FABIANO KLEIN

CRITÉRIOS NÃO CLÁSSICOS DE DIVISIBILIDADE

FLORIANÓPOLIS
2007

FABIANO KLEIN

CRITÉRIOS NÃO CLÁSSICOS DE DIVISIBILIDADE

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática – Habilitação em Licenciatura, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina.
Orientador: Nereu Estanislau Burim

FLORIANÓPOLIS
2007

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Hélio Nereu Klein e Hilda Verônica Klein pelo exemplo de família.

Aos meus irmãos Maristela, Moacir, Gelson Ivan, Denizar, Mirtes Isabel, Cristine e Juliane pela compreensão e carinho.

Ao professor Nereu Estanislau Burim pelas orientações deste trabalho.

Aos professores Inder Jeet Taneja e Paul James Otterson por terem participado da banca examinadora deste trabalho.

Aos colegas de faculdade, amigos que contribuíram para minha formação.

Um agradecimento especial a Marcos Ruschel Friedrisch (in memorian) pelo incentivo e pelo exemplo na escolha do curso de Matemática Licenciatura.

Esta Monografia foi Julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 20 / CCM / 2007.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Nereu Estanislau Burim
Orientador

Inder Jeet Taneja

Paul James Otterson

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os critérios de divisibilidade são estudados praticamente nas séries iniciais do ensino fundamental, sendo eles muito importantes para a habilidade de resolução de exercícios destinados a estas séries.

Neste trabalho no tópico 1 será apresentada a definição de congruência, algumas proposições que servirão de suporte para compreender a forma como os critérios foram elaborados.

Nos tópicos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, além de definir os critérios será feita alguma comparação entre a forma como são apresentados os critérios nos livros didáticos aqui estudados e a forma que foram definidos no trabalho usando congruência. Verifica-se, na maioria desses critérios uma semelhança nos dois processos.

Os tópicos 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, foram um estudo aparte de pura curiosidade tendo em vista que esses critérios não se encontram nos livros didáticos do ensino fundamental, serviram para observar o comportamento dos critérios, lembrando que exceto os capítulos 12 e 13 são números primos.

O trabalho tem como objetivo básico mostrar numa outra forma os critérios, não levando em conta se este processo seja mais claro e objetivo quando comparados com os critérios propostos nos livros didáticos.

Ao longo do trabalho mais especificamente ao término da definição de cada critério serão vistos alguns exemplos de números que são e que não são divisíveis, tendo assim uma idéia mais clara e objetiva da forma como o trabalho tem seu funcionamento.

Os critérios de divisibilidade por 10, 12, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28 e 30 não foram definidos neste trabalho por que estes decorrem de outros critérios vistos aqui, por exemplo, o critério de divisibilidade por 10, pode ser definido através do critério de divisibilidade por 2 e por 5 acontecendo o mesmo procedimento com os outros critérios.

1 CONGRUÊNCIA

1.1 DEFINIÇÃO

Seja $\mathbf{m} \neq 0$ um inteiro fixo. Dois inteiros **a** e **b** dizem-se congruentes módulo **m** se **m** divide a diferença **a** - **b**. Neste caso escrevemos $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{m}}$.

Gauss foi induzido a utilizar o símbolo ≡ devido a grande analogia com igualdade algébrica.

Pela definição temos que $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{m}}$ se, e somente se, $\mathbf{m} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b}$ ou equivalentemente, se existe um inteiro q tal que $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{m}\, q + r$, com $0 \leq r < q$.

Como $\mathbf{m} \mid (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \Leftrightarrow |\mathbf{m}| \mid (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, limitar-nos-emos a considerar o caso em que $\mathbf{m} > 0$ e $r = 0$.

Exemplos:

$5 \equiv 9 \pmod 2$, que pela definição é $2 \mid 5 - 9$, ou seja $2 \mid -4$ pois $2 \times (-2) = -4$

$5 \equiv 9 \pmod 4$, $4 \mid 5 - 9$ ou seja $4 \mid -4$ pois $4 \times (-1) = -4$

$6 \equiv -2 \pmod 8$, $8 \mid 6 - (-2)$ ou seja $8 \mid 8$ pois $8 \times 1 = 8$.

1.2 PROPOSIÇÃO

Seja **m** um inteiro fixo. Dois inteiros **a** e **b** são congruentes módulo **m** se e somente se eles têm como resto o mesmo inteiro quando dividimos por **m**.

Demonstração:

Sejam **a** e **b** congruentes módulo **m**.

Então:

$\mathbf{a} = \mathbf{m}\, q_1 + r_1$ com $0 \leq r_1 < \mathbf{m}$

$\mathbf{b} = \mathbf{m}\, q_2 + r_2$ com $0 \leq r_2 < \mathbf{m}$

logo

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\mathbf{m}\, q_1 + r_1) - (\mathbf{m}\, q_2 + r_2)$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{m}\, q_1 - \mathbf{m}\, q_2 + r_1 - r_2$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{m}\, (q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$

portanto, $\mathbf{m} \mid (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \Leftrightarrow \mathbf{m} \mid (r_1 - r_2)$

e ainda como $0 \leq |r_1 - r_2| < \mathbf{m}$ temos que

$\mathbf{m} \mid (r_1 - r_2) \Leftrightarrow r_1 - r_2 = 0.$

Consequentemente, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{m}} \Leftrightarrow r_1 = r_2$ ■

Exemplos:

1) $23 \equiv 7 \pmod 4$

dividindo 23 por 4 obtemos resto 3

dividindo 7 por 4 obtemos também resto 3.

2) $42 \equiv 14 \pmod 7$

dividindo 42 por 7 obtemos resto 0

dividindo 14 por 7 também obtemos resto 0

1.3 PROPOSIÇÃO:

Seja $\mathbf{m} > 0$ um inteiro fixo, e **a**, **b**, **c**, **d** inteiros arbitrários. Então valem as seguintes propriedades:

P_1) $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a} \pmod{\mathbf{m}}$

Demonstração:

Pela definição de congruência temos $\mathbf{m} \mid \mathbf{a} - \mathbf{a}$, ou seja $\mathbf{m} \mid 0$ ■

P_2) Se $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{m}}$, então $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \pmod{\mathbf{m}}$

Demonstração:

Pela definição de congruência temos que $\mathbf{m} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b}$, segue ainda que

$\mathbf{m} \mid -(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{m} \mid -\mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{m} \mid \mathbf{b} - \mathbf{a}$ que pela definição de congruência é $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}$ (mod $\mathbf{m}$) ■

P_3) Sejam $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$ (mod $\mathbf{m}$) e $\mathbf{b} \equiv \mathbf{c}$ (mod $\mathbf{m}$), então $\mathbf{a} \equiv \mathbf{c}$ (mod $\mathbf{m}$)

Demonstração:

Como $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$ (mod $\mathbf{m}$) e $\mathbf{b} \equiv \mathbf{c}$ (mod $\mathbf{m}$), temos que $\mathbf{m} \mid (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ e $\mathbf{m} \mid (\mathbf{b} - \mathbf{c})$. Consequentemente $\mathbf{m} \mid ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{c}))$, isto é, $\mathbf{m} \mid (\mathbf{a} - \mathbf{c})$, logo $\mathbf{a} \equiv \mathbf{c}$ (mod $\mathbf{m}$) ■

P_4) Sejam $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$ (mod $\mathbf{m}$) e $\mathbf{c} \equiv \mathbf{d}$ (mod $\mathbf{m}$), então $\mathbf{a} + \mathbf{c} \equiv (\mathbf{b} + \mathbf{d})$ (mod $\mathbf{m}$)

Demonstração:

Pela definição de congruência temos $\mathbf{m} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b}$ e $\mathbf{m} \mid \mathbf{c} - \mathbf{d}$ pela P_3 temos que

$\mathbf{m} \mid ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{c} - \mathbf{d})) \Rightarrow \mathbf{m} \mid ((\mathbf{a} + \mathbf{c}) - (\mathbf{b} + \mathbf{d}))$ que pela definição de congruência é

$\mathbf{a} + \mathbf{c} \equiv (\mathbf{b} + \mathbf{d})$ (mod $\mathbf{m}$) ■

P_5) Se $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$ (mod $\mathbf{m}$), então $\mathbf{a} + \mathbf{c} \equiv (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (mod $\mathbf{m}$)

Demonstração:

Pela definição de congruência temos que $\mathbf{m} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b}$ e por P_1 temos que $\mathbf{m} \mid \mathbf{c} - \mathbf{c}$, por P_4 temos que $\mathbf{m} \mid (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{c} - \mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{m} \mid (\mathbf{a} + \mathbf{c}) - (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, que pela definição de congruência é

$\mathbf{a} + \mathbf{c} \equiv (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (mod $\mathbf{m}$) ■

P6) Sejam $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$ (mod $\mathbf{m}$) e $\mathbf{c} \equiv \mathbf{d}$ (mod $\mathbf{m}$) então $\mathbf{a}\,\mathbf{c} \equiv \mathbf{b}\,\mathbf{d}$ (mod $\mathbf{m}$)

Demonstração:

Se $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}$ (mod $\mathbf{m}$) e $\mathbf{c} \equiv \mathbf{d}$ (mod $\mathbf{m}$), então existem inteiros q_1 e q_2 tais que $\mathbf{a} = \mathbf{b} + q_1\,\mathbf{m}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{d} + q_2\,\mathbf{m}$. Logo,

$\mathbf{a\,c} = (\mathbf{b} + q_1\,\mathbf{m})\,(\mathbf{d} + q_2\,\mathbf{m})$

$\mathbf{a\,c} = \mathbf{b\,d} + \mathbf{b}\,q_2\,\mathbf{m} + \mathbf{d}\,q_1\,\mathbf{m} + q_1\,q_2\,\mathbf{m}^2$

$\mathbf{a\,c} = \mathbf{b\,d} + (\mathbf{b}\,q_2 + \mathbf{d}\,q_1 + q_1\,q_2\,\mathbf{m})\,\mathbf{m}$, como **b**, **d**, q_1, q_2 e **m** são inteiros substituiremos ($\mathbf{b}\,q_2 + \mathbf{d}\,q_1 + q_1\,q_2\,\mathbf{m}$) pelo inteiro t, então

$\mathbf{a\,c} = \mathbf{b\,d} + t\,\mathbf{m}$ isto é $\mathbf{a\,c - b\,d} = t\,\mathbf{m}$, portanto

$\mathbf{m} \mid (\mathbf{a\,c - b\,d})$, que pela definição de congruência significa que $\mathbf{a\,c} \equiv \mathbf{b\,d} \pmod{\mathbf{m}}$ ■

P_7) Se $\mathbf{a} + \mathbf{c} \equiv \mathbf{b} + \mathbf{c} \pmod{\mathbf{m}}$, então $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{m}}$

Demonstração:

Pela definição de congruência temos que $\mathbf{m} \mid ((\mathbf{a} + \mathbf{c}) - (\mathbf{b} + \mathbf{c})) \Rightarrow \mathbf{m} \mid (\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b} - \mathbf{c}) \Rightarrow$ $\mathbf{m} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b}$ o que por definição é $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{m}}$ ■

Observamos que não há somente um único critério de divisibilidade em relação a um determinado número.

Todos os critérios aqui estudados são originados usando se os conhecimentos de "congruência".

Às vezes, para tornarmos fácil a praticidade do critério, utilizamos o seguinte artifício: se o próximo múltiplo de 7, após o número 10 é 14, então $10 \equiv -4$ (módulo 7). Da definição de congruência temos $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{m}}$, nesse nosso estudo estipularemos algumas condições para **b**. Se **b** for positivo será usado o menor **b** que satisfaça a definição de congruência, se **b** for negativo será usado o maior **b** que satisfaça a definição de congruência.

2. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 2

O critério que encontramos nos livros didáticos estudados neste trabalho, diz que um número é divisível por 2 se ele for par, ou seja, se o número terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8. Neste critério usando o estudo de congruência temos:

Seja o número $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10n^{-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10_0$

Então:

$10^\circ \equiv 1 \pmod 2$
$10^1 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^1 \equiv -2 \pmod 2$
$10^2 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^2 \equiv -2 \pmod 2$
$10^3 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^3 \equiv -2 \pmod 2$
$10^4 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^4 \equiv -2 \pmod 2$
$10^5 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^5 \equiv -2 \pmod 2$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod 2$
$a_1.10^1 \equiv 0\, a_1 \pmod 2$ ou $a_1.10^1 \equiv -2\, a_1 \pmod 2$
$a_2.10^2 \equiv 0\, a_2 \pmod 2$ ou $a_2.10^2 \equiv -2\, a_2 \pmod 2$
$a_3.10^3 \equiv 0\, a_3 \pmod 2$ ou $a_3.10^3 \equiv -2\, a_3 \pmod 2$
$a_4.10^4 \equiv 0\, a_4 \pmod 2$ ou $a_4.10^4 \equiv -2\, a_4 \pmod 2$
$a_5.10^5 \equiv 0\, a_5 \pmod 2$ ou $a_5.10^5 \equiv -2\, a_5 \pmod 2$
. . . .
. . . .
. . . .
$a_n.10^n \equiv 0\, a_n \pmod 2$ ou $a_n.10^n \equiv -2\, a_n \pmod 2$

Assim $(a_n \, a_{n-1} \, ... \, a_2 \, a_1 \, a_0)_{10}$ é divisível por 2 quando o algarismo da unidade for divisível por 2, ou ainda se a algarismo da unidade subtraído do dobro do restante dos algarismos for divisível por 2.

