UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

# CÁLCULO DE DETERMINANTES VIA MÉTODOS DE CONDENSAÇÃO

DAVID KOSOSKI

Florianópolis

2009

DAVID KOSOSKI

# CÁLCULO DE DETERMINANTES VIA MÉTODOS DE CONDENSAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática.

**Orientador: Licio Hernanes Bezerra**

Florianópolis

2009

Esta Monografia foi julgada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora pela portaria nº 07/SCG/2009

Profa. Carmem Suzane Comitre Gimenez
(Professora da disciplina)

**Banca Examinadora:**

Prof. Licio Hernanes Bezerra (Orientador)

Prof. Luciano Bedin

Prof. Nereu Estanislau Burin

Para Davi e Renata

## AGRADECIMENTOS

Esta tese é parte de minha graduação e marco para novas caminhadas. Deixo aqui o reconhecimento e apreço por todos aqueles que contribuiram para o êxito desta fase que findou. Ao professor Licio por sua paciência e complacência na elaboração da monografia. Aos meus familiares, em especial minha mãe, pelo carinho e incentivo nos momentos de dificuldade. Ao meu filho Davi por ser farol e minha alegria e, principalmente, à minha companheira Renata que, sempre me incentivando para o porvir, foi o grande apoio e testemunha desta conquista.

DAVID KOSOSKI

# CÁLCULO DE DETERMINANTES VIA MÉTODOS DE CONDENSAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática.

**Orientador: Licio Hernanes Bezerra**

Florianópolis

2009

Esta Monografia foi julgada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora pela portaria nº 07/SCG/2009

Profa. Carmem Suzane Comitre Gimenez
(Professora da disciplina)

**Banca Examinadora:**

Prof. Licio Hernanes Bezerra (Orientador)

Prof. Luciano Bedin

Prof. Nereu Estanislau Burin

Para Davi e Renata

## AGRADECIMENTOS

Esta tese é parte de minha graduação e marco para novas caminhadas. Deixo aqui o reconhecimento e apreço por todos aqueles que contribuiram para o êxito desta fase que findou. Ao professor Licio por sua paciência e complacência na elaboração da monografia. Aos meus familiares, em especial minha mãe, pelo carinho e incentivo nos momentos de dificuldade. Ao meu filho Davi por ser farol e minha alegria e, principalmente, à minha companheira Renata que, sempre me incentivando para o porvir, foi o grande apoio e testemunha desta conquista.

# Sumário


**Introdução** **6**

**1 Um Pouco de História** **7**

1.1 Sistemas de Equações e Determinantes . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.2 Um Método Novo de Condensação . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

**2 Função Multilinear Alternada** **11**

2.1 Permutações . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

2.2 Função Multilinear Alternada e Determinante . . . . . . . . . . . . . . 13

**3 Determinante e Propriedades Elementares** **19**

3.1 Determinante de uma Matriz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

3.2 Propriedades Elementares dos Determinantes . . . . . . . . . . . . . . 20

**4 Métodos de Condensação** **32**

4.1 Condensação de Laplace . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

4.2 Condensação de Chio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

4.3 Condensação de Dodgson . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

4.3.1 O Método de Dodgson . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

4.3.2 O Método DDI (Dodgson's Determinantal Identity) . . . . . . . 44

**Considerações Finais** **49**

**Bibliografia** **51**

# Introdução

O cálculo do determinante é matéria base no estudo e desenvolvimeto de sistemas de equações lineares, entretanto falar apenas sobre determinantes seria inútil se não houvesse algo diferente para mostrar, considerando que o determinante é ferramenta fundamental da álgebra linear já tão discutida no meio científico. Por isso, esta monografia tem como objetivo indicar outro método para encontrar o determinante de uma matriz, a condensação de Dodgson, que é um processo não muito conhecido para calcular determinantes.

Desta forma será lembrado, no primeiro capítulo, um pouco da história do determinante e quem foi o autor da condensação que se quer mostrar. No segundo capítulo, a teoria dos determinantes é vista de uma forma mais atual, como uma função sem o recurso das matrizes. No terceiro capítulo serão estudados os determinantes das matrizes com seus conceitos fundamentais e toda a teoria para se efetuar uma regra para calcular um determinante. O quarto e último capítulo tem como objetivo observar alguns métodos conhecidos de condensação de determinantes em conjunto da regra de Dodgson.

# Capítulo 1

# Um Pouco de História

Qualquer estudante, após se defrontar com o desenvolvimento de um determinante e sua solução pela primeira vez, questiona, muitas vezes sem declarar, como surgiu aquele cálculo ou quem foi o responsável por introduzir este conceito e utilizar na solução de algum problema. Para esclarecer estas dúvidas nada melhor do que conhecer um pouco da história sobre determinantes e quem tornou possível uma teoria sobre este assunto.

## 1.1 Sistemas de Equações e Determinantes

A teoria sobre determinantes é um capítulo muito recente da história da matemática. Entretanto tem origem muito remota e é fruto do desenvolvimento dos sistemas de equações lineares que por sua vez surgiram com a evolução das sociedades para formas mais avançadas.

Os primeiros registros que se tem sobre equações levam aos babilônios e um pouco mais tarde aos chineses. Na Ásia, nas proximidades dos rios Trigre e Eufrates, trabalhos de irrigação, drenagem e administração das terras cultiváveis necessitavam do desenvolvimento de considerável tecnologia em conjunto da matemática. Os babilônios se desenvolveram na região do rio Eufrates e como usavam tábulas de argila cozida para gravar seus escritos cuneiformes, deixaram os registros mais antigos (tábulas datadas de até 2100 a.C.). A possibilidade de conservação das tábulas no tempo favoreceram sua posterior descoberta em escavações, cerca de quinhentas mil, sendo que mais de quatrocentas eram sobre matemática e algumas continham equações. As equações dos babilônios foram escritas na forma de sentenças, a álgebra com símbolos estava muito longe de ser inventada, e possuíam duas incógnitas. Segue como exemplo o problema 14 de uma tábula datada de 1800 a.C., a qual encontra-se no Museu Britânico.

> "Adicionei as áreas dos meus dois quadrados, de tal forma que tinham 25 5/12. O lado de um quadrado tem 2/3 do lado de outro e 5 rods."

É na matemática chinesa, bem mais tarde (por volta de 206 a.C. a 221 d.C.), que se tem relatos dos primeiros sistemas de equações com duas ou três variáveis. De uma forma muito interessante formavam tabelas de números e utilizavam estas para efetuar operações elementares sobre colunas, a notação e o processo de resolução eram muito parecidos com os utilizados atualmente. O texto "Nove Capítulos sobre a Arte Matemática" fornece os primeiros exemplos de métodos sobre resolução de sistemas.

> "Há três quantidades de grãos, das quais três fardos do primeiro tipo, dois do segundo e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de grãos estão contidas em um fardo de cada quantidade?"

