

**CLEBER HELIO GARCIA**

**OS TEOREMAS DO CÁLCULO VETORIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura  
Departamento de Matemática,  
Sob a orientação do  
Profº Dr.Eliezer Batista.

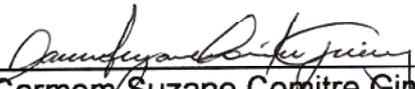
**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Universidade Federal de Santa Catarina**

**FLORIANÓPOLIS  
JULHO DE 2007**

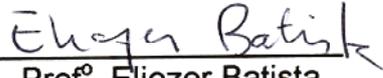
Dedico este trabalho à minha família,  
à Deus, aos meus amigos  
e a todos os que me apoiaram  
e incentivaram.

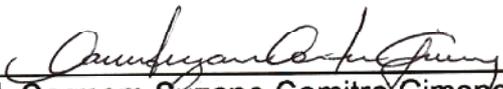
Agradecimentos aos mestres, ao meu orientador,  
à família, pelo apoio,  
aos amigos, pela companhia nesta jornada  
e a todos que desejaram meu sucesso.

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 37/CCM/07

  
\_\_\_\_\_  
Prof.<sup>a</sup> Carmem Suzane Comitre Gimenez  
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof.<sup>o</sup> Eliezer Batista  
Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof.<sup>a</sup> Carmem Suzane Comitre Gimenez

  
\_\_\_\_\_  
Prof.<sup>o</sup> Ivan Pontual Costa e Silva

## SUMÁRIO

RESUMO.....	7
INTRODUÇÃO.....	8
<b>CAPÍTULO I: FUNÇÕES REAIS DE N VARIÁVEIS</b>	
1.1 Derivadas Parciais.....	9
1.2 Derivadas Direcionais.....	12
1.3 Funções Diferenciáveis.....	14
1.4 Base Dual.....	19
1.5 Hipersuperfícies de Nível.....	21
1.6 A Diferencial de uma Função.....	24
1.7 O Gradiente de uma Função Diferenciável.....	25
1.8 Função Derivada.....	28
1.9 Segunda Derivada de uma Função.....	28
1.10 Matriz Hessiana .....	31
<b>CAPÍTULO II: APLICACOES DIFERENCIÁVEIS</b>	
2.1 Diferenciabilidade de uma Aplicação.....	33
2.2 Matriz Jacobiana.....	36
<b>CAPÍTULO III: CAMPOS VETORIAIS</b>	
3.1 Integrais de Linha.....	41
3.1.1 Integral de Linha Quanto ao Comprimento de Arco.....	41
3.1.2 Integral de Linha de Campos Vetoriais.....	43
3.1.3 Outra Notação para Integral de Linha de um Campo Vetorial Sobre uma Curva.....	46
3.1.4 Integral de Linha Sobre uma Curva de Classe $C^1$ por Partes.....	47
3.2 Rotacional.....	48
3.3 Campos Conservativos.....	52
3.4 Independência do Caminho de Integração.....	55
3.5 Existência da Função Potencial.....	56
3.6 Condições Necessárias e Suficientes para um Campo Vetorial ser Conservativo.....	57
3.7 Conjunto Simplesmente Conexo.....	59

3.8 Integral de Superfície.....	60
3.8.1 Parametrização de Superfície.....	60
3.8.2 Integral de Superfície de uma Função a Valores Reais.....	61
3.8.3 Integral de Superfície de um Campo Vetorial.....	64
3.9 Divergente.....	66
3.10 Identidades Envolvendo Gradiente, Rotacional e Divergente.....	70
<b>CAPÍTULO III: OS TEOREMAS DE GREEN, GAUSS E STOKES.</b>	
4.1 Teorema de Green para Retângulos .....	75
4.1.1 Teorema de Green para um Caso Particular .....	76
4.1.2 Teorema de Green para Conjunto com Fronteira $C^1$ por Partes.....	79
4.2 Teorema da Divergência ou de Gauss para Paralelepípedos .....	83
4.2.1 Teorema da Divergência para um Caso Particular.....	84
4.3 Teorema da Stokes no Espaço.....	90
CONCLUSÕES.....	96
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	97

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo um estudo complementar ao curso de licenciatura em matemática.

Começo por rever e estudar alguns temas da Análise de funções de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ . Descrevo definições como a diferenciabilidade de funções, diferencial, gradiente e alguns teoremas importantes, como Schwartz e Regra da Cadeia. Finalizo esta primeira parte com uma abordagem de aplicações de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ .

Na seqüência temos um estudo de campos vetoriais, integrais de linha, campos conservativos e de integrais de superfície.

Por último apresento e comento os três principais teoremas do cálculo vetorial: Teorema de Green, Gauss e Stokes.

## INTRODUÇÃO

No curso de licenciatura em matemática, temos uma seleção de conteúdos de forma a equilibrar o conhecimento do acadêmico entre matemático e professor. Para estudarmos alguns temas se faz necessário fazer algumas disciplinas optativas. Isto quando elas estão disponíveis em um horário que não seja o mesmo de outra disciplina obrigatória ou até coincida com o horário de trabalho do estudante. E por este motivo, uma forma de conhecer conteúdos que não estão na grade de disciplinas obrigatórias é através de um estudo orientado no trabalho de conclusão de curso.

Início este trabalho com uma abordagem de funções de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ . Estudo a diferenciabilidade de uma função, derivadas parciais, direcionais, diferencial e gradiente, além de descrever e demonstrar o teorema de Schwartz. Finalizo esta parte que busca dar uma fundamentação para o tema do trabalho de conclusão de curso, com uma abordagem de aplicações de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ , estudando a diferenciabilidade de aplicações, matriz Jacobiana e o teorema da regra da cadeia.

Será abordado a partir deste ponto o tema propriamente dito deste trabalho de conclusão de curso. Veremos os conceitos de campo vetorial, integral de linha, campos conservativos, condição para um campo vetorial ser conservativo, integrais de superfície, rotacional e divergente.

Por último serão expostos e abordados os três principais teoremas do cálculo vetorial.

Por fim este trabalho busca organizar definições e teoremas para que aqueles que busquem estudar ou conhecer o cálculo vetorial tenham um material de auxílio.

# CAPÍTULO I

## FUNÇÕES REAIS DE N VARIÁVEIS

Antes de iniciarmos com o assunto propriamente dito deste trabalho de conclusão de curso. Iremos ver algumas definições e teoremas que serão de grande ajuda na compreensão dos temas propostos nos próximos capítulos.

### 1.1 Derivadas Parciais

Quando se busca uma noção de derivada para funções de  $n$  variáveis, que tenha propriedades análogas às da derivada de uma função definida num intervalo, a idéia que mais se aproxima é a de “derivada parcial”.

**Definição 1:** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $U$  aberto<sup>1</sup> e  $a \in U$ . Temos que a  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  no ponto  $a$  (onde  $1 \leq i \leq n$ ) é

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t},$$

quando tal limite existe.

Podemos notar que para  $f(a + te_i)$  ter sentido, temos que ter  $U$  aberto e  $t$  “suficientemente pequeno”. Nesse caso, dado  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(a, \varepsilon) \subseteq U$  temos que  $a + te_i \in B(a, \varepsilon) \subseteq U$ , para  $|t| < \varepsilon$ .

Para o caso  $U \subset \mathbb{R}^2$ , uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é o que se chama uma “função real de duas variáveis”. Geralmente neste caso escreve-se  $f(x, y)$  ao invés de  $f(x_1, x_2)$ .

Assim temos as derivadas parciais de  $f$  num ponto  $c = (a, b) \in U$ , como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t},$$

---

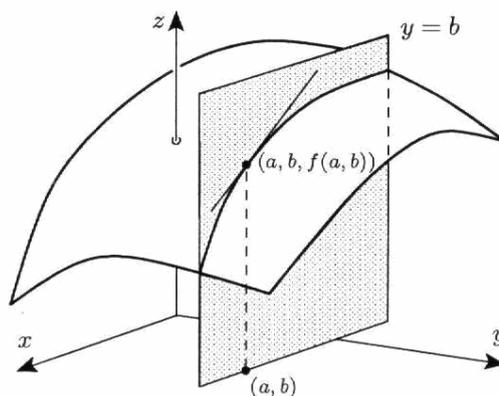
<sup>1</sup> Dizemos que  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  é aberto se  $\forall a \in U \exists r > 0$  tal que  $B(a, r) \subseteq U$ , ou seja, a bola de centro  $a$  e raio  $r$  está inteiramente contida em  $U$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

De forma análoga, se  $U \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma “função real de três variáveis reais” e dado  $d = (a, b, c)$ , temos as suas derivadas parciais como  $\frac{\partial f}{\partial x}(d)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(d)$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(d)$ .

Voltamos ao caso geral, com  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Dados  $a \in U$  e  $i = 1, \dots, n$ , a imagem do caminho  $\lambda_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_i(t) = a + te_i$ , é o que se chama “a reta que passa por  $a$  e é paralela ao  $i$ -ésimo eixo”. Pelo fato de  $U$  ser aberto, para  $t$  suficientemente pequeno temos  $\lambda(t) \in B(a, \varepsilon)$  para  $|t| < \varepsilon$  e, portanto,  $\lambda(t) \in U$ . A  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  no ponto  $a$  é a derivada, no ponto  $t=0$ , da função  $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$ .

Voltemos novamente para o caso  $n=2$  e suponha que  $f$  é de classe  $C^{k,2}$  ( $k \geq 1$ ). Nesse caso, o gráfico de  $f$  é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ . A derivada parcial  $(\partial f / \partial x)(c)$ , é a inclinação da reta tangente à curva de intersecção do plano  $y=b$  com o gráfico de  $f$ , essa curva, no ponto  $(a, b, f(a, b))$ , relativamente ao plano horizontal.



<sup>2</sup> Para referências consultar ELON LAGES LIMA. **Curso de análise vol.2.**

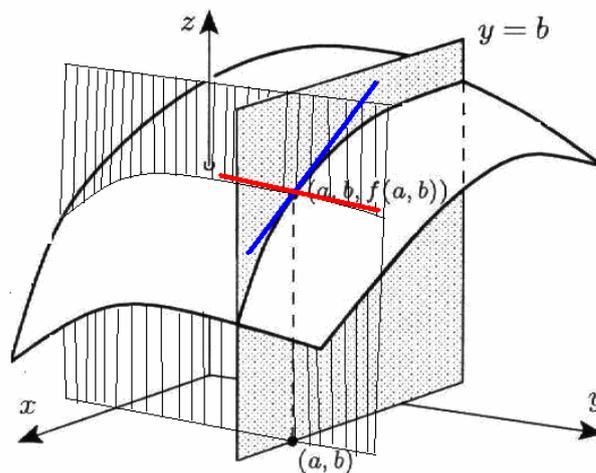
O cálculo prático da  $i$ -ésima derivada parcial de uma função real  $f(x_1, \dots, x_n)$  se faz considerando todas as variáveis como se fossem constantes, exceto a  $i$ -ésima, e aplicando as regras usuais de derivação.

Podemos estudar o crescimento de uma função ao espaço da  $i$ -ésima direção por sua  $i$ -ésima derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

Então, por exemplo, seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  com  $U \subset \mathbb{R}^2$ ; se tivermos o segmento de reta  $J = \{(a, t); 0 \leq t \leq 1\}$ , paralelo ao eixo dos  $y$  e contido em  $U$  e além disso  $(\partial f / \partial y)(z) > 0$  para todo  $z \in J$ , então  $f$  é crescente sobre  $J$ , ou seja,  $0 \leq s < t \leq 1 \Rightarrow f(a, s) < f(a, t)$ .

A figura abaixo ilustra isso para o caso em  $\mathbb{R}^2$ .



Note que agora temos  $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$  representadas em um mesmo sistema de coordenadas. Podemos ver que as derivadas parciais nos fornecem apenas informações com relação ao eixo das coordenadas, porém não nos fornece informações em outros sentidos.

## 1.2 Derivadas Direcionais

As derivadas parciais nos fornecem informações ao longo de retas paralelas aos eixos. Este fato nos faz buscar uma noção de derivada que possa nos fornecer informações em outras direções.

**Definição 2:** Sejam  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $U$  aberto,  $a \in U$  e  $v \in \mathbb{R}^n$ . A derivada direcional de  $f$  no ponto  $a$ , segundo o vetor  $v$ , é, por definição o limite

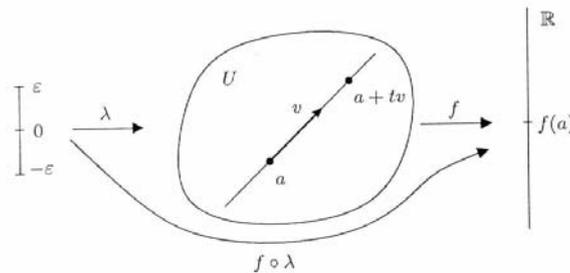
$$Df(a)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

quando tal limite existe.

Em particular,  $Df(a)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ , ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a)$  é derivada direcional de  $f$

no ponto  $a$ , segundo o vetor  $e_i$ .

A derivada direcional  $Df(a)(v)$  é a derivada, no ponto  $t=0$ , da função composta  $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o caminho retilíneo,  $\lambda(t) = a + tv$ , para o qual se tem  $\lambda(0) = a$  e  $\lambda'(t) = v$  para todo  $t$ . Aqui,  $\varepsilon > 0$  é escolhido tão pequeno que a imagem de  $\lambda$  esteja contida em  $U$ .



Note que no caso  $n=2$ , teremos a derivada direcional em  $(a,b) \in U$  como

$Df(a,b)(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v_2$  (onde  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ). A derivada direcional nos

fornecerá informações quanto ao crescimento de  $f$ , que será abordado mais à frente.

Vejamos agora alguns exemplos interessantes.

**Exemplo 1:** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$  se  $x^2 + y^2 \neq 0$  e  $f(0,0) = 0$ , temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

Onde  $f(t,0) = t \cdot 0 / (t^2 + 0^2) = 0$

E, portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

De modo análogo concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

Logo as derivadas parciais existem. Vejamos agora a derivada direcional.

Seja  $v = (v_1, v_2)$ , com  $v_1 \neq 0$  e  $v_2 \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} Df(0,0)(v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tv_1 \cdot tv_2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} - 0}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1 \cdot tv_2}{(tv_1)^2 + (tv_2)^2} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cdot v_2}{(v_1)^2 + (v_2)^2} \cdot \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

E logo não existe o limite, o que nos mostra que a existência das derivadas parciais não é uma condição suficiente para que existam as derivadas direcionais.

**Exemplo 2:** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . A derivada direcional de uma função constante é zero, ou seja, para  $f(x_1, \dots, x_n) = b$ , com  $b$  fixo e  $b \in U$ , temos  $Df(a)(v) = 0$ .

De fato

$$Df(a)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{b-b}{t} = 0$$

Logo podemos concluir que a derivada direcional de uma função constante é 0.

**Exemplo 3:** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  é uma função linear então temos que  $Df(a)(v) = f(v)$ .

De fato, por  $f$  ser linear, temos

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ e } f(\alpha b) = \alpha \cdot f(b)$$

Logo,

$$Df(a)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a) + t \cdot f(v) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot f(v)}{t} = f(v)$$

### 1.3 Funções Diferenciáveis

Dada  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $U$  aberto, seja  $a \in U$ . Diremos que a função  $f$  é *diferenciável* no ponto  $a$  quando existirem constantes  $A_1, \dots, A_n$  tais que, para todo vetor  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ , com  $a + v \in U$ , se tenha

$$f(a+v) = f(a) + A_1\alpha_1 + \dots + A_n\alpha_n + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

Se  $f$  for diferenciável em todos os pontos de  $U$ , dizemos simplesmente que  $f$  é *diferenciável*.

Se  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  então, tomando  $v = te_i$ ,  $t \neq 0$  suficientemente pequeno, temos  $\alpha_j = 0$  se  $j \neq i$  e  $\alpha_i = t$ . Logo

$$\frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = A_i + \frac{r(te_i)}{t} = A_i \pm \frac{r(te_i)}{\|te_i\|}.$$

Fazendo  $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( A_i \pm \frac{r(te_i)}{\|te_i\|} \right) = A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Portanto podemos equivalentemente definir o fato de uma função ser diferenciável da seguinte forma:

**Definição 3:** Uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $a \in U$ , quando existirem as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$  e, além disso, para todo vetor

$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tal que  $a + v \in U$ , tivermos

$$f(a + v) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot \alpha_n + r(v),$$

Onde  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ .

Aqui temos que o “resto”  $r(v)$  é definido como sendo igual a  $f(a + v) - f(a) - \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a) \cdot \alpha_i$ . A essência da definição de diferenciabilidade é que,

tomando  $r(v)$  desta maneira, tem-se  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$ . Esta é a condição que deve ser

verificada para provar que uma função é diferenciável.

A condição  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$  significa mais do que  $r(v) \rightarrow 0$ ; ela quer dizer que  $r(v)$  tende a zero mais rapidamente do que  $v$ , ou seja, a partir de valores de  $v$  suficientemente pequenos, temos que a norma de  $r(v)$  é uma fração arbitrariamente pequena da norma de  $v$ . Assim temos que  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  quando o acréscimo  $f(a + v) - f(a)$  é igual a uma função linear de  $v$ , acrescida da  $\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a) \cdot \alpha_i$ , mais um resto infinitamente pequeno em relação a  $v$ .

Em certos casos, podemos utilizar, em vez de  $r(v)$ , a função  $\rho = \rho(v)$ . Ou seja, podemos definir a diferenciabilidade da seguinte maneira:

**Definição 4:** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $a \in U$ . Então, a função  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  se, e somente se, possui derivadas parciais nesse ponto e, para todo  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a + v \in U$ , vale

$$f(a + v) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i + \rho(v) \cdot \|v\|, \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0.$$

Assim,  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  se, e somente se, a função real  $\rho = \rho(v)$ , definida pela igualdade acima (se  $v \neq 0$ ) e por  $\rho(0) = 0$ , é contínua no ponto  $v = 0$ .

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável no ponto  $a + v \in U$ . Mostraremos que  $f$  admite derivada direcional segundo qualquer vetor  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , e vale a fórmula

$$Df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot \alpha_n.$$

Com efeito, para todo  $t$  suficientemente pequeno, temos  $a + tv \in U$ . Pela definição de diferenciabilidade, temos:

$$f(a + tv) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot t\alpha_i + \rho(tv) \cdot |t| \cdot \|v\|,$$

donde

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i \pm \rho(tv) \cdot \|v\| \text{ com } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(tv) = 0$$

Resulta da expressão  $Df(a)(v) = \sum (\partial f / \partial x_i) \cdot \alpha_i$  que se  $f$  é diferenciável num ponto, então a derivada direcional  $Df(a)(v)$ , neste ponto, depende linearmente de  $v$ , isto é, não somente se tem,  $Df(a)(\alpha v) = \alpha(Df(a)(v))$  como também  $Df(a)(v + w) = Df(a)(v) + Df(a)(w)$ .

Vejamos agora os exemplos 1, 2 e 3 tendo em vista a definição de diferenciabilidade de funções:

**Exemplo 4:** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$  se  $x^2 + y^2 \neq 0$  e  $f(0,0) = 0$ ; já sabemos que não existe a derivada direcional de  $f$  no ponto  $(0,0)$  (exemplo 1), vamos ver o que acontece quando aplicamos a definição de funções diferenciáveis neste mesmo ponto.

Devemos tentar mostrar a igualdade

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0 \text{ onde } v = (\alpha, \beta)$$

De fato

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} &= \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left( f(x + \alpha, y + \beta) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \beta \right) = \\ &= \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (f(\alpha, \beta) - 0 - 0 \cdot \alpha - 0 \cdot \beta) = \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (f(\alpha, \beta)) = \\ &= \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \left( \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) = \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{aligned}$$

Agora fazendo  $\alpha = t$  e  $\beta = t$  temos:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + t^2}} \cdot \left( \frac{t^2}{t^2 + t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t\sqrt{2}} \neq 0$$

Portanto a função não é diferenciável em  $(0,0)$ .

