UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Curso de Licenciatura em Matemática

Tópicos de Álgebra Linear Aplicados a Equações Diferenciais

Autora: Daniela Francisco
Orientador: Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Florianópolis
Fevereiro 2009

Daniela Francisco

Tópicos de Álgebra Linear Aplicados a Equações Diferenciais

Trabalho acadêmico de graduação apresentado
à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II,
do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura,
do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da
Universidade Federal de Santa Catarina

Professora: Carmem Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis
Fevereiro 2009

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por ter me dado fé, sabedoria, perseverança e força de vontade para conseguir completar mais esta etapa em minha vida.

Agradeço a minha família pelo amor e estímulo que sempre me deram, em especial a minha mãe Nilza, meu irmão Dorli e minha irmã Madalena, que foram essenciais em minha jornada.

Agradeço a meu marido Guilherme pelo carinho, força, estímulo, compreensão e paciência, já que meus horários de estudar e trabalhar nem sempre eram comuns, e muitas vezes não pudemos ficar juntos tanto tempo quanto queríamos, agradeço também por ter me dado este presente tão lindo que estou esperando que é nosso primeiro filho.

Agradeço a todos os mestres com quem tive o prazer de estudar durante minha permanência no curso, obrigada por todas as lições aprendidas, em especial ao meu orientador, professor Gustavo Torres, por todo o tempo e dedicação, você foi uma pessoa muito marcante em minha vida e ao professor Danilo Royer, com quem aprendi muitas coisas e de quem sempre recebi um grande estímulo nesta jornada.

Agradeço a todos os amigos e colegas que tive o prazer de conhecer ao longo da caminhada, alguns que já se foram, e outros ainda presentes, guardo de todos alguma recordação muito especial, seja dos momentos de estudo ou de conversas sobre a vida, com todos aprendi algo que levarei comigo durante minha vida, agradeço em especial a minha "dinda" Cinthia por ser essa amiga maravilhosa, obrigada por tudo.

Enfim, a todos que me acompanharam nesta jornada, muito obrigada!

Tópicos de Álgebra Linear Aplicados a Equações Diferenciais

por

Daniela Francisco

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 02/CMM/09.

Profª Carmem Suzana Comitre Gimenez

Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa (Orientador)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger (UFSC)

Prof. Dr. Luciano Bedin (UFSC)

Sumário

Introdução

Neste trabalho de conclusão de curso aplicaremos determinados tópicos de Álgebra Linear na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias.

No primeiro capítulo abordaremos o assunto de ***Autovalores*** *e* ***Autovetores,*** que são tópicos da Álgebra Linear. Iniciaremos com algumas definições e propriedades sobre o tema, já em um segundo momento, abordaremos a forma canônica de Jordan, pois sabemos que toda matriz é similar a uma matriz que esteja na forma canônica de Jordan.

No segundo capítulo nos fixaremos nas ***Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) de primeira e segunda ordem***. Sabemos que o estudo das EDO's teve início com os criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no fim do século XVIII, que foram motivados por problemas da área de Física. Desde aquela época até meados do século XIX, a maior preocupação era obter soluções das equações em forma explícita. A priori, tentava-se expressar as soluções em forma de funções elementares, porém, logo se verificou que o número de equações que podiam ser resolvidas desta forma era muito pequeno, gerando assim a busca de novos métodos. Neste contexto surgiu o uso de séries de funções, no século XIX. Com o rigor que a Análise ganhava nesse período, surgiram os teoremas de existência e unicidade de solução, iniciando-se a fase moderna de estudos nessa área, com destaque para Poincaré no fim do século XIX. Hoje as equações diferenciais são muito utilizadas para descrever fenômenos em Física, Química, Biologia, Economia, entre outros.

Para finalizar, no terceiro capítulo iremos utilizar os conhecimentos adquiridos nos capítulos anteriores e aplicá-los na resolução de **sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem com**

coeficientes constantes. Com base nesses sistemas determinaremos a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes de ordem arbitrária

No apêndice, encontram-se propriedades, que foram utilizadas no decorrer do trabalho, de derivadas e integrais de matizes.

Capítulo 1

Autovalores e Autovetores

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e propriedades básicas sobre autovalores e autovetores de uma matriz. Não provaremos todos os resultados, porém serão enfatizados através de exemplos. Para este capítulo, a referência em que os resultados foram pesquisados foi a [1].

1.1 Definições e Propriedades

Definição 1.1.1: *Seja A uma matriz* $n \times n$*. Um* ***autovalor*** *de A é um número* λ*, real ou complexo, que satisfaz a equação*

$$Ax = \lambda x \tag{1.1}$$

para alguma matriz x *de ordem* $n \times 1$*, não nula, chamada de* ***autovetor*** *de A associado a* λ*.*

A equação (1.1) pode ser escrita na forma

$$(A - \lambda I)x = 0, \tag{1.2}$$

em que I é a matriz identidade $n \times n$.

Teorema 1.1.1*:* *Seja A uma matriz* $n \times n$*. Então*

i. λ *é um autovalor de A se, e somente se,*

$$\det(A-\lambda I)=0, \tag{1.3}$$

ii. $\det(A-\lambda I)$ *é um polinômio de grau n em* λ, *com 1 como coeficiente de* λ^n, *chamado polinômio característico, de forma geral*

$$\det(A-\lambda I)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_p)^{r_p}, \tag{1.4}$$

em que $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ *são os autovalores distintos de A e* $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$. *O número* r_i *é chamado de multiplicidade do autovalor* λ_i,

iii. *A tem precisamente n autovalores, contando as multiplicidades.*

Os possíveis autovalores de *A* são, portanto, raízes de um polinômio de grau *n*, chamado polinômio característico, determinado por (1.3). Assim, *A* tem precisamente *n* autovalores, não necessariamente distintos.

Exemplo 1.1.1: Considere a matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Temos que

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda+1)(\lambda-3).$$

Pelo teorema acima, *-1* e *3* são autovalores de *A*. Para encontrar os autovetores associados a *-1* resolvemos a equação $(A-\lambda I)x=0$ com $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ e $\lambda=-1$:

$$0=(A+1I)x=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}x,$$

o que implica $x_1+x_2=0$ ou $x_2=-x_1$. Portanto, para todo $x_1\neq 0$, os autovetores de *A* associados a *-1* são múltiplos escalares de $u=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

Resolvendo a equação para $\lambda = 3$, obtém-se que os autovetores de A associados a *3* são múltiplos escalares de $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 1.1.2: Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, temos

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & -4 \\ 4 & -8-\lambda & -1 \\ -4 & -1 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda + 9)^2$$

Então *9* e *-9* são os autovalores de A com multiplicidade 1 e 2, respectivamente. Procedendo como no exemplo anterior, os autovetores de A associados a *9* são todos os múltiplos escalares não nulos de $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = -9$, a equação

$$(A + 9I)x = 0 = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

implica em $4x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Tomando $x_3 = 4x_1 + x_2$ encontramos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então, para escalares x_1 e x_2 não simultaneamente nulos, os autovetores de A associados a *-9* são todas as combinações lineares não nulas dos vetores

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.1.3: Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Temos

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

Então, *i* e *–i* são os autovalores de *A*. Procedendo como antes, os autovetores de *A*, associados com *i*, são todos múltiplos complexos não nulos de

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma os autovetores de *A*, associados a *–i*, são todos múltiplos complexos não nulos de

$$w = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.1.2: *O determinante de uma matriz A,* $n \times n$*, é igual ao produto de seus autovalores.*

Prova: Vimos que os autovalores de uma matriz *A*, $n \times n$, são as *n* raízes do polinômio característico $\det(A - \lambda I) = 0$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de *A*. Então podemos escrever

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda).$$

Para $\lambda = 0$,

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n .$$

Corolário 1.1.1: *Uma matriz A,* $n \times n$*, é não singular se, e somente se, todos os seus autovalores são não nulos.*

Exemplo 1.1.4: No exemplo 1.1.1, vimos que $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ são autovalores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que $\det(A) = -3 = \lambda_1\lambda_2$.

Exemplo 1.1.5: No exemplo 1.2 encontramos os autovalores $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -9$ e $\lambda_3 = -9$ da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Efetuando os devidos cálculos temos $\det(A) = 729 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Exemplo 1.1.6: Os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, do exercício 1.3, são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Note que $\det(A) = 1 = \lambda_1\lambda_2$.

Pode-se observar nos exemplos que a soma dos autovalores de uma matriz é igual à soma dos elementos da diagonal da matriz. Isso não é uma coincidência, mas uma propriedade geral. A soma dos elementos, que formam a diagonal de uma matriz A, $n \times n$, é chamada de **traço** de *A* e indicada por $tr(A)$.

Teorema 1.1.3: *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de uma matriz A, $n \times n$. Então,*

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n. \qquad (1.5)$$

Teorema 1.1.4: *Seja A uma matriz $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Então,*

i. *A e A^t tem os mesmos autovalores, e*

ii. *Se A é não singular, os autovalores de A^{-1} são $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$.*

Definição 1.1.2: *Diz-se que a matriz B é similar à matriz A se existe uma matriz P não singular tal que*

$$B = P^{-1}AP. \qquad (1.6)$$

Teorema 1.1.5: *Seja B similar à A. Então:*

i. *A e B tem o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores, e*

ii. *Se x é um autovetor de A, então* $P^{-1}x$ *é autovetor de B.*

Prova: Temos que

$$\det(B-\lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det\left[P^{-1}(A-\lambda I)P\right].$$

Usando a propriedade dos determinantes segundo a qual $\det(CD) = \det C . \det D$, segue

$$\det(B-\lambda I) = \det P^{-1} \det(A-\lambda I)\det P = \det(P^{-1}P)\det(A-\lambda I) = \det(A-\lambda I).$$

Então, se λ é autovalor de *A*, temos que $\det(A-\lambda I)=0$ e, logo, $\det(B-\lambda I)=0$, provando que λ também é autovalor de *B*. Seja *x* autovetor de *A*, $Ax = \lambda x$. Então,

$$BP^{-1}x = P^{-1}APP^{-1}x = P^{-1}Ax = \lambda(P^{-1}x),$$

ou seja, $P^{-1}x$ é autovetor de *B*.

