UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA MATEMÁTICA

DIVISIBILIDADE – UM ESTUDO DIDÁTICO

LAURI BEPPLER

Florianópolis, dezembro 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA MATEMÁTICA

DIVISIBILIDADE – UM ESTUDO DIDÁTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, como requisito à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientando: LAURI BEPPLER
Orientadora: NERI TEREZINHA BOTH CARVALHO

Florianópolis, dezembro 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura pela Portaria nº 63 / SCG/04.

Profª - Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da disciplina

Banca examinadora

Profª Neri Terezinha Both Carvalho

Orientadora

Profª Inês Liamar Wolff Pereira Rogovski

Profº Nereu Estanislau Burin

“Por que nos torna tão pouco felizes esta maravilhosa ciência aplicada, que economiza trabalho e torna a vida mais fácil? A resposta é simples: porque ainda não aprendemos a nos servir dela com bom senso”.

Albert Einstein

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Silvestre e Idalina, a minha irmã, Salete e aos meus irmãos Neri e Nauro e aos meus sobrinhos Otavio, Luana e Sabrina.

Agradecimentos

À Deus que me concede o dom a vida.

À professora Neri Terezinha Both Carvalho, por ter aceitado a me orientar na realização deste trabalho.

*Aos professores Inês Liamar e Nereu Estanislau ,
por terem aceito o convite de participar da Banca Examinadora.*

A meus pais Silvestre Gregório Beppler e Idalina Kraus Beppler, pelo amor e carinho dedicados a minha pessoa, principalmente nestes anos de luta acadêmica.

Aos meus irmãos Neri, Nauro e Salete por tudo que fizeram por mim.

Ao amigo Alex Deni Alves, que sempre estava pronto a ajudar no que fosse necessário nestes anos de luta acadêmica.

A todos os colegas que encontrei ao longo do curso, pelo companheirismo, dividindo momentos inesquecíveis.

À escola que cedeu espaço para a realização da Experimentação.

A todos os professores, pela dedicação e paciência para comigo ao longo do curso.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente e me estimularam para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conceito de divisibilidade é tratado no contexto da teoria dos números. Agora, quase terminando o curso de Licenciatura em Matemática, enquanto estagiário, comecei a refletir sobre as diferenças entre o que se estuda na Universidade e o que se estuda no Ensino Fundamental e Médio. Isto me levou a questionar, em particular, sobre o que se estuda sobre divisibilidade na 5ª e na 6ª série do Ensino Fundamental.

Quais os conteúdos sobre divisibilidade são estudados? Como estes conteúdos são trabalhados? Que tipos de problemas são propostos para os alunos nos livros didáticos?

O Trabalho de Conclusão de Curso da Kellen (2004.1) mostra que existe diferenças entre o que estudamos na disciplina de Fundamentos da Matemática I e a abordagem feita no livro didático. Pois, ao adaptar um conteúdo para ser ensinado de um nível a outro, faz-se uma elementarização do saber e as abordagens também se modificam.

Neste trabalho, buscamos conhecer os saberes matemáticos relativos a divisibilidade trabalhados em classe de 5ª e 6ª série do Ensino Fundamental.

Para tanto, no capítulo I estudamos os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular de Santa Catarina e os Planejamentos Anuais das Escolas. Nosso objetivo aqui é identificar o que é proposto oficialmente para o trabalho do professor sobre a divisibilidade no Ensino Fundamental (5ª e 6ª séries).

No capítulo II estudamos a abordagem e os exercícios de livros didáticos. O estudo nos mostra os saberes relativos a divisibilidade que são propostos para serem ensinados na 5ª ou 6ª série do Ensino Fundamental.

No capítulo III, faremos uma experiência em classe de 6ª série do Ensino Fundamental, onde buscamos elementos que nos permita identificar se o Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum é uma ferramenta disponível para resolver problemas, visto que, *a priori,* estes conteúdos são estudados na 5ª série ou início da 6ª série do Ensino Fundamental.

Por fim, apresentamos a conclusão de nosso estudo.

Capítulo I

I – O saber “Divisibilidade” no Ensino Fundamental segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular de Santa Catarina e o Planejamento Anual das Escolas.

Neste primeiro capítulo, buscamos identificar elementos sobre o saber “Divisibilidade” no âmbito nacional e estadual, através dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a Proposta Curricular de Santa Catarina (1998) e os Planejamentos anuais das escolas.

I.1 – Parâmetros Curriculares Nacionais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dividem o Ensino Fundamental em quatro ciclos, sendo que o primeiro ciclo refere-se a 1ª e 2ª séries; o segundo a 3ª e 4ªséries; o terceiro a 5ª e 6ª séries; e ,o quarto a 7ª e 8ª séries.

Dos objetivos relativos ao Ensino da Matemática listados pelos PCN, para o 3º ciclo, destacamos:

> “Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento: [...]
> Do pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: [...]
> - Selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta” (PCN, p. 64).
> Já na rubrica “Conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo” destacamos:.

“Reconhecimento dos significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais, tais como ‘ser múltiplo de’ ser ‘divisor de’ ” (PCN, p. 71).

Ou ainda, segundo os PCN, no bloco Números e Operações o trabalho com situações problemas

> possibilitam o desenvolvimento do sentido numérico e os significados das operações. Conceitos de múltiplos e divisor ou conceitos de “numero Primo” de um número natural podem ser abordados no terceiro ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais (PCN p.66).

Temos assim, segundo os PCN um lugar no terceiro ciclo (5ª e 6ª séries) para abordar múltiplos e divisores e primos em IN como uma ampliação do campo multiplicativo.

I.2 – Proposta Curricular de Santa Catarina

A Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) organiza o ensino da Matemática em quatro campos de conhecimentos: campo Numérico, campo Algébrico, campo Geométrico e Estatística e Probabilidades.

Embora a PCSC apresente um quadro de conteúdos e seus cronogramas, no campo do conhecimento, ela também apresenta um caráter dinâmico e processual, ou seja ela deixa a cargo do professor o detalhamento, entendendo como importante estar aberta à novas contribuições e reformulações.

No quadro de conteúdos explicitado pela PCSC, em nenhum momento a divisibilidade tem lugar explícito, mesmo que o campo numérico seja trabalhado desde o pré até a 3ª série do Ensino Médio.

Podemos supor que a PCSC entende divisibilidade em nível de detalhamento que é deixado para o professor realizar quando do estudo de sistema de numeração e operações.

Considerando o que diz os PCN, restringiremos nosso estudo as classes de 5ª e 6ª séries.

I.3 – Planejamentos anuais de 5ª e 6ª Séries

Depois de grandes buscas em escolas da Grande Florianópolis, conseguimos três planejamentos anuais de 5ª e 6ª séries. Portanto, analisaremos estes planos, os quais denominamos Planejamento X, Planejamento Y e Planejamento Z.

Primeiramente verificamos se o estudo sobre "Divisibilidade", consta nos planejamentos e destacamos em cada planejamento, o que é proposto relativo à "Divisibilidade".

Planejamento X: 5ª Série

O planejamento está dividido em bimestres.

Segundo bimestre: "Conjunto de múltiplos e divisores e regras de divisibilidade".

O planejamento apresenta como objetivo reconhecer o conjunto dos múltiplos e divisores de um número e reconhecer a divisibilidade por 2, 3, 5, e 10.

Planejamento X: 6ª Série

Nada consta no planejamento sobre divisibilidade na 6ª série

Planejamento Y: 5ª Série

O planejamento está dividido em semestres.

Primeiro semestre: "Múltiplos e divisores de um número".

O planejamento apresenta como objetivo reconhecer o conjunto dos múltiplos e divisores de um número e reconhecer a divisibilidade por 2, 3, 5 e 10.

Planejamento Y: 6ª Série:

Nada consta sobre divisibilidade no planejamento

Planejamento Z: 5ª Série

Identificamos no planejamento Z, um lugar para a divisibilidade.

O planejamento está dividido em 12 capítulos[1] sendo que a divisibilidade é explicitada como conteúdo no capítulo 5: “múltiplos e divisores”. Este capítulo está dividido em 4 subtítulos:

- seqüências
- seqüências de múltiplos
- múltiplos e mínimo múltiplo comum
- divisibilidade e divisores.

Ressaltamos que neste planejamento os objetivos específicos atribuídos aos múltiplos e divisores são:

- identificar seqüências e encontrar termos seguintes
- reconhecer e encontrar múltiplos de um número
- identificar padrões de seqüências de múltiplos
- encontrar múltiplos comuns e o mínimo múltiplo comum a partir seqüências de múltiplos
- ver o que é ser número divisível e um divisor.

O número de aulas previsto para este capítulo é de 9.

Planejamento Z: 6ª Série

O planejamento está dividido em 12 capítulos. Sendo que a divisibilidade se encontra no capítulo1 – “Números naturais”. Este capítulo está dividido em 5 subtítulos: Escrita dos números; Quebra – cabeça; Múltiplos e divisores e Divisibilidade; Regras de divisibilidade; Contando as possibilidades.

Objetivos:

- Reconhecer quando um número é múltiplo do outro e divisível por outro;
- Resolver problemas envolvendo múltiplos e divisores;
- Reconhecer padrões de seqüência
- Usar regras de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10;
- Explicar como são obtidas estas regras.

O número de aulas previstas para este capítulo é de 13.

[1] Estranhamos o uso desta terminologia no plano.

Sendo que para a divisibilidade estão previstas 5 aulas.

Percebemos que nos 3 planejamentos o estudo da divisibilidade tem seu lugar assegurado explicitamente.

Os planejamentos X e Y apresentam a divisibilidade na classe de 5ª série enquanto o planejamento Z apresenta a divisibilidade na classe de 5ª e 6ª série. O que nos leva a considerar de maneira geral que, o estudo “Divisibilidade” pode ser objeto de estudo na 5ª ou 6ª série.

Capítulo II

II - Divisibilidade como Saber a ensinar - Estudo dos Livros Didáticos

II.1 – Introdução - Neste capítulo estudamos os livros didáticos. Nosso objetivo é verificar como vive o objeto “Divisibilidade” como saber para ser ensinado na 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Estamos considerando que a maioria dos professores tem, em geral, os livros didáticos como referência para preparar as aulas. Assim, conhecer como o saber é abordado nos livros didáticos, dá uma boa idéia de como ele é desenvolvido em sala de aula.

Por isto, neste estudo verificamos a abordagem do objeto “Divisibilidade” onde buscamos identificar o tipo de abordagem realizada na proposição do autor.

Também no estudo dos exercícios determinamos uma tipologia de exercícios segundo a tarefa.

A escolha dos livros didáticos foi feita em função do seu uso nas escolas de onde estudamos os planejamentos anuais. Estudamos os seguintes livros didáticos:

Autores	Nome e Editora	Série
Bianchini, Edwaldo; Miani Marcos;	Construíndo conhecimentos em Matemática; Ensino Fundamental, 1ª ed, São Paulo: Moderna, 2000.	5ª série 6ª série
Giovani, José Ruy; Castrucci, Benedito, Jr. Giovani, José Ruy;	A conquista da Matemática; Ensino Fundamental, São Paulo: FTD, 1998.	5ª série
Imenes, Luiz Marcio; Lellis, Marcelo;	Matemática (5ª, 6ª) séries Ensino Fundamental, editora Scipione (2004).	5ª série 6ª série

II.2 – Estudo do Livro Didático: “Construindo Conhecimentos em Matemática”, Bianchini e Miani, ano 2000.

II 2.1 Livro da 5ª Série

A Abordagem

O livro se divide em 16 capítulos, onde cada um deles se divide em subtítulos.

Limitamos nosso estudo ao capítulo “seqüências, múltiplos e divisores”, pois é lugar onde o autor desenvolve os saberes sobre divisibilidade que é objeto de nosso interesse.

Estudo do Capítulo 8: Seqüências, múltiplos e divisores.

Neste capítulo os conteúdos e objetivos propostos são os que constam na tabela abaixo:

CONTEUDO	OBJETIVOS
1 – Seqüência dos múltiplos de um número;	Reconhecer e encontrar múltiplos de um número; Identificar como são formados seqüências relacionadas com múltiplos;
2 – Os múltiplos comuns e o mínimo múltiplo comum;	Encontrar múltiplos comuns e o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números a partir de seqüências de múltiplos; Resolver problemas que envolvam o mínimo múltiplo comum;
3 – A seqüência dos divisores de um número.	Reconhecer e encontrar divisores de um número; Usar as expressões divisível por múltiplos de e divisor de maneira adequada.

Tabela 1: Objetivos específicos (p. 23)

Um estudo via seqüências:

A abordagem de múltiplos é feita por meio do estudo das seqüências de múltiplos. Como estratégia de ensino o autor apresenta:

1 - Seqüência Numérica

2 - Seqüência de figuras; (figuras que apresentam regularidades)

3 - Seqüência de múltiplos de um número, esta última trabalhada com números e por meio de figuras;

4 - Seqüência dos divisores de um número:

Um primeiro estudo de seqüência numérica introduz a seqüência dos múltiplos e dos divisores de um número. A noção de múltiplo comum e de mínimo múltiplo comum é abordada por meio de uma atividade que trabalha região comum de uma figura e uma tabela com múltiplos e divisores de 2 e 3.

Exemplo: Mistura de cores: Azul e amarelo dá verde

Múltiplos de 2: pintar de cor azul

Múltiplos de 3: pintar de cor amarela.

Conseqüência os múltiplos comuns de 2 e 3 ficarão verdes

Depois ,explorando subseqüências, trabalha a noção de mínimo múltiplo comum, explora o zero na seqüência dos múltiplos, usa a notação (M.M.C.) seguida de exercícios.

Um momento de institucionalização: dá a seguinte formulação:

"O menor múltiplo comum entre dois ou mais números naturais não-nulos é chamado de mínimo múltiplo comum" (p. 134).

O conceito de divisores é abordado por meio de uma atividade recreativa envolvendo a classe, explorando a seguinte situação:

> "Num circo o palhaço Pimpão convidou dez crianças para uma brincadeira que consistia em falar os números naturais em seqüência, a partir do número um, mas pulando os números que divididos por três dão resto zero, como por exemplo, 3, 6, 9, 12. No lugar desses números a criança deveria gritar, hei"! (Bianchini e Miani, p. 136).

Simulando o desenrolar da situação em classe, explora os números 54 e 86 e formula:

> "Se dois números são naturais e a divisão do primeiro pelo segundo é exata, então: O primeiro é divisível pelo segundo (também podemos dizer que o primeiro é múltiplo do segundo). O segundo é divisor do primeiro (também podemos dizer que o segundo é fator do primeiro)". (Bianchini e Miani ,p.137)

Assim a noção de divisor é dada pela divisão exata. Esta condição se transforma em meio para identificar todos os divisores de um número qualquer.

