UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

RECREAÇÕES EM GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

DEISE ASSING

Florianópolis – SC
Outubro – 2009

DEISE ASSING

RECREAÇÕES EM GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática – Habilitação Licenciatura – como parte dos requisitos para a obtenção do título de graduado em Matemática. Orientador: Professor Ms. Antônio Vladimir Martins.

Florianópolis – SC
Outubro – 2009

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura – e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº. **41/CCM/09.**

Nereu E. Burin

Profº. Ms. Nereu Estanislau Burin

Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Antonio Vladimir Martins

Profº. Ms. Antônio Vladimir Martins

Orientador

Nereu E. Burin

Profº. Ms. Nereu Estanislau Burin

Profº. Ms. José Luiz Rosas Pinho

Uma grande descoberta resolve um grande problema,
mas há sempre uma pitada de descoberta
na resolução de qualquer problema.
O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar
a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas,
quem o resolver por seus próprios meios,
experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.
Experiências tais, numa idade suscetível,
poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e
deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

(G. Polya)

AGRADECIMENTOS

A **Deus** que iluminou meu caminho, me deu força, saúde e disposição para concluir essa etapa muito importante da minha vida.

Aos meus pais **Deni e Lúcia**, que me ensinaram a lutar por meus objetivos, me incentivaram e estiveram sempre do meu lado.

Aos meus irmãos **Cátia e Diego**, familiares e amigos pelo apoio.

Ao meu namorado **Rafael Junges** pela paciência e compreensão que teve durante o curso, pelo incentivo e pelo orgulho que sempre teve de mim.

Ao meu companheiro acadêmico **Hamer Esteves Araújo** pelas palavras de incentivo e pelos risos compartilhados.

Ao meu primo **Anderson Carlos Assing** pelas caronas todos os dias.

A todos os **professores** que contribuíram inigualavelmente para a minha formação profissional.

Ao professor e orientador **Antônio Vladimir Martins** pelo seu apoio constante, paciência e entusiasmo com o trabalho. E o mais importante por ter me mostrado uma matemática diferente daquela que encontramos nos livros.

Aos membros da banca examinadora, professores **José Luiz Rosas Pinho e Nereu Estanislau Burin** por aceitarem o convite para avaliar este trabalho.

Às secretárias do Curso, **Sílvia** e **Iara** por todos os bons-dias recebidos com muito carinho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivos apresentar, desenvolver e propor a resolução de problemas, desafios e situações curiosas visando motivar os estudantes de qualquer nível de ensino para o fabuloso mundo da geometria. Com essas recreações pretende-se mostrar através de uma abordagem alegre e prazerosa que a geometria é muito mais do que axiomas e teoremas. O trabalho oferecerá uma coleção de questões que podem ser encaradas como simples passatempos ou como um recurso didático que colabora para o desenvolvimento da criatividade e habilidade dos estudantes.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um dos problemas enfrentados pelo sistema de ensino brasileiro refere-se ao baixo desempenho dos alunos em Matemática, e mais especificamente, em geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) enfatizam que:

> A Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (p. 122)

A geometria é tratada na sala de aula de forma muito técnica onde decora-se fórmulas, macetes, conceitos e teoremas sem a noção correta do que se está calculando ou escrevendo. Ou seja, são muitos os fatores que levam ao baixo desempenho dos alunos em geometria.

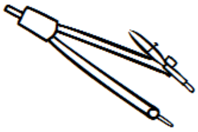
Diante dessas preocupações, o presente trabalho de conclusão de curso traz 10 problemas envolvendo a geometria plana e a espacial e também alguns problemas propostos. São problemas para todos os níveis de ensino, onde a geometria é abordada de forma alegre e prazerosa, desejando-se estimular o aprendizado matemático, apresentando situações que favorecem a reflexão. Procuramos oferecer uma oportunidade para os estudantes estabelecerem uma relação positiva com a aquisição de conhecimento, pois através desses problemas, conhecer passa a ser percebido como uma possibilidade real.

O trabalho divide-se em dois capítulos: Recreações em Geometria Plana e Recreações em Geometria Espacial, onde o primeiro aborda problemas com régua e compasso e o quebra-cabeça Tangram; e o segundo aborda problemas envolvendo blocos retangulares e tetraedros. Com relação ao Tangram e outras atividades que exploram a composição e decomposição de figuras, os PCN destacam que: “elas fazem com que os alunos verifiquem que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras, como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos, hexágonos regulares.”

A pergunta “Será que é possível?” estará presente na mente dos leitores em cada problema deste trabalho sendo que cada solução poderá ser surpreendente.

RECREAÇÕES EM GEOMETRIA PLANA

1. Só com Compasso[1]



Em geometria, uma construção com régua e compasso é o desenho geométrico de figuras tais como segmentos de reta, triângulos ou ângulos usando apenas uma régua e um compasso idealizados, ou seja: a régua pode ser usada para construir um segmento tão longo quanto se queira que contenha dois pontos dados. Tal régua não é graduada e não pode deslizar sobre a construção geométrica; o compasso pode ser usado para construir a circunferência de centro em um dado ponto A e que passa por um dado ponto B. Assim deve ter pernas tão compridas quanto precisamos. As construções com régua e compasso são baseadas nos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides por isso são também conhecidas por “construções euclidianas”, apesar dos termos “régua” e “compasso” não aparecerem nessa obra.

1.1 Apresentação

Dados os pontos A e B, achar somente com compasso o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

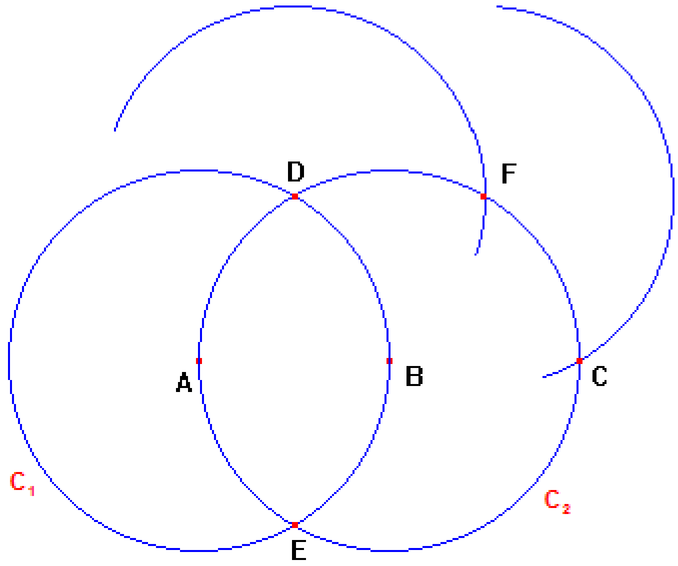
1.2 Roteiro de construção

1º Passo: Vamos duplicar o segmento $\overline{AB}$, ou seja, pegamos o compasso com abertura de medida AB e traçamos uma circunferência C_1 com centro em A e uma circunferência C_2 com centro em B. Chamaremos de D e E os pontos de intersecção das duas circunferências.

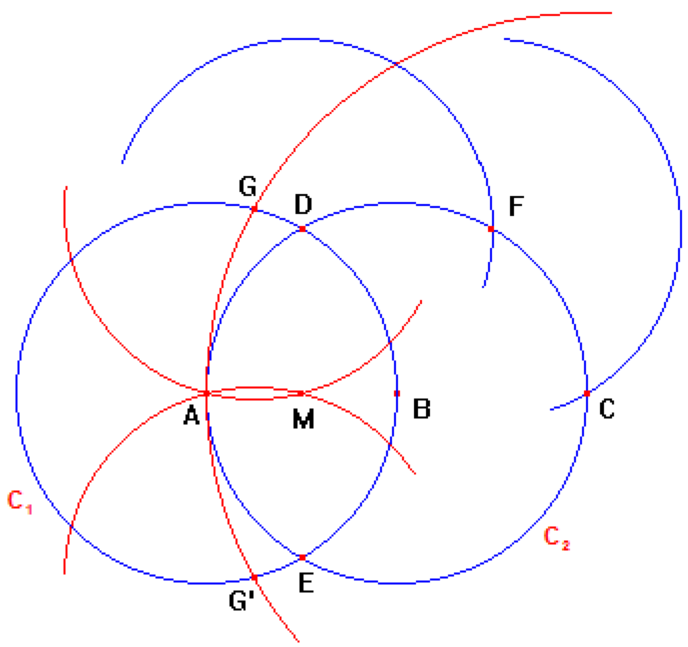
---

[1] Referência Bibliográfica: KOSTOVSKI, A. N. **Construciones Geométricas mediante un compás**. Moscou: Ed. MIR, 1980.

Com centro no ponto D e abertura de medida AB encontramos o ponto F na circunferência C_2. Com centro em F e abertura de medida AB encontramos o ponto C na circunferência C_2 em que AB = BC.



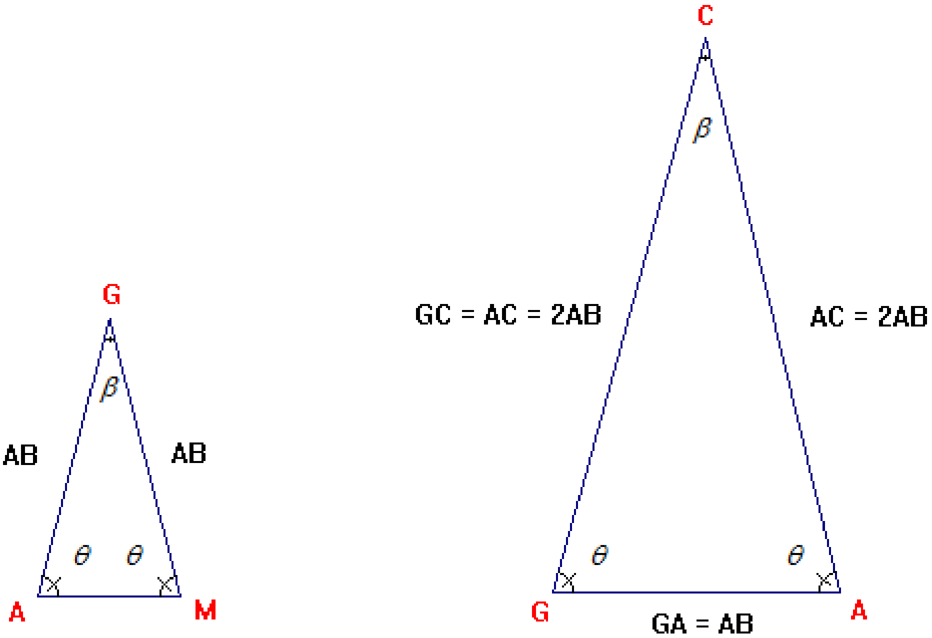
2º Passo: Com centro no ponto C e abertura de medida CA traçaremos uma circunferência que interceptará a circunferência C_1 nos pontos G e G'. Com abertura de medida AG' e centro em G', e abertura de medida AG e centro em G construímos duas circunferências que se interceptam no ponto M, que é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



1.3 Demonstração

Vamos mostrar que o ponto M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, ou seja, $AM = \frac{1}{2}AB$.

Considerando os triângulos ΔAGM e ΔACG temos que ΔAGM é isósceles pois $AG = MG \Rightarrow \hat{A} = \hat{M}$ e ΔACG é isósceles pois $GC = AC \Rightarrow \hat{G} = \hat{A}$.



Como os triângulos ΔAGM e ΔACG possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, temos que eles são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança de triângulos. Segue que seus lados homólogos são proporcionais, a saber:

$$\frac{GM}{AC} = \frac{AM}{AG} \tag{1.1}$$

Mas, GM = AB, AC = 2AB e AG = AB. Assim, a expressão (1.1) fica:

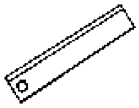
$$\frac{AB}{2AB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AM = \frac{1}{2}AB$$

Portanto, M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

1.4 Agora é a sua vez de resolver! 

Um compasso está enferrujado e só abre até um certo ângulo. Como você faria para construir um triângulo equilátero só com esse compasso?

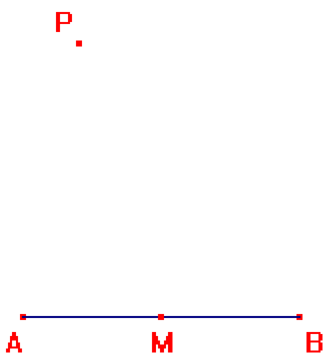
2. Só com régua[2]



O matemático italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800) provou que as construções com compasso são tão poderosas como as construções com régua e compasso. A primeira questão que se coloca é como traçar retas com o compasso? Nas construções feitas com o compasso aceita-se que uma reta é “conhecida” quando forem “conhecidos” dois dos seus pontos. Por outro lado, o matemático suíço Jacob Steiner (1796-1863) mostrou que as contruções com régua (mas exigindo que no plano de desenho exista um círculo com centro e raio fixos) são tão eficazes como as contruções com régua e compasso.

2.1 Apresentação

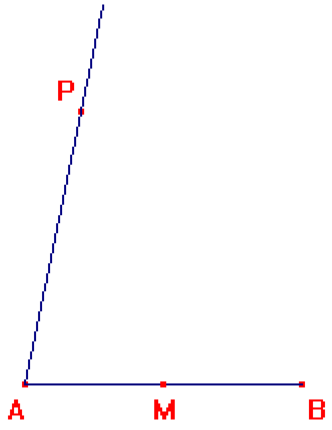
Dados os pontos A, B e M sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, e um ponto P fora do segmento $\overline{AB}$. Construir uma reta paralela à reta que passa por $\overline{AB}$ passando pelo ponto P só usando régua.



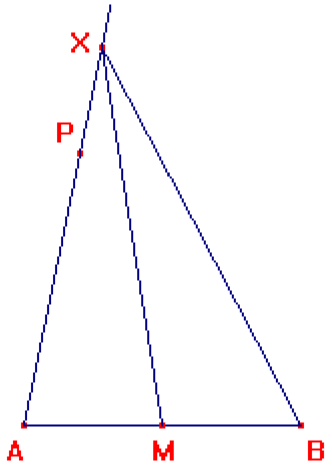
[2] Referência Bibliográfica: HONSBERGER, R. **Ingenuity in Mathematics**. M.A.A 23. USA: New Math Library, 1970.

2.2 Roteiro de construção

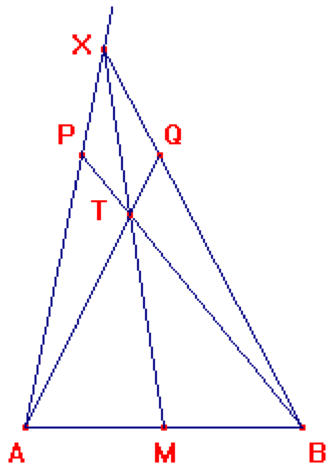
1º Passo: Ligar o ponto A ao ponto P formando a semi-reta $\overrightarrow{AP}$.



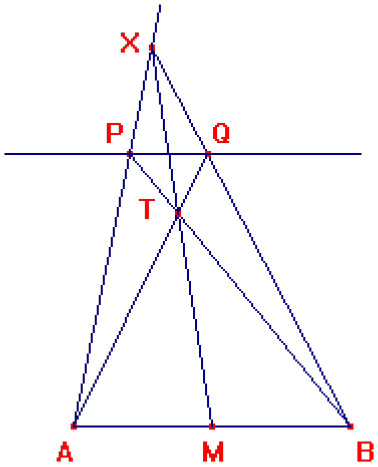
2º Passo: Escolher um ponto X arbitrário sobre $\overrightarrow{AP}$ tal que P está entre A e X. Ligar o ponto M ao ponto X e o ponto B ao ponto X.



3º Passo: Ligar o ponto B ao ponto P. A intersecção dos segmentos $\overline{MX}$ e $\overline{PB}$ é o ponto T. Ligar o ponto A ao ponto T estendendo o segmento formado até a intersecção com o segmento $\overline{XB}$ produzindo o ponto Q.

