

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Ubiratãn José Furtado

**GÁS DE NEUTRINOS INTERAGENTES EM UM MEIO NUCLEAR  
DENSO**

Florianópolis (SC)

2012



Ubiratãn José Furtado

**GÁS DE NEUTRINOS INTERAGENTES EM UM MEIO NUCLEAR  
DENSO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-  
Graduação em Física para a obtenção do  
Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Ricardo Mari-  
nelli

Florianópolis (SC)

2012

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária  
da  
Universidade Federal de Santa Catarina

F992g Furtado, Ubiratã José

Gás de neutrinos interagentes em um meio nuclear denso  
[dissertação] / Ubiratã José Furtado ; orientador, José  
Ricardo Marinelli. - Florianópolis, SC, 2012.

85 p.: il., grafs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa  
de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Física nuclear. 3. Neutrinos. 4. Seção de  
choque (Física nuclear). 5. Walecka, Modelo de. I. Marinelli,  
José Ricardo. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53

Ubiratãn José Furtado

**GÁS DE NEUTRINOS INTERAGENTES EM UM MEIO NUCLEAR  
DENSO**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis (SC), 04 de fevereiro 2012.

---

Prof. Dr. Luis Guilherme de Carvalho Rego  
Coordenador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. José Ricardo Marinelli  
Presidente

---

Prof. Dr. José Ricardo Marinelli  
Orientador

---

Prof. Dr. Felipe Arretche - membro externo



---

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini

---

Prof. Dr. Rafael Cavagnoli

---

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior



À minha família



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus amigos e colegas.

Agradeço ao Prof. Marinelli pela paciência e orientação.

E agradeço especialmente à Susane.



*A mente que se abre a uma nova idéia jamais  
voltará ao seu tamanho original.*

Albert Einstein



## RESUMO

Estamos interessados em estudar o comportamento dos neutrinos e suas propriedades em um meio nuclear denso. O meio nuclear será descrito pelo modelo de Walecka não linear, onde usamos a aproximação de campo médio para a solução do mesmo. Além de mésons, nucleons e léptons, incluímos os bósons fracos neutro  $Z$  e carregados  $W^+$  e  $W^-$  no modelo, calculando propriedades do sistema, como a densidade de energia, pressão e fração de partículas. Obtemos também a seção de choque total e o livre caminho médio dos neutrinos, levando em conta tanto espalhamentos, mediados pelo bóson fraco neutro, quanto absorção de neutrinos pelo meio, mediado pelos bósons carregados. Comparamos então o resultado para duas parametrizações diferentes para a interação forte: uma onde a não linearidade é introduzida explicitamente e os acoplamentos são definidos por constantes e outra onde tais constantes passam a depender da densidade. A solução desse problema tem interesse direto em simulações para a perda de neutrinos no momento da formação de uma estrela de nêutrons a partir da explosão de uma supernova.

**Palavras-chave:** Neutrinos. Livre caminho médio. Seção de choque. Interação fraca. Modelo de Walecka.



## ABSTRACT

The behavior and properties of neutrinos in dense nuclear matter is studied. The nuclear matter itself is described by the non-linear Walecka model, solved in the mean-field approximation. Besides the nucleons, mesons and leptons, the weak neutral boson and the weak charged bosons are included in the model and the energy density, pressure and particle fractions are calculated. We also obtain the total cross-section and mean-free path for the neutrinos, taking into account scattering and neutrino absorption. We compare the final results for two know kinds of model parametrizations: one in which non-linear effects in the strong sector are explicitly written in the model Lagrangian and another one in which the coupling constants are density dependent. The solution for this problem is interesting for the understanding of neutrino diffusion in a newly born neutron star after a supernova explosion.

**Keywords:** Neutrinos. Mean-free path. Cross-section. Weak force. Walecka's model.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Diagrama de Feynmann para um espalhamento de um neutrino por um nucleon ou por um elétron . . . . .	45
Figura 2	Diagrama de Feynmann para uma reação de absorção de um neutrino por um nêutron . . . . .	45
Figura 3	Diagrama de Feynmann para um espalhamento de um neutrino por outro neutrino . . . . .	47
Figura 4	Energia por bárion para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 1, 5$ e $30MeV$ . . . . .	53
Figura 5	Pressão total para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 1, 5$ e $30MeV$ . . . . .	54
Figura 6	Pressão x densidade de energia para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 1, 5$ e $30MeV$ . . . . .	55
Figura 7	Frações de partículas para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 1, 5$ e $30MeV$ . . . . .	56
Figura 8	Livre caminho médio dos neutrinos para GM1, com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 1MeV$ . . . . .	56
Figura 9	$\lambda$ dos neutrinos para GM1, com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 5MeV$ . . . . .	57
Figura 10	$\lambda$ dos neutrinos para GM1, com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 30MeV$ . . . . .	57
Figura 11	$\lambda_p$ , $\lambda_n$ e $\lambda_a$ para GM1 (linha cheia), TW (linha pontilhada) e SI (linha tracejada), com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 1MeV$ . . . . .	58
Figura 12	$\lambda_p$ , $\lambda_n$ e $\lambda_a$ para GM1 (linha cheia), TW (linha pontilhada) e SI (linha tracejada), com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 5MeV$ . . . . .	59
Figura 13	$\lambda_p$ , $\lambda_n$ e $\lambda_a$ para GM1 (linha cheia), TW (linha pontilhada) e SI (linha tracejada), com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 30MeV$ . . . . .	60
Figura 14	$\lambda_p$ e $\lambda_n$ com fator de forma para a massa do nucleon livre (linha tracejada), com fator de forma para a massa efetiva (linha pontilhada) e sem fator de forma (linha cheia) para GM1, com $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 5MeV$ . . . . .	61
Figura 15	Energia total por bárion para GM1 (linha cheia) e TW (linha tracejada), com $Y_V = 0$ e $K_B T = 1, 5$ e $30MeV$ . . . . .	62
Figura 16	Pressão total para GM1 (linha cheia) e TW (linha tracejada), com $Y_V = 0$ e $K_B T = 1, 5$ e $30MeV$ . . . . .	62
Figura 17	Pressão x densidade de energia para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com $Y_V = 0$ e $K_B T = 1, 5$ e $30MeV$ . . . . .	63
Figura 18	Livre caminho médio dos neutrinos para GM1, com $Y_V = 0$ e	

$K_B T = 1 MeV$ .....	63
Figura 19 $\lambda$ dos neutrinos para GM1, com $Y_\nu = 0$ e $K_B T = 5 MeV$ .....	64
Figura 20 $\lambda$ dos neutrinos para GM1, com $Y_\nu = 0$ e $K_B T = 30 MeV$ .....	64
Figura 21 $\lambda_T$ para GM1, com $\rho_B = 2\rho_0$ , $Y_L = 0,4$ e $K_B T = 1, 5$ e $30 MeV$	65
Figura 22 $\lambda_T$ para GM1, com $\rho_B = 2\rho_0$ , $Y_\nu = 0$ e $K_B T = 1, 5$ e $30 MeV$ .	66

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	21
<b>2 LAGRANGEANA DO MODELO E AS EQUAÇÕES DE ESTADO</b> .....	25
2.1 CORRENTE DE INTERAÇÃO FRACA DO BÓSON Z .....	25
2.2 CORRENTE DE INTERAÇÃO FRACA DOS BÓSONS $W^{\pm}$ ....	27
2.3 LAGRANGEANA TOTAL DO MODELO E EQUAÇÕES DE CAMPO .....	28
2.4 PARAMETRIZAÇÃO DEPENDENTE DA DENSIDADE.....	37
<b>3 LIVRE CAMINHO MÉDIO DOS NEUTRINOS</b> .....	43
<b>4 RESULTADOS</b> .....	49
<b>5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	67
APÊNDICE A – Cálculo da amplitude de transição $\mathcal{M}$ .....	71
APÊNDICE B – Cálculo da integral da seção de choque .....	79
Referências Bibliográficas .....	83



## 1 INTRODUÇÃO

Dentre as partículas consideradas fundamentais na constituição do Modelo Padrão, os neutrinos sempre estiveram associados aos grandes enigmas da Física do século XX. Desde sua descoberta, provocada pela necessidade de se preservar as leis de conservação de energia-momento e que causou grande controvérsia na interpretação do decaimento Beta, até mais recentemente com o fenômeno conhecido como oscilação de neutrinos, atualmente comprovado por várias observações experimentais e que tem importantes implicações para o Modelo Padrão, como o estabelecimento do fato de que o neutrino possui afinal massa de repouso. Apesar de não possuir carga elétrica e ter uma massa relativamente bastante pequena, e por isso mesmo ser de difícil detecção, os neutrinos podem revelar aspectos da estrutura da matéria que outras partículas, quando usadas como pontas de prova, não podem. A principal razão para isso é que o neutrino interage fracamente com as outras partículas, podendo assim carregar a informação dessa interação sem causar grandes distúrbios na estrutura e distribuição original das mesmas. Outra forma de dizermos isso é afirmando que a seção de choque dos neutrinos é pequena, ou analogamente, que seu livre caminho médio é grande dentro da matéria. Assim, por exemplo, os neutrinos foram importantes na confirmação da existência dos quarks dentro do nucleon, assim como no estudo de sua estrutura (BUDNEY, 1970).

Nas últimas duas a três décadas, neutrinos se tornaram extremamente importantes no estudo da formação e evolução de objetos astrofísicos, especialmente estrelas. Assim foi na observação dos neutrinos emitidos pelo Sol, a qual deu origem à oscilação de neutrinos (GRIFFITHS, 2009) e também na observação dos neutrinos provenientes da explosão da supernova observada em 1987. A esse respeito, acredita-se hoje que estrelas de nêutrons são formadas a partir dessa explosão e o comportamento dos neutrinos durante o seu processo de formação tem recebido bastante atenção da comunidade desde então. Na verdade, o papel dos neutrinos em eventos deste tipo foi preconizado já bem antes da observação de 1987 (GLENDENNING, 2000).

Na presente dissertação estamos interessados em estudar o comportamento dos neutrinos como parte de um gás de partículas interagentes formado por um setor hadrônico, constituído por prótons, nêutrons e mésons e um setor leptônico formado por elétrons e neutrinos de elétron. Em particular, queremos obter o livre caminho médio dos neutrinos dentro desse gás como função da energia do mesmo e da densidade. Para isso, temos que obter a equação de estado do sistema, onde efeitos de temperatura são explicitamente considerados. Embora cálculos desse tipo existam na literatura

considerando vários níveis de sofisticação e incluindo outras partículas, além das citadas acima, nos limitaremos aqui a focar a atenção na obtenção da seção de choque neutrino-partícula (e portanto do livre caminho médio), utilizando o menor grau de aproximação possível nesse cálculo, deixando para um futuro trabalho a inclusão de maiores sofisticações do modelo que nos dêem resultados que possam eventualmente simular o que se espera de objetos estelares compactos. Para isso temos que definir inicialmente o modelo que usaremos para o gás em questão.

Modelos relativísticos de campo médio têm sido vastamente usados para descrever a matéria nuclear. Tais modelos são usados também para descrever núcleos finitos assim como a matéria de estrelas de nêutrons. Na formação de tais estrelas, após uma explosão de supernova, sabemos que a maior parte da energia gravitacional é liberada através de neutrinos. Os neutrinos são também os principais responsáveis pelo resfriamento destas estrelas, pois levam para fora da mesma parte da energia gerada no decaimento  $\beta$ . Os neutrinos vindo de supernovas, se constituem desta forma em uma importante fonte para o estudo das mesmas e também para o estudo da constituição de estrelas de nêutrons, pois a grande maioria dos mesmos mantém as informações iniciais inalteradas até chegarem aos detectores, pelas razões discutidas acima.

A densidade média de uma estrela de nêutrons é  $\rho \approx 10^{14} \text{ g/cm}^3$ , enquanto que a densidade média da Terra é  $\rho \approx 6 \text{ g/cm}^3$ . Em densidades desta ordem os neutrinos ficam aprisionados na matéria, com o livre caminho médio sendo estimado como sendo de alguns centímetros, valor bem diferente para o caso de neutrinos produzidos no núcleo do Sol, onde a grande maioria escapa sem sofrer colisões. Nestas condições, os neutrinos se termalizam e obedecem a uma função de distribuição.

Os neutrinos interagem apenas através da força fraca e gravitacionalmente, mas esta última pode ser desprezada na obtenção da equação de estado do sistema e na obtenção da seção de choque, como veremos mais adiante. Introduziremos os neutrinos, que consideraremos sem massa de repouso, como um gás interagente na matéria nuclear. A interação entre os neutrinos e outras partículas do sistema, como elétrons e nucleons, é mediada pelos bósons da interação fraca  $Z$  e  $W^\pm$ . Isso nos permite descrever a equação de estado e o livre caminho médio dos neutrinos de forma consistente, assim como investigar o papel que diferentes parametrizações para a interação entre os bárions pode ter no comportamento dos neutrinos.

Descreveremos a matéria nuclear através do modelo de Walecka não linear (SEROT; WALECKA, 1986), (GLEDENNING, 2000), (TYPEL; WOLTER, 1999). Tal modelo considera que os nucleons interagem via troca de mésons escalares, vetoriais e isovetoriais. O sistema deve ser eletricamente

Campo	Descrição	Partículas	Massas (MeV)
$\psi$	Bárion	p, n	$M = 939$
$\psi_e$	Elétron	e	$m_e = 0.511$
$\psi_\nu$	Neutrino	$\nu$	zero
$\phi$	Méson escalar neutro	$\sigma$	$m_s = 550$
$V^\mu$	Méson vetorial neutro	$\omega$	$m_\nu = 783$
$\vec{b}^\mu$	Méson isovetorial carregado	$\rho^+, \rho^-, \rho^0$	$m_\rho = 763$
$Z^\mu$	Bóson fraco neutro	Z	$M_Z = 91,1876 \cdot 10^3$
$W^{\pm\mu}$	Bósons fracos carregados	$W^\pm$	$M_W = 80,4120 \cdot 10^3$
$A^\mu$	Fótons	$\gamma$	-

Tabela 1: Partículas do sistema

neutro, e para isto incluiremos os elétrons com a condição de neutralidade de carga elétrica. No entanto, como veremos, na aproximação de campo médio juntamente com a última condição, a interação eletromagnética não contribui para as propriedades do sistema. A tabela 1 apresenta as partículas que iremos considerar.

Embora saibamos que a presença de outros bárions (além de próton e nêutron), como os bárions estranhos, possa modificar substancialmente a equação de estado (GLENDENNING, 2000), assim como possivelmente o livre caminho médio dos neutrinos, aqui consideraremos apenas as partículas mostradas na tabela 1. Múons (e seus respectivos neutrinos) também devem ser importantes na composição de estrelas de nêutrons, especialmente a altas temperaturas e densidades (REDDY; PRAKASH, 1997), porém sua inclusão não modifica as técnicas usadas aqui para a obtenção da equação de estado, assim como do livre caminho médio. Em particular para a obtenção desse último, lembremos que as constantes de acoplamento com os hádrons é independente do sabor do neutrino.

No capítulo 2, apresentamos inicialmente a interação fraca entre as partículas que compõem o sistema na forma Lagrangeana. Além disso, a Lagrangeana modelo para descrever a interação entre os nucleons é definida. A partir daí a solução para o modelo é discutida e apresentada, a partir da qual obtêm-se então a equação de estado.

No capítulo 3, apresentamos a forma de cálculo para a seção de choque total dos neutrinos. Isto é feito sem nenhum tipo de aproximação, além do fato que consideramos uma região cinemática cujo momento transferido é bem menor que a massa do bóson mediador. Finalmente, no capítulo 4, os resultados numéricos para a equação de estado, assim como para o livre caminho médio, são apresentados. Analisamos o efeito que possíveis for-

mas de parametrização para a interação forte pode ter nos resultados, além da contribuição que a interação com cada tipo de partícula tem para o livre caminho médio. Algumas conclusões e perspectivas são discutidas e apontadas. Detalhes do cálculo da seção de choque são apresentados nos Apêndices A e B.

