

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Matemática - Licenciatura

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Autora: Simone Ossani

Orientador: Prof. Dr. Joel Santos Souza

Florianópolis

Julho de 2009

Simone Ossani

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

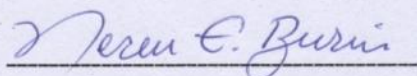
Trabalho acadêmico de graduação apresentado
à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II,
do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura,
do Centro Ciências Físicas e Matemáticas da
Universidade Federal de Santa Catarina

Professor: Nereu Estanislau Burin

Florianópolis

Julho de 2009

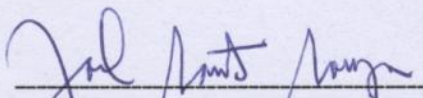
Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 33/CCM/09.



Prof. Nereu Estanislau Burin

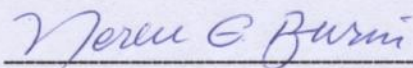
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

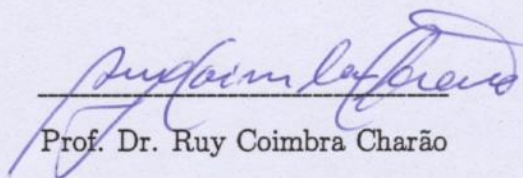


Prof. Dr. Joel Santos Souza

(Orientador)



Prof. Ms. Nereu Estanislau Burin



Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma colaboraram para a construção deste trabalho.

Especialmente ao Professor Joel Santos Souza que me orientou com paciência e dedicação, e aos professores da banca examinadora que aceitaram o convite e se dispuseram a ler meu trabalho.

Aos amigos que compreenderam meu nervosismo, falta de tempo, de paciência e que ainda assim estiveram do meu lado me dando força, coragem e auxílio.

À minha família que mesmo distante se manteve presente, demonstrando total confiança e incentivo para que eu alcançasse mais este degrau em minha vida.

Sumário

Agradecimentos	i
Introdução	1
1 Equações Diferenciais Ordinárias	3
2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	5
2.1 Equações a Variáveis Separáveis	12
2.2 Equações Diferenciais Homogêneas	14
2.3 Equações Diferenciais Exatas	16
2.4 Fator Integrante	19
2.5 Equações Lineares	23
2.5.1 O Método do Fator Integrante	23
2.5.2 O Método da Variação de Parâmetros (Método de Lagrange)	26
2.6 Equação de Bernoulli	30
3 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias a Coeficientes Constantes	33
3.1 Raízes Complexas	40

3.2	Raízes Iguais	40
3.3	Cálculo Exponencial de uma Matriz usando a forma Canônica de Jordan .	47
3.4	Sistemas Lineares não Homogêneos	51
4	Aplicações	52
4.1	Lei do Resfriamento de Newton	52
4.2	Crescimento Populacional: O modelo Malthusiano	54
4.3	Meia-Vida	55
4.4	Datação por Carbono	56
	Conclusão	58
	Bibliografia	59

Introdução

Muitas leis gerais da Física, Biologia e Economia, encontram sua expressão natural em uma equação diferencial ordinária. Inúmeras questões na própria Matemática (por exemplo, em Topologia e Geometria Diferenciais e no Cálculo de Variações) são formuladas por equações diferenciais ordinárias ou se reduzem a elas.

O estudo das equações diferenciais ordinárias começou com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII. De início é guiado pelos trabalhos desenvolvidos por Newton e Leibniz, para descrever os fenômenos físicos da mecânica.

A natureza daquilo que era considerado solução foi mudando gradualmente, num processo que acompanhou e, às vezes, propiciou o desenvolvimento do próprio conceito de função. Inicialmente buscavam-se soluções expressas em termos de funções elementares, isto é, polinomiais, racionais, trigonométricas e exponenciais. Posteriormente, passou-se a considerar satisfatório expressar a solução na forma de uma integral contendo operações elementares envolvendo estas funções. Quando esses dois procedimentos deixaram de resolver os problemas focalizados, surgiram as soluções expressas por meio de séries infinitas (ainda sem a preocupação com a análise da convergência das mesmas).

No final do século XVIII, as contribuições de Euler, Lagrange, Laplace e outros, expandiram notavelmente o conhecimento do Cálculo de Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica e Flúidos e etc. Nesta época, iniciou-se também a descoberta das relações das equações diferenciais com as funções de variáveis complexas, séries de potência, trigonométricas e funções especiais.

Ainda hoje é grande o interesse de pesquisadores por essa área, uma vez que as equações diferenciais ordinárias fazem parte intrínseca da modelagem matemática da grande maioria dos fenômenos, sejam eles químicos, físicos, biológicos, etc. Com isso em mente, optamos em fazer um estudo desse assunto neste trabalho de conclusão de curso.

No primeiro capítulo, abordamos a definição de equações diferenciais ordinárias, sua ordem, seu grau, e também seus tipos de soluções.

No segundo capítulo, apresentamos os principais tipos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, suas definições, métodos de resolução e exemplos.

No terceiro capítulo, fazemos uso do método de autovalores e autovetores para resolução dos sistemas de equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes. De forma sucinta, abordamos também o cálculo a exponencial de matrizes.

Finalmente, no quarto e último capítulo, fazemos um estudo de algumas aplicações clássicas das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como por exemplo, a Lei do Resfriamento de Newton.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo, estudaremos algumas definições básicas para o desenvolvimento do nosso trabalho, assim como a definição do que é uma E.D.O. (Equação Diferencial Ordinária).

Definição 1.1. *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 , denotamos por $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$ (respectivamente $C(\Omega)$) o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, k vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente contínuas).*

Definição 1.2. *Uma equação que contém derivadas (ou diferenciais) em uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma variável independente é chamada de equação diferencial.*

Definição 1.3. *Em geral, uma equação diferencial ordinária, envolvendo uma função $y = f(x)$ é uma equação da forma:*

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0,$$

sendo $F(x, y, y_1, \dots, y_n) = 0$ uma função de $n + 2$ variáveis.

Uma equação diferencial ordinária é de ordem n , se a derivada de ordem n de y em relação a x for a derivada de maior ordem na equação, ou seja, a ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela aparece.

Supondo a equação escrita sob forma racional inteira em relação as derivadas, o grau da equação é o maior dos expoentes a que está elevada a derivada de mais alta ordem.

Exemplo 1.1. $\frac{dy}{dx} = 7x - 1$ (1^a ordem e 1^o grau)

Exemplo 1.2. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (2^a ordem e 1^o grau)

Exemplo 1.3. $(x - \frac{y d^3y}{dx^3})^2 = 1 + (\frac{d^2y}{dx^2})^4$ (3^a ordem e 2^o grau)

Definição 1.4. Uma função $\phi \in C^n(I)$ é solução de uma equação diferencial ordinária $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ em I , se $\phi = \phi(x)$ satisfaz a E.D.O. para todo $x \in I$, isto é, se:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in I.$$

Uma equação diferencial pode apresentar os seguintes tipos de soluções:

- Solução geral: É a coleção de todas as soluções da E.D.O. A solução geral é dada por uma expressão que contém tantas constantes arbitrárias quantas forem as unidades de ordem da equação.
- Solução Particular: É uma solução da E.D.O. satisfazendo alguma condição particular.
- Solução Singular: É uma solução da equação que não pode ser deduzida da solução geral.

A equação diferencial ordinária $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ é linear, se F for linear nas variáveis y, y_1, \dots, y_n . A E.D.O. é semilinear se F for linear nas variáveis y_1, \dots, y_n .

Do ponto de vista geométrico, a solução geral de uma E.D.O. de ordem um, representa uma família de curvas planas que dependem de um parâmetro c . Estas curvas chamam-se curvas integrais da curva diferencial dada. Uma solução particular é representada por uma curva dessa família que passa por um dado ponto do plano.

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem se apresenta, normalmente, sob uma das três formas:

$$F(x, y, y') = 0,$$

ou

$$y' = f(x, y),$$

ou ainda

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Geométricamente uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, associa a cada ponto (x, y) de uma região R do plano, a direção $y' = tg\alpha$ da tangente à curva representativa da função incógnita $y = y(x)$, no ponto (x, y) .

A região R com a indicação da direção da reta tangente ao gráfico da solução, em cada ponto (x, y) , é chamado de Campo de Direções.

Uma vez obtida a solução geral de uma equação de primeira ordem, podemos encontrar soluções particulares, atribuindo valores à constante arbitrária que aparece na fórmula da solução geral.

Frequentemente, em aplicações, é preciso encontrar uma determinada solução que satisfaça certa condição inicial da forma $y(x_0) = y_0$, ou seja, uma função $y = \varphi(x)$ que seja solução e que satisfaça $\varphi(x_0) = y_0$

Definição 2.1. *Dada uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e uma condição inicial, o problema que consiste em encontrar a solução dessa equação, que satisfaz a condição inicial dada, chama-se Problema de Valor Inicial (P.V.I.).*

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde f é uma função dada de x e y .