Exemplos

1) Seja o número 564329086, verifique se o número é divisível por 2:

O algarismo da unidade é 6;
Ou ainda:
6 - 2 (8 + 0 + 9 + 2 + 3 + 4 + 6 + 5) =
6 - 2 (37) =
6 - 74 = - 68

Como 6 é divisível por 2, (2 x 3) e - 68 é divisível por 2,(2 x (- 34)), então o número 564329086 também é divisível por 2, (564329086 = 2 x 28214543).

2) Seja o número 345799, verifique se o número é divisível por 2:

O algarismo da unidade é 9
Ou ainda:
9 - 2 (9 + 7 + 5 + 4 + 3) =
9 - 2 (28) =
9 - 56 = - 45

Como os números 9 e - 45 não são divisíveis por 2, então o número 345799 também não é divisível por 2.

3) Seja o número 8529634, verifique se o número é divisível por 2:

O algarismo da unidade é 4

Ou ainda:

$4 - 2 (3 + 6 + 9 + 2 + 5 + 8) =$

$4 - 2 (33) =$

$4 - 66 = - 62$

Como 4 é divisível por 2, (2 x 2) e - 62 é divisível por 2, (2 x (- 31)), então o número 8529634 também é divisível por 2, (8529634 = 2 x 4264817).

Percebe-se que este critério demonstrado usando congruência em parte não sofre alterações quanto aos critérios estudados nos livros didáticos.

3. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 3

Nos livros didáticos estudados neste trabalho encontramos o seguinte critério; um número é divisível por 3 se a soma dos algarismos do número for divisível por 3, neste critério usando congruência temos:

Seja o número $(a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10n^{-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^{\circ} \equiv 1 \pmod 3$

$10^1 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^1 \equiv -2 \pmod 3$

$10^2 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^2 \equiv -2 \pmod 3$

$10^3 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^3 \equiv -2 \pmod 3$

$10^4 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^4 \equiv -2 \pmod 3$

$10^5 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^5 \equiv -2 \pmod 3$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod 3$

$a_1.10^1 \equiv 1\ a_1 \pmod 3$ ou $a_1.10^1 \equiv -2\ a_1 \pmod 3$

$a_2.10^2 \equiv 1\ a_2 \pmod 3$ ou $a_2.10^2 \equiv -2\ a_2 \pmod 3$

$a_3.10^3 \equiv 1\ a_3 \pmod 3$ ou $a_3.10^3 \equiv -2\ a_3 \pmod 3$

$a_4.10^4 \equiv 1\ a_4 \pmod 3$ ou $a_4.10^4 \equiv -2\ a_4 \pmod 3$

$a_5.10^5 \equiv 1\ a_5 \pmod 3$ ou $a_5.10^5 \equiv -2\ a_5 \pmod 3$

. . . .

. . . .

. . . .

$a_n.10^n \equiv 1\ a_n \pmod 3$ ou $a_n.10^n \equiv -2\ a_n \pmod 3$

Assim $(a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_2\ a_1\ a0)_{10}$ é divisível por 3 se a soma dos algarismos, ou ainda se o algarismo da unidade subtraído do dobro do restante dos algarismos for divisível por 3.

Exemplos

1) Seja o número 78945315, verifique se o número é divisível por 3:

Somando os algarismos desse número obtemos:
5 + 1 + 3 + 5 + 4 + 9 + 8 + 7 = 42

Ou ainda:

5 - 2 (1 + 3 + 5 + 4 + 9 + 8 + 7) =
5 - 2 (37) =
5 - 74 = - 69

Como 42 é divisível por 3, (3 x 14), e - 69 é divisível por 3 (3 x (- 23)), o número 78945315 também é divisível por 3, (78945315 = 3 x 26315105)

2) Seja o número 980632, verifique se o número é divisível por 3:

Somando os algarismos desse número obtemos:
2 + 3 + 6 + 0 + 8 + 9 = 28

Ou ainda:

2 - 2 (3 + 6 + 0 + 8 + 9) =
2 - 2 (26) =
2 - 52 = - 50

Como os números 28 e - 50 não são divisíveis por 3, o número 980632 também não é divisível por 3.

3) Seja o número 2957095707, verifique se o número é divisível por 3:

Somando os algarismos obtemos:
$7 + 0 + 7 + 5 + 9 + 0 + 7 + 5 + 9 + 2 = 51$

Ou ainda:

$7 - 2\ (0 + 7 + 5 + 9 + 0 + 7 + 5 + 9 + 2) =$
$7 - 2\ (44) =$
$7 - 88 = - 81$

Como 51 é divisível por 3, (3 x 17) e - 81 é divisível por 3, (3 x (- 27)), o número 2957095707 também é divisível por 3, (2957095707 = 3 x 985698569).

Novamente percebe-se que em parte este critério se torna semelhante ao critério estudado nos livros didáticos.

4. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 4

Nos livros didáticos estudados neste trabalho o critério de divisibilidade por 4 é apresentado da seguinte forma; um número é divisível por 4 quando termina em **00** ou quando o número formado pelos dois últimos algarismos da direita for divisível por 4, neste critério usando congruência temos:

Seja o número $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod 4$

$10^1 \equiv 6 \pmod 4$ ou $10^1 \equiv -2 \pmod 4$

$10^2 \equiv 0 \pmod 4$ ou $10^2 \equiv -4 \pmod 4$

$10^3 \equiv 0 \pmod 4$ ou $10^3 \equiv -4 \pmod 4$

$10^4 \equiv 0 \pmod 4$ ou $10^4 \equiv -4 \pmod 4$

$10^5 \equiv 0 \pmod 4$ ou $10^5 \equiv -4 \pmod 4$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod 4$

$a_1.10^1 \equiv 6\ a_1 \pmod 4$ ou $a_1.10^1 \equiv -2\ a_1 \pmod 4$

$a_2.10^2 \equiv 0\ a_2 \pmod 4$ ou $a_2.10^2 \equiv -4\ a_2 \pmod 4$

$a_3.10^3 \equiv 0\ a_3 \pmod 4$ ou $a_3.10^3 \equiv -4\ a_3 \pmod 4$

$a_4.10^4 \equiv 0\ a_4 \pmod 4$ ou $a_4.10^4 \equiv -4\ a_4 \pmod 4$

$a_5.10^5 \equiv 0\ a_5 \pmod 4$ ou $a_5.10^5 \equiv -4\ a_5 \pmod 4$

. . . .

. . . .

. . . .

$a_n.10^n \equiv 0\ a_n \pmod 4$ ou $a_n.10^n \equiv -4\ a_n \pmod m$

Assim $(a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 4 quando o algarismo da unidade somado ao sêxtuplo da dezena for divisível por 4, ou ainda se o algarismo da unidade subtraído do dobro da dezena e subtraído do quádruplo da centena for divisível por 4.

Exemplos:

1) Seja o número 2638940, verifique se o número é divisível por 4:

O algarismo da unidade é 0
O algarismo da dezena é 4
O algarismo da centena é 9

Usando o critério obtemos:

- $0 + 6 \times 4 = 24$
  $0 + 24 = 24$

ou

- $0 - 2 \times 4 - 4 \times 9 =$
  $0 - 8 - 36 =$
  $-8 - 36 = -44$

Como 24, (6×4) e -44, $(4 \times (-11))$ são divisíveis por 4, então o número 2638940, (4×659735) também é divisível por 4.

2) Seja o número 143904501, verifique se o número é divisível por 4:

O algarismo da unidade é 1
O algarismo da dezena é 0
O algarismo da centena é 5

Usando o critério obtemos

- $1 + 6 \times 0 =$

  $1 + 0 = 1$

ou

- $1 - 2 \times 0 - 4 \times 5 =$

  $1 - 0 - 20 =$

  $1 - 20 = - 19$

Como os números 1 e - 19 são divisíveis por 4, então o número 143904501 também não é divisível por 4.

3) Seja o número 346131788, verifique se o número é divisível por 4:

O algarismo da unidade é 8
O algarismo da dezena é 8
O algarismo da centena é 7

Usando o critério, obtemos:

- $8 + 6 \times 8 =$

  $8 + 48 = 56$

ou

- $8 - 2 \times 8 - 4 \times 7 =$

  $8 - 16 - 28 =$

  $-8 - 28 = - 36$

Como 56, (4×14) e - 36, ($4 \times (- 9)$) são divisíveis por 4, então o número 346131788 também é divisível por 4, ($346131788 = 4 \times 86532947$).

5. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 5

Aparece nos livros didáticos estudados neste trabalho que um número é divisível por 5 quando termina em **0** ou **5**, neste critério temos:

Seja o número $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^{\circ} \equiv 1 \pmod 5$

$10^1 \equiv 0 \pmod 5$

$10^2 \equiv 0 \pmod 5$

$10^3 \equiv 0 \pmod 5$

$10^4 \equiv 0 \pmod 5$

$10^5 \equiv 0 \pmod 5$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod 5$

$a_1.10^1 \equiv 0\, a_1 \pmod 5$

$a_2.10^2 \equiv 0\, a_2 \pmod 5$

$a_3.10^3 \equiv 0\, a_3 \pmod 5$

$a_4.10^3 \equiv 0\, a_4 \pmod 5$

$a_5.10^3 \equiv 0\, a_5 \pmod 5$

. .

. .

. .

$a_n.10^n \equiv 1\, a_n \pmod 5$

Assim $(a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 5 se o algarismo da unidade o for, ou seja, se o número terminar em 0 ou 5.

Exemplos

1) Seja o número 875, verifique se o número é divisível por 5:

O algarismo da unidade é 5 que é divisível por 5 logo 875 também é divisível por 5, (875 = 5 x 155)

2) Sejam os números 12309 e 2340, verifique se os números são divisíveis por 5:

O primeiro número tem como algarismo das unidades o 9 que não é divisível por 5,com isso o número 12309 também não é divisível por 5. O segundo número tem como algarismo da unidade o 0 que por sua vez é divisível por 5 portanto o número 2340 também é divisível por 5, (2340 = 5 x 468).

Percebe-se que este critério demonstrado usando congruência em parte não sofre alterações quanto aos critérios estudados nos livros didáticos.

6. CRITERIO DE DIVISIBILIDADE POR 6

Além do clássico critério que prescreve nos livros didáticos estudados neste trabalho, que diz que um número é divisível por 6, se ele for divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo, neste critério usando congruência temos:

Seja o número $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod 6$
$10^1 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^1 \equiv -2 \pmod 6$
$10^2 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^2 \equiv -2 \pmod 6$
$10^3 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^3 \equiv -2 \pmod 6$
$10^4 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^4 \equiv -2 \pmod 6$
$10^5 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^5 \equiv -2 \pmod 6$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^\circ \equiv 1\, a_0 \pmod 6$
$a_1.10^1 \equiv 4\, a_1 \pmod 6$ ou $a_1.10^1 \equiv -2\, a_1 \pmod 6$
$a_2.10^2 \equiv 4\, a_2 \pmod 6$ ou $a_2.10^2 \equiv -2\, a_2 \pmod 6$
$a_3.10^3 \equiv 4\, a_3 \pmod 6$ ou $a_1.10^3 \equiv -2\, a_3 \pmod 6$
$a_4.10^4 \equiv 4\, a_4 \pmod 6$ ou $a_1.10^4 \equiv -2.a_4 \pmod 6$
$a_5.10^5 \equiv 4\, a_5 \pmod 6$ ou $a_1.10^5 \equiv -2\, a_5 \pmod 6$
. . . .
. . . .
. . . .
$a_n.10^n \equiv 4\, a_n \pmod 6$ ou $a_n.10^n \equiv -2\, a_n \pmod 6$

Assim $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 6 quando o algarismo das unidades somado ao quádruplo dos algarismos de ordem par e subtraindo do dobro dos algarismos de ordem ímpar o for.

Exemplos:

1) Verificando se 155844 é divisível por 6 por este critério:

O algarismo da unidade é 4
Os algarismos da ordem par são 8 e 5
Os algarismos da ordem ímpar são 4, 5 e 1

Logo aplicando o processo, obtemos:

$[4 + 4\ (8 + 5) - 2\ (4 + 5 + 1)] =$
$[4 + 4\ (13) - 2\ (10)] =$
$[4 + 52 - 20] = 36$

Como 36, (6 x 6) é divisível por 6 decorre que o número 155844, (6 x 25974) também é divisível por 6.

