^2 + (k_{fc})^2}$.

Podemos então expressar o equilíbrio beta em termo dos momentos de Fermi:

$$\sqrt{(m_n c^2)^2 + (k_{f_n} c)^2} = \sqrt{(m_p c^2)^2 + (k_{f_p} c)^2} + \sqrt{(m_e c^2)^2 + (k_{f_e} c)^2}. \quad (3.37)$$

Utilizando a equação (3.35) e o fato que $m_e c \ll k_{f_p}$ podemos isolar k_{f_p} . Com um pouco de manipulação algébrica obtemos:

$$k_{f_p} = \frac{k_{f_n}^2 + (m_n c)^2 - (m_p c)^2}{2\sqrt{k_{f_n}^2 + (m_n c)^2}}. \quad (3.38)$$

3.8 Equação de Estado

Vamos agora construir uma equação de estado para a matéria em equilíbrio químico e com carga total zero. O que faremos é simplesmente generalizar as equações (3.11) e (3.17). Como todas as partículas são férmions todas elas terão a mesma forma funcional tanto para a energia como para a pressão. A única diferença são os valores numéricos para a massa das partículas e seus momentos de Fermi que estão relacionados pelas equações (3.35) e (3.38).

Seja um conjunto de partículas rotuladas pela letra j ($j = p, e^-, n$), a densidade de energia dessas partículas será:

$$\epsilon_{(k_{f_j})} = \frac{c}{8\pi^2 \hbar^3} \left\{ k_{f_j} \sqrt{k_{f_j}^2 + m_j^2 c^2} (2k_{f_j}^2 + m_j^2 c^2) + \right.$$

$$-(m_j c)^4 \ln \left[\frac{k_{f_j} + \sqrt{k_{f_j}^2 + (m_j c)^2}}{m_j c} \right] \}. \quad (3.39)$$

Do mesmo modo a pressão das partículas j é:

$$p(k_{f_j}) = \frac{c}{24\pi^2 \hbar^3} \left\{ \frac{2k_{f_j}^5 - (m_j c)^2 k_{f_j}^3 - 3(m_j c)^4 k_{f_j}}{\sqrt{(m_j c)^2 + k_{f_j}^2}} + \right. \\ \left. + 3(m_j c)^4 \ln \left[\frac{(k_{f_j} + \sqrt{(m_j c)^2 + k_{f_j}^2})}{m_j c} \right] \right\} \quad (3.40)$$

A energia (pressão) total é a soma das energias (pressões) individuais, ou seja

$$\epsilon_{total} = \sum_j \epsilon_j, \quad (3.41)$$

$$p_{total} = \sum_j p_j, \quad (3.42)$$

por fim, a partir da análise numérica das equações (3.41) e (3.42) podemos construir uma nova equação de estado.

3.9 Resultados

As condições de estabilidade estelar são as mesmas requeridas no capítulo anterior. Uma vez que a forma funcional para um gás de

Fermi livre se mantém inalterada, o princípio de Le Chantelier e a causalidade ainda são válidos.

Resolvendo novamente as equações (2.50) e (2.52) agora com respeito a equação de estado dado por (3.41) e (3.42) e impondo o equilíbrio beta discutido acima obtemos:

	Massa (M_{\odot})	Raio (km)	n_c (fm^{-3})
Massa Máxima	0.698	8.25	2.11

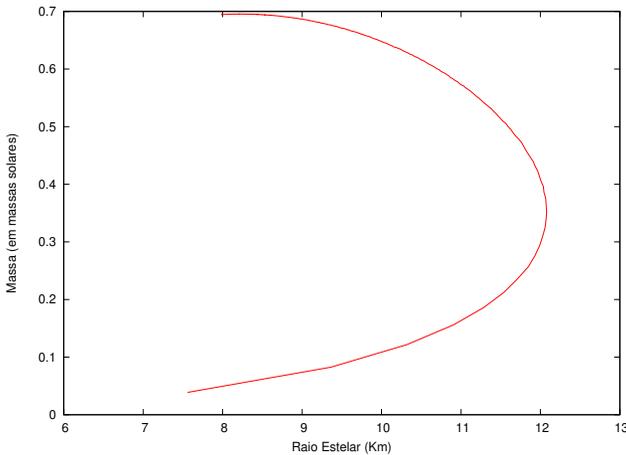


Fig. 3.2: *Relação Massa/Raio em função da densidade central*

Neste caso densidades acima de $2.11 fm^{-3}$ não podem gerar uma estrela estável. Os resultados obtidos para uma estrela

em equilíbrio químico são muito parecidos com àqueles obtidos para o gás de nêutrons livres. Isso já era esperado, visto que não incluímos nenhum termo de interação, além da grande predominância de nêutrons no interior estelar. Porém devemos notar o fato que a inclusão de mais partículas causa uma redução da massa máxima. No mais, percebemos que um gás de Fermi livre em equilíbrio beta ainda não é bom o bastante para descrever uma estrela de nêutrons real.

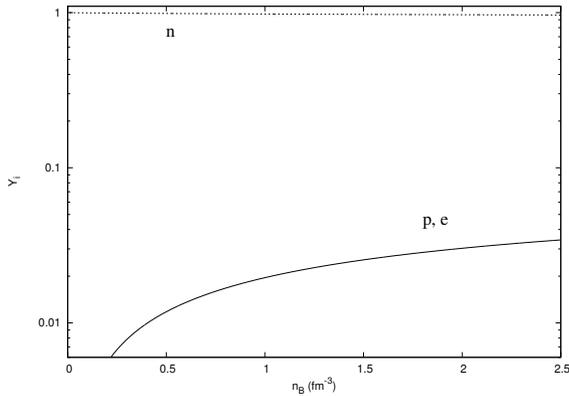


Fig. 3.3: *População relativa das partículas em função da densidade estelar*

Podemos perceber, pelo gráfico acima, que a população de prótons e elétrons no interior estelar é pouco significativa no formalismo de um gás de Fermi livre.

Capítulo 4

Interação Hadrônica: a QHD-I

Até agora temos tentado descrever uma estrela de nêutrons, e as equações de estado obtidas deste trabalho não têm descrito estrelas compatíveis com aquelas observadas na natureza. A razão disso é que as equações de estado utilizadas até agora não levam em conta efeitos devido a interação nuclear dos constituintes estelares. E, se quisermos descrever estrelas de nêutrons reais, devemos incorporar a interação nuclear às nossas equações de estado.

A razão disso é que a força de interação nuclear é extremamente forte (de fato a força de interação nuclear tem um nome bastante sugestivo, força forte). Consideremos, por exemplo, o núcleo do átomo de hélio, constituído por dois prótons e dois nêutrons, cujos prótons estão separados por uma distância de aproximadamente 1 fm . Vemos que existe neste sistema uma força de repulsão coulombiana da ordem de 200N !! Mas mesmo

assim o núcleo de hélio não só é estável como é necessária uma grande quantidade de energia para separar os seus constituintes.

Propriedades da matéria nuclear

Se queremos incluir as interações nucleares precisamos construir uma teoria que descreva as características observadas experimentalmente. Algumas das principais características são [17]:

1. Força atrativa: A força nuclear forte é basicamente atrativa, exceto a curtíssimas distâncias.
2. Curto alcance: Através de experimentos de espalhamento pode se estimar o alcance da força nuclear forte. Os resultados sugerem uma força de alcance de apenas poucos Fermi.
3. Dependência do spin: Experimentos relativos a seção de choque do espalhamento nêutron-próton mostrou que o estado de singleto de spin é incapaz de formar estados ligados, sendo que o estado de tripleto possui um único estado ligado possível: o deutério
4. Independência de carga: A força de atração entre dois nucleons é a mesma, independente da carga, sendo que o princípio da exclusão de Pauli é o responsável por limitar o número de estados disponíveis para dois nucleons idênticos.

Do ponto de vista teórico, a cromodinâmica quântica (QCD) representa a descrição mais profunda da interação forte e seria

a ferramenta imediata na descrição das estrelas de nêutrons. No entanto, o comportamento altamente não linear da QCD na escala de energia hadrônica impossibilita qualquer cálculo teórico, o que nos leva a procura de um modelo efetivo que descreva as características fenomenológicas da matéria nuclear.

4.1 Hadrodinâmica Quântica I

Em meados dos anos 70, J. D. Walecka propôs um modelo relativístico capaz de descrever o comportamento da matéria nuclear simétrica e de núcleos finitos. Este modelo ficou então conhecido por modelo de Walecka, ou QHD-I (Hadrodinâmica Quântica-I) [18]. Baseado em uma teoria quântica de campos totalmente relativística, descreve a interação entre bárions mediada por mésons escalares e vetoriais. Nele, os mediadores responsáveis pelo acoplamento entre os nucleons são o méson escalar σ e o méson vetorial ω . Na aproximação estática, ou seja, onde há invariância rotacional e translacional, esta interação tem a forma do potencial de Yukawa:

$$V_{eff} = \frac{g_v^2}{4\pi} \frac{e^{-m_v r}}{r} - \frac{g_s^2}{4\pi} \frac{e^{-m_s r}}{r}, \quad (4.1)$$

onde m_v e m_s são as massas dos mésons vetorial e escalar respectivamente, e g_v e g_s são as constantes de acoplamento entre os mésons e os nucleons. Há basicamente, duas interações que se contrabalançam no interior de um núcleo: uma repulsiva a pequenas distâncias, representada na expressão do potencial pelo primeiro termo, e outra atrativa a grandes distâncias, represen-

tada pelo segundo termo. A forma do potencial efetivo pode ser vista na figura (4.1) [18]:

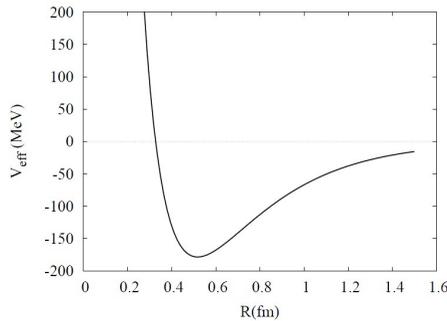


Fig. 4.1: *Potencial Efetivo em função da distância: O potencial é atrativo a grandes distâncias e repulsivo à pequenas.*

4.1.1 O formalismo da QHD-I

Uma vez que a Hadrodinâmica Quântica é uma teoria de campos relativística, precisamos construir um formalismo que seja invariante frente as transformações de Lorentz e que retorne todos os resultados dos capítulos anteriores se removermos os mésons da teoria.

A maneira mais usual de se conseguir isso é trabalhar com uma lagrangiana, ou densidade lagrangiana \mathcal{L} , relativística, tal que as variáveis envolvidas sejam os próprios campos. Com isso

garantimos que nossa teoria seja uma teoria de campos invariante sobre transformações de Lorentz.

Por fim, construímos nossa densidade lagrangiana tal que se retirarmos os mésons recuperamos a lagrangiana para partículas livre (equanto as lagrangianas clássicas são construídas a partir das expressões das energias cinética e potencial, numa teoria de campos relativística devemos construir nossa lagrangiana “a mão” tal que ela retorne as equações de movimento desejadas quando aplicarmos as equações de Euler-Lagrange).

Para o modelo de Walecka, ou QHD-I, a lagrangiana possui a seguinte forma [7]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_v\omega^\mu) - (M - g_s\sigma)]\psi + \\ & + \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_s^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2\omega_\mu\omega^\mu, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde M , m_s e m_v são as massas, assim como ψ , σ e ω^μ são os campos do bárion, do méson escalar e do méson vetorial respectivamente. $\Omega_{\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico definido como: $\Omega_{\mu\nu} \doteq \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$. Os coeficientes γ_μ são as matrizes de Dirac [16] e ψ é um spinor com quatro elementos da forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}, \quad \text{com } u_{A(B)} = \begin{pmatrix} u_{1(3)} \\ u_{2(4)} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Além disso devemos salientar que deste ponto em diante vamos trabalhar no sistema de unidades naturais: $c = \hbar = 1$.

Para entendermos melhor esta lagrangiana é conveniente que a analisemos por partes. Temos então:

- $i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - \bar{\psi}M\psi$: lagrangiana para partículas livres de spin 1/2,
- $\frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_s^2\sigma^2)$: lagrangiana para partículas livres de spin 0,
- $-\frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2\omega_\mu\omega^\mu$: lagrangiana para partículas livres de spin 1
- $-g_v\bar{\psi}\vec{\gamma}\gamma_\mu\omega^\mu\psi$: termo associado à interação entre os bárions mediados pelo méson vetorial ω ,
- $\bar{\psi}(g_s\sigma)\psi$: termo associado à interação entre os bárions mediados pelo méson escalar σ . Este termo também está associado à variação da massa efetiva dos bárions.

De fato, se olharmos para a equação (4.2) veremos que podemos definir a massa efetiva dos bárions M^* como sendo:

$$M^* \doteq M - g_s\sigma. \quad (4.4)$$

4.1.2 Equações de movimento

Dada a lagrangiana de Walecka (4.2), aplicando as equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha q_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (4.5)$$

para cada um dos campos mesônicos, obtém-se as seguintes equações de movimento:

campo fermiônico:

Aplicando $E-L$ (Euler-Lagrange) em relação ao campo $\bar{\psi}$ trivialmente obtemos:

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_v\omega^\mu) - (M - g_s\sigma)]\psi = 0. \quad (4.6)$$

campo do méson escalar

Sabemos primeiramente que $\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma = \eta_{\mu\nu}\partial^\mu\sigma\partial^\nu\sigma$. Lembrando da convenção de soma de Einstein e da definição do tensor métrico de Minkowski (2.17), podemos escrever este termo como sendo $\eta_{\mu\mu}(\partial^\mu\sigma)^2$, aplicando $E-L$ obtemos:

$$(\square^2 + m_s^2)\sigma = g_s\bar{\psi}\psi, \quad (4.7)$$

onde \square^2 é o operador d'Alembertiano.

campo do méson vetorial

Chamando $\omega_\mu\omega^\mu$ de $\eta_{\mu\mu}(\omega^\mu)^2$ e $\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu}$ de $\eta_{\mu\mu}\eta_{\nu\nu}(\Omega^{\mu\nu})^2$ e, lembrando que Ω é um tensor de segunda ordem antissimétrico temos:

$$\partial^\nu\Omega_{\mu\nu} + m_v^2\omega_\mu = g_v\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \quad (4.8)$$

Podemos agora procurar por soluções do modelo de Walecka.

4.1.3 A aproximação de campo médio

Vamos, neste trabalho, procurar por soluções na chamada aproximação de campo médio para resolver as equações que resultam

da lagrangiana de Walecka. Vimos que o modelo da QHD-I descreve hádrons interagentes através de troca de mésons vetoriais e escalares. Na aproximação de campo médio vamos considerar que a densidade bariônica é grande o suficiente para que as interações bárion-bárion sejam desconsideradas, e o único efeito físico relevante é a interação dos bárions com um campo médio comum a todos. Com isso nosso problema de muitos corpos se reduz ao problema de uma partícula sujeita a um potencial efetivo. Formalmente isso significa que nossos campos mesônicos que eram uma das variáveis da lagrangiana de Walecka podem agora ser substituídos pelos seus valores esperados. Além do mais, pela simetria esférica do sistema temos que as componentes espaciais do nosso 4-vetor ω^μ devem ser nulas, restando somente a parte temporal. Podemos expressar a aproximação de campo médio da seguinte forma:

$$\sigma(x^\mu) \rightarrow \sigma_0 \doteq \langle \sigma \rangle, \quad \text{e,} \quad \omega^\nu(x^\mu) \rightarrow \omega^0 \doteq \delta_{0\nu} \langle \omega^\nu \rangle, \quad (4.9)$$

e a lagrangiana de Walecka para o campo médio fica então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = \bar{\psi}[\gamma_\mu i\partial^\mu - g_v\gamma_0\omega^0 - (M - g_s\sigma_0)]\psi + \\ - \frac{1}{2}m_s^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2\omega_0^2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

as equações de movimento ficam:

$$[\gamma_0(i\partial^0 - g_v\omega^0) - i\gamma_j\partial^j - M^*]\psi = 0, \quad (4.11)$$

$$\sigma_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad (4.12)$$

$$\omega_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle, \quad (4.13)$$

com [7, 18]:

$$n_s \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \sum_B \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{fB}} \frac{M^* k^2 dk}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}, \quad (4.14)$$

$$n \equiv \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle = \sum_B \frac{k_{fB}^3}{3\pi^2} \quad (4.15)$$

onde n_s é chamada de densidade escalar, n é nossa tradicional densidade numérica e o somatório indica soma sob todos os bárions. Substituindo esses dados na equação (4.4) obtemos:

$$M^* = M - \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{1}{\pi^2} \sum_B \int_0^{k_{fB}} \frac{M^* k^2 dk}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}, \quad (4.16)$$

que é uma equação auto-consistente e deve ser resolvida numericamente.