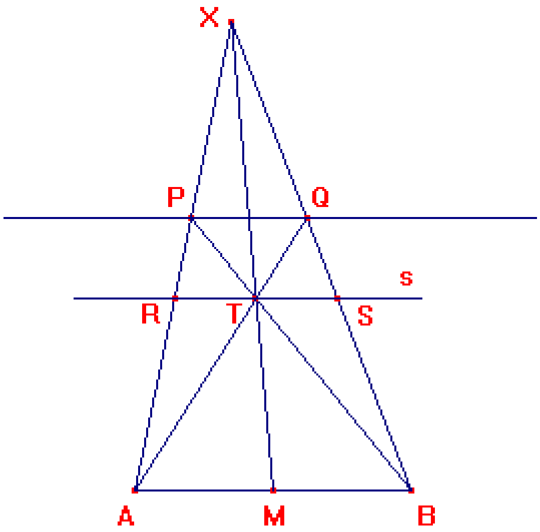


4º Passo: Ligar o ponto P ao ponto Q. Esta é a reta paralela ao segmento $\overline{AB}$.

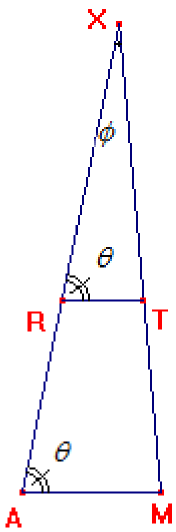


2.3 Demonstração

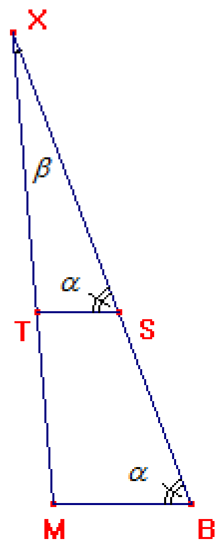
Vamos mostrar que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ que passa por P é paralela ao segmento $\overline{AB}$. Para isto, suponhamos que a reta *s* que passa pelos pontos R e S seja paralela a $\overline{AB}$.



Considerando os triângulos ΔXAM e ΔXRT. Eles são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) pois possuem dois ângulos ordenadamente congruentes: θ e ϕ. Assim, temos a razão entre os lados: $\frac{XT}{XM} = \frac{RT}{AM} = \frac{XR}{XA}$ (2.1)



Considerando os triângulos ΔXBM e ΔXST. Eles são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) pois os ângulos α e β são ordenadamente congruentes. Assim, temos a razão entre os lados: $\frac{XT}{XM} = \frac{TS}{MB} = \frac{XS}{XB}$ (2.2)

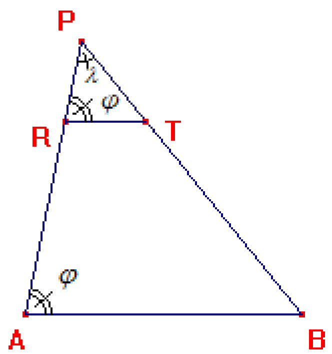


De (2.1) e (2.2) temos que: $\frac{RT}{AM} = \frac{TS}{MB}$

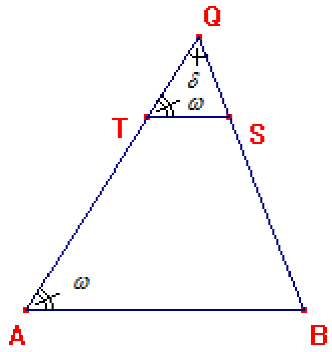
Mas AM = MB, assim: $\frac{RT}{AM} = \frac{TS}{AM} \Rightarrow RT = TS$ (2.3)

Considerando os triângulos ΔPAB e ΔPRT. Eles são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) pois os ângulos φ e λ são ordenadamente congruentes (a reta *s* é paralela a $\overline{AB}$ por hipótese). Assim, temos a razão entre os lados:

$$\frac{PT}{PB} = \frac{RT}{AB} = \frac{PR}{PA} \quad (2.4)$$



Considerando os triângulos ΔQAB e ΔQTS. Eles são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) pois os ângulos ω e δ são ordenadamente congruentes. Assim, temos a razão entre os lados: $\frac{QS}{QB} = \frac{TS}{AB} = \frac{QT}{QA}$ (2.5)



De (2.4) e (2.5) temos que: $\frac{PT}{PB} = \frac{QT}{QA}$ pois $RT = TS$ (de (2.3)) (2.6)

Podemos escrever a igualdade (2.6) como: $\frac{PB}{PT} = \frac{QA}{QT}$ (2.7)

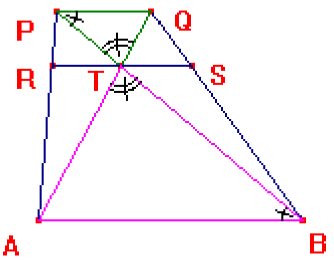
Subtraindo 1 em ambos os membros da igualdade (2.7):

$$\frac{PB}{PT} - 1 = \frac{QA}{QT} - 1 = \frac{PB - PT}{PT} = \frac{QA - QT}{QT} \qquad (2.8)$$

Mas, PB – PT = TB e QA – QT = TA. Substituindo na expressão (2.8) ficamos com:

$$\frac{TB}{PT} = \frac{TA}{QT}$$

Esta razão pode ser observada na figura a seguir:



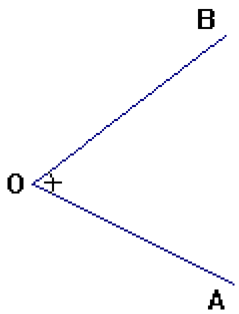
Os triângulos ΔTPQ e ΔTBA são semelhantes pelo caso LAL (lado – ângulo – lado) pois os dois lados de um são proporcionais aos homólogos do outro, a saber: $\overline{PT}$ é congruente a $\overline{TB}$ e $\overline{TA}$ é congruente a $\overline{QT}$ e o ângulo compreendido $\hat{T}$ é o mesmo. Segue desta semelhança que os ângulos correspondentes são iguais, ou seja, $T\hat{P}Q = T\hat{B}A$.

Como as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são interceptadas pela reta transversal $\overleftrightarrow{PB}$ e os ângulos $T\hat{P}Q$ e $T\hat{B}A$ são ângulos alternos internos iguais, segue que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta s também é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Portanto, $\overleftrightarrow{PQ}$ é a reta que passa pelo ponto P e é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

2.4 Agora é a sua vez de resolver!

Usando apenas uma régua sem marcas, obter a bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ dado.



3. Montando figuras com o Tangram[3]

" Diz a lenda que um jovem chinês, ao despedir-se de seu mestre para uma grande viagem pelo mundo, recebeu um espelho de forma quadrada e ouviu:

- Com esse espelho, você registrará tudo o que você verá durante a viagem, para mostrar-me na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

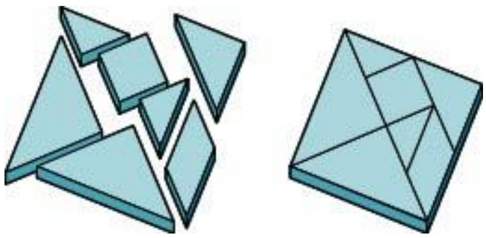
- Mas mestre, como, com um simples espelho, poderei eu lhe mostrar tudo o que encontrar durante a viagem?

No momento em que fazia esta pergunta, o espelho caiu-lhe das mãos, quebrando-se em sete peças. Então o mestre disse:

- Agora, você poderá com essas sete peças construir figuras para ilustrar o que verá durante a viagem."

Essa é a essência do Tangram: um quadrado, decomposto em sete figuras geométricas: cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo, com as quais é possível montar-se um número quase infinito de figuras.

O Tangram não exige de seu praticante qualquer esforço ou habilidade especial: exige tão somente tempo, paciência e especialmente imaginação.



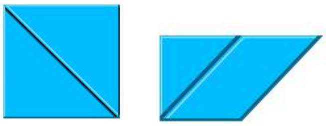
[3] Referência Bibliográfica: O'DAFFER, P. G.; CLEMENS, S. R. **Geometry: An Investigative Approach**. 2. ed. USA: Addison – Wesley Publishing Company, 1991. Pg. 44.

3.1 Montando quadriláteros

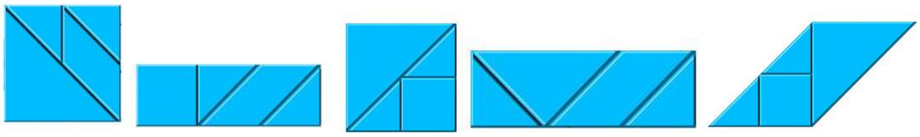
Utilizando as peças do Tangram, formar quadriláteros com 2, 3, 4, 5, 6 e 7 peças.

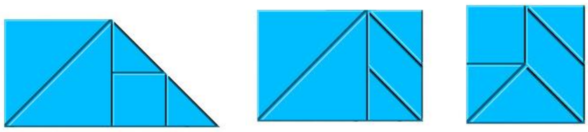
3.1.1 Solução

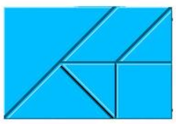
Segue abaixo algumas possibilidades para os quadriláteros[4] com as peças do Tangram:

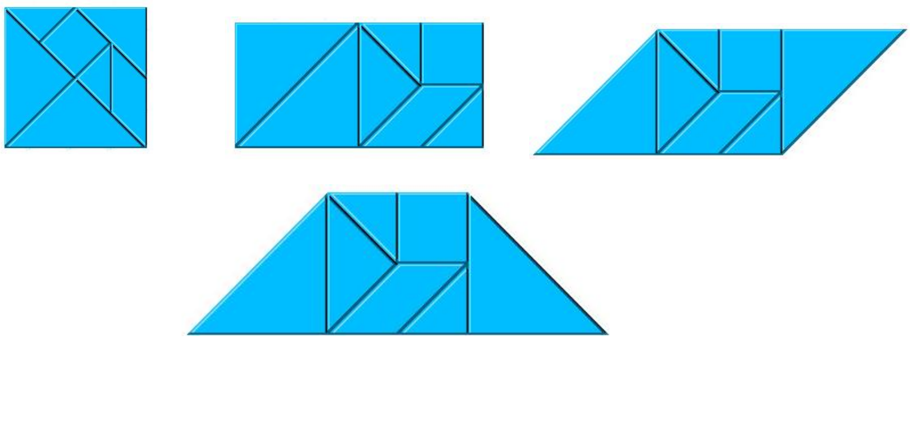
2 peças: 

3 peças: 

4 peças: 

5 peças: 

6 peças: 

7 peças: 

[4] É um polígono de quatro lados, cuja soma dos ângulos internos é 360°, e a soma dos ângulos externos, assim como qualquer outro polígono, é 360°.

3.2 Montando quadrados

Utilizando as peças do Tangram, formar quadrados com 2, 3, 4, 5, 6 e 7 peças.

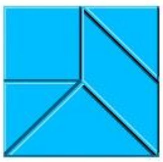
3.2.1 Solução

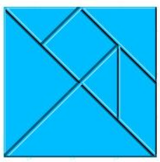
Segue abaixo algumas possibilidades para os quadrados[5] com as peças do Tangram:

2 peças: 

3 peças: 

4 peças: 

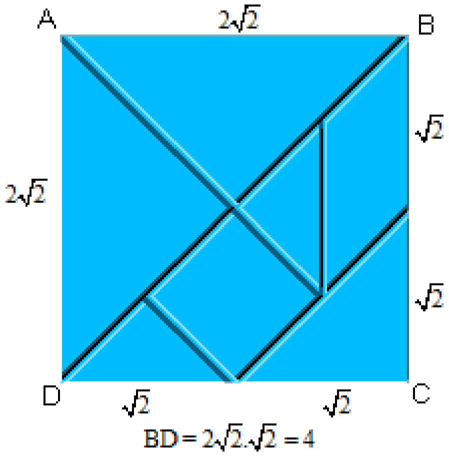
5 peças: 

7 peças: 

[5] É um polígono que possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

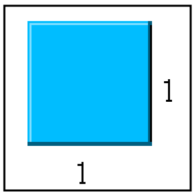
Vamos verificar se é possível montar um quadrado de lado *x* com **6** peças do Tangram:

Seja a área do quadrado ABCD igual a 8 unidades de área, com seu lado igual a $2\sqrt{2}$. Suponha ser possível fazer um quadrado de lado *x* com **6** peças do Tangram.

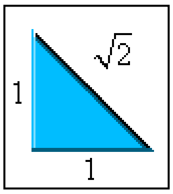


Segue abaixo as 7 peças do Tangram e suas medidas:

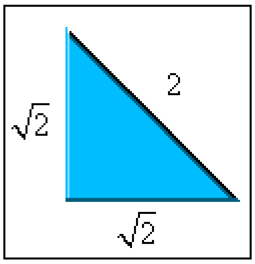
- Quadrado de lado 1 e área igual a 1.



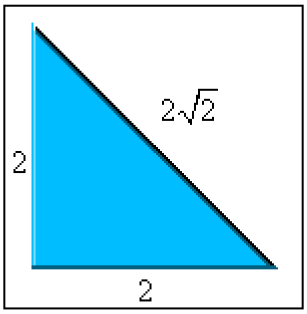
- Dois triângulos congruentes, retângulos e isósceles, de cateto 1, logo, de área igual a $\frac{1}{2}$.



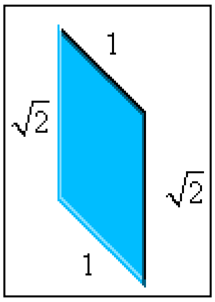
- Um triângulo retângulo e isósceles, de cateto $\sqrt{2}$, e, portanto, área 1.



- Dois triângulos congruentes, retângulos e isósceles, de cateto 2, logo, de área 2.



- Um paralelogramo de base $\sqrt{2}$ e altura $\frac{\sqrt{2}}{2}$, tendo área igual a 1.



Estas 7 peças possuem um total de 23 lados. A medida de cada um destes lados é um dos números: 1, 2, $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$.

Como estamos considerando o quadrado com todas as peças do Tangram com área igual a 8, temos que a área do quadrado de lado *x* com seis peças do Tangram pode ser escrita como:

A = x^2 = 8 – área de uma peça. (3.1)

A medida da área das peças do Tangram é um dos seguintes números: $\frac{1}{2}$, 1 ou 2.

Da condição (3.1) temos as seguintes possibilidades:

$A_1 = x^2 = 8 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$, ou seja, $x_1 = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$

$A_2 = x^2 = 8 - 1 = 7$, ou seja, $x_2 = \pm\sqrt{7}$

$A_3 = x^2 = 8 - 2 = 6$, ou seja, $x_3 = \pm\sqrt{6}$

Como *x* designa valor de medida vamos considerar somente a raiz positiva:

$x_1 = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ ou

$x_2 = \sqrt{7}$ ou

$x_3 = \sqrt{6}$

Analisando as possibilidades para a condição (3.1):

1ª) $\mathbf{x_1 = \dfrac{\sqrt{30}}{2}}$ que pode ser o valor de uma medida de lado ou soma de duas, três ou quatro medidas de lados. Segue abaixo as possibilidades para cada soma:

Uma medida de lado: $\left\{\begin{array}{l} 1 < \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ \sqrt{2} < \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ 2 < \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ 2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \end{array}\right\}$

Duas medidas de lados: $\left\{\begin{array}{l} 1 + \sqrt{2} < \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ 1 + 2 > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ 1 + 2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ \sqrt{2} + 2 > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ \sqrt{2} + 2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ 2 + 2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \end{array}\right\}$

Três medidas de lados: $\left\{\begin{array}{l} 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ 1 + \sqrt{2} + 2 > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ 1 + 2 + 2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \\ \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \end{array}\right\}$

Quatro medidas de lados: $\left\{ 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} > \dfrac{\sqrt{30}}{2} \right\}$

Como todos os possíveis valores para a soma das medidas dos lados são maiores ou menores do que o valor de *x* concluímos que este não poderá ser $\frac{\sqrt{30}}{2}$.

