Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Matemática

Aplicações do Teorema do Resíduo

Daynitti Ventura de Jesus

Orientadora: Silvia Martini de Holanda Janesch

Florianópolis

15 de agosto de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Matemática

Aplicações do Teorema do Resíduo

Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como trabalho de conclusão de curso, para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Daynitti Ventura de Jesus

Florianópolis

15 de agosto de 2007

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n°39/CCM/07.

Profª. Ms. Carmen Suzane Comitre Gimenez

Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Prof. Dra. Silvia Martini de Holanda Janesch

Depto. de Matemática\ UFSC (Orientadora)

Prof. Ms. Antônio Vladimir Martins

Depto. de Matemática\ UFSC

Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Depto. de Matemática\ UFSC

Agradecimentos

A Deus por ter me dado força para superar todos os momentos difíceis que encontrei durante esta caminhada.

A professora Silvia Martini de Holanda Janesch pela amizade, competência e dedicação durante a orientação deste trabalho.

A todos aqueles professores com os quais tive contato durante esses anos e que foram fundamentais para minha formação.

Ao meu namorado Hobed Rosa, com quem convivi durante esse tempo e sempre me apoiou e me incentivou nos momentos mais difíceis da minha vida.

Aos meus pais, em especial minha mãe, que nunca deixou faltar nada.

Às funcionárias Silvia e Iara da secretaria do Curso pela atenção e empenho em ajudar sempre que necessário.

A todos os meus amigos, que tive oportunidade de conhecer durante essa caminhada, em especial ao Antônio João, Débora, Nazareno, Klarissa e Thiago, pelo apoio e amizade.

A meus pais.

Sumário

Introdução

No estudo de integrais de funções complexas, o nome *resíduo* foi introduzido em 1826 por `A. L. Cauchy`, para expressar a diferença das integrais de uma função sobre dois caminhos com as mesmas extremidades delimitando uma região onde a única singularidade é um pólo da função. As integrais sobre caminhos fechados de funções analíticas num conjunto de pontos isolados onde têm pólos, puderam ser calculadas por simples soma de resíduos. Esta possibilidade foi estabelecida por `Cauchy` em 1826, no então chamado **Teorema do Resíduo**. Este teorema tem uma vasta gama de aplicações. O seu desenvolvimento inicial confundiu-se com o próprio desenvolvimento de áreas de aplicação, como cartografia, hidrodinâmica, aerodinâmica, elasticidade, eletrostática, eletromagnetísmo e processos de difusão em química e em biologia.

A ligação das variáveis complexas a áreas de outras ciências e da engenharia é tão íntima que o próprio desenvolvimento de várias dessas áreas se confundiu com os métodos da teoria de funções complexas. Por exemplo: no cálculo do movimento dos fluídos, da elasticidade em sólidos, dos campos elétricos e eletromagnéticos resultantes de distribuições de cargas e correntes elétricas, da força de sustentação de asas de aviões, de sistema de controle, de análise de sinais.

Neste trabalho vamos estudar as funções complexas, integrais curvilíneas e séries de `Laurent` visando demonstrar o **Teorema do Resíduo** com objetivo específico de aplicá-lo no cálculo de integrais impróprias de funções racionais e integrais impróprias que envolvam funções trigonométricas.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1 apresentamos uma breve introdução às funções complexas com o intuito de preparar o leitor para as aplicações do **Teorema do Resíduo**.

No Capítulo 2 estudamos as integrais de funções complexas para então definir integrais curvilíneas.

Iniciamos o Capítulo 3 com o estudo de séries de potências para só então, demonstrar o **Teorema do Resíduo**.

O Capítulo 4 é destinado as aplicações da teoria dos resíduos.

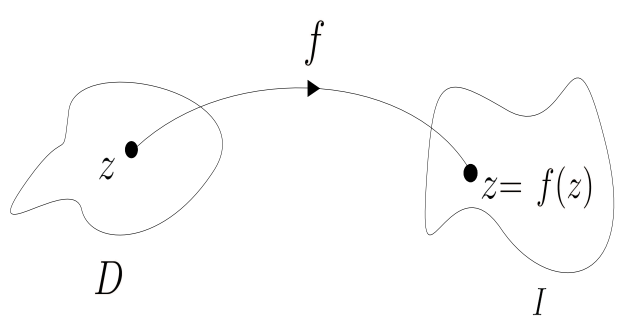
Capítulo 1

Introdução à Variável Complexa

Iniciamos o capítulo apresentando a definição de funções de uma variável complexa. Chamamos z de variável complexa, quando z representa qualquer número de um subconjunto de números complexos. Em seguida, introduzimos os conceitos e propriedades de limite, continuidade e derivada de função de uma variável complexa.

1.1 Funções Complexas

Definição 1.1 *Seja D um subconjunto de números complexos, e seja f uma lei que faz corresponder, a cada elemento z do conjunto D um único número complexo, que denotamos por $f(z)$. Desta maneira, diz-se que f é uma função com domínio D. O conjunto dos valores $w = f(z)$, que corresponde a todos os valores de z em D, é chamado de imagem de D e denota-se por I.*



Exemplo 1.1

a) *O domínio da função* $f(z) = z^2 + 1$ *é todo o plano complexo;*

b) *O domínio da função* $g(z) = \dfrac{z^3 - 27}{z - 3}$ *é* $\mathbb{C} - \{3\}$*;*

c) *O domínio da função* $h(z) = \dfrac{1}{z^2 + a^2}$, $(a \in \mathbb{R}_+^*)$ *é* $\mathbb{C} - \{\pm ia\}$.

Quando $z = x + iy$, temos $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$. Se u e v são funções reais das variáveis reais x e y, então $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função de z, e tem partes real $u(x, y)$ e imaginária $v(x, y)$. Por outro lado, toda função $f(z)$ tem partes real e imaginária que são funções reais de x e y.

Exemplo 1.2 *Considere a função* $f(z) = z^2 - 5z + 3$. *Identifique a parte real e a parte imaginária da função* f.

Solução. Temos,

$$\begin{aligned} z^2 - 5z + 3 &= (x + iy)^2 - 5(x + iy) + 3 \\ &= x^2 + i(2xy) - y^2 - 5x - 5iy + 3 \\ &= x^2 - 5x - y^2 + 3 + i(2xy) - 5iy. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x, y) = x^2 - 5x - y^2 + 3 \ \text{ e } \ v(x, y) = (2x - 5)y.$$

1.2 Funções Elementares

Estendemos agora as definições de funções elementares de uma variável real para funções de uma variável complexa.

1.2.1 Função Exponencial

Definição 1.2 *Definimos a função exponencial* $exp(z)$ *para um número complexo* $z = x + iy$*, em termos de funções reais, através da equação*

$$\exp(z) = e^x(\cos(y) + i sen(y)).$$

A notação e^z *também é usada para representar* $exp(z)$.

Exemplo 1.3 *Mostre que* $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$.

Solução. Temos

$$\exp(2 \pm 3\pi i) = e^2(\cos(\pm 3\pi) + i\mathrm{sen}(\pm 3\pi)) = e^2((-1) + i(0)) = -e^2.$$

Portanto, $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$.

Exemplo 1.4 *Mostre que*

a) $\cos(y) = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$

b) $sen(y) = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$*, para todo* $y \in \mathbb{R}$.

Solução. Temos da Definição 1.2 que

$$e^{iy} = \cos(y) + i\mathrm{sen}(y) \tag{1.1}$$

e

$$e^{-iy} = \cos(y) - i\mathrm{sen}(y). \tag{1.2}$$

a) Somando (1.1) e (1.2), obtemos

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos(y) \quad \text{ou seja,} \quad \cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

b) Subtraindo (1.2) de (1.1), temos

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i\mathrm{sen}(y) \quad \text{ou seja,} \quad \mathrm{sen}(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

As relações do Exemplo 1.4 são usadas para estender as funções trigonométricas ao plano complexo.

1.2.2 Funções Trigonométricas

Definição 1.3 *Definimos as funções seno e cosseno de uma variável complexa z como sendo*

$$sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad e \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Todas as outras funções trigonométricas são obtidas em função de seno e cosseno.

1.3 Limites de Funções

Definição 1.4 *Sejam $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função e z_0 um ponto de acumulação*[1] *de D. Dizemos que o limite de $f(z)$ quando z se aproxima de z_0 é um número complexo w_0 e escrevemos*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0,$$

se dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon.$$

Exemplo 1.5 *Sejam b, c e z_0 constantes complexas. Mostre que*

$$\lim_{z \to z_0} (bz + c) = bz_0 + c.$$

Solução. Dado $\epsilon > 0$. Devemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |(bz + c) - (bz_0 + c)| < \epsilon.$$

Trabalhando com a desigualdade envolvendo ϵ temos,

$$\begin{aligned} |(bz + c) - (bz_0 + c)| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad |bz + \cancel{c} - bz_0 - \cancel{c}| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |b(z - z_0)| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |b||z - z_0| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |z - z_0| < \frac{\epsilon}{|b|}. \end{aligned}$$

[1] Um ponto z_0 é dito ser um ponto de acumulação se toda vizinhança de z_0 contém pontos do conjunto, distinto de z_0.

Uma vizinhança de z_0 é o conjunto de todos os pontos para os quais $|z - z_0| < \delta$, onde δ é alguma constante positiva.

Tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{|b|}$ temos,

$$|(bz + c) - (bz_0 + c)| = |b||z - z_0| < |b| \cdot \frac{\epsilon}{|b|} = \epsilon.$$

sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Portanto, $\lim\limits_{z \to z_0} (bz + c) = bz_0 + c$.

Teorema 1.1 *Sejam $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Então o limite de f exite em z_0 e é igual a $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0$, se e somente se os limites de u e v existem em (x_0, y_0) e são iguais a u_0 e v_0 respectivamente,*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0 \quad e \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - (u_0 + iv_0)| < \epsilon,$$

ou seja,

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |(u(x, y) - u_0) + i(v(x, y) - v_0)| < \epsilon. \tag{1.3}$$

Temos

$$|(u(x, y) - u_0)| \leq |(u(x, y) - u_0) + i(v(x, y) - v_0)| \tag{1.4}$$

e

$$|(v(x, y) - v_0)| \leq |(u(x, y) - u_0) + i(v(x, y) - v_0)|. \tag{1.5}$$

De (1.3) e (1.4) segue que

$$|u(x, y) - u_0| < \epsilon \ \text{ sempre que } \ 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

e, de (1.3) e (1.5) segue que

$$|v(x, y) - v_0| < \epsilon \ \text{ sempre que } \ 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Portanto,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

($\Leftarrow$) Por hipótese

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

Então da definição de limite de funções reais, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$|u(x,y) - u_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1$$

e

$$|v(x,y) - v_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos

$$\begin{aligned} |u(x,y) + iv(x,y) - (u_0 + iv_0)| &\leq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Portanto, $\lim_{z\to z_0} f(z) = u_0 + iv_0$.

■

1.3.1 Propriedades dos Limites

No que segue, apresentamos as propriedades dos limites de funções de uma variável complexa.

Teorema 1.2 *Se* $\lim_{z\to z_0} f(z) = r_0$ *e* $\lim_{z\to z_0} g(z) = s_0$ *então:*

a) $\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = r_0 \pm s_0$;

b) $\lim_{z\to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = r_0 \cdot s_0$;

c) $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{r_0}{s_0}$, *desde que* $s_0 \neq 0$.

A demonstração do Teorema 1.2 é uma aplicação direta do Teorema 1.1 e do teorema sobre limites de funções reais de duas variáveis reais.

Exemplo 1.6 *Calcule o limite de* $\lim_{z \to i} \frac{z^3 - 27}{z - 3}$.

Solução. Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{z \to i} \frac{z^3 - 27}{z - 3} &= \lim_{z \to i} \frac{(z-3)(z^2 + 3z + 9)}{(z-3)} \\ &= \lim_{z \to i} (z^2 + 3z + 9) \\ &= i^2 + 3i + 9. \end{aligned}$$

Como $i^2 = -1$, temos

$$\lim_{z \to i} \frac{z^3 - 27}{z - 3} = 3i + 8.$$

1.4 Continuidade

Definição 1.5 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *uma função, e* $z_0 \in D$ *um ponto de acumulação de* D*. Dizemos que* f *é contínua no ponto* z_0 *se*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Dizemos que f *é contínua, se* f *é contínua em todos os pontos do domínio.*

Exemplo 1.7 *Considere a função* $f(z) = bz + c$ *onde* b *e* c *são constantes complexas. Mostre que* f *é contínua.*

Solução. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$, então $f(z_0) = bz_0 + c$. Pelo Teorema 1.2 item (**a**),

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} f(z) &= \lim_{z \to z_0} (bz + c) \\ &= \lim_{z \to z_0} bz + \lim_{z \to z_0} c \\ &= \left(b \lim_{z \to z_0} z \right) + c \\ &= bz_0 + c. \end{aligned}$$

Como $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$, temos f é contínua no ponto z_0. Mas z_0 é um ponto qualquer, segue que a função é contínua.