## 2 LAGRANGEANA DO MODELO E AS EQUAÇÕES DE ESTADO

Neste capítulo serão mostrados os termos da Lagrangeana do modelo utilizado. Escreveremos inicialmente a interação devida às correntes fracas em termos dos bóson mediadores da interação fraca,  $Z$  e  $W^\pm$ , tanto para os léptons como para os hádrons. Posteriormente, introduzimos a parte da Lagrangeana que descreve a interação forte entre os bárions, mediada pelos mésons escalar, vetorial e isovetorial. As definições e notação para as matrizes de Dirac são como definidas em (GRIFFITHS, 2009). Adotamos ainda a convenção  $\hbar = c = 1$ .

### 2.1 CORRENTE DE INTERAÇÃO FRACA DO BÓSON Z

A interação de uma corrente fraca neutra  $j_\mu$  com o bóson vetorial  $Z^\mu$  é  $-g j_\mu Z^\mu$  (HALZEN; MARTIN, 1984), sendo:

$$j_\mu = j_\mu^3 - \text{sen}^2(\theta_w) j_\mu^{em}$$

onde  $j_\mu^{em}$  é a corrente eletromagnética,  $j_\mu^3$  é a terceira componente da corrente de isospin fraca,  $\theta_w$  é o ângulo de Weinberg, e

$$g = \frac{e}{\text{sen}(\theta_w) \cos(\theta_w)}; \quad e^2 = \frac{4\pi}{137}. \quad (2.1)$$

A corrente fraca neutra para os nucleons é:

$$j_\mu^N = j_\mu^{N3} - \text{sen}^2(\theta_w) j_\mu^{N,em}.$$

Denotando o campo dos prótons por  $\psi_p$  e dos nêutrons por  $\psi_n$  temos:

$$j_\mu^{N,em} = \bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_p$$

$$j_\mu^{N3} = (\bar{\psi}_{pL} \quad \bar{\psi}_{nL}) \frac{\gamma_\mu}{2} \begin{pmatrix} \psi_{pL} \\ -\psi_{nL} \end{pmatrix} = \bar{\psi}_{pL} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{pL} - \bar{\psi}_{nL} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{nL},$$

onde o subíndice  $L$  indica a componente de mão esquerda do campo, ou seja,  $\psi_L = \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi$ . Portanto,

$$j_\mu^N = \bar{\psi}_p \frac{\gamma_\mu}{2} \left[ \frac{(1-\gamma^5)}{2} - 2\text{sen}^2(\theta_w) \right] \psi_p - \bar{\psi}_n \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_n.$$

Podemos escrever a expressão acima como:

$$j_\mu^N = \bar{\psi} \frac{\gamma_\mu}{2} (c_V - c_A \gamma^5) \psi \quad (2.2)$$

onde para os prótons:

$$c_V = \frac{1}{2} - 2\text{sen}^2(\theta_w); \quad c_A = \frac{1}{2}$$

e para os nêutrons:

$$c_V = -\frac{1}{2}; \quad c_A = -\frac{1}{2}.$$

Para os léptons, a corrente fraca neutra é:

$$j_\mu^l = j_\mu^{l3} - \text{sen}^2(\theta_w) j_\mu^{l,em},$$

com

$$j_\mu^{l,em} = -\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_e$$

e

$$j_\mu^{l3} = (\bar{\psi}_{\nu L} \quad \bar{\psi}_{eL}) \frac{\gamma_\mu}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\nu L} \\ -\psi_{eL} \end{pmatrix} = \bar{\psi}_{\nu L} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{\nu L} - \bar{\psi}_{eL} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{eL}.$$

Logo

$$j_\mu^l = \bar{\psi}_{\nu L} \frac{\gamma_\mu}{2} \psi_{\nu L} - \bar{\psi}_e \frac{\gamma_\mu}{2} \left[ \frac{(1 - \gamma^5)}{2} - 2\text{sen}^2(\theta_w) \right] \psi_e.$$

Assim,

$$j_\mu^l = \bar{\psi}_i \frac{\gamma_\mu}{2} (c_V - c_A \gamma^5) \psi_i, \quad (2.3)$$

onde  $\psi_i = \psi_\nu, \psi_e$  e para os elétrons:

$$c_V = -\frac{1}{2} + 2\text{sen}^2(\theta_w); \quad c_A = -\frac{1}{2},$$

enquanto que para os neutrinos:

$$c_V = \frac{1}{2}; \quad c_A = \frac{1}{2}.$$

A Lagrangeana dos termos que envolvem o bóson Z é então:

$$\mathcal{L}^Z = -g j_\mu^N Z^\mu - g j_\mu^l Z^\mu - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{M_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu \quad (2.4)$$

onde  $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ . Os dois últimos termos acima são o termo cinético

e o termo de massa do bóson  $Z$ , respectivamente.

## 2.2 CORRENTE DE INTERAÇÃO FRACA DOS BÓSONS $W^\pm$

A interação de uma corrente fraca carregada  $j_\mu^+$  com o bóson vetorial  $W^{+\mu}$  é  $-(g'/\sqrt{2})j_\mu W^{+\mu}$  (HALZEN; MARTIN, 1984), sendo:

$$j_\mu^{+N} = (\bar{\Psi}_{pL} \quad \bar{\Psi}_{nL}) \gamma^\mu \tau_+ \begin{pmatrix} \Psi_{pL} \\ \Psi_{nL} \end{pmatrix} = \bar{\Psi}_p \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \Psi_n$$

para os nucleons e

$$j_\mu^{+l} = (\bar{\Psi}_{\nu L} \quad \bar{\Psi}_{eL}) \gamma^\mu \tau_+ \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_{\nu L} \\ \bar{\Psi}_{eL} \end{pmatrix} = \bar{\Psi}_\nu \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \Psi_e$$

para os léptons, onde

$$g' = \frac{e}{\text{sen}(\theta_w)}; \quad \tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos escrever as correntes como:

$$\begin{aligned} j_\mu^{+N} &= \bar{\Psi}_p \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_n \\ j_\mu^{+l} &= \bar{\Psi}_\nu \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_e. \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde tanto para os nucleons quanto para os léptons  $g_V = 1 = g_A$ .

Para o bóson  $W^{-\mu}$  temos  $-(g'/\sqrt{2})j_\mu^- W^{-\mu}$  com:

$$\begin{aligned} j_\mu^{-N} &= j_\mu^{+N\dagger} = \bar{\Psi}_n \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_p \\ j_\mu^{-l} &= j_\mu^{+l\dagger} = \bar{\Psi}_e \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) \Psi_\nu. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A Lagrangeana dos termos que envolvem os bósons  $W^\pm$  é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^W &= -\frac{g'}{\sqrt{2}} j_\mu^{+N} W^{+\mu} - \frac{g'}{\sqrt{2}} j_\mu^{+l} W^{+\mu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^+ W^{+\mu\nu} + \frac{M_W^2}{2} W_\mu^+ W^{+\mu} \\ &\quad - \frac{g'}{\sqrt{2}} j_\mu^{-N} W^{-\mu} - \frac{g'}{\sqrt{2}} j_\mu^{-l} W^{-\mu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^- W^{-\mu\nu} + \frac{M_W^2}{2} W_\mu^- W^{-\mu} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $W_{\mu\nu}^{\pm} = \partial_{\mu}W_{\nu}^{\pm} - \partial_{\nu}W_{\mu}^{\pm}$ . Os termos  $-\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^{\pm}W^{\pm\mu\nu}$  e  $\frac{M_W^2}{2}W_{\mu}^{\pm}W^{\pm\mu}$  são os termos cinético e de massa, respectivamente, dos bósons fracos carregados.

### 2.3 LAGRANGEANA TOTAL DO MODELO E EQUAÇÕES DE CAMPO

Sabemos que matéria e energia alteram o espaço-tempo e o espaço-tempo move e modela as distribuições de matéria e de energia. Sabemos também que em qualquer ponto do espaço-tempo podemos construir um referencial inercial local (ou referencial de Lorentz local). Mesmo para um objeto extremamente massivo (como uma estrela de nêutrons após o colapso de uma supernova), a mudança relativa na métrica sobre uma distância típica de bárions é extremamente pequena, sendo tal mudança da ordem de  $10^{-19}$  ou menor (GLENDENNING, 2000). Portanto, para se ter uma mudança relevante na métrica, precisaríamos estender o referencial sobre um número muito grande de bárions. No entanto, as interações forte e fraca são de curto alcance, e efeitos gravitacionais podem ser desprezados na descrição de tais interações. Quanto à interação eletromagnética, como veremos adiante, ela não contribui na aproximação de campo médio utilizada aqui. Desta forma, se desprezarmos os efeitos de borda, podemos tratar o sistema como estando em um referencial de Lorentz e com tamanho infinito. A métrica do sistema é simplesmente a métrica de Minkowski, justificando a métrica usada nas expressões para  $\mathcal{L}^Z$  e  $\mathcal{L}^W$ . A densidade Lagrangeana total do modelo é constituída da Lagrangeana do modelo de Walecka não-linear ((SEROT; WALECKA, 1986), (GLENDENNING, 2000)), além dos termos cinéticos dos neutrinos e elétrons, o campo eletromagnético e a interação fraca. Desta forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} \left[ i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - g_{\nu}\gamma^{\mu}V_{\mu} - \frac{1}{2}g_{\rho}\gamma^{\mu}\vec{\tau}\cdot\vec{b}_{\mu} - (M - g_s\phi) \right] \psi \\ & - \frac{1}{2}m_s^2\phi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{3}\phi^3 + \frac{\lambda}{12}\phi^4\right) + \frac{1}{2}m_v^2V_{\mu}V^{\mu} + \frac{1}{2}m_{\rho}^2\vec{b}_{\mu}\cdot\vec{b}^{\mu} + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi)(\partial^{\mu}\phi) \\ & + \bar{\psi}_e(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m_e)\psi_e + i\bar{\psi}_\nu\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi_{\nu} - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\vec{B}_{\mu\nu}\cdot\vec{B}^{\mu\nu} \\ & - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\frac{1+\tau_3}{2}\psi A_{\mu} + e\bar{\psi}_e\gamma^{\mu}\psi_e A_{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}^Z + \mathcal{L}^W \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $V_{\mu\nu} = \partial_{\mu}V_{\nu} - \partial_{\nu}V_{\mu}$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$  e  $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\vec{b}_{\nu} - \partial_{\nu}\vec{b}_{\mu} - g_{\rho}\vec{b}_{\mu} \times \vec{b}_{\nu}$ . O méson escalar representa a interação atrativa entre os nucleons através

de  $-g_s \bar{\psi} \phi \psi$ , onde  $g_s$  é a constante de acoplamento e  $\bar{\psi} \psi$  é a densidade escalar de bárions. O méson vetorial representa a interação repulsiva entre os nucleons através de  $g_v \bar{\psi} \gamma_\mu V^\mu \psi$ , onde  $g_v$  é a constante de acoplamento e  $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  é a corrente bariônica conservada. O méson isovetorial diferencia prótons de nêutrons e a interação com os mesmos é  $(g_\rho/2) \bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu \psi$ , onde  $g_\rho$  é a constante de acoplamento,  $\bar{\psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \cdot \psi$  é a corrente de isospin bariônica e  $\vec{\tau}$  é o operador de isospin para o nucleon. Os termos não-lineares no campo escalar são importantes para reproduzir a compressibilidade da matéria nuclear (GAMBIR; RING; THIMET, 1990).

As equações de Euler-Lagrange para os campos mesônicos são então:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m_s^2 \phi + \frac{\kappa}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{6} \phi^3 = g_s \bar{\psi} \psi; \quad (2.9)$$

$$\partial_\mu V^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu = g_v \bar{\psi} \gamma^\nu \psi; \quad (2.10)$$

$$\partial_\mu \vec{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{b}^\nu = \frac{g_\rho}{2} \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi. \quad (2.11)$$

Para os campos eletrofracos, obtemos:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{1 + \tau_3}{2} \psi - e \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e; \quad (2.12)$$

$$\partial_\mu Z^{\mu\nu} + g j^{\nu N} + g j^{\nu} = M_Z^2 Z^\nu; \quad (2.13)$$

$$\partial_\mu W^{\pm\mu\nu} + \frac{g'}{\sqrt{2}} j^{\pm N\nu} + \frac{g'}{\sqrt{2}} j^{\pm l\nu} = M_W^2 W^{\pm\nu}. \quad (2.14)$$

Finalmente, para os férmions:

$$\begin{aligned} & \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^\mu V_\mu - \frac{1}{2} g_\rho \gamma^\mu \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu - (M - g_s \phi) \right] \psi - e \gamma^\mu \frac{1 + \tau_3}{2} \psi A_\mu \\ & - g \frac{\gamma^\mu}{2} (c_V - c_A \gamma^5) Z_\mu \psi - \frac{g'}{\sqrt{2}} \frac{1 + \tau_3}{2} \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) W^{+\mu} \frac{1 - \tau_3}{2} \psi \\ & - \frac{g'}{\sqrt{2}} \frac{1 - \tau_3}{2} \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) W^{-\mu} \frac{1 + \tau_3}{2} \psi = 0; \quad (2.15) \\ & \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - m_e + e \gamma^\mu A_\mu - g \frac{\gamma^\mu}{2} (c_V - c_A \gamma^5) Z_\mu \right] \psi_e \end{aligned}$$

$$-\frac{g'}{\sqrt{2}} \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) W^{-\mu} \psi_\nu = 0; \quad (2.16)$$

$$\left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g \frac{\gamma^\mu}{2} \frac{1 - \gamma^5}{2} Z_\mu \right] \psi_\nu - \frac{g'}{\sqrt{2}} \frac{\gamma_\mu}{2} (g_V - g_A \gamma^5) W^{+\mu} \psi_e = 0. \quad (2.17)$$

Usando a aproximação de campo médio, quando os campos dos bósons são aproximados pelos seus valores médios, temos:

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0$$

$$V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0$$

$$\vec{b}_\mu \rightarrow \langle \vec{b}_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \delta_{i3} b_0$$

$$A_\mu \rightarrow \langle A_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} A_0$$

$$Z_\mu \rightarrow \langle Z_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} Z_0.$$

onde a média é tomada em relação ao estado do sistema e agora os campos são independentes de  $x^\mu$ .

O campo  $A_0$  para um sistema estático e uniforme com  $\rho_p = \rho_e$  é nulo. Observando a equação de campo (após a aproximação de campo médio) para  $Z_0$ , obtemos:

$$g j^{N\nu} + g j^{l\nu} = M_Z^2 Z_0,$$

vemos que podemos desprezar o campo fraco  $Z$  no cálculo da densidade de energia e da pressão do sistema, devido ao grande valor da sua massa. Observamos ainda que na aproximação de campo médio a contribuição dos campos  $W^\pm$  é nula, pois para um sistema estático não temos mudança no sabor das partículas. Portanto, a interação fraca será importante apenas para o cálculo da seção de choque e livre caminho médio dos neutrinos, e não será levada em conta para o cálculo da densidade de energia e pressão do sistema. A partir de tais considerações, a densidade Lagrangeana fica sendo, para efeito da obtenção da equação de estado, a seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_V \gamma^0 V_0 - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 b_0 - (M - g_s \phi_0) \right] \psi \\ & - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{3} \phi_0^3 + \frac{\lambda}{12} \phi_0^4 \right) + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 b_0^2 \\ & + \bar{\psi}_e (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_e) \psi_e + i\bar{\psi}_\nu \gamma_\mu \partial^\mu \psi_\nu. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Quanto aos demais termos, envolvendo os bósons da interação fraca, volta-

remos a discutí-los mais adiante (ver Apêndice A). As equações de Euler-Lagrange para os campos mesônicos são então:

$$m_s^2 \phi_0 + \frac{\kappa}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{6} \phi_0^3 = g_s \langle \bar{\psi} \psi \rangle = g_s \rho_s; \quad (2.19)$$

$$m_v^2 V_0 = g_v \langle \psi^\dagger \psi \rangle = g_v \rho_B; \quad (2.20)$$

$$m_p^2 b_0 = \frac{1}{2} g_p \langle \psi^\dagger \tau_3 \psi \rangle = \frac{1}{2} g_p (\rho_p - \rho_n) = \frac{1}{2} g_p \rho_3; \quad (2.21)$$

e para os férmions:

$$\left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 V_0 - \frac{1}{2} g_p \tau_3 \gamma^0 b_0 - (M - g_s \phi_0) \right] \psi = 0; \quad (2.22)$$

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_e) \psi_e = 0; \quad (2.23)$$

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi_\nu = 0. \quad (2.24)$$

Onde  $\rho_B = \langle \psi^\dagger \psi \rangle =$  densidade bariônica é a fonte do campo vetorial,  $\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle =$  densidade escalar de Lorentz é a fonte do campo escalar,  $\rho_3$  é a fonte do campo isovetorial,  $\rho_p$  é a densidade de prótons e  $\rho_n$  é a densidade de nêutrons. A densidade de elétrons é  $\rho_e = \langle \psi_e^\dagger \psi_e \rangle$  e a de neutrinos é  $\rho_\nu = \langle \psi_\nu^\dagger \psi_\nu \rangle$ .