2ª) $\mathbf{x_2 = \sqrt{7}}$ que pode ser o valor de uma medida de lado ou soma de duas, três ou quatro medidas de lados. Segue abaixo as possibilidades para cada soma:

Uma medida de lado: $\left\{\begin{array}{l} 1 < \sqrt{7} \\ \sqrt{2} < \sqrt{7} \\ 2 < \sqrt{7} \\ 2\sqrt{2} > \sqrt{7} \end{array}\right\}$

Duas medidas de lados: $\left\{\begin{array}{l} 1 + \sqrt{2} < \sqrt{7} \\ 1 + 2 > \sqrt{7} \\ 1 + 2\sqrt{2} > \sqrt{7} \\ \sqrt{2} + 2 > \sqrt{7} \\ \sqrt{2} + 2\sqrt{2} > \sqrt{7} \\ 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{7} \end{array}\right\}$

Três medidas de lados: $\left\{\begin{array}{l} 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} > \sqrt{7} \\ 1 + \sqrt{2} + 2 > \sqrt{7} \\ 1 + 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{7} \\ \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{7} \end{array}\right\}$

Quatro medidas de lados: $1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{7}$

Como todos os possíveis valores para a soma das medidas dos lados são maiores ou menores do que o valor de *x* concluímos que este não poderá ser $\sqrt{7}$.

3ª) $\mathbf{x_3 = \sqrt{6}}$ que pode ser o valor de uma medida de lado ou soma de duas, três ou quatro medidas de lados. Segue abaixo as possibilidades para cada soma:

Para uma medida de lado: $\begin{Bmatrix} 1 < \sqrt{6} \\ \sqrt{2} < \sqrt{6} \\ 2 < \sqrt{6} \\ 2\sqrt{2} > \sqrt{6} \end{Bmatrix}$

Duas medidas de lados: $\begin{Bmatrix} 1 + \sqrt{2} < \sqrt{6} \\ 1 + 2 > \sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{2} > \sqrt{6} \\ \sqrt{2} + 2 > \sqrt{6} \\ \sqrt{2} + 2\sqrt{2} > \sqrt{6} \\ 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{6} \end{Bmatrix}$

Três medidas de lados: $\begin{Bmatrix} 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} > \sqrt{6} \\ 1 + \sqrt{2} + 2 > \sqrt{6} \\ 1 + 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{6} \\ \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{6} \end{Bmatrix}$

Quatro medidas de lados: $1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{6}$

Pelo mesmo motivo dos casos anteriores, o valor de *x* não poderá ser $\sqrt{6}$.

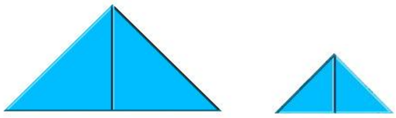
Como não temos outras possibilidades para o valor de *x*, concluímos que não é possível construir um quadrado de lado *x* com apenas 6 peças do Tangram.

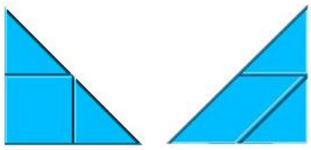
3.3 Montando triângulos

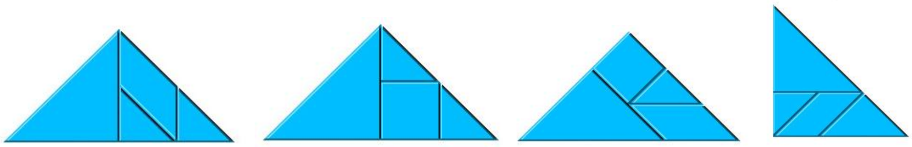
Utilizando as peças do Tangram, formar triângulos com 2, 3, 4, 5, 6 e 7 peças.

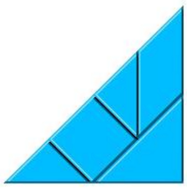
3.3.1 Solução

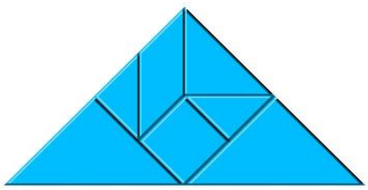
Segue abaixo algumas possibilidades para os triângulos[6] com as peças do Tangram:

2 peças: 

3 peças: 

4 peças: 

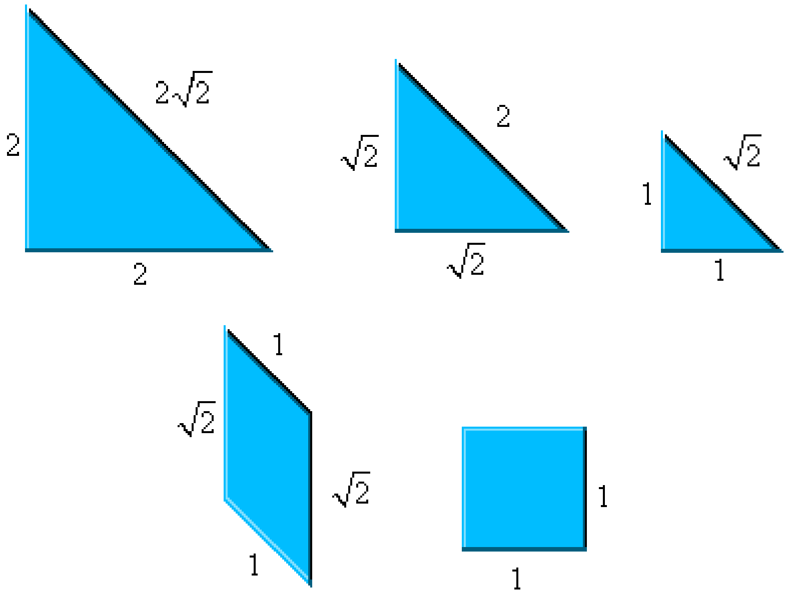
5 peças: 

7 peças: 

[6] É a figura geométrica que ocupa o espaço interno limitado por três linhas retas que concorrem, duas a duas, em três pontos diferentes formando três lados e três ângulos internos que somam 180°.

Vamos verificar se é possível montar um triângulo com **6** peças do Tangram:

Considerando a área das 7 peças do Tangram igual a 8 teremos que suas peças têm as seguintes medidas:



Os ângulos internos dessas peças medem 45º, 90º ou 135º e as medidas dos lados: 1, $\sqrt{2}$, 2 ou $2\sqrt{2}$, e as áreas: $\frac{1}{2}$, 1 e 2.

A área do triângulo procurado é **A = 8 - área de uma peça**, ou seja, $A_1 = \frac{bh}{2} = 8 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ ou $A_2 = \frac{bh}{2} = 8 - 1 = 7$ ou $A_3 = \frac{bh}{2} = 8 - 2 = 6$.

Assim, $A_1 = \frac{bh}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow bh = 15$ ou $A_2 = \frac{bh}{2} = 7 \Rightarrow bh = 14$ ou $A_3 = \frac{bh}{2} = 6 \Rightarrow bh = 12$.

Vamos analisar se o triângulo procurado é do tipo equilátero, escaleno ou isósceles:

Equilátero: Não é possível pois os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60º e não conseguimos formar ângulos internos de 60º com as peças do Tangram, as únicas possibilidades são 45º, 90º ou 135º.

Escaleno: Será possível somente se for um triângulo retângulo com medidas *a*, *b* e *c* distintas tais que $a^2 + b^2 = c^2$ onde (a,b,c) é um terno pitagórico.

Os ternos podem ser (3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), …

Considerando o primeiro termo de cada terno como a altura do triângulo retângulo e o segundo termo como a base teremos as seguintes áreas, respectivamente: 6, 24, 54, 96, etc.

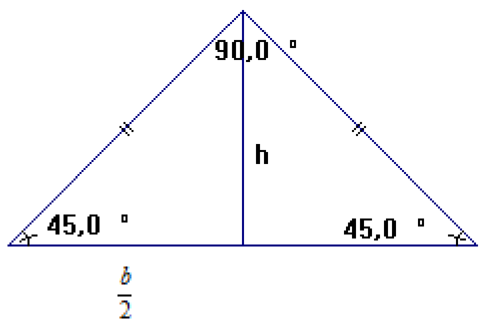
Logo, o único terno possível é o (3, 4, 5) pois tem área igual a 6 = A_3.

Mas o triângulo de medidas 3, 4 e 5 tem ângulos internos de 90º, aproximadamente 53º e aproximadamente 37º, sendo que os ângulos de 53º e 37º são impossíveis de serem formados com as peças do Tangram.

Assim, o triângulo de medidas 3, 4 e 5 tem área igual a 6 mas não pode ser construído com 6 peças do Tangram (nem com as 7 peças).

Isósceles: Sabemos que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais. No nosso caso, a única possibilidade é deles medirem 45º e, portanto, o outro ângulo deve medir 90º .

Como o triângulo procurado deve ser isósceles e retângulo temos a seguinte relação entre a sua altura e a base: $h = \frac{b}{2}$



Substituindo o valor de *h* nas possibilidades A_1, A_2 e A_3 teremos:

1ª) $bh = 15$

$$b\left(\frac{b}{2}\right) = 15$$

$$b^2 = 30 \Rightarrow b = \sqrt{30}$$

2ª) bh = 14

$$b\left(\frac{b}{2}\right)=14$$

$$b^2 = 28 \Rightarrow b = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

3ª) bh = 12

$$b\left(\frac{b}{2}\right)=12$$

$$b^2 = 24 \Rightarrow b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

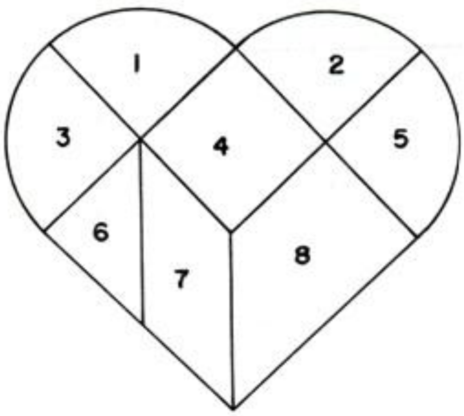
Segue que a base deveria medir $\sqrt{30}$, $2\sqrt{7}$ ou $2\sqrt{6}$. Mas isto é impossível pois nenhuma soma dos comprimentos 1, $\sqrt{2}$, 2 ou $2\sqrt{2}$ resulta em algum desses valores. Donde concluímos que não é possível construir um triângulo com 6 peças do Tangram.

No Apêndice II deste trabalho o leitor encontrará algumas tentativas da formação do triângulo com 6 peças do Tangram.

3.4 Outros tipos de Tangram[7]

3.4.1 Tangram Coração Partido

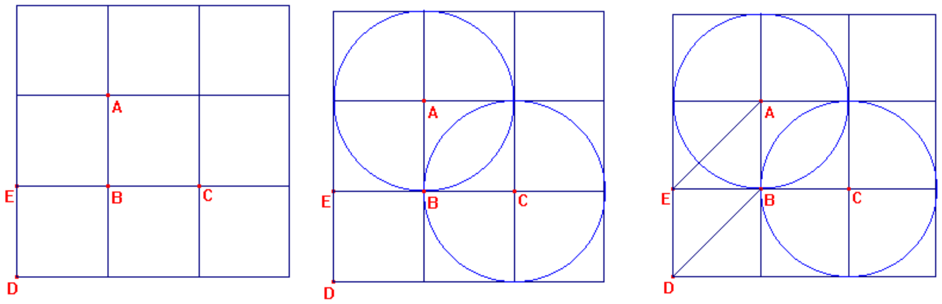
Este quebra-cabeça é formado por 8 peças conforme a figura:



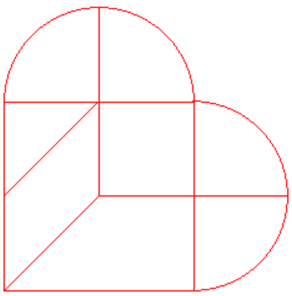
[7] Disponível em: < http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/tangran/index.html >

Ele pode ser construído conforme o esquema abaixo:

• Traça-se um quadrado de lado 3 cm e quadricula com 1 cm de lado; Traça-se duas circunferências secantes de raio 1 cm, uma com centro no ponto A e outra com centro no ponto C, de maneira que a intersecção das mesmas ocorra no centro do quadrado; Traça-se a diagonal $\overline{AE}$ do quadradinho da segunda linha e primeira coluna e a diagonal $\overline{BD}$ do quadradinho da terceira linha e primeira coluna;

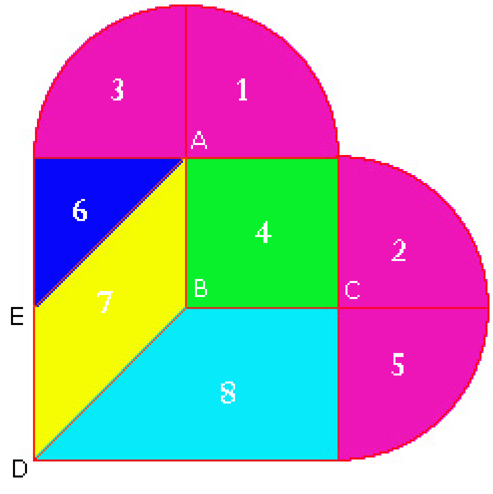


• Destaca-se as peças como na figura a seguir:



3.4.1.1 Atividade com o Tangram Coração Partido

Calcular a área de cada uma das peças do Tangram Coração Partido considerando o quadrado de lado 1 e as circunferências de raio 1.

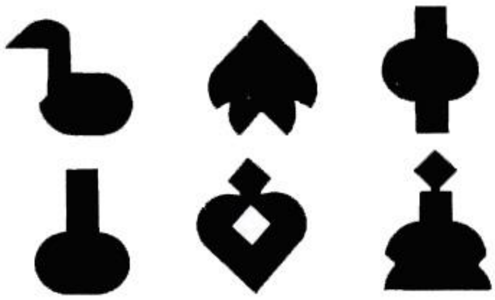


3.4.1.2 Solução

O quadrado tem área igual a 1. As peças 1, 2, 3 e 5 têm área igual a $\frac{\pi}{4}$, pois correspondem à quarta parte de um círculo de área πr^2 onde o raio r mede 1 unidade.

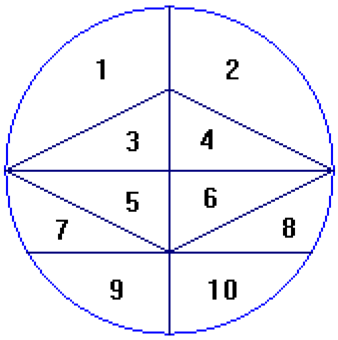
A peça 6 tem área $\frac{1}{2}$ pois é um triângulo de base e altura iguais a 1. A peça 7 tem área igual a 1 pois os triângulos ΔABE e ΔDEB têm, cada um, a metade da área do quadrado. A peça 8 tem área $\frac{3}{2}$ pois é composta de um triângulo como a peça 6 e um quadrado como a peça 4.

Segue abaixo algumas figuras que podem ser montadas com o Tangram Coração Partido.



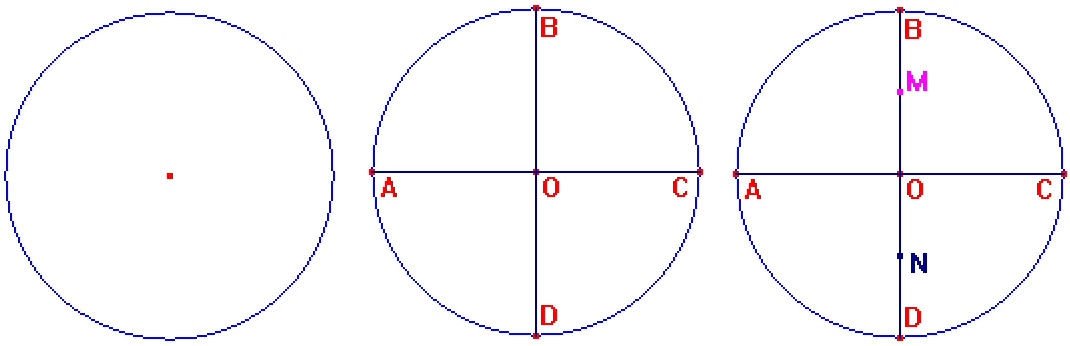
3.4.2 Tangram Circular

Este quebra-cabeça é formado por 10 peças representadas na figura abaixo.