Podemos colocar o problema de valor inicial (2.1) sob a forma de uma equação integral. Para isto, integramos ambos os membros da equação diferencial (2.1) de x_0 a x e obtemos:

$$\int_{x_0}^x \frac{dy(s)}{ds} ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

de modo que

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (2.2)$$

Reciprocamente, se $y(x)$ é contínua e satisfaz (2.2), então $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$. Portanto, $y(x)$ é uma solução de (2.1) se, e somente se, é uma solução contínua de (2.2). A equação (2.2) é chamada equação integral.

A partir de (2.2), podemos construir uma sequência de "soluções aproximadas" $y_n(x)$. Para isso definimos $y_0(x) = y_0$ e

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Essas funções $y_n(x)$ são chamadas aproximações sucessivas, ou iteradas de Picard.

Faremos agora um estudo, sobre a *Convergência das iteradas de Picard*.

Escolhamos dois números positivos a e b e seja R o retângulo fechado:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha, |y - y_0| \leq b\}.$$

Agora calculemos

$$M = \max |f(x, y)|, \quad (x, y) \in R \quad (2.4)$$

e ponhamos

$$\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right). \quad (2.5)$$

Lema 2.1. *Tem-se que as sequências das iteradas de Picard satisfazem:*

$$|y_n(x) - y_0| \leq M(x - x_0), \quad (2.6)$$

para $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$.

Observação 2.1. *O Lema 2.1 estabelece que o gráfico de $y_n(x)$ está compreendido entre as retas $y = y_0 + M(x - x_0)$ e $y = y_0 - M(x - x_0)$, para $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$.*

Demonstração do Lema 2.1. Vamos estabelecer (2.6) por indução sobre n . Observe-mos primeiro que (2.6) é obviamente verdadeiro para $n = 0$, pois $y_0(x) = y_0$. A seguir, devemos mostrar que (2.6) é verdadeira para $n = j + 1$ se for verdadeira para $n = j$. Mas isso segue imediatamente, pois se

$$|y_j(x) - y_0| \leq M(x - x_0),$$

então

$$|y_{j+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_j(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_j(s))| ds \leq M(x - x_0)$$

para $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$. Consequentemente, (2.6) é verdadeira para todo n . [5]

Mostraremos agora, que as iteradas de Picard $y_n(x)$ de (2.2) convergem para cada x no intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$, se $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe e é contínua. Para isso, reduziremos o problema de mostrar que a sequência de funções $y_n(x)$ converge ao problema mais simples de provar que uma série infinita converge. Isto é realizado escrevendo $y_n(x)$ sob a forma

$$y_n(x) = y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)].$$

A sequência $y_n(x)$ converge se, e só se, a série infinita

$$[y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \dots \quad (2.7)$$

converge. Para provar que (2.7) converge, é suficiente mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \infty. \quad (2.8)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \\ &= \int_{x_0}^x \left| \frac{\partial f(s, \xi(s))}{\partial y} \right| |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds, \end{aligned}$$

onde $\xi(s)$ está entre $y_{n-1}(s)$ e $y_{n-2}(s)$. Segue imediatamente do Lema 2.1 que todos os pontos $(s, \xi(s))$ pertencem ao retângulo R para $s < x_0 + \alpha$. Consequentemente,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq L \int_{x_0}^x |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha, \quad (2.9)$$

onde

$$L = \max \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|, \quad (x, y) \in R. \quad (2.10)$$

A equação (2.10) define a constante L . Pondo $n = 2$ em (2.9), obtemos

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq L \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_0| ds \leq L \int_{x_0}^x M(s - x_0) ds = \frac{LM(x - x_0)^2}{2}.$$

Isto, por sua vez, implica em que

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq L \int_{x_0}^x |y_2(s) - y_1(s)| ds \leq ML^2 \int_{x_0}^x \frac{(s - x_0)^2}{2} ds = \frac{ML^2(x - x_0)^3}{3!}.$$

Continuando indutivamente, obtemos que

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}(x - x_0)^n}{n!}, \quad \text{para } x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha. \quad (2.11)$$

Portanto, para $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$, temos

$$\begin{aligned}
& |y_1(x) - y_0(x)| + |y_2(x) - y_1(x)| + \dots \\
& \leq M(x - x_0) + \frac{ML(x - x_0)^2}{2!} + \frac{ML^2(x - x_0)^3}{3!} + \dots \\
& \leq M\alpha + \frac{ML\alpha^2}{2!} + \frac{ML^2\alpha^3}{3!} + \dots \\
& = \frac{M}{L} \left[\alpha L + \frac{(\alpha L)^2}{2!} + \frac{(\alpha L)^3}{3!} + \dots \right] = \frac{M}{L} (e^{\alpha L} - 1).
\end{aligned}$$

Esta quantidade, obviamente, é menor que infinito. Conseqüentemente, as iteradas de Picard $y_n(x)$ convergem para cada x do intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$. Indicaremos o limite da seqüência $y_n(x)$ por $y(x)$. [5]

Com este lema, podemos agora demonstrar o teorema de existência e unicidade para as E.D.O.'s de 1ª ordem.

Teorema 2.1. *Sejam f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínuas no retângulo fechado R , e M e α conforme definidos anteriormente, então o problema de valor inicial (2.1) tem uma única solução $y(x)$ no intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$.*

Observação 2.2. *Um resultado análogo é válido para $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0$.*

Demonstração. *Existência:* Mostraremos que $y(x)$ satisfaz a equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (2.12)$$

e que $y(x)$ é contínua. Com esse fim, lembremos que as iteradas de Picard $y_n(x)$ são definidas por

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds. \quad (2.13)$$

Tomando os limites de ambos os membros de (2.13), obtemos

$$y(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds. \quad (2.14)$$

Para mostrar que o segundo membro de (2.14) é igual a

$$y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds,$$

devemos mostrar que

$$\left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds - \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds \right|$$

tende a zero quando n tende a infinito. Observemos, primeiro, que o gráfico de $y(x)$ está no retângulo R para $x \leq x_0 + \alpha$, pois é o limite de funções $y_n(x)$ cujos gráficos estão em R .

Portanto

$$\left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds - \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y(s)) - f(s, y_n(s))| ds \leq L \int_{x_0}^x |y(s) - y_n(s)| ds$$

onde L é definido por (2.10). Agora, observemos que

$$y(s) - y_n(s) = \sum_{j=n+1}^{\infty} [y_j(s) - y_{j-1}(s)]$$

pois

$$y(s) = y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [y_j(s) - y_{j-1}(s)]$$

e

$$y_n(s) = y_0 + \sum_{j=1}^n [y_j(s) - y_{j-1}(s)].$$

Conseqüentemente, de (2.11),

$$|y(s) - y_n(s)| \leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} L^{j-1} \frac{(s-x_0)^j}{j!} \leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{L^{j-1} \alpha^j}{j!} = \frac{M}{L} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!}, \quad (2.15)$$

e

$$\left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds - \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds \right| \leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!} \int_{x_0}^x ds \leq M \alpha \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!}.$$

Esta soma tende a zero quando n tende a infinito, pois é o resto do desenvolvimento (convergente) em série de Taylor de $e^{\alpha L}$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds,$$

e $y(x)$ satisfaz (2.12). Para mostrar que $y(x)$ é contínua, devemos mostrar que para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|y(x+h) - y(x)| < \epsilon \text{ se } |h| < \delta.$$

Não podemos comparar $y(x+h)$ com $y(x)$ diretamente, então escolhemos um inteiro grande N e observamos que

$$y(x+h) - y(x) = [y(x+h) - y_N(x+h)] + [y_N(x+h) - y_N(x)] + [y_N(x) - y(x)].$$

Escolhemos N tão grande que

$$\frac{M}{L} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, de (2.15), segue que

$$|y(x+h) - y_N(x+h)| < \frac{\epsilon}{3}$$

e

$$|y_N(x) - y(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para $x < x_0 + \alpha$, e h suficientemente pequeno ($x+h < x_0 + \alpha$). Observemos ainda que, $y_N(x)$ é contínua, pois é obtida por N integrações repetidas de funções contínuas. Portanto podemos escolher $\delta > 0$ tão pequeno que

$$|y_N(x+h) - y_N(x)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ para } |h| < \delta.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} |y(x+h) - y(x)| &\leq |y(x+h) - y_N(x+h)| \\ &+ |y_N(x+h) - y_N(x)| + |y_N(x) - y(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

para $|h| < \delta$. Portanto, $y(x)$ é uma solução contínua da equação integral (2.12) e satisfaz (2.1). [5]

Unicidade: A unicidade depende do seguinte lema que é um caso particular do Lema de Gronwall.