**Exemplo 5:** Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x_1, \dots, x_n) = b$ , com  $b$  fixo e  $b \in U$ , ou seja,  $f$  é uma função constante. Vamos mostrar que  $f$  é diferenciável com  $Df(a)(v) = 0$  (Conforme visto no exemplo 2).

Para provarmos que  $f$  é diferenciável com  $Df(a)(v) = 0$  é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

De fato

$$\begin{aligned}\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} &= \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}} (f(a+v) - f(a) - Df(a)(v)) = \\ \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} &= \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}} \cdot (b - b - 0) = \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

**Exemplo 6:** Agora vamos provar que se  $f$  é uma função linear então temos que  $f$  é diferenciável com

$$Df(a)(v) = f(v).$$

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  é linear. Logo, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} &= \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}} (f(a+v) - f(a) - Df(a)(v)) = \\ \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} &= \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}} (f(a) + f(v) - f(a) - Df(a)(v))\end{aligned}$$

Mas vimos no exemplo 3 que

$$Df(a)(v) = f(v)$$

Portanto

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}} (f(a) + f(v) - f(a) - f(v)) = 0$$

Logo a função é diferenciável com  $Df(a)(v) = f(v)$ .

## 1.4 Base Dual

Antes de continuarmos com o assunto sobre diferenciabilidade, é importante estudarmos alguns tópicos necessários à compreensão dos próximos temas.

**Definição 5:** Seja  $V$  um espaço vetorial. O *espaço vetorial dual* a  $V$  é o conjunto  $V^* = \{ f : V \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ linear} \}$ , munido das operações:

$$(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$$

$$(\lambda f)(v) = \lambda \cdot f(v),$$

para quaisquer  $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$  e  $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ .

Tome  $\{f_i\}_{i=1}^n$  uma base de  $V$ . Seja  $\{\varphi^i\}_{i=1}^n \in V^*$  tal que

$$\varphi^i(f_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\{\varphi^i\}_{i=1}^n = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$$

Vamos agora mostrar que  $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$  é uma base de  $V^*$ . Para isso devemos mostrar que  $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$  é L.I. e gera  $V^*$ .

Seja

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i$$

Tome

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i(f_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_j^i = \alpha_j \text{ para } \forall j = 1, \dots, n.$$

Portanto  $\alpha_j = 0, j = 1, \dots, n$ , o que implica que  $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$  é L.I..

Agora iremos provar que  $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$  gera  $V^*$ .

Primeiro vamos ver que  $\forall v \in V, \varphi^i(v) = v^i$ . De fato

$$\varphi^i(v) = \varphi^i\left(\sum_{j=1}^n v^j f_j\right) = \sum_{j=1}^n v^j \varphi^i(f_j) = \sum_{j=1}^n v^j \delta_j^i = v^i$$

Note que vale  $\varphi^i \left( \sum_{j=1}^n v^j f_j \right) = \sum_{j=1}^n v^j \varphi^i(f_j)$  pois  $\varphi$  é uma função linear e  $\varphi^i(f_j) = \delta_j^i$  pela construção da função composta  $\varphi^i(f_j)$ .

Agora podemos mostrar que  $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$  gera  $V^*$ .

Seja  $\psi \in V^*$  e  $v \in V$  tal que

$$v = \sum_{i=1}^n v^i f_i \text{ onde } \{\varphi^i\}_{i=1}^n \text{ é base de } V.$$

Tome

$$\psi(v) = \psi \left( \sum_{i=1}^n v^i f_i \right) = \sum_{i=1}^n v^i \psi(f_i) = \sum_{i=1}^n \psi(f_i) \cdot \varphi^i(v).$$

Portanto como  $\psi(f_i) \in \mathbb{R}$  e  $\psi(v) = \sum_{i=1}^n \psi(f_i) \cdot \varphi^i(v)$  temos que  $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$  gera  $V^*$ .

Vamos agora provar que existe um isomorfismos de  $V$  em  $V^*$ .

Seja

$$\begin{aligned} \phi: V &\rightarrow V^* \\ \sum_{i=1}^n x^i f_i &\rightarrow \sum_{i=1}^n x^i \varphi_i \text{ com } i=1, \dots, n \text{ e } x_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Temos que  $\phi$  é claramente linear e injetiva, pois leva a base de  $V$  na base de  $V^*$  e como ambas as bases têm  $\dim = n$  temos que  $\phi$  é sobrejetora e portanto bijetora. E com isso provamos que existe um isomorfismo (bijeção) de  $V$  em  $V^*$ .

Ainda vale comentar que a nomenclatura que se utiliza para a base dual da base canônica em  $(\mathbb{R}^n)^*$  é  $\{dx^i\}$ .

Note que o isomorfismo de  $V$  em  $V^*$  não depende somente de  $v$ , mas também da base escolhida em  $V$ . O próximo teorema vai nos livrar da dependência da base utilizada. Este teorema vai ser útil para definirmos o gradiente de uma função.

**Teorema 1** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita, com produto interno. A correspondência  $\xi: V \rightarrow V^*$  que associa a cada  $v \in V$  o funcional linear  $\xi(v) = v^*$ , tal que  $v^*(w) = \langle w, v \rangle$  para todo  $w \in V$ , é um isomorfismo.

**Demonstração:** Vamos começar mostrando a linearidade de  $\xi$ :

Tome  $u, v \in V$ , logo temos:

$$(u+v)^*(w) = \langle w, u+v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle = u^*(w) + v^*(w) = (u^* + v^*)(w)$$

Agora devemos mostrar que para  $\alpha \in \mathbb{R}$  temos que  $(\alpha v)^* = \alpha(v^*)$

De fato, seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $v \in V$ . Então temos:

$$(\alpha v)^*(w) = \langle w, \alpha v \rangle = \alpha \langle w, v \rangle = \alpha(v^*(w))$$

Logo temos a linearidade demonstrada. Agora só falta provarmos que existe o isomorfismo de  $V$  em  $V^*$ .

Vamos primeiramente mostrar que  $\xi$  é injetora. Para mostrarmos que  $\xi$  é injetora, basta mostrarmos que  $N(\xi) = \{0\}$ <sup>3</sup>. Pelo fato de  $\xi$  ser um funcional linear.

Dado  $v \in V$ , se  $v^* = 0$  então, para todo  $w \in V$  tem-se

$$v^*(w) = \langle w, v \rangle = 0 = \sum_{i=1}^n w_i v_i$$

então temos  $v_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$  e portanto  $v = 0$ .

Por ultimo,  $\xi$  é sobrejetora pelo teorema da dimensão:

$$\dim V = \dim N(\xi) + \dim \text{Im}(\xi)$$

Como  $\xi$  é injetora,  $\dim N(\xi) = 0$  o que implica que  $\dim \text{Im}(\xi) = \dim V = \dim V^*$ . Isto nos mostra que  $\xi$  é bijetora e que temos o isomorfismo desejado.

## 1.5 Hiperfícies de Nível

**Definição 6:** Dada  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciável no aberto  $U$  e dado um número real  $c$ , diz-se que o ponto  $x \in U$  está no nível  $c$ , ou tem nível  $c$ , relativamente a  $f$ , quando  $f(x) = c$ . Fixado  $c$ , o conjunto dos pontos de  $U$  que estão no nível  $c$  é a imagem inversa  $f^{-1}(c)$ , a qual é chamada à Hiperfície de nível  $c$  da função  $f$ . Quando  $n=2$ ,  $f^{-1}(c)$  chama-se a curva de nível  $c$  de  $f$  e quando  $n=3$  chama-se superfície de nível  $c$  de  $f$ .

---

<sup>3</sup> O núcleo  $N(A)$  da transformação linear  $A : E \rightarrow F$  é o conjunto dos vetores  $v \in E$  tais que  $Av = 0$ . A fim de que uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$  seja injetiva é necessário e suficiente que seu núcleo  $N(A)$  contenha apenas o vetor nulo.

Vejamos agora alguns exemplos:

**Exemplo 7:** Vejamos como se comporta o gráfico de  $f(x, y) = \cos x \cdot \text{sen} y$ .

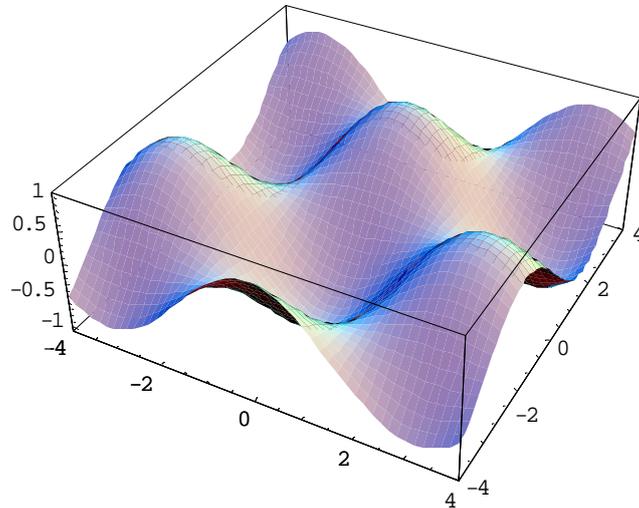


Gráfico de  $f(x, y) = \cos x \cdot \text{sen} y$

Agora vamos comparar com as curvas de nível de  $f(x, y)$

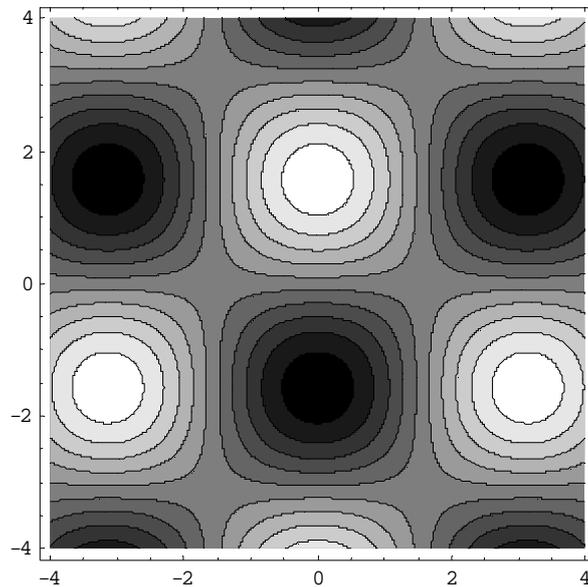


Diagrama das curvas de nível de  $f(x, y)$

Um exemplo comum são os mapas topográficos de regiões montanhosas, que têm suas curvas de nível com relação à altura dos relevos. Note que, na figura, a parte

escura representa os pontos onde  $f(x, y, z) < 0$  e a parte clara os valores na qual  $f(x, y, z) > 0$ .

Uma grande vantagem deste tipo de representação gráfica é a possibilidade de analisar funções de três variáveis, cujo gráfico é uma figura em  $\mathbb{R}^4$ , apenas assumindo um valor fixo para  $f(x, y, z) = a$  e assim poder analisar o gráfico neste nível (valor) da função.

Vamos analisar a superfície de nível de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  para os seguintes valores  $f(x, y, z) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

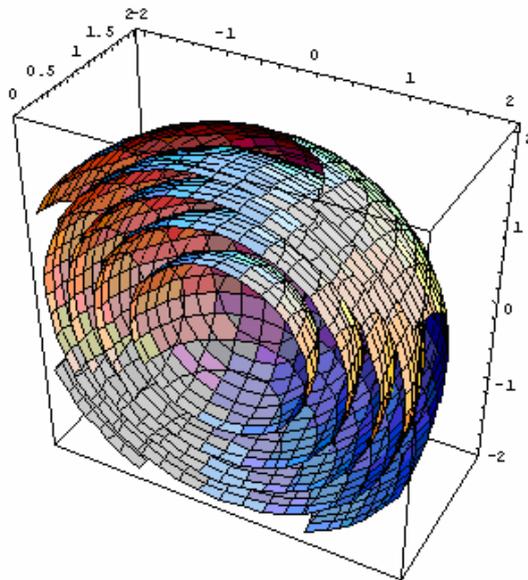


Diagrama da superfície de nível de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  para  $f(x, y, z) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Note que  $x \in ]-2, 2[$ ,  $y \in ]0, 2[$  e  $z \in ]-2, 2[$ . Para podermos ter uma idéia de como se comportam as superfícies de nível, temos cinco esferas de centro na origem e de raios respectivamente  $1$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4}$  e  $\sqrt{5}$ . Note que o gráfico desta não é possível visualizar por completo, pois o gráfico desta função depende das coordenadas  $x, y, z$  e  $f(x, y, z)$ , ou seja, é um subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ .

## 1.6 A Diferencial de uma Função

A derivada de um caminho  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um vetor. Veremos agora que a derivada de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é desempenhada por um funcional linear. Mas antes vamos definir *diferencial de uma função*:

**Definição 7:** Seja  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto  $U$ , diferenciável no ponto  $a \in U$ . A diferencial de  $f$  no ponto  $a$  é o funcional linear  $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo valor no vetor  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é dado por

$$df(a) \cdot v = Df(a)(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i.$$

Que é a derivada direcional de  $f$  em  $a$ , relativa ao vetor  $v$ .

Vamos mostrar que  $df(a)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ . De fato, seja  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , então temos

$$\begin{aligned} df(a)(e_i) &= Df(e_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

Logo temos  $df(a)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .

Utilizando o resultado obtido, temos que

$$df(a)(v) = df(a)\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i df(a)e_i.$$

Note que  $df(a)$  é um funcional linear, então vale  $df(\alpha a) = \alpha df(a)$ . Continuando temos:

$$df(a)(v) = \sum_{i=1}^n v_i df(a)e_i = \sum_{i=1}^n df(a)e_i dx_i(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i(v)$$

Onde  $dx_i$  é a base dual de  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Como esta igualdade vale para cada  $v \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Isto significa que o funcional linear  $df(a)$  pode ser representado como uma combinação linear dos funcionais  $dx_i$ , onde  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  são os coeficientes da combinação.

## 1.7 O Gradiente de uma Função Diferenciável

O produto interno natural induz um isomorfismo entre  $\mathbb{R}^n$  e seu dual  $(\mathbb{R}^n)^*$ , conforme visto. Tal isomorfismo faz corresponder a cada vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ , o funcional  $v^* \in (\mathbb{R}^n)^*$  com  $v^*(w) = \langle v, w \rangle$  para todo  $w \in \mathbb{R}^n$ . Logo, se tomarmos  $\varphi(w) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$ , que dá o valor do funcional  $\varphi$  no vetor  $w = (w_1, \dots, w_n)$ , já indica isso:  $\varphi(w)$  é o produto interno de  $w$  pelo vetor  $v = (c_1, \dots, c_n)$ , ou seja,  $\varphi = v^*$ .

**Definição 8:** Dada a função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no aberto  $U$ , definiremos o gradiente de  $f$  no ponto  $a \in U$  como o vetor  $\text{grad}f(a)$ , que corresponde ao funcional  $df(a)$  segundo o isomorfismo acima descrito. Isto significa por definição, que:

$$\langle \text{grad}f(a), v \rangle = Df(a)(v) = df(a) \cdot v = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i$$

para todo  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Em particular  $\langle \text{grad}f(a), e_i \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ , logo

$$\text{grad}f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Ainda é comum representar o gradiente com a seguinte nomenclatura:

$$\text{grad}f(a) = \nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Agora destacaremos as propriedades mais importantes do gradiente de uma função diferenciável  $f$ . Suponha  $a$  fixo e  $\text{grad}f(a) \neq 0$ . Então:

- O gradiente aponta para uma direção segundo a qual a função  $f$  é crescente;

Sabemos que

$$Df(a) \cdot v = \langle \nabla f(a), v \rangle$$

Então temos que

$$Df(a)(\nabla f(a)) = \langle \nabla f(a), \nabla f(a) \rangle = \|\nabla f(a)\|^2 \geq 0$$

Portando  $f$  é crescente no sentido do gradiente.

- Dentre todas as direções ao longo das quais a função  $f$  cresce, a direção do gradiente é a de crescimento mais rápido;

$$\text{Seja } U_{grad} = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

Então temos que para  $v \in \mathbb{R}^n$ , com  $\|v\| = 1$

$$\begin{aligned} Df(a)(v) &= \langle \nabla f(a), v \rangle = \|\nabla f(a)\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|U_{grad}\| = \\ &= \langle \nabla f(a), U_{grad} \rangle = df(a)(U_{grad}) \end{aligned}$$

- O gradiente de  $f$  no ponto  $a$  é perpendicular à superfície de nível de  $f$  que passa por esse ponto.

Seja  $\gamma$  um caminho diferenciável e  $K \in f(U)$ , tal que  $a \in f^{-1}(k)$ , ou seja :

$$\begin{aligned} \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ &\rightarrow f^{-1}(k) \\ t &\rightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

onde  $\gamma(0) = a$  e  $(f \circ \gamma)(t) = k \quad \forall t$ .

Temos que

$(f \circ \gamma)'(0) = 0$  pois  $(f \circ \gamma)(t) = k$  é uma função constante.

Logo temos

$$0 = df(\gamma(0))(\dot{\gamma}(0)) = df(a)(\dot{\gamma}(0)) = \left\langle \nabla f(a), \dot{\gamma}(0) \right\rangle$$

Como  $\dot{\gamma}(0)$  é o vetor velocidade da superfície de nível e  $\nabla f(a)$  é perpendicular a este vetor, temos que  $\nabla f(a)$  é perpendicular à curva de nível.

Com isto, demonstramos a três propriedades do gradiente.

Voltemos agora à função do exemplo 7

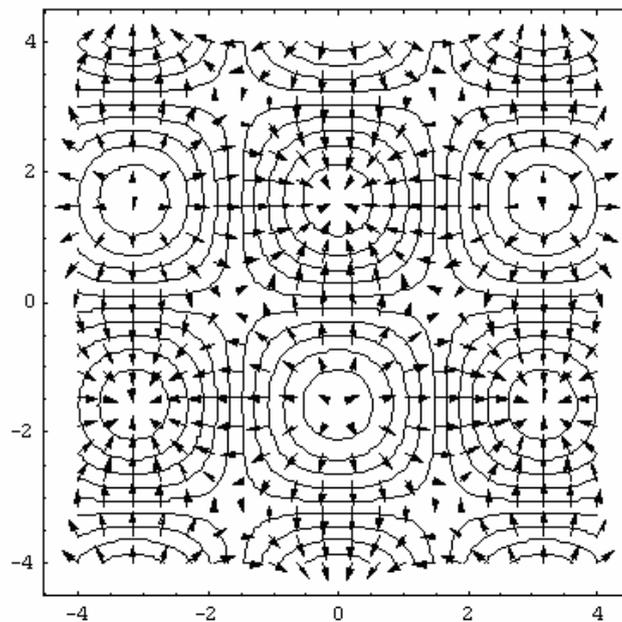


Diagrama das curvas de nível de  $f(x, y) = \cos x \cdot \text{sen } y$  com o gradiente da função sobreposto

Temos a curva de nível com o gradiente da função sobreposto em vários pontos da mesma. Podemos visualizar as propriedades demonstradas. Note que os vetores apontam para o sentido de crescimento da curva. Ainda podemos visualizar o fato de os vetores gradiente serem perpendiculares à curva de nível.

## 1.8 Função Derivada

**Definição 9:** Seja  $f$  diferenciável em algum ponto  $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ , podemos definir a função derivada como

$$\begin{aligned} df : U \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \\ a &\rightarrow df(a) \end{aligned}$$

Dizemos que  $f$  é de classe  $C^1$  se suas derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$  existirem e forem contínuas. Mas geralmente,  $f$  é de classe  $C^K$  se cada  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existir e for de classe  $C^{K-1}$ .

## 1.9 Segunda Derivada de uma Função

Se  $df$  é diferenciável em algum ponto  $a \in U$  podemos definir  $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  linear e se  $df$  for diferenciável em todos os pontos  $a \in U$ , podemos definir a função segunda derivada  $d^2 f(a) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)^*)$ .

Se  $d^2 f$  for contínua em  $U$  então  $f$  é dita ser de classe  $C^2$ . É possível provar que  $f$  é de classe  $C^2$  se e somente se  $df^2$  for contínua.

