UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SÉRIES DE FOURIER E MÉTODOS DE FOURIER ESPECTRAIS

Acadêmica: **FABIANA TRAVESSINI**
Orientador: **Dr. JÁUBER C. DE OLIVEIRA**

FLORIANÓPOLIS, DEZEMBRO DE 2004.

FABIANA TRAVESSINI

SÉRIES DE FOURIER E MÉTODOS DE FOURIER ESPECTRAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira

FLORIANÓPOLIS - SC
Dezembro de 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº SCG\68.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora

Profº Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira
Professor Orientador

Profº Dr. Milton dos Santos Brait
Professor Membro

Profº Ruy Coimbra Charão
Professor Membro

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado forças.
Aos meus pais, Valdir e Nelsi,
pela confiança e incentivo.
Ao meu namorado Adriano,
pela ajuda, compreensão e carinho.
A todos meus amigos e familiares,
pelo companheirismo e amizade.
Ao Professor Jáuber,
por ter deixado a minha disposição
um pouco do seu vasto conhecimento e
pela forma profissional que me conduziu.
À banca examinadora,
por aceitarem o convite.
A todos os professores do Curso
de Matemática que me
transmitiram algum conhecimento,
em especial ao Professor
Rubens Starkes.

Conteúdo

Introdução

No primeiro capítulo, apresentamos algumas definições e espaços que serão muito utilizados ao longo deste trabalho. Baseamos a teoria nos espaços pré-Hilbert e de Hilbert, sendo que, neste último, é de grande importância o espaço ser separável, devido a termos uma base enumerável. Demos uma breve introdução a ortogonalidade e projeção, pois a série de Fourier de um elemento é a soma de todas as suas projeções sobre um sistema ortogonal de elementos de um espaço vetorial.

No segundo capítulo apresentamos alguns resultados importantes da teoria de aproximação no espaço das funções periódicas contínuas, $C_{per}(\mathbb{R})$, e no espaço onde as funções e todas as suas derivadas são contínuas e periódicas, C^{∞}_{per}. Para tais resultados, fazemos uso da convolução, translação e teoremas de aproximação de Weierstrass e, desta forma, mostramos a completitude do espaços citados acima na norma/topologia adequada.

No terceiro capítulo estudamos a transformada de Fourier no espaço $S(\mathbb{Z})$, espaço das seqüências rapidamente decrescentes, salientando que estas são seqüências de coeficientes de Fourier de alguma função contínua periódica. Introduzimos as distribuições periódicas generalizando o conceito de função e definimos o espaço L^2_{per} como subespaço de distribuições periódicas. Evitamos, desta forma, a teoria da medida/integral de Lebesgue,usualmente necessária para definir o L^2_{per}. Na seqüência, apresentamos os espaços de

Sobolev periódicos como subespaços de L^2_{per}. Por fim, mostramos que L^2_{per} e os espaços de Sobolev, na norma adequada, são espaços de Hilbert.

Destinamos o quarto capítulo para apresentarmos a teoria clássica das séries de Fourier. A questão central nesta teoria é expressar uma dada função em uma série de senos ou (e) cossenos. Surgem vários problemas: o primeiro, será que tal função pode ser escrita na forma

$$f \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big);$$

com a_k e b_k coeficientes; segundo, como obtemos os coeficientes; por último, resolvida a primeira parte, quando a função f é igual a sua série de Fourier, ou seja, em que sentido a série converge para a função, se pontual ou uniformemente. Para os coeficientes de Fourier, é crucial investigarmos o seu comportamento, em particular, a sua taxa de decaimento. Uma forma de fazê-lo é através do Teorema 4.5.

Os capítulos 2 a 4 contêm o embasamento teórico necessário à compreensão dos métodos de Fourier espectrais, o qual é apresentado no quinto e último capítulo. Destacamos os métodos de Fourier espectrais, que tiveram origem recentemente (década de 70), pela eficiência computacional e elevada precisão na construção de soluções aproximadas de equações diferenciais. Ao final do capítulo, apresentamos alguns exemplos que ilustram as qualidades destes métodos.

Capítulo 1

Aproximação por quadrados mínimos

Agora veremos o processo de aproximação comumente mais trabalhado e mais desenvolvido: quadrados mínimos. Uma vantagem é observarmos uma característica comum de várias aproximações por quadrados mínimos: os coeficientes obtidos são ótimos ao aproximarmos uma função, no sentido que minimiza o erro entre a função e a aproximação encontrada. Esta teoria dos quadrados mínimos provém dos *Espaços pré-Hilbert*.

1.1 Espaços pré-Hilbert

Nos espaços pré-Hilbert, destacamos a ortogonalidade e a projeção que estão diretamente ligadas com produto interno.

Definição 1. Seja X um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{K}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um produto interno sobre X é uma aplicação $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:
(a) $(x_1 + x_2, x_3) = (x_1, x_3) + (x_2, x_3)$. Aditividade à esquerda.

(b) $(\alpha x_1, x_2) = \alpha(x_1, x_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Homogeneidade.

(c) $(x_1, x_2) = \overline{(x_2, x_1)}$ Simetria.

(d) $(x, x) > 0$, $\forall\, x \neq 0$ Positividade.

Um espaço pré-Hilbert é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ munido de um produto interno, $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$.

Exemplo 01. $(\mathbb{K}^n, (\cdot,\cdot))$ com o produto interno definido por $(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ é um espaço pré-Hilbert.

Exemplo 02. Seja $\quad l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}; c_k \in \mathbb{C}, \forall\, k \ e \ \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \right\}$.

$(l^2, (\cdot,\cdot))$ é um espaço pré-Hilbert, onde $\big((c_k), (d_k)\big) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{d}_k$.

Definição 2. Seja X espaço linear sobre $\mathbb{K}$. A aplicação $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \| x \|$ é denominada uma norma em X se, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall\, x \in X$,

(a) $\| x \| \geq 0$.

(b) $\| x \| = 0$ se e, somente se, $x = 0$.

(c) $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$.

(d) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Um espaço linear X munido de uma norma é denominado um espaço linear normado.

Agora, definiremos métrica e espaço métrico, que serão utilizados no capítulo 2 para mostrarmos que o conjunto da funções infinitamente diferenciáveis é completo.

Definição 3. Seja M um conjunto não-vazio. Uma métrica é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$, tal que $\forall\, x, y \in M$,

(a) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

(b) $d(x, y) = d(y, x)$.

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall\, z \in M$.

Um espaço (M, d) é chamado de espaço métrico.

Teorema 1.1 (A Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Em um espaço pré-Hilbert,*

$$|(x_1, x_2)|^2 \leq (x_1, x_1)(x_2, x_2).$$

A igualdade vale se, e somente se, x_1 e x_2 são linearmente independentes.

Demonstração. Se $x_2 = 0$, o teorema se reduz a trivial desigualdade $0 \leq 0$. Sejam $x_2 \neq 0$ e λ um número complexo arbitrário. Da definição (1) item (d),

$$(x_1 + \lambda x_2, x_1 + \lambda x_2) \geq 0.$$

Isto é,

$$0 \leq (x_1, x_1) + \lambda(x_2, x_1) + \bar{\lambda}(x_1, x_2) + \lambda\bar{\lambda}(x_2, x_2)$$

Como vale para todo λ, em particular, para o número

$$\lambda = -\frac{(x_1, x_2)}{(x_2, x_2)}.$$

Portanto,

$$(x_1, x_1) - \frac{(x_1, x_2)(x_2, x_1)}{(x_2, x_2)} - \frac{(x_1, x_2)(x_2, x_1)}{(x_2, x_2)} + \frac{(x_1, x_2)(x_2, x_1)}{(x_2, x_2)^2}(x_2, x_2) \geq 0$$

Então,

$$(x_1, x_1) - \frac{(x_1, x_2)(x_2, x_1)}{(x_2, x_2)} \geq 0.$$

Logo,

$$(x_1, x_2)(x_2, x_1) \leq (x_1, x_1)(x_2, x_2)$$

ou,

$$|(x_1, x_2)|^2 \leq (x_1, x_1)(x_2, x_2).$$

Supomos, agora, que vale a igualdade. Seja $x_2 \neq 0$. Pelo mesmo argumento acima

$$(x_1 + \lambda x_2, x_1 + \lambda x_2) = 0 \; com \; \lambda = -\frac{(x_1, x_2)}{(x_2, x_2)}.$$

Portanto, pela definição (1)(d), $x_1 + \lambda x_2 = 0$ e $x_1 = \dfrac{(x_1, x_2)}{(x_2, x_2)} x_2$. Conseqüentemente, $x_1 = \alpha x_2$, então $|(x_1, x_2)|^2 = |\alpha|^2 (x_2, x_2)^2 = (x_1, x_1)(x_2, x_2)$. $\square$

Teorema 1.2. *Se $(X, (\cdot, \cdot))$ é um espaço pré-Hilbert, a equação*

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}$$

define uma norma em X, e $(X, \| \cdot \|)$ é um espaço linear normado.

Demonstração. A quantidade $\sqrt{(x, x)}$ satisfaz as propriedades da norma. A única propriedade que não é imediatamente evidente é a desigualdade triangular

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

Isto é equivalente a

$$\| x + y \|^2 \leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2$$

ou

$$(x + y, x + y) \leq (x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y)$$

Como $(x + y, x + y) = (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y)$ devemos mostrar que $(x, y) + (y, x) \leq 2\sqrt{(y, y)}\sqrt{(x, x)}$.

Mas, $|(x, y) + (y, x)| \leq |(x, y)| + |(y, x)| \leq 2|(x, y)|$. Portanto, é suficiente mostrar que $|(x, y)| \leq 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$ que é precisamente a desigualdade de Schwarz. $\square$

Teorema 1.3 (A identidade do Paralelogramo). *Seja* $(X, (\cdot, \cdot))$ *um espaço pré-Hilbert. Então,* $\forall\, x, y \in X$*,*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 .$$

Demonstração. Sejam x e y pertencentes a X.

$$\begin{aligned}
\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) \\
&= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\
&\quad + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) \\
&= 2(x, x) + 2(y, y) \\
&= 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 .
\end{aligned}$$

□

Definição 4. Um elemento x é ortogonal a y se, e somente se, $(x, y) = 0$. Denotamos por $x \perp y$.

Definição 5. A projeção de x_1 sobre x_2 é dada por $proj_{x_1} x_2 = \dfrac{(x_1, x_2)}{(x_2, x_2)}\, x_2$. Quando $\| x_2 \|^2 = 1$, então $proj_{x_1} x_2 = (x_1, x_2)\, x_2$.

Sejam x_1 e x_2 elementos não-nulos. Selecionamos $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que λx_2 é a projeção de x_1 sobre x_2. Então $\lambda x_2 \perp x_1 - \lambda x_2$. Ou seja, $(\lambda x_2, x_1 - \lambda x_2) = 0$. Como $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ pois está relacionada com comprimento, temos:

$$\begin{aligned}
\lambda(x_2, x_1) - \lambda\bar{\lambda}(x_2, x_2) &= 0 \\
\lambda(x_1, x_2) - \lambda^2(x_2, x_2) &= 0 \\
\lambda((x_1, x_2) - \lambda(x_2, x_2)) &= 0 \\
(x_1, x_2) - \lambda(x_2, x_2) &= 0 \\
\lambda &= \frac{(x_1, x_2)}{(x_2, x_2)}.
\end{aligned}$$

1.2 Sistemas ortonormais

Nesta seção, destacamos o teorema de ortonormalização de Gram-Schmidt, pois se temos um conjunto de elementos linearmente independente, mas não necessariamente ortogonal, pode ser ortonormalizado. Ou seja, apartir deste conjunto linearmente independente podemos encontrar outro que seja ortonormal.

Definição 6. Um conjunto S de elementos de um espaço pré-Hilbert é chamado ortonormal se $\forall\, x, y \in S$

$$(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq y, \\ 1 & x = y. \end{cases}$$

Teorema 1.4 (Teorema de Pitágoras). *Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são ortogonais então*

$$\| x_1 + x_2 + \ldots + x_n \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + \ldots + \| x_n \|^2 .$$

Demonstração. Basta escrevermos como produto interno e aplicarmos a definição de ortogonalidade. □

Teorema 1.5. *Todo conjunto finito de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ortogonal, com $x_i \neq 0$, é linearmente independente.*

Demonstração. Seja $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$. Então, para todo k,

$$0 = (0, x_k) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, x_k) = a_k(x_k, x_k).$$

Isto implica que $a_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$. □

Teorema 1.6 (Gram-Schmidt). *Sejam $x_1, x_2, \ldots,$ uma seqüência finita ou infinita de elementos, tais que para um número finito $x_1, x_2, \ldots, x_k$ são* *linearmente independentes. Então existe constantes*

$$\begin{array}{lll} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \vdots & & \end{array}$$

tais que os elementos

$$\begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1 \\ x_2^* &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ x_3^* &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

são ortonormais:

$$(x_i^*, x_j^*) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots.$$

Demonstração. Seja, recursivamente,

$$\begin{aligned} & y_1 = x_1 \quad e \quad x_1^* = y_1/ \parallel y_1 \parallel \\ & y_2 = x_2 - (x_2, x_1^*)x_1^* \quad e \quad x_2^* = y_2/ \parallel y_2 \parallel \\ & \vdots \\ & y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(x_{n+1}, x_k^*) \quad e \quad x_{n+1}^* = y_{n+1}/ \parallel y_{n+1} \parallel \end{aligned}$$

Vemos desta estrutura de recursão que y_{n+1}, e portanto, x_{n+1}, é uma combinação linear de $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. $\parallel y_i \parallel$ não é zero. Os x_i^* são normais:

$$(x_i^*, x_i^*) = \left(\frac{y_i}{\parallel y_i \parallel}, \frac{y_i}{\parallel y_i \parallel}\right) = \frac{1}{\parallel y_i \parallel^2}(y_i, y_i) = 1.$$

Agora, demonstramos por indução que x_{n+1}^* ou y_{n+1} é ortogonal a $x_n^*, x_{n-1}^*, \ldots, x_1^*$. Verificamos que $(y_2, x_1^*) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}(y_2, x_1^*) &= \big(x_2 - (x_2, x_1^*)x_1^*, x_1^*\big)\\ &= (x_2, x_1^*) - \big((x_2, x_1^*)x_1^*, x_1^*\big)\\ &= (x_2, x_1^*) - (x_2, x_1^*)(x_1^*, x_1^*) = 0.\end{aligned}$$

Assumimos que para $i \le n$, $j < i$ temos provado $(y_i, x_j^*) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}&x_2^* \perp x_1^*\\ &x_3^* \perp x_1^*, x_2^*\\ &\vdots\\ &x_i^* \perp x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_{i-1}^*.\end{aligned}$$

Queremos mostrar que $x_{i+1}^* \perp x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_i^*$. Então, para $j \le n$

$$\begin{aligned}(y_{n+1}, x_j^*) &= \left(x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(x_{n+1}, x_k^*)x_k^*, x_j^*\right)\\ &= (x_{n+1}, x_j^*) - \sum_{k=1}^{n}(x_{n+1}, x_k^*)(x_k^*, x_j^*)\\ &= (x_{n+1}, x_j^*) - (x_{n+1}, x_j^*) = 0\end{aligned}$$

$\square$

Corolário 1. *Os coeficientes a_{ii} são positivos.*

Demonstração. Do Teorema (1.6), $\quad x_2^* = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \;\; y_1 = x_1$ e

$x_1^* = y_1/ \parallel y_1 \parallel$, o que implica em $y_1 = x_1^* \parallel y_1 \parallel$. Assim,

$$\begin{aligned}
x_2^* &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\
(x_2^*, x_2^*) &= a_{21}(x_1, x_2^*) + a_{22}(x_2, x_2^*) \\
1 &= a_{21}(x_1^* \parallel y_1 \parallel, x_2^*) + a_{22}(x_2, x_2^*) \\
1 &= a_{21} \parallel y_1 \parallel (x_1^*, x_2^*) + a_{22}(x_2, x_2^*) \\
1 &= a_{22}(x_2, x_2^*)
\end{aligned}$$

Agora, $y_2 = x_2 - (x_2, x_1^*)x_1^*$ e $x_2^* = y_2/ \parallel y_2 \parallel$. Multiplicamos ambos os lados desta penúltima equação por x_2^*, temos:

$$\begin{aligned}
(y_2, x_2^*) &= (x_2, x_2^*) - (x_2, x_1^*)(x_1^*, x_2^*) \\
(x_2^* \parallel y_2 \parallel, x_2^*) &= (x_2, x_2^*) \\
\parallel y_2 \parallel (x_2^*, x_2^*) &= (x_2, x_2^*) \\
\parallel y_2 \parallel &= (x_2, x_2^*)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$1 = a_{22} \parallel y_2 \parallel \Rightarrow a_{22} = \parallel y_2 \parallel^{-1} .$$

Como $y_2 \neq 0$, $a_{22} > 0$.

Generalizando: $i > 2$

$$\begin{aligned}
x_i^* &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i \\
(x_i^*, x_i^*) &= a_{i1}(x_1, x_i^*) + a_{i2}(x_2, x_i^*) + \ldots + a_{ii}(x_i, x_i^*) \\
1 &= a_{i1}(x_1^* \parallel y_1 \parallel, x_i^*) + a_{i2}(x_2, x_i^*) + \ldots + a_{ii}(x_i, x_i^*) \\
1 &= a_{i2}(x_2, x_i^*) + \ldots + a_{ii}(x_i, x_i^*)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(x_{n+1}, x_k^*) \\
(y_k, x_i^*) &= (x_k, x_i^*) - \sum_{l=1}^{k-1}(x_k, x_l^*)(x_l^*, x_i^*) \\
(x_k^* \parallel y_k \parallel, x_i^*) &= (x_k, x_i^*) \\
\parallel y_k \parallel (x_k^*, x_i^*) &= (x_k, x_i^*) \\
\parallel y_k \parallel \delta_{ki} &= (x_k, x_i^*)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$1 = a_{ii} \parallel y_k \parallel \Rightarrow a_{ii} = \parallel y_k \parallel^{-1} .$$

Como $y_i \neq 0$, $a_{ii} > 0$. □

Corolário 2. *Podemos encontrar constantes*

$$\begin{array}{lll}
b_{11} & & \\
b_{21} & b_{22} & \\
b_{31} & b_{32} & b_{33} \\
\vdots & &
\end{array}$$

com $b_{ii} > 0$ *tais que*

$$\begin{aligned}
&x_1 = b_{11}x_1^* \\
&x_2 = b_{21}x_1^* + b_{22}x_2^* \\
&\vdots \\
&x_n = b_{n1}x_1^* + b_{n2}x_2^* + \cdots + b_{nn}x_n^*.
\end{aligned}$$

Demonstração.

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} x_1^*, \quad \text{então} \quad b_{11} = \frac{1}{a_{11}}$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{1}{a_{22}} x_2^* = -\frac{a_{21}}{a_{22}a_{11}} x_1^* + \frac{1}{a_{22}} x_2^*$$

então $b_{21} = \dfrac{-a_{21}}{a_{22}a_{11}}$, $\quad b_{22} = \dfrac{1}{a_{22}}$. O argumento é análogo para $i = 3, \ldots, n$. Como a_{jj} são positivos, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\quad b_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}} = \| y_i \| > 0$. □

Corolário 3. $x_n^* \perp x_1$, $\; x_n^* \perp x_2 \;$, ..., $\; x_n^* \perp x_{n-1}$.

Demonstração. $x_k = b_{k1}x_1^* + b_{k2}x_2^* + \cdots + b_{kk}x_k^*$. Multiplicando esta última equação por x_n^*, temos

$$(x_n^*, x_k) = \left(x_n^*, \sum_{i=1}^{k} b_{k1} x_i^* \right) = \sum_{i=1}^{k} b_{ki}(x_n^*, x_i^*) = 0, \quad \textit{se } k < n.$$

□

Observação 1: *Na seqüência deste trabalho, usaremos o asterisco* $(*)$ *para simbolizar os elementos ortonormais e para designar os espaços conjugados.*

1.3 Expansões de Fourier

Definição 7. Seja $x_1^*, x_2^*, \ldots,$ uma seqüência finita ou infinita de elementos ortonormais. Seja y um elemento abitrário. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n^*) x_n^*$ é a série de Fourier de y. As constantes (y, x_n^*) são conhecidas como os coeficientes de Fourier de y.

Freqüentemente, escrevemos

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n^*) x_n^* \tag{1.1}$$

para indicar que a soma é associada a y, ou seja, é aproximação de y. Podemos também escrever

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} (Proj_y \, x_n^*)$$

ou seja, a série de Fourier de um elemento é a soma de todas as suas projeções sobre um sistema ortonormal de elementos.

Se $x_1, x_2, \ldots$, não-nulos, são ortogonais, mas não necessariamente normais, então $x_k^* = \dfrac{x_k}{\| x_k \|}$ são ortonormais, tal que podemos reescrever (1.1) como

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(y, \frac{x_k}{\| x_k \|} \right) \frac{x_k}{\| x_k \|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y, x_k)}{(x_k, x_k)} x_k.$$

isto é, podemos interpretar que y é aproximado pela soma de todas as suas projeções sobre o sistema x_n.