Lema 2.2. *Seja $w(x)$ uma função não-negativa, com*

$$w(x) \leq L \int_{x_0}^x w(s) ds. \tag{2.16}$$

Então, $w(x)$ é identicamente nula. [5]

Demonstração. Podemos

$$U(x) = \int_{x_0}^x w(s)ds.$$

Então,

$$\frac{dU}{dx} = w(x) \leq L \int_{x_0}^x w(s)ds = LU(x).$$

Conseqüentemente, $e^{-L(x-x_0)}U(x) \leq U(x_0) = 0$, para $x \geq x_0$ e, portanto $U(x) = 0$. E assim, $w(x) = 0$ pois

$$0 \leq w(x) \leq L \int_{x_0}^x w(s)ds = LU(x) = 0.$$

Demonstração da Unicidade. Suponhamos que existam duas soluções $y(x)$ e $z(x)$ do problema de valor inicial (2.1), (P.V.I.). Então,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds$$

e

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, z(s))ds.$$

Subtraindo essas duas equações membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, y(s)) - f(s, z(s))]ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y(s) - z(s)|ds \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2, esta desigualdade implica em que $y(x) = z(x)$, e o P.V.I. (2.1) tem única solução $y(x)$. [5]

2.1 Equações a Variáveis Separáveis

Se uma equação diferencial do tipo

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.17}$$

é tal que $M = M(x)$ e $N = N(y)$, então a equação (2.17) assume a seguinte forma:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (2.18)$$

a qual denominamos Equação a Variáveis Separáveis. Em geral, isso ocorre se M e N forem:

- função de apenas uma variável;
- produtos com fatores de uma só variável, ou
- constantes.

Exemplo 2.1. *Resolvamos a seguinte E.D.O. a variáveis separáveis:*

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 1.$$

Resolução:

Multiplicando todos os termos da equação por dx e igualando a zero, obtemos:

$$(3x - 1)dx - dy = 0.$$

Integrando,

$$\int (3x - 1)dx - \int dy = c.$$

A solução da equação diferencial ordinária a variáveis separáveis toma a forma,

$$\frac{3x^2}{2} - x - y = c.$$

Ou, ainda

$$y = c - x + \frac{3x^2}{2}.$$

2.2 Equações Diferenciais Homogêneas

Nesta seção faremos um estudo sobre as equações diferenciais homogêneas, para isso necessitamos da seguinte definição:

Definição 2.2. Uma função $f = f(x, y)$ é denominada homogênea de grau n , com $n \in \mathbb{N}$, se para todo $t \in \mathbb{R}$, vale a relação:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y). \quad (2.19)$$

Uma função $f = f(x, y)$ é homogênea de grau 0 se para todo $t \in \mathbb{R}$, vale a relação:

$$f(tx, ty) = f(x, y). \quad (2.20)$$

Se a equação diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ tiver coeficientes homogêneos, do mesmo grau, então mudando-se a variável podemos reduzi-la ao caso de variáveis separáveis. Suponhamos que M e N sejam de grau n , então fazemos:

$$y = vx, \quad dy = vdx + xdv.$$

Assim obtemos:

$$M(x, vx)dx + N(x, vx)(vdx + xdv) = 0$$

e, portanto

$$\frac{M(x, vx)}{N(x, vx)} dx + vdx + xdv = 0.$$

Sendo M e N funções homogêneas podemos escrever:

$$\left(\frac{M(1, v)}{N(1, v)} + v \right) dx + xdv = 0,$$

e assim temos o caso de uma equação a variáveis separáveis, a qual podemos resolver por integração.

Exemplo 2.2. Resolvamos a seguinte E.D.O. homogênea de grau 1:

$$(2x - y)dx - (x + 4y)dy = 0.$$

Resolução:

Fazendo mudança de variável,

$$y = xv, \quad dy = vdx + xdv,$$

na equação diferencial ordinária, se obtém:

$$(2x - xv)dx - (x + 4xv)(vdx + xdv) = 0.$$

Dividindo os termos da equação por x ,

$$(2 - v)dx - (1 + 4v)(vdx + xdv) = 0.$$

Com algumas manipulações algébricas, teremos:

$$(2 - v)dx - xdv - vdx - 4vxdv - 4v^2dx = 0$$

e

$$(2 - 2v - 4v^2)dx - (1 + 4v)xdv = 0.$$

Separando as variáveis,

$$\frac{dx}{x} - \frac{(1 + 4v)}{2 - 2v - 4v^2}dv = 0.$$

Integrando,

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln(2 - 2v - 4v^2) = \ln c, \quad \text{com } c = \text{constante.}$$

Eliminando o denominador,

$$2\ln x + \ln(2 - 2v - 4v^2) = 2\ln c.$$

Aplicando propriedades de logaritmos,

$$\ln x^2 + \ln(2 - 2v - 4v^2) = \ln c^2$$

e, conseqüentemente

$$x^2(2 - 2v - 4v^2) = k, \quad \text{com } k = c^2 \text{ uma constante.}$$

Sendo $v = \frac{y}{x}$, a solução da equação diferencial homogênea $y = y(x)$ é dada implicitamente por

$$x^2\left(2 - 2\frac{y}{x} - 4\frac{y^2}{x^2}\right) = k$$

ou

$$2x^2 - 2xy - 4y^2 = k.$$

Assim, a curva plana dada pela equação acima, é uma curva integral da equação diferencial dada.

2.3 Equações Diferenciais Exatas

Nesta seção faremos um estudo sobre uma importante equação diferencial ordinária, denominada Equação Diferencial Exata. Para isso, seja R o retângulo aberto,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b \text{ e } c < y < d\},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ fixadas tais que $a < b$ e $c < d$. Temos a seguinte definição:

Definição 2.3. *Uma equação diferencial ordinária da forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.21}$$

é denominada exata, quando existe uma função $U(x, y)$, de classe C^1 em R , cuja diferencial total é dada por:

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy, \text{ em } R,$$

ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y), \text{ em } R.$$

Sejam agora $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções de classe $C^1(R)$. Assim $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são contínuas com derivadas parciais contínuas em relação a x e y no retângulo aberto R .

Teorema 2.2. *A equação (2.21) é exata se, e somente se, ocorrer a relação*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ em } R. \tag{2.22}$$

Assim, a relação (2.22) é uma condição necessária e suficiente para que a equação (2.21) seja uma EDO exata.

Para demonstrar esse teorema, é necessário o seguinte resultado:

Teorema 2.3 (Teorema de Schwartz). *Seja $f = f(x, y)$ uma função contínua cujas derivadas parciais*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

existem e são contínuas em um retângulo aberto R , então a igualdade:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

é verdadeira em R .

Demonstração do Teorema 2.2:

1. A condição é necessária

Mostraremos que se $Mdx + Ndy$ é diferencial total, então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Por hipótese, o primeiro membro de (2.21), $Mdx + Ndy$, é diferencial total, então existe $U(x, y)$, tal que

$$dU = Mdx + Ndy \tag{2.23}$$

Por outro lado, $U(x, y)$ é a solução de (2.21), então a diferencial de U pode ser escrita como:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy. \tag{2.24}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = Mdx + Ndy. \tag{2.25}$$

Comparando (2.25), obtemos:

$$M = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{2.26}$$

e

$$N = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (2.27)$$

Derivando (2.26) em relação a y e (2.27) em relação a x , temos respectivamente

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2(U)}{\partial x \partial y} \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2(U)}{\partial y \partial x}.$$

Agora, suponha que U seja tal que $U \in C^2$, então pelo Teorema de Schwartz temos,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ em } R.$$

Assim, a condição (2.22) é necessária para que o primeiro membro de (2.21) seja uma diferencial total.

2. A condição é suficiente

Mostraremos que se (2.22) é verificada então o primeiro membro de (2.21) é diferencial total de uma função $U(x, y)$.

Podemos achar U , solução de (2.21), integrando (2.26):

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + g \quad (2.28)$$

onde $g = g(y)$ é uma função apenas da variável y . Agora, derivamos parcialmente $U = U(x, y)$ em relação à variável y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + g'(y)$$

e identificamos esta derivada como a função $N = N(x, y)$ para obter a expressão de $g = g(y)$. Ou seja,

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx,$$

que resultata em

$$g(y) = \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right) dy.$$

Temos, finalmente:

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy.$$

Pela construção de U segue que $dU = Mdx + Ndy$.

Exemplo 2.3. Resolvamos a seguinte E.D.O. exata:

$$(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0.$$

Resolução:

Verificando que é uma equação diferencial exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Utilizando $U(x, y) = \int M(x, y)dx + g$, obtemos

$$U = \int (x^2 - y^2)dx + g(y) = \frac{x^3}{3} - y^2x + g(y),$$

e ainda

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2xy + g'(y).$$

Como

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y),$$

temos que

$$-2xy + g'(y) = -2xy \quad \text{e} \quad g'(y) = 0.$$

Logo, $g(y) = c = \text{constante}$.

Assim, a solução da equação diferencial exata é dada por:

$$U = \frac{x^3}{3} - y^2x + c.$$

2.4 Fator Integrante

Quando uma equação não é exata, podemos multiplicá-la por um fator integrante que a tornará exata.

Teorema 2.4. Se $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ não é exata e possui uma solução geral $U(x, y) = c$, então existe uma fator integrante (e mesmo uma infinidade deles).

Em outras palavras, quando a equação $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ não é exata, isto é,

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

pode-se encontrar uma função $R(x, y)$, tal que $R(Mdx + Ndy)$ é uma diferencial exata. A essa função $R(x, y)$ dá-se o nome de Fator Integrante.

Em geral, não é fácil encontrar $R(x, y)$. Em casos especiais se pode fazer isso facilmente, isto é, quando

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

é uma função somente de x , ou quando

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

é função somente de y .