**Teorema de Schwartz:** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  com  $c \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Para quaisquer  $1 \leq i, j \leq n$ , tem-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c).$$

**Demonstração:** Sem perda de generalidade podemos supor  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $c = (a, b)$  e provar

que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c)$ . Existe  $\varepsilon > 0$  tal que o quadrado  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$

está contido em  $U$ . Para todo  $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$  ponhamos:

$$\varphi(t) = f(a+t, b+t) - f(a+t, b) - f(a, b+t) + f(a, b)$$

Então escrevemos

$$\xi(x) = f(x, b+t) - f(x, b)$$

E como

$$f(a+t, b+t) - f(a, b+t) = \xi(a+t) \text{ e } -(f(a+t, b) - f(a, b)) = -\xi(a),$$

temos que

$$\varphi(t) = \xi(a+t) - \xi(a)$$

Pelo teorema do valor médio para funções de uma variável, existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$\varphi(t) = \xi'(a + \theta t) \cdot t$ , ou seja

$$\varphi(t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b) \right] \cdot t$$

Pelo fato de  $\frac{\partial f}{\partial x}: U \rightarrow \mathbb{R}$  ser diferenciável no ponto  $c = (a, b)$ , temos as seguinte

igualdades:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \theta t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \cdot t + \rho_1 t \text{ onde } \lim_{t \rightarrow 0} \rho_1 = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \theta t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \cdot t + \rho_1 t$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \theta t + \rho_2 t \text{ onde } \lim_{t \rightarrow 0} \rho_2 = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta t, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \theta t + \rho_2 t$$

Então temos

$$\varphi(t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \theta t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot t - \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \theta t \right) \right] \cdot t + \rho_1 t^2 - \rho_2 t^2$$

$$\varphi(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot t^2 + \rho_1 t^2 - \rho_2 t^2$$

E portanto temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \text{ onde } \lim_{t \rightarrow 0} \rho_1 = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} \rho_2 = 0.$$

Utilizando uma idéia semelhante para a função  $\zeta(y) = f(a+t, y) - f(a, y)$  chegaremos

$$\text{a } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b). \text{ E com isto concluímos o teorema.}$$

**Exemplo 8:** Vejamos agora uma função que vai mostrar que o fato de existir a segunda derivada no ponto, não é condição suficiente para que o teorema de Schwartz possa ser utilizado.

Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calculando as derivadas parciais temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(y(x^2 - y^2) + 2x^2 y)(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 - y^4) + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x(x^2 - y^2) - 2xy^2)(x^2 + y^2) - 2xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 - y^4) - 4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Agora vamos calcular as segundas derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{t} = -1$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1.$$

Este resultado nos mostra que o fato de existirem as derivadas segundas, não é condição suficiente para que venha a valer o teorema de Schwartz. Para o teorema possa ser utilizado devemos ter que  $f$  seja uma função de classe  $C^2$ .

### 1.10 Matriz Hessiana

Seja  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  e  $a \in U$ . A diferencial segunda  $d^2 f(a)$  será chamada de *forma Hessiana* da função  $f$  no ponto  $a$ , é uma forma quadrática, conforme veremos a seguir.

Primeiramente vamos ver a definição de forma quadrática.

**Definição 10:** Uma forma quadrática  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função cujo valor num vetor  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é dado por  $\sum_{i,j=1}^n h_{ij} \alpha_i \alpha_j$ , onde  $(h_{ij})$  é uma matriz simétrica  $n \times n$ . Indica-se com a notação  $Hv^2$  o valor da forma quadrática  $H$  no vetor  $v$ .

Desta maneira,

$$Hv^2 = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \alpha_i \alpha_j$$

Se  $t \in \mathbb{R}$  então  $H(vt^2) = t^2(Hv^2)$ .

Vejamos agora que a diferencial segunda satisfaz os requisitos propostos. De fato, temos:

$$df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \alpha_i$$

E portanto para  $d^2 f(a)$ , temos:

$$d^2 f(a) \cdot v^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(a) \alpha_i \alpha_1 + \dots + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(a) \alpha_i \alpha_n = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \alpha_i \alpha_j$$

Onde

$$H(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

E por último, pelo teorema de Schwartz, temos  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ , o que

nos leva ao fato de  $H(x)$  ser simétrica.

## CAPÍTULO II

### APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

#### 2.1 Diferenciabilidade de uma Aplicação

Uma aplicação  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  quando, para pequenos valores de  $v$ , o acréscimo  $f(a+v) - f(a)$  é, aproximadamente, uma função linear de  $v$ . Mais precisamente:

**Definição 1:** A aplicação  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U$ , diz-se diferenciável no ponto  $a \in U$  quando existe uma aplicação linear  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$f(a+v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Note que para  $f(a+v)$  ter sentido, temos que ter  $(a+v) \in U$ . Aqui temos o porquê de  $U$  ser aberto, pois neste caso para  $v$  suficientemente pequeno temos que  $(a+v) \in B(a, \varepsilon) \subseteq U$ . A igualdade acima é a definição do “resto”  $r(v)$ . Pois para  $f(a+v) - f(a)$  ser uma função linear de  $v$ , é necessário que dada  $T$ ,  $r(v)$  é infinitésimo em relação à  $v$ , o que se tem com  $\lim_{v \rightarrow 0} r(v)/\|v\| = 0$ . Ou ainda: para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < \|v\| < \delta \Rightarrow |r(v)| < \varepsilon \|v\|$ .

Em alguns casos, para evitar problemas causados pelo denominador zero, utiliza-se o artifício de pôr o resto sob a forma  $r(v) = \rho(v) \cdot \|v\|$ , onde a aplicação  $\rho$  é definida, para todo  $v$  tal que  $(a+v) \in U$ , por  $\rho(v) = r(v)/\|v\|$ , se  $v \neq 0$ , e  $\rho(v) = 0$ . Então temos a diferenciabilidade de  $f$  definida no ponto  $a$  como

$$f(a+v) - f(a) = T \cdot v + \rho(v) \cdot \|v\|, \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0,$$

de modo que  $\rho$  é contínua no ponto 0.

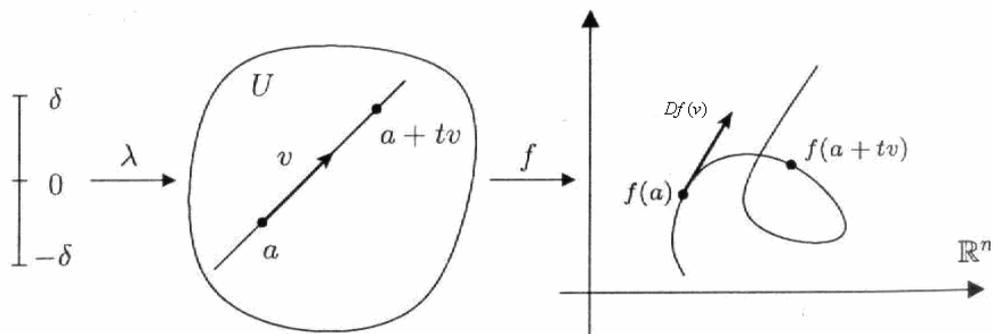
Vejamos agora como interpretar a transformação linear  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  que ocorre na definição acima.

**Definição 2:** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida num aberto  $U$ . A derivada direcional de  $f$  num ponto  $a \in U$ , relativamente a um vetor  $v \in \mathbb{R}^m$ , é, por definição,

$$Df(a)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^n,$$

Quando tal limite existe.

Podemos visualizar  $Df(a)(v)$  do seguinte modo: seja  $\delta > 0$  tal que o segmento de reta aberto  $(a - \delta v, a + \delta v)$  esteja contido em  $U$ . O caminho retilíneo  $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ , dado por  $\lambda(t) = a + tv$ , é transformado por  $f$  no caminho  $f \circ \lambda : t \rightarrow f(a + tv)$ , no espaço  $\mathbb{R}^n$ . A derivada direcional  $Df(v)$  é o vetor-velocidade de  $f \circ \lambda$  no instante  $t = 0$ .



Se  $f = (f_1, \dots, f_n)$  então  $Df(a)(v) = (Df_1(a)(v), \dots, Df_n(a)(v))$ . Quando  $v = e_j$  é o  $j$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^m$ , escreve-se  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$  em vez de  $\frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$ .

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right).$$

Supondo  $f$  diferenciável no ponto  $a$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^m$  e qualquer  $t \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeno tem-se

$$f(a+tv) - f(a) = T \cdot tv + \rho(tv) \cdot \|tv\|, \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(tv) = 0,$$

Como  $T \cdot tv = t \cdot T \cdot v$  e  $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$ , segue-se, para  $t \neq 0$ :

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = T \cdot v \pm \rho(tv) \cdot \|v\|$$

Donde

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = T \cdot v$$

Portanto  $T \cdot v = Df(a)(v)$ .

Em particular, vemos que é única a transformação linear  $T$  que fornece a boa aproximação para o acréscimo  $f(a+v) - f(a)$  na vizinhança do ponto  $a$ . Ela é chamada a *derivada* de  $f$  no ponto  $a$  e indicada com a notação  $Df(a)(v)$ .

Portanto, se  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U$ , é diferenciável no ponto  $a \in U$ , sua derivada é a aplicação linear  $Df(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , caracterizada por

$$f(a+v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0,$$

ou

$$f(a+v) - f(a) = T \cdot v + \rho(v) \cdot \|v\|, \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0.$$

**Exemplo 1:** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $f$  é uma aplicação constante. Então  $f$  é diferenciável com  $T = 0$ .

Para provarmos que  $f$  é diferenciável é suficiente mostrarmos que  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(tv) = 0$ .

De fato

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (c - c - 0) = 0$$

**Exemplo 2:** Agora vamos provar que se  $T$  é uma aplicação linear e tivermos  $T'(x) = T$ , então  $T$  será diferenciável.

Seja  $T : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $T$  é uma aplicação linear. Então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \rho(tv) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T(a+tv) - T(a) - T(tv)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T(a) + T(tv) - T(a) - T(tv)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T(tv) - T(tv)) = 0 \end{aligned}$$

## 2.2 Matriz Jacobiana

Quando buscamos encontrar a derivada de  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  no ponto  $a$ , encontramos uma transformação linear que leva cada coordenada de  $\mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja:

$$\begin{aligned} Df(a) : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\rightarrow (Df^1(a)(v), \dots, Df^n(a)(v)) \end{aligned}$$

onde  $Df^i(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação linear.

Veja que ainda podemos representar a derivada de  $Df(a)$  como uma matriz, que é chamada de Matriz Jacobiana  $Jf(a)$ .

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} Df^1(a) \\ \vdots \\ Df^n(a) \end{pmatrix}$$

Ou ainda,

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

Podemos ver que suas  $m$  colunas são os vetores  $Df(a) \cdot e_j = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right)$ .

Assim,  $Jf(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$ , onde  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  são as funções-coordenadas de  $f$ .

Cada uma das  $n$  linhas  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(a) \right)$  é, como sabemos, a matriz  $1 \times m$  do funcional linear  $df_i(a) =$  diferencial da  $i$ -ésima função-coordenada  $f_i$ . Para todo  $v \in \mathbb{R}^m$ , temos

$$Df(a) \cdot v = \left( \frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right) = (df_1(a) \cdot v, \dots, df_n(a) \cdot v).$$

A igualdade vetorial  $f(a+v) - f(a) = f'(a) \cdot v + r(v)$  equivale às  $n$  igualdades numéricas  $f^i(a+v) - f^i(a) = df^i(a) \cdot v + r_i(v)$ , onde  $r(v) = (r_1(v), \dots, r_n(v))$ , enquanto que o limite vetorial  $\lim_{v \rightarrow 0} r(v)/|v| = 0$  corresponde aos  $n$  limites numéricos  $\lim_{v \rightarrow 0} r_i(v)/|v| = 0$ . Isto prova o teorema 2.

**Teorema 2.** A aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é diferenciável no ponto  $a \in U$  se, e somente se, cada uma das suas funções-coordenadas  $f^1, \dots, f^n : U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável nesse ponto.

Vejamos como calcular a Matriz Jacobiana de  $f(x, y, z) = (x^2, 2xy, -5z)$ .

Note que  $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Então

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x} & \frac{\partial f^1}{\partial y} & \frac{\partial f^1}{\partial z} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x} & \frac{\partial f^2}{\partial y} & \frac{\partial f^2}{\partial z} \\ \frac{\partial f^3}{\partial x} & \frac{\partial f^3}{\partial y} & \frac{\partial f^3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ou seja

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

**Regra da Cadeia:** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  abertos,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável no ponto  $a$ , com  $f(U) \subset V$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^p$  diferenciável no ponto  $f(a)$ . Então  $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável no ponto  $a$ , com  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

**Demonstração:** Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  com  $f(U) \subset V$  e  $y = f(x)$ . Tome as derivadas de  $f$  e  $g$ :

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \rho(x, h)\|h\|$$

e

$$g(y+k) - g(y) = g'(y)k + \sigma(y, k)\|k\|$$

Seja a seguinte relação

$$f(x+h) = f(x) + k$$

Substituindo em  $g$  temos

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= g'(f(x)) \cdot (f(x+h) - f(x)) + \sigma(y, k)\|k\| = \\ &= g'(f(x)) \cdot (f'(x)h + \rho(x, h)\|h\|) + \sigma(y, k)\|k\| = \\ &= g'(f(x)) \cdot (f'(x)h + g'(f(x)) \left( \frac{\rho(x, h)\|h\|}{\|k\|} \|k\| \right) + \sigma(y, k)\|k\| \end{aligned}$$

Logo para provarmos que

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot (f'(x)h)$$

Devemos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} g'(f(x)) \left( \frac{\rho(x, h)\|h\|}{\|k\|} \|k\| + \sigma(y, k)\|k\| \right) = 0$$

Sabemos que por definição

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma(y, k) \|k\| = 0$$

Agora vamos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} g'(f(x)) \frac{\rho(x, h) \|h\|}{\|k\|} \|k\| = 0$$

Utilizemos novamente a relação

$$k = f(x+h) - f(x)$$

Tome

$$\frac{\|k\|}{\|h\|} = \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = \frac{\|f'(x)h + \rho(x, h)\| \|h\|}{\|h\|} = \left\| f'(x) \frac{h}{\|h\|} + \rho(x, h) \right\| \leq M \text{ com } M \in \mathbb{R}$$

Pois que tanto  $\left\| f'(x) \frac{h}{\|h\|} \right\|$  como  $\|\rho(x, h)\|$  são limitados e com isso chegamos à

conclusão que  $\frac{\|h\|}{\|k\|} \leq Q$  com  $Q \in \mathbb{R}$ .

Logo

$$\lim_{k \rightarrow 0} g'(f(x)) \left( \frac{\rho(x, h) \|h\|}{\|k\|} \|k\| + \sigma(y, k) \|k\| \right) = g'(f(x)) \left( \frac{\rho(x, h) \|h\|}{\|k\|} + \sigma(y, k) \right) \|k\| = 0$$

e

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot (f'(x))h$$

## CAPÍTULO III

### CAMPOS VETORIAIS

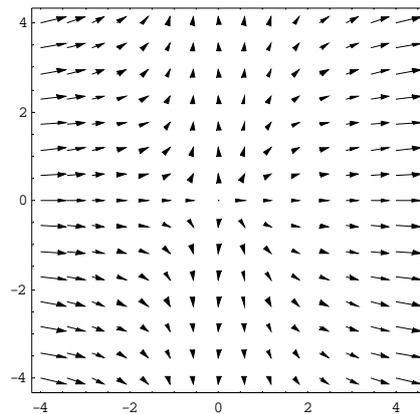
Quando buscamos estudar fenômenos como a velocidade do ar em uma determinada região, as funções reais de várias variáveis não se mostram tão eficazes. É neste momento que o uso do conceito de campo vetorial se torna fundamental. Com a ajuda dos campos vetoriais temos novas possibilidades. E é com isto que finalmente iniciamos o tema deste trabalho de conclusão de curso. Vejamos agora a definição de *Campos Vetoriais*.

**Definição 1:** *Seja  $U$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^n$  é uma função  $\vec{F}$  diferenciável que associa a cada ponto  $(x_1, \dots, x_n) \in U$  um vetor  $F(x_1, \dots, x_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ .*

Com esta definição temos mais ferramentas para analisar fenômenos como a velocidade do ar, na qual temos direções e valores distintos em vários pontos.

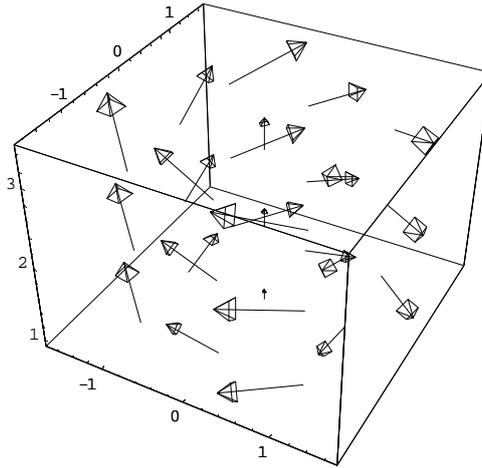
Vejamos agora alguns campos vetoriais:

a)  $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + y\vec{j}$



Campo vetorial  $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + y\vec{j}$

b)  $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} - x\vec{j} + \frac{z}{5}\vec{k}$



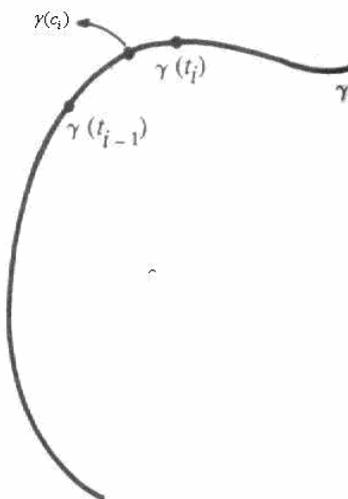
Campo vetorial de  $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} - x\vec{j} + \frac{z}{5}\vec{k}$

Podemos ver pelos exemplos mostrados, que agora podemos ter uma idéia de como se comporta o fenômeno estudado, em cada ponto. Isto é, se a função estiver representando a velocidade do ar, poderemos saber em cada ponto qual o seu valor e sua direção.

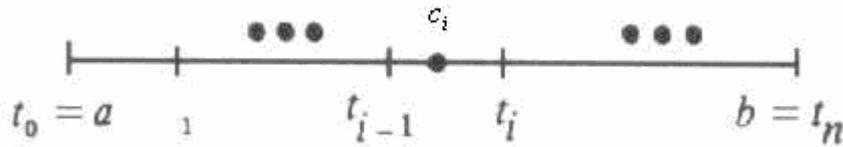
### 3.1 Integrais de Linha

#### 3.1.1 Integral de Linha Quanto ao Comprimento de Arco

Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um curva de classe  $C^1$  e seja  $f$  uma função de valores reais, contínua e definida na imagem de  $\gamma$ .



No intervalo  $t \in [a, b]$



Note que a distância entre dois pontos é

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2}.$$

Pelo teorema do valor médio temos que existe  $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$  tal que

$$x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}) = x'_k(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \text{ para todo } k = 1, \dots, n$$

Ou seja,

$$\Delta s_i = \left( \sqrt{x'_1(c_i)^2 + \dots + x'_n(c_i)^2} \right) \cdot (t_i - t_{i-1}) = \|\gamma'(c_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Novamente teremos uma aproximação para a curva através de segmentos de reta.

$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(c_i)) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\gamma(c_i)) \|\gamma'(c_i^*)\| \Delta t_i. \text{ É importante notar que } c_i \text{ e } c_i^* \text{ não}$$

necessariamente são iguais.