2) Verificando se 45698016 é divisível por 6:

O algarismo da unidade e 6
Os algarismos de ordem par são 0, 9, e 5
Os algarismos de ordem impar são 1, 8, 6 e 4

Seguindo o mesmo procedimento

$[6 + 4\ (0 + 9 + 5) - 2\ (1 + 8 + 6 + 4)] =$
$[6 + 4\ (14) - 2\ (19)] =$

[6 + 56 - 38] = 24

Como 24, (6 x 4) é divisível por 6, logo o número 45698016, (6 x 7616336) também é divisível por 6.

3) Verificando se o número 9865425 é divisível por 6:

O algarismo da unidade é 6
Os algarismos de ordem par são 4, 6, 9
Os algarismos de ordem ímpar são 2, 5, 8

Seguindo o procedimento tem-se

[6 + 4 (4 + 6 + 9) - 2 (2 + 5 + 8)] =
[6 + 4 (19) - 2 (15)] =
[6 + 76 - 30] = 52

Como 52 não é divisível por 6, logo o número 9865425 também não é divisível por 6.

7. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 7

Esse critério encontrado nos livros didáticos procede do seguinte modo:

- separe o algarismo da unidade do número dado
- duplique esse número
- subtraia esse valor do número dado, depois de excluir o algarismo da unidade

se o resultado obtido for divisível por 7, então o número dado inicialmente também será.

Convém ressaltar que a maioria dos livros didáticos sequer enuncia esse critério devido sua complexidade de resolução sendo mais conveniente e mais prático simplesmente fazer a divisão mesmo. Agora neste critério usando congruência, temos:

Seja o número $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod 7$
$10^1 \equiv 3 \pmod 7$ ou $10^1 \equiv -4 \pmod 7$
$10^2 \equiv 2 \pmod 7$ ou $10^2 \equiv -5 \pmod 7$
$10^3 \equiv 6 \pmod 7$ ou $10^3 \equiv -1 \pmod 7$
$10^4 \equiv 4 \pmod 7$ ou $10^4 \equiv -3 \pmod 7$
$10^5 \equiv 5 \pmod 7$ ou $10^5 \equiv -2 \pmod 7$
$10^6 \equiv 1 \pmod 7$ ou $10^6 \equiv -6 \pmod 7$
$10^7 \equiv 3 \pmod 7$ ou $10^7 \equiv -4 \pmod 7$
$10^8 \equiv 2 \pmod 7$ ou $10^8 \equiv -5 \pmod 7$
$10^9 \equiv 6 \pmod 7$ ou $10^9 \equiv -1 \pmod 7$
$10^{10} \equiv 4 \pmod 7$ ou $10^{10} \equiv -3 \pmod 7$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod 7$

$a_1.10^1 \equiv 3\ a_1 \pmod 7$ ou $a_1.\ 10^1 \equiv -4\ a_1 \pmod 7$

$a_2.10^2 \equiv 2\ a_2 \pmod 7$ ou $a_2.\ 10^2 \equiv -5\ a_2 \pmod 7$

$a_3.10^3 \equiv 6\ a_3 \pmod 7$ ou $a_3.\ 10^3 \equiv -1\ a_3 \pmod 7$

$a_4.10^4 \equiv 4\ a_4 \pmod 7$ ou $a_4.\ 10^4 \equiv -3\ a_4 \pmod 7$

$a_5.10^5 \equiv 5\ a_5 \pmod 7$ ou $a_5.\ 10^5 \equiv -2\ a_5 \pmod 7$

$a_6.10^6 \equiv 1\ a_6 \pmod 7$ ou $a_6.\ 10^6 \equiv -6\ a_6 \pmod 7$

$a_7.10^7 \equiv 3\ a_7 \pmod 7$ ou $a_7.\ 10^7 \equiv -4\ a_7 \pmod 7$

$a_8.10^8 \equiv 2\ a_8 \pmod 7$ ou $a_8.\ 10^8 \equiv -5\ a_8 \pmod 7$

$a_9.10^9 \equiv 6\ a_9 \pmod 7$ ou $a_9.\ 10^9 \equiv -1\ a_9 \pmod 7$

$a_{10}.10^{10} \equiv 4\ a_{10} \pmod 7$ ou $a_{10}.10^{10} \equiv -3\ a_{10} \pmod 7$

Assim, $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 7 se, e só se, $(a_0 + 3\ a_1 + 2\ a_2) - (a_3 + 3\ a_4 + 2\ a_5) + (a_6 + 3\ a_7 + 2\ a_8) - (a_9 + 3\ a_{10} + 2\ a_{11})$ .... for.

Exemplos:

1) Seja o número 12556964, verifique se o mesmo é divisível por 7:

Separando o número da direita para esquerda em blocos de 3 algarismos

4, 6, 9 é o primeiro bloco

6, 5, 5 é o segundo bloco

2, 1 é o terceiro bloco

Usando o método temos:

[(4 + 3 x 6 + 2 x 9) - (6 + 3 x 5 + 2 x 5) + (2 + 3 x 1)] =

[(4 + 18 + 18) - (6 + 15 + 10) + (2 + 3)] =

[40 - 31 + 5] = 14

Como 14, (7 x 2) é divisível por 7, o número 12556964, (7 x 1793852) também é divisível por 7.

2) Seja o número 5965255422, verifique se o mesmo é divisível por 7

Usando o mesmo procedimento

2, 2, 4 formam o primeiro bloco

5, 5, 2 formam o segundo bloco

5, 6, 9 formam o terceiro bloco

5 forma o quarto bloco

Através do método obtemos:

$[(2 + 3 \times 2 + 2 \times 4) - (5 + 3 \times 5 + 2 \times 2) + (5 + 3 \times 6 + 2 \times 9) - 5] =$

$[(2 + 6 + 8) - (5 + 15 + 4) + (5 + 18 + 18) - 5] =$

$[16 - 24 + 41 - 5] =$

$[- 8 + 41 - 5] =$

$[33 - 5] = 28$

Como 28, (7 x 4) é divisível por 7, o número 5965255422, (7 x 852179346) também é divisível por 7.

3) Verificar se o número 250539 é divisível por 7:

Novamente usando o procedimento

9, 3, 5 formam o primeiro grupo

0, 5, 2 formam o segundo grupo

Através do método obtemos:

[(9 + 3 x 3 + 2 x 5) - (0 + 3 x 5 + 2 x 2)] =

[(9 + 9 + 10) - (15 + 4)] =

[28 - 19] = 9

Como 9 não é divisível por 7, o número 25539 também não é divisível por 7.

8. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 8

Nos livros didáticos estudados neste trabalho encontramos esse critério assim; um número é divisível por oito quando termina em **000** ou quando o número formado pelos 3 últimos algarismos da direita for divisível por 8; já neste critério.

Seja o número $(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^{\circ} \equiv 1 \pmod 8$
$10^1 \equiv 2 \pmod 8$ ou $10^1 \equiv -6 \pmod 8$
$10^2 \equiv 4 \pmod 8$ ou $10^2 \equiv -4 \pmod 8$
$10^3 \equiv 0 \pmod 8$ ou $10^3 \equiv 0 \pmod 8$
$10^4 \equiv 0 \pmod 8$ ou $10^4 \equiv 0 \pmod 8$
$10^5 \equiv 0 \pmod 8$ ou $10^5 \equiv 0 \pmod 8$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod 8$
$a_1.10^1 \equiv 2\ a_1 \pmod 8$ ou $a_1.10^1 \equiv -2\ a_1 \pmod 8$
$a_2.10^2 \equiv 4\ a_2 \pmod 8$ ou $a_2.10^2 \equiv -4\ a_2 \pmod 8$
$a_3.10^3 \equiv 0\ a_3 \pmod 8$ ou $a_3.10^5 \equiv 0\ a_3 \pmod 8$
$a_4.10^4 \equiv 0\ a_4 \pmod 8$ ou $a_4.10^5 \equiv 0\ a_4 \pmod 8$
$a_5.10^5 \equiv 0\ a_5 \pmod 8$ ou $a_5.10^5 \equiv 0\ a_5 \pmod 8$

Assim $(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 8, se uma dessas duas maneiras distintas acontecer:

- um número é divisível por 8 quando o algarismo da unidade somado com o dobro do algarismo da dezena e ao quádruplo do algarismo da centena for divisível por 8

- um número é divisível por 8 quando o algarismo da unidade subtraído do sêxtuplo do algarismo da dezena e do quádruplo do algarismo da centena for divisível por 8

Exemplos

1) Seja o número 158832, usando o critério das duas formas visto aqui temos:
algarismo da unidade é 2
algarismo da dezena é 3
algarismo da centena é 8
assim teremos
2 + 2 x 3 + 4 x 8 =
2 + 6 + 32 =
8 + 32 = 40
Como 40, (8 x 5) é divisível por 8, temos que o número 158832, (8 x 19854) também é divisível por 8.

ou ainda

2 - 6 x 3 - 4 x 8 =
2 - 18 - 32 =
- 16 - 32 = - 48

Como - 48, (8 x (-6)) é divisível por 8, temos que o número1588832, (8 x 19854) também é divisível por 8 conforme demonstrado acima.

2) Seja o número 47894355, verifique se o mesmo é divisível por 8:

o algarismo da unidade é 5

o algarismo da dezena é 5

o algarismo da centena é 3

logo usando o método das duas formas enunciadas temos:

5 + 2 x 5 + 4 x 3 =

5 + 10 + 12 =

15 + 12 = 27

Como 27 não é divisível por 8, o número 47894355 também não é divisível por 8

5 - 6 x 5 - 4 x 3 =

5 - 30 - 12 =

- 25 -12 = - 37

Como - 37 não é divisível por 8 o número 478943355 também não é divisível por 8.

3) Seja o número 716558752, usando o método das duas formas temos:

O algarismo da unidade é 2

O algarismo da dezena é 5

O algarismo da centena é 7

portanto

2 + 2 x 5 + 4 x 7 =

2 + 10 + 28 =

12 + 28 = 40

ou ainda

2 - 6 x 5 - 4 x 7 =

2 - 30 - 28 =

- 28 - 28 = - 56

Como 40, (8 x 5) e - 56, (8 x (-7)) são divisíveis por 8 o número 716558752, (8 x 89569844) também é divisível por 8.

9. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 9

Costa nos livros didáticos estudados neste trabalho o seguinte critério; um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos é um número divisível por 9, neste critério temos.

Seja o número $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod 9$

$10^1 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^1 \equiv -8 \pmod 9$

$10^2 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^2 \equiv -8 \pmod 9$

$10^3 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^3 \equiv -8 \pmod 9$

$10^4 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^4 \equiv -8 \pmod 9$

$10^5 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^5 \equiv -8 \pmod 9$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod 9$

$a_1.10^1 \equiv 1\ a_1 \pmod 9$ ou $a_1.10^1 \equiv -8\ a_1 \pmod 9$

$a_2.10^2 \equiv 1\ a_2 \pmod 9$ ou $a_2.10^2 \equiv -8\ a_2 \pmod 9$

$a_3.10^3 \equiv 1\ a_3 \pmod 9$ ou $a_3.10^3 \equiv -8\ a_3 \pmod 9$

$a_4.10^4 \equiv 1\ a_4 \pmod 9$ ou $a_4.10^4 \equiv -8\ a_4 \pmod 9$

$a_5.10^5 \equiv 1\ a_5 \pmod 9$ ou $a_5.10^5 \equiv -8\ a_5 \pmod 9$

Assim $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 9 quando a soma dos algarismos for divisível por 9, ou quando o algarismo da unidade subtraído do óctuplo do restante dos algarismos for divisível por 9.

Exemplos:

1) Seja o número 77937579, verifique se o mesmo é divisível por 9:

usando o critério nas duas formas enunciadas acima temos
somando os algarismos
7 + 7 + 9 + 3 + 7 + 5 + 7 + 9 = 54

ou ainda

9 - 8 (7 + 5 + 7 + 3 + 9 + 7 + 7) =
9 - 8 (45) =
9 - 360 = - 351

Como 54, (9 x 6) e - 351, (9 x (-39)) são divisíveis por 9, o número 77937579, (9 x 8659731) também é divisível por 9.

2) Seja o número 8431431426, verifique se o mesmo é divisível por 9:

fazendo da mesma forma temos
somando os algarismos
8 + 4 + 3 + 1 + 4 + 3 + 1 + 4 + 2 + 6 = 36

ou ainda

6 - 8 (2 + 4 + 1 + 3 + 4 + 1 + 3 + 4 + 8) =
6 - 8 (30) =
6 - 240 = - 234

Como 36, (9 x 4) e - 234, (9 x (-26)) são divisíveis por 9, o número 8431431426, (9 x 936825714) também é divisível por 9.