No caso simples de um espaço de dimensão finita, a expansão de Fourier de um elemento coincide com o elemento.

Teorema 1.7. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos independentes e x_i^* os $x_i's$ ortonormalizados. Se $w = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$, então*

$$w = \sum_{k=1}^{n} (w, x_k^*) x_k^*.$$

Demonstração. Do corolário (2), temos

$$\begin{aligned} w &= a_1(b_{11} x_1^*) + a_2(b_{21} x_1^* + b_{22} x_2^*) + \cdots + a_n(b_{n1} x_1^* + \cdots + b_{nn} x_n^*) \\ &= c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \cdots + c_n x_n^* \end{aligned}$$

Agora, para $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} (w, x_k^*) &= (c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \cdots + c_n x_n^*, x_k^*) \\ &= c_1(x_1^*, x_k^*) + \cdots + c_k(x_k^*, x_k^*) + \cdots + c_n(x_n^*, x_k^*) = c_k, \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema. $\square$

1.4 Propriedades ótimas da expansão de Fourier

Para as expansões de Fourier finitas, temos a seguinte propriedade de minimização.

Teorema 1.8. *Sejam* $x_1^*, x_2^*, \ldots,$ *um sistema ortonormal e seja* y *um elemento arbitrário. Então,*

$$\left\|y - \sum_{i=1}^{N}(y, x_i^*)x_i^*\right\| \leq \left\|y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*\right\|$$

para qualquer seleção de coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_N$*.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\left\|y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*\right\|^2 &= \left(y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*, y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*\right) \\
&= (y, y) - \sum_{i=1}^{N} a_i (x_i^*, y) - \sum_{i=1}^{N} \bar{a}_i (y, x_i^*) + \sum_{i,j=1}^{N} a_i \bar{a}_j (x_i^*, x_j^*) \\
&= (y, y) - \sum_{i=1}^{N} a_i (x_i^*, y) - \sum_{i=1}^{N} \bar{a}_i (y, x_i^*) + \sum_{i=1}^{N} |a_i|^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{N}(x_i^*, y)(y, x_i^*) - \sum_{i=1}^{N}(x_i^*, y)(y, x_i^*) \\
&= (y, y) - \sum_{i=1}^{N} |(y, x_i^*)|^2 + \sum_{i=1}^{N} |a_i - (y, x_i^*)|^2 \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

A última igualdade provém de

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |a_i - (y, x_i^*)|^2 &= \sum_{i=1}^{N} [a_i - (y, x_i^*)]\overline{[a_i - (y, x_i^*)]} \\
&= \sum_{i=1}^{N} [a_i - (y, x_i^*)][\overline{a_i} - \overline{(y, x_i^*)}] \\
&= \sum_{i=1}^{N} [a_i - (y, x_i^*)][\overline{a_i} - (x_i^*, y)] \\
&= \sum_{i=1}^{N} |a_i|^2 - \sum_{i=1}^{N} a_i(x_i^*, y) - \sum_{i=1}^{N} \bar{a}_i(y, x_i^*) + \sum_{i=1}^{N} (x_i^*, y)(y, x_i^*).
\end{aligned}$$

Como os primeiros dois termos do último membro da equação (1.2) são positivos e independem dos $a_1, a_2, \ldots, a_N$ escolhidos, é claro que o mínimo de $\left\| y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \right\|$ será quando e, somente quando,

$$a_i = (y, x_i^*), \qquad i = 1, 2, \ldots, N;$$

isto é, quando os $a_i's$ são os coeficientes de Fourier de y. □

Os problemas de quadrados mínimos na análise numérica podem ser formulados em termos de encontrar $\min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \right\|$ num apropriado espaço pré-Hilbert. O próximo corolário nos dá a solução de tais problemas.

Corolário 4. *Seja $x_1, \ldots, x_N$ um conjunto de elementos independentes. O problema de encontrar uma combinação linear de $x_1, \ldots, x_N$ a qual minimiza $\left\| y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \right\|$ é resolvido por $\sum_{i=1}^{N} (y, x_i^*) x_i^*$.*

Corolário 5. $\min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \right\|^2 = \| y \|^2 - \sum_{i=1}^{N} |(y, x_i^*)|^2$

Demonstração. Inserimos $a_i = (y, x_i^*)$ na igualdade (1.2) do Teorema (1.8).

□

Corolário 6 (Desigualdade de Bessel). *Se x_i^* são elementos ortonormais então*

$$\sum_{i=1}^{N} |(y, x_i^*)|^2 \leq \| y \|^2$$

Corolário 7. *Se x_i^* são uma seqüência infinita de elementos ortonormais então*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(y, x_i^*)|^2 \leq \| y \|^2$$

Corolário 8. *Se x_i^* são uma seqüência infinita de elementos ortonormais então*

$$lim_{i \to \infty} (y, x_i^*) = 0$$

isto é, os coeficientes de Fourier de y se aproximam de zero.

Corolário 9. *Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearmente independentes. Seja $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ os $x_k's$ ortonormalizados de acordo com o Teorema (1.6). Então, para toda a seleção de constantes $a_1, \ldots, a_{n-1}$ temos*

$$\| y \| = \left\| \frac{x_n^*}{a_{nn}} \right\| \leq \| a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n \| .$$

Demonstração. Pelo corolário (4), o problema

$$\min_{b_i} \| x_n - (b_1 x_1 + \ldots + b_{n-1} x_{n-1}) \|$$

é resolvido por $\sum_{k=1}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^*$, mas do Teorema (1.6) isto é precisamente $x_n - y_n$. □

Aproximações por quadrados mínimos (as melhores aproximações num espaço pré-Hilbert) de um elemento y por uma combinação de elementos independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ podem ser expressas de duas formas:

(1) como uma combinação linear $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ dos elementos dados;

(2) como uma combinação linear $b_1x_1^* + \ldots + b_nx_n^*$ dos $x_i's$ ortonormalizados. Embora (1) possa ser mais conveniente, (2) possui a vantagem de *permanência*. Isto quer dizer que, se adicionamos um elemento x_{n+1} para aproximação de y por combinação linear de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, no caso (1) temos $a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n + a_{n+1}'x_{n+1}$, onde os a_k' não possuem uma relação simples com os a_k. Já no caso (2), mantemos os primeiros n coeficientes e só adicionamos mais um.

1.5 As equações normais

Teorema 1.9. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos independentes e sejam $x_1^*, \ldots, x_n^*$ os $x's$ ortonormalizados. Então, $\forall\ y \in X$,*

$$\left(y - \sum_{k=1}^{n}(y, x_k^*)x_k^*\right) \perp x_j^*.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\left(y - \sum_{k=1}^{n}(y, x_k^*)x_k^*, x_j^*\right) &= (y, x_j^*) - \sum_{k=1}^{n}(y, x_k^*)(x_k^*, x_j^*) \\ &= (y, x_j^*) - (y, x_j^*) = 0\end{aligned}$$

□

Corolário 10. *Se y é a melhor aproximação por combinações lineares de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então y é ortogonal a cada x_j.*

Teorema 1.10. *Seja $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ a melhor aproximação de y de uma combinação linear de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (independentes). Então, os coeficientes*

a_i são a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} &a_1(x_1, x_1) + a_2(x_2, x_1) + \cdots + a_n(x_n, x_1) = (y, x_1) \\ &a_1(x_1, x_2) + a_2(x_2, x_2) + \cdots + a_n(x_n, x_2) = (y, x_2) \\ &\vdots \\ &a_1(x_1, x_n) + a_2(x_2, x_n) + \cdots + a_n(x_n, x_n) = (y, x_n) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Essas equações são conhecidas como as equações normais.

Demonstração. Pelo corolário anterior, $(y - a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, x_j) = 0$. Quando expandido, isto é a j-ésima equação do sistema (1.3). □

1.6 Fechamento e suas conseqüências

Definição 8. Um sistema finito ou infinito de elementos $x_1, x_2, \ldots$, em um espaço linear normado X é dito *fechado* se qualquer elemento $x \in X$ pode ser aproximado por uma combinação linear finita dos x_i. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existem constantes $a_1, \ldots, a_n$ tais que

$$\| x - (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) \| \leq \varepsilon.$$

Antes de estudarmos as implicações do fechamento, é importante relembrarmos alguns conceitos topológicos. Seja (X, d) um espaço métrico munido da métrica $d(x, y)$. Se $x_o \in X$, o conjunto $B(x_o, r)$ que consiste em todos os elementos de $x \in X$ para os quais $d(x, x_o) < r$ é chamado de bola aberta. Um elemento x de um subconjunto S é chamado um elemento interior de S se existe um $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset S$. Em um espaço métrico, definimos a noção de convergência de seqüências da seguinte forma.

Definição 9. Em um espaço métrico (X, d), uma seqüência de elementos

(x_n) é dita convergente para um elemento $x \in X$ se e, somente se,

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$

Em um espaço linear normado, $(X, \| \cdot \|)$, uma seqüência (x_n) é dita convergente para um elemento $x \in X$ se e, somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \| x - x_n \| = 0. \tag{1.4}$$

A convergência do tipo (1.4) é chamada convergência em norma.

Definição 10. Uma seqüência de elementos de X, (x_n), é chamada uma seqüência de Cauchy, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$, $\forall\, m, n > N(\varepsilon)$. Um espaço métrico (X, d) é chamado *completo* se toda seqüência de Cauchy tem limite em X. Um espaço linear normado completo é chamado de *espaço de Banach*. Um espaço de *Hilbert* é um espaço linear munido com produto interno (pré-Hilbert), que é um espaço de Banach com $\| \cdot \|_{(\cdot,\cdot)}$, norma que provém do produto interno.

Exemplo 03. $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{K}; f$ é contínua$\}$ é um espaço linear normado por $\| f \| = \max\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$. Este espaço é completo com esta norma. De fato, se $\max\limits_{a\leq x\leq b} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, $\forall\, m, n > N(\varepsilon)$, então dado $x \in [a, b]$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \max_{a\leq x\leq b} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \tag{1.5}$$

se $m, n \geq \varepsilon$. Como $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é um espaço de Banach, existe $\eta_x \in \mathbb{K}$ tal que $\eta_x = \lim\limits_{n\infty} f_n(x)$ em $(K, |\cdot|)$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \eta_x$. Fazendo $n \to \infty$ em (1.5), obtemos $\| f_n - f \|_\infty \to 0$. Logo, f_n converge uniformemente em $[a, b]$ para a função f, que é contínua em $[a, b]$ devido à continuidade uniforme das f_n. $\square$

Exemplo 04. Por outro lado, se $X = C[a,b]$ com a norma $\| f \|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$, então X não é completo. Mostraremos isto exibindo uma seqüência de Cauchy em X a qual não converge para um elemento de X. De fato, para simplificar, tomamos $a = -1$, $b = 1$ e seja f_n a seqüência de funções contínuas

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Seja f a função descontínua

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Agora,

$$f(x) - f_n(x) = \begin{cases} 0 & \{-1 \leq x \leq -\frac{1}{n}\} \cup \{\frac{1}{n} \leq x \leq 1\} \\ -1 - nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ 1 - nx & 0 < x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Assim,

$$\| f(x) - f_n(x) \|^2 = \int_{-1/n}^{0} (-1 - nx)^2 dx + \int_0^{1/n} (1 - nx)^2 dx = \frac{2}{3n}.$$

Portanto, $lim_{n\to\infty} \| f - f_n \|^2 = 0$. f_n converge em norma para f, logo é uma seqüência de Cauchy, mas não converge em norma para uma função contínua g. De fato, supomos que existe uma função contínua g tal que $\lim_{n\to\infty} \| g - f_n \|^2 = 0$. Então

$$\| f - g \| = \| f - f_n + f_n - g \| \leq \| f - f_n \| + \| g - f_n \| .$$

Como $\| g - f_n \| \longrightarrow 0$ e $\| f - f_n \| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos $\| f - g \| = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \| f - g \|^2 &= \int_{-1}^{0} (-1 - g(x))^2 dx + \int_{0}^{1} (1 - g(x))^2 dx \\ &= \int_{-1}^{0} (1 + g(x))^2 dx + \int_{0}^{1} (1 - g(x))^2 dx = 0 \end{aligned}$$

somente se $g(x) = -1$ para $-1 \leq x \leq 0$ e $g(x) = 1$ para $0 < x \leq 1$. Isto é, temos uma seqüência de funções contínuas f_n que convergem para uma função descontínua f, mostrando que X não é completo na norma dada. $\square$

Agora, mostraremos o teorema fundamental das expansões ortonormais de Fourier.

Teorema 1.11. *Seja $x_1^*, x_2^*, \ldots$ uma seqüência de elementos ortonormais em um espaço pré-Hilbert X. A seqüência consiste de um número finito de elementos. Considere as seguintes afirmações:*

(A) Os x_i^* são fechados em X.

(B) A série de Fourier de $y \in X$ converge em norma para y, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} (y, x_k^*) x_k^* \right\| = 0.$$

(C) Vale a identidade de Parseval. Isto é, $\forall\, y \in X$,

$$\| y \|^2 = (y, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |(y, x_n^*)|^2.$$

(C') Vale a identidade de Parseval estendida. Isto é, $\forall\, x, y \in X$

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, x_n^*)(x_n^*, y).$$

(D) Não há um sistema ortonormal maior contendo $x_1^*, x_2^*, \ldots,$.

(E) Os elementos $x_1^*, x_2^*, \ldots,$ possem a propriedade de fechamento. Isto é, $y \in X$ e $(y, x_k^*) = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$ implica que $y = 0$.

(F) Um elemento de X é unicamente determinado pelos seus coeficientes de Fourier. Isto é, se $(w, x_k^*) = (y, x_k^*)$ $k = 1, 2, \ldots,$ então $w = y$.
Então

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow C' \rightarrow D \leftrightarrow E \leftrightarrow F. \tag{1.6}$$

Se X é um espaço de Hilbert, $D \rightarrow C$ e as sete afirmações acima são equivalentes:

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow C' \leftrightarrow D \leftrightarrow E \leftrightarrow F. \tag{1.7}$$

Demonstração.
$(A) \rightarrow (B)$. Pelo teorema (1.8), temos que

$$\left|\left|y - \sum_{k=1}^{n}(y, x_k^*)x_k^*\right|\right| \leq \left|\left|y - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*\right|\right|.$$

Por hipótese os x_1^*, x_2^* são fechados, para todo $y \in X$, dado $\varepsilon > 0$ existe uma combinação linear do x_i^* tal que $\left|\left|y - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*\right|\right| \leq \varepsilon$.

Então $\lim_{n\to\infty}\left|\left|y - \sum_{k=1}^{n}(y, x_k^*)x_k^*\right|\right| = 0$.

$(B) \rightarrow (A)$. Por hipótese, temos que $\forall y \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq N$ $\left|\left|y - \sum_{k=1}^{n}(y, x_k^*)x_k^*\right|\right| \leq \varepsilon$. Ou seja, podemos aproximar cada elemento y pelos seus coeficientes de Fourier. Logo, os x_i^* são fechados.

$(B) \rightarrow (C')$. Sejam $x, y \in X$. Pela ortogonalidade,

$$\begin{aligned}
\left(x - \sum_{k=1}^{n}(x, x_k^*)x_k^*, y - \sum_{k=1}^{n}(y, x_k^*)x_k^*\right) &= (x, y) - \left(x, \sum_{k=1}^{n}(y, x_k^*)x_k^*\right) \\
&\quad - \left(\sum_{k=1}^{n}(x, x_k^*)x_k^*, y\right) + \sum_{k=1}^{n}(x, x_k^*)(y, x_k^*)(x_k^*, x_k^*) \\
&= (x, y) - \sum_{k=1}^{n}\overline{(y, x_k^*)}(x, x_k^*) - \sum_{k=1}^{n}(x, x_k^*)(x_k^*, y) + \sum_{k=1}^{n}(x, x_k^*)\overline{(y, x_k^*)} \\
&= (x, y) - \sum_{k=1}^{n}(x, x_k^*)(x_k^*, y).
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left|(x,y)-\sum_{k=1}^{n}(x,x_k^*)(x_k^*,y)\right| \leq \left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,x_k^*)x_k^*\right\| \cdot \left\|y-\sum_{k=1}^{n}(y,x_k^*)x_k^*\right\|$$

Como $\left\|y-\sum_{k=1}^{n}(y,x_k^*)x_k^*\right\| \to 0$, quando $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,x_k^*)(x_k^*,y)=(x,y)$.
$(C') \to (C)$. Tomamos $x=y$ em (C'),

$$\| y \|^2=(y,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(x,x_k^*)(x_k^*,y)=\sum_{k=1}^{\infty}|(y,x_k^*)|.$$

$(C) \to (B)$ Do corolário (5)

$$0 \leq \left\|y-\sum_{k=1}^{n}(y,x_k^*)x_k^*\right\|^2=\| y \|^2-\sum_{k=1}^{n}|(y,x_k^*)|^2.$$

Tomamos limite e obtemos a implicação.

Desta forma, temos $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow C'$.

$(A) \to (D)$. Supomos que $x_1^*, x_2^*, \ldots, w$, com $w \neq x_i^*$, um sistema ortonormal. Este sistema aumentado é também fechado em X. Como $(A) \to (C')$, temos

$$\| w \|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(w,x_k^*)|^2+(w,w)$$
$$\| w \|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(w,x_k^*)|^2.$$

Comparando as duas equações acima, $\| w \|=0$. Contradição, pois $\| w \|=1$. Logo, $(A) \to (D)$.

$(D) \leftrightarrow (E)$. Supomos que $y \in X$, $y \neq 0$ e (y,x_k^*), $k=1,2,\ldots$. Então, $x_1^*, x_2^*, \ldots, \dfrac{y}{\| y \|}$ será um sistema ortonormal maior que $x_1^*, x_2^*, \ldots$. Isto contradiz (D). Portanto, $(D) \leftrightarrow (E)$.

$(E) \to (F)$. Supomos que $(w,x_k^*)=(y,x_k^*)$, $k=1,2,\ldots$.

Então $0=(w,x_k^*)-(y,x_k^*)=(w-y,x_k^*)$, $k=1,2,\ldots$. Por hipótese, $w-y=0$, $w=y$.

$(F) \rightarrow (E)$. Supomos $z \neq 0$ com $(z, x_k^*) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$. Para algum y, $(y, x_k^*) = (y + z, x_k^*)\ k = 1, 2, \ldots,$. Então y e $(y + z)$ serão dois elementos distintos com o mesmo coeficiente de Fourier. Isto contradiz (F). Portanto, $(F) \rightarrow (E)$.

Isto completa a cadeia de implicações (1.6).

Agora, assumimos que X é completo e mostraremos que $(F) \rightarrow (B)$, estabelecendo as implicações (1.7). Seja $w \in X$ e consideramos $s_n = \sum_{k=1}^{n} (w, x_k^*) x_k^*$. Para $n > m$, temos

$$s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} (w, x_k^*) x_k^*$$
$$\| s_n - s_m \|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |(w, x_k^*)|^2.$$

Pelo corolário (6), $\sum_{k=1}^{\infty} |(w, x_k^*)| < \infty$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que $\sum_{k=m+1}^{n} |(w, x_k^*)|^2 \leq \varepsilon$ para todo $m, n \geq N(\varepsilon)$. Ou seja, (s_n) é uma seqüência de Cauchy. Como assumimos X completo, (s_n) converge para um elemento $s \in X$:

$$\lim_{n \to \infty} \| s - s_n \| = 0. \tag{1.8}$$

Resta-nos mostrar que $w = s$.

Seja μ fixo com $n \geq \mu$. Então

$$\begin{aligned}(s - s_n, x_\mu^*) = (s, x_\mu^*) - (s_n, x_\mu^*) &= (s, x_\mu^*) - \sum_{k=1}^{n} (w, x_k^*)(x_k^*, x_\mu^*) \\ &= (s, x_\mu^*) - (w, x_\mu^*).\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|(s, x_\mu^*) - (w, x_\mu^*)| = |(s - s_n, x_\mu^*)| \leq \| s - s_n \| \cdot \| x_\mu^* \| = \| s - s_n \| .$$

Tendo em vista (1.8), $(s, x_\mu^*) = (w, x_\mu^*), \mu = 1, 2, \ldots$. Pela hipótese (F), $w = s$. Então podemos reescrever (1.8) como

$$\lim_{n\to\infty} \left\| w - \sum_{k=1}^{n} (w, x_k^*) x_k^* \right\| = 0,$$

mas isto é precisamente (B). □

A propriedade de fechamento em (E) pode ser definida para todo conjunto de elementos.

Definição 11. Um conjunto de elementos S em um espaço pré-Hilbert X é completo se $(y, x) = 0$, $\forall\, x \in S$, implica $y = 0$.