Tomando agora o limite  $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ , temos

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma(c_i)) \|\gamma'(c_i^*)\| \Delta t_i$$

Como  $\max \Delta t_i \rightarrow 0$  implica que  $t_i \rightarrow t_{i-1}$ . Portanto para todo  $c_i$  e  $c_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ ,

temos  $c_i \rightarrow t_{i-1}$  e  $c_i^* \rightarrow t_{i-1}$  (pois temos  $t_i \rightarrow t_{i-1}$ ). Logo podemos fazer a substituição

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma(c_i)) \|\gamma'(c_i)\| \Delta t_i = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_{i-1})) \|\gamma'(t_{i-1})\| \Delta t_i = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Temos então a seguinte definição.

**Definição 2:** Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva de classe  $C^1$  e seja  $f$  uma função a valores reais, contínua, definida na imagem de  $\gamma$ . Definimos a integral de linha de  $f$  sobre  $\gamma$ , por

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

**Exemplo 1:** Calcule a massa do fio  $\gamma(t) = (2t, 2t, 2t)$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , sendo  $\delta(x, y, z) = xyz$  a densidade linear.

Obs: Densidade Linear é o mesmo que massa por unidade de comprimento.

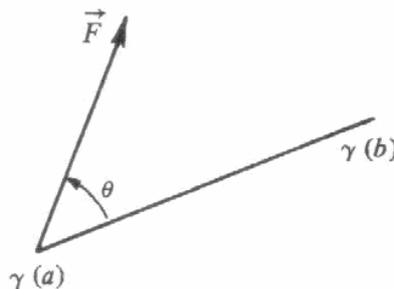
**Resolução:** Temos que  $\gamma'(t) = (2, 2, 2)$  e  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Logo chegamos ao resultado buscado

$$M = \int_{\gamma} xyz ds = \int_0^2 8t^3 \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_0^2 = 64\sqrt{3}$$

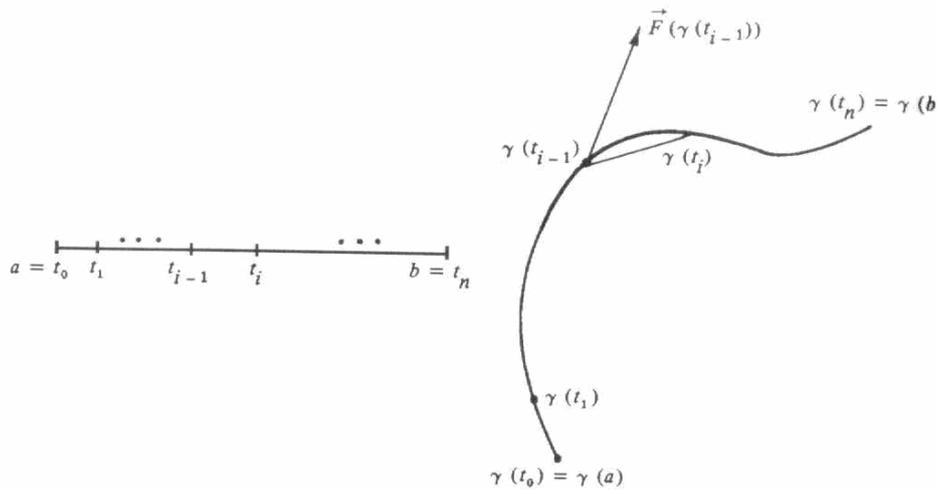
### 3.1.2 Integral de Linha de Campos Vetoriais

Vamos agora buscar a resultante de um campo vetorial ao longo de uma curva  $\gamma$ . Sejam  $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n$  contínua e  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  de classe  $C^1$ .



Primeiramente temos por definição que a resultante de um campo de vetores ao longo de uma reta é  $\vec{F}_R = \langle \vec{F}, [\gamma(b) - \gamma(a)] \rangle$ , para  $\vec{F}$  constante.

Agora voltemos para  $\gamma(t)$  qualquer de classe  $C^1$ , onde  $\gamma:[a,b] \rightarrow U$ .



Fazendo uma aproximação de  $\gamma(t)$ , por segmentos de reta, temos:

$$\sum_{i=1}^n \langle \vec{F}(\gamma(t_{i-1})), [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] \rangle$$

A aproximação melhora à medida que aumenta a quantidade de intervalos.

Vamos fazer a seguinte substituição

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \gamma'(c_i) \Delta t_i \quad \text{com } c_i \in [t_i, t_{i-1}] \quad (\text{pelo teorema do valor médio})$$

E então temos

$$\sum_{i=1}^n \langle \vec{F}(\gamma(t_{i-1})), \gamma'(c_i) \rangle \Delta t_i$$

Tome o limite de  $\max \Delta t_i$  tendendo à zero; temos então:

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}(\gamma(t_{i-1})), \gamma'(c_i) \rangle [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})]$$

Note que como  $\max \Delta t_i \rightarrow 0$  implica que  $t_i \rightarrow t_{i-1}$ , portanto  $c_i \rightarrow t_{i-1}$  pois  $c_i \in [t_i, t_{i-1}]$ , o que nos permite utilizar a igualdade  $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \gamma'(t_{i-1})\Delta t_i$ .

Logo podemos fazer a seguinte substituição, pois  $\langle \vec{F}(\gamma(t_{i-1})), \gamma'(t_{i-1})\Delta t_{i-1} \rangle$  é contínua e integrável, então:

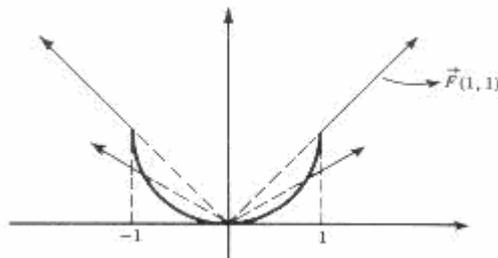
$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}(\gamma(t_{i-1})), \gamma'(c_i) \rangle [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}(\gamma(t_{i-1})), \gamma'(t_{i-1}) \rangle \Delta t_{i-1} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Logo temos a seguinte definição.

**Definição 3:** Sejam  $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo e uma curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ , de classe  $C^1$ . Definimos a integral de linha de  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$  por:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot dr = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

**Exemplo 2:** Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} dr$  onde  $F(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  e  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in [-1, 1]$



**Resolução:** Vamos agora calcular  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot dr = \int_{-1}^1 \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

Temos que

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \vec{F}(t, t^2) = t\vec{i} + t^2\vec{j} \text{ e } \gamma'(t) = (1, 2t).$$

Portanto chegamos ao seguinte resultado

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \langle (t, t^2), (1, 2t) \rangle dt = \int_{-1}^1 (t + 2t^3) dt = \left( \frac{t^2}{2} + 2 \frac{t^4}{4} \right) \Big|_{-1}^1 = 0$$

### 3.1.3 Outra Notação para Integral de Linha de um Campo Vetorial Sobre uma Curva

Seja  $\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1, \dots, x_n)\vec{j}_1 + \dots + F_n(x_1, \dots, x_n)\vec{j}_n$ , um campo vetorial contínuo  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  uma curva de classe  $C^1$ , com sua imagem contida em  $U$ , dada por  $x_i = x_i(t) \quad i = (1, \dots, n)$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \left\langle F_1(x_1(t), \dots, x_n(t))\vec{j}_1 + \dots + F_n(x_1(t), \dots, x_n(t))\vec{j}_n, \left( \frac{dx_1}{dt}\vec{j}_1, \dots, \frac{dx_n}{dt}\vec{j}_n \right) \right\rangle dt = \\ &= \int_a^b \left[ F_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + F_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{dx_n}{dt} \right] dt \end{aligned}$$

A última expressão acima nos sugere a notação

$\int_{\gamma} F_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + F_n(x_1, \dots, x_n)dx_n$  para a integral de linha de  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} F_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + F_n(x_1, \dots, x_n)dx_n = \int_a^b \left[ F_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + F_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \frac{dx_n}{dt} \right] dt$$

**Exemplo 3:** Calcule  $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ , sendo  $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$  e  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,

$0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Resolução:** Temos que

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Logo

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \vec{i} + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \vec{j} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt$$

Portando

$$\int_{\gamma} \vec{F} dr = \int_0^{2\pi} dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

**Exemplo 4:** Calcule  $\int_{\gamma} -x dx + y dy$ , onde  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva de classe  $C^1$ , cuja imagem é a elipse  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ , e tal que, quando  $t$  varia de  $a$  para  $b$ ,  $\gamma(t)$  descreve a elipse no sentido anti-horário.

**Resolução:** Podemos utilizar a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \cos t \\ \frac{y}{6} = \text{sent} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 6 \text{sent} \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

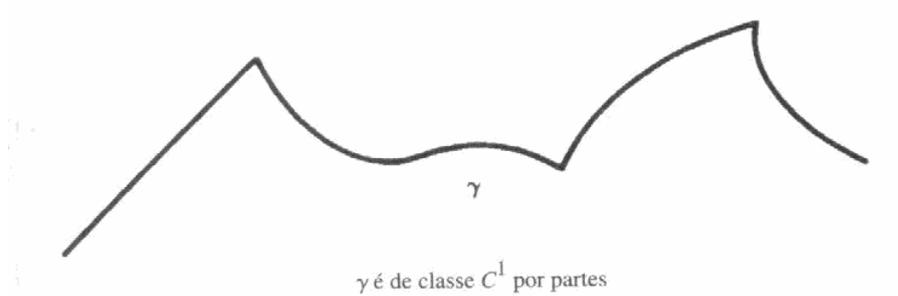
De fato, a parametrização atende às condições dadas, pois vai percorrer a curva no sentido anti-horário e  $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ .

$$\int_{\gamma} -y dx + x dy = \int_0^{2\pi} \left( -6 \text{sent} \frac{dx}{dt} + 4 \cos t \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi} (24 \text{sen}^2 t + 24 \cos^2 t) dt = 24 \int_0^{2\pi} 1 dt = 24 t \Big|_0^{2\pi} = 48\pi$$

### 3.1.4 Integral de Linha Sobre uma Curva de Classe $C^1$ por Partes

Primeiramente vamos ver o que é uma curva Classe  $C^1$  por partes.

**Definição 4:** Uma curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se diz de classe  $C^1$  por partes se for contínua e se existir uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  e curvas  $\gamma_i: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$  de classe  $C^1$ , tais que, para todo  $t$  em  $]t_{i-1}, t_i[$ ,  $\gamma(t) = \gamma_i(t)$ :



Agora podemos ver a definição de integral de linha para uma curva de Classe  $C^1$  por partes, através do seguinte resultado que enunciaremos sem demonstrar.

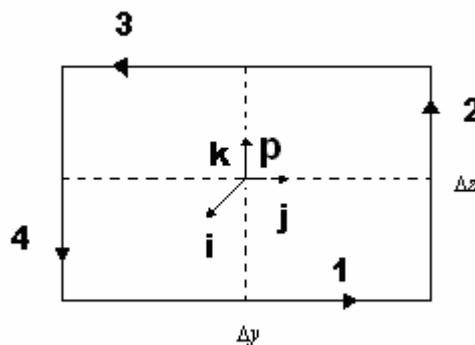
**Teorema 3:** Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial contínuo no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  uma curva de classe  $C^1$  por partes; temos que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 + \dots + \int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot d\gamma_n$$

### 3.2 Rotacional

Seja o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$  definido no aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Suponha que  $F_1, F_2$  e  $F_3$  admitam derivadas parciais em  $U$  e esta sejam contínuas na vizinhança de  $p$ . Vamos calcular o  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \int_{\gamma} F dl$ , onde  $\gamma$  é uma curva fechada de área  $\Delta S$  que circunda  $p$ . Ou seja, queremos calcular a intensidade da circulação em um ponto  $p$ .

Vamos primeiro ver a contribuição da integral em relação a eixo  $x$ .



Vamos calcular as integrais de linha em relação a 1 e 3.

$$\int_1 \vec{F} dr = \int_1 F_2 dy = \int_{y_p - \frac{\Delta y}{2}}^{y_p + \frac{\Delta y}{2}} F_2 \left( x_p, y, z_p - \frac{\Delta z}{2} \right) dy$$

e

$$\int_3 \vec{F} dr = \int_3 F_2 dy = \int_{y_p - \frac{\Delta y}{2}}^{y_p + \frac{\Delta y}{2}} \left[ -F_2 \left( x_p, y, z_p + \frac{\Delta z}{2} \right) \right] dy$$

Logo temos

$$\int_1 \vec{F} dr + \int_3 \vec{F} dr = \int_{y_p - \frac{\Delta y}{2}}^{y_p + \frac{\Delta y}{2}} \left[ F_2 \left( x_p, y, z_p - \frac{\Delta z}{2} \right) - F_2 \left( x_p, y, z_p + \frac{\Delta z}{2} \right) \right] dy$$

Mas pelo teorema do valor médio temos,

$$F_2 \left( x_p, y, z_p - \frac{\Delta z}{2} \right) - F_2 \left( x_p, y, z_p + \frac{\Delta z}{2} \right) = \frac{\partial F_2}{\partial z} \left( x_p, y, z_p - \frac{\Delta z}{2} \theta \right) \Delta z \text{ com } \theta \in (-1, 1)$$

Portanto

$$\int_1 \vec{F} dr + \int_3 \vec{F} dr = \int_{y_p - \frac{\Delta y}{2}}^{y_p + \frac{\Delta y}{2}} \left[ \frac{\partial F_2}{\partial z} \left( x_p, y, z_p - \frac{\Delta z}{2} \theta \right) \Delta z \right] dy$$

Note ainda que se tomarmos  $\nabla \phi_1 = F_2$  temos:

$$\int_{y_p - \frac{\Delta y}{2}}^{y_p + \frac{\Delta y}{2}} F_2(x, y, z) dy = \phi \left( x, y_p - \frac{\Delta y}{2}, z \right) - \phi \left( x, y_p + \frac{\Delta y}{2}, z \right)$$

Mas pelo teorema do valor médio temos,

$$\phi \left( x, y_p - \frac{\Delta y}{2}, z \right) - \phi \left( x, y_p + \frac{\Delta y}{2}, z \right) = F_2 \left( x, y_p - \frac{\Delta y}{2} \theta, z \right) \Delta y \text{ com } \theta \in (-1, 1)$$

Então

$$\int_1 \vec{F} dr + \int_3 \vec{F} dr = \int_{y_p - \frac{\Delta y}{2}}^{y_p + \frac{\Delta y}{2}} \left[ -\frac{\partial F_2}{\partial z} \left( x_p, y, z_p + \frac{\Delta z}{2} \theta \right) \Delta z \right] dy =$$

$$= -\frac{\partial F_2}{\partial z} \left( x_p, y_p + \frac{\Delta y}{2}, z_p + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

De forma similar chegamos que

$$\int_2 \vec{F} dr + \int_4 \vec{F} dr = \frac{\partial F_3}{\partial y} \left( x_p, y_p + \frac{\Delta y}{2}, z_p + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

Logo

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{i}}{\Delta S} \int_{\gamma} F dr = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y}(p) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(p) \right) \vec{i}$$

De forma análoga chegamos a

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{j}}{\Delta S} \int_{\gamma} F dr = \left( \frac{\partial F_1}{\partial z}(p) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(p) \right) \vec{j}$$

e

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{k}}{\Delta S} \int_{\gamma} F dr = \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(p) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(p) \right) \vec{k}$$

Portanto temos que

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \int_{\gamma} F dr = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y}(p) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(p) \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z}(p) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(p) \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(p) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(p) \right) \vec{k}$$

Agora vamos enunciar a seguinte definição:

**Definição 5:** Seja  $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$  definido no aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  um campo vetorial. Suponhamos que  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  admitam derivadas parciais em  $U$ . O rotacional de  $\vec{F}$  é o campo vetorial definido em  $U$  e dado por

$$\text{rot}\vec{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

O rotacional ainda pode ser representado pelo produto vetorial:

$$\text{rot}\vec{F} = (\nabla \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Pois

$$\text{rot}\vec{F} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \vec{k} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \vec{k} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \vec{j} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \vec{i} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

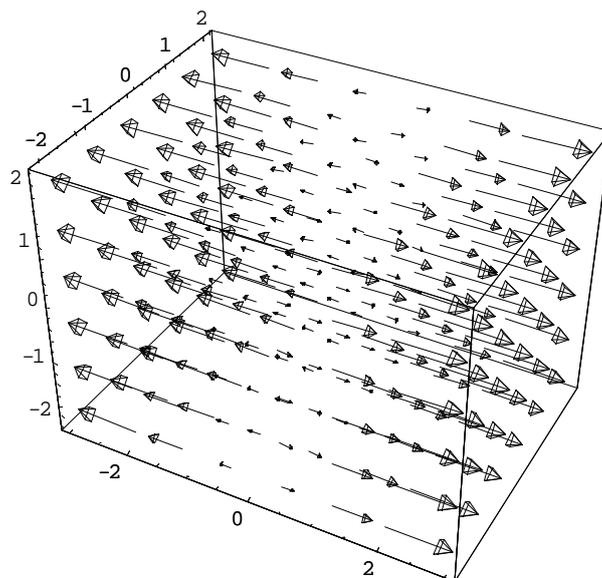
O rotacional está diretamente ligado a rotações, ou seja, o rotacional mostra a tendência de um objeto em um fluido (por exemplo) a girar ao redor de um ponto.

**Exemplo 5:** Calcule o  $\text{rot}\vec{F}$  de  $F(x, y, z) = x\vec{i}$

**Resolução:**

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(0)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial(x)}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$$

Como  $\text{rot}\vec{F} = 0$  podemos supor que não haverá nenhum vetor em nenhum ponto que indique uma rotação.

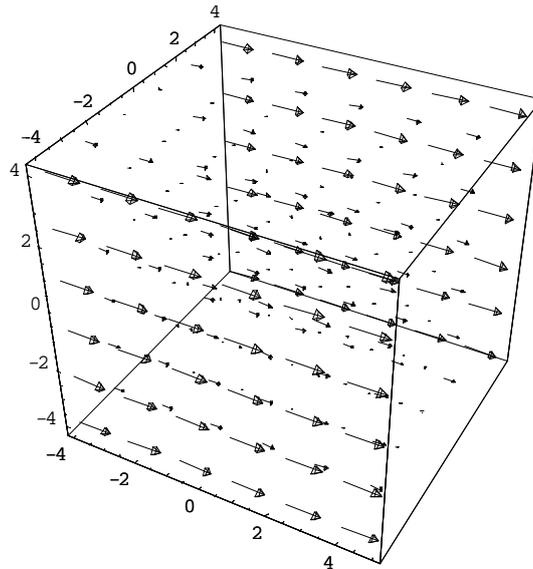


Campo vetorial  $F(x, y, z) = x\vec{i}$

**Exemplo 6:** Calcule o  $\text{rot}\vec{F}$  de  $F(x, y, z) = y^2\vec{i}$  :

**Resolução:**

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(0)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial(y^2)}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y} \right) \vec{k} = 2y\vec{k}$$



Campo vetorial  $F(x, y, z) = y^2\vec{i}$

Note que neste campo temos que o fluxo na direção  $\vec{i}$  depende do valor da coordenada  $y$ . Logo para  $y \neq 0$  e se tivermos um objeto indo na direção do eixo  $z$ , este estará sofrendo uma influência do campo vetorial na direção  $\vec{i}$ .

### 3.3 Campos Conservativos

**Definição 6:** Um campo vetorial  $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  denomina-se conservativo se existe uma função diferenciável  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla\varphi = \vec{F} \text{ em } U.$$

Uma função  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz esta definição denomina-se função potencial de  $\vec{F}$ .

**Teorema 4.** Seja  $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$  no aberto  $U$ . Uma condição necessária para  $\vec{F}$  ser conservativo é que  $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$ .