Os critérios de divisibilidade são abordados sem ser mencionado e como uma maneira de simplificar a tarefa de determinar os divisores de um número.

Vejamos o procedimento sugerido para determinar os divisores de um número *a*:

1) O primeiro divisor de um número *a* é 1 e o último é o próprio *a.*

   Divisores de *a*: 1 , *a*

2) Se *a* é par, então 2 é divisor de *a* e *x* também é divisor de *a* se $2.x = a$
3) Testar se 3 é divisor de *a* (se $a = 3b + 0$) e se 3 é divisor de *a*, existe *y* tal que $3y = a$, também é divisor de *a*
4) Assim sucessivamente, testa 4, 5,....., e para cada um deles, determina-se outro divisor.

Notemos que o máximo divisor comum não é estudado na 5ª série.

Temos neste livro uma abordagem dos múltiplos e divisores de um número, por meio de seqüência de números com ênfase na divisão exata.

O mínimo múltiplo comum é objeto de estudo.

Estudos dos exercícios

São apresentados neste Capítulo "Seqüências, múltiplos e divisores" que estudamos, um total de 129 (cento e vinte e nove) exercícios, entre os quais, sob a designação "Exercícios Complementares" encontramos 24 exercícios e como "Exercícios Praticando e Revendo" 94 exercícios. Para este estudo consideramos apenas 58 (cinqüenta e oito) exercícios dos quais se faz presente a seqüência dos múltiplos de um número, os múltiplos comuns, o mínimo múltiplo comum e a seqüência dos divisores de um número.

Faremos a seguir o estudo dos exercícios os quais classificaremos em tipos de tarefa e daremos um exemplo de cada tarefa e sua resolução.

Tipo 1 - *I*dentificar, por contagem, a variação de quantidades de uma figura a outra.

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo: Complete o quadro abaixo, substituindo as estrelinhas:

Figuras	Δ Δ Δ Δ	Δ Δ Δ Δ Δ Δ Δ Δ	Δ Δ Δ Δ Δ Δ Δ Δ Δ Δ Δ Δ
Número de pontos	4	☆	☆

Agora, analisando o quadro responda:

Nas figuras, o número de pontos vai aumentando de quanto em quanto?

Resolução:

Observando o quadro, percebemos que no 1º quadro temos 4 figuras, no 2º quadro 8 figuras e no 3º quadro 12 figuras.

Portanto a variação de quantidades de uma figura para outra é: 8 – 4 = 4 figuras.

Assim o número de pontos vai aumentando de 4 em 4

Tipo 2 - Completar a seqüência;

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Partindo de 0, 4, 8, 12, continue a seqüência até encontrar um número com dois algarismos iguais.

Resolução:

Como na seqüência dada, os números aumentam de 4 em 4, basta somar sempre 4 ao termo anterior.

Portanto a seqüência é: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44.

Tipo 3 - Dado um número *x*, determine os múltiplos;

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Determine os múltiplos de 9.

Resolução

Para determinar os múltiplos de 9, devemos multiplicar cada termo da seqüência dos números naturais por 9.

Assim, a seqüência dos múltiplos de 9 é: (0, 9, 18, 27, 36, ...)

Tipo 3.A - Considerando uma certa seqüência, determine *n* do qual a seqüência é a seqüência dos múltiplos.

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

A seqüência 0, 4, 8, 12, é uma seqüência dos múltiplos de que número?

Resolução

Observando a seqüência, verificamos que a variação de um número para outro é 4.

Assim, a seqüência dada é dos múltiplos do número 4.

Tipo 3.B - Escrever uma seqüência em que o primeiro número é 0 e cada um dos outros é igual ao anterior somado com *x*. Essa é a seqüência dos múltiplos de que número?

Quantidade de exercícios: 2

Exemplo:

Escreva uma seqüência em que o primeiro número é 0 e cada um dos outros números é igual ao anterior somado com 5. Essa é a seqüência dos múltiplos de que número?

Resolução

Como o primeiro número é zero, basta somar sempre 5 ao número anterior para obtermos a seqüência.

Assim, a seqüência é: 0, 5, 10, 15, 20, 25,....

Como a variação de um número para o outro é 5, a seqüência obtida é a seqüência dos múltiplos de 5.

Tipo 4 - Determinar os *n* primeiros múltiplos de *a*:

Quantidade de exercícios: 11

Exemplo:

Determine os cinco primeiros múltiplos de 8.

Resolução

Os múltiplos de 8 variam em 8, ou seja, multipliquemos o 8 pelos números naturais começando do zero. Portanto a seqüência é 0, 8, 16, 24, 32,...

<u>*Tipo 5*</u> - Qual o menor múltiplo de *x* maior que *m*?

<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 2*

Exemplo:

Qual é o menor múltiplo de 18 maior que 200?

Resolução: a)

Sabendo que 18 x 10 = 180 é menor que 200, temos que continuar a seqüência 18 x 11 = 198, logo o próximo múltiplo de 18 satisfaz a pergunta.

Portanto: 18 x 12 = 216. 216 é o menor múltiplo de 18 maior que 200.

Resolução: b)

Dividindo 200 por 18 temos: 200 = 18 x 11 + 2.

Logo o menor múltiplo de 18 maior que 200 é 200+ 16 = 216.

<u>*Tipo 6*</u> - Identificar *x* tal que *x* seja múltiplo de *a* e *b*

<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 1*

Exemplo:

O Zé da Cantina gosta de complicar as coisas. Quando lhe perguntam a sua idade, ele responde: “Tenho mais de 40 e menos de 50 anos. Minha idade é um múltiplo de 3, e de 8”.

Qual é a idade do Seu Zé?

Resolução

Para determinar a idade do Seu Zé precisamos primeiro escrever os múltiplos de 3 e de 8.

M (3) = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, ...}

M (8) = { 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48,...}

Como a idade do Seu Zé é um número que é múltiplo de 3 e de 8 compreendido entre 40 e 50, temos então o número 48.
Logo a idade do Seu Zé é de 48 anos.

<u>Tipo 7</u> - Dado *x*, sabemos que *a* é divisor de *x, * determinar *b* também divisor de *x*.
<u>Quantidade de exercícios</u>: 1
Exemplo
O mês de fevereiro, depende do ano, pode ter 28 ou 29 dias. O ano em que fevereiro tem 29 dias é chamado bissexto. As olimpíadas a partir de 1920 coincidiram com anos bissextos.
Esses números, além de serem múltiplos de 2, são também múltiplos de que número?
Resolução:
Sabendo que os anos bissextos ocorrem de 4 em 4 anos, assim como as olimpíadas, os números além de serem múltiplos de 2, também são múltiplos do número 4.

<u>Tipo 8</u> - Dada a seqüência 0, 1, ..., *n*, multiplique esta seqüência por *y* e escreva a seqüência obtida.
<u>Quantidade de exercícios</u>: 1
Exemplo:
Multiplique cada termo da seqüência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, por 11 e escreva a seqüência obtida.
Resolução:
Fazendo a multiplicação dos termos da seqüência por 11, temos:

11 x 0 = 0	11 x 5 = 55
11 x 1 = 11	11 x 6 = 66
11 x 2 = 22	11 x 7 = 77
11 x 3 = 33	11 x 8 = 88
11 x 4 = 44	

Assim, na seqüência obtida é: 0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88.

<u>Tipo 9</u> - Dada a seqüência, identifique se ela é uma seqüência de múltiplos de *x*. justifique a resposta.

<u>Quantidade de exercícios</u>: 1

Exemplo:

Como a seqüência numérica 3, 8, 13, 18, 23,... foi formada? Podemos dizer que ela é uma seqüência dos múltiplos de 5? Justifique sua resposta.

Resolução:

A seqüência foi obtida adicionando 5 unidades a cada termo, a partir do primeiro, para encontrar o próximo.

Essa seqüência não é a dos múltiplos de 5, pois apesar de sempre estarmos somando 5, ela não começa com zero e seus elementos não são múltiplos de 5.

<u>Tipo 10</u> - Qual é o número compreendido entre *a* e *b* que é múltiplo de *x*?

<u>Quantidade de exercícios</u>: 1

Exemplo:

Qual é o número compreendido entre 160 e 190 que é múltiplo de 25?

Resolução:

Para determinar esse número, precisamos escrever a seqüência dos múltiplos de 25.

M (25) = {0, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, ...}

Logo, o número compreendido entre 160 e 190 que é múltiplo de 25 é o número 175

<u>Tipo 11</u> - Determine o mínimo múltiplo comum de *a* e *b.*

<u>Quantidade de exercícios</u>: 4

Exemplo:

Determine o Mínimo Múltiplo Comum de 6 e 9.

Resolução:

Para determinarmos o mínimo múltiplo comum de 6 e 9, precisamos escrever as seqüências de 6 e 9.

M (6) = {0, 6, 12, **18**, 24, ...}

M (9) = {0, **18**, 27, ...}

Note que 18 é o menor múltiplo comum de 6 e 9, diferente de zero.

Logo: m.m.c. (6, 9) = 18.

<u>*Tipo 12*</u> - É possível escrever o maior múltiplo comum dos números *a* e *b*? Explique sua resposta.
<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 1*
 Exemplo:
É possível escrever o maior múltiplo comum dos números 2 e 4? Explique sua resposta.
Resolução
Não é possível escrever o maior múltiplo comum dos números 2 e 4.
Porque a seqüência dos múltiplos de números de um número é infinita.

<u>*Tipo 13*</u> - Problema – aplicação do mínimo múltiplo comum
<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 4*
Exemplo:
No alto da torre de uma emissora de televisão existem duas luzes que piscam.
A primeira pisca a cada 5 segundos e a segunda, a cada 7 segundos.
Se num certo instante as duas luzes piscam juntas, após quantos segundos elas voltarão a piscar ao mesmo tempo?
Resolução:
Se as luzes piscam num certo instante juntas, para determinar o tempo em que elas voltarão a piscar novamente, basta calcular o m.m.c. (5, 7).
Portanto:
M (5) ={0, 5, 10, 15, 20, 25, 30,35, ...}
M (7) = {0, 7, 14, 21, 28, 35, ...}
Note que 35 é o menor múltiplo comum de 5 e 7, diferente de zero.
Logo as luzes voltarão a piscar ao mesmo tempo depois de 35 segundos.

<u>*Tipo 14*</u> - Dados *a* e *b,* quando um é múltiplo do outro, qual é o m.m.c. (*a,b)?*
<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 1*

Exemplo:

Observe a tabela e responda: Quando um número é múltiplo de outro, qual é o m.m.c. desses números?

a	b	m.m.c (a, b)
3	6	6
8	32	32
9	27	27

Resolução:

Observando a tabela, podemos verificar que o m.m.c. de *a* e *b* é sempre o número *b.* Portanto o m.m.c. de dois números, quando um é múltiplo do outro é sempre o maior desses números.

<u>*Tipo 15*</u> - Determine o menor e o maior número de *n* algarismos que sejam múltiplos de *a* e *b.*

<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 1*

Exemplos:

Determine o menor e o maior número de dois algarismos que sejam múltiplos de 3 e 4.

Resolução:

Primeiramente vamos escrever a seqüência dos múltiplos de 3 e de 4.

M (3) = {0, 3, 6, 9, 12, 15,....,90, 93, 96, 99,...}

M (4) = {0, 4, 8, 12,....,88, 92, 98, ...}

Portanto, o menor múltiplo comum de 3 e 4 de 2 algarismos é o número 12, e o maior é o número 96.

<u>*Tipo 16*</u> - Determine os divisores de *a*

<u>*Quantidade de exercício*</u>*: 1*

Exemplo:

Determine todos os divisores de 15.

Resolução:

O primeiro divisor de 15 é o 1 e o último é o próprio 15.

Depois de 1, o próximo número natural que é divisor de 15 é o 3, pois 15 / 3 = 5 assim 15 é divisível por 3. Para descobrir outro divisor devemos obter um número natural que multiplicado por 3 dê 15. Esse número é o 5.

Portanto, os divisores de 15 são: 1, 3, 5 e 15

Tipo 17 - Escreva a seqüência dos números de 0 a *n.*

Identificar os números divisíveis por *x.*

Quantidade de exercício:1

Exemplo:

Escrever a seqüência dos números de 0 a 30 e responda as questões.

Quais são os números divisíveis por 10?

Resolução:

A seqüência dos números de 0 a 30 é:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Para um número ser divisível por 10 ele deve ser múltiplo de 10.

Portanto os números da seqüência que são divisíveis por 10 são: 0, 10, 20, 30.

Tipo 17A - Observar os algarismos das unidades dos números divisíveis por *x* e deduzir a terminação dos números *n* divisíveis por *b.*

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Observando o algarismo das unidades dos números que você escreveu no exemplo 17, o que pode concluir?

Resolução:

Observando a seqüência dos números divisíveis por 10, podemos concluir que todos terminam com zero. Logo, todo número terminado em 0 é divisível por 10.

Tipo 18 - Dos números naturais menores que *a*, qual é o maior número divisível por *x.*

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Dos números naturais menores que 500, qual é o maior número divisível por 7

Resolução: a)

Para determinar esse número, dividimos 500 por 7.

$$\begin{array}{r|l} 500 & 7 \\ \hline 10 & 71 \\ 3 & \end{array}$$

Logo: 500 = 71 x 7 + 3

Portanto, o maior número divisível por 7 menor que 500 é: 71 x 7 = 497.

Resolução: b)

Seja a seqüência dos múltiplos de 7: {0, 7, 14, ...[....]...;483, 490, 497, 504}.

Portanto, o maior número divisível por 7 menor que 500 é: 71 x 7 = 497.

Tipo 19 - Escreva a seqüência dos múltiplos de *x* maiores que *p* e menores que *q*, identifique os divisores de *n.*

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Escreva a seqüência dos múltiplos de 4 maiores que 15 e menores que 35 e identifique os divisores de 80.

Resolução:

Os múltiplos de 4 entre 15 e 35 são:

16, 20, 24, 28, 32 e dessa seqüência os divisores de 80 são 16 e 20, pois dividindo 80 por eles, fornece uma divisão exata.

Tipo 20 - Aplicação do conceito de divisores.

Quantidade de exercícios: 3

Exemplo:

Os médicos, em geral, pedem aos pacientes que tomem os remédios de 6 em 6 horas, de 8 em 8 horas ou de 12 em 12 horas. Eles não recomendam que se tomem remédios de 5 em 5 horas nem de 9 em 9 horas. Explique porque isso acontece.