Depois faz algo notável, ajusta os coeficientes do sistema de três equações lineares em três incógnitas como uma tabela (um diagrama muito parecido ao que se utiliza hoje),

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}.$$

Mais adiante, escrevendo em 200 aC, instrui o leitor a efetuar operações sobre colunas, encontrando a solução do sistema proposto. Este método é chamado hoje de eliminação gaussiana, e se tornaria bem conhecido somente no século XIX.

Somente em 1683 o japonês Seki Kowa (1642 - 1708), utilizando as idéias de sistemas desenvolvidas em livros chineses, escreveu "Kai Fukudai no Ho", no qual discutia determinantes e como resolvê-los associando a um quadrado de números.

O estudo de determinantes apareceu dez anos depois no Ocidente (1693) em um trabalho do alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1760), que mostrou como resolver um sistema de equações através de determinantes. Entretanto, uma regra geral, para resolver sistemas de equações de n incógnitas por n variáveis, foi estabelecida apenas em 1750 pelo suíço Gabriel Cramer (1704 - 1752).

Foi de autoria do matemático francês Alexandre-Theóphile (1735 - 1793) Vandermonde a notação mais completa e apropriada, das sugeridas até então, sendo o primeiro a interpretar, em 1771, o determinante como um conceito matemático independente do estudo de sistemas lineares, embora utilizando na solução destes.

No ano seguinte, Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) escreveu seu importante teorema que permite a expansão através dos menores, e Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), em 1773, também descreveu um método para o desenvolvimento de determinantes.

O francês Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) estabeleceu o termo determinante, em 1812, em um artigo e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes. A consolidação dos estudos sobre determinantes ocorreu com os trabalhos de Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 - 1857), que tornou a notação mais simples.

É importante ressaltar que os determinantes surgiram primeiro. As matrizes e suas propriedades algébricas aparecem pela primeira vez apenas em 1839, apesar de se organizar, atualmente, as matrizes como conceito anterior ao estudo de determinantes.

## 1.2 Um Método Novo de Condensação

Na história da matemática pouco se ouviu falar a respeito de Charles Lutwidge Dodgson (1832 - 1898). Matemático e escritor, e este é o fato mais curioso pois além de ter sido matemático foi um grande escritor nas horas vagas, talvez o mais famoso dos matemáticos (mas não como matemático), era mais conhecido pelo pseudônimo de Lewis Carroll, entre suas obras literárias mais conhecidas está "Alice no País das Maravilhas", clássico da literatura. Sua atividade profissional era ensinar matemática no colégio da Universidade de Oxford, escrever livros infantis, criar quebra-cabeças, e redigir poesias eram atividades realizadas como lazer.

Em Oxford, sem seu pseudônimo e como professor e matemático, publicou o livro intitulado "Um tratado Elementar sobre Determinantes" [4] em 1866, propondo nesta obra um método diferente para calcular determinantes, também conhecido como método dos contractantes.

A condensação de Dodgson foi desenvolvida no apêndice II da obra e utilizada como algoritmo para resolução de sistemas de equações lineares. O livro obteve pouca aceitação na comunidade científica não passando da segunda tiragem e, portanto, a condensação de Dodgson foi deixada em relativa obscuridade, pois, como será visto no capítulo 4, os determinantes envolvidos no cálculo não poderiam possuir zeros no seu interior para que o processo não necessitasse ser refeito.

O esquecimento do livro, conseqüentemente do algoritmo, tornou a condensação de Dodgson um método totalmente novo. Em 1986 David P. Robbins e Howard Rumsey estudaram o processo e modificaram a notação, denominando o método de DDI (Dodgson's Determinantal Identity), no qual a condensação é utilizada implicitamente. A condensação de Dodgson, então, ressurgiu pois este método para calcular determinantes possuía vantagens como algoritmo computacional, principalmente em computação paralela. Entretanto, tanto o método de condensação de Dodgson quanto o DDI, ainda são pouco conhecidos e serão descritos de forma detalhada no capítulo 4 deste texto.

# Capítulo 2

# Função Multilinear Alternada

## 2.1 Permutações

Seja $\{1, 2, .., n\} \subset Z$.

**Definição 2.1.1.** Uma Permutação é uma aplicação bijetora

$$\sigma : \{1, 2, .., n\} \longrightarrow \{1, 2, .., n\}$$

do conjunto $\{1, 2, .., n\}$.

Obs.: Uma permutação $\sigma$ de $\{1, 2, .., n\}$ será denotada por, $\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), ..., \sigma(n)\}$.

**Exemplo 2.1.1.** Dado o conjunto de inteiros $\{1, 2\}$, as seqüências de elementos distintos $(1, 2)$ e $(2, 1)$ são as permutações dos elementos do conjunto.

**Exemplo 2.1.2.** Dado o conjunto de inteiros $\{1, 2, 3\}$, as seqüências de elementos distintos $p_1 = (1, 2, 3)$, $p_2 = (1, 3, 2)$, $p_3 = (2, 1, 3)$, $p_4 = (2, 3, 1)$, $p_5 = (3, 1, 2)$, $p_6 = (3, 2, 1)$ são as permutações dos elementos do conjunto.

**Definição 2.1.2.** O conjunto de todas as possíveis permutações dos n primeiros números inteiros de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ será denotado por $P_n$. Observe que $P_n$ possui n! elementos.

**Definição 2.1.3.** Em uma permutação $\sigma$ de $P_n$, ocorre uma **inversão**, ou **transposição**, dos elementos $\sigma(i)$ e $\sigma(j)$ de $p_k$ quando $\sigma(i) > \sigma(j)$, sempre que $i < j$, para alguns i, j $\in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Uma permutação é dita par ou ímpar se o total de inversões for par ou ímpar.

**Exemplo 2.1.3.** Em $\sigma = (3, 1, 2)$, há três inversões: $\sigma(3) < \sigma(2)$, $\sigma(3) < \sigma(1)$, $\sigma(1) < \sigma(2)$.

**Teorema 2.1.** *Se um número de transposições utilizadas para chegar da identidade $e = (1, 2, 3, ..., n)$ a uma permutação $\sigma$ de $P_n$ for par então qualquer número possível de transposições feitas saindo de e e chegando em $\sigma$ é par também. Idem para ímpar.*

Demonstração:ver proposição v. 10.10. em [10]

**Exemplo 2.1.4.** Em $\sigma = (3, 2, 1)$, bastam três inversões para ir de $(1, 2, 3)$ para $(3, 2, 1)$: $(1, 2, 3) \rightarrow (1, 3, 2) \rightarrow (3, 1, 2) \rightarrow (3, 2, 1)$. Logo, qualquer outro caminho que leve $(1, 2, 3)$ a $(3, 1, 2)$ demandará um número ímpar de inversões.