3) Seja o número 11330669, verifique se o mesmo é divisível por 9:

utilizando o mesmo procedimento

somando os algarismos

$1 + 1 + 3 + 3 + 0 + 6 + 6 + 9= 29$

ou ainda

$1 - 8 (1 + 3 + 3 + 0 + 6 + 6 + 9) =$

$1 - 8 (28) =$

$1 - 224 = - 223$

Como os números 29 e - 223 não são divisíveis por 9, então o número 113306669 também não é divisível por 9.

Percebe-se que este critério demonstrado usando congruência em parte não sofre alterações quanto aos critérios estudados nos livros didáticos.

10. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 11

Consta nos livros didáticos estudados neste trabalho que um número é divisível por 11 usando o seguinte procedimento:

- separe o algarismo da unidade do número dado
- subtraia esse valor do número dado, depois de excluir o algarismo da unidade

se o resultado dessa operação for um número divisível por 11, o número dado também o é.

Nesse critério usando congruência temos:

Seja o número $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod{11}$

$10^1 \equiv 10 \pmod{11}$ ou $10^1 \equiv -1 \pmod{11}$

$10^2 \equiv 1 \pmod{11}$ ou $10^2 \equiv -10 \pmod{11}$

$10^3 \equiv 10 \pmod{11}$ ou $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$

$10^4 \equiv 1 \pmod{11}$ ou $10^4 \equiv -10 \pmod{11}$

$10^5 \equiv 10 \pmod{11}$ ou $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$

$10^6 \equiv 1 \pmod{11}$ ou $10^6 \equiv -10 \pmod{11}$

$10^7 \equiv 10 \pmod{11}$ ou $10^7 \equiv -1 \pmod{11}$

$10^8 \equiv 1 \pmod{11}$ ou $10^8 \equiv -10 \pmod{11}$

$10^9 \equiv 10 \pmod{11}$ ou $10^9 \equiv -1 \pmod{11}$

$10^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ ou $10^{10} \equiv -10 \pmod{11}$

e assim por diante ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod{11}$

$a_1.10^1 \equiv 10\ a_1 \pmod{11}$ ou $a_1.10^1 \equiv -1\ a_1 \pmod{11}$

$a_2.10^2 \equiv 1\ a_2 \pmod{11}$ ou $a_2.10^2 \equiv -10\ a_2 \pmod{11}$

$$a_3.10^3 \equiv 10\ a_3 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad a_3.10^3 \equiv -1\ a_3 \pmod{11}$$
$$a_4.10^4 \equiv 1\ a_4 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad a_4.10^4 \equiv -10\ a_4 \pmod{11}$$
$$a_5.10^5 \equiv 10\ a_5 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad a_5.10^5 \equiv -1\ a_5 \pmod{11}$$
$$a_6.10^6 \equiv 1\ a_6 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad a_6.10^6 \equiv -10\ a_6 \pmod{11}$$
$$a_7.10^7 \equiv 10\ a_7 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad a_7.10^7 \equiv -1\ a_7 \pmod{11}$$
$$a_8.10^8 \equiv 1\ a_8 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad a_8.10^8 \equiv -10\ a_8 \pmod{11}$$
$$a_9.10^9 \equiv 10\ a_9 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad a_9\ 10^9 \equiv -1\ a_9 \pmod{11}$$
$$a_{10}.10^{10} \equiv 1\ a_{10} \pmod{11} \quad \text{ou} \quad a_{10}\ 10^{10} \equiv -10\ a_{10} \pmod{11}$$

e assim por diante, ou seja:

Assim $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 11 se, e só se:

- o algarismo da unidade somado ao décimo dos algarismos da ordem par, somado com os algarismos da ordem ímpar o for;

- o algarismo da unidade subtraído dos algarismos de ordem par, subtraído do décimo dos algarismos da ordem ímpar o for;

Exemplos:

1) Seja o número1382678, verifique se o mesmo é divisível por 11:

o algarismo da unidade é 8
os algarismos da ordem par são 7, 2, 3
os algarismos da ordem ímpar são 6, 8, 1

Logo

$[8 + 10\ (7 + 2 + 3) + (6 + 8 + 1)] =$

$[8 + 10\ (9 + 3) + (14 + 1)] =$

$[8 + 10\ (12) + 15] =$

$[8 + 120 + 15] =$

$[128 + 15] = 143$

e

$[8 - (7 + 2 + 3) - 10\ (6 + 8 + 1)] =$

$[8 - (9 + 3) - 10\ (14 + 1)] =$

$[8 - 12 - 10\ (15)] =$

$[8 - 12 - 150] =$

$[- 4 - 150] = - 154$

Como 143, (11 x 13) é divisível por 11, ou ainda, - 154, (11 x (- 14)) é divisível por 11, temos que o número 1382678, (11 x 125698) também é divisível por 11.

2) Seja o número 93733602044693, verifique se o mesmo é divisível por 11:

O algarismo da unidade é 3

Os algarismos de ordem par são 9, 4, 0, 0, 3, 7, 9

Os algarismos da ordem ímpar são 6, 4, 2, 6, 3, 3

Logo

$[3 + 10\ (9 + 4 + 0 + 0 + 3 + 7 + 9) + (6 + 4 + 2 + 6 + 3 + 3)] =$

$[3 + 10\ (32) + 24] =$

$[3 + 320 + 24] = 347$

e

$[3 - (9 + 4 + 0 + 0 + 3 + 7 + 9) - 10\ (6 + 4 + 2 + 6 + 3 + 3)] =$

[3 - (32) - 240] =

[- 29 - 240] = - 269

Como 347 e (-269) não são divisíveis por 11, então o número 93733602044693 também não é divisível por 11.

3) Seja o número 273479729083, verifique se o mesmo é divisível por 11:

O algarismo da unidade é 3

Os algarismos da ordem par são 8, 9, 7, 7, 3, 2

Os algarismos da ordem ímpar são 0, 2, 9, 4, 7

Logo

[3 + 10 (8 + 9 + 7 + 7 + 3 + 2) + (0 + 2 + 9 + 4 + 7)] =

[3 + 10 (36) + 22] =

[3 + 360 + 22] = 385

e

[3 - (8 + 9 + 7 + 7 + 3 + 2) - 10 (0 + 2 + 9 + 4 + 7)] =

[3 - 36 - 220] =

[- 33 - 220] = - 253

Como 385, (11 x 35) é divisível por 11, ou ainda, - 253, (11 x (-23)) é divisível por 11, temos que o número273479729083, (11 x 24861793553) também é divisível por 11.

Convém ressaltar que os critérios de divisibilidade a partir do critério de divisibilidade por 11 não se encontra nos livros didáticos estudados.

Estes critérios foram estudados por mera curiosidade.

11. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 13

Seja o número $(a_n\, a_{n-1}\, ...\, a_2\, a_1\, a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod{13}$

$10^1 \equiv 10 \pmod{13}$ ou $10^1 \equiv -3 \pmod{13}$

$10^2 \equiv 9 \pmod{13}$ ou $10^2 \equiv -4 \pmod{13}$

$10^3 \equiv 12 \pmod{13}$ ou $10^3 \equiv -1 \pmod{13}$

$10^4 \equiv 3 \pmod{13}$ ou $10^4 \equiv -10 \pmod{13}$

$10^5 \equiv 4 \pmod{13}$ ou $10^5 \equiv -9 \pmod{13}$

$10^6 \equiv 1 \pmod{13}$ ou $10^6 \equiv -12 \pmod{13}$

$10^7 \equiv 10 \pmod{13}$ ou $10^7 \equiv -3 \pmod{13}$

$10^8 \equiv 9 \pmod{13}$ ou $10^8 \equiv -4 \pmod{13}$

$10^9 \equiv 2 \pmod{13}$ ou $10^9 \equiv -1 \pmod{13}$

$10^{10} \equiv 3 \pmod{13}$ ou $10^{10} \equiv -10 \pmod{13}$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod{13}$

$a_1.10^1 \equiv 10\ a_1 \pmod{13}$ ou $a_1\, 10^1 \equiv -3\ a_1 \pmod{13}$

$a_2.10^2 \equiv 9\ a_2 \pmod{13}$ ou $a_2.10^2 \equiv -4\ a_2 \pmod{13}$

$a_3.10^3 \equiv 12\ a_3 \pmod{13}$ ou $a_3\, 10^3 \equiv -1\ a_3 \pmod{13}$

$a_4.10^4 \equiv 3\ a_4 \pmod{13}$ ou $a_4.10^4 \equiv -10\ a_4 \pmod{13}$

$a_5.10^5 \equiv 4\ a_5 \pmod{13}$ ou $a_5.10^5 \equiv -9\ a_5 \pmod{13}$

$a_6.10^6 \equiv 1\ a_6 \pmod{13}$ ou $a_6.10^6 \equiv -12\ a_6 \pmod{13}$

$a_7.10^7 \equiv 10\ a_7 \pmod{13}$ ou $a_7.10^7 \equiv -3\ a_7 \pmod{13}$

$a_8.10^8 \equiv 9\ a_8 \pmod{13}$ ou $a_8.10^8 \equiv -4\ a_8 \pmod{13}$

$a_9.10^9 \equiv 12\ a_9 \pmod{13}$ ou $a_9.10^9 \equiv -1\ a_9 \pmod{13}$

$a_{10}.10^{10} \equiv 3\, a_{10} \pmod{13}$ ou $a_{10}.10^{10} \equiv -10\, a_{10} \pmod{13}$

e assim por diante, ou seja:

Assim $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_{10}$ é divisível por 13 se, e só se:

- $(a_0 + 10\, a_1 + 9\, a_2) - (a_3 + 10\, a_4 + 9\, a_5) + (a_6 + 10\, a_7 + 9\, a_8) - \ldots +$ o for ou

- $(a_0 + 10\, a_1 + 9\, a_2 + 12\, a_3 + 3\, a_4 + 4\, a_5) + (a_6 + 10\, a_7 + 9\, a_8 + 12\, a_9 + 3\, a_{10} + 4\, a_{11}) + \ldots +$ o for

Exemplos:

1) Seja o número 1243853, verifique se o mesmo é divisível por 13:

onde:

$a_0 = 3$

$a_1 = 5$

$a_2 = 8$

$a_3 = 3$

$a_4 = 4$

$a_5 = 2$

$a_6 = 1$

usando a primeira parte do critério definido acima, obtemos:

$(3 + 10 \times 5 + 9 \times 8) - (3 + 10 \times 4 + 9 \times 2) + 1 =$

$(3 + 50 + 72) - (3 + 40 + 18) + 1 =$

$125 - 61 + 1 =$

$64 + 1 = 65$

Como 65, (13 x 5) é divisível por 13, então o número 1243853, (13 x 95681) também é divisível por 13.

agora usando a segunda parte do critério definido acima, obtemos:

(3 + 10 x 5 + 9 x 8 + 12 x 3 + 3 x 4 + 4 x 2) + 1 =
(3 + 50 + 72 + 36 + 12 + 8) + 1 =
181 + 1 = 182

Como 182, (13 x 14) é divisível por 13, então o número 1243853, (13 x 95681) também é divisível por 13.

2) Seja o número 273479729083, verifique se o mesmo é divisível por 13:

Onde

$a_0 = 3$

$a_1 = 8$

$a_2 = 0$

$a_3 = 9$

$a_4 = 2$

$a_5 = 7$

$a_6 = 9$

$a_7 = 7$

$a_8 = 4$

$a_9 = 3$

$a_{10} = 7$

$a_{11} = 2$

Usando a primeira parte do critério, obtemos:

(3 + 10 x 8 + 9 x 0) - (9 + 10 x 2 + 9 x 7) + (9 + 10 x 7 + 9 x 4) - (3 + 10 x 7 + 9 x 2) =

$(3 + 80 + 0) - (9 + 20 + 63) + (9 + 70 + 36) - (3 + 70 + 18) =$

$83 - 92 + 115 - 55 =$

$- 9 + 115 - 91 =$

$106 - 91 = 15$

Como 15 não é divisível por 13, então o número 273479729083 também não é divisível por 13.

usando a segunda parte do critério, obtemos:

$(3 + 10 \times 8 + 9 \times 0 + 12 \times 9 + 3 \times 2 + 4 \times 7) + (9 + 10 \times 7 + 9 \times 4 + 12 \times 3 + 3 \times 7 + 4 \times 2)=$

$(3 + 80 + 0 + 108 + 6 + 28) + (9 + 70 + 36 + 36 + 21 + 8) =$

$225 + 180 = 405$

Como 405 não é divisível por 13, então o número 273479729083 também não é divisível por 13.