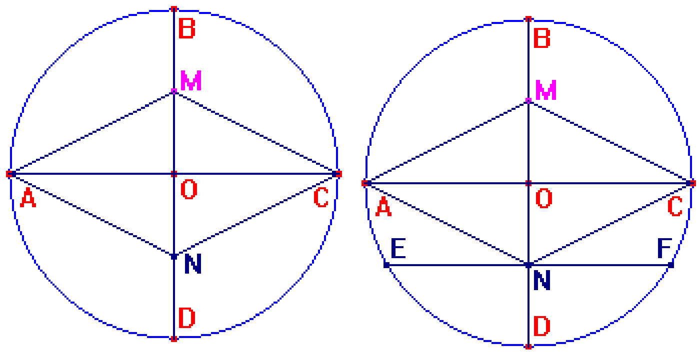


Ele pode ser construído conforme o esquema abaixo:

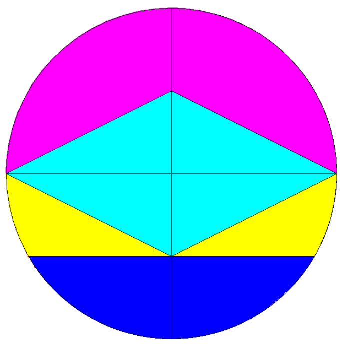
• Desenha-se uma circunferência de raio de uma unidade de comprimento; traça-se os diâmetros $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$; divide-se os raios $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$ ao meio;



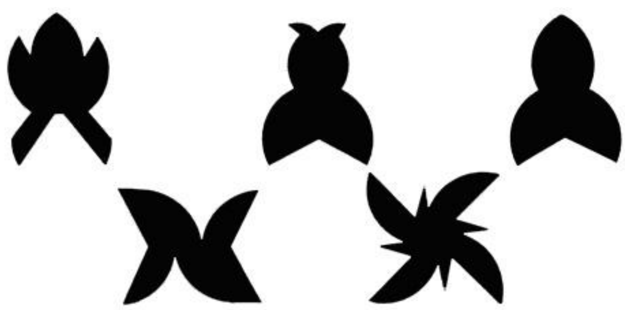
• Une-se os pontos A ao M, C ao M, A ao N e C ao N; Traça-se a corda $\overline{EF}$ que passa por N;



As peças estão destacadas nas figuras ao lado:

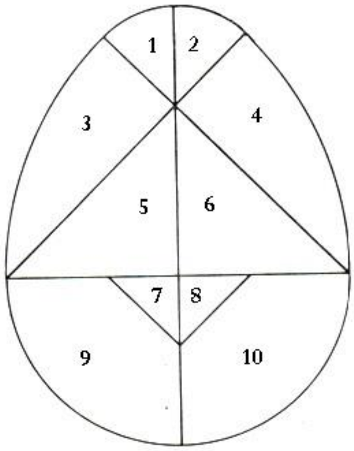


Segue abaixo algumas figuras que podemos formar com o Tangram Circular.



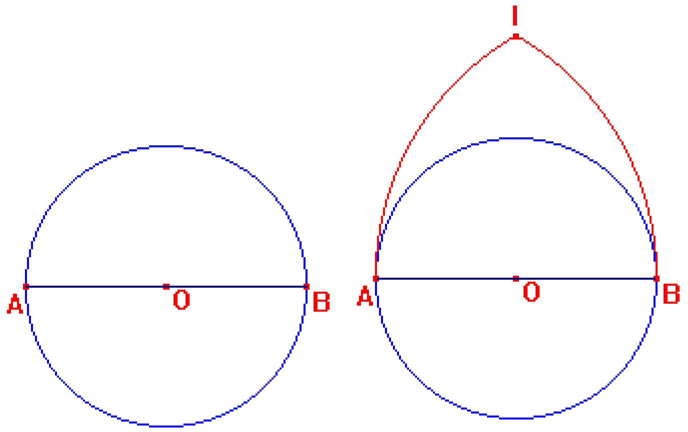
3.4.3 Tangram Oval

Este quebra-cabeça de 10 peças também é conhecido como **OVO MÁGICO**. Observe a representação simplificada da composição das peças desse Tangram.

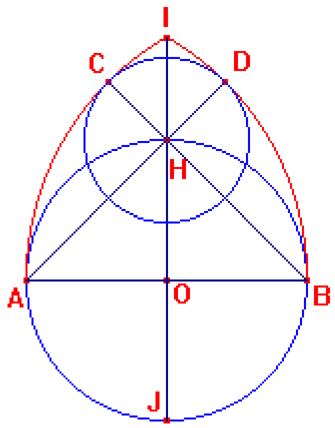


Ele pode ser construído conforme o esquema abaixo:

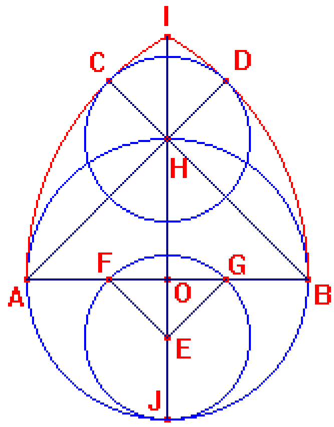
• Traça-se uma circunferência de raio unitário com centro em O; Traça-se seu diâmetro $\overline{AB}$; Desenha-se um arco com centro em B e raio de medida AB e um arco com centro em A e raio de medida AB de modo que eles se encontrem no ponto I;



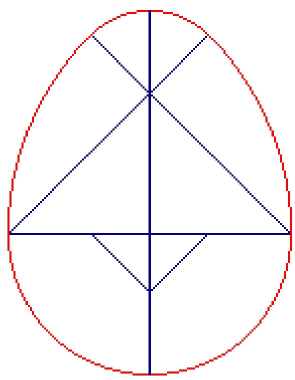
• Traça-se o diâmetro $\overline{JH}$ da circunferência de centro em O, estendendo-o até o ponto I; Traça-se uma semi-reta com origem em B passando por H obtendo o ponto C, e uma semi-reta com origem em A passando por H obtendo o ponto D; Traça-se uma circunferência com centro em H e raio HC = HD;



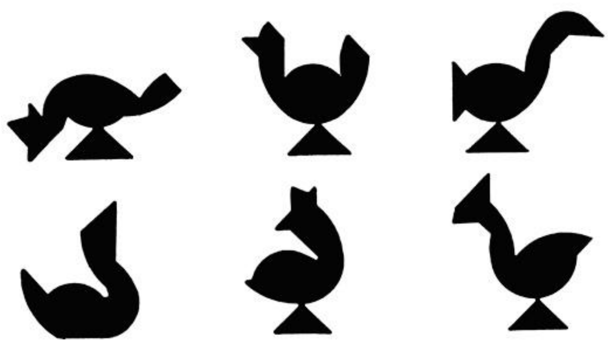
• Traça-se a circunferência de centro E tangente ao ponto J com raio de medida CH sobre o diâmetro $\overline{JH}$; Assinala-se os pontos F e G que pertencem à circunferência de centro E; Une-se os pontos E ao F e E ao G.



• Destaca-se as peças como na figura ao lado:



Segue abaixo algumas figuras que podemos construir com o Tangram Oval.



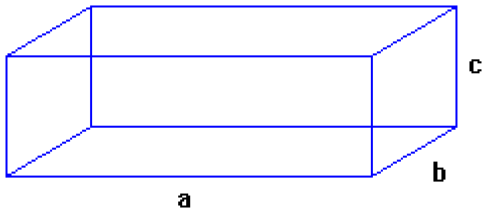
RECREAÇÕES EM GEOMETRIA ESPACIAL

4. Problema do bloco retangular[8]

Bloco retangular ou paralelepípedo retângulo são os objetos que têm a forma de uma caixa de sapatos, caixa de fósforo, etc.

4.1 Apresentação

É ou não é possível reduzir as dimensões deste bloco retangular de dimensões *a,b* e *c* para obter outro que tenha ao mesmo tempo, a metade do volume e a metade da área da superfície do primeiro?



4.2 Solução

Vamos supor que exista um bloco retangular de medidas *x, y e z* onde $0 < x < a$, $0 < y < b$ e $0 < z < c$ e que tenha a metade do volume e a metade da área do primeiro bloco retangular.

Sabemos que a área da superfície de um bloco retangular com medidas *a, b* e *c* é dada por $S_1 = 2ab + 2ac + 2bc$ e o volume é dado por $V_1 = abc$. Chamando a área e o volume do primeiro bloco de S_1 e V_1 respectivamente, e a área e o volume do segundo bloco (cujas dimensões são reduzidas) de S_2 e V_2 respectivamente, temos que a área da superfície do segundo bloco será:

$$S_2 = 2xy + 2xz + 2yz = \frac{S_1}{2} = \frac{2ab + 2ac + 2bc}{2} = ab + ac + bc$$

$$S_2 = 2(xy + xz + yz) = ab + ac + bc$$

$$\frac{S_2}{2} = xy + xz + yz = \frac{ab + ac + bc}{2} \text{ , ou seja, } \frac{S_2}{2} = \frac{ab + ac + bc}{2} \qquad (4.1)$$

---

[8]Referência Bibliográfica: RODRIGUES, F. W. Problemas, **Revista do Professor de Matemática – Número 26**. São Paulo: SBM, 1994. p. 44.

E o volume será:

$$V_2 = xyz = \frac{V_1}{2} = \frac{abc}{2}\text{, ou seja, } V_2 = \frac{abc}{2} \qquad (4.2)$$

Dividindo a expressão (4.2) por *abc* teremos:

$$V_2 = \frac{xyz}{abc} = \frac{1}{2} \text{ ou ainda, } \frac{x}{a}\frac{y}{b}\frac{z}{c} = \frac{1}{2} \qquad (4.3)$$

Dividindo a expressão (4.1) por *abc* teremos:

$$\frac{S_2}{2} = \frac{xy + xz + yz}{abc} = \frac{ab + ac + bc}{abc}\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{S_2}{2} = \frac{xy}{abc} + \frac{xz}{abc} + \frac{yz}{abc} = \left(\frac{ab}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{bc}{abc}\right)\frac{1}{2}$$

$\frac{S_2}{2}$ pode ser escrita como:

$$\frac{S_2}{2} = \frac{x}{a}\frac{y}{b}\frac{1}{c} + \frac{x}{a}\frac{z}{c}\frac{1}{b} + \frac{y}{b}\frac{z}{c}\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)\frac{1}{2} \qquad (4.4)$$

Isolando $\frac{x}{a}\frac{y}{b}$ na expressão (4.3) teremos: $\frac{x}{a}\frac{y}{b} = \frac{1}{2}\frac{c}{z}$ (4.5)

Isolando $\frac{x}{a}\frac{z}{c}$ na expressão (4.3) teremos: $\frac{x}{a}\frac{z}{c} = \frac{1}{2}\frac{b}{y}$ (4.6)

Isolando $\frac{y}{b}\frac{z}{c}$ na expressão (4.3) teremos: $\frac{y}{b}\frac{z}{c} = \frac{1}{2}\frac{a}{x}$ (4.7)

Substituindo (4.5), (4.6) e (4.7) na expressão (4.4) teremos:

$$\frac{S_2}{2} = \frac{1}{2}\frac{c}{z}\frac{1}{c} + \frac{1}{2}\frac{b}{y}\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\frac{a}{x}\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)\frac{1}{2}\text{ , ou seja,}$$

$$\frac{S_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \qquad (4.8)$$

Chegamos a um absurdo pois temos por hipótese que $0 < x < a \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{a}$, $0 < y < b \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{b}$ e $0 < z < c \Rightarrow \frac{1}{z} > \frac{1}{c}$. Assim, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, o que contradiz (4.8).

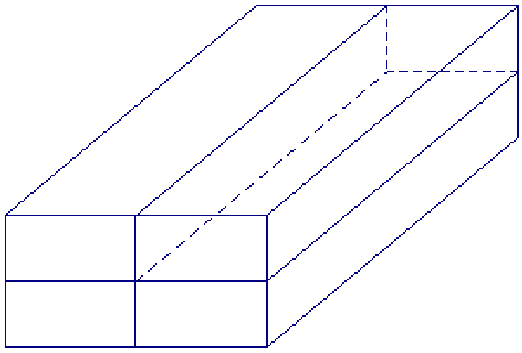
Portanto, não existe um bloco retangular com dimensões reduzidas que tenha ao mesmo tempo a metade do volume e a metade da área da superfície do primeiro bloco.

5. A diagonal misteriosa[9]

O **Teorema de Pitágoras** é provavelmente o mais célebre dos teoremas da matemática. Enunciado pela primeira vez por filósofos gregos chamados de pitagóricos, estabelece uma relação simples entre o comprimento dos lados de um triângulo retângulo: *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*.

5.1 Apresentação

Você possui caixas retangulares idênticas (por exemplo, de sapato) à sua disposição. Propor um método prático para medir uma diagonal espacial de uma das caixas.



5.2 Solução

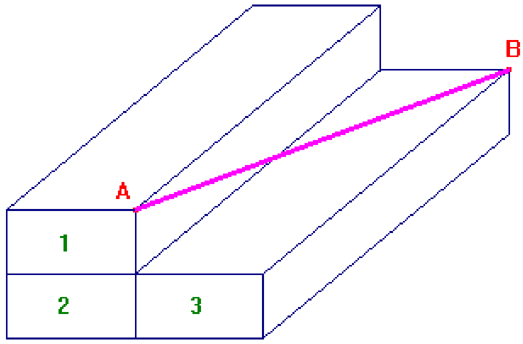
Podemos usar três caixas (ou 5, ou 7, …) sendo que a caixa 1 fique sobre a caixa 2 e a caixa 3 fique a direita ou a esquerda da caixa 2, conforme a figura a seguir (escolhemos ela à direita).

Desta forma podemos calcular a diagonal espacial pois o espaço acima da caixa 3 é uma caixa invisível onde podemos calcular essa diagonal espacial medindo com uma régua ou uma fita métrica o valor do comprimento do ponto A ao ponto B.

Este é o método prático para medir uma diagonal espacial de uma caixa.

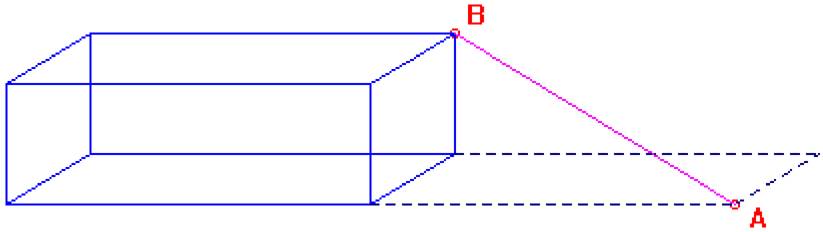
---

[9] Referência Bibliográfica: STEINHAUS, H. **One Hundred Problems in Elementary Mathematics**. New York: Dover Publications, 1979.



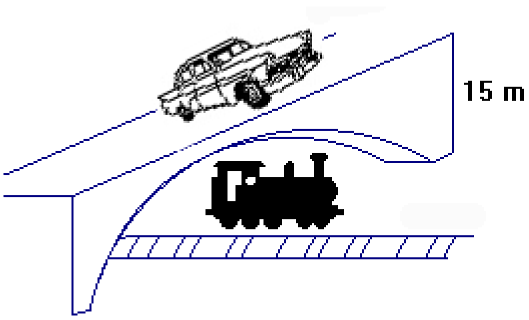
E se você possuir somente uma caixa? Não vale usar o Teorema de Pitágoras!!

Ora, basta colocar a caixa no canto de uma mesa! Faz-se uma marcação das suas medidas no plano da mesa. Desloca-se a caixa na direção horizontal (por um espaço equivalente a medida do seu lado) e mede-se o comprimento da diagonal da caixa do ponto A na marcação do plano até o vértice oposto B da própria caixa. Na figura abaixo o segmento $\overline{AB}$ na cor rosa é a diagonal espacial da caixa.



5.3 Agora é a sua vez de resolver! [10]

Um trem viaja à velocidade de 108 quilômetros por hora por uma estrada de ferro que passa 15 metros abaixo de um longo viaduto de uma rodovia. Um carro, à velocidade de 72 quilômetros por hora, cruza o viaduto exatamente sobre o trem. A que distância o trem e o carro estarão um do outro, 10 segundos depois? (Sabe-se que os eixos das vias são ortogonais).