Teorema 1.12 (Riez). *Seja X um espaço de Hilbert e sejam $a_k's$ constantes tais que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. Seja (x_k^*) uma seqüência ortornormal completa. Então, existe um $y \in X$ tal que*

$$(y, x_k^*) = a_k,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{1.9}$$

Demonstração. Consideremos os elementos $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^*$. Agora, para $n > m$, $\| s_n - s_m \|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2$. Por hipótese, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, (s_n) é uma seqüência de Cauchy e existe y tal que $\lim_{n\to\infty} \| y - s_n \| = 0$. Com k fixo e $n \geq k$

$$\| y - s_n \| = \| y - s_n \| \geq |(y - s_n, x_k^*)| = |(y, x_k^*) - (s_n, x_k^*)| = |(y, x_k^*) - a_k|.$$

Esta última igualdade provém de $(s_n, x_l^*) = \sum_{k=1}^{n} (x_k^*, x_l^*) = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{kl} = a_l$. Quando $n \to \infty$, obtemos a equação (1.9). □

Vimos no Teorema 1.8 que existe uma distância mínima de um elemento dado a uma variedade linear. Como podemos estender este fato para subconjuntos mais gerais? O próximo teorema fornece uma condição de grande importância.

Teorema 1.13. *Sejam X um espaço pré-Hilbert. Seja M um subconjunto fechado, convexo, não-vazio de X. Seja $y \in X$ e seja*

$$d = \inf_{x \in M} \| y - x \| . \tag{1.10}$$

Então, existe um único $x_o \in M$ tal que $\| y - x_o \| = d$.

Demonstração. Pela equação (1.10), podemos encontrar uma seqüência de elementos $x_n \in M$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \| y - x_n \| = d. \tag{1.11}$$

Pela identidade do Paralelogramo 1.3,

$$\begin{aligned} \| x_m - x_n \|^2 &= 2 \| x_m - y \|^2 + 2 \| x_n - y \|^2 - \| 2y - x_m - x_n \|^2 \\ &= 2 \| x_m - y \|^2 + 2 \| x_n - y \|^2 - 4 \| y - \frac{1}{2}(x_m + x_n) \|^2 . \end{aligned}$$

M é convexo, portanto $\frac{1}{2}(x_m + x_n)$ está em M e $\| y - \frac{1}{2}(x_m + x_n) \| \geq d^2$. Então,

$$\| x_m - x_n \|^2 \leq 2 \| x_m - y \|^2 + 2 \| x_n - y \|^2 - 4d^2.$$

Tendo em vista a equação (1.11), $\| x_m - x_n \|^2 \to 0$ quando $m, n \to \infty$. Isto significa que (x_m) é uma seqüência de Cauchy. Como X é completo, existe um $x_o \in X$ tal que $\| x_m - x_o \| \to 0$. Mas, M é fechado, então $x_o \in M$. Agora,

$$\| y - x_o \| \leq \| y - x_n \| + \| x_n - x_o \| \to d + 0 = d.$$

Por outro lado, da equação (1.10), $\| y - x_o \| \geq d$. Portanto, $\| y - x_o \| = d$. Mostraremos a unicidade. Sejam x_o e x_1 com $\| y - x_o \| = \| y - x_1 \| = d$. Como M é convexo, $\frac{1}{2}(x_o + x_1)$ está em M. Portanto,

$$\begin{aligned} d \leq \| y - \frac{1}{2}(x_o + x_1) \| &= \| \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x_o + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x_1 \| \\ &\leq \frac{1}{2} \| y - x_o \| + \frac{1}{2} \| y - x_1 \| = \frac{d}{2} + \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\| y - \frac{1}{2}(x_o + x_1) \| = d$. Pela Identidade do Paralelogramo,

$$\| x_o - x_1 \|^2 = 2 \| x_o - y \|^2 + 2 \| x_1 - y \|^2 - 4 \| y - \frac{1}{2}(x_o + x_1) \|^2 .$$
$$= 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

Logo, $x_o = x_1$. □

Teorema 1.14. *Sejam X um espaço pré-Hilbert e M um subespaço linear fechado tal que $M \subset X$, $M \neq X$. Então, existe um elemento $z \neq 0$ com $z \perp M$, isto é, $(z, y) = 0, \quad \forall y \in M$.*

Demonstração. Sejam w não pertencente a M e $d = \inf \| w - y \|$. Pelo teorema 1.13, podemos encontrar um $y_o \in M$ com $\| w - y_o \| = d$. Seja $z = w - y_o$, $z \neq 0$, caso contrário w pertenceria a M. Como M é linear, $y_o + cy$ está em M, $\forall y \in M$ e toda constante c. Então,

$$d = \| z \| = \| w - y_o \| \leq \| w - (y_o + cy) \| = \| z - cy \| .$$

Assim, $\| z - cy \|^2 \geq \| z \|^2$, ou seja,

$$\| z - cy \|^2 - \| z \|^2 \geq 0$$
$$(z - cy, z - cy) - (z, z) \geq 0$$
$$(z, z) - (z, cy) - (cy, z) + (cy, cy) - (z, z) \geq 0$$
$$- \bar{c}(z, y) - c(y, z) + c\bar{c}(y, y) \geq 0$$
$$|c|^2 \| y \|^2 - c(y, z) - \bar{c}(z, y) \geq 0.$$

Então, $c(y, z) + \bar{c}(z, y) \leq |c|^2 \| y \|^2 \quad \forall c \ \forall y \in M$. Em particular, tome $c = \sigma(x, y)$, onde σ é real.

$$\bar{\sigma}\overline{(z, y)}(z, y) + \sigma(z, y)(y, z) \leq \sigma^2 |(z, y)|^2 \| y \|^2$$
$$\sigma|(z, y)|^2 + \sigma|(z, y)|^2 \leq \sigma^2 |(z, y)|^2 \| y \|^2$$
$$|(z, y)|^2 \{2\sigma - \sigma^2 \| y \|^2\} \leq 0.$$

Consideremos $\sigma > 0$ e pequeno tal que $2\sigma > \| y \|^2 \sigma$. Então, $2\sigma - \| y \|^2 \sigma > 0$. Assim, $0 \leq |(z,y)|^2 \leq 0$, $|(z,y)| = 0$. Logo, $(z,y) = 0$, $\forall\, y \in M$, $\forall\, z \perp M$. $\square$

1.7 Espaços de Hilbert separáveis

Definição 12. Um espaço métrico (X, d) é dito separável se existe um subconjunto S enumerável que é denso em X, isto é, dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in S$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.

Teorema 1.15. *Um espaço de Hilbert H tem uma base ortonormal enumerável se, e somente se, H for separável.*

Demonstração. Seja $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sistema ortonormal completo em H. Então, $[(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}] = H$. Como $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é enumerável, o conjunto de todas as combinações de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ com coeficientes racionais é enumerável e denso em H. Portanto, H é separável.

Seja $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ denso em H. Eliminando desta seqüência todos os φ_k que podem ser representados por combinações lineares de elementos φ_j com $j < k$, obtemos uma subseqüência $(\psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ linearmente independente tal que $[(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}] = [(\psi_s)_{s\in\mathbb{N}}]$. Aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt a $(\psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ obtemos um sistema ortonormal $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $[(\psi_s)_{s\in\mathbb{N}}] = [(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}]$. Como $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é denso em H, $(\psi_s)_{s\in\mathbb{N}}$ é denso em H e, logo, $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ também é denso em H. Portanto, $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em H. $\square$

Teorema 1.16 (Bases não-enumeráveis). *Seja (φ_α) um sistema ortonormal em um espaço pré-Hilbert, $(X, (\cdot,\cdot))$. Seja $x \in X$. Então, (x, φ_α) é não-nulo em no máximo uma coleção enumerável de $\varphi'_\alpha s$.*

Demonstração. Fixemos $x \in X$, $x \neq 0$. Sejam $A = \{\varphi_\alpha : |(x, \varphi_\alpha)| > 0\}$ e $A_n = \{\varphi_\alpha \in A : |(x, \varphi_\alpha)|^2 > \dfrac{\| x \|^2}{n},\ n = 1, 2, \ldots\}$. Pela desigualdade de Bessel, $\sum^k |(x, \varphi_\alpha)|^2 \leq \| x \|^2$, A_n contém no máximo $n - 1$ elementos, pois se houvesse um número maior, soma dos coeficientes correspondentes ultrapassaria $\| x \|^2$, violando a desigualdade de Bessel. Mas, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, logo A é, no máximo, enumerável e infinito. $\square$

Capítulo 2

O espaço $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$, sua topologia e o teorema da Aproximação

2.1 O Espaço $C_{per}(\mathbb{R})$

Definição 13. Seja $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Esta função é periódica com período $T \neq 0$ se $u(x+T) = u(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação 2: *(a) Obviamente neste caso:* $u(x+2T) = u((x+T)+T) = u(x+T) = u(x)$ *e* $u(x-T) = u((x-T)+T) = u(x)$. *Portanto, se* u *é periódica com período* T, u *é periódica com período* kT, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
(b) Se u *é periódica com período* $T \neq 0$, *então* $v(x) = u\left(\dfrac{|T|x}{2\pi}\right)$ *é periódica com período* 2π. *Portanto, escolheremos o período fixo* 2π *para nossas considerações.*

Definição 14. $C_{per}(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as funções contínuas periódicas $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Exemplo. $\sin(nx), \cos(nx)$ e e^{inx} pertencem a $C_{per}(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1. *$C_{per}(\mathbb{R})$ é um espaço linear sobre $\mathbb{C}$ se definimos a soma e o produto por escalar de funções por:*
(i) $(u+v)(x) = u(x) + v(x),\ u, v \in C_{per}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$.
(ii) $(\alpha u)(x) = \alpha u(x),\ u \in C_{per}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$.

Observação 3: $(uv)(x) = u(x)v(x),\ u, v \in C_{per}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$.

Proposição 2. *$C_{per}(\mathbb{R})$ é um espaço linear normado quando munido da norma $\| u \|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|$.*

Proposição 3. *$(C_{per}(\mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $(C_{per}(\mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > N$ então $\| u_n - u_m \|_\infty < \varepsilon$. Pelo lema que enunciaremos e provaremos a seguir, existe $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua tal que $\| u_n - u \|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$. Obviamente, u é periódica e, portanto, $u \in C_{per}(\mathbb{R})$. Isso mostra que $(C_{per}(\mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ é completo. $\square$

Lema 2.1. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções limitadas de um conjunto Ω não-vazio em $\mathbb{C}$ tal que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$ se $m, n \geq N$, onde $\| f \|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$. Então, existe uma única função limitada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. Se Ω é um espaço métrico e cada f_n é contínua, então f é contínua.*

Demonstração. Fixemos $x \in \Omega$. Então, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \| f_n - f_m \|_\infty$. Logo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{C}$ para cada $x \in \Omega$. Denotemos o limite por f (completude de $(\mathbb{C}, | \cdot |)$). Devemos mostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f (único limite); f é limitada; f é contínua, se Ω é um espaço métrico.
Parte A. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$, se $n, m > N$.

Então, para um $m \geq N$ fixo,

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| f_m(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right| = \lim_{n\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Portanto, $\| f_m - f \|_\infty \leq \varepsilon$ se $m \geq N$, isto é, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Parte B. Se a seqüência também convergisse uniformemente para g, então para cada $x \in \Omega$, $|f_n(x) - g(x)| \leq \| f_n - g \|_\infty$. Logo, $f_n(x) \to g(x)$ quando $n \to \infty$. Isso significa que $f = g$ pela unicidade do limite.

Parte C. f é limitada, pois

$$|f(x)| = |f(x) - f_m(x) + f_m(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon + \| f_m \|_\infty,$$

se $m \geq N$.

Parte D. Supomos cada f_n contínua sobre o espaço métrico Ω. Fixemos um $x \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N$ e $\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$. Também existe um $\delta > 0$ tal que $|f_N(y) - f_N(x)| < \varepsilon$ se $d(y,x) < \delta$, pela continuidade da f_N em x. Então,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &\leq \| f - f_N \| + \| f_N(y) - f_N(x) \| + \| f_N(x) - f(x) \| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

se $d(y,x) < \delta$. Logo, f é contínua. □

Proposição 4. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma seqüência de números complexos tal que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}| < \infty$. Então, a função u definida por*

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

pertence a $C_{per}(\mathbb{R})$, isto é, é contínua e periódica.

Demonstração. Imediato pelo teste M-Weierstrass e o fato de que uma série uniformemente convergente de funções contínuas é contínua. □

2.2 Funções periódicas suaves

Proposição 5. *Se* $u \in C_{per}(\mathbb{R})$ *é tal que* $\dfrac{du}{dx}$ *existe para cada* $x \in \mathbb{R}$*, então* $\dfrac{du}{dx}$ *também é periódica.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}(x+2\pi) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+2\pi+h)-u(x+2\pi)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\\ &= \frac{du}{dx}(x).\end{aligned}$$

□

Definição 15. $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ é o subconjunto de $C_{per}(\mathbb{R})$ formado por todas as funções de $C_{per}(\mathbb{R})$ que são infinitamente diferenciáveis, isto é, $u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$, então $u^{(j)} \in C_{per}(\mathbb{R}),\ \forall j$. Cada função deste subconjunto é denominada periódica suave.

Proposição 6. $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ *é um espaço linear sobre* $\mathbb{C}$ *com a soma e o produto por escalar definidos anteriormente.*

2.3 Noção de convergência para $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$

O espaço $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ munido da norma $\|\cdot\|_{\infty}$ é um espaço linear que não é completo (isso será provado posteriormente). Assim, é necessário introduzirmos uma topologia para $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ adequada para considerarmos a proximidade entre os valores das funções e de todas as derivadas.

Definição 16. Uma seqüência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ converge a $u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ no sentido de $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ se para cada $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\| D^k u_n - D^k u \|_{\infty} \to 0$$

quando $n \to \infty$, onde $D^o u = u$. Denotamos tal convergência por $u_n \to u$ $(C^\infty_{per}(\mathbb{R}))$.

A definição acima diz que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ se, e somente se, cada derivada u_n converge uniformemente à derivada correspondente de u quando $n \to \infty$.

Definição 17. Uma seqüência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ se, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$, $(D^k u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $C_{per}(\mathbb{R})$. Ou seja,

$$\| D^k u_n - D^k u_m \|_\infty \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

quando $n, m \longrightarrow \infty$ para cada k.

Proposição 7. *Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ é uma seqüência de Cauchy no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$, então ela converge a uma função $u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. . Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$. Por (2.1), para cada k, a seqüência $(D^k u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $(C_{per}(\mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$, que é Banach; logo, ela converge uniformemente a uma função $v_k \in C_{per}(\mathbb{R})$. Para $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$D^k u_n(x) = D^k u_n(0) + \int_0^x D^{k+1} u_n(t)dt.$$

Então,

$$\begin{aligned}
v_k(x) = \lim_{n\to\infty} D^k u_n(x) &= \lim_{n\to\infty} D^k u_n(0) + \lim_{n\to\infty} \int_0^x D^{k+1} u_n(t)dt \\
&= v_k(0) + \int_0^x \lim_{n\to\infty} D^{k+1} u_n(t)dt \\
&= v_k(0) + \int_0^x v_{k+1}(t)dt.
\end{aligned}$$

Ou seja, $Dv_k = v_{k+1}$ para todo k. Fazemos $u = v_o$ e temos que $D^k u = D^k v_o = D^{k-1}(Dv_o) = D^{k-1} v_1 = \cdots = v_k$ e $\| D^k u_n - D^k u \|_\infty = \| D^k - v_k \|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, $u_n \to u$ $(C^\infty_{per}(\mathbb{R}))$. $\square$

Lema 2.2. *Existe uma constante M positiva e um inteiro N positivo tais que*

$$\| u \|' \leq M\{\| u \| + \| Du \| + \cdots + \| D^N u \|\}, \quad \forall\, u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Nesta prova, por contradição, supomos que a desigualdade é falsa para cada M, N. Então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe $u_n \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ tal que $\| u \|' \geq n\{\| u \| + \| Du \| + \cdots + \| D^n u \|\}$. Seja $v_n = \dfrac{u_n}{\| u \|}$. Então, $\| D^k v_n \| = \dfrac{\| D^k u_n \|}{\| u \|'} < \dfrac{1}{n}$ se $n \geq k$. Logo, $v_n \to 0$ quando $n \to \infty$ no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$. Mas $\| v_n \|' = 1$, $\forall\, n$. Contradição. $\square$

Proposição 8. *Não existe forma de escolher uma norma sobre $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ de forma que a convergência definida seja equivalente à convergência no sentido de métrica associada à norma.*

Demonstração. Supomos que existe uma norma $\| u \|'$ sobre $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ tal que a seqüência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ converge no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ para $u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ se e, somente se, $\| u_n - u \|' \to 0$.

Seja $w_n(x) = n^{-(N+1)} \sin(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$. Então, $w_n \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ e $\| D^k w_n \| = n^{k-N-1} \leq n^{-1}$, $k \leq N$. Pelo lema 2.2, $\| w_n \|' \to 0$ quando $n \to \infty$. Mas, $\| D^{N+1} w_n \| = 1$, $\forall\, n$. Logo, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge a zero no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$. Isso contradiz a hipótese sobre $\| \cdot \|'$. $\square$

Proposição 9.

$$d'(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\| D^k u - D^k v \|_\infty}{\| D^k u - D^k v \|_\infty + 1}.$$

define uma métrica sobre $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.

Demonstração. .

(i) $d'(u,v) < 1$, $\forall\, u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.

(ii) $d'(u,v) \geq 0$ e $d'(u,v) = 0$ então $u = v$.

(iii) $d'(u,v) = d'(v,u)$

(iv) $d'(u,w) \leq d'(u,v) + d'(v,w)$, pois se $d(u,v) = \| u - v \|$, $d^*(u,v)\dfrac{d(u,v)}{1+d(u,v)}$.
Assim, $d^*(u,w) \leq d^*(u,v) + d^*(v,w)$, pois para $a, b, c \in \mathbb{C}$
$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$. Então
$d'(u,w) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} d^*(D^k u, D^k w) \leq \ldots \leq d'(u,v) + d'(v,w)$. □

Teorema 2.3. *Uma seqüência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ é uma seqüência de Cauchy no sentido de $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ se, e somente se, for uma seqüência de Cauchy no sentido da métrica d'. Portanto, $(C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}), d')$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy no sentido de $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Selecionemos k de modo que $2^{-k} < \varepsilon$ e N de modo que $m, n \geq N$ temos $\| D^j u_n - D^j u_m \| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Então,

$$\begin{aligned} d'(u_m, u_n) &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-1} d^*(D^j u_m, D^j u_n) < \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^{j+1}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2^{-k-2}}{1-1/2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

se $m, n \geq N$.

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy no sentido da métrica d'. Dado $k \geq 0$ inteiro e $\varepsilon > 0$, selecionemos N de modo que se $m, n \geq N$ temos $d'(u_m, u_n) < 2^{-k-2} \cdot \varepsilon$. Para $m, n \geq N$ e $\varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned} \| D^k u_n - D^k u_m \|_\infty &= 2^{k+2} 2^{-k-2} \| D^k u_n - D^k u_m \|_\infty \\ &\leq 2^{k+2} 2^{-k-1} d^*(D^k u_n, D^k u_m) \\ &< 2^{k+2} d'(u_n, u_m) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 1$, tome k correspondente a $\varepsilon' < 1$, então, como acima,
$\| D^k u_n - D^k u_m \|_\infty < \varepsilon' < 1 < \varepsilon$. □

Definição 18. Se $u \in C_{per}(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$, a translação de u por t é a função

$$T_t u(x) = u(x - t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que $T_t u \in C_{per}(\mathbb{R})$ e o gráfico de $T_t u$ é o gráfico de u deslocado t unidades para a direita, se $t > 0$; $|t|$ unidades para a esquerda, se $t < 0$.

Podemos aproximar funções através da convolução, que é um poderoso método de aproximação e será muito útil nos nossos estudos.

Definição 19. Se $u, v \in C_{per}(\mathbb{R})$, a convolução de u e v é a função $u * v$ definida por

$$(u * v)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x - y)v(y)dy.$$

Notemos que

$$\| u * v \|_\infty \leq \| u \|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| v(x) \|_\infty \, dx \leq \| u \|_\infty \cdot \| v \|_\infty . \tag{2.2}$$

Proposição 10. *Se $u, v \in C_{per}(\mathbb{R})$, então $u * v \in C_{per}(\mathbb{R})$. Além disso,*

(a) $u * v = v * u$,

(b) $(\alpha u) * v = \alpha(u * v)$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

(c) $(u + v) * w = u * w + v * w$, $w \in C_{per}(\mathbb{R})$,

(d) $(u * v) * w = u * (v * w)$,

(e) $T_t(u * v) = (T_t u) * v = u * (T_t v)$.