**Definição 2.1.4.** Se $\sigma$ é uma permutação e t o número total de transposições de $\sigma$, então o **sinal** de $\sigma$ será:

$$\mathsf{sinal}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ for } \textit{par} \\ -1, & \text{se } t \text{ for } \textit{ímpar} \end{cases}.$$

## 2.2 Função Multilinear Alternada e Determinante

**Definição 2.2.1 (Função Multilinear).** Sejam $V_1, V_2, ..., V_n$ e $U$ espaços vetoriais reais (complexos). Uma função $f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_n \to U$ será dita n-linear ou multilinear, se:

a) Para todo k $\in 1, 2, ..., n$, para todos $x_1 \in V_1, ..., x_k + y_k \in V_k, ..., x_n \in V_n$, tem-se $f(x_1, ..., x_k + y_k, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_k, ..., x_n) + f(x_1, ..., y_k, ..., x_n)$.

b) Para todo número real (complexo) a, para todo $k \in 1, 2, ..., n$, para todos $x_1 \in V_1, ..., x_k \in V_k, ..., x_n \in V_n$, tem-se $f(x_1, ..., ax_k, ..., x_n) = af(x_1, ..., x_k, ..., x_n)$. Ou seja, $f$ é linear em cada uma de suas variáveis

Obs.: Se $f$ é uma função multilinear então: claramente

$f(0, x_2, x_3, ..., x_n) = f(x_1, 0, x_3, ..., x_n) = ... = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, 0) = 0$

**Teorema 2.2.** *Suponha que, para todo $k \in \{1, ..., n\}$, $V_k$ é um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita. Seja $U$ um espaço vetorial real (complexo). Nesse caso, uma função multilinear $f$ de $V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ em $U$ fica bem determinada se são conhecidos os valores de $f$ em $\beta_1 \times ... \times \beta_n$, em que, para todo $k \in \{1, ..., n\}$, $\beta_k$ é uma base de $V_k$.*

Demonstração: Sejam $\beta_1 = \{v_{11}, ..., v_{1d_1}\}, ..., \beta_n = \{v_{n1}, ..., v_{nd_n}\}$. Logo, se $x_1 = a_{11}v_{11} + ... + a_{1d_1}v_{1d_1}$, ..., $x_n = a_{n1}v_{n1} + ... + a_{nd_n}v_{nd_n}$, tem-se que

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq d_1, ..., 1 \leq j_n \leq d_n} a_{1j_1} ... a_{nj_n} f(v_{1j_1}, ..., v_{nj_n})$$

Por essa igualdade, verifica-se que $f$ fica unicamente determinada uma vez que se conhece $f(v_{1j_1}, ..., v_{nj_n})$, para cada $(j_1, ..., j_n) \in \{1, ...d_1\} \times ... \times \{1, ..., d_n\}$.

Para tornar mais clara a noção de função n-linear toma-se um exemplo para o caso $n = 2$.

**Exemplo 2.2.1.** Seja $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pelo produto interno usual $f(u, v) = < u, v >$. Têm-se que $f$ é 2-linear ou bilinear. De fato, fixando $v$ e considerando $u$, $u' \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathbb{R}$, então

$$f(u + u', v) = < u + u', v > = < u, v > + < u', v > = f(u, v) + f(u', v)$$

$$f(au, v) = < au, v > = a < u, v > = af(u, v)$$

da mesma forma fixando u, tem-se

$$f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v')$$

$$f(u, av) = af(u, v)$$

escrevendo $u$, $v$ como combinação linear da base $(e_1, e_2, e_3)$:

$$u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 = \sum_{i=1}^{3} u_ie_i$$

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 = \sum_{i=1}^{3} v_ie_i$$

$$\begin{aligned}
f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^{3} u_ie_i\ ,\ \sum_{j=1}^{3} v_je_j\right) \\
&= < (u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3), (v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3) > \\
&= < u_1e_1, v_1e_1 > + < u_1e_1, v_2e_2 > + < u_1e_1, v_3e_3 > \\
&+ < u_2e_2, v_1e_1 > + < u_2e_2, v_2e_2 > + < u_2e_2, v_3e_3 > \\
&+ < u_3e_3, v_1e_1 > + < u_3e_3, v_2e_2 > + < u_3e_3, v_3e_3 > \\
&= u_1v_1 < e_1, e_1 > + u_1v_2 < e_1, e_2 > + u_1v_3 < e_1, e_3 > \\
&+ u_2v_1 < e_2, e_1 > + u_2v_2 < e_2, e_2 > + u_2v_3 < e_2, e_3 > \\
&+ u_3v_1 < e_3, e_1 > + u_3v_2 < e_3, e_2 > + u_3v_3 < e_3, e_3 > \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_iv_j < e_i, e_j > \quad .
\end{aligned}$$

Generalizando para $\mathbb{R}^n$ e a base canônica tem-se

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i_k} e_i$$

logo,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^{(2)} e_i, ..., \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} e_i\right)$$

como $f$ é multilinear, tem-se

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\sum ... \sum a_{k_1}^{(1)} a_{k_2}^{(2)} ... a_{k_n}^{(n)} f(e_{k_1}, e_{k_2}, ..., e_{k_n}).$$

De agora em diante, $V_1 = V_2 = ... = V_n = \mathbb{R}^n$ e $U = \mathbb{R}$

Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função n-linear. A função $f$ será dita alternada quando $f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = 0$ sempre que $x_i = x_j$, para $i \neq j$

**Teorema 2.3.** *Seja $f$ uma função n-linear alternada sobre $\mathbb{R}^n$, então*

$$f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = -f(x_1, x_2 ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n)$$

*para todo $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$, $i \neq j$*

Demonstração: Aplicando a definição de função multilinear alternada, tem-se

$f(x_1, ..., x_i + x_j, ..., x_i + x_j, ..., x_n) = 0$

$f(x_1, ..., x_i, ..., x_i + x_j, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_i + x_j, ..., x_n) = 0$

$f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_i, ..., x_i, ..., x_n)$

$+ f(x_1, ..., x_j, ..., x_j, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n) = 0$

sendo a função alternada, os índices iguais anulam estas, assim

$f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n) = 0$, então

$f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n)$

**Teorema 2.4.** *Se o conjunto $x_1, x_2, ..., x_n$ é linearmente dependente, então*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

Demonstração: Deve-se supor, sem perda de generalidade que

$$x_1 = a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

assim,

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) \\ &\quad = a_2f(x_2, x_2, x_3..., x_n) + a_3f(x_3, x_2, x_3..., x_n) + ... + a_nf(x_n, x_2, x_3..., x_n) = 0 \end{aligned}$$

**Exemplo 2.2.2.** Seja $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função multilinear alternada. Escrevendo $a$, $b \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear da base canônica tem-se,

$$a = a_1e_1 + a_2e_2$$

$$e$$

$$b = b_1e_1 + b_2e_2$$

deste modo,

$$\begin{aligned} d_2(a, b) &= d_2((a_1e_1 + a_2e_2), (b_1e_1 + b_2e_2)) \\ &= a_1b_1d_2(e_1, e_1) + a_1b_2d_2(e_1, e_2) + a_2b_1d_2(e_2, e_1) + a_2b_2d_2(e_2, e_2) \end{aligned}$$

porém $d_2$ é multilinear alternada, portanto

$$d_2(e_1, e_1) = d_2(e_2, e_2) = 0 \qquad e \qquad d_2(e_1, e_2) = -d_2(e_2, e_1)$$

assim pode-se escrever:

$$d_2(a, b) = a_1b_2d_2(e_1, e_2) - a_2b_1d_2(e_1, e_2) = d_2(e_1, e_2)(a_1b_2 - a_2b_1)$$