4.2 Equação de Estado para a QHD-I

Como já dissemos antes, descrever as características de uma estrela de nêutrons repousa em encontrar uma equação de estado

e resolver as equações de Oppenheimer-Volkoff relativas a esta EoS. Vamos procurar então uma equação de estado para hádrons interagentes no formalismo da QHD-I. A princípio poderíamos continuar no formalismo de teoria de campos e densidades lagrangianas, mas devido a aproximação de campo médio podemos voltar ao formalismo da mecânica estatística. Os campos fermiônicos e bosônicos das densidades lagrangianas na teoria de campos [17] se tornam nossas antigas funções de onda da mecânica estatística [12]. Vamos então obter a solução da equação de Dirac dada pela equação (4.11). Das regras de quantização temos:

$$E = k^0 = i\partial^0, \quad \text{e} \quad k^j = -i\partial^j$$

e, expressando a equação em notação matricial temos:

$$\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) (E - g_v \omega_0) - \left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{array} \right) \cdot \mathbf{k} + \right. \\ \left. - \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \cdot M^* \right) \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0, \quad (4.17)$$

$$\left(\begin{array}{cc} (E - g_v \omega_0 - M^*) & -\sigma \cdot \mathbf{k} \\ \sigma \cdot \mathbf{k} & -(E - g_v \omega_0 + M^*) \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0, \quad (4.18)$$

que é uma equação matricial algébrica. Se chamarmos $E - g_v \omega_0$ de E^* a equação (4.18) assume a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} (E^* - M^*) & -\sigma \cdot \mathbf{k} \\ \sigma \cdot \mathbf{k} & -(E^* + M^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0, \quad (4.19)$$

que corresponde equação de Dirac para uma partícula livre [16], porém neste caso com massa e energia efetiva. Sua solução é trivial:

$$E^* = \sqrt{k^2 + M^{*2}} \quad \rightarrow \quad E = \sqrt{k^2 + M^{*2}} + g_v \omega_0 \equiv \mu \quad (4.20)$$

onde μ é o potencial químico. Podemos ver que enquanto o méson σ é responsável por uma variação da massa efetiva, o méson ω é responsável por uma variação na energia efetiva. Utilizando as equações (3.2) e (4.20) obtemos a densidade de energia bariônica como sendo:

$$\epsilon = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_f} [\sqrt{k^2 + M^{*2}} + g_v \omega_0] k^2 dk, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{(k_f)} = & \frac{1}{8\pi^2} \left\{ k_f \sqrt{k_f^2 + M^{*2}} (2k_f^2 + M^{*2}) \right. \\ & \left. - M^{*4} \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{k_f^2 + M^{*2}}}{M^*} \right] \right\} + \frac{g_v \omega_0 k_f^3}{3\pi^2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para a pressão utilizaremos a primeira lei da termodinâmica (3.11) e também a relação dada por (3.14), obtendo:

$$\frac{dp}{dk} = \frac{1}{3\pi^2} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \quad (4.23)$$

$$p(k_f) = \frac{1}{24\pi^2} \left\{ \frac{2k_f^5 - M^{*2}k_f^3 - 3M^{*4}k_f}{\sqrt{M^{*2} + k_f^2}} + 3M^{*4} \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{M^{*2} + k_f^2}}{M^*} \right] \right\} \quad (4.24)$$

Conseguimos assim a densidade de energia e a pressão para bárions interagentes. Porém nossa estrela, além dos bárions, agora possui também mésons massivos que devem contribuir para a energia total. Podemos então calcular a densidade de energia para os mésons, lembrando que os mésons são bósons e, portanto obedecem a distribuição de Bose-Einstein [12], e depois calcular a pressão através das relações termodinâmicas. Porém, para os mésons existe uma formulação muito mais simples. A densidade de energia e pressão para os mésons são dadas por [7]:

$$\epsilon_m = -\langle \mathcal{L} \rangle, \quad p_m = \langle \mathcal{L} \rangle,$$

$$\epsilon_m = \frac{1}{2}m_s^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_v^2\omega_0^2 \quad (4.25)$$

$$p_m = -\frac{1}{2}m_s^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2\omega_0^2 \quad (4.26)$$

onde o subscrito m indica que isso é válido para os mésons.

4.3 Aplicação às estrelas atômicas

Nossa estrela atômica é composta por prótons nêutrons e elétrons em equilíbrio beta e eletricamente neutra. Vamos então construir uma equação de estado para essa estrela.

A densidade de energia e pressão para os prótons e nêutrons são dados pelas equações (4.22) e (4.24); para os elétrons pelas equações (3.39) e (3.40); e para os mésons pelas equações (4.25) e (4.26). Os potenciais químicos dos prótons e nêutrons são dados pela equação (4.20) e dos elétrons pela equação (3.7). A neutralidade de carga e equilíbrio beta são dados pelas equações (3.35) e (3.36) e, são essas equações que relacionam os momentos de Fermi das partículas que constituem nossa estrela. Com isso em mãos temos que a equação de estado é dada por:

$$\epsilon = \sum_j \epsilon_j, \quad p = \sum_j p_j, \quad (4.27)$$

onde $j = j(p, n, e, m)$ onde m indica os mésons.

4.3.1 Estabilidade Estelar

Dada nossa equação de estado precisamos verificar se uma estrela construída à partir dela é ou não estável. Primeiramente nossa estrela será estável com respeito às oscilações radiais sempre que satisfizer a condição descrita pela equação (3.33). Precisamos agora verificar o princípio de Le Chantelier e a causalidade. Neste caso temos que:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{3} \frac{k^2}{(k^2 + M^{*2}) + g_v \omega_0 \sqrt{k^2 + M^{*2}}}, \quad (4.28)$$

esta quantidade está sempre entre zero e um. Logo esta equação de estado é estável.

4.4 Resultados

Resolvendo as equações (2.50) e (2.52) para a equação de estado expressa pelas equações (4.27) obtemos os seguintes resultados:

	Massa (M_{\odot})	Raio (km)	n_c (fm^{-3})
Massa Máxima	2.57	11.99	0.793

A primeira coisa que notamos nesse modelo é que ele é capaz de descrever estrelas de nêutrons reais. De fato, o raio das estrelas de nêutrons observadas é de aproximadamente 12 km, enquanto a massa observada varia de 1.0 a 2.0 massas solares. Porém nada impede que existam estrelas de nêutrons com massas maiores. A massa máxima encontrada neste modelo possui um bom valor, uma vez que ela é superior à massa da mais massiva estrela de nêutrons já encontrada até hoje que é de 2.0 massas solares [19], e menor que o máximo valor teórico de massa que uma estrela de nêutrons pode ter que é de 3.2 massas solares [20]. Em relação à população de partículas, vemos que a interação nuclear do modelo QHD-I faz com que o número de prótons e elétrons aumente bastante no interior estelar. Enquanto que para estrelas atômicas sem interação nuclear a fração

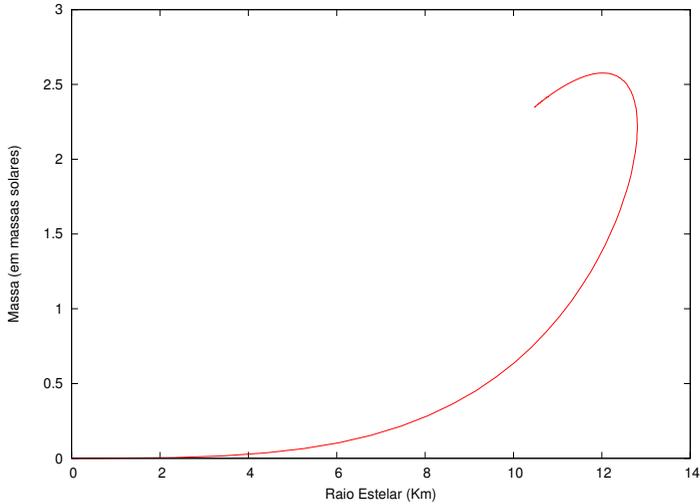


Fig. 4.2: *Relação Massa/Raio em função da densidade central*

de prótons e elétrons nunca era superior a 5 %, com a QHD-I esse valor chega a 10 %. Também vemos que a densidade central para a massa máxima diminuiu bastante, passando de 2.11 para 0.793 fm^{-3} . Novamente estrelas com densidades superiores a essa não são estáveis por não satisfazer a equação (3.33).

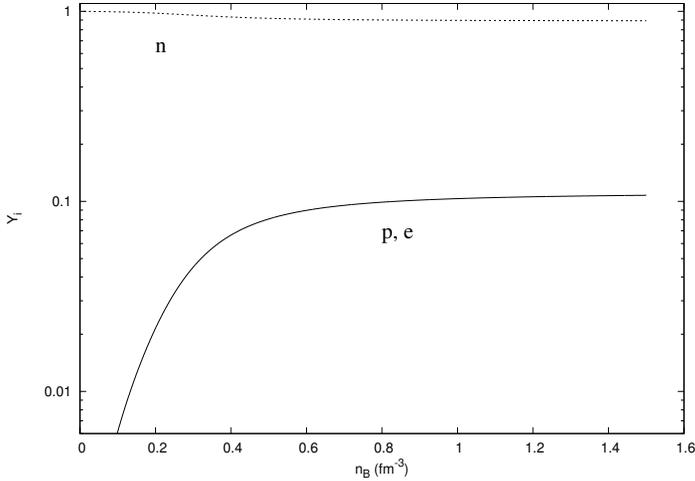


Fig. 4.3: *População relativa das partículas em função da densidade estelar*

4.5 Densidade de energia estacionária

Existe uma formulação mais simples para se obter as equações (4.12) e (4.13) sem a necessidade de se trabalhar com os spinores definidos nas equações (4.14) e (4.15). Seja a densidade de energia dada pela equação (4.21). Vamos requerer que o valor esperado dos campos σ_0 e ω_0 sejam tal que a densidade de energia é mínima (mais geralmente estacionária), ou seja, vamos requerer que [7, 21]:

$$\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\omega_0}\right)_k = \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\sigma}\right)_k = 0. \quad (4.29)$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\omega_0}\right)_k &= \frac{1}{\pi^2} \sum_B \int_0^{k_{fB}} g_v k^2 dk - m_v^2 \omega_0 = 0, \\ \omega_0 &= \sum_B \frac{g_v}{m_v^2} \frac{k_{fB}^3}{3\pi^2}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\sigma_0}\right)_k &= \frac{1}{\pi^2} \sum_B \int_0^{k_{fB}} \frac{(M - g_s \sigma_0)(-g_s)}{\sqrt{k^2 + (M - g_s \sigma_0)^2}} k^2 dk + m_s^2 \sigma_0 = 0, \\ \sigma_0 &= \frac{1}{\pi^2} \sum_B \frac{g_s}{m_s^2} \int_0^{k_{fB}} \frac{M^* k^2 dk}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

que são exatamente as equações (4.12) e (4.13) onde as equações (4.14) e (4.15) aparecem naturalmente, sem nenhuma imposição à mão como fizemos anteriormente. Sempre que necessário utilizaremos esse mesmo raciocínio.

4.6 Problemas da QHD-I

Se por um lado a QHD-I é útil para descrever a matéria nuclear simétrica (mesmo número de prótons e nêutrons), ela falha em descrever a matéria assimétrica por não diferenciar prótons de

nêutrons. Além disso, existem outras grandezas físicas como o módulo de compressão, massa efetiva dos nucleons , energia de simetria e energia de ligação por nucleon, que os cálculos da QHD-I diferem bastante dos valores observados empiricamente. Podemos construir uma tabela que expressa essas diferenças [7, 18]:

Grandeza física	Valor experimental	Valor calculado da QHD-I
Massa efetiva do nucleon (M^*/M)	0.7 a 0.8	0.556
Energia de ligação por nucleon ($E/B - M$)	-16.3 MeV	-15.75 MeV
Módulo de compressibilidade (K)	200-300 MeV	540 MeV
Energia de simetria (a_{sym})	32.5 MeV	22.1 MeV

Com essa tabela em mãos, podemos perceber que ainda que a QHD-I possa descrever as características principais das estrelas de nêutrons, a descrição da matéria nuclear é bastante pobre, fazendo com que os resultados obtidos não sejam confiáveis. Precisamos então estender nosso formalismo para melhorar a concordância entre as grandezas físicas medidas em laboratório com àquelas previstas pela teoria para enfim fazer previsões confiáveis. Este é o assunto do nosso próximo capítulo.

Capítulo 5

Interação Hadrônica: a QHD-II

Podemos considerar os últimos dois capítulos como uma preparação para a construção deste, no qual nos dá uma teoria para hádrons interagentes cujas grandezas físicas calculadas teoricamente estão bem próximas daquelas observadas em laboratório. Primeiramente, para contornar as dificuldades apontadas na última sessão do capítulo anterior precisamos estender nosso formalismo da QHD-I e passar para a QHD-II ou modelo de Walecka não-linear [7].

5.1 O formalismo da Hadrodinâmica Quântica II

Para se corrigir o problema do módulo de compressão e da massa efetiva dos nucleons, introduzimos na lagrangiana termos

de auto interação dos campos escalares e, para uma correção na energia de ligação por nucleon e da energia de simetria, adicionamos na lagrangiana um novo méson vetorial chamado de méson ρ . Os mésons ρ são tripleto de mésons vetoriais-isovetoriais com cargas (1, -1, 0) que se acoplam ao isospin, podendo assim diferenciar prótons de nêutrons. Apesar de também possuírem spin 1 como o méson ω , os mésons ρ pertencem a um grupo de simetria maior, denominado grupo $SU(2)$, descrito por uma extensão das teorias de Yang-Mills para bósons massivos, através do mecanismo de Higgs [16]. A lagrangiana da QHD-II ou modelo de Walecka não-linear é então [7, 18, 22]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WNL} = & \bar{\psi} \left[\gamma_{\mu} \left(i\partial^{\mu} - g_{\omega}\omega^{\mu} - \frac{1}{2}g_{\rho}\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^{\mu} \right) - (M - g_s\sigma) \right] \psi + \\ & + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\sigma\partial^{\mu}\sigma - m_s^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2\omega_{\mu}\omega^{\mu} + \\ & - \frac{1}{4}\mathbf{P}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{P}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\rho}^2(\vec{\rho}^{\mu} \cdot \vec{\rho}_{\mu}) - \frac{1}{3!}\kappa\sigma^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma^4, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $\vec{\tau}$ são as três matrizes de Pauli e $\mathbf{P}_{\mu\nu}$ é definido como [16, 18]:

$\mathbf{P}_{\mu\nu} \doteq \partial_{\mu}\vec{\rho}_{\nu} - \partial_{\nu}\vec{\rho}_{\mu} - g_{\rho}(\vec{\rho}_{\mu} \times \vec{\rho}_{\nu})$. Podemos identificar os novos termos da nossa lagrangiana como:

- $-\frac{1}{4}\mathbf{P}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{P}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\rho}^2(\vec{\rho}^{\mu} \cdot \vec{\rho}_{\mu})$: lagrangiana para partículas livres de spin 1 pertencentes ao grupo $SU(2)$,

- $-\frac{1}{2}g_\rho\bar{\psi}(\gamma_\mu\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}^\mu)\psi$: termo associado à interação entre os bárions mediado pelos mésons vetoriais-isovetoriais ρ ,
- $-\frac{1}{3}\kappa\sigma^3 - \frac{1}{4}\lambda\sigma^4$: termo não-linear associado à auto interação entre os mésons σ .

5.1.1 Equação de movimento e a aproximação de campo médio

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange (4.5) à lagrangiana de Walecka não-linear obtemos a seguinte equação de movimento para os bárions:

$$\left[\gamma_\mu \left(i\partial^\mu - g_\nu\omega^\mu - \frac{1}{2}g_\rho\vec{\tau}\cdot\vec{\rho}^\mu \right) - M^* \right] \psi = 0. \quad (5.2)$$

Para resolvermos esta equação, utilizaremos a aproximação de campo médio como fizemos no modelo da QHD-I. Ao fazermos isso somente a terceira componente de isospin do méson ρ sobrevive, ou seja, somente o méson ρ eletricamente neutro contribui em uma aproximação de campo médio. Além do mais, as partes espaciais do 4-vetor ρ^μ devem ser nulas para se manter a simetria esférica, sobrando somente a parte temporal. Podemos expressar nossa aproximação de campo médio da seguinte forma:

$$\vec{\rho}^\mu(x^\nu) \rightarrow \rho^0 \doteq \delta_{0\mu}\delta^{j3}\langle\rho_j^\mu\rangle, \quad (5.3)$$

com isso nossa lagrangiana de campo médio da QHD-II fica:

$$\mathcal{L}_{WNL} = \bar{\psi} \left[\gamma_0 \left(i\partial^0 - g_v \omega^0 - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \rho^0 \right) - \gamma_j i\partial^j - (M - g_s \sigma_0) \right] \psi +$$

$$- \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_0^2 - \frac{1}{3!} \kappa \sigma_0^3 - \frac{1}{4!} \lambda \sigma_0^4, \quad (5.4)$$

e nossa equação de movimento:

$$[\gamma_0 (i\partial^0 - g_v \omega_0 - g_\rho I_3 \rho_0) - \gamma_j i\partial^j - M^*] \psi = 0, \quad (5.5)$$

onde I_3 é o operador projeção de isospin. Pode-se mostrar que a lagrangiana da QHD-II reproduz os seguintes resultados:

Grandeza física	Valor experimental	Valor calculado da QHD-II
Massa efetiva do nucleon (M^*/M)	0.7 a 0.8	0.7
Energia de ligação por nucleon ($E/B - M$)	-16.3 MeV	-16.3 MeV
Módulo de compressibilidade (K)	200-300 MeV	300 MeV
Energia de simetria (a_{sym})	32.5 MeV	32.5 MeV

5.2 Equação de estado para a QHD-II

Vamos agora procurar por uma EoS para o modelo da QHD-II. Das regras de quantização, podemos escrever a equação (5.5) da seguinte forma:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (E - g_v \omega_0 - g_\rho I_3 \rho_0) - \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{k} + \right. \\ \left. - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M^* \right) \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} (E - g_v \omega_0 - g_\rho I_3 \rho_0 - M^*) & -\sigma \cdot \mathbf{k} \\ \sigma \cdot \mathbf{k} & -(E - g_v \omega_0 - g_\rho I_3 \rho_0 + M^*) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0, \quad (5.6)$$

esta equação é exatamente igual a (4.18) com excessão do termo $\mp g_\rho I_3 \rho_0$ somado na diagonal principal. A solução para a energia para um certo bárion qualquer é então:

$$E = \sqrt{k^2 + M^{*2}} + g_v \omega_0 + g_\rho I_3 \rho_0 \equiv \mu, \quad (5.7)$$

onde μ é o potencial químico. Podemos ver que temos um novo desvio da energia devido ao méson ρ . Usando agora as equações (3.2) e (5.7) obtemos a densidade de energia bariônica como sendo:

$$\epsilon = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_f} [\sqrt{k^2 + M^{*2}} + g_v \omega_0 + g_\rho I_3 \rho_0] k^2 dk, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{(k_f)} = & \frac{1}{8\pi^2} \left\{ k_f \sqrt{k_f^2 + M^{*2}} (2k_f^2 + M^{*2}) \right\} + \\ & -M^{*4} \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{k_f^2 + M^{*2}}}{M^*} \right] \left\} + \frac{g_v \omega_0 k_f^3}{3\pi^2} + \frac{g_\rho I_3 \rho_0 k_f^3}{3\pi^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para a pressão utilizaremos a primeira lei da termodinâmica (3.11) e também a relação dada por (3.14), obtendo:

$$\frac{dp}{dk} = \frac{1}{3\pi^2} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} p(k_f) = & \frac{1}{24\pi^2} \left\{ \frac{2k_f^5 - M^{*2}k_f^3 - 3M^{*4}k_f}{\sqrt{M^{*2} + k_f^2}} + \right. \\ & \left. + 3M^{*4} \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{M^{*2} + k_f^2}}{M^*} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Vemos que a pressão dos bárions não se altera em relação aquela calculada na QHD-I. Para a pressão dos mésons, utilizaremos o mesmo raciocínio da QHD-I, ou seja:

$$\epsilon_m = -\langle \mathcal{L} \rangle, \quad p_m = \langle \mathcal{L} \rangle,$$

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_\rho \rho_0^2 + \frac{1}{3!} \kappa \sigma_0^3 + \frac{1}{4!} \lambda \sigma_0^4 \quad (5.12)$$

$$p_m = -\frac{1}{2}m_s^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho\rho_0^2 - \frac{1}{3!}\kappa\sigma_0^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma_0^4 \quad (5.13)$$

onde o subscrito m indica que isso é válido para os mésons.