Temos que,

$$R(x, y)M(x, y)dx + R(x, y)N(x, y)dy = 0,$$

e assim,

$$\frac{\partial(RM)}{\partial y} = \frac{\partial(RN)}{\partial x},$$

e daí resulta que

$$M \frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial R}{\partial x} + R \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{em } R. \quad (2.29)$$

Vamos supor que a função R dependa apenas de x (ou apenas de y), isto é, $R = R(x)$.

Assim:

$$\frac{\partial R}{\partial y}(x) = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial x}(x) = \frac{dR(x)}{dx}.$$

De (2.29) obtemos

$$R \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{dR}{dx} + R \frac{\partial N}{\partial x},$$

ou

$$R \frac{\partial M}{\partial y} - R \frac{\partial N}{\partial x} = N \frac{dR}{dx},$$

ou ainda

$$R \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{dR}{dx}.$$

Separando as variáveis e integrando,

$$\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx = \int \frac{dR}{R},$$

donde

$$\ln R = \int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx,$$

e

$$R(x) = \exp \left(\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx \right). \quad (2.30)$$

Fazendo

$$\varphi(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right), \quad (2.31)$$

transformamos (2.30)

$$R = e^{\int \varphi(x) dx}. \quad (2.32)$$

Do mesmo modo, considerando-se R como função apenas de y , pode-se ter:

$$\varphi(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad (2.33)$$

e

$$R = e^{\int \varphi(y) dy}. \quad (2.34)$$

Exemplo 2.4. Resolvamos a seguinte E.D.O. inexata:

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Resolução:

Verificamos que não é uma E.D.O. exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y.$$

Utilizando (2.31) obtemos

$$\varphi(x) = \frac{1}{2xy}(-2y - 2y) = \frac{1}{2xy}(-4y) = -\frac{2}{x}.$$

Agora,

$$\int \varphi(x) dx = -2 \int \frac{1}{x} dx = -2 \ln(x).$$

E de (2.32) obtemos

$$R(x) = e^{-2 \ln(x)} = \frac{1}{x^2}.$$

Multiplicando a equação diferencial não exata por $R(x)$, resulta em

$$\frac{1}{x^2} [(x^2 - y^2) dx + (2xy) dy] = 0,$$

ou

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0, \quad (2.35)$$

que é uma equação exata.

Agora, (2.35) pode ser resolvida pelo método das equações diferenciais exatas. Assim:

$$U = \int N dy + g(x) = \int \frac{2y}{x} dy + g(x) = \frac{y^2}{x} + g(x).$$

Como

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2} + g'(x),$$

e

$$M = \frac{\partial U}{\partial y},$$

daí resulta que

$$1 - \frac{y^2}{x^2} = -\frac{y^2}{x^2} + g'(x).$$

Por conseguinte,

$$g'(x) = 1,$$

e

$$g(x) = \int dx + c.$$

Assim,

$$g(x) = x + c,$$

de modo que a solução $U(x, y)$ é da forma

$$U = \frac{y^2}{x} + x + c.$$

2.5 Equações Lineares

As equações diferenciais lineares constituem um tipo de equações diferenciais especialmente importantes, uma vez que, dada uma equação linear, há sempre a possibilidade de encontrarmos sua solução geral.

Definição 2.4. *Uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem é dita linear completa se é da forma*

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \quad (2.36)$$

onde P e Q são funções de x ou constantes. Ela é dita linear homogênea ou incompleta, quando $Q = 0$.

Outra maneira de escrever-se a equação (2.36), é através da forma

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x) \quad (2.37)$$

onde $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $b(x)$ são funções apenas de x , com $a_0(x) \neq 0$.

Como método de resolução para as Equações Diferenciais Lineares, destacamos o Método do Fator Integrante e o Método da Variação dos Parâmetros (Método de Lagrange).

2.5.1 O Método do Fator Integrante

Considere a Equação Linear Completa na forma:

$$y'(x) + P(x)y = Q(x), \quad (2.38)$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Multiplicando todos os termos da equação por dx , obtemos

$$dy + P(x)ydx = Q(x)dx,$$

e assim

$$(P(x)y - Q(x))dx + dy = 0. \quad (2.39)$$

Portanto,

$$M(x, y) = P(x)y - Q(x), \quad N(x, y) = 1,$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x), \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Esta equação diferencial não é exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

e, por outro lado, temos que:

$$\exp\left(\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx\right),$$

é uma função somente da variável x .

Assim,

$$R(x) = \exp\left(\int \frac{1}{1} (P(x) - 0) dx\right),$$

ou

$$R(x) = e^{\int P(x)dx}$$

é, conforme (2.30), um fator integrante para (2.39).

Agora multiplicando (2.39) pelo fator integrante $R(x)$, obtemos:

$$R(x)[P(x)y - Q(x)]dx + R(x)dy = 0,$$

ou

$$e^{\int P(x)dx}[P(x)y - Q(x)]dx + e^{\int P(x)dx}dy = 0.$$

Desse modo, temos (2.39) escrita na forma (2.17) com:

$$M(x, y) = e^{\int Pdx}(Py - Q) \quad e \quad N(x, y) = e^{\int Pdx}.$$

Derivando M em relação a y , obtemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P e^{\int P dx},$$

e derivando N em relação a x , obtemos

$$\frac{\partial N}{\partial x} = P e^{\int P dx}.$$

Assim, a nova equação pode ser resolvida como uma equação diferencial exata.

Exemplo 2.5. Resolvamos a seguinte E.D.O. linear, pelo método do fator integrante:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x - 2.$$

Resolução:

Temos que

$$\left(2 - x - \frac{y}{x}\right) dx + dy = 0, \quad (2.40)$$

cujo fator integrante é

$$R(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}.$$

Assim, multiplicando (2.40) pelo fator integrante $R(x) = \frac{1}{x}$, obtemos

$$\left(\frac{2}{x} - 1 - \frac{y}{x^2}\right) dx + \frac{1}{x} dy = 0,$$

que é uma equação diferencial exata.

Daí, obtemos de (2.28) que

$$U = \int \frac{1}{x} dy + g(x),$$

ou ainda

$$U = \frac{y}{x} + g(x).$$

Derivando em relação a x , obtemos de (2.26) que

$$-\frac{y}{x^2} + g'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{y}{x^2},$$

ou ainda

$$g'(x) = \frac{2}{x} - 1.$$

Daí, segue que

$$g(x) = 2\ln(x) - x.$$

Logo,

$$U = \frac{y}{x} + 2\ln(x) - x$$

e, portanto, a solução geral é dada por

$$y + 2x\ln(x) - x^2 = cx,$$

ou

$$y = x^2 - 2x\ln(x) + cx, \quad c = \text{constante}.$$

2.5.2 O Método da Variação de Parâmetros (Método de Lagrange)

Vamos agora procurar uma solução para a E.D.O. linear

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{2.41}$$

pelo método de Lagrange.

Para isso, consideremos sua solução $y = y(x)$ como um produto de duas funções de x . Assim,

$$y(x) = u(x)v(x). \tag{2.42}$$

Derivando (2.42) em relação a x , obtemos

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}. \tag{2.43}$$

Substituindo (2.43) em (2.41), resulta que

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + Puv = Q,$$

e daí

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q. \quad (2.44)$$

Para integrar a equação (2.44), examinam-se dois casos particulares da equação (2.41):

1.

$$\frac{dy}{dx} = Q, \text{ o que implica em } P = 0.$$

Daí, resulta também que

$$dy = Qdx$$

e a solução, nesse caso, é dada por:

$$y = \int Qdx + c.$$

2.

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0, \text{ o que corresponde a } Q = 0.$$

Multiplicando todos os membros por dx ,

$$dy + Pydx = 0.$$

Separando as variáveis,

$$\frac{dy}{y} + Pdx = 0.$$

Integrando,

$$\int \frac{dy}{y} + \int Pdx = c,$$

e assim

$$\ln(y) + \int Pdx = c$$

ou ainda

$$\ln(y) = c - \int Pdx.$$

Pela definição de logaritmo, obtemos

$$y = e^{c - \int Pdx} = e^c e^{-\int Pdx}$$

ou ainda

$$y = ke^{-\int Pdx}, \quad \text{com} \quad k = e^c \text{ constante,}$$

que é a solução da equação linear homogênea ou incompleta.

Voltando para a equação (2.44)

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q.$$

Como $y = uv$, é necessário obter-se os valores de u e v , para assim obtermos a solução da equação linear completa. Impondo a condição

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0, \quad (2.45)$$

obtemos que (2.45) é uma E.D.O. homogênea do mesmo tipo da equação do caso 2, onde v funciona como y , cuja solução é dada por

$$v = ke^{-\int Pdx}. \quad (2.46)$$

Substituindo (2.46) em $v \frac{du}{dx} = Q$, é possível obter-se u . Então,

$$ke^{-\int Pdx} \frac{du}{dx} = Q,$$

e

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{k} e^{\int Pdx} Q,$$

e ainda

$$du = \frac{1}{k} e^{\int Pdx} Q dx.$$

Integrando,

$$u = \frac{1}{k} \int e^{\int Pdx} Q dx + c. \quad (2.47)$$

Como $y = uv$, temos que

$$y = ke^{-\int Pdx} \left(\frac{1}{k} \int e^{\int Pdx} Q dx + c \right).$$

Assim,

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int e^{\int P dx} Q dx + c \right) \quad (2.48)$$

e, portanto, (2.48) é a solução geral de (2.41).