Definição 1.1.3: *Uma matriz A,* $n \times n$*, é dita ser* ***diagonalizável*** *se existe uma matriz diagonal D similar à A, ou seja, existe uma matriz não singular P tal que*

$$P^{-1}AP = D. \qquad (1.7)$$

Teorema 1.1.6: *Uma matriz A,* $n \times n$*, é diagonalizável se, e somente se, A tem n autovetores linearmente independentes.*

Teorema 1.1.7: *Sejam* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *os m autovalores distintos de uma matriz A,* $n \times n$*, e* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *os autovetores correspondentes. Então* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *são linearmente independentes.*

Prova: Suponha que $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é linearmente dependente. Desse modo, satisfazem a equação

$$\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0$$

em que as constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ não são todas nulas. Sem perda de generalidade, suponha $c_m \neq 0$. Então, multiplicando a matriz A pela esquerda, obtemos

$$0 = A\sum_{i=1}^{m} c_i v_i = \sum_{i=1}^{m} c_i A v_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i v_i \ .$$

Em seguida, subtraia $\lambda_1 \sum_{i=1}^{m} c_i v_i = 0$ deste resultado:

$$0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_1 v_i = \sum_{i=1}^{m} c_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = \sum_{i=2}^{m} c_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i \ ,$$

e multiplique o obtido por $A - \lambda_2 I$. Segue-se que

$$(A - \lambda_2 I)\sum_{i=2}^{m} c_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = \sum_{i=2}^{m} c_i (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) v_i = \sum_{i=3}^{m} c_i (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) v_i \ .$$

Continuando, multiplique este resultado por $A - \lambda_3 I$, depois por $A - \lambda_4 I$, e assim por diante. Conclui-se que

$$0 = c_m (\lambda_m - \lambda_{m-1})(\lambda_m - \lambda_{m-2}) \ldots (\lambda_m - \lambda_1) v_m \ ,$$

o que contradiz a hipótese de que $c_m \neq 0$ já que $v_m \neq 0$ e os autovalores são todos distintos entre si. Logo, a hipótese de que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são linearmente dependentes não pode ser mantida.

Teorema 1.1.8: *Se uma matriz A,* $n \times n$*, tem* n *autovetores linearmente independentes* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *com autovalores associados* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*, e P é matriz com* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *como suas colunas, então*

$$P^{-1}AP = D, \qquad (1.8)$$

em que D é a matriz diagonal com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *como seus elementos.*

Exemplo 1.1.7: A seqüência $(p_k)_{k\geq 1}$ de números em que

$$p_1 = p_2 = 1$$

e

$$p_k = p_{k-1} + p_{k-2}$$

para $k \geq 3$, é conhecida pelo nome de **seqüência de Fibonacci**. A fórmula que define p_k pode ser expressa matricialmente como

$$P_k = AP_{k-1},\ k \geq 2$$

em que

$$P_k = \begin{pmatrix} p_{k-1} \\ p_k \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{array}{l} P_3 = AP_2 \\ P_4 = AP_3 = A^2 P_2 \\ \vdots \\ P_k = A^{k-2} P_2 \end{array}.$$

Os autovalores de A são dados pelas raízes do polinômio característico

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Vamos, agora, determinar os autovetores correspondentes. Substitua λ_1 na equação $(A - \lambda I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que nos dá

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_1 - x_2 = 0.$$

Então, os autovetores associados a λ_1 são da forma

$$u = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$$

um para cada $x_1 \in \Re$. Usando argumento similar,

$$w = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

são os autovetores de A associados a λ_2, um para cada $x_1 \in \Re$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o conjunto $\{u, w\}$ é linearmente independente.

Aplicando, agora, o teorema acima sabemos que A é diagonalizável. Portanto, temos $P^{-1}AP = D$, em que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
&A = PDP^{-1} \\
&A^2 = A.A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1} \\
&A^2 = A.A^2 = (PDP^{-1})(PD^2P^{-1}) = PD^3P^{-1} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&A^{k-2} = PD^{k-2}P^{-1}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$D^{k-2} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k-2} \end{pmatrix} \text{ e } P^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$P_k = A^{k-2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = PD^{k-2}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^{k-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando as matrizes, segue que

$$P_k = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_1^{k-2}(\lambda_2 - 1) + \lambda_2^{k-2}(-\lambda_1 + 1) \\ \lambda_1^{k-1}(\lambda_2 - 1) + \lambda_2^{k-1}(-\lambda_1 + 1) \end{pmatrix}.$$

Então,

$$p_k = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_1^{k-1}\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^{k-1} - \lambda_1^{k-1} + \lambda_2^{k-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\lambda_1^{k-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda_2^{k-1} - \lambda_1^{k-1} + \lambda_2^{k-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\lambda_1^{k-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\lambda_2^{k-1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^{k} - \lambda_2^{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

Definição 1.1.4: *Seja* λ *um autovalor de uma matriz A,* $n \times n$. *O conjunto* $A_\lambda = \{v : Av = \lambda v\}$ *é chamado* ***autoespaço*** *de A associado a* λ.

Exemplo 1.1.8: No exemplo 1.3 vimos que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

tem -*9*,-*9* e *9* como seus autovalores.

Os autovetores associados com *9* são os múltiplos escalares não nulos de

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

enquanto os autovalores de *A* associados com -*9* são todas combinações lineares não nulas de

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, A_9 consiste em todos os múltiplos escalares de *u* e A_{-9} consiste em todas as combinações lineares de v_1 e v_2.

Teorema 1.1.9: *Seja λ um autovalor de uma matriz A, $n \times n$. Então, A_λ é um espaço vetorial com respeito às operações usuais de adição e multiplicação por escalares . Além disso, se $v \in A_\lambda$, então $Av \in A_\lambda$.*

Prova: Por definição, $v \in A_\lambda$ se $Av = \lambda v$. Seja $\alpha \in \Re$, então $A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha \lambda v$, portanto, $A(\alpha v) = \lambda(\alpha v)$ e $\alpha v \in A_\lambda$. Seja $w \in A_\lambda$ e $\beta \in \Re$. Temos que $A(\alpha v + \beta w) = \alpha(Av) + \beta(Aw) = \alpha\lambda v + \beta\lambda w = \lambda(\alpha v + \beta w)$. Portanto, $\alpha v + \beta w \in A_\lambda$. Uma vez que $\alpha v \in A_\lambda, \forall \alpha \in \Re$, tomando $\alpha = \lambda$ segue que $Av = \lambda v \in A_\lambda$.

Teorema 1.1.10: *Seja A matriz $n \times n$ e λ um autovalor de A com multiplicidade n. Então,* $\dim A_\lambda \leq n$.

1.2 Forma Canônica de Jordan

Definição 1.2.1: *Uma matriz $n \times n$ da forma*

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \qquad (1.9)$$

*é chamada de matriz **bloco de Jordan.** Uma matriz $n \times n$ é dita estar na **forma canônica de Jordan** se é uma matriz diagonal da forma*

$$diag(J_1, J_2, ..., J_k) \qquad (1.10)$$

em que $J_1, J_2, \dots, J_k$ *são :*

i. *Matrizes blocos de Jordan, ou*
ii. J_1 *é uma matriz diagonal e* $J_2, J_3, \dots, J_k$ *são blocos de Jordan.*

Vimos anteriormente que se uma matriz A, $n \times n$, tem n autovetores linearmente independentes $v_1, v_2, \dots, v_n$ com autovalores associados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, e P é matriz com $v_1, v_2, \dots, v_n$ como suas colunas, então $P^{-1}AP = D$, em que D é matriz diagonal com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ como seus elementos. No caso em que A não tem n autovetores linearmente independentes, ainda é possível obter uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ tem uma forma bastante simples, chamada **forma canônica de Jordan**, apresentada a seguir.

Teorema 1.2.1: *Toda matriz A* $n \times n$ *é similar a uma matriz na forma canônica de Jordan.*

Definição 1.2.2: *Seja uma matriz A,* $n \times n$, *e* λ *autovalor de A. Diz-se que x, matriz* $n \times 1$ *não nula, é* ***autovetor gerado de posto r*** *associado com* λ *se* $(A - \lambda I)^r x = 0$ *e* $(A - \lambda I)^{r-1} x \neq 0$. *Note que o autovetor gerado de posto 1 é um autovetor de A associado a* λ.

Teorema 1.2.2: *Se* λ *é um autovalor de multiplicidade m de uma matriz A,* $n \times n$, *então, existem exatamente m autovetores gerados linearmente independentes associados a* λ.

Exemplo 1.2.1*:* Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

que tem *4* como autovalor com multiplicidade 3. Pelo teorema 1.2.2, existem três autovetores gerados linearmente independentes associados a *4*. Por cálculo direto,

$$(A-4I)=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ (A-4I)^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ e } (A-4I)^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Vamos determinar os autovetores gerados, de posto $k=1,2,3$. Resolvemos as equações $(A-4I)^k x=0$ e $(A-4I)^{k-1}x\neq 0$.

Segue que um autovetor gerado de posto 1 tem a forma

$$\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix},$$

com $a\neq 0$, um autovetor gerado de posto 2 tem a forma

$$\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix},$$

com $b\neq 0$, e um autovetor gerado de posto 3 tem a forma

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},$$

com $c\neq 0$.

Escolhendo, por exemplo, $a=1$, no primeiro caso, $a=0,b=1$, no segundo caso, e $a=b=0,c=1$, no terceiro caso, obtemos

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

um conjunto de autovetores gerados linearmente independentes sendo um de posto 1, um de posto 2 e um de posto 3, associados ao autovalor *4* com multiplicidade 3.

Definição 1.2.3: *Seja* x_r *um autovetor gerado de posto r associado a* λ*, isto é,* $(A-\lambda I)^r x_r = 0$ *e* $(A-\lambda I)^{r-1} x_r \neq 0$. *O conjunto de vetores* $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ *definidos por*

$$\begin{aligned} x_{r-1} &= (A-\lambda I)x_r \\ x_{r-2} &= (A-\lambda I)x_{r-1} = (A-\lambda I)^2 x_r \\ x_{r-3} &= (A-\lambda I)x_{r-2} = (A-\lambda I)^3 x_r \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_1 &= (A-\lambda I)x_2 = (A-\lambda I)^{r-1} x_r \end{aligned} \tag{1.11}$$

é chamado de ***cadeia gerada por*** x_r. *Note que* $x_k = (A-\lambda I)^{r-k} x_r$ *e que* $(A-\lambda I)^k x_k = (A-\lambda I)^r x_r = 0$. *Portanto,* x_k *é um autovetor gerado de posto k associado a* λ.

Teorema 1.2.3: *Os vetores* $x_1, x_2, ..., x_r$ *são linearmente independentes.*

Exemplo 1.2.2: No exemplo 1.2.1,

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é solução de $(A-4I)^3 x = 0$. A cadeia gerada por x_3 é o conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ em que

$$x_2 = (A-4I)x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } x_1 = (A-4I)x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pelo teorema anterior, x_1, x_2 e x_3 são linearmente independentes.

Definição 1.2.4: *Um conjunto* S_λ *de autovetores gerados associados a* λ *é chamado de* ***conjunto canônico*** *se:*

i. *o número de elementos em* S_λ *é a multiplicidade de* λ*;*

ii. S_λ *é linearmente independente e*

iii. S_λ *consiste na cadeia de autovetores gerados associados a* λ.