Teorema 1.3 *Sejam f e g funções contínuas no ponto z_0. Então*

a) *$f \pm g$ é contínua em z_0;*

b) *$f \cdot g$ é contínua em z_0;*

c) *$\dfrac{f}{g}$ é contínua em z_0, desde que $g(z_0) \neq 0$.*

A demonstração do Teorema 1.3 é uma aplicação direta das propriedades dos limites.

Teorema 1.4

a) *Uma função polinomial em z é contínua em todos os pontos do plano complexo.*

b) *Uma função racional em z (quociente de dois polinômios) é contínua em todos os pontos onde o denominador é diferente de zero.*

Demonstração.

a) Note que uma função polinomial em z é soma de produtos das funções contínuas $f(z) = z$ e $g(z) = a$, onde $a \in \mathbb{C}$ (Exemplo 1.7). Aplicando o Teorema 1.3 itens **(a)** e **(b)** repetidas vezes, temos o resultado desejado.

b) Uma função racional é o quociente de funções polinomiais. Como funções polino - miais são funções contínuas, segue pelo Teorema 1.3 item **(c)**, que uma função racional é uma função contínua.

■

Exemplo 1.8 *Considere a função $f(z) = \dfrac{z^3 - 27}{z - 3}$. Mostre que f é contínua.*

Solução. Basta observar que f é quociente de dois polinômios. Logo, f é contínua.

Teorema 1.5 *A função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é contínua se, e somente se, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são contínuas.*

A demonstração do Teorema 1.5 é uma aplicação direta do Teorema 1.1.

1.5 Derivada

A definição de derivada de funções de uma variável complexa é muito parecida com a definição de funções de uma variável real. Uma diferença significativa nas definições, é que o limite na definição de $f'(z)$ é de dimenção dois.

Definição 1.6 *A derivada de uma função f é dada por*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \text{ quando este limite existe.}$$

Outra notação para representar $f'(z)$ é $\dfrac{df}{dz}$.

1.5.1 Fómulas de Derivação

No que segue apresentamos as regras básicas de derivação de função de uma variável complexa. Estas regras são deduzidas usando a definição de derivada. Nos itens abaixo, w_1, w_2 são funções deriváveis de z, c é constante complexa e $n \in \mathbb{Z}$.

1. $\dfrac{d}{dz}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dz}(z) = 1$

3. $\dfrac{d}{dz}(cw_1) = c{w_1}'$

4. $\dfrac{d}{dz}(w_1 + w_2) = {w_1}' + {w_2}'$

5. $\dfrac{d}{dz}(w_1 w_2) = {w_1}' w_2 + w_1 {w_2}'$

6. $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right) = \dfrac{{w_1}' w_2 - w_1 {w_2}'}{{w_2}^2}, w_2 \neq 0$

7. $\dfrac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$

8. $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$

9. $\dfrac{d}{dz}\text{sen}(z) = \cos(z)$

10. $\dfrac{d}{dz}\cos(z) = -\text{sen}(z)$

11. $\dfrac{d}{dz}[w_1(w_2)] = \dfrac{dw_1}{dw_2}\dfrac{dw_2}{dz}$ função composta, onde ${w_1}'(t)$ existe no ponto $t = w_2(z)$ e ${w_2}'(z)$ existe.

Exemplo 1.9 *Mostre que* $\dfrac{d}{dz}(w_1 + w_2) = {w_1}' + {w_2}'$.

Solução.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(w_1 + w_2) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(w_1(z+\Delta z) + w_2(z+\Delta z)) - (w_1(z) + w_2(z))}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w_1(z+\Delta z) - w_1(z)}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w_2(z+\Delta z) - w_2(z)}{\Delta z} \\
&= {w_1}' + {w_2}'.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.10 *Calcule a derivada da função polinomial*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n$$

Solução. Da regra de derivação item (4), obtemos

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + na_n z^{n-1}.$$

1.6 Condições Necessárias e Condições Suficientes para Existência de Derivada

A seguir apresentaremos dois teoremas. O primeiro fornece condições necessárias para que uma função de uma variável complexa seja derivável, e o segundo fornece condições para a existência da derivada da função. As condições são sobre as partes real e imaginária da função complexa.

Teorema 1.6 (Condições Necessárias) *Se a derivada $f'(z)$ de uma função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ existe num ponto z, então as derivadas parciais de primeira ordem, em relação a x e y de cada uma das partes u e v, existem nesse ponto e satisfazem às condições de* `Cauchy-Riemman`

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Além disso, a derivada da função f é dada por $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Teorema 1.7 (Condições Suficientes) *Sejam $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ funções reais com derivadas parciais de primeira ordem, contínuas num ponto (x_0, y_0). Se essas derivadas satisfazem as condições de* `Cauchy-Riemann`

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

nesse ponto, então a derivada $f'(z_0)$ da função $f = u + iv$ existe, sendo $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$.

Exemplo 1.11 *Considere a função $f(z) = iz + 2$. Use o Teorema 1.7 para mostrar que $f'(z)$ e sua derivada $f''(z)$ existem em todos os pontos, e ache $f'(z)$ e $f''(z)$.*

Solução.

$$\begin{aligned} f(z) = iz + 2 \quad &\Rightarrow \quad f(z) = i(x + iy) + 2 \\ &\Rightarrow \quad f(z) = ix + i^2 y + 2 \\ &\Rightarrow \quad f(z) = ix - y + 2 \\ &\Rightarrow \quad u = -y + 2 \ \text{ e } \ v = x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1 \text{ e } \ \frac{\partial v}{\partial x} = 1.$$

Como u e v são contínuas, e as condições de `Cauchy-Riemann` são satisfeitas então $f'(z)$ existe. Dado que $f'(z)$ existe então, pelo Teorema 1.6, a derivada é $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, ou seja, $f'(z) = i$. Agora, $f'(z) = i$. Identificando as partes real e imaginária da função $f'(z)$ temos

$$u = 0 \ \text{ e } \ v = 1.$$

Segue que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ e } \ \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Como u e v são contínuas e as condições de `Cauchy` são satisfeitas, temos que $f'(z)$ existe. Logo pelo Teorema 1.6, obtemos $f''(z) = 0$.

Exemplo 1.12 *Considere a função $f(z) = \overline{z}$, ou seja, conjugado da z. Mostre que $f'(z)$ não existe em nenhum ponto.*

Solução. A função $f(z) = \overline{z}$ pode ser escrita como $f(z) = x - iy$, onde $z = x + iy$. As partes real e imaginária da f são

$$u(x, y) = x \quad e \quad v(x, y) = -y.$$

Calculando as derivadas parciais de u em relação x e v em relação y temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \ \text{ e } \ \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C},$$

ou seja, as condições de `Cauchy-Riemann` não são satisfeitas, então pelo Teorema 1.6 a função f não possui derivada em nenhum ponto.

1.7 Função Analítica

Definição 1.7 *Uma função f de variável complexa z é dita analítica num ponto z_0, se ela é derivável não só em z_0 como também em todo ponto de uma vizinhança de z_0. Dizemos que f é analítica, se f é analítica em todos os pontos do domínio.*

Exemplo 1.13 *Mostre que a função $f(z) = (x^2 - y^2 - 2x) + 2iy(x-1)$ é analítica.*

Solução. Temos $f(z) = (x^2 - y^2 - 2x) + 2iy(x-1)$. Então, $u = x^2 - y^2 - 2x$ e $v = 2yx - 2y$.

Calculando as derivadas parciais obtemos,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad \text{e} \quad \frac{-\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Como as condições de `Cauchy-Riemann` são satisfeitas em todos os pontos do plano complexo, concluímos que f é derivável em $\mathbb{C}$ e assim f é analítica.

Exemplo 1.14 *Mostre que a função $f(z) = xy + iy$ não é analítica em nenhum ponto.*

Solução. Temos $f(z) = xy + iy$. Então, $u = xy$ e $v = y$.

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Pelo Teorema 1.7 a função é derivável somente no ponto $i = (0, 1)$. Logo, f não é analítica em nenhum ponto.

Aplicando as regras de derivação se deduz que se duas funções são analíticas, então a soma, o produto e o quociente destas funções são analíticas no domínio de definição das funções soma, produto e quociente.

1.8 Ponto Singular Isolado

Definição 1.8 *Um ponto z_0 é um ponto singular isolado de uma função f, se existe uma vizinhança de z_0, na qual f é analítica, exceto no próprio ponto z_0.*

Exemplo 1.15 *Determine os pontos singulares da função, $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ e diga por que a função é analítica em todos os pontos, exceto nesses pontos.*

Solução. A função não está definida nos pontos

$$z_1 = 0,\, z_2 = i \quad \text{e} \quad z_3 = -i.$$

A função f é analítica em todos os pontos, exceto z_1, z_2 e z_3, pois f é uma função racional. Os pontos z_1, z_2 e z_3 são os pontos singulares da função.

Capítulo 2

Integrais de Funções Complexas

Faremos um breve estudo sobre integral de função de uma variável complexa. No caso real a integral pode ser interpretado como área. Já no caso complexo, não temos uma interpretação geométrica. Podemos dizer que as integrais de funções complexas são definidas com respeito a caminhos ou curvas. Inicialmente apresentamos o conceito de integral definida de uma função complexa que será usada para definir a integral curvilínea.

2.1 Integrais Definidas

Definição 2.1 *Seja $F(t)=U(t)+iV(t)$ uma função contínua da variável real t num intervalo $[a,b]$. A integral da F é definida em termos das integrais das funções reais U e V, segundo a expressão*

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt.$$

2.1.1 Propriedades da Integral Definida

1. $Re\int_a^b F(t)dt = \int_a^b ReF(t)dt;$

2. $Im\int_a^b F(t)dt = \int_a^b ImF(t)dt;$

3. $\displaystyle\int_a^b [F(t)+G(t)]dt = \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt;$

4. $\displaystyle\int_a^b cF(t)dt = c\int_a^b F(t)dt$, onde c é uma constante.

5. $\displaystyle\left|\int_a^b F(t)dt\right| \leq \int_a^b \Big|F(t)\Big|dt.$

2.2 Curvas e Caminhos

Definição 2.2 *Sejam*

$$x = x(t) \quad e \quad y = y(t) \tag{2.1}$$

funções contínuas de uma variável t, definidas para $t \in [a,b]$. Chamamos curva *o conjunto de todos os pontos (x,y) determinado por estas equações.*

As equações $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são chamadas equações paramétricas da curva e t é o parâmetro.

Quando as funções x e y em (2.1) têm derivadas contínuas para todo $t \in [a,b]$, dizemos que a curva é uma curva suave.

Exemplo 2.1 *A circunferência é uma curva suave. A representação paramétrica da circunferência de centro na origem e raio a é dado por*

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = asen(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Definição 2.3

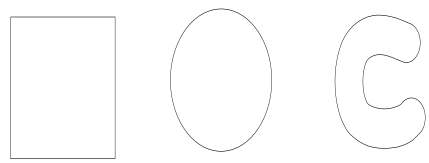
(i) *Uma curva de equações*

$$\begin{cases} x(t)=x(t) \\ y(t)=y\ (t), \quad t \in [a,b]. \end{cases}$$

é dita fechada *se $x(a) = x(b)$ e $y(a) = y(b)$.*

(ii) *Se a cada ponto da curva corresponde um único valor de* t *(exceto quando* $t = a$ *e* $t = b$*), dizemos que a curva é simples.*

Exemplo 2.2 *As figuras abaixo ilustram curvas fechadas simples.*



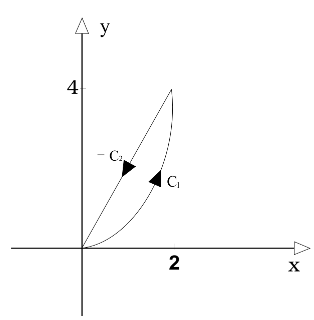
Definição 2.4 *Suponhamos que a curva* C *seja representada por*

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Chamamos de sentido positivo sobre C*, o sentido no qual a curva é traçada quando o parâmetro* t *cresce de* a *para* b*. O sentido oposto é chamado negativo.*
Usamos a notação $-C$ *para representar a curva* C *com orientação negativa.*

Definição 2.5 *Um caminho é uma cadeia contínua de um número finito de curvas suaves.*

Exemplo 2.3 *A figura abaixo mostra o esboço de um caminho.*



$$C_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2, \quad 0 \leq t \leq 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad C_2 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t, \quad 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

2.3 Integrais Curvilíneas

Definição 2.6 *Sejam C uma curva representada por $x = x(t)$, $y = y(t)$ com $t \in [a, b]$, e f uma função da variável complexa $z = x + iy$, contínua em C. A integral curvilínea de f, ao longo de C, que denotamos por $\int_C f(z)dz$, é definida como*

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \tag{2.2}$$

Note que a integral pode ser escrita como

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(x(t) + iy(t))(x'(t) + iy'(t))dt.$$

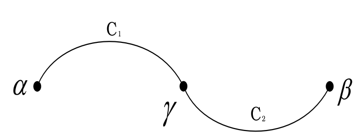
2.3.1 Propriedades

As propriedades da integral curvilínea são análogas às propriedades das integrais definidas. Nas propriedades que segue estamos assumindo que C é suave e que f , f_1 e f_2 são funções contínuas sobre C.