5.2.1 Aplicação às estrelas atômicas

Considerando nossa estrela formada por nêutrons, prótons e elétrons temos a seguinte equação de estado:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_B \int_0^{k_{fB}} [\sqrt{k^2 + M_B^{*2}} + g_v\omega_0 + g_\rho I_3\rho_0] k^2 dk + \right. \\ & \left. + \int_0^{k_{fe}} \sqrt{k^2 + m_e^2} k^2 dk \right) + \\ & + \frac{1}{2}(m_s^2\sigma_0^2 - m_v^2\omega_0^2 - m_\rho^2\rho_0^2) + \frac{1}{3!}\kappa\sigma_0^3 + \frac{1}{4!}\lambda\sigma_0^4, \quad (5.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p = & \frac{1}{3\pi^2} \left(\sum_B \int_0^{k_{fB}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + M_B^{*2}}} + \int_0^{k_{fe}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_e^2}} \right) + \\ & - \frac{1}{2}m_s^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_0^2 - \frac{1}{3!}\kappa\sigma_0^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma_0^4 \quad (5.15) \end{aligned}$$

onde a soma em B se dá sob prótons e nêutrons. Para encontrar-mos os valores esperados dos campos mesônicos, vamos requerer

que a densidade de energia dos bárions em relação aos mésons seja estacionária, do mesmo modo que fizemos no modelo da QHD-I. Temos então que:

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega_0}\right)_k = \frac{1}{\pi^2} \sum_B \int_0^{k_{fB}} g_v k^2 dk - m_v^2 \omega_0 = 0,$$

$$\omega_0 = \sum_B \frac{g_v}{m_v^2} \frac{k_{fB}^3}{3\pi^2}, \quad (5.16)$$

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma_0}\right)_k = \frac{1}{\pi^2} \sum_B \int_0^{k_{fB}} \frac{(M - g_s \sigma_0)(-g_s)}{\sqrt{k^2 + (M - g_s \sigma_0)^2}} k^2 dk +$$

$$+ m_s^2 \sigma_0 + \frac{1}{2} \kappa \sigma_0^2 + \frac{1}{6} \lambda \sigma_0^3 = 0,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi^2} \sum_B \frac{g_s}{m_s^2} \int_0^{k_{fB}} \frac{(M - g_s \sigma_0)}{\sqrt{k^2 + (M - g_s \sigma_0)^2}} k^2 dk +$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\kappa}{m_s^2} \sigma_0^2 - \frac{1}{6} \frac{\lambda}{m_s^2} \sigma_0^3, \quad (5.17)$$

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_0}\right)_k = \frac{1}{\pi^2} \sum_B \int_0^{k_{fB}} g_\rho I_3 k^2 dk - m_\rho^2 \rho_0 = 0,$$

$$\rho_0 = \sum_B \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \frac{k_{fB}^3}{3\pi^2} I_{3B}. \quad (5.18)$$

A expressão para o valor esperado do campo ω não se altera em relação aquele dado pela QHD-I. Para o campo σ temos correções devido a auto interação mesônica, já o novo campo ρ possui a mesma forma funcional do campo ω , com exceção do operador de isospin acoplado a ele. No caso de estrelas atômicas temos que o campo $\omega_0 \propto n_p + n_n$, enquanto que para o campo $\rho_0 \propto n_p - n_n$, podendo inclusive ser negativo. Porém a soma dos dois sempre é positivo, o que é muito importante para garantir-mos a estabilidade estelar.

Estabilidade Estelar

Precisamos verificar se nossa nova equação de estado é causal e obedece ao princípio de Le Chantelier. A partir das equações (5.14) e (5.15) obtemos:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{3} \frac{k^2}{(k^2 + M^{*2}) + (g_v\omega_0 + g_\rho I_3 \rho_0)\sqrt{k^2 + M^{*2}}}, \quad (5.19)$$

esta quantidade está sempre entre zero e um como discutido no parágrafo anterior, portanto esta equação de estado é estável.

5.3 Matéria estelar a baixas densidades

Até agora, toda descrição da matéria no interior estelar corresponde a matéria nuclear livre totalmente degenerada, o que é completamente diferente da matéria atômica com núcleos e

átomos estáveis que conhecemos no dia a dia. Isso é justificável, uma vez que a densidade no interior estelar é muito superior aquelas que encontramos na terra. Todavia, sabemos também que quanto mais próximo da superfície de uma estrela de nêutrons, menos e menos densa é a matéria. Então para que nossa descrição dessas estrelas seja mais realística é preciso construir uma equação de estado para baixas densidades, a qual não pode ser matéria nuclear degenerada.

Bem na superfície da estrela, quando a densidade vai a zero a matéria estelar não deve diferir muito da matéria ordinária. De fato, para baixíssimas densidades a matéria estelar deve ser composta principalmente por ${}^{56}\text{Fe}$, a crosta da estrela deve então ser totalmente de ferro comum. Nesta região, a EoS deve depender fortemente da temperatura, e a descrição precisa deve ser aquela encontrada na teoria da física da matéria condensada. Porém essa região não deve ultrapassar alguns poucos metros. À medida que nos aprofundamos no interior estelar a densidade aumenta, e quando esta alcança valores da ordem de $10^{-8} \text{ MeV}/\text{fm}^3$ ($10^7 \text{ kg}/\text{m}^3$), os elétrons nessa crosta de ferro são praticamente livres e a temperatura não será mais tão significativa. A pressão de degenerescência dos elétrons deve ser o principal responsável por contrabalancear a força gravitacional, e a matéria se torna totalmente análoga a matéria contida no interior das anãs brancas ¹ [23]. De fato, a equação de estado nessa região é igual à EoS das anãs brancas, com exceção que enquanto o núcleo atômico inerte das anãs brancas é constituído basicamente de carbono, nas estrelas de nêutrons

¹ Ver Apêndice A

temos um núcleo atômico de ferro. A primeira correção em nossas EoS devem então incluir uma equação de estado do tipo anã branca. Esse tipo de equação de estado deve permanecer até a densidade atingir valores de $8 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}/fm^3$, quando o núcleo do ^{56}Fe deixa de ser o estado fundamental da matéria. A matéria composta pelo núcleo de ferro inerte e elétrons degenerados pode perder energia através da captura dos elétrons pelo núcleo, emitindo a energia extra em forma de neutrinos através da seguinte equação:



tal processo é conhecido como neutronização [7]. Quanto mais densa a matéria fica, mais intenso é o processo de neutronização, porém como isso diminui o número de elétrons livres, diminuí também a pressão, fazendo com que a condição de estabilidade do princípio de Le Chantelier dado pela equação (3.18) não seja satisfeita. Logo se a densidade central de uma anã branca ou estrela de nêutrons cair nesta faixa de densidade, ela deve colapsar até encontrar uma nova fase estável (como é a fase descrita pela QHD-I ou QHD-II). O estado fundamental passa a ser agora o ^{62}Ni com uma grande redução do número de elétrons livres se comparado com o estado anterior de ^{56}Fe . Apesar das grandes densidades durante o processo de neutronização, o núcleo se mantém coeso e ligado, e isso se mantém até que a densidade chegue a valores de $4 \cdot 10^{-1} \text{ MeV}/fm^3$, quando o estado ligado do núcleo não é mais o estado fundamental da matéria. Quando atingimos este ponto, chamado de nêutron drip [7, 23], a matéria nuclear começa a se dissolver e junto com o núcleo passam a existir nucleons livres. A matéria é composta agora por uma

mistura de fases, contendo o núcleo ligado e também um gás de nêutrons livres. Esses dois estados vão coexistir até a densidade atingir valores de $200 \text{ MeV}/fm^3$. A partir deste ponto temos apenas um gás de Fermi livre que interage via força forte, como é o caso dos modelos da QHD-I e QHD-II. Logo, as equações de estado obtidas até agora são boas para descrever matéria a altas densidades (por sorte, essa região corresponde a aproximadamente a 90 % do interior das estrelas de nêutrons), mas falha em descrever a matéria próxima a crosta. Vamos procurar então por uma equação de estado que descreva a matéria para densidades acima do ponto de nêutron drip, uma vez que abaixo deste podemos aproximar nossa EoS por uma EoS do tipo anã branca.

5.3.1 O núcleo ligado: o modelo da gota líquida

Como dissemos, acima do ponto de neutron drip a estrutura da matéria corresponde a uma coexistência do núcleo ligado imerso num gás de Fermi livre. A teoria do gás de Fermi livre já foi discutida nos capítulos anteriores, nos restando agora a descrição do núcleo. Para fazermos isso, vamos seguir o raciocínio de Baym-Bethe-Pethick (BBP) [6] e utilizar o modelo de gota líquida para o núcleo [24].

O modelo de gota líquida considera que o número de nucleons presentes no núcleo é grande o suficiente para que a individualidade de cada nucleon possa ser desconsiderada, sendo importante somente o comportamento coletivo. Uma vez que o núcleo é um estado ligado, podem existir vários estados excita-

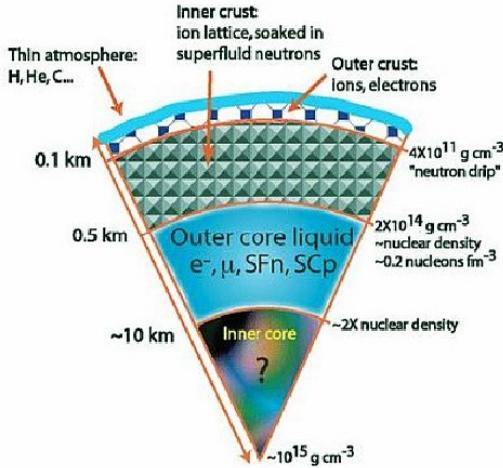


Fig. 5.1: *Estrutura estelar: podemos identificar a região composta por ferro, a região de neutron drip e a região de matéria nuclear degenerada.*

dos, porém aqui iremos considerar o núcleo como estando no seu estado fundamental. Neste modelo existem quatro componentes que influenciam nas propriedades do núcleo:

- Energia de ligação volumétrica: é o responsável por manter o núcleo como um estado ligado, depende de seu volume, ou reciprocamente do número de massa A . Em um

modelo mais refinado, ele dependerá também da densidade.

- Energia de superfície: deriva do fato do núcleo ter um tamanho finito, então os nucleons em sua superfície sentirão um potencial diferente dos nucleons interiores, pois os últimos “possuem mais vizinhos”. Este termo é uma correção do termo anterior, fazendo com que a superfície do núcleo adquira uma tensão superficial como no caso da água.
- Energia da grade columbiana: deriva do fato de o núcleo ser estritamente positivo. Então é natural que núcleos com mesmo A mas diferentes Z apresentem estabilidade diferente. Quanto menor Z menor a energia columbiana que tende a dissociar o núcleo.
- Energia de Simetria: este termo deriva do fato que os constituintes são férmions, logo obedecem ao princípio de exclusão de Pauli. Um núcleo formado somente por um único tipo de nucleon será mais energético e menos estável que um que contenha os dois. De fato caso o número de nêutrons e prótons sejam igual, este é o modo mais estável possível para um núcleo de certo A (desconsiderando os outros 3 componentes).

Com essa pequena discussão qualitativa podemos passar agora para uma discussão mais quantitativa e tentar escrever uma equação de estado para a matéria acima do neutron drip.

5.3.2 A equação de Baym-Bethe-Pethick

A equação de estado na coexistência dessas duas fases é conhecida como BBP EoS, e pode ser escrita como:

$$\epsilon = n_N W_N + \epsilon_n (1 - V_N n_N) + \epsilon_e, \quad (5.21)$$

Onde n_N é a densidade numérica do núcleo ligado, n_n é a densidade numérica dos nêutrons livres. V_N é o volume do núcleo e deve diminuir quando a densidade aumenta. W_N é a energia do núcleo e deve incluir os quatro termos descritos na sessão anterior. A densidade numérica total é:

$$n = A n_N + (1 - V_N n_N) n_n. \quad (5.22)$$

Vamos agora fazer algumas imposições para que esta equação de estado seja estável. Primeiramente queremos que o gás de nêutrons livres e o núcleo ligado estejam em equilíbrio a uma determinada densidade fixa. Além do mais queremos que a densidade de energia seja mínima, ou seja, caso um nêutron livre passe para o núcleo (ou vice-versa) este processo deve ter um certo custo energético. Podemos expressar essas condições através das equações:

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial A} \right)_n = 0, \quad e, \quad \mu_n^N = \mu_n^G. \quad (5.23)$$

O potencial químico do gás de nêutrons livre é dado por:

$$\mu_n^G = \frac{d\epsilon}{dn_n} + \left(\frac{n_N}{1 - V_N n_N} \right) \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n} \right)_{Z,A}, \quad (5.24)$$

onde o segundo termo é devido à mudança na energia de superfície quando um nêutron do núcleo se torna livre (ou vice-versa). Nossa última condição de equilíbrio agora é que para uma mesma densidade, a pressão do gás de Fermi livre seja igual a pressão do núcleo:

$$P^N = P^G. \quad (5.25)$$

A pressão pode ser sempre encontrada através da termodinâmica. Por fim, nos resta explicitar a forma da energia do núcleo W_N que deve conter todos os quatro parâmetros da sessão anterior. Se considerarmos somente a interação nucleon-nucleon e na aproximação de matéria quase simétrica, essa energia assume a seguinte forma [6]:

$$W_N = A \left[m_n + W_v + \frac{1}{2} K \left(1 - \frac{k}{k_0} \right)^2 + 4a_{sym} \left(\frac{Z}{A} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + W_S + W_L, \quad (5.26)$$

onde m_n é a massa do nêutron, relacionada com a energia de repouso do núcleo, W_v é a energia de ligação por nucleon, K é a compressibilidade, k_0 é o momento de Fermi na densidade de saturação nuclear, a_{sym} é a energia de simetria, W_S é a energia de superfície e W_L é a energia da grade columbiana, onde:

$$W_S = w_s A^{2/3}, \quad \text{com } w_s = 20 \text{ MeV} \quad (5.27)$$

$$W_L = \frac{3}{5} \frac{Z^2 q^2}{r_N} \left(1 - \frac{r_N}{r_c} \right)^2 \left(1 + \frac{r_N}{2r_c} \right), \quad (5.28)$$

onde:

$$\frac{4\pi}{3} n_N r_c^3 = 1. \quad (5.29)$$

Uma vez com todas as definições e imposições feitas, podemos enfim obter nossa EoS para matéria acima do ponto de neutron drip. O resultado desta equação de estado pode ser encontrado em [23] e são estes dados que utilizaremos para corrigir nossas EoS a baixas densidades. Devemos explicitar também que a partir deste ponto as equações de estado que contiverem interação nuclear serão corrigidas com a equação BBP para baixas densidades.