Para obter-se o conjunto S_λ, convém saber qual é o número de autovetores gerados de cada posto presentes no conjunto canônico. Essa informação é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1.2.4: *O número de autovetores gerados linearmente independentes de posto k no conjunto canônico de autovetores gerados de* λ *é*

$$r_k = posto(A-\lambda I)^{k-1} - posto(A-\lambda I)^k,\ k = 1,2,\ldots,m,$$

em que m *é a multiplicidade de* λ*. Note que* $posto(A-\lambda I)^0 = posto(I) = n$.

Exemplo 1.2.3: Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

O autovalores de *A* são *2*, com multiplicidade 6, e *3*, com multiplicidade 2.
Por cálculo direto, obtemos que o posto de *A* é 8-6=2,

$$A-2I=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&2&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ (A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},(A-2I)^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Então, 4 é o menor inteiro r tal que $(A-2I)^r$ tem posto 8-6=2. Além disso,

$$\begin{aligned}r_1 &= posto(A-2I)^0 - posto(A-2I)^1 = 8-6=2\\ r_2 &= posto(A-2I)^1 - posto(A-2I)^2 = 6-4=2\\ r_3 &= posto(A-2I)^2 - posto(A-2I)^3 = 4-3=1\\ r_4 &= posto(A-2I)^3 - posto(A-2I)^4 = 3-2=1\end{aligned}.$$

O conjunto canônico de autovetores gerados do autovalor *2* tem

i. 1 autovetor gerado de posto 4,

ii. 1 autovetor gerado de posto 3,

iii. 2 autovetores gerados de posto 2 e

iv. 2 autovetores gerados de posto 1.

Note que,

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é o autovetor gerado de posto 4. A cadeia gerada por x_4 é:

$$x_3 = (A-2I)x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_2 = (A-2I)x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ e } x_1 = (A-2I)x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Encontramos, assim, a cadeia $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de autovetores gerados de postos 1,2,3 e 4. Qualquer conjunto canônico contendo esta cadeia vai conter outra cadeia com dois vetores.

Um autovetor gerado y_2 de posto 2 que não é uma combinação linear da cadeia encontrada anteriormente é o seguinte

$$y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

E encontramos o outro vetor da cadeia $\{y_1, y_2\}$ que é determinado por y_2

$$y_1 = (A - 2I)y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então $\{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2\}$ é o conjunto canônico de autovetores gerados do autovalor 2.

Definição 1.2.5: *Um conjunto ordenado linearmente independente* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *consistindo da cadeia de autovetores gerados da matriz A,* $n \times n$, *é chamado uma* ***base de Jordan*** *relativa a A se*

i. *toda cadeia é o começo de uma cadeia maior,*
ii. *todos vetores em uma cadeia aparecem consecutivamente, e*
iii. *cada cadeia aparece na ordem de aumentar o posto. Ou seja, o autovetor gerado de posto 1 em uma cadeia aparece antes do autovetor gerado na cadeia de posto 2, que por sua vez aparece antes do autovetor gerado na cadeia de posto 3, etc.*

O teorema 1.2.5 seguinte estabelece como uma base de Jordan relativa a uma matriz *A* está associada aos seus autovalores.

Teorema 1.2.5: *Seja* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *os distintos autovalores de A e sejam* $S_1, S_2, \ldots, S_s$ *os conjuntos canônicos de autovetores gerados correspondentes. Depois de um apropriado reordenamento, se necessário, o conjunto* $S = \bigcup_{i=1}^{s} S_i$ *é uma base de Jordan relativa a A.*

Exemplo 1.2.4: Neste exemplo obteremos uma base de Jordan relativa à matriz de ordem 8×8 do exemplo 1.2.3. Naquele exemplo encontramos um conjunto canônico de autovetores gerados do autovalor *2*. Neste exemplo faremos o mesmo para o autovalor *3*, que tem multiplicidade 2. Para começar devemos encontrar um *r* pequeno e inteiro tal que $(A-3I)^r$ tenha posto 8-2=6.

$$(A-3I)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então $r = 2$. Note que

$$z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é o autovetor gerado de posto 2 associado ao autovalor *3*. Então, $\{z_1, z_2\}$ em que

$$z_1 = (A - 3I)z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é a cadeia gerada de z_2. Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2$ os autovetores gerados obtidos no exemplo 1.2.3. Então o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, z_1, z_2\}$ é uma base de Jordan relativa a matriz A do exemplo 1.2.3.

Teorema 1.2.6: *Seja S uma base de Jordan relativa a uma matriz A,* $n \times n$*, e seja M uma matriz tendo os vetores de S como suas colunas. Então,* $M^{-1}AM$ *esta na forma canônica de Jordan.*

De fato, podemos determinar a forma da matriz que está na forma canônica de Jordan $M^{-1}AM$ relativa a base de Jordan *S*. Se $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+r}$ é uma cadeia em *S* de autovetores gerados de posto *r* associados ao autovalor λ de *A*, então o bloco $r \times r$ de Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

aparece na matriz $M^{-1}AM$ ocupando as *k*-ésima e *(k+r)*-ésima colunas e as *k*-ésima e *(k+r)*-ésima linhas.

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccccc} & \text{coluna } k \downarrow & & & & & & \text{coluna } k+r \downarrow & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \text{linha } k \rightarrow \\ \\ \\ \\ \text{linha } k+r \rightarrow \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\cdots & \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
 & 0 & \lambda & 1 & 0 & & 0 & 0 & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \lambda & 1 & \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Exemplo 1.2.5: No exemplo 1.2.4 encontramos a base de Jordan $\{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, z_1, z_2\}$ da matriz 8x8 dada no exemplo 1.2.3. Considere a matriz M que possui os vetores de S como suas colunas. Então, teremos

$$
M = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

após calcular sua inversa, M^{-1}, basta fazermos o produto $M^{-1}AM$, obtendo assim a matriz

$$M^{-1}AM = \left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Capítulo 2

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª ordem

Chama-se de **equação diferencial** uma equação envolvendo uma função incógnita e algumas de suas derivadas.

As equações diferenciais lineares com coeficientes constantes são equações da forma

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 f^{1}(x) + a_0 f\ (x) = g(x)\,,$$

em que $f^{(i)}(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$, denota a *i-ésima* derivada da função $f(x)$, $x \in \mathrm{I} \subseteq \Re$, I um intervalo aberto e *g(x)* uma função contínua dada, em I. Os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ são constantes reais. A equação é chamada de homogênea se $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{I}$. A ordem da equação é a ordem da maior derivada na equação. Se $a_n \neq 0$, então, a equação tem ordem *n*.

Neste capítulo, serão consideradas as equações de ordem $n = 1$ e $n = 2$, bem como suas resoluções. O caso geral será tratado no capítulo 3.

A referência em que os resultados foram pesquisados é a [2].

2.1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Consideremos a EDO linear de primeira ordem com coeficientes constantes

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + af = g(\mathrm{x})\ ,\ x \in I \qquad (2.1)$$

com a uma constante e g uma função definida g: I$\rightarrow \Re$, contínua no intervalo aberto I. Uma solução de (2.1) é uma função contínua e diferenciável f: I $\rightarrow \Re$ que satisfaz a EDO acima.

Teorema 2.1.1: *Uma função f(x)é solução da equação (2.1) se, e somente se,*

$$f(x) = k\mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-ax}\int \mathrm{e}^{ax} g(x)dx \qquad (2.2)$$

em que k *é uma constante real.*

Prova: Suponha que $f(x)$ é solução. Então, $f'(x) + af = g$. Queremos mostrar que, nesse caso, f é da forma (2.2). De fato, observe que multiplicando a equação por e^{ax} obtemos

$$f'(x)\,\mathrm{e}^{a\mathrm{x}} + a\ f(x)\,\mathrm{e}^{a\mathrm{x}} = g(x)\ \mathrm{e}^{a\mathrm{x}}.$$

como

$$f'(x)\,\mathrm{e}^{a\mathrm{x}} + a\ f(x)\,\mathrm{e}^{a\mathrm{x}} = (\ f(x)\,\mathrm{e}^{a\mathrm{x}})'$$

então,

$$(\ f(x)\,\mathrm{e}^{ax})' = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{g(x)}.$$

Integrando ambos os membros desta última relação, temos

$$f(x) = k\mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-ax}\int \mathrm{e}^{ax} g(x)dx.$$

Provaremos, agora, a recíproca deste resultado, ou seja, toda função da forma (2.2) é solução da equação. Para verificar isso, basta derivar a expressão (2.2) com respeito a *x*. Isso conclui a prova do teorema.

A função *f(x)* dada pela expressão (2.2) é chamada de solução geral da equação (2.1), pois sendo k uma constante arbitrária, a cada $k \in \Re$ correspem que uma solução particular da equação e o conjunto destas soluções particulares inclui todas as soluções possíveis.

Exemplo 2.1.1: Considere a equação $f'(x)+3f(x)=x$, $x\in\Re$.

Pelo teorema anterior, a solução geral desta equação é da forma

$$f(x)=ke^{-3x}+e^{-3x}\int e^{3x}xdx.$$

Resolvendo a integral obtemos

$$f(x) = k\mathrm{e}^{-3x}+\mathrm{e}^{-3x}\left(\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}+c\right),$$

em que c é uma constante arbitrária. Tome $c+k=c_0$, então a solução geral é

$$f(x) = \mathrm{c}_0\mathrm{e}^{-3x}+\frac{x}{3}-\frac{1}{9}.$$

2.2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Homogêneas

Nesta seção vamos estudar as EDO's lineares de segunda ordem com coeficientes constantes da forma

$$\frac{d^2f}{dx^2}+b\frac{df}{dx}+cf=g, \qquad (2.3)$$

com b e c constantes reais e g: I $\to\Re$ uma função contínua no aberto I$\subseteq\Re$.

Consideremos, primeiramente, a equação homogênea associada a (2.3), isto é,

$$f''(x)+bf'(x)+cf(x)=0. \qquad (2.4)$$

O polinômio

$$\mathrm{p}(\lambda)=\lambda^2+b\lambda+c \qquad (2.5)$$

é dito **polinômio característico** associado à equação homogênea (2.4).

Teorema 2.2.1: *Sejam λ_1 e λ_2 raízes reais do polinômio característico (2.5), então:*

i. Se $\lambda_1\neq\lambda_2$, uma função f(x) é solução da equação homogênea (2.4) se, e somente se,

$$f(x)=A\,e^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x},$$

com A,B constantes reais e

ii. *Se* $\lambda_1 = \lambda_2$, *uma função f(x) é solução da equação homogênea (2.4) se, e somente se,*

$$f(x) = A\ e^{\lambda_1 x} + Bx e^{\lambda_1 x},$$

em que A e B são constantes reais.