**Demonstração:**

Seja  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ . Supondo  $\vec{F}$  conservativo, existirá  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla\varphi = \vec{F} \text{ em } U$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = P \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = R \end{cases} \text{ em } U$$

Como  $\vec{F}$  é de classe  $C^1$ , resulta que  $\varphi$  é de classe  $C^2$ . Temos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pelo fato de  $\varphi$  ser de classe  $C^2$ , segue que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \text{ (teorema de Schwartz)}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ em } U.$$

De modo análogo, conclui-se que

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \text{ em } U.$$

$$\text{Logo, } \left( \text{rot}\vec{F} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0} \text{ em } U.$$

**Teorema 5.** Se  $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  for um campo vetorial contínuo e conservativo, se  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função potencial para  $\vec{F}$  ( $\nabla\varphi = \vec{F}$ ) e se  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  for uma curva de classe  $C^1$ , com  $A = \gamma(a)$  e  $B = \gamma(b)$ , então

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\gamma = \int_{\gamma} \nabla\varphi \cdot d\gamma = \varphi(B) - \varphi(A)$$

**Demonstração:** De fato, sendo  $\varphi$  um função potencial para  $\vec{F}$  e sendo  $\vec{F}$  contínua, resulta que  $\varphi$  é de classe  $C^1$  em  $U$ . Pela regra da Cadeia

$$\frac{d(\varphi(\gamma(t)))}{dt} = \langle \nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Daí

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\gamma = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = [\varphi(\gamma(t))]_a^b = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Portanto

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\gamma = \int_{\gamma} \nabla\varphi \cdot d\gamma = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Obs: Sempre que quisermos calcular uma integral de linha usando este teorema devemos primeiro verificar se o campo vetorial é um campo conservativo.

Vejam agora um exemplo de um campo que não é conservativo, muito embora possua rotacional igual à zero.

**Exemplo 7:** Temos que  $\int_{\gamma} \vec{F} dr = 2\pi$ , sendo  $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$  em

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  e  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Temos ainda que  $\text{rot}\vec{F} = 0$

**Resolução:** De fato

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial 0}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) \vec{k} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) \vec{k} - \frac{\partial 0}{\partial x} \vec{j} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) \vec{i} = \\ &= \left( \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k} - \left( \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k} = 0 \end{aligned}$$

Mas  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$ . Então pelo fato  $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ , temos que  $\int_{\gamma} \vec{F} d\gamma = 0$  (pelo teorema 5), pois  $\int_{\gamma} \vec{F} d\gamma = \int_{\gamma} \nabla \varphi \cdot d\gamma = \varphi(x, y) \Big|_0^{2\pi} = 0$ .

Logo contradiz o teorema e portanto  $\vec{F}$  não pode ser um campo conservativo.

### 3.4 Independência do Caminho de Integração

Seja  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo no aberto  $U$ , com  $U$  conexo por caminhos<sup>4</sup>. A integral de linha  $\int \vec{F} \cdot \vec{dr}$  é independente do caminho de integração em  $U$  se, quaisquer que forem os pontos A e B de  $U$ , o valor da integral  $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr}$  permanecer o mesmo para toda curva  $C^1$  por partes  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  com  $\gamma(a) = A$  e  $\gamma(b) = B$ . Se  $\int \vec{F} \cdot \vec{dr}$  for independente do caminho de integração em  $U$ , a notação

$$\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

poderá ser utilizada para indicar a integral de linha de  $\vec{F}$  sobre uma curva qualquer  $C^1$  por partes  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  com  $\gamma(a) = A$  e  $\gamma(b) = B$ .

---

<sup>4</sup>  $U$  conexo por caminhos significa que, quaisquer que sejam os pontos A e B de  $U$ , existe uma curva  $C^1$  por partes contida em  $U$  e com extremidades A e B.

### 3.5 Existência da Função potencial

**Teorema 6:** (Existência de função potencial) Seja  $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo no aberto conexo por caminhos  $U$ . Suponhamos que  $\int \vec{F} \cdot \vec{dr}$  seja independente do caminho de integração em  $U$ . Seja  $A \in U$ . Então a função  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi(X) = \int_A^X \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

é tal que  $\nabla \varphi = \vec{F}$  em  $U$ .

**Demonstração:** Seja  $\vec{F} = F_1 \vec{i}_1 + \dots + F_n \vec{i}_n$ . Vamos provar que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = F_i \text{ com } i = 1, \dots, n$$

Seja  $P = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ; como  $U$  é aberto, existe uma bola de centro  $P$  contida em  $U$ . Tomemos  $h > 0$  tal que o segmento de extremidades  $P$  e  $P + h\vec{i}_1 = (x_1 + h, x_2, \dots, x_n)$  esteja contido nesta bola. Temos:

$$\frac{\varphi(P + h\vec{i}_1) - \varphi(P)}{h} = \frac{\int_A^{P+h\vec{i}_1} \vec{F} \cdot d\gamma - \int_A^P \vec{F} \cdot d\gamma}{h} = \frac{\int_P^{P+h\vec{i}_1} \vec{F} \cdot d\gamma}{h}$$

Seja  $\gamma(t) = P + t\vec{i}_1$ ,  $t \in [0, h]$ ;  $\gamma$  é uma curva ligando  $P$  a  $P + h\vec{i}_1$ . Então

$$\int_P^{P+h\vec{i}_1} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_0^h \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Como  $\gamma'(t) = \vec{i}_1$  e  $\vec{F}(\gamma(t)) = F_1(\gamma(t))\vec{i}_1 + \dots + F_n(\gamma(t))\vec{i}_n$ , resulta

$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F_1(\gamma(t))$ . Assim,

$$\frac{\varphi(P + h\vec{i}_1) - \varphi(P)}{h} = \frac{\int_0^h F_1(\gamma(t)) dt}{h}$$

Aplicando L'Hospital, obtemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(P + h\vec{i}_1) - \varphi(P)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left( \int_0^k F_1(\gamma(t)) dt \right)'}{(h)'} \\ \left( \int_0^h F_1(\gamma(t)) dt \right)' = \frac{d}{dh} \left( \int_0^h F_1(\gamma(t)) dt \right) \text{ e } h' = \frac{d}{dh}(h) = 1$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(P + h\vec{i}_1) - \varphi(P)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} F_1(\gamma(h)) = F_1(\gamma(0))$$

Ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(P + h\vec{i}_1) - \varphi(P)}{h} = F_1(P)$$

Com  $\gamma(0) = P$ , de modo análogo, prova-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(P + h\vec{i}_1) - \varphi(P)}{h} = F_1(P)$$

Portanto  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = F_1$  em  $U$ . Com raciocínio idêntico, conclui-se que vale a relação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = F_j \text{ para todo } j = 1, \dots, n.$$

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(P + h\vec{i}_j) - \varphi(P)}{h} = F_j(P) \text{ para } j = 1, \dots, n$$

Portanto,  $\nabla \varphi = F$  em  $U$ .

### 3.6 Condições Necessárias e Suficientes para um Campo Vetorial ser Conservativo

**Teorema 7:** Seja  $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial contínuo no aberto conexo por caminhos  $U$ . São equivalentes as afirmações:

I)  $\vec{F}$  é conservativo

II)  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = 0$  para toda curva  $\gamma$ , fechada,  $C^1$  por partes, com imagem de  $\gamma$  contida em  $U$ .

III)  $\int \vec{F} \cdot d\gamma$  é independente do caminho de integração em  $U$ .

## Demonstração

(I)  $\Rightarrow$  (II)

Como  $\vec{F}$  é conservativo, existe  $\varphi:U \rightarrow R$  tal que  $\nabla\varphi = \vec{F}$  em  $U$ ; daí se  $\gamma:[a,b] \rightarrow U$  for fechada ( $\gamma(a) = \gamma(b)$ ) resulta

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \oint_{\gamma} \nabla\varphi \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0$$

(II)  $\Rightarrow$  (III)

Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial tal que  $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = 0$  para toda curva  $\gamma$ , fechada,  $C^1$  por partes, com imagem de  $\gamma$  contida em  $U$ . E sejam  $A, B$  dois pontos distintos.

Considere  $\gamma_1, \gamma_2:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = A$$

e

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = B.$$

Então temos que :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \langle F(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t) \rangle dt + \int_b^a \langle F(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b \langle F(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t) \rangle dt - \int_a^b \langle F(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle dt = \int_{\gamma_1} \vec{F} dr - \int_{\gamma_2} \vec{F} dr \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot dr = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot dr$$

(III)  $\Rightarrow$  (I)

Como  $\int \vec{F} \cdot d\gamma$  é independente do caminho de integração em  $U$  e pelo teorema da existência da função potencial (teorema 6), a função  $\varphi:U \rightarrow R$  dada por

$$\varphi(X) = \int_A^X \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

é tal que  $\nabla\varphi = \vec{F}$  em  $U$ .

Logo  $\vec{F}$  é conservativo.

### 3.7 Conjunto Simplesmente Conexo

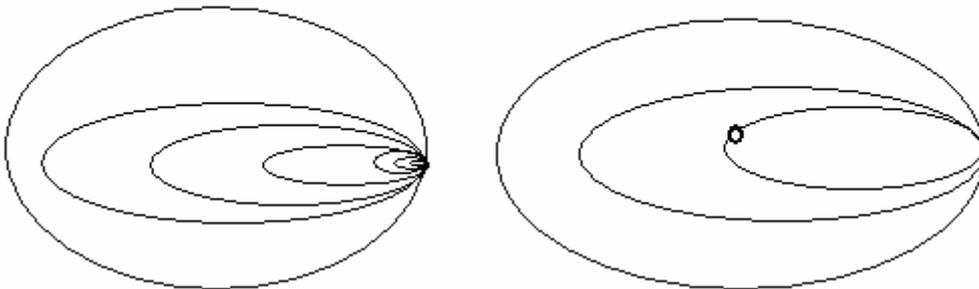
**Definição 7:** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , conexo por caminhos. Dizemos que  $U$  é simplesmente conexo se, para toda curva fechada contínua  $\gamma : [a,b] \rightarrow U$ , existir uma família  $\gamma_s$ ,  $s \in [0,1]$ , de curvas fechadas com  $\gamma_s : [a,b] \rightarrow U$ , tais que

- (i)  $\gamma_0 = \gamma$
- (ii)  $H(s,t) = \gamma_s(t)$  é contínua em  $[0,1] \times [a,b]$
- (iii) a imagem de  $\gamma_1$  é um ponto de  $U$ .

**Exemplo 8:** O  $\mathbb{R}^n$  é simplesmente conexo, pois é conexo por caminhos e se  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva contínua fechada, tomando-se  $\gamma_s(t) = (1-s)\gamma(t)$ , com  $s \in [0,1]$  e  $t \in [a,b]$ , tem-se:

- (i)  $\gamma_0 = \gamma$
- (ii)  $H(s,t) = (1-s)\gamma(t)$ ,  $0 \leq s \leq 1$  e  $a \leq t \leq b$ , é contínua.
- (iii)  $\gamma_1 = \vec{0}$ , para todo  $t \in [a,b]$  e logo um ponto de  $\mathbb{R}^n$ .

Uma forma de entendermos o que é um conjunto simplesmente conexo é imaginarmos um “laço” e irmos fechando este laço até que não fique nada dentro deste laço. Caso o “laço” fique preso em algum “buraco” este conjunto não será simplesmente conexo.



O próximo teorema será enunciado sem demonstração.

**Teorema 7:** Seja  $\vec{F}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$  no aberto  $U$ . Nestas condições, se  $U$  for simplesmente conexo e  $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$ , então  $\vec{F}$  será conservativo.

**Exemplo 9:** Vamos ver que  $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  não é simplesmente conexo. Seja

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$$

Temos que:

$$\text{rot}\vec{F} = 0 \text{ em } U$$

Mas já sabemos que  $\vec{F}$  não é conservativo. Logo  $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  não pode ser simplesmente conexo.

### 3.8 Integral de Superfície

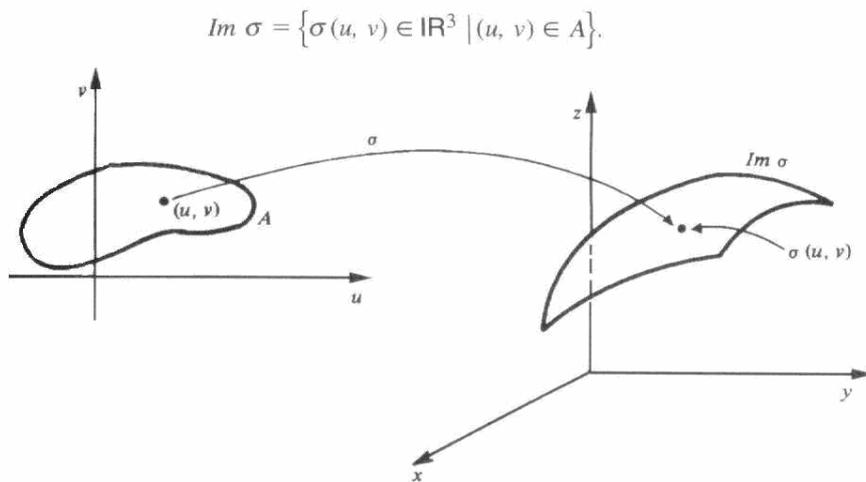
#### 3.8.1 Parametrização de Superfície

Uma superfície parametrizada é uma transformação  $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$  e as componentes de  $\sigma$  são dadas por  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  e  $z = z(u, v)$ . Ou ainda:

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in U.$$

O lugar geométrico descrito por  $\sigma(u, v)$ , quando  $(u, v)$  percorre  $U$ , é a imagem de  $\sigma$ .

$$\text{Im } \sigma = \{\sigma(u, v) \in \mathbb{R}^3 / (u, v) \in U\}$$



### 3.8.2 Integral de Superfície de uma Função a Valores Reais

Seja  $K$  um compacto<sup>5</sup> de  $\mathbb{R}^2$  com interior não-vazio e de fronteira de conteúdo nulo<sup>6</sup>; seja  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  em  $K$ , regular e injetora no interior de  $K$ .

Seja  $w = f(x, y, z)$  uma função a valores reais, definida e contínua na imagem de  $\sigma$ .

Queremos calcular um certo tipo de “média ponderada” dos valores de  $f$  ao longo de uma superfície, com “pesos” dados por elementos de área.

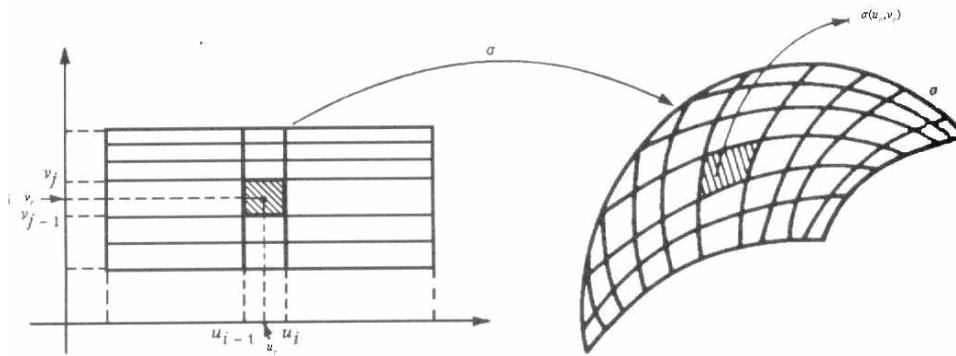
Seja  $Q = \{(u_i, v_j) \mid i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m\}$  uma partição de  $K$ ; vamos supor que  $K$  seja um retângulo de lados paralelos aos eixos para facilitar a análise.

<sup>5</sup> Um compacto em  $\mathbb{R}^n$  é um sub-conjunto fechado e limitado.

<sup>6</sup> Dizemos que um conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  é de conteúdo nulo se  $\forall \varepsilon > 0$ , existe uma coleção  $\{I_1, \dots, I_k\}$  de paralelepípedos tal que :

- i)  $X \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_k$
- ii)  $\sum_{i=1}^k \text{volume}(I_i) < \varepsilon$ .

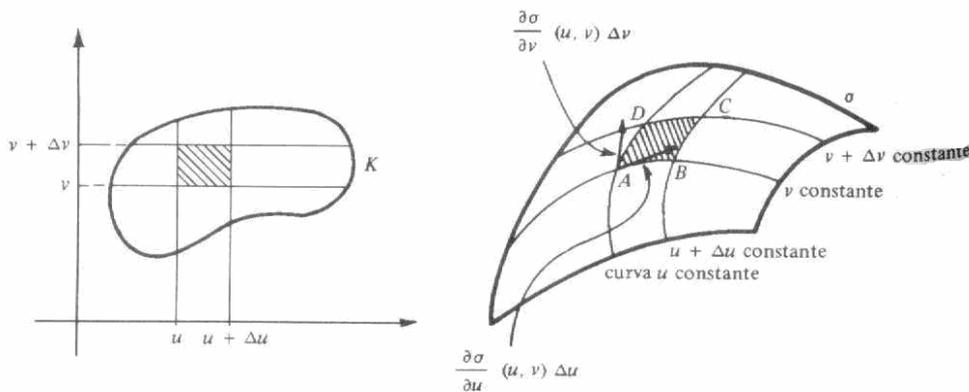
Intuitivamente dizer que a fronteira de  $K$  é de conteúdo nulo é dizer que esta não contribui para o volume do conjunto  $K$ .



Queremos calcular o limite de somas da forma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\sigma(u_p, v_p)) \Delta S_{ij}$$

Quando o elemento de área  $\Delta S_{ij}$  se torna arbitrariamente pequeno. Temos ainda que



$$\Delta S_{ij} \approx \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u^*, v^*) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u^*, v^*) \right\| \Delta u \Delta v, \text{ com } u^* \in (u, u + \Delta u) \text{ e } v^* \in (v, v + \Delta v)$$

Agora voltemos à somatória. Fazendo  $\Delta u \rightarrow 0$  e como  $u_p, u^* \in (u, u + \Delta u)$ , teremos que  $u_p \rightarrow u$  e  $u^* \rightarrow u$ . E com,  $\Delta v \rightarrow 0$ , pelo mesmo motivo teremos  $v_p \rightarrow v$  e  $v^* \rightarrow v$ . Logo temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\sigma(u_p, v_p)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u^*, v^*) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u^*, v^*) \right\| \Delta u \Delta v = \\ = \iint_K f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv. \end{aligned}$$

**Definição 8:** Seja  $K$  um compacto de  $\mathbb{R}^2$ , com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio; seja  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de classe  $C^1$  em  $K$ , regular e injetora no interior de  $K$ .

Seja  $w = f(x, y, z)$  uma função a valores reais, definida e contínua na imagem de  $\sigma$ . Definimos a integral de superfície de  $f$  sobre  $\sigma$  por

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_K f(\sigma(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv$$

onde  $dS = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv$  é chamado de elemento de área.

**Exemplo 10:** Calcule a integral de superfície  $\iint_S x^2 dS$ , onde  $S$  é a esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Resolução:** Utilizaremos a seguinte representação paramétrica

$$x = \text{sen}\phi \cos \theta \quad y = \text{sen}\phi \text{sen}\theta \quad z = \cos \phi \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Pois para todo  $\phi$  e  $\theta$  temos que  $\text{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \phi \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \phi = 1$

Temos ainda

$$\begin{aligned} r_{\phi} \times r_{\theta} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \text{sen}\theta & -\text{sen}\phi \\ -\text{sen}\phi \text{sen}\theta & \text{sen}\phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \text{sen}^2 \phi \cos \theta i + \text{sen}^2 \phi \text{sen}\theta j + \text{sen}\phi \cos \theta k \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} |r_{\phi} \times r_{\theta}| &= \sqrt{\text{sen}^4 \phi \cos^2 \theta + \text{sen}^4 \phi \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi} = \\ &= \sqrt{\text{sen}^4 \phi + \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi} = \sqrt{\text{sen}^2 \phi} = \text{sen}\phi \end{aligned}$$

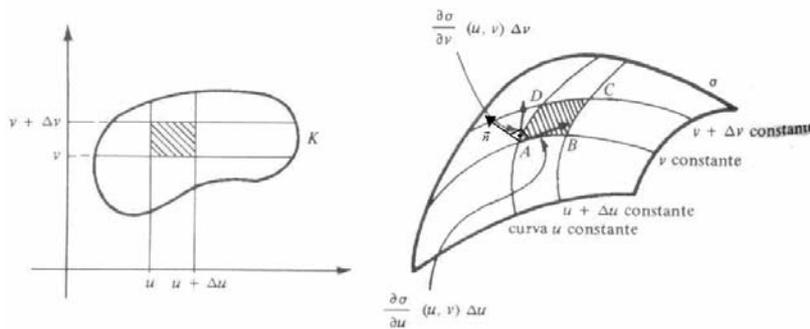
Portanto

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 dS &= \iint_D (\text{sen}\phi \cos \theta) \cdot |r_{\phi} \times r_{\theta}| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \phi \cos^2 \theta \text{sen}\phi d\phi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\pi} \text{sen}^3 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \int_0^{\pi} (\text{sen}\phi - \text{sen}\phi \cos^2 \phi) d\phi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right]_0^{2\pi} \left[ -\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3}$$

### 3.8.3 Integral de Superfície de um Campo Vetorial

Seja  $\sigma : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ , onde  $K$  é um compacto de conteúdo não-vazio e com fronteira de conteúdo nulo. Suponhamos que  $\sigma$  seja injetora e regular no interior de  $K$ . Seja  $\vec{F} : \operatorname{Im} \sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial contínuo



Queremos a projeção de  $\vec{F}$  perpendicular a superfície. Então basta tomarmos o produto escalar de  $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$  onde:

$$\vec{n}(\sigma(u, v)) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$$

Temos que  $\vec{n}$  é perpendicular a  $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$  e  $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$  pela propriedade do produto vetorial e, portanto, perpendicular à superfície  $\sigma$ .