1. $\displaystyle\int_C [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz.$

2. $\displaystyle\int_C cf(z)dz = c\int_C f(z)dz$, onde c é constante.

3. $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$, onde C consiste de um caminho C_1 de α a algum ponto γ e de um caminho C_2 de γ a β.



4. $\displaystyle\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$

5. $\displaystyle\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz| = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt.$

6. Se $|f(z)| \leq M$ para todo z em C então

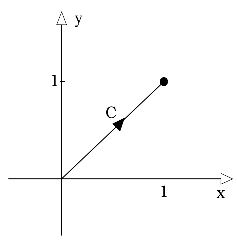
$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML,$$

onde L é o comprimento de C, ou seja,

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt = \int_a^b |z'(t)|dt = \int_C |dz|.$$

Exemplo 2.4 *Considere a função* $f(z) = y - x - 3x^2 i$. *Calcule o valor da integral* $\displaystyle\int_C f(z)dz$, *onde* C *é o segmento reto de* $z = 0$ *a* $z = 1 + i$.

Solução. A figura ilustra o caminho de integração.



Uma parametrização para a curva C é $\begin{cases} x = t, \\ y = t, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$

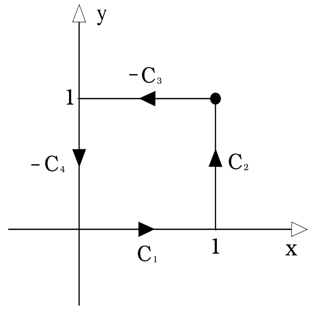
Usando a equação (2.2), temos

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_0^1 f(t+it)\cdot(1+i)dt = \int_0^1 (-3t^2 i)(1+i)dt = \int_0^1 (-3t^2 i + 3t^2)dt \\ &= \Big(-\frac{3t^3 i}{3}\Big)\Big|_0^1 + \frac{3t^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - i. \end{aligned}$$

Exemplo 2.5 *Se* C *é o contorno do quadrado com vértices nos pontos* $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ *e* $z = i$, *mostre que* $\displaystyle\int_C (3z + i)dz = 0$.

Solução. A figura mostra o caminho de integração.

Para calcular a integral, dividimos C em quatro caminhos C_1, C_2, C_3 e C_4 conforme mostra a figura. As parametrizações são:



$$C_1\begin{cases} x=t,\\ y=0, \quad t\in[0,1].\end{cases} \qquad C_2\begin{cases} x=1,\\ y=t, \quad t\in[0,1].\end{cases}$$

$$C_3\begin{cases} x=t,\\ y=1, \quad t\in[0,1].\end{cases} \qquad C_4\begin{cases} x=0,\\ y=0, \quad t\in[0,1].\end{cases}$$

Como $f(z)=3z+1$ podemos escrever $f(z)=3(x+iy)+1$. Usando a equação (2.2) temos,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^1 f(t+0i)\cdot(1+i0)dt = \int_0^1 (3t+1)dt = \Big(\frac{3}{2}t^2+t\Big)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}.$$

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^1 f(1+it)\cdot(0+i)dt = \int_0^1 (4+3it)dt = \Big(4ti-\frac{3}{2}t^2\Big)\Big|_0^1 = 4i-\frac{3}{2}.$$

$$\int_{-C_3} f(z)dz = \int_1^0 f(t+i)\cdot(1+i0)dt = \int_1^0 (3t+3i+1)dt = \Big(\frac{3}{2}t^2+3it+t\Big)\Big|_1^0 = -\frac{5}{2}-3i.$$

$$\int_{-C_4} f(z)dz = \int_1^0 f(0+i0)\cdot(0+i0)dt = \int_1^0 (3it+1)idt = \Big(-\frac{3}{2}t^2+it\Big)\Big|_1^0 = \frac{3}{2}-i.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{-C_3} f(z)dz + \int_{-C_4} f(z)dz\\ &= \frac{5}{2}+4i-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}-3i+\frac{3}{2}-i\\ &= 0.\end{aligned}$$

Exemplo 2.6 *Seja C o arco do círculo $|z| = 2$ que se situa no primeiro quadrante. Mostre que*

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

sem calcular o valor da integral.

Solução. Da Propriedade 5 das integrais cuvilíneas temos

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \int_C \left| \frac{1}{z^2+1} \right| |dz|.$$

Agora,

$$|z^2| = |z^2 + 1 - 1| \leq |z^2 + 1| + |-1| = |z^2 + 1| + 1,$$

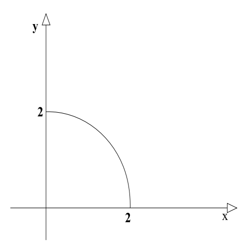
ou seja,

$$|z^2| - 1 \leq |z^2 + 1|.$$

Ainda,

$$\frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z^2| - 1} = \frac{1}{|z|^2 - 1} = \frac{1}{2^2 - 1},$$

pois $|z| = 2$.



Segue que

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{3}.$$

Assim,

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \int_C \frac{1}{3} \cdot |dz| = \frac{1}{3} \int_C |dz|.$$

Como $\displaystyle\int_C |dz| = \frac{1}{4}(\pi \cdot 2^2) = \pi$ chegamos à

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

2.4 Teorema de Cauchy-Goursat

No que segue apresentamos o Teorema de `Cauchy-Goursat` que diz que, se f é uma função analítica em uma região simplesmente conexas[1] D então a integral curvilínea da f sobre qualquer caminho fechado contido em D é zero.

Teorema 2.1 *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa D. Então*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

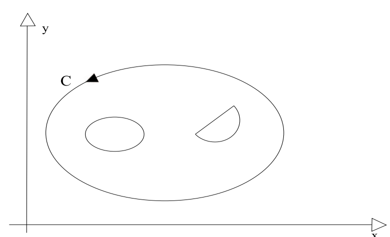
para todo o caminho fechado C contido em D.

O Teorema acima pode ser estendido para regiões multiplamente conexas[2].

Teorema 2.2 *Seja C um caminho fechado e seja C_j um número finito $(j = 1, 2, \ldots, n)$ de caminhos fechados contidos no interior de C, tais que os interiores de C_j não tenham pontos em comum. Seja R a região fechada consistindo de todos os pontos de C e dos pontos interiores a C, exceto os pontos interiores a cada C_j, e seja B a fronteira orientada de R, consistindo de C e de todos os C_j, orientados de modo a deixarem os pontos de R à esquerda de B. Então, se $f(z)$ é analítica em R,*

$$\int_B f(z)dz = 0.$$

A figura abaixo ilustra a região descrita no teorema.



[1]Uma região D é dita simplesmente conexa se qualquer curva simples fechada contida em D pode ser reduzida a um único ponto sem sair de D, ou seja, é toda região que não possui "buracos".

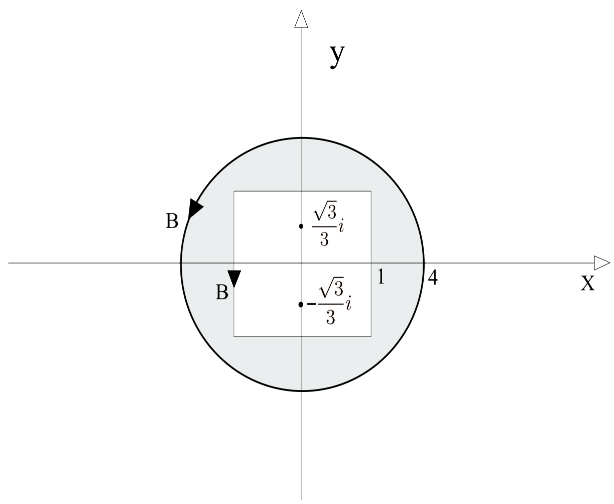
[2]Uma região é dita multiplamente conexa se qualquer curva simples fechada contida em D não pode ser reduzida a um único ponto sem sair de D, ou seja, é toda região que possui "buracos".

A demonstração deste teorema não faz parte do escopo deste trabalho, e pode ser encontrada em [2].

Exemplo 2.7 *Seja B a fronteira da região entre o círculo $|z| = 4$ e o quadrado com lados sobre as retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, onde B é orientada de modo a deixar a região à sua esquerda. Diga por que $\int_B f(z)dz = 0$, quando $f(z) = \dfrac{1}{3z^2 + 1}$.*

Solução. A função não está definida nos pontos onde $3z^2 + 1 = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 3z^2 &= -1 \\ z^2 &= -\frac{1}{3} \\ z &= \pm\frac{\sqrt{3}}{3}i \cong 0,58 \quad \text{(está fora da região com fronteira } B\text{).} \end{aligned}$$



A função f é analítica em todos os pontos, exceto $z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$. Assim as hipóteses do Teorema 2.2 são satisfeitas. Logo, $\int_B f(z)dz = 0$.

Capítulo 3

Séries, Resíduos e Pólos

Neste capítulo o objetivo é apresentar o **Teorema do Resíduo**. Inicialmente apresentaremos dois teoremas sobre séries de funções. O primeiro teorema diz que toda função analítica num ponto $z = z_0$ pode ser desenvolvida em série de potências de $(z - z_0)$ numa vizinhança de z_0. E o segundo teorema garante que uma função pode ser representada por uma série de potências $(z - z_0)$, mesmo que z_0 seja uma singularidade da função. Neste caso a série inclui termos com potências negativas de $(z - z_0)$.

3.1 Séries de Taylor e Laurent

Teorema 3.1 *Seja f uma função analítica em todos os pontos interiores de um círculo C_0 com centro z_0 e raio r_0. Então, em cada ponto interior z de C_0 a função f pode ser desenvolvida em série de potências de $(z - z_0)$. Este desenvolvimento é dado por*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

ou seja,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \tag{3.1}$$

A série em (3.1) é denominada **Série de Taylor** de f em z_0.

Exemplo 3.1 *Mostre que*

a) $sen(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$ *quando* $|z| < \infty$.

b) $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (z)^n$ *quando* $|z| < 1$.

Solução.

a) Temos que $z_0 = 0$, então $f(z_0) = 0$.

A derivada de ordem n da função $f(z) = \text{sen}(z)$ é

$$f^{(n)}(z) = \begin{cases} cos(z), & \text{para } n = 1, 5, 9, \ldots \\ -sen(z), & \text{para } n = 2, 6, 10, \ldots \\ -cos(z), & \text{para } n = 3, 7, 11, \ldots \\ sen(z), & \text{para } n = 4, 8, 12, \ldots. \end{cases}$$

Assim,

$$f^{(n)}(z_0) = \begin{cases} 1, & \text{para } n = 1, 5, 9, \ldots \\ 0, & \text{para } n = 2, 6, 10, \ldots \\ -1, & \text{para } n = 3, 7, 11, \ldots \\ 0, & \text{para } n = 4, 8, 12, \ldots. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.1 temos

$$\text{sen}(z) = 0 + z + 0 - \frac{z^3}{3!} + 0 + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1} + \ldots.$$

Logo,

$$\text{sen}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}.$$

b) Temos que $z_0 = 0$, então $f(z_0) = 1$.