Prova: As raízes de

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

são dadas por

$$\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

satisfazendo

$$-\lambda_1 - \lambda_2 = \text{b e } \lambda_1 \lambda_2 = \text{c.}$$

Logo, a equação (2.4) pode ser reescrita como

$$0 = f''(x) + (-\lambda_1 - \lambda_2)\ f'(x) + (\lambda_1 \lambda_2)\ f(x)$$

$$= f''(x) - \lambda_1\ f'(x) - \lambda_2\ f'(x) + (\lambda_1 \lambda_2)\ f(x)$$

ou ainda,

$$0 = (\ f'(x) - \lambda_1\ f(x)\ )' - \lambda_2\ (\ f'(x) - \lambda_1\ f(x)\ ).$$

Portanto, f é solução de (2.4) se, e somente se,

$$f'(x) - \lambda_1\ f(x)$$

for solução de

$$u'(x) - \lambda_2\ u(x) = 0.$$

Pelo resultado da seção anterior, sabemos que a solução geral da equação é

$$u(x) = k_2\ e^{\lambda_2 x}$$

Então, f é solução de (2.4) se, e somente se, satisfaz

$$f'(x) - \lambda_1\ f(x) = k_2\ e^{\lambda_2 x}.$$

A solução geral da equação acima é

$$f(x) = k_1\ e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} k_2 e^{\lambda_2 x} dx$$

$$= k_1\ e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x}\ k_2 \int e^{-\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} dx$$

$$= k_1\, e^{\lambda_1 x} + k_2\, e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx\,.$$

No caso de $\lambda_1 = \lambda_2$,

$$\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx = \int e^0 dx = \int 1 dx = x + c_1\,.$$

Então $f(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}$, com A = $k_1 + c_1$ e B = k_2.

No caso de $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx = \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2-\lambda_1} + c_2$$

Então,

$$\text{y(x)} = k_1\, e^{\lambda_1 x} + \frac{k_2}{\lambda_2-\lambda_1}\, e^{\lambda_1 x}\, e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} = k_1\, e^{\lambda_1 x} + \frac{k_2}{\lambda_2-\lambda_1}\, e^{\lambda_1 x - \lambda_1 x + \lambda_2 x} = \text{A}\, e^{\lambda_1 x} + \text{B}\, e^{\lambda_2 x}$$

com A = $k_1 + c_2$ e B = $\dfrac{k_2}{\lambda_2-\lambda_1}$.

Finalizando assim a prova.

Exemplo 2.2.1: Considere a EDO

$$f'' + 5f' + 6f = 0$$

e as condições iniciais $f'(0) = 4 = f(0)$.

O polinômio característico associado a equação considerada será

$$\text{p}(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

com raízes reais

$$\lambda_1 = -2 \text{ e } \lambda_2 = -3.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução geral de $f'' + 5f' + 6f = 0$ será

$$f = A\, e^{-2x} + Be^{-3x},$$

em que A e B são constantes arbitrárias. Para cada par destas constantes obtemos uma solução particular da equação.

Impondo agora as condições iniciais $f(0) = 4$ e $f'(0) = 4$ obtemos

$$\begin{cases} A+B=4 \\ -2A-3B=4 \end{cases}$$

do qual segue $A=16$ e $B=-12$

Logo,

$$f(x) = 16e^{-2x} - 12e^{-3x}.$$

Exemplo 2.2.2: Considere a EDO

$$f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 0$$

e as condições $f(0) = 3$ e $f'(0) = 2$.

O polinômio característico associado a equação acima é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9,$$

sendo as raízes

$$\lambda_1 = 3 = \lambda_2.$$

Portanto, a solução geral de $f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 0$ será da forma

$$f = A\, e^{\lambda_1 x} + Bx\, e^{\lambda_1 x}.$$

Impondo as condições $f(0) = 3$ e $f'(0) = 2$, e realizando os devidos cálculos, obtemos

$$f = 3e^{\lambda_1 x} - 7x e^{\lambda_1 x}.$$

Teorema 2.2.2: *Seja a equação (2.4), com* $b,c \in \Re$, *e suponha que o polinômio característico tenha raízes complexas* $\lambda = \alpha \pm \beta i$, *com* $\alpha = \frac{-b}{2}$ *e* $\beta = \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$. *Então a solução geral de (2.5) será*

$$f = e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + \mathrm{B}\, sen(\beta x)],\ com\ A,B \in \Re. \qquad (2.6)$$

Prova: Tome as funções h, j definidas em $\Re$, em que $\forall x$

$$h(\mathrm{x}) = e^{\frac{-b}{2}x} j(\mathrm{x}). \qquad (2.7)$$

Iremos mostrar que h(x) será solução da equação $f''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$ se, e somente se, j for solução de

$$f'' + \left(\frac{-\Delta}{4}\right) f = 0, \qquad (2.8)$$

em que

$$\Delta = b^2 - 4c. \qquad (2.9)$$

De fato, se h for solução de (2.8) tem-se que, para todo $x \in \Re$,

$$h''(x) + b\, h'(x) + c\, h(x) = 0$$

ou

$$\left[e^{\frac{-b}{2}x} j(x) \right]'' + b \left[e^{\frac{-b}{2}x} j(x) \right]' + c \left[e^{\frac{-b}{2}x} j(x) \right] = 0. \qquad (2.10)$$

Desenvolvendo os termos,

$$\left[e^{\frac{-b}{2}x} j(x) \right]' = \frac{-b}{2} e^{\frac{-b}{2}x} j(x) + j'(x) e^{\frac{-b}{2}x} \qquad (2.11)$$

e

$$\left[e^{\frac{-b}{2}x} j(x) \right]'' = \frac{b^2}{4} e^{\frac{-b}{2}x} j(x) + j''(x) e^{\frac{-b}{2}x} - j'(x) b e^{\frac{-b}{2}x}. \qquad (2.12)$$

Substituindo em (2.11) e (2.12) em (2.10), e simplificando, segue

$$e^{\frac{-b}{2}x} \left(j(x)'' + \left(-\frac{b^2 + 4c}{4} \right) j(x) \right) = 0$$

Usando (2.9), segue que

$$j''(x) + \frac{-\Delta}{4} j(x) = 0.$$

Portanto, j é solução de (2.8), se h é solução de (2.4). Sendo j solução de (2.8), então

$$j(x) = A \cos(\beta x) + B \operatorname{sen}(\beta x) \qquad (2.13)$$

com

$$\beta = \sqrt{\frac{-\Delta}{4}}. \qquad (2.14)$$

Segue, então, que

$$h(\text{x}) = e^{\alpha x}\,[A\ cos(\ \beta\ x) + B\ sen\ (\ \beta\ x)] \tag{2.15}$$

em que

$$\alpha = \frac{-b}{2}. \tag{2.16}$$

Reciprocamente, suponha que *j* é solução de (2.8). Nesse caso, *j* é dada por (2.13) e, assim, a função *h(x)* dada por (2.7), satisfaz a equação (2.4). A verificação é direta. Isso conclui a prova.

Exemplo 2.2.3: Considere a equação

$$f'' + f' + 2f = 0.$$

O polinômio característico associado a EDO acima será

$$\text{p}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2.$$

Resolvendo

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

tem-se

$$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{1^2-4.2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{1^2-4.2}}{2} = \frac{-1-\sqrt{-7}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$$

com

$$\alpha = \frac{-1}{2} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Como as raízes são complexas as soluções serão da forma abaixo

$$f(x) = e^{\frac{-1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + Bsen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right).$$

2.3 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Não Homogêneas

2.3.1 Solução Geral

Consideremos, agora, a equação não-homogênea

$$f''(x) + b\,f'(x) + c\,f(x) = g(x)\,. \qquad (2.17)$$

Suponhamos que f_1 e f_2 são soluções da equação acima. Nesse caso, $f_1 - f_2$ é solução da equação homogênea associada

$$f''(x) + b\,f'(x) + c\,f(x) = 0,$$

pois

$$(f_1 - f_2)'' + b\,(f_1 - f_2)' + c\,(f_1 - f_2) = g(\mathrm{x}) - g(\mathrm{x}) = 0.$$

A partir da afirmação pode-se dizer que $f_1 - f_2 = f_h$ é solução da equação homogênea.

Seja f_p uma solução particular da equação (2.17) e f uma solução qualquer de (2.17). Pelo que foi visto anteriormente,

$$f(x) - f_p(x)$$

é uma solução da equação homogênea associada. Chame-a $f_h(x)$. Então uma solução qualquer e, portanto, a solução geral da equação não-homogênea é da forma

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x),$$

em que $f_h(x)$ é solução geral da equação homogênea.

2.3.2 Método da Variação das Constantes

A seguir, apresentaremos um método para se calcular uma solução particular de uma EDO não-homogênea. O método é conhecido pelo nome de "Método da variação das constantes".

O método consiste em determinar uma solução de (2.17) da forma

$$f(x) = A(x)g_1(x) + B(x)g_2(x), \qquad (2.18)$$

em que $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são sol uções linearmente independentes da equação homogênea associada, satisfazendo a condição $w = g_1 g'_2 - g_2 g'_1 \neq 0$, e A e B precisam ser calculados.

Derivando *f(x):*

$$f'(x) = A'(x)g_1(x) + A(x)g_1'(x) + B'(x)g_2(x) + B(x)g_2'(x)\,.$$

Em seguida, imponha que

$$A'(x)g_1(x) + B'(x)g_2(x) = 0. \tag{2.19}$$

Obtém-se

$$f'(\mathrm{x}) = A(x)g_1'(x) + B(x)g_2'(x) \tag{2.20}$$

e, por conseguinte,

$$f''(\mathrm{x}) = A'(x)g_1'(x) + A(x)g_1''(x) + B(x)'g_2'(x) + B(x)g_2''(x). \tag{2.21}$$

O objetivo é que *f(x)* = $A(x)g_1(x) + B(x)g_2(x)$ seja solução de (2.17). Então, substituindo (2.21),(2.20) e (2.19) na equação (2.17), resulta

$$\begin{aligned} g(x) = {} & A(x)\left[g_1''(x) + bg_1'(x) + cg_1(x)\right] + B(x)\left[g_2''(x) + bg_2'(x) + cg_2(x)\right] \\ & + A'(x)g_1'(x) + B'(x)g_2'(x). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são soluções da equação homogênea segue que

$$g_1''(x) + bg_1'(x) + cg_1(x) = 0$$

e

$$g_2''(x) + bg_2'(x) + cg_2(x) = 0$$

Logo,

$$g(\mathrm{x}) = A'(x)g_1'(x) + B'(x)g_2'(x). \tag{2.22}$$

Obtém-se, então, o sistema

$$\begin{cases} g(\mathrm{x}) = A'(x)g_1'(x) + B'(x)g_2'(x) \\ 0 = A'(x)g_1(x) + B'(x)g_2(x) \end{cases}$$

Na forma matricial

$$\begin{pmatrix} g_1(x) & g_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Utilizando a condição, já imposta, de que $w(x) = g_1 g'_2 - g_2 g'_1 \neq 0$, podemos inverter o sistema:

$$\begin{pmatrix} A'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(x)} \begin{pmatrix} g_2'(x) & -g_2(x) \\ -g_1'(x) & g_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A'(x) = \frac{-g_2(x)g(x)}{w(x)} \quad \text{e} \quad B'(x) = \frac{g_1(x)g(x)}{w(x)}.$$

Integrando,

$$A(x) = \int \frac{-g_2(x)g(x)}{w(x)} dx \quad \text{e} \quad B(x) = \int \frac{g_1(x)g(x)}{w(x)} dx. \qquad (2.23)$$

Exemplo 2.3.1: Considere

$$f''(x) + 6f'(x) + 9f(x) = e^{-3x}, \ x \in \Re.$$

A equação homogênea será

$$f''(x) + 6f'(x) + 9f(x) = 0,$$

com o polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9,$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4.9}}{2} = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4.9}}{2} = -3$$

Sendo λ_1 e λ_2 raízes reais e iguais a solução geral da equação homogênea é

$$f_h = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}. \qquad (2.24)$$

Sejam $g_1(x) = e^{-3x}$ e $g_2(x) = xe^{-3x}$, temos que $w(x) = g_1 g'_2 - g_2 g'_1 = e^{-6x} \neq 0, \forall x \in \Re$.