Demonstração. Começaremos a demonstração pela primeira parte do item (e).

$$\begin{aligned} T_t(u * v)(x) = (u * v)(x - t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x - t - y)v(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_t u(x - y)v(y)dy = (T_t u) * v. \end{aligned}$$

Agora de (a), segue a segunda parte de (e).

$$
\begin{aligned}
(u*v)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x-y)v(y)dy = -\frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} u(z)v(x-z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} u(z)v(x-z)dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x-y)u(y)dy \\
&= (v*u)(x),
\end{aligned}
$$

a última igualdade acima devido à periodicidade de u e de v. Para a continuidade, usando os itens (c) e (e) e a desigualdade (2.2), temos que

$$\| T_t(u*v) - u*v \|_\infty = \| (T_t u - u) * v \|_\infty \leq \| T_t u - u \|_\infty \cdot \| v \|_\infty .$$

Isso mostra que $u*v$ é contínua, pois $\| T_t u - u \|_\infty \to 0$ quando $t \to 0$, já que u é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$ (u é uniformemente contínua em $[0, 2\pi]$ e é periódica). Como

$$T_{2\pi}(u*v) = (T_{2\pi}u) * v = u*v,$$

pelo item (e) e a periocidade de u, temos $u*v$ periódica. Logo, $u*v \in C_{per}(\mathbb{R})$.

As igualdades (b), (c) e (d) são facilmente mostradas usando a definição. A última parte de (e) segue da primeira parte e da equação (a). □

Lema 2.4. *Se $u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$, então $\left\| \frac{T_{-t}u-u}{t} - Du \right\|_\infty \to 0$ quando $t \to 0$.*

Demonstração. Notemos que

$$\frac{u(t+x) - u(x)}{t} = \frac{(T_{-t}u - u)(x)}{t}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\frac{T_{-t}u - u}{t} = D_u(y),$$

$y = y(t, x)$ entre x e $x + t$. Somando $-Du(x)$ a ambos os lados da equação acima,

$$\frac{T_{-t}u - u}{t} - Du(x) = Du(y) - Du(x).$$

Como Du é uniformemente contínua, $\dfrac{T_{-t}u - u}{t}$ converge uniformemente para Du, quando $t \to 0$. $\square$

Corolário 11. *Se $u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$, então $\dfrac{T_{-t}u - u}{t} \to Du$, quando $t \to 0$, no sentido de $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Aplicando a regra da cadeia, vemos que $D^k(T_{-t}u) = T_{-t}(D^k u)$. Então,

$$D^k\left[\frac{T_{-t}u - u}{t}\right] = \frac{D^k(T_{-t}u) - D^k u}{t} = \frac{T_{-t}(D^k u) - D^k u}{t}$$

que, pelo lema 2.4, converge uniformemente a $D(D^k u) = D^k(Du)$. $\square$

Proposição 11. *Se $u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ e $v \in C_{per}(\mathbb{R})$ então $u * v \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ e $D^k(u * v) = (D^k u) * v$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pela proposição 10, item (e),

$$\frac{T_{-t}(u * v) - (u * v)}{t} = \left[\frac{T_{-t}u - u}{t}\right] * v.$$

Pelo lema 2.4 e a desigualdade (2.2),

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T_{-t}(u * v) - (u * v)}{t} - (Du) * v\right\|_{\infty} &= \left\|\left[\frac{T_{-t}u - u}{t} - (Du)\right] * v\right\|_{\infty} \\ &\leq \left\|\frac{T_{-t}u - u}{t} - Du\right\|_{\infty} \cdot \| v \|_{\infty} \to 0,\end{aligned}$$

quando $t \to 0$, isto é, $\dfrac{T_{-t}(u * v) - (u * v)}{t}$ converge uniformemente a $(Du) * v$ quando $t \to 0$. Logo, $D(u * v) = (Du) * v$ e $u * v$ tem derivada contínua. Mas $Du \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$, logo $D^2(u * v) = D((Du) * v) = (D^2 u) * v$ e o restante da prova segue por indução. $\square$

Corolário 12. *Sejam $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$, $v \in C_{per}(\mathbb{R})$ e $\| v_n - v \|_{\infty} \to 0$ quando $n \to \infty$. Então, para todo $u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$,*

$$u * v_n \to u * v$$

no sentido de $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k(u * v_n - u * v) = (D^k u) * (v_n - v).$$

Então, pela desigualdade (2.2), $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$\| D^k(u * v_n - u * v) \|_\infty = \| (D^k u) * (v_n - v) \| \leq \| D^k u \|_\infty \cdot \| v_n - v \|_\infty \to 0,$$

quando $n \to 0$. $\square$

Seja $u \in C_{per}(\mathbb{R})$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções em $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$. Então, cada função $u_n = \varphi * u$ é suave.

Considerando u_n como uma média ponderada de translações de u, esperamos que u_n esteja próximo de u, se φ_n tem valor médio um e é concentrado próximo a 0 e a 2π, como uma função sobre $[0, 2\pi]$.

Definição 20. Uma seqüência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ é uma identidade aproximada se

(i) $\varphi_n \geq 0$ para todo n e x.
(ii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n dx = 1$ para todo n.
(iii) Para cada $0 < \delta < \pi$, $\displaystyle\int_\delta^{2\pi-\delta} \varphi_n(x)dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

Teorema 2.5. *Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ uma identidade aproximada. Então, para todo $u \in C_{per}(\mathbb{R})$,*

$$\| \varphi_n * u - u \|_\infty \to 0$$

quando $n \to \infty$. Além disso, se $u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ então

$$\varphi_n * u \to u$$

quando $n \to \infty$ no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Pelo lema 2.4, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, pequeno, com $\delta < \pi$ tal que $|T_s u - u| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ se $|s| \leq \delta$. Escolhemos N suficientemente grande de modo que $2|u| \displaystyle\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \varphi_n < \pi\varepsilon$, $\forall\, n \geq N$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos o mesmo δ e N encontrados acima. Como $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n(y)dy = 1$, $\varphi_n * u = u * \varphi_n$ e u periódica, temos

$$\begin{aligned}
2\pi|(\varphi_n * u)(x) - u(x)| &= \left| \int_0^{2\pi} u(x-y)\varphi_n(y)dy - u(x)\int_0^{2\pi} \varphi_n(y)dy \right| \\
&= \left| \int_0^{2\pi} [u(x-y) - u(x)]\varphi_n(y)dy \right| \\
&\leq \left| \int_0^{\delta} [u(x-y) - u(x)]\varphi_n(y)dy \right| \\
&+ \left| \int_{\delta}^{2\pi-\delta} [u(x-y) - u(x)]\varphi_n(y)dy \right| \\
&+ \left| \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} [u(x-y) - u(x)]\varphi_n(y)dy \right| \\
&\leq \sup_{|s|\leq 2\delta} \parallel T_s u - u \parallel_\infty \left\{ \int_0^{\delta} \varphi_n(y)dy + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \varphi_n(y)dy \right\} \\
&+ 2 \parallel u \parallel_\infty \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \varphi_n(y)dy \\
&\leq \sup_{|s|<2\delta} |T_s u - u| \cdot 2\pi + 2 \parallel u \parallel_\infty \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \varphi_n(y)dy.
\end{aligned}$$

Então, para todo $n \geq N$,

$$|(\varphi_n * u)(x) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto prova a primeira afirmação.

Agora, seja $u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, pela proposição 11,

$$D^k(\varphi * u) = D^k(u * \varphi_n) = (D^k u) * \varphi_n = \varphi_n * (D^k u),$$

que converge uniformemente para $D^k u$ pela parte anterior da prova, pois agora $(\varphi_n * (D^k u)) \subset C_{per}(\mathbb{R})$ e φ_n é uma identidade aproximada. Logo, $\varphi_n * u \to u$ no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$. $\square$

2.4 O teorema de aproximação de Weierstrass

A seguir, construiremos uma identidade aproximada em $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ por meio de uma seqüência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então dado $u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$, $\varphi_n * u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ pela proposição 11 e $\varphi_n * u \to u$ quando $n \to \infty$ uniformemente, isto é, $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ é denso em $C_{per}(\mathbb{R})$.

Definição 21. Um polinômio trigonométrico é uma função da forma

$$\varphi(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}, \tag{2.3}$$

onde $a_k \in \mathbb{C}$.

A denominação "polinômio trigonométrico"tem origem no seguinte fato: $\forall\ k > 0$, $e^{\pm ixk} = [e^{\pm ix}]^k = [\cos(x) \pm i\sin(x)]^k$. Assim, qualquer função na forma (2.3) pode ser escrita como um polinômio trigonométrico das funções seno e cosseno. Conseqüentemente,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ou seja, todo polinômio em senos e cossenos pode ser escrito na forma (2.3).

Lema 2.6. *Existe uma seqüência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinômios trigonométricos que é uma identidade aproximada.*

Demonstração. Desejamos escolher um polinômio trigonométrico não negativo φ tal que $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 1$ e $\varphi(x) < 1$ *para* $0 < x < 2\pi$. Então potências sucessivas de φ terão maiores valores próximos a 0 e 2π com relação aos demais pontos internos.

Seja $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(x))$ e $\varphi_n(x) = c_n(1 + \cos(x))^n$ com c_n tal que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)dx = 2\pi$. Precisamos mostrar que para cada $0 < \delta < \pi$,

$\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \varphi_n(x)dx \to 0$ quando $n \to \infty$. Sabemos que existe um número r, $0 < r < 1$, tal que $1+\cos(x) < r(1+\cos(y))$ com $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ e $y \in [0, \delta/2]$. Então,

$$\varphi_n(x) = c_n(1+\cos(x))^n \leq c_n[r(1+\cos(y))]^n \leq r^n \varphi_n(y).$$

Integrando ambos os lados da desigualdade acima de 0 a $\delta/2$ em y, temos

$$\frac{\delta}{2}\varphi_n(x) \leq r^n \int_0^{\delta/2} \varphi_n(y)dy \leq 2\pi r^n.$$

Assim, $\varphi_n(x) \leq r^n \dfrac{4\pi}{\delta}$, $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$. Logo, $\varphi_n \to 0$ quando $n \to \infty$ uniformemente sobre $[\delta, 2\pi-\delta]$. $\square$

Lema 2.7. *Se φ é um polinômio trigonométrico e $u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ então $u * \varphi$ é um polinômio trigonométrico.*

Demonstração. Se $\varphi = \sum a_k e_k$ com $e_k = e^{ikx}$ então

$$\varphi * u = \sum a_k (e_k * u) = \sum a_k \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iky}\, u(y)\, dy \right) e_k,$$

pois $e_k * u = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ik(x-y)}\, u(y)\, dy = \dfrac{e^{ikx}}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-iky}\, u(y)\, dy.$ $\square$

Teorema 2.8. *Os polinômios trigonométricos são densos no espaço $C_{per}(\mathbb{R})$ das funções periódicas contínuas; e no espaço $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ da funções periódicas suaves. Ou seja, se $u \in C_{per}(\mathbb{R})$ e $v \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$, existem seqüências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinômios trigonométricos tais que $\| u_n - u \|_{\infty} \to 0$ quando $n \to \infty$ e $v_n \to v$ no sentido de $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de polinômios trigonométricos que constituem uma identidade aproximada pelo lema 2.6. Sejam $u_n = \varphi_n * u$ e $v_n = \varphi_n * v$. Pelo lema 2.7, u_n e v_n são polinômios trigonométricos. Pelo teorema 2.5, $u_n \to u$, pois $u \in C_{per}(\mathbb{R})$ e $v_n \to v$ no sentido de $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$, pois $v \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$. $\square$

Corolário 13. *$C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ é denso em $C_{per}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{per}(\mathbb{R})$. Se $u \in C_{per}(\mathbb{R})$, então, pela proposição 11, $\varphi_n * u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ e, pelo teorema 2.8, $\varphi_n * u \to u$ quando $n \to \infty$ uniformemente. $\square$

Capítulo 3

Distribuições periódicas, o espaço $L^2_{per}(\mathbb{R})$, $S(\mathbb{Z})$ e os espaços de Sobolev

3.1 Distribuições periódicas

Nosso objetivo, nesta seção, é introduzir uma classe de funções generalizadas adaptada ao estudo das séries de Fourier, generalizando a idéia de função. Esta generalização permite-nos compreender a natureza da função δ de Dirac, amplamente empregada em aplicações e fornece um cenário adequado ao estudo de EDP's.

Em geral, uma função generalizada ou uma distribuição é um funcional linear contínuo sobre certos espaços de funções suaves.

Definição 22. Uma distribuição periódica é um funcional linear contínuo sobre o espaço $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$, isto é, é uma aplicação $F : C^\infty_{per}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que:
(i) $F(\alpha u) = \alpha F(u), \;\; \alpha \in \mathbb{C}, u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.
(ii) $F(u + v) = F(u) + F(v), \;\; u, v \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.

(iii) $F(u_n) \to F(u)$, se $u_n \to u$ no sentido de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.

Definição 23. Se $v : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ é contínua e periódica, então definimos um funcional linear $F = F_v$ por

$$F_v(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x)u(x)dx, \quad u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}).$$

Proposição 12. $F_v : C_{per}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *é uma distribuição periódica.*

Demonstração. A linearidade é óbvia. Mostraremos a continuidade, se $u_n \to u$, então

$$\begin{aligned} |F_v(u_n) - F_v(u)| &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} u_n(x)v(x)dx - \int_0^{2\pi} u(x)v(x)dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_n(x) - u(x)]v(x)dx \\ &\leq \| v \|_\infty \cdot \| u_n - u \|_\infty \to 0 \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Logo, F_v é contínua. □

Observação 4: *A restrição de F_v ao subespaço $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ é uma distribuição periódica.*

Definição 24. Dizemos que uma distribuição periódica é uma função se existe $v \in C_{per}(\mathbb{R})$ tal que $F = F_v$.

Proposição 13. *Funções distintas $v, w \in C_{per}(\mathbb{R})$ definem distribuições distintas.*

Demonstração. Seja $F_v = F_w$. Como $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ é denso em $C_{per}(\mathbb{R})$, selecionamos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{per}(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to \bar{w} - \bar{v}$, uniformemente, onde $\bar{w}$ é o complexo conjugado de w. Então,

$$
\begin{aligned}
0 = 2\pi(F_w(u_n) - F_v(u_n)) &= \int_0^{2\pi} u_n(x)w(x)dx - \int_0^{2\pi} u_n(x)v(x)dx \\
&= \int_0^{2\pi} [w(x) - v(x)]u_n(dx) \to \int_0^{2\pi} [w(x) - v(x)][\bar{w}(x) - \bar{v}(x)]dx \\
&= \int_0^{2\pi} |w(x) - v(x)|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, $w = v$. □

Proposição 14. *Existem distribuições periódicas que não são funções.*

Demonstração. Seja $\delta : C_{per}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ dada por $\delta(u) = u(0),\ u \in C_{per}(\mathbb{R})$. A restrição de δ a $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$ é uma distribuição periódica (δ de Dirac). De fato, mostraremos a continuidade, pois a linearidade é fácil de verificar. Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ e $u \in C_{per}(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to u$ quando $n \to \infty$. Então, $\delta(u_n) = u_n(0) \to u(0) = \delta(u)$. Verificamos, agora, que δ não é uma função. Seja $u_n(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x)\right)^n$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ para todo n, x. Por absurdo, seja $F_v = \delta$, isto é, existe $v \in C_{per}(\mathbb{R})$. Temos que

$$
\begin{aligned}
|F_v(u_n)| = \left|\int_0^{2\pi} v(x)u_n(x)dx\right| &\leq \| v \|_\infty \cdot \\
&\left\{\int_0^{\varepsilon=1/n} u_n(x)dx + \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} u_n(x)dx + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} u_n(x)dx\right\} \to 0,
\end{aligned}
$$

pois, $u_n \to 0$ quando $n \to \infty$ uniformemente para $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, para todo $\epsilon > 0$ e $0 \leq u_n(x) \leq 1$, para todo n, x. Mas, se $\delta = F_v$ deveríamos ter $F_v(u_n) = 1$ para todo n, pois $F_v(u_n) = \delta(u_n) = u_n(0) = 1$. Contradição. Logo $F_v \neq \delta$. □

Definição 25. O conjunto de todas as distribuições periódicas é denotado por D'_{per}.

Proposição 15. *D'_{per} é um espaço linear sobre $\mathbb{C}$ quando munido das seguintes definições de soma e produto por escalar:*
(a) $(F+G)(u) = F(u) + G(u), \;\; u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}), \; F, G \in D'_{per}.$
(b) $(\alpha F)(u) = \alpha F(u), \;\; \alpha \in \mathbb{C}, u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}), F \in D'_{per}.$

Observação 5: *Se $v, w \in C_{per}(\mathbb{R})$ então $F_v + F_w = F_{v+w}$ e $F_{\alpha v} = \alpha F_v$.*

Definição 26. Uma seqüência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D'_{per}$ converge a $F \in D'_{per}$ no sentido de D'_{per} se

$$F_n(u) \to F(u), \;\; \forall u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}).$$

quando $n \to \infty$. Denotamos convergência no sentido de D'_{per} por $F_n \to F(D'_{per})$.

3.2 O espaço $L^2_{per}(\mathbb{R})$

Nesta seção, definiremos o espaço $L^2_{per}(\mathbb{R})$ como um espaço de distribuições periódicas que podem ser aproximadas por seqüências de funções periódicas contínuas em um certo sentido.

Proposição 16. *$C_{per}(\mathbb{R})$ não é completo em relação à norma*
$\| u \|_2 = (u,u)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$

Demonstração. Seja $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função periódica, a qual o gráfico contém os segmentos que unem os pares de pontos

$$(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \;\; \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, 1\right); \;\; \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, 1\right), \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}, 1\right);$$
$$\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n}, 1\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right); \;\; \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (2\pi, 0).$$

Então, $\| u_n - u_m \|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_n - u_m|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n\pi}$, desta forma $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy nesta norma. Porém, não existe $u \in C_{per}(\mathbb{R})$ tal que $\| u_n - u \| \to 0$. $\square$

A fim de obtermos um espaço completo contendo $C_{per}(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por $(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\overline{v(x)}dx$ consideraremos o espaço das distribuições periódicas. Supomos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ é uma seqüência de Cauchy com a respectiva métrica induzida pela norma $\| \cdot \|$, isto é,

$$\| u_n - u_m \|_2 \to 0 \ \ quando \ \ n, m \to \infty.$$

Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a seqüência correspondente das distribuições: $F_n = F_{u_n}$.

Se $v \in C^\infty_{per}(\mathbb{R})$,

$$F_n(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(x)v(x)dx = (v, \overline{u_n}),$$

onde $\overline{u_n}$ denota o completo conjugado da função. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |F_n(v) - F_m(v)| &= |(v, \overline{u_n} - \overline{u_m}|) \leq \| v \| \cdot \| u_n - u_m \| \\ &\leq |v| \cdot \| u_n - u_m \| . \end{aligned}$$

Então, $(F_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Definição 27. $F(v) = \lim F_n(v)$.

Proposição 17. *O funcional* $F : C^\infty_{per}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *definido acima é uma distribuição periódica.*

Demonstração. Claramente, F é linear, pois cada F_n é linear. Para a continuidade, tomemos N suficientemente grande que $\| u_n - u_m \| \leq 1$ se $n, m \geq N$. Seja $M = \max\{\| u_1 \|, \| u_2 \|, \ldots, \| u_N \|\} + 1$. Então, $\forall\, n \leq N$,

$\| u_n \| < M$. Por outro lado, se $n > N$,

$$\begin{aligned} \| u_n \| &= \| u_n - u_n + u_N \| \leq \| u_n - u_N \| + \| u_N \| \\ &\leq 1 + \| u_N \| \leq M. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$|F_n(v)| = |(v, \overline{u_n})| \leq \| v \| \cdot \| u_n \| \leq M|v|.$$

Então, $|F(v)| = \lim |F_n(v)| \leq M|v|$. $\square$

Definição 28. Uma distribuição é de ordem k se existe uma constante c tal que

$$|F(u)| \leq c(|u| + |Du| + \ldots |D^k u|), \quad \forall\, u \in C^\infty_{per}(\mathbb{R}).$$

Lema 3.1. *Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ é uma seqüência de Cauchy com respeito a norma $||u||_2$, então a seqüência correspondente de distribuições $F_n = F_{u_n}$ converge no sentido de D'_{per} para a distribuição F, a qual é de ordem zero.*

É importante sabermos quando duas seqüências de Cauchy em $C_{per}(\mathbb{R})$ convergem para a mesma distribuição. Vejamos o lema abaixo.

Lema 3.2. *Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ seqüências de Cauchy com respeito a norma $||u||_2$. Sejam $F_n = F_{u_n}$ e $G_n = F_{v_n}$ as distribuições correspondentes, e sejam F, G os respectivos limites:*

$$F_n \to F\,(D'_{per}) \quad e \quad G_n \to G\,(D'_{per}).$$

Então, $F = G$ se e, somente se, $\| u_n - v_n \|_2 \to 0$.

Demonstração. Sejam $w_n = u_n - v_n$ e $H_n = F_n - G_n$. Queremos mostrar que $H_n \to 0\,(D'_{per})$ se e, somente se, $\| w_n \|_2 \to 0$.