Para calcular a densidade de energia e a pressão, usaremos o tensor energia-momento. Em mecânica dos meios contínuos, o tensor energia-momento é definido por:

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu q_i)}$$

com  $\partial_\nu (T_\mu^\nu) = 0$ , onde, em nosso caso, os  $q_i$ 's vão representar os campos. Para um sistema uniforme, onde não há condução de calor e não há viscosidade, o tensor energia-momento pode também ser escrito como (SEROT; WALECKA, 1986):

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}$$

onde  $\varepsilon$  é a densidade de energia,  $P$  é a pressão e  $u_\mu$  é a quadri-velocidade do fluido. Sabendo que  $u_\mu^2 = 1$ , e que para um fluido em repouso  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ,

temos:

$$\langle T_{00} \rangle = \varepsilon; \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle = P. \quad (2.26)$$

Aplicando ao nosso problema e com a aproximação de campo médio, as únicas variáveis agora são os campos dos nucleons, neutrinos e elétrons. O tensor energia-momento é então:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi_e)}\frac{\partial\psi_e}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi_\nu)}\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x^\nu} \\ T_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi + i\bar{\psi}_e\gamma_\mu\partial_\nu\psi_e + i\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu\partial_\nu\psi_\nu \\ T_{\mu\nu} &= i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi + i\bar{\psi}_e\gamma_\mu\partial_\nu\psi_e + i\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu\partial_\nu\psi_\nu \\ -g_{\mu\nu} &\left(-\frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \frac{\kappa}{6}\phi_0^3 - \frac{\lambda}{24}\phi_0^4 + \frac{1}{2}m_\nu^2V_0^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2b_0^2\right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde usamos as equações de campo (2.22), (2.23) e (2.24) na última passagem.

Para calcular a densidade de energia e a pressão, precisamos encontrar os campos  $\psi$ ,  $\psi_e$  e  $\psi_\nu$  usando as equações (2.22), (2.23) e (2.24), respectivamente. Para resolver a equação de Dirac (2.22), tentamos uma solução de onda plana do tipo:

$$\psi = \psi_\alpha e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\varepsilon(k)t}$$

onde  $\psi_\alpha$  é um spinor de Dirac,  $\vec{k}$  é o momento e  $\varepsilon(k)$  deve ser determinado. Substituindo a expressão acima na eq. (2.22), obtemos:

$$\left[ \gamma^0\varepsilon(k) - \vec{\gamma}\cdot\vec{k} - M^* - g_\nu\gamma^0V_0 - \frac{1}{2}g_\rho\tau_3\gamma^0b_0 \right] \psi_\alpha = 0.$$

O termo  $M^* \equiv M - g_s\phi_0$  é a massa efetiva. Multiplicamos a equação acima por  $\gamma^0$ , elevamos ao quadrado e após um rearranjo dos termos, obtemos:

$$\varepsilon^\pm(k) = g_\nu V_0 + \frac{1}{2}g_\rho\tau_3 b_0 \pm E^* \quad (2.28)$$

onde

$$E^* = \sqrt{\vec{k}^2 + M^{*2}}. \quad (2.29)$$

A solução geral é a superposição das funções de onda planas em todos os momentos  $\vec{k}$  e em todos os spins  $\lambda$ . Assim, o campo dos nucleons, após quantização, pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ A_{\vec{k}, \lambda} U(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\varepsilon^+(k)t} \right. \\ & \left. + B_{\vec{k}, \lambda}^\dagger V(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\varepsilon^-(k)t} \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde  $1/\sqrt{V}$  é a normalização de  $\psi(\vec{x}, t)$ . O spinor  $U(\vec{k}, \lambda)$  satisfaz a equação de Dirac para  $\vec{k}$  e  $\varepsilon^+(k)$ , e o spinor  $V(\vec{k}, \lambda)$  satisfaz a equação de Dirac para  $-\vec{k}$  e  $\varepsilon^-(k)$ . Os operadores de criação (aniquilação) de partículas ( $A$ ) e anti-partículas ( $B$ ) satisfazem as regras de anticomutação usuais:

$$\begin{aligned} \{A_{\vec{k}, \lambda}, A_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} &= \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} = \{B_{\vec{k}, \lambda}, B_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} \\ \{A_{\vec{k}, \lambda}, B_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} &= \{A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, B_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} = 0 \\ \{A_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, B_{\vec{k}', \lambda'}\} &= \{A_{\vec{k}, \lambda}, B_{\vec{k}', \lambda'}\} = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Podemos ainda obter, a partir da equação de Dirac, os seguintes resultados para os spinores:

$$M^* U^\dagger(\vec{k}, \lambda) U(\vec{k}, \lambda) = E^* \bar{U}(\vec{k}, \lambda) U(\vec{k}, \lambda) \quad (2.32)$$

$$M^* V^\dagger(\vec{k}, \lambda) V(\vec{k}, \lambda) = -E^* \bar{V}(\vec{k}, \lambda) V(\vec{k}, \lambda). \quad (2.33)$$

Para encontrar os campos  $\psi_e$  e  $\psi_\nu$  seguimos um procedimento análogo. Para os elétrons temos:

$$\begin{aligned} \psi_e(\vec{x}, t) = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left\{ A_{\vec{k}, \lambda}^e U^e(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\varepsilon_e^+(k)t} \right. \\ & \left. + B_{\vec{k}, \lambda}^{e\dagger} V^e(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\varepsilon_e^-(k)t} \right\}; \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_e^\pm(k) = \pm \sqrt{k^2 + m_e^2}. \quad (2.35)$$

onde o spinor  $U^e(\vec{k}, \lambda)$  satisfaz a equação de Dirac para  $\vec{k}$  e  $\varepsilon_e^+(k)$ , e o spinor  $V^e(\vec{k}, \lambda)$  satisfaz a equação de Dirac para  $-\vec{k}$  e  $\varepsilon_e^-(k)$ .

Para os neutrinos a solução geral é a superposição das funções de onda planas em todos os momentos  $\vec{k}$ , e como temos apenas neutrinos de quiralidade bem definida, não necessitamos somar em todos os spins, uma vez que

já estamos somando no momento. Desta forma:

$$\psi_V(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left\{ A_{\vec{k}}^{\dagger} U(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\varepsilon_l^+(k)t} + B_{\vec{k}}^{\dagger} V(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\varepsilon_l^-(k)t} \right\}; \quad (2.36)$$

$$\varepsilon_l^{\pm}(k) = \pm\sqrt{k^2} = \pm k. \quad (2.37)$$

Podemos agora calcular a densidade de energia e a pressão do sistema. A densidade de energia é dada pela equação (2.25):

$$\begin{aligned} \varepsilon = T_{00} = & \langle i\psi^{\dagger} \partial_0 \psi \rangle + \langle i\psi_e^{\dagger} \partial_0 \psi_e \rangle + \langle i\psi_{\nu}^{\dagger} \partial_0 \psi_{\nu} \rangle \\ & - \left\langle \left( -\frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 - \frac{\kappa}{6} \phi_0^3 - \frac{\lambda}{24} \phi_0^4 + \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 + \frac{1}{2} m_p^2 b_0^2 \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.38)$$

A fim de calcular os valores esperados acima, definimos as seguintes médias em termos das distribuições de férmions a uma dada temperatura  $T$ :

$$\begin{aligned} \langle \psi_T | A_{k'\lambda}^{\dagger} A_{k\lambda} | \psi_T \rangle &= \delta_{\vec{k}', \vec{k}} \delta_{\lambda', \lambda} \eta_k(T) \\ \langle \psi_T | B_{k'\lambda}^{\dagger} B_{k\lambda} | \psi_T \rangle &= \delta_{\vec{k}', \vec{k}} \delta_{\lambda', \lambda} \bar{\eta}_k(T) \\ \langle \psi_T | A_{k\lambda}^{\dagger} B_{k\lambda} | \psi_T \rangle &= 0 \\ \langle \psi_T | B_{k\lambda}^{\dagger} A_{k\lambda} | \psi_T \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde  $\eta_k(T)$  é a função de distribuição das partículas e  $\bar{\eta}_k(T)$  é a função de distribuição das antipartículas. O mesmo vale para os elétrons e os neutrinos. Por outro lado, a média espacial é calculada integrando no espaço e dividindo pelo volume  $V$ . Usamos então:

$$\int_V e^{\pm i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}} d^3x = V \delta_{\vec{k}', \vec{k}}, \quad (2.40)$$

além das relações de ortogonalidade:

$$U^{\dagger}(\vec{k}', \lambda') U(\vec{k}, \lambda) = \delta_{\vec{k}', \vec{k}} \delta_{\lambda', \lambda} = V^{\dagger}(\vec{k}', \lambda') V(\vec{k}, \lambda) \quad (2.41)$$

$$U^{\dagger}(\vec{k}', \lambda') V(\vec{k}, \lambda) = 0. \quad (2.42)$$

Finalmente, a transição do discreto para o contínuo é feita usando a relação:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \rightarrow \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k.$$

Com as relações acima podemos voltar à equação (2.38) para calcular os valores esperados. Encontramos então para a densidade de energia do sistema:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = & \sum_{i=p,n} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k E^* (\eta_{ki}(T) + \bar{\eta}_{ki}(T)) \\
 & + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{k^2 + m_e^2} (\eta_{ke}(T) + \bar{\eta}_{ke}(T)) \\
 & + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (k) (\eta_{kv}(T) + \bar{\eta}_{kv}(T)) + \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B^2 + \frac{1}{8} \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \rho_3^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{6} \frac{\kappa}{g_s^3} (M - M^*)^3 + \frac{1}{24} \frac{\lambda}{g_s^4} (M - M^*)^4 \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

onde usamos as equações de campo para substituir os campos dos mésons da interação forte.

As distribuições são:

$$\begin{aligned}
 \eta_{ki}(T) &= \{ \exp[(E_i - \mu_i)/K_B T] + 1 \}^{-1}; \\
 \bar{\eta}_{ki}(T) &= \{ \exp[(\bar{E}_i - \bar{\mu}_i)/K_B T] + 1 \}^{-1} \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

onde  $E_i$  é a energia de uma partícula única,  $\mu_i$  é o potencial químico das partículas,  $\bar{\mu}_i$  é o potencial químico das antipartículas e  $i = p, n, e, v$ . A energia de uma partícula única é  $E_i = \varepsilon_i^+(k)$  e a energia de uma antipartícula é  $\bar{E}_i = -\varepsilon_i^-(k)$ , com  $\varepsilon_i^\pm(k)$  dado pelas equações (2.28) ou (2.35) ou (2.37).

Para os prótons:

$$E_p = E^* + \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B + \frac{g_\rho^2}{4m_\rho^2} \rho_3; \quad (2.45)$$

$$\bar{E}_p = E^* - \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B - \frac{g_\rho^2}{4m_\rho^2} \rho_3; \quad (2.46)$$

para os nêutrons:

$$E_n = E^* + \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B - \frac{g_\rho^2}{4m_\rho^2} \rho_3; \quad (2.47)$$

$$\bar{E}_n = E^* - \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B + \frac{g_\rho^2}{4m_\rho^2} \rho_3; \quad (2.48)$$

para os elétrons:

$$E_e = \sqrt{k^2 + m_e^2} = \bar{E}_e; \quad (2.49)$$

e para os neutrinos:

$$E_\nu = k = \vec{E}_\nu. \quad (2.50)$$

Sabendo que no equilíbrio termodinâmico, a energia livre de Helmholtz  $F$  para temperatura  $T$  e volume  $V$  fixos é mínima,  $\delta F = \mu_i \delta N_i + \bar{\mu}_i \delta \bar{N}_i = 0$ , e que o número total de partículas é conservado,  $\delta N_{i,total} = \delta N_i - \delta \bar{N}_i = 0$ , obtemos  $\delta F = \delta N_i (\mu_i + \bar{\mu}_i) = 0$ . Como as variações no número de partículas  $\delta N_i$  são arbitrárias, reduzimos o número de parâmetros a serem determinados, pois temos assim que

$$\bar{\mu}_i = -\mu_i. \quad (2.51)$$

A pressão pode ser calculada através da equação (2.26):

$$\begin{aligned} \hat{P} = \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) &= -\frac{i}{3} \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi - \frac{i}{3} \psi_e^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi_e - \frac{i}{3} \psi_\nu^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi_\nu \\ &+ \left( -\frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 - \frac{\kappa}{6} \phi_0^3 - \frac{\lambda}{24} \phi_0^4 + \frac{1}{2} m_\nu^2 V_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 b_0^2 \right). \end{aligned}$$

Usando agora os resultados para os spiniores:

$$\begin{aligned} U^\dagger(\vec{k}, \lambda) \vec{\alpha} \cdot \vec{k} U(\vec{k}, \lambda) &= \frac{k^2}{E^*} \\ V^\dagger(\vec{k}, \lambda) (-\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) V(\vec{k}, \lambda) &= -\frac{k^2}{E^*}, \end{aligned}$$

e seguindo um procedimento similar ao que foi feito na obtenção da densidade de energia, obtemos:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \sum_{i=p,n} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k^2}{E^*} (\eta_{ki}(T) + \bar{\eta}_{ki}(T)) \\ &+ \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_e^2}} (\eta_{ke}(T) + \bar{\eta}_{ke}(T)) \\ &+ \frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p(p) (\eta_{p\nu}(T) + \bar{\eta}_{p\nu}(T)) + \frac{1}{2} \frac{g_\nu^2}{m_\nu^2} \rho_B^2 + \frac{1}{8} \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \rho_3^2 \\ &- \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} (M - M^*)^2 - \frac{1}{6} \frac{\kappa}{g_s^3} (M - M^*)^3 - \frac{1}{24} \frac{\lambda}{g_s^4} (M - M^*)^4. \quad (2.52) \end{aligned}$$

Observando as equações de campo (2.20) e (2.21), vemos que quando fixamos a densidade bariônica e a fração de prótons, os campos  $V_0$  e  $b_0$  ficam determinados. Para encontrar o campo  $\phi_0$ , ou equivalentemente a massa

efetiva  $M^*$ , temos que resolver a equação de campo (2.19). Isso nos leva a:

$$\begin{aligned} & \frac{m_s^2}{g_s}(M - M^*) + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{g_s^2}(M - M^*)^2 + \frac{1}{6} \frac{\lambda}{g_s^3}(M - M^*)^3 \\ & = g_s \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{E^*} (\eta_k(T) + \bar{\eta}_k(T)). \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde o termo do lado direito é a densidade escalar. As demais densidades por sua vez são:

$$\rho_B = \sum_{i=p,n} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k (\eta_{ki}(T) - \bar{\eta}_{ki}(T)); \quad (2.54)$$

$$\rho_e = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k (\eta_{ke}(T) - \bar{\eta}_{ke}(T)); \quad (2.55)$$

$$\rho_v = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (\eta_{kv}(T) - \bar{\eta}_{kv}(T)). \quad (2.56)$$

## 2.4 PARAMETRIZAÇÃO DEPENDENTE DA DENSIDADE

Até agora tratamos as constantes de acoplamento da interação forte como tendo o mesmo valor para qualquer densidade bariônica. Tais constantes são ajustadas para reproduzir propriedades da matéria nuclear na densidade bariônica de saturação. As auto-interações do méson  $\sigma$  foram introduzidas para se obter um melhor acordo com tais propriedades. No entanto, modelos sem as auto-interações do méson  $\sigma$ , mas agora contendo constantes de acoplamento que dependem explicitamente da densidade bariônica, foram também propostos na literatura (TYPEL; WOLTER, 1999), os quais também são capazes de reproduzir tais propriedades, além de produzir um excelente acordo com dados experimentais de núcleos, como energia de ligação e raio de carga.