Pelo método da variação das constantes, com

$$A(x) = -\int \frac{(xe^{-3x})e^{-3x}}{e^{-6x}} dx = -\int \frac{xe^{-6x}}{e^{-6x}} dx = -\int x dx = -\frac{x^2}{2}$$

e

$$\text{B(x)} = \int \frac{e^{-3x}e^{-3x}}{e^{-6x}}dx = \int \frac{e^{-6x}}{e^{-6x}}\,dx = \int 1dx = \text{x}$$

obtemos a solução particular da equação

$$f_p(x) = -\frac{x^2}{2}e^{-3x} + x^2e^{-3x}\,.$$

Portanto, a solução geral é

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) \Rightarrow f(x) = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} + x^2e^{-3x} - \frac{x^2}{2}e^{-3x}\,.$$

Capítulo 3

Sistema de Equações Lineares de Primeira Ordem

Neste capítulo consideraremos um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem, da forma

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{n}(x)y_n + f_n(x)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

em que os coeficientes $a_{ij}(x)$ e as funções $y_i(x)$ e $f_i(x)$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, são funções contínuas em um intervalo aberto comum I. O sistema é chamado **homogêneo** se $f_i(x) \equiv 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, em I. Caso isso não ocorra o sistema é chamado de **não-homogêneo.** O conteúdo deste capítulo baseia-se nas referências [3] e [4].

3.1 Matrizes e Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

Defina as seguintes funções matriciais $Y(x), A(x)$ e $F(x), x \in I \subseteq \Re$:

$$Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\\ y_3(x)\\ \vdots\\ y_n(x)\end{pmatrix},\ A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x)\end{pmatrix} \text{ e } F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ f_3(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Em termos destas funções, o sistema (3.1) pode ser expresso em forma matricial como:

$$\frac{dY}{dx}=A(x).Y+F(x). \tag{3.3}$$

Veja o apêndice para a definição de derivada e integral de uma matriz.

Exemplo 3.1.1: Considere o sistema abaixo:

$$\frac{dy}{dx}=-2x^2y+5xz+e^x-2x$$

$$\frac{dz}{dx}=4\cos(x)y-\frac{3z}{x}+10x,$$

com $x\in(-\infty,\infty)$.

Podemos reescrevê-lo na forma matricial (3.3), tomando

$$Y=\begin{pmatrix} y\\ z\end{pmatrix},\ A(x)=\begin{pmatrix} -2x^2 & 5x\\ 4\cos(x) & -\frac{3}{x}\end{pmatrix} \text{ e } F(x)=\begin{pmatrix} e^x-2x\\ 10x\end{pmatrix}.$$

Definição 3.1.1: *A função* $Y(x)$, $x\in I$, *dada pela matriz coluna,*

$$Y=\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\\ y_3(x)\\ \vdots\\ y_n(x)\end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

é chamada de ***vetor solução*** *da equação matricial (3.3) se é diferenciável em I e verifica a equação (3.3) em todo* $x \in I$*, ou, equivalentemente, se as funções* $y_1(x), \dots, y_n(x)$ *são diferenciáveis em I e verificam o sistema (3.1).*

Exemplo 3.1.2: Os vetores

$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} \text{ e } Y_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}$$

são vetores soluções da equação matricial $Y' = AY$, no intervalo $(-\infty, \infty)$, para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$Y_1' = \begin{pmatrix} (e^{-2x})' \\ (-e^{-2x})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{pmatrix}$$

e

$$AY_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2x} - 3e^{-2x} \\ 5e^{-2x} - 3e^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma,

$$Y_2' = \begin{pmatrix} (3e^{6x})' \\ (5e^{6x})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6x} \\ 30e^{6x} \end{pmatrix}$$

e

$$AY_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6x} + 15e^{6x} \\ 15e^{6x} + 15e^{6x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6x} \\ 30e^{6x} \end{pmatrix}$$

Definição 3.1.2: *O problema que consiste em determinar uma solução da equação*

$$Y' = A(x).Y(x) + F(x)\,,\ x \in I \qquad (3.5)$$

sujeita à condição

$$Y(x_0) = Y_0 \quad com \ Y_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \ x_0 \in I \qquad (3.6)$$

é chamado de ***problema de valor inicial*** *(PVI) ou* ***problema de Cauchy****.*

Teorema 3.1.1: *Sejam A(x) e F(x) funções matriciais contínuas e $x_0 \in I$. Então, o PVI (3.5-3.6) tem solução única.*

Observação: Daqui por diante admitiremos sempre que as funções $a_i(x)$ no sistema (3.1), são constantes e, portanto, a matriz A é constante e $F(x)$ é uma função matricial contínua no intervalo I.

3.2 Sistemas Homogêneos

Teorema 3.2.1: ***(Princípio de superposição)*** *Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ vetores solução do sistema homogêneo*

$$\frac{dY}{dx} = A.Y \qquad (3.7)$$

em um intervalo I. Tome c_i, i= 1,2,...,k, constantes quaisquer. A combinação linear

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \ldots + c_k Y_k \qquad (3.8)$$

também é uma solução do sistema no intervalo I.

Prova: Da linearidade da derivada, segue que

$$\frac{dY}{dx} = c_1 \frac{dY_1}{dx} + c_2 \frac{dY_2}{dx} + \ldots + c_k \frac{dY_k}{dx}.$$

Mas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ são vetores solução; logo,

$$\frac{dY_i}{dx} = AY_i, \ i = 1, \ldots, k$$

e

$$\frac{dY(x)}{dx} = c_1 AY_1(x) + \ldots + c_k AY_k(x)$$

$$= A(c_1Y_1(x) + \ldots + c_kY_k(x)) = AY(x).$$

Exemplo 3.2.1: Considere a equação $Y' = AY$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As funções

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}sen(x) \\ -\cos(x) - sen(x) \end{pmatrix} \text{ e } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

são soluções da equação dada pois:

$$\frac{dY_1}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}sen(x) \\ -\cos(x) - sen(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sen(x) \\ \frac{1}{2}sen(x) + \frac{1}{2}\cos(x) \\ sen(x) - \cos(x) \end{pmatrix}$$

e

$$AY_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}sen(x) \\ -\cos(x) - sen(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -sen(x) \\ \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}sen(x) \\ -\cos(x) + sen(x) \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma,

$$\frac{dY_2}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$AY_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pelo principio de superposição,

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1 \begin{pmatrix} -sen(x) \\ \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} sen(x) \\ -\cos(x) + sen(x) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

também é solução da equação dada, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2.

Definição 3.2.1: *Sejam* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ *soluções do sistema homogêneo (3.7) em um intervalo I. Caso existam constantes, não simultaneamente nulas,* $c_1, c_2, \ldots, c_k$*, tais que*

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \ldots + c_k Y_k = 0\,,\ \forall x \in I \tag{3.9}$$

então as soluções são ditas ***linearmente dependentes*** *em I. Caso isso ocorra somente se* $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$*, então as soluções são ditas* ***linearmente independentes****.*

Exemplo 3.2.2: O sistema

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} Y\,,\ x \in (-\infty, \infty) \tag{3.10}$$

admite as soluções

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^x,\ Y_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \text{ e } Y_3 = \begin{pmatrix} e^x + \cos(hx) \\ \cos(hx) \end{pmatrix}.$$

Considere a equação

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} = 0,$$

ou ainda,

$$\begin{cases} 3c_1e^x + c_2e^{-x} = 0 \\ c_1e^x + c_2e^{-x} = 0\,. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, verifica-se que ele admite solução única $c_1 = c_2 = 0$, $\forall\ x \in (-\infty,\infty)$.

Portanto, Y_1 e Y_2 são linearmente independentes em $(-\infty,\infty)$. Contudo os vetores solução Y_1, Y_2 e Y_3 são linearmente dependentes, pois $Y_3 = \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2$.

Teorema 3.2.2: *Seja A uma matriz* $n \times n$ *contínua no intervalo I. Então, as soluções do sistema*

$$Y' = AY\,,\ x \in I \tag{3.11}$$

em que A é matriz constante, formam um ***espaço vetorial*** *de* ***dimensão n.***

Definição 3.2.2: *Chama-se* ***conjunto fundamental de soluções*** *do sistema homogêneo (3.7) qualquer conjunto de n vetores solução linearmente independentes.*

Exemplo 3.2.3: No exemplo anterior, as soluções $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$, formam um conjunto fundamental de soluções do sistema (3.10).

Definição 3.2.3: *Considere um conjunto fundamental de n vetores solução do sistema homogêneo* $Y' = A.Y$*, A matriz* $n \times n$*,*

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix},\ \ldots,\ Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

A matriz

$$\phi(x)=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.13)$$

*chama-se **matriz fundamental** do sistema.*

Exemplo 3.2.4: Considere o sistema $Y'=AY$ em que

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Já se sabe, pelo exemplo 3.2.2, que

$$Y_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x} \text{ e } Y_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-x}$$

formam um conjunto fundamental de soluções do sistema em I = $(-\infty,\infty)$. Então

$$\phi(x)=\begin{pmatrix} 3e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & e^{-x} \end{pmatrix}$$

é uma matriz fundamental do sistema em $(-\infty,\infty)$.