Seja $\| w_n \|_2 \to 0$. Então, para toda $u \in C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$,

$$|H_n(u)| = |(u, \overline{w_n})| \leq \| u \| \cdot \| w_n \| \to 0.$$

Agora, seja $H_n \to 0\,(D'_{per})$. Como $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dado $\varepsilon > 0$, tomamos N suficientemente grande tal que se $m, n > N$ implica em

$$\| w_n - w_m \|_2 = \| (u_n - u_m) + (v_n - v_m) \|_2 \leq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Fixemos $m \geq N$. Então, se $n \leq N$, por (3.1), temos

$$\begin{aligned}\| w_n \|_2^2 &= (w_m, w_m) = (w_m, w_m - w_n) + (w_m, w_n) = (w_m, w_m - w_n) + \overline{H_n(\overline{w_m})}\\ &\leq \varepsilon \| w_m \|_2 + |\overline{H_n(\overline{w_m})}|\end{aligned}$$

Fazemos $n \to \infty$, como $H_n \to 0\,(D'_{per})$,

$$\| w_m \|_2^2 \leq \varepsilon \| w_m \|_2, \quad m \geq N,$$

ou seja, $\| w_m \|_2 \leq \varepsilon,\ m \geq N$. □

Definição 29. $F \in L^2_{per}$ se e, somente se, $F \in D'_{per}$ é tal que existe uma seqüência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ de Cauchy com relação à norma $\| \cdot \|_2$, de modo que $F = \lim_{n\infty} F_{u_n} \ \ (D'_{per})$.

Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}(\mathbb{R})$ é uma tal seqüência, dizemos que ela converge para F no sentido de L^2_{per} e escrevemos $u_n \to F\ (L^2_{per})$.

Proposição 18. *L^2_{per} é um subespaço de D'_{per} no sentido de espaço vetorial.*

Demonstração. Se $u_n \to F\ (L^2_{per})$ e $v_n \to G\ (L^2_{per})$, então

$$au_n \to aF\ (L^2_{per}), \quad u_n + v_n \to (F + G)\ (L^2_{per}).$$

□

Podemos estender o produto interno em $C_{per}(\mathbb{R})$ para $L^2_{per}(\mathbb{R})$ para obtermos um espaço de Hilbert. Sejam $u_n \to F$ (L^2_{per}) e $v_n \to G$ (L^2_{per}), então

$$(F, G) = \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} u_n(x)\overline{v_n(x)}dx. \tag{3.2}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais, ou seja, $\left|\int_0^{2\pi} u_n(x)\overline{v_n(x)}dx\right| \leq \| u_n \|_2 \cdot \| v_n \|_2$ e o o lema 3.2, é fácil vermos que o produto interno está bem definido, isto é, independe das seqüências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escolhidas. O lema 3.2 também nos mostra que se $u'_n \to F(L^2_{per})$ e $v'_n \to G$ (L^2_{per}), então

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty} (u'_n, v'_n).$$

Teorema 3.3. *A equação* (3.2) *satisfaz todas as condições de um produto interno. Se definimos*

$$\| F \| = (F, F)^{1/2}$$

é uma norma em L^2_{per}. O espaço L^2_{per} é completo com esta norma, ou seja, é um espaço de Hilbert.

Demonstração. O fato da equação (3.2) ser um produto interno é imediato. Agora, temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz em L^2_{per}: $|(F, G)| \leq \| F \| \cdot \| G \|$; segue também que $\| F \|$ é uma norma.

Finalmente, seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_{per}(\mathbb{R})$ uma seqüência de Cauchy com respeito a esta norma. Como $F_n \in L^2_{per}(\mathbb{R})$, existe $\psi_n \in C_{per}(\mathbb{R})$ tal que $\| F_n - \psi_n \| \leq n^{-1}$. Mas então $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy,pois

$$\begin{aligned} \| \psi_n - \psi_m \|_2 &\leq \| \psi_n - F_n \|_2 + \| F_n - F_m \|_2 + \| F_m - \psi_m \|_2 \\ &\leq \frac{1}{n} + \| F_n - F_m \|_2 + \frac{1}{m} \to 0, \end{aligned}$$

quando $n, m \to \infty$. Portanto, pela definição de L^2_{per}, existe $F \in L^2_{per}(\mathbb{R})$ tal que $\psi_n \to F$ no sentido de $L^2_{per}(\mathbb{R})$. Logo,

$$\| F_n - F \| \leq \| F_n - \psi_n \| + \| \psi_n - F \| \to 0.$$

$\square$

Teorema 3.4. *Se $F \in L^2_{per}$, existe uma seqüência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções periódicas suaves tais que $u_n \to F$ (L^2_{per}).*

Demonstração. Seja $F \in L^2_{per}$. Então, existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}$ seqüência de Cauchy, em relação à norma $||\cdot||_2$, tal que

$$F = \lim_{n\to\infty} F_{v_n} \quad (D'_{per}).$$

Como C^∞_{per} na norma $||\cdot||_\infty$, existe $(\psi)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_{per}$ tais que $\| v_n - \psi_n \|_\infty \leq 1/n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Logo, $\| \psi_n - v_n \|_2 \leq \| v_n - \psi_n \|_\infty \cdot \sqrt{2} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n}$. Então,

$$\begin{aligned} \| \psi_n - \varphi_m \|_2 &\leq \| \psi_n - v_n \|_2 + \| v_n - v_m \|_2 + \| v_m - \varphi_m \|_2 \\ &\frac{\sqrt{2}}{n} + \| v_m - v_n \|_2 + \frac{\sqrt{2}}{m} \to 0, \end{aligned}$$

quando $m, n \to \infty$. Logo, $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ é seqüência de Cauchy em relação à norma $||\cdot||_2$. Portanto, pela definição de L^2_{per}, existe $G \in L^2_{per}$ tal que $\psi_n \to G$ (L^2_{per}). Finalmente,

$$\| F - G \|_2 \leq \| F - v_n \|_2 + \| v_n - \psi_n \|_2 + \| \psi_n - G \|_2 \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Então, $F = G$. $\square$

Corolário 14. *Seja $T = [e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}]$. Se $\bar{T} = C_{per}(\mathbb{R})$ na norma $\| \cdot \|_\infty$ e $\bar{C}_{per} = L^2_{per}$ na norma $\| \cdot \|_2$, então $\bar{T} = L^2_{per}$ na norma $\| \cdot \|_2$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo teorema 2.8 , se $f_c \in C_{per}(\mathbb{R})$, $\| f_c - t_n \|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$. Pelo teorema 3.4, se $f_l \in L^2_{per}$, $\| f_l - f_c \|_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Logo,

$$\| f_l - t_n \|_2 \leq \| f_l - f_c \|_2 + \| f_c - t_n \|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

onde usamos que

$$\| f_c - t_n \|_2 = \left(\int_0^{2\pi} (f_c - t_n)^2 dt \right)^{1/2} \leq \| f_c - t_n \|_\infty \sqrt{2\pi} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\square$

Proposição 19. $\left\{ \dfrac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ *é uma base ortonormal de* $L^2_{per}(\mathbb{R})$.

Demonstração. $\left(\dfrac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ é denso em $C_{per}(\mathbb{R})$ na norma $\| \cdot \|_\infty$ e $C_{per}(\mathbb{R})$ é denso em $L^2_{per}(\mathbb{R})$ na norma $\| \cdot \|_2$, via teorema 2.8 e corolário 14. Logo, $\left(\dfrac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ é denso em L^2_{per} na norma $\| \cdot \|_2$. Pelo teorema 1.11, $\left(\dfrac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ é base ortonormal e de L^2_{per}. $\square$

3.3 O Espaço $S(\mathbb{Z})$

Nesta seção, apresentaremos o espaço das seqüências que são coeficientes de Fourier de funções $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$. Tais seqüências decaem a zero mais rapidamente que qualquer potência de $1/n$. Além disso, qualquer seqüência com esta propriedade são coeficientes de Fourier de alguma função de $C^\infty_{per}(\mathbb{R})$.

Definição 30. $S(\mathbb{Z})$ é o espaço das seqüências rapidamente decrescentes, isto é, o espaço das seqüências complexas $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tais que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty \quad e \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k||k|^n < \infty \ \ para \ \ n = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Definição 31. $\mathcal{F} : C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{Z})$, tal que , $f \mapsto (\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ é a transformada de Fourier em $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$, com

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Definição 32. $\mathcal{F}^{-1} : S(\mathbb{Z}) \to C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$, tal que $(\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$ é a transformada inversa.

Proposição 20. *As desigualdades em* (3.3) *são equivalentes a* $\| (c_k) \|_{\infty,n} < \infty$ *para todo* $n = 0, 1, 2\ldots$, *onde*

$$\| (c_k) \|_{\infty,0} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \quad e \quad \| (c_k) \|_{\infty,n} = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\{|c_k| \cdot |k|^n\}, \ n \geq 1.$$

Demonstração. Se $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in S(\mathbb{Z})$, então para todo n, as desigualdades (3.3) mostram que $|c_k|\cdot|k|^n \to 0$ quando $k \to \infty$. Em particular, $\| (c_k) \|_{\infty,n} < \infty$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Agora, se $\| (c_k) \|_{\infty,n} < \infty$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, então

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} |c_k| \cdot |k|^n &= \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} \frac{|c_k|^2 \cdot |k^{n+2}|}{|k|^2} \\ &\leq \| (c_k) \|_{\infty,n+2} \cdot \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} \frac{1}{|k|^2} < \infty.\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 21. *(i) Uma métrica em* $S(\mathbb{Z})$ *é dada por:*

$$d'((c_k),(e_k)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{\| (c_k) - (e_k) \|_{\infty,n}}{1 + \| (c_k) - (e_k) \|_{\infty,n}}$$

(ii) $(c_k)_l \to (e_k)$ *com relação a* d' *quando* $l \to \infty$ *se e, somente se,* $\| (c_k)_l - (e_k) \|_{\infty,n} \to 0$ *quando* $l \to \infty$, *para* $n = 0, 1, \ldots$.

Teorema 3.5. *A transformada de Fourier* $\mathcal{F} : (C^{\infty}_{per}(\mathbb{R}), d) \to (S(\mathbb{Z}, d'))$ *é um isomorfismo e um homeomorfimo* $f(x) \mapsto (\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, *isto é, uma bijeção linear contínua com inversa contínua.*

Demonstração.

Parte A. Mostremos que $\mathcal{F}$ é uma bijeção linear.

• $\mathcal{F}$ é linear. De fato,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha f+g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha f+g)(x)e^{-ikx}dx\\ &= \alpha\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-ikx}dx\\ &= \mathcal{F}(f)+\mathcal{F}(g)\end{aligned}$$

• $\mathcal{F}$ é injetiva, pois se $\mathcal{F}(f)=\theta$ então $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=0$ para todo $k\in\mathbb{Z}$, pela completude do sistema ortonormal, temos $f=\theta$.

• $\mathcal{F}$ é sobrejetiva, pois dado $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in S(\mathbb{Z})$, tal que $\parallel (c_k) \parallel_{\infty,n}$ para $n=0,1,2,\ldots$. Logo, pela proposição 20, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|<\infty$ e $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|\cdot|k|^n<\infty$. Então, $f=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$ e todas as suas derivadas (termo a termo) convergem uniformemente pelo teste M de Weierstrass. Mostraremos que existe $f\in C_{per}^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(f)=(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. De fato, $\mathcal{F}(f)=\mathcal{F}\left(\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}\right)=(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, pois $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}c_le^{ilx}\right)dx=\dfrac{1}{2\pi}\cdot c_k\cdot 2\pi=c_k,\ k\in\mathbb{Z}$, devido a convergência uniforme.

Parte B. Mostraremos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ são contínuas. Primeiramente, mostraremos que se $f_l\to f(C_{per}^{\infty}(\mathbb{R}))$ quando $l\to\infty$ implica em $\widehat{(f_k)}_k\to\hat{f}_k(S(\mathbb{Z})$ quando $n\to\infty$. De fato,

$$|k|^n|\widehat{(f_l)}_k-\hat{f}_k|=|(\widehat{f_l^{(n)}-f^{(n)}})_k|\leq\parallel f_l^{(n)}-f^{(n)}\parallel_{\infty}\to 0$$

quando $l\to\infty$, onde a igualdade acima é devido a se $g\in C_{per}^{n}(\mathbb{R})$, então $\widehat{(g^{(n)})}_k=(ik)^n\hat{g}_k$, $k\in\mathbb{Z}$. Assim, $\parallel (\hat{f}_l)_k-(\hat{f})_k\parallel_{\infty,n}\to 0$ quando $l\to\infty$ para todo $n=0,1,2,\ldots$. Logo, pela proposição (21), $d'(\widehat{(f_l)}_k,(\hat{f}_k))\to 0$ quando $l\to\infty$. Portanto, $\mathcal{F}$ é contínua.

Para mostrarmos que $\mathcal{F}^{-1}$ é contínua, mostremos que $c_{l,k} \rightarrow c_k(S(\mathbb{Z}))$ quando $l \rightarrow \infty$ implica em $\mathcal{F}^{-1}(c_l, k) \rightarrow$ em $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$. Temos que $\| (c_l, k) - (c_k) \| \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow 0$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$. Então,
$\mathcal{F}^{-1}(c_l, k) - \mathcal{F}^{-1}(c_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_{l,k} - c_k)e^{ikx}$. Como podemos derivar termo a termo, pois $c_{l,k} \in S(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}\left[\mathcal{F}^{-1}(c_{l,k}) - \mathcal{F}^{-1}(c_k)\right](x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^n (c_{l,k} - c_k)e^{ikx} \\
&= \delta_{n,o}(c_{l,o} - c_o) + \sum_{k \neq 0} i^n k^{n+2}(c_{l,k} - c_k)\frac{e^{ikx}}{k^2}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d^n}{dx^n}\left[\mathcal{F}^{-1}(c_{l,k}) - \mathcal{F}^{-1}(c_k)\right](x)\right\|_{\infty} &\leq |c_{l,o} - c_o| + \| (c_{l,k}) - (c_k) \|_{\infty,n+2} \sum \frac{1}{k^2} \\
&\leq \| (c_{l,k}) - (c_k) \|_{\infty,o} \\
&+ \frac{\pi^2}{3} \| (c_{l,k}) - (c_k) \|_{\infty,n+2} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $l \rightarrow \infty$. Logo, $d(\mathcal{F}^{-1}(c_{l,k}), \mathcal{F}^{-1}(c_k)) \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$, isto é, $\mathcal{F}^{-1}(c_{l,k}) \rightarrow \mathcal{F}^{-1}(c_k)$ no sentido de $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R})$. $\square$

Observação 6: *Podemos provar, via identidade de Parseval, que $f \mapsto \hat{f}_k$ é uma isometria entre L^2 e o l^2.*

3.4 Os Espaços de Sobolev $H^p_{per}(\mathbb{R})$

Lembramos que $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ é a série de Fourier complexa da f e
$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ são os coeficientes de Fourier.

Definição 33. Seja $0 \leq p < \infty$. $H^p_{per}(\mathbb{R})$ é o espaço das funções $\varphi \in L^2_{per}$

tais que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^p |c_k|^2 < \infty,$$

onde c_k são os coeficientes de Fourier de φ. O espaço $H^p_{per}(\mathbb{R})$ é denominado um espaço de Sobolev. $H^o_{per}(\mathbb{R}) = L^2_{per}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.6. *$H^p_{per}(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar definido por*

$$(f,g)_{p,per} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^p a_k \overline{b_k}, \tag{3.4}$$

onde $f, g \in H^p_{per}(\mathbb{R})$ com coeficientes de Fourier a_k, b_k, respectivamente. A norma sobre $H^p_{per}(\mathbb{R})$ é dada por

$$\| f \|_{p,per} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^p |a_k|^2 \right\}^{1/2}. \tag{3.5}$$

Demonstração.

Parte A. É fácil vermos que $H^p_{per}(\mathbb{R})$ é um espaço linear. Primeiramente, observemos que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^p a_k \overline{b_k} \right|^2 &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(1+k^2)^{p/2} a_k] \cdot [(1+k^2)^{p/2} \overline{b_k}\,] \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^p |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^p |b_k|^2 \right) < \infty, \end{aligned}$$

pois ambas as parcelas do segundo membro da desigualdade acima são limitadas.

Verificaremos que a equação dada por (3.4) define um produto interno. De fato, sejam $f, g \in H^p_{per}(\mathbb{R})$, f_k e g_k os respectivos coeficientes de Fourier. Seja $\psi = f + g$ com d_k seu coeficiente de Fourier. Notemos que

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f+g)(x) \overline{\varphi_k(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = f_k + g_k. \end{aligned}$$

Mostraremos a linearidade, pois a positividade, simetria e a homogeneidade são imediatas. Seja $h \in H^p_{per}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}(f+g,h) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^p d_k\overline{h_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^p(f_k+g_k)\overline{h_k}\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^p f_k\overline{h_k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^p g_k\overline{h_k} = (f,h)+(g,h).\end{aligned}$$

Logo, a equação (3.4) é um produto interno. Procedemos de forma análoga para mostrar que a equação (3.5) é uma norma.

Parte B. Seja (φ_n) uma seqüência de Cauchy em $H^p_{per}(\mathbb{R})$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\| \varphi_n - \varphi_m \|_{p,per} < \varepsilon$, $\forall\, n,m \geq N(\varepsilon)$, ou seja,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^p|a_{n,k}-a_{m,k}|^2 < \varepsilon^2, \ \ \forall m,n \geq N(\varepsilon).$$

Logo, $\forall\, N_1, N_2 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-N_1}^{N_2}|a_{n,k}-a_{m,k}|^2 < \sum_{k=-N_1}^{N_2}(1+k^2)^p|a_{n,k}-a_{m,k}|^2 < \varepsilon^2, \ \forall m,n \geq N(\varepsilon). \tag{3.6}$$

Desta forma, $\sum_{k=-N_1}^{N_2}|a_{n,k}-a_{m,k}|^2 < \varepsilon$ e $|a_{n,k}-a_{m,k}| < \varepsilon$, $\forall\, n,m \geq N(\varepsilon)$ com $-N_1 \leq k \leq N_2$. Assim, $(a_{n,k})$ é uma seqüência de Cauchy nos números complexos para cada $k \in \mathbb{Z}$. Como $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ é um espaço de Banach, existe uma seqüência $(a_k) \in \mathbb{C}$ tal que $a_{m,k} \to a_k$ quando $m \to \infty$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Fazendo $m \to \infty$ em (3.6),

$$\sum_{k=-N_1}^{N_2}(1+k^2)^p|a_{n,k}-a_k|^2 < \varepsilon^2, \ \forall m,n \geq N(\varepsilon). \tag{3.7}$$

Então, $\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ define uma função em $H^p_{per}(\mathbb{R})$ com $\| \varphi - \varphi_n \|_{p,per} \to 0$ quando $n \to \infty$. De fato, mostramos que $\varphi \in H^p_{per}(\mathbb{R})$. Tomando limite na desigualdade (3.7), obtemos

$$\sum_{k=\infty}^{\infty}(1+k^2)^p|a_{n,k}-a_k|^2 = \lim_{M\to\infty}\sum_{k=-M}^{M}(1+k^2)^p|a_{n,k}-a_k|^2 \leq \varepsilon^2,$$

$\forall\ n \geq N(\varepsilon)$. Ou seja, $(\varphi_n - \varphi) \in H^p_{per}(\mathbb{R})$. Mas, $\varphi = (\varphi - \varphi_n) + \varphi_n$. Como as duas parcelas do segundo membro desta igualdade pertencem a $H^p_{per}(\mathbb{R})$, logo, $\varphi \in H^p_{per}(\mathbb{R})$. □

Corolário 15. $\overline{[e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}]} = H^p_{per}(\mathbb{R})$ *na norma* $\| \cdot \|_{p,per}$.

Demonstração. Seja $f \in H^p_{per}(\mathbb{R})$ com coeficientes de Fourier c_k. Seja f_N a soma parcial da série de Fourier para f. Então,

$$\| f - f_N \|^2_{p,per} = \sum_{|k|=N+1}^{\infty}(1+k^2)^p|c_k|^2 \to 0,$$

quando $N \to \infty$, pois $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^p|c_k|^2$ converge. Portanto, os polinômios trigonométricos são densos $H^p_{per}(\mathbb{R})$. □

Definição 34. Para $r < 0$, definimos

$$H^r_{per}(\mathbb{R}) = \left\{ F \in D'_{per} : \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^r|\hat{v_k}|^2 < \infty \right\},$$

onde $\hat{v_k}$ são os coeficientes de Fourier de F.