Segue que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1!}{(1-z)^2} \\ f''(z) &= \frac{2!}{(1-z)^3} \\ f'''(z) &= \frac{3!}{(1-z)^4}. \end{aligned}$$

Assim, a derivada de ordem n é

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad \text{para } n \geq 1, \quad \text{e} \\ f^{(n)}(z_0) &= n! \quad \text{para } n \geq 1. \end{aligned}$$

Escrevendo a série de `Taylor` temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= 1 + z + \frac{2!}{(2!)}z^2 + \ldots + \frac{n!}{(n!)}z^n + \ldots \\ \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots \\ \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty}(z)^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Teorema 3.2 *Seja f uma função analítica numa região anular $r < |z - z_0| < R$. Então para todo z nessa região $f(z)$ é representada por uma série de potências positivas e negativas de $(z - z_0)$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \tag{3.2}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

sendo C um contorno fechado totalmente contido em $r < |z - z_0| < R$ e envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

A série em (3.2) é chamada **Série de Laurent**.

Exemplo 3.2 *Obtenha a série de `Laurent` para a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, na região anular $a < |z| < b$, a, b reais, $b > a$.*

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-a)(z-b)} \\ &= -\left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) \quad \text{para} \;\; a < |z| < b. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a} &= \frac{1}{z}\;\frac{1}{1-\dfrac{a}{z}} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n} \quad \text{para} \;\; |z| > a, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z-b} &= \frac{1}{b}\;\frac{1}{1-\dfrac{z}{b}} \\ &= \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}} \quad \text{para} \;\; |z| < b, \end{aligned}$$

a série procurada é

$$f(z) = -\frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}\right) \quad \text{para} \;\; a < |z| < b.$$

Exemplo 3.3 *Obtenha a série de* `Laurent` *para a função* $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ *no domínio* $|z| > 1$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} &= \frac{z}{z-1} + \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}, \qquad\qquad Z = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-Z} + Z \cdot \frac{1}{1-Z}, && |Z| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (Z)^n + Z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (Z)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (Z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (Z)^{n+1} \\
&= [1 + Z + Z^2 + \ldots] + [Z + Z^2 + Z^3 + \ldots] \\
&= 1 + [2Z + 2Z^2 + 2Z^3 + \ldots] \\
&= 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} (Z)^n, && |Z| < 1.
\end{aligned}
$$

Como temos $Z = \dfrac{1}{z}$, então

$$
\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}, \quad |z| > 1.
\end{aligned}
$$

3.2 Resíduos

Seja z_0 um ponto singular isolado de f. Da definição de ponto singular isolado, existe uma vizinhança na qual f é analítica, exceto no próprio ponto z_0, digamos $0 < |z - z_0| < r$. Então, nesta região, a função f pode ser representada pela Série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots,$$

onde os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

onde C é um contorno fechado contido em $0 < |z - z_0| < r$, envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

No desenvolvimento acima, o coeficiente do termo $(z-z_0)^{-1}$ é chamado resíduo de f no ponto z_0, e escrevemos $(res.f)(z_0) = b_1$.

Exemplo 3.4 *Considere a função* $f(z) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}} + \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$. *Determine o resíduo da f no ponto $z_0 = 0$.*

Solução. Pelo Exemplo 3.3 a função f pode ser representada por

$$f(z) = \left[1 + 2\left(\frac{1}{z}\right)\right] + \left[1 + 2\left(\frac{1}{(z)^2}\right)\right] + \ldots.$$

O coeficiente de z^{-1} é o resíduo da f no ponto singular $z_0 = 0$.
Logo, o $(res.f)(z_0) = 2$.

3.3 O Teorema do Resíduo

No que segue apresentamos o **Teorema do Resíduo**. Este teorema diz que a integral curvilínea de uma função ao longo de uma curva fechada, que envolve um número finito de pontos singulares isolados, pode ser obtida somando os resíduos da função nestes pontos singulares e multiplicando por $2\pi i$.

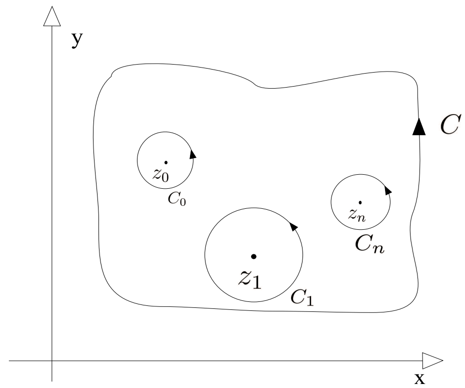
Teorema 3.3 *Seja C um caminho fechado tal que uma função f é analítica sobre C e no interior de C exceto num número finito de pontos singulares $z_0, z_1, \ldots, z_n$ interiores a C. Então*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i[(res.f)(z_0) + (res.f)(z_1) + \ldots + (res.f)(z_n)],$$

onde a integral é calculada no sentido positivo ao longo de C.

Demonstração. Para mostrar o teorema, vamos considerar caminhos C_j $(0 \leq j \leq n)$ fechados orientados positivamente. Os caminhos C_j são traçados em torno de cada um dos pontos singulares z_j, de forma que cada caminho C_j esteja inteiramente contido em C.

Os caminhos C_j, juntamente com o caminho C, formam a fronteira de uma região



fechada multiplamente conexa em que f é analítica.

Pelo Teorema 2.2, temos

$$\int_C f(z)dz - \int_{C_0} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \ldots - \int_{C_n} f(z)dz = 0.$$

Mas, isso equivale a

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \ldots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

Como f é analítica no interior de e sobre C_j, exceto no próprio ponto z_j, então as hipóteses do Teorema 3.2 são satisfeitas, assim,

$$(res.f)(z_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} f(z)dz,$$

ou seja,

$$\int_{C_j} f(z)dz = 2\pi i(res.f)(z_j), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Portanto,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i[(res.f)(z_0) + (res.f)(z_1) + \ldots + (res.f)(z_n)].$$

■

Exemplo 3.5 *Calcule o valor da integral* $\int_C \frac{z+1}{z-1}dz$*, onde* C *é o círculo* $|z| = 2$*, percorrido no sentido anti-horário.*

Solução. O integrando tem um ponto singular em $z_0 = 1$, que está no interior de C. Pelo Teorema 3.3, temos

$$\int_C \frac{z+1}{z-1}dz = 2\pi i[res.f(z_0)].$$

Para determinar o resíduo em $z_0 = 1$, podemos escrever

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{2}{z-1} + 1.$$

Assim,

$$(res.f)(z_0) = 2.$$

Portanto,

$$\int_C \frac{z+1}{z-1} dz = 4\pi i.$$

3.4 Pólo

Seja f uma função tal que o desenvolvimento em **Série de Laurent** em torno de um ponto singular isolado z_0 possua um número finito de potências negativas. Digamos que f seja representada por

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (b_n \neq 0)$$

quando $0 < |z - z_0| < r$, para algum número $r > 0$. O ponto z_0 é chamado *pólo* de ordem m da função f. Quando $m = 1$, dizemos que z_0 é um pólo simples.

Agora, apresentamos uma condição necessária e suficiente para que um ponto singular isolado seja um pólo de ordem m. Em seguida damos uma fórmula para determinar o resíduo de f em um pólo de ordem m.

Proposição 3.1 *Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função f. O ponto z_0 é um pólo de ordem $m (m \geq 1)$, se e somente se $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ é finito e diferente de zero.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) De z_0 pólo de ordem m temos,

$$f(z) = \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad (3.3)$$

quando $0 < |z - z_0| < r$, para algum número positivo r, onde $b_m \neq 0$.

Mutiplicando termo a termo da equação (3.3) por $(z - z_0)^m$ podemos escrever

$$f(z)(z - z_0)^m = b_1(z - z_0)^{m-1} + b_2(z - z_0)^{m-2} + \ldots + b_m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m}. \quad (3.4)$$

Aplicando o limite quando $z \to z_0$ na equação (3.4), obtemos:

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^m = b_m \neq 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ é finito e diferente de zero.

($\Leftarrow$) Como z_0 é ponto singular isolado existe $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{onde} \quad 0 < |z - z_0| < r. \quad (3.5)$$

Multiplicando termo a termo da equação (3.5) por $(z - z_0)^m$ temos,

$$f(z)(z - z_0)^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_0)^{n-m}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{m+n}. \quad (3.6)$$

Aplicando o limite quando $z \to z_0$ na equação (3.6), obtemos:

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^m = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{b_n}{(z - z_0)^{n-m}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m} \right] \neq 0.$$

Temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m} \to 0 \quad \text{quando} \quad z \to z_0.$$

Vamos analisar o que ocorre com $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^{n-m}}$ quando $z \to z_0$.

Se $n < m$, então
$$\frac{b_n}{(z-z_0)^{n-m}} \to 0 \quad \text{quando} \;\; z \to z_0.$$

Se $n = m$, temos
$$\frac{b_n}{(z-z_0)^{n-m}} \to b_n \quad \text{quando} z \to z_0.$$

Agora, se $n > m$ e $b_n \neq 0$ então,
$$\frac{b_n}{(z-z_0)^{n-m}} \to \pm\infty \text{ quando } z \to z_0.$$

Mas, por hipótese o $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m \neq 0$, então devemos ter
$$b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = 0.$$

Logo,
$$b_m \neq 0 \text{ e } b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = 0.$$

Portanto, z_0 é pólo de ordem m.

■

Proposição 3.2 *Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função f, então*
$$(res.f)(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

Demonstração. Como z_0 é polo de ordem m, podemos escrever
$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \tag{3.7}$$

Multiplicando a equação (3.7) por $(z-z_0)^m$, obtemos
$$f(z)(z-z_0)^m = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \ldots + b_1(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m}. \tag{3.8}$$

Tomando a derivada de ordem $(m-1)$ em (3.8), temos

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!b_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)\ldots(n+2)a_n(z-z_0)^{n+1}.$$

Aplicando o limite quando $z \to z_0$, temos;

$$(m-1)! \quad b_1 = \lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)],$$

ou seja,

$$(res.f)(z_0) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

■

A proposição abaixo fornece um outro método para determinar o resíduo de uma função f num pólo z_0, quando f é quociente de duas funções analíticas em z_0.

Proposição 3.3 *Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções analíticas no ponto z_0, $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$. Mostre que z_0 é pólo simples da função $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, com resíduo igual a $\dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$.*

Demonstração. Para mostrar que z_0 é simples, mostraremos que

$$\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) \neq 0.$$

Temos

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) &= \lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{q(z)}(z-z_0)\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{q(z)-q(z_0)}(z-z_0)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to z_0} \frac{p(z)}{\dfrac{q(z)(z-z_0)}{(z-z_0)}} \\
&= \frac{\displaystyle\lim_{z\to z_0} p(z)}{\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{q(z)-q(z_0)}{(z-z_0)}} \\
&= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \neq 0,
\end{aligned}
$$

pois $p(z_0) \neq 0$ e $q'(z_0) \neq 0$.

Logo, z_0 é pólo de ordem simples e pela Proposição 3.2

$$(res.f)(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \ .$$

■

Exemplo 3.6 *Calcule o resíduo das seguintes funções:*

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{az^2+bz+c}$, onde a, b, c números reais e $b^2 - 4ac < 0$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$, onde $a \geq b > 0$.

c) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$, onde $a > 0$.

Solução. a) Para determinar os pontos singulares da função $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$, precisamos encontrar os pontos onde $z^4 + 1 = 0$, ou seja, as raízes quarta de -1. Sabemos que as n raízes $n-$ésimas de um número complexo $z = r(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$ são obtidas da fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right], \text{ onde } \ k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Assim, as raízes quarta de $z = -1 = 1(\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi))$ são

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{1}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_1 &= \sqrt[4]{1}\Big(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_2 &= \sqrt[4]{1}\Big(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_3 &= \sqrt[4]{1}\Big(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Agora vamos encontrar o resíduo da f no ponto z_0. A função $f(z)$ é quociente das funções $p(z) = 1$ e $q(z) = z^4 + 1$ que são analíticas em z_0. Temos

$$p(z_0) = 1 \neq 0 \quad \text{e} \quad q(z_0) = 0.$$

Ainda, $q'(z) = 4z^3$ e $q'(z_0) = 4\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\Big) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \neq 0$. Logo, pela Proposição 3.3, z_0 é pólo simples. E o resíduo é dado por

$$(res.f)(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}.$$

Para $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ temos

$$\begin{aligned}
p(z_1) &= 1 \text{ ou seja, } p(z_1) \neq 0.\\
q(z_1) &= 0.\\
q'(z_1) &= 4z^3 = 4\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^3 = 4\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\Big) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

ou seja, $q'(z_1) \neq 0$.