Uma vez que um de nossos objetivos aqui é comparar os dois tipos de parametrização na obtenção do livre caminho médio dos neutrinos, trataremos o caso onde as constantes de acoplamento do modelo de Walecka são dependentes da densidade bariônica. A densidade Lagrangeana, sem as auto-interações do méson  $\sigma$  e sem os campos eletrofracos (que da mesma forma não contribuirão na aproximação de campo médio), passa a ser:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[ i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^\mu V_\mu - \frac{1}{2} g_\rho \gamma^\mu \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu - (M - g_s \phi) \right] \psi$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}m_s^2\phi^2 + \frac{1}{2}m_v^2V_\mu V^\mu + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) \\
& + \bar{\psi}_e(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_e)\psi_e + i\bar{\psi}_\nu\gamma_\mu\partial^\mu\psi_\nu - \frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} \quad (2.57)
\end{aligned}$$

onde agora  $g_s = g_s(\hat{\rho}_B)$ ,  $g_v = g_v(\hat{\rho}_B)$  e  $g_\rho = g_\rho(\hat{\rho}_B)$ . As equações de Euler-Lagrange para os campos permanecem as mesmas que anteriormente (fazendo agora  $\kappa = \lambda = 0$ ), com exceção da equação de campo para  $\bar{\psi}$ , pois agora  $g_s$ ,  $g_v$  e  $g_\rho$  dependem de  $\hat{\rho}_B = \sqrt{j_\mu j^\mu}$ ,  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left[ i\gamma_\mu\partial^\mu - g_v\gamma^\mu V_\mu - \frac{1}{2}g_\rho\gamma^\mu\vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu - (M - g_s\phi) \right] \psi \\
& - \left[ \frac{\partial g_v}{\partial \hat{\rho}_B} \frac{\partial \hat{\rho}_B}{\partial \bar{\psi}} \bar{\psi}\gamma^\mu V_\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\rho}{\partial \hat{\rho}_B} \frac{\partial \hat{\rho}_B}{\partial \bar{\psi}} \bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu - \frac{\partial g_s}{\partial \hat{\rho}_B} \frac{\partial \hat{\rho}_B}{\partial \bar{\psi}} \bar{\psi}\phi \right] \psi = 0.
\end{aligned}$$

Substituindo  $\partial \hat{\rho}_B / \partial \bar{\psi} = \gamma^\mu j_\mu \psi / \hat{\rho}_B$  na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left[ i\gamma_\mu\partial^\mu - g_v\gamma^\mu V_\mu - \frac{1}{2}g_\rho\gamma^\mu\vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu - (M - g_s\phi) \right] \psi \\
& - \gamma^\mu \frac{j_\mu}{\hat{\rho}_B} \left[ \frac{\partial g_v}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\psi}\gamma^\nu V_\nu \psi + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\rho}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\psi}\gamma^\nu\vec{\tau} \cdot \vec{b}_\nu \psi - \frac{\partial g_s}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\psi}\phi \psi \right] \psi = 0.
\end{aligned}$$

ou

$$\left[ \gamma^\mu (i\partial_\mu - \Sigma_\mu) - (M - g_s\phi) \right] \psi = 0 \quad (2.58)$$

onde

$$\Sigma_\mu = g_v V_\mu + \frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{b}_\mu + \Sigma_\mu^R \quad (2.59)$$

e  $\Sigma_\mu^R$  é o chamado termo de rearranjo:

$$\Sigma_\mu^R = \frac{j_\mu}{\hat{\rho}_B} \left[ \frac{\partial g_v}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\psi}\gamma^\nu V_\nu \psi + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\rho}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\psi}\gamma^\nu\vec{\tau} \cdot \vec{b}_\nu \psi - \frac{\partial g_s}{\partial \hat{\rho}_B} \bar{\psi}\phi \psi \right]. \quad (2.60)$$

Com a aproximação de campo médio, temos:

$$m_s^2\phi_0 = g_s\rho_s; \quad (2.61)$$

$$m_v^2V_0 = g_v\rho_B; \quad (2.62)$$

$$m_\rho^2b_0 = \frac{1}{2}g_\rho\rho_3; \quad (2.63)$$

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_e) \psi_e = 0; \quad (2.64)$$

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi_\nu = 0; \quad (2.65)$$

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - \gamma^0 \Sigma_0 - (M - g_s \phi_0)] \psi = 0 \quad (2.66)$$

com

$$\Sigma_0 = g_\nu V_0 + g_\rho \frac{\tau_3}{2} b_0 + \Sigma_0^R \quad (2.67)$$

e

$$\Sigma_0^R = \frac{\partial g_\nu}{\partial \rho_B} \rho_B V_0 + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \frac{\rho_3}{2} b_0 - \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \rho_s \phi_0. \quad (2.68)$$

As soluções para  $\psi_e$ ,  $\psi_\nu$  e  $\psi$  permanecem as mesmas, com a exceção de que agora:

$$\varepsilon^\pm(k) = \Sigma_0 \pm E^* \quad (2.69)$$

onde

$$E^* = \sqrt{k^2 + M^{*2}}. \quad (2.70)$$

O tensor energia-momento passa a ser:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\nu \psi + i\bar{\psi}_e \gamma_\mu \partial_\nu \psi_e + i\bar{\psi}_\nu \gamma_\mu \partial_\nu \psi_\nu \\ & - g_{\mu\nu} \left( -\frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} m_\nu^2 V_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 b_0^2 \right. \\ & \left. + \frac{\partial g_\nu}{\partial \rho_B} \rho_B^2 V_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \rho_B \rho_3 b_0 - \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \rho_B \rho_s \phi_0 \right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde usamos as equações de campo (2.64), (2.65) e (2.66).

Fazendo o mesmo procedimento anterior encontramos para a densidade de energia:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \sum_{i=p,n} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k E^* (\eta_{ki}(T) + \bar{\eta}_{ki}(T)) \\ & + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \sqrt{k^2 + m_e^2} (\eta_{ke}(T) + \bar{\eta}_{ke}(T)) \\ & + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k (k) (\eta_{k\nu}(T) + \bar{\eta}_{k\nu}(T)) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{g_v^2}{m_v^2}\rho_B^2 + \frac{1}{8}\frac{g_p^2}{m_p^2}\rho_3^2 + \frac{1}{2}\frac{m_s^2}{g_s^2}(M - M^*)^2. \quad (2.72)$$

A expressão acima é idêntica ao caso anterior com a diferença de que os acoplamentos são agora função da densidade. As energias de uma partícula única são no entanto dadas agora por:

$$E_p = E^* + \left( g_v + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B \right) \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B + \frac{1}{4} \left( g_p + \frac{\partial g_p}{\partial \rho_B} \rho_3 \right) \frac{g_p}{m_p^2} \rho_3 - \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s^2; \quad (2.73)$$

$$\bar{E}_p = E^* - \left( g_v + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B \right) \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B - \frac{1}{4} \left( g_p + \frac{\partial g_p}{\partial \rho_B} \rho_3 \right) \frac{g_p}{m_p^2} \rho_3 + \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s^2; \quad (2.74)$$

$$E_n = E^* + \left( g_v + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B \right) \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B + \frac{1}{4} \left( -g_p + \frac{\partial g_p}{\partial \rho_B} \rho_3 \right) \frac{g_p}{m_p^2} \rho_3 - \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s^2; \quad (2.75)$$

$$\bar{E}_n = E^* - \left( g_v + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B \right) \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B - \frac{1}{4} \left( -g_p + \frac{\partial g_p}{\partial \rho_B} \rho_3 \right) \frac{g_p}{m_p^2} \rho_3 + \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s^2; \quad (2.76)$$

A pressão por sua vez é:

$$\hat{P} = \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = -\frac{i}{3}\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi - \frac{i}{3}\psi_e^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi_e - \frac{i}{3}\psi_v^\dagger \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi_v + \left( -\frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_v^2V_0^2 + \frac{1}{2}m_p^2b_0^2 + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B}\rho_B^2V_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial g_p}{\partial \rho_B}\rho_B\rho_3b_0 - \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B}\rho_B\rho_s\phi_0 \right).$$

E após alguns cálculos temos:

$$P = \frac{1}{3} \sum_{i=p,n} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{E^*} (\eta_{ki}(T) + \bar{\eta}_{ki}(T))$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_e^2}} (\eta_{ke}(T) + \bar{\eta}_{ke}(T)) \\
& + \frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \rho(p) (\eta_{p\nu}(T) + \bar{\eta}_{p\nu}(T)) + \left( \frac{1}{2} + \frac{\rho_B}{g_v} \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \right) \frac{g_v^2}{m_v^2} \rho_B^2 \\
& + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{\rho_B}{g_\rho} \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \right) \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} \rho_3^2 - \left( \frac{1}{2} + \frac{\rho_B}{g_s} \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \right) \frac{m_s^2}{g_s^2} (M - M^*)^2. \quad (2.77)
\end{aligned}$$

As densidades são as mesmas dadas pelas equações (2.54), (2.55) e (2.56) e as funções de distribuição das partículas e antipartículas são dadas pelas equações (2.44) com a equação (2.51) válida.

Poderíamos ainda considerar uma dependência das massas dos mésons com a densidade, mas consideraremos aqui as massas constantes. A dependência dos parâmetros com a densidade segue aqui como em (TYPEL; WOLTER, 1999), ou seja, para os mésons  $\sigma$  e  $\omega$  são calculadas através de:

$$g_i(\rho_B) = g_i(\rho_0) f_i(x), \quad i = \sigma, \omega \quad (2.78)$$

onde

$$f_i(x) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2}, \quad x = \frac{\rho_B}{\rho_0} \quad (2.79)$$

e  $\rho_0$  é a densidade de saturação da matéria nuclear. Obviamente devemos ter  $f_i(1) = 1$ . Portanto, as oito quantidades  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  não são independentes. Para diminuir ainda mais o número de parâmetros livres exigimos  $f_s''(1) = f_v''(1)$  e  $f_i''(0) = 0$ . A última condição garante que os termos de rearranjo permaneçam finitos para densidade bariônica zero e que eles não divirjam, como em outras parametrizações. Desta forma, temos apenas três parâmetros livres. Cálculos de Dirac-Brueckner para matéria nuclear assimétrica (FUCHS; LENSKE; WOLTER, 1995) indicam uma forte dependência na densidade do acoplamento do méson  $\rho$ , a qual se torna muito pequena em altas densidades. A constante de acoplamento do méson  $\rho$  é então parametrizada por:

$$g_\rho(\rho_B) = g_\rho(\rho_0) \exp[-a_\rho(x - 1)] \quad (2.80)$$

com apenas um parâmetro adicional,  $a_\rho$ .



### 3 LIVRE CAMINHO MÉDIO DOS NEUTRINOS

Queremos calcular o livre caminho médio  $\lambda$  para os neutrinos no sistema descrito acima. Para isto calculamos primeiro a seção de choque  $\sigma$ , sendo o livre caminho médio dado por:

$$\lambda = \left( \frac{\sigma}{V} \right)^{-1}. \quad (3.1)$$

A seção de choque diferencial para uma colisão de duas partículas é (HALZEN; MARTIN, 1984):

$$d\sigma = \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{F} dQ \quad (3.2)$$

onde  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  é calculado tomando a média sobre os spins iniciais e a soma sobre os spins finais do módulo quadrado da amplitude de transição  $\mathcal{M}$ ,  $F$  é o fluxo inicial de partículas e  $dQ$  é o chamado espaço de fase das partículas emergentes na colisão.

Para o cálculo da seção de choque adotaremos uma outra normalização para os spinores no lugar da condição (2.41), porém o resultado é independente da normalização. A normalização adotada é:

$$U^\dagger(\vec{k}', \lambda') U(\vec{k}, \lambda) = 2E^* \delta_{\vec{k}'\vec{k}} \delta_{\lambda'\lambda} = V^\dagger(\vec{k}', \lambda') V(\vec{k}, \lambda) \quad (3.3)$$

onde  $E^* = \sqrt{k^2 + M^{*2}}$  para os nucleons,  $E^* = \sqrt{k^2 + m_e^2}$  para os elétrons e  $E^* = k$  para os neutrinos.

Para um espalhamento  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , onde 1 e 2 são as partículas incidentes e 3 e 4 são as partículas emergentes após a colisão, temos:

$$F = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \cdot 2E_1^* \cdot 2E_2^* \quad (3.4)$$

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \cdot \frac{1 - \eta_3(T)}{2E_3^*} \frac{d\vec{k}_3}{(2\pi)^3} \frac{1 - \eta_4(T)}{2E_4^*} \frac{d\vec{k}_4}{(2\pi)^3} \quad (3.5)$$

onde  $P_i = (E_i, \vec{k}_i)$ ,  $E_i$  é a energia total da partícula,  $v_i = |\vec{k}_i|/E_i^*$  e  $\eta_i(T)$  é a função de distribuição da partícula  $i$ .

Queremos levar em conta as colisões com todas as partículas do sistema, ou seja, a partícula 2 pode ter qualquer energia. Devemos então multiplicar  $d\sigma$  por  $V \eta_2(T) d\vec{k}_2 / (2\pi)^3$ . Podemos agora integrar em todos os momentos para obter a seção de choque total.

Os neutrinos podem interagir de diferentes maneiras dentro do sis-

tema. Um neutrino em particular pode sofrer espalhamento elástico por um nucleon, por um elétron e por um outro neutrino. Tais espalhamentos são mediados pelo bóson  $Z$ . Mas ele também pode ser absorvido por um nêutron (próton), produzindo um próton (nêutron) e um elétron (pósitron) no fim da reação. Essa reação de absorção é mediada pelos bósons  $W^\pm$ . A figura (1) mostra o diagrama de Feynmann para um espalhamento neutrino-nucleon/elétron, onde  $A$  pode ser um nucleon ou um elétron. A figura (2) mostra o diagrama de Feynmann para uma reação de absorção de um neutrino por um nêutron. Os potenciais químicos máximos para os valores de densidade e temperatura consideradas aqui são da ordem de:

$$\mu_\nu \approx 200MeV; \quad \mu_N \approx 1500MeV; \quad \mu_e \approx 400MeV.$$

Como as partículas obedecem uma distribuição de Fermi-Dirac, a probabilidade de encontrar uma partícula com a energia (ou momento) muito maior que o potencial químico é muito pequena, sendo quase nula. Assim, não temos partículas com o momento muito maior que os potenciais químicos citados acima. Neste caso, temos que  $q^2 = |\vec{k}_1 - \vec{k}_3| \ll M_{W,Z}^2$ , e levaremos em conta apenas os diagramas de Feynmann de ordem mais baixa.