5.4 Resultados

Resolvendo as equações de Oppenheimer-Volkoff para a EoS descrita pelas equações (5.12), (5.13), (5.14) e (5.15) e, impondo o equilíbrio químico e a neutralidade de carga obtemos os seguintes resultados:

	Massa (M_{\odot})	Raio (km)	n_c (fm^{-3})
Massa Máxima	2.39	12.11	0.840

Temos assim um conjunto de estrelas descritas a partir de uma teoria que retorna resultados coerentes com aqueles medidos em laboratório, além de incluir uma EoS para baixas densidades. O modelo da QHD-II também é capaz de reproduzir estrelas reais, uma vez que a massa máxima obtida está entre 2.0 e 3.2 massas solares. Se compararmos com a QHD-I percebemos que nossa massa máxima diminuiu em 7.22 %. Além disso, a QHD-II favorece ainda mais a produção de elétrons e prótons, fazendo com que a fração dessas partículas cheguem a mais de 20 % à grandes densidades. O efeito do raio aumentar para

baixas densidades provém da EoS considerando o neutron drip. Por fim notamos que densidades superiores a 0.84 fm^{-3} não podem formar estrelas estáveis por estar em desacordo com a condição expressa pela equação (3.33).

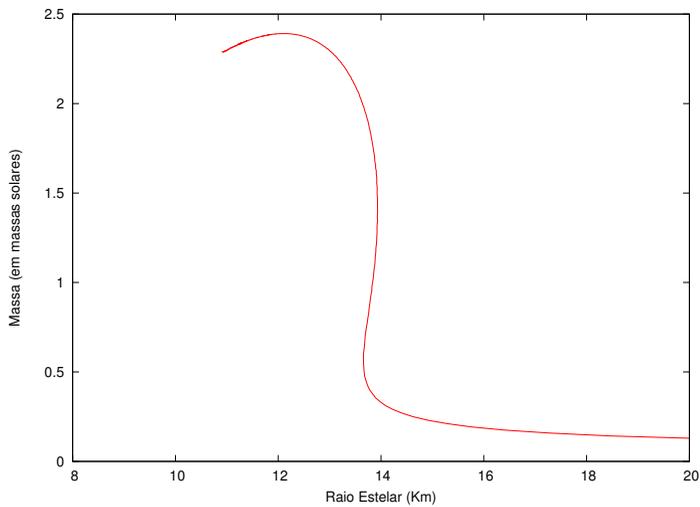


Fig. 5.2: *Relação Massa/Raio em função da densidade central*

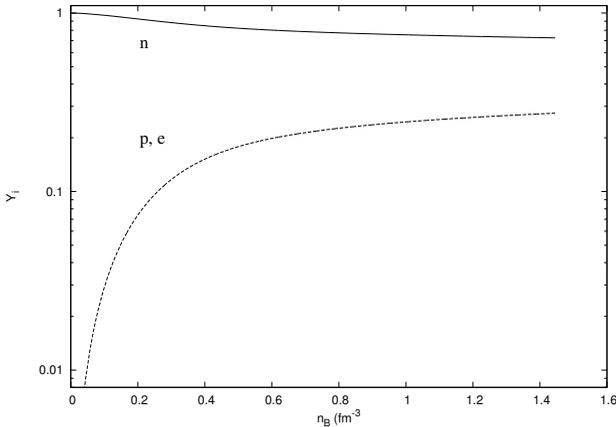


Fig. 5.3: *População relativa das partículas em função da densidade estelar*

5.5 Extensão do Formalismo: Inclusão de todo octeto bariônico e múons no interior estelar

Já vimos que o estado menos energético da matéria atômica neutra em seu estado livre não é o nêutron, mas sim o próton e o elétron. Vamos pegar o caminho inverso agora. Considere uma estrela constituída somente por prótons e elétrons. Esse estado é o menos energético possível? Já vimos que não. À medida que aumentamos a densidade, o momento de Fermi dessas

partículas também aumenta, ficando mais energeticamente vantajoso alguns prótons e elétrons se unirem para formar nêutrons do que um gás de Fermi constituídos somente pelas partículas eletricamente carregadas. Ou seja, é mais provável que uma estrela de nêutrons contenha prótons, elétrons e nêutrons do que somente prótons e elétrons ou somente nêutrons.

Por outro lado, nêutrons e prótons não são os únicos bárions existentes na natureza. Temos tantos bárions quanto se é possível formar com o modelo quarkiônico. Do mesmo modo, o elétron não é o único lépton existente [16]. Então, por que motivo nós trabalhamos somente com o modelo atômico da matéria para os possíveis constituintes das estrelas de nêutron?

De fato ainda que prótons e nêutrons sejam os bárions mais leves (assim como o elétron o é para os léptons) é energeticamente vantajoso que uma estrela de nêutrons contenha outros bárions (e léptons) pelo mesmo motivo que ela contem nêutrons: À medida que a densidade aumenta o momento de Fermi dos prótons e nêutrons também irá crescer, até chegar a um ponto que se torne mais energeticamente vantajoso criar outro bárion ao invés dos tradicionais bárions atômicos. Dentre os demais bárions podemos citar os híperons [25].

Ainda que híperons conttenham o número quântico de estranheza, esse número quântico não precisa ser conservado em interações fracas. Logo em uma escala temporal macroscópica nada impede que estrelas de nêutrons conttenham híperons em seus interiores [7].

Para estudar os efeitos provocados pela presença de híperons no interior estelar, vamos incluir, além de prótons e nêutrons todos os bárions do chamado octeto bariônico. O octeto bariônico

foi proposto por Gell-Mann em 1961 para organizar o grande número de partículas recém descobertas, classificando-as de acordo com sua carga, e estranheza [26], sendo eles:

$(p, n, \Lambda^0, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-)$. Uma detalhada descrição dos híperons pode ser encontrada em [27].

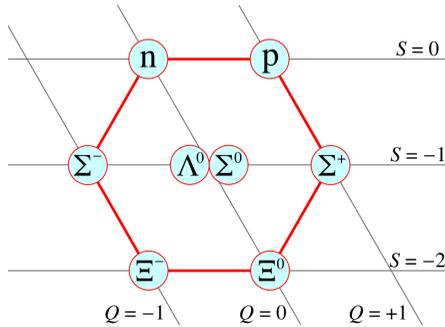


Fig. 5.4: *O octeto bariônico.*

Para energias suficientemente altas, vamos considerar a possibilidade de reações do tipo:

$$n + n \rightarrow n + \Lambda^0 + K^0 \quad \text{ou,}$$

$$n + p + e \rightarrow \Sigma^+ + \Sigma^- + 2K^0 + \nu. \quad (5.30)$$

Embora essas reações não sejam as únicas possíveis, elas são vantajosas em nosso trabalho pois $K^0 \rightarrow 2\gamma$ fazendo com que, em uma escala de tempo macroscópica, a reação efetiva seja:

$$n \rightarrow \Lambda^0, \quad \text{e também: } n + p + e \rightarrow \Sigma^+ + \Sigma^-. \quad (5.31)$$

Do mesmo modo para os léptons, caso a energia seja suficientemente alta podemos ter a seguinte reação:

$$n + n \rightarrow n + p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \quad (5.32)$$

Então de uma forma mais abrangente uma estrela de nêutrons deve conter em seu interior $p, n, \Lambda^0, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-, e, \mu$. Chamaremos as estrelas que possuem híperons em seu interior de estrelas exóticas.

5.5.1 Neutralidade elétrica e equilíbrio químico

As mesmas condições requeridas para estrelas de nêutrons atômicas devem figurar para esse caso mais geral.

Em relação a neutralidade elétrica, temos que n, Λ^0, Σ^0 e Ξ^0 não possuem carga, μ^-, e, Σ^- e Ξ^- possuem carga negativa e, p e Σ^+ possuem carga positiva. Então para manter a neutralidade elétrica vamos requerer que:

$N_p + N_{\Sigma^+} = N_e + N_\mu + N_{\Sigma^-} + N_{\Xi^-}$. Já vimos que essa igualdade está relacionada com os momentos de Fermi de cada partícula.

Já em relação ao equilíbrio químico, podemos generalizar a equação (3.13) da seguinte forma [28]:

$$\mu_{Bi} = \mu_n + Q_{Bi}\mu_e, \quad (5.33)$$

onde Q_{Bi} é a carga do i -ésimo bárion (em termos da carga do elétron). Das equações (3.3) e (5.33), e impondo a neutralidade de carga obtemos o seguinte conjunto de equações algébricas não-lineares:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \mu_n - \mu_e, \\ \mu_{\Lambda^0} &= \mu_n, \\ \mu_{\Sigma^+} &= \mu_n - \mu_e, \\ \mu_{\Sigma^0} &= \mu_n, \\ \mu_{\Sigma^-} &= \mu_n + \mu_e, \\ \mu_{\Xi^0} &= \mu_n, \\ \mu_{\Xi^-} &= \mu_n + \mu_e, \\ \mu_\mu &= \mu_e, \\ k_{f_p}^3 + k_{f_{\Sigma^+}}^3 &= k_{f_{\Sigma^-}}^3 + k_{f_{\Xi^-}}^3 + k_{f_e}^3 + k_{f_\mu}^3. \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.5.2 Densidade lagrangiana para estrelas exóticas

Vamos incluir agora todo octeto bariônico e o lépton μ em nossa estrela de nêutrons. A lagrangiana de campo médio para a estrela exótica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B \left[(i\gamma_0 \partial^0 - g_{v,B} \omega_0 - g_{\rho,B} I_3 \rho_0) - i\gamma_j \partial^j + \right. \\
 & \left. - (M_B - g_{s,B} \sigma_0) \right] \psi_B + \sum_l \bar{\psi}_l (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_l) \psi_l + \\
 & - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_0^2 - \frac{1}{3!} \kappa \sigma_0^3 - \frac{1}{4!} \lambda \sigma_0^4,
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

onde o somatório em B indica soma sob os 8 bárions e o somatório em l sob os 2 léptons. $g_{\alpha,B}$ é definido como: $g_{\alpha,B} \doteq g_\alpha \chi_B$, onde χ_B é a razão de acoplamento entre os vários bárions e vale 1 para os nucleons. Para os híperons ainda não há uma medição muito precisa. Atualmente os valores que melhor descrevem os dados experimentais é $g_\alpha \chi_H = 0.7g_s$ e $0.783g_v$ [22, 28]. Com isso, nossa equação de estado e os valores esperados para os campos mesônicos se tornam:

$$\begin{aligned}
 \epsilon = & \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_B \int_0^{k_{fB}} [\sqrt{k^2 + M_B^{*2}} + g_v \chi_B \omega_0 + g_\rho \chi_B I_3 \rho_0] k^2 dk + \right. \\
 & \left. + \sum_l \int_0^{k_{fl}} \sqrt{k^2 + m_l^2} k^2 dk \right) + \frac{1}{2} (m_s^2 \sigma_0^2 - m_v^2 \omega_0^2 - m_\rho^2 \rho_0^2) + \\
 & + \frac{1}{3!} \kappa \sigma_0^3 + \frac{1}{4!} \lambda \sigma_0^4,
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
 p = & \frac{1}{3\pi^2} \left(\sum_B \int_0^{k_{fB}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + M_B^{*2}}} + \sum_l \int_0^{k_{fl}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_l^2}} \right) + \\
 & - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho \rho_0^2 - \frac{1}{3!} \kappa \sigma_0^3 - \frac{1}{4!} \lambda \sigma_0^4 \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \sum_B \frac{g_v \chi_B}{m_v^2} \frac{k_{fB}^3}{3\pi^2}, \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 = & \frac{1}{\pi^2} \sum_B \frac{g_s \chi_B}{m_s^2} \int_0^{k_{fB}} \frac{(M - g_s \chi_B \sigma_0)}{\sqrt{k^2 + (M - g_s \chi_B \sigma_0)^2}} k^2 dk + \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{m_s^2} \sigma_0^2 - \frac{1}{6} \frac{\lambda}{m_s^2} \sigma_0^3, \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

$$\rho_0 = \sum_B \frac{g_\rho \chi_B}{m_\rho^2} \frac{k_{fB}^3}{3\pi^2} I_{3B}. \quad (5.40)$$

onde a soma em B agora inclui os oito bárions, a soma em l inclui os dois léptons e χ_B é a razão entre as constante de acoplamento do bárion B com o nucleon.

5.5.3 Resultados

Vamos agora resolver as equações de Oppenheimer-Volkoff para estrelas exóticas no formalismo da QHD-II em equilíbrio químico generalizado e com carga total nula. Para isso utilizamos a

EoS dada pelas equações (5.36) e (5.37), o potencial químico dos bárions é dado pela equação (5.7), lembrando que devemos levar em conta o acoplamento diferenciado dos híperons com os mésons. Já o potencial químico dos léptons é dado pela equação (3.7). Para impor o equilíbrio químico e a neutralidade de carga acoplamos os potenciais químicos de acordo com a equação (5.34). Com isso obtemos os seguintes resultados:

	Massa (M_{\odot})	Raio (km)	n_c (fm^{-3})
Massa Máxima	2.01	11.85	0.960

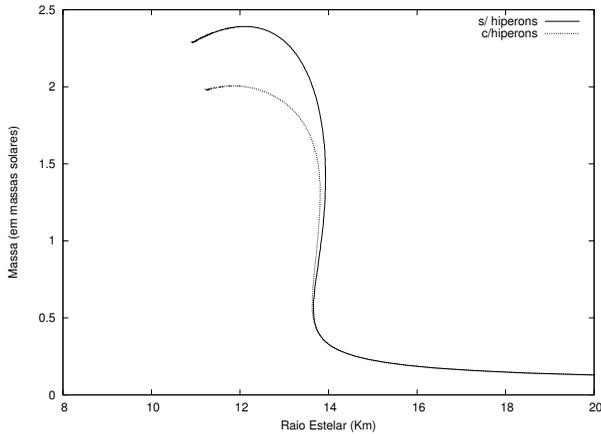


Fig. 5.5: *Relação Massa/Raio em função da densidade central*

Portanto, se acreditarmos que o modelo de Walecka não-linear é um bom modelo para descrever a matéria nuclear e, que seja provável que existam híperons no interior das estrelas de nêutrons, isso significa que a maior estrela de nêutrons conhecida até o momento com 2.0 massas solares [19] é praticamente a maior estrela de nêutrons que pode existir, uma vez que a massa máxima prevista pela QHD-II é de 2.01 massas solares (embora efeitos como rotação e campo magnético possam aumentar a massa máxima). Em relação à presença de híperons, vemos que isto causou uma boa redução da massa máxima se comparada com as estrelas atômicas (16 %). Para visualizar com mais clareza, podemos colocar ambos resultados em um único gráfico e comparar como a presença de híperons afeta a massa e o raio das estrelas de nêutrons. Com relação à população de partículas, vemos que para altas densidades temos uma maior presença dos híperons Λ^0 e Σ^- do que nêutrons. Este modelo permite que todo o octeto bariônico exceto o Ξ^0 esteja presente no interior da estrela, assim como o novo lépton μ . A razão pela qual o híperon Ξ^0 não aparece na nossa estrela de nêutron é devido ao fato que a densidade necessária para criá-lo não pode gerar estrelas estáveis².

² De fato, o híperon Ξ^0 aparece em uma fração pouco significativa $Y_{\Xi^0} = 10^{-5}$ a densidades de $1.2 fm^{-3}$.

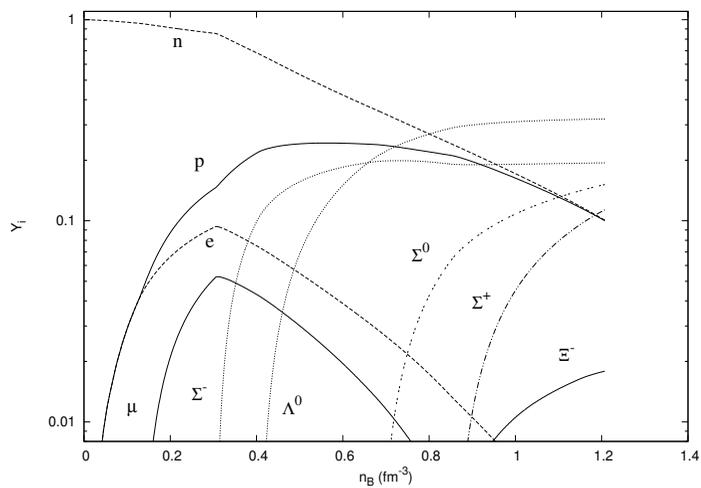


Fig. 5.6: *População relativa das partículas em função da densidade estelar*

Capítulo 6

Inclusão do Campo Magnético

Como já dissemos, estrelas de nêutrons possuem um forte campo magnético devido ao movimento das partículas em seu interior. Como não sabemos descrever precisamente o movimento dessas, e, conseqüentemente o campo magnético por elas produzido, o que iremos fazer é considerar um campo magnético constante no interior estelar e, uma distribuição dipolar em seu exterior. Com essa configuração iremos então construir e resolver as equações de estado para partículas carregadas sujeitas a um campo magnético uniforme. Futuramente discutiremos como melhorar nosso modelo.

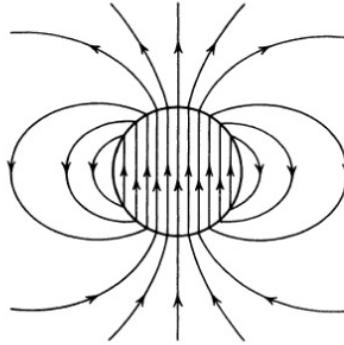


Fig. 6.1: *Linhas de campo no interior e exterior estelar*

6.1 Equação de Dirac na presença de um Campo Magnético Externo

As partículas que constituem nossa estrela de nêutrons são férmions de spin $1/2$ e, portanto, suas equações de movimento são dadas pelas equações de Dirac [16]. Na presença de um campo magnético uniforme a equação de Dirac assume a seguinte forma [29]:

$$(\gamma^\mu (p_\mu - eA_\mu) - m)\Psi = 0, \quad (6.1)$$

abrindo-a em componentes:

$$(\gamma^0(p_0 - eA_0) - \gamma^1(p_1 - eA_1) - \gamma^2(p_2 - eA_2) - \gamma^3(p_3 - eA_3) - m)\Psi = 0, \quad (6.2)$$

Na ausência de campo elétrico, $A_0 = 0$, e fazendo $p_0 = E$ a equação (6.2) fica:

$$\begin{pmatrix} (E - m) & -\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \\ \sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) & -(E + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0, \quad (6.3)$$

que nada mais é que a representação matricial de um sistema de equações (no nosso caso, equações diferenciais).