Segue pela Proposição 3.3 que z_1 é pólo simples e o resíduo é

$$(res.f)(z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}.$$

Os resíduos para z_2 e z_3 são calculados de forma análoga.

b) Os pontos singulares da função $f(z) = \dfrac{1}{az^2+bz+c}$ são os pontos que satisfazem a equação $az^2+bz+c=0$. As raízes desta equação são

$$z_0 = \frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}i}{2a} \quad \text{e} \quad z_1 = \frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}i}{2a}.$$

Escrevendo $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, onde $p(z)=1$ e $q(z)=az^2+bz+c$ temos

$$p(z_0) = 1 \neq 0 \qquad \text{e} \qquad q(z_0) = 0.$$

Temos também,

$$q'(z) = 2az+b \quad \text{e} \quad q'(z_0) = \sqrt{b^2-4ac},$$

ou seja, $q'(z_0) \neq 0$.

Pela Proposição 3.3, z_0 é pólo simples e o resíduo é

$$(res.f)(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{2az+b} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

O resíduo para z_1 é calculado de fómula análoga.

c) Os pontos singulares da função $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ são os pontos que satisfazem a equação $(z^2+a^2)(z^2+b^2)=0$. As raízes desta equação são

$$z_0 = ai, z_1 = bi, z_2 = -ai \text{ e } z_3 = -bi.$$

Escrevendo $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, onde $p(z)=1$ e $q(z)=(z^2+a^2)(z^2+b^2)$ temos

$$p(z_0) = 1 \neq 0 \qquad \text{e} \qquad q(z_0) = 0.$$

Temos também,

$$q'(z) = 4z^3+2zb^2+2za^2 \quad \text{e} \quad q'(z_0) = 4a^3i+2a^3i+2b^2ai,$$

ou seja, $q'(z_0) \neq 0$, pois $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Pela Proposição 3.3, z_0 é pólo simples e o resíduo é

$$(res.f)(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{-2a^3i+2b^2ai}.$$

Para $z_1 = bi$, temos que

$$\begin{aligned} p(z_1) &= 1, \text{ ou seja, } p(z_1) \neq 0. \\ q'(z_1) &= 0. \\ q'(z_1) &= -4b^3i + 2b^3i + 2ba^2i \\ &= -2b^3 + 2bia^2, \text{ ou seja, } q'(z_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Segue pela Proposição 3.3 que z_1 é pólo simples e o resíduo é

$$(res.f)(z_1) = \frac{1}{-2b^3 + 2bia^2}.$$

Os resíduos para z_2 e z_3 são calculados de forma análoga.

d) Os pontos singulares da função $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$ são os pontos que satisfazem a equação $(z^2 + a^2) = 0$. As raízes desta equação são

$$z_0 = ai \text{ e } z_1 = -ai.$$

Escrevendo $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, onde

$$p(z_0) \neq 0 \quad \text{ e } \quad q(z_0) = 0.$$

Temos também,

$$q'(z_0) = -4a^3i + 4a^3i,$$

ou seja, $q'(z_0) = 0$.

Não podemos utilizar a Proposição 3.3, pois temos $q'(z_0) = 0$. Já sabemos que z_0 não é pólo simples. Vamos verificar se z_0 é pólo de ordem 2. Para isso aplicaremos a Proposição 3.1. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \to ai} \left((z - ai)^2 \frac{z^2}{(z - ai)^2 (z + ai)^2} \right) &= \lim_{z \to ai} \frac{z^2}{(z + ai)^2} \\ &= \frac{(ai)^2}{(ai + ai)^2} = \frac{1}{4} \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, z_0 é pólo de ordem 2. Falta saber quanto é o resíduo. Como $m = 2$, pela Proposição 3.2 temos,

$$(res.f)(z_0) = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz} \left\{ (z - ai)^2 \frac{z^2}{(z - ai)^2 (z + ai)^2} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right\}\\
&= \lim_{z\to ai} \left\{\frac{2z(z+ai)^2 - 2(z+ai)^2z^2}{(z+ai)^4}\right\}\\
&= \lim_{z\to ai} \left\{\frac{2z(z+ai) - 2z^2}{(z+ai)^3}\right\}\\
&= \lim_{z\to ai} \left\{\frac{2z^2 + 2zai - az^2}{(z+ai)^3}\right\}\\
&= \lim_{z\to ai} \left\{\frac{2zai}{(z+ai)^3}\right\} = \frac{-2a^2}{-8a^3i} = \frac{1}{4ai}.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, fazemos para saber qual será o resíduo de $z_2 = z_3 = -ai$.

Exemplo 3.7 *Mostre que todos os pontos singulares da função* $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$ *são pólos. Determine a ordem* m *de cada pólo e o resíduo da função no pólo.*

Solução. Os pontos singulares da função $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$ são os pontos que satisfazem a equação $z^2+\pi^2 = 0$. As raízes desta equação são

$$z_0 = \pi i \ \text{ e } \ z_1 = -\pi i.$$

Escrevendo $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, onde

$$p(z_0) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad q(z_0) = 0.$$

Temos também, $q'(z_0) = 2z$, ou seja, $q'(z_0) \neq 0$. Como satisfaz as condições da Proposição 3.3, temos que é pólo simples, ou seja, $m = 1$. E o resíduo é

$$(res.f)(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{e^{\pi i}}{2\pi i}.$$

De forma análoga, fazemos para saber qual será o resíduo de $z_1 = -\pi i$.

Capítulo 4

Aplicações da Teoria dos Resíduos

Neste capítulo apresentamos várias aplicações do *Teorema do Resíduo* e da teoria das integrais curvilíneas complexas ao cálculo de integrais de funções reais.

4.1 Integrais Impróprias de Funções Racionais

Considere as integrais reais do tipo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,[1] \tag{4.1}$$

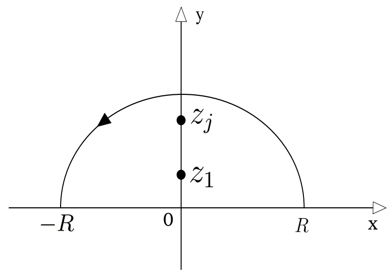
onde $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, p e q são polinômios com grau de q maior do que o grau de p, no mínimo por duas unidades, e q não possui zeros reais.

Para calcular (4.1) usando a teoria dos resíduos, a técnica é considerar a integral complexa ao longo do contorno que consiste da fronteira de um semicírculo, C_R, de raio R e o eixo real desde $-R$ até R. Este raio R é escolhido suficientemente grande de forma que todos os zeros do polinômio do denominador se encontrem no interior do círculo. Consequentemente, todos os pontos singulares da função $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ estarão no interior do círculo. Integrando a função $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ ao longo da região semicircular (ver figura), no sentido anti-horário, e aplicando o **Teorema do Resíduo** teremos,

$$\int_{-R}^{R} \frac{p(z)}{q(z)}dz + \int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i \sum_j (res.f)(z_j),$$

[1]Integrais deste tipo podem ser calculadas usando o método das frações parciais para obter a primitiva de f.

onde z_j são os pontos singulares tais que $Im(z_j) > 0$. Agora, fazendo $R \to +\infty$ na igualdade acima teremos o valor da integral desejada.



Vejamos alguns exemplos numéricos.

Exemplo 4.1 *Calcule* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

Solução. A integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{z^4+1}.$$

O integrando é

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)},$$

onde

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ são pólos simples (ver Exemplo 3.6 item (**a**)).

Seja C_R o semicírculo do semiplano superior de um círculo $|z| = R$, onde $R > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Pelo Exemplo 3.6 item (**a**) temos

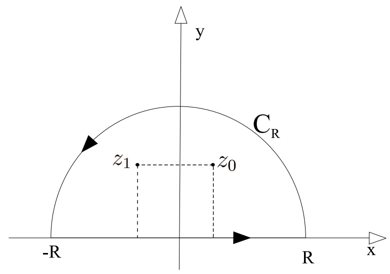
$$(res.f)(z_0) = \frac{1}{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i} \quad \text{e} \quad (res.f)(z_1) = \frac{1}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}.$$

Integrando f no sentido anti-horário, ao longo da fronteira da região semicircular temos,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dz}{z^4+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i[(res.f)(z_0) + (res.f)(z_1)]. \tag{4.2}$$

Quando z está sobre C_R, ou seja, $|z| = R$ temos,

$$|z^4+1| \geq |z^4| - 1 = |z|^4 - 1 = R^4 - 1,$$



donde

$$\left|\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}\right| \le \int_{C_R}\frac{|dz|}{R^4-1} = \frac{1}{R^4-1}\int_{C_R}|dz| = \frac{\pi R}{R^4-1}.$$

Assim,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1} = 0.$$

Logo, passando ao limite com $R \to \infty$ em (4.2) obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx &= 2\pi i\left[\frac{1}{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}+\frac{1}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right] \\
&= 2\pi i\left[\frac{4\sqrt{2}i}{-16}\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2 *Sendo a, b e c números reais, $b^2 < 4ac$, mostre*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Solução. A integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dz}{ax^2+bx+c}.$$

O integrando é

$$f(z) = \frac{1}{az^2+bz+c}.$$

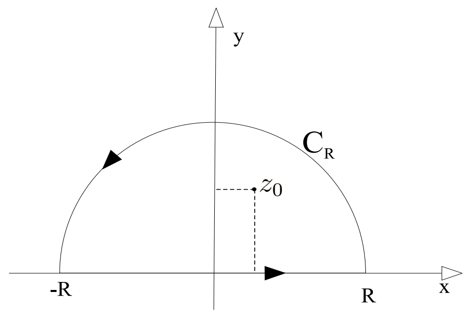
Podemos escrever

$$f(z) = \frac{1}{a(z-z_0)(z-z_1)}$$

onde,

$$z_0 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}\ i}{2a} \quad \text{e} \quad z_1 = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}\ i}{2a},$$

são pólos simples (ver Exemplo 3.6 item (**b**)). Seja C_R o semicírculo superior de um círculo $|z| = R$, onde $R > \max\left\{ -\frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right\}$.



Integrando f no sentido anti-horário ao longo da fronteira da região semicircular temos,

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{az^2 + bz + c} dz + \int_{C_R} \frac{1}{az^2 + bz + c} dz = 2\pi i[(res.f)(z_0)],$$

onde $(res.f)(z_0) = \dfrac{1}{\sqrt{4ac - b^2}\ i}$, conforme visto no Exemplo 3.6 item (**b**).
Assim,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dz}{az^2 + bz + c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}} - \int_{C_R} \frac{dz}{az^2 + bz + c}. \tag{4.3}$$

Temos

$$\begin{aligned} |az^2| &= |az^2 + bz - bz| \\ &\leq |az^2 + bz| + |bz| \\ &\leq |az^2 + bz + c - c| + |b||z| \\ &\leq |az^2 + bz + c| + |b||z| + |c|. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\frac{1}{|az^2 + bz + c|} \leq \frac{1}{|a||z^2| - |b||z| - |c|}$$

e quando z está sobre C_R então $|z| = R$ e

$$\frac{1}{|az^2 + bz + c|} \leq \frac{1}{|a|R^2 - |b|R - |c|},$$

donde

$$\left|\int_{C_R} \frac{1}{az^2+bz+c}dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{dz}{|a|R^2-|b|R-|c|} = \frac{\pi R}{|a|R^2-|b|R-|c|}.$$

Isto mostra que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{dz}{az^2+bz+c} = 0.$$

Logo, passando ao limite quando $R \to \infty$ na equação (4.3), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Exemplo 4.3 *Mostre que*

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}, \quad \textit{onde} \quad a \geq b > 0$$

Solução. A integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad \text{pois o integrando é uma função par}$$

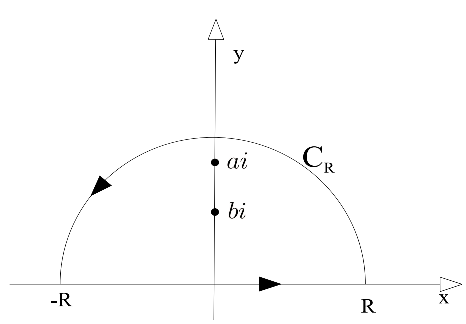
$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}.$$

O integrando é

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}.$$

Os pontos $z_0 = ai$, $z_1 = bi$, $z_2 = -ai$ e $z_3 = -bi$ são pólos simples (ver Exemplo 3.6 item (**c**)).

Seja C_R o semicírculo superior de um círculo $|z| = R$, onde $R > a$.