Então basta calcularmos o limite quando  $\Delta u \rightarrow 0$  e  $\Delta v \rightarrow 0$  da seguinte somatória:

$$\lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle f(\sigma(u_p, v_p)), \vec{n}(\sigma(u, v)) \rangle \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u^*, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v^*) \right\| \Delta u \Delta v =$$

Observe que  $u_p \rightarrow u$ ,  $u^* \rightarrow u$  e  $v_p \rightarrow v$  e  $v^* \rightarrow v$ , pelo mesmo motivo já exposto anteriormente. Logo temos:

$$\lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\langle f(\sigma(u_p, v_p)), \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \right\rangle \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u^*, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v^*) \right\| \Delta u \Delta v =$$

$$\iint_{\sigma} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \left\langle \iint_K \vec{F}(\sigma(u, v)), \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) \right\rangle dudv$$

Ainda temos que, pelo fato de supormos  $\vec{F}$  contínua em  $\text{Im } \sigma$ ,  $\sigma$  ser de classe  $C^1$  e  $K$  com fronteira de conteúdo nula, a integral  $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS$  existe.

Logo chegamos à seguinte definição:

**Definição 9:** Seja  $\sigma : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ , onde  $K$  é um compacto com interior não-vazio e com fronteira de conteúdo nulo. Suponhamos que  $\sigma$  seja injetora e regular no interior de  $K$ . Seja  $\vec{F} : \text{Im } \sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial contínuo. Então a integral de superfície de  $\vec{F}$  sobre  $\sigma$  é

$$\iint_{\sigma} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \iint_K \left\langle \vec{F}(\sigma(u, v)), \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) \right\rangle dudv$$

Essa integral é também chamada de fluxo de  $\vec{F}$  através de  $\sigma$ .

**Exemplo 11:** Calcule o fluxo de

$$\vec{v}(x, y, z) = 10i + (x^2 + y^2)j + 2xyk$$

através da superfície

$$\sigma \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u^2 - v^2 \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1 \text{ e } 0 \leq v \leq 1.$$

**Resolução:**  $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_K \vec{v}(\sigma(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) dudv$

onde  $K$  é o retângulo  $0 \leq u \leq 1$  e  $0 \leq v \leq 1$ .

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = 2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k}$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_K (10i + (u^2 + v^2)j + 2uvk) \cdot (2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k}) dudv =$$

$$= \iint_k (20u + 2u^2v + 2v^3 - 2uv) dudv$$

Ou seja,

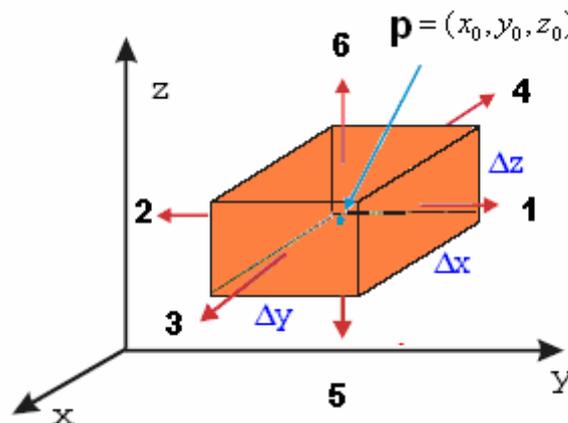
$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 (20u + 2u^2v + 2v^3 - 2uv) du \right] dv = \int_0^1 \left[ 10u^2 + \frac{2}{3}u^3v + 2v^3u - u^2v \right]_0^1 dv \\ &= \int_0^1 \left( 10 - \frac{1}{3}v + 2v^3 \right) dv = \left[ 10v - \frac{1}{6}v^2 + \frac{2}{4}v^4 \right]_0^1 = 10 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{31}{3}. \end{aligned}$$

### 3.9 Divergente

Vamos agora calcular o fluxo de um campo vetorial através de um paralelepípedo quando seu volume tende a zero. Ou seja, vamos buscar como se comporta o fluxo de um campo vetorial por unidade de volume em um ponto  $p = (x_0, y_0, z_0)$ .

Seja o campo vetorial  $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$  definido no aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Suponha que  $F_1, F_2$  e  $F_3$  admitam derivadas parciais em  $U$  e  $\vec{F}$  seja contínua na vizinhança de  $r$ . Vamos calcular o  $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS$ , onde  $S$  é a superfície fechada que envolve  $p$ .

Construa o paralelepípedo tal que  $r = (x_0, y_0, z_0)$  esteja no centro da figura.



Temos que a contribuição do fluxo vetorial das faces perpendiculares ao eixo x, faces 1 e 2 respectivamente, é:

$$\left( \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} F_1(x, y, z) dx \right) \Delta y \Delta z$$

e

$$-\left(\int_{x_0+\frac{\Delta x}{2}}^{x_0-\frac{\Delta x}{2}} F_1(x, y, z) \vec{i} dx\right) \Delta y \Delta z$$

O sinal da face 2 deve ser invertido, pois caso contrário teremos componentes das faces 1 e 2 se anulando, devido a face 1 estar na direção  $i$  e a face 2 na direção  $-i$ .

Já vimos quando estudamos o rotacional que

$$\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} F_1(x, y, z) dx = F\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \theta, y, z\right) \Delta x \text{ com } \theta \in (-1, 1)$$

Mas quando  $\Delta x \rightarrow 0$  teremos que

$$\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} F_1(x, y, z) dx = F\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta x$$

Logo

$$\left(\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}} F_1(x, y, z) \vec{i} dx\right) \Delta y \Delta z \approx F_1\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta x$$

E de forma análoga chegamos que

$$-\left(\int_{x_0+\frac{\Delta x}{2}}^{x_0-\frac{\Delta x}{2}} F_1(x, y, z) \vec{i} dx\right) \Delta y \Delta z \approx F_1\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta x$$

Pelo fato de existirem as derivadas parciais temos

$$\left[F_1\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - F_1\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\right] \Delta y \Delta z = \frac{\partial F_1}{\partial x}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \theta_1, y, z\right) \Delta x \Delta y \Delta z + \rho_1 \Delta x \Delta y \Delta z$$

onde  $\theta_1 \in (-1, 1)$

De forma similar chegamos a:

$$\left[F_2\left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z\right) - F_2\left(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z\right)\right] \Delta x \Delta z = \frac{\partial F_2}{\partial y}\left(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2} \theta_2, z\right) \Delta x \Delta y \Delta z + \rho_2 \Delta x \Delta y \Delta z$$

onde  $\theta_2 \in (-1, 1)$  e

$$\left[ F_3 \left( x, y, z_0 + \frac{\Delta z}{2} \right) - F_3 \left( x, y, z_0 - \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \Delta x \Delta y = \frac{\partial F_3}{\partial z} \left( x, y, z_0 + \frac{\Delta z}{2} \theta_3 \right) \Delta x \Delta y \Delta z + \rho_3 \Delta x \Delta y \Delta z$$

onde  $\theta_3 \in (-1, 1)$

Logo

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \langle F, n \rangle dS = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \left( p + i \frac{\Delta x}{2} \theta_1 \right) + \frac{\partial F_2}{\partial y} \left( p + j \frac{\Delta y}{2} \theta_2 \right) + \frac{\partial F_3}{\partial z} \left( p + k \frac{\Delta z}{2} \theta_3 \right) \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \langle F, n \rangle dS &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x} \left( p + i \frac{\Delta x}{2} \theta_1 \right) + \frac{\partial F_2}{\partial y} \left( p + j \frac{\Delta y}{2} \theta_2 \right) + \frac{\partial F_3}{\partial z} \left( p + k \frac{\Delta z}{2} \theta_3 \right) \right] = \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(p) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(p) \end{aligned}$$

Note ainda que  $\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \rho_1(\Delta x) = 0$ ,  $\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \rho_2(\Delta y) = 0$  e  $\lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \rho_3(\Delta z) = 0$  pelo

fato da existência das derivadas parciais.

Agora vamos enunciar a seguinte definição

**Definição 10:** Seja  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  um campo vetorial definido no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e suponhamos que as componentes  $F_1, F_2, \dots, F_n$  admitem derivadas parciais em  $U$ .

função

$$\operatorname{div} \vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Denomina-se *divergente* de  $\vec{F}$ .

Ainda podemos representar o divergente de  $\vec{F}$  como o “produto escalar” do vetor  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  pelo campo vetorial  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ , ou seja,

$$\operatorname{div} \vec{F} = \langle \nabla, \vec{F} \rangle = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), (F_1, F_2, \dots, F_n) \right\rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

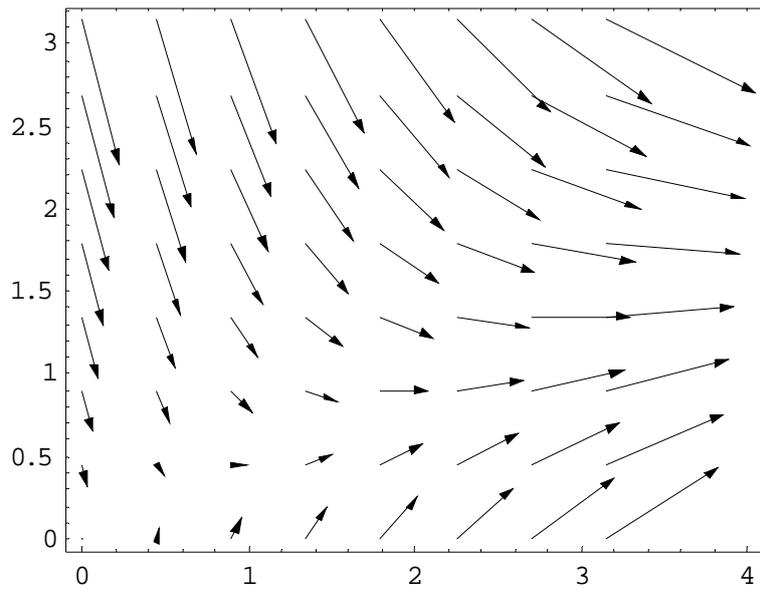
O divergente pode ser interpretado como uma taxa de variação de área (ou volume) por unidade de tempo e unidade de área (ou volume) no ponto  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Quando  $\text{div}\vec{F} = 0$  temos que o fluxo no ponto  $P$  calculado é constante. Caso  $\text{div}\vec{F} > 0$  o fluxo está “saindo” de  $P$  e por último se  $\text{div}\vec{F} < 0$  o fluxo está “chegando” em  $P$ .

**Exemplo 12:** Seja  $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y, 2x - 4y)$ . Calcule  $\text{div}\vec{F}$

**Resolução:**

É importante notar que o divergente é um número. Vejamos agora o diagrama do campo vetorial.

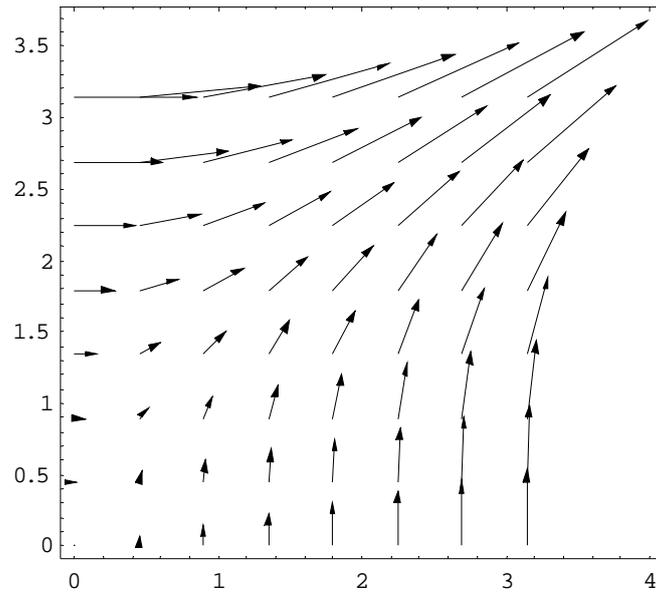


Campo vetorial  $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y, 2x - 4y)$

**Exemplo 13:** Seja  $\vec{F}(x, y) = (y^2, 2x)$ . Calcule  $\text{div}\vec{F}$

**Resolução:**

$$\text{div}\vec{F}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0.$$



Campo vetorial  $\vec{F}(x, y) = (y^2, 2x)$

### 3.10 Identidades Envolvendo Gradiente, Rotacional e Divergente.

Consideremos o campo escalar  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e suponhamos que  $\varphi$  admite derivadas parciais de 2ª ordem no aberto  $W$ . O campo escalar

$$\nabla^2 \varphi: W \rightarrow \mathbb{R}$$

Dado por

$$\nabla^2 \varphi = \langle \nabla, \nabla \varphi \rangle$$

Denomina-se laplaciano de  $\varphi$ .

Assim, o laplaciano de  $\varphi$  nada mais é do que o divergente do gradiente de  $\varphi$ .

Como

$$\nabla^2 \varphi = \langle \nabla, \nabla \varphi \rangle = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) \right\rangle = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}$$

Resulta que

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} = \text{div}(\nabla \varphi)$$

Vejam agora algumas outras identidades envolvendo gradiente, divergente e rotacional. Admitimos que as derivadas parciais apropriadas existam e sejam contínuas,  $\varphi$  é um campo escalar e  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  são campos vetoriais.

$$\text{a) } \text{rot}(\vec{U} + \vec{V}) = \text{rot}\vec{U} + \text{rot}\vec{V}$$

$$\vec{U} = P_u(x, y, z)\vec{i} + Q_u(x, y, z)\vec{j} + R_u(x, y, z)\vec{k}$$

$$\vec{V} = P_v(x, y, z)\vec{i} + Q_v(x, y, z)\vec{j} + R_v(x, y, z)\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{U} + \text{rot}\vec{V} &= \left( \frac{\partial R_u}{\partial y} - \frac{\partial Q_u}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P_u}{\partial z} - \frac{\partial R_u}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q_u}{\partial x} - \frac{\partial P_u}{\partial y} \right) \vec{k} + \\ &+ \left( \frac{\partial R_v}{\partial y} - \frac{\partial Q_v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P_v}{\partial z} - \frac{\partial R_v}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q_v}{\partial x} - \frac{\partial P_v}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \left( \left( \frac{\partial R_u}{\partial y} + \frac{\partial R_v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial Q_u}{\partial z} + \frac{\partial Q_v}{\partial z} \right) \right) \vec{i} + \left( \left( \frac{\partial P_u}{\partial z} + \frac{\partial P_v}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial R_u}{\partial x} + \frac{\partial R_v}{\partial x} \right) \right) \vec{j} + \\ &+ \left( \left( \frac{\partial Q_u}{\partial x} + \frac{\partial Q_v}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial P_u}{\partial y} + \frac{\partial P_v}{\partial y} \right) \right) \vec{k} = \text{rot}(\vec{U} + \vec{V}) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \text{div}(\vec{U} + \vec{V}) = \text{div}\vec{U} + \text{div}\vec{V}$$

$$\vec{U} = U_1(x, y, z)\vec{i}_1 + \dots + U_n(x, y, z)\vec{i}_n$$

$$\vec{V} = V_1(x, y, z)\vec{i}_1 + \dots + V_n(x, y, z)\vec{i}_n$$

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{U} + \text{div}\vec{V} &= \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U_n}{\partial x_n} \right) + \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) + \dots + \left( \frac{\partial U_n}{\partial x_n} + \frac{\partial V_n}{\partial x_n} \right) = \text{div}(\vec{U} + \vec{V}) \end{aligned}$$

$$\text{c) } \text{div}\varphi\vec{U} = \varphi\text{div}\vec{U} + \nabla\varphi \cdot \vec{U}$$

$$\vec{U} = U_1(x, y, z)\vec{i}_1 + \dots + U_n(x, y, z)\vec{i}_n$$

$$\text{div}\varphi\vec{U} = \frac{\partial(\varphi U_1)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial(\varphi U_n)}{\partial x_n} =$$

Aplicando a derivada parcial em cada componente temos

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\varphi \partial U_1}{\partial x_1} + \frac{U_1 \partial \varphi}{\partial x_1} \right) + \dots + \left( \frac{\varphi \partial U_n}{\partial x_n} + \frac{U_n \partial \varphi}{\partial x_n} \right) = \\
&= \left( \frac{\varphi \partial U_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\varphi \partial U_n}{\partial x_n} \right) + \left( \frac{U_1 \partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + \frac{U_n \partial \varphi}{\partial x_n} \right) = \varphi \operatorname{div} \vec{U} + \nabla \varphi \cdot \vec{U}
\end{aligned}$$

d)  $\operatorname{rot} \varphi \vec{U} = \varphi \operatorname{rot} \vec{U} + \nabla \varphi \times \vec{U}$

$$\vec{U} = P_u(x, y, z) \vec{i} + Q_u(x, y, z) \vec{j} + R_u(x, y, z) \vec{k}$$

$$\operatorname{rot} \varphi \vec{U} = \left( \frac{\partial \varphi R}{\partial y} - \frac{\partial \varphi Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \varphi P}{\partial z} - \frac{\partial \varphi R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial \varphi Q}{\partial x} - \frac{\partial \varphi P}{\partial y} \right) \vec{k} =$$

Calculando a derivada parcial em cada componente temos

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\varphi \partial R}{\partial y} + \frac{R \partial \varphi}{\partial y} - \frac{\varphi \partial Q}{\partial z} - \frac{Q \partial \varphi}{\partial z} \right) \vec{i} + \\
&+ \left( \frac{\varphi \partial P}{\partial z} + \frac{P \partial \varphi}{\partial z} - \frac{\varphi \partial R}{\partial x} - \frac{R \partial \varphi}{\partial x} \right) \vec{j} + \\
&+ \left( \frac{\varphi \partial Q}{\partial x} + \frac{Q \partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varphi \partial P}{\partial y} - \frac{P \partial \varphi}{\partial y} \right) \vec{k} =
\end{aligned}$$

O que resulta em

$$\begin{aligned}
&= \left( \left( \frac{\varphi \partial R}{\partial y} - \frac{\varphi \partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\varphi \partial P}{\partial z} - \frac{\varphi \partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\varphi \partial Q}{\partial x} - \frac{\varphi \partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \right) + \\
&+ \left( \left( \frac{\partial \varphi R}{\partial y} - \frac{\partial \varphi Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \varphi P}{\partial z} - \frac{\partial \varphi R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial \varphi Q}{\partial x} - \frac{\partial \varphi P}{\partial y} \right) \vec{k} \right) = \\
&\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi \frac{\partial}{\partial x} & \varphi \frac{\partial}{\partial y} & \varphi \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \varphi \operatorname{rot} \vec{U} + \nabla \varphi \times \vec{U}
\end{aligned}$$

e)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{U}) = 0$

$$\vec{U} = P_u(x, y, z) \vec{i} + Q_u(x, y, z) \vec{j} + R_u(x, y, z) \vec{k}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{U}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \right) = \\
&= \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} \right) =
\end{aligned}$$

Utilizando o teorema de **Schwarz**

$$= \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} \right) = 0$$

f)  $rot(\nabla \varphi) = 0$

$$rot(\nabla \varphi) = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

g)  $rot(rot \vec{u}) = \nabla(div \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$

$$\begin{aligned}
rot(rot \vec{u}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} = \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{k} + \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{k} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{i} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{j} = \\
&= \left( -\frac{\partial^2 P}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 P}{\partial^2 z} \right) \vec{i} + \left( -\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 z} \right) \vec{j} + \left( -\frac{\partial^2 R}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 R}{\partial^2 y} \right) \vec{k} + \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} \right) \vec{k} + \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \vec{k} = \\
&= \left( -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( -\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \vec{k} + \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \vec{k} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{i} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\vec{k} = \\
&= -\nabla^2\vec{u} + \nabla\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = -\nabla^2\vec{u} + \nabla(\operatorname{div}\vec{u}).
\end{aligned}$$

# CAPÍTULO IV

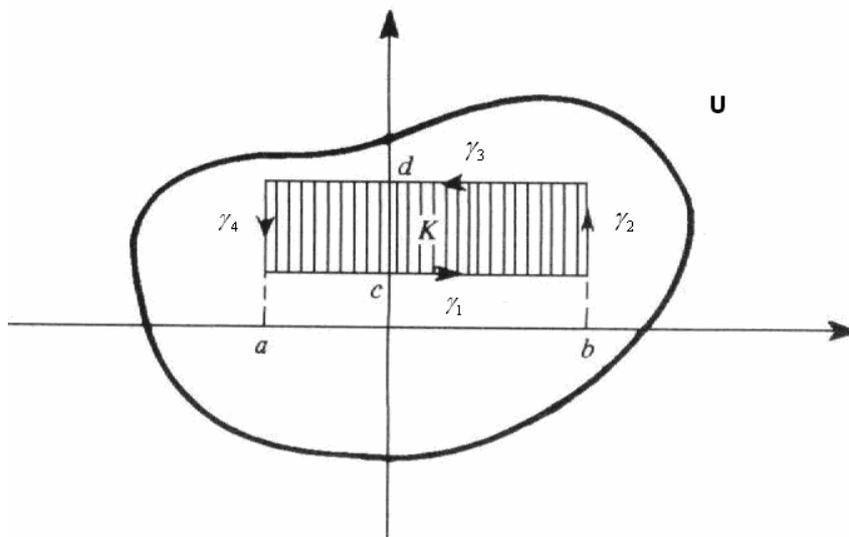
## OS TEOREMAS DE GREEN, GAUSS E STOKES.