**Exemplo 2.2.3.** Seja $d_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função multilinear alternada. Escreve-se $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear da base canônica:

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3ec = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3.$$

Entretanto pode-se perceber, pelo exemplo 1, que quando os índices das bases são iguais, pela propriedade da função multilinear alternada, tem-se $d_3(e_i, e_j, e_k) = 0$ sempre que $i = j = k \in \{1, 2, 3\}$, ou seja, só interessa quando ocorre permutação da base. Assim,

$$\begin{aligned}
&d_3(a, b, c)\\
&\quad = d_3((a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3), (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3), (c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3))\\
&\quad = a_1b_2c_3d_3(e_1, e_2, e_3) + a_1b_3c_2d_3(e_1, e_3, e_2) + a_2b_1c_3d_3(e_2, e_1, e_3)\\
&\quad + a_2b_3c_1d_3(e_2, e_3, e_1) + a_3b_1c_2d_3(e_3, e_1, e_2) + a_3b_2c_1d_3(e_3, e_2, e_1)\\
&\quad = d_3(e_1, e_2, e_3)[a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2) + a_3b_2c_1]\ .
\end{aligned}$$

**Teorema 2.5.** *Seja $f$ uma função multilinear alternada. Então se $\forall\ k \in \{1, 2, ..., n\}$ e $x_k = a_{k_1}e_1 + a_{k_2}e_2 + ... + a_{k_n}e_n$ tem-se*

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \sum a_{i_1 1}a_{i_2 2}, ..., a_{i_n n}f(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_n})\\
&= \sum a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n}f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}...e_{\sigma(n)})\\
&= \sum sinal(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n}f(e_1, e_2, ..., e_n)\\
&= f(e_1, e_2, ..., e_n)\sum sinal(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n}
\end{aligned}$$

OBS.: Se $f$ é uma função n-linear alternada $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ das colunas da matriz $A = [x_1, x_2, ..., x_n]$, define-se

$$d(A) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

então têm-se que $d(A) = c\ det(A)$ no qual

$$c = d(I_n) = f(e_1, e_2, ..., e_n)edet(A) = \sum sinal(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n}$$

.

A matriz $I_n$ é chamada de matriz identidade.

O determinante é a expressão denotada por $det(A)$.

Assim, verificam-se as seguintes propriedades:

1. $det[..., x_i, ..., x_j, ...] = det[..., x_i, ..., ] + det[..., x_j, ...]$
2. $det[..., \alpha x_i, ..., ] = \alpha \ det[..., x_i, ..., ]$
3. $det[..., x_i, ..., x_j, ...] = - \ det[..., x_j, ..., x_i, ...]$
4. $det[e_1, e_2, ..., e_n] = 1$

As proposições 1 e 2 provém do fato de $det(A)$ ser uma função multilinear. A proposição 3, porque a função determinante é alternada. A proposição 4 é a que caracteriza o determinante como uma função multilinear alternada.

# Capítulo 3

# Determinante e Propriedades Elementares

## 3.1 Determinante de uma Matriz

**Definição 3.1.1 (Notação).** Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n. O determinante de A, notado por det(A) ou |A|, significa

$$det(A) = \sum_{\sigma} sinal(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}$$

em que a soma é acoplada pelas $n!$ permutações de $(1, 2, ..., n)$. Cada número $sinal(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}$ é dito um termo do determinante.

Observações em relação à definição:

1. se o número de inversões de $p_k$ for par o coeficiente $sinal(p_k)$ será $(1)$ (positivo) e $(-1)$ (negativo) se o número de inversões for ímpar, de acordo com seção 2.1.

2. Em cada termo da somatória existe somente um elemento de cada linha, ou somente um elemento de cada coluna.

3. Na definição de determinantes poderiam ser permutados os segundos índices da soma e mantidos fixos os primeiros e a mesma regra valeria para o sinal, ou seja

$$det(A) = \sum_{\sigma} sinal(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$$

variando os segundos índices e deixando fixos os primeiros.

**Exemplo 3.1.1.** O determinante de ordem 3 ($n = 3$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

## 3.2 Propriedades Elementares dos Determinantes

### Fila Nula

**Teorema 3.1.** *Se todos os elementos de uma linha (coluna) da matriz A são nulos então* $det(A) = 0$

Demonstração:

Este fato é justificado pelo item 2 das observações da definição, pois se cada termo possui um elemento de cada linha (coluna), e uma delas é nula, então todos os produtos contém, pelo menos, um elemento zero, anulando o determinante.

## Matriz Transposta

**Definição 3.2.1.** Seja $A$ uma matriz de ordem n. Chama-se matriz transposta de $A$, denotado por $A^T$, a matriz obtida trocando ordenadamente as linhas pelas colunas de A. Assim, se $A = (a_{ij})_n$ então $A^T = (a_{ji})_n$.

**Teorema 3.2.** *Se $A$ é uma matriz quadrada. Então $det(A) = det(A^T)$*

Demonstração: Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Então temos $b_{ij} = a_{ji}$ para todos os valores de i e j em $(1, 2, 3, ..., n)$.

Portanto pela definição de determinante

$$\begin{aligned} det(B) &= \sum_{\sigma} sinal(\sigma) b_{1j_1} b_{2j_2} ... b_{nj_n} \\ &= \sum_{\sigma} sinal(\sigma) a_{j_1 1} a_{j_2 2} ... a_{j_n n} \\ &= det(A) \end{aligned}$$

pela observação 3 da definição. Ou seja, permutar os primeiros índices dos termos da matriz A, corresponde a permutar os segundos índices da matriz B. Assim, o determinante de uma matriz pode ser calculado permutando-se os segundos índices da soma de permutações, mantendo a mesma convenção para os sinais dos termos. Isto mostra que, $det(A) = det(A^T)$

Em linguagem comum pode-se dizer que o determinante não se altera quando são trocadas as linhas pelas colunas.

**Exemplo 3.2.1.**

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

## Produto por uma Constante

**Teorema 3.3.** *Multiplicando a matriz $A$ de ordem $n$ por uma constante $c$, o determinante de $A$ fica multiplicado pela constante elevado a ordem da matriz, ou $det(c \cdot A) = c^n \cdot det(A)$.*

Demonstração:

Através da definição de determinante é possível perceber que cada elemento de A está multiplicado por c, ou seja:

$$det(c \cdot A) = \begin{vmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & ... & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & ... & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ c \cdot a_{n1} & c \cdot a_{n2} & ... & c \cdot a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma} sinal(\sigma) c \cdot a_{1\sigma(1)} c \cdot a_{2\sigma(2)} ... c \cdot a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma} (c^n) sinal(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$$

$$= c^n \cdot \sum_{\sigma} sinal(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} = c^n \cdot det(A)$$

**Exemplo 3.2.2.**

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 4 \end{vmatrix} = 4^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

## Troca de Filas Paralelas

**Teorema 3.4.** *Quando se troca duas linhas (colunas) de posição, o sinal do determinante muda.*

Demonstração:

Ao trocar duas linhas de posição altera-se também a ordem dos índices dos elementos na permutação, alterando conseqüentemente o sinal da permutação e por isso o sinal dos termos também muda.