Observação 2.3. A solução (2.46) da E.D.O. Homogênea, quando $P(x) = a$, sendo a uma constante, adquire a seguinte forma:

$$v = ke^{-ax}.$$

Exemplo 2.6. Resolvamos a seguinte E.D.O. linear, pelo método de Lagrange:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x - 2.$$

Resolução:

Temos

$$P = \frac{-1}{x},$$

e

$$Q = x - 2.$$

Utilizando a fórmula (2.48)

$$e^{-\int P dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln(x)} = x,$$

e assim

$$y = x \left(\int \frac{1}{x}(x - 2) dx + c \right).$$

A solução geral da E.D.O. linear toma a forma:

$$y = x(x - 2\ln(x) + c),$$

que é a mesma obtida pelo método do Fator Integrante.

2.6 Equação de Bernoulli

Consideramos a equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (2.49)$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas de x ou constantes e n é diferente de zero e um ($n \neq 0, n \neq 1$).

A equação de Bernoulli se resolve através da sua redução a uma equação diferencial ordinária linear.

Em (2.49), dividimos todos membros da equação por y^n . Assim

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q. \quad (2.50)$$

Façamos a seguinte substituição:

$$y^{1-n} = t. \quad (2.51)$$

Notem que $t = t(x)$, pois $y = y(x)$.

Derivamos (2.51) em relação a x

$$(1 - n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx},$$

de maneira que

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - n} \frac{dt}{dx}.$$

Substituindo em (2.50), obtemos

$$\frac{1}{1 - n} \frac{dt}{dx} + Pt = Q,$$

ou ainda

$$\frac{dt}{dx} + Pt(1 - n) = Q(1 - n). \quad (2.52)$$

Assim, a equação (2.52) é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem, e pode ser resolvida pelos métodos anteriores.

Exemplo 2.7. Resolvamos a seguinte E.D.O. de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3.$$

Resolução:

Dividindo todos os termos por y^3

$$y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3. \quad (2.53)$$

Fazendo $t = y^{-2}$ e derivando em relação a x obtemos

$$\frac{dt}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx},$$

ou

$$-\frac{1}{2}y^3 \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Substituindo em (2.53) resulta que

$$-\frac{1}{2} \frac{dt}{dx} + xt = x^3,$$

ou ainda

$$\frac{dt}{dx} - 2xt = -2x^3. \quad (2.54)$$

Observemos que (2.54) é uma equação diferencial ordinária linear. Fazemos

$$t = uv; \quad \frac{dt}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Substituindo em (2.54)

$$\begin{aligned} u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - 2xuv &= -2x^3, \\ u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} &= -2x^3. \end{aligned}$$

Fazemos

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0,$$

e daí

$$\frac{dv}{v} = 2x dx,$$

ou ainda

$$\ln(v) = x^2,$$

e, portanto,

$$v = e^{x^2}.$$

Desejamos agora encontrar u . Fazemos

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3,$$

e daí

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx,$$

que resulta em

$$u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx + c.$$

Integrando por partes obtemos

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + c.$$

Como

$$t = uv,$$

daí resulta que

$$t = x^2 + 1 + ce^{x^2}.$$

E ainda

$$t = y^{-2} = x^2 + 1 + ce^{x^2},$$

consequentemente,

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}}.$$

Capítulo 3

Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias a Coeficientes Constantes

Considere o seguinte sistema de n equações lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + g_1(t) \\ x'_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + g_n(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são funções de t .

Se cada uma das funções g_1, g_2, \dots, g_n é identicamente nula, então dizemos que o sistema (3.1) é homogêneo, do contrário, é não-homogêneo. Neste capítulo consideraremos o caso homogêneo com coeficientes constantes, que é dado pelo sistema:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x'_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (3.2)$$

Se n for muito grande, o sistema se torna incômodo e difícil de manusear.

Para facilitar o cálculo procuramos escrever essas equações de uma maneira mais con-

cisa. Para isso é necessário introduzir o conceito de vetores e matrizes. Além destes, outros conceitos de Álgebra Linear, necessários à resolução dos sistemas, serão apresentados aqui.

Definição 3.1. *Um vetor coluna*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é uma notação taquigráfica para a sequência de números x_1, x_2, \dots, x_n . Os números x_1, x_2, \dots, x_n são chamados as componentes de X . Se $x_1 = x_1(t) \dots, x_n = x_n(t)$, então

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

é chamada uma função com valores vetoriais.

Sua derivada $X'(t)$ é a função com valores vetoriais

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix}.$$

Definição 3.2. *Uma matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é uma notação taquigráfica para o quadro de números a_{ij} disposto em m linhas e n colunas. O elemento que está na i -ésima linha e na j -ésima coluna é indicado por a_{ij} , o primeiro índice indica sua linha e o segundo, sua coluna. Dizemos que A é uma matriz quadrada se $m = n$.

Definição 3.3. Seja A uma matriz $n \times n$ com elementos a_{ij} e seja X um vetor com componentes x_1, x_2, \dots, x_n . Definimos o produto de A por X , que indicamos por AX , como o vetor cuja i -ésima componente é

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Assim,

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Observação 3.1. O sistema (3.3) pode se escrito como $X'(t) = AX(t) + G(t)$ com $G(t) = [g_1(t), \dots, g_n(t)]^t$.

Definição 3.4. (Espaço Vetorial) Um Espaço vetorial real é um conjunto V , não vazio, com duas operações: soma $V \times V \mapsto V$, e multiplicação por escalar, $R \times V \mapsto V$, as quais denotaremos por $(x, y) \mapsto x + y$ e $(a, x) \mapsto ax$, respectivamente, tais que para quaisquer x, y e $z \in V$ e $a, b \in R$ as propriedades de i) a viii) abaixo sejam satisfeitas.

i) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (adição associativa)

ii) $x + y = y + x$ (adição comutativa)

iii) Existe um elemento 0 de V tal que $x + 0 = x$, para todo x de V

iv) A todo x de V corresponde um elemento, que denotamos por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$

v) $1x = x$, para todo x de V

vi) $(ab)x = a(bx)$ para números quaisquer a, b e qualquer elemento x de V

vii) $a(x + y) = ax + ay$

viii) $(a + b)x = ax + bx$

Definição 3.5. Um conjunto de vetores x^1, x^2, \dots, x^n gera V se o conjunto de todas as combinações lineares $c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ esgota V . Isto é, os vetores x^1, x^2, \dots, x^n gera V se todo elemento de V pode ser expresso como uma combinação linear de x^1, x^2, \dots, x^n .

Definição 3.6. Se os vetores x^1, x^2, \dots, x^n não são linearmente dependentes, isto é, nenhum desses vetores pode ser expresso como uma combinação linear dos outros, dizemos que eles são *Linearmente Independentes*.

Definição 3.7. A *dimensão* de um espaço vetorial V , que indicamos por $\dim V$, é o menor número de vetores linearmente independentes que geram V .

Exemplos: São espaços vetoriais:

$$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, M_n = \{\text{matrizes } n \times n\}, C[0, 1] = \{t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} / t \text{ contínua}\}.$$

Retornaremos agora à resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas,

$$X'(t) = AX(t), \tag{3.3}$$

onde

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Um sistema desse tipo possui n soluções linearmente independentes x^1, x^2, \dots, x^n .

Lembremos que as equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem homogêneas a coeficientes constantes da forma

$$x'(t) = ax,$$

tem a solução dada por

$$x(t) = ce^{at}. \tag{3.4}$$

Agora, no caso de um sistema de n equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem homogêneas a coeficientes constantes, inspirados em (3.4), podemos verificar o que ocorre se escrevermos $X(t) = e^{\lambda t}v$, onde v é um vetor constante.

Obtemos que

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}v) = \lambda e^{\lambda t}v,$$

e portanto

$$A(e^{\lambda t}v) = e^{\lambda t}Av.$$

Logo, temos que $X(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução de (3.3) se, e só se, $\lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av$. Agora, dividindo ambos os membros dessa equação por $e^{\lambda t}$, obtemos que $X(t) = e^{\lambda t}v$ é solução de (3.3) se e somente se

$$Av = \lambda v. \tag{3.5}$$

Queremos $v \neq 0$, para obtermos uma solução não trivial, pois obviamente $A0 = \lambda 0$ para qualquer número λ .

Definição 3.8. *Um vetor não-nulo v satisfazendo (3.5) é chamado Vetor Próprio (ou autovetor) de A com Valor Próprio (ou autovalor) λ .*

Reescrevemos (3.5) sob a forma

$$Av - \lambda v = 0,$$

ou

$$(A - \lambda I)v = 0. \tag{3.6}$$

Sabemos que (3.6) tem uma solução não-nula v somente se $\det(A - \lambda I) = 0$. Portanto, os valores próprios λ de A são as raízes da equação

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

e os vetores próprios de A são as soluções não-nulas das equações $(A - \lambda I)v = 0$, para esses valores de λ .