Teorema 3.2.3: *Uma matriz fundamental do sistema (3.7) é não singular.*

Prova: Seja $\phi(x)$ matriz fundamental do sistema (3.7) e $Y_1,Y_2,...,Y_n$ conjunto fundamental de soluções do sistema (3.7), conjunto este que forma as colunas de ϕ. Seja C a matriz coluna constante com os elementos $a_1,a_2,...,a_n$. A equação $\phi(x)C=0$, é equivalente a ter

$$a_1Y_1(x)+a_2Y_2(x)+...+a_nY_n(x)=0\,.$$

Como $Y_1,Y_2,...,Y_n$ são linearmente independentes em I, então $a_1=a_2=...=a_n=0$. Então, a única solução possível da equação $\phi(x)C=0$ é *C=0*. Logo, devemos ter que $\det\phi(x)\neq 0, \forall x\in I$.

Teorema 3.2.4: *Seja* $\phi(x)$ *matriz fundamental do sistema homogêneo* $Y' = AY$, $x \in I$. *Então,* $Y(x)$ *é solução do sistema se, e somente se,*

$$Y(x) = \phi(x)C \tag{3.14}$$

em que C *é uma matriz coluna constante com n linhas. A função* $Y = \phi C$ *é chamada de solução geral do sistema homogêneo. Se* $Y(x_0) = Y_0$, $x_0 \in I$, *então*

$$Y(x) = \phi(x)\phi^{-1}(x_0)Y_0 \,. \tag{3.15}$$

Prova: Suponha $Y(x)$ solução do sistema. Sejam $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$, um conjunto fundamental de soluções do sistema. Então, existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tais que

$$Y(x) = c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + \ldots + c_nY_n(x).$$

Seja C a matriz coluna formada com os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ou seja,

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Seja $\phi(x)$ matriz fundamental com $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ como colunas. Então,

$$\phi(x)C = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1y_{11} + c_2y_{12} + \ldots + c_ny_{1n} \\ c_1y_{21} + c_2y_{22} + \ldots + c_ny_{2n} \\ \vdots \\ c_1y_{n1} + c_2y_{n2} + \ldots + c_ny_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + \ldots + c_nY_n(x) = Y(x).$$

Provemos a recíproca, ou seja, se $\phi(x)$ é matriz fundamental do sistema e C é matriz coluna constante, então $\phi(x)C$ é solução do sistema. De fato, seja $Y(x) := \phi(x)C$. Então,

$$\begin{aligned} Y'(x) = (\phi(x)C)' &= c_1Y'_1(x) + \ldots + c_nY'_n(x) \\ &= c_1A(x)Y_1(x) + \ldots + c_nA(x)Y_n(x) \\ &= A(x)(c_1Y_1(x) + \ldots + c_nY_n(x)) \\ &= A(x)Y(x). \end{aligned}$$

Definição 3.2.4: *Será chamada* **matriz solução** *do sistema homogêneo (3.7) a uma matriz,* $n \times n$*, cujas colunas são solução do sistema.*

Teorema 3.2.5: (Fórmula de Abel) *Seja* $S(x),\ x \in I$*, matriz solução do sistema homogêneo* $Y' = AY$*, A* $n \times n$*. Então,*

$$\det S(x) = \det S(x_0) \exp\left[(x - x_0) TrA\right] \qquad (3.16)$$

para todo $x \in I$ *e* $x_0 \in I$*, em que* $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Observação: Segue da fórmula de Abel a importante conseqüência que se $\det S(x_0) \neq 0,$ para algum $x_0 \in I$, então $\det S(x) \neq 0$ em todo $x \in I$; se $\det S(x_0) = 0$ em algum $x_0 \in I$, então $\det S(x) = 0$, em todo intervalo I.

Teorema 3.2.6: *Uma matriz solução* $S(x)$ *do sistema* $Y' = AY$*,* $x \in I$*, é uma matriz fundamental em I se, e somente se,* $\det S(x) \neq 0$*,* $\forall x \in I$.

Prova: Suponha que S é uma matriz fundamental. Então pelo teorema 3.2.3, $\det S(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Suponha, agora, que a matriz solução tem $\det S(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Considere a equação

$$S(x)C = 0$$

em que

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

é uma matriz coluna constante. Como $\det S(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, existe a inversa $S^{-1}(x)$ e, portanto,

$$S^{-1}SC = C = S^{-1}0 = 0.$$

Logo, $C=0$ e $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ é a única solução possível da equação. Como a equação $S(x)C=0$ é equivalente a

$$a_1 S_1(x) + ... + a_n S_n(x) = 0,$$

em que $S_1,..., S_n$ são soluções da equação $Y' = AY$ que formam as colunas da matriz $S(x)$, segue do resultado anterior que $S_1,..., S_n$ são linearmente independentes e S é uma matriz fundamental.

Teorema 3.2.7: *O sistema homogêneo* $\frac{dY}{dx} = A.Y$, $x \in I$, *tem um conjunto fundamental de soluções no intervalo I.*

Definição 3.2.5: *Chama-se* ***solução geral*** *do sistema homogêneo (3.7), no intervalo I, a função*

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \ldots + c_n Y_n \qquad (3.17)$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *são constantes arbitrárias e* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ *é um conjunto fundamental de soluções do sistema.*

Exemplo 3.2.4: Por cálculos já efetuados, no exemplo 3.1.2, observou-se que

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x} \text{ e } Y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6x}$$

são soluções linearmente independentes de

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{Y}$$

em $(-\infty, \infty)$. Portanto, pode-se formar com Y_1 e Y_2 um conjunto fundamental de soluções no intervalo considerado. Assim, a solução geral do sistema é

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}.$$

3.3 Sistemas Não - Homogêneos

Qualquer vetor sem parâmetros arbitrários, que tenha como elementos funções que satisfazem o sistema $Y'(x) = AY(x) + F(x)$ é chamado de **solução particular** de um sistema não-homogêneo. Uma solução particular será indicada por Y_p.

Exemplo 3.3.1: O sistema não-homogêneo

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 12x - 11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

tem como solução particular

$$Y_p = \begin{pmatrix} 3x - 4 \\ -5x + 6 \end{pmatrix}.$$

Substituindo Y por Y_p tem-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} Y_p + \begin{pmatrix} 12x - 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x - 4 \\ -5x + 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12x - 11 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x - 4 - 15x + 18 \\ 15x - 20 - 15x + 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12x - 11 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -12x + 14 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12x - 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = Y_p'.$$

Teorema 3.3.1: *Seja $Y_h(x)$ a solução geral do sistema homogêneo $Y' = AY$, A uma matriz $n \times n$, no intervalo I, I intervalo dado, associado ao sistema não- homogêneo (3.3), seja Y_p uma solução particular qualquer do sistema não-homogêneo (3.3), no mesmo intervalo I. Então, a* ***solução geral do sistema não-homogêneo*** *é da forma*

$$Y(x) = Y_h(x) + Y_p(x) \quad . \tag{3.18}$$

Exemplo 3.3.2: Anteriormente verificamos que

$$Y_p = \begin{pmatrix} 3x-4 \\ -5x+6 \end{pmatrix}$$

é uma solução particular do sistema não- homogêneo

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 12x-11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

no intervalo $(-\infty,\infty)$, e verificamos também que uma solução geral do sistema homogêneo associado é

$$Y_h = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix}.$$

Pelo teorema 3.3.1, a solução geral do sistema dado é

$$Y = Y_h + Y_p = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ -e^{-2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6x} \\ 5e^{6x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x-4 \\ -5x+6 \end{pmatrix},$$

no intervalo $(-\infty,\infty)$.

Teorema 3.3.2: *Se ϕ é uma matriz fundamental do sistema $Y' = AY$, em I, então a solução geral do sistema não-homogêneo $Y' = AY + F(x)$ é*

$$Y(x) = \phi(x)C + \phi(x)\int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s)F(s)ds \ . \qquad \textit{(3.19)}$$

Prova: Vamos determinar a função matricial $U(x)$, $x \in I$, tal que

$$\psi(x) = \phi(x)U(x) \qquad (3.20)$$

seja solução particular do sistema não homogêneo.

A derivada de (3.20) é

$$\psi' = \phi'(x)U(x) + \phi(x)U'(x) \ . \qquad (3.21)$$

Substituindo (3.21) e (3.20) em $Y' = AY + F(x)$ resulta

$$\phi(x)U'(x) + \phi'(x)U(x) = A\phi(x)U(x) + F(x) \ . \qquad (3.22)$$

Como $\phi'(x) = A\phi(x)$, pode-se reescrever a expressão (3.22) da seguinte forma

$$\phi(x)U'(x) + A\phi(x)U(x) = A\phi(x)U(x) + F(x),$$

ou ainda,

$$\phi(x)U'(x) = F(x) \ . \tag{3.23}$$

Multiplicando os membros da equação (3.23) por $\phi^{-1}(x)$ obtemos

$$U'(x) = \phi^{-1}(x)F(x) \, .$$

Integrando esta ultima equação, segue

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} U'(s)ds = \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s)F(s)ds \, .$$

Então,

$$\psi(x) = \phi(x)\int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s)F(s)ds \tag{3.24}$$

é uma solução particular do sistema não homogêneo.

A solução geral do sistema não homogêneo é, pelo teorema 3.3.1,

$$Y = Y_h + Y_p \, .$$

Tomando $Y_p = \psi(x)$ e $Y_h = \phi(x)C$ (ver teorema 3.2.4), obtemos

$$Y(x) = \phi(x)C + \phi(x)\int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s)F(s)ds \ . \tag{3.25}$$

Observação: Em particular, se for imposta a condição inicial $Y(x_0) = Y_0$, então a única solução que satisfaz esta condição inicial é

$$Y(x) = \phi(x)\phi^{-1}(x_0)Y_0 + \phi(x)\int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s)F(s)ds \, .$$

Exemplo 3.3.3: Considere o sistema não-homogêneo

$$Y' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 3x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

em I = $(-\infty, \infty)$.