**Exemplo 3.2.3.**

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

## Filas Paralelas Iguais

**Teorema 3.5.** *Quando duas linhas (colunas) de uma matriz são iguais o determinante é igual a zero.*

Demonstração:

Suponha que duas linhas de uma matriz A sejam formadas por elementos respectivamente iguais. Seja B a matriz obtida pela troca destas linha iguais de A. De acordo com a propriedade da troca de filas paralelas, se estas linhas forem trocadas, $det(A) = -det(B)$, e como as matrizes A e B são iguais isto só será possível se $det(A) = det(B) = 0$. ( o mesmo é válido para duas colunas quaisquer da matriz A)

**Exemplo 3.2.4.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

## Soma em uma Coluna

Seja A uma matriz de ordem n, então

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & (b_{1j} + c_{1j}) & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & (b_{2j} + c_{2j}) & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & ... & \ddots & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & (b_{nj} + c_{nj}) & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_{2j} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & ... & \ddots & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & c_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & c_{2j} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & ... & \ddots & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & c_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para mostrar esta propriedade faz-se necessário usar a definição de determinante e a propriedade distributiva, ou seja se

$$det(A) = \sum_{\sigma} sinal(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{wj_w} ... a_{nj_n}$$

porém $a_{wj_w} = b_{wj_w} + c_{wj_w}$ para todo $w \in \{1, 2, ..., n\}$. Então pela propriedade distributiva é possível escrever:

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{\sigma} sinal(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} ... b_{wj_w} + c_{wj_w} ... a_{nj_n} \\ &= \sum_{\sigma} sinal(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} ... b_{wj_w} ... a_{nj_n} + \sum_{\sigma} sinal(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} ... c_{wj_w} ... a_{nj_n}. \end{aligned}$$

OBS.: Por esta propriedade é possível perceber que não é verdade que $det(A+B) = det(A) + det(B)$.

## Soma entre Colunas

**Teorema 3.6.** *Adicionando a uma coluna (linha) de uma matriz $A$, de ordem $n$, uma outra coluna (linha) paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz $A'$, tal que $det(A') = det(A)$.*

Demonstração:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n. Adicionando a j-ésima coluna à p-ésima coluna multiplicada pela constante $c$ . Obtém-se a matriz

$$det(A') = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & ... & (a_{1j} + c\, a_{1p}) & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & ... & (a_{2j} + c\, a_{2p}) & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3p} & ... & (a_{3j} + c\, a_{3p}) & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} & ... & (a_{nj} + c\, a_{np}) & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3p} & ... & a_{3j} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} & ... & c\, a_{1p} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} & ... & c\, a_{2p} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3p} & ... & c\, a_{3p} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} & ... & c\, a_{np} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & \dots & a_{2p} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3p} & \dots & a_{3p} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & \dots & a_{np} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + c \cdot 0 = det(A) \; .$$

## Determinante de uma Matriz Triangular

**Teorema 3.7.** *Se $A$ é uma matriz triangular (superior ou inferior) então o determinante de $A$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.*

Demonstração:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n, na qual $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$ (triangular superior). Pela definição de determinante o único termo, da soma das permutações dos elementos $a_{ij}$, que não possui um elemento nulo é o produto da diagonal principal. ( o mesmo raciocínio é válido para matriz triangular inferior)

**Exemplo 3.2.5.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14$$

## Determinante da Matriz Singular

**Definição 3.2.2.** Seja A uma matriz de ordem n, então A será chamada matriz **singular**se as colunas (ou linhas) são linearmente dependentes.

**Teorema 3.8.** *Se $A$ é uma matriz singular, então o $det(A) = 0$*

Demonstração: Como o determinante é uma função multilinear alternada, então pelo teorema 2.4. , tem-se $det(A) = 0$.

**Exemplo 3.2.6.**

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

A coluna 1 é o dobro da coluna 3, portanto o determinante é nulo.

## Cálculo de Determinantes Através de Operações Elementares

O que são operações elementares?

**Definição 3.2.3.** As operações elementares sobre linhas (ou colunas) são:

a) permutar linhas.

b) multiplicar uma linha por uma constante não nula.

c) substituir uma linha pela soma desta com outra previamente multiplicada por uma constante.

**Teorema 3.9.** *Se $A_1$ é uma matriz obtida através de uma operação elementar sobre uma linha de uma matriz $A$ de ordem n então existe a matriz $E_1$ tal que $E_1 \times A = A_1$.*

Demonstração: Existem três casos de operações elementares sobre linha, e como se quer efetuar apenas uma operação, então se faz necessário considerar cada caso.

1° - A matriz $A_1$ é obtida a partir de $A$ ao se permutar duas linhas.

Admitindo que $A_1$ foi obtida de $A$ permutando entre si as linhas k e w da matriz $A$. Toma-se a matriz $E_1$ obtida ao efetuar a mesma permutação das linhas k e w na matriz identidade de ordem n,e escreve-se $E_1 \cdot A = C = (c_{ij})$

Então

$$c_{kj} = \sum_{s=1}^{n} e_{ks} a_{sj} = 0 + ... + 0 + 1 \cdot a_{wj} + 0 + ... + 0 = a_{wj},$$

$$c_{wj} = \sum_{s=1}^{n} e_{ws}a_{sj} = 0 + ... + 0 + 1 \cdot a_{kj} + 0 + ... + 0 = a_{kj},$$

Para $i \neq k$ e $i \neq w$,

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} e_{is}a_{sj} = 0 + ... + 0 + 1 \cdot a_{ij} + 0 + ... + 0 = a_{ij}$$

Portanto o produto $E_1 \cdot A$ é a matriz obtida permutando as linhas k e w da matriz A.

2º - A matriz $A_1$ é obtida de $A$ multiplicando-se uma de suas linhas por uma constante não nula.

Admitindo que $A_1$ foi obtida de $A$ multiplicando-se uma linha w por uma constante k não nula. Toma-se a matriz identidade com sua linha w multiplicada pela constante k, e nomeando esta de $E_1$, escreve-se $E_1 \cdot A = C = (c_{ij})$.

Então

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} e_{is}a_{sj} = 0 + ... + 0 + 1 \cdot a_{ij} + 0 + ... + 0 = a_{ij},$$

para todo $i \neq w$ e

$$c_{wj} = \sum_{s=1}^{n} e_{ws}a_{sj} = 0 + ... + 0 + k \cdot a_{wj} + 0 + ... + 0 = k \cdot a_{wj}.$$

3º - A matriz $A_1$ é obtida substituindo uma linha de A pela soma desta linha com outra previamente multiplicada por uma constante.