Para um espalhamento neutrino-nucleon/elétron ou uma reação de absorção podemos escrever uma mesma expressão para  $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$  (ver apêndice A), pois  $g'/M_W = g/M_Z$  e  $M_Z = 91,1876GeV$  (HALZEN; MARTIN, 1984):

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = & \frac{g^4}{2M_Z^4} E_1^* E_2^* E_3^* E_4^* \cdot \{ (\mathcal{V} + \mathcal{A})^2 (1 - v_2 \cos(\theta_{12})) (1 - v_4 \cos(\theta_{34})) \\ & + (\mathcal{V} - \mathcal{A})^2 (1 - v_4 \cos(\theta_{14})) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\ & - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2) (1 - \cos(\theta_{13})) \} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $m = m_e$  ou  $m = M^*$ ,  $\cos(\theta_{ij})$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{k}_i$  e  $\vec{k}_j$  e para um espalhamento  $\mathcal{V} = c_V$  e  $\mathcal{A} = c_A$  enquanto que para uma absorção  $\mathcal{V} = g_V$  e  $\mathcal{A} = g_A$ . A seção de choque é então:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{V} = & \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_4}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \cdot \\ & \eta_2(T) (1 - \eta_3(T)) (1 - \eta_4(T)) \frac{g^4}{32M_Z^4} \cdot \\ & \{ (\mathcal{V} + \mathcal{A})^2 (1 - v_2 \cos(\theta_{12})) (1 - v_4 \cos(\theta_{34})) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\mathcal{V} - \mathcal{A})^2(1 - v_4 \cos(\theta_{14}))(1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
& - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2)(1 - \cos(\theta_{13})). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

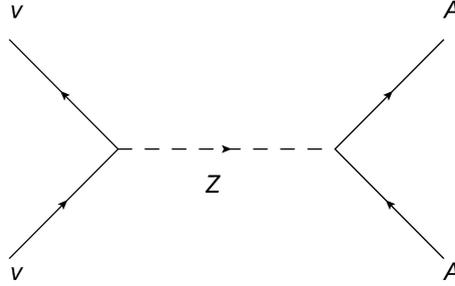


Figura 1: Diagrama de Feynmann para um espalhamento de um neutrino por um nucleon ou por um elétron

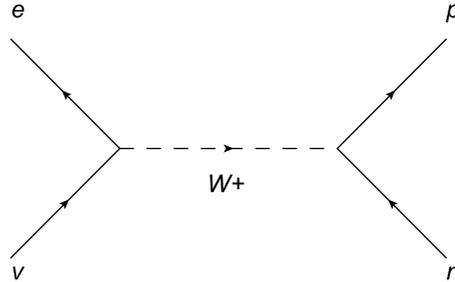


Figura 2: Diagrama de Feynmann para uma reação de absorção de um neutrino por um nêutron

Embora tenhamos uma mesma expressão para a seção de choque de absorção e de espalhamento neutrino-nucleon/elétron, a integração na função delta de Dirac é diferente. Para o caso do espalhamento, as integrações nas funções delta de Dirac fornecem (ver apêndice B):

$$\left(\frac{\sigma}{V}\right)_{v,N/e} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta_2(T)(1-\eta_3(T))(1-\eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{k_1 + E_2^* - k_3}{k_1(1 - \cos(\theta_3)) + E_2^* - k_2 \cos(\theta_{23})} \cdot \\
& \left\{ (c_V + c_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\
& + (c_V - c_A)^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
& \left. - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (c_V^2 - c_A^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

onde

$$\cos(\theta_{ij}) = \cos(\theta_i)\cos(\theta_j) + \text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta_j)\cos(\phi_i - \phi_j);$$

$$k_3 = \frac{k_1(E_2^* - k_2 \cos(\theta_2))}{k_1 + E_2^* - k_1 \cos(\theta_3) - k_2 \cos(\theta_{23})};$$

$$k_4^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2(k_1 k_2 \cos(\theta_2) - k_1 k_3 \cos(\theta_3) - k_2 k_3 \cos(\theta_{23})).$$

Para o caso de absorção temos (ver apêndice B):

$$\left(\frac{\sigma}{V}\right)_{abs} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_2^2$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta_2(T)(1-\eta_3(T))(1-\eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{\sqrt{m_e^2 + k_3^2}(C - \sqrt{m_e^2 + k_3^2})}{Ck_3 - (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))\sqrt{m_e^2 + k_3^2}} \cdot \\
& \left\{ (g_V + g_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\
& + (g_V - g_A)^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
& \left. - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (g_V^2 - g_A^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

onde

$$k_3 = -\frac{2(k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))(C^2 + m_e^2 - D)}{4(k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))^2 - 4C^2}$$

$$D = \frac{\sqrt{16m_e^2 C^2 (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))^2 + 4C^2 (C^2 + m_e^2 - D)^2 - 16m_e^2 C^4}}{4(k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))^2 - 4C^2};$$

$$D = (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2 + M^{*2};$$

$$C = k_1 + E_2^* - \frac{g_p^2}{2m_p^2} \rho_3.$$

Para um espalhamento neutrino-neutrino temos dois diagramas de Feynmann possíveis (figura (3)). Para este caso (ver apêndice A):

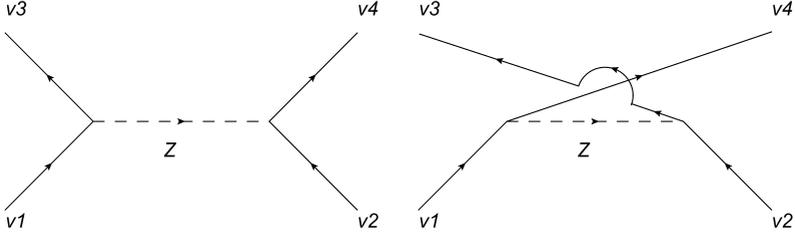


Figura 3: Diagrama de Feynmann para um espalhamento de um neutrino por outro neutrino

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{4g^4}{M_Z^4} k_1 k_2 k_3 k_4 (1 - \cos(\theta_{12}))(1 - \cos(\theta_{34})). \quad (3.10)$$

E a seção de choque é dada por:

$$\frac{\sigma}{V} = \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_4}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T)) \frac{g^4}{4M_Z^4} (1 - \cos(\theta_{12}))(1 - \cos(\theta_{34})). \quad (3.11)$$

Finalmente (ver apêndice B):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma}{V}\right)_{v,v} &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{4M_Z^4} \int d^3 k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_2^2 \\ &= \frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{k_1 + k_2 - k_3}{k_1(1 - \cos(\theta_3)) + k_2(1 - \cos(\theta_{23}))} \\ &\quad (1 - \cos(\theta_2)) \left(1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{k_4}\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$k_3 = \frac{k_1 k_2 (1 - \cos(\theta_2))}{k_1 + k_2 - k_1 \cos(\theta_3) - k_2 \cos(\theta_{23})}.$$

Nos cálculos acima fizemos sempre  $\vec{k}_1 = k_1 \hat{z}$ .

Neste ponto, vamos redefinir as constantes de acoplamento apresentadas no capítulo anterior. Isso se deve essencialmente a dois fatores. Ao contrário da corrente eletromagnética, não temos uma lei de conservação para a corrente fraca. Tal fato é expresso por uma mudança nas constantes do termo axial da corrente (HALZEN; MARTIN, 1984). Além disso, no caso do nucleon, o qual é em última análise composto por quarks, a experiência mostra que para a interação fraca observa-se o que chamamos de *não conservação de geração dos quarks*, levando à introdução do fator de Cabibbo  $C$  (HALZEN; MARTIN, 1984), (GRIFFITHS, 2009) no vértice da interação mediada pelos bosons  $W$ . Com isso, temos para cada um dos casos considerados aqui (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b):

$$\text{neutrino - próton: } c_V = 1/2 - 2\text{sen}^2(\theta_w) \text{ e } c_A = 1,23/2.$$

$$\text{neutrino - nêutron: } c_V = -1/2 \text{ e } c_A = -1,23/2.$$

$$\text{neutrino - elétron: } c_V = -1/2 + 2\text{sen}^2(\theta_w) \text{ e } c_A = -1/2.$$

$$\text{neutrino - neutrino: } c_V = 1/2 \text{ e } c_A = 1/2.$$

$$\text{absorção (neutrino - nêutron): } g_V = C/2 \text{ e } g_A = -1,23C/2.$$

onde  $C = 0,973$  e  $\text{sen}^2(\theta_w) = 0,230$ .

## 4 RESULTADOS

Para calcular as propriedades do sistema aqui estudado precisamos de algumas condições iniciais. Supomos o mesmo eletricamente neutro,  $\rho_p = \rho_e$ . Consideramos também que o mesmo está em equilíbrio beta,  $\mu_\nu + \mu_n = \mu_p + \mu_e$ . Tratamos aqui duas situações diferentes: uma em que a fração de léptons,  $Y_L = (\rho_e + \rho_\nu)/\rho_B$ , é mantida constante e igual à 0,4 e com os neutrinos armadilhados, ou seja,  $\mu_{\nu_e} \neq 0$ ; uma segunda situação que vamos considerar é aquela em que a fração de neutrinos é admitida como zero. A condição  $Y_L = 0,4$  é a que se imagina encontrar em uma estrela de nêutrons logo após a sua formação (PONS et al., 1999). Já para a fração de neutrinos igual a zero, os neutrinos não estão mais armadilhados e é o que na literatura é conhecido como fase de resfriamento da estrela (REDDY; PRAKASH, 1997). É importante observar que neste último caso, ainda existem neutrinos dentro do sistema, porém, a quantidade de neutrinos é igual a quantidade de antineutrinos, fornecendo uma densidade líquida nula, ver equação (2.56). No primeiro caso temos que resolver um sistema de sete equações acopladas com sete incógnitas, enquanto que para o segundo caso temos uma equação e uma incógnita a menos, para uma dada temperatura e uma dada densidade bariônica.

Para o caso em que a fração de léptons é mantida constante, com neutrinos armadilhados, para cada densidade bariônica tentamos um valor inicial para o potencial químico dos elétrons, obtendo diretamente a densidade de elétrons. Usando a equação  $Y_L = (\rho_e + \rho_\nu)/\rho_B$  determinamos a densidade dos neutrinos e, a partir daí, o potencial químico dos mesmos. Usando a condição de neutralidade de carga determinamos a densidade de prótons e por consequência determinamos a densidade de nêutrons e os campos  $V_0$  e  $b_0$ . Para determinar os potenciais químicos dos nêutrons e dos prótons e a massa efetiva,  $M^*$ , tentamos um valor inicial para o potencial químico dos nêutrons e usando a expressão para a densidade de nêutrons encontramos um valor para a massa efetiva. Com a massa efetiva, encontramos o potencial químico dos prótons usando a expressão para a densidade de prótons. Com os potenciais químicos dos nêutrons e dos prótons e a massa efetiva encontrados anteriormente, verificamos se o conjunto de valores destas três quantidades satisfazem a equação para a massa efetiva (equação (2.53) ou equação (2.61)). No entanto, todos estes dados dependem do potencial químico escolhido para os elétrons e ainda não sabemos se este é o valor correto. Verificamos então se a condição de equilíbrio beta é satisfeita e, caso negativo, tentamos outro valor para o potencial químico dos elétrons e repetimos o procedimento até a condição de equilíbrio beta ser satisfeita. Podemos agora calcular a densi-

dade de energia e a pressão do sistema e também a seção de choque e o livre caminho médio para os neutrinos.

Já para fração de neutrinos nula, tentamos um valor inicial para o potencial químico dos elétrons, obtendo diretamente a densidade de elétrons. A partir da neutralidade de carga, obtemos as densidades de prótons e de nêutrons e conseqüentemente os campos  $V_0$  e  $b_0$ . Para determinar os potenciais químicos dos nêutrons e dos prótons e a massa efetiva,  $M^*$ , tentamos um valor inicial para o potencial químico dos nêutrons e usando a expressão para a densidade de nêutrons encontramos um valor para a massa efetiva. Usando agora a condição de equilíbrio  $\beta$  como  $\mu_n = \mu_p + \mu_e$  encontramos o potencial químico dos prótons. O resultado pode ser testado então usando a equação (2.53) e, em caso negativo, reiniciamos o processo tentando outro valor para o potencial químico dos elétrons. Novamente, a equação de estado e o livre caminho médio ficam definidos.

Para a densidade Lagrangeana (2.18) usamos a parametrização GM1 (GLEDENNING, 2000). Para o caso de parametrização dependente da densidade (que chamaremos de TW), usamos a parametrização apresentada em (TYPEL; WOLTER, 1999). A tabela abaixo mostra as propriedades das duas parametrizações em  $K_B T = 0 MeV$ :

	$\rho_0 (fm^{-3})$	$E_B/A (MeV)$	$K (MeV)$	$M^*/M$	$a_{sym} (MeV)$
GM1	0,153	-16,3	300	0,7	32,5
TW	0,153	-16,247	240	0,555	33,39

onde  $\rho_0$  é a densidade de saturação da matéria nuclear,  $E_B/A$  é a energia de ligação por nucleon,  $K$  é a compressibilidade da matéria nuclear e  $a_{sym}$  é a energia de simetria.

As figuras (4) e (5) mostram a energia total por bárion e a pressão total do sistema, respectivamente, como funções da densidade bariônica para GM1 e TW,  $Y_L = 0,4$ , e  $K_B T = 1, 5$  e  $30 MeV$ . Tanto o aumento da energia quanto o da pressão com o aumento da temperatura é esperado, sendo a dependência da energia maior. Os valores para as duas parametrizações em torno da densidade bariônica de saturação são próximos, uma vez que as constantes são ajustadas para reproduzir dados experimentais em tal densidade. Porém, quando aumentamos a densidade bariônica, as duas parametrizações começam a divergir uma da outra, mostrando uma forte dependência do comportamento do sistema em relação à parametrização usada. A figura (6) mostra a pressão em função da densidade de energia para GM1 e TW,  $Y_L = 0,4$ , e  $K_B T = 1, 5$  e  $30 MeV$ , satisfazendo a condição de que a velocidade do som deve ser menor que a velocidade da luz,  $\sqrt{dP/d\varepsilon} < c$ . As curvas para  $K_B T = 1$  e  $5 MeV$  são praticamente indistinguíveis, o que também ocorre para as figuras (4) e (5).

As frações de partículas  $Y_i = \rho_i/\rho_B$ , são apresentadas na figura (7) para GM1 e TW,  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30MeV$ , onde  $i = n, p, e$  e  $\nu$ . A variação de  $Y_i$  com o aumento da temperatura é muito pequena. É interessante notar a forte dependência da fração de neutrinos com a parametrização usada para descrever a interação entre os nucleons, o que não ocorre para as outras partículas. Observamos ainda que a variação com a densidade é maior para a parametrização GM1, o que também ocorre com a energia e a pressão. As curvas iguais para  $Y_p$  e  $Y_e$  é um reflexo da condição de neutralidade de carga.

Os valores escolhidos para a energia do neutrino incidente nos cálculos do livre caminho médio em função da densidade bariônica são  $E_\nu = \mu_\nu$  para o caso  $Y_L = 0,4$  e  $E_\nu = \pi K_B T$  para  $Y_\nu = 0$ .

O livre caminho médio dos neutrinos para GM1,  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30MeV$  é apresentado nas figuras (8), (9) e (10), respectivamente.  $\lambda_e$  é o livre caminho médio devido ao espalhamento do neutrino somente com elétrons,  $\lambda_p$  é devido ao espalhamento somente com prótons,  $\lambda_n$  é devido ao espalhamento somente com nêutrons,  $\lambda_\nu$  é devido ao espalhamento somente com outros neutrinos,  $\lambda_S$  é devido a todos os espalhamentos juntos,  $\lambda_a$  é devido à reação de absorção e  $\lambda_T$  é o livre caminho médio levando em conta tanto o espalhamento total como absorção. Vemos uma grande dependência de  $\lambda$  com a temperatura. A seção de choque de absorção é maior que a de espalhamento, fornecendo a maior contribuição para  $\lambda_T$ , porém a seção de choque de espalhamento não pode ser desprezada. Note-se ainda que o livre caminho médio devido a prótons e nêutrons tende a aumentar com a densidade, em relação à densidade de saturação, enquanto que devido a elétrons e neutrinos tende a diminuir. O valor total de  $\lambda_S$  no entanto permanece aproximadamente constante para  $\rho_B \geq \rho_0$ .

As figuras (11), (12) e (13) comparam  $\lambda_p$ ,  $\lambda_n$  e  $\lambda_a$  para GM1, TW e um sistema sem a interação forte entre os bárions (SI), ou seja, os nucleons se comportam agora como um gás de férmions livre. Embora as parametrizações GM1 e TW tenham sido ajustadas para reproduzir certas propriedades da matéria nuclear em  $\rho_0$ , o livre caminho médio em  $\rho_0$  para as duas parametrizações não são tão próximos, como poderia se esperar ao menos para  $k_B T = 1MeV$ , sendo que as diferenças para todas as densidades tende a diminuir com a temperatura.