3) Seja o número 7386847, verifique se o mesmo é divisível por 13:

Onde:

$a_0 = 7$

$a_1 = 4$

$a_2 = 8$

$a_3 = 6$

$a_4 = 8$

$a_5 = 3$

$a_6 = 7$

usando a primeira parte do critério, obtemos:

$(7 + 10 \times 4 + 9 \times 8) - (6 + 10 \times 8 + 9 \times 3) + 7 =$

$(7 + 40 + 72) - (6 + 80 + 27) + 7 =$

119 - 113 + 7 =

6 + 7 = 13

Como 13, (13 x 1) é divisível por 13, então o número 7386847, (13 x 568219) também é divisível por 13.

usando a segunda parte do critério, obtemos:

(7 + 10 x 4 + 9 x 8 + 12 x 6 + 3 x 8 + 4 x 3) + 7 =

(7 + 40 + 72 + 72 + 24 + 12) + 7 =

227 + 7 = 234

Como 234, (13 x 18) é divisível por 13, então o número 7386847, (13 x 568219) também é divisível por 13.

Nota-se que se uma parte do critério de divisibilidade fornecer resultado não divisível obrigatoriamente a segunda parte do critério de divisibilidade também o fará. Ocorrendo também o mesmo procedimento no caso de o critério de divisibilidade fornecer resultado divisível.

12. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 14

Seja o número $(a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod{14}$

$10^1 \equiv 10 \pmod{14}$ ou $10^1 \equiv -4 \pmod{14}$

$10^2 \equiv 2 \pmod{14}$ ou $10^2 \equiv -12 \pmod{14}$

$10^3 \equiv 6 \pmod{14}$ ou $10^3 \equiv -8 \pmod{14}$

$10^4 \equiv 4 \pmod{14}$ ou $10^4 \equiv -10 \pmod{14}$

$10^5 \equiv 12 \pmod{14}$ ou $10^5 \equiv -2 \pmod{14}$

$10^6 \equiv 8 \pmod{14}$ ou $10^6 \equiv -6 \pmod{14}$

$10^7 \equiv 10 \pmod{14}$ ou $10^7 \equiv -4 \pmod{14}$

$10^8 \equiv 2 \pmod{14}$ ou $10^8 \equiv -12 \pmod{14}$

$10^9 \equiv 6 \pmod{14}$ ou $10^9 \equiv -8 \pmod{14}$

$10^{10} \equiv 4 \pmod{14}$ ou $10^{10} \equiv -10 \pmod{14}$

e assim por diante, ou seja

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod{14}$

$a_1.10^1 \equiv 10\ a_1 \pmod{14}$ ou $a_1.10^1 \equiv -4\ a_1 \pmod{14}$

$a_2.10^2 \equiv 2\ a_2 \pmod{14}$ ou $a_2.10^2 \equiv -2\ a_2 \pmod{14}$

$a_3.10^3 \equiv 6\ a_3 \pmod{14}$ ou $a_3.10^3 \equiv -8\ a_3 \pmod{14}$

$a_4.10^4 \equiv 4\ a_4 \pmod{14}$ ou $a_4.10^4 \equiv -10\ a_4 \pmod{14}$

$a_5.10^5 \equiv 12\ a_5 \pmod{14}$ ou $a_5.10^5 \equiv -2\ a_5 \pmod{14}$

$a_6.10^6 \equiv 8\ a_6 \pmod{14}$ ou $a_6.10^6 \equiv -6\ a_6 \pmod{14}$

$a_7.10^7 \equiv 10\ a_7 \pmod{14}$ ou $a_7.10^7 \equiv -4\ a_7 \pmod{14}$

$a_8.10^8 \equiv 2\ a_8 \pmod{14}$ ou $a_8.10^8 \equiv -12\ a_8 \pmod{14}$

$a_9.10^9 \equiv 6\ a_9 \pmod{14}$ ou $a_9.10^9 \equiv -8\ a_9 \pmod{14}$

$a_{10}.10^{10} \equiv 4\ a_{10}$ (mod 14) ou $a_{10}.10^{10} \equiv -10\ a_{10}$ (mod 14)

Assim $(a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 14 se, e só se, $a_0 + (10\ a_1 + 2\ a_2 + 6\ a_3) - (10\ a_4 + 2\ a_5 + 6\ a_6) + (10\ a_7 + 2\ a_8 + 6\ a_9)$ ... o for

Exemplos:

1) Seja o número 83808606, verifique se o mesmo é divisível por 14:

Onde:

$a_0 = 6$

$a_1 = 0$

$a_2 = 6$

$a_3 = 8$

$a_4 = 0$

$a_5 = 8$

$a_6 = 3$

$a_7 = 8$

usando o critério temos:

$[6 + (10 \times 0 + 2 \times 6 + 6 \times 8) - (10 \times 0 + 2 \times 8 + 6 \times 3) + (10 \times 8)] =$

$[6 + (0 + 12 + 48) - (0 + 16 + 18) + 80] =$

$[6 + 60 - 34 + 80] =$

$[66 - 34 + 80] =$

$[32 + 80] = 112$

Como 112, (14 x 8) é divisível por 14, temos que o número 83808606, (14 x 5986329) também é divisível por 14.

2) Seja o número 273479729083, verifique se o mesmo é divisível por 14:

Onde:

$a_0 = 3$

$a_1 = 8$

$a_2 = 0$

$a_3 = 9$

$a_4 = 2$

$a_5 = 7$

$a_6 = 9$

$a_7 = 7$

$a_8 = 4$

$a_9 = 3$

$a_{10} = 7$

$a_{11} = 2$

Usando o critério obtemos:

[3 + (10 x 8 + 2 x 0 + 6 x 9) - (10 x 2 + 2 x 7 + 6 x 9) + (10 x 7 + 2 x 4 + 6 x 3) - (10 x 7 + 2 x 2)] =

[3 + (80 + 0 + 54) - (20 + 14 + 54) + (70 + 8 + 18) - (70 + 4)] =

[3 + 134 - 88 + 96 - 74] =

[137 - 88 + 96 - 74] =

[49 + 96 - 74] =

[145 - 74] = 71

Como 71 não é divisível por 14, então o número 273479729083 também não é divisível por 14.

3) Seja o número 1105574901928, verifique se o mesmo é divisível por 14:

Onde:

$a_0 = 8$

$a_1 = 2$

$a_2 = 9$

$a_3 = 1$

$a_4 = 0$

$a_5 = 9$

$a_6 = 4$

$a_7 = 7$

$a_8 = 5$

$a_9 = 5$

$a_{10} = 0$

$a_{11} = 1$

$a_{12} = 1$

Usando o critério obtemos:

[8 + (10 x 2 + 2 x 9 + 6 x 1) - (10 x 0 + 2 x 9 + 6 x 4) + (10 x 7 + 2 x 5 + 6 x 5) - (10 x 0 + 2 x 1 + 6 x 1)] =

[8 + (20 + 18 + 6) - (0 + 18 + 24) + (70 + 10 + 30) - (0 + 2 + 6)] =

[8 + 44 - 42 + 110 - 8] =

[52 - 42 + 110 - 8] =

[10 + 110 - 8]=

[120 - 8] = 112

Como 112, (14 x 8) é divisível por 14, então o número 1105574901928, (14 x 78969635852) também é divisível por 14.

13. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 16

Seja o número $(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod{16}$

$10^1 \equiv 10 \pmod{16}$ ou $10^1 \equiv -6 \pmod{16}$

$10^2 \equiv 4 \pmod{16}$ ou $10^2 \equiv -12 \pmod{16}$

$10^3 \equiv 8 \pmod{16}$ ou $10^3 \equiv -8 \pmod{16}$

$10^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $10^4 \equiv 0 \pmod{16}$

$10^5 \equiv 0 \pmod{16}$ ou $10^5 \equiv 0 \pmod{16}$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod{16}$

$a_1.10^1 \equiv 10\ a_1 \pmod{16}$ ou $a_1.10^1 \equiv -6\ a_1 \pmod{16}$

$a_2.10^2 \equiv 4\ a_2 \pmod{16}$ ou $a_2.10^2 \equiv -12\ a_2 \pmod{16}$

$a_3.10^3 \equiv 8\ a_3 \pmod{16}$ ou $a_3.10^3 \equiv -8\ a_3 \pmod{16}$

$a_4.10^4 \equiv 0\ a_4 \pmod{16}$ ou $a_4.10^4 \equiv 0\ a_4 \pmod{16}$

$a_5.10^5 \equiv 0\ a_5 \pmod{16}$ ou $a_5.10^5 \equiv 0\ a_5 \pmod{16}$

Assim $(a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 16 se, e só se, $(a_0 + 10\ a_1 + 4\ a_2 + 8\ a_3)$ o for

Exemplos:

1) Seja o número 25542112, verifique se o mesmo é divisível por 16:

Onde:

$a_0 = 2$

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2$

$a_4 = 4$

$a_5 = 5$

$a_6 = 5$

$a_7 = 2$

Usando o critério temos:

$2 + 10 \times 1 + 4 \times 1 + 8 \times 2 =$

$2 + 10 + 4 + 16 = 32$

Como 32, (16 x 2) é divisível por 16, então o número 25542112, (16 x 1596382) também é divisível por 16.

2) Seja o número 121550477045, verifique se o mesmo é divisível por 16:

Onde:

$a_0 = 5$

$a_1 = 4$

$a_2 = 0$

$a_3 = 7$

$a_4 = 7$

$a_5 = 4$

$a_6 = 0$

$a_7 = 5$

$a_8 = 5$

$a_9 = 1$

$a_{10} = 2$

$a_{11} = 1$

Usando o critério, obtemos:

$5 + 10 \times 4 + 4 \times 0 + 8 \times 7 =$

$5 + 40 + 0 + 56 = 101$

Como 101 não é divisível por 16, então o número121550477045 também não é divisível por 16.

3) Seja o número 2553997968, verifique se o mesmo é divisível por 16:

Onde:

$a_0 = 8$

$a_1 = 6$

$a_2 = 9$

$a_3 = 7$

$a_4 = 9$

$a_5 = 9$

$a_6 = 3$

$a_7 = 5$

$a_8 = 5$

$a_9 = 2$

Usando o critério, obtemos:

$8 + 10 \times 6 + 4 \times 9 + 8 \times 7 =$

$8 + 60 + 36 + 56 = 160$

Como 160, (16 x 10) é divisível por 16, então o número 2553997968, (16 x 159624873) também é divisível por 16.

14. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 17

Seja o número $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod{17}$

$10^1 \equiv 10 \pmod{17}$ ou $10^1 \equiv -7 \pmod{17}$

$10^2 \equiv 15 \pmod{17}$ ou $10^2 \equiv -2 \pmod{17}$

$10^3 \equiv 14 \pmod{17}$ ou $10^3 \equiv -3 \pmod{17}$

$10^4 \equiv 4 \pmod{17}$ ou $10^4 \equiv -13 \pmod{17}$

$10^5 \equiv 6 \pmod{17}$ ou $10^5 \equiv -11 \pmod{17}$

$10^6 \equiv 9 \pmod{17}$ ou $10^6 \equiv -8 \pmod{17}$

$10^7 \equiv 5 \pmod{17}$ ou $10^7 \equiv -12 \pmod{17}$

$10^8 \equiv 16 \pmod{17}$ ou $10^8 \equiv -1 \pmod{17}$

$10^9 \equiv 7 \pmod{17}$ ou $10^9 \equiv -10 \pmod{17}$

$10^{10} \equiv 2 \pmod{17}$ ou $10^{10} \equiv -15 \pmod{17}$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.\ 10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod{17}$

$a_1.\ 10^1 \equiv 10\, a_1 \pmod{17}$ ou $a_1.\ 10^1 \equiv -7\ a_1 \pmod{17}$

$a_2.\ 10^2 \equiv 15\, a_2 \pmod{17}$ ou $a_2.\ 10^2 \equiv -2\ a_2 \pmod{17}$

$a_3.\ 10^3 \equiv 14\, a_3 \pmod{17}$ ou $a_3.\ 10^3 \equiv -3\ a_3 \pmod{17}$

$a_4.\ 10^4 \equiv 4\, a_4 \pmod{17}$ ou $a_4.\ 10^4 \equiv -13\ a_4 \pmod{17}$

$a_5.\ 10^5 \equiv 6\, a_5 \pmod{17}$ ou $a_5.\ 10^5 \equiv -11\ a_5 \pmod{17}$

$a_6.\ 10^6 \equiv 9\, a_6 \pmod{17}$ ou $a_6.\ 10^6 \equiv -8\ a_6 \pmod{17}$

$a_7.\ 10^7 \equiv 5\, a_7 \pmod{17}$ ou $a_7.\ 10^7 \equiv -12\ a_7 \pmod{17}$

$a_8.\ 10^8 \equiv 16\, a_8 \pmod{17}$ ou $a_8.\ 10^8 \equiv -1\ a_8 \pmod{17}$

$a_9.\ 10^9 \equiv 7\, a_9 \pmod{17}$ ou $a_9.\ 10^9 \equiv -10\ a_9 \pmod{17}$

$a_{10}.10^{10} \equiv 2\ a_{10}\ (\text{mod } 17)$ ou $a_{10}.10^{10} \equiv -15\ a_{10}\ (\text{mod } 17)$

Assim $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 17 se, e só se, $(a_0 + 10\ a_1 + 15\ a_2 + 14\ a_3 + 4\ a_4 + 6\ a_5 + 9\ a_6 + 5\ a_7) - (a_8 + 10\ a_9 + 15\ a_{10} + 14\ a_{11} + 4\ a_{12} + 6\ a_{13} + 9\ a_{14} + 5\ a_{15}) + \ldots$ o for.