Proposição 22. *Se* $p \geq 0$, $H^p_{per}(\mathbb{R})$ *possui uma semi-norma equivalente*

$$|v|_{p,per} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{2r}|\hat{v_k}|^2\right)^{1/2}.$$

Demonstração. Temos que

$$k^{2p} \leq 1 + k^{2p} \leq (1+k^2)^p \leq (2k^2)^p = 2^p k^{2p}.$$

Então,

$$k^{2p}|\hat{v_k}|^2 \leq (1+k^2)^p|\hat{v_k}|^2 \leq 2^p k^{2p}|\hat{v_k}|^2$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{2p}|\hat{v_k}|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \leq (1+k^2)^p|\hat{v_k}|^2 \leq 2^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{2p}|\hat{v_k}|^2.$$

□

Proposição 23. $\left(H^r_{per}(\mathbb{R}), (\cdot,\cdot)_{r,per}\right)$ *é um espaço de Hilbert para* $r < 0$*, onde* $(\varphi,\psi)_{r,per} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^r c_k\overline{b_k}$*, e* c_k*,* b_k *são os coeficientes de Fourier de* φ *e* ψ*, respectivamente.*

Demonstração. Análoga ao caso de $r \geq 0$. □

Proposição 24. *Seja* $m \in \mathbb{N}$*. Então, a norma*

$$\| v \|^*_{m,per} = \left(\sum_{0\leq k\leq m} \| v^{(k)} \|^2_{L^2_{per}}\right)^{1/2}$$

é equivalente em $H^m_{per}(\mathbb{R})$ *à norma* $\| v \|_{m,per}$*.*

Demonstração. Como na demonstração anterior, temos que $k^{2p} \leq (1+k^2)^p$, então $\sum_{j=0}^{m} k^{2j} \leq \sum_{j=0}^{m}(1+k^2)^j \leq (m+1)(1+k^2)^m$. Assim, pela identidade de Parseval e dado que $(e^{ikx})' = ike^{ikx}$,

$$\begin{aligned}
\| v \|^{2*}_{m,per} &= \sum_{0\leq k\leq m} \| v^{(k)} \|^2_{L^2_{per}} = \| v \|^2_{L^2_{per}} + \| v' \|^2_{L^2_{per}} + \cdots + \| v^{(m)} \|^2_{L^2_{per}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{v_k}|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|\hat{v_k}|^2 + \cdots + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{2m}|\hat{v_k}|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2+\cdots+k^{2m})|\hat{v_k}|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (m+1)(1+k^2)^m|\hat{v_k}|^2 \\
&= (m+1)\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^m|\hat{v_k}|^2 = (m+1)\cdot \| v \|_{m,per} .
\end{aligned}$$

Agora, temos que $(1+k^2)^p \leq 2^p k^{2p}$ e, novamente pela identidade de Parseval, obtemos

$$\begin{aligned}\| \, f \, \|_{p,per}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^p |a_k|^2 \leq 2^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^{2p} |a_k|^2 = 2^p \, \| \, f^{(p)} \, \|_{L^2_{per}}^2 \\ &\leq 2^p \sum_{l=0}^{p} \| \, f^{(l)} \, \|_{L^2_{per}}^2 = \| \, f \, \|_{p,per}^* \, .\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Séries de Fourier - Teoria Clássica

No seguinte e neste capítulo , empregaremos a notação usual $L^2(a,b)$, $L^1(a,b)$ e $H^p_{per}(a,b)$ para os espaços $L^2_{per}(\mathbb{R})$, $L^1_{per}(\mathbb{R})$ e $H^p_{per}(\mathbb{R})$, respectivamente, tendo em vista que as funções envolvidas estão definidas em $[a,b]$.

Neste capítulo, consideraremos os principais resultados referentes à convergência uniforme ou pontual das séries de Fourier em senos e cossenos.

4.1 Fechamento do sistema trigonométrico para $L^2[-\pi,\pi]$

Lema 4.1. *Seja $f \in C[-\pi,\pi]$ e sejam*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0, \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{4.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0, \quad n = 1,2,\dots, \tag{4.2}$$

Então, $f(x) \equiv 0$.

Demonstração. Se $Q_n(x)$ é um polinômio trigonométrico arbitrário, (4.1) e (4.2) implicam que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Q_n(x)dx = 0$. Supomos que $f(x) \neq 0$. Então existe um ponto x_o no interior de $[-\pi, \pi]$ no qual $f(x_o) \neq 0$. Sem perda de generalidade, seja $f(x_o) = m > 0$. Pela continuidade de f, podemos encontrar um intervalo $I = [x_o - \delta, x_o + \delta]$, contido em $(-\pi, \pi)$, em que $f(x) \geq m/2$ para todo $x \in I$. Seja a função trigonométrica

$$q(x) = 1 - \cos(\delta) + \cos(x - x_o).$$

Para $x_o - \delta < x < x_o + \delta$, $\cos(x - x_o) > \cos(\delta)$ e então $q(x) > 1$. Para $x = x_o \pm \delta$, $q(x) = 1$. Por outro lado, em $[-\pi, \pi]$, $-1 \leq \cos(x - x_o) < \cos(\delta)$ tal que $-\cos(\delta) \leq q(x) < 1$ e portanto $|q(x)| < 1$.

Agora, consideramos o polinômio trigonométrico de ordem n, $Q_n(x) = [q(x)]^n$. Esta claro que $Q_n(x) > 1$ para $I_1 : x_o - \delta < x < x_o + \delta$; $Q_n(x) = 1$ para $x = x \pm \delta$; $|Q_n(x)| < 1$ para as porções restantes de $[-\pi, \pi]$. Mas,

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)Q_n(x)dx = \int_{I_1} f(x)Q_n(x)dx + \int_{I_2} f(x)Q_n(x)dx.$$

Então, $\int_{I_1} f(x)Q_n(x)dx = -\int_{I_2} f(x)Q_n(x)dx$. Agora, $\left|\int_{I_2} f(x)Q_n(x)dx\right| \leq \int_{I_2} |f(x)|dx$ e é limitada quando $n \to \infty$. Como $q(x) > 1$ em I_1, $q(x) \geq 1 + \varepsilon$ sobre $I_3 : x_o - \frac{\delta}{2} \leq x \leq x_o + \frac{\delta}{2}$. Portanto, $Q_n(x) = [q(x)]^n \geq (1 + \varepsilon)^n$ sobre I_3 e

$$\int_{I_1} f(x)Q_n(x)dx \geq \frac{m}{2} \int_{I_3} Q_n(x)dx \geq \frac{m}{2}(1 + \varepsilon)^n.$$

Isto é uma contradição, pois, quando $n \to \infty$, $\int_{I_1} \to \infty$ enquanto $\int_{I_2}$ é limitada. Logo, $f(x) \equiv 0$. □

Teorema 4.2. *O sistema de funções* $\cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\sin(nx)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *é fechado em* $L^2[-\pi, \pi]$.

Demonstração. Seja $f \in L^2[-\pi,\pi]$. Pelo lema 4.1, as condições (4.1) e (4.2) implicam que $f(x) = 0$ em $[-\pi,\pi]$. Isto implicará fechamento em $L^2[-\pi,\pi]$ pelo teorema 1.11. A função

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt$$

é contínua em $C[-\pi,\pi]$ e $F(-\pi) = 0$, $F(\pi) = 0$. Esta última igualdade segue de (4.1) com $n = 0$. Se $Q(x)$ designa um polinômio trigonométrico arbitrário, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Q(x)dx = 0$. Mas,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Q(x)dx = F(x)Q(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F(x)Q'(x)dx.$$

Portanto, $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)Q'(x)dx = 0$ para todas as derivadas Q' do polinômio trigonométrico.

Em particular, $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)dx = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$. Consideramos agora,

$$G(x) = F(x) - c, \qquad c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx.$$

É fácil verificarmos que $\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\sin(nx)dx = 0,\ n = 1, 2, \ldots,$
e $\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\cos(mx)dx = 0,\ n = 0, 1, \ldots$. Pelo lema 4.1, $G(x) = 0$. Assim, $F(x) = c$. Mas, $F(\pi) = 0$, então $F(x) = 0$. De acordo com $f(x) = 0$ em $[-\pi,\pi]$. □

Corolário 16. *A seqüência de senos e cossenos que satisfazem todas as condições A-F do teorema (1.11) para $f \in L^2[-\pi,\pi]$. Em particular, temos a identidade de Parseval.*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = \frac{1}{2}a_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

4.2 Convergência uniforme das séries de Fourier

O sistema $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2x), \ldots$ é ortonormal em $[-\pi,\pi]$ com o produto interno $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. A série de Fourier de f é:

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$$

onde

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx,\ k = 0,1,2,\ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx,\ k = 1,2,\ldots. \end{aligned}$$

Exemplo 01.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ -1 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

A série de Fourier de f é,

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right).$$

Exemplo 02. Seja $f(x) = x^2,\ -\pi \le x \le \pi$. Então a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Teorema 4.3. *Seja f contínua e periódica em $[-\pi,\pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$ e suponha que a série de Fourier de f converge uniformemente neste intervalo. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f.*

Demonstração. Se $\dfrac{a_o}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\big)$ converge uniformemente, então converge para uma função contínua de período 2π. Seja g esta tal função, ou seja,

$$g(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\big).$$

Como podemos integrar uma série que converge unifomemente termo a termo, pela ortogonalidade:

$$\begin{aligned}(g,\cos(kx)) &= \left(\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx)+b_k\sin(nx)\big),\cos(kx)\right)\\ &= a_o\left(\frac{1}{2},\cos(kx)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\cos(nx),\cos(kx))\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sin(nx),\cos(kx))=a_k.\end{aligned}$$

e, da mesma forma, $(g,\sin(kx)=b_k$. Mas, pela definição dos coeficientes de Fourier

$$(f,\cos(kx))=a_k,\qquad (f,\sin(kx))=b_k.$$

Portanto, $(f-g,cos(kx))=0,\ k=0,1,2\ldots$, e $(f-g,\sin(kx))=0,\ k=1,2,\ldots$. Pela propriedade de fechamento dos senos e cossenos, lema 4.1, $f-g=0$. Logo, $f=g$. □

Corolário 17. *Seja f contínua e periódica em $[-\pi,\pi]$ e sejam os coeficientes de Fourier a_k e b_k. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\big(|a_k|+b_k\big)<\infty$, então a série de Fourier da f converge absolutamente e uniformemente para f em $[-\pi,\pi]$.*

Demonstração. Como $|a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)|\leq|a_k|+|b_k|$. Segue do teste M-Weierstrass que a série de Fourier converge uniformemente e absolutamente. Pelo teorema 4.3, ela converge para f. □

Exemplo 03. No exemplo anterior, vemos que f é contínua em $[-\pi,\pi]$ e $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ e $b_n = 0$. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big(|a_n| + |b_n|\big)$ converge, então no lugar de $\sim$, pelo corolário acima, podemos colocar o sinal de igualdade.

Teorema 4.4. *Seja f periódica em $[-\pi,\pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$, $f'(\pi) = f'(-\pi)$, e de classe C^2 em $[-\pi,\pi]$. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente e absolutamente para f.*

Demonstração. $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Integrando por partes,

$$
\begin{aligned}
a_n &= f(x)\frac{\sin(nx)}{\pi n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx = -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx \\
&= f'(x)\frac{\cos(nx)}{\pi n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)dx = -\frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)dx.
\end{aligned}
$$

Nas igualdades acima, usamos o fato que $f(\pi) = f(-\pi)$, $f'(\pi) = f'(-\pi)$. Como f'' é contínua em $[-\pi,\pi]$, temos que $|f''(x)| \leq M$, para todo $x \in [-\pi,\pi]$, tal que $|a_n| \leq \dfrac{2M}{n^2}$. Fazemos o mesmo raciocínio acima para b_n e a conclusão do teorema vem da aplicação do corolário 17. $\square$

Na demonstração do teorema acima, a convergência de $\sum(|a_n| + |b_n|)$ é garantida pela convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. O grau n^2 é desnecessário para a convergência e pode ser reduzido para $n^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Teorema 4.5. *Seja $f \in C^n[-\pi,\pi]$, para $n \geq 1$, periódica de período 2π, $f(\pi) = f(-\pi)$, $f'(\pi) = f'(-\pi), \ldots, f^{(n)}(\pi) = f^{(n)}(-\pi)$. Suponha que $f^{(n)}$ satisfaça a condição de Lipschitz de ordem $\alpha : 0 < \alpha \leq 1$. Então, os coeficiente de Fourier de f satisfazem $|a_k|, |b_k| \leq \dfrac{const}{k^{n+\alpha}}$, $k = 1, 2, \ldots$, e a série de Fourier de f converge uniformemente para f em $[-\pi,\pi]$.*

Demonstração. Provaremos para o caso $n = 1$, $f \in C[-\pi,\pi]$. Os casos

$n > 1$ seguem deste caso e do teorema 4.4. Consideremos

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)dx.$$

Nesta última integral, seja $x = x' + \dfrac{\pi}{k}$. Então, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_k &= -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi-\pi/k}^{\pi-\pi/k} f'(x'+\pi/k)\sin\left[k\left(x'+\frac{\pi}{k}\right)\right]dx' \\
&= \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi-\pi/k}^{\pi-\pi/k} f'(x'+\pi/k)\sin(kx')dx' \\
&= \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x'+\pi/k)\sin(kx')dx' \\
&= \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x+\pi/k)\sin(kx)dx,
\end{aligned}$$

onde estendemos f pela periodicidade. Então,

$$a_k = \frac{1}{2\pi k}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x+\pi/k) - f'(x)]\sin(kx)dx.$$

Agora, como f' satisfaz a condição de Lipschitz de ordem α, $0 < \alpha \leq 1$, $|f'(x+\pi/k) - f'(x)| \leq C\left(\dfrac{\pi}{k}\right)^{\alpha}$ para todo x. Portanto,

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi k}C\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha}\cdot 2\pi = \frac{const}{k^{1+\alpha}}.$$

Uma desigualdade similar pode ser estabelecida para b_k. Portanto, a série do somatório dos coeficientes de Fourier da f, $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ converge. Pelo corolário 17, a série de Fourier da f converge uniformemente para f em $[-\pi, \pi]$. $\square$

Teorema 4.6. *Seja f contínua e periódica em $[-\pi, \pi]$ e f' é contínua por partes em $[-\pi, \pi]$. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente e absolutamente para f em $[-\pi, \pi]$.*

Demonstração. Pelo trabalho acima, para $n \geq 1$, $a_n = -\dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx$. Escrevemos $a'_n = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx$.

Como f' é contínua por partes, ela está em $L^2[-\pi,\pi]$. Pelo corolário 16, $\sum_{n=1}^{\infty}(a'_n)^2 < \infty$. Agora,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|a'_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a'_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$. Um argumento similar mostra que $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$. A conclusão do teorema agora segue do corolário 17. □

4.3 Convergência pontual das séries de Fourier

Análises mais profunda da convergência da série de Fourier são baseados sobre suas somas parciais. Assumimos que f está definida em $-\pi \leq x \leq \pi$ e estendida sobre todo o eixo x periodicamente.

Lema 4.7.

$$\frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})x]}{2\sin(\frac{x}{2})}.$$

Demonstração.

$$\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right] = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n}\left\{\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]\right\}\\ &= \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left(-\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})x]}{2\sin(\frac{x}{2})}.$$

$\square$

Corolário 18.

$$\begin{aligned} K_n(x,t) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}[\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt)] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)(x-t)]}{2\sin[1/2(x-t)]}. \end{aligned}$$

Corolário 19.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})t]}{\sin(\frac{t}{2})} dt = 1.$$

A função $K_n(x,t)$ é chamada de *núcleo de Dirichlet*.

Definição 35. Seja $f(x) \sim \dfrac{a_o}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$. Então,

$S_n(f;x) = S_n(x) = \dfrac{a_o}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$.

Lema 4.8.

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{\sin(\frac{t}{2})}\sin[(n+1/2)t]dt. \quad (4.3)$$

Demonstração.

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x,t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[(n+1/2)(x-t)]}{\sin[(1/2)(x-t)]}f(t)dt.$$

Seja $t = t' + x$.

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t'+x)\frac{\sin[(n+1/2)t']}{\sin[(1/2)t']}dt' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin[(1/2)t]}dt, \end{aligned}$$

onde agora f tem sido estendida pela sua periodicidade. Então,

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin[(1/2)t]}dt + \int_{-\pi}^{0} f(x+t)\frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin[(1/2)t]}dt\right).$$

Na última integral, seja $t' = -t$ e obtemos,

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin[(1/2)t]}dt. \qquad (4.4)$$

Agora, do corolário 19,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2f(x)\frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin[(1/2)t]}dt. \qquad (4.5)$$

Subtraindo a equação (4.4) da equação (4.5), temos

$$\begin{aligned} S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin[(1/2)t]}dt \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2f(x)\frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin[(1/2)t]}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{\sin(\frac{t}{2})}\sin[(n+1/2)t]dt. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.9 (Riemann-Lebesgue). *Seja $f \in L^1(a,b)$*[1]*. Então,*

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(tx)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(tx)dx = 0.$$

Demonstração.

Parte A. Para funções suficientemente suaves, pertencentes a $C^1[a,b]$, provaremos por integração por partes:

$$\int_a^b f(x)\cos(tx)dx = \frac{1}{t}\left[f(b)\sin(tb) - f(a)\sin(ta) - \int_a^b f'(x)\sin(tx)dx\right].$$

[1] $L^1(a,b)$ pode ser definido de forma similar a $L^2(a,b)$. $L^1(a,b) \approx L^1_{per}(\mathbb{R}) = \{f \in D'_{per}$ tal que existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_{per}$, Cauchy com relação a $||\cdot||_1$, de modo que $f = \lim_{n\to\infty} F_{u_n}$ em D'_{per}, onde $\| g \|_1 = \int_{-\pi}^{pi} |g(x)|dx\}$.

Portanto,

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(tx)dx\right| \leq \frac{1}{t}\left[f(b) - f(a) - \int_a^b |f'(x)|dx\right].$$

Fazendo $t \to \infty$, obtemos o limite desejado. Um argumento análogo é feito para o seno.

Parte B. Supomos agora que $f \in L^1(a,b)$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um polinômio p tal que $\displaystyle\int_a^b |f(x) - p(x)|dx \leq \varepsilon$. Então,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos(tx)dx\right| &= \left|\int_a^b [f(x) - p(x)]\cos(tx)dx + \int_a^b p(x)\cos(tx)\right| \\ &\leq \int_a^b [f(x) - p(x)]dx + \left|\int_a^b p(x)\cos(tx)\right|.\end{aligned}$$

Pela parte A, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_a^b p(x)\cos(tx)dx = 0$, portanto,

$$lim_{t\to\infty} sup\left|\int_a^b f(x)\cos(tx)dx\right| \leq \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(tx)dx = 0$. □

Lema 4.10. *Seja $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Para todo δ, tal que $0 < \delta < \pi$,*

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{\sin(\frac{t}{2})}\sin[(n+1/2)t]dt + \varepsilon_n,$$

onde $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Demonstração. Escrevemos a equação (4.3) na forma $\displaystyle\int_0^\delta + \int_\delta^\pi$. Seja $\displaystyle\varepsilon_n = \int_\delta^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{\sin(\frac{t}{2})}\sin[(n+1/2)t]dt$. Notemos que em $[\delta,\pi]$ o integrando é uma função integrável e, portanto, pelo Teorema de Riemann-Lebesgue, $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. □

Lema 4.11. *Seja $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Temos $\displaystyle\lim_{n\to\infty}[S_n(x) - f(x)] = 0$ se e, somente se,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\frac{\sin[(n+1/2)t]}{t}dt = 0.$$

Demonstração. Consideremos x fixo e escrevemos

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Pelo lema 4.10, $S_n(x) - f(x) \to 0$ se e somente se

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \varphi(t) \frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin(\frac{t}{2})} dt = 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned} 2\int_0^\delta \varphi(t) \frac{\sin[(n+1/2)t]}{t} dt = & \int_0^\delta \varphi(t) \frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin(\frac{t}{2})} dt \\ & + \int_0^\delta \varphi(t) \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \right) \sin[(n+1/2)t] dt. \end{aligned}$$

Visto que $\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \right)$ tem singularidade removível na origem, ela é integrável sobre $[0, \delta]$. Portanto, pelo Teorema de Riemann-Lebesgue, esta última integral tende a zero quando $n \to \infty$, e disto segue o lema. □

Teorema 4.12 (Princípio de Localização de Riemann). *Seja $f \in L^1(-\pi, \pi)$ e sua série de Fourier dada por*

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \big).$$

"A convergência desta série para $f(x)$ em um ponto fixo x depende somente do comportamento de $f(x)$ em uma pequena vizinhança de x".

Demonstração. Pelo lema 4.11, a convergência para $f(x)$ depende de

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin[(n+1/2)t]}{t} dt = 0.$$

Agora esta integral utiliza valores de $f(x)$ apenas no intervalo
$(x - \delta, x + \delta)$. □

Teorema 4.13 (Critério de Dini). *Seja x fixo e*

$$\int_0^\delta \left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| dt < \infty. \tag{4.6}$$

Então a série de Fourier de f converge em x para $f(x)$.

Demonstração. De acordo com as hipóteses acima, $\displaystyle\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\sin[(n+1/2)t]dt \to 0$ pelo Teorema de Riemann-Lebesgue. Agora, a conclusão do teorema segue do lema 4.11. □

Corolário 20. *Seja f diferenciável em x. Então a série de Fourier de f converge em x para $f(x)$.*

Demonstração.