Integrando f no sentido anti-horário, ao longo da fronteira da região semicircular temos

$$\int_{-R}^{R} \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} + \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = 2\pi i[(res.f)(z_0) + (res.f)(z_1)]. \quad (4.4)$$

Pelo Exemplo 3.6 item (**c**), temos

$$(res.f)(z_0) = \frac{1}{2ai(-a^2+b^2)} \quad \text{e} \quad (res.f)(z_1) = \frac{1}{2bi(a^2-b^2)}.$$

Quando z está sobre C_R, ou seja, $|z| = R$ temos:

$$\begin{aligned} |(z^2+a^2)(z^2+b^2)| = |z^2+a^2||z^2+b^2| &\geq (|z^2|-a^2)(|z^2|-b^2) \\ &= (|z|^2-a^2)(|z|^2-b^2) \\ &= (R^2-a^2)(R^2-b^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \right| &\leq \int_{C_R} \left| \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \right| = \int_{C_R} \frac{|dz|}{|(z^2+a^2)(z^2+b^2)|} \\ &\leq \int_{C_R} \frac{|dz|}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} = \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} \int_{C_R} |dz| \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}. \end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = 0.$$

Logo, passando ao limite quando $R \to \infty$ na equação (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} &= \frac{2\pi i}{2} \left[\frac{1}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{1}{2bi(a^2-b^2)} \right] \\ &= \pi i \left[\frac{b(a^2-b^2)+a(b^2-a^2)}{2i(ab)(b+a)(b-a)(a+b)(a-b)} \right] \\ &= \pi \left[\frac{b(a-b)+a(b-a)}{2(ab)(b-a)(a+b)(a-b)} \right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi\left[\frac{ab-b^2+ab-a^2}{2(ab)(b-a)(a+b)(a-b)}\right] \\
&= \pi\left[\frac{2ab-b^2-a^2}{2(ab)(a+b)(b-a)(a-b)}\right] \\
&= \frac{\pi}{2ab(a+b)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}.$$

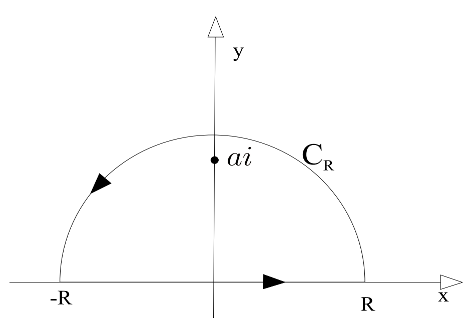
Exemplo 4.4 *Calcule a seguinte integral*

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2},\ a>0.$$

Solução. A integral

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^2}.
\end{aligned}
$$

O integrando é $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$, onde $z_0 = z_1 = ai$ e $z_2 = z_3 = -ai$ são pólos de ordem 2. Seja C_R o semicírculo do semiplano superior de um círculo $|z| = R$, onde $R > a$.



Integrando f no sentido anti-horário, ao longo da fronteira da região semicircular temos

$$\int_{-R}^R \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^2} + \int_{C_R} \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^2} = 2\pi i[(res.f)(z_0)]. \tag{4.5}$$

Pelo Exemplo 3.6 item (**d**) temos $(res.f)(z_0) = \dfrac{1}{4ai}$.
Quando z está sobre C_R, ou seja, |z|=R temos

$$|z^2 + a^2| \geq |z^2| - a^2 = |z|^2 - a^2 = R^2 - a^2$$

donde,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_R} \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^2} \right| &\leq \int_{C_R} \left| \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^2} \right| \\
&= \int_{C_R} \frac{|z^2|}{|z^2+a^2|^2} |dz| \\
&\leq \int_{C_R} \frac{R^2}{(R^2-a^2)^2} |dz| \\
&= \frac{R^2}{(R^2-a^2)^2} \int_{C_R} |dz| \\
&= \frac{\pi R^3}{(R^2-a^2)^2}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^2} = 0.$$

Logo, passando ao limite quando $R \to \infty$ na equação (4.5) obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} dz &= \frac{2\pi i}{2} [(res.f)(z_0)] \\
&= \pi i \left[\frac{1}{4ai} \right] \\
&= \frac{\pi}{4a}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a}.$$

4.2 Integrais Impróprias Envolvendo Funções Trigonométricas

Esse tipo de integral pode ser calculada por meio de integrais curvilíneas e da teoria dos resíduos. Antes de ilustrar o cálculo de integrais impróprias envolvendo funções trigonométricas vamos apresentar um resultado, o `Lema de Jordan`, que será útil no cálculo deste tipo de integral.

Lema 4.1 (Lema de Jordan) *Seja C_R o semicírculo superior do círculo $|z| = R$. Considere a integral $\displaystyle\int_{C_R} e^{irz}g(z)dz$, onde $r > 0$. Se g é analítica sobre C_R e no interior de C_R exceto num número finito de pontos singulares isolados, e que $|g(z)| \leq G(R)$ para z em C_R com $\displaystyle\lim_{R\to\infty} G(R) = 0$. Então*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{irz}g(z)dz = 0.$$

Demonstração. Temos que C_R é o semicírculo superior do círculo $|z| = R$, suas equações paramétricas são $x = R\cos(\theta)$, $y = R\text{sen}(\theta)$ ou $z = Re^{i\theta}$, $\;0 \leq \theta \leq \pi$. Então $z' = iRe^{i\theta}$.

Da definição de integral curvilínea temos

$$\begin{aligned}\int_{C_R} g(z)dz &= \int_0^{\pi} g(Re^{i\theta})e^{ir[R(\cos(\theta)+i\text{sen}(\theta))]}iRe^{i\theta}d\theta \\ &= iR\int_0^{\pi} e^{-rR\,\text{sen}(\theta)}g(Re^{i\theta})e^{i[rR\cos(\theta)+\theta]}d\theta.\end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} g(z)dz\right| &\leq RG(R)\int_0^{\pi} e^{-rR\ \text{sen}(\theta)}d\theta \\ &= RG(R)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rR\text{sen}(\theta)}d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-rR\text{sen}(\theta)}d\theta\right],\ (\text{sen}(\theta) = \ \text{sen}(\pi-\theta),\ \theta \in [0,\pi]) \\ &= RG(R)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rR\text{sen}(\theta)}d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-rR\text{sen}(\pi-\theta)}d\theta\right].\end{aligned}$$

Fazendo $t = \pi - \theta$ na segunda integral teremos $dt = -d\theta$. Para encontrar os novos limites de integração, notemos que

$$\begin{aligned} \text{se } \theta &= \frac{\pi}{2} \text{ então } t = \frac{\pi}{2}; \\ \text{se } \theta &= \pi \text{ então } t = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} g(z)dz \right| &\leq RG(R)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rR\text{sen}(\theta)} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-rR\text{sen}(t)} dt \right] \\ &= RG(R)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rR\text{sen}(\theta)} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rR\text{sen}(\theta)} d\theta \right] \\ &= 2RG(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rR\text{sen}(\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Devemos observar primeiramente que $\text{sen}(\theta) \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$ para $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. De fato, se considerarmos a função $f(\theta) = \text{sen}(\theta) - \dfrac{2\theta}{\pi}$ a sua derivada será $f'(\theta) = \cos(\theta) - \dfrac{2}{\pi}$. Então $f'(\theta) > 0$ para $0 < \theta < a$ para algum a e $f'(\theta) < 0$ para $a < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. Segue que a função é crescente no intervalo $(0, a)$ e decrescente no intervalo $\left(a, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Como $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, concluímos que $f(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Logo, $\text{sen}(\theta) \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$ neste intervalo. Desta forma temos,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{irz} f(z)dz \right| &\leq 2RG(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2rR\frac{\theta}{\pi}} d\theta \\ &= 2RG(R)\left[\frac{-\pi}{2rR}\, e^{\frac{-2rR\theta}{\pi}} \right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= G(R)\left[-\frac{\pi}{r}\, e^{\frac{-2rR\theta}{\pi}} \right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi G(R)}{r}\left[1 - e^{-rR} \right]. \end{aligned}$$

Como $G(R) \to 0$ quando $R \to +\infty$, obtemos

$$\left| \int_{C_R} e^{irz} g(z)dz \right| \to 0 \text{ quando } R \to +\infty.$$

Portanto, $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} e^{irz} g f(z)dz = 0.$

■

Exemplo 4.5 *Estabeleça a seguinte fórmula de integração com o auxílio de resíduos.*

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-a} \qquad (a \geq 0).$$

Solução. A integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx, \text{ pois o integrando é uma função par.}$$

Como $\cos(ax) = \text{Re } e^{iax}$ podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx = \text{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+1}dx.$$

A integral acima representa uma integração, ao longo de todo o eixo real da função

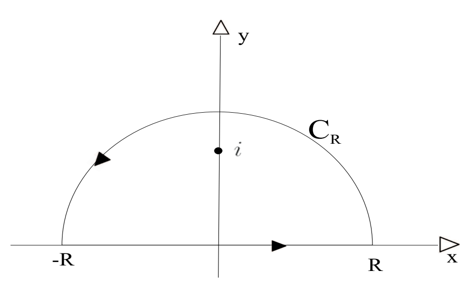
$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+1}.$$

Esta função tem pólos simples em $z_0 = i$ e $z_1 = -i$. Seja C_R o semicírculo superior de um círculo $|z| = R$, onde $R > 1$. Integrando f, no sentido anti-horário, ao longo da fronteira semicircular temos

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz + \int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz = 2\pi i[(res.f)(z_0)],$$

onde

$$(res.f)(z_0) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{e^{iaz}}{z+i} = \frac{e^{-a}}{2i}$$



Logo, quando $R > 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz &= 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} - \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz \\
&= \pi e^{-a} - \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Considere a função $g(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$. A função g é analítica sobre C_R e no interior de C_R exceto no ponto $z_0 = i$. Quando z está sobre C_R, $|z| = R$ e

$$|z^2| = |z^2+1-1| \leq |z^2+1| + |1|,$$

ou seja,

$$|z^2+1| \geq R^2 - 1.$$

Consequentemente,

$$|g(z)| \leq \frac{1}{R^2-1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{R^2-1} \to 0 \ \text{ quando } \ R \to +\infty.$$

As hipóteses do `Lema de Jordan` são satisfeitas, assim

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz = 0.$$

Logo, passando ao limite quando $R \to +\infty$ em (4.6) obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}dz = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

A parte real desta integral coincide com o valor da própria integral. Portanto,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

Exemplo 4.6 *Estabeleça a seguinte fórmula de integração com o auxílio de resíduos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right) \ \ (a > b > 0).$$

Solução. Como $\cos(x) = \text{Re } e^{ix}$ podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \text{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx.$$

A integral acima representa uma integração, ao longo de todo o eixo real da função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}.$$

Esta função tem pólos simples em $z_0 = ai$, $z_1 = bi$, $z_2 = -ai$ e $z_3 = -bi$. Seja C_R o semicírculo superior de um círculo $|z| = R$, onde $R > a$. Integrando f, no sentido anti-horário, ao longo da fronteira semicircular temos

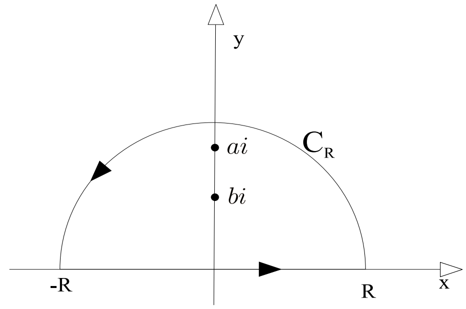
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dz = 2\pi i[(res.f)(z_0) + (res.f)(z_1)],$$

onde

$$\begin{aligned}
(res.f)(z_0) &= \lim_{z\to ai}(z-ai)f(z) \\
&= \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \\
&= \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{iz}}{(z-ai)(z+ai)(z^2+b^2)} \\
&= \lim_{z\to ai}\frac{e^{iz}}{(z+ai)(z^2+b^2)} \\
&= \frac{e^{-a}}{(2ai)[(ai)^2+b^2]} \\
&= \frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)}.
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
(res.f)(z_1) &= \lim_{z\to bi}(z-bi)f(z) \\
&= \lim_{z\to ai}(z-bi)\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z+ai)(z-bi)(z+bi)} \\
&= \lim_{z\to ai}\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z+bi)} \\
&= \frac{e^{-b}}{(2bi)[(bi)^2+a^2]} \\
&= \frac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)}.
\end{aligned}$$



Logo, quando $R > a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dz = 2\pi i \left[\frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)}\right] - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dz. \tag{4.7}$$

Considere a função $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$. A função g é analítica sobre C_R e no interior de C_R exceto nos pontos $z_0 = ai$ e $z_1 = bi$. Quando z está sobre C_R, $|z| = R$ e

$$\begin{aligned} |(z^2+a^2)(z^2+b^2)| = |z^2+a^2||z^2+b^2| &\geq (|z^2|-a^2)(|z^2|-b^2) \\ &= (|z|^2-a^2)(|z|^2-b^2) \\ &= (R^2-a^2)(R^2-b^2) \end{aligned}$$

ou seja,

$$|(z^2+a^2)(z^2+b^2)| \geq (R^2-a^2)(R^2-b^2).$$

Consequentemente,

$$|g(z)| \leq \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} \to 0 \text{ quando } R \to \infty.$$

As hipóteses do *Lema de Jordan* são satisfeitas, assim

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dz = 0.$$

Logo, passando ao limite com $R \to +\infty$ em (4.7) obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}dz = 2\pi i\left[\frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi\left[\frac{e^{-a}}{a(b^2-a^2)} + \frac{e^{-b}}{b(a^2-b^2)}\right] \\
&= \pi\left[\frac{-e^{-a}}{a(a^2-b^2)} + \frac{e^{-b}}{b(a^2-b^2)}\right] \\
&= \frac{\pi}{(a^2-b^2)}\left[\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right].
\end{aligned}
$$

A parte real desta integral coincide com o valor da própria integral.