Exemplos:

1) Seja o número 16774808157493, verifique se o mesmo é divisível por 17:

Onde:

$a_0 = 3$

$a_1 = 9$

$a_2 = 4$

$a_3 = 7$

$a_4 = 5$

$a_5 = 1$

$a_6 = 8$

$a_7 = 0$

$a_8 = 8$

$a_9 = 4$

$a_{10} = 7$

$a_{11} = 7$

$a_{12} = 6$

$a_{13} = 1$

usando o método, obtemos:

$(3 + 10 \text{ x } 9 + 15 \text{ x } 4 + 14 \text{ x } 7 + 4 \text{ x } 5 + 6 \text{ x } 1 + 9 \text{ x } 8 + 5 \text{ x } 0) - (8 + 10 \text{ x } 4 + 15 \text{ x } 7 + 14 \text{ x } 7 + 4 \text{ x } 6 + 6 \text{ x } 1) =$

$(3 + 90 + 60 + 98 + 20 + 6 + 72 + 0) - (8 + 40 + 105 + 98 + 24 + 6) =$

$349 - 281 = 68$

Como 68, (17 x 4) é divisível por 17, então o número 16774808157493, (17 x 986753421029) também é divisível por 17.

2) Seja o número 121550477045, verifique se o mesmo é divisível por 17:

Onde:

$a_0 = 5$

$a_1 = 4$

$a_2 = 0$

$a_3 = 7$

$a_4 = 7$

$a_5 = 4$

$a_6 = 0$

$a_7 = 5$

$a_8 = 5$

$a_9 = 1$

$a_{10} = 2$

$a_{11} = 1$

usando o critério, obtemos:

$(5 + 10 \times 4 + 15 \times 0 + 14 \times 7 + 4 \times 7 + 6 \times 4 + 9 \times 0 + 5 \times 5) - (5 + 10 \times 1 + 15 \times 2 + 14 \times 1)$

$=$

$(5 + 40 + 0 + 98 + 28 + 24 + 0 + 25) - (5 + 10 + 30 + 14) =$

$220 - 59 = 161$

Como 161 não é divisível por 17, então o número 121550477045 também não é divisível por 17.

3) Seja o número 1140686954709524, verifique se o mesmo é divisível por 17:

Onde:

$a_0 = 4$

$a_1 = 2$

$a_2 = 5$

$a_3 = 9$

$a_4 = 0$

$a_5 = 7$

$a_6 = 4$

$a_7 = 5$

$a_8 = 9$

$a_9 = 6$

$a_{10} = 8$

$a_{11} = 6$

$a_{12} = 0$

$a_{13} = 4$

$a_{14} = 1$

$a_{15} = 1$

usando o critério, obtemos:

(4 + 10 x 2 + 15 x 5 + 14 x 9 + 4 x 0 + 6 x 7 + 9 x 4 + 5 x 5) - (9 + 10 x 6 + 15 x 8 + 14 x 6 + 4 x 0 + 6 x 4 + 9 x 1 + 5 x 1) =
(4 + 20 + 75 + 126 + 0 + 42 + 36 + 25) - (9 + 60 + 120 + 84 + 0 + 24 + 9 + 5) =
328 - 311 = 17

Como 17, (17 x 1) é divisível por 17, então o número 1140686954709524, (17 x 67099232629972) também é divisível por 17.

15. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 19

Seja o número $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod{19}$

$10^1 \equiv 10 \pmod{19}$ ou $10^1 \equiv -9 \pmod{19}$

$10^2 \equiv 5 \pmod{19}$ ou $10^2 \equiv -14 \pmod{19}$

$10^3 \equiv 12 \pmod{19}$ ou $10^3 \equiv -7 \pmod{19}$

$10^4 \equiv 6 \pmod{19}$ ou $10^4 \equiv -13 \pmod{19}$

$10^5 \equiv 3 \pmod{19}$ ou $10^5 \equiv -16 \pmod{19}$

$10^6 \equiv 11 \pmod{19}$ ou $10^6 \equiv -8 \pmod{19}$

$10^7 \equiv 15 \pmod{19}$ ou $10^7 \equiv -4 \pmod{19}$

$10^8 \equiv 17 \pmod{19}$ ou $10^8 \equiv -2 \pmod{19}$

$10^9 \equiv 18 \pmod{19}$ ou $10^9 \equiv -1 \pmod{19}$

$10^{10} \equiv 9 \pmod{19}$ ou $10^{10} \equiv -10 \pmod{19}$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.\ 10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod{19}$

$a_1.\ 10^1 \equiv 10\, a_1 \pmod{19}$ ou $a_1\ 10^1 \equiv -9\ a_1 \pmod{19}$

$a_2.\ 10^2 \equiv 5\, a_2 \pmod{19}$ ou $a_2\ 10^2 \equiv -14\ a_2 \pmod{19}$

$a_3.\ 10^3 \equiv 12\, a_3 \pmod{19}$ ou $a_3\ 10^3 \equiv -7\ a_3 \pmod{19}$

$a_4.\ 10^4 \equiv 6\, a_4 \pmod{19}$ ou $a_4\ 10^4 \equiv -13\ a_4 \pmod{19}$

$a_5.\ 10^5 \equiv 3\, a_5 \pmod{19}$ ou $a_5\ 10^5 \equiv -16\ a_5 \pmod{19}$

$a_6.\ 10^6 \equiv 11\, a_6 \pmod{19}$ ou $a_6\ 10^6 \equiv -8\ a_6 \pmod{19}$

$a_7.\ 10^7 \equiv 15\, a_7 \pmod{19}$ ou $a_7\ 10^7 \equiv -4\ a_7 \pmod{19}$

$a_8.\ 10^8 \equiv 17\, a_8 \pmod{19}$ ou $a_8\ 10^8 \equiv -2\ a_8 \pmod{19}$

$a_9.\ 10^9 \equiv 18\, a_9 \pmod{19}$ ou $a_9\ 10^9 \equiv -1\ a_9 \pmod{19}$

$a_{10}.10^{10} \equiv 9\, a_{10} \pmod{19}$ ou $a_{10}.10^{10} \equiv -10\, a_{10} \pmod{19}$

Assim $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_{10}$ é divisível por 19 se, e só se, $(a_0 + 10\, a_1 + 5\, a_2 + 12\, a_3 + 6\, a_4 + 3\, a_5 + 11\, a_6 + 15\, a_7 + 17\, a_8) - (a_9 + 10\, a_{10} + 5\, a_{11} + 12\, a_{12} + 6\, a_{13} + 3\, a_{14} + 11\, a_{15} + 15\, a_{16} + 17\, a_{17}) + \ldots$ o for

Exemplos:

1) Seja o número 298218157842, verifique se o mesmo é divisível por 19:

Onde:

$a_0 = 2$

$a_1 = 4$

$a_2 = 8$

$a_3 = 7$

$a_4 = 5$

$a_5 = 1$

$a_6 = 8$

$a_7 = 1$

$a_8 = 2$

$a_9 = 8$

$a_{10} = 9$

$a_{11} = 2$

usando o método obtemos:

$(2 + 10 \times 4 + 5 \times 8 + 12 \times 7 + 6 \times 5 + 3 \times 1 + 11 \times 8 + 15 \times 1 + 17 \times 2) - (8 + 10 \times 9 + 5 \times 2)$

$=$

$(2 + 40 + 40 + 84 + 30 + 3 + 88 + 15 + 34) - (8 + 90 + 10) =$

$336 - 108 = 228$

Como 228, (19 x 12) é divisível por 19, então o número 298218157842, (19 x 15695692518) também é divisível por 19.

2) Seja o número 1140686954709524, verifique se o mesmo é divisível por 19:

Onde:

$a_0 = 4$

$a_1 = 2$

$a_2 = 5$

$a_3 = 9$

$a_4 = 0$

$a_5 = 7$

$a_6 = 4$

$a_7 = 5$

$a_8 = 9$

$a_9 = 6$

$a_{10} = 8$

$a_{11} = 6$

$a_{12} = 0$

$a_{13} = 4$

$a_{14} = 1$

$a_{15} = 1$

usando o critério, obtemos:

(4 + 10 x 2 + 5 x 5 + 12 x 9 + 6 x 0 + 3 x 7 + 11 x 4 + 15 x 5 + 17 x 9) - (6 + 10 x 8 + 5 x 6 + 12 x 0 + 6 x 4 + 3 x 1 + 11 x 1) =

(4 + 20 + 25 + 108 + 0 + 21 + 44 + 75 + 153) - (6 + 80 + 0 + 24 + 3 + 11) =

450 - 124 = 326

Como 326 não é divisível por 19, então o número1140686954709524 também não é divisível por 19.

3) Seja o número 30240259903266927, verifique se o mesmo é divisível por 19:

Onde:

$a_0 = 7$

$a_1 = 2$

$a_2 = 9$

$a_3 = 6$

$a_4 = 6$

$a_5 = 2$

$a_6 = 3$

$a_7 = 0$

$a_8 = 9$

$a_9 = 9$

$a_{10} = 5$

$a_{11} = 2$

$a_{12} = 0$

$a_{13} = 4$

$a_{14} = 2$

$a_{15} = 0$

$a_{16} = 3$

usando o critério, obtemos:

(7 + 10 x 2 + 5 x 9 + 12 x 6 + 6 x 6 + 3 x 2 + 11 x 3 + 15 x 0 + 17 x 9) - (9 + 10 x 5 + 5 x 2 + 12 x 0 + 6 x 4 + 3 x 2 + 11 x 0 + 15 x 3) =

(7 + 20 + 45 + 72 + 36 + 6 + 33 + 0 + 153) - (9 + 50 + 10 + 0 + 24 + 6 + 0 + 45) =

372 - 144 = 228

Como 228, (19 x 12) é divisível por 19, então o número 30240259903266927, (19 x 1591592626487733) também é divisível por 19.

16. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 23

Seja o número $(a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod{23}$

$10^1 \equiv 10 \pmod{23}$ ou $10^1 \equiv -13 \pmod{23}$

$10^2 \equiv 8 \pmod{23}$ ou $10^2 \equiv -15 \pmod{23}$

$10^3 \equiv 11 \pmod{23}$ ou $10^3 \equiv -12 \pmod{23}$

$10^4 \equiv 18 \pmod{23}$ ou $10^4 \equiv -5 \pmod{23}$

$10^5 \equiv 19 \pmod{23}$ ou $10^5 \equiv -4 \pmod{23}$

$10^6 \equiv 6 \pmod{23}$ ou $10^6 \equiv -17 \pmod{23}$

$10^7 \equiv 14 \pmod{23}$ ou $10^7 \equiv -9 \pmod{23}$

$10^8 \equiv 2 \pmod{23}$ ou $10^8 \equiv -21 \pmod{23}$

$10^9 \equiv 20 \pmod{23}$ ou $10^9 \equiv -3 \pmod{23}$

$10^{10} \equiv 16 \pmod{23}$ ou $10^{10} \equiv -7 \pmod{23}$

$10^{11} \equiv 22 \pmod{23}$ ou $10^{11} \equiv -1 \pmod{23}$

$10^{12} \equiv 13 \pmod{23}$ ou $10^{12} \equiv -10 \pmod{23}$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.\ 10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod{23}$

$a_1.\ 10^1 \equiv 10\ a_1 \pmod{23}$ ou $a_1.\ 10^1 \equiv -13\ a_1 \pmod{23}$

$a_2.\ 10^2 \equiv 8\ a_2 \pmod{23}$ ou $a_2.\ 10^2 \equiv -15\ a_2 \pmod{23}$

$a_3.\ 10^3 \equiv 11\ a_3 \pmod{23}$ ou $a_3.\ 10^3 \equiv -12\ a_3 \pmod{23}$

$a_4.\ 10^4 \equiv 18\ a_4 \pmod{23}$ ou $a_4.\ 10^4 \equiv -5\ a_4 \pmod{23}$

$a_5.\ 10^5 \equiv 19\ a_5 \pmod{23}$ ou $a_5.\ 10^5 \equiv -4\ a_5 \pmod{23}$

$a_6.\ 10^6 \equiv 6\ a_6 \pmod{23}$ ou $a_6.\ 10^6 \equiv -17\ a_6 \pmod{23}$

$a_7.\ 10^7 \equiv 14\ a_7 \pmod{23}$ ou $a_7.\ 10^7 \equiv -9\ a_7 \pmod{23}$

$a_8.\ 10^8 \equiv 2\ a_8\ (\mathrm{mod}\ 23)$ ou $a_8.\ 10^8 \equiv -21\ a_8\ (\mathrm{mod}\ 23)$

$a_9.\ 10^9 \equiv 20\ a_9\ (\mathrm{mod}\ 23)$ ou $a_9.\ 10^9 \equiv -3\ a_9\ (\mathrm{mod}\ 23)$

$a_{10}.10^{10} \equiv 16\ a_{10}\ (\mathrm{mod}\ 23)$ ou $a_{10}.10^{10} \equiv -7\ a_{10}\ (\mathrm{mod}\ 23)$

Assim $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 23 se, e só se, $(a_0 + 10\ a_1 + 8\ a_2 + 11\ a_3 + 18\ a_4 + 19\ a_5 + 6\ a_6 + 14\ a_7 + 2\ a_8 + 20\ a_9 + 16\ a_{10}) - (a_{11} + 10\ a_{12} + 8\ a_{13} + 11\ a_{14} + 18\ a_{15} + 19\ a_{16} + 6\ a_{17} + 14\ a_{18} + 2\ a_{19} + 20\ a_{20} + 16\ a_{21}) + \ldots$ o for.

Exemplos:

1) Seja o número 137270060850631711, verifique se o mesmo é divisível por 23:

Onde:

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

$a_2 = 7$

$a_3 = 1$

$a_4 = 3$

$a_5 = 6$

$a_6 = 0$

$a_7 = 5$

$a_8 = 8$

$a_9 = 0$

$a_{10} = 6$

$a_{11} = 0$

$a_{12} = 0$

$a_{13} = 7$

$a_{14} = 2$

$a_{15} = 7$

$a_{16} = 3$

$a_{17} = 1$

usando o método obtemos:

(1 + 10 x 1 + 8 x 7 + 11 x 1 + 18 x 3 + 19 x 6 + 6 x 0 + 14 x 5 + 2 x 8 + 20 x 0 + 16 x 6) - (0 + 10 x 0 + 8 x 7 + 11 x 2 + 18 x 7 + 19 x 3 + 6 x 1) =

(1 + 10 + 56 +11 + 54 + 114 + 70 + 16 + 96) - (56 + 22 + 126 + 57 + 6) =

428 - 267 = 161

Como 161, (23 x 7) é divisível por 23, então o número 137270060850631711, (11 x 5968263515244857) também é divisível por 23.

2) Seja o número 30240259903266927, verifique se o mesmo é divisível por 23:

Onde:

$a_0 = 7$

$a_1 = 2$

$a_2 = 9$

$a_3 = 6$

$a_4 = 6$

$a_5 = 2$

$a_6 = 3$

$a_7 = 0$

$a_8 = 9$

$a_9 = 9$

$a_{10} = 5$

$a_{11} = 2$

$a_{12} = 0$

$a_{13} = 4$

$a_{14} = 2$

$a_{15} = 0$

$a_{16} = 3$

usando o método, obtemos:

(7 + 10 x 2 + 8 x 9 + 11 x 6 + 18 x 6 + 19 x 2 + 6 x 3 + 14 x 0 + 2 x 9 + 20 x 9 + 16 x 5) -

(2 + 10 x 0 + 8 x 4 + 11 x 2 + 18 x 0 + 19 x 3) =

(7 + 20 + 72 + 66 + 108 + 38 + 18 + 0 + 18 + 180 + 80) - (2 + 0 + 32 + 22 + 0 + 57) =

(27 + 72 + 66 + 108 + 38 + 18 + 18 + 180 + 80) - (34 + 22 + 57) =

607 - 113 = 494

Como 494 não é divisível por 23, então o número 30240259903266927 também não é divisível por 23.

3) Seja o número 22974181248025640853, verifique se o número é divisível por 23:

Onde:

$a_0 = 3$

$a_1 = 5$

$a_2 = 8$

$a_3 = 0$

$a_4 = 4$

$a_5 = 6$

$a_6 = 5$

$a_7 = 2$

$a_8 = 0$

$a_9 = 8$

$a_{10} = 4$

$a_{11} = 2$

$a_{12} = 1$

$a_{13} = 8$

$a_{14} = 1$

$a_{15} = 4$

$a_{16} = 7$

$a_{17} = 9$

$a_{18} = 2$

$a_{19} = 2$

usando o critério, obtemos:

(3 + 10 x 5 + 8 x 8 + 11 x 0 + 18 x 4 + 19 x 6 + 6 x 5 + 14 x 2 + 2 x 0 + 20 x 8 + 16 x 4) - (2 + 10 x 1 + 8 x 8 + 11 x 1 + 18 x 4 + 19 x 7 + 6 x 9 + 14 x 2 + 2 x 2) =
(3 + 50 + 64 + 0 + 72 + 114 + 30 + 28 + 0 + 160 + 64) - (2 + 10 + 64 + 11 + 72 + 133 + 54 + 28 + 4) =
585 - 378 = 207

Como 207, (23 x 9) é divisível por 23, então o número 22974181248025640853, (23 x 998877445566332211) também é divisível por 23.

17. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 29

Seja o número $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod{29}$

$10^1 \equiv 10 \pmod{29}$ ou $10^1 \equiv -19 \pmod{29}$

$10^2 \equiv 13 \pmod{29}$ ou $10^2 \equiv -16 \pmod{29}$

$10^3 \equiv 14 \pmod{29}$ ou $10^3 \equiv -15 \pmod{29}$

$10^4 \equiv 24 \pmod{29}$ ou $10^4 \equiv -5 \pmod{29}$

$10^5 \equiv 8 \pmod{29}$ ou $10^5 \equiv -21 \pmod{29}$

$10^6 \equiv 22 \pmod{29}$ ou $10^6 \equiv -7 \pmod{29}$

$10^7 \equiv 17 \pmod{29}$ ou $10^7 \equiv -12 \pmod{29}$

$10^8 \equiv 25 \pmod{29}$ ou $10^8 \equiv -4 \pmod{29}$

$10^9 \equiv 18 \pmod{29}$ ou $10^9 \equiv -11 \pmod{29}$

$10^{10} \equiv 6 \pmod{29}$ ou $10^{10} \equiv -23 \pmod{29}$

$10^{11} \equiv 2 \pmod{29}$ ou $10^{11} \equiv -27 \pmod{29}$

$10^{12} \equiv 20 \pmod{29}$ ou $10^{12} \equiv -9 \pmod{29}$

$10^{13} \equiv 26 \pmod{29}$ ou $10^{13} \equiv -3 \pmod{29}$

$10^{14} \equiv 28 \pmod{29}$ ou $10^{14} \equiv -1 \pmod{29}$

$10^{15} \equiv 19 \pmod{29}$ ou $10^{15} \equiv -10 \pmod{29}$

e assim por diante, ou seja:

$a_0\ 10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod{29}$

$a_1\ 10^1 \equiv 10\ a_1 \pmod{29}$ ou $a_1.\ 10^1 \equiv -19\ a_1 \pmod{29}$

$a_2\ 10^2 \equiv 13\ a_2 \pmod{29}$ ou $a_2.\ 10^2 \equiv -6\ a_2 \pmod{29}$

$a_3\ 10^3 \equiv 14\ a_3 \pmod{29}$ ou $a_3.\ 10^3 \equiv -15\ a_3 \pmod{29}$

$a_4\ 10^4 \equiv 24\ a_4 \pmod{29}$ ou $a_4.\ 10^4 \equiv -5\ a_4 \pmod{29}$

$a_5\ 10^5 \equiv\ 8\ a_5 \pmod{29}$ ou $a_5 .\ 10^5 \equiv -21\ a_5 \pmod{29}$

$a_6\ 10^6 \equiv 22\ a_6 \pmod{29}$ ou $a_6 .\ 10^6 \equiv -7\ a_6 \pmod{29}$

$a_7\ 10^7 \equiv 17\ a_7 \pmod{29}$ ou $a_7 .\ 10^7 \equiv -12\ a_7 \pmod{29}$

$a_8\ 10^8 \equiv 25\ a_8 \pmod{29}$ ou $a_8 .\ 10^8 \equiv -4\ a_8 \pmod{29}$

$a_9\ 10^9 \equiv 18\ a_9 \pmod{29}$ ou $a_9 .\ 10^9 \equiv -11\ a_9 \pmod{29}$

$a_{10}.10^{10} \equiv\ 6\ a_{10} \pmod{29}$ ou $a_{10}.10^{10} \equiv -23\ a_{10} \pmod{29}$

$a_{11}.10^{11} \equiv\ 2\ a_{11} \pmod{29}$ ou $a_{11}.10^{11} \equiv -27\ a_{11} \pmod{29}$

$a_{12}.10^{12} \equiv 20\ a_{12} \pmod{29}$ ou $a_{12}.10^{12} \equiv -9\ a_{12} \pmod{29}$

$a_{13}.10^{13} \equiv 26\ a_{13} \pmod{29}$ ou $a_{13}.10^{13} \equiv -3\ a_{13} \pmod{29}$

$a_{14}.10^{14} \equiv 28\ a_{14} \pmod{29}$ ou $a_{14}.10^{14} \equiv -1\ a_{14} \pmod{29}$

$a_{15}.10^{15} \equiv 19\ a_{15} \pmod{29}$ ou $a_{15}.10^{15} \equiv -10\ a_{15} \pmod{29}$

Assim, $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 29 se, e só se, $(a_0 + 10\ a_1 + 13\ a_2 + 14\ a_3 + 24\ a_4 + 8\ a_5 + 22\ a_6 + 17\ a_7 + 25\ a_8 + 18\ a_9 + 6\ a_{10} + 2\ a_{11} + 20\ a_{12} + 26\ a_{13}) - (a_{14} + 10\ a_{15} + 13\ a_{16} + 14\ a_{17} + 24\ a_{18} + 8\ a_{19} + 22\ a_{20} + 17\ a_{21} + 25\ a_{22} + 18\ a_{23} + 6\ a_{24} + 2\ a_{25} + 20\ a_{26} + 26\ a_{27}) + \ldots -$ o for.

Exemplos:

1) Seja o número 4638583638579, verifique se o número é divisível por 29:

Onde:

$a_0 = 9$

$a_1 = 7$

$a_2 = 5$

$a_3 = 8$

$a_4 = 3$

$a_5 = 6$

$a_6 = 3$

$a_7 = 8$

$a_8 = 5$

$a_9 = 8$

$a_{10} = 3$

$a_{11} = 6$

$a_{12} = 4$

usando o critério, obtemos:

(9 + 10 x 7 + 13 x 5 + 14 x 8 + 24 x 3 + 8 x 6 + 22 x 3 + 17 x 8 + 25 x 5 + 18 x 8 + 6 x 3 + 2 x 6 + 20 x 4) =

(9 + 70 + 65 + 112 + 72 + 48 + 66 + 136 + 125 + 144 + 18 + 12 + 80) = 957

usando novamente o critério para 957, obtemos:

(7 + 10 x 5 + 13 x 9) =

(7 + 50 + 117) = 174

Como 174, (29 x 6) é divisível por 29, então o número 4638583638579, (29 x 159951159951) também é divisível por 29.

2) Seja o número 22974181248025640853, verifique se o número é divisível por 29:

Onde:

$a_0 = 3$

$a_1 = 5$

$a_2 = 8$

$a_3 = 0$

$a_4 = 4$

$a_5 = 6$

$a_6 = 5$

$a_7 = 2$

$a_8 = 0$

$a_9 = 8$

$a_{10} = 4$

$a_{11} = 2$

$a_{12} = 1$

$a_{13} = 8$

$a_{14} = 1$

$a_{15} = 4$

$a_{16} = 7$

$a_{17} = 9$

$a_{18} = 2$

$a_{19} = 2$

usando o critério, obtemos:

$(3 + 10 \times 5 + 13 \times 8 + 14 \times 0 + 24 \times 4 + 8 \times 6 + 22 \times 5 + 17 \times 2 + 25 \times 0 + 18 \times 8 + 6 \times 4 + 2 \times 2 + 20 \times 1 + 26 \times 8) - (1 + 10 \times 4 + 13 \times 7 + 14 \times 9 + 24 \times 2 + 8 \times 2) =$

$(3 + 50 + 104 + 0 + 96 + 48 + 110 + 34 + 0 + 144 + 24 + 4 + 20 + 208) - (1 + 40 + 51 + 126 + 48 + 16) =$

$845 - 282 = 563$

Como 563 não é divisível por 29, então o número 22974181248025640853 também não é divisível por 29.