O determinante da matriz $A - \lambda I$ é um polinômio em λ , de grau n , chamado polinômio característico de A e indicado por $p(\lambda)$.

Todo polinômio de grau $n \geq 1$ tem pelo menos uma raiz. Portanto, toda matriz tem pelo menos um valor próprio e um vetor próprio. Por outro lado, $p(\lambda)$ tem no máximo n raízes distintas. Portanto, toda matriz $n \times n$ tem no máximo n valores próprios e assim no máximo n vetores próprios linearmente independentes, pois o espaço de todos os vetores tem dimensão n .

Observemos que,

$$A(cv) = cAv = c\lambda v = \lambda(cv)$$

para qualquer constante c . E ainda, para cada vetor próprio v^j de A com valor próprio λ_j , temos uma solução $x^j(t) = e^{\lambda_j t} v^j$ de (3.3). Se A tem n vetores próprios linearmente independentes com valores próprios respectivamente, então $x^j(t) = e^{\lambda_j t} v^j$ com $j = 1, 2, \dots, n$ são n soluções linearmente independentes de (3.3).

Nesse caso, a solução geral é dada pela forma

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v^2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v^n. \quad (3.7)$$

Teorema 3.1. *Qualquer conjunto de vetores próprios de A , v^1, \dots, v^k , com valores próprios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ respectivamente, são linearmente independentes.*

Demonstração: *A demonstração é elementar e pode ser vista em [5] (ver também [12] e [7]).*

Exemplo 3.1. *Resolvamos o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Homogêneas:*

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Resolução:

O polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, é

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 12 \\ 3 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 36 = (\lambda - 7)(\lambda + 5).$$

Assim, para os autovalores de A , $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = -5$, vamos procurar autovetores não nulos v , tais que $(A - \lambda I)v = 0$.

1. Para $\lambda_1 = 7$, obtemos

$$(A - 7I)v = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{cases} -6v_1 + 12v_2 = 0 \\ 3v_1 - 6v_2 = 0. \end{cases}$$

Portanto, $v_1 = 2v_2$. Assim, todo vetor $v = c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, com $c = \text{constante} \neq 0$, é

um vetor próprio de A com valor próprio 7, e $x^1(t) = e^{7t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é uma solução da equação diferencial.

2. Para $\lambda_2 = -5$, obtemos

$$(A + 5I)v = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{cases} 6v_1 + 12v_2 = 0 \\ 3v_1 + 6v_2 = 0. \end{cases}$$

Portanto, $v_1 = -2v_2$, e $x^2(t) = e^{-5t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Essas soluções são linearmente independentes pois A tem valores próprios distintos e assim, $X(t) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t)$, é a solução geral, isto é,

$$X(t) = c_1e^{7t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-5t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1e^{7t} - 2c_2e^{-5t} \\ c_1e^{7t} + c_2e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

3.1 Raízes Complexas

Se $\lambda = \alpha + i\beta$ é um valor próprio complexo de A com vetor próprio complexo $v = v^1 + iv^2$, então $X(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução com valores complexos da equação diferencial

$$X'(t) = AX(t) \tag{3.8}$$

Lema 3.1. *Seja $x(t) = y(t) + iz(t)$ uma solução com valores complexos de (3.8). Então, tanto $y(t)$ como $z(t)$ são soluções com valores reais de (3.8).*

Demonstração: *A demonstração é elementar (ver [5]).*

3.2 Raízes Iguais

Não podemos garantir que A possui n vetores próprios linearmente independentes, se o polinômio característico de A não tem n raízes diferentes. Se uma matriz $A_{n \times n}$, tem somente $k < n$ vetores próprios linearmente independentes, então a equação diferencial $X'(t) = AX(t)$ tem somente k soluções linearmente independentes da forma $e^{\lambda t}v$. Porém, estamos obviamente interessados em obter a solução geral do sistema, precisamos prosseguir e encontrar as $n - k$ soluções adicionais linearmente independentes.

Relembrando que $x(t) = e^{at}c$ é uma solução da equação diferencial escalar $x'(t) = ax$. Analogamente, poderíamos ter $X(t) = e^{At}v$ como solução da equação diferencial vetorial

$$X'(t) = AX. \tag{3.9}$$

Para isso precisamos definir o que é e^A , sendo A uma matriz $n \times n$. Começamos com a definição de convergência de séries de matrizes.

Definição 3.9. Dizemos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} U_k$ de matrizes converge, se, e somente se, a sequência $\{\sum_{k=0}^n U_k\}$ de somas parciais converge.

Lema 3.2. Uma sequência $\{\sum_{k=0}^n U_k\}$ de somas parciais de matrizes converge, se, e somente se, dado um número $\epsilon > 0$, existe um inteiro $N = N(\epsilon)$ tal que

$$|S_m - S_p| = \left| \sum_{k=p+1}^m U_k \right| < \epsilon, \text{ para } m > p,$$

sempre que $p > N$, onde

$$S_m = \sum_{k=0}^m U_k$$

é a soma parcial de ordem m , da série.

Demonstração: Pode ser encontrada em [4].

Agora definimos e^M , onde M é uma matriz $n \times n$, como a soma da série

$$e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \cdots + \frac{M^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \quad (3.10)$$

e para ver se a série converge usamos o critério de Cauchy para série de matrizes. Assim, usando a norma de uma matriz, temos para $m > p$,

$$\left| \sum_{k=p+1}^m \frac{M^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=p+1}^m \frac{|M|^k}{k!},$$

pela Desigualdade Triangular generalizada.

Agora, sabemos que

$$e^{|M|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|M|^k}{k!},$$

onde $|M|$ é um número real não negativo. Portanto, a soma $\sum_{k=0}^m \frac{|M|^k}{k!}$ é a soma parcial de uma série de números positivos que é sabidamente convergente. Portanto, pelo critério de Cauchy para a convergência de séries de números reais, dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro $N > 0$ tal que

$$|S_m - S_p| < \epsilon, \text{ para } m, p > N.$$

Isto mostra a convergência da série infinita em (3.10) e estabelece a validade da igualdade em (3.10) para toda matriz M (uma série absolutamente convergente é convergente).

Agora podemos definir e^A como uma série. Assim, de (3.10), temos:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}, \quad (3.11)$$

e ainda

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A + A^2 t + \cdots + \frac{A^{n+1}}{n!} t^n + \cdots = A \left[I + At + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots \right] = A e^{At}.$$

Isto implica em que $e^{At}v$ é uma solução de (3.9) para todo vetor constante v , uma vez que

$$\frac{d}{dt} (e^{At}v) = A e^{At}v = A(e^{At}v).$$

Vejamos agora, como encontrar n vetores linearmente independentes para os quais a soma da série infinita $e^{At}v$ possa ser determinada, para um dado vetor fixado v .

Considerando que $(A - \lambda I)(\lambda I) = (\lambda I)(A - \lambda I)$, podemos escrever a seguinte igualdade

$$e^{At}v = e^{(A - \lambda I)t} e^{(\lambda I)t}v.$$

Além disso,

$$e^{(\lambda I)t}v = \left[I + \lambda I t + \frac{\lambda^2 I^2 t^2}{2!} + \cdots \right] v = \left[1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \cdots \right] I v = e^{\lambda t}v,$$

por conseguinte,

$$e^{At}v = e^{\lambda t} e^{(A - \lambda I)t}v.$$

Se v satisfaz $(A - \lambda I)^m v = 0$ para algum m , então a série infinita $e^{(A - \lambda I)t}v$ termina depois de m termos.

Consequentemente,

$$e^{(A - \lambda I)t}v = v + t(A - \lambda I)v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda I)^{m-1}v,$$

e

$$e^{At}v = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}v,$$

e assim

$$e^{At}v = e^{\lambda t} \left[v + t(A - \lambda I)v + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A - \lambda I)^{m-1}v \right].$$

Suponha que A tenha somente $k < n$ vetores próprios linearmente independentes. Então, temos apenas k soluções linearmente independentes da forma $e^{\lambda t}v$. Para encontrar as soluções adicionais, escolhemos um valor próprio repetido λ de A e determinamos todos os vetores v para os quais $(A - \lambda I)^2v = 0$, mas $(A - \lambda I)v \neq 0$.

Para cada um desses vetores v ,

$$e^{At}v = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}v = e^{\lambda t}[v + t(A - \lambda I)v]$$

é uma solução adicional de (3.9). Fazemos isso para todos os valores próprios de A .

Se ainda não tivermos soluções suficientes, então determinamos todos os vetores v para os quais $(A - \lambda I)^3v = 0$, mas $(A - \lambda I)^2v \neq 0$. Para cada um desses vetores v ,

$$e^{At}v = e^{\lambda t} \left[v + t(A - \lambda I)v + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I)^2v \right]$$

é uma solução adicional de (3.9).

Simultaneamente, procedemos deste modo, até obtermos n soluções linearmente independentes.