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right).$$

Exemplo 4.7 *Estabeleça a seguinte fórmula de integração com o auxílio de resíduos*

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}dx = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)e^{-ab}.$$

Solução. A integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}dx.$$

Como $\cos(ax) = \text{Re } e^{iax}$ podemos escrever

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}dx = \frac{1}{2}\,\text{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{(x^2+b^2)^2}dx.$$

A integral acima representa uma integração, ao longo de todo o eixo real da função

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}.$$

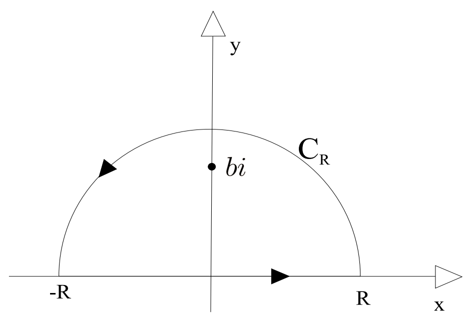
Esta função tem pólo de ordem 2 em $z_0 = bi$ e $z_1 = -bi$. Seja C_R o semicírculo superior de um círculo $|z| = R$, onde $R > b$. Integrando f, no sentido anti-horário, ao longo da fronteira semicircular temos

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}dz + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}dz = 2\pi i[(res.f)(z_0)],$$

onde

$$(res.f)(z_0) \quad = \quad \lim_{z\to bi}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(z-bi)^2e^{iaz}}{(z-bi)^2(z+bi)^2}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to bi} \frac{d}{dz}\left\{\frac{e^{iaz}}{(z+bi)^2}\right\} \\
&= \lim_{z\to bi} \left\{\frac{iae^{iaz}(z+bi)^2 - 2(z+bi)e^{iaz}}{(z+bi)^4}\right\} \\
&= \lim_{z\to bi} \left\{\frac{iae^{iaz}(z+bi) - 2e^{iaz}}{(z+bi)^3}\right\} \\
&= \left\{\frac{iae^{-ab}2bi - 2e^{-ab}}{(2bi)^3}\right\} \\
&= \left\{\frac{e^{-ab}(-2ab-2)}{-8b^3 i}\right\} \\
&= \left\{\frac{e^{-ab}(ab+1)}{4b^3 i}\right\}.
\end{aligned}
$$



Logo, quando $R > b$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-ab}(ab+1)}{4b^3 i}\right) - \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}dz. \tag{4.8}
$$

Considere a função $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+b^2)^2}$. A função g é analítica sobre C_R e no interior de C_R exceto no ponto $z_0 = bi$. Quando z está sobre C_R, $|z| = R$ e

$$
|z^2 + b^2| \geq |z^2| - b^2 = |z|^2 - b^2 = R^2 - b^2
$$

ou seja,

$$
|z^2 + b^2| \geq R^2 - b^2.
$$

Consequentemente,

$$|g(z)| \leq \frac{1}{R^2 - b^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{R^2 - b^2} \to 0, \text{ quando } R \to \infty.$$

As hipóteses do *Lema de Jordan* são satisfeitas, assim

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{(z^2 + b^2)^2} dz = o.$$

Logo, passando ao limite com $R \to +\infty$ em (4.8) obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{(z^2 + b^2)^2} dz = \frac{2\pi i}{2} \left(\frac{(1 + ab)e^{-ab}}{4b^3 i} \right).$$

A parte real desta integral coincide com o valor da própria integral. Portanto,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi}{4b^3}(1 + ab)e^{-ab}.$$

Exemplo 4.8 *Calcule a integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,sen(x)}{x^2 + 4x + 20} dx.$$

Solução. Como $\text{sen}(x) = \text{Im}\, e^{ix}$, podemos escrever

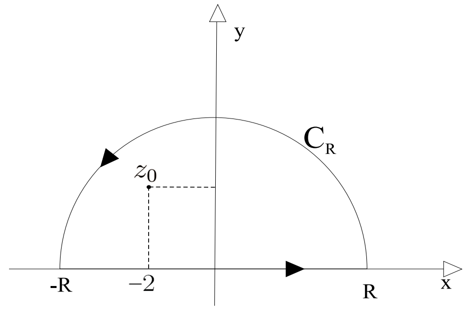
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\text{sen}(x)}{x^2 + 4x + 20} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 4z + 20} dz.$$

O integrando $f(z) = \dfrac{z e^{iz}}{z^2 + 4z + 20}$ tem pólos simples nos pontos $z_0 = -2 + 4i$, $z_1 = -2 - 4i$. Considerando, a integral de $-R$ a R ($R > 4$), seguida da integral sobre C_R no semiplano superior, obtemos

$$\int_{-R}^{R} \frac{z e^{iz}}{z^4 + 4z + 20} dz + \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^4 + 4z + 20} dz = 2\pi i[(res.f)(z_0)],$$

onde o resíduo de f no pólo $z_0 = -2 + 4i$ é dado por

$$\begin{aligned}
(res.f)(z_0) &= \lim_{z \to -2+4i} \left\{ \frac{(z + 2 - 4i) z e^{iz}}{(z + 2 - 4i)(z + 2 + 4i)} \right\} \\
&= \lim_{z \to -2+4i} \left\{ \frac{z e^{iz}}{(z + 2 + 4i)} \right\} \\
&= \left\{ \frac{(-2 + 4i) e^{i(-2+4i)}}{(-2 + 4i + 2 + 4i)} \right\} \\
&= \left\{ \frac{(-1 + 2i) e^{(-4-2i)}}{4i} \right\}.
\end{aligned}$$



Logo, quando $R > 4$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^4+4z+20}dz = 2\pi i\left(\frac{(-1-2i)e^{-2i-4}}{4i}\right) - \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^4+4z+20}dz. \qquad (4.9)$$

Considere a função $g(z) = \dfrac{z}{z^4+4z+20}$. A função g é analítica sobre C_R e no interior de C_R exceto no ponto $z_0 = -2+4i$

Como $|z| = R$ quando z está sobre C_R, temos

$$\begin{aligned} |z^4| &= |z^4+4z-4z| \leq |z^4+4z| + |4z| \\ &\leq |z^4+4z+20-20| + |4z| \\ &\leq |z^4+4z+20| + 4|z| + 20. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \frac{|z|}{|z^4+4z+20|} \\ &\leq \frac{|z|}{|z^4|-4|z|-20} \\ &\leq \frac{R}{R^4-4R-20} \end{aligned}$$

e $\dfrac{R}{R^4-4R-20} \to 0$ quando $R \to \infty$.

Passando ao limite e usando o *Lema de Jordan* em (4.9), temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2+4z+20}dz &= 2\pi i\left(\frac{(-1+2i)e^{-2i-4}}{4i}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}(-1+2i)e^{-4-2i} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2}(-1+2i)e^{-4}[\cos(-2) + i\,\mathrm{sen}(-2)]$$

$$= \frac{\pi}{2}(-1+2i)e^{-4}[\cos(2) - i\,\mathrm{sen}(2)]$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-4}[-\cos(2) + i\,\mathrm{sen}(2) + 2i\cos(2) + 2\,\mathrm{sen}(2)]$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-4}[2\,\mathrm{sen}(2) - \cos(2) + i(\mathrm{sen}(2) + 2\cos(2))].$$

Como queremos

$$\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{iz}}{z^2+4z+20}dz,$$

isto é, a parte imaginária da integral, concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\mathrm{sen}(x)}{x^2+4x+20}dx = \frac{\pi}{2}e^{-4}(\mathrm{sen}(2) + 2\cos(2)).$$

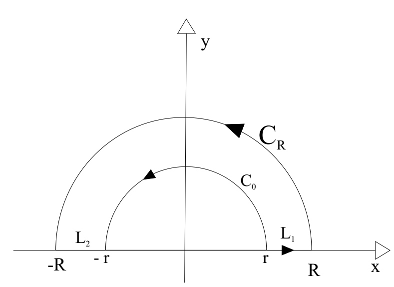
Exemplo 4.9 *Mostre que a integral*

$$\int_0^{\infty}\frac{sen(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Solução. A integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}dx = \mathrm{Im}\int_0^{\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz.$$

O integrando possui uma singularidade em $z = 0$, assim não podemos calcular a integral como nos exemplos anteriores. Vamos integrar a função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ ao longo do caminho dado pela figura abaixo.



Note que $C = C_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup C_R$ é um caminho fechado e f é analítica em todos os pontos interiores e sobre o caminho fechado C. Então pelo Teorema de `Cauchy` 2.1 temos

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Isto é,

$$\int_{-R}^{r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_0} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \tag{4.10}$$

Trocando x por $-x$ na primeira integral de (4.10), obtemos

$$\int_{-R}^{r} \frac{e^{-ix}}{x} dx = \int_{R}^{-r} \frac{e^{-ix}}{x} dx = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

Assim,

$$2i \int_{r}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx + \int_{C_0} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Segue que,

$$2i \int_{r}^{R} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = -\int_{C_0} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \tag{4.11}$$

Pelo *Lema de Jordan*, quando $R \to \infty$ a integral

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Vamos analisar

$$-\int_{C_0} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad \text{quando} \quad r \to 0.$$

Temos

$$z = re^{i\theta}, \; dz = rie^{i\theta} d\theta.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\left(-\int_{\pi}^{0} \frac{e^{ire^{i\theta}} rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta \right) &= \lim_{r\to 0}\left(-\, i\int_{\pi}^{0} e^{ire^{i\theta}} d\theta \right) \\
&= \lim_{r\to 0} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} -ie^{ire^{i\theta}} \Delta\theta}_{-\int_{\pi}^{0} f(\theta) d\theta} \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{r\to 0} \sum_{i=0}^{n} -ie^{ire^{i\theta}} \Delta\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} -i\Delta\theta \\
&= -i(0-\pi) \\
&= \pi i.
\end{aligned}
$$

Fazendo $R \to \infty$ e $r \to 0$ em (4.11) temos

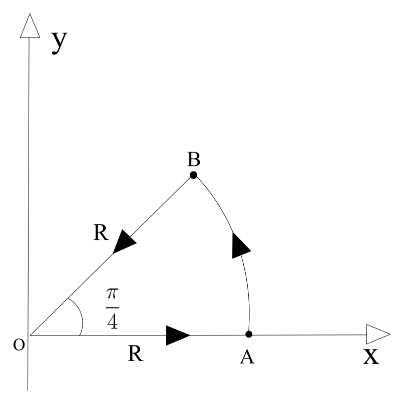
$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 4.10 *Prove que*

$$\int_0^{\infty} sen(x^2)dx\ [2] = \int_0^{\infty} cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$

sabendo que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$

Solução. Considere a função $f(z) = e^{iz^2}$ e o contorno $C = \overline{OA} \cup \widehat{AB}\ \cup \overline{BO}$ dado pela Figura.



Pelo *Teorema de Cauchy*

$$\int_C e^{iz^2} dz = 0,$$

[2]Um artigo interessante sobre esse tipo de integral pode ser encontrado em: Matemática Universitária, N°5, Junho de 1987, 77-81.

ou seja,

$$\int_{\overline{OA}} e^{iz^2}dz + \int_{\widehat{AB}} e^{iz^2}dz + \int_{\overline{BO}} e^{iz^2}dz = 0.$$

Agora,

sobre $\overline{OA}$ temos $z = x$ (de $x = 0$ a $x = R$),

sobre $\widehat{AB}$ temos $z = Re^{i\theta}$ (de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{4}$),

sobre $\overline{BO}$ temos $z = re^{\frac{\pi i}{4}}$ (de $r = R$ a $r = 0$).