O sistema homogêneo associado

$$Y' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} Y$$

tem os vetores solução linearmente independentes

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

e

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5x}.$$

A matriz

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-5x} \\ e^{-2x} & -2e^{-5x} \end{pmatrix}$$

é uma matriz fundamental do sistema homogêneo associado. A matriz inversa de $\phi(x)$ é

$$\phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2x} & \frac{1}{3}e^{2x} \\ \frac{1}{3}e^{5x} & -\frac{1}{3}e^{5x} \end{pmatrix}.$$

Obtemos, então, que:

$$\phi^{-1}(s)F(s) = \begin{pmatrix} 2se^{2s} + \frac{1}{3}e^{s} \\ se^{5s} - \frac{1}{3}e^{4s} \end{pmatrix}$$

e

$$\int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s)F(s)ds = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x} \left(2se^{2s} + \frac{1}{3}e^{s} \right) ds \\ \int_{x_0}^{x} \left(se^{5s} - \frac{1}{3}e^{4s} \right) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} - x_0 e^{2x_0} + \frac{e^{2x_0}}{2} + \frac{1}{3}e^{x} - \frac{1}{3}e^{x_0} \\ -\frac{e^{4x}}{12} + \frac{e^{4x_0}}{12} + \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{x_0 e^{5x_0}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + \frac{e^{5x_0}}{25} \end{pmatrix}$$

Multiplicando $\phi(x)$ à esquerda deste último resultado, segue que

$$Y_p = \phi(x) \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s)F(s)ds =$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-5x} \\ e^{-2x} & -2e^{-5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xe^{2x}-\dfrac{e^{2x}}{2}-x_0e^{2x_0}+\dfrac{e^{2x_0}}{2}+\dfrac{e^{x}}{3}-\dfrac{e^{x_0}}{3} \\ -\dfrac{e^{4x}}{12}+\dfrac{e^{4x_0}}{12}+\dfrac{xe^{5x}}{5}-\dfrac{x_0e^{5x_0}}{5}-\dfrac{e^{5x}}{25}+\dfrac{e^{5x_0}}{25} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{6}{5}x-\dfrac{27}{50}-e^{2(x_0-x)}\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{e^{-x}}{4}-\dfrac{e^{x_0-2x}}{3}+\dfrac{e^{4x_0-5x}}{12}-e^{5(x_0-x)}\left(\dfrac{x_0}{5}-\dfrac{1}{25}\right) \\ \dfrac{7}{5}x-\dfrac{29}{50}-e^{2(x_0-x)}\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{e^{-x}}{6}-\dfrac{e^{x_0-2x}}{3}+\dfrac{e^{4x_0-5x}}{6}-2e^{5(x_0-x)}\left(\dfrac{x_0}{5}-\dfrac{1}{25}\right) \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema será

$$\mathrm{Y}=\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-5x} \\ e^{-2x} & -2e^{-5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+Y_p$$

Então,

$$Y=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2x}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-5x}+\begin{pmatrix} \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{7}{5} \end{pmatrix}x-\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)e^{2(x_0-x)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+e^{-x}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$-e^{x_0-2x}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}+e^{4x_0-5x}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}-\left(\dfrac{x_0}{5}-\dfrac{1}{25}\right)e^{5(x_0-x)}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.4 Método da Solução Exponencial

No capítulo 2.1, mostramos que a solução geral da equação diferencial

$$f'=af+g(x),$$

em que f e g são funções contínuas e diferenciáveis em algum intervalo real I, com a constante, pode ser expressa em termos de exponenciais como:

$$f=ke^{-ax}+e^{-ax}\int e^{ax}g(x)dx\ . \qquad (3.26)$$

Nosso objetivo, nesta seção, é mostrar que a solução de um sistema não homogêneo $Y'=AY+F(x)$, em que A é uma matriz constante $n\times n$, também pode ser expressa em termos de exponenciais.

Definição 3.4.1: *Para qualquer matriz constante A,* $n \times n$*, definimos "a matriz exponencial" por*

$$e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x^n}{n!}, x \in \Re \qquad (3.27)$$

em que $A^n = A.A.\ldots.A$*, n vezes, e* $A^0 = I$*, em que I é a matriz identidade* $n \times n$.

A série (3.27) deve ser entendida da seguinte maneira. Seja $B_n = (b_{ij})$, $1 \leq i, j, \leq n$, a matriz obtida multiplicando-se a matriz A n vezes, ou seja, $B_n = A^n$. Então, a matriz exponencial é igual à matriz cujos elementos são da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{ij} x^n}{n!}$$

Exemplo 3.4.1: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nesse caso,

$$A^n = A$$

e

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ax^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{x^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{x^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.4.1: *A matriz exponencial tem as seguintes propriedades:*

a) *A série (3.27) é convergente para todo* $x \in \Re$.

b) $\frac{d}{dx} e^{xA} = Ae^{xA}$

c) $e^{A+B} = e^A e^B$*, se* $AB = BA$

Teorema 3.4.2: *A função*

$$Y(x) = e^{Ax}C$$

em que C é matriz coluna constante arbitrária $n \times 1$ *é matriz solução da equação*

$$\frac{dY}{dx} = AY \qquad (3.28)$$

em que A é matriz constante $n \times n$.

Prova: Imediata a partir da propriedade (b) do teorema 3.4.1.

Observação: Se for imposta a condição inicial $Y(x_0) = Y_0$, então a solução é $Y(x) = e^{A(x-x_0)}Y_0$.

Teorema 3.4.3: *Se* $A = diag(\lambda_1,..., \lambda_n)$*, isto é, A é matriz diagonal* $n \times n$ *com* $\lambda_1,..., \lambda_n$ *na diagonal, então*

$$e^{Ax} = diag(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},..., e^{\lambda_n x}) \ . \qquad (3.29)$$

Prova: Como *A* é diagonal, segue que

$$A^n = diag(\lambda_1{}^n,\ldots,\lambda_n{}^n).$$

Logo, pela (3.27),

$$e^{Ax} = diag\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_1{}^n x^n}{n!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_2{}^n x^n}{n!},\ldots,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n{}^n x^n}{n!}\right).$$

De

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_i{}^n x^n}{n!} = e^{\lambda_i x}$$

o resultado segue.

Corolário 3.4.1: N*o caso em que* $A = diag(\lambda_1,..., \lambda_n)$ *é matriz diagonal com autovalores* $\lambda_1,..., \lambda_n$*, a solução da equação (3.28) pode ser expressa como*

$$Y(x) = diag(e^{\lambda_1(x-x_0)}, e^{\lambda_2(x-x_0)},..., e^{\lambda_n(x-x_0)})Y_0 .$$

Exemplo 3.4.2: Considere a equação

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Y \,,$$

com a condição inicial

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de A.

Então, pelo corolário acima, a solução da equação considerada pode ser expressa como

$$Y(x) = diag(e^{2(x-x_0)}, e^{2(x-x_0)}, e^{2(x-x_0)})Y_0$$

$$= e^{2(x-x_0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 = e^{2(x-x_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$y_1(x) = y_2(x) = y_3(x) = e^{2(x-x_0)}.$$

Exemplo 3.4.3: Considere a equação

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} Y \,,$$

tomando a condição inicial

$$Y(x_0)=\begin{pmatrix}4\\5\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

A matriz

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&8&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

é matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de A.

Então, pelo corolário 3.4.1, a solução da equação considerada pode ser expressa da forma

$$Y(x)=diag(e^{3(x-x_0)},e^{8(x-x_0)},e^{3(x-x_0)},e^{-3(x-x_0)})Y_0$$

$$=\begin{pmatrix}e^{3(x-x_0)}\\e^{8(x-x_0)}\\e^{3(x-x_0)}\\e^{-3(x-x_0)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}Y_0$$

$$=\begin{pmatrix}e^{3(x-x_0)}&0&0&0\\0&e^{8(x-x_0)}&0&0\\0&0&e^{3(x-x_0)}&0\\0&0&0&e^{-3(x-x_0)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$y_1(x)=4e^{3(x-x_0)},\ y_2(x)=5e^{8(x-x_0)},\ y_3(x)=-e^{3(x-x_0)}\ \text{ e }\ y_4(x)=0\,.$$

Teorema 3.4.4: *Suponha que a matriz A é similar a uma matriz diagonal D, ou seja, existe uma matriz não singular P tal que*

$$A=PDP^{-1}\ . \tag{3.30}$$

Então,

$$e^{Ax}=Pe^{Dx}P^{-1}\ . \tag{3.31}$$

Prova: Temos que

$$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

e

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}A^n = P\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}D^nP^{-1} = Pe^{Dx}P^{-1} = Pdiag(e^{\lambda_1 x},..., e^{\lambda_n x})P^{-1}.$$

Corolário 3.4.1: *Suponha que A não é diagonal mas é similar a uma matriz diagonal D. A solução da equação (3.28) é dada em termos dos autovalores de D como*

$$Y(x) = Pdiag(e^{\lambda_1 x},..., e^{\lambda_n x})P^{-1}C,$$

em que C é matriz coluna constante. Seja a_i, $i = 1,\ldots,n$, *elemento da matriz* $P^{-1}C$ *na i-ésima linha. Segue que*

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i e^{\lambda_i x} a_i$$

em que P_i *é a i-ésima coluna da matriz P.*

No caso de ser imposta a condição inicial $Y(x_0) = Y_0$, então

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i e^{\lambda_i (x - x_0)} a_i \ ,$$

em que a_i *é elemento da matriz* $P^{-1}Y_0$ *na i-ésima linha*

Teorema 3.4.4: *Seja A uma matriz,* $n \times n$, *e* $J = diag(J_1,..., J_p)$ *sua forma canônica de Jordan, em que* J_i *é um bloco de Jordan* $r_i \times r_i$ *com autovalor* λ_i. *Então,*

$$e^{Ax} = Pe^{Jx}P^{-1} = Pdiag(e^{J_1 x}, e^{J_2 x},..., e^{J_p x})P^{-1},$$

tal que

$$e^{J_i x} = e^{\lambda_i x}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{x^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{x^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.32)$$

em que cada elemento da primeira linha é repetido ao longo da sua diagonal.

Prova: Sabemos que existe P não singular tal que

$$A = PJP^{-1}.$$

Então, lembrando que x é uma variável real, temos

$$Ax = (PJP^{-1})x = P(Jx)P^{-1},$$

$$(Ax)^k = P(Jx)P^{-1}P(Jx)P^{-1}...P(Jx)P^{-1} = P(Jx)^k P^{-1},$$

e

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{P(Jx)^k P^{-1}}{k!} = Pe^{Jx}P^{-1}.$$

Além disso,

$$e^{Jx} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Jx)^k}{k!} = diag\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_1^{\,k}x^k}{k!},..., \sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_p^{\,k}x^k}{k!}\right) = diag(e^{J_1x},..., e^{J_px}).$$

Na seqüência, obtemos a forma geral de $e^{J_i x}$, $i = 1,\ldots,p$.

Lema 3.4.1: *Denote por $\hat{J}$ um bloco de Jordan $r\times r$ com autovalor λ:*

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}. \qquad (3.33)$$

Temos que

$$e^{\hat{J}x} = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} 1 & x & \dfrac{x^2}{2!} & \cdots & \cdots & \dfrac{x^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & x & \dfrac{x^2}{2!} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dfrac{x^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.34)$$

Prova: Podemos expressar $\hat{J}$ na forma

$$\hat{J} = \lambda I + E\,,$$

em que E é a matriz $r \times r$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz E tem a seguinte propriedade:

a) Se $k < r$

$$E^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

em que todos os elementos da *k-ésima* superdiagonal são iguais a 1 e os demais elementos da matriz são nulos.

b) Se $k \geq r$, então $E^k = 0$. Segue que

$$e^{Ex} = 1 + Ex + ... + \frac{(Ex)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Portanto,

$$e^{\hat{J}x} = e^{\lambda x I + Ex} = e^{\lambda x I}e^{Ex} = e^{\lambda x}\left(1 + Ex + \ldots + \frac{(Ex)^{r-1}}{(r-1)!}\right).$$

Usando a) segue o resultado.