### 4.1 Teorema de Green para Retângulos

Seja  $K$  o retângulo  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  e seja  $\gamma$  a fronteira de  $K$  orientada no sentido anti-horário. Suponhamos que  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  sejam de classe  $C^1$  num aberto  $U$  contendo  $K$ . Então

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_K \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

**Demonstração:**



Temos que

$$1) \int_{\gamma} \vec{F} dl = \int_{\gamma_1} \vec{F} dl + \int_{\gamma_2} \vec{F} dl + \int_{\gamma_3} \vec{F} dl + \int_{\gamma_4} \vec{F} dl$$

Onde

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} dl = \int_a^b P(x, c) dx$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} dl = \int_c^d Q(b, y) dy$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} dl = \int_b^a P(x, d) dx = -\int_a^b P(x, d) dx$$

e por último

$$\int_{\gamma_4} \vec{F}dl = \int_a^c Q(a, y)dy = -\int_c^d Q(a, y)dy$$

Portanto voltando a (1), temos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F}dl &= \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \vec{F}dl = \int_a^b P(x, c)dx + \int_c^d Q(b, y)dy - \int_a^b P(x, d)dx - \int_c^d Q(a, y)dy = \\ &= \left( \int_c^d Q(b, y)dy - \int_c^d Q(a, y)dy \right) - \left( \int_a^b P(x, d)dx - \int_a^b P(x, c)dx \right) = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

A notação  $\oint_{\gamma} Pdx + Qdy$  é frequentemente usada para indicar a integral de linha sobre uma curva fechada, orientada no sentido anti-horário. Com esta notação, a igualdade a que se refere o teorema de Green se escreve

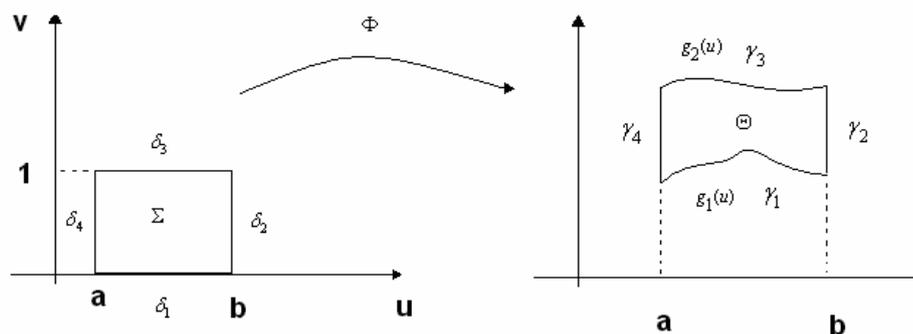
$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_K \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

#### 4.1.1 Teorema de Green para um Caso Particular

Seja  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, g_1(a) \leq y \leq g_2(b)\}$  com  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e a fronteira de  $K$  orientada no sentido anti-horário. Suponhamos que  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  sejam de classe  $C^1$  num aberto  $U$  contendo  $K$ . Então

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_K \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

**Demonstração:**



Vamos utilizar o fato de que o Teorema vale para retângulos, para provar que vale para este caso particular.

Seja

$$\Phi(u, v) = (u, vg_2(u)) + (1-v)g_1(u)$$

Vamos novamente calcular a integral de linha

$$\int_{\gamma} \vec{F} dl = \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} P dx + Q dy$$

- $\gamma_1(u) = (u, g_1(u))$  e  $\gamma_1'(u) = (1, g_1'(u))$

$$\int_{\gamma_1} P dx + Q dy = \int_a^b du \left[ (P(u, g_1(u)) + Q(u, g_1(u)) \cdot g_1'(u)) \right]$$

- $\gamma_2(v) = (b, vg_2(u) + (1-v)g_1(u))$  e  $\gamma_2'(v) = (0, g_2(u) - g_1(u))$

$$\int_{\gamma_2} P dx + Q dy = \int_0^1 dv \left[ (Q(b, vg_2(u) + (1-v)g_1(u)) \cdot (g_2(u) - g_1(u)))(b) \right]$$

- $\gamma_3(u) = (u, g_2(u))$  e  $\gamma_3'(u) = (1, g_2'(u))$

$$\int_{\gamma_3} P dx + Q dy = - \int_a^b du \left[ (P(u, g_2(u)) + Q(u, g_2(u)) \cdot g_2'(u)) \right]$$

- $\gamma_4(v) = (a, vg_2(u) + (1-v)g_1(u))$  e  $\gamma_4'(v) = (0, g_2(u) - g_1(u))$

$$\int_{\gamma_4} P dx + Q dy = - \int_0^1 dv \left[ (Q(a, vg_2(u) + (1-v)g_1(u)) \cdot (g_2(u) - g_1(u)))(a) \right]$$

Logo temos que

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_a^b du \left[ (P(u, g_1(u)) + Q(u, g_1(u)) \cdot g_1'(u)) - (P(u, g_2(u)) + Q(u, g_2(u)) \cdot g_2'(u)) \right] + \int_0^1 dv \left[ (Q(b, vg_2(u) + (1-v)g_1(u)) \cdot (g_2(u) - g_1(u)))(b) \right] +$$

$$-\int_0^1 dv \left[ (Q(a, vg_2(u) + (1-v)g_1(u)) \cdot (g_2(u) - g_1(u)))(a) \right].$$

Seja agora  $\tilde{F} = (\tilde{P}, \tilde{Q})$  o campo vetorial de  $\Sigma$  onde:

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & (P(u, vg_2(u) + (1-v)g_1(u)) + Q(u, vg_2(u) + (1-v)g_1(u)) \cdot (vg'_2(u) + (1-v)g'_1(u)), \\ & Q(u, vg_2(u) + (1-v)g_1(u)) \cdot (g_2(u) - g_1(u)) \end{aligned}$$

Iremos mostrar que a integral de linha de  $\Sigma$  é igual a integral de linha de  $\Theta$ .

Calculemos a integral de linha de  $\Sigma$

$$\begin{aligned} \int_{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4} \tilde{P}dx + \tilde{Q}dy &= \int_a^b du \left[ \tilde{P}(u, 0) - \tilde{P}(u, 1) \right] + \int_0^1 dv \left[ \tilde{Q}(b, v) - \tilde{Q}(a, v) \right] = \\ &= \int_a^b du \left[ (P(u, g_1(u) + Q(u, g_1(u))g'_1(u) - (P(u, g_2(u) - Q(u, g_2(u))g'_2(u))) \right] + \\ &\quad + \int_0^1 dv \left[ (Q(b, vg_2(u) + (1-v)g_1(u)) \cdot (g_2(u) - g_1(u)))(b) \right] + \\ &\quad - \int_0^1 dv \left[ (Q(a, vg_2(u) + (1-v)g_1(u)) \cdot (g_2(u) - g_1(u)))(a) \right] = \int_{\gamma} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

Sabemos que o teorema de Green vale para retângulos,

$$\int_{\gamma} \tilde{P}dx + \tilde{Q}dy = \iint_{\Sigma} \left[ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right] dudv$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} &= \frac{\partial Q}{\partial u} (g_2 - g_1) + Q(g'_2 - g'_1) = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) (g_2 - g_1) + Q(g'_2 - g'_1) = \\ &\quad \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} (vg'_2 + (1-v)g'_1) \right) (g_2 - g_1) + Q(g'_2 - g'_1) \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} &= \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial v} (vg'_2 + (1-v)g'_1) + Q(g'_2 - g'_1) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial P}{\partial y} (g_2 - g_1) + \frac{\partial Q}{\partial y} (g_2 - g_1)(vg'_2 + (1-v)g'_1) + Q(g'_2 - g'_1) \end{aligned}$$

Fazendo

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial x} (g_2 - g_1) - \frac{\partial P}{\partial y} (g_2 - g_1) = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (g_2 - g_1)$$

temos

$$\iint_{\Sigma} \left[ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right] dudv = \iint_{\Theta} \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (g_2 - g_1) \right] dudv = \iint_{\Theta} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

Observe que  $(g_2 - g_1)$  é o Jacobiano de mudança de variável.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v g_2' + (1-v) g_1' & g_2 - g_1 \end{pmatrix}$$

$$\det J\phi = g_2 - g_1$$

Logo, está demonstrado o teorema para uma superfície limitada por duas funções e duas retas paralelas ao eixo  $y$ . O caso de uma superfície limitada por duas funções e duas retas paralelas ao eixo  $x$ , prova-se de forma semelhante.

#### 4.1.2 Teorema de Green para Conjunto com Fronteira $C^1$ por Partes

Seja  $K \subset \mathbb{R}^2$  um compacto, com interior não-vazio cuja fronteira é a imagem de uma curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , fechada, simples<sup>7</sup>,  $C^1$  por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  de classe  $C^1$  num aberto  $U$  contendo  $K$ . Nestas condições,

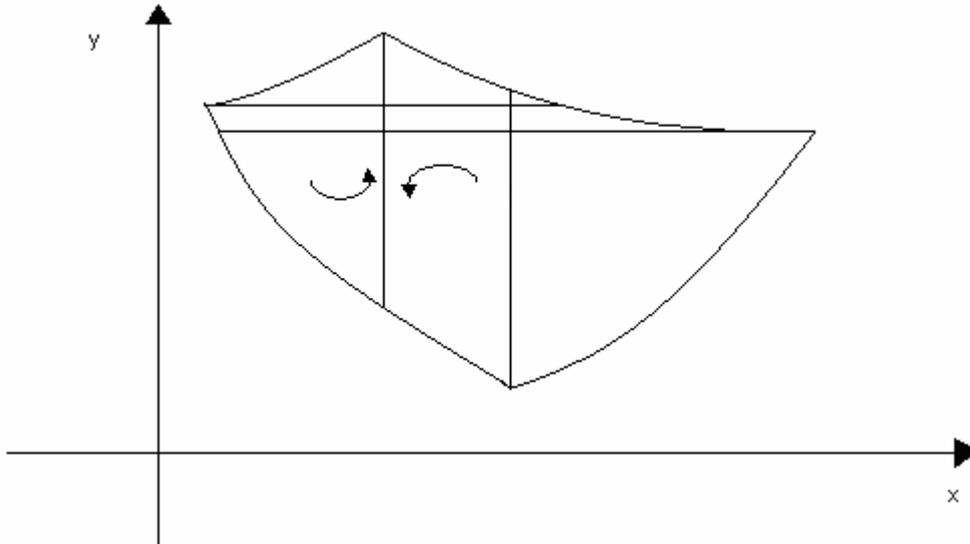
$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_K \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

#### Demonstração:

Temos que todo conjunto nas condições descritas podem ser divididos em subconjuntos do tipo descrito no teorema anterior.

---

<sup>7</sup> i.e., sem auto-interseções.



Temos ainda que a integral de linha será apenas o valor na borda da figura inicial, pois os valores das integrais de linha no interior da figura se anularam pelo fato de estarem em sentidos opostos.

Temos que o membro da igualdade da integral será

$$\sum_{i=1}^n \iint_{k_i} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy = \iint_k \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

E como vale

$$\oint_{\gamma_1} P dx + Q dy = \iint_{k_1} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy,$$

temos que:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_1} P dx + Q dy = \sum_{i=1}^n \iint_{k_i} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy = \iint_k \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

o que demonstra o teorema.

**Exemplo 1:** Utilizando a teorema de Green, transforme a integral de linha

$$\oint_{\gamma} (x^4 - y^3) dx + (x^3 - y^5) dy$$

numa integral dupla e calcule-a, com  $\gamma$  dada por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Resolução:**

Pelo teorema de Green Temos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (x^4 - y^3)dx + (x^3 - y^5)dy &= \iint_k \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_k \left( \frac{\partial(x^3 - y^5)}{\partial x} - \frac{\partial(x^4 - y^3)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_k (3x^2 - 3y^2) dx dy \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares,

$$= 3 \iint_k (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

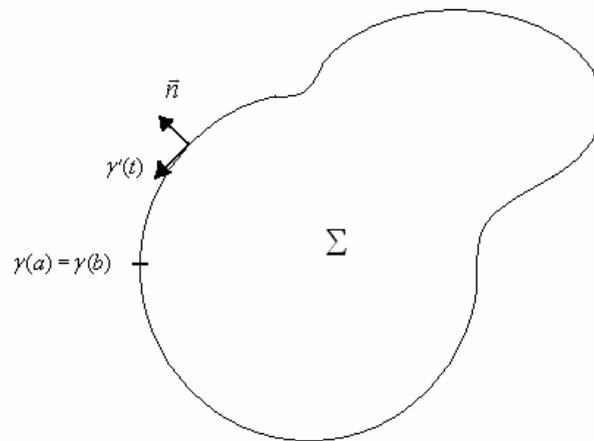
**Exemplo 2:** Calcule utilizando o teorema de Green a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \text{ onde } \gamma(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

**Resolução:** Observe que o campo vetorial está definido no domínio  $\mathbb{R}^2 - (0,0)$  e que a imagem de  $\gamma$  é a fronteira do círculo  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ ; porém  $(0,0) \notin B$  e, portanto  $B \not\subset \mathbb{R}^2 - (0,0)$ . Logo o teorema de Green não se aplica a este exemplo.

**Exemplo 3:** Seja  $F(x, y) = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$  um campo vetorial de classe  $C^1$  num aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $\Sigma$  um compacto, com interior não-vazio, contido em  $U$ , cuja fronteira é imagem de uma curva fechada  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , de classe  $C^1$ , simples, regular e orientada no sentido anti-horário. Seja  $\vec{n}$  a normal unitária exterior a  $\Sigma$ . Mostre que vale:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} dr = \iint_{\Sigma} (\operatorname{div} \vec{F}) dx dy$$



**Resolução:**

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} dr = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \vec{n}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt$$

com

$$\vec{n}(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} (y'(t)\vec{i} - x'(t)\vec{j}).$$

Temos então

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} dr = \int_a^b [F(x, y) = F_x y'(t) + F_y x'(t)] dt$$

Portanto chegamos ao resultado procurado

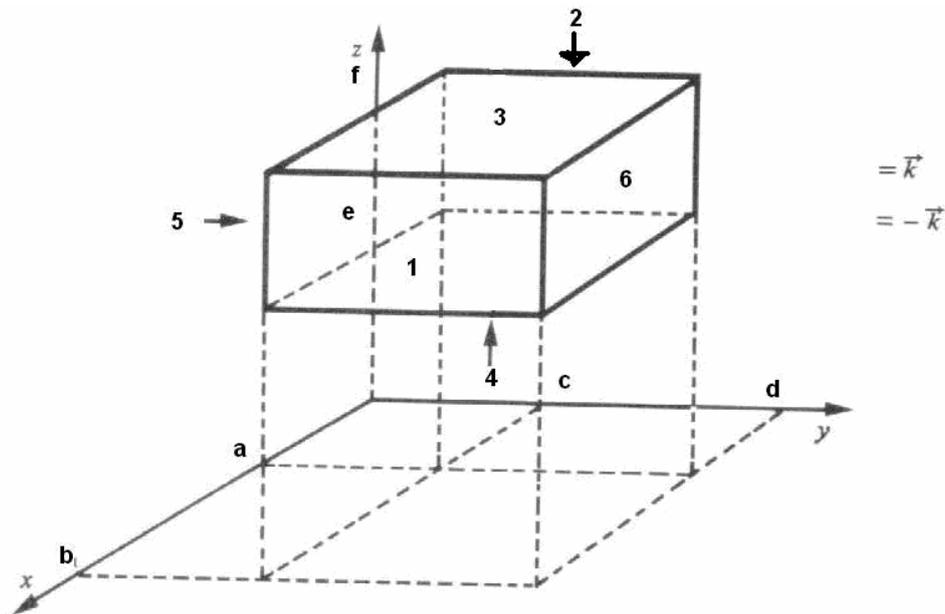
$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} dr = \int_{\gamma} -F_y dx + F_x dy = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Sigma} (\operatorname{div} \vec{F}) dx dy$$

Este teorema é chamado de *teorema da divergência no plano*.

## 4.2 Teorema da Divergência ou de Gauss para Paralelepípedos

Seja  $B$  o paralelepípedo  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  e  $e \leq z \leq f$ . Suponha que  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  seja um campo vetorial de classe  $C^1$  num aberto contendo  $B$  e seja  $\sigma$  a fronteira de  $B$ , com normal  $\vec{n}$  apontando para fora de  $B$ . Então

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_B \text{div} \vec{F} dx dy dz$$



### Demonstração:

Vamos calcular o fluxo vetorial do campo vetorial ao longo das faces.