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x-t)-f(x)}{t} = f'(x).$$

Em uma vizinhança de x, estas duas frações e, conseqüentemente, suas somas, $\dfrac{\varphi(t)}{t}$, são funções limitadas em t. Então, $\displaystyle\int_0^\delta \left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| dt < \infty$ e a conclusão do corolário segue do teorema acima. □

Corolário 21. *Seja f uma função que satisfaz à condição de Lipschitz de ordem $\alpha > 0$ em x. Então a série de Fourier de f converge em x para $f(x)$.*

Demonstração. $|f(x+t)-f(x)| \leq Ct^\alpha$, assim $\left|\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \leq Ct^{\alpha-1}$ e então, $\left|\dfrac{\varphi(t)}{t}\right| < 2Ct^{\alpha-1}$ e $\displaystyle\int_0^\delta \left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| dt < \infty$. Pelo Teste de Dini, temos a conclusão do corolário. □

Se f tem uma descontinuidade simples em um ponto, a série de Fourier de f converge para a média dos limites laterais naquele ponto. De fato, se em um ponto x, os limites

$$\lim_{t\to 0^+} f(x+t) = f(x^+), \qquad \lim_{t\to 0^-} f(x+t) = f(x^-)$$

existem e, além disso, se que em x, f tem as derivadas à direita e à esquerda, ou seja,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = f'_+(x) \tag{4.7}$$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} = f'_-(x), \tag{4.8}$$

então

Teorema 4.14. *Seja $f \in L^1(a,b)$ e, em um ponto x, satisfaz as condições acima. Então, a série de Fourier de f converge para o valor*

$$\frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right).$$

Demonstração. Como no lema 4.8, temos

$$S_n(x) - \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)\sin[(n+1/2)t]}{\sin(\frac{1}{2})}dt,$$

onde, agora,

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2\left[\frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)\right].$$

Um argumento análogo mostra que o Critério de Dinis é válido também com esta φ. Portanto,

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| dt < \left|\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}\right|$$

e em vista de (4.7) e (4.8), podemos encontrar um δ suficientemente pequeno tal que (4.6) seja garantida. $\square$

Corolário 22. *Seja $f \in L^1(-\pi,\pi)$ e suave por partes (cada pedaço é C^1) em $I = [a,b]$, $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Então a série de Fourier de f converge para todos os pontos de I. A soma é $f(x)$ nos pontos de continuidade e $\frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$ nos pontos de descontinuidade.*

4.4 Teoria de Féjer das séries de Fourier

A teoria das séries divergentes é feita de um modo particular de somatórios introduzidos por E. Cesàro. Se uma série infinita $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, então sua soma parcial $s_n = a_o + \cdots + a_n$ não possui limite. Mas, é possível que a média das somas parciais $\frac{1}{n+1}(s_o + s_1 + \cdots + s_n)$ tenha um limite s. Neste caso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é dita ser $(C, 1)$ somável para o valor s e escrita como

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad (C, 1).$$

Exemplo 04. $a_n = (-1)^n$. A série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$ é divergente. Mas, as somas parciais são $1, 0, 1, 0, 1, \cdots$. Suas médias são $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \ldots$. A seqüência das média converge para $\frac{1}{2}$. Então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é $(C, 1)$.

Observação 7: *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é convergente, então é* $(C, 1)$ *somável para o mesmo valor.*

Definição 36. Dado uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Associamos com sua série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e definimos as constantes $s_n^{(r)}$ pela média da equação formal

$$\frac{f(x)}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(r)} x^n.$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(r)}}{\binom{n+r}{n}} = s,$$

então escrevemos

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \ (C, r).$$

Associado às somas $(C, 1)$ existe um núcleo análogo ao núcleo de Dirichlet. O núcleo de Féjer, diferentemente do núcleo de Dirichlet que é oscilatório, é positivo.

Lema 4.15.

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3x}{2}\right) + \cdots + \sin[(n-1/2)x] = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Demonstração.

$$\sin[(k-1/2)x]\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\cos[(k-1)x] - \cos(kx)\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sin[(k-1/2)x]\sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{\cos[(k-1)x] - \cos(kx)\} \\
&= \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\sin[(k-1/2)x] = \frac{1}{2}[1-\cos(nx)] \\
&= \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin[(k-1/2)x] = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

□

Lema 4.16. *Seja* $S_n(x) = \dfrac{a_o}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$ *a soma parcial da série de Fourier de* f*. Seja*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\big(S_o(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)\big).$$

Então,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]\frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\big(\sin\frac{t}{2}\big)^2}dt. \tag{4.9}$$

Demonstração. Da equação (4.4),

$$S_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin[(k+1/2)t]}{\sin[(1/2)t]}dt.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{[f(x+t)+f(x-t)]}{\sin[(1/2)t]}\sum_{k=0}^{n-1}\sin[(k+1/2)t]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}dt.\end{aligned}$$

$\square$

Corolário 23.

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}dt = 1.$$

Demonstração. Tomamos $f(x) \equiv 1$. Então a integral acima é $\sigma_n(x)$ para a série de Fourier $1+0+0+\ldots$. E facilmente verificamos que $\sigma_n(x) \equiv 1$. $\square$

Corolário 24. *A soma de Féjer $\sigma_n(x)$ é limitada superiormente e inferiormente pelos limites superior e inferior de f. Ou seja, se $m \leq f(x) \leq M$ então $m \leq \sigma_n(x) \leq M$.*

Demonstração. Se $f(x) \leq M$ então $f(x+t)+f(x-t) \leq 2M$ tal que

$$\sigma_n(x) \leq \frac{2M}{2n\pi}\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}dt = M.$$

Similarmente para o limite inferior. $\square$

Lema 4.17. *Para um x fixo, seja $\varphi(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$ e*

$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}.$$

Então,

$$\sigma_n(x) - f(x) = \int_0^\pi K_n(t)\varphi(t)dt. \tag{4.10}$$

Demonstração. Pelo corolário 23,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2} 2f(x)dt. \tag{4.11}$$

Subtraindo a equação (4.9) da equação (4.11), obtemos (4.10). $\square$

A função $K_n(t) = \dfrac{1}{2\pi n}\dfrac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}$ é conhecida como o *núcleo de Féjer*. Ela satisfaz não somente

$$K_n(t) \geq 0, \tag{4.12}$$

mas também, pelo corolário 23,

$$\int_0^{\pi} K_n(t)dt = constante,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{4.13}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} M_n(\delta) = 0, \tag{4.14}$$

onde $M_n(\delta) = \max\limits_{\delta\leq t\leq\pi} K_n(t)$. Esta última igualdade segue de

$$\frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{2\pi n\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2\pi n\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}\ em\ \delta \leq t \leq \pi.$$

Funções contínuas que satisfazem as três condições (4.12), (4.13) e (4.14) são conhecidas como núcleos de Féjer gerais.

Lema 4.18.

$$\lim_{n\to\infty}\sup|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty}\sup\int_0^{\delta} K_n(t)|\varphi(t)|dt.$$

Demonstração. Da equação (4.10),

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \int_0^{\pi} K_n(t)|\varphi(t)|dt \\ &\leq \int_0^{\delta} K_n(t)|\varphi(t)|dt + \int_{\delta}^{\pi} K_n(t)|\varphi(t)|dt \\ &\leq \int_0^{\delta} K_n(t)|\varphi(t)|dt + M_n(\delta)\int_{\delta}^{\pi} |\varphi(t)|dt. \end{aligned}$$

Agora, tomando limite tendo em vista (4.14), temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup |\sigma_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \sup \int_0^\delta K_n(t)|\varphi(t)|dt.$$

□

Teorema 4.19. *Seja $f \in L^1(-\pi, \pi)$ e contínua em um ponto x. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

Demonstração. Seja $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$. Se f é contínua em x, dado um $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que $|\varphi(t)| < \varepsilon$ para todo $0 \leq t \leq \delta$. Agora, com este δ,

$$\int_0^\delta K_n(t)|\varphi(t)|dt \leq \varepsilon \int_0^\delta K_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

A última igualdade é devida ao corolário 23.

Tomando limite, pelo lema 4.18, $\lim_{n\to\infty} \sup |\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Mas, ε é arbitrário e portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

□

Esta conclusão pode ser fortalecida, assumindo que f é contínua em algum intervalo fechado $I = [a, b]$.

Teorema 4.20. *Seja $f \in L^1(-\pi, \pi)$ e contínua em $C[a, b]$ onde $-\pi \leq a < b \leq \pi$. Então $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$ uniformemente em I.*

Demonstração. f é uniformemente contínua em I, pois, f contínua e I compacto. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|\varphi(t)| &= |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \\ &\leq |f(x+t) + f(x-t)| + |f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq \delta$ e para todo $x \in I$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta |\varphi(t)|dt \leq \int_0^\pi |\varphi(t)|dt &\leq \int_0^\pi |f(x+t)|dt \\
&+ \int_0^\pi |f(x-t)|dt + 2\int_0^\pi |f(x)|dt \\
&= \int_{-\pi}^\pi |f(x+t)|dt + 2\pi|f(x)| \\
&= \int_{-\pi}^\pi |f(t)|dt + 2\pi|f(x)|.
\end{aligned}$$

Para $x \in I$, f é contínua e, portanto, limitada, $|f| \leq M$. Assim,

$$\int_\delta^\pi |\varphi(t)| \leq \int_{-\pi}^\pi |f(t)|dt + 2\pi M = const,\ x \in I.$$

Finalmente, para todo $x \in I$,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_0^\delta K_n(t)dt + M_n(\delta) \cdot const \leq \frac{\varepsilon}{2} + M_n(\delta) \cdot const.$$

Isto é limitado e independente de x, portanto a convergência é uniforme. $\square$

Corolário 25. *Seja f contínua e periódica em $[-\pi, \pi]$. Então, ela pode ser aproximada uniformemente por polinômios trigonométricos.*

Demonstração. Os polinômios trigonométricos $\sigma_n(x)$ servem como aproximantes. $\square$

Teorema 4.21. *Seja $f \in L^1(-\pi, \pi)$ e em um ponto x, f possui limites laterais, isto é, $f(x^+)$ e $f(x^-)$ existem; então,*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)].$$

Demonstração. Como anteriormente, escrevemos

$$\sigma_n(x) - \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \int_0^\delta K_n(t)\varphi(t)dt,$$

onde $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2\left\{\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]\right\}$. Então, a prova procede do teorema 4.19. $\square$

Capítulo 5

Métodos de Fourier espectrais

Os métodos espectrais, surgidos no final da década de 60, adquiriram prestígio no que diz respeito à obtenção de soluções aproximadas de elevada precisão para equações diferenciais (ver, por exemplo, Canuto et al, 1988). Estes métodos chamaram a atenção dos investigadores por uma propriedade denominada convergência espectral: se os dados do problema são suaves (por exemplo, equação diferencial ordinária com coeficientes e forçante infinitamente diferenciáveis), então a expansão em série associada ao método espectral converge à solução exata do problema, de modo que a norma do máximo do erro entre a aproximação e a solução exata decai a zero mais rapidamente que qualquer potência de $1/N$, onde N é o número de termos da expansão. O formalismo variacional, o uso da transformada rápida de Fourier e as excelentes propriedades de aproximação das funções de base envolvidas são as principais razões para o sucesso dos métodos espectrais, principalmente na resolução aproximada de problemas que modelam o escoamento de fluidos incompressíveis (uma das principais aplicações do método).

5.1 Operador de projeção

Definição 37. $P_N : L^2(0,2\pi)(\mathbb{R}) \to [e^{ikx} : |k| \leq N] = S_N$, $v \mapsto \sum_{k=-N}^{N-1} \hat{v}_k e^{ikx}$ é o operador de projeção, onde $\hat{v}_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(x)e^{ikx}dx$.

Observação 8: *(i) P_N é a projeção ortogonal sobre S_N com relação ao produto interno de $L^2(0,2\pi)$:*

$$(v - P_N v, \varphi) = 0, \ \ \forall \varphi \in S_N.$$

(ii) $P_N\left(\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{v}_k e^{ikx}\right) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N-1} \hat{v}_k e^{ikx}$.

Proposição 25. $(P_N v)' = P_N v'$ *para todo* $v \in H^1_{per}(0,2\pi)$.

Demonstração. Por definição, $2\pi\widehat{(v')}_k = (v', e^{ikx})$. Integrando por partes, $(v', e^{ikx}) = -(v, ike^{ikx}) = ik(v, e^{ikx}) = 2\pi ik\hat{v}_k$, para todo k. Assim,

$$\sum_{k=-N}^{N-1} \widehat{(v')}_k = \sum_{k=-N}^{N-1} ik\hat{v}_k$$
$$\sum_{k=-N}^{N-1} \widehat{(v')}_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N-1} ik\hat{v}_k e^{ikx}.$$

Logo, $P_N v' = (P_N v)'$.

Corolário 26. $(P_N v)^{(m)} = P_N(v^{(m)})$ *para todo* $v \in H^m_{per}(0,2\pi)$.

Corolário 27. *(i)* $v' = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\hat{v}_k e^{ikx}$ *em* $L^2(0,2\pi)$, *se* $v \in H^1_{per}(0,2\pi)$.

(ii) $v^{(m)} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^m \hat{v}_k e^{ikx}$ *em* $L^2(0,2\pi)$, *se* $v \in H^m_{per}(0,2\pi)$.

Teorema 5.1 (Cota para o erro de truncamento).

$$\| v - P_N v \|_{L^2(0,2\pi)} \leq cN^{-m} \cdot \| v \|_{m,per},$$

para todo $v \in H^m_{per}(0,2\pi)$, $m \geq 0$.

Demonstração. Pela identidade de Parseval,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \parallel v - P_N \parallel_{L^2(0,2\pi)(\mathbb{R})} = \left(\sum_{|k|>N} |\hat{v_k}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{|k|>N} \frac{1}{|k|^{2m}} \cdot |k|^{2m} \cdot |\hat{v_k}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq N^{-m} \left(\sum_{|k|>N} |k|^{2m} \cdot |\hat{v_k}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq N^{-m} \left(\sum_{|k|>N} (1+k^2)^m \cdot |\hat{v_k}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq N^{-m} \cdot \parallel v \parallel_{m,per} .$$

$\square$

Em outras palavras, o teorema acima afirma que a taxa do erro depende apenas da suavidade da função a ser aproximada. Se a função é C^{∞}_{per}, m pode ser qualquer e o erro decai rapidamente, conforme vimos no estudo do espaço $S(\mathbb{Z})$.

Teorema 5.2.

$$\parallel v - P_N v \parallel_{l,per} \leq cN^{l-m} \cdot \parallel v \parallel_{m,per}, \quad \forall\, m \geq 0, \quad \forall\, 0 \leq l \leq m,$$

se $v \in H^m_{per}(0, 2\pi)$.

Demonstração. Da mesma forma que o teorema anterior, pela identidade de Parseval,

$$\begin{aligned}
\| v - P_N v \|_{l,per} &= \left(\sum_{|k|>N} (1+k^2)^l \cdot |\hat{v_k}|^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{|k|>N} \frac{(1+k^2)^m}{(1+k^2)^{m-l}} \cdot |\hat{v_k}|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq N^{l-m} \left(\sum_{|k|>N} (1+k^2)^m \cdot |\hat{v_k}|^2 \right)^{1/2} \\
&= N^{l-m} \cdot \| v \|_{m,per} .
\end{aligned}$$

□

Definição 38. Dado N inteiro positivo e os pontos de colocação

$$x_j = \frac{\pi j}{N}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, 2_N - 1,$$

definimos a TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER de $v \in C_{per}(0, 2\pi)$ por

$$\tilde{v}_k = \mathbb{D}\{v(x_j)\}_k = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} v(x_j) e^{-ikx_j}, \quad k = -N, \ldots, N-1.$$

Observemos que, se $p \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} e^{-ipx_j} = \begin{cases} 1 & se\ p = 2Nk, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, se $p \neq 2Nk$, $e^{ip\pi N^{-1}} \neq 0$ e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} e^{ipx_j} &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} e^{ip\pi j N^{-1}} = \frac{1}{2N} \left[\frac{\left(e^{ip\pi N^{-1}}\right)^{2N} - 1}{e^{ip\pi N^{-1}} - 1} \right] \\
&= \frac{1}{2N} \frac{e^{2ip\pi} - 1}{e^{ip\pi N^{-1}}} = \frac{\cos(2p\pi) + i \sin(2p\pi) - 1}{e^{ip\pi N^{-1}}} = 0.
\end{aligned}$$

Se $p = 2kN$,

$$\frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} e^{i2Nk\cdot\pi jN^{-1}} = \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} e^{2\pi(kj)i} = 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 26.

$$v(x_l) = \sum_{k=-N}^{N-1} \tilde{v}_k e^{ikx_l}, \quad l = 0, \dots, 2N-1.$$

Demonstração. Fixemos $l \in \{0, 1, \dots, 2N-1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N-1} \tilde{v}_k e^{ikx_l} &= \sum_{k=-N}^{N-1}\left(\frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} v(x_j)e^{-ikx_j}\right)e^{ikx_l} \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} v(x_j)\sum_{k=-N}^{N-1} e^{ik(x_l-x_j)} \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} v(x_j)\sum_{\tilde{k}=0}^{2N-1} e^{i(\tilde{k}+N)(x_l-x_j)} \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} v(x_j)e^{i\pi(l-j)}\sum_{\tilde{k}=0}^{2N-1} e^{i\tilde{k}\pi N^{-1}(l-j)} \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} v(x_j)e^{i\pi(l-j)}\sum_{\tilde{k}=0}^{2N-1} e^{ix_{\tilde{k}}(l-j)} \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} v(x_j)e^{i\pi(l-j)} = \frac{1}{2N}\cdot v(x_l)\cdot 2N = v(x_l),
\end{aligned}$$

pois, pela observação acima, $\sum_{\tilde{k}=0}^{2N-1} e^{ix_{\tilde{k}}(l-j)}$ é $2N$ se $l-j = 2Nk$, $k \in \mathbb{Z}$; zero caso contrário. Temos que $j \in [0, 2N-1]$, mas para $k = 1$, $j = l - 2N$ e quando $l = 0$, $j = -2N$; $l = 2N-1$, $j = -1$ e isso não pode ocorrer. Da mesma forma, para $k = -1$, $j = l + 2N$ e quando $l = 0$, $j = 2N$. Portanto, só podemos ter $k = 0$ e, assim, $l = j$. □

Definição 39. O Operador de Interpolação é definido por

$$I_N : C_{per}(0, 2\pi) \to S_N = [e^{ikx},\ k = -N, \dots, N-1], \quad v \mapsto \sum_{k=-N}^{N-1} \tilde{v}_k e^{ikx}.$$

Observação 9: *(i)* $I_N v(x_j) = v(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, 2N-1$, *pela proposição 26.*

(ii) $\mathbb{D}^{-1}\{c_k\}_j = \sum_{k=-N}^{N-1} c_k e^{ikx_j}$. *Logo,*

$$\mathbb{D}^{-1}\{\tilde{v}_k\}_j = \mathbb{D}^{-1}\big\{\mathbb{D}\{v(x_l)\}_k\big\}_j = \sum_{k=-N}^{N-1} \tilde{v}_k e^{ikx_j} = v(x_j),$$

a última igualdade acima é devida à proposição 26.

Definição 40. Definimos o seguinte produto interno discreto

$$(v, w)_N = \frac{2\pi}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} v(x_j)\overline{w(x_j)}, \quad x_j = \frac{\pi j}{N},\ j = 0, 1, \ldots, 2N-1.$$

A norma discreta é dada por

$$\| v \|_N = (v, v)_N^{1/2}.$$

Definição 41. A diferença $I_N v - P_N v$ é denominada erro de alcunha, $A_N v$.

Proposição 27. *(i)* $\| v - I_N v \|^2 = \| v - P_N v \|^2 + \| A_N v \|^2$. *Este é o "Teorema de Pitágoras"em* $L^2(0, 2\pi)$, *ou seja, o erro de alcunha é ortogonal ao erro de projeção.*

(ii) $\tilde{v}_n = \hat{v}_n + \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} \hat{v}_m + 2Nm$ *e* $A_N v = \sum_{k=-N}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} \hat{v}_k + 2Nm \right) e^{ikx}$.

Demonstração.

(i). É imediato, pois $I_N v = P_N v + A_N v$. Então, $I_N v - v = (P_N - v) + A_N v$ e $(A_N v, v - P_N v) = \left(\sum_{k=-N}^{N-1} (\tilde{v}_k - \hat{v}_k) e^{ikx}, \sum_{|l|>N} \hat{v}_l e^{ilx} \right) = 0$.

