Marcelo de Oliveira Moro

Um estudo sobre polinômios

Trabalho de Conclusão do Curso referente à 8ª fase do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientado pelo professor Antônio Vladimir Martins.

Realizado pelo aluno Marcelo de Oliveira Moro

Universidade Federal de Santa Catarina

2000/2

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 02 / SGC / 01.

Prof^{a} Carmen Susane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca examinadora:

Antonio Vladimir Martins
Orientador

Nereu Estanislau Burin

Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Dedicado a Ivan Santos Moro , Juçara Macedo de Oliveira Moro e meu orientador
Antônio Vladimir Martins
Amigos e residentes eternos do meu coração.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é para Antônio Vladimir Martins, pois suas críticas, sugestões e o relacionamento entre professor e aluno foram muito importantes para a finalização deste Trabalho de conclusão de Curso, ao colega e grande amigo Franco Yukio Kagoiki e principalmente a meus pais, Ivan Santos Moro e Juçara Macedo de Oliveira Moro, pois foram as pessoas que me ajudaram e incentivaram, desde o início do curso até o seu término, possibilitando assim a conclusão do mesmo.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A idéia de pesquisar sobre as equações algébricas surgiu no semestre em que estava fazendo a disciplina LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA III. Nessa disciplina discutiu-se muito sobre problemas nos quais a resolução se dava através das equações algébricas.

Juntamente com o professor Antônio Vladimir Martins, que ministrou a disciplina Laboratório de Matemática III, pesquisaremos neste trabalho os seguintes tópicos:

- História (resumo) das equações algébricas.
- Alguns métodos de resolução das equações algébricas.
- Prova do Teorema Fundamental da Álgebra.
- Algumas aplicações envolvendo polinômios.

UMA PARTE DA HISTÓRIA DOS POLINÔMIOS(*)

A história das equações polinomiais é muito antiga, tem-se conhecimento que na Babilônia, cerca de 1800 a.C., alguns métodos de resolução de equações do 2^{o} grau já eram conhecidas. Assim, o problema de encontrar as raízes de uma equação algébrica, isto é, de um polinômio, é alvo de estudo de muitas pessoas há muito tempo.

Equações Lineares:

São correspondentes as equações do primeiro grau, ou seja, da forma

$$a.x + b = 0$$

Segundo registro de historiadores, o primeiro povo a lidar com essas equações foram os Egípcios. No Papiro de Ahmes, também conhecido como o Papiro de Rhind, adquirido pelo escocês Henry Rhind, em 1868, numa cidade às margens do Rio Nilo. Nesse Papiro consta que os Egípcios não se referiam a problemas com objetos concretos, mas já tratavam de incógnitas em seus problemas.

Um exemplo disso é o problema 24 do Papiro de Ahmes, que pede o valor de "aha" se "aha" e um sétimo de "aha" é 19. Escrevendo isso na forma moderna, temos:

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

Equações Quadráticas:

São as equações de grau 2, escritas na forma geral

$$a.x^2 + b.x + c = 0.$$

Aritmeticamente, essas equações foram resolvidas pelos Egípcios. Euclides e seus seguidores as resolveram geometricamente e algebricamente solucionadas pelos Hindus. O escritor árabe Al-Khowarismê (825), deu regras aritméticas as quais demonstra por meios geométricos essas equações. Foi através desse escritor que os árabes introduziram o nome Álgebra.

Os Indianos trataram as quadráticas algebricamente. Shidara (1025) parece ter sido o primeiro a estabelecer o "método hindu" citado por Bhaskara (1150) na seguinte forma:

"Multiplique ambos os lados da equação por um número igual a quatro vezes o [coeficiente do] quadrado e adicione a eles um número igual ao quadrado da original [coeficiente da] quantidade incógnita. [Extraia a raiz]."

Utilizando a simbologia moderna, temos que:

Dado $a.x^2 + b.x + c = 0$, temos inicialmente

$4.a^2.x^2 + 4a.b.x = -4.a.c$ e então $4.a^2.x^2 + 4a.b.x + b^2 = -4.a.c + b^2$, portanto $2.a.x + b = \sqrt{b^2 - 4.a.c}$. Neste caso, a raiz negativa era deixada de lado.

Omar Khayyam (1100) tem uma regra para a equação do tipo $x^2 + p.x = q$.

Mais tarde, em 1500, Viéte realizou progressos nos métodos algébricos, isto é, reduzia uma quadrática geral a uma quadrática pura usando uma sutil substituição. Assim:

$x^2 + 2.a.x = b$, fazendo x = u + z e após z = - a, a equação se transforma em u = $\sqrt{a^2 + b}$, portanto x = - a + $\sqrt{a^2 + b}$.

Harriot (1631) mostra soluções por fatorização, e entre os métodos mais aplicados atualmente, citamos aqueles em que o discriminante é utilizado, o qual foi introduzido por Euler (1750) e Bezout (1775) e mais tarde aprimorado por Sylvestre (1840) e Hesse (1844).

Equações Cúbicas:

São as equações de grau 3, isto é, da forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

As cúbicas apresentam uma história muito fascinante, pois são equações que apresentavam um certo grau de dificuldade naquela época.

Temos notícia de que Arquimedes (225 a.C.) manipulou uma cúbica vinda de um problema geométrico. Omar Khayyam, poeta e algebrista, classificou treze casos de cúbicas que ele resolveu.

Uma característica que marcou esse período, foram os debates realizados entre grandes matemáticos.

Fibonacci (1225) foi desafiado em debate a resolver a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Apesar de conhecermos vários métodos para resolver uma equação do 3^o grau, a história não responde a pergunta:

Quem propôs a solução da equação do terceiro grau?

No começo do século XVI , o matemático Bolognês, Scipione Del Ferro, resolveu cúbicas da forma $x^3 + ax = b$. Ferro revela o segredo desse método de resolução a um estudante, chamado Antônio Maria Flor.

Flor, vinte anos mais tarde, realiza um debate com outro italiano de nome Tartaglia. Cada um deles enviou 30 problemas ao outro e aquele que resolvesse o maior número de problemas em 50 dias vencia o duelo. Tartaglia direcionou seus esforços as cúbicas em que não continha o termo do primeiro grau.

Resolvendo esse caso, quando faltava menos de duas semanas para o debate, Tartaglia descobre a solução da cúbica em que o termo do segundo grau não existia, assim, sabendo desses dois métodos, Tartaglia solucionou todos os problemas em menos de duas horas, derrotando seu oponente.

Cardano pediu o esquema a Tartaglia, como conta o historiador Bell, em seu livro.Tartaglia, após muita insistência, fornece o esquema a Cardano sob promessa de manter segredo.

Embora exista muita dúvida quanto a autoria dessa fórmula, Cardano sem dúvida contribuiu significativamente ao desenvolvimento da teoria das equações algébricas.

(*) bibliografia 1.

SOLUÇÃO TRIGONOMÉTRICA PARA A CÚBICA

Seja uma equação algébrica de terceiro grau da forma :

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (1), \text{ com } a_3 \neq 0.$$

As raízes reais podem ser encontradas pelo método abaixo:

1°) Dividir a equação (1) por a_3 e reduzir o caso de $a_3 = 1$.

$$\frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{a_3} = \frac{0}{a_3}.$$

Como $a_3 = 1$, temos que:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

2°) Substituir x por $y - \frac{a_2}{3}$, assim:

$$\left(y - \frac{a_2}{3}\right)^3 + a_2.\left(y - \frac{a_2}{3}\right)^2 + a_1.\left(y - \frac{a_2}{3}\right) + a_0 = 0$$

$$\left(y^3 - \frac{3y^2a_2}{3} + \frac{3y(a_2)^2}{9} - \frac{(a_2)^3}{27}\right) + a_2.\left(y^2 - \frac{2ya_2}{3} + \frac{(a_2)^2}{9}\right) + a_1.\left(y - \frac{a_2}{3}\right) + a_0 = 0$$

$$y^3 - a_2y^2 + \frac{y(a_2)^2}{3} - \frac{(a_2)^3}{27} + a_2y^2 - \frac{2y(a_2)^2}{3} + \frac{(a_2)^3}{9} + a_1y - \frac{a_1a_2}{3} + a_0 = 0$$

$$y^3 + y.\underbrace{\left(\frac{(a_2)^2}{3} + a_1\right)}_{p} = \underbrace{-\left(\frac{-(a_2)^2}{27} + \frac{(a_2)^3}{9} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0\right)}_{q}$$

$y^3 + py = q$ (2), onde p e q são termos constantes.

Observando a equação (2), se p=0 então $q = y^3 + 0$, ou seja, $y = \sqrt[3]{q}$ que é solução.