A solução para este sistema é:

$$(\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2 u_A = (E^2 - m^2) u_A. \quad (6.4)$$

deixando claro que é uma equação de auto-valor.

Essa equação possui algumas sutilezas, e por isso será resolvida passo a passo. Primeiramente, para resolvermos essa equação, devemos escolher o gauge do campo. Como queremos um campo uniforme na direção z , um dos gauges possíveis que reproduz esse resultado é:

$$A_0 = A_2 = A_3 = 0 \quad , \quad A_1 = -By \quad (6.5)$$

com o primeiro termo da equação (6.4) ficando:

$$(\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}))^2 = (\sigma_x(p_x + eBy) + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z)^2 =$$

$$\begin{aligned}
 = & p_x^2 + 2eBy p_x + (eBy)^2 + p_y^2 + p_z^2 + \sigma_x p_x \sigma_y p_y + \sigma_y p_y \sigma_x p_x + \\
 & + \sigma_x p_x \sigma_z p_z + \sigma_z p_z \sigma_x p_x + \sigma_y p_y \sigma_z p_z + \sigma_z p_z \sigma_y p_y + \\
 & + eB(\sigma_x y \sigma_y p_y + \sigma_y p_y \sigma_x y) + eB(\sigma_x y \sigma_z p_z + \sigma_z p_z \sigma_x y).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Das regras de comutação dos operadores x_i , p_j e matrizes de Pauli σ_i , sabemos que:

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}.$$

Com esses resultados o lado direito da equação (6.6) se reduz à:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + 2eBy p_x + (eBy)^2 + eB(\sigma_x y \sigma_y p_y + \sigma_y p_y \sigma_x y). \tag{6.7}$$

O último termo da equação (6.7) fica:

$$\begin{aligned}
 eB \left[\begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -ip_y \\ ip_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_y \\ ip_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \right] = \\
 eB \begin{pmatrix} iyp_y - ip_y y & 0 \\ 0 & -(iyp_y - ip_y y) \end{pmatrix} = ieB[y, p_y] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
 = -eB\sigma_z.
 \end{aligned}$$

A equação (6.4) é então expressa como:

$$p^2 + (eB)^2 y^2 + eB(2yp_x - \sigma_z)u_A = (E^2 - m^2)u_A, \quad (6.8)$$

dando origem à duas equações devido ao termo σ_z nela presente.

As coordenadas $x^0(t)$, x , z não aparecem explicitamente na equação acima, logo são coordenadas ignoráveis e suas soluções são ondas planas. Podemos então escrever a solução como sendo:

$$u_A = \exp\{i(Et - p_x x - p_z z)\}F(y). \quad (6.9)$$

As duas equações se diferenciam somente pelos autovalores da matriz σ_z , ou seja $s = \pm 1$. Usando a regra de quantização para os operadores p , as duas equações podem ser escritas em forma compacta como:

$$\frac{d^2 F_s}{dy^2} - (eBy + p_x)^2 F_s + (E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)F_s = 0. \quad (6.10)$$

Vamos tentar fazer uma substituição de variável. Chamemos $(eBy + p_x)$ de $v\sqrt{|e|B}$. Como essa raiz deve existir, então a carga deve ser tomada em módulo. Com essa substituição temos que:

$$(eBy + p_x) = v\sqrt{|e|B} \quad ; \quad v = \frac{1}{\sqrt{|e|B}}(eBy + p_x) \quad ; \quad dv = \sqrt{|e|B}dy,$$

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dv} \frac{dv}{dy} = \sqrt{|e|B} \frac{dF}{dv} \quad ; \quad \frac{d^2 F}{dy^2} = \frac{d}{dy} \frac{dF}{dy} = .$$

$$= \sqrt{|e|B} \frac{d}{dy} \frac{dF}{dv} = |e|B \frac{d^2 F}{dv^2}.$$

A equação (6.10) então se torna:

$$(|e|B) \frac{d^2 F_s}{dv^2} - (|e|B)v^2 F_s + (E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)F_s = 0.$$

$$\frac{d^2 F_s}{dv^2} - v^2 F_s + \frac{(E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)}{(|e|B)} F_s = 0. \quad (6.11)$$

Ora, essa equação é exatamente a mesma que a do oscilador harmônico quântico!! [30].

Sabemos então que para que a solução exista:

$$\frac{(E^2 - m^2 - p_z^2 + eBs)}{(|e|B)} = 2l + 1, \quad (6.12)$$

nossos autovalores de energia passam a ser então:

$$E = \sqrt{m^2 + p_z^2 + (2l + 1)|e|B - eBs} \quad (6.13)$$

Temos então quatro soluções (duas soluções independentes) para cada partícula, dependendo da carga e da orientação do seu spin.

Apenas por coerência na notação, vamos substituir o símbolo do momento p por k , fazendo com que

$$E = \sqrt{m^2 + k_z^2 + (2l + 1)|e|B - eBs}. \quad (6.14)$$

Degenerescências

Sabemos que para férmions livres os dois níveis de spin apresentam uma degenerescência de ordem 2. Podemos nos perguntar agora: Os níveis de spin ainda são degenerados para férmions na presença de um campo magnético externo? Naturalmente para um mesmo l eles não são, mas vamos olhar mais com calma a equação (6.14).

Considere inicialmente um férmion de carga positiva (o sinal da carga não importa, pois $s = \pm 1$). Neste caso, se fizermos $l = 0$ e $s = 1$ a energia da partícula será: $E = \sqrt{m^2 + k_z^2}$.

Naturalmente esta energia não é degenerada.

Considere agora que $l = 0$ e $s = -1$ e comparemos a energia desse estado com o estado $l = 1, s = 1$. Ora, essas energias são exatamente iguais:

$$E = \sqrt{m^2 + k_z^2 + 2|e|B}. \text{ Assim como } l = 1, s = -1 \text{ e } l = 2, s = 1: E = \sqrt{m^2 + k_z^2 + 4|e|B}.$$

Podemos escrever então a energia de um férmion em um campo magnético em função de um único parâmetro:

$$E = \sqrt{m^2 + k_z^2 + 2\nu|e|B}, \quad (6.15)$$

onde ν é chamado nível de Landau. A energia do estado fundamental é não-degenerada, enquanto todos os outros níveis de

Landau possuem uma degenerescência de ordem 2.

Gauge

Por fim devemos perceber que essa solução está intimamente ligada ao gauge escolhido. Conseqüentemente não podemos tomar o limite de $B \rightarrow 0$ na expressão final e esperar que recuperemos a solução para a partícula livre. Do mesmo modo essa solução somente é válida para partículas carregadas [29].

6.1.1 Gás de Fermi e densidade de Estados

Uma vez com nossa energia em mãos, podemos construir uma equação de estado totalmente análoga às dos capítulos anteriores. Porém nossa distribuição esfericamente simétrica dos níveis de Fermi devem ser alteradas devido à presença do campo magnético, e uma simetria cilíndrica deve aparecer devido ao fato do espaço não ser mais homogêneo e isotrópico. Como antes usaremos a seguinte equação:

$$d\epsilon = E dn, \quad (6.16)$$

porém algumas modificações devem ser feitas.

Primeiramente devemos somar não somente sob todos os níveis de Fermi, mas além de somar sob esses, devemos somar sob todos os níveis de Landau também. Vamos encontrar primeiramente a expressão para a densidade numérica.

A energia para a partícula livre como já vimos é:

$$E = \sqrt{m^2 + k^2} = \sqrt{m^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2},$$

enquanto que na presença do campo magnético:

$$E = \sqrt{m^2 + k_z^2 + 2\nu|e|B}.$$

Da nossa simetria cilíndrica temos:

$$k_x^2 + k_y^2 = k_\rho^2 = 2\nu|e|B, \quad (6.17)$$

da equação (3.1) temos que a densidade de estados disponíveis por momento para cada nível de Landau é:

$$dn = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{\eta(\nu)k_\rho dk_\rho d\phi dk_z}{(2\pi)^3} = \frac{|e|B}{(2\pi)^2} \eta(\nu) dk_z \quad (6.18)$$

$\eta(\nu)$ está relacionado com a degenerescência do nível de Landau, ou seja: $\eta(0) = 1$ e $\eta(\nu > 0) = 2$. A densidade de estado disponíveis é obtida integrando a equação (6.18) e somando sob todos os níveis de Landau:

$$n = \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) k_{f(\nu)}. \quad (6.19)$$

6.2 Aplicação elementar: Gás de Fermi livre

6.2.1 Neutralidade de carga e equilíbrio químico

Vamos requerer agora equilíbrio químico e neutralidade de cargas assim como na nossa estrela sem campo magnético. Para estrelas contendo somente nêutrons, prótons e elétrons, e desconsiderando as interações nucleares, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\mu_p &= \mu_n - \mu_e, \\ k_{f_p} &= k_{f_e},\end{aligned}\tag{6.20}$$

que nada mais é que as equações (3.35) e (3.36). A diferença deste sistema repousa no fato que o potencial químico para as partículas carregada e para as partículas neutras possuem uma forma funcional diferente. No caso do nêutron, a solução para seu potencial químico é o mesmo que tínhamos encontrado na ausência de campo magnético, ou seja:

$$\mu_n = \sqrt{m_n^2 + k_n^2}.$$

Já para partículas carregadas, temos pelas equações (3.12), (6.15) e (6.16) que [31]:

$$\mu = E = \sqrt{m^2 + k_f^2 + 2\nu|e|B},\tag{6.21}$$

assim a primeira equação do sistema (6.20) então pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sqrt{m_p^2 + k_p^2 + 2\nu|e|B} + \sqrt{m_e^2 + k_e^2 + 2\nu|e|B} = \sqrt{m_n^2 + k_n^2} = \quad (6.22)$$

Enquanto o lado direito da equação depende do nível de Landau, o lado esquerdo não. Fica evidente então que cada nível de Landau terá seu próprio momento de Fermi.

6.2.2 Densidade de energia e pressão

Seguindo o raciocínio dos capítulos anteriores, podemos encontrar a densidade de energia para partículas carregadas de acordo com as equações (6.15), (6.16) e (6.18), lembrando que devemos somar também sob todos os níveis de Landau, resultando em:

$$\epsilon_{k_f} = \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \int_0^{k_f} \sqrt{m^2 + k_z^2 + 2\nu|e|B} dk_z, \quad (6.23)$$

$$\epsilon_{k_f} = \frac{|e|B}{4\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \left\{ k_f \sqrt{m^2 + k_f^2 + 2\nu|e|B} + [m^2 + 2\nu|e|B] \cdot \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{m^2 + k_f^2 + 2\nu|e|B}}{\sqrt{m^2 + 2\nu|e|B}} \right] \right\}. \quad (6.24)$$

Para calcular agora a pressão, vamos utilizar a mesma equação de antes (equação (3.14)). Desta equação sabemos que:

$$\frac{dp}{dk} = \frac{dn}{dk}E + n\frac{dE}{dk} - \frac{d\epsilon}{dk}, \quad (6.25)$$

onde dn é dado pela equação (6.18), enquanto E é dado pela equação (6.15) e $d\epsilon$ pela equação (6.16). Como no caso de um gás de Fermi livre, o primeiro e o último termo do lado direito se cancelam sobrando somente o termo central. Calculando então dE/dk obtemos:

$$\frac{dp}{dk_z} = \frac{|e|B}{2\pi^2} \frac{k_z^2}{\sqrt{m^2 + k_z^2 + 2\nu|e|B}},$$

$$p = \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \int_0^{k_f} \frac{k_z^2 dk_z}{\sqrt{m^2 + k_z^2 + 2\nu|e|B}}. \quad (6.26)$$

$$p = \frac{|e|B}{4\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \left\{ k_f \sqrt{m^2 + k_f^2 + 2\nu|e|B} + \right. \\ \left. - [m^2 + 2\nu|e|B] \cdot \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{m^2 + k_f^2 + 2\nu|e|B}}{\sqrt{m^2 + 2\nu|e|B}} \right] \right\}. \quad (6.27)$$

6.2.3 Valor Máximo para os níveis de Landau

Partículas livres, a princípio, podem assumir qualquer energia e portanto os níveis de Landau poderiam correr indefinidamente, desde que se forneça energia suficiente para isto. Porém nosso modelo implica que as partículas obedecem à estatística de Fermi-Dirac à temperatura $T = 0$ K fazendo com que a energia máxima seja a energia de Fermi. Considere a equação (6.15)

$$E_f^2 = m^2 + k_f^2 + 2\nu|e|B, \quad (6.28)$$

Isolando agora o termo com campo magnético temos:

$$2\nu|e|B = E_f^2 - m^2 - k_f^2.$$

Implicando em:

$$2\nu|e|B < E_f^2 - m^2,$$

pois caso a equação acima não seja satisfeita, isso implicaria em $(k_f)^2 < 0$, o que é impossível [29]. Temos assim que o maior nível de Landau permitido é o maior inteiro que satisfaz a desigualdade:

$$\nu_{max} < \frac{E_f^2 - m^2}{2|e|B},$$

ou de acordo com a equação (6.21)

$$\nu_{max} < \frac{(\mu)^2 - m^2}{2|e|B}. \quad (6.29)$$

6.2.4 Equação de Estado

A Equação de Estado para nossa estrela com campo magnético é obtida traçando uma função $p(\epsilon)$, onde a densidade de energia ϵ é obtido somando sob todas as partículas e sob todos os níveis de Landau. O mesmo procedimento deve também ser feito com a pressão p .

Para partículas sem carga a densidade de energia para cada tipo é dada pela equação (3.39) e a pressão pela equação (3.40). Já no caso de partículas carregadas a densidade de energia é dada por (6.24) e a pressão por (6.27).

Logo a densidade total de energia do sistema é:

$$\epsilon = \sum_{j,\nu} \epsilon_{j,\nu} + \frac{B^2}{8\pi} \quad (6.30)$$

e a pressão:

$$p = \sum_{j,\nu} p_{j,\nu} + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (6.31)$$

Onde o índice j é $j = (n, p, e)$. Além disso a soma sobre os níveis de Landau só é feita em partículas carregadas. O termo $B^2/(8\pi)$ é a contribuição do próprio campo magnético à densidade de energia e à pressão, e também deve ser somado na EoS final [31, 32].

6.3 Campo Magnético dependente da densidade

Vamos agora olhar com mais cuidado o termo $B^2/8\pi$ que aparece em nossas EoS. Todo formalismo desenvolvido até agora considera o campo magnético como sendo uniforme e constante. Porém isso acarreta em alguns problemas:

- Se por um lado os mais fortes campos magnéticos observados na superfície dos magnetares são da ordem de $10^{11}T$, por outro, campos desta magnitude não devem afetar as equações de estado e frações de partículas no interior estelar.

Além disso, é aceito na literatura [31, 32, 33] que o campo magnético no interior de estrelas de nêutrons pode alcançar até $10^{15}T$ nas regiões mais centrais, diminuindo gradativamente até chegar a $10^{11}T$ em sua crosta. Para reproduzir este resultado, introduziremos um campo magnético dependente da densidade da seguinte forma [33]:

$$B(n) = B^{sup} + B_0 \left[1 - \exp \left\{ -\beta \left(\frac{n}{n_0} \right)^\alpha \right\} \right], \quad (6.32)$$

onde B^{sup} é o campo na superfície, geralmente tomado como $10^{11}T$, B_0 é o campo magnético que entra na equação de estado expresso nas equações (6.24) e (6.27), n_0 é a densidade de saturação da matéria nuclear e β e α são parâmetros livres escolhidos tal que o campo magnético seja da ordem do campo na

superfície para densidades menores que n_0 e cresça rapidamente para densidades maiores. Utilizamos nos nossos cálculos valores tal que o campo magnético seja aproximadamente:

- de $7.0 \cdot 10^{-3} B_0$ para densidades de $0.5 n_0$,
- de $0.8 B_0$ para densidades de $6.5 n_0$.

6.3.1 O campo magnético e as equações de Oppenheimer-Volkoff

Sabemos que a inclusão de um campo magnético forte também carrega dois problemas em relação as equações estruturais de nossa estrela:

- O campo magnético é, ele próprio, uma fonte de gravitação, possuindo tanto densidade de energia como pressão, e deve, a princípio, ser incluído nas equações de Einstein através do tensor momento-energia.
- O campo magnético não é esfericamente simétrico, destruindo assim a simetria esférica de nossa estrela.

Vamos então buscar por um valor limite para o campo magnético tal que este jamais domine os termos de matéria (exceto na superfície).