(ii).

$$\tilde{v}_n = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} v_j e^{-inx_j} = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{v}_l e^{ilx_j} \right) e^{-inx_j}$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{v}_l \sum_{j=0}^{2N-1} e^{i(l-n)x_j} = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \hat{v}_n + 2KN,$$

pois, $\sum_{j=0}^{2N-1} e^{i(l-n)x_j}$ é 1, se $l-n = 2Nk$, $k \in \mathbb{Z}$; zero, caso contrário. Portanto, $\tilde{v}_n = \hat{v}_n + \sum_{l=-\infty, l\neq 0}^{\infty} \hat{v}_n + 2Nl$ e $A_N v = \sum_{k=-N}^{N-1}\left(\sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} \hat{v}_k + 2Nm\right) e^{ikx}$. □

Proposição 28. $(v,w)_N = (v,w)$, $\forall\, v, w \in S_N$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}(v,w) &= \int_0^{2\pi} v(x)\overline{w(x)}dx = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{r=-N}^{N-1}\hat{a}_r e^{irx}\right)\overline{\left(\sum_{s=-N}^{N-1}\hat{b}_s e^{isx}\right)}dx \\ &= \sum_{r=-N}^{N-1}\sum_{s=-N}^{N-1}\hat{a}_r\overline{\hat{b}_s}\int_0^{2\pi} e^{i(r-s)x}dx = \sum_{r=-N}^{N-1}\sum_{s=-N}^{N-1}\hat{a}_r\overline{\hat{b}_s}2\pi\delta_{rs} \\ &= 2\pi\sum_{r=-N}^{N-1}\sum_{s=-N}^{N-1}\hat{a}_r\overline{\hat{b}_s}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(v,w)_N &= \frac{2\pi}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}\left(\sum_{l=-N}^{N-1}\tilde{a}_l e^{ilx_j}\right)\left(\sum_{s=-N}^{N-1}\overline{\tilde{b}_s}e^{-isx_j}\right) \\ &= \frac{2\pi}{2N}\sum_{l=-N}^{N-1}\sum_{s=-N}^{N-1}\tilde{a}_l\overline{\tilde{b}_s}\left(\sum_{j=0}^{2N-1}e^{i(l-s)x_j}\right) \\ &= 2\pi\sum_{l=-N}^{N-1}\tilde{a}_l\overline{\tilde{b}_l} = 2\pi\sum_{l=-N}^{N-1}\hat{a}_l\overline{\hat{b}_l},\end{aligned}$$

pois como $v, w \in S_N$, não há erro de alcunha, via proposição 27. Logo, $(v,w) = (v,w)_N$. □

Proposição 29. $(I_N v, \phi)_N = (v,\phi)_N$, $\forall\, v \in C_{per}(0,2\pi)$, $\phi \in S_N$, *ou seja,* $I_N v$ *é a projeção ortogonal de* v *com relação ao produto interno discreto sobre* S_N. $[(I_N v - v, \phi)_N = 0,\ \forall\, v \in C_{per}(0,2\pi), \phi \in S_N]$.

Demonstração.

$$(I_N v, \phi)_N = \frac{2\pi}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} I_N v(x_j)\overline{\phi(x_j)} = \frac{2\pi}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \left(\sum_{l=-N}^{N-1} \tilde{v}_l e^{ilx_j} \right) \overline{\phi(x_j)}$$
$$= \frac{2\pi}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} v(x_j)\overline{\phi(x_j)} = (v, \phi)_N.$$

□

Teorema 5.3 (Cota para erro de Interpolação). *Se* $r > \frac{1}{2}$ *e* $0 \leq \mu \leq r$, *então,* $\forall\, v \in H^r_{per}(0, 2\pi)$

$$\| v - I_N v \|^*_{\mu,per} \leq c \cdot N^{\mu - r} \cdot |v|_r.$$

Demonstração. Dado que $-A_N v = P_N v - I_N v$,
$\| v - I_N v \|^*_{\mu,per} \leq \| v - P_N v \|^*_{\mu,per} + \| P_N v - I_N v \|$ e pela equivalência de normas da proposição 24,

$$\| A_N v \|^{*2}_{\mu,per} \leq c \sum_{|l| \leq N} (1 + l^2)^{\mu} |\hat{v}_l - \tilde{v}_l|^2. \leq cN^{2\mu} \sum_{|l| \leq N} \left| \sum_{p=-\infty, p\neq 0}^{\infty} \hat{v}_{l+p2N} \right|^2$$

Multiplicamos e dividimos o último membro da desigualdade acima por

$|l+p(2N)|^r$ e em seguida usamos a desigualde de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\| A_N v \|^{*2}_{\mu,per} &\leq cN^{2\mu} \sum_{|l|\leq N} \left| \sum_{p=-\infty,p\neq 0}^{\infty} \frac{|l+p(2N)|^r}{|l+p(2N)|^r} \hat{v}_{l+p2N} \right|^2 \\
&\leq cN^{2\mu} \sum_{|l|\leq N} \left(\sum_{p=-\infty,p\neq 0}^{\infty} |l+p(2N)|^{-2r} \right) \\
&\cdot \left(\sum_{p=-\infty,p\neq 0}^{\infty} |l+p(2N)|^{2r} |\hat{v}_{[l+p(2N)]=q}|^2 \right) \\
&\leq cN^{2\mu} \sum_{p=-\infty,p\neq 0}^{\infty} \left(N^{-2r} \cdot |p|^{-2r} \sum_{|q|>N} |q|^{2r} \cdot |\hat{v_q}|^2 \right) \\
&\leq cN^{2\mu} \sum_{p=-\infty,p\neq 0}^{\infty} \left(N^{-2r} \cdot |p|^{-2r} v \sum_{|q|>N} (1+q^2)^r \cdot |\hat{v}_q|^2 \right) \\
&\leq cN^{2\mu-2r} \sum_{p=-\infty,p\neq 0} |p|^{-2r} \cdot |v|^2_r \leq cN^{2\mu-2r} |v|^2_r.
\end{aligned}$$

A última desigualdade acima é válida, pois $\displaystyle\sum_{p=-\infty,p\neq 0}^{\infty} |p|^{-2r} < \infty$, se $r > 1/2$.

□

Corolário 28. $\| A_N v \|_{L^2(0,2\pi)} \leq c \cdot N^{-r} \cdot |v|_r$, $\forall\ v \in H^r_{per}(0,2\pi)$ *com* $r > 1/2$.

Demonstração. Temos que $\| A_N v \|_{L^2(0,2\pi)} \leq \| v - I_N v \|_{L^2(0,2\pi)}$, pois $\| v - I_N v \|^2_{L^2(0,2\pi)} = \| v - P_N v \|^2_{L^2(0,2\pi)} + \| A_N v \|^2_{L^2(0,2\pi)}$. □

Na demonstração, observamos que o erro de alcunha é menor ou igual ao erro de interpolação na norma $L^2(0,2\pi)$.

Definição 42. $P_N u' = (P_N u)'$ é a derivada de Fourier-Galerkin (espectral); $(I_N v)'$ é a derivada pseudo-espectral.

Corolário 29 (Erro na derivada pseudo-espectral). *Para todo* $v \in H^r_{per}(0,2\pi)$, *com* $r > 1/2$*:*

(i) $\| I_N v' - (I_N v)' \|_{L^2(0,2\pi)} \leq cN^{1-r} \cdot |v|^r$.

(ii) $\left(\dfrac{\pi}{N} \displaystyle\sum_{j=0}^{2N-1} [v'(x_j) - (I_N)'(x_j)]^2 \right)^{1/2} \leq cN^{1-r} \cdot |v|_r$.

Demonstração. Ver Tadmor (1986).

Proposição 30. $(I_N u)^{(p)}(x_i) = \sum_{j=0}^{2N-1} u(x_i) d_{i,j}^{(p)}$, *onde*

$$d_{i,j}^{(p)} = \begin{cases} \frac{1}{2N} \frac{d^p}{d\xi^p} \left\{ \frac{\sin[(2N-1)\xi/2]}{\sin(\xi/2)} \right\}_{x_i=\xi} & se j \neq i, \\ 0 & se \;\; i = j \;\; e \;\; p \;\; ímpar, \\ \frac{(-1)^{p/2}}{2N} \sum_{k=-N}^{N} k^p & se \;\; i = j \;\; e \; p \;\; par. \end{cases}$$

Em particular,

(i)

$$d_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{i+j} \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right), & i \neq j, \\ 0 se & i = j. \end{cases}$$

(ii)

$$d_{i,j}^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{i+j+1} \sin\left(\frac{1}{\sin^2[(x_i - x_j)/2]}\right), & i \neq j, \\ -\frac{2N^2+1}{6} se & i = j. \end{cases}$$

Proposição 31. *Sendo D a matriz de diferenciação com coeficientes $d_{i,j}$,*

(i) $D^{(k)} = [D^{(1)}]^k$.

(ii) $D^{(2k)}$ *é uma matriz real simétrica, enquanto* $D^{(2k+1)}$ *é uma matriz real anti-simétrica.*

5.2 Formalismo variacional

Desejamos resolver aproximadamente

$$\begin{cases} Lu = f, \quad L \text{ operador diferencial,} \\ B_1 u = x_a \ em \ x = a, \\ B_2 u = u_b \ em \ x = b, \end{cases}$$

onde as condições de contorno são de Dirichlet, Neumann ou Robin.

Definição 43. $R_N = Lu - f$ é chamado de resíduo.

5.2.1 Método de Galerkin espectral

Neste método, minimizaremos o resíduo, fazendo as funções-teste ortogonais ao resíduo da equação diferencial.

O método de Galerkin espectral consiste em selecionarmos um sistema de funções-tentativa $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que são C^∞, geralmente ortogonais, tais que

$$\begin{cases} B_1 \varphi_k = 0 \ em \ x = a, \\ B_2 \varphi_k = 0 \ em \ x = b. \end{cases}$$

Com $u = \tilde{u} + v$, onde $\tilde{u}$ é qualquer função que satisfaz às condições de contorno, temos,

$$\begin{cases} Lv = h, \ a < x < b, \\ B_1 v = 0 \ em \ x = a, \\ B_2 v = 0 \ em \ x = b, \end{cases}$$

onde $h = f - L\tilde{u}$. A solução aproximada do problema é dada por

$$v_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{v}_k \varphi_k(x). \tag{5.1}$$

Desta forma, o resíduo é $R_N = Lv_N - h$ e, para obtermos uma equação discreta, fazemos $(R_N, \varphi_j) = 0$, para $j = 0, 1, \ldots, N$. O produto interno é dado por $(u, v)_w = \displaystyle\int_a^b u(x)v(x)w(x)\, dx$, onde w é uma função peso conhecida, positiva e contínua; e $(\varphi_k, \varphi_l)_w = c_k\delta_{kl}$. Assim, temos um sistema linear de $N + 1$ equações e $N + 1$ incógnitas, dado por

$$\sum_{k=0}^{N} \hat{v}_k(L\varphi_k, \varphi_j)_w = (h, \varphi_j)_w, \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

$$(h, \varphi_j) = c_i\hat{h}_i.$$

Calculados os coeficientes $\hat{v}_k$, substituímos na equação (5.1), obtendo a solução aproximada.

5.2.2 Método de colocação

No método de colocação tornamos o resíduo nulo em pontos de colocação previamente escolhidos.

A solução aproximada é dada por

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k\varphi_k(x),$$

e o resíduo $R_N = Lu_N - f = 0$ em $x = xi$, $i = 1, \ldots, N-1$, que são os pontos de colocação. Então, temos o sistema de $N + 1$ equações a $N + 1$ incógnitas

$$\begin{cases} Lu_N(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, N-1, \\ B_1u_N(a) = u_a \\ B_2u_N(b) = u_b. \end{cases}$$

A alternativa mais usual é considerarmos como incógnitas os valores $u_N(x_i)$ nos pontos de colocação x_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, ao invés dos coeficientes

$\tilde{u}_k$. A relação entre $\tilde{v}_k$ e $u_N(x_i)$ é dada por

$$\sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k \varphi(x_i) = u(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, N.$$

5.3 Algumas aplicações simples

Exemplo 01. Consideremos o seguinte problema a valores no contorno

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \pi^2 \sin^2(x) v(x) = f(x), \qquad 0 < x < 2\pi$$

com condições de contorno de Dirichlet homogêneas e a função forçante $f(x) = -\pi \cos(x) \cos[\pi \cos(x)]$. Temos que $u_{exato} = \sin[\pi \cos(x)]$ é a solução da equação diferencial acima.

Solução por Fourier-Galerkin:

$$v_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k \varphi_k(x), \qquad \varphi_k(x) = e^{eikx}$$

Formulação Variacional: Fazemos $(R_N, \varphi_j)_{L^2(0,2\pi)} = 0$, $-N \leq j \leq N$, onde $R_N = Lv_N - f$, R_N é o resíduo e L é o operador diferencial. Assim,

$$\begin{aligned} 0 = (R_N, \varphi_j)_{L^2(0,2\pi)} = (Lv_N - f, \varphi_j) &= \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k L\varphi_k - f, \varphi_j \right) \\ &= \sum_{k=-N}^{N} c_k (L\varphi_k, \varphi_j) - (f, \varphi_j). \end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k (L\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j) = \hat{f}_j$. Obtemos o sistema linear $Mc = F$, onde $M = \big(L\varphi_k, \varphi_j\big)$, ou seja,

$$\begin{aligned} (L\varphi_k, \varphi_i) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} + \pi^2 \sin^2(x) \varphi_k(x) \right] \overline{\varphi_j(x)} dx \\ &= \int_0^{2\pi} [-k^2 \varphi_k(x) + \pi^2 \sin^2(x) \varphi_k(x)] \overline{\varphi_j} dx \\ &= -k^2 \pi \delta_{kj} + \pi^2 \big(\pi^2 \sin^2(x) \varphi_k(x), \varphi_j(x)\big). \end{aligned}$$

Assim,

$$M_{j,k} = -2\pi k^2\delta_{jk} + \pi^2\{(\sin^2(x), \cos[(k-j)x])_{L^2(0,2\pi)}$$
$$+ i(\sin^2(x), \sin[(k-j)x])_{L^2(0,2\pi)}\}.$$
$$F_j = 2\pi \hat{f}_j.$$

Exemplo 02. Mesmo problema anterior. Desta vez construiremos uma solução aproximada segundo o **esquema variacional por colocação**.
- Pontos de Colocação: $h = \dfrac{2\pi}{N}$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Formulação Variacional: $R_N(x_j) = 0$, $1 \leq j \leq N-1$.
- Sistema linear resultante: $Nd = G$, onde

$$N_{j,k} = [-k^2 + \pi^2 \sin^2(x_j)]e^{ikx_j}, \quad G_j = f(x_j).$$

- Aproximação por Colocação: $v_N(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} d_k e^{ikx}$.
Observamos que são $n+1$ incógnitas e $n+1$ equações, pois $k \in [-N, N]$ e $j \in [1, N-1]$, sendo que $R_N(x_o) = R_N(x_N) = 0$, pelas condições de contorno.
Exemplo 03. (Dautray,R.,Lions,J.L.,1988)

$$\begin{cases} -u'' = f, \quad -\pi < x < \pi, \\ u(-\pi) = u(\pi),\ u'(-\pi) = u'(\pi), \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(x)dx = 0, \\ f \in H^s_{per}(-\pi,\pi) \ \ com \ \ s \geq 0 \ \ e \ \ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0. \end{cases}$$

Solução.
$P_N f = \displaystyle\sum_{j=-N}^{N-1} \hat{f}_j e^{ijx}$ com $\hat{f}_o = 0$.
$P_N u = \displaystyle\sum_{j=-N}^{N-1} \hat{u}_j e^{ijx}$. Temos que $\hat{u}_j = \dfrac{\hat{f}_j}{j^2}$, para $j \neq 0$ e $\hat{u}_o = 0$. De fato,

$-u'' = f$, então, $(-u'', \varphi_j) = (f, \varphi_j) = \hat{f}_j$. Por outro lado, integrando duas vezes por partes,

$$
\begin{aligned}
(-u'', \varphi_j) &= \int_0^{2\pi} -u''(x)\varphi_j(x)dx = \int_0^{2\pi} u'(x)\varphi_j'(x)dx = -\int_0^{2\pi} u(x)\varphi_j''(x)dx \\
&= j^2 \int_0^{2\pi} u(x)\varphi_j(x) = j^2 \hat{u}_j.
\end{aligned}
$$

Então, $-(P_N u)'' = P_N(-u'') = P_N f$.

Logo,

$$
\begin{cases}
-(P_N u)'' = P_N f. \\
P_N u(-\pi) = P_N u(\pi), \;\; (P_N u)'(-\pi) = (P_N u)'(\pi) \quad com \quad \hat{u}_o = 0.
\end{cases}
$$

Estimando o erro da solução exata com a aproximação encontrada, $f \in H^s_{per}(-\pi, \pi)$, $s \geq 0$ e pela equivalência de normas, temos

$$
\begin{aligned}
\| \; u - P_N u \; \|_{2,per} \leq c \cdot |u - P_N u|_{2,per} &= c \left(\sum_{|k|>N} k^4 |\hat{u}_k|^2 \right)^{1/2} \\
&= c \left(\sum_{|k|>N} |\hat{f}_k|^2 \right)^{1/2} = c \; \| \; f - P_N f \; \|_{o,per} \\
&\leq \tilde{c} N^{-s} \cdot \| \; f \; \|_{s,per} \; .
\end{aligned}
$$

Exemplo 04.

$$
\begin{cases}
u_t + c(x) u_x = 0, \;\; 0 < x < 2\pi, \;\; c(x) > 0, \; \forall \; x, \; c \text{ contínua.} \\
c.\,c. \text{ periódicas.} \\
u(x, 0) = u_o \; \in L^2(0, 2\pi).
\end{cases}
$$

Solução por colocação:

Assumindo $u(\cdot, t) \in C^3$, então

$$
u(t) = u(t_n) + u'(t_n)(t - t_n) + u''(t_n)\frac{(t - t_n)^2}{2} + u'''(\xi)\frac{(t - t_n)^3}{6}.
$$

Logo,

$$u(t_n + \Delta t) = u(t_n) + u'(t_n)\Delta t + u''(t_n)\frac{\Delta t^2}{2} + u'''(\xi_+)\frac{\Delta t^3}{6},\ t_n < \xi_+ < t_n + h.$$
$$u(t_n - \Delta t) = u(t_n) - u'(t_n)\Delta t + u''(t_n)\frac{\Delta t^2}{2} - u'''(\xi_-)\frac{\Delta t^3}{6},\ t_n - h < \xi_- < t_n.$$

Então,

$$u'(t_n) = \frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n - \Delta t)}{2h} - \frac{\Delta t^2}{12}[u'''(\xi_+) - u'''(\xi_-)].$$

Mas, $u'(t_n) = -c(x)u_x(\cdot, t_n)$; a última parcela do segundo membro é o erro e_n, com $|e_n| \leq \dfrac{\Delta t^2}{6} \parallel u''' \parallel_\infty$; então $u^{(n+1)} = -2\Delta t\, c(x)\, u_x^{(n)} + u^{(n-1)}$. Portanto,

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} - 2\Delta t\, c(x_j)\, (Dv^n)_j,$$

no esquema "Leap-frog"(ou seja, requer duas condições iniciais); D a matriz de diferenciação; $v_j^{n+1} = v(x_j, t_n + \Delta t)$, onde $x_o = 0$, $x_i = ih$, $h = 2\pi/N$ e $\Delta t = T/N_t$, passo temporal. Observamos que a malha é calculada em (x, T).

Solução por Galerkin:

Temos que

$$\begin{aligned}
\hat{u}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\overline{\varphi_k(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\frac{\overline{\varphi_k(x)}}{(-ik)}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} u_x(x)\overline{\varphi_k(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ik}\int_0^{2\pi}\frac{u_t}{c(x)}\overline{\varphi_k(x)}dx \\
&= -\frac{1}{ik}\left[\frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(x)}{c(x)}\overline{\varphi_k(x)}dx\right] \\
&= -\frac{1}{ik}\frac{d}{dt}\widehat{\left(\frac{u(x)}{c(x)}\right)}_k.
\end{aligned}$$

Então,

$$\widehat{\left(\frac{u(x)}{c(x)}\right)}_k^{(n+1)} = \widehat{\left(\frac{u(x)}{c(x)}\right)}^{(n-1)} - 2\Delta t\, ik\, \hat{u}_k^{(n)}; \tag{5.2}$$

novamente pelo esquema "Leap-frog", onde a malha é calculada em (k,T). Portanto, através da transformada rápida de Fourier e da inversa,

$$\begin{array}{ccc} u_o, u_j^{(1)} \xrightarrow{fft} \left\{\left(\dfrac{u_o}{c}(x_j)\right)\right\}, \{\hat{u}_{1,k}\} & \xrightarrow{(5.2)} & \widehat{\left(\dfrac{u(x)}{c(x)}\right)}_k^{(2)} \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle ifft} \\ \left\{\left(\dfrac{u^{(1)}}{c}\right)(x_j)\right\}, \{\hat{u}_{2,k}\} \xleftarrow{fft} \{u^{(2)}(x_j)\} & \longleftarrow & \left\{\left(\dfrac{u^{(2)}}{c}\right)(x_j)\right\} \end{array}$$

A solução aproximada é dada por $v_N(x) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \hat{v}_k \varphi_k(x)$.

Bibliografia

[1] Beals, R., *Advanced mathematical analysis*, Springer-Verlag , (1973).

[2] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, Z., Zang, T. A., *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, (1988).

[3] Davis, P. J., *Interpolation and approximation*, Dover, (1975).

[4] Dautray, R., Lions, J. L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.2: Functional and Variational Methods*, Springer-Verlang, (1988).

[5] Orszag, S. A., *Comparison of pseudospectral and spectral approximation*, Stud. Appl. Math. 51, 253-259 (1972).

[6] Tadmor, E. *The exponencial accurary of Fourier and Chebyshev differencing methods*, SIAM J. Numer. Anal. 23,1-10, (1986).