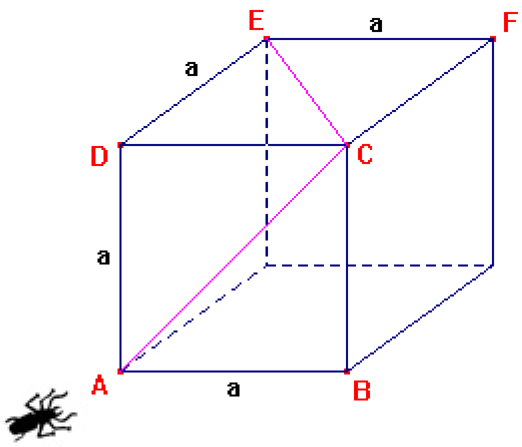
[10] Referência Bibliográfica: SHULTE, A. P.; LINDQUIST, M. M. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo : Atual Editora,1994.

6. A Formiga e o Panetone[11]

Ângulo é a região de um plano concebida pela abertura de duas semi-retas que possuem uma origem em comum, chamada vértice do **ângulo**. A abertura do ângulo é uma propriedade invariante e é medida em radianos ou graus.

6.1 Apresentação

Enquanto buscava uma entrada numa caixa de panetone cúbica, uma formiga metódica caminhou seguindo a diagonal AC da face ABCD, depois a diagonal CE da face DCEF, como mostram as linhas na cor rosa da figura abaixo. Quanto mede o ângulo $A\hat{C}E$ formado entre as duas linhas?



6.2 Solução

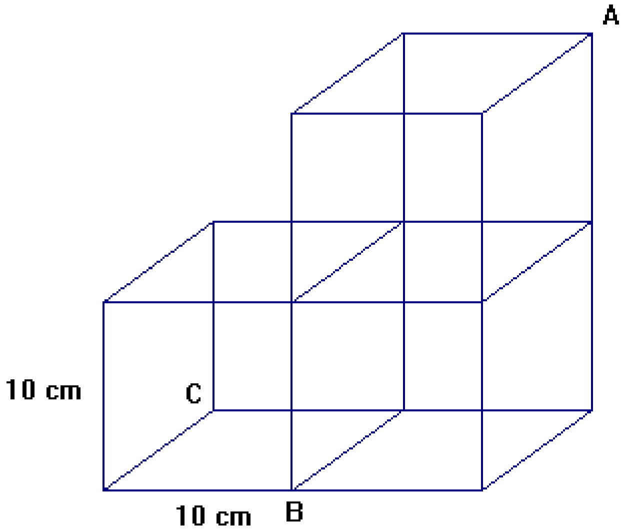
O segmento $\overline{AC}$ é uma diagonal da face ABCD do panetone cúbico e o segmento $\overline{CE}$ é uma diagonal da face DCEF. Considerando que os lados das faces do cubo medem um valor *a*, então todas as diagonais das faces medem $a\sqrt{2}$. Os percursos de A até C, de C até E e de E até A são iguais (pois $\overline{EA}$ é uma diagonal de face do cubo) , formando um triângulo equilátero que possui ângulos internos congruentes e iguais a 60º. Portanto, o ângulo $A\hat{C}E$ mede 60º.

---

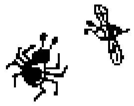
11 <u>Referência Bibliográfica:</u> NETO, L. D. M. Super divertido, **Revista Super Interessante.** São Paulo, fev. 1997, edição 113.

6.3 Agora é a sua vez de resolver! [12]

Três cubos idênticos, de aresta 10 cm, são agrupados e três de seus vértices, designados por A, B e C, são assinalados, conforme mostra a figura abaixo. Quanto é o perímetro do triângulo ABC em centímetros? E o triângulo ABC é retângulo escaleno, acutângulo ou retângulo isósceles?



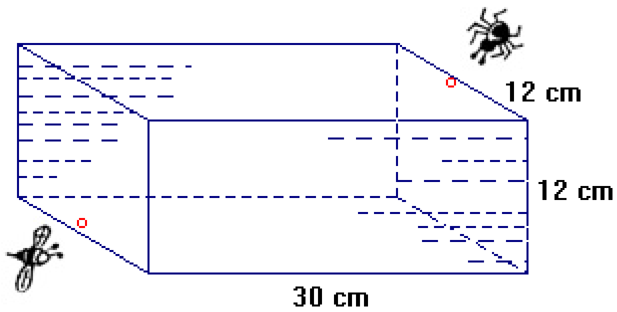
[12] Referência Bibliográfica: RODRIGUES, F.W. Problemas, **Revista do Professor de Matemática – Número 25**. São Paulo: SBM, 1994. p. 43.

7. A Mosca e a Aranha[13] 

Este é um belo problema em *geodésicas* (curva de menor comprimento que une dois pontos) publicado em 1903. Em uma "geometria plana" (espaço euclidiano), a geodésica (curva) é um segmento de reta, mas em "geometrias curvas" (geometria riemaniana), muito utilizadas por exemplo na Teoria da Relatividade Geral, a curva de menor distância entre dois pontos pode não ser uma reta.

7.1 Apresentação

Uma caixa retangular tem as seguintes dimensões: 30 cm de comprimento, 12 cm de largura e 12 cm de altura. A aranha está paralisada no interior da caixa no centro da parede, a um centímetro da tampa. A mosca está no centro da parede oposta, um centímetro acima da base, e também paralisada com medo de avançar. Qual é o caminho mais curto que a aranha deve rastear para atingir a mosca?



7.2 Solução

O problema é resolvido através da planificação da caixa, onde desenha-se uma linha reta da aranha até a mosca. No entanto, há muitas maneiras em que a caixa pode ser planificada. Não é tão fácil como poderá parecer à primeira vista a determinação do caminho mais curto.

Das 29 possíveis planificações da caixa retangular de medidas: 30 cm de comprimento, 12 cm de largura e 12 cm de altura, temos que a aranha pode escolher 90 caminhos (traçados em linha reta nas planificações) para chegar até a mosca. A quantidade de caminhos e seus valores estão dispostos na tabela seguinte.

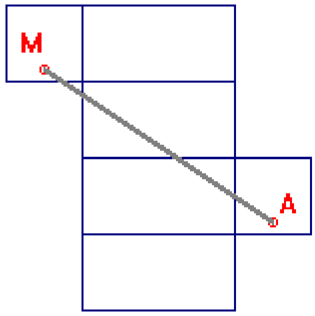
---

[13] Referência Bibliográfica: GARDNER, M. Mathematical Games, **Revista Scientific American**, 06/1958 - vol. 198 nº 6.

Tabela 1: Caminhos possíveis para a aranha atingir a mosca

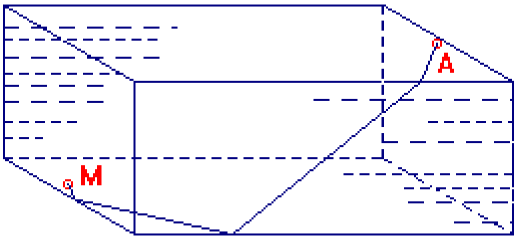
Distância (cm)	**Quantidade**
40	2
≅ 40,71	18
42	34
≅ 43,17	34
≅ 57,27	2
Desconsiderados	26
TOTAL	116

Analisando a tabela 1 vemos que 26 caminhos são desconsiderados pois não é possível traçar uma linha reta na planificação que esteja no interior da própria planificação, conforme pode-se ver no exemplo da planificação abaixo.

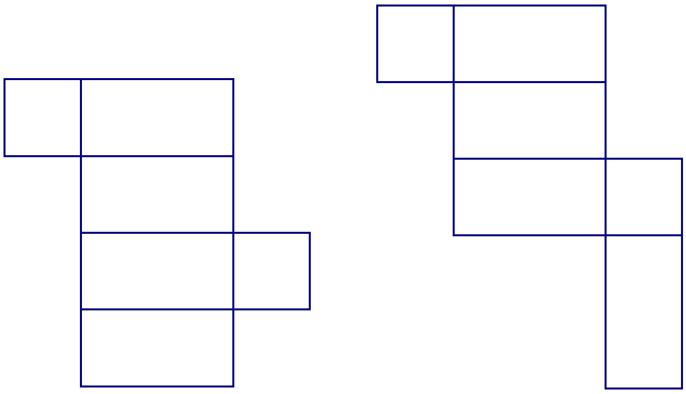


Se a aranha se deslocar diretamente para baixo, pela parede, em linha reta, pelo chão e, em seguida, subir diretamente pela outra parede, ou seguir um caminho semelhante pelo teto, a distância será de 42 cm. Certamente é impossível imaginar itinerário menor!

O caminho de 43,17 cm aparece na mesma quantidade que o de 42 cm, mas o caminho de 40 cm que aparece apenas 2 vezes é o menor caminho que a aranha pode percorrer para chegar mais rápido até a sua presa. Este caminho é uma geodésica e a aranha passa por 5 das 6 faces da sala, o que não acontece com os outros caminhos possíveis. O percurso que a aranha faz é esta geodésica:



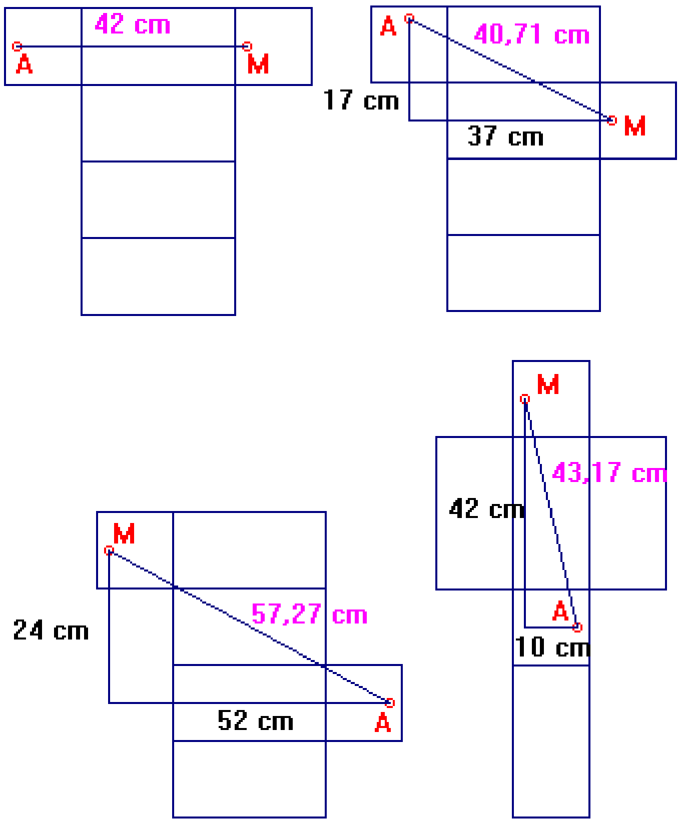
As duas planificações onde o caminho é de 40 cm são estas:



As outras possíveis planificações estão no Apêndice I deste trabalho.

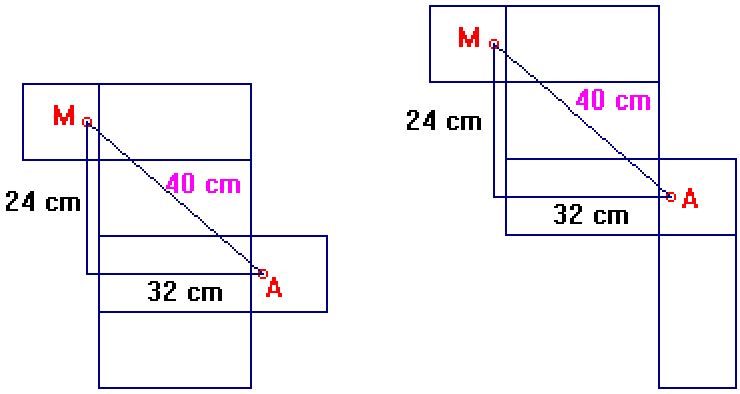
7.3 Justificativa da escolha

Os cinco possíveis valores para o menor percurso aparecem, por exemplo, nas planificações a seguir:

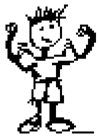


Encontramos os valores aproximados de 40,71 cm, 57,27 cm e 43,17 cm aplicando o Teorema de Pitágoras em cada triângulo.

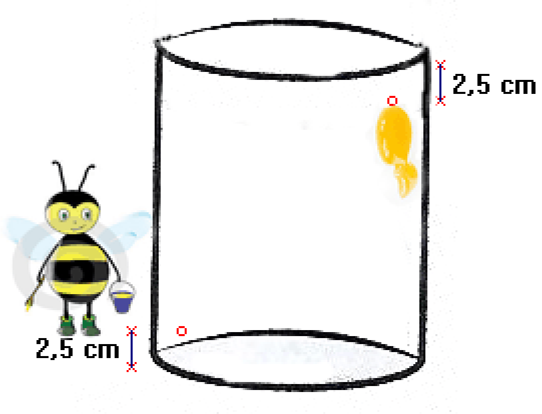
As planificações onde encontramos o menor valor possível para o caminho estão dispostas abaixo, em que obtemos o valor de 40 cm aplicando o Teorema de Pitágoras em cada triângulo.



7.4 Agora é a sua vez de resolver! [14]



Um copo cilíndrico tem 10 cm de altura e 15 cm de comprimento de circunferência. Na parede interior, em frente e a 2,5 cm a partir do topo está uma gota de mel. Na parede exterior, num ponto A diametralmente oposto ao da gota, a 2,5 cm a partir do fundo está uma abelha. Qual é o menor caminho que a abelha pode percorrer para chegar até a gota de mel?



[14] Referência Bibliográfica: GARDNER, M. Mathematical Games, **Revista Scientific American**, 06/1958 - vol. 198 nº 6.

8. Construção da planificação de um tetraedro a partir de um triângulo qualquer

Planificação de sólidos geométricos: é uma figura plana que, por dobragem e colagem, permite obter o modelo do sólido pretendido.

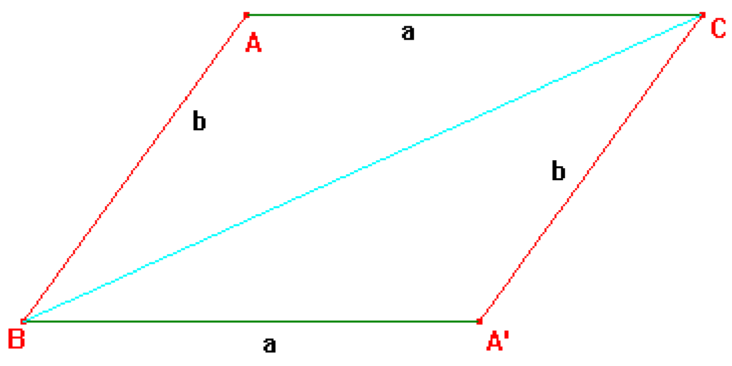
8.1 Apresentação

Como construir a planificação de um tetraedro a partir de um triângulo qualquer (que é uma de suas faces)?

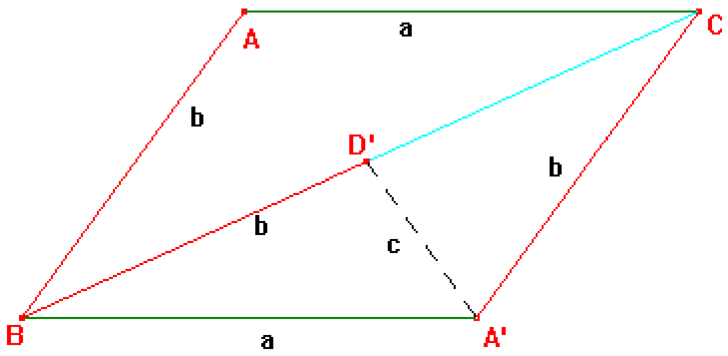
8.2 Construção

Vamos inicialmente, construir a planificação de um tetraedro a partir de um triângulo obtusângulo e os demais casos seguem os mesmos passos.