Face 1  $\vec{n} = -\hat{e}_3$

$$\iint_1 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds = -\int_a^b dx \int_c^d dy F_z(x, y, e)$$

Face 2  $\vec{n} = \hat{e}_3$

$$\iint_2 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds = \int_a^b dx \int_c^d dy F_z(x, y, f)$$

Face 3  $\vec{n} = -\hat{e}_1$

$$\iint_3 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds = -\int_c^d dy \int_e^f dz F_x(a, y, z)$$

Face 4  $\vec{n} = \hat{e}_1$

$$\iint_4 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds = \int_c^d dy \int_e^f dz F_x(b, y, z)$$

Face 5  $\vec{n} = -\hat{e}_2$

$$\iint_5 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds = -\int_a^b dx \int_e^f dz F_y(x, c, z)$$

Face 6  $\vec{n} = \hat{e}_2$

$$\iint_6 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds = \int_a^b dx \int_e^f dz F_y(x, d, z)$$

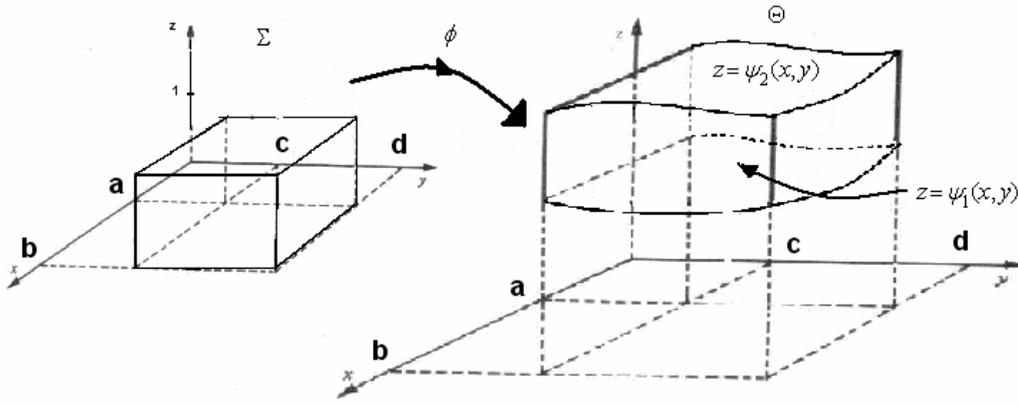
Logo chegamos que

$$\begin{aligned} \iint_{1+2+3+4+5+6} \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds &= \int_a^b dx \int_c^d dy F_z[(x, y, f) - F_z(x, y, e)] + \\ &+ \int_c^d dy \int_e^f dz [F_x(b, y, z) - F_x(a, y, z)] + \int_a^b dx \int_e^f dz [F_y(x, d, z) - F_y(x, c, z)] = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(x, y, z) \right] = \iiint_V (\text{div} \vec{F}) dx dy dz \end{aligned}$$

#### 4.2.1 Teorema da Divergência para um Caso Particular

Seja  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, \psi_1 \leq z \leq \psi_2\}$ , com  $\psi_1, \psi_2 : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  um campo vetorial de classe  $C^1$  num aberto contendo  $B$ , seja  $\sigma$  a fronteira de  $B$ , com normal  $\vec{n}$  apontando para fora de  $B$ . Então

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_B \text{div} \vec{F} dx dy dz$$



Vamos utilizar o fato de que o Teorema vale para paralelepípedos, para provar que vale para este caso particular.

Seja

$$\phi(u, v, t) = (u, v, t\psi_2(u, v)) + (1-v)\psi_1(u, v)$$

Temos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & t \frac{\partial \psi_2}{\partial u} + (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \\ 0 & 1 & t \frac{\partial \psi_2}{\partial v} + (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \left( -t \frac{\partial \psi_2}{\partial u} - (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial u}, -t \frac{\partial \psi_2}{\partial v} - (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial v}, 1 \right)$$

Vamos calcular as integrais de superfície das faces de  $\Theta$  :

$$\text{Face 1} \quad t=0 \quad n = \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial u}, \frac{\partial \psi_1}{\partial v}, -1 \right)$$

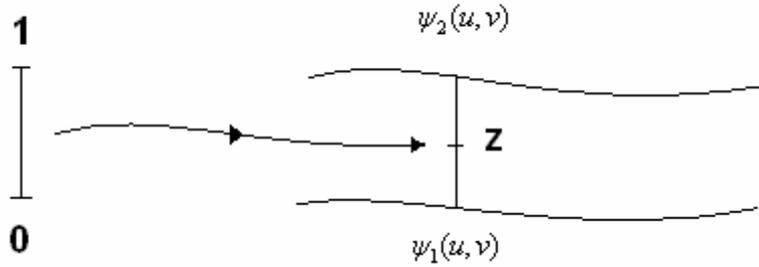
$$\iint_1 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_a^b du \int_c^d dv \left[ (F_x(u, v, \psi_1(u, v))) \frac{\partial \psi_1}{\partial u} + (F_y(u, v, \psi_1(u, v))) \frac{\partial \psi_1}{\partial v} - F_z(u, v, \psi_1(u, v)) \right]$$

$$\text{Face 2} \quad t=1 \quad n = \left( -\frac{\partial \psi_2}{\partial u}, -\frac{\partial \psi_2}{\partial v}, 1 \right)$$

$$\iint_2 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS =$$

$$= \int_a^b du \int_c^d dv \left[ -(F_x(u, v, \psi_2(u, v))) \frac{\partial \psi_2}{\partial u} - (F_y(u, v, \psi_2(u, v))) \frac{\partial \psi_2}{\partial v} + F_z(u, v, \psi_2(u, v)) \right]$$

É importante notar  $dz = (\psi_2 - \psi_1) dt$ , pois temos  $z(u, v) = t\psi_2(u, v) + (1-t)\psi_1(u, v)$  para  $t \in (0, 1)$ .



Face 3  $\vec{n} = -\hat{e}_1$

$$\iint_3 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = -\int_0^1 dt \int_c^d dv \left[ (F_x(a, v, t\psi_2(a, v) + (1-t)\psi_1(a, v)))(\psi_2(a, v) - \psi_1(a, v)) \right]$$

Face 4  $\vec{n} = \hat{e}_1$

$$\iint_4 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_0^1 dt \int_c^d dv \left[ (F_x(b, v, t\psi_2(b, v) + (1-t)\psi_1(b, v)))(\psi_2(b, v) - \psi_1(b, v)) \right]$$

Face 5  $\vec{n} = -\hat{e}_2$

$$\iint_5 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = -\int_0^1 dt \int_a^b du \left[ (F_y(u, c, t\psi_2(u, c) + (1-t)\psi_1(u, c)))(\psi_2 - \psi_1) \right]$$

Face 6  $\vec{n} = \hat{e}_2$

$$\iint_6 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_0^1 dt \int_a^b du \left[ (F_y(u, d, t\psi_2(u, d) + (1-t)\psi_1(u, d)))(\psi_2 - \psi_1) \right]$$

Pegue agora o seguinte campo vetorial de  $\Sigma$

$$\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3)$$

Tal que

$$\tilde{F}_1 = F_x(u, v, t\psi_2(u, v) + (1-t)\psi_1(u, v))(\psi_2(u, v) - \psi_1(u, v))$$

$$\tilde{F}_2 = F_y(u, v, t\psi_2(u, v) + (1-t)\psi_1(u, v))(\psi_2(u, v) - \psi_1(u, v))$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3 = & -F_x(u, v, t\psi_2(u, v) + (1-t)\psi_1(u, v)) \left( \frac{t\partial\psi_2(u, v)}{\partial u} + (1-t)\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial u} \right) + \\ & -F_y(u, v, t\psi_2(u, v) + (1-t)\psi_1(u, v)) \left( \frac{t\partial\psi_2(u, v)}{\partial v} + (1-t)\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial v} \right) + \end{aligned}$$

$$+F_z(u, v, t\psi_2(u, v) + (1-t)\psi_1(u, v))$$

Queremos mostrar que as integrais de superfície nos dois sólidos são iguais. Para isso vamos calcular a integral de superfície de  $\Sigma$

$$\text{Face 1} \quad \vec{n} = -\hat{e}_3$$

$$\begin{aligned} \iint_1 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds &= -\int_a^b du \int_c^d dv \tilde{F}_3(u, v, 0) = \\ &= -\int_a^b du \int_c^d dv F_x(u, v, \psi_1(u, v)) \left( \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} \right) - F_y(u, v, \psi_1(u, v)) \left( \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} \right) + F_z(u, v, \psi_1(u, v)) \end{aligned}$$

$$\text{Face 2} \quad \vec{n} = \hat{e}_3$$

$$\begin{aligned} \iint_2 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds &= \int_a^b du \int_c^d dv \tilde{F}_3(u, v, 1) = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \left[ -F_x(u, v, \psi_2(u, v)) \left( \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial u} \right) - F_y(u, v, \psi_2(u, v)) \left( \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial v} \right) + F_z(u, v, \psi_2(u, v)) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Face 3} \quad \vec{n} = -\hat{e}_1$$

$$\begin{aligned} \iint_3 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds &= -\int_c^d dy \int_0^1 dz \tilde{F}_1(a, v, t) = \\ &= -\int_c^d dv \int_0^1 dt [F_x(a, v, t\psi_2(a, v) + (1-t)\psi_1(a, v))(\psi_2(a, v) - \psi_1(a, v))] \end{aligned}$$

$$\text{Face 4} \quad \vec{n} = \hat{e}_1$$

$$\begin{aligned} \iint_4 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds &= \int_c^d dv \int_0^1 dt \tilde{F}_1(b, v, t) = \\ &= \int_c^d dv \int_0^1 dt [F_x(b, v, t\psi_2(b, v) + (1-t)\psi_1(b, v))(\psi_2(b, v) - \psi_1(b, v))] \end{aligned}$$

$$\text{Face 5} \quad \vec{n} = -\hat{e}_2$$

$$\begin{aligned} \iint_5 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds &= -\int_a^b du \int_e^f dt \tilde{F}_2(u, c, t) = \\ &= -\int_a^b du \int_0^1 dt [F_y(u, c, t\psi_2(u, c) + (1-t)\psi_1(u, c))(\psi_2(u, c) - \psi_1(u, c))] \end{aligned}$$

$$\text{Face 6} \quad \vec{n} = \hat{e}_2$$

$$\iint_6 \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot ds = \int_a^b du \int_0^1 dt \tilde{F}_2(u, d, t) =$$

$$= \int_a^b du \int_0^1 dt F_y(u, d, t\psi_2(u, d) + (1-t)\psi_1(u, d))(\psi_2(u, d) - \psi_1(u, d))$$

Logo podemos concluir que

$$\iint_{\partial\Sigma} \tilde{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_{\partial\Theta} \tilde{F} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Agora nos resta mostrar que

$$\int_0^1 dt \int_a^b du \int_c^d dv (\operatorname{div} \tilde{F}) = \iiint_{\partial\Theta} (\operatorname{div} F) dx dy dz$$

De fato:

$$J\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t \frac{\partial \psi_2}{\partial u} + (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & t \frac{\partial \psi_2}{\partial v} + (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial v} & \psi_2 - \psi_1 \end{vmatrix}$$

$$\det J\phi = \psi_2 - \psi_1$$

Como temos a Jacobiana da mudança de variável,

$$dx dy dz = (\psi_2 - \psi_1) du dv dt$$

e temos

$$\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial u} = \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \left[ t \frac{\partial \psi_2}{\partial u} + (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \right] \right] (\psi_2 - \psi_1)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v} = \left[ \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial z} \left[ t \frac{\partial \psi_2}{\partial v} + (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \right] \right] (\psi_2 - \psi_1) + F_y \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial v} - \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \right)$$

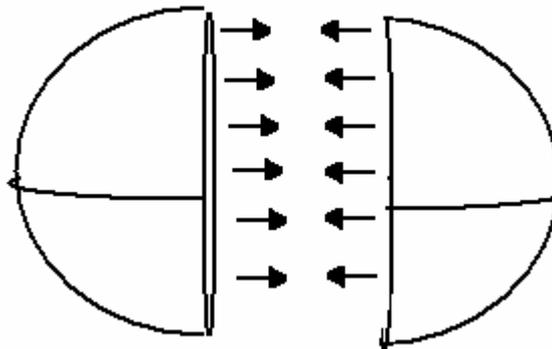
$$\frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial t} = -\frac{\partial F_x}{\partial z} (\psi_2 - \psi_1) \left[ t \frac{\partial \psi_2}{\partial u} + (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \right] + F_x \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial u} - \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \right) +$$

$$-\frac{\partial F_y}{\partial z} (\psi_2 - \psi_1) \left[ t \frac{\partial \psi_2}{\partial v} + (1-t) \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \right] - F_y \left[ \frac{\partial \psi_2}{\partial v} - \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial z} (\psi_2 - \psi_1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{F} &= \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial t} = \frac{\partial F_x}{\partial x}(\psi_2 - \psi_1) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\psi_2 - \psi_1) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(\psi_2 - \psi_1) = \\ &= \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) (\psi_2 - \psi_1) = (\operatorname{div} F)(\psi_2 - \psi_1) \end{aligned}$$

É importante observar que demonstramos o teorema para o caso onde temos o sólido limitado por planos paralelos aos eixos  $x$  e  $y$  e por duas funções de  $x$  e  $y$ . Utilizando um argumento análogo pode-se provar para casos onde o sólido é limitado por planos paralelos ao eixo  $x$  e  $z$  ou em um terceiro caso por planos paralelos a  $y$  e  $z$ .

Ainda podemos utilizar um raciocínio semelhante ao teorema de Green. Podemos dividir um sólido em superfícies especiais do tipo usado na demonstração e aplicar o teorema em cada uma delas, somando as resultantes. É importante notar que quando cortamos o sólido, os fluxos internos se anulam, ficando a integral de superfície apenas da parte externa.



**Exemplo 4:** Utilizando o teorema da divergência, transforme a integral de superfície

$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$  numa integral tripla e calcule, onde  $\sigma$  é a fronteira do cilindro

$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ,  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$  e  $\vec{n}$  a normal apontando para fora de  $B$ .

### Resolução:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz.$$

Temos

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_B (2 + 2z) dx dy dz = \iint_K \left[ \int_0^1 (2 + 2z) dz \right] dx dy = \iint_K 3 dx dy$$

Onde  $K$  é o círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Portanto

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 3\pi.$$

### 4.3 Teorema da Stokes no Espaço

Seja  $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma porção de superfície regular dada por  $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  onde  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  e  $z = z(u, v)$  são supostas de classe  $C^2$  num aberto contendo  $K$ . Seja  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  um campo vetorial de classe  $C^1$  num aberto que contém  $\operatorname{im}\sigma$ . Nestas condições, tem-se

$$\int_{\Gamma} \vec{F} dr = \iint_{\sigma} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

Onde  $\Gamma$  é uma curva fronteira de  $\sigma$  orientada positivamente em relação à normal

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$$

**Demonstração:** Temos que  $\Gamma$  é uma curva de fronteira orientada positivamente em relação à normal  $\vec{n}$ . Logo,  $\Gamma(t) = \sigma(\gamma(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , onde  $\gamma$  é fechada, simples,  $C^1$  por partes, com imagem igual à fronteira de  $K$  e orientada no sentido anti-horário. Se  $\sigma$  é dada por  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  e  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  resulta

$$\Gamma(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))), t \in [a, b].$$

Temo então

$$\iint_{\sigma} (\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_K \left\langle \text{rot} \vec{F}(\sigma(u, v)), \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) \right\rangle dy dv$$

com

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) i + \left( \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) j + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) k =$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_K \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] dudv + \\ &+ \iint_K \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right] dudv = \\ &= \iint_K \left[ \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right] dudv + \\ &+ \iint_K \left[ -\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) - \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] dudv \end{aligned}$$

$$\text{Note que } \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \\ \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \end{matrix}$$

Usaremos a última notação para representar os determinantes jacobianos.

Logo podemos reescrever

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_K \left[ \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \right] dudv + \\ &+ \iint_K \left[ -\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) - \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) \right] dudv \end{aligned}$$

Faremos a seguinte substituição

$$A = \left[ \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) \right]$$

$$B = \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) \right]$$

$$C = \left[ \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) - \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) \right]$$

Logo a integral resume-se a

$$\iint_{\sigma} (\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_K [A + B + C] dudv$$

As derivadas parciais são calculadas no ponto  $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  e os determinantes jacobianos no ponto  $(u, v)$ .

Vamos agora mostrar que

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_K [A + B + C] dudv$$

E com isto demonstrar o teorema.

De fato, temos

$$\int_{\Gamma} Pdx = \int_a^b P(\sigma(u(t), v(t))) \frac{dx}{dt} dt$$

Temos ainda pela regra da cadeia que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

O que resulta

$$\int_{\Gamma} P dx = \int_a^b \left[ P(\sigma(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u} du + P(\sigma(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial v} dv \right]$$

Aplicando o teorema de Green temos

$$\int_{\Gamma} P dx = \iint_K \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( P(\sigma(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( P(\sigma(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dudv$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left( P(\sigma(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial v} \right) &= \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right] \frac{\partial x}{\partial v} + P(\sigma(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} + P(\sigma(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left( P(\sigma(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u} \right) &= \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right] \frac{\partial x}{\partial u} + P(\sigma(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + P(\sigma(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \end{aligned}$$

Pelo fato de  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  serem de classe  $C^2$ , segue que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u} \left( P(\sigma(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( P(\sigma(u(t), v(t))) \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = A \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \text{ e } P(\sigma(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = P(\sigma(u, v)) \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \text{ por Schwartz.}$$

Portanto temos que

$$\int_{\Gamma} P dx = \iint_K A du dv$$

De forma semelhante conclui-se que

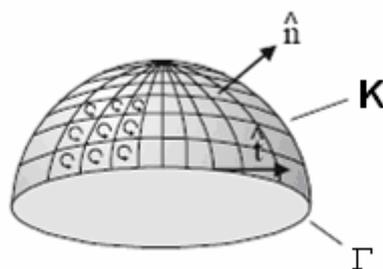
$$\int_{\Gamma} Q dy = \iint_K B du dv$$

e

$$\int_{\Gamma} R dz = \iint_K C du dv$$

O que conclui a demonstração.

Quando  $\Gamma$  é uma curva fechada é comum referir-se à integral  $\int_{\Gamma} \vec{F} dr$  como a circulação de  $\vec{F}$  sobre  $\Gamma$ . O teorema de Stokes conta-nos, então, que a circulação de  $\vec{F}$  sobre a fronteira de  $\sigma$ , orientada positivamente com relação à norma  $\vec{n}$  é igual ao fluxo do rotacional de  $\vec{F}$  através de  $\sigma$ . O teorema de Stokes une integral de linha e superfície tendo como elo o rotacional.



**Exemplo 5:** Calcule  $\iint_{\sigma} (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n} dS$  onde  $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + (x + y)\vec{k}$ ,  $\sigma(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2)$  com  $u^2 + v^2 \leq 1$  sendo  $\vec{n}$  a normal apontando para cima.

**Resolução:** Pelo teorema de Stokes temos

$$\int_{\Gamma} \vec{F} dr = \iint_{\sigma} (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

$$\Gamma(t) = \sigma(\cos t, \sin t, 1) = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Temos

$$\int_{\Gamma} \vec{F} dr = \int_0^{2\pi} [\sin t \vec{i} + (\cos t + \sin t) \vec{k}] [-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}] dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt.$$

Como

$$\int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt = -\int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right] dt = -\pi$$

## CONCLUSÕES

O intuito deste trabalho é estudar temas não vistos durante a minha formação acadêmica, aprofundar-se em alguns conceitos já conhecidos e satisfazer algumas curiosidades que tinha.

O enfoque foi neste conteúdo, pois tinha uma curiosidade a respeito do cálculo vetorial, devido a minha formação de técnico em telecomunicações, eletromagnetismo em específico. O trabalho proporcionou-me também uma busca em temas de diversas áreas da matemática como: Análise, Álgebra Linear, Cálculos, Softwares Matemáticos entre outras, além de um fortalecimento na minha formação de matemático.

Outro dos objetivos foi de organizar e descrever de forma mais clara possível os teoremas e definições de forma que se tenha um material de auxílio para o estudo do cálculo vetorial.

Por fim, venho destacar a importância de disciplinas que possibilitem ao acadêmico, buscar respostas e satisfazer suas curiosidades a respeito da matemática e do ensino da matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo vol. 3.** Rio de Janeiro; LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.,2001.
2. KANH, Peter J. **Introduction to linear algebra.** New York: Harper & Row, 1967.
3. LIMA, Elon Lages. **Análise no espaço  $\mathbb{R}^n$ .** Brasília: Ed. Univ. de Brasília, 1970.
4. LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear.** 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
5. LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol.2.** Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
6. STEWART, James. **Cálculo.** 4. ed. São Paulo: Thomson, 2005