Resolução:

Como o dia tem 24 horas, o médico escolhe sempre horários que sejam divisores de 24, para que, assim, os remédios possam ser tomados todos os dias nas mesmas horas. Como no exemplo, temos 6, 8 e 12 são divisores de 24 e 5 e 9 não são, por isso os médicos não recomendam que se tomem remédios de 5 em 5 horas ou de 9 em 9 horas.

Tipo 21 - Dada a seqüência, identificar *x* tal que *x* seja divisor de todos os termos da seqüência.

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Observe a seqüência 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... e responda:

Qual é o número que é divisor de todos os termos da seqüência?

Resolução:

Temos uma seqüência dos números pares, e os números pares são divisíveis por 2. Logo: o número que é divisor de todos os termos da seqüência é o 2.

Tipo 22 - Dadas algumas sentenças (*v* ou *f*), identificar as sentenças falsas e transformá-las em sentenças verdadeiras, mantendo um dos números.

Quantidade de exercício: 1

Exemplo

Transforme a sentença falsa em verdadeira, mantendo um dos números.

65 é divisível por 3.

Resolução:

Como 65 termina em 5, ele é divisível por 5, então, para a sentença ser verdadeira podemos escrever:

65 é divisível por 5.

Tipo 23 - Existe um número natural que é divisor de todos os números naturais?

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Existe um número natural que é divisor de todos os números naturais? Em caso afirmativo identifique-o.

Resolução:

Sim. O número 1 é divisor de todos os números naturais, pois todo número natural é divisível por 1. $a / 1 = a$

Tipo –23.A - Existe um número natural que é múltiplo de todos os números naturais? Em caso afirmativo, identifique-o.

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Existe um número natural que é múltiplo de todos os números naturais? Em caso afirmativo identifique-o.

Resolução:

Sim. O zero é múltiplo de todos os números naturais, pois $a \times 0 = 0$ para qualquer que seja *a.*

Conclusão:

Neste livro didático os múltiplos e divisores são abordados por meio de estudos de seqüências de números.

A noção de divisor é dada sob a concepção de divisão exata, isto é:

Se *a* é divisor de *b* então *b/a* é exata.

- M.M.C. é estudado via intersecção de seqüências dos múltiplos de cada número.
- M.D.C.não é objeto de estudo neste livro.
- Os critérios de divisibilidade são estudados como meio de simplificar a tarefa. "determinar os divisores de um número".

A ênfase neste capítulo é dada a determinação das seqüências de múltiplos de um número dado, pois 11 dos 58 exercícios tem por tarefa determinar os múltiplos de um número de um total de 25 tarefas.

5 de 58 exercícios tem como aplicação o M.M.C. e 3 de aplicação do conceito de divisor. Assim, este livro didático dá lugar à resolução de problemas de aplicação.

Remarcamos a variedade de tipos de tarefas que propõe o autor.

II.2.2 – LIVRO DA 6ª SÉRIE

O livro é composto de quinze capítulos, sendo que o capítulo 2 "Divisibilidade" tem por objetivo a abordagem da "Divisibilidade". Assim, o estudo deste livro será restrito a este capítulo.

Organização do Capítulo

O capítulo 2, Divisibilidade está dividido em quatro sub-títulos:

1 – Divisível ou não? Eis a questão.

2 – Números Primos;

3 – Decomposição em fatores Primos;

4 – O cálculo do Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.).

A Abordagem

As noções de divisibilidade e critérios – Números Primos – Decomposição em Fatores Primos – Mínimo Múltiplo Comum.

a) O "Conceito de divisibilidade de um número natural" é definido por: "Um número natural é **divisível** por outro quando a divisão do primeiro pelo segundo for exata" (p. 13). Exemplos – explorando o algoritmo da divisão exata e não exata, ou seja, um número é divisível por outro ou não. O significado da divisão exata é explorado por meio do conceito de quebrar ou partir em pedaços iguais. O significado dado para a palavra "divisível" está associado ao resto da divisão ser zero.

b) Os critérios de divisibilidade são apresentados como regras que permitem verificar se um número é divisível por outro sem efetuar a divisão. Destas, são estudados os critérios de divisibilidade por 5, por 2 e por 10, por 3 e por 9, por 4 , 8 e por 6.

Vejamos como uma das "regras" é apresentada:

Para conhecer como as regras de divisibilidade são apresentadas, apresentamos uma delas:

A divisibilidade por 5

Por meio da seqüência de múltiplos de 5 explora-se múltiplos e divisores.

Uma situação problema: “O número 12345 faz parte da seqüência?” (p. 13).

Sugestão de resposta dada: Verificar se a divisão de 12345 por 5 é exata.

Sem conduzir o aluno a reflexão o autor indica que os elementos da seqüência (múltiplos de 5) terminam em zero ou cinco. Logo o número 12345 é divisível por 5.

São propostas para o aluno descobrir os critérios de divisibilidade por 2, 10, 3 e 9. A atividade é dirigida passo a passo, restando ao aluno somente efetuar operações de divisão e / ou soma e formular o critério.

c) Introdução do conceito de números primos: este conceito é abordado associando os números a forma geométrica, representando a seqüência dos números triangulares e retangulares. Identificamos nas seqüências as representações de números primos: 2, 3, 5, 7. Analisa a não possibilidade de representá-los sob a forma retangular. Atribui isto, como característica dos números primos e define.

“todos os números naturais maiores que um e que não podem ser representados na forma retangular são chamados números primos”. (p.20)

Identifica em seguida a seqüência de primos.

d) Abordagem dos números primos entre si:

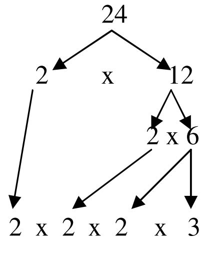
Os números primos entre si são introduzidos por meio de uma história que leva a concluir que o único divisor de *a* e *b*, números dados é o número 1. Portanto *a* e *b* são primos entre si.

e) Decomposição de um número em fatores primos:

Duas técnicas são apresentadas:

- Fatoração por árvore.

Exemplo:



Desse modo, decompondo o número 24 em fatores primos, obtemos: 24 = 2^3 x 3

- Fatoração usando algoritmo da divisão.

Procedimento:

“Divide-se o número dado pelo seu menor divisor primo;

Procede-se da mesma maneira com o quociente obtido até se encontrar o quociente 1” (p. 24).

Exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 3 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Desse modo, decompondo o número 24 em fatores primos, obtemos: 60 = 2^2 x 3 x 5

f) Mínimo múltiplo comum - Objeto de estudo

O mínimo múltiplo comum é introduzido através de um problema, ”Maurício, sentado num banco de uma praça, ficou observando o pisca-pisca das luzes das antenas de duas emissoras de televisão. As luzes de uma “piscavam” a cada 18 segundos e as da outra, a cada 15 segundos. Verificou em seu relógio o momento exato em que as luzes das antenas piscaram no mesmo instante. Eram 20 horas, 20 minutos e 20 segundos. Com o relógio cronometrado, ficou aguardando o momento em que isso voltaria a acontecer.

Foi assim que Maurício descobriu de quanto em quanto tempo as luzes piscavam simultaneamente.

Antes de prosseguir a leitura desse texto, procure descobrir depois de quantos segundos as luzes voltaram a piscar ao mesmo tempo” (p. 25).

Na resolução, as três técnicas de cálculo do M.M.C. são apresentadas, ou seja, dados *a* e *b* a tarefa “determinar M.M.C. de *a* e *b”*, pode ser executada por:

Técnica 1: Explicitar o conjunto dos múltiplos de *a* e *b;*

Técnica 2: Decompor *a* e *b* em fatores primos, multiplicando os fatores primos comuns e não comuns e, entre os fatores com base iguais, escolher aquele que apresenta maior expoente.

Técnica 3: Decomposição simultânea em fatores primos.

Após as discussões de cada conteúdo são apresentados duas listas de exercícios para serem resolvidos, sob a designação “praticando” e “revendo”.

Estudo dos exercícios

No livro da 6ª série, são apresentados, num total de 117 exercícios, 83 sob a designação “praticando” e 34 “revendo”.

Apresentamos aqui os exercícios segundo a tarefa e resolvemos um exemplo de cada para ilustrar se trata de uma tarefa ainda não proposta na 5ª série; caso seja uma tarefa já proposta na 5ª série, registramos somente a quantidade delas.

Dos tipos de tarefa identificados na 5ª série, do tipo 1 ao tipo 10, de 14 a 23 nenhum exercício foi proposto na 6ª série.

Identificamos exercícios:

Tipo 11 - Determine o mínimo múltiplo comum de *a* e *b.*
Quantidade de exercícios: 17

Tipo 13 - Problema – aplicação do mínimo múltiplo comum.
Quantidade de exercícios: 1

E a presença de outros como:

Tipo 24 - Dado um número *x*, verificar se *x* é divisível por *n* (para *n* = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10).

Quantidade de exercícios: 76

Exemplo:

Sem efetuar a divisão, verifique se o número 312 é divisível por 3.

Resolução:

Para fazer a verificação usamos o critério de divisibilidade por 3.

Temos que: 3 + 1+2 = 6. Como a soma de seus algarismos absolutos é 6 e 6 é divisível por 3, logo 312 também é divisível por 3.

Divisíveis por n	Quantidade de exercícios
n=2	12
n=3	14
n=4	7 + 1
n=5	9
n=6	9
n=8	7
n=9	11
n=10	6
Total de exercícios	76

Tipo 25 - Determinar o resto da divisão de *a* por *b*

b= 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10.

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Sem efetuar a divisão, determine qual é o resto da divisão de 38573 por 2.

Resolução:

Usando o critério de divisibilidade por 2, temos que 38573 é impar, portanto para ser divisível por 2 deve ser um número par. Como o último algarismo é três, os múltiplos de dois terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Logo, o resto da divisão do número 38573 por 2 é igual a 1.

Tipo 26 - Situação dada: Dividindo-se um número a por b, restou c.

Q1 – a é divisível por d? Onde $d = 2,...$

Q2 – a é divisível por e?

Técnica: aplicação sucessiva do critério da divisibilidade considerando em particular o último algarismo do número.

Quantidade de exercício: 1

Exemplo:

Dividindo-se um número por 10, restou 5.

a) Esse número é divisível por 2?

b) Esse número é divisível por 5?

Resolução

a) Dado um número $\begin{array}{l|l} a & 10 \\ \hline 5 & q \end{array}$, temos que $a = 10q + 5$.

Como 5 não é divisível por 2, logo o número a também não é divisível por 2.

b) Como o resto da divisão é 5, e 5 é divisível por ele mesmo. Portanto o número a é divisível por 5.

Tipo 27 - Substituição de um algarismo do número dado x para obter um número divisível por y.

Quantidade de exercícios: 10

Exemplo:

O número 43m tem três algarismos. O primeiro é o 4, o segundo é o 3 e o terceiro é um algarismo desconhecido m. Encontre os valores de m para que o número seja divisível por 2.

Resolução:

Usando o critério de divisibilidade por 2, temos que um número é divisível por 2 quando termina em 0, 2, 4, 6, 8.

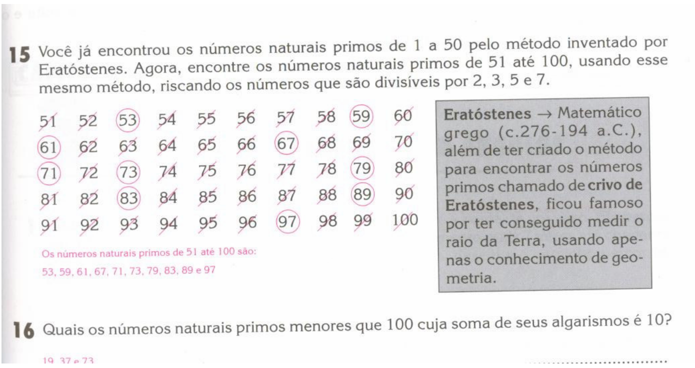
Portanto m = 0, 2, 4, 6, 8.

Divisíveis por	Quantidade de exercícios
6	5
2	2
3	2
4	1
Total exercícios	10

<u>Tipo 28</u> - Determinar os números primos entre *a* e *b* colocando 10 números em cada linha

<u>Quantidade de exercícios</u>: 1

Exemplo: Determine os números naturais primos de 51 até 100 pelo método inventado por Eratóstenes, riscando os números que são divisíveis por 2, 3, 5 e 7.



15 Você já encontrou os números naturais primos de 1 a 50 pelo método inventado por Eratóstenes. Agora, encontre os números naturais primos de 51 até 100, usando esse mesmo método, riscando os números que são divisíveis por 2, 3, 5 e 7.

~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Os números naturais primos de 51 até 100 são:
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97

Eratóstenes → Matemático grego (c.276-194 a.C.), além de ter criado o método para encontrar os números primos chamado de **crivo de Eratóstenes**, ficou famoso por ter conseguido medir o raio da Terra, usando apenas o conhecimento de geometria.

16 Quais os números naturais primos menores que 100 cuja soma de seus algarismos é 10?

19, 37 e 73

Resolução:

Observando o quadro verificamos que os números primos de 51 até 100 são: 53, 59, 61, 67, 71, 73, 83, 89 e 97.

<u>Tipo 29</u> - Qual é o único número primo que é par?

<u>Quantidade de exercícios</u>: 1

Resposta: O único número primo par é o número 2.

Tipo 30 - Existe algum número múltiplo de *x* que seja primo? Qual?

Quantidade de exercícios: 2

Exemplo:

"Existe algum número múltiplo de 3 que seja primo? Qual?"

Resolução:

Para o número ser primo, ele deverá admitir apenas dois divisores, portanto o único múltiplo de 3 que é primo é ele mesmo: 3 x 1=3

3 é primo e só admite 2 divisores.

Tipo 31 - Qual é o maior número de dois algarismos que é primo?

Quantidade de exercícios: 1

Resposta: O maior número de dois algarismos que é primo é o número 97.

Tipo 32 - Entre *a* e *b* existe somente um número primo. Qual é esse número?

Quantidade de exercícios: 4

Exemplo: "De 110 a 125 existe somente um número primo. Qual é esse número?"

Resolução: Primeiramente tiramos os números pares que são divisíveis por 2. Sobraram então os números ímpares, tirando os números divisíveis por 3 sobram 113, 115, 119, 121 e 125, em seguida tiramos os múltiplos de 5, temos 113, 119 e 121 e por último tiramos os múltiplos de 7 e 11, sobra então o número 113. Portanto o único número primo é 113.

Tipo 33 - Identificar quais dos pares de números *a* e *b* são primos entre si.

Quantidade de exercícios: 3

Exemplo: para a = 5 e b =12

Resolução: Determinamos primeiro o conjunto de divisores de 5 e de 12.

Divisores de 5 → {1, 5}

Divisores de 12→{1, 2, 3, 4, 6, 12}.

Divisor comum de 5 e 12→{1}

Portanto os números 5 e 12 são primos entre si.

Tipo 34 - Decomponha o número *m* em fatores primos:

Quantidade de exercícios: 7

Exemplo:

"Decomponha em fatores primos o número 225".

Resolução:

Decompondo em fatores primos o número 225, temos:

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

O menor divisor primo de 225 é 3; divide-se 225 por 3

O menor divisor primo de 75 é 3; divide-se 75 por 3

O menor divisor primo de 25 é 3; divide-se 25 por 5

O menor divisor primo de 5 é 3; divide-se 5 por 5

Logo, podemos escrever 225 $=3 \times 3 \times 5 \times 5$ ou $3^2 \times 5^2$

Tipo 35 - Dada a decomposição em fatores primos, determinar o número fatorado.

Técnica: Escrever o número em produto de fatores primos e efetuar a multiplicação.

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

A decomposição de um número em fatores primos é $2^3 \times 3^2 \times 7$. Qual é este número?

Resolução: Resolvemos primeiro a potência e depois a multiplicação, obtendo assim o número procurado.

$2^3 \times 3^2 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 8 \times 9 \times 7 = 504$

Logo o número decomposto em fatores primos é 504.

Tipo 36 - Dados dois números A e B decomposto em fatores primos, determinar a decomposição de A x B, sem efetuar as potências.

Técnica: Uso da propriedade de potência da multiplicação.

Quantidade de exercícios : 2

Exemplo: Dados A = $2^2 \times 3^2 \times 11$ e B = $2 \times 3^3 \times 7$, determine a decomposição em fatores primos do número A x B, sem efetuar as potências .

Resolução:

Usamos a propriedade de potência da multiplicação:

A x B = $2^2 \times 3^2 \times 11 \times 2 \times 3^3 \times 7 = 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^3 \times 7 \times 11 = 2^3 \times 3^5 \times 7 \times 11$.

Portanto: A x B = $2^3 \times 3^5 \times 7 \times 11$.

Tipo 37 - Se *x* e *y* são números primos distintos, o que se pode dizer sobre o M.M.C. (*x, y*)?

Técnica: Produto dos números primos distintos, pois não dá para fazer a fatoração:

Quantidade de exercícios: 2

Exemplo:

Seja $x = 3$ e $y = 5$, determine o m.m.c (*x, y*)

Resolução:

O mínimo múltiplo comum de dois números primos distintos é o produto desses números.

Logo o mínimo múltiplo comum (3, 5) = 3 x 5 = 15

Conclusão:

Como podemos notar no livro “Construindo Conhecimentos em Matemática” da 6ª série, uma ênfase é dada a determinação dos divisores de um número pois 76 dos

117 exercícios são deste tipo e 10 dos 117 exercícios são do tipo 27 que também explora divisibilidade variando somente a situação problema.

Remarcamos também o trabalho que é feito sobre fatoração de um número em fatores primos sobre o qual 7 exercícios são propostos.

II 3 O ESTUDO DO LIVRO DIDÁTICO: “MATEMÁTICA”

Autores IMENES e LELLIS;ano 2004 [2]

II. 3.1 Livro da 5ª série

Como nosso objetivo de estudo é divisibilidade, estudamos o capítulo 3, múltiplos e divisores, (pp. 81 - 101).

Neste livro identificamos que a apresentação do desenvolvimento do conteúdo é feito em quatro etapas:

1 - A Abordagem

Observamos que o conteúdo é introduzido explorando diferentes seqüências [3]:

- seqüências de figuras;
- seqüências de múltiplos;
- seqüências de divisores.

2 Desenvolvimento do conteúdo:

Por meio de exemplos os quais o autor desenvolve utilizando um diálogo simulado entre professor e aluno, os conteúdos são apresentados e no fecho da atividade uma definição é dada, mesmo que esta seja não formal.

O mínimo múltiplo comum é objeto de estudo, através das seqüências de múltiplos. A notação usada é M.M.C. (*a, b*).

Na seqüência dos divisores a divisão exata é explorada. Porém em nenhum momento o livro fala sobre o máximo divisor comum e nos critérios de divisibilidade. Na parte que se chama “conversando sobre o texto”, são feitas algumas perguntas para que o aluno pense e responda.

[2] 5ª e 6ª série.

[3] Nestas seqüências o zero como múltiplo é considerado.

Por exemplo:

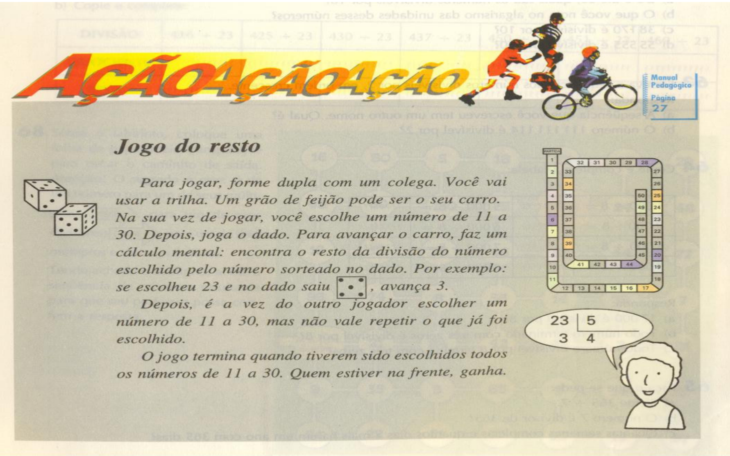
Dizemos que 21 é múltiplo de 3. E 3, o que é de 21?

3 – Exercícios

Duas listas de exercícios são propostas, das quais uma é sugerida para atividade de casa.

4 – Atividade de fixação

Para a fixação do conteúdo o autor propõe a realização de um jogo em dupla.


AÇÃO AÇÃO AÇÃO

Manual Pedagógico Página 27

Jogo do resto

Para jogar, forme dupla com um colega. Você vai usar a trilha. Um grão de feijão pode ser o seu carro. Na sua vez de jogar, você escolhe um número de 11 a 30. Depois, joga o dado. Para avançar o carro, faz um cálculo mental: encontra o resto da divisão do número escolhido pelo número sorteado no dado. Por exemplo: se escolheu 23 e no dado saiu ⚄, avança 3.

Depois, é a vez do outro jogador escolher um número de 11 a 30, mas não vale repetir o que já foi escolhido.

O jogo termina quando tiverem sido escolhidos todos os números de 11 a 30. Quem estiver na frente, ganha.

Estudo dos Exercícios

São apresentados no total 69 exercícios, entre os quais 30 sob a designação "Exercícios" e 39 "Exercícios para Casa".

Apresentamos aqui os tipos de exercícios segundo a tarefa.

Dos tipos de tarefas identificadas no livro Construindo Conhecimentos em Matemática, do tipo17 ao tipo 37 nenhum exercício foi proposto neste livro.

Identificamos exercícios do tipo:

<u>*Tipo 3*</u> - Dado um número *x* determine os múltiplos.

<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 17*

Tipo 4 - Determinar os *n* primeiros múltiplos de *a*:
Quantidade de exercícios : 8

Tipo 5 - Qual o menor múltiplo de *x* maior que *m*?
Quantidade de exercícios : 2

Tipo 10 - Qual é o número compreendido entre *a* e *b* que é múltiplo de *x*?
Quantidade de exercícios: 2

Tipo 11 - Determine o mínimo múltiplo comum de *a* e *b.*
Quantidade de exercícios : 9

Tipo 13 - Problema – aplicação do mínimo múltiplo comum.
Quantidade de exercícios: 5

Tipo 15 - Determine o menor e o maior número de *n* algarismo que sejam múltiplos de *a* e *b.*
Quantidade de exercícios: 6

Tipo 16 - Determine os divisores de *a*
Quantidade de exercício: 6

Além desses encontramos:
Tipo 38 - Dada a seqüência escreva a regra de formação
Quantidade de exercícios: 2
Exemplo:
Escreva qual é a regra de formação da seqüência: 0, 12, 24, 36,....
Resolução

Sabemos que a divisão de 0, 12, 24, 36 por 12 dá divisão exata, ou seja, se multiplicarmos o número 12 pela seqüência dos números naturais obtemos a seqüência dada.

Logo a seqüência dada é a dos múltiplos de 12.

Tipo 39 - Dada uma seqüência, identificar se ela é uma seqüência de múltiplos de *x.*

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Observe o calendário e responda:

As datas das terças-feiras são múltiplas de 7? E as das quartas-feiras?

SETEMBRO 2004						
D	S	T	Q	Q	S	S
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Resolução

Vamos primeiro enumerar os múltiplos de 7.

M(7) = {0, 7, 14, 21, 28, 35,...}

Observando o calendário e os múltiplos de 7 podemos concluir que as datas das terças-feiras são múltiplos de 7 e as das quartas-feiras não

Tipo 40 - Completar a tabela com múltiplos e ou divisores e responder as perguntas sobre ela.

Quantidade de exercícios: 6

Exemplo:

Copie e complete a tabela:

100 / 4	????????	500 / 4	?????????
200 / 4	????????	600 / 4	?????????
300 / 4	????????	700 / 4	?????????
400 / 4	????????	800 / 4	?????????

Responda

a) 13600 é divisível por 4?
b) Todo número terminado com dois zero é divisível por 4?
c) Todo número divisível por 4 termina com dois zeros?

Resolução

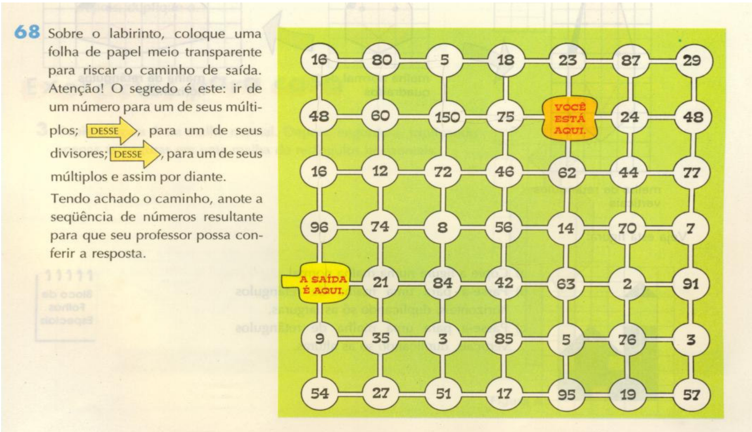
Primeiro resolvemos as contas e completamos a tabela. Em seguida respondemos as perguntas sobre ela.

100 / 4	25	500 / 4	125
200 / 4	50	600 / 4	150
300 / 4	75	700 / 4	175
400 / 4	100	800 / 4	200

a) Sim, pois 13600 / 4 = 3400, ou seja 4 divide 13600 em 3400 partes iguais.
b) Intuitivamente sim.
c) Não. 16 é divisível por 4, mas não termina com dois zero.

<u>Tipo 41</u> - Determinar os divisores e ou múltiplos comuns de um número através de jogo

<u>Quantidade de exercícios</u>: 1



Resolução

Saindo do ponto “você esta aqui”.

A esquerda temos o número 75. Seguindo a esquerda temos o número 150 que é múltiplo de 75, subindo, temos o número 5 que é divisor de 150.

À esquerda do número 5 temos o número 80 que é múltiplo de 5, seguindo à esquerda temos o número 16 que é divisor do número 80, começando a descer temos os números 48, 16, 96 que satisfazem as regras do jogo.

Assim encontramos a saída do labirinto.

Temos a seqüência dos números: { 75, 150, 5, 80, 16, 48, 16, 96}

<u>Tipo 42</u> - Responder descritivamente as perguntas sobre múltiplos e ou divisores de um número dado.

<u>Quantidade de exercícios</u>: 2

Exemplo:

Responda

a) de 0 até 60, quais os números divisíveis por 10?
b) O que você nota no algarismo das unidades desses números?
c) 38170 é divisível por 10?
d) 55555 é divisível por 10?

Resolução

Inicialmente vamos escrever o conjunto dos múltiplos de 10:

M(10) = {0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,....}

a) Os números que são divisíveis por 10, de 0 até 60 são: {0, 10, 20, 30, 40, 50, 60}
b) Notamos que o algarismo das unidades é sempre zero.
c) Sim, pois 38170 / 10 = 3817. Assim 10 divide 38170 em partes iguais, além o algarismo da unidade é zero.
d) Não, pois o algarismo da unidade é diferente de zero.

<u>*Tipo 43*</u> - Responder se um número *n* é divisível por um dado número *y* ou se *n* é múltiplo de *y.*

<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 4*

Exemplo:

Responda e explique o porquê:

a) 375 é múltiplo de 15?
b) 774 é múltiplo de 24?
c) 1111 é múltiplo de 111?
d) 1995 é múltiplo de 133?

Resolução:

a) se 375 é múltiplo de 15, então 375 é divisível por 15 (375 / 15 = 25)

   Assim, 375 = 25 x 5, logo 375 é múltiplo de 15.
b) Não, porque não existe número natural que, multiplicado por 24, dê 774. Assim, 24 não divide 774 em partes iguais.
c) Não, porque não existe número natural que, multiplicado por 111, dê 1111. Assim, 111 não divide 1111 em partes iguais.
d) Sim, porque 133 divide 1995 em partes iguais. 1995 = 15 x 133

<u>*Tipo 44*</u> - Efetuar cálculos de multiplicação e ou divisão e responder perguntas sobre estas.

<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 2*

Exemplo:

Faça o que se pede:

a) efetue 416 / 23.

b) Copie e complete

Divisão	416 / 23	425 / 23	430 / 23	4437 / 23	450 / 23	451 / 23	460 / 23
Quociente	??????	???????	???????	???????	???????	???????	???????
Resto	??????	???????	???????	???????	???????	???????	???????

Resolução

Vejamos a conta:

$$\begin{array}{r|l} 416 & 23 \\ \cline{2-2} \underline{23} & 18 \\ 186 & \\ \underline{182} & \\ 002 & \end{array}$$

b) Para completar a tabela, efetuamos as divisões

Divisão	416 / 23	425 / 23	430 / 23	4437 / 23	450 / 23	451 / 23	460 / 23
Quociente	18	18	18	19	19	19	20
Resto	2	11	16	0	13	14	0

<u>Tipo 45</u> - Determinar os divisores do número

<u>Quantidade de exercícios</u>: 6

Exemplo:

O número 18 tem 6 divisores. Quais são eles?

Resolução:

Sabemos que todo número é divisível por 1 e por ele mesmo. Assim, nos resta descobrir os outros divisores de 18. Assim, resolveremos essa questão, descrevendo primeiramente os múltiplos dos números menores que 18.

Vejamos:

M(2) = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, **18**,...}

M(3) **=** {0, 3, 6, 9, 12, 15, **18**,...}

M(4) = {0, 4, 8, 12, 16, 20,...}

M(5) **=** {0, 5, 10, 15, 20,...}

M(6) = {0, 6, 12, **18**,...}

M(7) **=** {0, 7, 14, 21,...}

M(8) = {0, 8, 16, 24,...}

M(9) = {0, 9, **18**,...}

Logo os divisores de 18 são: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

II 3.2 Livro da 6ª série

Este livro se divide em 12 capítulos. Como nosso objeto de estudo é divisibilidade, estudamos o capítulo 1, “Números Naturais” (pp. 18 a 27).

Estruturação do capítulo interpretada por nós

1 - A Abordagem

Uma breve retomada das noções de múltiplos, divisores e divisibilidade estudadas na 5ª série é feita via exemplos numéricos.

Os termos divisível, múltiplo e divisor são destacados. A noção de seqüência dos múltiplos é retomada bem como a noção de divisibilidade. Remarcamos que o autor escolheu trabalhar os múltiplos de 4 e problematiza em função do ano bissexto onde ele busca trabalhar com uma situação - problema conhecida dos alunos.

2 - Desenvolvimento do conteúdo

Retoma, ou seja, revisa o tópico de “divisibilidade” estudado no livro da 5ª série, dos números 1, 2, ..., 9, via exemplos. Os critérios, agora, são explicitados instituindo um saber:

> **Todo número natural par é divisível por 2.**
> **Todo número natural terminado em zero ou cinco é divisível por 5.**
> **Todo número natural terminado em zero é divisível por 10.**
> **Um número natural é divisível por 8 quando seus três últimos algarismos formam um número divisível por 8.**
> **Um número natural é divisível por três se a soma de seus algarismos é divisível por 3.**
> **Um número natural é divisível por 9 se a soma de seus algarismos é divisível por 9.**
> **Todo número natural é divisível por 6 quando é divisível por 2 e também por 3.**
> **Todo número natural é divisível por 1 (pp. 23 e 24).**

Notemos que não se fala em critério de divisibilidade do 7.
Será que existe alguma regra de divisibilidade por 7?

Procuramos nas anotações de Fundamentos da Matemática I e também não encontramos nenhuma regra de divisibilidade para o 7.
Portanto para verificar isso teríamos que fazer um estudo mais aprofundado.

Retoma o mínimo múltiplo comum somente nos exercícios.

Remarcamos que o máximo divisor comum não é objeto de estudo.

Estudo dos exercícios

No livro encontramos um total de 33 exercícios que se dividem em tarefas, dos quais 14 são propostos sob a rubrica "exercícios" e 19 sob a rubrica "exercícios para casa".

Dos tipos de tarefa identificados nos livros Construindo Conhecimentos em Matemática e Matemática da 5ª série, encontramos:

Tipo 11 - Determine o mínimo múltiplo comum de *a* e *b.*
Quantidade de exercícios: 2

Tipo 22 - Dadas algumas sentenças (*v* ou *f*), identificar as sentenças falsas e transformá-las em sentenças verdadeiras, mantendo um dos números.
Quantidade de exercício: 1

Tipo 43 - Responder se um número ***n*** é divisível por um dado número *y* ou se *n* é múltiplo de *y*
Quantidade de exercícios: 8

Tipo 44 - Efetuar cálculos de multiplicação e ou divisão e responder perguntas sobre estas.
Quantidade de exercícios: 3

Tipo 45 - Determinar os divisores do número
Quantidade de exercícios: 7

Além desses encontramos a presença das seguintes tarefas:

Tipo 46 - Determinar números que sejam divisíveis por um outro dado, através de uma regra e/ou critério.

Quantidade de exercícios: 6

Exemplo:

Considere todos os números naturais de 10.000 a 10.015, sem efetuar a divisão responda:

a) quais desses números são divisíveis por 2?
b) Quais são divisíveis por 5?
c) Quais são divisíveis por 10?

Resolução:

Primeiramente descrevemos a seqüência dos números naturais de 10.000 à 10.015:
{10.001, 10.002, 10.003, 10.004, 10.005, 10.006, 10.007, 10.008, 10.009, 10.010, 10.011, 10.012, , 10.013, 10.014, 10.015}:

a) Usando o critério de divisibilidade, os números divisíveis por 2 são:
{10.002, 10.004, 10.006, 10.008, 10.010, 10.012, 10.014}.

b) Os números divisíveis por 5 são:
{10.000, 10.005, 10.010, 10.015}.

c) Os números divisíveis por 10 são: {10.000, 10.010}.

Tipo 47 - Resolver problemas usando múltiplos e divisores.

Quantidade de exercícios: 5

Exemplo:

Marcos, Lorena e Márcia trabalham no mesmo hospital. Marcos dá plantão a cada 5 dias, Lorena a cada 8 dias; e Márcia a cada 10 dias.

Hoje, os três juntos deram plantão. Daqui a quantos dias os três vão se reencontrar no plantão do hospital?

Resolução:

Sabendo-se o número de dias que Marcos, Lorena e Márcia dão plantão, vamos escrever os múltiplo de 5, 8, 10: vejamos:

M (5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, **40**, 45, 50,...}

M (8) = {0, 8, 16, 24, 32, **40,**48,56,64,...}

M (10) = {0, 10, 20, 30, **40**, 50, 60, 70,... }

Como o menor múltiplo comum de 5, 8 e 10 é 40.

Logo os três vão se encontrar daqui a 40 dias.

Tipo 48 - Escreva as regras de divisibilidade.

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Escreva as regras de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10

Resolução:

Por 2: os números pares;

Por 3: Aqueles cuja soma de algarismos é divisível por 3;

Por 4: Um número natural é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos algarismos for um número divisível por 4.

Por 5: Todo número natural terminado em 0 ou 5 é divisível por 5.

Por 6: Todo número natural é divisível por 6 quando é divisível por 2 e também por 3.

Por 8: Um número natural é divisível por 8 quando seus três últimos algarismos formam um número divisível por 8.

Por 9: Um número natural é divisível por 9 se a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Por 10: Todo número natural terminado em 0 é divisível por 10.

A divisibilidade é vista como ferramenta na resolução de problemas. Porém o conceito de seqüência de um número é essencial para a abordagem do conjunto de divisores.

Segundo os exercícios deste livro didático é sob o aspecto ferramenta de divisibilidade, como regra os critérios de divisibilidade que se centra o ensino na 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.

II.4 – Estudo do Livro Didático “A Conquista da Matemática”.

Autores: José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Jr. Editora FTD, 5ª série, ano 1998.

O livro se divide em 10 unidades onde cada uma delas se divide em capítulos. É de nosso interesse a quarta unidade, que está dividida em nove capítulos.

Estudo da unidade 4: Divisibilidade: divisores e múltiplos

A Abordagem

A noção de divisibilidade é abordada via exemplos, identificando a divisão exata e a divisão não exata, explorando assim o algoritimo da divisão. Em seguida apresenta os critérios de divisibilidade para 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10. O autor destaca que identificar se um número é divisor de outro por divisão é um processo demorado, visa com isto dar a importância aos critérios.

Os critérios de divisibilidade são apresentados (p. 75) como regras práticas que permitem verificar sem efetuar a divisão se um número natural é ou não divisível por outro número.

Por meio do estudo de uma tabela com números de 1 à 19, onde os divisores de cada um são determinados, identifica-se os números que possuem como divisores o 1 e ele mesmo e desta amostragem o autor formaliza a noção de número primo. “ Um número que possui apenas dois divisores naturais distintos (o número 1 e ele mesmo) é denominado número primo”(p. 83).

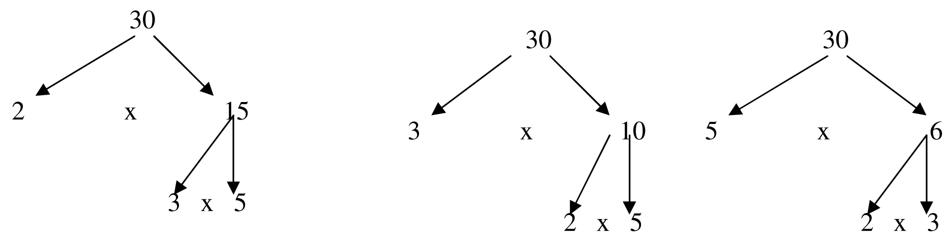
O procedimento proposto para verificar se o número é primo é dado como uma regra:

“1-Dividimos o número pelos números primos menores que ele;

2-Se nenhuma das divisões for exata, o número é primo (p. 84)”.

A decomposição em fatores primos é apresentada via exemplos usando “ árvore” como procedimento.

Por exemplo:



A partir do estudo das situações particulares do estudo dos números: 4, 6, 10 e 30 a afirmação seguinte é dada: “todo número natural não primo, maior que 1, pode ser escrito na forma de uma multiplicação em que todos os fatores são números primos” (p. 86).

A “decomposição” de um número em fatores é tida como uma operação que consiste em três etapas: “Dividir inicialmente o número dado pelo seu menor divisor primo.

Dividir o quociente obtido pelo seu menor divisor primo.

Repetir esse procedimento até obter o quociente 1”(p. 86).

Em seguida é apresentado o algoritmo para os números: 72 e 495.

Exemplo:

Decompor em fatores primos o número 495.

495	3
165	3
55	5
11	11
1	

$495 = 3^2 \times 5 \times 11$

O objeto matemático Máximo Divisor Comum (MDC) é apresentado por meio de seqüências de divisores, onde estudando as seqüências de dois ou mais números, destaca-se o maior divisor comum. Como uma dedução a definição seguinte é dada: “Dados dois ou mais números naturais, não simultaneamente nulos, denomina-se máximo divisor comum desses números o maior dos seus divisores comuns” (p. 88).

A técnica da decomposição de fatores primos para a determinação do MDC de dois ou mais números é apresentada como um processo prático mais simples e rápido que a técnica de determinação da seqüência de divisores.

Com o estudo de exemplos numéricos a propriedade “dados dois ou mais números naturais, se um deles é divisor comum dos outros, então esse número será o MDC dos números dados” (p. 90) é apresentada.

E por último mostra quando um número é múltiplo de outro através da seqüência dos múltiplos e divisores de um número. Relacionando “ser múltiplo de” e ”ser divisível por”, trazendo a seguinte definição.

“Um número natural *a* é múltiplo de um número natural *b*, diferente de zero, quando *a* for divisível por *b* ou *b* for divisor de *a* (p. 91)”.

O mínimo múltiplo comum é objeto de estudo também neste livro. Ele é apresentado de várias maneiras diferentes, como:

1- usando a seqüência de múltiplos:

Por exemplo:

“Dados dois ou mais números naturais, não nulos, denomina-se mínimo múltiplo comum (MMC) desses números o menor dos múltiplos comuns dos números dados, que seja diferente de zero” (p. 93).

2- usando a decomposição em fatores primos:

Como exemplo: “Dados os números naturais 30 e 40 qual é o menor múltiplo comum desses números?

Inicialmente, vamos decompor os números em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

30 = 2 x 3 x 5

40 = 2^3 x 5

Consideremos agora todos os fatores, cada um deles com o seu maior expoente (pois o número procurado deve ser múltiplo dos dois números, ao mesmo tempo): 2^3, 3 e 5.

O produto desses fatores será o M.M.C. procurado:

M.M.C. (30, 40) = $2^3 \times 3 \times 5 = 8 \times 3 \times 5 = 120$

Logo, o número procurado é 120" (p. 94).

3- usando a decomposição simultânea em fatores primos

Por exemplo:

Qual é o menor múltiplo comum dos números 6, 8 e 12?

Fazendo a decomposição simultânea dos três números dados,temos:

$$\begin{array}{l|l} 6,\ 8,\ 12 & 2 \\ 3,\ 4,\ 6 & 2 \\ 3,\ 2,\ 3 & 2 \\ 3,\ 1,\ 3 & 3 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

m.m.c. (6, 8, 12) = $2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$

Logo, o menor múltiplo comum de 6, 8 e 12 é o número 24.

4- Através de propriedades:

" Quando o M.D.C. de dois ou mais números é igual a 1, o M.M.C.. desses números é o produto deles.

Dados dois ou mais números naturais, diferentes de zero, se um deles for múltiplo de todos os outros, ele será o M.M.C. dos números dados" (p. 95).

Através de exemplos, com problemas explora o M.M.C., traz definições e usa a notação M.M.C. (x,y).

Portanto o M.M.C. e o M.D.C. são objetos de estudo na 5ª série para os autores, porém nada consta no livro da 6ª série sobre divisibilidade, pois para os autores o conteúdo é todo trabalhado na 5ª série.

Percebemos que neste livro didático o autor traz as definições prontas, logo após exemplos.

Estudo dos exercícios.

Neste livro analisamos 107 exercícios, todos sob a designação "Fixação".

Vejamos

Estudo do exercício quanto a tarefa.

Dos tipos de tarefa apresentados nos livros didáticos estudados anteriormente encontramos:

Tipo 3 - Dado um número *x*, determine os múltiplos;

Quantidade de exercícios: 3

Tipo 4 - Determinar os *n* primeiros múltiplos de *a*:

Quantidade de exercícios: 3

Tipo 5 - Qual o menor múltiplo de *x* maior que *m*?

Quantidade de exercícios: 2

Tipo 11 - Determine o mínimo múltiplo comum de *a* e *b.*

Quantidade de exercícios:3

Tipo 13 - Problema de aplicação do mínimo múltiplo comum .

Quantidade de exercícios:5

Tipo 16 - Determine os divisores de *a*

Quantidade de exercício : 5

Tipo 17 - Escreva a seqüência dos números de 0 a *n.*

Identificar os números divisíveis por *x.*

Quantidade de exercício: 3

Tipo 24 –Dado um número *x*, verificar se *x* é divisível por *n* (para n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10).

Quantidade de exercícios: 32

Tipo 34 - Decomponha o número *m* em fatores primos:

Quantidade de exercícios: 5

Tipo 35 - Dada a decomposição em fatores primos, determinar o número fatorado.

Quantidade de exercícios: 3

Além desses encontramos:

Tipo 49 - Sendo um algarismo desconhecido:

Condição: Sem efetuar divisão

Quantidade de exercícios :5

Exemplo:

Observe o número 5 *n* 1 e responda:

Se você colocar 0 no lugar de *n*, o número será divisível por 9?

Resolução:

Usando o critério de divisibilidade por 9 e substituindo 0 por *n* temos 501=5 + 0 + 1 = 6. 6 não é divisível por 9, logo, 501 também não é.

Tipo50 - identificar os números que tem dois divisores ao mesmo tempo;

Quantidade de exercícios: 9

Exemplo:

O número 15568 é divisível, ao mesmo tempo por 4 e por 8. Essa afirmação é verdadeira ou falsa?

Resolução:

Usando os critérios de divisibilidade por 4 e 8, temos que:

68 é divisível por 4, portanto 15568 também é;

568 é divisível por 8, portanto 15568 também é.

Então a afirmação é verdadeira.

Tipo 51 - Formar números de três algarismos para aplicar os critérios de divisibilidade:

Quantidade de exercícios: 4

Exemplo

Escreva o menor número formado por três algarismos que seja divisível por 2.

Resolução:

Para o número ser divisível por 2, ele deve ser um número par.

Portanto, o menor número de três algarismos que é divisível por 2 é o número 100.

Tipo 52 - Verifique se o número x é um divisor de y :

Quantidade de exercícios: 4

Exemplo

Verifique se o número 45 é divisor de 2250.

Resolução:

Para fazer a verificação devemos dividir 2250 por 45:

$$\begin{array}{l|l} 2250 & 45 \\ \hline 00 & 50 \end{array}$$

Como a divisão é exata 45 é divisor de 2250.

Tipo 53 - Sabe-se que P é divisor de Q e de M, mostre que P é também divisor de Q mais M e M menos Q .

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:
Sabe-se que 8 é divisor de 72 e 72 é divisor de 208. Mostre que 8 é também divisor:

a) da soma desses números;

b) da diferença desses números.

Resolução

a) Somando os números 72 e 208, temos:

72 + 208 = 280

Fazendo a divisão por 8:

$$\begin{array}{r|l} 280 & 8 \\ \cline{2-2} 40 & 35 \\ 0 & \end{array}$$

Portanto, 8 é divisor da soma desses números.

b) Fazendo a diferença dos números 208 e 72:

208 – 72 = 136

Dividindo 136 por 8

$$\begin{array}{r|l} 136 & 8 \\ \cline{2-2} 56 & 17 \end{array}$$

Portanto, 8 é divisor da diferença desses números.

Tipo 54 - Ao decompor o número natural Q em fatores primos, se obtém $a^m \times b^n \times c^p$, determine m, n e p.

Quantidade de exercícios: 3

Exemplo

Ao decompor o número 3500 em fatores primos, você obtém $2^m \times 5^n \times 7^p$. Determine, então os valores dos expoentes m, n, p.

Resolução:

Fazendo a decomposição do número 3500 em fatores primos:

$$
\begin{array}{r|l}
3500 & 2 \\
1750 & 2 \\
875 & 5 \\
175 & 5 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

$3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7$

Logo, $m = 2$, $n = 3$ e $p = 1$

Tipo 55 - Os números x e y possuem divisores comuns. Qual é o maior deles?

Quantidade de exercícios: 3

Exemplo:

Os números 54 e 72 possuem divisores comuns. Qual é o maior deles?

Resolução:

Vamos determinar os divisores de 54 e 72:

D (54) = {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27,54}
D (72) = { 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}

Observando os conjuntos que escrevemos podemos dizer que o maior divisor comum é 18.

Tipo 56 - Determine o máximo divisor comum dos números Naturais

Quantidade de exercícios: 3

Exemplo:

Qual é o maior divisor comum de 192 e 288?

Resolução

Inicialmente, vamos decompor os números dados em fatores primos:

192	2		288	2
96	2		144	2
48	2		72	2
24	2		36	2
12	2		18	2
6	2		9	3
3	3		3	3
1			1	

$192 = 2^6 \times 3$
$288 = 2^5 \times 3^2$

Portanto o maior divisor comum é: $2^5 \times 3 = 32 \times 3 = 96$

Tipo 57 - Problema de aplicação do máximo divisor comum
Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:
Duas tábuas devem ser cortadas em pedaços de mesmo comprimento, sendo esse comprimento o maior possível. Se uma tábua tem 90 centímetros e a outra tem 126 centímetros, qual deve ser o comprimento de cada pedaço se toda madeira deve ser aproveitada?
Resolução:
Sabendo que uma tábua tem 90 centímetros de comprimento e a outra tem 126 centímetros de comprimentos, e estas devem ser cortadas de modo que o comprimento seja o maior possível. Para achar esse comprimento vamos determinar o máximo divisor comum dos dois comprimentos.
O M DC pode ser determinado:
Sejam os conjuntos:
D (90) = {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, **18**, 30, 45, 90}
D (126) = {1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, **18**, 21, 42, 63, 126}
Os divisores de 90 e 126.
Observando esses conjuntos, podemos dizer que o maior comprimento possível que é divisor de 90 e 126 ao mesmo tempo é o número 18.

Portanto, o maior comprimento possível será de 18 centímetros.

<u>*Tipo 58*</u> - Dado o máximo divisor comum de *m* e *n*. Escreva o fator que falta nas decomposições.

<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 2*

Exemplo:

O m.d.c. dos números *m* e *n* é $2^3 \times 3 \times 5^3$. Escreva o fator que falta em cada uma das decomposições dos números:

$m = 2^4 \times \boxed{} \times 5^3 \times 7$ e $n = \boxed{} \times 3^2 \times 5^3 \times 11$

Resolução

Sendo que o m.d.c. de dois números é dado pelos fatores primos comuns, cada um com seu menor expoente.

Como foi dada a decomposição dos números *m* e *n* e também o mdc, podemos determinar o fator que falta comparando os números decompostos. Logo o fator que falta em *m* é 3 em *n* é 2^3.

<u>*Tipo 59*</u> - Se dividirmos dois números Naturais por *p* o M.D.C. entre esses números passa a ser *q*. Determine os dois números, sabendo que um é dobro do outro.

<u>*Quantidade de exercícios*</u>*: 1*

Exemplo

Se você dividir dois números naturais por 7, o M.D.C. entre esses números passa a ser 5. Determine os dois números sabendo que um é o dobro do outro.

Resolução

Seja *a* e *b* dois números naturais, sabemos que $a = 2b$ e *a* e *b* são divisíveis por 7, se dividirmos *a* e *b* por 7 o M.D.C. entre esses dois números passa a ser 5.

Inicialmente vamos determinar a seqüência dos múltiplos dos números 5 e 7.

M (5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40,...}

M (7) = {0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77,...}

Na seqüência obtidas temos o número 35 que é o menor múltiplo comum de 5 e 7, ou seja 35 é divisível por 5 e 7. Como $a = 2b$ temos que $a = 35$ e $b = 70$

Tipo 60 - Verifique se a é múltiplo de b.

quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Verifique se 92 é múltiplo de 8.

Resolução

Se 92 é múltiplo de 8, ele deve pertencer a esta seqüência dos múltiplos de 8. Para fazer a verificação escrevemos esta seqüência:

M (8) = {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96,....}

Como 92 não pertence a seqüência, logo 92 não é múltiplo de 8.

Tipo 61 - Escreva os múltiplos de x formado por apenas dois algarismos:

Quantidade de exercícios: 1

Exemplo:

Escreva os múltiplos de 18 formados por apenas dois algarismos.

Resolução:

Para escrever a seqüência dos múltiplos de 18 formado por apenas dois algarismos, precisamos determinar o primeiro múltiplo da seqüência:

Sabemos que 0 x 18 = 0 e 1 x 18 = 18, portanto o primeiro número da seqüência é 18.

Assim a seqüência dos múltiplos de 18 formado por apenas dois algarismos é:

M(18) = {18, 36, 54, 72, 90}.

Tipo 62 - O número n é primo. Ele é múltiplo de quais números naturais?

Quantidade de exercícios: 2

Exemplo:

O número 71 é primo. Então, ele é múltiplo de quais números naturais?

Resolução:

Sabendo que todo número primo admite apenas dois divisores o número 1 e ele mesmo. Portanto se 71 é primo é múltiplo apenas dos números 1 e 71.

CONCLUSÃO:

No livro Conquista da Matemática dos autores Giovanni Castrucci e Giovanni Jr. a abordagem é feita a partir das definições. As tarefas são em sua maioria aplicar as definições e seguir os exemplos para resolver os exercícios.

Comparação dos conteúdos dos livros de 5ª e 6ª séries

Como vimos, os conteúdos e exercícios são abordados de maneira diferente nos livros que analisamos.

Para compreendermos melhor as diferenças e semelhanças existentes nas abordagens elaboramos as seguintes tabelas:

Tabela 1

Comparação dos conteúdos múltiplos

Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 5ª série	Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 6ª série	Matemática Livro didático 5ª série	Matemática Livro didático 6ª série	A Conquista da Matemática Livro didático 5ª série
Trabalha o conteúdo explorando diferentes seqüências de números naturais para introduzir a palavra múltiplo	Faz uma breve revisão através de um exemplo para introduzir o mínimo múltiplo comum.	Trabalha o conteúdo explorando diversos tipos de seqüências para introduzir a palavra múltiplo	Faz uma breve revisão através de um exemplo	Trabalha o conteúdo através de exemplos de seqüências de números naturais para depois introduzir a palavra múltiplo
Trabalha com o zero	Trabalha com o zero	Trabalha com o zero	Trabalha com o zero	Trabalha com o zero
Não utiliza símbolos e nem definições	Não utiliza símbolos e nem definições	Não utiliza símbolos e nem definições	Não utiliza símbolos e nem definições	Utiliza símbolos e de definições

Obs. : Giovanni e Castrucci não dão lugar para divisibilidade no livro da 6ª série.

Quanto aos múltiplos podemos perceber que os livros didáticos procuram fazer uma abordagem acessível aos alunos, ou seja de fácil compreensão, através de exemplos e situação problema. O universo usado é o conjunto dos números Naturais, sendo que não trabalha com múltiplos nos inteiros.

TABELA 2

Comparação dos conteúdos divisores

Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 5ª série	Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 6ª série	Matemática Livro didático 5ª série	Matemática Livro didático 6ª série	A Conquista da Matemática Livro didático 5ª série
Trabalha o conteúdo através de exemplos práticos	Faz uma breve revisão	Trabalha o conteúdo vagamente através de um exemplo	Faz uma breve revisão através de um exemplo	Trabalha o conteúdo através de exemplos
Não utiliza símbolos e nem definições	Não utiliza símbolos e nem definições	Não utiliza símbolos e nem definições	Não utiliza símbolos e nem definições	Não utiliza símbolos e nem definições
Não trabalho com o zero	Não trabalho com o zero	Não trabalho com o zero	Fala da divisão por zero em um exercício	Fala da exceção do zero

Assim, como para com os múltiplos o assunto é trabalhado através de exemplos, porém de maneira superficial para a compreensão do aluno.

O zero é trabalhado de maneira bem superficial, sendo que em apenas um livro fala de exceção do zero no conjunto dos divisores.

TABELA 3

Comparação do conteúdo: regras de divisibilidade

Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 5ª série	Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 6ª série	Matemática Livro didático 5ª série	Matemática Livro didático 6ª série	A Conquista da Matemática Livro didático 5ª série
Não utiliza regras de divisibilidade	Apresenta as regras de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 em exercícios e exemplos. Trabalha com a dedução para depois apresentar a definição	Apresenta as regras para 4 e 8 em exercícios	Apresenta as regras de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 8, 9 e 10 em exercícios e exemplos. Trabalha com a dedução	Apresenta as regras de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10 em exercícios e exemplos. Trabalha com definições

As regras de divisibilidade na 5ª série são bem superficiais, aparecem apenas no livro didático A Conquista da Matemática. Já na 6ª série, as regras de divisibilidade são bem trabalhadas nos livros didáticos Matemática e Construindo Conhecimentos de Matemática, tanto nos exercícios quanto nos exemplos. Podemos perceber que, nos livros didáticos onde a divisibilidade é trabalhada na 5ª série não é trabalhado na 6ª série e onde não é trabalhado na 5ª série, o conteúdo é trabalhado na 6ª série. Assim a "divisibilidade" é conteúdo de 5ª ou 6ª série do Ensino Fundamental.

TABELA 4

Comparação do conteúdo: números primos.

Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 5ª série	Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 6ª série	Matemática Livro didático 5ª série	Matemática Livro didático 6ª série	A Conquista da Matemática Livro didático 5ª série
Não trabalha números primos.	Trabalha números primos com exemplos geométricos e outros. Fala da exceção do numero 1. Trabalha com exercícios	Não trabalha números primos.	Não trabalha números primos.	Trabalha números primos através de exemplos e exercícios. Utiliza definições

Como mostra a tabela 4, apenas em dois livros didáticos os números primos são objeto de estudo. No livro Construindo Conhecimentos em Matemática, os números primos são estudados no volume da 6ª série. Enquanto no livro A Conquista da Matemática os números primos são estudados na 5ª série.

TABELA 5

Comparação do conteúdo MDC

Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 5ª série	Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 6ª série	Matemática Livro didático 5ª série	Matemática Livro didático 6ª série	A Conquista da Matemática Livro didático 5ª série
Não trabalha MDC no livro estudado	Não trabalha MDC no livro estudado	Não trabalha MDC no livro estudado	Não trabalha MDC no livro estudado	Trabalha MDC através de exemplos e exercícios. Utiliza definições e trabalha com propriedade

Como mostra a tabela 5, há referências quanto ao M.D.C. apenas no Livro Didático A Conquista da Matemática, enquanto nos outros o M.D.C. não é estudado.

Tabela 6

Comparação do conteúdo fatoração

Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 5ª série	Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 6ª série	Matemática Livro didático 5ª série	Matemática Livro didático 6ª série	A Conquista da Matemática Livro didático 5ª série
Não trabalha Fatoração no livro estudado	Trabalha com fatoração através de exemplos e exercícios	Não trabalha com fatoração nos livros estudados	Não trabalha com fatoração nos livros estudados	Trabalha o conteúdo com exemplos e exercícios. Utiliza a definição

Como mostra a tabela 6, a Fatoração é objeto de estudo em apenas dois livros didáticos, onde o conteúdo é trabalhado de uma maneira acessível para a compreensão do aluno. O exercício e exemplos são bem superficiais.

Tabela 7

Comparação do conteúdo M.M.C.

Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 5ª série	Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 6ª série	Matemática Livro didático 5ª série	Matemática Livro didático 6ª série	A Conquista da Matemática Livro didático 5ª série
Apresenta-se o conteúdo com exemplo de seqüência de números. Utiliza definições.	Trabalha o conteúdo com exemplo de situação problema	Apresenta-se o conteúdo através de uma situação problema.	O assunto é revisado nos exercícios	Apresenta o conteúdo com exemplo de seqüências e com situação problema. Utiliza definições e propriedades.

O conteúdo e bem trabalhado em quase todos os livros didáticos.

Nos quatro livros o MMC é trabalhado em problemas de aplicação e exercícios e em 1 livro temos apenas revisão, considerando que o conteúdo já foi visto na série anterior.

Tipos de exercícios segundo a tarefa e respectiva quantidade.

Para facilitar a montagem da tabela, denotaremos os livros estudados conforme segue:

Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 5ª série: Livro 1

Construindo Conhecimentos em Matemática Livro didático 6ª série: Livro 2

Matemática Livro didático 5ª série: Livro 3

Matemática Livro didático 6ª série: Livro 4

A Conquista da Matemática Livro didático 5ª série: Livro 5

Tabela 8

tipo	Enunciado	Livro 1	Livro 2	Livro 3	Livro 4	Livro 5
1	Identificar por contagem a variação de quantidade de uma figura a outra.	1	-	-	-	-
2	Completar uma seqüência	1	-	-	-	-
3	Dado um número *x* determine os múltiplos	1	-	17	-	3
3A	Considerando uma certa seqüência, determine, *n* do qual a seqüência é a seqüência dos múltiplos de *n.*	1	-	-	-	-
3B	*Escrever uma seqüência segundo uma condição dada e identificar. Essa é a seqüência dos múltiplos de qual numero?*	*2*	-	-	-	-
4	*Determinar os n primeiros múltiplos de a*	*11*	-	*8*	-	*3*
5	*Qual o menor múltiplo de x maior que m?*	*2*	-	*2*	-	*2*
6	*Identificar x tal que x seja múltiplo de a e b*	*1*	-		-	-
7	*Dado x, sabendo que a é divisor de x, determinar b, também divisor de x*	*1*	-	-	-	-
8	*Dado a seqüência 0, 1, 2...., n, multiplique esta seqüência por y e escreva a seqüência obtida.*	*1*	-	-	-	-
9	*Dada uma seqüência, identificar se ela é uma seqüência de múltiplos de x. Justifique a resposta*	*1*	-	-	-	-
10	*Qual é o número compreendido entre a e b que*		-		-	-

	é múltiplo de x?	*1*		*2*		
11	*Determine o mínimo múltiplo comum de a e b*	*4*	*17*	*9*	*2*	*3*
12	*É possível escrever o maior múltiplo comum dos números a e a? Explique sua resposta*	*1*	-	-	-	-
13	*Problema de aplicação do MMC*	*5*	*1*	*5*	-	*5*
14	*Dados a e b quando um é múltiplo do outro que é o MMC (a, b)?*	*1*	-	-	-	-
15	*Determine o menor e o maior número de N algarismos que sejam múltiplos de a e b*	*1*	-	- *6*	-	-
16	*Determine os divisores de a*	*3*	-	*6*	-	*5*
17	*Escrever a seqüência dos números de 0 a n. Identificar os números divisíveis por x*	*1*	-	-	-	*3*
17A	*Observar os algarismos das unidades dos números divisíveis por x e deduzir a terminação dos números divisíveis por b.*	*1*	-	-	-	-
18	*Dos números naturais menores que a, que é o maior número divisível por x*	*1*	-	-	-	-
19	*Escreva a seqüência de múltiplos de x maiores que p e menor que q, identificar os divisores de n*	*1*	-	-	-	-
20	*Aplicação do conceito de divisores*	*3*	-	-	-	-
21	*Dada a seqüência, identificar x tal que x seja divisor de todos os termos da seqüência.*	*1*	-	-	-	-
22	*Dados algumas sentenças (V ou F) identificar as sentenças falsas, transformando-as em sentenças verdadeiras, mantendo um dos números*	*10*	-	-	*1*	-
23	*Existe um número natural que é divisor de todos os números naturais?*	*1*	-	-	-	--
23A	*Existe um número natural que é múltiplo de todos os números naturais? Em caso afirmativo, identifique-os*	*1*	-	-	-	-
24	*Dado um número x verificar se x é divisível por n*	-	*76*	-	-	*32*
25	*Determinar o resto da divisão de a por b*	-	*1*	-	-	-
26	*Situação dada: Dividindo-se um número a por b restou c* *Q1 – a é divisível por d? onde d=2* *Q2 – a é divisível por e?*	-	*1*	-	-	-
27	*Substituição de um algarismo do número dado x para obter um número divisível por y*	-	*10*	-	-	-
28	*Determinar os números primos entre a e b colocando 10 números em cada linha*	-	*1*	-	-	-
29	*Qual é o único numero natural primo que é par?*	-	*1*	-	-	-
30	*Existe algum numero múltiplo de X que seja primo?Qual?*	-	*2*	-	-	-

31	*Qual é o maior número de dois algarismos que é primo*	-	*1*	-	-	-
32	*Entre a e b existe somente um número primo. Qual é esse número*	-	*4*	-	-	-
33	*Identificar quais dos pares de números a e b são primos entre si*	-	*3*	-	-	-
34	*Decomponha o numero m em fatores primos*	-	*7*	-	-	*5*
35	*Dada a decomposição em fatores primos determine o número fatorado*	-	*1*	-	-	*3*
36	*Dado 10 números A e B decompostos em fatores primos determinar a decomposição A x B sem efetuar as potencias.*	--	*2*	-	-	-
37	*Se x e y são números primos distintos, o que se pode dizer sobre o MMC (x,y)*	--	*2*	-	-	-
38	*Dada a seqüência escreva a regra de formação*	--	-	*2*	-	-
39	*Dada uma seqüência, identificar se ela é uma seqüência de múltiplos de x*	-	-	*1*	-	-
40	*Complete a tabela com múltiplos e/ou divisores e responder as perguntas sobre ela*	-	-	*6*	-	-
41	*Determinar os divisores e/ou múltiplos comuns de um número através do jogo*	-	-	*1*	-	-
42	*Responder descritivamente as perguntas sobre múltiplos e ou divisores de um número dado*	-	-	*2*	-	-
43	*Responder se um número n é divisível por um número dado y ou se n é múltiplo de y*	-	-	*4*	*8*	-
44	*Efetuar cálculos de multiplicação e divisão e responder perguntas sobre estes*	-	-	*2*	*3*	-
45	*Determinar os divisores e/ou múltiplos de um número*	-	-	--	*7*	-
46	*Determinar números que sejam divisíveis por um outro dado, através de uma regra e/ou critério*	-	-	-	*6*	-
47	*Resolver problemas usando múltiplos e divisores*	-	-	-	*5*	-
48	*Escrever as regras de divisibilidades*	-	-	--	*1*	-
49	*Sendo um algarismo desconhecido*	-	-	-	-	*5*
50	*Identificar os números que tem mais do que um divisor ao mesmo tempo*	-	-	-	-	*9*
51	*Formar números de três algarismos para aplicar os critérios de divisibilidade*	-	-	-	-	*4*
52	*Verificar se o número x é divisor de y*	-	-	-	-	*4*
53	*Sabe-se que p é divisor de q e de m, mostre que p é também divisor de q+m e m-q*	-	-	-	-	*1*
54	*Ao decompor o número natural q em fatores primos obtem-se* $a^m \times b^n \times c^p$. *Determine m, n, p*	-	-	-	-	*3*
55	*Os números x e y possuem divisores comuns. Qual é o maior deles*	-	-	-	-	*3*
56	*Determine o MDC (a, b)*	-	-	-	-	*3*

Comentário:

57	*Problema de aplicação de MDC*	-	-	-	-	*1*
58	*Dado MDC de m e n escreva o fator que falta nas decomposições*	-	-	-	-	*2*
59	*Se dividirmos dois números naturais por p o MDC entre esses números passa a ser q. Determine os dois números sabendo que um é o dobro do outro*	-	-	-	-	*1*
60	*Verificar se a é múltiplo de b*	-	-	-	-	*1*
61	*Escrever os múltiplos de x formado por apenas dois algarismos*	-	-	-	-	*1*
62	*O numero n é primo. Ele é múltiplo de quais números naturais?*	-	--	-	-	*2*

Em conclusão, podemos perceber que entre os tipos de exercícios de 5ª e 6ª séries, analisados em todos os livros Didáticos existe um que é comum à todos. Nos livros de 5ª serie existem seis tipos comuns. Já entre os livros da 6ª série temos 1 exercício comum.

Os livros trabalham com contas e respostas descritivas. A resolução dos exercícios é feita usando os conteúdos vistos nos exemplos.

Podemos notar que há uma grande diversidade de exercícios em todos os livros didáticos. Também notamos que o livro A Conquista da Matemática apresenta todos os conteúdos estudados nas duas séries. Já os outros livros apresentam conteúdos em série diferentes, sendo que alguns conteúdos estudados não são encontrados nem no livro da 5ª série nem na 6ª série.

Constatou-se que, em geral, os livros Didáticos apresentam os seguintes conteúdos: Múltiplos, divisores, critérios de divisibilidade, fatoração, M.M.C.

Os livros Construindo Conhecimentos em matemática e Matemática, trazem estes conteúdos também na 6ª série, porém a grande maioria trabalha apenas na 5ª série. Os conteúdos são estudados através de situações problemas, exercícios resolvidos e exemplos.

CAPÍTULO III

A EXPERIMENTAÇÃO

III.1 – Apresentação

O objetivo desta experimentação é de verificar se a divisibilidade é um saber disponível para o aluno da 6ª série do Ensino Fundamental, isto é, se os alunos o aplicam na resolução de um problema onde a situação problema solicita a aplicação do Máximo divisor comum ou a aplicação do mínimo múltiplo comum.

Considerando que noções de divisibilidade (mdc e mmc) são estudados na 5ª série do Ensino Fundamental ou no início da 6ª série, escolhemos 2 problemas, de livros didáticos e os aplicamos em duas classes de 6ª série.

Problema 1- As formiguinhas e o quindim

Três formiguinhas caminham em volta de um prato que contém um quindim no centro. A formiguinha A dá uma volta completa na borda externa do prato em 45s. A formiguinha B faz uma volta na borda interna do prato em 25s e a formiguinha C faz a volta ao redor do quindim em 15s. Partindo de um instante em que todas estão enfileiradas, calcule quanto tempo depois elas estão enfileiradas novamente (Giovanni e Castrucci, caderno de atividades, p. 58).

Problema 2 – O corte das tábuas

Duas tábuas devem ser cortadas em pedaços de mesmo comprimento, sendo esse comprimento o maior possível. Se uma tábua tem 90 centímetros e a outra tem 126 centímetros, qual deve ser o comprimento de cada pedaço se toda madeira deve ser aproveitada? (Giovanni e Castrucci, p.50)

III.2 - Análise a Priori

Apresentamos aqui as resoluções dos dois problemas acima transcritos.

Análise do Problema 1: As formiguinhas e o quindim:

Resolução 1

Sabemos que para as três formigas *a, b* e *c* estarem enfileiradas novamente, elas deveriam voltar ao mesmo lugar de onde partiram; Faremos uma tabela representando o número de voltas de cada formiga.

Portanto:

Tempo Formiga	45s	90s	135s	180s	225s
A	1v	2v	3v	4v	5v
B	1,8v	3,6v	5,4v	7,2v	9v
C	3v	6v	9v	12v	15v

Olhando a tabela, verificamos que as três formigas estarão enfileiradas novamente após, a formiga *a* ter completado 5 voltas, a formiga *b* 9 voltas e a formiga *c* 15 voltas. Para fazer esse número de voltas as formiguinhas levam 225 segundos.

Como 1 minuto tem 60 segundos, o enfileiramento se repetirá depois de 3 minutos e 45 segundos.

Resolução 2

Sabendo que a formiga *a* dá uma volta completa na borda externa do prato em 45 segundos, a formiguinha *b* faz uma volta interna na borda interna do prato em 25 segundos e a formiguinha *c* faz uma volta ao redor do quindim em 15 segundos. Vamos inicialmente descrever os conjuntos dos múltiplos de 15, 25, 45.

M (15) = { 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, 225,...}

M (25) = { 0, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225,....}

M (45) = { 0, 45, 90, 135, 180, 225,...}
Observando esses conjuntos, podemos dizer que o menor número natural diferente do zero, que é múltiplo ao mesmo tempo de 15, 25 e 45 é 225.

Portanto as três formigas levam 225 segundos para estarem enfileiradas novamente.

Se 1 minuto tem 60 segundos, o enfileiramento se repetirá depois de 3 minutos e 45 segundos.

Resolução 3

Sabendo o tempo que cada formiguinha leva para completar uma volta, e também sabendo que elas partem no mesmo instante, e que 15 segundos é o tempo que a formiguinha *c* leva para completar uma volta, 25 segundos é o tempo que a formiguinha *b* leva para completar uma volta e 45 segundos é o tempo que a formiguinha *a* leva para completar uma volta o tempo necessário para que as três formigas se encontram, ao mesmo instante na posição inicial será o mmc de 15, 25, 45. Para determiná-lo faremos a decomposição dos números em fatores primos.

a)

15	3	25	5	45	3	$15 = 3 \times 5$
5	5	5	5	15	3	$25 = 5^2$
1		1		5	5	$45 = 3^2 \times 5$
				1		

Consideramos agora todos os fatores, cada um deles com o seu maior expoente: 3^2, 5^2

O produto desses fatores será o m.m.c., procurado:

m.m.c. (15, 25, 45) = $3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$.

Logo as três formigas levam 225 segundos para estarem enfileiradas novamente.

Se 1 minuto tem 60 segundos, o enfileiramento se repetirá depois de 3 minutos e 45 segundos.

b) Usando a decomposição simultânea em fatores primos.

$$
\begin{array}{r|l}
15,\ 25,\ 45 & 3 \\
5,\ 25,\ 15 & 3 \\
5,\ 25,\ \ 5 & 5 \\
1,\ \ 5,\ \ 1 & 5 \\
1,\ \ 1,\ \ 1 &
\end{array}
$$

O produto de todos os fatores primos que aparecem nessa decomposição será o m.m.c. dos números dados:

m.m.c. (15, 25, 45) = $3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$

Logo as três formigas levam 225 segundos para estarem enfileiradas novamente.

Temos assim, que diferentes técnicas poderão ser usadas na resolução do problema: tabela, seqüências de múltiplos, fatoração de cada um dos números ou a fatoração simultânea.

Análise do problema 2: O corte das tábuas

Resolução 1

Sabendo que uma tábua tem 90 centímetros de comprimento e a outra tem 126 centímetros de comprimento, e estas devem ser cortadas de modo que o comprimento seja o maior possível. Para achar esse comprimento vamos determinar o máximo divisor comum dos dois comprimentos.

O M DC pode ser determinado:

Sejam os conjuntos:

D (90) = {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, **18**, 30, 45, 90}

D (126) = {1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, **18**, 21, 42, 63, 126}

Os divisores de 90 e 126.

Observando esses conjuntos, podemos dizer que o maior comprimento possível que é divisor de 90 e 126 ao mesmo tempo é o número 18.

Portanto, o maior comprimento possível será de 18 centímetros.

Resolução 2

Sabemos que uma tábua tem 90 centímetros de comprimento e a outra 126 centímetros, queremos determinar o maior comprimento possível de modo que as duas tábuas sejam cortadas para que toda madeira seja aproveitada. Para saber qual será o maior comprimento possível, devemos procurar o número que é o maior divisor comum de 90 e 126 nesse caso devemos considerar o m.d..c. (90, 126):

a) Cálculo do mdc por decomposição em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$

Consideramos agora os fatores que são comuns aos dois números, cada um deles com seu menor expoente: 2×3^2

O produto desses fatores será o m.d.c. procurado.

m.d.c. (90, 126) = $2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$

Logo o comprimento de cada pedaço deverá ser de 18 centímetro.

b) Cálculo do m.d.c. pelo processo das divisões sucessivas até chegar numa divisão exata, para determinar o m.d.c. de 90 e 126.

	1	2	2	← quociente
126	90	36	18	← m.d.c
36	18	0		← resto

Portanto, o m.d.c. (90, 126) = 18

Logo o comprimento de cada pedaço deverá ser de 18 centímetros.

Na resolução deste problema, como apresentado, diferentes resoluções são possíveis e conseqüentemente diferentes técnicas como: conjunto dos divisores, fatoração e dispositivo prático.

III . 3 Análise a posteriori

A experimentação foi realizada em classe de 6ª série do Ensino Fundamental de uma Escola da Grande Florianópolis. Os problemas foram aplicados em duas classes: 6ª série I e 6ª série II. A escolha da série deveu-se ao fato de que o conteúdo de divisibilidade foi estuda nesta escola, na 5ª série.

A aplicação ocorreu no dia 08/09/2004. Na classe 6ª série I aplicamos das 09:05 horas às 10.20 horas, e na 6ª série II, das 10.40 horas às 12 horas. Assim cada aplicação teve a duração de 80 minutos.

Na classe 6ª série I, 19 alunos resolveram os problemas.

Na classe 6ª série II, 26 alunos resolveram os problemas.

Assim um total de 45 alunos resolveram os problemas.

Procedimento:

- cada aluno recebeu duas fichas de atividades contendo os dois exercícios (anexo 1 e 2)
- A resolução foi individual e sem consulta;
- Foi solicitado ao professor da turma não ajudar os alunos na interpretação e nem na resolução dos exercícios;
- No final foram recolhidas as fichas dos alunos.

Análise do 1º problema : As formiguinhas e o quindim

Três formiguinhas caminham em volta de um prato que contém um quindim no centro. A formiguinha A dá uma volta completa na borda externa do prato em 45s. A formiguinha B faz uma volta na borda interna do prato em 25s e a formiguinha C faz a volta ao redor do quindim em 15s. Partindo de um instante em que todas estão enfileiradas, calcule quanto tempo depois elas estão enfileiradas novamente.

Dos 45 alunos somente 7 não responderam este problema.

Das 38 respostas dadas, temos:

11 respostas feitas por uma tabela, nas quais:

- Seis alunos responderam corretamente (anexo 3), um aluno não concluiu a resolução, três alunos erraram na soma e não concluíram e um aluno fez a tabela certa mas teve erro na compreensão do problema, dando a resposta errada (anexo 4).
- Quatro alunos responderam o problema por tentativa e erro com insucesso.
- Seis alunos responderam por tentativa e erro com sucesso.

- Seis alunos resolveram o problema através da soma não organizada em tabela,com sucesso.
  - Dois alunos resolveram através da soma não organizada em tabela com insucesso.
  - Oito alunos apenas entenderam a representação das condições do problema, não resolvendo-o.
  - Um aluno teve a idéia do máximo divisor comum em seguida com diversas operações de multiplicação, subtração e adição, conseguiu chegar na resposta correta.

Notemos que:

20 das 38 respostas dadas foram corretas.

Analisando as respostas obtidas dos alunos com o estudo a priori temos:

Das respostas dadas 11 utilizam a resolução 1;

Nenhum dos alunos utilizou as outras 2 resoluções previstas.

Análise do 2º problema:

Duas tábuas devem ser cortadas em pedaços de mesmo comprimento, sendo esse comprimento o maior possível. Se uma tábua tem 90 centímetros e a outra tem 126 centímetros, qual deve ser o comprimento de cada pedaço se toda madeira deve ser aproveitada?

Dos 45 alunos, 19 não responderam este problema

Das 26 respostas obtidas, temos todas com insucesso.

Dentre as respostas obtidas temos:

9 alunos, onde não foi identificado o procedimento

2 alunos, por tentativas, tentaram encontrar um divisor.

2 alunos trocaram o mesmo comprimento pelo mesmo número de pedaços.

1 aluno somou o comprimento das tábuas $(T_1 + T_2) / 3$

1 aluno somou o comprimento das tábuas $(T_1 + T_2) / 2$

3 alunos dividiram o comprimento das tábuas T_1 por 2 + comprimento da T_2 por 2

1 aluno dividiu o comprimento das tábuas T_1 e T_2 por 3.

1 aluno dividiu o comprimento das tábuas T_1 e T_2 por 2.

Notemos que apenas 1 aluno teve a idéia de divisor comum (anexo 5), mas não chegou ao máximo divisor comum.

Conclusão da experimentação

Esta experimentação nos levou a identificar que os alunos da 6ª série (classe observada) tem dificuldades na interpretação de problemas.
O número de resposta corretas relativas ao problema 1 “As formiguinhas e o quindim”, 20 de 38, corretas, indicam uma boa competência dos alunos na classe observada quanto ao uso do mmc na resolução de problemas.
Contrariamente o insucesso observado na resolução do problema 2 “O corte das tábuas”, onde nenhum aluno obteve a resposta correta, mostra que o M.D.C. não é um saber disponível, o que é conforme os livros didáticos, Construindo Conhecimentos em Matemática e Matemática.

A questão que colocamos é: Qual a pertinência de ensinar M.D.C. no Ensino Fundamental? Por que não se ensina? Por que deveria ser ensinado?

Essas questões apontam para uma importante pesquisa que possa justificar ou colocar em cheque as escolhas dos conteúdos ensinados no Ensino Fundamental atual.

CONCLUSÃO

Neste trabalho buscamos identificar como é ensinada a divisibilidade no ensino da 5ª e 6ª série do Ensino Fundamental e se este saber está disponível para o aluno em fim da 6ª série, ou seja, se os alunos no final da 6ª série do Ensino fundamental, a utilizam como ferramenta na resolução de problemas

No Ensino Fundamental, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a divisibilidade é proposta para ser trabalhada em diferentes contextos e estabelecimento de relações entre números naturais.

Na Proposta Curricular de Santa Catarina, não identificamos um lugar explícito onde ele será estudado.

No Planejamento Anual das Escolas, a divisibilidade é objeto a ensinar na unidade “Múltiplos e divisores” e explicitamente lhe é atribuído a função de ferramenta nos objetivos.

Os 5 livros didáticos estudados propõe como abordagens :

O livro Construindo Conhecimentos em Matemática da 5ª série e o livro Matemática da 5ª série têm as suas abordagens semelhantes, sendo que não trabalham com números primos, mdc, fatoração, trabalhando mais com seqüências de múltiplos e divisores.

No livro Construindo Conhecimentos em Matemática da 6ª série e no livro Matemática da 6ª série, a abordagem é feita através de breves revisões através de exemplos dos livros Construindo Conhecimentos em Matemática da 5ª série e Matemática da 5ª série, para depois fazer um estudo mais aprofundado. O livro Matemática da 6ª série não trabalha com os números primos e fatoração, sendo que o livro Construindo Conhecimentos em Matemática da 6ª série trabalha os conteúdos. As regras de divisibilidade e o mínimo múltiplo comum são estudados nos dois livros.

O livro A Conquista da Matemática faz a abordagem de todo o conteúdo, seqüência de múltiplos e divisores, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, fatoração, números primos, critérios de divisibilidade, numa única série.

Vimos uma grande variedade de exercícios em todos os livros estudados. Essa variedade é de: 23 tipos no livro Construindo Conhecimentos em Matemática da 5ª série, 15 tipos no livro Construindo Conhecimentos em Matemática da 6ª série, 16 tipos no livro Matemática da 5ª série, 8 tipos no livro Matemática da 6ª série e 24 tipos no livro A Conquista da Matemática. Verificamos que exercícios do tipo determine o mínimo múltiplo comum de *a* e *b*, esta presente em todos os livros. Vimos também que tanto o livro Construindo Conhecimentos em Matemática da 6ª série quanto o livro A Conquista da Matemática trabalham fatoração usando árvores para fazer a decomposição de um número em fatores primos.

Remarcamos que 4 dos 5 livros estudados trabalham com problemas de aplicação do M.M.C., dando espaço a resolução de problemas.

Divisibilidade como saber disponível:

A decomposição de fatores primos é usado de maneira rotineira para determinar o mínimo múltiplo comum, porém, os alunos não identificam essa técnica, segundo a experimentação realizada.

A resolução de dois problemas de aplicação de m.m.c. e m.d.c. mostra a existência de uma confusão na utilização da decomposição em fatores primos. A análise a posteriori nos mostra como o M.M.C. está disponível no fim da 6ª série do Ensino Fundamental, ao contrário o M.D.C. não é ferramenta disponível.

Este estudo nos dá uma amostragem de como é proposto o trabalho com "divisibilidade" na 5ª e 6ª série do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BIANCHINI, Edwaldo. MIANI, Marcos. **Construindo Conhecimentos em Matemática.** Moderna. 1ª edição. São Paulo, 2000.

BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática Atual.** Atual. São Paulo, 1994.

BOYER, Car Benjamim (1906) – **História da Matemática**: tradução: Elza Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed Da Universidade de São Paulo, 1974.

EVES, Howard – **Introdução a História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Editora UNICAMP, São Paulo. 2ª edição, 1997.

GIOVANI, José Ruy, et al. **A Conquista da Matemática**. FTD. São Paulo, 1998.

GUELLI, Oscar. **Matemática: uma aventura do pensamento**. Ática. 8ª edição. São Paulo, 2001.

IEZZI, Gelson, et al. **Matemática e Realidade**. Atual. 4ª edição. São Paulo, 2000.

IMENES, Luiz Márcio. LELLIS, Marcelo. **Matemática**. Scipione. 1ª edição. São Paulo, 1997.

IMENES, Luiz Márcio. LELLIS, Marcelo. **Matemática**. Scipione. 1ª edição. São Paulo, 2004.

MORI, Iracema. ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática-Idéias e Desafios.** Saraiva. 6ª edição. São Paulo, 1998.

BRASIL. Secretaria de educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília. MEC/SEF, 1998.

Proposta Curricular de Santa Catarina. Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio (disciplinas curriculares) – 1998.

FARIA, Kellen Daiana (2004). **Modalidades de prática de ensino na formação de profesores.** Trabalho de Conclusão de Curso. UFSC/ CFM.

Planejamentos Escolares. Ensino Fundamental. 5ª e 6ª séries. 2004.

Anexos

Anexo 1: Ficha do aluno referente ao problema AS Formiguinhas e o Quindim .

Anexo 2: Ficha do aluno referente ao problema O Corte das Tábuas.

Anexo 3: Exemplo de ficha respondida por aluno.

Anexo 4: Exemplo de ficha respondida por um aluno

Anexo5: Exemplo de ficha respondida por um aluno

ANEXO 1

Ficha do aluno

Escola
....

Aluno
(a)..

Problema – 1

Três formiguinhas caminham em volta de um prato que contém um quindim no centro. A formiguinha A dá uma volta completa na borda externa do prato em 45s. A formiguinha B faz uma volta na borda interna do prato em 25s e a formiguinha C faz a volta ao redor do quindim em 15s. Partindo de um instante em que todas estão enfileiradas, calcule quanto tempo depois elas estão enfileiradas novamente

ANEXO 2

Ficha do aluno

Escola ....

Aluno (a)..

Problema – 2

Duas tábuas devem ser cortadas em pedaços de mesmo comprimento, sendo esse comprimento o maior possível. Se uma tábua tem 90 centímetros e a outra tem 126 centímetros, qual deve ser o comprimento de cada pedaço se toda madeira deve ser aproveitada?

ANEXO 3

Problema – 1

Três formiguinhas caminham em volta de um prato que contém um quindim no centro. A formiguinha A dá uma volta completa na borda externa do prato em 45s. A formiguinha B faz uma volta na borda interna do prato em 25s e a formiguinha C faz a volta ao redor do quindim em 15s. Partindo de um instante em que todas estão enfileiradas, calcule quanto tempo depois elas estão enfileiradas novamente.

Formiguinha A = 45-90-135-180-225

" B = 25-50-75-100-125-150-175-200-225

" C = 15-30-45-60-75-90-105-120-135-150-165-180-195-210-225

R: 225 segundos

ANEXO 4

Problema – 1

Três formiguinhas caminham em volta de um prato que contém um quindim no centro. A formiguinha A dá uma volta completa na borda externa do prato em 45s. A formiguinha B faz uma volta na borda interna do prato em 25s e a formiguinha C faz a volta ao redor do quindim em 15s. Partindo de um instante em que todas estão enfileiradas, calcule quanto tempo depois elas estão enfileiradas novamente.

G fA: 6 voltas
G fB: 8 voltas
G fC: 15 voltas

6 voltas
fA

fB: 8 voltas
fC: 15 voltas

225
225
225
725

500
+225
125

R. Elas estarão enfileiradas em 725 segundos

		2V	3V	4V	5V	6V	7V	8V	9V	10V	
FA:	45	90	135	180	225						
FB:	25	50	100	125	150	175	200	225			
FC:	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165

	12V	13V	14V	15V
FC:	180	195	210	225.

ANEXO 5

Problema - 2

Duas tábuas devem ser cortadas em pedaços de mesmo comprimento, sendo esse comprimento o maior possível. Se uma tábua tem 90 centímetros e a outra tem 126 centímetros, qual deve ser o comprimento de cada pedaço se toda madeira deve ser aproveitada?

$\boxed{90} = 90 \div 10 = 9$

$\boxed{126} = 126 \div 14 = 9$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 10 \\ \hline -90 & 9 \\ \hline 00 & \end{array}$$