Para incluir uma dependência da interação neutrino-nucleon em relação à energia do neutrino incidente devido ao fato do nucleon ser uma partícula composta, multiplicamos as constantes  $c_V$  e  $c_A$  pelo fator de forma (GALSTER et al., 1971):

$$\left(1 + \frac{4,97 * q^2}{4M^2}\right)^{-2}, \quad (4.1)$$

sendo  $M$  a massa do nucleon livre e  $\vec{q}$  o momento transferido,  $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3$ . Dessa forma estaríamos então levando em conta de alguma forma a estrutura interna dos nucleons. A expressão acima foi parametrizada para ajustar resultados experimentais de espalhamento elástico de elétrons por prótons e dêuterons. A figura (14) compara  $\lambda_p$  e  $\lambda_n$  para os casos com e sem o fator de forma, e também para o caso com fator de forma utilizando a massa efetiva no lugar da massa do nucleon livre. A parametrização utilizada foi GM1, com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 5MeV$ . Como o fator de forma diminui a interação entre os neutrinos e os nucleons, a seção de choque é menor, aumentando então o livre caminho médio.

A energia total por bárion e a pressão total do sistema como funções da densidade bariônica para GM1 e TW,  $Y_V = 0$ , e  $K_B T = 1, 5$  e  $30MeV$  são mostradas nas figuras (15) e (16), respectivamente. Novamente os valores para as duas parametrizações em torno da densidade bariônica de saturação são próximos, porém, para densidades bariônica maiores, as duas parametrizações começam a divergir uma da outra, mostrando, como no caso de  $Y_L = 0,4$ , uma dependência dos resultados em relação à parametrização usada. A figura (17) mostra a pressão em função da densidade de energia para GM1 e TW,  $Y_V = 0$ , e  $K_B T = 1, 5$  e  $30MeV$ , também satisfazendo a condição de que a velocidade do som deve ser menor que a velocidade da luz,  $\sqrt{dP/d\varepsilon} < c$ . Novamente, as curvas para  $K_B T = 1$  e  $5MeV$  são praticamente indistinguíveis, o que também ocorre para as figuras (15) e (16).

O livre caminho médio dos neutrinos para GM1,  $Y_V = 0$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30MeV$  é apresentado nas figuras (18), (19) e (20), respectivamente. Os valores de  $\lambda_\nu$  para  $K_B T = 1$  e  $5MeV$  são muito elevados em relação aos demais e não aparecem na escala dos gráficos mostrados. Vemos também uma grande dependência de  $\lambda$  com a temperatura, e a seção de choque de absorção fica cada vez mais dominante em relação à seção de choque de espalhamento com o aumento da temperatura. No entanto, observamos também que essa é a única situação estudada aqui em que a seção de choque de espalhamento pode ser completamente dominante em relação à absorção, o que ocorre para baixas temperaturas e baixas densidades (ver figura (18)).

Finalmente, nas figuras (21) e (22), mostramos a dependência de  $\lambda_T$  com a energia do neutrino incidente. Para isso escolhemos a parametrização GM1,  $\rho_B = 2\rho_0$ , e  $Y_L = 0,4$  e  $Y_V = 0$ , respectivamente. Para  $Y_L = 0,4$ , os valores de  $\lambda_T$  para cada temperatura são mostrados em figuras diferentes, dada a diferença de ordem de grandeza. O comportamento das curvas é o esperado, uma vez que a seção de choque de neutrinos com outras partículas, tende a aumentar rapidamente com a energia, principalmente para baixas energias (REDDY; PRAKASH, 1997), (HAAS, 1997).

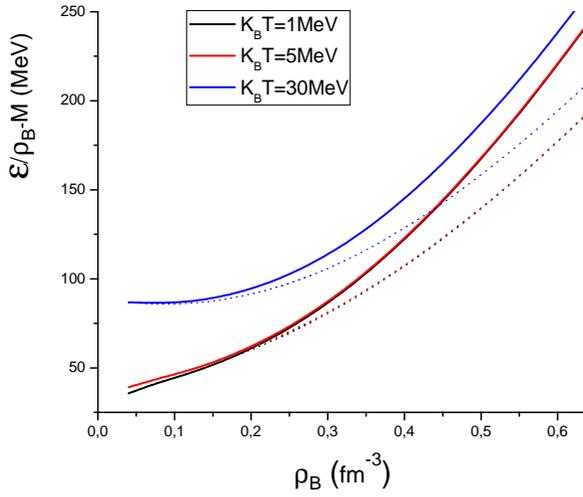


Figura 4: Energia por bárion para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30 \text{ MeV}$

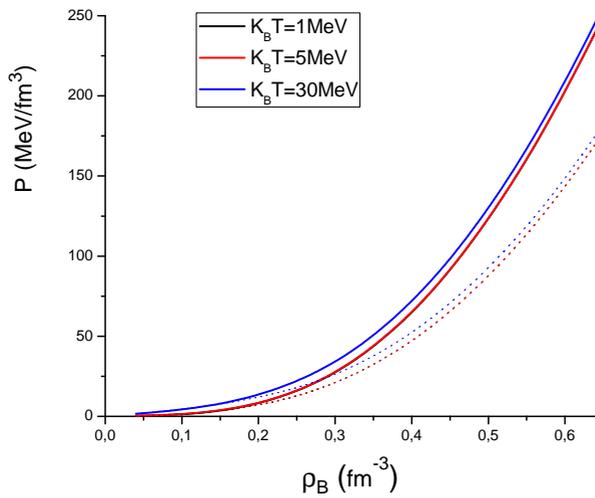


Figura 5: Pressão total para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30 \text{ MeV}$

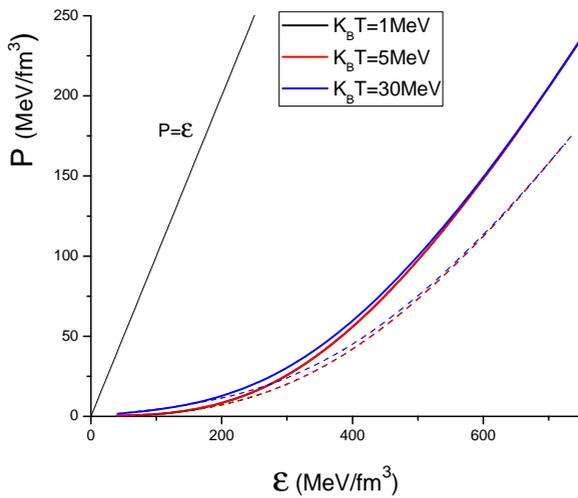


Figura 6: Pressão x densidade de energia para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30$  MeV

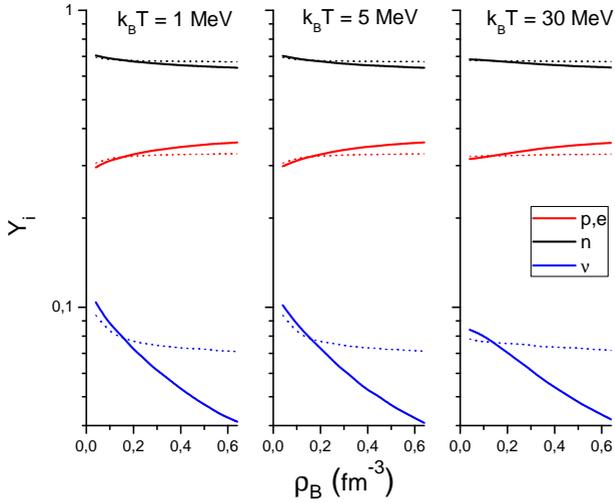


Figura 7: Frações de partículas para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30 \text{ MeV}$

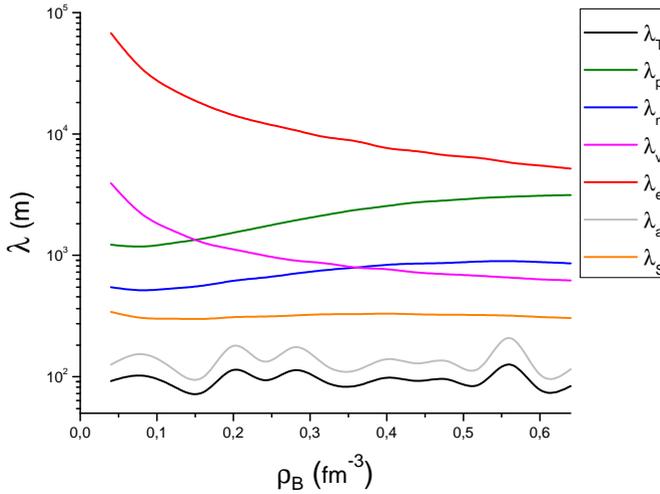


Figura 8: Livre caminho médio dos neutrinos para GM1, com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 1 \text{ MeV}$

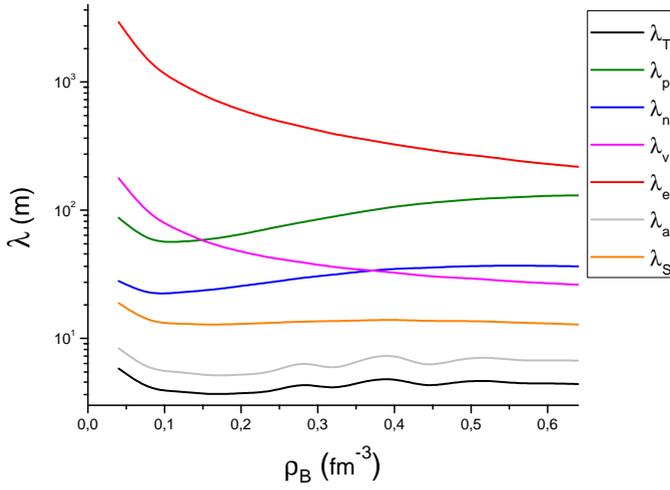


Figura 9:  $\lambda$  dos neutrinos para GM1, com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 5 \text{ MeV}$

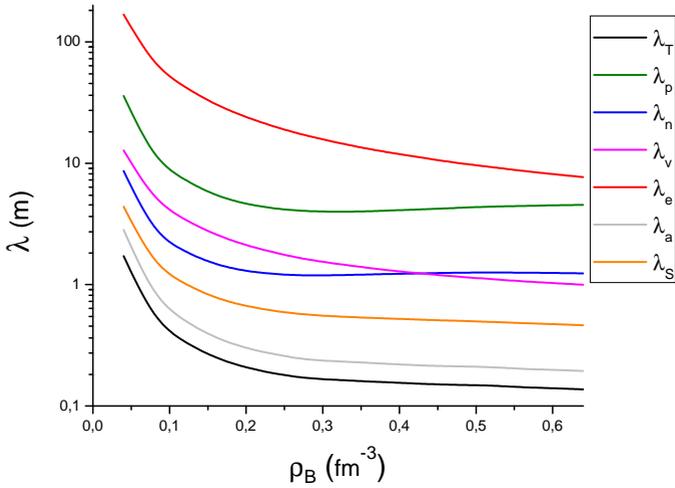


Figura 10:  $\lambda$  dos neutrinos para GM1, com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 30 \text{ MeV}$

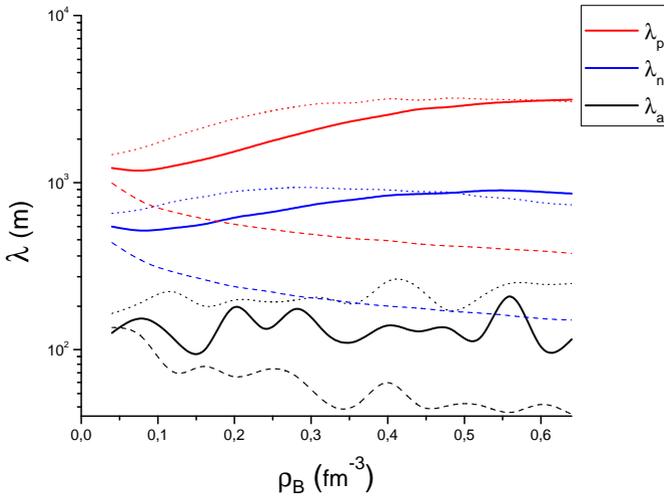


Figura 11:  $\lambda_p$ ,  $\lambda_n$  e  $\lambda_a$  para GM1 (linha cheia), TW (linha pontilhada) e SI (linha tracejada), com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 1 \text{ MeV}$

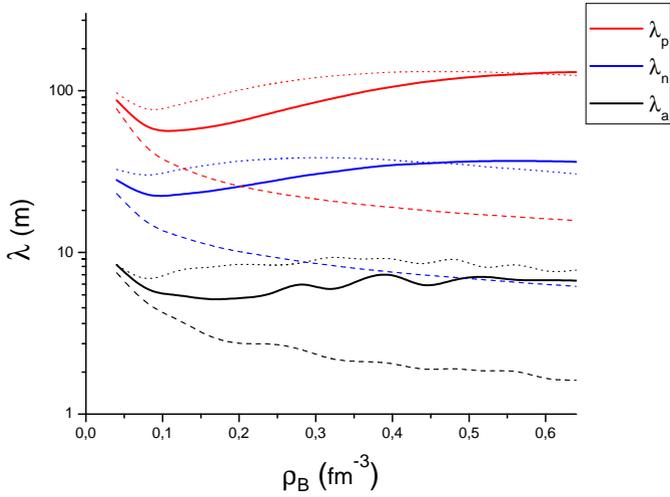


Figura 12:  $\lambda_p$ ,  $\lambda_n$  e  $\lambda_a$  para GM1 (linha cheia), TW (linha pontilhada) e SI (linha tracejada), com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 5 \text{ MeV}$

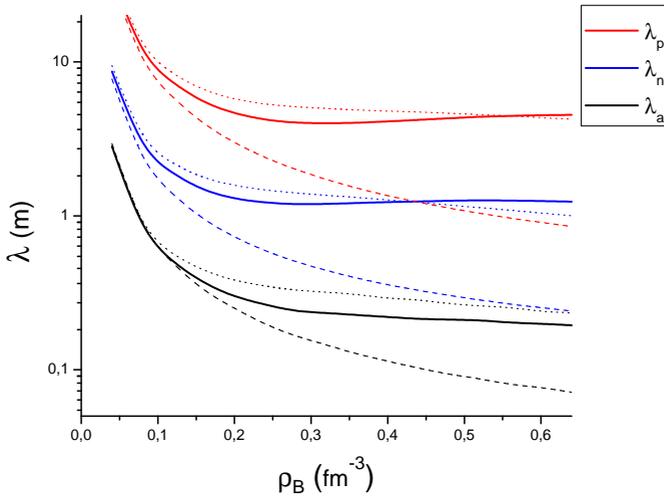


Figura 13:  $\lambda_p$ ,  $\lambda_n$  e  $\lambda_a$  para GM1 (linha cheia), TW (linha pontilhada) e SI (linha tracejada), com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 30 \text{ MeV}$

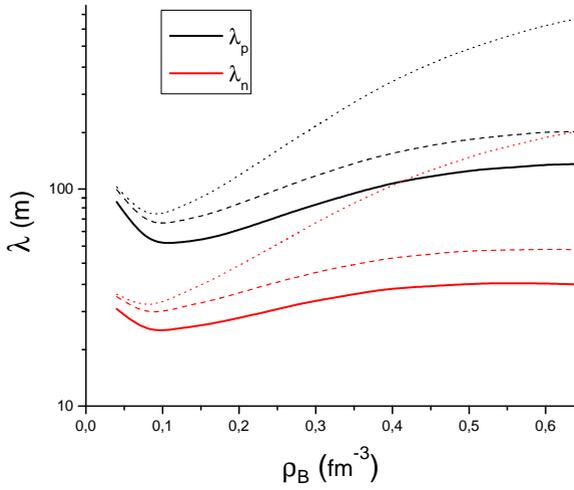


Figura 14:  $\lambda_p$  e  $\lambda_n$  com fator de forma para a massa do nucleon livre (linha tracejada), com fator de forma para a massa efetiva (linha pontilhada) e sem fator de forma (linha cheia) para GM1, com  $Y_L = 0,4$  e  $K_B T = 5MeV$

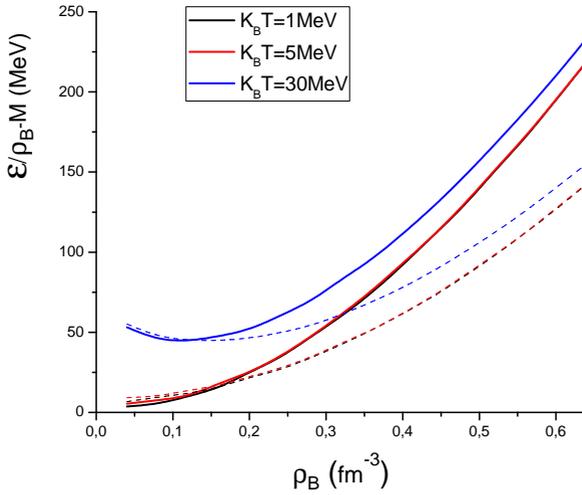


Figura 15: Energia total por bárion para GM1 (linha cheia) e TW (linha tracejada), com  $Y_V = 0$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30 \text{ MeV}$

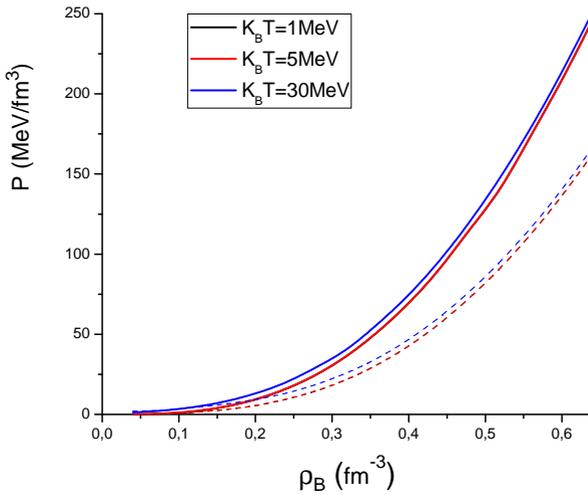


Figura 16: Pressão total para GM1 (linha cheia) e TW (linha tracejada), com  $Y_V = 0$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30 \text{ MeV}$

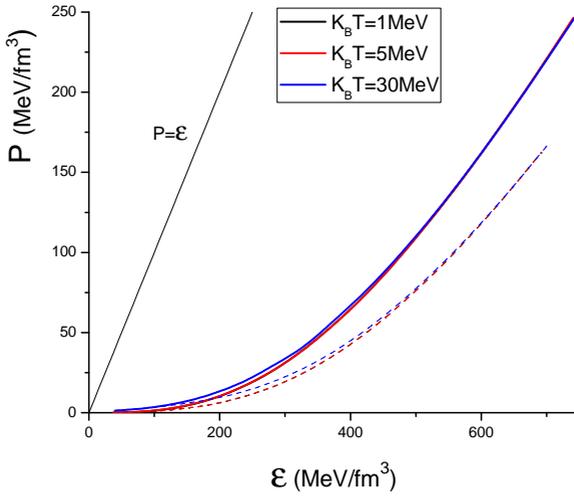


Figura 17: Pressão x densidade de energia para GM1 (linha cheia) e TW (linha pontilhada), com  $Y_\nu = 0$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30 \text{ MeV}$

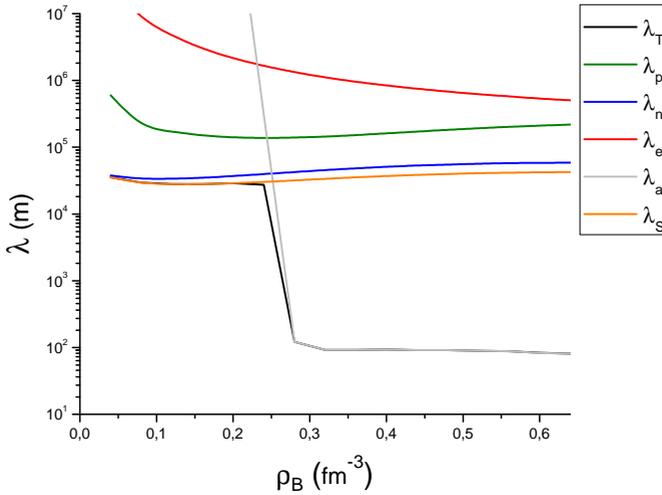


Figura 18: Livre caminho médio dos neutrinos para GM1, com  $Y_\nu = 0$  e  $K_B T = 1 \text{ MeV}$

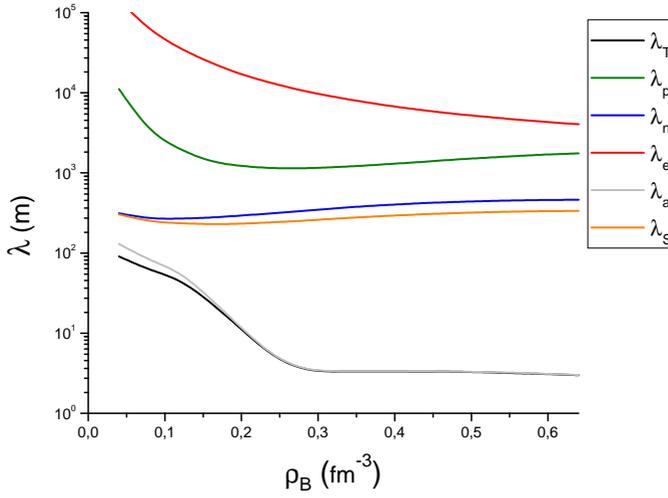


Figura 19:  $\lambda$  dos neutrinos para GM1, com  $Y_V = 0$  e  $K_B T = 5 \text{ MeV}$

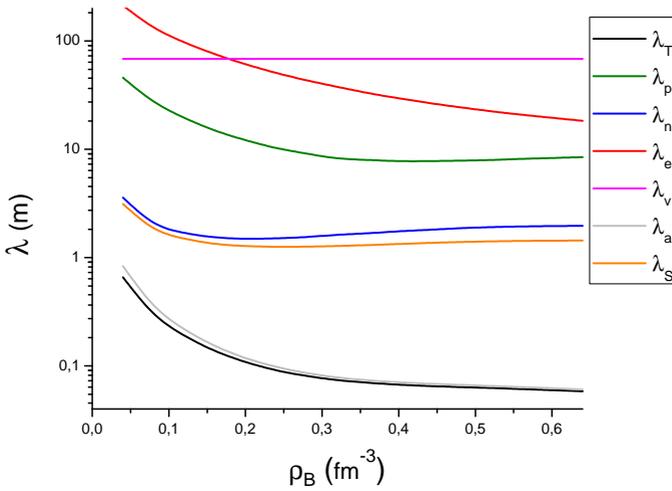


Figura 20:  $\lambda$  dos neutrinos para GM1, com  $Y_V = 0$  e  $K_B T = 30 \text{ MeV}$

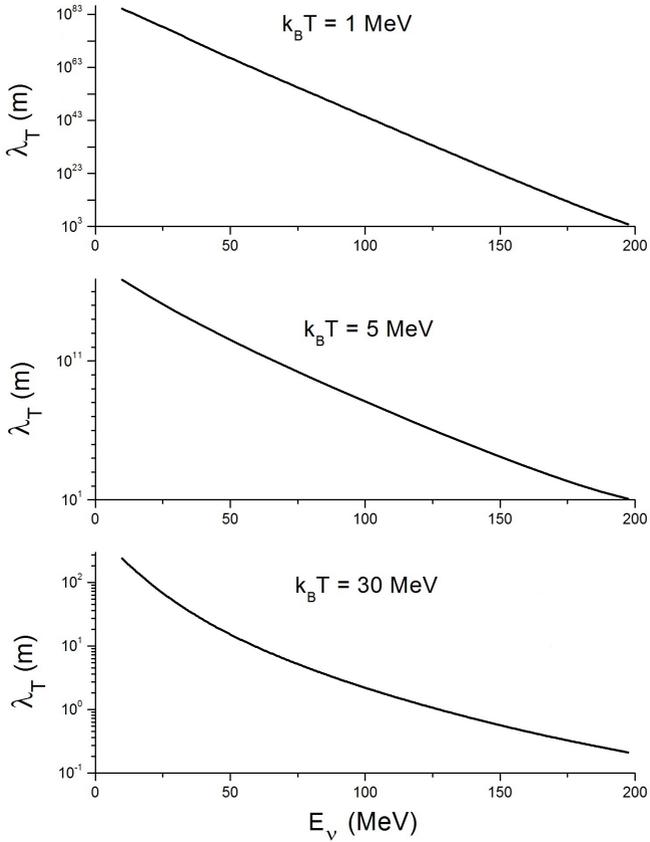


Figura 21:  $\lambda_T$  para GM1, com  $\rho_B = 2\rho_0$ ,  $Y_L = 0,4$  e  $k_B T = 1, 5$  e  $30 \text{ MeV}$

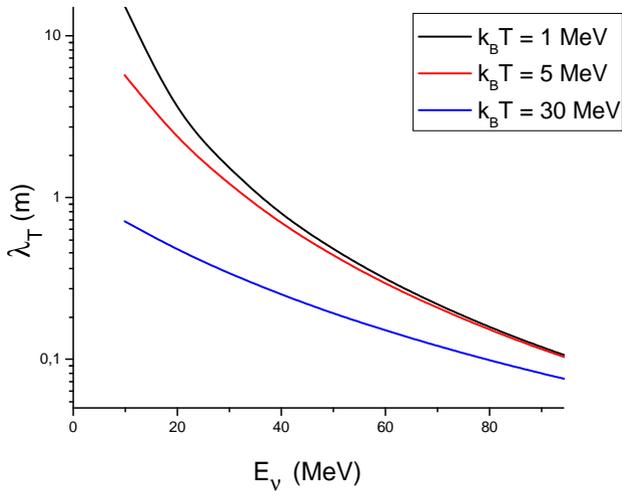


Figura 22:  $\lambda_T$  para GM1, com  $\rho_B = 2\rho_0$ ,  $Y_\nu = 0$  e  $K_B T = 1, 5$  e  $30 MeV$

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho, obtivemos a equação de estado para um sistema (infinito, uniforme e estático) formado por nucleons, elétrons e neutrinos a partir de um modelo relativístico. A interação forte entre os nucleons foi descrita pelo Modelo de Walecka em duas de suas versões: uma em que inclui-se a autointeração entre os mésons escalares através de termos cúbicos e quárticos na Lagrangeana e outro em que as constantes de acoplamento são funções da densidade bariônica. A interação fraca foi explicitamente incluída na Lagrangeana total, porém seu efeito na equação de estado é totalmente desprezível, ao menos para as energias e temperaturas aqui consideradas. A solução para o modelo admite sempre a densidade bariônica e a temperatura como constantes fixas, sendo que duas situações foram particularmente estudadas. A primeira, em que a fração total de léptons é fixa e uma segunda em que a fração de neutrinos é fixa e igual a zero. Essas condições foram escolhidas por serem as mais estudadas na literatura, quando se refere à aplicação do modelo para simulações para a perda de neutrinos no processo de formação de estrelas de nêutrons.

Em seguida apresentamos o método de obtenção da seção de choque total dos neutrinos com as partículas que formam o sistema. Para isso, as regras de Feynmann usuais foram utilizadas, incluindo os efeitos de Pauli e assumindo distribuições de Fermi para cada um dos tipos de partícula. Essas últimas ficam plenamente determinadas pela obtenção da equação de estado. A solução exata para as seções de choque nos leva a uma integração múltipla nos ângulos de espalhamento, o que foi feito via método de Monte Carlo. O objetivo final é a determinação do livre caminho médio dos neutrinos, o qual foi então apresentado para diferentes vínculos, temperaturas, densidades e para os dois tipos de parametrizações usadas aqui para a interação forte.

Os valores encontrados para o livre caminho médio dos neutrinos concordam em ordem de grandeza e comportamento com outros cálculos presentes na literatura (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b), (PONS et al., 1999). Para a situação em que a fração de léptons é mantida constante,  $Y_L = 0,4$ , a seção de choque de absorção é dominante na obtenção do livre caminho médio total para os neutrinos para as temperaturas e densidades bariônicas aqui tratadas, porém a seção de choque de espalhamento não pode ser desprezada. Para a situação em que a fração de neutrinos é nula,  $Y_\nu = 0$ , a seção de choque de espalhamento é dominante para temperaturas e densidades baixas, sendo que para valores mais altos de temperatura e densidade a seção de choque de absorção é amplamente dominante.

É importante notar que temos uma dependência de todas as quanti-

dades aqui estudadas em relação à parametrização usada para descrever a interação forte entre os nucleons. Para o livre caminho médio poderíamos esperar que os valores para GM1 e TW em  $\rho_B = \rho_0$  fossem próximos, ao menos para  $K_B T = 1 \text{ MeV}$ , mas isto não é observado. Além da parametrização, temos também uma diferença considerável nos resultados ao incluir o fator de forma do nucleon nos cálculos, ou seja, nos parece importante levar em conta a dependência da interação neutrino-nucleon em relação à energia do neutrino incidente devido ao fato do nucleon ser uma partícula composta.

O nosso método se mostrou eficiente na obtenção do livre caminho médio para os neutrinos no sistema considerado. Com a expressão obtida para o livre caminho médio pode-se obter o coeficiente de difusão e outras propriedades importantes no estudo da evolução de uma estrela de nêutrons, como o fluxo de neutrinos emitidos e o espectro de energia dos mesmos, a quantidade de energia carregada pelos neutrinos para fora da estrela durante o seu processo de esfriamento, etc., (REDDY; PRAKASH; LATTIMER, 1998b), (PONS et al., 1999), (YAKOVLEV et al., 2001). Podemos ainda estender o cálculo, sem muitas dificuldades, para levar em conta outros hádrons e léptons mais pesados do que os incluídos aqui, os quais imagina-se existir na matéria de estrelas de nêutrons, tornando assim o modelo mais realista.

Como comentado na Introdução, a detecção de neutrinos pode dar importantes informações a respeito do meio com o qual o mesmo interage, pois como sua interação com a matéria é relativamente fraca, eles mantêm as informações iniciais, sendo bastante sensíveis aos detalhes do modelo usado para reproduzir os possíveis dados experimentais. Os resultados por nós obtidos indicam assim para a necessidade de se testar outras parametrizações e modelos para o sistema aqui analisado. Em particular, uma comparação entre as parametrizações TW e com termos de autointeração na Lagrangeana em que a compressibilidade, energia de simetria, massa efetiva e energia de saturação produzissem valores bastante próximos entre si, seria de grande interesse.

## **APÊNDICE A – Cálculo da amplitude de transição $\mathcal{M}$**



A fim de obter a amplitude de transição, precisamos antes de mais nada conhecer a interação entre as partículas. No caso dos neutrinos interagindo com elétrons ou nucleons ou ainda com outros neutrinos, esta pode ser lida diretamente das equações (2.13), (2.14), (2.16) e (2.17). A figura (1) mostra o diagrama de Feynmann para o espalhamento de um neutrino por um nucleon ou por um elétron, onde  $A$  pode ser um nucleon ou um elétron. Utilizando as regras de Feynmann (HALZEN; MARTIN, 1984) para a interação definida pela densidade Lagrangeana (2.8), calculamos a amplitude de transição  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{8M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2 \right]. \quad (\text{A.1})$$

onde  $\psi_{\nu 1} \equiv \psi_{\nu 1}(\vec{k}_1, \lambda)$  é o spinor do neutrino incidente,  $\psi_{\nu 3} \equiv \psi_{\nu 3}(\vec{k}_3, \lambda)$  é o spinor do neutrino emergente,  $\psi_2 \equiv \psi_2(\vec{k}_2, \lambda)$  é o spinor do alvo e  $\psi_4 \equiv \psi_4(\vec{k}_4, \lambda)$  é o spinor do alvo após a colisão.