Considere a densidade central de nossa estrela de nêutrons como sendo da ordem de $1 fm^{-3}$. Temos então que a densidade de energia bariônica para esta densidade é(em SI):

$$\epsilon \simeq \rho c^2 = 4.76 fm^{-4} = 1.50 \cdot 10^{35} J/m^3. \quad (6.33)$$

Como nessa densidade o campo magnético é da ordem de $0.8 B_0$ temos que a densidade de energia do campo magnético deve satisfazer a seguinte inequação:

$$\frac{(0.8B_0)^2}{2\mu_0} < 1.5 \cdot 10^{35} \quad \rightarrow \quad B < 7.67 \cdot 10^{14} T. \quad (6.34)$$

Se o campo magnético satisfizer esta condição no centro da estrela, uma vez que o campo magnético cai exponencialmente com a diminuição da densidade, garantimos que esta aproximação vale para toda a estrela. Utilizaremos então o valor máximo de $5 \cdot 10^{14} T$ para o campo magnético. É muito importante neste ponto reconhecer os dois ítems mencionados no início dessa sessão, portanto os resultados que serão obtidos não serão precisos, vamos estudar o efeito de um campo magnético intenso no interior estelar como sendo uma aproximação, uma tendência do comportamento estelar quando submetido a campos magnéticos extremos.

6.4 Estabilidade estelar

Uma vez que montamos a equação de estado, precisamos verificar se esta é estável, ou seja, se ela obedece o princípio da causalidade e de Le Chantelier. Das equações (6.23) e (6.26) obtemos:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{k_z^2}{m^2 + k_z^2 + 2\nu|e|B}. \quad (6.35)$$

Uma vez que este termo está sempre entre zero e um podemos concluir que esta EoS é estável.

6.5 Resultados

Vamos então estudar a influência do campo magnético no interior estelar. Compararemos qual o efeito nas equações de estado e na composição química dos pulsares e magnetares quando os campos magnéticos atingirem valores de $1.0 \cdot 10^{13} T$ e $5.0 \cdot 10^{14} T$ no nosso formalismo de campo magnético dependente da densidade. Devemos nos lembrar que de acordo com a equação (6.29) os níveis de Landau possuem um valor limite.

Vamos impor sempre o equilíbrio químico e a neutralidade de carga. Tais relações são expressas pelas equações (6.20) e (6.22). A soma da nossa equação de estado, (6.30) e (6.31), corre sob prótons, nêutrons, e elétrons. Obtemos assim os seguintes resultados:

	Massa (M_{\odot})	Raio (km)	n_c (fm^{-3})	B (T)
Massa Máxima	0.702	9.18	2.05	$1.0 \cdot 10^{13}$
Massa Máxima	1.69	9.34	1.29	$5.0 \cdot 10^{14}$

Para campos de $10^{13} T$ podemos perceber que a massa máxima praticamente não se altera em relação às estrelas atômicas sem campo magnético, enquanto seu raio e a densidade central sofrem uma pequena alteração. A maior modificação é em relação ao raio das estrelas de menor massa. Se antes nosso raio máximo era inferior a $15 km$, a inclusão do campo magnético

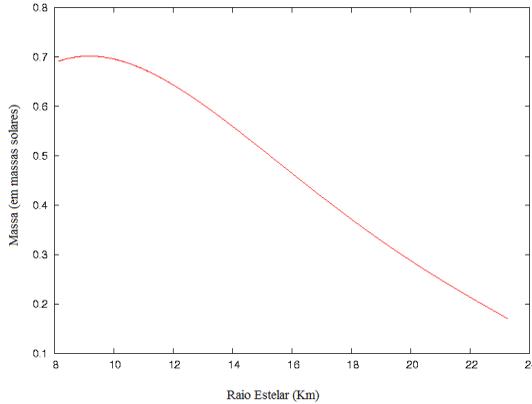


Fig. 6.2: *Relação Massa/Raio em função da densidade central para campos de $10^{13} T$.*

desta grandeza na equação de estado permite que o raio estelar alcance agora valores superiores a 22 km . Já para campos de $5.0 \cdot 10^{14} T$ temos alterações significativas em todas as propriedades citadas acima. A massa máxima sofre um drástico aumento (141 %) chegando inclusive a valores de massa que são observados na natureza. O raio da massa máxima sofre um pequeno aumento e a densidade central diminui bastante. Isso acontece porque campos de $10^{13} T$ possuem pouca densidade de energia e pressão, afetando de modo muito fraco a EoS para densidades acima da densidade de saturação da matéria nuclear. Já para campos de $5 \cdot 10^{14} T$ o aumento da massa máxima se

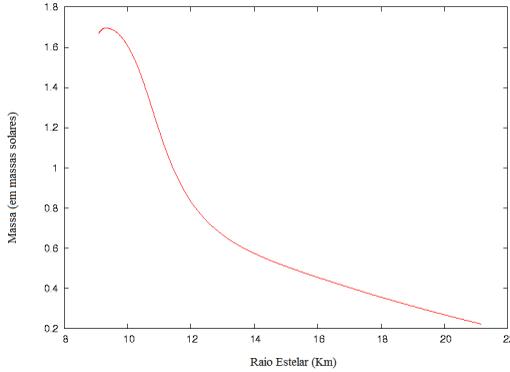


Fig. 6.3: *Relação Massa/Raio em função da densidade central para campos de $5 \cdot 10^{14} T$.*

deve porque enquanto na ausência de campo magnético a única forma de contrabalancear a força gravitacional é a pressão de degenerescência, agora temos a pressão do campo magnético dominando a pressão de nossa EoS, causando este grande aumento na massa máxima.

Em relação a população de partículas, para campos da ordem de $10^{13} T$ não há nenhuma alteração visual significativa, exceto quando a densidade numérica fica abaixo da densidade de saturação da matéria nuclear. Neste regime, o potencial químico dos prótons é pequeno, fazendo com que poucos níveis de Landau sejam ocupados. Com isso o movimento no plano xy fica altamente quantizado, se diferenciando bastante do movimento

contínuo na ausência do campo magnético. À medida que a densidade aumenta, o potencial químico também o faz, fazendo com que mais e mais níveis de Landau sejam ocupados, se aproximando gradativamente de uma distribuição contínua, que é o que temos no caso sem campo magnético. A quantização dos níveis de Landau é a razão para os grandes raios encontrados nas estrelas de baixa massa. Já para campos de $5 \cdot 10^{14} T$ temos poucos níveis de Landau disponíveis mesmo à grandes densidades, fazendo com que o movimento no plano xy fique altamente quantizado em todo interior estelar. Os resultados aqui discutidos podem ser visualizados nos gráficos abaixo:

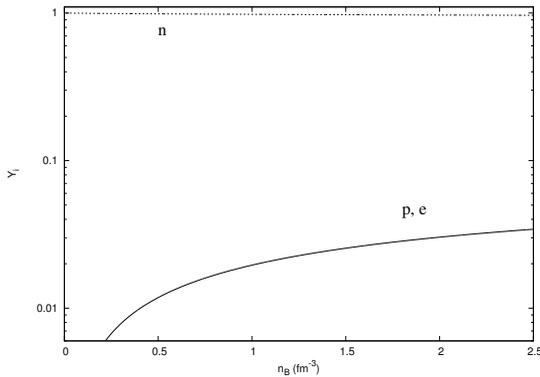


Fig. 6.4: *População relativa das partículas em função da densidade estelar para campos de $10^{13}T$*

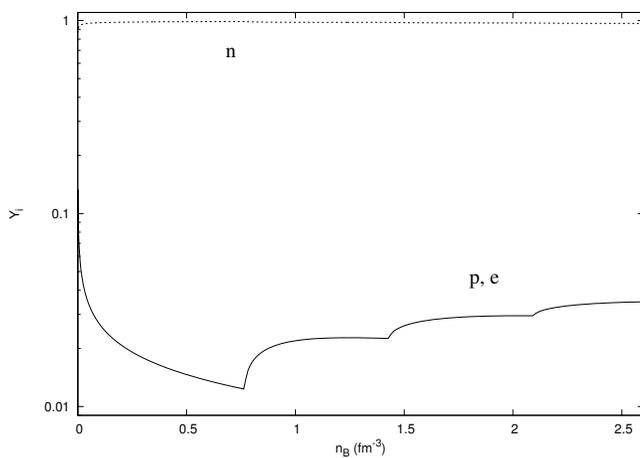


Fig. 6.5: *População relativa das partículas em função da densidade estelar para campos de $5 \cdot 10^{13} T$*

Capítulo 7

QHD-II com Campo Magnético

Podemos buscar agora um tratamento mais completo e realístico na descrição da matéria no interior das estrelas de nêutrons. Iremos desenvolver um formalismo que permita adicionar não só o campo magnético como também as interações nucleares, uma vez que ambos efeitos devem ocorrer nos pulsares e magnetares reais.

A lagrangiana da QHD-II na aproximação de campo médio e na presença de um campo eletromagnético possui a seguinte forma [31, 32]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[\gamma_0(i\partial^0 - eA^0 - g_v\omega^0 - g_\rho I_3\rho^0) - \gamma_j(i\partial^j - eA^j) - M^*]\psi +$$

$$-\frac{1}{2}m_s^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_0^2 - \frac{1}{3!}\kappa\sigma_0^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma_0^4 - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (7.1)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o nosso tensor eletromagnético convencional definido como [11]: $F_{\mu\nu} \doteq \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Para bárions sem carga, esta lagrangiana se reduz à lagrangiana da equação (5.1) que já foi estudada. Aplicando as equações de Euler-Lagrange e as regras de quantização obtemos, para bárions carregados e na ausência de campo elétrico, a seguinte equação de movimento:

$$\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) E^* - \left(\begin{array}{cc} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{array} \right) \cdot (\mathbf{k} - e\mathbf{A}) - \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) M^* \right) \times \\ \times \left(\begin{array}{c} u_A \\ u_B \end{array} \right) = 0. \quad (7.2)$$

Onde, como nos capítulos anteriores, definimos uma energia efetiva, neste caso : $E^* = E - g_v\omega_0 - g_\rho I_3\rho_0$. Assim, esta equação se torna exatamente igual à equação (6.3), porém com energia e massa efetiva. Como resposta então temos:

$$E^* = \sqrt{k_z^2 + M^{*2} + 2\nu|e|B}, \quad \text{ou seja,}$$

$$E = \sqrt{k_z^2 + M^{*2} + 2\nu|e|B} + g_v\omega_0 + g_\rho I_3\rho_0 \equiv \mu \quad (7.3)$$

onde μ é o potencial químico. Utilizando agora as equações (7.3), (6.16) e (6.18) podemos obter a densidade de energia como sendo:

$$\epsilon = \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \int_0^{k_f} [\sqrt{M^{*2} + (k_z)^2} + 2\nu|e|B + g_v\omega_0 + g_\rho I_3\rho_0] dk_z, \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{|e|B}{4\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \left\{ k_f \sqrt{M^{*2} + (k_f)^2} + 2\nu|e|B + \right. \\ & + [M^{*2} + 2\nu|e|B] \cdot \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{M^{*2} + (k_f)^2} + 2\nu|e|B}{\sqrt{M^{*2} + 2\nu|e|B}} \right] + \\ & \left. 2k_f(g_v\omega_0 + g_\rho I_3\rho_0) \right\}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

E para calcular agora a pressão vamos utilizar as relações termodinâmicas expressa pela equação (6.25), chegando a:

$$p = \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \int_0^{k_f} \frac{k_z^2 dk_z}{\sqrt{M^{*2} + k_z^2} + 2\nu|e|B}. \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned}
 p = & \frac{|e|B}{4\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \left\{ k_f \sqrt{M^{*2} + k_f^2 + 2\nu|e|B} + \right. \\
 & \left. - [M^{*2} + 2\nu|e|B] \cdot \ln \left[\frac{k_f + \sqrt{M^{*2} + k_f^2 + 2\nu|e|B}}{\sqrt{M^{*2} + 2\nu|e|B}} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

7.1 Estrelas atômicas

Considerando, primeiramente, uma estrela constituída somente por prótons, nêutrons e elétrons, temos a seguinte equação de estado no formalismo da QHD-II com campo magnético:

$$\begin{aligned}
 \epsilon = & \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \int_0^{k_{fp}} \left[\sqrt{M_p^{*2} + k^2 + 2\nu|e|B} + g_v \omega_0 + g_{\rho} I_3 \rho_0 + \right. \\
 & \left. \sqrt{m_e^2 + k^2 + 2\nu|e|B} \right] dk + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{fn}} \left[\sqrt{k^2 + M_n^{*2} + g_v \omega_0 + g_{\rho} I_3 \rho_0} \right] k^2 dk + \\
 & + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_{\rho}^2 \rho_0^2 + \frac{1}{3!} \kappa \sigma_0^3 + \frac{1}{4!} \lambda \sigma_0^4 + \frac{B^2}{8\pi}, \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p = & \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \int_0^{k_{f_p}} \left\{ \frac{k^2 dk}{\sqrt{M_p^{*2} + k^2 + 2\nu|e|B}} + \right. \\
 & \left. + \frac{k^2 dk}{\sqrt{m_e^2 + k^2 + 2\nu|e|B}} \right\} + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_{f_n}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + M_n^{*2}}} + \\
 & -\frac{1}{2}m_s^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_0^2 - \frac{1}{3!}\kappa\sigma_0^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma_0^4 + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

Minimizando a energia em relação aos campos mesônicos obtemos o valor esperado para cada um desses campos como sendo:

$$\omega_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \left(\frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) k_{f_p} + \frac{k_{f_n}^3}{3\pi^2} \right) \equiv \frac{g_v}{m_v^2} n, \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 = & \frac{g_s}{m_s^2} \left(\frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) \int_0^{k_{f_p}} \frac{M_p^* dk}{\sqrt{M_p^{*2} + k^2 + 2\nu|e|B}} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{f_n}} \frac{M_n^* k^2 dk}{\sqrt{M_n^{*2} + k^2}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{m_s^2} \sigma_0^2 - \frac{1}{6} \frac{\lambda}{m_s^2} \sigma_0^3,
 \end{aligned}$$

$$\sigma_0 = \frac{g_s}{m_s^2} n_s - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{m_s^2} \sigma_0^2 - \frac{1}{6} \frac{\lambda}{m_s^2} \sigma_0^3, \quad (7.11)$$

$$\rho_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \left(\frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_{\nu} \eta(\nu) k_{f_p} + \frac{k_{f_n}^3}{3\pi^2} \right) I_3 \equiv \frac{g_v}{2m_v^2} (n^p - n^n), \quad (7.12)$$

onde na equação (7.12) substituímos explicitamente o valor do isospin do próton e do nêutron.

7.1.1 Resultados

Impondo neutralidade de carga e equilíbrio beta através das condições (6.20) e (6.22) obtemos:

	Massa (M_{\odot})	Raio (km)	n_c (fm^{-3})	B(T)
Massa Máxima	2.39	12.10	0.841	$1.0 \cdot 10^{13}$
Massa Máxima	2.47	12.20	0.748	$5.0 \cdot 10^{14}$

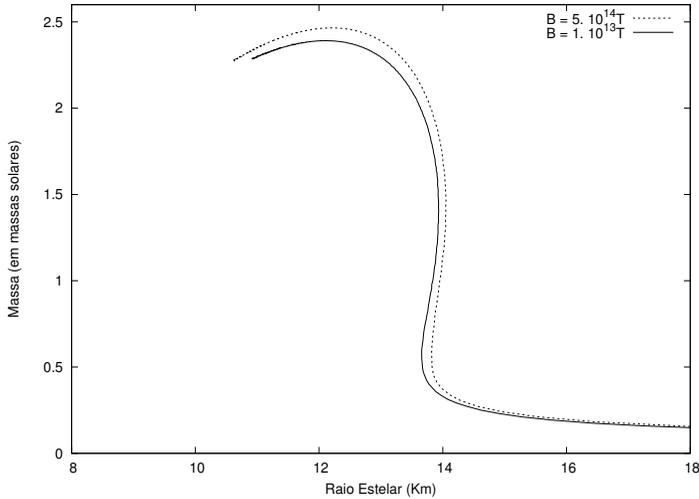


Fig. 7.1: *Relação Massa/Raio em função da densidade central*
Campos de $1.0 \cdot 10^{13} T$ e $5.0 \cdot 10^{14} T$.

Podemos perceber que o formalismo da QHD-II retorna dados iguais para campos menores ou iguais a $10^{13} T$. Já para os campos da ordem de $5.0 \cdot 10^{14} T$ existe uma tendência de aumento da massa máxima, uma vez que a pressão do campo magnético auxilia no contrabalanceio da força gravitacional.

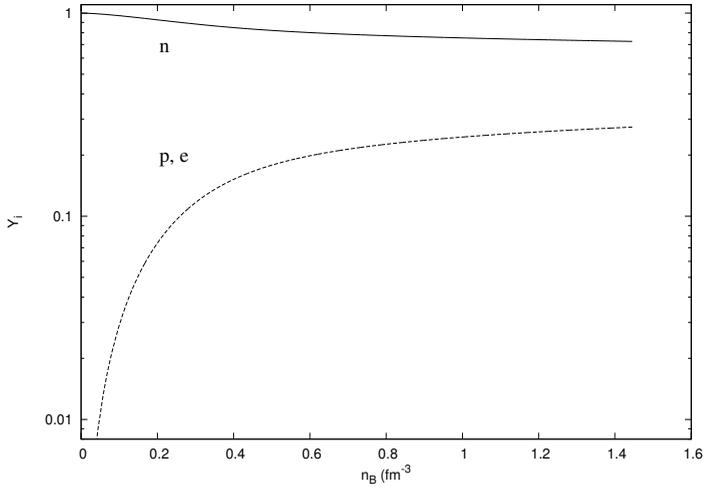


Fig. 7.2: *População relativa das partículas em função da densidade estelar para campos de $10^{13} T$*

Em relação a população de partículas, a mesma coisa se observa. Nenhuma diferença significativa para campos menores que $10^{13} T$. Porém para campos da ordem de $5.0 \cdot 10^{14} T$ poucos níveis de Landau estão disponíveis, fazendo a fração dos prótons ser diferente daquela encontrada sem o campo magnético.