Então,

$$\int_0^R e^{ix^2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta + \int_R^0 e^{ir^2e^{\frac{\pi}{2i}}} e^{i\frac{\pi}{4}}dr = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^R (\cos(x^2) + i\text{sen}(x^2))dr &= e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^R e^{-r^2}dr - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos(2\theta) + i\text{sen}(2\theta))} iRe^{i\theta}d\theta \\ &= e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^R e^{-r^2}dr - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos(2\theta) - R^2\text{sen}(2\theta))} iRe^{i\theta}d\theta\end{aligned} \tag{4.12}$$

Tomando o limite quando $R \to \infty$ em (4.12) e usando a hipótese, a primeira integral à direita torna-se

$$\begin{aligned}e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty e^{-r^2}dr &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{\pi i}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{4}\Big) + i\text{sen}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\Big) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\frac{2\sqrt{\pi}}{4}.\end{aligned}$$

O valor absoluto da segunda integral à direita de (4.12)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2\cos(2\theta) - R^2\text{sen}(2\theta)} iRe^{i\theta}d\theta\right| \leq & \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\text{sen}(2\theta)}Rd\theta \\ &= \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\text{sen}(\phi)}d\phi, \quad \Big(2\theta = \phi \Rightarrow d\theta = \frac{d\phi}{2}\Big) \\ &\leq \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2}\frac{\phi}{\pi}d\phi, \text{ pois } \text{sen}(\phi) \geq \frac{2\phi}{\pi}, \; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{R^2}\right).$$

Quando $R \to \infty$, a segunda integral à direita em (4.12) tende a zero.

Logo,

$$\int_0^\infty (\cos(x^2) + i\text{sen}(x^2))dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Igualando as partes reais e imaginárias, temos

$$\int_0^\infty sen(x^2)dx = \int_0^\infty cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

4.3 Integrais Envolvendo Funções Trigonométricas

Um outro tipo de integrais reais que podem ser calculadas por resíduos, são integrais definidas da forma

$$\int_0^{2\pi} F(\text{sen}(\theta), \cos(\theta))d\theta,^{3} \tag{4.13}$$

onde F é um quociente de polinômios de $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$. Usando a transformação $z = e^{i\theta}$, teremos

$$\text{sen}(\theta) = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad \cos(\theta) = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta, \quad \text{ou seja,} \quad dz = izd\theta.$$

A integral (4.13) passa a representar a integral curvilínea de uma função racional de z ao longo do círculo unitário e assim basta calcular esta integral complexa.

Exemplo 4.11 *Calcule o valor da seguinte integral*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + sen^2(\theta)}.$$

[3]Este tipo de integrais reais podem ser calculadas usando substituição $t = \text{tg}(\frac{x}{2})$, $-\pi < x < \pi$.

Solução. Fazendo $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$ e $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}^2(\theta)} &= \int_C \frac{1}{2 + \left(\dfrac{z - z^{-1}}{2i}\right)^2} \frac{dz}{iz}, \quad \text{onde } C \text{ é o círculo } |z| = 1. \\
&= \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{2 + \left(\dfrac{z^2 - 2 + z^{-2}}{-4}\right)} \frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{i} \int_C \frac{1}{\left(\dfrac{-8 + z^2 - 2 + z^{-2}}{-4}\right)} \frac{dz}{z} \\
&= \frac{-4}{i} \int_C \frac{1}{z^2 - 10 + z^{-2}} \frac{dz}{z} \\
&= \frac{-4}{i} \int_C \frac{1}{z^3 - 10z^2 + 1} dz \\
&= \frac{-4}{i} \int_C \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1} dz.
\end{aligned}$$

O integrando é $f(z) = \dfrac{z}{z^4 - 10z^2 + 1}$, que tem pólos simples nos pontos

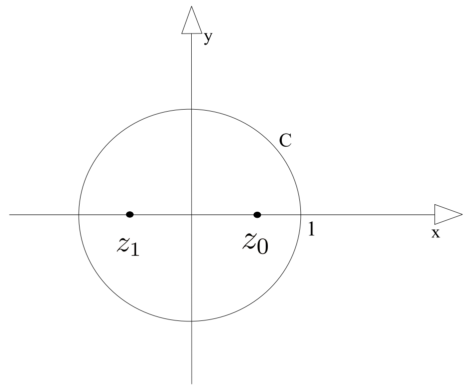
$$z_0 = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}},\ z_1 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}},\ z_2 = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \ \text{ e } \ z_3 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}.$$

Como C é o círculo $|z| = 1$, os únicos pontos singulares do integrando no interior de C são $z_0 = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ e $z_1 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$. Os resíduos nesses pontos são

$$(res.f)(z_0) = \frac{-1}{8\sqrt{6}} \ \text{ e } \ (res.f)(z_1) = \frac{-1}{8\sqrt{6}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{-4}{i} \int_C \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1} dz &= \frac{-4}{i}(2\pi i[(res.f)(z_0) + (res.f)(z_1)]) \\
&= -8\pi \left[\frac{-1}{8\sqrt{6}} - \frac{1}{8\sqrt{6}}\right] \\
&= -8\pi \left[\frac{-2}{8\sqrt{6}}\right]
\end{aligned}$$



$$= \frac{2\pi}{\sqrt{6}}.$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\text{sen}^2(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}.$$

Exemplo 4.12 *Calcule a seguinte integral*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos(\theta)} \qquad a^2 < 1.$$

Solução. Fazendo $\cos(\theta) = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$ e $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ temos

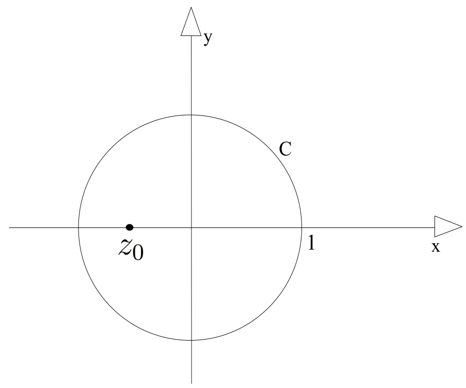
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\cos(\theta)} &= \int_C \frac{1}{1+a\left(\dfrac{z+z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz} \\
&= \int_C \frac{1}{\left(\dfrac{2+a(z+z^{-1})}{2}\right)} \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{1}{i}\int_C \frac{1}{\left(\dfrac{-8+z^2-2+z^{-2}}{-4}\right)} \frac{dz}{z} \\
&= \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{2z+az^2+a}.
\end{aligned}$$

O integrando é $f(z) = \dfrac{z}{az^2+2z+a}$, que tem pólos simples nos pontos

$$z_0 = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a} \quad e \quad z_1 = \frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Como C é o círculo $|z| = 1$, o único ponto singular do integrando no interior de C é $z_0 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}$. O resíduo nesse ponto é

$$(res.f)(z_0) = \frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}}.$$



Logo,

$$\begin{aligned} \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{2z + az^2 + a} &= \frac{2}{i}(2\pi i[(rez.f)(z_0)]) \\ &= 4\pi\Big[\frac{1}{2\sqrt{1 - a^2}}\Big] \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Exemplo 4.13 *Calcule a integral*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + asen(\theta)} \qquad a^2 < 1.$$

Solução. Fazendo $\mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$ e $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ temos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\mathrm{sen}(\theta)} = \int_C \frac{1}{1 + a\left(\dfrac{z + z^{-1}}{2i}\right)} \frac{dz}{iz}$$

$$= \int_C \frac{1}{\left(\dfrac{2i + a(z+z^{-1})}{2i}\right)} \frac{dz}{iz}$$

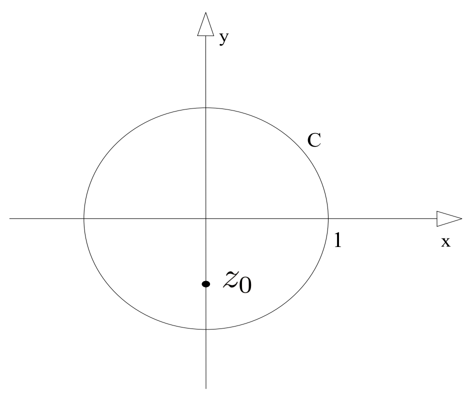
$$= \int_C \frac{2i}{2i + az - az^{-1}} \frac{dz}{iz}$$

$$= 2\int_C \frac{1}{2zi + az^2 - a} dz.$$

O integrando é $f(z) = \dfrac{1}{az^2 + 2zi - a}$, que tem pólos simples nos pontos

$$z_0 = \frac{-i + i\sqrt{1-a^2}}{a} \quad e \quad z_1 = \frac{-i - i\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

Como C é o círculo $|z| = 1$, o único ponto singular do integrando, no interior de C, é $z_0 = \dfrac{-i + i\sqrt{1-a^2}}{a}$. O resíduo nesse ponto é $(res.f)(z_0) = \dfrac{1}{2i\sqrt{1-a^2}}$.



Logo,

$$2\int_C \frac{dz}{2zi + az^2 - a} = 2(2\pi i[(rez.f)(z_0)])$$

$$= 4\pi\Big[\frac{1}{2i\sqrt{1-a^2}}\Big]$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\text{sen}(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Exemplo 4.14 *Calcule a integral*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos(\theta)} \qquad a > b > 0.$$

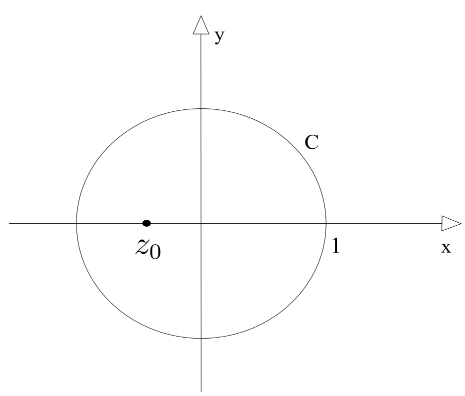
Solução. Fazendo $\cos(\theta) = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ e $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos(\theta)} &= \int_C \frac{1}{a + b\left(\dfrac{z + z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz} \\
&= \int_C \frac{1}{\left(\dfrac{2a + b(z + z^{-1})}{2}\right)} \frac{dz}{iz} \\
&= \int_C \frac{2}{2a + bz + bz^{-1}} \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{2}{i} \int_C \frac{1}{2az + bz^2 + b} dz.
\end{aligned}$$

O integrando é $f(z) = \dfrac{1}{2az + bz^2 + b}$, que tem pólos simples nos pontos

$$z_0 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \; z_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Como C é o círculo unitário, o único ponto singular do integrando, no interior de C, é $z_0 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. O resíduo nesse ponto é $(res.f)(z_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$.



Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{i}\int_C \frac{1}{2az+bz^2+b}dz &= \frac{2}{i}(2\pi i[(rez.f)(z_0)]) \\
&= 4\pi\Big[\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\Big] \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Conclusão

O trabalho apresentado descreve um método para calcular alguns tipos de integrais reais que, por natureza, são difíceis ou por demais trabalhosas de serem calculadas pelas técnicas tradicionais. Tratamos de integrais impróprias de funções reais que não possuem primitivas expressas através de funções elementares, como por exemplo as funções $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ e $\operatorname{sen}(x)^2$.

No decorrer deste trabalho, foi possível rever e explorar vários conceitos e resultados adquiridos ao longo do curso, como por exemplo: as propriedades dos números complexos estudadas na disciplina de Álgebra, e convergência de séries, estudada na disciplina de Cálculo. Além disto, é importante ressaltar a valiosa lição que se obteve com o desenvolvimento deste trabalho, desde sua concepção, passando pela fase de pesquisa e estudo, até a sua apresentação final.

Por fim, sugerimos para trabalhos futuros, o estudo da aplicação do Teorema do Resíduo em sistemas físicos, como por exemplo em questões aerodinâmicas.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. ***Variáveis Complexas e Aplicações***. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1990.

[2] CHURCHILL, Ruel, V. ***Variáveis Complexas e suas Aplicações***. São Paulo: Editora Mc GRAW-HILL do Brasil, 1975.

[3] HAUSER, Arthur A. ***Variáveis complexas com aplicações a física: Teoria e Resolução de 760 problemas***. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1972.

[4] COLWELL, Peter; MATHEWS, Jerold. ***Introdução às Variáveis Complexas***. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1976.

[5] MURRAY, R. Spiegel. ***Cálculo Avançado***. Rio de Janeiro: Editora Mc GRAW-HILL do Brasil, 1971.

[6] MURRAY, R. Spiegel. ***Variáveis Complexas***. Rio de Janeiro: Editora Mc GRAW-HILL do Brasil, 1973.