No caso geral, expresso pelo teorema anterior, a solução da equação (3.28) é dada por

$$Y(x) = Pdiag(e^{J_1(x-x_0)}, e^{J_2(x-x_0)}, ..., e^{J_p(x-x_0)})P^{-1}C \tag{3.35}$$

em que C é matriz coluna constante arbitrária. Se a condição inicial $Y(x_0) = Y_0$ for imposta, então a solução que satisfaz esta condição é:

$$Y(x) = Pdiag(e^{\lambda_1(x-x_0)}, e^{\lambda_2(x-x_0)}, ..., e^{\lambda_n(x-x_0)})P^{-1}Y_0 \ . \tag{3.36}$$

A solução (3.35) pode ainda ser expressa na seguinte forma

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{p} P_k e^{J_k} z_k \ . \tag{3.37}$$

Para obter este último resultado, particionamos P em submatrizes P_k, $n \times r_k$, correspem que ndo aos blocos de Jordan J_k e, similarmente, particionamos a matriz coluna $P^{-1}C$ em submatrizes coluna z_k, $r_k \times 1$.

Usando a matriz (3.34) para $e^{J_k x}$, resulta que

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k x} \left\{ \left[c_{q_{k-1}+1} + \ldots + c_{q_k} \frac{x^{r_k - 1}}{(r_k - 1)!} \right] p_{q_{k-1}+1} \right.$$

$$\left. + \left[c_{q_{k-1}+2} + \ldots + c_{q_k} \frac{x^{r_k - 2}}{(r_k - 2)!} \right] p_{q_{k-1}+2} + \ldots + c_{q_k} p_{q_k} \right\} \tag{3.38}$$

em que $q_0 = 0$, e $q_a = r_1 + ... + r_k$, com $a = 1, \ldots, k$, p_i representa a *i*-ésima coluna da matriz P_k e c_j representa os elementos da matriz z_k.

No caso de se imposta uma condição inicial $Y(x_0) = Y_0$ à equação, substitui-se x por $x - x_0$ no lado direito de (3.38) para obter a solução.

Exemplo 3.4.4: Considere o sistema $Y'(x) = AY(x)$ em que

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tem-se que

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

As colunas, da matriz *J*, 1 e 2 são autovetores com autovalores 1 e 2, já as colunas 3 e 4 são autovetores gerados.

A matriz *J* tem blocos de Jordan

$$J_1 = 1 \text{ e } J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto, $r_1 = 1$ e $r_2 = 3$.

Além disso, $p = 2, q_0 = 0, q_1 = r_1 = 1$ e $q_2 = r_1 + r_2 = 4$. Então, por (3.38), a solução é a seguinte:

$$Y(x) = c_1 e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[c_2 + c_3 x + \frac{c_4 x^2}{2}\right] e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$ [redacted] $$_3 + c_4 x\, e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

em que c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes arbitrárias.

3.5 EDO's de ordem *n*>2

Vimos no capítulo 2.2 como obter a solução geral de uma EDO linear de 1ª e 2ª ordem com coeficientes constantes. Vamos considerar, agora, equações de ordem superior.

Uma importante aplicação dos resultados obtidos na seção anterior é no cálculo da solução geral de uma EDO linear de ordem *n*, com coeficientes constantes. Esta equação tem a forma

$$\frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{df}{dx} + a_0 f = 0\,,\ x \in I \tag{3.39}$$

em que $a_i, i = 0,1,.., n-1$, são constantes reais e I é um aberto de $\Re$. No que segue vamos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 3.5.1: *A solução geral da equação (3.39) é*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_i x}(c_{k1} + c_{k2}x + \cdots + c_{kr_k}x^{r_k - 1}) \tag{3.40}$$

em que os expoentes $\lambda_1,..., \lambda_p$ *são as raízes distintas com multiplicidade* $r_1,\ldots,r_p$ *do polinômio*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\,.$$

Para obter este resultado, vamos transformar a equação (3.39) num sistema de equações de primeira ordem. Com esta finalidade, definimos novas variáveis.

Defina

$$f_1(x) := f(x) \tag{3.41}$$

e

$$f_k(x) := \frac{d^{(k-1)} f}{dx^{(k-1)}}\,,\ k = 2,\ldots,n. \tag{3.42}$$

Então,

$$\frac{df_k}{dx} = f_{k+1}(x)\,,\ k = 1,\ldots,n-1. \tag{3.43}$$

Em termos dessas novas variáveis a equação (3.39) se escreve como

$$\frac{df_n}{dx} = -a_{n-1} f_n - \ldots - a_1 f_2 - a_0 f_1\ . \tag{3.44}$$

As equações (3.40) e (3.43) formam um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem nas incógnitas $f_1, \cdots, f_n$. Em forma matricial, ele se expressa como

$$Y' = AY$$

em que

$$Y(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Os autovalores de *A* são as raízes da equação

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 .$$

O próximo teorema afirma que se λ é um autovalor de multiplicidade r da matriz *A*, então o bloco de Jordan associado é $r \times r$.

Teorema 3.5.2: *Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_p$ os autovalores distintos da matriz A em (3.45), em que λ_i tem multiplicidade r_i. Então, a forma canônica de Jordan de A é*

$$J = diag(J_1, ..., J_p), \tag{3.46}$$

em que J_i é uma matriz de blocos de Jordan, $r_i x r_i$, associada ao autovalor λ_i.

Com base neste último resultado, vamos provar o teorema 3.5.1.

Prova do teorema 3.5.1: Pelo visto na seção anterior, a solução do sistema $Y' = AY$ é

$$Y(x) = Pdiag(e^{J_i x}, ..., e^{J_p x})P^{-1}C, \tag{3.47}$$

em que os autovalores associados a $J_1, ..., J_p$ são distintos. Seja L a primeira linha de P e $q = P^{-1}C$. Então, f_1, a primeira componente de $Y(x)$, que coincide com a solução da equação original, é dada por

$$f(x) = f_1(x) = L diag(e^{J_i x}, ..., e^{J_p x}) q = \sum_{i=1}^{p} L_i e^{J_i x} q_i \qquad (3.48)$$

em que L e q foram particionados em subvetores L_i e q_i de tamanho compatível com as dimensões de $e^{J_i x}$. Usando (3.40), chega-se no resultado final

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i x} (c_{i1} + c_{i2} x + \cdots + c_{ir_i} x^{r_i - 1}) \qquad (3.49)$$

em que c_{ij} são combinações dos componentes de L e f.

Exemplo 3.5.1: Determine a solução geral da equação

$$\frac{d^3 f}{dx^3} + 2\frac{d^2 f}{dx^2} = 0 .$$

O polinômio característico é

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0,$$

cujas raízes são zero (raiz dupla) e -2.

Então tomando $r_1 = 2$ e $r_2 = 1$, em (3.49), obtemos

$$f(x) = (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{-2x} .$$

Exemplo 3.5.2: Determine a solução da equação

$$\frac{d^3 f}{dx^3} - \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} + f = 0 .$$

O polinômio característico é

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) = 0,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 1$, raiz dupla, e $\lambda_2 = -1$.

Portanto, tomando $r_1 = 2$ e $r_2 = 1$, e substituindo em (3.49), obtemos

$$f(x) = e^x (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{-x} .$$

Exemplo 3.5.3: Considerando a equação seguinte, determine sua solução.

$$\frac{d^5 f}{dx^5} + 10\frac{d^4 f}{dx^4} + 32\frac{d^3 f}{dx^3} + 26\frac{d^2 f}{dx^2} - 33\frac{df}{dx} - 36 f = 0$$

O polinômio característico é

$$\lambda^5 + 10\lambda^4 + 32\lambda^3 + 26\lambda^2 - 33\lambda - 36 = (\lambda + 3)^2 (\lambda - 1)(\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0 ,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = -3,$ raiz dupla, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -4$ e $\lambda_4 = -1$.

Portanto, tomando $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1$ e $r_4 = 1$ e substituindo em (3.49), obtemos

$$f(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + c_3 e^{x} + c_4 e^{-4x} + c_5 e^{-1x} .$$

Por fim, consideremos o sistema (3.1) reescrito na forma matricial

$$Y' + AY = F(x) .$$

A solução geral, dada em termos de uma matriz exponencial, é facilmente obtida multiplicando, matricialmente, ambos os membros por e^{+Ax}, pela esquerda, ou seja:

$$e^{+Ax}Y' + e^{+Ax}AY = e^{+Ax}F .$$

Este resultado é equivalente ao seguinte:

$$\left(e^{+Ax}Y\right)' = e^{+Ax}F(x) .$$

Integrando ambos os membros, obtemos:

$$e^{+Ax}Y = \int e^{+Ax}F(x)dx + C ,$$

em que C é uma matriz coluna constante arbitrária. Portanto,

$$Y = e^{-Ax}C + e^{-Ax}\int e^{+Ax}F(x)dx .$$

Apêndice

Derivada e Integral de Matrizes

Segue, abaixo, as propriedades de matrizes relacionadas a derivadas e integrais.

Considere uma matriz A, de ordem *nxn*, tal que cada entrada desta matriz é composta por uma função, conforme exemplo abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \vdots & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \vdots & f_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Então, quando tomamos a derivada da matriz *A* devemos derivar cada entrada da matriz, ou seja

$$A' = \begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} & \cdots & f'_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} & \vdots & f'_{2n} \\ f'_{31} & f'_{32} & f'_{33} & \vdots & f'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & f'_{n3} & \cdots & f'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Já quando consideramos a integral da mesma matriz *A*, devemos agir conforme quando derivamos, ou seja, devemos integrar cada entrada da matriz, logo

$$\int A = \begin{pmatrix} \int f_{11} & \int f_{12} & \int f_{13} & \cdots & \int f_{1n} \\ \int f_{21} & \int f_{22} & \int f_{23} & \vdots & \int f_{2n} \\ \int f_{31} & \int f_{32} & \int f_{33} & \vdots & \int f_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int f_{n1} & \int f_{n2} & \int f_{n3} & \cdots & \int f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Lembre que só podemos derivar e integrar funções devidamente definidas em um intervalo I.

Referências

[1] – MCCANN, R. C., Introdution to linear algebra. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1984.

[2] – GUIDORIZZI, H. L., Um curso de cálculo, volume 2. Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.

[3] – BRAUER, F., NOBEL, J. A., The qualitative theory of ordinary differential equations. W. A. Benjamin, Inc., 1969.

[4] – ORTEGA, J., Matrix theory. A second course. Plenum Press, 1987.