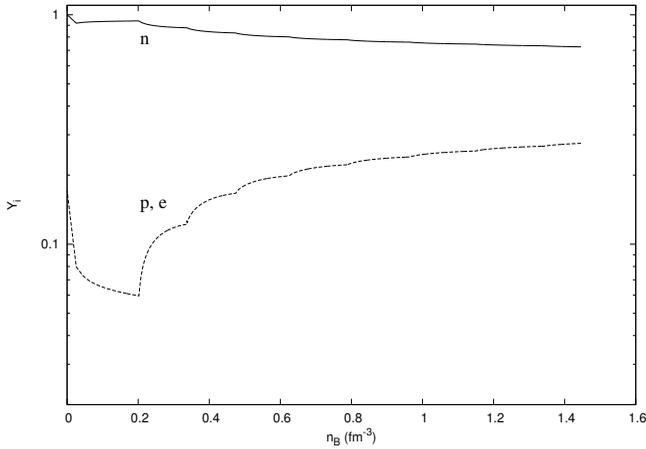


Fig. 7.3: *População relativa das partículas em função da densidade estelar para campos de $5.0 \cdot 10^{14} T$*

7.2 Estrelas exóticas

Vamos generalizar nossos resultados adicionando os híperons e os múons nas nossas EoS. Com isso nossa densidade de energia assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \epsilon = & \frac{1}{\pi^2} \sum_{bsc} \int_0^{k_{fb}} [\sqrt{k^2 + M_b^{*2}} + g_v \chi_b \omega_0 + g_\rho \chi_b I_3 \rho_0] k^2 dk + \\
 & + \sum_{bc} \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_\nu \eta(\nu) \int_0^{k_{fb}} \left[\sqrt{M_b^{*2} + k^2 + 2\nu|e|B} + g_v \chi_b \omega_0 + \right. \\
 & \left. + g_\rho \chi_b I_3 \rho_0 \right] dk + \sum_l \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_\nu \eta(\nu) \int_0^{k_{fl}} \sqrt{m_l^2 + k^2 + 2\nu|e|B} dk + \\
 & + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_0^2 + \frac{1}{3!} \kappa \sigma_0^3 + \frac{1}{4!} \lambda \sigma_0^4 + \frac{B^2}{8\pi}, \quad (7.13)
 \end{aligned}$$

onde a sigla *bsc* significa “bárions sem carga”. Sob ela estão os bárions: n , Λ^0 , Σ^0 , e Ξ^0 . A sigla *bc* significa “bárions carregados”, correspondendo aos: p , Σ^- , Σ^+ e Ξ^- . Por fim o l indica soma sobre os léptons: e e μ . Os símbolos χ_b e M_b^* são os mesmos χ_B e M_B^* , apenas utilizamos a letra b minúscula para não confundir com o campo magnético B .

Para a pressão temos:

$$\begin{aligned}
 p = & \frac{|e|B}{2\pi^2} \sum_\nu \eta(\nu) \left\{ \sum_{bc} \int_0^{k_{fb}} \frac{k^2 dk}{\sqrt{M_b^{*2} + k^2 + 2\nu|e|B}} + \right. \\
 & \left. + \sum_l \int_0^{k_{fl}} \frac{k^2 dk}{\sqrt{m_l^2 + k^2 + 2\nu|e|B}} \right\} + \frac{1}{3\pi^2} \left\{ \sum_{bsc} \int_0^{k_{fb}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + M_b^{*2}}} \right\} +
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}m_s^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_0^2 - \frac{1}{3!}\kappa\sigma_0^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma_0^4 + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (7.14)$$

Fazendo uma generalização das equações (7.10), (7.11) e (7.12) obtemos:

$$\omega_0 = \sum_{bsc} \frac{g_v\chi_b}{m_v^2} n^{bsc} + \sum_{bc} \frac{g_v\chi_b}{m_v^2} n^{bc} = \sum_B \frac{g_v\chi_B}{m_v^2} n^B, \quad (7.15)$$

$$\sigma_0 = \sum_{bsc} \frac{g_s\chi_b}{m_s^2} n^{bsc} + \sum_{bc} \frac{g_s\chi_b}{m_s^2} n^{bc} - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{m_s^2} \sigma_0^2 - \frac{1}{6} \frac{\lambda}{m_s^2} \sigma_0^3,$$

$$\sigma_0 = \sum_B \frac{g_s\chi_B}{m_s^2} n^B - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{m_s^2} \sigma_0^2 - \frac{1}{6} \frac{\lambda}{m_s^2} \sigma_0^3, \quad (7.16)$$

$$\rho_0 = \sum_{bsc} \frac{g_\rho\chi_b}{m_\rho^2} n^{bsc} I_3 + \sum_{bc} \frac{g_\rho\chi_b}{m_\rho^2} n^{bc} I_3 \equiv \sum_B \frac{g_\rho\chi_B}{m_\rho^2} n^B I_{3B}. \quad (7.17)$$

7.2.1 Neutralidade de carga e equilíbrio químico

A neutralidade de carga e o equilíbrio químico é totalmente análogo ao formalismo construído na ausência de campo magnético. Podemos expressar a neutralidade de carga e o equilíbrio químico de nossa estrela exótica sujeita a um campo magnético da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mu_p &= \mu_n - \mu_e, \\
 \mu_{\Lambda^0} &= \mu_n, \\
 \mu_{\Sigma^+} &= \mu_n - \mu_e, \\
 \mu_{\Sigma^0} &= \mu_n, \\
 \mu_{\Sigma^-} &= \mu_n + \mu_e, \\
 \mu_{\Xi^0} &= \mu_n, \\
 \mu_{\Xi^-} &= \mu_n + \mu_e, \\
 \mu_\mu &= \mu_e, \\
 n_p + n_{\Sigma^+} &= n_{\Sigma^-} + n_{\Xi^-} + n_e + n_\mu.
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Porém devemos nos lembrar que a o número de estados disponíveis para partículas carregadas agora é dado pela equação (6.19) ao invés da equação (3.3).

7.2.2 Resultados

Obtemos para uma estrela de nêutrons com campo magnético, híperons, múons no formalismo da QHD-II os seguintes resultados:

	Massa (M_\odot)	Raio (km)	n_c (fm^{-3})	B(T)
Massa Máxima	2.01	11.84	0.952	$1.0 \cdot 10^{13}$
Massa Máxima	2.19	11.70	0.842	$5.0 \cdot 10^{14}$

No caso de estrelas exóticas, campos menores ou iguais a $10^{13} T$ não alteram a massa máxima, porém causam uma pequena redução no raio estelar. Já para os campos da ordem de

$5.0 \cdot 10^{14} T$ a tendência de aumento da massa máxima contínua, uma vez que o campo magnético atua como uma fonte de pressão extra no contrabalanceio da força gravitacional. Um fato curioso aqui é que o raio estelar diminuiu com o aumento do campo magnético, fato oposto ao ocorrido para estrelas atômicas.

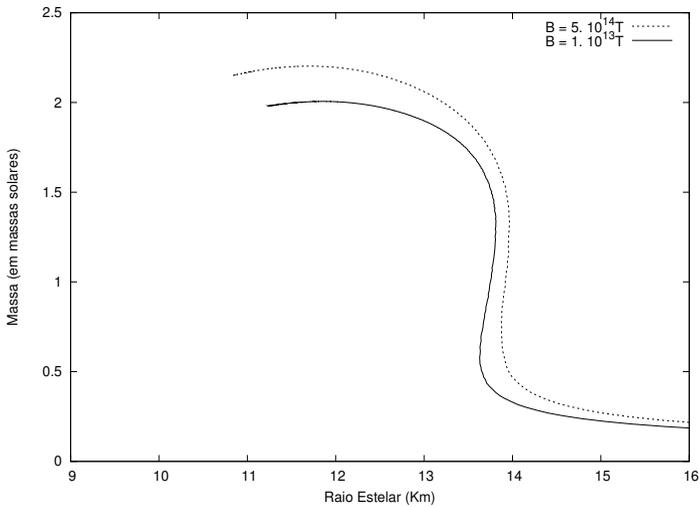


Fig. 7.4: *Relação Massa/Raio em função da densidade central*
Campos de $1.0 \cdot 10^{13} T$ e $5.0 \cdot 10^{14} T$.

Em relação a população de partículas, nenhuma diferença significativa para campos menores que $10^{13} T$. Quando o campo

magnético é da ordem de $5.0 \cdot 10^{14} T$ os efeitos da quantização dos níveis de Landau são importantes. Novamente a partícula Ξ^0 não está presente no interior estelar.

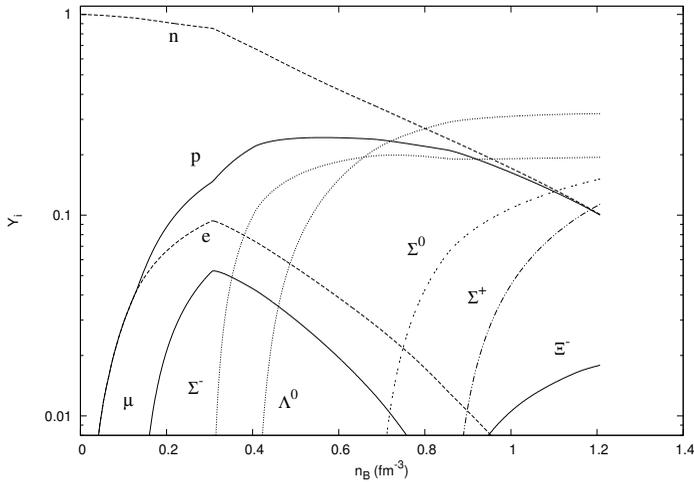


Fig. 7.5: População relativa das partículas em função da densidade estelar para campos de $10^{13} T$.

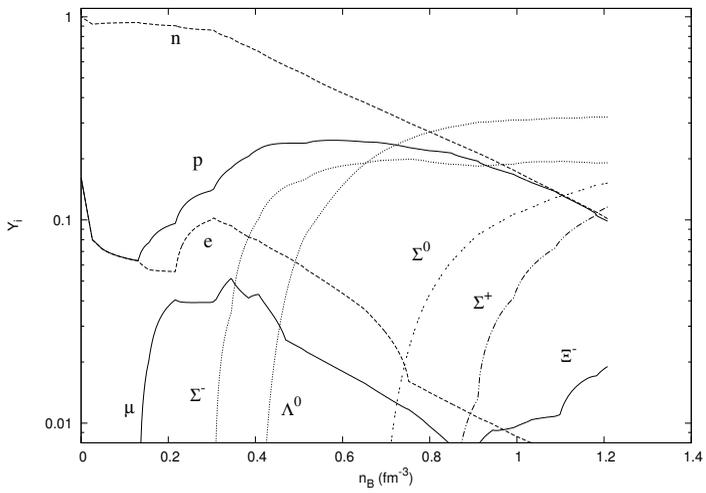


Fig. 7.6: *População relativa das partículas em função da densidade estelar para campos de $5.0 \cdot 10^{14} T$.*

Capítulo 8

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho construímos e estudamos vários modelos de estrelas de nêutrons, de tal forma, que cada novo modelo proposto fosse uma melhora do modelo anterior. Começamos obtendo as equações estruturais para uma estrela esfericamente simétrica em equilíbrio hidrostático, primeiro na aproximação newtoniana, e depois derivada da relatividade geral. Após isso, construímos várias equações de estado para resolver essas equações. Devido às altas densidades, vimos que os efeitos de temperatura podem ser desprezados, além do mais, para cada EoS obtida estudamos sempre a estabilidade estelar da mesma. Então, partindo de um gás de nêutrons livres, à temperatura zero, obtivemos nosso primeiro resultado, uma estrela cuja massa máxima não pode ser superior a 0.710 massas solares. Este formalismo apresentou dois problemas. O primeiro é o fato que nêutrons não são partículas estáveis e devem decair devido à interação fraca, e o segundo é o fato que observamos na natureza estrelas de nêutrons com massas bastante superiores a esta en-

contrada. Corrigimos o primeiro problema adicionando prótons e elétrons em equilíbrio beta e com carga total zero. Porém, isso reduziu ainda mais a massa máxima, nos levando à conclusão que para se descrever estrelas de nêutrons reais, as interações nucleares não podem ser desprezadas.

Simulamos os efeitos das interações nucleares com o modelo de Walecka linear, que consiste em incluir dois mésons como sendo os responsáveis pela interação entre os Hádrons. Este simples modelo nos permitiu descrever estrelas de nêutrons cujas previsões são compatíveis com as observações de estrelas de nêutrons reais. Porém, neste modelo linear, várias grandezas físicas previstas teoricamente diferem das grandezas medidas em laboratório, fazendo com que os resultados obtidos para as estrelas de nêutrons não fossem confiáveis. Nos vimos então obrigados a utilizar um modelo de hádrons interagentes mais preciso, trabalhamos então no chamado modelo de Walecka não-linear com a inclusão de um terceiro méson auxiliando nas interações nucleares. Neste formalismo, obtivemos estrelas que também são compatíveis com aquelas observadas na natureza, e com a vantagem das grandezas físicas previstas teoricamente irem ao encontro daquelas encontradas no laboratório.

Por fim, fizemos duas extensões da teoria. Primeiramente adicionamos híperons e múons no interior estelar em um equilíbrio beta generalizado, considerando que a estranheza não precisava ser conservada em uma escala de tempo macroscópica, o que causou uma redução significativa da massa máxima das nossas estrelas de nêutrons. Como segunda extensão, adicionamos um forte campo magnético dependente da densidade no interior estelar, o que causou um aumento da massa máxima.

Em todos os modelos estudados nossa EoS se mostrou estável (princípio de Le Chantelier) e causal. Para uma dada densidade de energia cada EoS retornava um diferente valor de pressão. Quanto maior a pressão para uma dada densidade de energia, mais dura é considerada a equação de estado, enquanto que quanto menor for a pressão, mais macia ela será. As estrelas de maior massa máxima são aquelas mais duras, isso já era de se esperar uma vez que o que sustenta a estrela contra o colapso gravitacional é a própria pressão, então quanto maior for a pressão num determinado regime, mais massa esta estrela pode aguentar. Se nos focalizarmos no formalismo da QHD-II, que é o que melhor descreve as propriedades nucleares, podemos entender o porquê das estrelas com híperons possuírem uma massa menor que aquelas sem híperons. A razão é que como os constituintes da estrela são férmions, quanto menos partículas a estrela tiver, mais e mais níveis energéticos são ocupados, e conseqüentemente, maior é a pressão fazendo com que a massa máxima que ela suporta também seja maior. O efeito de o campo magnético aumentar a massa máxima é devido ao fato que a pressão e a densidade de energia do próprio campo magnético são iguais, porém a pressão é sempre menor que a densidade de energia da matéria bariônica, logo a contribuição do campo magnético na pressão é mais significativa que sua contribuição na densidade de energia. Isso também se reflete no por que do campo magnético influenciar mais em estrelas com híperons do que sem híperons. Uma vez que somente o modelo da QHD-II retorna resultados confiáveis e que campos magnéticos iguais ou menores que $10^{13} T$ não afetam de maneira significativa as equações de estado, nos sobram quatro modelos

que podem descrever estrelas de nêutrons reais: QHD-II com ou sem híperons e com ou sem um campo magnético intenso. Podemos comparar estes quatro modelos no gráfico abaixo:

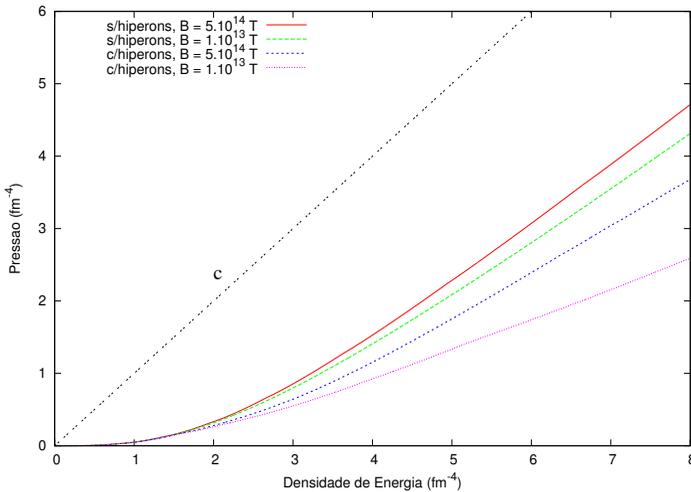


Fig. 8.1: *Equação de estado para quatro modelos da QHD-II.*

A linha “c” encontrada no gráfico corresponde ao limite causal, e como dissemos antes, nenhuma EoS cruza este vínculo.