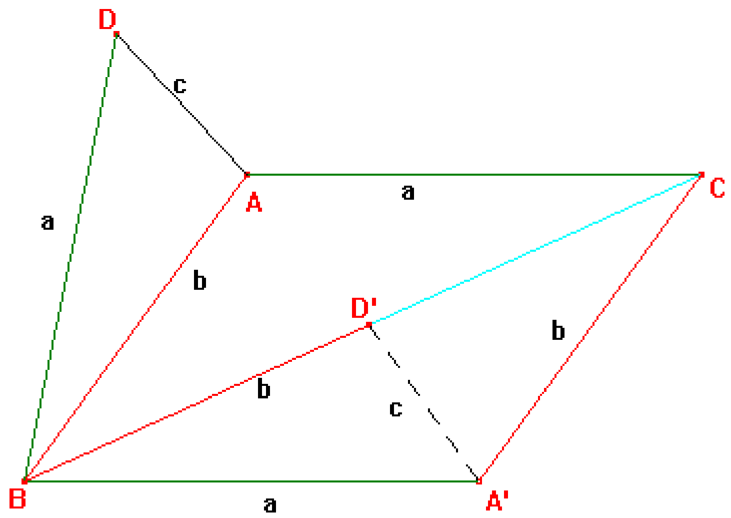
1º Passo: Dado um triângulo obtusângulo ΔABC, construímos um triângulo $\Delta A'BC$ congruente (idêntico) ao triângulo ΔABC dado, sendo $\overline{BC}$ o lado comum entre eles. Vamos chamar $AB = b = A'C$ e $AC = a = A'B$.



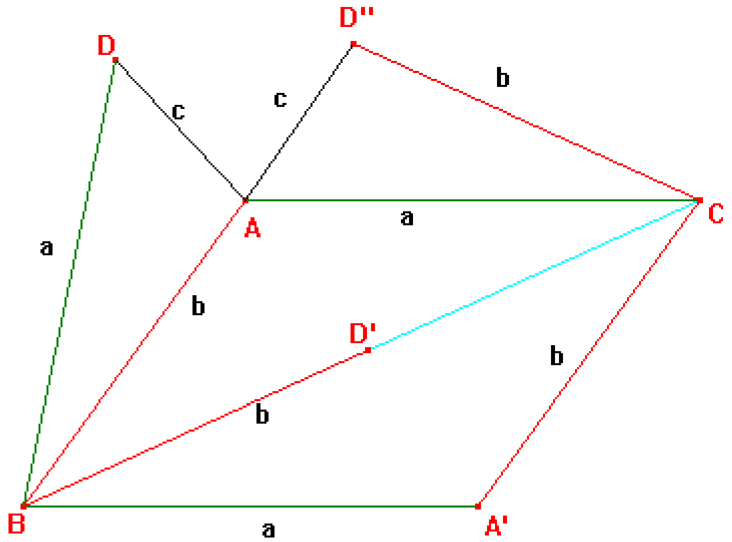
2º Passo: Vamos marcar a medida $BD' = b = AB$ no lado $\overline{BC}$ (com início no ponto B). Chamaremos $A'D' = c$.



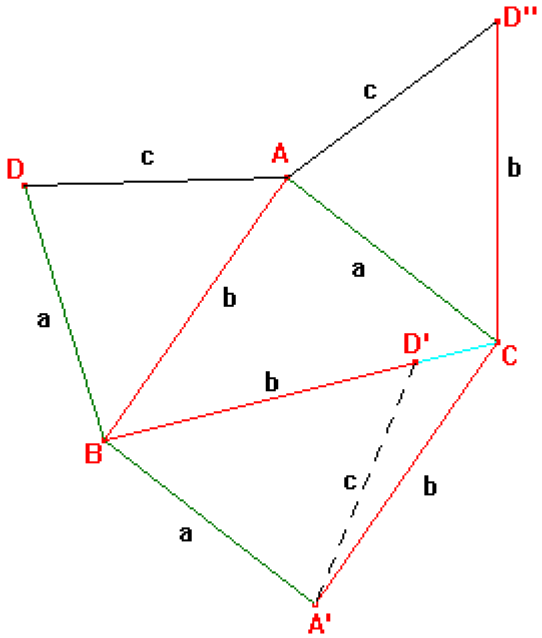
3º Passo: No lado $\overline{BA}$ construímos o triângulo ΔABD onde o segmento $\overline{BD}$ tem medida *a*, o segmento $\overline{AB}$ tem medida *b* e o segmento $\overline{AD}$ tem medida *c*.



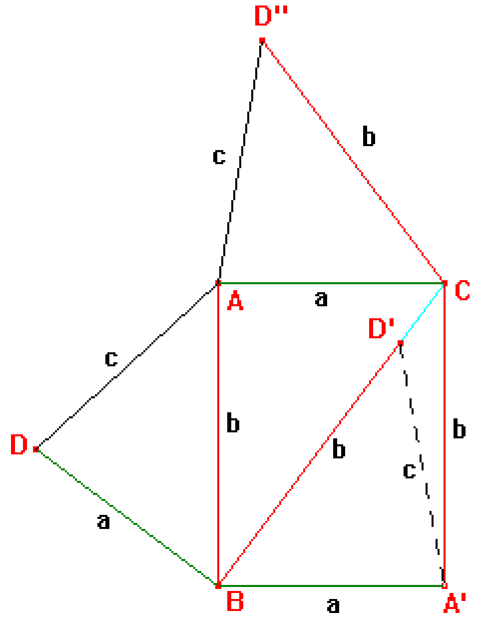
4º Passo: No lado $\overline{AC}$ construímos o triângulo $\Delta ACD''$, onde AC = a, CD'' = b e AD'' = c. E está pronta a planificação do tetraedro onde duas de suas faces são triângulos obtusângulos congruentes quaisquer .



Para um triângulo *acutângulo* ABC basta seguir os mesmos passos.



Para um triângulo *retângulo* ABC também pode-se seguir os mesmos passos.



Curiosidade:[15] A condição necessária e suficiente para que um triângulo seja congruente a cada uma das faces de um mesmo tetraedro é que ele seja **acutângulo**.

[15] Referência Bibliográfica: **Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª.** Problemas e Soluções compilados por Élio Mega e Renate Watanabe – SBM.

9. O tetraedro escaleno e o número de ouro[16]

A **proporção áurea** ou **número de ouro** é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega φ(*phi*) e com o valor arredondado a três casas decimais de 1,618. É um número que há muito tempo é empregado na arte. Também é chamada de: seção áurea, razão áurea, razão de ouro, divina proporção, proporção em extrema razão, divisão de extrema razão. O **número de ouro** pode ser encontrado na proporção em conchas (o nautilus, por exemplo), seres humanos (o tamanho das falanges, ossos dos dedos, por exemplo), até na relação dos machos e fêmeas de qualquer colmeia do mundo, e em inúmeros outros exemplos que envolvem a ordem do crescimento.

9.1 Apresentação

Achar a planificação de um tetraedro cujas arestas sejam números **inteiros** e cujas faces sejam triângulos escalenos **semelhantes**[17] entre si, mas nem todos **congruentes**[18]. Além disso, a maior aresta de uma face (lado de um triângulo) deve ser menor do que 50.

9.2 Solução

Em dois triângulos semelhantes, três ângulos de um triângulo são iguais respectivamente a 3 ângulos do outro triângulo. Assim, as quatro faces (triangulares) do tetraedro têm esta propriedade: “os três ângulos de uma face são respectivamente iguais a três ângulos de qualquer outra face”. Sejam T_1 e T_2 duas faces (triângulos) semelhantes e *não congruentes*.

Os triângulos T_1 e T_2 não podem ter os três lados respectivamente congruentes, pois se fosse o caso, T_1 e T_2 seriam congruentes (caso LLL de triângulos congruentes).

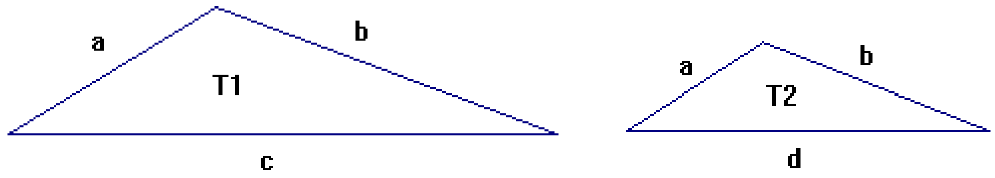
---

[16] <u>Referência Bibliográfica:</u> HUNTLEY, H. E. **The Divine Proportion**. New York: Dover Publications, 1970.

[17] Dois triângulos são **semelhantes** se, e somente se, possuem os três ângulos *ordenadamente congruentes* e os lados *homólogos* proporcionais. Dois lados homólogos são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

[18] Dois triângulos são **congruentes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus respectivos vértices, de modo que ângulos de vértices correspondentes sejam congruentes, e segmentos com extremidades correspondentes sejam congruentes.

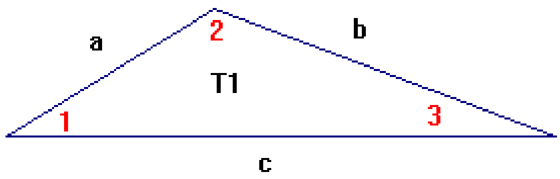
Desta maneira, os elementos congruentes de T_1 e T_2 são dois lados e três ângulos.



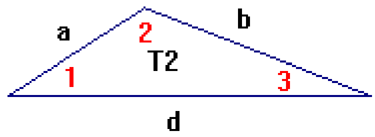
(a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ e c $\neq$ d)

Como T_1 é semelhante a T_2, os lados opostos a ângulos iguais são proporcionais.

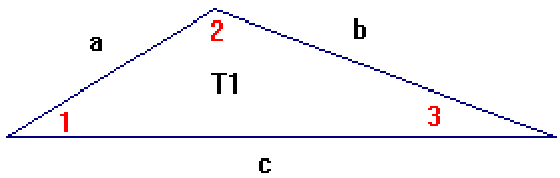
A situação a seguir não ocorre pois o caso LAL daria T_1 congruente a T_2.



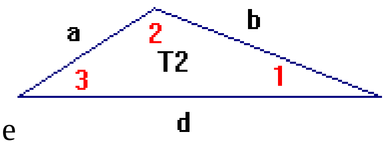
e



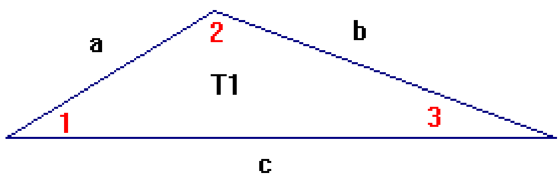
Esta outra situação também não ocorre pois o caso LAL daria novamente T_1 congruente a T_2.



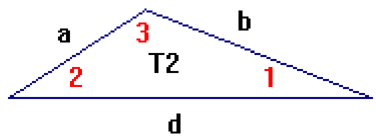
e



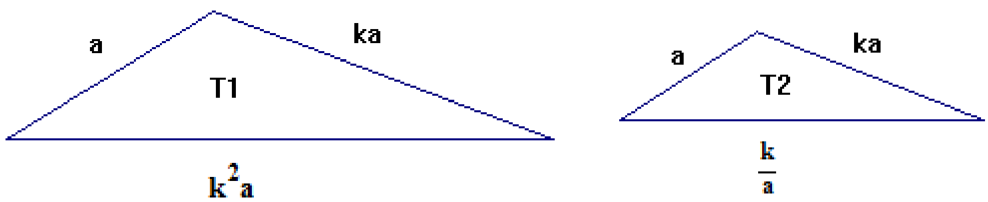
Logo, deve ocorrer a situação:



e



Das igualdades $\frac{a}{d} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = k > 0$ tiramos $b = ka$; $c = kb = k^2a$ e $d = \frac{a}{k}$.



Observe que os lados de T_1 e os lados de T_2 formam uma progressão geométrica.

Vamos analisar o caso onde $k > 1$ (ou $a < ka < k^2a$ = maior lado do triângulo T_1): a desigualdade triangular exige que $k^2a < a + ka$, ou $k^2 - k - 1 < 0$.

Analisando a desigualdade: para $k^2 - k - 1 = 0$ temos as raízes: $k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Assim, $\varphi' = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618034...$ e $\varphi'' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}61803...$

Observe que φ' é o número de ouro! Portanto, $k \neq 1$ e $\varphi' < k < \varphi$. (Olhe só que restrição para k!). Isto é, *k* não pode ser maior do que a razão áurea.

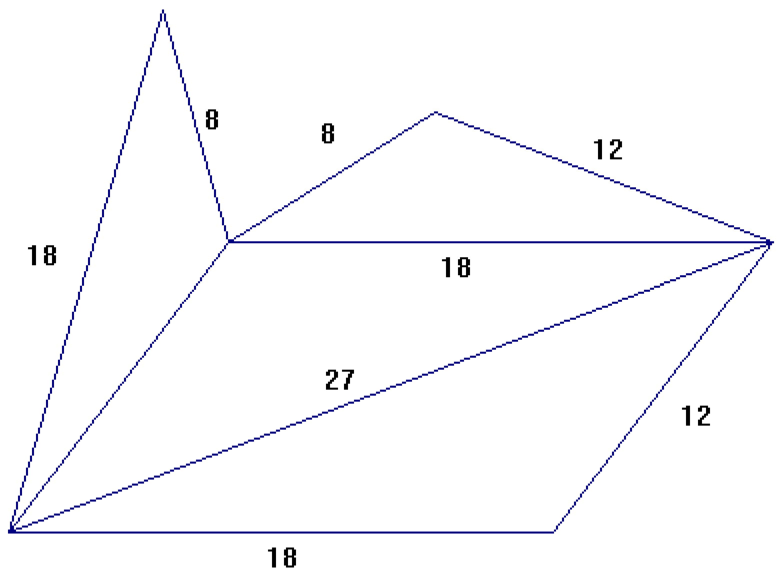
Para o triângulo T_2 de lados $\dfrac{a}{k} < a < ka$, $(k > 1)$ obtem-se a mesma desigualdade $k^2 - k - 1 < 0$.

Ficamos com $\dfrac{a}{k} < a < ka < k^2a < 50$, sendo $\dfrac{a}{k}$, a, ka e k^2a números inteiros.

Temos $\varphi' < k < \varphi = 1{,}618...$ e $k \neq 1$.

Escolhendo $k = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 < \varphi$, temos as arestas $\left(\dfrac{a}{k} = \dfrac{2}{3}a, a, \dfrac{3}{2}a, \dfrac{9}{4}a\right)$.

Para a = 12, tem-se as arestas (8, 12, 18, 27). A figura abaixo mostra a planificação do tetraedro escaleno.



Escolhendo $k = \dfrac{16}{10} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6 < \varphi$ temos as arestas $\left(\dfrac{5}{8}a, a, \dfrac{8}{5}a, \dfrac{64}{25}a\right)$.

Para a = 36 e $k = \dfrac{4}{3} < \varphi$ dá (27, 36, 48, 64), mas 64 > 50.

Para a = 200 $\in \mathbb{N}$, tem-se as arestas (125, 200, 320, 512). Mas, a maior aresta é 512 que é maior do que 50, o que contradiz a hipótese.

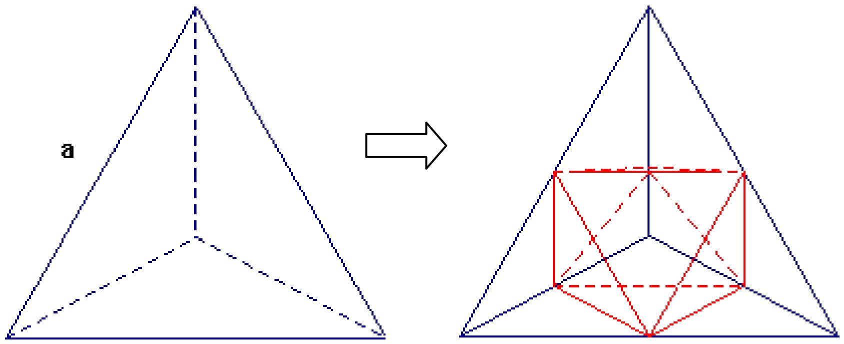
Portanto, as arestas de um tetraedro cujas faces são triângulos escalenos **semelhantes** entre si, mas nem todos **congruentes** e com a maior aresta de uma face menor que 50 são 8,12,18 e 27.