Assim, existem inteiros d_j e n_j tal que $d_j \leq n_j$ e a equação $(A - \lambda_j I)^{d_j}v = 0$ tem no mínimo n_j soluções linearmente independentes. Por isso, para cada valor próprio λ_j de A podemos calcular n_j soluções linearmente independentes de (3.9). Todas as soluções possuem a forma

$$X(t) = e^{\lambda_j t} \left[v + t(A - \lambda_j I)v + \cdots + \frac{t^{d_j-1}}{(d_j-1)!}(A - \lambda_j I)^{d_j-1}v \right].$$

Exemplo 3.2. *Determinaremos três soluções linearmente independentes para o seguinte sistema de equações diferenciais:*

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X.$$

Resolução:

O polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, é

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^3.$$

Assim, para o autovalor de A , $\lambda = 2$, vamos procurar o autovetor não nulos v , tal que $(A - \lambda I)v = 0$.

Fazemos,

$$(A - 2I)v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e assim, obtemos

$$\begin{cases} 0v_1 + v_2 + 3v_3 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 - v_3 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0. \end{cases}$$

Portanto, $v_2 = v_3 = 0$ e v_1 é arbitrário. Assim, $x^1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma solução de $X'(t) = AX(t)$.

Como A tem somente um autovetor, procuramos todas as soluções para a equação $(A - 2I)^2v = 0$. Fazemos

$$(A - 2I)^2v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e obtemos,

$$\begin{cases} 0v_1 + 0v_2 - v_3 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0. \end{cases}$$

Isso implica em que $v_3 = 0$ e v_1, v_2 são arbitrários. Escolhemos o vetor $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

que satisfaz $(A - 2I)^2v = 0$ e também $(A - 2I)v \neq 0$. Portanto

$$x^2(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t} e^{(A-2I)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

desenvolvendo a exponencial $e^{(A-2I)t}$, obtemos

$$x^2(t) = e^{2t} [I + t(A - 2I)] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t} \left[I + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e ainda

$$x^2(t) = e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $x^2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é a segunda solução de $X'(t) = AX(t)$.

Como a equação $(A-2I)^2v = 0$ tem somente duas soluções linearmente independentes, procuramos todas as soluções da equação

$$(A-2I)^3v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obviamente, todo vetor v é uma solução dessa equação. Escolhemos $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, que

fatisfaz $(A-2I)^3v = 0$ e também $(A-2I)^2v \neq 0$. Portanto

$$x^3(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} e^{(A-2I)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

desenvolvendo a exponencial $e^{(A-2I)t}$, obtemos

$$x^3(t) = e^{2t} \left[I + t(A-2I) + \frac{t^2}{2}(A-2I)^2 \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e ainda

$$x^3(t) = e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = e^{2t} \begin{bmatrix} 3t - \frac{1}{2}t^2 \\ -t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, $x^3(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 3t - \frac{1}{2}t^2 \\ -t \\ 1 \end{bmatrix}$ é a terceira solução de $X'(t) = AX(t)$.

A solução geral do sistema é dada por:

$$X(t) = e^{2t} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3t - \frac{1}{2}t^2 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

3.3 Cálculo Exponencial de uma Matriz usando a forma Canônica de Jordan

Daremos a seguir, algumas definições básicas e alguns resultados que nos ajudarão no cálculo da exponencial de uma matriz.

Definição 3.10. *Duas matrizes A e B , de ordem $n \times n$, são similares, se existe uma matriz T inversível, tal que $T^{-1}AT = B$. Neste caso, denotamos $A \sim B$.*

Proposição 3.1. *Se $A \sim B$, então A e B possuem os mesmos autovalores. A recíproca não é verdadeira.*

Teorema 3.2. *Se A é uma matriz de ordem $n \times n$, com n autovalores distintos, todos com multiplicidade $m = 1$, isto é, todos simples, então*

$$A \sim D,$$

sendo D uma matriz diagonal, dada por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

onde λ_i , $i = 1, \dots, n$, autovalores de A . Nesse caso T , a matriz da similaridade, tal que $T^{-1}AT = D$, é dada por:

$$T = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \dots & v^n \end{bmatrix},$$

onde v^i , $i = 1, \dots, n$, são os autovetores de T .

Demonstração: *Pode ser encontrada em [4].*

Apresentamos agora o caso geral em que A não possui n autovalores distintos.

Teorema 3.3 (Forma Canônica de Jordan). *Toda matriz $A \in M_n$ é similar a uma matriz*

diagonal em blocos

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_s \end{bmatrix}$$

onde

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad J_p = \begin{bmatrix} \lambda_{k+p} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{k+p} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{k+p} \end{bmatrix}$$

e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_{k+p}, \dots, \lambda_{k+s}$, $1 \leq p \leq s$, são os autovalores (não necessariamente distintos) de A . Os autovalores que aparecem em J_0 não são necessariamente simples.

Demonstração: Pode ser encontrada em [3] e [12].

Definição 3.11. Dado um autovalor λ de A , um bloco da forma $[\lambda]$ ou

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

chama-se um bloco de Jordan correspondente a λ . A matriz J chama-se forma canônica de Jordan da matriz A .

Definição 3.12. Uma matriz é dita de Jordan se pode ser escrita como uma soma de uma matriz diagonal e uma nilpotente, as quais comutam entre si.

Exemplo 3.3. Vejamos um exemplo de Matriz de Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & & \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 & & & & \\ & J_1 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & J_2 \end{bmatrix}.$$

O autovalor de multiplicidade três, $\lambda = 0$, tem dois autovetores linearmente independentes, e_1 e e_2 , por isso ele aparece em dois blocos de Jordan, J_0 e J_1 . O autovalor de multiplicidade dois, $\lambda = 8$, tem apenas um autovetor, o vetor e_4 , e por isso ele aparece em apenas um bloco de Jordan, J_2 . A cada bloco de Jordan corresponde um autovetor.

Aplicação:

Considere a sistema linear

$$X' = AX \tag{3.12}$$

$A \in M_n, -\infty < t < \infty$.

Fazemos uma mudança de variável $X = TZ$, onde T é uma matriz constante, assim:

$$X' = TZ' = ATZ.$$

Mas T é inversível, então multiplicando por T^{-1} , obtemos:

$$T^{-1}TZ' = T^{-1}ATZ,$$

e ainda

$$Z' = T^{-1}ATZ, \tag{3.13}$$

onde

$$T^{-1}AT = J,$$

$-\infty < t < \infty$.

Para T tal que $T^{-1}AT = J$, temos que $A = TJT^{-1}$ e $e^{tA} = e^{tTJT^{-1}}$. Mas, vejamos o que acontece quando calculamos $e^{tTJT^{-1}}$:

$$e^{tA} = e^{tTJT^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(TtJT^{-1})^n}{n!}.$$

Desenvolvendo o somatório,

$$e^{tA} = I + TtJT^{-1} + \frac{(TtJT^{-1}TtJT^{-1})}{2!} + \dots$$

Sabemos que $T^{-1}T = I$, portanto ficaremos com blocos de potências de tJ multiplicados por T e T^{-1} , pela esquerda e direita, respectivamente. Tirando T e T^{-1} em evidência, teremos:

$$e^{tA} = T \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tJ)^n}{n!} \right) T^{-1} = T e^{tJ} T^{-1}.$$

Sabemos também que, $J = D + N$, onde D é uma matriz diagonal e N uma matriz nilpotente, e ainda $e^{D+N} = e^D e^N$, uma vez que a matriz diagonal comuta com todas as matrizes. Assim, e^{tJ} pode ser calculado por:

$$e^{tJ_0} = \begin{bmatrix} e^{tJ_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{tJ_s} \end{bmatrix}, \quad e^{tJ_0} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{t\lambda_k} \end{bmatrix}$$

$$e^{tJ_p} = e^{t(\lambda_{k+p}I + N_p)} = e^{t\lambda_{k+p}} e^{tN_p} = e^{t\lambda_{k+p}} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & \dots & \frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo

$$N_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

uma matriz nilpotente de ordem $n_p \times n_p$.

Temos que e^{tJ} é uma matriz fundamental de (3.13) e e^{tA} é uma matriz fundamental de (3.12).

Uma solução fundamental de (3.12) é da forma $X(t) = e^{tA}C$, C um vetor constante; suas coordenadas são combinações lineares de funções da forma $t^n e^{\lambda t}$, λ autovalor de A .

3.4 Sistemas Lineares não Homogêneos

A solução do sistema

$$\begin{cases} X' = AX + G(t) \\ X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

com $G(t) = [g_1(t), \dots, g_n(t)]$ definida em \mathbb{R} , é dada por

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}G(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim, para se obter a solução do problema não homogêneo é suficiente saber calcular e^{At} , $t \in \mathbb{R}$. A fórmula acima é conhecida como a fórmula de variação de parâmetros.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, destacaremos alguns exemplos e aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias.

4.1 Lei do Resfriamento de Newton

Aos quase 60 anos, em 1701, Newton publicou um artigo intitulado "Scala Granduum Caloris", no qual descrevia um método para medir temperaturas de até $1000^{\circ}C$, o que era impossível para os termômetros daquela época.

Este método estava baseado no que hoje é conhecido como a lei do resfriamento de Newton, que diz: "a taxa com que um objeto (sem fonte de calor interna) adquire ou perde calor, é proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do ambiente, desde que esta última se mantenha constante".

Assim considera-se três hipóteses:

1. A temperatura $T = T(t)$ depende do tempo, e é a mesma em todos os pontos do corpo.
2. A temperatura T_m do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência.