Admitindo que $A_1$ foi obtida de $A$ substituindo a linha w pela soma desta com uma linha z previamente multiplicada por uma constante k. neste caso toma-se $E_1 = I + D$, todas matrizes de ordem n, onde $D = (d_{ij})$ com $d_{wz} = k$ e $d_{ij} = 0$ para todo $ij \neq wz$.

Então

$$E_1 \cdot A = (I + D) \cdot A = A + D \cdot A$$

Escrevendo $D \cdot A = M = (m_{ij})$ tem-se

$$m_{ij} = \sum_{s=1}^{n} d_{is}a_{sj} = 0$$

para todo $i \neq j$ e

$$m_{wj} = \sum_{s=1}^{n} d_{ws}a_{sj} = k \cdot a_{wj}$$

qualquer que seja $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Portanto $m_{wj} = a_{wj} + k \cdot a_{zj}$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$ e $m_{ij} = a_{ij}$ sempre que $i \neq w$. O resultado acima obtido terá a mesma validade se as operações forem efetuadas sobre as colunas da matriz A e a demonstração seria da mesma forma.

**Definição 3.2.4.** uma matriz elementar é uma matriz obtida a partir da matriz identidade, através da aplicação de uma operação elementar sobre linhas.

**Exemplo 3.2.7.** seja

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

multiplicando a terceira linha de $A$ por 2 obtém-se

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e fazendo a mesma operação sobre a matriz identidade obtém-se

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz $A$ é exatamente o produto

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e o mesmo ocorre com as outras operações elementares.

**Teorema 3.10.** *Se E for uma matriz elementar e A uma matriz qualquer, ambas de ordem n, então det(E.A) = det(E) . det(A)*

Para demonstrar é preciso considerar três possibilidades:

1 - E é obtida da matriz identidade por uma permutação de linhas. Como foi visto no teorema 3.4. de troca de filas de uma matriz o sinal do determinante muda e portanto o $det(E) = -1$

2 - E é obtida da matriz identidade pela multiplicação de uma das linhas por uma constante $k$. Pelo teorema 3.3. visto, se uma linha de uma matriz for multiplicada por uma constante o determinante da matriz fica multiplicado por esta, então $det(E) = k$

3 - E é obtida pela substituição da i-ésima linha da matriz identidade por k vezes a sua j-ésima linha (teorema 3.6.). Neste caso o determinante de uma matriz não se altera e portanto $det(E) = 1$

A aplicação repetida deste teorema fornece o resultado a seguir.

Corolário: Se $B$ é uma matriz de ordem n e se $E_1, E_2, ..., Er$ são matrizes elementares de ordem n, então $det(E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_r \cdot B) = det(E_1) \cdot det(E_2 \cdot ...E_r \cdot B) = ... = det(E_1) \cdot det(E_2) \cdot ... \cdot det(E_r) \cdot det(B)$ .

**Teorema 3.11.** *Qualquer matriz elementar é inversível e sua inversa é, também, uma matriz elementar.*

Demonstração: Seja $E$ uma matriz elementar, então $E$ é o resultado de alguma operação elementar sobre linha de $I$. Aplicando o teorema que diz que o produto $E \cdot A$ resulta quando a mesma operação elementar for realizada em $A$, sabendo que operações elementares e suas inversas se cancelam mutuamente e sendo $E_0$ a matriz elementar com operação inversa de $E$, segue que

$$E_0 \cdot E = I \ e \ E \cdot E_0 = I.$$

Portanto $E,\ E_0$ são inversas.

**Teorema 3.12.** *Se uma matriz $A$ é não singular então é um produto de matrizes elementares.*

Demonstração: ver [6]

## Determinante do Produto de Matrizes

**Teorema 3.13.** *Se $A$ e $B$ são matrizes quadradas de ordem $n$, então $det(A.B) = det(A).det(B)$ .*

Demonstração:

1° caso: Se A é singular, tem-se que A.B é singular. Neste caso det(A.B) = 0, e como det(A) = 0, a igualdade permanece verdadeira.

2° caso: Se A não é singular, tem-se que $A = E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_k$ , ou seja, A pode ser escrito como produto de matrizes elementares. Assim,

$$det(A.B) = det(E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_k \cdot B) = det(E_1) \cdot det(E_2 \cdot ... \cdot E_k \cdot B)$$

$$= ... = det(E_1) \cdot det(E_2) \cdot ... \cdot det(E_k) \cdot det(B) = det(E_1) \cdot ... \cdot det(E_{k-1} \cdot E_k) \cdot det(B)$$

$$= det(E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_k) \cdot det(B) = det(A) \cdot det(B) \ .$$

# Capítulo 4

# Métodos de Condensação

## 4.1 Condensação de Laplace

O teorema de Laplace depende de duas definições iniciais, entretanto veja primeiro o que pode ser feito com o determinante de ordem 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{33}a_{12} \\
&= (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}) + (a_{21}a_{13}a_{32} - a_{21}a_{33}a_{12}) + (a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(-1)(a_{33}a_{12} + a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Simplificando a escrita, tem-se

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1}$$

Os elementos $A_{i1}$ da soma são chamados de cofatores conforme as definições adiante.

**Definição 4.1.1 (Menor).** Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. Chama-se menor, de um elemento $a_{ij}$, o determinante da matriz obtida eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A. O menor será denotado por, $M_{ij}$.

No determinante de ordem 3, anterior, o menor de $a_{21}$ é $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ que é o determinante obtido eliminando a linha 2 e coluna 1 de $A_3$.

**Definição 4.1.2 (Cofator).** Se A é uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ , então o cofator, denotado por $A_{ij}$, será

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \ .$$

**Teorema 4.1 (Laplace).** *O determinante de uma matriz A é calculado pela soma dos produtos de cada elemento de uma linha, ou coluna, qualquer por seus respectivos cofatores, ou seja:*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad ou \qquad det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \ .$$

Demonstração: Ver [6]

Por exemplo, seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

pode-se calcular o determinante da matriz A pela segunda coluna:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i2} A_{i2} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + ... + a_{n2}A_{n2}$$

ou pela terceira linha :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{3j}A_{3j} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + ... + a_{3n}A_{3n}$$

**Exemplo 4.1.1.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (-23) + 2 \cdot (-6) - 2 \cdot (-1) = 59$$

A grande desvantagem em utilizar este método é justamente o fato da necessidade de se fazer uma condensação para cada determinante quando a ordem deste é maior que três. Por exemplo, quando o determinante tem ordem 4 é preciso realizar a expansão de cada um dos cofatores de ordem 3 descobertos na primeira condensação. Isto torma este método extremamente trabalhoso para cálculos feitos a mão.

## 4.2 Condensação de Chio

Considere A uma matriz quadrada de ordem n, $n \geq 2$. Para calcular o determinante de A utiliza-se o seguinte processo:

O elemento $a_{11}$ de A deve ser 1. Caso não seja, efetua-se operações elementares sobre linha, ou coluna, para tornar $a_{11} = 1$.