10. Um tetraedro menos quatro tetraedros[19]

O filósofo grego Platão estabelecia uma ligação dos poliedros com as forças da natureza. Hoje podemos estudar as formas moleculares existentes na natureza e observarmos que as ideias que Platão teve por volta do século V e IV a.C. são verificadas e comprovadas. O *tetraedro regular* é um sólido platônico representante do elemento fogo, figura geométrica espacial formada por quatro triângulos equiláteros; possui 4 vértices, 4 faces, 6 arestas.

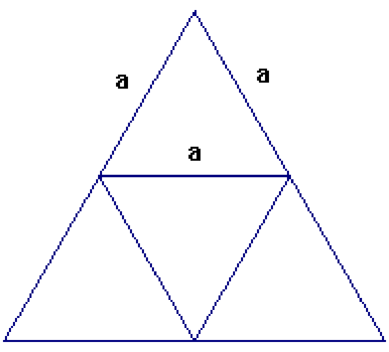
10.1 Apresentação

O tetraedro regular a seguir tem arestas de comprimento *a*. Se retirarmos a partir de cada vértice um tetraedro regular de aresta $\frac{a}{2}$, qual o sólido resultante?



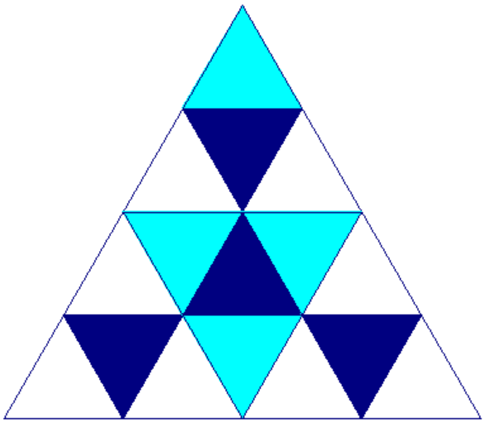
10.2 Solução

Segue abaixo a planificação do tetraedro de aresta *a*:

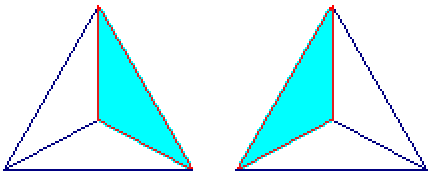


[19] Referência Bibliográfica: SMOLE, K. C. S. et al, O papel da geometria na formação do professor das séries iniciais, **Revista do Professor de Matemática – Número 16**. São Paulo: SBM, 1990. p.1- 9.

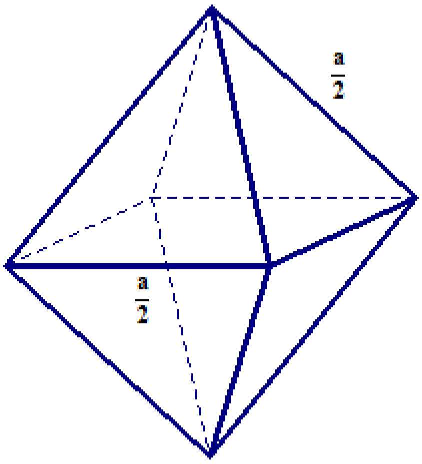
Na planificação a seguir as partes em azul escuro são as faces do sólido resultante e as partes em azul claro são as faces que são cortadas mas que também fazem parte do sólido resultante.



Os vértices retirados são da forma:



E o sólido resultante é um octaedro regular da forma:



.

Vamos verificar se o volume resultante é de fato o volume de um octaedro.

Sabendo que o volume de um tetraedro regular de aresta *a* é $V_{TOT} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

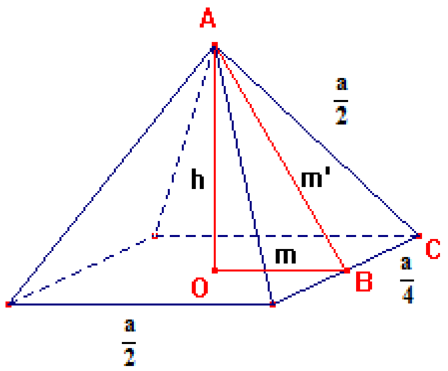
O volume de um tetraedro de aresta $\frac{a}{2}$ será $V = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{96}$.

Como são retirados um tetraedo de aresta $\frac{a}{2}$ de cada vértice do tetraedro de aresta *a* o volume total retirado é $V_{RET} = 4\left(\frac{a^3\sqrt{2}}{96}\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Assim, o volume resultante é $V_{RES} = V_{TOT} - V_{RET} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} - \frac{a^3\sqrt{2}}{24} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Vamos verificar se este valor é o mesmo valor do volume de um octaedro regular de aresta $\frac{a}{2}$.

O volume de um octaedro pode ser escrito como $V_{OCT} = 2\left(\frac{1}{3}B.h\right)$ onde $\frac{1}{3}B.h$ é o volume de uma pirâmide de base quadrangular. As medidas estão descritas na figura abaixo:



Para encontrar a altura *h* devemos observar o triângulo ΔAOB em vermelho na pirâmide.

A medida *m'* pode ser obtida observando-se o triângulo retângulo ΔABC:

$$m'^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

$$m'^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow m' = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Agora, observando o triângulo ΔAOB em vermelho:

$$h^2 = m'^2 - m^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{16} - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

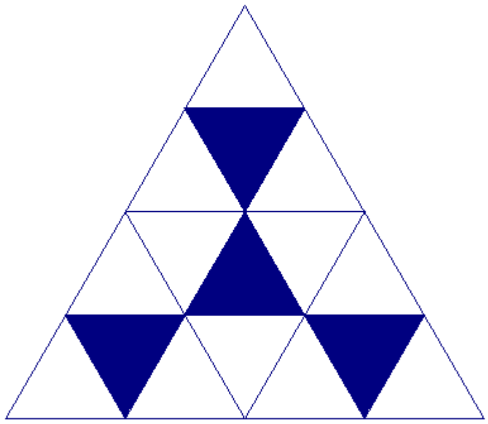
$$h^2 = \frac{3a^2}{16} - \frac{a^2}{16} = \frac{2a^2}{16} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

A base da pirâmide é um quadrado de lado $\frac{a}{2}$, portanto sua área é $\frac{a^2}{4}$.

Logo, o volume do octaedro é $V_{OCT} = 2\left(\frac{1}{3}B.h\right) = \frac{2}{3}\frac{a^2}{4}\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$, que é o mesmo valor do volume resultante.

Curiosidade: Um leitor achou que o sólido resultante era um tetraedro com a metade do volume do original, já que as suas faces seriam cortadas pela metade.

O leitor tentou resolver o problema através da planificação abaixo, que mostra um sólido resultante de quatro faces (em azul escuro).



O equívoco foi esquecer que as faces das bases dos tetraedros retirados também pertenceriam ao sólido resultante na planificação, o que levaria a um sólido de 8 faces e não de 4 faces como na figura acima.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante minha vida escolar tive muitas dificuldades em geometria, já que foi dada pouca importância e ênfase ao assunto por alguns professores ou pelos currículos dos colégios. Diante disso, durante toda a graduação ficava a imaginar o assunto do meu trabalho de conclusão de curso e nos últimos semestres decidi que teria que ser sobre geometria, mas uma geometria diferente, uma geometria alegre.

Com este trabalho adquiri muitos conhecimentos em relação ao programa Cabri Géomètre II, o qual tive pouco contato durante a graduação e muitos conhecimentos em relação à própria geometria através destes - talvez poucos, mas muito interessantes - dez problemas.

Optamos por colocar estes dez problemas que, embora tratem de conteúdos bem semelhantes, suas resoluções abrangem variados assuntos dentro da geometria plana e da espacial.

Propomos alguns problemas para que os leitores possam aprimorar seus conhecimentos através de uma geometria diferente da que é encontrada nos livros.

Estes problemas foram somente indicações e sugestões que obviamente não esgotam o assunto e poderão ser ampliadas pelo leitor interessado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DOLCE,O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar,** vol. 9. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

GARDNER, M. Mathematical Games, **Revista Scientific American**, 06/1958 - vol. 198 nº 6.

HONSBERGER, R. **Ingenuity in Mathematics**. M.A.A 23. USA: New Math Library, 1970.

HUNTLEY, H. E. **The Divine Proportion**. New York: Dover Publications, 1970.

KASNER, E. & NEWMAN, J. **Matemática e Imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

KOSTOVSKI, A. N. **Construciones Geométricas mediante un compás**. Moscou: Ed. Mir, 1980.

NETO, L. D. M. Super divertido, **Revista Super Interessante.** São Paulo, fev. 1997, edição 113.

O'DAFFER, P. G.; CLEMENS, S. R. **Geometry: An Investigative Approach**. 2. ed. USA: Addison – Wesley Publishing Company, 1991. Pg. 44.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS - Matemática - 5a a 8a séries, 1998, MEC.

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. **Geometria I**. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2007.

RODRIGUES, F. W. Problemas, **Revista do Professor de Matemática – Número 21**. São Paulo: SBM, 1992. p. 49.

RODRIGUES, F. W. Problemas, **Revista do Professor de Matemática – Número 25**. São Paulo: SBM, 1994. p. 43.

RODRIGUES, F. W. Problemas, **Revista do Professor de Matemática – Número 26**. São Paulo: SBM, 1994. p. 44.

SHULTE, A. P.; LINDQUIST, M. M. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual Editora, 1994.

SMOLE, K. C. S. et al, O papel da geometria na formação do professor das séries iniciais, **Revista do Professor de Matemática – Número 16**. São Paulo: SBM, 1990. p.1- 9.

STEINHAUS, H. **One Hundred Problems in Elementary Mathematics**. New York: Dover Publications, 1979.

XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – Nível I - **Revista Eureka! - Número 26**. Rio de Janeiro: SBM, 2007. p. 6.

Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª. Problemas e Soluções compilados por Élio Mega e Renate Watanabe – SBM.

< http://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea >

Acesso em 15/07/2009

< http://pt.wikipedia.org/wiki/Tangram >

Acesso em 15/07/2009

< http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/principal/fundamental/tangran/index.html >

Acesso em 10/08/2009

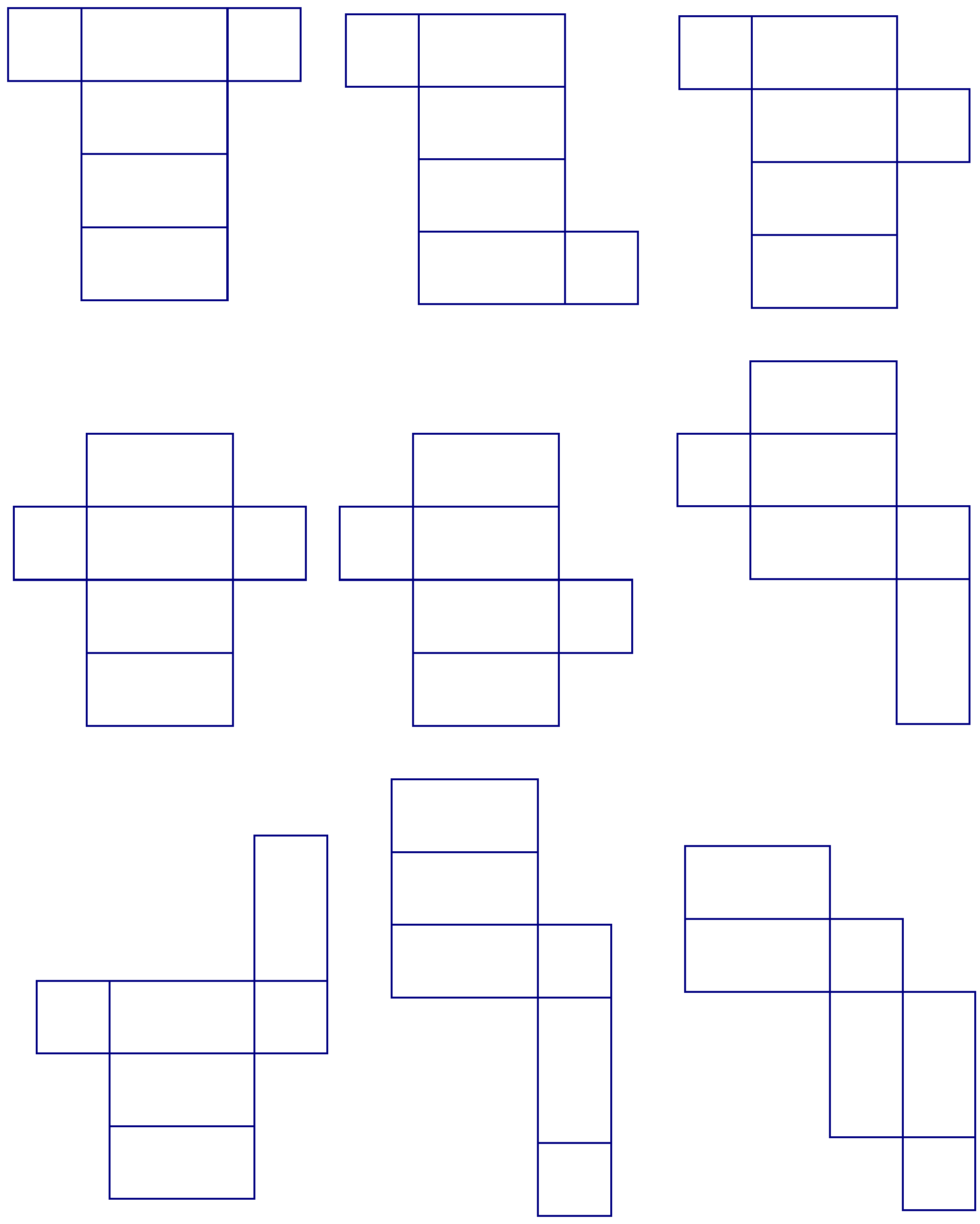
< http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/CE2004/materiais/texto7.htm >

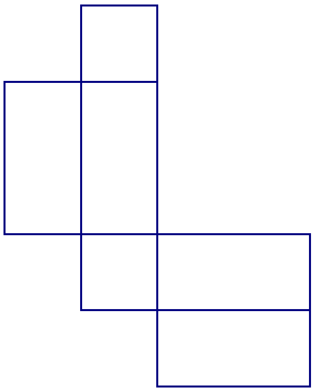
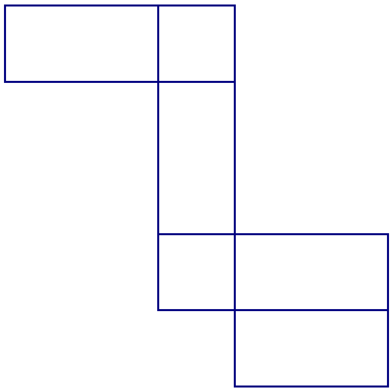
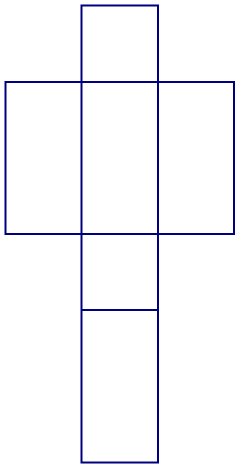
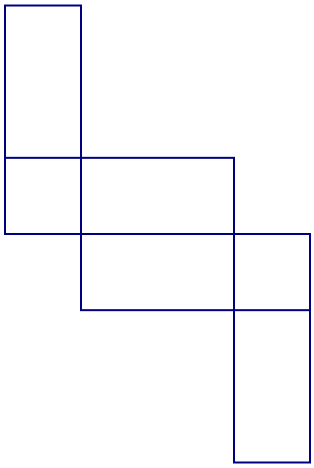
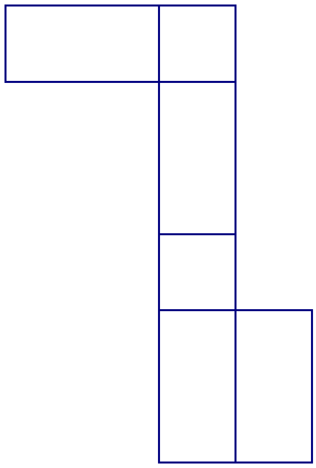
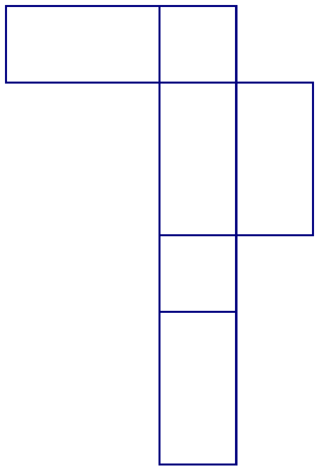
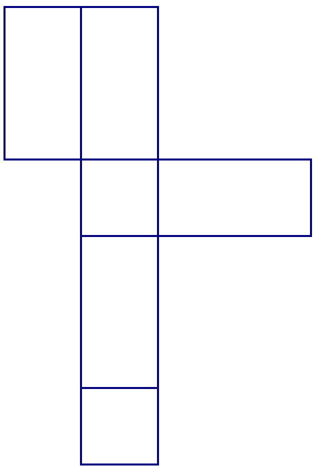
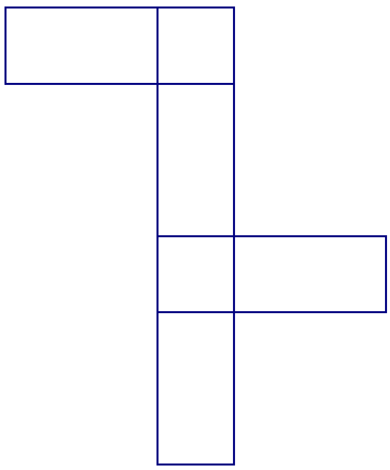
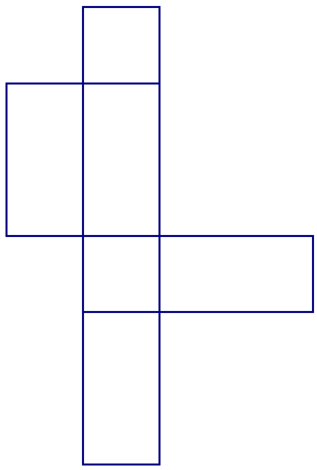
Acesso em 22/10/2009