3) Seja o número 22490460255095398071, verifique se o número é divisível por 29:

Onde:

$a_0 = 1$

$a_1 = 7$

$a_2 = 0$

$a_3 = 8$

$a_4 = 9$

$a_5 = 3$

$a_6 = 5$

$a_7 = 9$

$a_8 = 0$

$a_9 = 5$

$a_{10} = 5$

$a_{11} = 2$

$a_{12} = 0$

$a_{13} = 6$

$a_{14} = 4$

$a_{15} = 0$

$a_{16} = 9$

$a_{17} = 4$

$a_{18} = 2$

$a_{19} = 2$

usando o critério, obtemos:

(1 + 10 x 7 + 13 x 0 + 14 x 8 + 24 x 9 + 8 x 3 + 22 x 5 + 17 x 9 + 25 x 0 + 18 x 5 + 6 x 5 + 2 x 2 + 20 x 0 + 26 x 6) - (4 + 10 x 0 + 13 x 9 + 14 x 4 + 24 x 2 + 8 x 2) =
(1 + 70 + 0 + 112 + 216 + 24 + 110 + 153 + 0 + 90 + 30 + 4 + 0 + 156) - (4 + 0 + 117 + 56 + 48 + 16) =
966 - 241 = 725

Como 725, (29 x 25) é divisível por 29, então o número 22490460255095398071, (29 x 775533112244668899) também é divisível por 29.

18. CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 31

Seja o número $(a_n\ a_{n-1}\ ...\ a_2\ a_1\ a_0)_{10} = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod{31}$

$10^1 \equiv 10 \pmod{31}$ ou $10^1 \equiv -21 \pmod{31}$

$10^2 \equiv 7 \pmod{31}$ ou $10^2 \equiv -24 \pmod{31}$

$10^3 \equiv 8 \pmod{31}$ ou $10^3 \equiv -23 \pmod{31}$

$10^4 \equiv 18 \pmod{31}$ ou $10^4 \equiv -13 \pmod{31}$

$10^5 \equiv 25 \pmod{31}$ ou $10^5 \equiv -6 \pmod{31}$

$10^6 \equiv 2 \pmod{31}$ ou $10^6 \equiv -29 \pmod{31}$

$10^7 \equiv 20 \pmod{31}$ ou $10^7 \equiv -11 \pmod{31}$

$10^8 \equiv 14 \pmod{31}$ ou $10^8 \equiv -17 \pmod{31}$

$10^9 \equiv 16 \pmod{31}$ ou $10^9 \equiv -15 \pmod{31}$

$10^{10} \equiv 5 \pmod{31}$ ou $10^{10} \equiv -26 \pmod{31}$

$10^{11} \equiv 19 \pmod{31}$ ou $10^{11} \equiv -12 \pmod{31}$

$10^{12} \equiv 4 \pmod{31}$ ou $10^{12} \equiv -27 \pmod{31}$

$10^{13} \equiv 9 \pmod{31}$ ou $10^{13} \equiv -22 \pmod{31}$

$10^{14} \equiv 18 \pmod{31}$ ou $10^{14} \equiv -13 \pmod{31}$

$10^{15} \equiv 1 \pmod{31}$ ou $10^{15} \equiv -30 \pmod{31}$

$10^{16} \equiv 10 \pmod{31}$ ou $10^{16} \equiv -21 \pmod{31}$

$10^{17} \equiv 7 \pmod{31}$ ou $10^{17} \equiv -24 \pmod{31}$

e assim por diante, ou seja:

$a_0.\ 10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod{31}$

$a_1.\ 10^1 \equiv 10\ a_1 \pmod{31}$ ou $a_1.\ 10^1 \equiv -21\ a_1 \pmod{31}$

$a_2.\ 10^2 \equiv 7\ a_2 \pmod{31}$ ou $a_2.\ 10^2 \equiv -24\ a_2 \pmod{31}$

$a_3.\ 10^3 \equiv 8\ a_3 \pmod{31}$ ou $a_3.\ 10^3 \equiv -23\ a_3 \pmod{31}$

$a_4.\ 10^4 \equiv 18\ a_4 \pmod{31}$ ou $a_4.\ 10^4 \equiv -13\ a_4 \pmod{31}$

$a_5.\ 10^5 \equiv 25\ a_5 \pmod{31}$ ou $a_5.\ 10^5 \equiv -6\ a_5 \pmod{31}$

$a_6.\ 10^6 \equiv 2\ a_6 \pmod{31}$ ou $a_6.\ 10^6 \equiv -29\ a_6 \pmod{31}$

$a_7.\ 10^7 \equiv 20\ a_7 \pmod{31}$ ou $a_7.\ 10^7 \equiv -11\ a_7 \pmod{31}$

$a_8.\ 10^8 \equiv 14\ a_8 \pmod{31}$ ou $a_8.\ 10^8 \equiv -17\ a_8 \pmod{31}$

$a_9.\ 10^9 \equiv 16\ a_9 \pmod{31}$ ou $a_9.\ 10^9 \equiv -15\ a_9 \pmod{31}$

$a_{10}.10^{10} \equiv 5\ a_{10} \pmod{31}$ ou $a_{10}.10^{10} \equiv -26\ a_{10} \pmod{31}$

$a_{11}.10^{11} \equiv 19\ a_{11} \pmod{31}$ ou $a_{11}.10^{11} \equiv -12\ a_{11} \pmod{31}$

$a_{12}.10^{12} \equiv 4\ a_{12} \pmod{31}$ ou $a_{12}.10^{12} \equiv -27\ a_{12} \pmod{31}$

$a_{13}.10^{13} \equiv 9\ a_{13} \pmod{31}$ ou $a_{13}.10^{13} \equiv -22\ a_{13} \pmod{31}$

$a_{14}.10^{14} \equiv 18\ a_{14} \pmod{31}$ ou $a_{14}.10^{14} \equiv -13\ a_{14} \pmod{31}$

$a_{15}.10^{15} \equiv 1\ a_{15} \pmod{31}$ ou $a_{15}.10^{15} \equiv -30\ a_{15} \pmod{31}$

$a_{16}.10^{16} \equiv 10\ a_{16} \pmod{31}$ ou $a_{16}.10^{16} \equiv -21\ a_{16} \pmod{31}$

$a_{17}.10^{17} \equiv 7\ a_{17} \pmod{31}$ ou $a_{17}.10^{17} \equiv -24\ a_{17} \pmod{31}$

$a_{18}.10^{18} \equiv 8\ a_{18} \pmod{31}$ ou $a_{18}.10^{18} \equiv -23\ a_{18} \pmod{31}$

Assim, $(a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0)_{10}$ é divisível por 31 se, e só se,

$(a_0 + 10\ a_1 + 7\ a_2 + 8\ a_3 + 18\ a_4 + 25\ a_5 + 2\ a_6 + 20\ a_7 + 14\ a_8 + 16\ a_9 + 5\ a_{10} + 19\ a_{11} + 4\ a_{12} + 9\ a_{13} + 18\ a_{14} + a_{15} + 10\ a_{16} + 7\ a_{17} + 8\ a_{18} + 18\ a_{19} + 25\ a_{20} + 2\ a_{21} + 20\ a_{22} + 14\ a_{23} + 16\ a_{24} + 5\ a_{25} + 19\ a_{26} + 4\ a_{27} + 9\ a_{28} + 18\ a_{30}) + \ldots$ o for.

Exemplos:

1) Seja o número 26423461985136, verifique se o número é divisível por 31:

Onde:

$a_0 = 6$

$a_1 = 3$

$a_2 = 1$

$a_3 = 5$

$a_4 = 8$

$a_5 = 9$

$a_6 = 1$

$a_7 = 6$

$a_8 = 4$

$a_9 = 3$

$a_{10} = 2$

$a_{11} = 4$

$a_{12} = 6$

$a_{13} = 2$

usando o método obtemos:

6 + 10 x 3 + 7 x 1 + 8 x 5 + 18 x 8 + 25 x 9 + 2 x 1 + 20 x 6 + 14 x 4 + 16 x 3 + 5 x 2 + 19 x 4 + 4 x 6 + 9 x 2 = 806

Como 806, (31 x 26) é divisível por 31, então o número 26423461985136, (31 x 852369741456) também é divisível por 31.

2) Seja o número 23364210818496073371479277813, verifique se o número é divisível por 31:

Onde:

$a_0 = 3$

$a_1 = 1$

$a_2 = 8$

$a_3 = 7$

$a_4 = 7$

$a_5 = 2$

$a_6 = 9$

$a_7 = 7$

$a_8 = 4$

$a_9 = 1$

$a_{10} = 7$

$a_{11} = 3$

$a_{12} = 3$

$a_{13} = 7$

$a_{14} = 0$

$a_{15} = 6$

$a_{16} = 9$

$a_{17} = 4$

$a_{18} = 8$

$a_{19} = 1$

$a_{20} = 8$

$a_{21} = 0$

$a_{22} = 1$

$a_{23} = 2$

$a_{24} = 4$

$a_{25} = 6$

$a_{26} = 3$

$a_{27} = 3$

$a_{28} = 2$

usando o método obtemos:

$(3 + 10 \times 1 + 7 \times 8 + 8 \times 7 + 18 \times 7 + 25 \times 2 + 2 \times 9 + 20 \times 7 + 14 \times 4 + 16 \times 1 + 5 \times 7 + 19 \times 3 + 4 \times 3 + 9 \times 7 + 18 \times 0 + 6 + 10 \times 9 + 7 \times 4 + 8 \times 8 + 18 \times 1 + 25 \times 8 + 2 \times 0 + 20 \times 1 + 14 \times 2 + 16 \times 4 + 5 \times 6 + 19 \times 3 + 4 \times 3 + 9 \times 2) =$

$(3 + 10 + 56 + 56 + 126 + 50 + 18 + 140 + 56 + 16 + 35 + 57 + 12 + 63 + 0 + 6 + 90 + 28 + 64 + 18 + 200 + 0 + 20 + 28 + 64 + 30 + 57 + 12 + 18) = 1333$

Como 1333, (31 x 43) é divisível por 31, então o número 23364210818496073371479277813, (31 x 753684219951486237789654123) também é divisível por 31.

3) Seja o número 22974181248025640853, verifique se o número é divisível por 31:

Onde:

$a_0 = 3$

$a_1 = 5$

$a_2 = 8$

$a_3 = 0$

$a_4 = 4$

$a_5 = 6$

$a_6 = 5$

$a_7 = 2$

$a_8 = 0$

$a_9 = 8$

$a_{10} = 4$

$a_{11} = 2$

$a_{12} = 1$

$a_{13} = 8$

$a_{14} = 1$

$a_{15} = 4$

$a_{16} = 7$

$a_{17} = 9$

$a_{18} = 2$

$a_{19} = 2$

usando o método obtemos:

$(3 + 10 \times 5 + 7 \times 8 + 8 \times 0 + 18 \times 4 + 25 \times 6 + 2 \times 5 + 20 \times 2 + 14 \times 0 + 16 \times 8 + 5 \times 4 + 19 \times 2 + 4 \times 1 + 9 \times 8 + 18 \times 1 + 4 + 10 \times 7 + 7 \times 9 + 8 \times 2 + 18 \times 2) =$

(3 + 50 + 56 + 0 + 72 + 150 + 10 + 40 + 0 + 128 + 20 + 38 + 4 + 72 + 18 + 4 + 70 + 63 + 16 + 36) = 850

Como 850 não é divisível por 31,então o número 22974181248025640853 também não é divisível por 31.

CONCLUSÃO

Na matemática precisamos sempre tentar apresentar conteúdos a alunos na forma mais clara e objetiva possível, em razão disto propus realizar esse trabalho tentando mostrar de uma outra forma os critérios de divisibilidade, foi um desafio árduo, muito trabalhoso, porém compensativo. Árduo e trabalhoso pelo fato de tempo suficiente para me dedicar ao trabalho, compensativo por ter obtido como resultado uma ferramenta de trabalho.

Diante dessas dificuldades procurei mostrar o texto e as fórmulas de forma acessível aos olhos do leitor sempre obedecendo ao rigor matemático necessário.

O resultado obtido no trabalho pode não ter facilitado a visão sobre os critérios ou então ter fornecido uma maneira mais prática na sua definição mais posso afirmar que é uma outra forma independente dessa avaliação, que foi o objetivo principal deste trabalho.

Finalizando posso afirmar que esse meu trabalho melhorou muito meu conhecimento sobre o assunto.

REFERÊNCIA BILIOGRÁFICA

- MILIES, Cesar Polcino e COELHO Sônia Pitta- **Números- Uma introdução à Matemática**. São Paulo: EDUSP, 3ª edição.

- JANESCH Oscar Ricardo e TANEJA Inder Jeet- **Tópicos Especiais em Matemática**. Florianópolis: LED, 2001.

- BERNARDO Dalila Pacheco e CRIPPA Jane de Oliveira- **Aplicação do Algoritmo de Euclides**. Monografia da UFSC, 1999.

- MORI Iracema e SATIKO Dulce- **Matemática Idéias e Desafios**. São Paulo: Saraiva, 6ª edição, 1998.

- GIOVANNI José Ruy e GIOVANNI JR José Ruy- **Matemática Pensar e Descobrir**. São Paulo: FTD,1996.