Para baixar a ordem de A em $n-1$ procede-se da seguinte forma, subtrair do elemento $a_{nn}$ o produto entre o elemento da primeira linha, em sua respectiva coluna, e o elemento da primeira coluna, em sua respectiva linha, ou seja, $a_{nn} - a_{1n} \times a_{n1}$. Este será o novo elemento $a_{(n-1)\times(n-1)}$ da matriz B, que será formada, de ordem $n-1$. Portanto, em uma matriz de ordem 4, o processo pode ser escrito de forma mais clara da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{23} - a_{13}a_{21} & a_{24} - a_{14}a_{21} \\ a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{34} - a_{14}a_{31} \\ a_{42} - a_{12}a_{41} & a_{43} - a_{13}a_{41} & a_{44} - a_{14}a_{41} \end{vmatrix}$$

este processo pode ser repetido até a ordem da matriz resultante se tornar $n = 2$.

Para exemplificar toma-se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

como o elemento $a_{11} = 2$, ou seja é diferente de 1, é necessário efetuar duas trocas de linhas para manter o sinal do determinante e obter:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

agora é possível baixar a ordem aplicando a regra de Chio

$$\begin{vmatrix} 3 - 1.2 & -1 - 2.2 & 0 - 1.2 \\ -2 - 1.4 & 1 - 2.4 & 3 - 1.4 \\ 3 - 1.0 & -2 - 2.0 & 6 - 1.0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -6 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 - (-5).(-6) & -1 - (-2).(-6) \\ -2 - (-5).3 & 6 - (-2).3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -35 & -13 \\ 13 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -420 + 169 = -251$$

Para justificar o processo é necessário entender que a regra de Chio é uma conseqüência da propriedade de soma entre colunas e do teorema geral de Laplace.

Considere a matriz A de ordem $n \geq 2$, tal que $a_{11} = 1$, ou seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ . & . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Efetua-se operações sobre coluna para que os elementos da primeira linha, $a_{12}a_{13}...a_{1n}$, se anulem, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} - a_{11}a_{12} = 0 & a_{13} - a_{11}a_{13} = 0 & ... & a_{1n} - a_{11}a_{1n} = 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & ... & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & ... & a_{3n} - a_{13}a_{1n} \\ . & . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & ... & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{bmatrix}$$

Pelo teorema geral de Laplace, os elementos da primeira linha, exceto $a_{11}$, anulam seus respectivos cofatores e, portanto, a nova matriz de ordem n-1 é:

$$\begin{bmatrix} a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & ... & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & ... & a_{3n} - a_{13}a_{1n} \\ . & . & ... & . \\ a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & ... & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{bmatrix}$$

Repetindo o processo, com a condição de que o elemento da primeira linha e primeira coluna seja a unidade, calcula-se o determinante de A.

Agora observe o seguinte exemplo:

Seja A a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Para aplicar a regra de Chio é necessári efetuar operações sobre linhas ou colunas. Portanto será realizada a seguinte operação sobre colunas, a coluna 2 multiplicada por um meio subtraída da coluna 1. Isto forneceria:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{11}{2} & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

E com este exemplo é fácil concluir que o método de Chio possui uma grande desvantagem para cálculos manuais, o fato da primeira entrada da matriz ser a unidade, pois nem sempre as operações sobre linha ou coluna fornecem resultados inteiros, tornando o método bastante trabalhoso.

## 4.3 Condensação de Dodgson

Como foi dito, na seção 1.2, o método de condensação de Dodgson foi estudado por D. Robbins e H. Rumsey, sendo modificada a notação e denominando método DDI (Dodgson's Determinantal Identity), no qual a condensação é utilizada implicitamente. Portanto a primeira parte desta seção trata do método proposto por Dodgson em seu livro e como ele funciona detalhadamente, já na segunda parte desta seção tem-se uma forma mais atual de efetuar a condensação mas com uma escrita um pouco diferente.

### 4.3.1 O Método de Dodgson

Dada uma matriz $A$ quadrada de ordem n , com $n \geq 3$. O método de condensação de Dodgson consiste nos seguintes passos:

1. Obtém-se o interior de A eliminando as primeiras e últimas linhas e colunas, ou seja, a matriz do interior de A tem ordem $n-2$.

2. Encontre os determinantes $2 \times 2$ dos termos adjacentes formando uma nova matriz quadrada de ordem $n-1$.

3. Use operações elementares sobre linha, ou coluna, para remover os zeros do interior de A (este passo será necessário somente se um ou mais elementos do interior de A forem nulos).

4. Repita o processo de 3 e encontre uma matriz quadrada C de ordem $n-2$ dividindo cada termo pela entrada correspondente do interior da matriz A.

5. Continue "condensando" a matriz obtida, considerando o interior desta, e repetindo os passos 3 e 4, até encontrar um número sozinho. Este número será o determinante da matriz inicial A.

Agora, um exemplo do método de condensação de Dodgson.

**Exemplo 4.3.1.** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Eliminando-se as primeiras e últimas linhas e colunas de A, tem-se:

$$A_{int} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como o interior de A não possui zeros é possivel realizar a primeira condensação, calculando o determinante dos termos adjacentes:

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -3 \\ -18 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Da mesma forma que na matriz A inicial, B também possui interior: $B_{int} = 1$

Na seqüência, será repetido o processo anterior para baixar a ordem de B e cada termo é dividido pelos respectivos valores do interior de A ($A_{int}$), efetuando nova condensação, encontrando C.

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -16 & 1 \\ -18 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -18 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -75 & 34 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{-2} & \frac{-2}{-1} \\ \frac{-75}{-5} & \frac{34}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Por último, restará a matriz D com uma única entrada, a qual será encontrada calculando o determinante de C

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \end{pmatrix}$$

Portanto o determinante da matriz A de ordem 4 é igual ao determinante de D dividido pelo interior de B, sendo este o número 'sozinho' do processo. Assim,

$$det(A) = \frac{det(D)}{B_{int}} = \frac{13}{1} = 13$$

Charles Dodgson escreve o algoritmo de forma bastante sintetizada, assim

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -16 & 1 & -3 \\ -18 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{vmatrix}$$

$$13$$

A prova de como o método funciona é dada por Dodgson no apêndice II do livro [4], através de um teorema sobre determinantes do capítulo II, teorema este que já havia sido provado por Jacobi.

Para entender porque o método funciona é necessária a seguinte definição:

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de ordem n, então sua matriz de cofatores é

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & A_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ . & . & . & & & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}$$

em que $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ é o cofator de $a_{ij}$ em A, e $D_{ij}$ é o menor da matriz a eliminando a linha i e a coluna j.

**Exemplo 4.3.2.** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

então sua matriz de cofatores deve ser

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 13 \\ -11 & 7 & -7 \\ -4 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

Para entender a mecânica do método de condensação de Dodgson basta dar uma olhada no teorema a seguir.