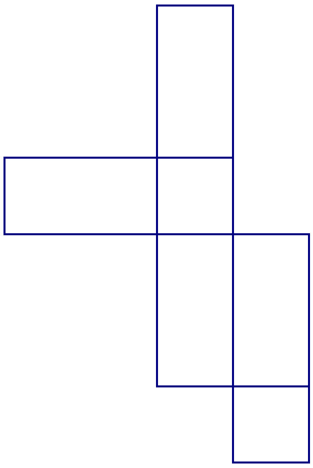
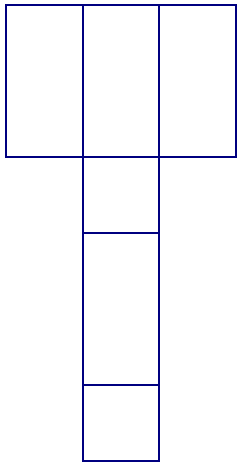
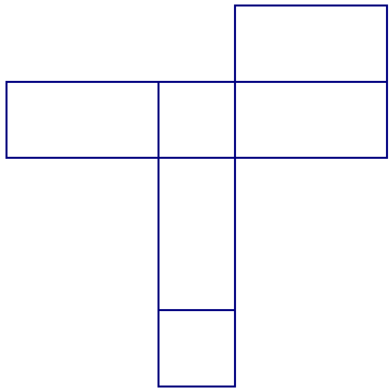
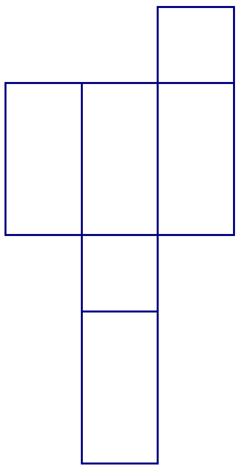
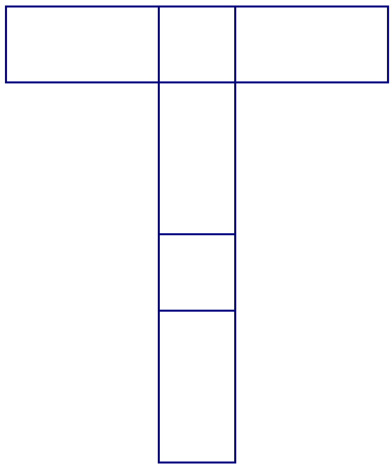
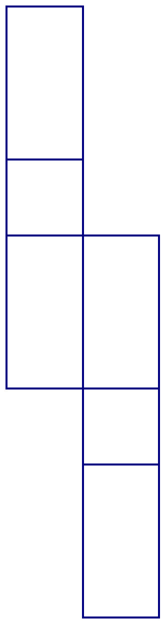
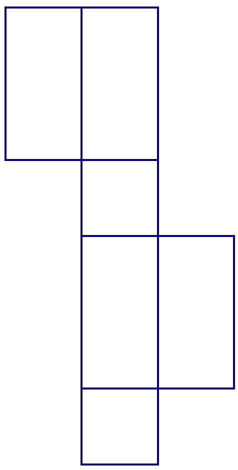
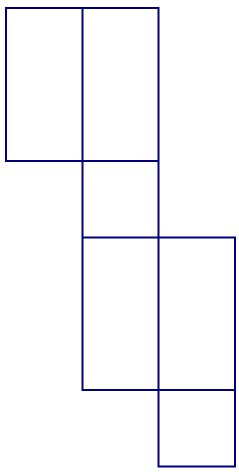
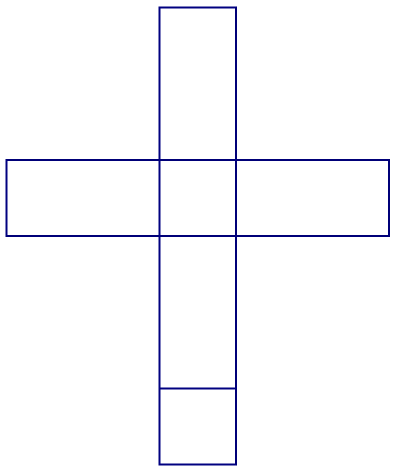
APÊNDICES

APÊNDICE I

Planificações possíveis para a caixa retangular do problema 7 da mosca e da aranha:



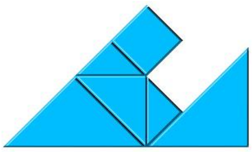










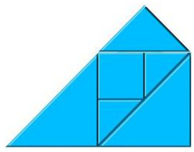
APÊNDICE II

Seguem abaixo **algumas tentativas** de se formar um triângulo com 6 peças do Tangram do item 3.4. Sabemos que para formar um triângulo devemos ter 45º + 45º + 90º = 180º ou (45º + 45º) + 45º + 45º = 180º. As tentativas do número **1** ao número **24** são figuras onde os ângulos de 45º e 90º estão fixos e deve-se encontrar o outro de 45º para formar um triângulo; e as tentativas do número **25** ao número **46** são figuras onde os ângulos de 45º e 45º estão fixos e deve-se encontrar o de 90º.

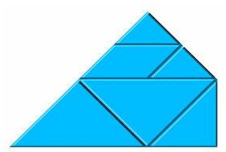
1 - 45º do triângulo grande e 90º do triângulo grande:



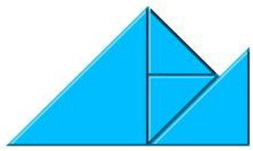
2 - 45º do triângulo grande e 90º do triângulo grande:



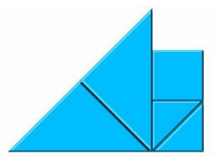
3 - 45º do triângulo grande e 90º do triângulo médio:



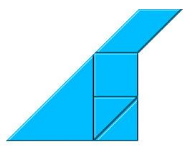
4 - 45º do triângulo grande e 90º do triângulo médio:



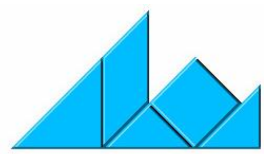
5 - 45º do triângulo grande e 90º do triângulo pequeno:



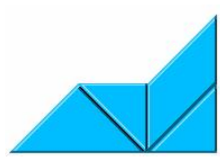
6 - 45º do triângulo grande e 90º do triângulo pequeno:



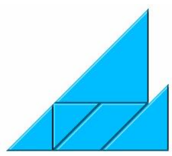
7 - 45º do triângulo médio e 90º do triângulo pequeno:



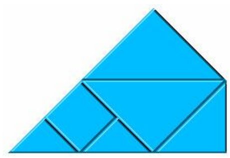
8 - 45º do triângulo médio e 90º do triângulo pequeno:



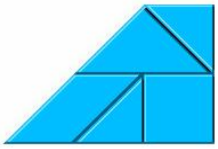
9 - 45º do triângulo pequeno e 90º do triângulo médio:



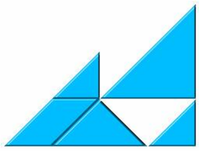
10 - 45º do triângulo pequeno e 90º do triângulo médio:



11 - 45º do paralelogramo e 90º do quadrado:

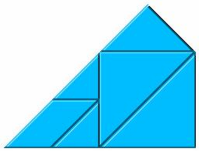


12 - 45º do paralelogramo e 90º do triângulo pequeno:

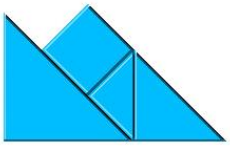


13 - 45º do paralelogramo e 90º do triângulo médio:

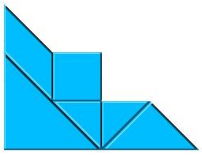
14 - 45º do paralelogramo e 90º do triângulo grande:



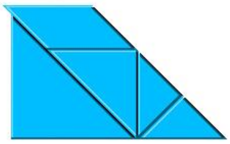
15 - 90º do triângulo grande e 45º do triângulo médio:



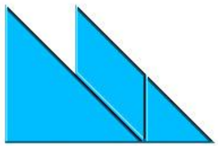
16 - 90º do triângulo grande e 45º do triângulo médio:



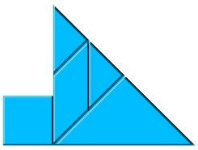
17 - 90º do triângulo grande e 45º do triângulo pequeno:



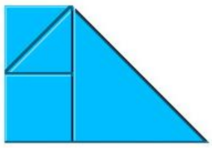
18 - 90º do triângulo grande e 45º do triângulo pequeno:



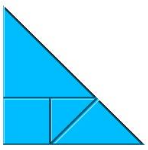
19 - 90º do quadrado e 45º do triângulo grande:



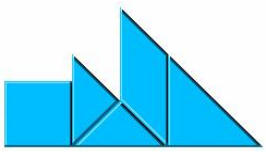
20 - 90º do quadrado e 45º do triângulo grande:



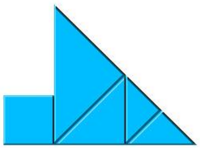
21 - 90º do quadrado e 45º do triângulo médio:



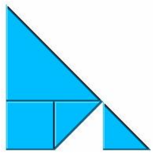
22 - 90º do quadrado e 45º do triângulo médio:



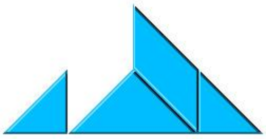
23 - 90º do quadrado e 45º do triângulo pequeno:



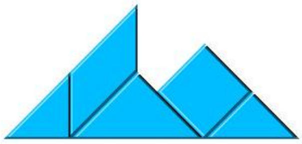
24 - 90º do quadrado e 45º do triângulo pequeno:



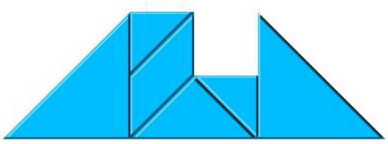
25 - 45º do triângulo pequeno e 45º do triângulo pequeno:



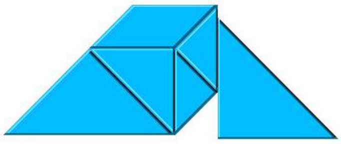
26 - 45º do triângulo pequeno e 45º do triângulo pequeno:



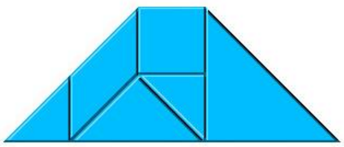
27 - 45º do triângulo grande e 45º do triângulo grande:



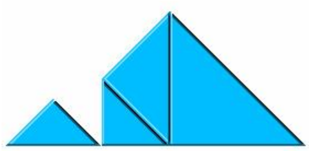
28 - 45º do triângulo grande e 45º do triângulo grande:



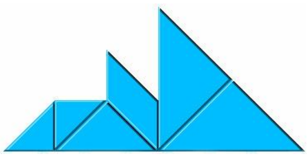
29 - 45º do triângulo pequeno e 45º do triângulo grande:



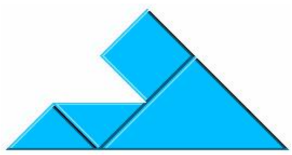
30 - 45º do triângulo pequeno e 45º do triângulo grande:



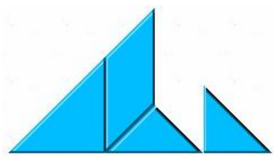
31 - 45º do triângulo pequeno e 45º do triângulo grande:



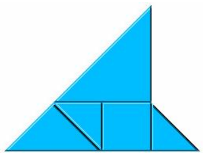
32 - 45º do triângulo pequeno e 45º do triângulo grande:



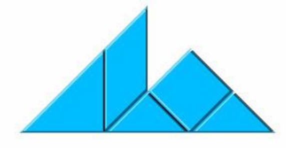
33 - 45º do triângulo médio e 45º do triângulo pequeno:



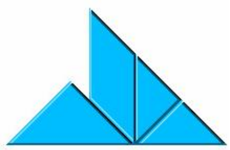
34 - 45º do triângulo médio e 45º do triângulo pequeno:



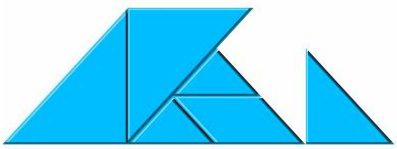
35 - 45º do triângulo médio e 45º do triângulo pequeno:



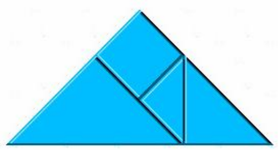
36 - 45º do triângulo médio e 45º do triângulo pequeno:



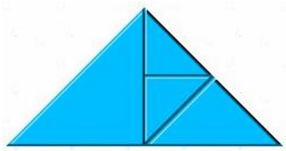
37 - 45º do triângulo grande e 45º do triângulo médio:



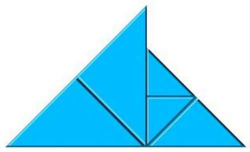
38 - 45º do triângulo grande e 45º do triângulo médio:



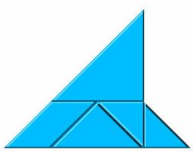
39 - 45º do triângulo grande e 45º do triângulo médio:



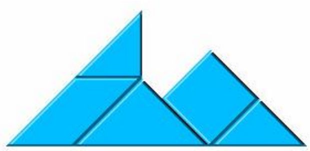
40 - 45º do triângulo grande e 45º do triângulo médio:



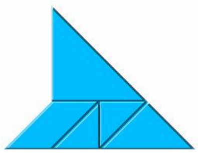
41 - 45º do paralelogramo e 45º do triângulo pequeno:



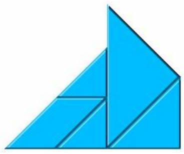
42 - 45º do paralelogramo e 45º do triângulo pequeno:



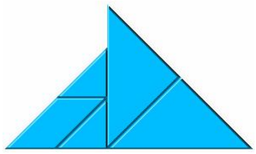
43 - 45º do paralelogramo e 45º do triângulo médio:



44 - 45º do paralelogramo e 45º do triângulo médio:



45 - 45º do paralelogramo e 45º do triângulo grande:



46 - 45º do paralelogramo e 45º do triângulo grande: