UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CENÁRIOS PARA O ESTUDO DE MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E FUNÇÕES UTILIZANDO SOFTWARES GRATUITOS

FELIPE LUY VALÉRIO

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 2004.

FELIPE LUY VALÉRIO

CENÁRIOS PARA O ESTUDO DE MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E FUNÇÕES UTILIZANDO SOFTWARES GRATUITOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientadora: Msc. Rosimary Pereira

FLORIANÓPOLIS - SC
Dezembro de 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 61/SCG/04.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora

Profª Msc. Rosimary Pereira
Professora Orientadora

Profº Dr. Daniel Norberto Kozakevich

Profª Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Agradecimentos

Agradeço a DEUS, por me fortalecer nos momentos de tristeza e desânimo, e por ter possibilitado a conquista de mais esta vitória.

Aos meus pais, principalmente a minha mãe, que sempre me ajudou, fazendo o possível e o impossível, para que eu superasse mais este obstáculo.

Aos amigos que fiz durante a minha graduação, em especial Priscila Cardoso Calegari, que com suas palavras de incentivo me fizeram permanecer no curso.

A Silvia D'Ávila Fernandez, que sempre foi atenciosa, alegre e simpática, deixando muitas vezes de fazer suas tarefas para me atender, ou apenas ouvir, minhas lamentações e alegrias.

As professoras do grupo GEIAAM, especialmente a professora Rosimary Pereira, que teve muita paciência ao me orientar neste trabalho.

Sumário

1 Introdução

Durante a graduação, em algumas disciplinas de matemática e de educação, éramos incentivados a utilizar ferramentas que auxiliassem no ensino de matemática. O computador é uma grande ferramenta para o ensino de matemática, pois realiza cáculos complexos rapidamente e possui recursos gráficos poderosos. Mas porque apesar de o uso de computador ser tema de campanhas públicas a todo momento e de laboratórios serem instalados em escolas públicas do ensino fundamental e médio ainda há resistência do uso de programas computacionais na prática docente dos professores?

Participando no projeto Bahia, programa especial de formação pedagógica de docentes na área da matemática, como bolsista, em conjunto com os professores da disciplina matemática e informática, percebemos que além dos professores-alunos ainda não dominarem esta tecnologia, tinham dificuldades em aplicar os softwares matemáticos utilizados na disciplina, nas escolas em que trabalhavam, pois nem as escolas e nem eles podiam comprar os softwares para utilizá-los nos laboratórios das suas escolas em suas aulas.

Pensando nestas dificuldades começamos a procurar softwares livres que fossem acessiveis tantos às escolas como aos professores e alunos, mas ao longo da pesquisa percebemos que softwares livres ainda não eram o suficiente pois quando falávamos em softwares livres pensávamos em softwares gratuitos. De acordo com a definição do Prof. Roberto Hexsel do Departamento de Informática da Universidade Federal do Paraná, parte disponível na página http://www.softwarelivre.gov.br/Swlivre/ (site do governo federal) e por completo no site http://www.inf.ufpr.br/ roberto/public.html. Software livre:

> ”é o software disponível com a permissão para qualquer um usá-lo, copiá-lo, e distribuí-lo, seja na sua forma original ou com modificações, seja gratuitamente ou com custo. Em especial, a possibilidade de modificações implica que o código fonte esteja disponível. Se o programa é livre, potencialmente ele pode ser incluído em um sistema operacional também livre. É importante não confundir software livre com software grátis porque a liberdade esta associada ao software livre de copiar, modificar e redistruibuir, independente da gratuidade. Existem programas que podem ser obtidos gratuitamente mas não podem ser modificados,

nem redistribuidos”

E além do software gratuito precisaríamos de algo que incentivassem os professores ao uso dos programas que disponibilizaríamos e, ao mesmo tempo aproximassem os professores da ferramenta informática. Por este motivo este trabalho tem como objetivo criar e apresentar cenários, utilizando programas computacionais, em conteúdos específicos das disciplinas de matemática para o ensino médio e porque não, superior, proporcionando ao professor uma ferramenta de grande utilidade para que ele se utilize de programas computacionais para o ensino de matemática.

Para a elaboração do cenário, pesquisamos em livros de matemática, indicados nas escolas de ensino médio, na apostila Geometria com o Cabri Cenários para o Ensino Médio, e em livros de matemática e informática buscando uma base teórica para o desenvolvimento deste trabalho. Outra parte do estudo foi feita na internet, pois foi lá que basicamente encontramos os softwares que seriam utilizados. Pesquisa esta, feita em sites especializados em matemática e educação.

Os softwares escolhidos foram o WinMat, que trabalha com matrizes e sistemas lineares, e o WinPlot que trabalha com funções. Ambos são softwares pequenos, encontrados no site http://math.exeter.edu/rparris/ juntamente com outros softwares, com menus amigaveis fáceis de se trabalhar, disponíveis em diversas versões para diversos idiomas e disponível para qualquer um que tiver interesse em utilizá-los. Exitem outros sites falando sobre estes programas.

Com o software gratuito escolhido passamos para a próxima etapa - criação de cenários, para os assuntos de matrizes, sistemas lineares e funções, moldados de acordo com as proposições de Clarou, Laborde e Caponi (2001). Os exercícios apresentados nos cenários foram baseados nos livros didáticos de matemática pesquisados e com adaptações para os softwares escolhidos.

O trabalho está dividido em três temas principais. No primeiro apresentamos a definição e a estrutura de um cenário. No segundo mostramos o estudo que fizemos para a elaboração do cenário para matrizes, determinantes e sistemas lineares. Neste estudo apresentamos os tópicos dos conteúdos que são apresentados no ensino médio, os softwares pesquisados para este assunto a escolha dos exercícios para o cenário e finalmente os cenários referentes a este assunto. No terceiro tema fizemos o mesmo trabalho descrito anteriormente para o assunto de funções. Ainda deixamos como apêndice comandos que os softwares realizam mas que não se aplicam em conteúdos para o ensino médio.

2 Cenários

O uso de tecnologias no ensino de matemática traz significativas contribuições para o processo de ensino aprendizagem, na medida em que:

- Relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos eles podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
- Destaca para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação;
- Faz com que desenvolva, nos alunos, um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração com parte de sua aprendizagem;
- Permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas frente ao seu estudo.

(Parâmetros Curriculares Nacionais, 1997, apud Lentz, 2002).

A chegada da tecnologia, sugere ao professor, um novo estilo de comportamento em sala de aula. Tem liberdade para integrar essa tecnologia em suas aulas, mas também responsabilidades e novas competências.

A preparação de aulas com o apoio computacional exigirá do professor mais reflexão e mais tempo na preparação do que na preparação das aulas tradicionais. O professor pode usar uma aula com o apoio computacional para motivar e/ou introduzir um novo conteúdo, revisar ou fixar um conteúdo já estudado em aulas anteriores.

Algumas questões devem ser resolvidas anterior mesmo à aula: Quais os documentos serão escritos para os alunos? Que equilíbrio buscar entre as atividades com o computador e as atividades no ambiente lápis - papel? Quais exercícios de aplicação propor? Quais sínteses prever?

Para auxiliar o trabalho do professor no desenvolvimento de aulas com apoio computacional são apresentados documentos com toda a descrição do desenvolvimento para um dado ensinamento, chamado de cenário.

2.1 Definição

> Um cenário é a descrição do desenvolvimento previsto de um para um dado ensinamento, contendo não somente a apresentação da seqüência e de seus objetivos e os documentos utilizados pelos alunos, mas também documentos complementares devendo facilitar a aplicação prática na sala de aula por um professor que não participou de sua elaboração.
> Esta última componente nos parece central para que os professores possam verdadeiramente se apropriar do cenário, em particular, modificá-los para se adaptarem às suas necessidades. Nesses documentos complementares figuram ajudas de três tipos:
>
> - sobre os objetivos do cenário em termos de conteúdo,
> - sobre o software a ser utilizado,
> - sobre os conhecimentos dos estudantes e suas possíveis condutas em relação ao manejo do software e ao conteúdo, sobre a gestão da classe pelo professor e os possíveis desdobramentos.
>
> (Clarou, 2002)(tradução livre.)

2.2 Estrutura de um cenário:

- **Tema** - Indica o(s) asssunto(s) a serem trabalhados no aula.
- **Pré-requisitos** - Indica quais os conteúdos que os alunos devem conhecer para resolver as atividades.
- **Público Alvo** - Indica o nível dos alunos ou seja, em qual série ou curso o professor poderá aplicar o cenário.
- **Justificativa** - Neste item é dada uma justificativa do tema e da escolha do conteúdo e esta justificativa é dupla. Primeiro em relação à aprendizagem e segundo sobre a utilização da ferramenta informática, apresentando os principais comandos do software escolhido. Em particular os cenários pretendem considerar aqueles conteúdos específicos que seriam mais facilmente e/ou mais profundamente trabalhados com a ferramenta informática.

- **Tempo estimado** - Permite ao professor que vai utilizar o cenário e que não o criou, o controle de um bom desenrolar das atividades.

- **Objetivos** - Neste item o professor deve esclarecer quais objetivos ele quer que os alunos alcancem, ou seja, o professor deve a cada objetivo completar a frase: "após esta aula os alunos serão capaz de ..."

- **Atividades** - Série de exercícios sobre o(s) tema(s) propostos no cenário. Essas atividades são dirigidas aos alunos.

Nos capítulos 3 e 4 apresentaremos exemplos de cenários para os assuntos matrizes, sistemas lineares e funções, ultilizando softwares gratuitos adequados para o desenvolvimento dos mesmos.

3 Estudo de matrizes e sistemas de equações lineares

Neste capítulo apresentaremos a relação dos livros pesquisados, dos tópicos dos conteúdos matrizes e sistemas de equações lineares, dos softwares gratuitos pesquisados adequados para trabalhar com esses tópicos e os cenários utilizando o software escolhido.

Os resultados apresentados nos itens 3.1, 3.2 e 3.3 serviram de base para a elaboração dos cenários apresentados no item 3.4

3.1 Relação dos tópicos sobre matrizes e sistemas de equações lineares nos livros didáticos pesquisados

O conteúdo de matrizes e sistemas lineares é ensinado, no ensino médio, na segunda série e seguindo praticamente a mesma ordem apresentada nos livros didáticos, começando por matrizes, passando para determinantes e terminando com sistemas lineares.

Foram escolhidos seis livros para a pesquisa do assunto matrizes e sistemas de equações lineares. Os livros relacionaidos abaixo são indicados nas escolas de ensino médio.

3.1.1 Livros didáticos pesquisados

Os livros didáticos de matemática pesquisados neste trabalho foram:
Matemática: 2º grau, volume único. Autores: José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Junior;
Matemática para o ensino médio: volume único. Autor: Manoel Jairo Bezerra;
Matemática volume: único. Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo;
Matemática aula por aula: volume único : ensino médio. Autores: Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier Barreto;

Matemática 2: 2º Grau, segundo livro de uma série de três volumes. Autores: José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno;
Matemática contexto e aplicações, segundo livro de uma série de três volumes. Autor: Luiz Roberto Dante.

3.1.2 Relação dos Tópicos

Nos livros didáticos pesquisados, os tópicos sobre matrizes e sistemas de equações lineares são apresentados praticamente com a mesma abordagem distribuídos da seguinte forma:

1. Matrizes
   - Definição
   - Representação algébrica
   - Matriz quadrada
   - Diagonal principal e diagonal secundária
   - Matriz unidade ou matriz identidade
   - Matriz transposta
   - Igualdade de matrizes
   - Operação com matrizes
2. Determinantes

   Introdução (dando uma idéia do que seria um determinante)
   - Determinante de uma matriz de 1ª ordem
   - Determinante de uma matriz de 2ª ordem
   - Determinante de uma matriz de 3ª ordem
   - Cofator
   - Teorema de Laplace
   - Determinante de uma matriz de ordem n>3
3. Sistemas Lineares
   - Equação Linear

- Sistema Linear
- Expressão matricial de um sistema de equações lineares
- Regra de Cramer
- Classificação de um sistema linear
- Discussão de um sistema linear

Observamos pouca diferença entre um livro e outro, por exemplo, no livro do Dante é apresentado o cálculo do determinante de uma matriz utilizando a regra de Chió além dos métodos, regra de Sarrus e Teorema de Laplace, que foram apresentadas nos outros livros. Mas em todos, foram mostrados pelo menos estes dois últimos métodos citados, de calcular o determinante de uma matriz. O conteúdo de matrizes apresentado em qualquer um destes livros dá condições para qualquer aluno poder trabalhar com algum software que trata deste assunto.

3.2 Softwares Pesquisados

Antes de começarmos a elaborar um cenário temos que decidir qual software utilizar. Até a escolha do winMat, pesquisamos e trabalhamos com vários softwares. Sendo que apenas este software atendeu aos nossos pré-requisitos, que era o de encontrar softwares gratuitos, que trabalhasse, no mesmo ambiente, todo o conteúdo de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Procuraremos agora listar os programas encontrados, de qual site foi baixado e explicar porque eles não foram escolhidos.

- **Projeto Gauss** - Não foi escolhido porque apenas calcula sistemas lineares pelo método de escalonamento;
- **Det.exe** - Além de trabalhar no ambiente DOS ele só calcula determinantes;
- **DETERMINANTE.exe** - Só trabalha com determinantes e de no máximo ordem 4x4;
- **MatTrab.exe** - Trabalha apenas com determinantes;
- **Winmat.exe** - Talvez este seja uma versão mais antiga do winMat. Calcula determinante, sistemas lineares e não tínhamos problema com a ordem de suas matrizes. Trabalhamos com esta versão até perceber que para o cálculo de determinantes de

ordem maior que 3x3 já não era confiável pois na maioria dos casos estava dando um resultado que era o oposto do correto;

- **Winmatfr.exe** - é uma versão em francês do programa anteriormente citado. E que não foi escolhida porque está em francês.

  Os softwares relacionados acima estão disponíveis no site www.somatematica.com.br

- **Mupad Light** - encontrado no site www.ime.usp.br/~leo/free.html o programa **Mupad Light versão 1.4** se assemelha ao **maple**, calcula derivadas, integrais, matrizes e etc.... Não foi escolhido, porque seu ambiente é um pouco complicado para se trabalhar no ensino médio pois todos os seus comandos têm que ser digitados. Além disso toda a sua documentação está em inglês ficando difícil para o usuário, caso precise de consultar o help do programa.

- **Scilab** - Encontrado no site http://scilabsoft.inria.fr/ é um software científico de cálculo numérico. Foi criado em 1990 por investigadores de INRIA e de ENPC e agora está sendo desenvolvido por Scilab Consortium desde sua criação em maio 2003. Distribuído livremente com fonte aberta através da Internet desde 1994, Scilab é usado atualmente em ambientes educacionais e industriais em todo do mundo. Nele encontramos centenas de funções matemáticas incluindo , polinomios, funções racionais, sistemas lineares. O Scilab foi projetado ser um sistema aberto onde o usuário pudesse definir tipos e operações novas de dados. Não elaboramos nenhum cenário a respeito deste software pois quando ficamos sabendo dele estavamos com todo o trabalho já concluido.

- **WinMat**(software utilizado neste trabalho) - É encontrado em uma versão em inglês. Produzido por Rick Parris, do departamento de matemática da Academia Phillips Exeter, este software é indicado para o ensino médio e superior. E está disponível no site http://math.exeter.edu/rparris/winmat.html. Foi desenvolvido para ser utilizado como ferramenta no cálculo de matrizes, determinante, sistemas lineares e outros conteúdos de álgebra linear.

  Escolhemos o software winmat porque é um software gratuito, de fácil acesso, pequeno, apenas 566 Kb e principalmente porque não tem problemas com o tamanho do sistema, ou o determinante ou ainda a matriz que queremos trabalhar. Pois como vimos nos itens acima a maioria dos programas estavam limitados ao cálculo de sistemas, determinantes e logicamente matrizes que eram no máximo de ordem 3×3

Começamos com uma versão anterior a que foi lançada no dia três de abril de 2004. Visto que a nova versão tinha ficado melhor que a antiga, refizemos todo o capítulo sobre o software winmat. No dia dez de julho de 2004 surge outra versão com a mesma interface da anterior corrigindo alguns "bugs"apresentados, não havendo necessidade de modificações no trabalho.

Para utilizar o programa o usuário deve ter um conhecimento prévio dos conteúdos de matrizes, determinantes, sistemas lineares e se familiarizar com os comandos do software, pois na maioria das vezes, é o usuário quem digita quais as operações que ele deseja que o programa execute. Por exemplo, para calcular a matriz transposta de A, digita-se A'.

Em cada cenário apresentaremos os comandos deste software necessários para o desenvolvimento das atividades propostas. Na janela com as respostas de traço e determinante de uma matriz (figura 11) aparece também informações sobre o posto (rank) de uma matriz, os coeficientes do polinômio característico, e as raízes do polinômio característico. Estes tópicos não serão comentados, pois no ensino médio estes cálculos não são ensinados, apresentaremos no apendice A, exemplos envolvendo esses assuntos.

3.3 Escolha dos exercícios

Ao selecionarmos as atividades para os cenários de matrizes e sistemas lineares, analisamos os exercícios apresentados nos livros pesquisados e mencionados no capítulo 3. Na seleção das atividades nos preocupamos em escolher exercícios que podiam ser resolvidos com o auxílio do software WinMat e exercícios onde o aluno ao fazê-lo no programa irá verificar que ele não é possível de ser resolvido ou calculado. Pois o software avisa através de mensagens de erro ou de advertência. Fazendo então que o aluno perceba que propriedade não está sendo respeitada naquele exercício.

Na análise dos exercícios propostos no livros didáticos escolhidos verificamos que na apresentação do conteúdo eles, exceto o Dante, traziam como exemplos exercícios resolvidos. No livro do Dante ele separa os exercícios em resolvidos e propostos e o demais em exemplos, que nada mais são do que exercícios resolvidos, e exercícios, para aqueles que são propostos aos alunos. Todos eles trazem exercícios parecidos, o que nos levou logicamente a colocar alguns destes exercícios nos cenários.

Na pesquisa, notamos que alguns exercícios dos livros didáticos pesquisados não poderiam ser resolvidos. Pois como podemos observar nos seguintes exemplos:

Exemplo 1 *Determine x para que o determinante da matriz A seja 3:*

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não podemos resolver este tipo de exercício porque o programa aceita apenas números nas componentes da matriz, não podendo colocar incógnitas dentro das matrizes ou de sistemas lineares.

Exemplo 2 *Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ assim definida:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \ \ i = j \\ 0, & se \ \ i \neq j \end{cases}$$

o programa não permite a construção de matrizes atravéz de uma sentença.

No caso de sistemas lineares os exercícios que envolvam interpretações geométricas também não podem ser resolvidos pois o software não trabalha com gráficos. Como no caso do exemplo abaixo:

Exemplo 3 *Resolva o sistema linear 2×2; classifique quanto ao número de soluções e faça sua representação gráfica.*

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Neste caso não poderíamos fazer o último item pedido no exercício.

Outro exercício, até um pouco parecido com o do primeiro exemplo pois evolve o mesmo problema é o de determinar o valor de uma incógnta para que o sistema seja possível ou possível e indeterminado ou impossível. Como por exemplo:

Exemplo 4 *Para que valores de a e b o sistema* $\begin{cases} 2x + 1y = b \\ ax + 2y = 10 \end{cases}$ *é possível e indeterminado*

Não podemos resolver este exercício pelo fato de o programa não aceitar letras nas componentes de suas matrizes.

3.4 Cenários sobre matrizes e determinantes

Introdução

Apesar de que os assuntos de matrizes e determinantes possam ser ensinados sem o uso de computador, acreditamos que os exercícios computacionais com matrizes possam melhorar o aprendizado do aluno.

Devemos indicar exercícios que envolvam muito mais que simples cálculos mecânicos, fazendo com que os alunos efetuem cálculos com matrizes e respondam perguntas sobre os resultados obtidos. Estas perguntas servirão para esclarecer o significado matemático dos cálculos. Devemos, também, enfatizar que o uso de um software pode reduzir significativamente o tempo destinado à obtenção de inversas de matrizes, resolução de sistemas, e etc, principalmente quando trabalhamos com matrizes de grande porte, ou com matriz cujos elementos são apresentados na forma decimal.

É recomendável que a primeira aula em laboratório tenha como um dos objetivos a demonstração dos comandos básicos para se trabalhar com matrizes.

Por este motivo dividimos o cenário em duas seções:

- Seção 1 - Operações básicas, como adição, subtração, multiplicação de uma matriz por um escalar, multiplicação de matrizes, transposta de uma matriz, traço e determinante de uma matriz.
- Seção 2 - Matriz inversa e suas propriedades.

Seção 1 - Operações com Matrizes

Tema: Matrizes e determinantes

Pré-requisitos: Matrizes (Operações com matrizes, traço e determinante)

Público alvo: Alunos da segunda série do ensino médio ou alunos da primeira fase dos cursos de ciências exatas.

Objetivos:

- Aplicar os comandos do **WinMat** no estudo de matrizes

- Identificar quando é possível adicionar matrizes

- Reconhecer que a adição de matrizes é comutativa e associativa.

- Identificar quem é o elemento simétrico e o neutro da adição de matrizes.

- Reconhecer algumas propriedades de transposta de matrizes.

- Reconhecer quando é possível a multiplicação

- Indentificar que a multiplicação é associativa e distributiva.

- Identificar que a matriz identidade é elemento neutro da multiplicação.

Tempo estimado: 45 minutos

Software: WinMat

O software WinMat, é encontrado em uma versão em inglês e está disponível no site http://math.exeter.edu/rparris/winmat.html. Produzido por Rick Parris, do departamento de matemática da Academia Phillips Exeter, este software é indicado para o ensino médio e superior. Foi desenvolvido para ser utilizado como ferramenta no cálculo de matrizes, determinante, sistemas lineares e outros conteúdos de álgebra linear.

Conhecendo os comandos

Ao abrir o programa a primeira tela que aparecerá será esta indicada pela figura 1:

Figura 1

Menu Matrix

Figura 2

Dentro deste menu, mostrado na figura 2, temos os comandos:

- **New** - que serve para escolher o tipo de matriz que o programa gere;
- **Open** - que serve para abrir uma matriz já feita e salva anteriormente neste programa;
- **Mode** - este comando serve para o usuário indicar quais vão ser os tipos de números que serão utilizados em suas matrizes, isto é, se estes serão inteiros, reais, ou complexos.
- **White backgrounds** - serve para deixarmos o fundo das matrizes branco, se estiver ativado ou azul se estiver desativado.
- **Menu Calc** - Serve para fazermos operações com matrizes, como soma, multiplicação, calcular a matriz transposta, inversa e também neste menu, temos a opção de calcular sistemas lineares, determinantes e etc...
- **Help** - Este comando é usado para o auxílio no uso de determinados comandos que temos dúvidas, seja de como funciona ou para saber se o programa faz determinada operação que não saibamos que ele faça e como faz.

Construindo matrizes

Para que apareça alguma matriz na tela, o usuário deve clicar no menu matrix new. Clicando neste menu aparecerá a tela mostrada na Figura 3.

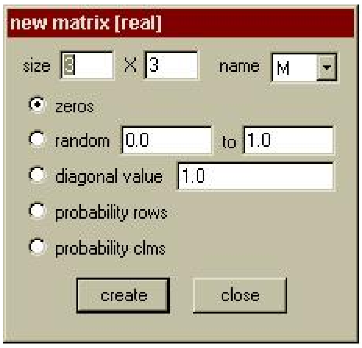

Figura 3

As opções de matrizes existentes no software, na tela **new matrix** (figura 3), são: **zeros, random, diagonal value, probability rows** e **probability colms**, mas o que apresentaremos neste cenário são as opções **zeros** e **diagonal value** e a partir destas, construiremos outros tipos de matrizes.

Sendo que se for escolhida a opção zeros, o software criará uma matriz com todos os seus valores nulos. Caso a escolha for **diagonal value** o programa montará uma matriz diagonal.

Para criar uma matriz de zeros, clicamos primeiramente na opção **zeros**, depois precisamos digitar na caixa de dialogo **size** as dimensões da matriz, na opção **name** escolhemos qual o nome que será dado a nossa matriz. Podemos observar que na figura 3 que a matriz que seria gerada teria o nome de M. E por último clicamos no botão **create**. A matriz aparecerá da forma como é mostrada na figura 4

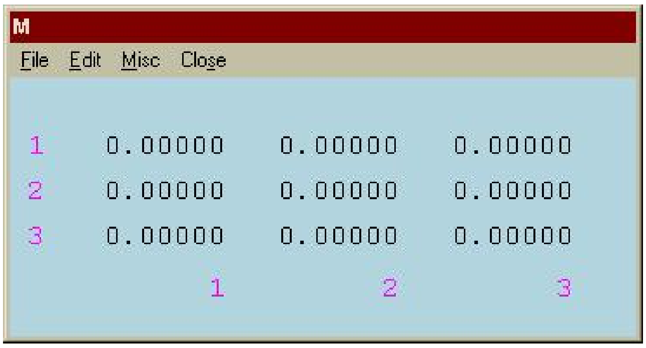

Figura 4

Para criar uma matriz diagonal, clicamos primeiramente na opção **diagonal value**, depois precisamos digitar na caixa de dialogo **size** as dimensões da matriz. Observamos que na opção **size** agora aparece apenas uma única caixa de dialogo, como já deveríamos esperar, pois uma matriz diagonal é sempre uma matriz quadrada, depois na opção **name** escolhemos qual o nome que será dado a nossa matriz. Podemos observar que o programa deixa como sugestão na caixa **name** o nome M, mas que poderíamos mudar para qualquer outra letra do alfabeto que ele nos disponibiliza. Digitamos na caixa em frente à opção **diagonal value** o valor que será colocado em sua diagonal e clicamos no botão **create** e aparecerá uma matriz diagonal numa janela igual a da figura 4.

Sabemos que em uma matriz diagonal os valores da diagonal principal não precisam ser iguais e podemos notar que no software quando montamos uma matriz diagonal através da opção **diagonal value** o programa permite que coloquemos apenas um valor para toda a diagonal. Caso quiséssemos construir uma matriz diagonal com as componentes da diagonal todos diferentes, temos duas opções, a primeira seria montar uma matriz de zeros e depois digitar as componentes da diagonal ou gerar uma matriz diagonal e mudar os elementos da diagonal.

Na maioria dos casos a matriz não virá do jeito que queremos, então para criarmos uma matriz qualquer precisamos mudar alguns ou todos os valores nela existentes e para isso o processo de mudança é muito simples, basta clicar no elemento que queremos mudar, e apertar a tecla **enter** e continuar o processo até que esteja toda a matriz alterada da forma que queremos. Caso não quiséssemos mudar um item que foi clicado basta apertarmos a tecla **esc** que o software entende que não queremos mais alterar este valor. Neste programa não é aceito nas componentes da matriz, valores diferentes dos pré-determinados no item **mode** do menu **Matrix** ou deixar em vazio algum elemento da matriz. Caso isto aconteça o programa procederá de três formas, dependendo da ação do usuário. Na primeira o software daria uma mensagem de advertência conforme a figura 5:

Figura 5

Na segunda ele apresentaria uma advertência conforme a figura 6.

Figura 6

E se caso digitássemos letras ao invés de números ele ignoraria a letra que colocamos e deixaria no lugar o valor zero.

Operando com matrizes no WinMat

No programa WinMat utilizamos os seguintes operadores:

$+$ - soma

$-$ - subtração

$*$ - multiplicação

$/$ - divisão

$\wedge$ - potenciação, por exemplo, $A\hat{}2$ significa que a matriz a está elevada ao quadrado, $A\hat{} - 1$ determina que queremos calcular a matriz inversa e etc...

$=$ operador que indica igualdade

$'$ este serve para calcular a transposta de uma matriz, ou seja, A' indica que queremos a transposta de A.

Estes são alguns dos operadores mais importantes e que serão usados no decorrer deste capítulo.

Para operar com matrizes devemos primeiramente criar as matrizes necessárias para a operação que desejamos fazer. Em seguida clicamos no menu **Calc**, depois na opção calculate e o software nos mostrará a seguinte janela mostrada na figura 7:

Figura 7

Observamos acima que para esta operação precisaríamos ter as matrizes A e B previamente digitadas e neste caso o programa gerará uma terceira matriz que ele chama de C, mas que poderíamos mudar para outro nome, escolhendo uma outra opção na caixa **name result**, caso tivéssemos interesse em um outro nome.

Caso quiséssemos sobrescrever uma matriz existente, ou se por ventura não percebêssemos que a matriz já existisse na hora em que fôssemos gerar ou fazer alguma determinada operação o programa nos daria a seguinte mensagem através de um aviso indicado na figura 8:

Figura 8

Nela é perguntado se queremos sobrescrever o arquivo existente. Pois no winmat ele entende cada matriz como um arquivo.

Alguns possíveis erros na hora de operarmos com matrizes.

Sabemos que na hora de operarmos com matrizes temos que tomar alguns cuidados, quanto à ordem da matriz, se quisermos somar duas matrizes ou multiplicar, quanto ao fato de ela ser singular, caso quisermos calcular sua inversa e etc... Mas se por acaso não nos dermos conta destes detalhes o winmat nos avisa com mensagens de erro ou mesmo de advertência. Como nos mostra a figura 9.

Figura 9

Podemos observar nesta figura que o programa está dizendo que as duas matrizes são incompatíveis para a operação que foi pedida para fazer. Esta operação poderia ter sido tanto a soma entre elas, quanto à multiplicação, que a mensagem seria mesma.

Outro erro que poderia ser gerado é para o caso de quando quisermos calcular a inversa de uma matriz. Sabemos que uma matriz A admite inversa se A é uma matriz quadrada e não singular. Mas se caso não nos déssemos conta disto o programa nos avisaria conforme descrito na figura 10.

Figura 10

Para o caso de tentarmos calcular a inversa de uma matriz de ordem nxm com n diferente de m. A mensagem será a mesma da figura 9.

Calculando o traço e o determinante de uma matriz

Os cálculos do determinante e do traço de uma matriz são feitos todos através de um mesmo menu. Para que o programa faça estas operações basta ir no menu calc, depois em one matrix e por último clica-se na matriz que desejamos que sejam feitos os cálculos do determinante e do traço. Fazendo isto o software abrirá uma outra janela conforme mostrado na figura 11.

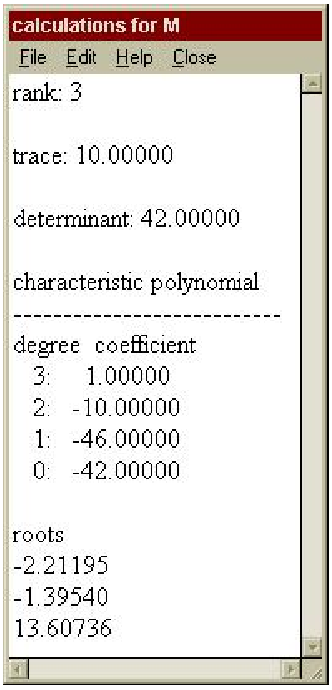

Figura 11

Notamos através da figura 11 que o traço e o determinante de uma determinada matriz M são respectivamente, dez e quarenta e dois.

Atividades:

1. Digite as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 & 10 \\ -2 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & -5 & -1 & 3 \\ -9 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

   $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -8,57 & 7,85 \\ 3 & 2,5 \\ 8,333 & 7,8 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5,87 & -695 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 7 & -2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$,
   $F = \begin{bmatrix} 0 & 4,08 & -5 \\ -4,08 & 0 & 8,03 \\ -5 & -8,03 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 1 & 5,5 \\ -3 & -2,7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

2. Calcule se possível: $C + G$, $B + D^t$, $A + B$, $F \cdot C$, $E \cdot G$, $A \cdot D$, $det(A)$, $det(F)$,

$det(B)$,$tr(A)$, $tr(F)$, $tr(B)$, caso não seja justifique porque.

3. Calcule: $C + E$, $C + (-C)$, $E + C$, $E + G$, $G + E$, $C + (E + G)$ e $(C + E) + G$. Quais as propriedades da adição você identificou nos exercícios?

4. Calcule: $F \cdot C$, $E^t \cdot G$, $G \cdot E^t$, $C \cdot F$, $C \cdot (B + D^t)$, $C \cdot B + C \cdot D^t$, $F \cdot I$, $I \cdot F$ e $A \cdot I$. Quais as propriedades da multiplicação você identificou nos exercícios?

5. Seja $H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   $J = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 7 & 9 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

   (a) Digite a matriz H

   (b) Calcule H^t, $(H^t)^t$, J^t, $(J^t)^t$

   (c) Calcule $(H + J)^t$ e $H^t + J^t$

   (d) Calcule $(H \cdot J)^t$, $H^t \cdot J^t$ e$J^t \cdot H^t$.

   (e) Quais as propriedades da transposta você identificou nos exercícios?

Seção 2 - Matrizes inversas

Tema: Matrizes inversas

Pré-requisitos: Matrizes (cálculo da inversa e suas propriedades)

Público alvo:Alunos da segunda série do ensino médio ou alunos da primeira fase dos corsos de ciências exatas.

Objetivos:

- Calcular a inversa das matrizes utilizando o software **WinMat**.

- Identificar matrizes inversíveis.

Software: WinMat

Tempo estimado: 45 minutos

Atividades:

1. Digite as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & 5 & 6 \\ 1,5 & -4 & 0,42 & 1 \\ -6 & 0,28 & 0,2 & -1,5 \\ 5 & 1 & -10 & 0,5 \end{bmatrix}$,
$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. Calcule $det(A)$, $det(B)$ e $det(C)$.

3. As matrizes A, B e C são inversíveis? Justifique.

4. Encontre a inversa de A e de B.

5. Verifique que $A.A^{-1} = I$ e $B.B^{-1} = I$.

6. Dada a matriz $D = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$,
   (a) Mostre que D é inversível.
   (b) Calcule a sua inversa.
   (c) Existe uma relação especial entre D e D^{-1} Repita os exercícios com as matrizes: $\begin{bmatrix} -8 & 9 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}$ para encontrar esta relação. Generalize o resultado observado, ou seja, se $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ encontre a definição de M^{-1}.

3.5 Cenário sobre Sistemas Lineares

Introdução

A utilização de um cenário no ensino de sistemas lineares, como apoio didático, tem como objetivo auxiliar o aluno na compreenção de conceitos matemáticos, uma vez que ajuda na reflexão dos resultados obtidos, provocados por uma seqüência de exercícios que sugerem ao aluno muito mais que simples cálculos mecânicos.

Tema:Sistemas lineares

Pré-requisitos: Matrizes (Operações com matrizes, matriz inversa e determinante)

Público alvo: Alunos da segunda série do ensino médio ou alunos da primeira fase dos corsos de ciências exatas.

Objetivos:

- Aplicar os comandos do software no estudo de sistemas lineares
- Resolver sistemas de equações lineares utilizando o WimMat.
- Identificar quando o sistema é possivel determinado, possível indeterminado e impossível.

Tempo estimado: 45 minutos

Software: WinMat

O software WinMat, é encontrado em uma versão em inglês e está disponível no site http://math.exeter.edu/rparris/winmat.html. Produzido por Rick Parris, do departamento de matemática da Academia Phillips Exeter, este software é indicado para o ensino médio e superior. Foi desenvolvido para ser utilizado como ferramenta no cálculo de matrizes, determinante, sistemas lineares e outros conteúdos de álgebra linear.

Conhecendo os comandos

Ao abrir o programa a primeira tela que aparecerá será esta indicada pela figura 12:

Figura 12

Menu Matrix

Figura 13

Dentro deste menu, mostrado na figura 13, temos os comandos:

- **New** - que serve para escolher o tipo de matriz que o programa gere;
- **Open** - que serve para abrir uma matriz já feita e salva anteriormente neste programa;
- **Mode** - este comando serve para o usuário indicar quais vão ser os tipos de números que serão utilizados em suas matrizes, isto é, se estes serão inteiros, reais, ou complexos.
- **White backgrounds** - serve para deixarmos o fundo das matrizes branco, se estiver ativado ou azul se estiver desativado.
- **Menu Calc** - Serve para fazermos operações com matrizes, como soma, multiplicação, calcular a matriz transposta, inversa e também neste menu, temos a opção de calcular sistemas lineares, determinantes e etc...
- **Help** - Este comando é usado para o auxílio no uso de determinados comandos que temos dúvidas, seja de como funciona ou para saber se o programa faz determinada operação que não saibamos que ele faça e como faz.

Construindo matrizes

Para que apareça alguma matriz na tela, o usuário deve clicar no menu matrix new. Clicando neste menu aparecerá a tela mostrada na figura 14.

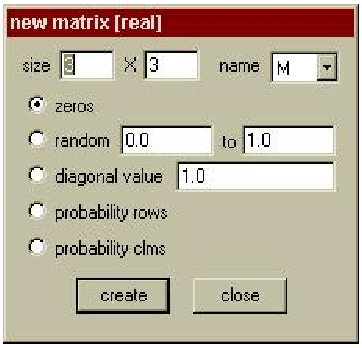

Figura 14

Na maioria dos casos a matriz não virá do jeito que queremos, então para criarmos uma matriz qualquer precisamos mudar alguns ou todos os valores nela existentes e para isso o processo de mudança é muito simples, basta clicar no elemento que queremos mudar, e apertar a tecla **enter** e continuar o processo até que esteja toda a matriz alterada da forma que queremos. Caso não quiséssemos mudar um item que foi clicado basta apertarmos a tecla **esc** que o software entende que não queremos mais alterar este valor. Neste programa não é aceito nas componentes da matriz, valores diferentes dos pré-determinados no item **mode** do menu **Matrix** ou deixar em vazio algum elemento da matriz. Caso isto aconteça o programa procederá de três formas, dependendo da ação do usuário. Na primeira o software daria uma mensagem de advertência conforme a figura 15:

Figura 15

Na segunda ele apresentaria uma advertência conforme a Figura 16

Figura 16

E se caso digitássemos letras ao invés de números ele ignoraria a letra que colocamos e deixaria no lugar o valor zero.

Calculando o determinante de uma matriz

Para que o programa calcule o determinante de uma matriz temos que ir no menu calc, depois em one matrix e por último clica-se na matriz que desejamos que seja calculado o determinante. Fazendo isto o software abrirá uma outra janela conforme mostrado na figura 17.

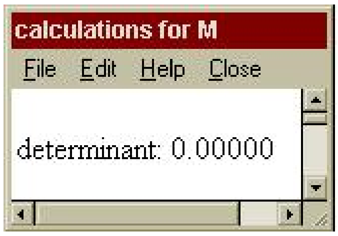

Figura 17

Sistemas lineares

Os sistemas lineares no winmat são resolvidos através da expressão $MX = B$, Onde M representa a matriz dos coeficientes, a matriz X representa a matriz das incógnitas e B a matriz dos resultados, por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

Logo:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Agora que sabemos como é a representação de um sistema linear no WinMat, apresentaremos a resolução do mesmo, para isso vamos resolver o sistema acima. Então criamos as matrizes M e B conforme o exemplo acima, depois basta clicarmos no menu **solve** que está dentro do menu **calc**, podemos observar que aparece uma tela como a mostrada na figura 18.

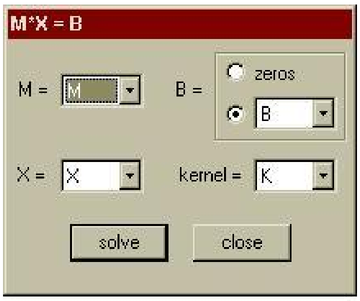

Figura 18

Aparecendo esta tela, como nossa matriz M tem o nome de M e nossa matriz B tem o nome B, basta clicar no botão solve que aparecerá a resposta em forma de uma matriz X. Conforme mostrado na figura 19.

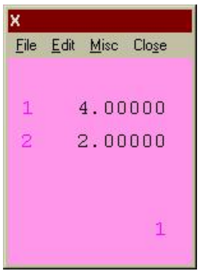

Figura 19

Caso tivéssemos montado a matriz M ou a B com outro nome não precisaríamos cria-las novamente com esses nomes porque como podemos observar na figura 18 o programa permite com que possamos informar qual será a matriz M e B para o sistema. O software apresenta como solução de um sistema que seja possível e indeterminado, duas matrizes colunas, ou seja, no caso do sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 2 \\ 4x + 3y + 7z = 3 \end{cases}$$

A resposta que estamos acostumados a obter é $(-k, 1-k, k)$, $\forall k \in \mathbb{R}$

Mas no programa o que ele apresenta como resposta são duas matrizes colunas, sendo a primeira representando que o software chama de Kernel basis for $MX = B$, ou seja, o núcleo do sistema, no caso: $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e a segunda $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, que é uma solução particular para o sistema. O que nada mais é do que $(0,1,0)+(-k,-k,k)$ que ainda pode ser melhorado para $(0,1,0)+k(-1,-1,1)$ e que como esperávamos estes dois vetores são iguais as nossas duas matrizes. Quando calculamos este sistema, o programa apresenta as duas soluções ao mesmo tempo, em janelas separadas, mas com a tela da matriz Kernel exatamente por cima da outra tela, dando-nos a impressão de haver apenas uma única solução. Mas se arrastarmos a janela da matriz Kernel para o lado veremos a outra janela. E se o sistema for impossível o programa apenas apresenta uma mensagem de erro, como mostra a figura 20, informando que essa matriz possui dados inconsistentes.

Figura 20

Atividades

1-Resolva os sistemas abaixo:

$$\begin{cases} 2x+y=9 \\ x+3z=8 \\ 1,6y+z=5 \end{cases} \quad \begin{cases} -1x+y+z=-1 \\ x+1,4z+w=5 \\ y+z+3w=7 \\ x+2,5y+w=4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y+z+w=1 \\ x+2y+z+w=2 \\ x+3y+2z+w=3 \\ x+y+4,1z+2w=4 \end{cases}$$

2- Classifique os sistemas lineares abaixo em: possível determinado, indeterminado e impossível, calculando apenas determinantes.

$$\begin{cases} 2x+4y=9 \\ 9x+18y=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x+4y=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x+4y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=0.5 \\ 3x-5.5y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=-8 \\ 3x+5y-z=3 \\ 4x+7y=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=-1 \\ -1.5x-8y-z=0 \\ x-y-z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y-z=-1.2 \\ 3x-2y+z=3 \\ 2x+2z=5 \end{cases}$$

4 Estudo de funções

Neste capítulo iremos apresentar um estudo semelhante ao do capítulo 3 sobre matrizes, determinantes e sistemas lineares. O assunto tratado aqui é funções, que é estudado na primeira série do ensino médio.

Como uma das grandes potencialidades da utilização do computador no ensino da matemática é a representação gráfica, exploraremos várias atividades no cenário utilizando gráfico de funções.

As funções em estudo são: polinomial do 1^o grau, polinomial do 2^o grau, modular, exponencial e logarítmica.

4.1 Relação dos tópicos sobre funções: polinomial do primeiro grau, polinomial do segundo grau, modular, exponencial e logarítmica nos livros didáticos pesquisados

Para este trabalho escolhemos quatro livros didáticos indicados no ensino médio, sendo que um é livro do professor, o que na realidade não faz diferença, pois o que este livro tem a mais que os outros é apenas a resolução de todos os exercícios propostos para o aluno.

4.1.1 Livros didáticos pesquisados

Matemática: 2^o grau, volume único. Autores: José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Junior;
Matemática para o ensino médio: volume único. Autor: Manoel Jairo Bezerra;
Matemática volume: único. Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo;
Matemática aula por aula: volume único : ensino médio. **(livro do professor)** Autores:

Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier Barreto;

4.1.2 Relação dos tópicos apresentados nos livros didáticos pesquisados

Em todos livros didáticos pesquisados, são apresentados estes tópicos:

- Função polinomial do 1^o grau
  - Definição.
  - Função crescente.
  - Função decrescente.
  - Raiz ou zero.
  - Gráfico.
  - Estudo do sinal.
  - Inequações.
- Função polinomial do 2^o grau
  - Definição.
  - Gráfico.
  - Raiz ou zero da função.
  - Estudo do sinal.
  - Estudo do vértice.
  - Inequações.
- Função modular
  - Definição.
  - Gráficos.
- Função exponencial
  - Equações exponenciais.
  - Definição de função exponencial.

  - Gráfico.
  - Inequações.

- Função logarítmica
  - Definição.
  - Propriedades.
  - Mudança de base.
  - Equações.
  - Inequações.
  - Gráfico.

Estes tópicos são apresentados, com algumas diferenças na abordagem de livro para livro. Em alguns livros aparecem sob forma de capítulos , em outros são citados como seções e as vezes são apenas comentados dentro de alguma seção do tópico.

Observamos que o livro do Bezerra apresenta dentro do capítulo de função modular as seções: transformações no gráfico, gráficos de funções $y = f(x)$ e $y = -f(x)$, gráficos de $y = f(x)$ e $y = f(x) \pm \leftthreetimes$ e gráficos de $y = f(x)$ e $y = f(x \pm \leftthreetimes)$ que são temas que exploraremos no cenário sobre funções e não apresenta equações e inequações modulares, que são apresentados nos outros três livros.

Todos dos livros didáticos pesquisados, exceto do Iezzi, trazem antes de apresentar qualquer tipo de função um capítulo sobre funções. Neste capítulo é apresentado a definição de função, domínio, contradomínio, imagem, função par e ímpar, construção e análise de gráficos, função injetora, sobrejetora e bijetora e função composta.

No livro do Iezzi a composição de funções é definida e explorada em função modular e os conteúdos de função injetora, sobrejetora, bijetora e inversa são definidos e explorados na introdução de funções logarítmicas.

No livro do Benigno os assuntos: função crecente e decrescente são definidos e explorados no capítulo de função polinomial do primeiro grau.

4.2 Softwares pesquisados

Para elaboração de um cenário para funções, precisamos pesquisar softwares que tratassem deste assunto. Na pesquisa encontramos diversos softwares, sendo que, totalmente gratuito *(Freeware)* foram poucos. Listaremos agora alguns dos softwares encontrados, com suas devidas descrições, localização para download e porquê foram escolhidos ou não para a construção do cenário.

- **MathGV** - Encontrado no site http://www.mathgv.com/, é um software que constroi gráficos a partir de funções elementares. Podemos construir os gráficos em duas ou três dimensões em coordenadas cartesianas ou polares. Não escolhemos este programa porque ele é encontrado apenas em inglês e como nosso cenário está direcionado para o ensino médio decidimos que seria melhor trabalharmos com softwares em português.

- **GnuPlot** - Encontrado em versões para windows, msdos, linux e unix, no site http://archives.math.utk.edu/software/multi-platform/gnuplot/msdos/ é um software que constroi gráficos das mais variadas funções em duas ou tres dimensões, permite construção de gráficos em coordanadas polares além das cartesianas um programa muito completo, que não se limita apenas a plotagem de gráficos. Mas os comandos tem que serem todos digitados em inglês e os gráficos são plotados em uma tela separada semelhante ao do **matlab**, o que dificultaria para um aluno do ensino médio sua visualização. Pois não é desta forma que os gráficos são apresentados nos seus livros didáticos.

- **Oficina de Funções** - Encontrado no site http://server.fsc.ufsc.br/ canzian/oficina/ é um programa que foi desenvolvido por Nelson Canzian da Silva do departamento de Física da UFSC em Junho de 1999. Este software plota gráficos das funções de primeiro e segundo grau, exponêncial, logarítmica apenas na base e, seno, cosseno e tangente. Mas restringe o domínio entre -10 e 10, os eixos coordenados não são numerados e nem foi encontrado opção para numerar. Não foi escolhido pois queríamos um programa que nos fornecesse além do gráfico mais comandos como por exemplo: cálculo de raízes, estremos, intersecssões.

- **Graphmatica** - É um software para desenhar funções. Encontrado no endereço http://www107.pair.com/cammsoft/graphmatica.html na versão em português . Comporta gráficos cartesianos, polares. Faz interpolações, calcula raízes, interseções, extremos. Não foi escolhido porque não é totalmente gratuito, pois para resgistrar o programa é necessario pagamento conforme descrito na página. Mas foi citado aqui, porque sua versão **demo** executa todos estes comandos necessários para o cenário e pode ser utilizado normalmente sem limite de tempo. Mesmo em versão

demo só não escolhemos este software porque ele trabalha apenas com as funções logarítmicas nas bases dez e e sendo que para se plotar funções logarítmicas em outras bases teríamos que antes no ambiente lápis papel fazer uma mudança de base e em seguida digitar a função para ser plotada.

- **WinPlot**(software utilizado neste trabalho) - Encontrado nos idiomas inglês, francês, espanhol e outros no site http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html . A versão que utilizamos em português foi preparada com a assistência de Adelmo Ribeiro de Jesus, professor Adjunto da UFBA (aposentado), professor do curso de matemática da universidade católica de Salvador e da faculdade Jorge Amado. Inteiramente gratuito, é de simples utilização, pois os menus, são bastante amigáveis, existe ajuda em todas partes do programa e aceita as funções matemáticas de modo natural. É muito pequeno e portável comparado com os programas existentes hoje em dia, cabe em um disquete (1.271 Kb) e roda em sistemas Windows 95/98/ME/2K/XP. Existe uma pretensão de coloca-lo também em linux. Este foi o software escolhido para nosso cenário. Para utilizá-lo é necessário que o usuário já tenha um determinado conhecimento das funções que irá trabalhar e familiarizar-se com os comandos do programa. Nos cenários são apresentados os comandos deste software necessários para o desenvolvimento das atividades propostas. Para os cenários utilizamos apenas a forma explicita de escrever as funções. As outras formas de escrever uma função (paramétrica, implícita, polar) são apresentadas no apêncice B.

4.3 Escolha dos exerícios

No estudo em que fizemos sobre quais exercícios colocaríamos no cenário de funções, percebemos que para todas as funções os livros didáticos apresentam atividades envolvendo: domínio, imagem, gráficos, raízes, equações, inequações, sinal, crescimento e descrescimento.

Para o cenário de funções nos preocupamos em escolher exercícios que verificassem as transformações que podem ocorrer no gráfico de funções, plotando o gráfico das funções $y = f(x)$, $y = -f(x)$, $y = f(x) \pm \leftthreetimes$, $y = f(x \pm \leftthreetimes)$ e $y = af(x)$, exercícios que pudessem ser resolvidos com o auxílio de gráficos, pois o WinPlot trabalha principalmente isto.

Quanto aos exercícios que pudessem ser resolvidos com o auxílio de gráficos, nos referimos a exercícios em que a visualição do gráfico é de grande auxílio na resolução dos mesmos, como por exemplo exercícios que envolvam crescimento e decrescimento de funções, função par e ímpar , intersecções entre duas ou mais funções, raízes de funções.

Listamos alguns exemplos de exercícios que não podem ser resolvidos com o software.

Exemplo 5 *Se $f(x) = -3x + 2$, calcule os valores reais de x para que se tenha, f(x)=11.*

Este exercício não é indicado pois o software não resolve equações. Teríamos então que escrever a nova função $f(x) = -3x - 9$ fazendo $f(x) = -3x + 2 - 11$ e perguntar qual a raíz desta função.

Exemplo 6 *Sabendo que $f(x+1) = 2x$, calcule $f(4)$.*

O software não ajudaria neste caso pois não permite manipular $f(x)$, então no caso deste exercício não conseguiriamos determinar o valor de x usando apenas o software.

Exemplo 7 *Dada a função $f(x) = ax + b$ e sabendo que $f(3) = 5$ e $f(-2) = -5$, calcule $f(\frac{1}{2})$*

Este exercício não é possível de ser feito no WinPlot, porque ele não faz interpolações, e nem trabalha com sistemas, que é o caso deste exercício.

Exemplo 8 *Dada a função $f(x) = 3x^2 - 5x + m$, calcule m para que a função tenha raízes reais iguais.*

Para este exercício ser feito com o auxílio do software o aluno teria que montar a equação que determinaria que $f(x) = 3x^2 - 5x + m$ tenha raízes reais iguais no ambiente lápis e papel, isto é, determinar esta equação $-12m + 25$, em seguida trocar o m por x, aplicar no programa, para depois pedir para ele calcular as raízes. Isto mostra que teríamos muito trabalho e perderiamos muito tempo, para resolver um exercício utilizando algum comando do programa que seria resolvido rapidamente em sala de aula.

Exemplo 9 *Seja $f(x) = 4^x + 1$, calcule a $f(\frac{1}{2})$.*

Este exercício não pode ser resolvido usando o WinPlot, pois ele não calcula $f(x)$ em um ponto.

Os exemplos que citamos aqui, valem para os outros tipos de funções apresentadas no capítulo 4. Quer dizer que não são possíveis ou adequados para qualquer uma das funções que apresentamos neste trabalho.

Estes tipos de exercícios, apresentados nos exemplos acima, aparecem em todos os livros didáticos pesquisados, a maioria deles elaborado para serem resolvidos sem auxílio de gráfico.

4.4 Cenário sobre funções

Além da representação analítica e da linguagem natural uma das principais representações que usamos no ensino de matemática é a representação gráfica. A conversão de uma representação para outra é importante para a aprendizagem e, em geral, é difícil para os alunos.

Quando estudamos funções, a passagem da representação analítica para a gráfica e vice-versa é muito importante para o entendimento de vários conceitos com domínio, imagem, gráfico, período, funções pares e impares, transformações no gráfico (deslocamentos verticais e horizontais, expansões, contrações), função inversa e etc.

E como uma das grandes vantagens da utilização do computador no ensino da matemática é a representação gráfica, desenvolvemos o cenário de **funções**, com o objetivo de fazer com que o aluno ande naturalmente entre a representação gráfica e a analítica.

É recomendado que na primeira utilizemos o laboratório para a demonstração dos comandos básicos do WinPlot para se trabalhar posteriomente com funções.

O cenário sobre funções está dividido em duas seções.

- Seção 1 - Representação gráfica das funções, domínio, imagem, função crescente e descrescente, função par, impar nem par nem impar, raízes, intersecções.
- Seção 2 - Aspectos básicos do estudo de funções, funções e inequações do primeiro grau, transformações no gráfico.

Seção 1 - Funções: polinomial do primeiro grau, polinomial do segundo grau, modular, exponêncial, logarítmica.

Tema: Funções: polinomial do primeiro grau, polinomial do segundo grau, modular, exponêncial, logarítmica.

Pré-requisitos:conhecimento das funções: polinomial do primeiro grau, polinomial do segundo grau, modular, exponêncial, logarítmica, sistema cartesiano.

Público alvo: Alunos da primeira série do ensino médio e das disciplinas de cáculo da 1ª fase dos cursos de ciências exatas.

Objetivos:

- Aplicar os comandos do **WinPlot** no estudo de funções

- Identificar domínio e imagem de funções

- Reconhecer quando a função é crescente ou decrescente.

- Reconhecer quando a função é par ou impar.

- identificar as raizes no gráfico

- Identificar pontos de intersecção.

Tempo estimado: 45 minutos

Software: WinPlot

O software winplot, encontrado no site http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html, foi produzido por Richard Parris da Phillips Exeter Academy e a versão em portugues foi preparada com a assistencia de Adelmo Ribeiro de Jesus, professor Adjunto da UFBA (aposentado), professor do curso de matemática da universidade católica de Salvador e da faculdade Jorge Amado.

Este software é simples, de acesso fácil, gratuito, podendo ser utilizado por professores e alunos do ensino fundamental, médio, e superior. Cabe num disquete, pois seu tamanho é de apenas 1.271 Kb. Para utilizá-lo é necessário que o usuário já tenha um determinado conhecimento das funções que irá trabalhar e familiarizar-se com os comandos do programa. Neste capítulo apresentaremos apenas os comandos que utilizaremos nos cenários de funções.

Conhecendo o programa

Quando abrimos o programa, aparece uma tela com apenas dois menus: janela e ajuda. conforme figura 21.

Figura 21

Sendo que dentro do menu janela temos as opções de representação de gráfico em duas ou três dimensões, adivinhar, mapeador , abrir última, usar padrão e sair como mostra a figura 22.

Figura 22

Na opção **2-dim F2**, abre uma nova janela para gráficos em duas dimensões. Em **3-dim F3**, abre uma nova janela para gráficos em três dimensões. Ao clicarmos no menu **adivinhar** abre-se uma janela com um gráfico onde o usuário tem que adivinhar a que função pertence aquele gráfico. **Abrir última**, quando ativamos esta opção e a deixamos marcada, assim que o Winplot for aberto novamente ele automaticamente abrirá o último arquivo utilizado. **Usar padrão**, usa as configurações padronizadas do Winplot.

Dentro do menu **ajuda** temos duas opções: **ajuda** e **sobre**. Na opção **ajuda** aparece uma tela com uma pequena explição sobre as noções iniciais a respeito do programa. No menu **sobre** aparece uma outra janela contendo algumas informações sobre o programa.

Para o cenário que desenvolveremos para o esnsino médio, exploraremos mais as opções do menu **2-dim F2**.

Menu 2-dim F2

Nesta janela é que escrevemos a função a ser plotada, se queremos marcar pontos, definir segmentos, funções explícitas, implícitas, polares, paramétrica e etc. Enfim todo trabalho, em duas dimensões, com funções pode ser feito nesta janela, mostrada na figura 23.

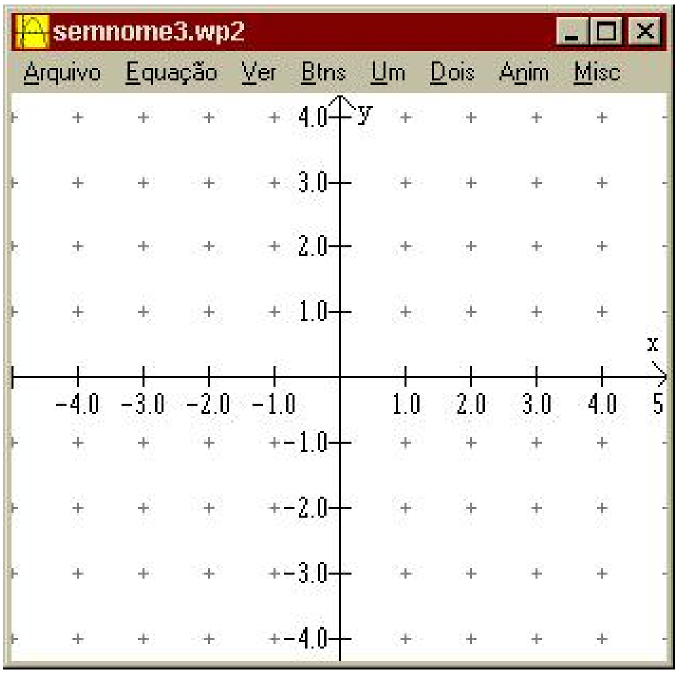

Figura 23

Observamos na figura 23 os menus: **arquivo**, **equação**, **ver**, **btns**, **um**, **dois**, **anim** e **misc**.

Observação 1 *Podemos notar na janela mostrada na figura 23 que o eixo x varia entre -5 e 5 e o eixo y varia entre -4 e 4. O que não quer dizer que a nossa visualização do gráfico fique restrita a isto. Pois para resolver este problema basta apertar as teclas PageUp para aproximar e PageDown para afastar.*

Menu arquivo

Quando clicamos no menu arquivo temos as seguintes opções:

- Abrir - Neste item podemos abrir algum arquivo antigo que já tenha sido salvo antes. Quando abrimos o arquivo, este aparecerá exatamente igual a quando foi salvo, inclusive contendo configurações adicionais, que eventualmente tenham sido feitas.

- Imprimir: Esta opção imprime a figura que está na tela do WinPlot. Contudo, antes de imprimir uma figura verifique as configurações definidas nos dois itens do menu, a seguir.

- Formatar: Esta opção abre uma janela onde podemos posicionar a imagem a ser impressa na página. Alterando as margens horizontal (**horiz**) e vertical (**vert**), que são medidas em centímetros e a partir do canto superior esquerdo. A opções **espessura** e **intervalo horiz** determinam o tamnho da imagem a ser impressa e são também especificadas em centímetros. Quando Selecionamos a opção **moldura** o programa desenha um quadro ao redor da figura. E ativando a opção **impressora a cor** o software imprime a figura colorida, mas somente se a impressora for colorida.

- Selecionar Impressora: Permite escolhermos a impressora.

- Copiar: com esta opção copiamos a figura para área de tranferência do computador, para podermos colar a figura atual para outro programa do Windows. Se desejamos incluir uma cor de fundo teremos que deixar a opção **cor de fundo** acionda. Note que a figura quando colada ela se adapta ao tamanho da tela do programa a ser colado. Então para a figura ficar no tamanho original quando colada devemos ajustar a tela de acordo com o tamanho da figura.

- copiar bitmap: copia a figura em formato Bitmap.

- Tamanho de Imagem: nela determinamos o tamanho da figura para quando imprimirmos ou copiarmos a tela as suas proporções sejam mantidas, por isso não há problema em imprimir uma janela grande a partir de uma imagem pequena. O problema é com o texto, que não é escalonado pelo processo de impressão, portanto pode parecer desproporcional, a menos que ajustemos o tamanho da janela com tamanho o da impressão.

- Senha: serve para colocarmos uma senha no arquivo desejado.

Menu equação

No menu equação encontramos as opções: explicita, paramétrica, implicita, polar, ponto, segmento, reta, desigualdades explicitas, desigualdades implicitas, inventário, tamanho do inventário e etc. Como nos mostra a figura 24.

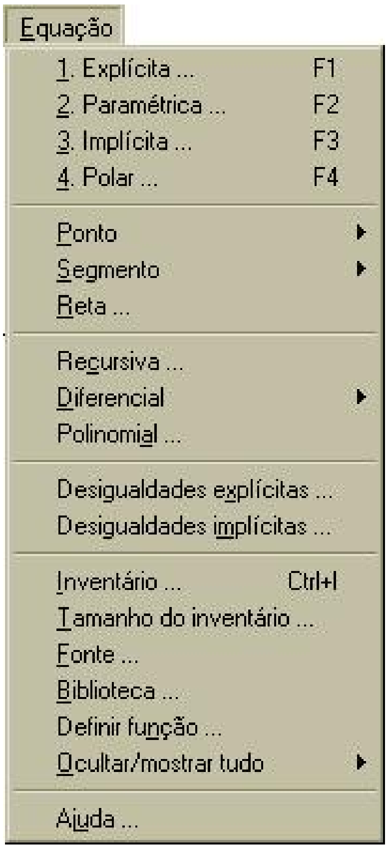

Figura 24

Opção Explícita

Dentro desta opção contruimos as funções explícitas, isto é, aquelas que são possíveis de se representar com y em função de x. Quando clicamos em **explícita** aperece uma nova janela como nos mostra a figura 25.

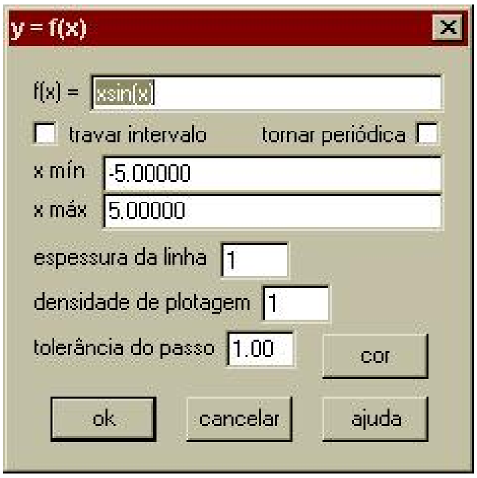

Figura 25

Na caixa de dialogo $f(x) =$ digitamos a função desejada. Segue abaixo uma lista das principais funções explitas com suas respecitivas sintaxes:

- funções elementares
  - pi - representa o Π
  - ln(x) , log(x) - ln(x) logarítimo de x na base e e log(x), logarítimo de x na base 10
  - exp(x) - representa e^x, mas se quisermos usar outra base basta então colocar o acento circunflexo ao lado da base desejada. Por exemplo: 2^x é escrito como 2^x ,
  - sqr(x) ou sqrt(x) - raiz quadrada de x,
  - abs(x) - módulo de x
- Outras funções
  - root(n,x) - raiz enésima de x
  - power(n,x) - enésima potência de x
  - abs(x,y) - sqrt(x*x+y*y)que significa $\sqrt{x^2 + y^2}$
  - abs(x,y,z) - sqrt(x*x+y*y+z*z)que significa $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - log(b,x) ou ln(x)/ln(b) - que nada mais é que $\log_b(x)$, mas observe que o programa quando recebe o comando log(b,x) ele aplica uma mudança de base para e e desenha o gráfico, ou seja, para ele log(b,x)= $\frac{ln(x)}{ln(b)}$.

- funções definidas por várias sentenças : se digitarmos, por exemplo joinx(x | 1,x+1 | 2,4) o programa entenderá :

$$y = \begin{cases} x \quad se \quad x \leqslant 1 \\ x+1 \quad se \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 4 \quad se \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$

Então atravéz deste exemplo podemos perceber que joinx indica que a função é de várias variáveis, que a vírgula (,) separa uma função da outra e que | indica o intervalo. Note que quando a função esta no início o | representa até o valor indicado, no caso do nosso exemplo 1. Quando a função fica entre outras duas | usa o valor anterior "1"e faz até o próximo "2"e a ultima função não precisa do | porque o WinPlot entende que é do valor anterior até o infinito.

Se quisermos desenhar apenas um pedaço do gráfico então ativamos a opção **travar intervalo** e em seguida altermos os intervalos na caixa de diálogo **x min** e **x max** para o intervalo em que queremos que seja plotado o gráfico. Ainda temos a possibilidade de tornar periódico apenas aquele pedaço de gráfico, para isto basta ativar a opção **tornar periódica** no botão **cor** altermos a cor da linha do gráfico e na **expessura da linha** definimos a nova espessura da linha do gráfico.

Observação 2 *Apesar de o programa estar em português, note que os comandos são digitados em inglês,isto é, ao invéz de digitarmos seno(x), digitamos sin(x), pois a única coisa que foi modificada nesta versão em português foram as etiquetas dos menus.*

Observação 3 *Se caso o usuário queira saber mais alguma função, então basta ir no menu biblioteca, dentro de equação, que o programa lista mais outras funções que não serão abordadas aqui.*

Então depois de escrevermos a função e alterarmos todos estes parâmetros para que o gráfico seja plotado devemos clicar no botão **ok**.

Quando clicamos no botão **ok** o programa plota o gráfico na tela mostrada na figura 23. Em seguida abre uma outra tela chamada de **inventário** onde ficam listadas todas as funções plotadas na tela. Conforme mostra figura 26.

Figura 26

Note que nesta janela temos onze botões, que servem para modificar a função em questão. No botão **editar** o programa abre novamente a tela da figura 25 para podermos alterar a função, o botão **apagar** apaga a função e o gráfico atual ou escolhido pelo usuário, o botão **dupl** permite com que coloquemos outra função ou troque uma função por outra, isto depende do que escolhermos, porque o programa pergunta se queremos apagar a fonte, isto é, apagar a função escolhida para desenhar o novo gráfico. O botão **copiar** copia a função para colar o texto em outro programa, o botão **tabela** mostra os valores que o programa aplicou na função para construir o gráfico, o botão **mostrar gráfico** ,como o nome já diz, mostra ou esconde o grafico na tela, o botão **mostrar equa** faz a mesma coisa que o mostra gráfico mas ao invés do gráfico ele faz isto com a função, botão **nome** permite que se um nome para a função.

Botão **família**: clicamos neste item para converter um determinado exemplo em uma família de curvas (ou pontos). Para que isto funcione, devemos definir o exemplo desejado para uma equação que tenha um parâmetro extra. Por exemplo, $y = ax^2 + bx + c$ define uma função quadrática que depende de três parâmetros **a**, **b**, e **c** . Cada um dos três podem ser usados para criar uma família de curvas. Se digitarmos **c** na caixa **parâmetro**, colocarmos o intervalo dos valores ao preencher as caixas **min** e **max** e dissermos quantas curvas devem estar na família preenchendo a caixa **passo**. E por fim, clicarmos em **definir** para completar o processo, veremos uma famílica de curvas definidas pelo parâmetro escolhido. Para desfazer esta construção, selecione o exemplo e clique **desdefinir**.

Veja o gráfico da equação quadrática $y = x^2 + a$ figura 27

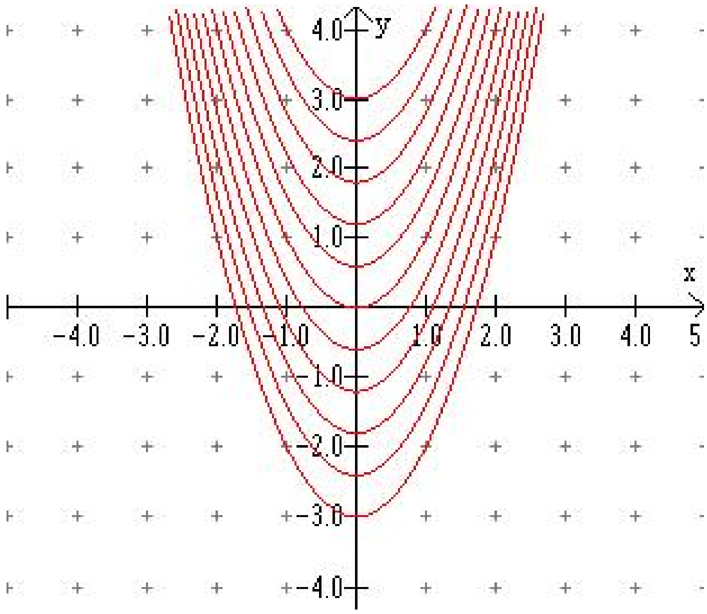

Figura 27

Podemos notar que para esta função escolhemos como parâmetro a variavel **a**, cofiguramos o mínimo para **menos três** e o máximo para **mais três**, pedimos dez curvas. Na figura 27 observamos onze curvas apesar de ter escolhido dez é que o WinPlot desenha a primeira curva mãe e depois constrói mais o número de curvas que pedimos. No nosso exemplo ele construiu uma curva com a função $y = x^2 + a$, sendo a mãe x^2 e depois mais dez curvas com **a** variando entre menos três e três. Observemos agora a figura 28 ilustrando todas as alterações feitas.

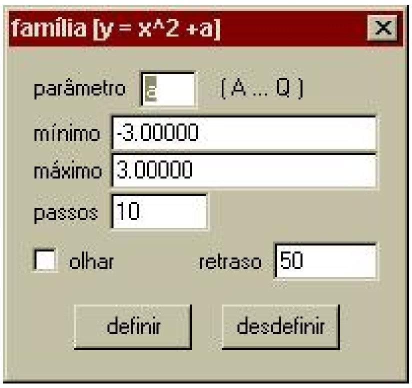

Figura 28

Na figura 28 ainda vemos as opções: **olhar** e **retraso** que significam respetivamente que queremos olhar a construção e quanto tempo ele levará para construir as curvas.

Reta

Usamos este item para descrever uma reta ax + by = c na tela. Digitando os coeficientes a, b, e c nos espaços correspondentes. Se tivermos desenhando uma linha utilizando a espessura 1 (normal) poderemos então desenhá-la pontilhada ou tracejada. Como nos mostra a figura 29.

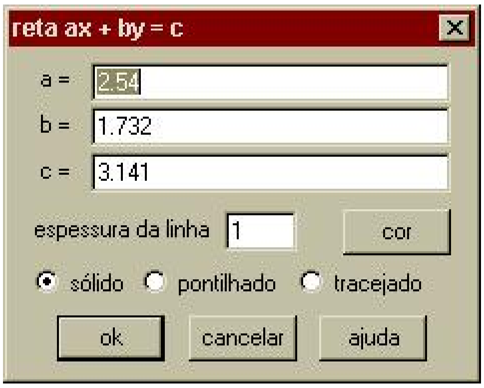

Figura 29

Desigualdades explicitas

Esta opção só podemos usar caso se tenha alguma função $y = f(x)$ no inventário. Essas curvas são usadas para definir regiões sombreadas. Cada uma dessas regiões são obtidas sombreando **acima** ou **abaixo** de uma determinada curva, ou **entre** duas curvas selecionadas. Os botões existentes na tela selecionam apenas um dos três casos. Para restringir os valores de x entre dois extremos, selecione **definir intervalo** e digite os valores extremos no espaço apropriado. O sombreamento é feito por um padrão de pequenos pontos, cuja cor poderá ser selecionada. Uma vez que descrevemos a região, devemos clicar em sombrear para ver o resultado e para adicionar na lista de regiões. Cada clique no botão **sombrear** aumentará a densidade do sombreamento. Para reduzir ou retirar todo sombreamento, clique em **deletar um** ou **deletar todos**, respectivamente.

Vejamos o gráfico na figura 30.

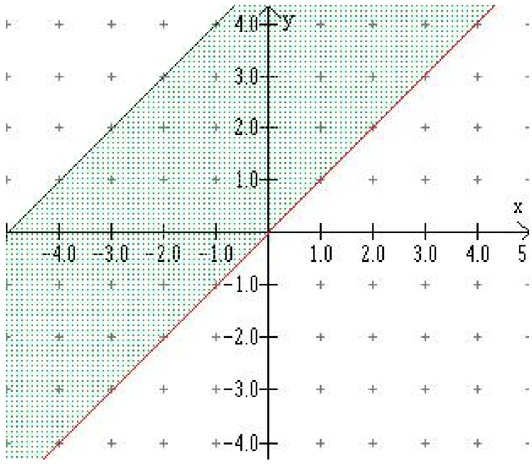

Figura 30

Neste gráfico sombreamos a parte entre as retas $y = x$ e $y = x + 5$. Observemos também a tela, figura 31, de desigualdade explicita com as alterações devidas para obtermos o resultado da figura 30.

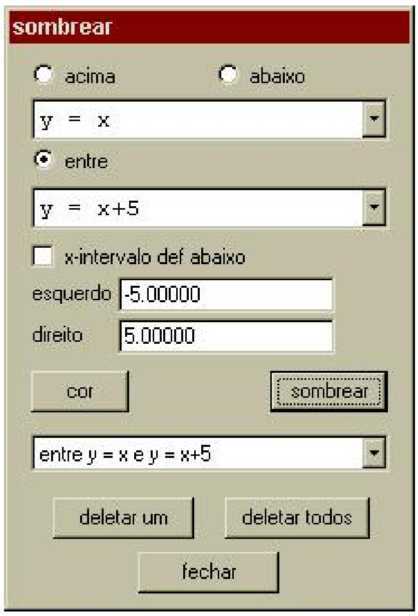

Figura 31

Menu Um

Dentro deste menu temos dois comandos importantes para o estudo de funções, as opções: **zeros** e **extremos**.

Zeros

Este comando permite acharmos as raízes (zeros) da função desejada. Por exemplo, seja a função $y = x^2 - 1$, sabemos que as raízes desta função são: -1 e 1. Mas supondo que não soubessemos e resolvessemos pedir para o WinPlot calculá-las. Então após plotarmos o gráfico devemos clicar no menu **um** em seguida em **zeros**. Observe que aparecerá uma janela conforme figura 32.

Figura 32

Podemos observar que o programa traz uma raiz que é -1 para vermos a outra basta clicarmos no botão **próximo**. Caso função que apareça na tela não seja a desejada então é só trocar clicando na seta para baixo ao lado da função ilustrada na tela. Temos ainda a opção de salvarmos aquele ponto com um nome, que seria uma letra de A a Z.

Extremos

Vamos pegar o mesmo exemplo da função usada anteriormente $y = x^2 - 1$. Para calcular o seu extremo, ou seja, o seu mínimo devemos clicar no menu **um** em seguida clicar em **Extremos**. O programa abrirá uma tela como mostra a figura 33.

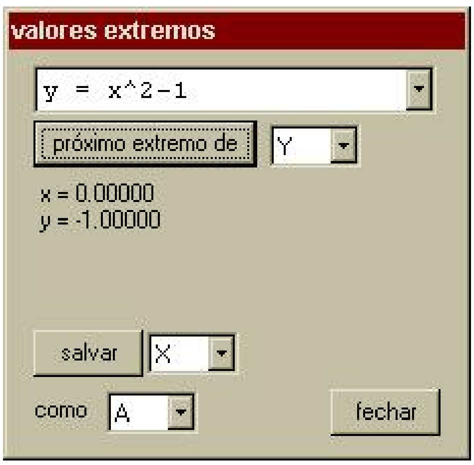

Figura 33

Observamos neste exemplo que ele nos mostra $x = 0$ e $y = -1$, que nada mais são que o x do vértice e o y do vértice, ou seja, o mínimo desta parábola. E se olharmos o gráfico o software marca as coordenadas dos extremos mostrada na tela da figura 33 com um x no gráfico. Caso a função em estudo tenha mais de um extremo, então basta ir clicando no botão **proximo extremo de** que o WinPlot vai mostrando as coordenadas dos outros extremos e ao mesmo tempo vai marcando um x em cada coordenada no gráfico.

Dois

Neste menu temos a opção **Interseções** que utilizamos quando queremos ver as inteseções entre duas funções.

Para construirmos mais de uma função num mesmo gráfico o método é simples, basta ir em no menu **Equação**, em seguida em **Explícita**, digitar a função e apertar no botão **ok**. Depois devemos repetir o processo para a próxima função e assim por diante. Então o WinPlot deixa os gráficos ao mesmo tempo plotados na tela. No programa podemos ter até trinta e seis funções plotadas juntas. Este número pode ser mudado no menu **tamanho do inventário** que está dentro do menu **Equação**.

Para verificarmos as interseções entre duas funções, o processo é o seguinte: primeiro plotamos as funções no gráfico, em seguida devemos clicar em **Dois** e depois em **Interseções**. Podemos observar que aparece uma tela como mostra a figura 34, mostrando uma das interseções, para visualizarmos as outras interseções basta irmos clicando no botão **prox interseção**, observe que aqui também o programa vai simultaneamente marcando no gráfico as interseções com uma cruz e se quisermos que este ponto fique mesmo marcado, pois ao clicarmos no botão **prox interseção** o programa desmarca o ponto anterior e marca o próximo, devemos clicar no botão **marcar ponto**.

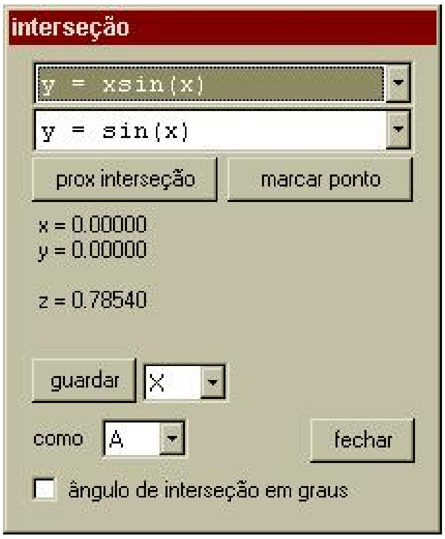

Figura 34

Como podemos ver na figura 24 existem dentro do menu Equação ainda os comandos: paramétricas, implicita, polar, ponto e segmento, que não serão apresentados neste capítulo.

Atividades

1. Faça o gráfico das funções e determine o domínio e a imagem de cada uma delas:

   (a) $y = x$ no intervalo [2,3]

   (b) $y = x^2 - 4x + 4$

   (c) $y = \log_4(x)$

   (d) $y = \sqrt{x+3}$

   (e) $y = x + 2$

   (f) $y = 2^x$

   (g) $y = |x|$

2. Faça o gráfico das funções $y = x + 1$, $y = x^2 - 4$ $y = |x + 1|$ $y = \log_3(x + 5)$ e determine para cada função o intervalo onde são crescentes ou decrescentes.

3. Faça o gráfico de cada uma das funções identificando quais são pares, impares ou nem par nem impar.

   (a) $y = x$

(b) $y = |x|$

(c) $y = x^2$

(d) $y = x^2 - 6x + 9$

(e) $y = |x| - 2$

4. Determine as raízes das funções abaixo, no ambiente lápis e papel e com o software. Qual a relação entre as raízes de uma função e os pontos de intersecção do gráfico como o eixo dos x?

   (a) $f(x) = x^2 + x - 6$

   (b) $g(x) = 2^x - 1$

   (c) $h(x) = 3x - 1$

5. Ache o ponto de intersecção entre as funções indicadas abaixo, no ambiente lápis e papel e com o software. Qual a relação dos pontos de intersecção, marcados na tela, entre os gráficos das funções com as repostas obtidas no papel?

   (a) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = -x + 3$

Seção 2 - Transformações no gráfico

Tema: Transformações no gráfico.

Pré-requisitos: Conhecimento das funções: polinomial do primeiro grau, polinomial do segundo grau, modular, exponêncial e logarítmica.

Público alvo: Alunos da primeira série do ensino médio e das disciplinas de cáculo da 1ª fase dos cursos de ciências exatas.

Objetivos:

- Identificar transformações no gráfico.

Software: WinMat

Tempo estimado: 45 minutos

Atividades:

1. Faça o gráfico das funções: $y = x^2 + 2x + 1$ e $y = -(x^2 + 2x + 1)$, $y = e^x$ e $y = -e^x$, $y = \log(x) + 1$ e $y = -(\log(x) + 1)$. Dado o gráfico de $f(x)$, o que se pode afirmar sobre o gráfico de $g(x) = -f(x)$?

2. Faça o gráfico das funções:

   (a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$,$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$

   (b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$,$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$

   (c) $y = |x|$, $y = |x| + 1$, $y = |x| + 2$, $y = |x| + 3$, $y = |x| + 4$, $y = |x| + 5$

   (d) $y = |x|$, $y = |x| - 1$, $y = |x| - 2$, $y = |x| - 3$, $y = |x| - 4$, $y = |x| - 5$

   2.1 Analisando o gráfico da função $y = f(x) + \lambda$, observamos que foi alterado o posicionamento de $f(x)$ em relação ao eixo das ordenadas. (Transformação vertical)

      (a) O gráfico de $f(x) + \lambda$, com $\lambda > 0$, será uma translação vertical do gráfico de $f(x)$ para __________________________.

      (b) O gráfico de $f(x) + \lambda$, com $\lambda < 0$, será uma translação vertical do gráfico de $f(x)$ para __________________________.

3. Faça o gráfico das funções:

   (a) $y = |x|$, $y = |x + 1|$, $y = |x + 2|$, $y = |x + 3|$, $y = |x + 4|$, $y = |x + 5|$.

   (b) $y = |x|$, $y = |x - 1|$, $y = |x - 2|$, $y = |x - 3|$, $y = |x - 4|$, $y = |x - 5|$.

   (c) $y = x^2$, $y = (x + 1)^2$, $y = (x + 2)^2$, $y = (x + 3)^2$, $y = (x + 4)^2$, $y = (x + 5)^2$.

   (d) $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = (x - 3)^2$, $y = (x - 4)^2$, $y = (x - 5)^2$.

   3.1 Analisando o gráfico da função $y = f(x + \lambda)$, observamos que foi alterado o posicionamento de $f(x)$ em relação ao eixo das abscissas. (Transformação horizontal)

      (a) O gráfico de $f(x+\lambda)$, com $\lambda > 0$, será uma translação horizontal do gráfico de $f(x)$ para o lado __________________________.

      (b) O gráfico de $f(x+\lambda)$, com $\lambda < 0$, será uma translação horizontal do gráfico de $f(x)$ para o lado __________________________.

4. Faça o gráfico das funções

    (a) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{5}x^2$.

    (b) $y = x^2$,$y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = 4x^2$, $y = 5x^2$.

    Determine em qual item a parábola contraiu e em qual expandiu.

5. Encontre as famílias das curvas, usando o comando família:

    (a) $y = ax^2$, com a variando entre 1 e 5 e com a variando entre 0 e 1.

    (b) $5^{(x+a)}$, com a variando entre 1 e 5 e com a variando entre -5 e -1.

    (c) $y = \log(x) + a$, com a variando entre 1 e 5 e com a variando entre -5 e -1.

6. No item a, em qual variação o gráfico contraiu, em qual expandiu.

7. No item b, em qual variação o gráfico se deslocou para a esquerda, em qual se deslocou para a direita.

8. No item c, em qual variação o gráfico se deslocou para baixo, em qual se deslocou para cima.

5 Conclusão

Já foi mensionado neste trabalho que o uso do computador no ensino, é tema de campanhas públicas a todo momento. E com laborátorios de informática sendo instalados em escolas públicas do ensino fundamental e médio, está ficando cada vez mais fácil o acesso a tecnologia informática.

Como a informática está avançando tanto, que hoje até se fala em analfabeto digital, para a pessoa que não domina esta tecnologia, optamos pela utilização de softwares gratuitos na criação de cenários com objetivo de proporcionar ao professor a aplicação dos mesmos em sua escola e aos alunos em qualquer ambiente computacional, seja em casa ou na escola.

Os softwares WinMat e WinPlot, utilizados nos cenários são gratuitos de simples acesso, de fácil manuseio, pois os programas usam a mesma notação dos livros didáticos, podem ser copiados para qualquer ambiente windows, ambos cabem em num disquete. E ambos possuem versões em português. Comparados com MatLab, Mapple e Derive são mais simples de se trabalhar, pois os comandos estão todos em menus não precisando saber sintaxes muito menos digita-las. Claro que MatLab, Mapple e Derive possuem mais recursos matemáticos que o WinMat e WinPlot, mas estes últimos, para uma aula no ensino médio, são muito mais acessíveis.

Esperamos que os cenários apresentados sirvam para facilitar ao professor o uso dos computadores em suas práticas docentes, fazendo com que ele se habitue a usar esta tecnologia como mais uma de suas estratégias para facilitar o entendimento dos alunos. E que a sequência didática apresentada no trabalho faça com que os alunos repenssem seus conceitos e tenham um melhor entendimento a respeito dos conteudos tratados nos cenários. Mas apenas saberemos que alcançamos com os cenários os objetivos desejados a partir da experimentação dos mesmos, mais isto fica como sujestão para um próximo trabalho.

6 Referências bibliográficas

1. ANTON, Howard. Álgebra linear com aplicações. Porto Alegre: Ed. Bookman, 2001

2. BARRETO FILHO, Benigno, BARRETO, Cláudio Xavier. Matemática aula por aula: volume único : ensino médio. São Paulo: Ed. FTD S.A., 2000

3. BEZERRA, Manoel Jairo. Matemática para o ensino médio: volume único.São Paulo: Ed. Scipione, 2001

4. BOLDRINI, José Luiz, COSTA, Sueli I. Rodrigues, FIGUEIREDO, Vera Lúcia, WETZLER, Henry. Algebra Linear. São Paulo: Ed. Harbra ltda, 1980

5. BRANDÃO, Leônidas O. Laboratório de esnsino de matemática.[Online]. Disponível em http://www.ime.usp.br/ leo/free.html

6. CLAROU, P.; LABORDE C.; CAPPONI B. (2001) Géométrie avec cabri-scénarios pour le lycée; CRDP de l'académie de Grenoble

7. DANTE, Luiz Roberto. Matemática contexto e aplicações, segundo livro de uma série de três volumes. São Paulo:Ed. Ática, 2002

8. GIOVANNI,José Ruy, BONJORNO ,José Roberto, GIOVANNI JUNIOR José Ruy. Matemática: 2º grau, volume único. São Paulo: Ed. FTD S.A., 1988

9. GIOVANNI, José Ruy, BONJORNO, José Roberto. Matemática 2: 2º Grau, segundo livro de uma série de três volumes. São Paulo: Ed. FTD S.A. 1992

10. HEXSEL, Roberto, Propostas de Ações de Governo para Incentivar o Uso de Software Livre.[Online]. Documento disponivel no site http://www.inf.ufpr.br/ roberto/public.html (Acessado em 10/07/2004)

11. IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David, PÉRIGO Roberto. Matemática volume: único.São Paulo: Ed. Atual, 2002

12. INRIA. Scilab is a trademark of INRIA.[Online]. Disponivel em

http://scilabsoft.inria.fr/(Acessado em 10/11/2004)

13. KELLEY, Colin, WILLIAMS, Thomas (2001) GNUPLOT. [Online]. Disponível em http://archives.math.utk.edu/software/multi-platform/gnuplot/msdos/

(Acessado em 25/09/04).

14. LENTZ,Cleide Regina, GONÇALVES,Mirian Buss, PEREIRA, Rosimary. Matemática e informática Florianópolis: UFSC/LED,2002.

15. MALACA,Carlos. HERTZER, Keith. Graphmática. [Online]. Disponível em http://www107.pair.com/cammsoft/graphmatica.html

16. PARRIS, Rick (2004) Peanut Software Homepage.[Online]. Disponível em http://math.exeter.edu/rparris/(Acessado em 10/11/2004)

17. SILVA, Nelson Canzian da. Software para Ensino de Física e Matemática : Oficina de Funções.[Online]. Disponível em http://server.fsc.ufsc.br/ canzian/oficina/

18. VANMULLEM, Greg. MathGV Function Plotting Software.[Online]. Disponível em http://www.mathgv.com/ (Acessado em 17/10/2004)

19. Só Matemática.[Online]. Disponível em http://www.somatematica.com.br/ (Acessado em 11/05/2004)

20. SoftwareLivre.gov.br [Online]. Disponível em http://www.softwarelivre.gov.br/SwLivre/ (Acessado em 10/07/2004)

7 Bibliografia Complementar

1. ARAÚJO, Carlos César de (2002) [et al] Matemática para gregos e troianos.[Online]. Disponível em http://www.gregosetroianos.mat.br/softwinplot.asp (Acessado em 23/05/2003)

2. BORBA, Marcelo de Carvalho, PENTEADO Mirian Godoy. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte Ed. Autentica, 2001

3. TAJRA, Sanmya Feitosa. Informática na Educação. São Paulo Ed Erica, 2002

APÊNDICE A – *Rank (Posto), Auto Valores e Auto Vetores*

Podemos observar ao calcular o determinante e o traço da matriz que o software também fornecia o Rank (posto), o polinômio caracteristico (characteristic polynomial) e as raizes (roots) deste polinômio juntamente com suas multiplicidades, quando houver. Conforme descrito na figura 35.

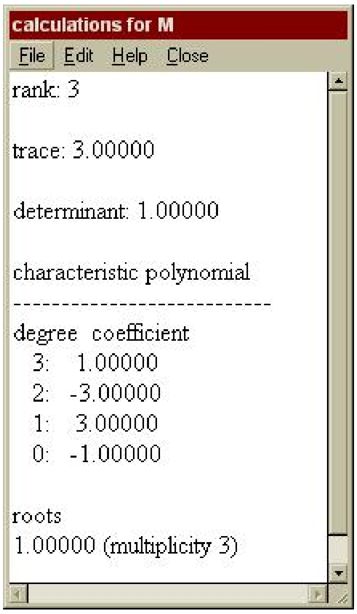

Figura 35

Na disciplina de álgebra linear quando discutimos sistemas lineares , isto é, se ele terá infinitas soluções, uma única solução ou nenhuma usamos o posto da matriz do sistema. Mas o que é o posto? O posto é o número de linhas não nulas de uma matriz na forma escalonada.

Definição 1 *Dada uma matriz $A_{n\times n}$, seja $B_{n\times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a A. O posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é o número $n-p$.*

(Boldrini,p.38)

Quanto aos outros dados fornecidos eles estão diretamente relacionados com o assunto de auto-valores e auto-vetores. Muitas aplicações da álgebra linear envolvem sistemas de n equações lineares e n incógnitas que aparecem no formato $Ax = \lambda x$, onde λ é um escalar. E o que nos interessa em relação aos sistemas neste formato é determinar para quais valores de λ tem uma solução não trivial e é este λ que chamamos de auto valor,

Definição 2 *Se A é uma matriz $n \times n$, então um vetor não-nulo x em $\mathbb{R}^n$ é chamado um auto vetor de A se Ax é um multiplo escalar de x, ou seja,*

$$Ax = \lambda x$$

Para algum escalar λ. O escalar λ é chamado um auto valor de A e dizemos que x é um auto vetor associado a λ.

(Anton,p.240)

Para encontrar os auto-valores de uma matriz A de tamanho $n \times n$ reescrevemos $Ax = \lambda x$ como

$$Ax = \lambda x$$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Para λ ser um auto valor, precisa haver uma solução não nula desta equação. No entanto a equação acima tem uma solução não nula se e somente se,

$$det(\lambda I - A) = 0$$

esta equação é a equação característica de A e quando expandido o determinante $det(\lambda I - A)$ é uma polinômio característico de A.

Para encontramos os auto valores, posto e polinômio caracteristico no **winMat** basta irmos no menu **calc**, **One matrix** e clicar na matriz desejada. Note que esta matriz tem que ser quadrada, e que ela faz o papel da matriz A dita nas definições acima.

Exemplo: Digite a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ Clique no menu **calc**, **One matrix** e por último clique na matriz A. Observe que os resultados ficarão iguais aos mostrados na figura 36

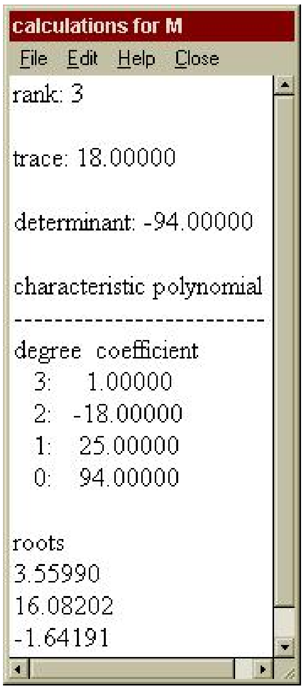

Figura 36

APÊNDICE B – Outras opções do menu Equação

Dentro do menu Equação também temos as opções: paramétricas, implicita, polar, ponto, segmento, que não foram apresentadas dentro do capítulo 4.

Opção paramétrica

Usamos esta opção para definir a curva na forma paramétrica. Quando clicamos em paramétrica do menu, o programa abre uma janela, igual a mostrada na figura 37.

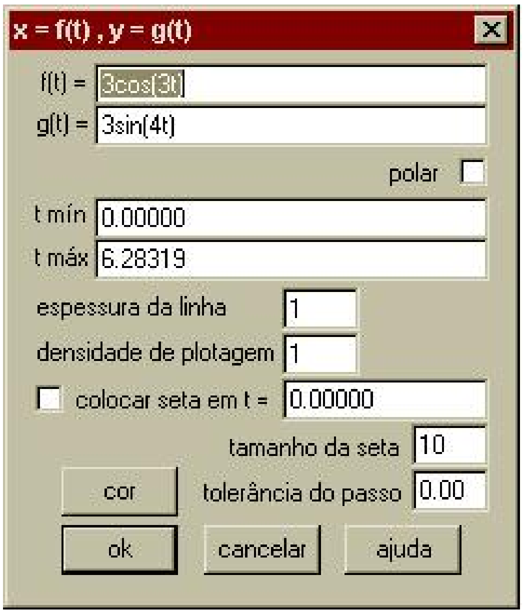

Figura 37

A caixa de diálogo $f(t) =$ e $g(t) =$ representam os parâmetros x e y, respectivamente, na equação paramétrica. As caixas de diálogo **t min** e **t max** determinam os limites inferiores e superiores de t. Na opção **colocar seta em t=** faz com que o programa na hora em que passa por t igual ao valor escolhido coloque uma seta, indicando por onde passa o gráfico em determinado valor de t e o tamanho da seta pode ser modificado na opção **tamanho da seta**, o botão cor muda a cor do gráfico. E se marcamos o item polar ele desenha o a função paramétrica em coordenadas polares. Por exemplo, vejamos o gráfico da equação paramética, $x = 3\cos(3t)$ e $y = 3\sin(4t)$, com o item **polar** marcado e a mesma equação com a opção polar desmarcada nas figuras 38 e 39.

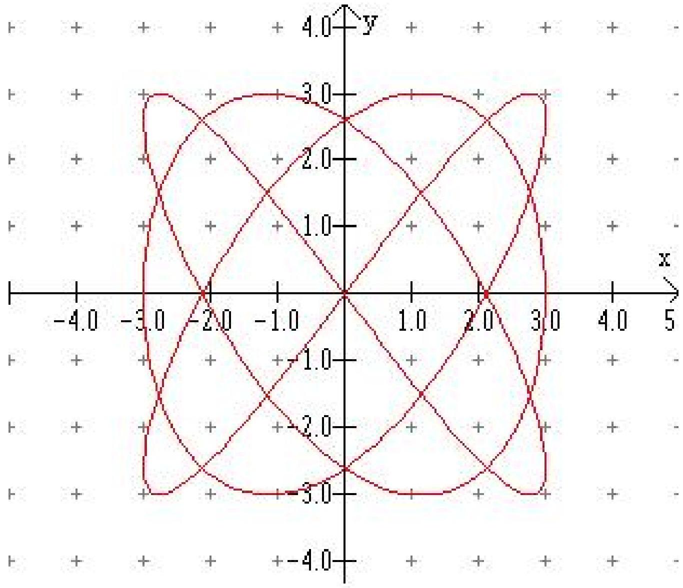

Figura 38: Gráfico desenhado com a opção polar desativada

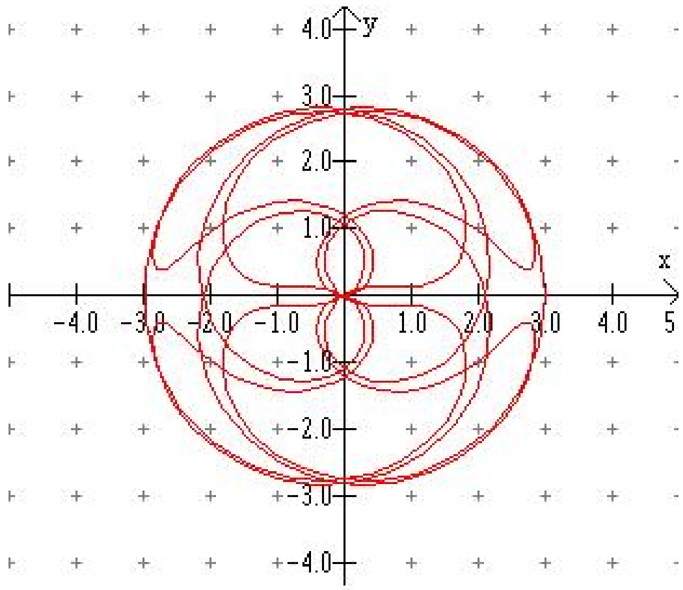

Figura 39: Gráfico desenhado com a opção polar ativada

Na opção paramétricas após a contrução das funções ao apertar o botão **ok** da tela da figura 37, aparece novamente a tela inventário, figura 26, onde podemos fazer todas as mesmas modificações descritas ateriormente.

Opção implícita

Este item do menu serve para a construção de funções definidas implícitamente. Note que quando clicamos na opção **implicita** aparece uma janela igual a mostrada na figura 40.

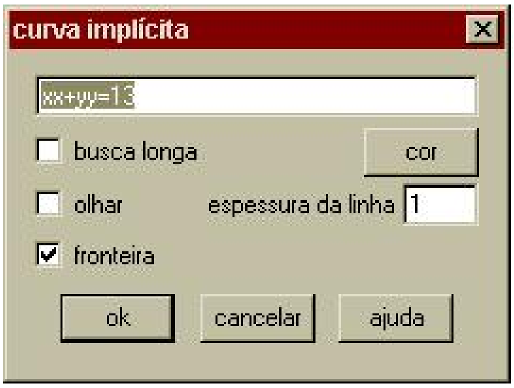

Figura 40

As funções definidas implicitamente são desenhadas por um método especial. O programa procura randomicamente por um ponto inicial que se encaixa na função dada. Uma vez que este ponto é encontrado, a curva, a partir deste ponto, é desenhada ao se calcular numericamente certas equações diferenciais. Tendo em vista que o gráfico desenhado pode não ser conexo (não ter um só pedaço), o programa demora mais tempo procurando por mais pontos iniciais. Se o usuário desejar continuar a busca antes de pressionar a letra Q, em maiúsculo, para parar, selecione a caixa "busca longa". Se você quer ver o andamento do processo de desenho na tela, que deixa o programa mais lento, se escolhermos iste item, selecione **olhar**. Este modo permanece ativo sempre que a janela é atualizada.

Opção polar

Usamos esta caixa para construção de curvas em coordenadas polares e o programa usa a letra t para representar o ângulo polar teta, que é dado em radianos. O domínio padrão é de 0 a 2π. Mas se não quisermos representar valores de r negativos selecionamos então a caixa **somente valores positivos de r**, mostrada na figura 41.

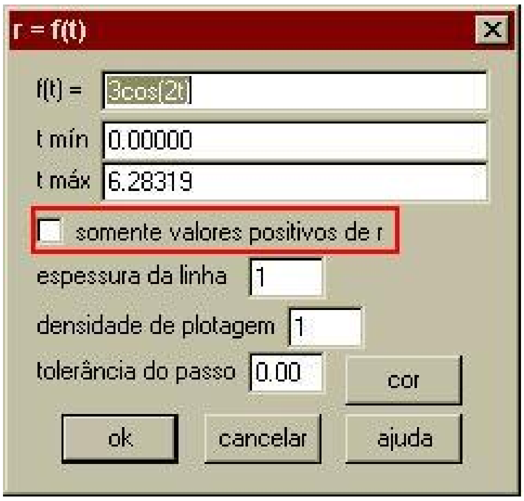

Figura 41

As outras caixas de diálogo, existentes na janela, como: $\boldsymbol{f(t)} =$, **t min**, **t max**, **espessura da linha** e o botão **cor**, desempenham as mesmas funções descritas anteriormente para outras janelas.

Opção Ponto

Podemos marcar pontos individuais na tela, com diferentes tamanhos cores e em cordenadas polares ou cartesianas, onde a opção $\boldsymbol{(x,y)}$ plota o ponto em coordenadas cartesianas e **(r,t)** em polares. Clicando em **Âncoras** em qualquer das duas janelas podemos ver as projeções ortogonais sobre os eixos coordenados. Por exemplo, se clicarmos na **Equação** em seguida na opção **ponto** e escolhendo o menu **(x,y)**, aparecerá uma tela como mostrada na figura 42.

Figura 42

Alterando os campos para $x = 1$, $y = 1$, **tamanho do ponto** para 3, e ativando os itens pontilhado e âcoras. O WinPlot gráficará o ponto conforme figura 43.

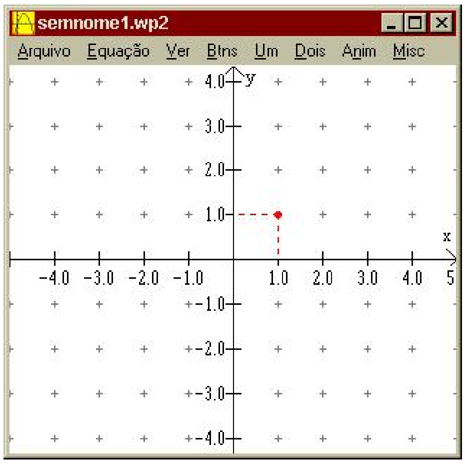

Figura 43

Se tivéssemos escolhido ao invéz de (x, y) a opção (r, t), feito as mesmas alterações descritas anteriormente e ainda ativado os itens: **exibir arcos** e **pontilhado** , o ponto ficaria graficado de acordo com o que mostra a figura 44.

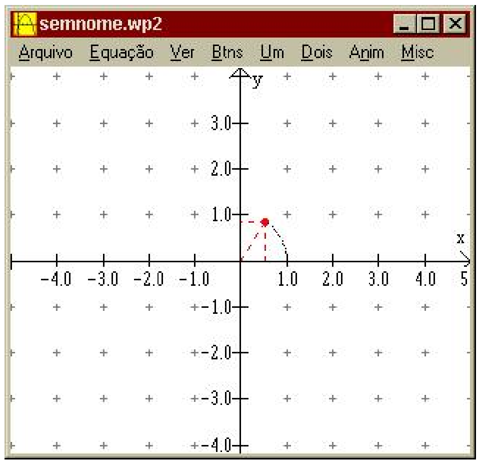

Figura 44

Note que a representação gráfica do ponto ficou diferente, apezar de termos colocados os mesmos dados. Isto acontece porque o menu **(x,y)** representa o ponto em coordenadas cartesianas e o menu **(r,t)** em coordenadas polares.

Opção Seguimento

Neste item construimos segmentos de um ponto (a,b) a outro (c,d) também podem ser pontilhados, tracejados ou de espessuras diferentes. Para construirmos basta entrarmos com as coordenadas (x1, y1) e (x2, y2) nos espaços correspondentes se escolhemos a opção

(x,y) (coordenadas cartesianas) ou, (r1,t1) (r2,t2)(coordenadas polares). Apresentados nas figuras 45 e 46 e clicarmos no botão Ok.

Figura 45: Coordenadas cartesianas

Figura 46: Coordenadas polares

Para representar um segmento em coordenadas cartesianas ou polares o processo é muito semelhante. Mostraremos um exemplo para coordenadas cartesianas. Para isso temos que clicar em Equação, segmento e em seguida em **(x,y)** note que a janela que irá aparecer é a mesma que a da figura 45.

Alterando os campos **x1** para $1,5$, **y1** para 3, **x2** para $3,5$, **y2** para 1, o programa construirá um segmento igual ao mostrado na figura 47.

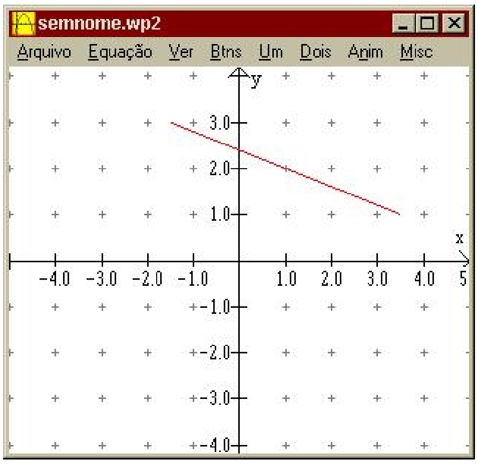

Figura 47: Coordenadas polares

Para construir um segmento em coordenadas polares, basta escolher ao invéz de **(x,y)**, **(r,t)** o restante é feito da mesma maneira que para construção em coordenadas cartesianas.