Por outro lado, se $p \neq 0$, devemos fazer $y = hz$, onde $h = \sqrt{\frac{4|p|}{3}}$.

- $y^3 + yp = +q$
- $y^3 + yp - q = 0$
- $(hz)^3 + (hz)p - q = 0$
- $h^3z^3 + hzp - q = 0$

Multiplicando por $K = \frac{3}{h|p|}$, tem–se:

- $K \left\lfloor h^3z^3 + hzp - q \right\rfloor = 0$
- $\frac{3}{h|p|} \cdot \left\lfloor hz(h^2z^2 + p) - q \right\rfloor = 0$
- $\frac{3}{|p|} \cdot (h^2z^3 + pz) - \frac{3q}{h|p|} = 0$
- $\frac{3h^2z^3}{|p|} + \frac{3pz}{|p|} - \frac{3q}{h|p|} = 0$
- $4z^3 + \frac{3pz}{|p|} = \frac{3q}{h|p|}$, onde $h = \sqrt{\frac{4|p|}{3}}$.

Na equação acima, façamos $C = \frac{3q}{h|p|}$, onde C é uma constante.

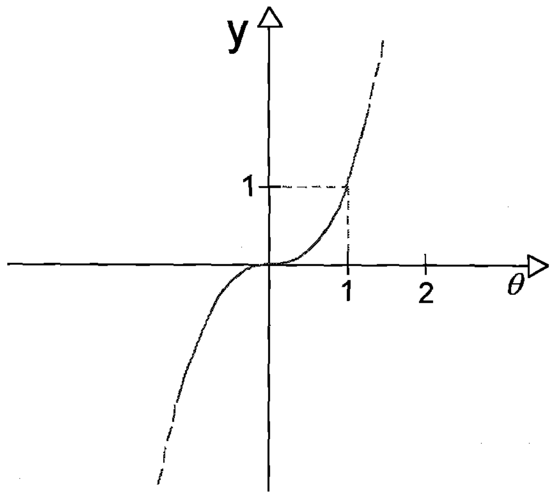
Assim:

Se $p>0$ então temos a equação $\mathbf{4z^3 + 3z = C}$

Se $p<0$ então temos a equação $\mathbf{4z^3 - 3z = C}$

Utilizando a identidade trigonométrica $\operatorname{senh}(3\theta) = 4\operatorname{senh}^3(\theta) + 3\operatorname{senh}(\theta)$, para resolvermos a equação $\mathbf{4z^3 + 3z = C}$, onde " senh " indica o seno hiperbólico e cujo gráfico está na figura abaixo.

$y = \operatorname{senh}(\theta)$, onde $\operatorname{senh}(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$.



A prova desta identidade é facilmente demonstrada, a partir do $\text{senh}(\theta) = \dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$, para todo θ em $\Re$.

$$4.\left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right)^3 + 3.\left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}.\left((e^{3\theta} - 3(e^{\theta}))^2 e^{-\theta} + 3e^{\theta}(e^{-\theta})^2 - (e^{-\theta})^3\right) + \frac{3}{2}.\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) =$$

$$= \frac{e^{3\theta} - e^{-3\theta}}{2} = \text{senh}(3\theta).$$

Portanto, a igualdade está demonstrada. Comparando a equação $4z^3 + 3z = C$ e $\text{senh}(3\theta) = 4\ \text{senh}^3(\theta) + 3\ \text{senh}(\theta)$, temos que:

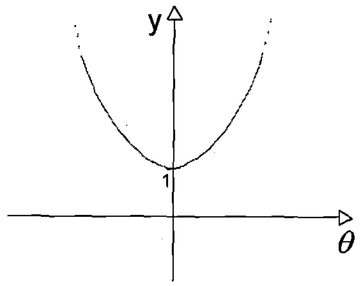
$\text{senh}(3\theta) = C$ e $z = \text{senh}(\theta)$.

Tem–se que:

$$\text{senh}(3\theta) = C \Rightarrow \text{arcsenh}\ C = (3\theta) \Rightarrow \frac{\text{arc senh C}}{3} = \theta$$

Portanto $z = \text{senh}\left(\dfrac{\text{arc senh C}}{3}\right)$ é solução de $4z^3 + 3z = C$.

Para obtermos a solução da equação $4z^3 + 3z = C$, usaremos a identidade $\cosh(3\theta) = 4\cosh^3(\theta) - 3\cosh(\theta)$, onde "cosh" indica o cosseno hiperbólico definido por $\cosh(\theta) = \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$ e cujo gráfico está abaixo.



$y = \cosh(\theta)$

Note que o conjunto imagem de $\cosh(\theta)$ é $[1, +\infty)$.

Antes de continuar a resolução do problema, demonstraremos a identidade $\cosh(3\theta) = 4\cosh^3(\theta) - 3\cosh(\theta)$ usando $\cosh(\theta) = \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$.

- $4\cosh^3(\theta) - 3\cosh(\theta) = \dfrac{1}{2}.\left(e^{3\theta} + 3e^{\theta} + 3e^{-\theta} + e^{-3\theta}\right) - 3.\left(\dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\right) =$

$= \dfrac{e^{3\theta} + e^{-3\theta}}{2} = \cosh(3\theta)$

Podemos resolver a equação $\mathbf{4z^3 - 3z = C}$.

Para resolver esta equação, se $C \geq 1$, utilizaremos $\cosh(3\theta)$.

Comparando a equação $4z^3 - 3z = C$. e $\cosh(3\theta) = 4\cosh^3(\theta) - 3\cosh(\theta)$, temos que:

$\cosh(3\theta) = C$ e $z = \cosh(\theta)$, tem–se que:

$\cosh(3\theta) = C \Rightarrow 3\theta = \text{arccosh } C \Rightarrow \theta = \dfrac{\text{arc cosh C}}{3}$.

- Portanto, $z = \cosh\left(\dfrac{\text{arccos}\, hC}{3}\right)$ é solução da equação $4z^3 - 3z = C$.

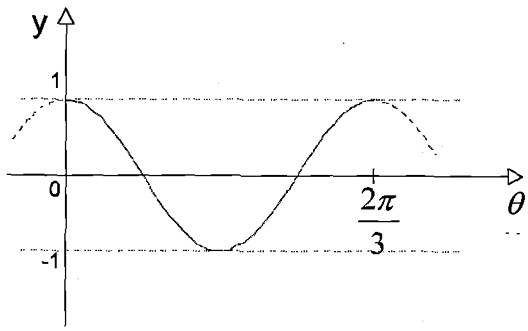
Considerando o caso de $C \leq 1$, temos que:

- $4z^3 - 3z = C$
- $4(-z)^3 - 3(-z) = -C$, pois $C \leq -1 \Rightarrow -C \geq 1$.

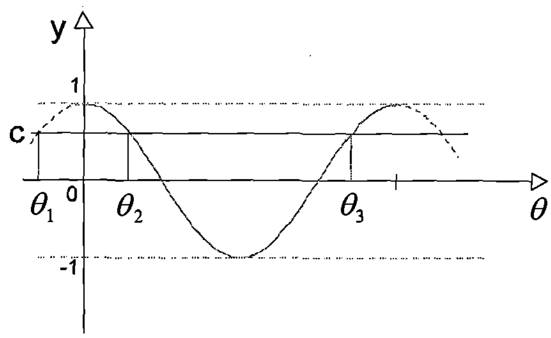
Assim, podemos resolver a equação $\mathbf{4z^3 - 3z = C}$, para $C \leq -1$. Obtendo a resposta $z = \cosh\left(\dfrac{\text{arccos}\, h(-C)}{3}\right)$.

Ainda temos o caso $|C| < 1$, para a resolução do mesmo usamos a identidade trigonométrica $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3.\cos\theta$.

Como -1 $\leq$ cos(3θ) $\leq$ +1, existe θ tal que cos(3θ) = C. Observando o gráfico, a visualização de θ é facilmente reconhecida.



Como $|C| < 1$, C está entre -1 e 1.



Para este caso, o valor de z = $\cos.\left(\dfrac{\arccos C}{3}\right)$ assume três valores, os quais diferem por serem múltiplos de 120^0.

Agora, daremos um exemplo da solução da cúbica $x^3 - 3x^2 + 6x = 7$.

1º) Dividir a equação por $a_3 = 1$ e reduzir ao caso em que $a_3 = 1$.

$$x^3 - 3x^2 + 6x = 7.$$

2º) Substituir x por $y - \dfrac{a_2}{3} = y + \dfrac{3}{3} = y + 1$

- $(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 6(y+1) = 7$
- $y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 6y + 6 - 7 = 0$
- $y^3 + 3y - 3 = 0$
- $y^3 + 3y = 3$
- $y^3 + y \underbrace{(3)}_{p} = \underbrace{(3)}_{q}$

Como $p \neq 0$, fazer $y = hz$, onde $h = \sqrt{\frac{12}{3}} \Rightarrow h = 2$.

- $y^3 + yp = q$
- $(hz)^3 + (hz)p = q$

Multiplicando os lados por K, onde $K = \frac{3}{h|p|} \Rightarrow K = \frac{3}{2|p|}$

$$4z^3 + \frac{3pz}{|p|} = \frac{3q}{h|p|}$$

$$4z^3 + \frac{9z}{3} = \frac{3.3}{2.3} \Rightarrow 4z^3 + 3z = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Comparando (1) com senh (3θ), temos que:

$\operatorname{senh}(3\theta) = \frac{3}{2}$ e $z = \operatorname{senh}(\theta)$, assim:

$$\theta = \frac{\operatorname{arcsen} h \frac{3}{2}}{3} \quad \text{e} \quad z = \operatorname{senh}\left(\frac{\operatorname{arcsenh} \frac{3}{2}}{3}\right), \text{ temos que:}$$

- $y = hz \Rightarrow y = 2z \Rightarrow y = 0{,}8177316738868$

$x = y + 1 \Rightarrow x = 1{,}8177316738868$ que é raiz da equação $x^3 - 3x^2 + 6x = 7$.

TABELA PRÁTICA PARA UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA SOLUÇÃO TRIGONOMÉTRICA PÁRA A CÚBICA

Dada uma equação cúbica do tipo:

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

1^o) Se o coeficiente do termo em x^3 na equação cúbica é diferente de 1, divide–se a equação por a_3 .

2^o) Substituir x por $y - \frac{a_2}{3}$.

3^o) Encontrando a equação $y^3 + py = q$, onde:

$$p = \frac{(a_2)^2}{3} + a_1 \quad \text{e} \quad q = \frac{(a_2)^3}{27} - \frac{(a_2)^2}{9} - \frac{a_1.a_2}{3} + a_0$$

4°) Se p = 0, temos que y = $\sqrt[3]{q}$ é solução.

5°) Se p≠ 0, temos que:

A equação $4z^3 + \dfrac{3pz}{|p|} = \dfrac{3q}{h|p|}$, onde $h = \sqrt{\dfrac{4|p|}{3}}$ e y = hz.

Faça $C = \dfrac{3q}{h|p|}$, onde C = constante.

Assim:

$$4z^3 + \frac{3pz}{|p|} = C.$$

Temos que:

- $p > 0 \Rightarrow 4z^3 + 3z = C$, então $z = \operatorname{senh}\left(\dfrac{\operatorname{arc\,senh}(C)}{3}\right)$ é solução de $4z^3 + 3z = C$.
- $p < 0 \Rightarrow 4z^3 - 3z = C$ e $C \geq 1$, então $z = \cosh\left(\dfrac{\operatorname{arccos}h(C)}{3}\right)$ é solução de $4z^3 - 3z = C$.
- Se $4z^3 - 3z = C$ e $C \leq -1$ então $z = -\cosh\left(\dfrac{\operatorname{arccos}h(-C)}{3}\right)$ é solução de $4z^3 - 3z = C$
- Se $|C| < 1$, em $4z^3 - 3z = C$ então $z = \cos\left(\dfrac{\arccos(C)}{3}\right)$ é solução de $4z^3 - 3z = C$

(*) bibliografia 3.

TÁBULA BABILÔNICA(*)

Os Babilônios utilizavam uma tabela que fornecia alguns valores, os quais possuíam certa relação, expressada por $n^3 + n^2$, para $1 \leq n \leq 30$.

A seguir construiremos essa tabela para n de 1 a 10.

$n = 1 \rightarrow \quad 1^3 + 1^2 = 2$

$n = 2 \rightarrow \quad 2^3 + 2^2 = 12$

$n = 3 \rightarrow \quad 3^3 + 3^2 = 36$

$n = 4 \rightarrow \quad 4^3 + 4^2 = 80$

$n = 5 \rightarrow \quad 5^3 + 5^2 = 150$

$n = 6 \rightarrow \quad 6^3 + 6^2 = 252$

$n = 7 \rightarrow \quad 7^3 + 7^2 = 392$

$n = 8 \rightarrow \quad 8^3 + 8^2 = 576$

$n = 9 \rightarrow \quad 9^3 + 9^2 = 810$

$n = 10 \rightarrow \quad 10^3 + 10^2 = 1100$

Usando a tabela acima, encontre uma raiz da equação cúbica $x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$.

$$x^3 + 2x^2 - 3136 = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{8} + \frac{2x^2}{8} = \frac{3136}{8} \Rightarrow \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4} = 392 \quad (1)$$

Observando a tabela, temos que:

Para $n = 7 \Rightarrow n^3 + n^2 = 392$

Devemos encontrar em (1) um número x tal que $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4} = 392$.

Como n = 7, observa–se que:

$$* \quad \frac{x^3}{8} = n^3 \Rightarrow \frac{x^3}{8} = 7^3 \Rightarrow \frac{x^3}{8} = 343 \Rightarrow x = \sqrt[3]{343.8} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{7^3.2^3} \Rightarrow x = 14$$

$$* \quad \frac{x^2}{4} = n^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 7^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 49 \Rightarrow x = \sqrt{7^2.2^2} \Rightarrow x = 14$$

Assim, a equação $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4} = 392$. tem solução real igual a 14.

(*) bibliografia 1, 2, 4, 5, 12.

MÉTODO DE CARDANO PARA RESOLUÇÃO DAS CÚBICAS(*)

A equação geral do terceiro grau é

$$a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0, \text{ com } a \neq 0 \quad (1)$$

Queremos tornar essa equação (1) sem termo de grau 2. Para isso, seguiremos o seguinte método:

1°) Dividir (1) por a :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

2°) Substituir x por $y - \frac{a}{3}$.

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

Fazendo $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$, temos que $x^3 + px + q = 0$ (2)

Para resolver a equação (2), substitua x por $u + v$.

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0$$

ou

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \quad (3)$$

Para que $x = u + v$ seja raiz da equação (3), u e v devem satisfazer as seguintes relações:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3.v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \quad (4)$$

Em (4), temos a soma e o produto de dois números, para encontrarmos esses dois números, u^3 e v^3, devemos resolver a equação quadrática $y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$ (5)

Usando a fórmula de Bháskara, temos que:

$$y = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4.-\dfrac{p^3}{27}}}{2} \Rightarrow y = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2}$$

Assim, as raízes de (5) são:

$$y_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{e } y_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Temos que:

$u^3 = y_1$ e $v^3 = y_2$.

Como $x = u + v$, temos que:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Assim, $x = u + v$ é raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Chamemos agora, $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ o radicando.

Vamos analisar, três casos para D.

1 º) $D > 0$, a equação tem uma raiz real e duas complexas conjugadas.

2 º) $D = 0$, tem–se três raízes reais, uma delas é repetida.

3 º) $D < 0$ então as raízes da equação $x^3 + px + q = 0$ são reais e distintas.

Neste caso, a fórmula mostra a raiz $x = u + v$, como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. Este caso, a equação tem três raízes reais e distintas, e é conhecido como " **o caso irredutível** ".

Vamos resolver a equação $x^3 - 3x^2 + 6x = 7$.

A equação na forma (2) é $y^3 + 3y = 3$ ou $x^3 + 3x = 3$, onde $p = 3 = q$.

Desde que $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$., temos:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{27}{4} + \frac{27}{27} = \frac{27}{4} + 1 = \frac{31}{4} > 0.$$

Como D > 0, a equação tem uma raiz real e duas complexas conjugadas.

Resolvendo a equação, temos que uma raiz real é:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{31}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{31}{4}}}\,. \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{31}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{31}}{2}}\,.$$

Este método, apresenta uma solução para a equação como soma de duas raízes cúbicas, um tanto complicado de se determinar o número real que ali está representado

Utilizando o método da solução trigonométrica, visto anteriormente, conseguimos uma solução real para a mesma equação com mais facilidade.

(*) bibliografia 10.

RESOLUÇÃO DA QUÁRTICA(*)

Em 1540, o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi, propôs a Cardano o problema abaixo.

" Dividir 10 em três partes numa proporção contínua de forma que o produto das duas primeiras seja 6 ".

Nos dias atuais este problema pode ser reescrito como; determinar os números positivos x, y e z tais que:

$$\begin{cases} y+x+z=10....(a) \\ \dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{z}...(b) \\ y.x=6...(c) \end{cases}$$

Cardano entregou esse problema ao seu secretário, Luigi Ferrari (1522-1565), cuja solução consiste em:

Fazer y e z em função de x, temos que:

$$y=\frac{6}{x} \quad (4)$$

De (2), temos que:

$$x^2=y.z \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{6}{x}.z \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3}{6}=z \quad (5)$$

Substituindo (4) e (5) em (1), obtemos:

$$\mathrm{y+x+z}\ =\ 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6}=10 \quad \Rightarrow \quad x^4+6x^2+36=60x \quad (6)$$

A resolução dessa quártica é feita seguindo os passos :

1 º passo- Estabelecer a identidade $(x^2 + p + y)^2$, onde $p = 6$.

Devemos somar suficientes quadrados e números a ambos os lados da equação (6), para que o primeiro membro seja quadrado perfeito.

A equação (6) pode ser reescrita como $(x^2 + 6)^2 = 60x + 6x^2$ (7).

2^{o} passo- Inserir em $(x^2+6)^2$ uma incógnita diferente (y), como a figura abaixo.

	x^2	p	y
y	x^2y	py	y^2
p	x^2p	p^2	py
x^2	x^4	x^2p	x^2y

Temos que:

$$(x^2+6+y)^2 = (x^2+6)^2 + 2(x^2+6).y + y^2 .$$

De (7), temos:

$$(x^2+6+y)^2 = (60x+6x^2) + 2(x^2+6).y + y^2$$

$$(x^2+6+y)^2 = 60x + 6x^2 + 2x^2y + 12y + y^2$$

$$(x^2+6+y)^2 = (2y+6).x^2 + 60x + (y^2+12y) \qquad (8)$$

Observe que o lado direito da igualdade é uma equação do 2^{o} grau em x, com coeficientes dependendo de y.

3^{o} passo- Devemos encontrar um valor para y tal que o trinômio no 2^{o} membro seja quadrado perfeito.

<u>NOTA:</u> Para que o trinômio do 2^{o} grau seja quadrado perfeito, devemos ter o seu discriminante igual a zero.

Assim:

$$60^2 - 4.(2y+6).(y^2+12y) = 0$$

$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450 \qquad (9)$$

Para resolver a cúbica (9), utilizaremos o método da " Substituição Trigonométrica".

A equação (9), deve ficar na forma $w^3 + p.w = q$ (10)

A substituição $y = w - \frac{a_2}{3} = w - \frac{15}{3} = w - 5$ transforma (9) em $w^3 - 39w = 380$ (10), onde $p = -39$ e $q = 380$.

Como $p \neq 0$, devemos fazer $w = hz$, onde $h = \sqrt{\frac{4|p|}{3}} = \sqrt{\frac{4|-39|}{3}} = \sqrt{52}$,

Temos que:

- $w^3 + p.w = q$
- $h^3z^3 + hzp - q = 0$ (11)

Multiplicando a equação (11) por $K = \frac{3}{h|p|}$, tem-se:

- $K.\lfloor (hz)^3 + hzp - q \rfloor = 0$

Fazendo as devidas substituições, chega-se a equação:

$$4z^3 - 3z = \frac{190}{13^{\frac{3}{2}}} \approx 4.05357835703052$$

Como $C = \frac{190}{13^{\frac{3}{2}}} \geq 1$, utilizar $\cosh(3\theta)$ para resolver esta equação.

Comparando a equação $4z^3 - 3z = \frac{190}{13^{\frac{3}{2}}}$ com

$\cosh(3\theta) = 4.\cosh^3(\theta) - 3.\cosh(\theta)$, temos que:

$\cosh(3\theta) = C$ e $z = \cosh(\theta)$. Portanto, $z = 1{,}249433240604$.

Como $w = hz$, onde $h = \sqrt{52}$, então $w = \sqrt{52} . 1{,}249433240604$ $\rightarrow$ $w = 9{,}009791224$

Temos que:

$y = w - \frac{a_2}{3} = w - \frac{15}{3} = w - 5 \quad \rightarrow \quad y = 4{,}00979116490376$

Substituindo o valor encontrado para y em (8), levando em conta que a fatoração do trinômio cujas raízes (*) são iguais é do tipo $a.(x-x_1)(x-x_2) = a.(x-x_1)^2$, temos que:

$$(*)\ x_1 = x_2 = x_0 = \frac{-60}{2.(2y+6)} = \frac{-30}{2y+6} = \frac{-15}{y+3}$$

$$\left(x^2+6+y\right)^2 = (2y+6).\left(x+\frac{15}{y+3}\right)^2$$

$$\sqrt{(x^2+6+y)^2} = \sqrt{(2y+6).\left(x+\frac{15}{y+3}\right)^2}$$

$$\left(x^2+6+y\right)^2 = \sqrt{(2y+6)}.\left(x+\frac{15}{y+3}\right)$$

Como $y = 4{,}00979116490376$ então $x_0 = \frac{-15}{y+3} \rightarrow x_0 = -2{,}139864034$.

Substituir x_0 em:

$x^2+6+y = \sqrt{(2y+6)}.(x-x_0)$, onde $x_0 = -2{,}139864034$.

Assim, fazendo as devidas operações, temos a equação de 2^o grau

$x^2 - 3{,}742965557x + 2{,}000353784 = 0$, cujas raízes são

$x_1 = 3{,}097082226$ e $x_2 = 0{,}64588333$.

Para o caso geral de uma equação de quarto grau, o método de Ferrari consiste no seguinte:

Reduzir a equação:

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

a forma $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ (isso é possível, substituindo x da equação original por $x - \frac{a}{4}$, daí

$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2$

ou seja $\left(x^2+p\right)^2 = px^2 - qx - r + p^2$

Por fim, escrevê-la da seguinte forma:

$$\left(x^2 + p + y\right)^2 = \left(p + 2y\right)x^2 - qx + \left(p^2 - r + 2py + y^2\right) \quad (*)$$

Transformar o lado direito num quadrado perfeito, tomando valores convenientes para y, os quais podem ser obtidos igualando a zero o discriminante do trinômio à direita:

$$q^2 - 4\left(p + 2y\right)\left(p^2 - r + 2py + y^2\right) = 0$$

Essa equação é uma cúbica, cuja resolução é conhecida.

O passo seguinte é retornar a equação (*) substituindo y pelo seu valor encontrado acima; ela reduz a equações de 2^o grau, cujas as soluções são encontradas com facilidade.

(*) bibliografia 10.

EQUAÇÕES DE GRAU N MAIOR OU IGUAL A CINCO(*)

Vimos anteriormente, que as equações de 2^o e 3^o graus são resolúveis por radicais. A quártica pode ser reduzida a uma cúbica, cuja solução é conhecida. Será possível, por meios de radicais, resolver equações de grau maior que quatro?

Queremos encontrar uma fórmula que expresse as raízes de uma equação de 5^o grau em função de seus coeficientes, como é feita com a quártica e a cúbica. Esta fórmula deve envolver somente operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, juntamente com a extração de raízes, pois tudo isso tinha sido utilizado para a solução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas.

A primeira tentativa de provar que uma equação de 5^o grau não pode ser resolvida por meios algébricos é devida ao italiano Paolo Ruffini.

Ruffini, em 1803, 1805 e 1813 procura mostrar, embora de modo insuficiente, que as raízes das equações de grau maior ou igual a cinco, não podem ser expressas por meio de radicais em termos de seus coeficientes.

Euler, em 1750, tentou reduzir a quíntica a uma quártica, para poder resolvê-la, mas Euler falhou em sua tentativa, bem como Lagrange 20 anos mais tarde.

Lagrange, em 1770, analisa todos os métodos de resolução para equações de 2^o, 3^o e 4^o graus, numa tentativa de observar como os métodos funcionavam e como poderiam ser generalizados. Sua análise do problema em termos das permutações das raízes foi promissora, mas ele não teve êxito nesta linha de ataque.

A primeira prova válida, de que uma equação geral de 5^o grau não é solúvel por radicais, foi dada após a morte de Lagrange, num impressionante pequeno artigo, escrito por Abel em 1824.

Abel também mostrou que algumas equações de 5^o grau eram solúveis por radicais e que algumas equações como $x^5 - 1 = 0$ são resolvidas facilmente, tendo x = 1 como uma raiz e as outras quatro raízes podem ser encontradas por extração de raiz quadrada. Abel levanta a questão "Quais equações de grau maior que quatro podem ser resolvidas por radicais?".

Abel morreu em 1829, aos 26 anos de idade, sem resolver o problema por ele levantado.

Após Abel, um grande matemático chamado Evariste Galois, contribuiu com a importante Teoria dos Grupos, da qual deduz-se a impossibilidade de resolução por radicais as equações de grau maior que quatro. Vale lembrar que um grupo é um conjunto não vazio de elementos S com uma operação binária definida sobre S, denotada por (.), que satisfaz aos axiomas seguintes.

1 ^{o}) A operação (.) é associativa, isto é, dados a, b, c $\in$ S tem-se (a . b).c = a .(b . c)

2 ^{o}) Em (.), S possui pelo menos um elemento identidade à direita

e $\in$ S, tal que, para cada a $\in$ S, a . e = a.

3 ^{o}) Para cada a pertencente a S, existe um elemento inverso à direita

$\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = e$.

A seguir apresentamos os conceitos básicos da teoria de Galois:

Corpo de Fatorização (ou Corpo de Raízes de um polinômio)

Seja f(x) $\in$ F[x] um polinômio com coeficientes num corpo F.

Por definição, um corpo E, E $\supset$ F é um corpo de fatorização de f(x) sobre F se f(x) pode ser fatorado em fatores lineares, cujos coeficientes estão em E.

Pode ser mostrado que todo polinômio f(x) tem um corpo de fatorização que é “menor” no sentido de inclusão de conjuntos.

Extensão Normal

Sejam E e F corpos, E $\supset$ F.

Por definição, E é uma extensão normal sobre F quando E é um corpo de fatorização de todo polinômio f(x) que é irredutível sobre F e f(x) tem uma raiz em E.

Exemplo:

C (complexos) é uma extensão normal sobre o corpo dos números reais.

Grupo de Galois

Seja E extensão normal do corpo F. Por definição, o Grupo de Galois, de E sobre F é o grupo (com relação à operação de composição de funções) de todos os automorfismos γ : E $\rightarrow$ E que deixam fixados todos os elementos de F, isto é, γ (x) = x para qualquer x $\in$ F.

Notação: G = G (E/F)

<u>Grupo Solúvel</u>

Um grupo G é solúvel se existem subgrupos $G = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_k = \{ e \}$ onde cada N_i é subgrupo normal de N_{i-1} e todo grupo quociente $\frac{N_{i-1}}{N_i}$ é abeliano.

Pode ser provado que se uma equação polinomial f(x) = 0 pode ser resolvida por radicais então o Grupo de Galois do corpo de raízes de f(x) sobre F é solúvel, valendo a recíproca: Se o grupo dos automorfismos associado a um corpo de raízes de um polinômio f(x) é solúvel então as raízes de f(x) = 0 podem expressas em termos de seus coeficientes usando somente operações racionais e raiz quadrada.

Pode-se também provar, em geral, que o grupo de Galois de um polinômio irredutível de grau n sobre Q é isomorfo ao grupo simétrico das permutações de suas n raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Este grupo simétrico é solúvel se e somente se $n < 5$.

Assim, as equações polinomiais de grau 5 ou mais **não** são, em geral, resolúveis por radicais.

(*) bibliografia 7 e 13.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA(TFA)

Este teorema afirma que:

" Uma equação polinomial, com coeficientes complexos e de grau n≥ 1, tem pelo menos uma raiz complexa ".

O primeiro matemático, a demonstrar satisfatoriamente e Teorema Fundamental da Álgebra foi Carl Friedrich Gauss.

Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, em 1777. A demonstração do teorema, foi escrita em 1797 quando Gauss em sua tese de Doutorado na universidade de Helmstadt, afirmou que:

Separando-se as partes real e imaginária da equação f(z) = 0, onde z = x + i.y, obtém-se duas equações reais, g(x, y) = 0 e h(x, y) = 0 nas variáveis reais x e y,

Gauss mostrou que os gráficos das curvas g(x, y) = 0 e h(x, y) = 0, têm um ponto em comum (a, b) no plano cartesiano. Assim a + bi é uma raiz complexa de f(z) = 0 (*).

Observa-se que essa demonstração utiliza conceitos geométricos. Em 1816, Gauss publicou mais duas demonstrações do TFA, e em 1850 apresentou uma demonstração inteiramente algébrica.

Nos dias de hoje, para se demonstrar o TFA, necessitamos de conceitos topológicos.

(*) Seja f(z) = $z^2 - 4i$. Utilizando o método descrito por Gauss, mostre que f(z) tem uma raiz complexa.

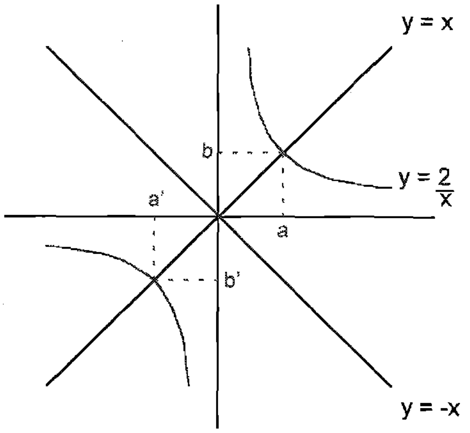
Como f(z) = $z^2 - 4i$ e fazendo z = x + iy, obtém-se a equação $x^2 + 2xyi - y^2 - 4i = 0$. Separando-se as partes real e imaginária, tem-se que:

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{e} \quad 2xy - 4 = 0.$$

De $x^2 - y^2 = 0$ e $2xy - 4 = 0$, segue-se:

$$(x - y)(x + y) = 0 \text{ e } xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}.$$

Plotando os gráficos das duas equações, no plano cartesiano, temos que:



Observa-se, claramente, o ponto (a, b) que é uma raiz complexa de f(z) = 0, isto é, a + bi é raiz da equação f(z) = 0.

Alguns fatos necessários para a demonstração do **Teorema Fundamental da Álgebra:**

1º) Escrevendo z = x + iy, assim:

$p(z) = p(x + iy) = p_1(x, y) + ip_2(x, y)$, onde p_1 e p_2 são dois polinômios nas variáveis reais x e y.

2º) O módulo de p(z) é dado por:

$$|p(z)| = \sqrt{(p_1(x,y))^2 + (p_2(x,y))^2}$$

3º) $|p(z)|$ é uma função contínua, pois é composição de $\sqrt{t}$ e $(p_1)^2 + (p_2)^2$ que são funções contínuas.

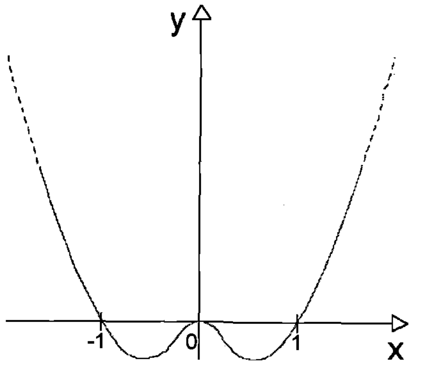
Assim, $|p(z)| = \sqrt{(p_1(x,y))^2 + (p_2(x,y))^2}$ é função real contínua com duas variáveis reais x e y.

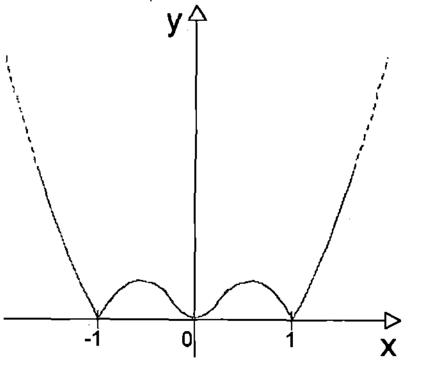
4°) Uma função contínua f: D$\subset \Re^2 \rightarrow \Re$, onde D é um retângulo $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, tem um valor mínimo em D e também tem um valor máximo em D. Este teorema pode ser provado usando Análise Matemática.

5°) Uma função f tem uma raiz real x_0, se e somente se, x_0 é ponto de mínimo global de $|f|$.

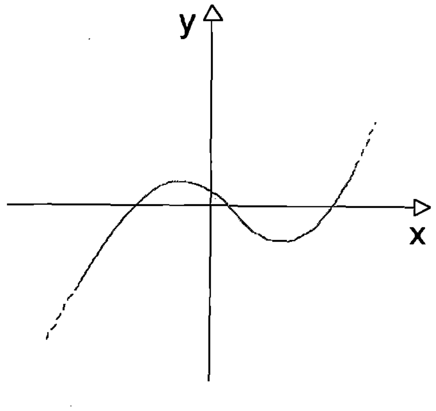
Essa idéia, pode ser facilmente exemplificada nas funções abaixo:

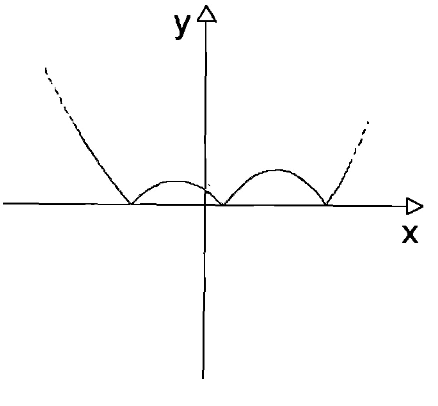
a) $p_4(x) = x^4 - x^2$ e $|p_4(x)|$



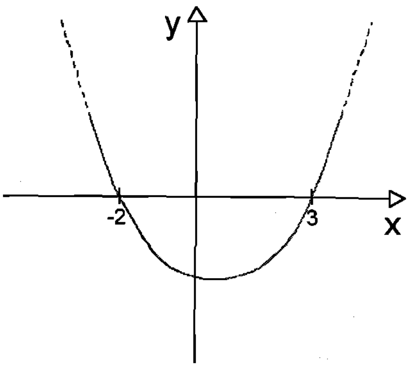


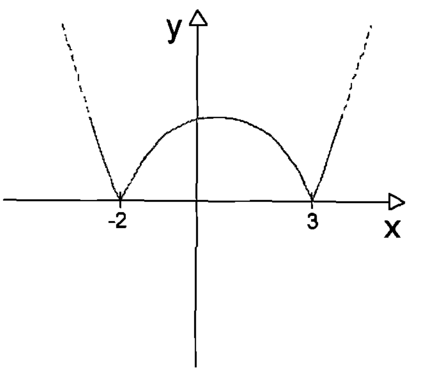
b) $p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ e $|p_3(x)|$





c) $p_2(x) = x^2 - x - 6$ e $|p_2(x)|$





Prova do Teorema Fundamental da Álgebra:

Se $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in C$ então existe $z \in C$ tal que f(z) = 0, onde

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

A idéia da prova é mostrar que o ponto de mínimo global de $|f(z)|$ é uma raiz de f(z)= 0.1

Para $z \neq 0$, temos que:

$$f(z) = z^n . \left(1 + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + \frac{a_1 z}{z^n} + \frac{a_0}{z^n}\right)$$

$$f(z) = z^n . \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)$$

Seja M = máximo $\{1, 2n.|a_{n-1}|, \ldots, 2n.|a_0|\}$.

Então, para qualquer $z \in C$ com $|z| \geq M \geq 1$, teremos:

$\left|z^K\right| = \left|\underbrace{z.z.z....z}_{K vezes}\right| = \underbrace{|z|.|z|...|z|}_{K vezes} = |z|^K \geq |z|$, isto é, $\dfrac{1}{|z|^K} \leq \dfrac{1}{|z|}$.

Como $2n.|a_{n-K}| \leq M$ e $|z| \geq M$ segue que $\dfrac{1}{|z|} \leq \dfrac{1}{M} \leq \dfrac{1}{2n.|a_{n-K}|}$.

Assim, $\dfrac{|a_{n-K}|}{|z^K|} \leq \dfrac{|a_{n-K}|}{|z|} \leq \dfrac{|a_{n-K}|}{2n.|a_{n-K}|} = \dfrac{1}{2n} \Rightarrow$

$$\left|\frac{a_{n-K}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| \leq \left|\frac{a_{n-K}}{z}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad (*)$$

Portanto:

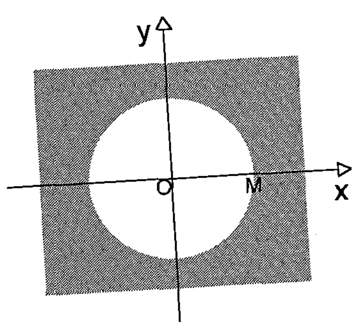
$$|f(z)| = |z|^n . \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| \geq |z|^n . \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|\right) \geq (*) \geq \frac{|z|^n}{2}.$$

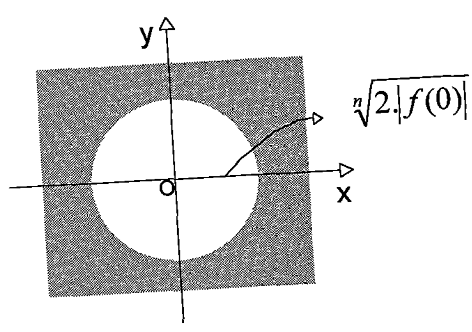
Assim:

$$|f(z)| \geq \frac{|z|^n}{2} \quad \text{se } |z| \geq \text{M}.$$

Em particular, se $|z| \geq$ M e $|z| \geq \sqrt[n]{2.|f(0)|}$, então

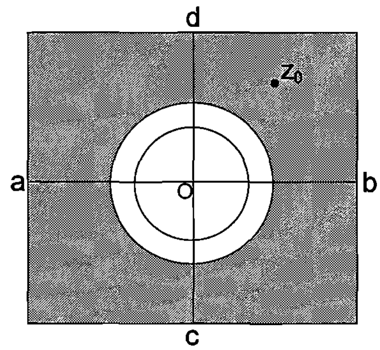
$$|f(z)| \geq \frac{|z|^n}{2} \geq \frac{2.|f(0)|}{2} = |f(0)| \text{ e } |f(z)| \geq |f(0)| \quad (1).$$





Acabamos de mostrar que $|f(0)|$ é uma cota inferior de $|f|$ restrita ao exterior do disco maior.

Agora, vamos estudar o mínimo de $|f|$ no interior do retângulo R = [a, b] × [c, d] que contém o maior dos discos acima, isto é, o retângulo contém $\{z / |z| \leq máximo\{M, \sqrt[n]{2.|f(0)|}\}\}$



Como $|f|$ é função real contínua, então o mínimo $|f|$ é atingido em $z_0 \in \Re$, isto é, $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ para qualquer z ∈ R = [a, b] × [c, d]. Em particular, como 0 ∈ $\Re$ então $|f(0)| \geq |f(z_0)|$ (2).

Para os números complexos z que estão fora dos discos acima, temos que: $|f(z)| \geq |f(0)| \geq |f(z_0)|$, usando (1) e (2). Assim, z_0 é ponto de mínimo global para $|f|$, z ∈ C (3).

Mostrar que f(z_0) = 0. Mas para isso, precisamos introduzir a função g definida por g(z) = f(z+z_0). Como f tem grau n, então g(z) é um polinômio de grau n.

Assim:

$|g(z)| = |f(z+z_0)| \geq |f(z_0)| = |g(0)|$, isto é, 0 é o ponto de mínimo de $|g|$. Nesta desigualdade estamos usando (3).

Mostrar que g(0) = 0.

Suponha que g(0) = $\alpha \neq 0$ e que m é a menor potência maior do que zero de z que aparece no polinômio g.

Assim:

g(z) $= \alpha + \beta . z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \ldots + c_n z^n$, onde $\beta \neq 0$.

Como todo número complexo tem raiz m-ésima, então existe um número complexo γ tal que $\gamma^m = -\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Assim:

$$|g(\gamma . z)| = |\alpha + \beta .(\gamma . z)^m + c_{m+1} .(\gamma . z)^{m+1} + \ldots + c_n (\gamma . z)^n|$$

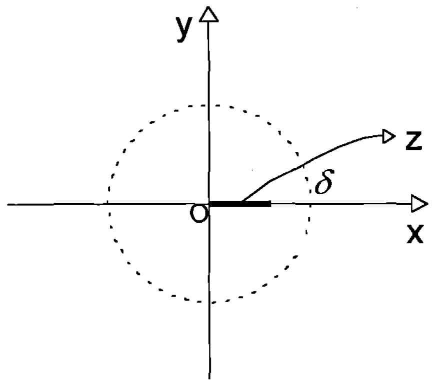
Tome $d_K = c_K . \gamma^K$.

$$|g(\gamma . z)| = |\alpha - \alpha . z^m + d_{m+1} . z^{m+1} + \ldots + d_n . z^n|$$

$$|g(\gamma . z)| = |\alpha| \ . \left| 1 - z^m + z^m . \left(\frac{d_{m+1} . z}{\alpha} + \frac{d_{m+2} . z^2}{\alpha} + \ldots + \frac{d_n . z^{n-m}}{\alpha} \right) \right| = 0$$

Como $\lim\limits_{z \to 0+0.i} \left(. \left(\dfrac{d_{m+1} . z}{\alpha} + \dfrac{d_{m+2} . z^2}{\alpha} + \ldots + \dfrac{d_n . z^{n-m}}{\alpha} \right) \right) = 0$ então, dado $\varepsilon = 1$, $\exists \ \delta > 0$ tal que $\left| \left(\dfrac{d_{m+1} . z}{\alpha} + \dfrac{d_{m+2}}{\alpha} + \ldots + \dfrac{d_n . z^{n-m}}{\alpha} \right) \right| < 1$, desde que $|z - 0| = |z| < \delta$.

Dentre todos os z $\in$ C que satisfazem $\left| \left(\dfrac{d_{m+1} . z}{\alpha} + \dfrac{d_{m+2}}{\alpha} + \ldots + \dfrac{d_n . z^{n-m}}{\alpha} \right) \right| < 1$, escolhe-se z real e positivo.



Assim, para z > 0, temos que:

$$\left| z^m . \left(\frac{d_{m+1}.z}{\alpha} + \frac{d_{m+2}}{\alpha} + ... + \frac{d_n.z^{n-m}}{\alpha} \right) \right| = \left| z^m \right| . \left| \left(\frac{d_{m+1}.z}{\alpha} + \frac{d_{m+2}}{\alpha} + ... + \frac{d_n.z^{n-m}}{\alpha} \right) \right| <$$

$$< \left| z^m \right| = \left| z \right|^m = z^m .$$

Logo, para 0 < z < 1, temos que:

$$\left| 1 - z^m + z^m . \left(\frac{d_{m+1}.z}{\alpha} + \frac{d_{m+2}.z^2}{\alpha} + ... + \frac{d_n.z^{n-m}}{\alpha} \right) \right| \leq \left| 1 - z^m \right|$$

$$\leq \left| z^m . \left(\frac{d_{m+1}.z}{\alpha} + \frac{d_{m+2}.z^2}{\alpha} + ... + \frac{d_n.z^{n-m}}{\alpha} \right) \right| \leq (1 - z^m) +$$

$$+ \left| z^m . \left(\frac{d_{m+1}.z}{\alpha} + \frac{d_{m+2}.z^2}{\alpha} + ... + \frac{d_n.z^{n-m}}{\alpha} \right) \right| < 1 - z^m + z^m = 1 .$$

Assim:

$\left| g(\gamma.z) \right| < \left| \alpha \right|$, $\forall$ z $\in$ (0, 1). Temos uma contradição, pois $\left| g(0) \right| = \left| \alpha \right|$ que é o valor mínimo de $\left| g \right|$ no plano C.

Essa contradição decorreu em supor que g(0) $\neq 0$.

Assim:

g(0) = 0, isto é, f(z_0) = 0.

(*) bibliografia 12.

Três aplicações envolvendo polinômios:

Entre as muitas aplicações que existem, desenvolvemos as seguintes:

I - UMA FÓRMULA PARA OS NÚMEROS PRIMOS(*)

A fórmula para gerar os números primos que apresentaremos vem dada por um polinômio de duas variáveis e com coeficientes inteiros.

Vale lembrar que o anel Z[x,y] destes polinômios é por definição $Z_2 = Z_1[y]$, onde $Z_1 = Z[x]$, ou seja, $Z_2 = Z[x,y]$ é o anel de polinômios na variável y e cujos coeficientes são polinômios em Z[x].

Assim:

Sejam x e y números naturais, onde $y \neq 0$ e $a = x(y+1) - (y!+1)$.

A fórmula que gera todos os números primos e somente esses é:

$$f(x, y) = \frac{y-1}{2} \cdot \left[|a^2 - 1| - (a^2 - 1) \right] + 2 \quad (1)$$

Vejamos alguns exemplos:

2 = f(5, 4); 3 = f(1, 2); 5 = f(5, 4); 7 = f(103, 6); 11 = f(329891, 10) e 13 = f(36846277, 12); ...

Observando os pares (x, y) acima, como fazer para determiná–los, dado um número primo **p** ?

Afirmamos que é só escolher

$$x = \frac{(p-1)!+1}{p} \quad \text{e} \quad y = p-1$$

Para demonstrar a fórmula (1), usa–se o Teorema de Wilson, que diz:

Seja $p \in N$.

P é primo $\Leftrightarrow$ $p \neq 1$ e p é um divisor de $(p-1)!+1$.

1^o) Mostrar que f (x, y) é primo:

a é um número inteiro e, portanto a^2 é inteiro, assim:

Se $a^2 \geq 1$ então $|a^2 - 1| = a^2 - 1$ e $f(x, y) = \frac{y-1}{2}(2) + 2 = y-1+2 = y+1$.

Neste caso, sendo a $=$ 0, temos:

x (y+1) $=$ y!+1, isto é, y+1 é um divisor de y!+1 e, assim o teorema de Wilson garante que y+1 é um número primo.

2^{o}) Mostrar que f(x, y) nos fornece todos os números primos:

Seja p um número primo. Utilizando o teorema de Wilson, $\dfrac{(p-1)!+1}{p}$ é um número natural e podemos calcular $f\left(\dfrac{(p-1)!+1}{p}, p-1\right)$.

Como a $= \dfrac{(p-1)!+1}{p} \cdot (p-1+1) - [(p-1)!+1] = 0$.

Segue–se que $f\left(\dfrac{(p-1)!+1}{p}, p-1\right) = p-1+1 = p$.

<u>Nota</u>: A desvantagem desta fórmula é que ela não é prática, pois envolve números muito altos, tais como f(36846277, 12) para gerar o número primo 13.

(*) RPM 37

II – Recreação em teoria dos números(*)

Mostre que o produto de quatro números consecutivos mais uma unidade é igual a um quadrado perfeito.

Vejamos alguns exemplos numéricos:

$1.2.3.4 + 1 = 49 = 7^2$

$3.4.5.6 + 1 = 361 = 19^2$

De modo geral, temos que:

Sejam x, x+1, x+2, x+3, quatro números consecutivos.

Assim:

$x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 \quad (**)$

Mostrar que (**) é um quadrado perfeito, temos que:

$$\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = \sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1} = \text{polinômio de grau 2}$$

$$\sqrt{x^4+6x^3+11x^2+6x+1} = ax^2 + bx + c$$

Elevando ao quadrado os lados da igualdade, temos que:

$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = (ax^2 + bx + c)^2$

$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = ax^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2$

Aplicando igualdade de polinômios, tem–se:

$a = 1 \;,\quad 6 = 2ab \;,\quad 11 = 2ac + b^2$

Como $a = 1$, então $b = 3$ e $c = 1$.

Assim, o polinômio de grau 2 é $ax^2 + bx + c = x^2 + 3x + 1$

Logo, $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$ é um quadrado perfeito, para $x \in N$.

(*) bibliografia 11.

III - INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE(*)

Dados n+1 números reais distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ e seja $y_0, y_1, ..., y_n$ valores fixados aleatoriamente, temos que:

Existe um polinômio p(x) de grau $\leq$ n, o qual assume os valores pré–fixados nos n+1 pontos distintos dados, isto é, $p(x_0) = y_0; p(x_1) = y_1; ...., p(x_n) = y_n$.

Demonstração:

Devemos mostrar que existe um polinômio de grau $\leq$ n que assume nos n+1 pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ os valores arbitrados $y_0, y_1, ..., y_n$.

Para o caso de n = 1, temos que:

$$p(x) = y_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

Para o caso de n = 2, temos que:

$$p(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Para o caso geral:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right).$$

Vejamos alguns exemplos:

1 º) Encontre o polinômio p(x) que assume nos pontos $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ e $x_4 = 3$ os valores $y_0 = -7, y_1 = 1, y_2 = 5, y_3 = 6$ e $y_4 = 25$.

Temos que:

Desenvolvendo a fórmula geral , chegaremos a equação

$p(x) = \frac{7}{6}x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{11}{2}x + 1$, o qual assume os valores pré–fixados em 1 º).

2°) Utilizar o método de LAGRANGE para encontrar as populações (em milhões de habitantes), nos anos de 1920 e 2000, aproximadamente, a partir dos dados fornecidos na tabela abaixo:

	1950	1960	1970	1980	1990
População	150,7	179,3	203,3	226,5	249,6

Como temos informação de 5 anos com suas respectivas populações, usando o método de LAGRANGE, encontraremos um polinômio de grau 4.

Assim:

Seja x_0= 1950, x_1= 1960, x_2= 1970, x_3= 1980, x_4= 1990 e y_0= 150,7, y_1= 179,3, y_2= 203,3, y_3= 226,5, y_4= 249,6.

$$p(x) = \frac{150{,}7(x-1960)(x-1970)(x-1980)(x-1990)}{-10.-20.-30.-40} +$$
$$+\frac{179{,}3(x-1950)(x-1970)(x-1980)(x-1990)}{10.-10.-20.-30} +$$
$$+\frac{203{,}3(x-1950)(x-1960)(x-1980)(x-1990)}{20.10.-10.-20} +$$
$$+\frac{226{,}5(x-1950)(x-1960)(x-1970)(x-1990)}{30.20.10.-10} +$$
$$+\frac{249{,}6(x-1950)(x-1960)(x-1970)(x-1980)}{40.30.20.10}$$

Temos que p(x) é de grau 4 e queremos saber a população em 1920 e 2000.

Calcular p(1920) e p(2000).

$p(2000) = 150{,}7 - 179{,}3\ (5) + 203{,}3.(10) + 226{,}5.(-10) + 249{,}6.(5)$

$p(2000) = 270{,}2$

$p(1920) = 150{,}7.(35) - 179{,}3.(105) + 203{,}3.(126) - 226{,}5.(70) + 249{,}6.(15)$

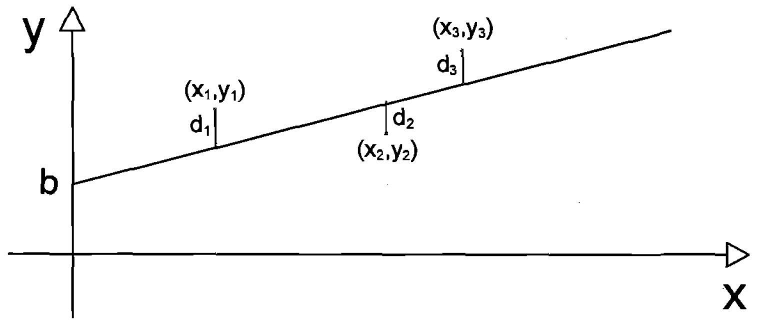
$p(1920) = -47{,}2$

Observa–se que nesse caso o resultado obtido é negativo, o que é um absurdo, pois não temos população com números negativos. Neste caso, encontramos uma desvantagem para a utilização do método de LAGRANGE, isso significa que a variação do intervalo para os valores de x não deve ser muito grande, ou seja, o ano de 1920 está muito distante dos valores fornecidos inicialmente na tabela.

(*) bibliografia 8.

IV – Regressão Linear (ou método dos Mínimos Quadrados)(*)

No gráfico abaixo, temos alguns pontos (x_1, y_1) , ... , (x_n, y_n), queremos encontrar a reta y = mx + b que melhor se aproxima desses pontos.



Caso n = 3

A regressão linear considera as distâncias verticais $d_i = y_i - (mx_i + b)$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$ e escolhe m e b tal que o resultado final da soma dos quadrados das distâncias $d_1, d_2, \ldots, d_n$ seja a menor possível.

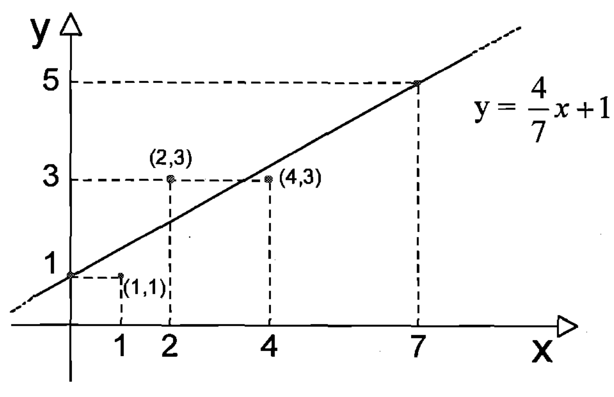
Dessa maneira o problema de encontrar m e b que minimize essa soma pode ser expresso pelo problema de encontrar o ponto de mínimo da função

$$S = f(m, b) = (d_1)^2 + (d_2)^2 + \ldots + (d_n)^2$$

$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$, onde (x_1, y_1) , ... , (x_n, y_n) são pontos dados.

Exemplo:

Dados os pontos (1, 1); (2, 3) e (4, 3) encontre a reta y = mx + b que melhor se aproxime dos mesmos.



Seja $(1, 1) = (x_1, y_1)$; $(2, 3) = (x_2, y_2)$ e $(4, 3) = (x_3, y_3)$, então:

$S = \sum_{i=1}^{3} (y_i - mx_i - b)^2$, assim:

$S = (y_1\text{-}mx_1\text{-}b)^2 + (y_2\text{-}mx_2\text{-}b)^2 + (y_3\text{-}mx_3\text{-}b)^2$

$S = (1\text{-}1m\text{-}b)^2 + (3\text{-}2m\text{-}b)^2 + (3\text{-}4m\text{-}b)^2$

$S = 21m^2 + 3b^2 + 14bm - 14b - 38m + 19$

Encontramos S = f(m, b), como determinar m e b tal que S seja mínimo ?

Utilizaremos o teste da derivada Segunda do Cálculo III, que inicialmente iguala a zero as derivadas parciais de S

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 6b + 14m - 14 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 42m + 14b - 38 = 0$$

Temos duas equações em função de m e b, assim:

$$\begin{cases} 6b + 14m = 14 \\ 14b + 42m = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + 3m = \dfrac{19}{7} \\ 3b + 7m = 7 \end{cases}$$

Do sistema obtemos $m = \frac{4}{7}$ e $b = 1$. Como $\left(\frac{4}{7}, 1\right)$ é o único ponto crítico de S.

Como $S_{mm} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial m^2} = 42 > 0$ e $H = \det\begin{pmatrix} S_{mm} & S_{mb} \\ S_{mb} & S_{bb} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial m^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial m \partial b} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial m \partial b} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} \end{pmatrix} =$

$= \det\begin{pmatrix} 42 & 14 \\ 14 & 6 \end{pmatrix} = 56 > 0$, conclui-se $\left(\frac{4}{7}, 1\right)$ é um ponto de mínimo de S.

Logo, a reta que melhor se aproxima dos pontos (1, 1); (2, 3) e (4, 3) é a reta

$$y = \frac{4}{7}x + 1$$

(*) bibliografia 9.

CONCLUSÃO

Este trabalho foi muito importante para o desenvolvimento de técnicas na resolução de equações algébricas e também permitiu pesquisar assuntos mais complexos inseridos na Matemática.

Alguns métodos pesquisados neste trabalho foram extremamente importantes para o estudo e aprofundamento dos mesmos, bem como permitiu uma visualização mais ampla de conteúdos não apresentados durante o curso de Licenciatura.

O Trabalho de Conclusão de Curso é fundamental para que tenhamos a possibilidade de pesquisar e estudar assuntos da Matemática Aplicada e também nos faz perceber a importância de continuar estudando, pesquisando e dedicando nosso tempo à busca de outros assuntos relacionados à Matemática.

BIBLIOGRAFIA:

1. ANDRADE, Célia Maria Finuzzi de , Solução de Equações Algébricas:Um apanhado histórico, Boletim da SBMAC, 06 / 1991, vol 2, número 2, série II.
2. BELL, W.W.Rouse: A Short Account of the History of Mathematics, Dover Publications,. Inc,. New York, 1960.
3. BIRKHOFF, G. D. - MACLANE,S. - A Survey of Modern Algebra, The Macmillian Company, N.Y., 1941.
4. BOYER,C.B. : A History of Mathematics, John Wiley and sons, USA, 1988.
5. EVES, Howard. Introdução à História da Matemática / Howard Eves, tradução Hygino H, Domingues,- Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997.
6. GONÇALVES, Adilson, Introdução a Álgebra, 11° CBM, IMPA-RJ, 1977.
7. HERSTEIN, Tópicos de Álgebra, editora Polígono / EDUSP – 1970.
8. LIMA, Elon Lages, Meu Professor de Matemática, SBM.
9. MARSDEN, Jerrold E. e Anthony J. Tromba - Vector Calculus / - 3 th. Ed., Freeman and Company, NY, 1988.
10. Revista do professor de Matemática, números – 07, 37, 39, 40, 43.
11. Revista Superinteressante, Ano 99.
12. SMITH, D.E.: History of Mathematics, vol. II, Dover Publications, New York, 1925, 1953.
13. SPIVAK, Michael. Calculus – 3° edição – Editora do congresso, Houston, Texas, 1994.
14. The New Encyclopaedia Britannica, volumes 13 e 23, 15° edição, 1990.

Universidade Federal de Santa Catarina

2000/2

Um estudo sobre polinômios

Marcelo de Oliveira Moro