Uma vez com a equação de estado em mãos, resolvemos as equações estruturais de Oppenheimer-Volkoff para cada EoS encontrada. O resultado dos nossos onze modelos discutidos

neste trabalho encontra-se na tabela abaixo:

Modelo	Constituintes	B (T)	Massa Max	Raio	$n_c \text{ fm}^{-3}$
gás livre	só nêutrons	0	$0.710 M_\odot$	8.95 km	2.12
gás livre	n, p, e	0	$0.698 M_\odot$	9.04 km	2.11
QHD-I	n, p, e	0	$2.57 M_\odot$	11.99 km	0.793
QHD-II	n, p, e	0	$2.39 M_\odot$	12.11 km	0.840
QHD-II	n, p, e, μ , Λ^0 $\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^-$	0	$2.01 M_\odot$	11.85 km	0.960
gás livre	n, p, e	$1 \cdot 10^{13}$	$0.702 M_\odot$	9.18 km	2.05
gás livre	n, p, e	$5 \cdot 10^{14}$	$1.69 M_\odot$	9.34 km	1.29
QHD-II	n, p, e	$1 \cdot 10^{13}$	$2.39 M_\odot$	12.10 km	0.841
QHD-II	n, p, e	$5 \cdot 10^{14}$	$2.47 M_\odot$	12.20 km	0.748
QHD-II	n, p, e, μ , Λ^0 $\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^-$	$1 \cdot 10^{13}$	$2.01 M_\odot$	11.84 km	0.952
QHD-II	n, p, e, μ , Λ^0 $\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^-$	$5 \cdot 10^{14}$	$2.19 M_\odot$	11.70 km	0.842

Por fim, podemos plotar as soluções das equações de Oppenheimer-Volkoff para cada uma das quatro equações de estado relevantes da QHD-II, comparando-as com os vínculos observacionais conhecidos através da medida de redshift e massa de algumas estrelas. As três linhas inclinadas são vínculos relacionados com a medida do redshift, que retornam a informação de qual é a relação massa/raio das estrelas. Temos um valor bem conhecido de $M/R = 0.15 M_\odot km^{-1}$ para o pulsar EXO0748-676 [34] e outro, para o pulsar 1E 1207.4-5209 cuja relação massa/raio está compreendido entre os valores $M/R = 0.069 M_\odot km^{-1}$ a $0.115 M_\odot km^{-1}$ [35]. Nossos quatro modelos são consistentes com esses vínculos, assim como estes quatro são capazes de prever o pulsar de 2.0 massas solares [19] cujo vínculo é representado pela linha horizontal.

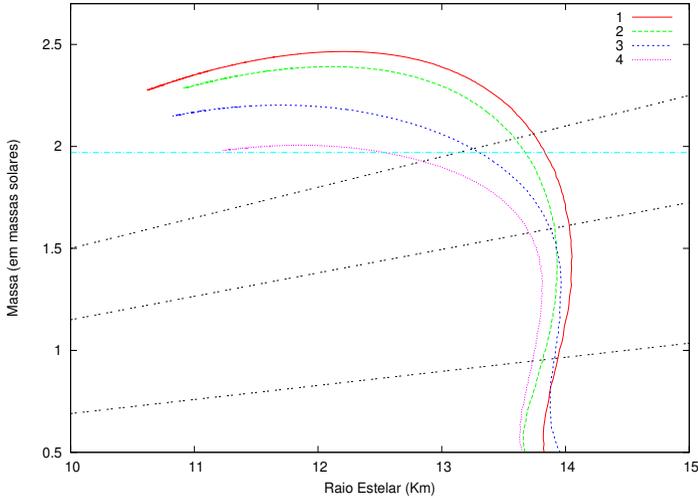


Fig. 8.2: *População relativa das partículas em função da densidade estelar para campos de $5.0 \cdot 10^{14} T$.*

Em relação a trabalhos futuros, a fim de deixar nossa descrição de estrelas de nêutrons mais realística, podemos melhorar e refinar os resultados encontrados até aqui através de:

- Estudar o efeito do campo magnético nas equações estruturais da relatividade geral, uma vez que ele próprio possui energia e destrói a simetria esférica da estrela.
- Incluir efeitos de rotação nas propriedades das estrelas.
- Incluir uma possível fase de quarks livres no núcleo das

estrelas de nêutrons.

- Incluir efeitos de uma fase supercondutora de cor caso exista quarks livres no interior das estrelas de nêutrons.

Apêndice A

Anãs Brancas

Anãs brancas, assim como estrelas de nêutrons, são objetos classificados como objetos compactos. Elas são o estágio final de estrelas com massas inferiores a 10 massas solares, suas densidades variam de 10^9 a 10^{12} kg/m^3 e seus raios são da ordem de 10.000 km [13]. Suas massas variam de 0.1 a 1.44 massas solares, sendo que não há expectativa de se encontrar anãs brancas com massas superiores, uma vez que este é chamado limite de Chandrasekhar [36]. Acredita-se que 97 % das estrelas da Via-Láctea terminarão suas vidas como uma anã branca [37].

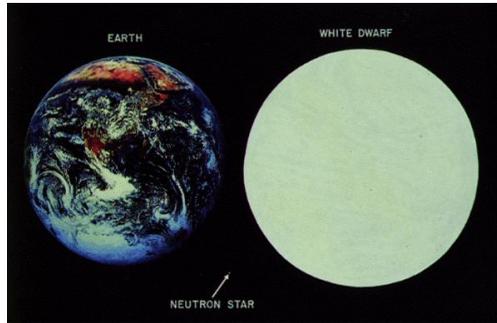


Fig. A.1: *Comparação entre uma anã branca, uma estrela de nêutrons e a Terra. Vale a pena notar que a anã branca e a estrela de nêutrons possuem aproximadamente a mesma massa, enquanto a Terra é aproximadamente um milhão de vezes menos massiva.*

A.1 Formalismo

Anãs brancas podem ser tratadas como um gás de elétrons totalmente degenerado. Como a pressão de uma anã branca não é tão alta como em uma estrela de nêutrons, é pouco provável que os elétrons atinjam o núcleo, fazendo que a pressão de degenerescência dos mesmos contrabalanceie a força gravitacional, enquanto o núcleo hadrônico permanece inerte como em um grande metal. A temperatura de Fermi para um gás de elétrons degenerados é de $5.0 \cdot 10^9$ K, enquanto temperatura típica de

anãs brancas é da ordem de $400\,000\text{ K}$, mostrando que podemos licitamente trabalhar numa aproximação de $T = 0$.

Já vimos que para um gás de Fermi no zero absoluto, o número de estados disponíveis é dado por:

$$n = \frac{k_f^3}{3\pi^2}. \quad (\text{A.1})$$

Para manter a neutralidade de carga, devemos igualar o número de elétrons no interior estelar ao número de prótons. Mais do que isso, de fato, anãs brancas como são formadas por estrelas de pouca massa não conseguem realizar a queima nuclear até o ferro, parando no carbono e no oxigênio. Como estes dois elementos possuem núcleos simétricos, devemos adicionar além de iguais números de prótons um número igual de nêutrons. A densidade de energia do interior estelar é então devida unicamente a matéria hadrônica inerte (uma vez que a densidade de energia dos elétrons é muito pequena e não significativa). Vamos considerar a densidade da estrela da seguinte forma [9, 13]:

$$\rho = \frac{M}{V} = nm_n \frac{A}{Z} = \epsilon, \quad (\text{A.2})$$

onde m_n é a massa do nucleon e A/Z é o número de nucleons por elétron, no nosso caso $A/Z = 2$. Comparando as equações (A.1) com a (A.2) obtemos:

$$k_f = \left(\frac{3\pi^2 \rho Z}{m_n A} \right)^{1/3}. \quad (\text{A.3})$$

Uma vez relacionado o momento de Fermi com a densidade, podemos agora construir uma equação de estado para descrever as anãs brancas considerando:

- Densidade de energia cuja fonte são as massas dos núcleons:

$$\epsilon = nm_n \frac{A}{Z}, \quad (\text{A.4})$$

- Pressão derivada da pressão de degenerescência dos elétrons:

$$p = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_f} \frac{k^4}{\sqrt{m_e^2 + k^2}} dk. \quad (\text{A.5})$$

Uma vez que a densidade de energia é muito maior que a pressão não precisamos de correções da relatividade especial e, como o raio de uma anã branca é muito maior que o raio de Schwarzschild não há necessidade de correções da relatividade geral. Como consequência disso, podemos utilizar as equações estruturais Newtonianas dadas pelas equações (2.10) e (2.11). Como resultado obtemos:

Podemos perceber que para grandes densidades (pequenos raios) a massa estabiliza num valor máximo. Na nossa resolução este valor é de 1.355 massas solares. A razão disso é que a equação de estado para grandes densidades se aproxima da forma ultra-relativística na qual $P = K\epsilon^{4/3}$. Uma equação de estado com esta forma tem uma massa que independe da densidade central e, esta é a origem do limite de Chandrasekhar. A medida que buscamos por estrelas com densidades centrais

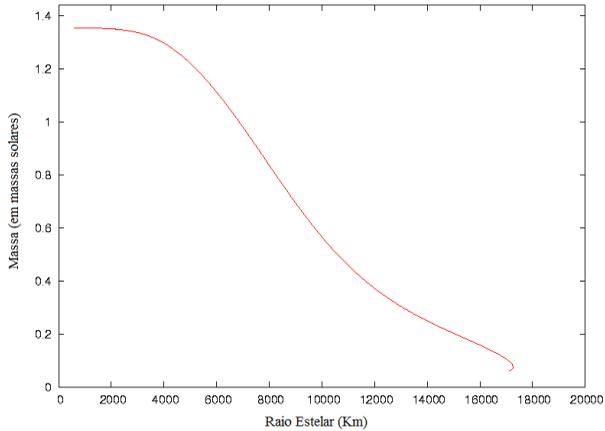


Fig. A.2: *Relação Massa/Raio em função da densidade central*

mais baixas a massa diminui e o raio aumenta até um valor de aproximadamente 17 mil km para depois decair junto com a massa. Tais valores de massa e raio estão totalmente de acordo com os resultados encontrados observacionalmente [7, 9, 13, 37].

Apêndice B

Tabelas de Valores numéricos

No decorrer do nosso trabalho, as várias constantes que estão explicitadas nas fórmulas devem ser substituídas pelos seus valores numéricos para se obter os resultados expressos no texto. Embora parte deste trabalho esteja no S.I, todos os valores apresentados estão no sistema de unidades naturais, uma vez que todos os resultados numéricos obtidos estão neste sistema. Por fim, vamos apresentar aqui, em duas tabelas, todos os valores relevantes em nosso trabalho. Em geral os parâmetros são os mesmos em todos os capítulos subsequentes, exceto as constantes adimensionais g_s e g_v que se diferenciam na QHD-I em relação a QHD-II. Para a QHD-I utilizamos os parâmetros sugeridos nas referências [7, 38], e para a QHD-II utilizamos o grupo de parâmetros denominado GM1 como nas referências [7, 18, 22].

Constante	Símbolo e valor numérico.
Constante gravitacional de Newton	$G = 1$ (adimensional)
Velocidade da luz no vácuo	$c = 1$ (adimensional)
Constante de Dirac	$\hbar = 1$ (adimensional)
$\hbar c$	$\hbar c = 197.3 \text{ Mev} \cdot \text{fm}$
Constante de Boltzmann	$k_b = 1$ (adimensional)
Densidade de saturação nuclear	$n_0 = 0.153 \text{ fm}^{-3}$
Parâmetros de ajuste para o campo magnético dependente da densidade	$\beta = 5.76 \cdot 10^{-3}$, $\alpha = 3$ (adimensionais)
Constante de acoplamento entre os bárions e o méson σ	$g_s = 6.960$ (QHD-I)
	$g_s = 6.970$ (QHD-II)
Constante de acoplamento entre os bárions e o méson ω	$g_v = 11.655$ (QHD-I)
	$g_v = 10.626$ (QHD-II)
Constante de acoplamento entre os bárions e o méson ρ	$g_\rho = 8.20$ (adimensional)
Constante de auto interação mesônica: $\sigma - \sigma$	$\kappa = 2.809 \cdot 10^{-2}$ fm^{-1}
Constante de auto interação mesônica: $\sigma - \sigma - \sigma$	$\lambda = -6.420 \cdot 10^{-3}$ (adimensional)
Razão entre o acoplamento híperons / σ	$= g_{s,H} / g_{s,N} = 0.7$ (adimensional)
Razão entre os acoplamentos (híperons / ω) e (hiperon / ρ)	$g_{v(\rho),H} / g_{v(\rho),N} = 0.783$ (adimensional)

Partícula	Tipo	M (MeV)	Q	S	I ₃	s
nêutron	bárion	939	0	1/2	- 1/2	0
próton	bárion	939	+1	1/2	+ 1/2	0
Λ^0	bárion	1116	0	1/2	0	- 1
Σ^-	bárion	1193	-1	1/2	-1	- 1
Σ^0	bárion	1193	0	1/2	0	-1
Σ^+	bárion	1193	+1	1/2	+ 1	-1
Ξ^-	bárion	1318	-1	1/2	-1/2	- 2
Ξ^0	bárion	1318	0	1/2	+1/2	- 2
σ	méson	400	0	0	0	0
ω	méson	783	0	1	0	0
ρ (ρ^+ , ρ^- , ρ^0)	mésons	770	+1, -1, 0	1	+1	0
elétron	lépton	0.511	-1	1/2	-	-
múon	lépton	105.6	-1	1/2	-	-

Tabela relacionada às propriedades das partículas: **M** é a massa, **Q** é a carga (em múltiplos da carga do próton), **S** é o spin, **I₃** é a projeção do isospin e **s** é o número quântico de estranheza.

Referências Bibliográficas

- [1] M. C. Miller: *Introduction to neutron stars*,
<http://www.astro.umd.edu/miller/nstar.html>
- [2] D. Griffiths: *Introduction to Quantum Mechanics*,
Benjamin Cummings, San Francisco - 2nd Edition - (2004)
- [3] Pierre. M. Pizzochero:
arXiv:1001.1272v1 - (2010)
- [4] P. Haensel, A. Y. Potekhin, D. G. Yakovlev:
Neutron Stars, Equation Of State And Structure,
Springer, New York - (2006)
- [5] R. Duncan, C. Thompson:
M.N.R.A.S. - 275, 255 - (1995)
- [6] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky: *Black Holes, White Dwarfs
and Neutron Stars - The Physics of Compact objects*,
John Willey & Sons, New Jersey - (1983)

-
- [7] N. K. Glendenning: *Compact Stars*,
Springer, New York - 2nd Edition - (2000)
- [8] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Fluid Mechanics*,
Butterworth-Heinemann, New Delhi, 2nd Edition - (1987)
- [9] I. Sagert et al.:
European Journal of Physics - 27, 577 - (2006)
- [10] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler: *Gravitation*,
Freeman, San Francisco - (1973)
- [11] J. Foster, J. D. Nightingale:
A Short Course in General Relativity,
Springer, New York, 3rd Edition - (2005)
- [12] Kerson Huang: *Introduction to Statistical Physics*,
Taylor & Francis, London - (2001)
- [13] R. R. Silbar, S. Reddy:
Am. J. Phys. 72, 7 - (2004)
- [14] H. B. Callen: *Thermodynamics and an Introduction to
Thermostatistics*, John Willey & Sons,
New Jersey, 2nd Edition - (1985)
- [15] M. Nussenzveig: *Curso de Física Básica - vol 2*,
Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo,
3ª Edição - (1996)

- [16] D. Griffiths: *Introduction to Elementary Particles*, WILEY-VCH, Weinheim - 2nd Edition - (2008)
- [17] J. D. Walecka: *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*, Oxford University Press, Oxford - (1995)
- [18] A. M. Santos:
Equações de Estado Hadrônica a Temperaturas Finitas e suas aplicações, Tese de Doutorado - UFSC - (2004)
- [19] P. B. Demorest, et al.:
Nature - 467, 1081 - (2010)
- [20] C. E. Rhoades, R. Ruffini:
Physical Review Letters - 32, 324 - (1974)
- [21] N. A. Lemos: *Mecânica Analítica*, Livraria da Física, São Paulo - 2ª Edição - (2007)
- [22] M. G. Paoli:
Efeitos da Existência da fase Mista em Estrelas de Nêutrons Híbridas, Dissertação de mestrado UFSC - (2010)
- [23] G. Baym, C. Pethick, P. Sutherland:
The Astrophysical Journal - 170, 299 (1971)
- [24] A. Green: *Nuclear Physics*, McGraw-Hill Book Company, Tokyo - (1955)
- [25] Wikipedia, The Free Encyclopedia: *Hyperon*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperon>

- [26] M. Gell-Mann, Y. Ne'eman: *The Eightfold Way*, Benjamin - New York - (1964)
- [27] W. M. Yao et al.:
Particle Data Group - Journal of Physics G - 33, 1 - (2006)
- [28] D. P. Menezes, C. Providência:
Brazilian Journal of Physics - 34, 3a - (2004)
- [29] K. Bhattacharya.:
arXiv:0705.4275v2 - (2008)
- [30] G. Arfken, H. Weber: *Física Matemática - Métodos Matemáticos para engenharia e física*, Editora Elsevier, Rio de Janeiro - 6ª Edição - (2007)
- [31] A. Broderick, M. Prakash, J. Lattimer:
The Astrophysical Journal - 537, 351- (2000)
- [32] A. Rabhi, C. Providência, J. Da Providência:
Journal of Physics G - 35, 125201 - (2008)
- [33] D. P. Menezes, et al.:
Physical Review C - 80, 065805 - (2009)
- [34] J. Cottam, F. Paerels, M. Mendez,
Nature - 420, 51 - (2002)
- [35] D. Sanwal et al.:
Astrophysical Journal Letters - 574, 61- (2002)

- [36] S. Chandrasekhar:
On Stars, Their Evolution and their Stability,
Nobel Lecture - (1983)
- [37] Wikipedia, The Free Encyclopedia: *White Dwarf*,
<http://en.wikipedia.org/wiki/White-dwarf>
- [38] B. D. Serot, J. D. Walecka:
Advances in Nuclear Physics - vol 16,
Plenum Press, New York - (1986)