O módulo quadrado da equação acima é:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4}{64M_Z^4} [\bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1}] [\bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1}]^* \cdot \\ [\bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2] [\bar{\psi}_4 \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2]^*.$$

Usando  $[\bar{\psi}_i \Gamma \psi_j]^* = [\bar{\psi}_j \Gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \psi_i]$ ,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4}{64M_Z^4} [\bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1}] [\bar{\psi}_{\nu 1} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 3}] \cdot \\ [\bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_2] [\bar{\psi}_2 \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) \psi_4].$$

Para tomar a média sobre os spins iniciais devemos somar  $\psi_{\nu 1}$  e  $\psi_2$  sobre os spins e multiplicar por uma fator  $1/2$ , pois o nucleon/elétron pode ter duas orientações de spins, enquanto que o neutrino apenas uma. Então somando sobre os spins finais:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g^4}{128M_Z^4} \sum_{S_3} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sum_{S_1} \psi_{\nu 1} \bar{\psi}_{\nu 1} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 3} \right] \cdot \\ \sum_{S_4} \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \sum_{S_2} \psi_2 \bar{\psi}_2 \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) \psi_4 \right].$$

Precisamos calcular  $\sum_{S_2} \psi_2 \bar{\psi}_2$ , porém o nucleon (elétron) alvo inte-

rage com o resto do sistema, e a soma sobre os spins  $\sum_{S_2} \psi_2 \bar{\psi}_2$  não é apenas:

$$\sum_S \psi \bar{\psi} = \gamma_\mu P^\mu + m; \quad m = m_e, M.$$

A equação de Dirac para o spinor  $U(\vec{k}, \lambda)$  dos nucleons pode ser escrita como:

$$\left[ \gamma^0 \varepsilon^+(k) - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - M^* - g_v \gamma^0 V_0 - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 b_0 \right] U(\vec{k}, \lambda) = 0$$

ou

$$\begin{pmatrix} E^* - M^* & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E^* - M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Para a parametrização dependente da densidade, a equação de Dirac para  $U(\vec{k}, \lambda)$  é:

$$\left[ \gamma^0 \varepsilon^+(k) - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - M^* - \gamma^0 \left( g_v + \frac{\partial g_v}{\partial \rho_B} \rho_B \right) V_0 - \gamma^0 \left( g_\rho + \frac{\partial g_\rho}{\partial \rho_B} \rho_B \right) \frac{\tau_3}{2} b_0 + \gamma^0 \frac{\partial g_s}{\partial \rho_B} \rho_s \phi_0 \right] U(\vec{k}, \lambda) = 0$$

ou

$$\begin{pmatrix} E^* - M^* & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -E^* - M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.3})$$

As equações (A.2) e (A.3) são iguais à equação para uma partícula livre, mas com a energia dada por  $E^*$  e a massa dada por  $M^*$ . Temos então que os spinores dos nucleons devem satisfazer:

$$\sum_S \psi \bar{\psi} = \gamma_\mu P^{*\mu} + M^*.$$

Da mesma forma para os elétrons e neutrinos, respectivamente:

$$\sum_S \psi_e \bar{\psi}_e = \gamma_\mu P^{*\mu} + m_e;$$

$$\sum_S \psi_\nu \bar{\psi}_\nu = \gamma_\mu P^{*\mu}$$

onde  $P^* = (E^*, \vec{k})$ ,  $E^* = \sqrt{k^2 + M^{*2}}$  para os nucleons,  $E^* = \sqrt{k^2 + m_e^2}$  para os elétrons,  $E^* = k$  para os neutrinos.

Assim:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g^4}{128M_Z^4} \sum_{S_3} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\alpha P_1^{*\alpha} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 3} \right] \cdot \\ &\quad \sum_{S_4} \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\gamma_\sigma P_2^{*\sigma} + m) \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) \psi_4 \right] \\ \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g^4}{128M_Z^4} Tr \left[ \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\alpha P_1^{*\alpha} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \gamma_\lambda P_3^{*\lambda} \right] \cdot \\ &\quad Tr \left[ \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\gamma_\sigma P_2^{*\sigma} + m) \gamma^\beta (c_V - c_A \gamma^5) (\gamma_\eta P_2^{*\eta} + m) \right] \end{aligned}$$

onde  $m = M^*$ ,  $m_e$ . Utilizando teoremas do traço (GRIFFITHS, 2009) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g^4}{2M_Z^4} E_1^* E_2^* E_3^* E_4^* \cdot \{ (c_V + c_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_{12})) (1 - v_4 \cos(\theta_{34})) \\ &\quad + (c_V - c_A)^2 (1 - v_4 \cos(\theta_{14})) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\ &\quad - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (c_V^2 - c_A^2) (1 - \cos(\theta_{13})) \} \end{aligned} \quad (A.4)$$

onde  $v_i = |\vec{p}_i|/E_i^*$  e  $\cos(\theta_{ij})$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{p}_i$  e  $\vec{p}_j$ .

Para uma reação de absorção de um neutrino por um nêutron temos o diagrama de Feynmann mostrado na figura (2). A amplitude de transição para tal diagrama é:

$$\mathcal{M} = \frac{g'^2}{8M_W^2} \left[ \bar{\psi}_3 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_1 \right] \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi_2 \right]. \quad (A.5)$$

onde  $\psi_1$  é o spinor do neutrino,  $\psi_3$  é spinor do elétron,  $\psi_2$  é spinor do nêutron e  $\psi_4$  é spinor do próton.

O módulo quadrado da equação acima é:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g'^4}{64M_W^4} [\bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_1] [\bar{\psi}_3 \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_1]^* \cdot \\ &\quad [\bar{\psi}_4 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi_2] [\bar{\psi}_4 \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \psi_2]^* \end{aligned}$$

Usando  $[\bar{\psi}_i \Gamma \psi_j]^* = [\bar{\psi}_j \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \psi_i]$ ,

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g'^4}{64M_W^4} [\bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_1] [\bar{\psi}_1 \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_3] \cdot \\
 &\quad [\bar{\psi}_4 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi_2] [\bar{\psi}_2 \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \psi_4] \\
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g'^4}{128M_W^4} \sum_{S_3} \left[ \bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \sum_{S_1} \psi_1 \bar{\psi}_1 \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \psi_3 \right] \cdot \\
 &\quad \sum_{S_4} \left[ \bar{\psi}_4 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \sum_{S_2} \psi_2 \bar{\psi}_2 \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \psi_4 \right] \\
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g'^4}{128M_W^4} Tr \left[ \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \gamma_\alpha P_1^{*\alpha} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) (\gamma_\lambda P_3^{*\lambda} + m_e) \right] \cdot \\
 &\quad Tr \left[ \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) (\gamma_\sigma P_2^{*\sigma} + M^*) \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) (\gamma_\eta P_2^{*\eta} + M^*) \right]
 \end{aligned}$$

Utilizando novamente teoremas do traço obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{g'^4}{2M_W^4} E_1^* E_2^* E_3^* E_4^* \cdot \{ (g_V + g_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_{12})) (1 - v_4 \cos(\theta_{34})) \\
 &\quad + (g_V - g_A)^2 (1 - v_4 \cos(\theta_{14})) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\
 &\quad - \frac{M^{*2}}{E_2^* E_4^*} (g_V^2 - g_A^2) (1 - \cos(\theta_{13})) \} \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

Para uma colisão neutrino-neutrino, não temos como saber qual dos neutrinos emergentes veio do neutrino alvo ou do neutrino incidente. A figura (3) mostra os dois diagramas de Feynmann possíveis para tal colisão. Desta forma, para uma colisão neutrino-neutrino temos:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2 \quad (A.7)$$

onde o sinal negativo vem da regra de Feynmann de antissimetriação e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1 &= \frac{g^2}{16M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_{\nu 4} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 2} \right]; \\
 \mathcal{M}_2 &= \frac{g^2}{16M_Z^2} \left[ \bar{\psi}_{\nu 4} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 1} \right] \left[ \bar{\psi}_{\nu 3} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu 2} \right]
 \end{aligned}$$

onde já usamos  $c_V = 1/2$  e  $c_A = 1/2$  para os neutrinos.

Para a eq. (A.7) temos:

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 - \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1.$$

A média sobre os spins iniciais e a soma sobre os spins finais fornece:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{4g^4}{M_Z^4} (P_1^* \cdot P_2^*) (P_3^* \cdot P_4^*) \\ &= \frac{4g^4}{M_Z^4} k_1 k_2 k_3 k_4 (1 - \cos(\theta_{12})) (1 - \cos(\theta_{34})) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde já usamos  $E_i^* = |\vec{k}_i| = k_i$ .



## **APÊNDICE B – Cálculo da integral da seção de choque**



A delta de Dirac na equação (3.7) é:

$$\delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) = \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4).$$

Realizando a integração em  $d^3k_4$ , fazendo  $\vec{k}_1 = k_1 \hat{z}$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{V} &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3k_2 \int k_3^2 dk_3 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 \cdot \\ &\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \cdot \\ &\left\{ (\mathcal{V} + \mathcal{A})^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\ &+ (\mathcal{V} - \mathcal{A})^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \\ &\left. - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde agora  $\vec{k}_4 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3$  e

$$v_4 \cos(\theta_{i4}) = \frac{k_4}{E_4^*} \frac{\vec{k}_i \cdot \vec{k}_4}{k_i k_4} = \frac{\vec{k}_i \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3)}{k_i E_4^*}.$$

Realizaremos agora a integração em  $k_3$ . Para isto usaremos a seguinte propriedade da função delta de Dirac (GRIFFITHS, 2009):

$$\int f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

com  $g(x_i) = 0$ . Escrevemos então:

$$\frac{\sigma}{V} = \int f(k_3) \delta(g(k_3)) dk_3$$

onde

$$\begin{aligned} f(k_3) &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \cdot \\ &\frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}. \end{aligned}$$

$$\left\{ (\mathcal{V} + \mathcal{A})^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\ \left. + (\mathcal{V} - \mathcal{A})^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \right. \\ \left. - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\};$$

$$g(k_3) = E_1 + E_2 - E_3 - E_4;$$

$$k_4^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2(k_1 k_2 \cos(\theta_2) - k_1 k_3 \cos(\theta_3) - k_2 k_3 \cos(\theta_{23})).$$

Para o caso do espalhamento:

$$g(k_3) = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = E_1^* + E_2^* - E_3^* - E_4^* = k_1 + E_2^* - k_3 - \sqrt{m^2 + k_4^2}$$

cuja solução para  $g(k_3) = 0$  é

$$k_3 = \frac{k_1 (E_2^* - k_2 \cos(\theta_2))}{k_1 + E_2^* - k_1 \cos(\theta_3) - k_2 \cos(\theta_{23})}.$$

Para o caso acima

$$|g'(k_3)| = \frac{k_1 (1 - \cos(\theta_3)) + E_2^* - k_2 \cos(\theta_{23})}{k_1 + E_2^* - k_3}.$$

Finalmente

$$\frac{\sigma}{V} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3 k_2 \int_0^\pi \sin(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \\ \frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{k_1 + E_2^* - k_3}{k_1 (1 - \cos(\theta_3)) + E_2^* - k_2 \cos(\theta_{23})} \\ \left\{ (c_V + c_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\ \left. + (c_V - c_A)^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \right. \\ \left. - \frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (c_V^2 - c_A^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Para o caso de absorção:

$$\begin{aligned} g(k_3) &= E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = E_1^* + E_2^* - E_3^* - E_4^* - \frac{g_p^2}{2m_p^2} \rho_3 \\ &= k_1 + E_2^* - \sqrt{m_e^2 + k_3^2} - \sqrt{M^{*2} + k_4^2} - \frac{g_p^2}{2m_p^2} \rho_3 \end{aligned}$$

cuja solução para  $g(k_3) = 0$  é

$$\begin{aligned} k_3 &= -\frac{2(k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))(C^2 + m_e^2 - D)}{4(k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))^2 - 4C^2} \\ &\quad - \frac{\sqrt{16m_e^2 C^2 (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))^2 + 4C^2 (C^2 + m_e^2 - D)^2 - 16m_e^2 C^4}}{4(k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))^2 - 4C^2} \end{aligned}$$

onde

$$C = k_1 + E_2^* - \frac{g_p^2}{2m_p^2} \rho_3; \quad D = (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2 + M^{*2}.$$

A derivada de  $g(k_3)$  aplicada no  $k_3$  acima é:

$$\begin{aligned} |g'(k_3)| &= \frac{k_3}{\sqrt{m_e^2 + k_3^2}} + \frac{k_3 - (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))}{C - \sqrt{m_e^2 + k_3^2}} \\ &= \frac{Ck_3 - (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))\sqrt{m_e^2 + k_3^2}}{\sqrt{m_e^2 + k_3^2}(C - \sqrt{m_e^2 + k_3^2})} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{V} &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{32M_Z^4} \int d^3k_2 \int_0^\pi \sin(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2 \\ &\frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{\sqrt{m_e^2 + k_3^2}(C - \sqrt{m_e^2 + k_3^2})}{Ck_3 - (k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}))\sqrt{m_e^2 + k_3^2}} \\ &\left\{ (g_V + g_A)^2 (1 - v_2 \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{E_4^*} \right) \right. \\ &\left. + (g_V - g_A)^2 \left( 1 - \frac{k_1 + k_2 \cos(\theta_2) - k_3 \cos(\theta_3)}{E_4^*} \right) (1 - v_2 \cos(\theta_{23})) \right\} \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{m^2}{E_2^* E_4^*} (g_V^2 - g_A^2) (1 - \cos(\theta_3)) \right\}. \quad (\text{B.3})$$

Para um espalhamento neutrino-neutrino:

$$f(k_3) = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{4M_Z^4} \int d^3k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2.$$

$$\frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} (1 - \cos(\theta_2))(1 - \cos(\theta_{34}));$$

$$g(k_3) = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = k_1 + k_2 - k_3 - k_4$$

cuja solução para  $g(k_3) = 0$  é

$$k_3 = \frac{k_1 k_2 (1 - \cos(\theta_2))}{k_1 + k_2 - k_1 \cos(\theta_3) - k_2 \cos(\theta_{23})}.$$

Neste caso

$$|g'(k_3)| = \frac{k_1(1 - \cos(\theta_3)) + k_2(1 - \cos(\theta_{23}))}{k_1 + k_2 - k_3};$$

$$\frac{\sigma}{V} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g^4}{4M_Z^4} \int d^3k_2 \int_0^\pi \text{sen}(\theta_3) d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\phi_3 k_3^2$$

$$\frac{\eta_2(T)(1 - \eta_3(T))(1 - \eta_4(T))}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{k_1 + k_2 - k_3}{k_1(1 - \cos(\theta_3)) + k_2(1 - \cos(\theta_{23}))}.$$

$$(1 - \cos(\theta_2)) \left( 1 - \frac{k_1 \cos(\theta_3) + k_2 \cos(\theta_{23}) - k_3}{k_4} \right). \quad (\text{B.4})$$

Para calcular as integrais apresentadas aqui utilizamos o método de Monte Carlo, sorteando pontos aleatoriamente no espaço de integração. Para cada ponto sorteado, calculamos o valor da função e somamos os valores para depois calcular a média e obter o resultado final.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BUDNEY, R. V. Highly inelastic neutrino-nucleon scattering. *Physical Review D*, v. 2, p. 1271–1277, 1970.
- FUCHS, C.; LENSKE, H.; WOLTER, H. H. *Phys. Rev. C*, v. 52, p. 3043, 1995.
- GALSTER, S. et al. Elastic electron deuteron scattering and the electric neutron form factor at four-momentum transfers  $5 fm^{-2} < q^2 < 14 fm^{-2}$ . *Nuclear Physics B*, v. 32, p. 221–237, 1971.
- GAMBIR, Y.; RING, P.; THIMET, A. *ANNALS OF PHYSICS*, v. 198, p. 179–, 1990.
- GLENDENNING, N. K. *Compact Stars*. second edition: Springer, 2000.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Elementary Particles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- HAAS, B. F. *Espalhamento de Neutrinos e Modos de Spin-Flip no Núcleo de  $^{16}O$* . Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 1997.
- HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1984.
- PONS, J. A. et al. Evolution of proto-neutron stars. *THE ASTROPHYSICAL JOURNAL*, v. 513, p. 780–804, 1999.
- REDDY, S.; PRAKASH, M. Neutrino scattering in a newly born neutron star. *THE ASTROPHYSICAL JOURNAL*, v. 478, p. 689–799, 1997.
- REDDY, S.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. M. *Phys. Rev. D*, v. 58, n. 013009, 1998b.
- SEROT, B.; WALECKA, J. *Advances in Nuclear Physics*. [S.l.]: Plenum-Press, 1986.
- TYPEL, S.; WOLTER, H. H. Relativistic mean field calculations with density-dependent meson-nucleon coupling. *Nuclear Physics A*, v. 656, p. 331–364, 1999.
- YAKOVLEV, D. G. et al. Neutrino emission from neutron stars. *Phys. Rept.*, v. 354, n. 1, 2001.