3. A taxa de variação da temperatura com relação ao tempo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.

Considerando as hipóteses acima verdadeiras, obtem-se a seguinte E.D.O.

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_m), \quad (4.1)$$

sendo $T = T(t)$ a temperatura do corpo no instante t , T_m é a temperatura constante do meio ambiente, $T - T_m$ é a diferença de temperatura e $K > 0$ é a constante de proporcionalidade que depende do material com que o corpo é constituído, sendo que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está diminuindo com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente, se $T > T_m$.

Separando as variáveis e integrando em (4.1) obtemos,

$$\frac{dT}{T - T_m} = -K dt,$$

e

$$\ln(T - T_m) = -Kt + c, \quad c = \text{constante},$$

e ainda

$$T - T_m = c_1 e^{-Kt}, \quad c_1 = \text{constante}.$$

Assim, a solução da E.D.O. será dada por,

$$T(t) = T_m + c_1 e^{-Kt}. \quad (4.2)$$

Note que para $T(0) = T_0$ a equação (4.2) se transforma em:

$$T_0 = T_m + c_1,$$

e assim,

$$c_1 = T_0 - T_m.$$

Desta forma, a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -K(T - T_m) \\ T(0) = T_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

será

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-Kt}.$$

A lei do resfriamento de Newton é melhor aplicada em situações onde a temperatura do corpo não é muito diferente da temperatura do ambiente. Quando a diferença de temperatura é muito alta, a radiação térmica passa a influenciar o resultado.

4.2 Crescimento Populacional: O modelo Malthusiano

O primeiro modelo de crescimento populacional foi proposto por Thomas Malthus em 1798. O modelo de Malthus desconsidera restrições ambientais, guerras, epidemias, etc.

A idéia é a de que a taxa na qual uma população cresce é proporcional ao seu tamanho.

Considerando $\frac{dP}{dt}$ como a taxa de variação da população em relação ao tempo e $P = P(t)$ a população, temos:

$$\frac{dP}{dt} = KP, \tag{4.4}$$

onde K é uma constante que representa a diferença entre a taxa da natalidade e a taxa de mortalidade.

Se $K > 0$, a população apresenta-se crescente, se $K < 0$ a população diminui com o passar do tempo, e se $K = 0$, ou seja, se a taxa de natalidade for exatamente igual a taxa de mortalidade, então a população permanecerá constante no tempo.

Resolvendo (4.4) obtemos,

$$P(t) = P_0 e^{Kt}, \tag{4.5}$$

onde P_0 é a população inicial ($t = 0$), isto é, $P(0) = P_0$.

Este modelo é também conhecido por Modelo de Crescimento Exponencial, devido à curva exponencial de $P(t)$.

4.3 Meia-Vida

Nos processos radioativos, meia-vida ou período de semidesintegração de um radioisótopo, é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa deste isótopo, que pode ocorrer em segundos ou em bilhões de anos, dependendo do grau de instabilidade do radioisótopo. Quanto maior a meia-vida de uma substância, mais estável ela será. Por exemplo, a meia-vida do rádio altamente radioativo, Ra-226, é mais ou menos 1700 anos. Este é o tempo necessário para que metade de uma dada quantidade de Ra-226 se transforme em randônio, Rn-222.

Exemplo 4.1. *A meia-vida do Plutônio.*

Um reator regenerador converte urânio 238, relativamente estável, no isótopo plutônio 239. Depois de 15 anos determinou-se que 0,043% da quantidade inicial A_0 de plutônio desintegrou-se. Buscamos encontrar a meia-vida desse isótopo, considerando que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.

Solução: Seja $A(t)$ a quantidade de plutônio remanescente no instante t . $A(t)$ é dada pela solução do problema de valor inicial

$$\frac{dA}{dt} = kA, \quad A(0) = A_0$$

ou seja, $A(t) = A_0 e^{kt}$.

Restam 99,957% de substância, já que 0,043% dos átomos de A_0 se desintegraram. Para encontrar a constante de decaimento k , fazemos:

$$0,99957A_0 = A(15),$$

isto é,

$$0,99957A_0 = A_0 e^{15k}.$$

Por conseguinte, obtemos

$$k = \frac{1}{15} \ln 0,99957 = -0,00002867.$$

Assim,

$$A(t) = A_0 e^{-0,00002867t}.$$

A meia-vida corresponde ao valor do tempo é dada por $A(t) = \frac{1}{2}A_0$. Assim,

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-0,00002867t},$$

ou

$$\frac{1}{2} = e^{-0,00002867t}.$$

Resolvendo para t , obtemos

$$t = \frac{\ln 2}{0,00002867} \approx 24.177 \text{ anos.}$$

4.4 Datação por Carbono

Chama-se datação às técnicas que permitem uma avaliação da idade dos vestígios, peças ou objetos pertencentes a épocas passadas.

Em 1947, o pesquisador americano Willard F. Libby descobriu que, com a passagem do tempo, o C-14 desintegra segundo uma velocidade determinada, que pode ser medida. Libby recebeu, em 1960, o Prêmio Nobel de Química pela descoberta.

A concentração de C-14 em um ser vivo é a mesma que existe em equilíbrio na atmosfera, ela só começa a mudar a partir do momento em que ele morre. Assim, comparando a quantidade proporcional de C-14 presente em um fóssil, por exemplo, com a razão constante encontrada na atmosfera, é possível obter uma estimativa razoável da idade do fóssil. O método baseia-se no conhecimento de que a meia-vida do radioativo C-14 é aproximadamente 5.600 anos.

Exemplo 4.2. *Idade de um Fóssil.*

Determinaremos a idade de um fóssil que contém um milésimo da quantidade original de C-14.

Solução: Seja $A(t)$ a quantidade de C-14 no instante t , nos deparamos novamente com problema de valor inicial,

$$\frac{dA}{dt} = kA, \quad A(0) = A_0$$

em que a solução é dada por $A(t) = A_0 e^{kt}$, e k é a constante de decaimento.

Temos que,

$$\frac{A_0}{2} = A(5600)$$

ou

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{5600k}$$

por conseguinte,

$$5600k = \ln \frac{1}{2}$$

ou

$$k = -\frac{\ln 2}{5600} = -0,00012378.$$

Desta forma,

$$A(t) = A_0 e^{-0,00012378t}.$$

Temos também, da hipótese, que

$$A(t) = \frac{1}{1000} A_0$$

e, conseqüentemente

$$\frac{1}{1000} A_0 = A_0 e^{-0,00012378t},$$

resolvendo a última equação para t , obtemos

$$-0,00012378t = -\ln 1000,$$

e ainda

$$t = \frac{\ln 1000}{0,00012378} \approx 55.800 \text{ anos.}$$

Conclusão

O desenvolvimento deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) consistiu no estudo das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. Através deste estudo, foi possível obter o conhecimento de diversos tipos de E.D.O.'s e como encontrar a solução para cada um deles.

A elaboração deste trabalho foi de grande valor, uma vez que propiciou o aprendizado de muitos conceitos novos, e ainda muitos conteúdos de álgebra linear e cálculo precisaram ser recordados.

Houve certamente, ainda, um grande aprimoramento por parte da escrita, obrigando-nos a desenvolver um pensamento mais formal e detalhista.

Temos a consciência de que apresentamos aqui, apenas uma pequena parte do complexo e importante assunto que são as E.D.O.'s, tendo assim, uma motivação para continuar os estudos sobre esse tópico.

Por fim, esperamos que este trabalho possa ser útil a outras pessoas como um material de auxílio e consulta.

Referências Bibliográficas

- [1] ABUNAHMAN, Sérgio Antonio. **Equações Diferenciais**, Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1984.
- [2] BARROSO, Leônidas Conceição. **Cálculo Numérico (com aplicações)** - 2ª edição, São Paulo, Harbra, 1987.
- [3] BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear** - 3ª edição, São Paulo, Harper e Row do Brasil, 1980.
- [4] BRAUER, Fred; NOHEL, John A. **The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations**, United States of America and Canada, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Philippines, 1969.
- [5] BRAUN, Martin. **Equações Diferenciais e suas Aplicações**, Rio de Janeiro, Editora Campus, 1979 .
- [6] FIGUEIREDO, Djairo G.; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas** - 2ª edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2005.
- [7] KOLMAN, Bernard. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações** - 6ª edição, tradução Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil, 1998.
- [8] KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior**. Volume 1, tradução Carlos Campos de Oliveira. Rio de Janeiro, Livros Técnicos Científicos, 1978.
- [9] MATEMÁTICA ESSENCIAL. Disponível em <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/>>. Acesso em: 28 jun. 2009.

- [10] PISKOUNOV, Nikolai Semenovich. **Cálculo Diferencial e Integral**. Volume 2, tradução de: Antônio Eduardo Pereira Teixeira e Maria José Pereira Teixeira. Porto, Editora Lopes da Silva, 1984.
- [11] SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, Rio de Janeiro, IMPA, 1979.
- [12] STRANG, Gilbert. **Linear Algebra and its Applications** - 3ª edição, San Diego, Harcourt Brace Jovanovich, 1988.
- [13] ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**, São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2003.