**Teorema 4.2 (Jacobi).** *: Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$. Considerando a matriz das seguintes entradas de $A$,*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

*e a submatriz da matriz dos cofatores associados a essas entradas é*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{1n} \\ A_{n1} & A_{nn} \end{pmatrix},$$

*então*

$$det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{1n} \\ A_{n1} & A_{nn} \end{pmatrix} = det(intA)det(A)$$

Demonstração: Ver [4]

Dodgson percebeu que o teorema de Jacobi fornece um algoritmo para encontrar o determinante de A.

**Exemplo 4.3.3.** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é $-30$. Utilizando a matriz dos cofatores associados às entradas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

que é:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

sabendo que

$$det \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = 60$$

pelo teorema de Jacobi

$$det \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = det(intA) \cdot detA = a_{22} \cdot detA = -2 \cdot det(A)$$

Então $det(A) = \frac{60}{-2} = -30$

### 4.3.2 O Método DDI (Dodgson's Determinantal Identity)

Para uma matriz A de ordem n, $A_r(i, j)$ denota o menor de ordem r, que possui r linhas e r colunas adjacentes de A, ou seja, é o menor de ordem $r$ que mantém as entradas da linha i e coluna j da matriz A.

Exemplo: seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

O menor $A_2(2, 1)$ é o determinante da submatriz de A de ordem 2 que mantém a linha 2 e coluna 1 de A, ou seja:

$$A_2(2,1) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Agora vamos considerar a mesma matriz A do exemplo 4. 3. 1.

O determinante que se quer encontrar é

$$A_4(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}.$$

O interior de $A_4(1, 1)$ é

$$A_2(2,2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Para iniciar a condensação é necessário calcular os menores $3 \times 3$ de $A_4(1, 1)$, que são

$$A_3(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}, \qquad A_3(2,2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix},$$

$$A_3(1,2) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A_3(2,1) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Para calcular os determinantes destes menores $3 \times 3$ é preciso calcular, primeiro, seus respectivos menores $2 \times 2$. Portanto, para o menor

$$A_3(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{que possui interior } A_1(2,2) = -2 \text{ ,}$$

calculam-se os seguintes menores $2 \times 2$ ,

$$A_2(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \qquad A_2(2,2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_2(1,2) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A_2(2,1) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

O determinante de $A_3(1,1)$ é igual ao determinante, formado por seus menores, divididos pelo determinante do interior dele mesmo, ou seja,

$$det(A_3(1,1)) = \frac{\begin{vmatrix} A_2(1,1) & A_2(1,2) \\ A_2(2,1) & A_2(2,2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1(2,2) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -16 & 1 \\ -18 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-2} = -1 \text{ .}$$

O mesmo processo é feito nos demais menores $3 \times 3$. Assim, para o menor

$$A_3(2,2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \text{que tem interior } A_1(2,2) = 2$$

calculam-se os seguintes menores $2 \times 2$,

$$A_2(1,1) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}, \qquad A_2(2,2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix},$$

$$A_2(1,2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{e} \qquad A_2(2,1) = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

e o determinante de $A_3(2,2)$ é calculado da mesma forma que no menor anterior, ou seja,

$$det(A_3(2,2)) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix}} = \frac{34}{2} = 17 \ .$$

O processo continua no menor $3 \times 3$,

$$A_2(2,2) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{cujo interior é } A_1(2,2) = 1$$

e seus menores $2 \times 2$ são,

$$A_2(1,1) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad A_2(2,2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_2(1,2) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A_2(2,1) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

e o determinante é encontrado como nos menores anteriores, assim

$$det(A_3(1,2)) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}} = \tfrac{-2}{1} = -2\ .$$

O último menor $3 \times 3$ será calculado repetindo o processo, então

$$A_3(2,2) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{tem interior } A_1(2,2) = -5\ ,$$

seus menores $2 \times 2$ são

$$A_2(1,1) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}, \qquad A_2(2,2) = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix},$$

$$A_2(1,2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A_2(2,1) = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

e o determinante é

$$det(A_3(2,1)) = \frac{\begin{vmatrix} -18 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 \end{vmatrix}} = \tfrac{-75}{-5} = 15$$

Por fim o determinante da matriz A que se quer obter é encontrado calculando o determinante de seus menores $3 \times 3$ e dividindo pelo determinante do interior de A, ou seja,

$$det(A_4(1,1)) = \frac{\begin{vmatrix} A_3(1,1) & A_3(1,2) \\ A_3(2,1) & A_3(2,2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2(2,2) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 15 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{13}{1} = 13$$

Perceba que a condendasação de Dodgson é utilizada repetidamente ao se calcular os menores e dividir pelo interior, ou seja, o método DDI nada mais é do que a aplicação da condensação de Dodgson com uma notação diferente.

# Considerações Finais

Neste trabalho foram apresentados três métodos de condensação de determinantes, com o objetivo principal de verificar a facilidade de utilização de cada um deles, com a intenção de utilizá-los para cálculo manuais.

Ficou evidente que a condensação de Laplace é a melhor forma de compreender o determinante. Por isso, é fundamental no estudo inicial de determinantes.

A condensação de Chio é um método já difundido e bastante prático para o cálculo de determinantes. A desvantagem é que a matriz precisa ser alterada para que a primeira entrada seja igual a um.

Por fim, foi possível perceber que a condensação de Dodgson é um método alternativo e que também pode ser lecionado pelos professores de matemática a partir do ensino médio, pois é bastante prático em cálculos manuais de determinantes de ordem maior do que três.

# Referências Bibliográficas


[1] David M. Bessoud. *The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. New York: Cambridge University Press, 1999.

[2] José Luiz Boldrini. *Álgebra Linear 3ª edição*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[3] John K Boumgart. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. v 4*. São Paulo: editora Atual, 1994.

[4] Charles Lutwidge Dodgson. *An Elementary Treatise on Determinants*. London: Macmillan and CO, 1867.

[5] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Álgebra Linear*. São Paulo: Univ. de São Paulo e Polígono, 1970.

[6] Howard Whitley Eves. *Elementary Matrix Theory*. New York: Dover Publications, 1980.

[7] Howard Whitley Eves. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.

[8] Anton Howard and Chris Rorres. *Elementary Linear Algebra.* New York : J Wiley, 1994.

[9] Serge Lang. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

[10] Arnaldo Garcia Yves Lequain. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

[11] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear 7ed*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[12] Mark Lotkin. Note on the method of contractants. *The American Mathematical Monthly*, 66(6):476–479, Jun - Jul 1959.

[13] Thomas Muir. *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development(Vol I) second edition*. London: The Macmillan Company, 1906.

[14] Thomas Muir. *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development(Vol II) second edition*. London: The Macmillan Company, 1906.

[15] David E Smith. *. History of Matematics vol II - Especial topics of elementary mathematics.* New York: Dover Publications, 1958.

[16] David E Smith. *History of Matematics vol I. - General Survey of the history of elementary mathematics.* New York: Dover Publications, 1958.