UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Razões Trigonométricas:
Uma proposta de ensino para 8ª série do ensino fundamental

Graduanda: Clarissa Campos da Silva Bernardo

Curso: Matemática Licenciatura

Orientador: Nereu Estanislau Burin

Florianópolis, dezembro de 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº. 072 / SGC / 2004.

Profª. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Nereu Estanislau Burin
Orientador

Márcia Bernal

Rubens Starke

Sumário

Introdução

Há muitos anos, as salas de aula da maior parte das escolas brasileiras tinham as carteiras presas ao chão, sem nenhuma possibilidade de movimento. Os professores expunham os conteúdos em palavras ou no quadro-negro e os alunos simplesmente copiavam o que era dito ou escrito. Como ouvintes passivos, suas únicas atividades eram copiar o que era exposto e procurar aprender o conteúdo em casa.

Ao longo dos anos as duras críticas a esse processo exigiram um novo tipo de ação pedagógica dos professores. O novo processo educacional exigia não um professor palestrante, mas sim um educador como professor.

A matemática ainda é vista somente como uma ciência exata, pronta e acabada, cujo ensino aprendizagem se dá pela memorização ou por repetição mecânica de exercícios de fixação que muitas vezes privilegiam o uso de regras e macetes. É ensinada de maneira tradicional e é a disciplina que apresenta o mais baixo desempenho dos alunos.

No campo das estratégias de trabalho, pesquisas mostram que enfatizar a memorização e a repetição de modelos preconcebidos não eleva a capacidade De raciocínio do aluno e muito menos é sinônimo de aprendizagem. Temos hoje que procurar maneiras mais motivadoras, e , principalmente, mais desafiadoras de ensinar.

O professor é o profissional responsável pela organização dos conteúdos e das atividades orientadoras de ensino. Para isso deve encontrar maneiras mais eficientes de abordar um conteúdo visando dessa forma garantir uma maior aprendizagem dos alunos.

Foi refletindo sobre isso, que surgiu a idéia de propor uma abordagem de um conteúdo (Razões Trigonométricas) para uma turma de 8ª série do Ensino Fundamental. Esta proposta de ensino procura ensinar trigonometria de uma forma menos tradicional, utilizando-se de recursos metodológicos como atividades de confecção e uso de teodolitos, medição indireta de alturas com os alunos, entre outras,para garantir uma maior aprendizagem dos alunos e tornar a matemática mais significativa.

No capítulo I, apresentamos algumas considerações sobre o ensino de matemática, o que propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina.

No capítulo II , faremos uma breve introdução histórica e apresentaremos a proposta de ensino e os conteúdos. Sendo os exercícios e as atividades propostos no capítulo seguinte.

No capítulo IV, faremos uma breve avaliação crítica de livros didáticos de 8ª série do Ensino Fundamental.

Por fim, apresentamos a conclusão de nosso estudo.

Capítulo 1

O Ensino de Matemática: algumas considerações

A Matemática é, ainda hoje a disciplina escolar que mais reprova alunos no Ensino Fundamental e Médio. O processo de explicação do fracasso escolar tem sido uma busca de culpados - o aluno, que não tem capacidade; o professor, que é mal preparado; as secretarias de educação que não remuneram seus professores; as universidades, que não formam bem o professor; o estudante universitário, que não aprende no secundário o que deveria ter aprendido e agora não consegue aprender o que seus professores universitários lhe ensinam. Os educadores, todos nós, precisamos não encontrar os culpados, mas encontrar as formas eficientes de ensino e aprendizagem.

A questão central por trás desta deficiência no rendimento dos alunos é o próprio objetivo do ensino de matemática na escola. As discussões sobre o que é e como se ensina a matemática escolar cada vez mais ganham espaço na comunidade de Educação Matemática Internacional, inclusive no Brasil, e portanto esperam renovações na prática docente.

É importante que o professor se convença que o objetivo principal do processo educacional é que os alunos tenham maior oportunidade de desenvolver o processo de construção do seu conhecimento. O que ocorre no ensino tradicional é uma preocupação do professor em cumprir a apresentação de conceitos contidos no currículo, onde uma aula de matemática é a apresentação de um acúmulo de fórmulas e algoritmos e aplicações de regras (Dário Fiorentini, Zetetike). De um modo geral as atividades desenvolvidas em sala de aula envolvem conceitos de difícil visualização para os alunos ocasionando a perda da autoconfiança em sua intuição matemática, desencorajando-os a tentar soluções alternativas nas resoluções de problemas. Acostumam-se, a resolver um número excessivo de exercícios repetitivos e esquemas de resolução de problemas como os encontrados na maioria dos livros didáticos. Além disso, a própria notação ou terminologia matemática ficou muito sofisticada e de difícil domínio. Por essa razão, provoca distorções no processo de ensino-aprendizagem. Isso podemos verificar na dificuldade que a maioria dos alunos têm de aprender conceitos de matemática. Não conseguem perceber para que serve o que aprenderam e cada vez mais o ensino se distancia da realidade. De que adianta um aluno memorizar um teorema ou uma propriedade se não tem consciência do que pode fazer com essa informação na resolução de problemas da vida real?

> "Não são os conteúdos em si e por si o que importa, mas os conteúdos enquanto veículos de grandes realizações humanas ... os conteúdos enquanto veículos de produção de bens culturais (materiais e espirituais) de esperanças e utopias sim ... mas também os conteúdos enquanto veículos de produção de dominação, da desigualdade, da ignorância, da miséria e a destruição ... da natureza, de homens, de idéias e de crenças." (Miguel, A. Abreu, 1994: 70)

> "Assim como acontece com todo conhecimento a Matemática é também um saber historicamente em construção que vem sendo produzido nas e pelas relações sociais e, como tal, tem seu pensamento e sua linguagem. Ocorre entretanto, que essa linguagem com o passar dos anos foi se tornando formal, precisa e rigorosa, distanciando-se daqueles conteúdos dos quais se originou, ocultando, assim, os processos que levaram a Matemática a tal nível de abstração e formalização." (Fiorentine, 1995: 32)

Diante disso, iniciar o ensino de um conceito matemático a partir de sua elaboração mais atual, isto é, pelas definições formais, sem levar em consideração o processo de formação do pensamento matemático significa dificultar para o aluno o acesso a esse saber.

Compreender o ensino como objeto principal do profissional professor pode ser um importante meio para a organização de princípios norteadores de suas **ações** para que ele, cada vez mais, organize o ensino como um fazer que se aprimora ao fazer, tal como foram se formando os profissionais que tiveram de organizar uma certa área de conhecimento para melhor dominar o seu objeto.

Ter a profissão de professor é organizar situações cujos resultados são as modificações dos sujeitos a quem intencionalmente visamos modificar. O sujeito que é fruto da ação educativa, vai adquirir um certo conhecimento que vai lhe capacitar a agir de uma determinada forma no meio em que vive. A sua aprendizagem vai lhe capacitar a compreender algum fenômeno de alguma forma. E isto vai lhe permitir usar desse novo saber para impactar a realidade.

Por isso é de extrema importância que os professores organizem as suas ações de algum modo para veicular um certo conteúdo. A natureza do conhecimento que o professor deverá ensinar vai indicar uma forma de se relacionar com os alunos, de como organizar o espaço de aprendizagem, de como eleger os instrumentos que poderão propiciar melhor aprendizagem dos conteúdos a serem ensinados.

Os conteúdos matemáticos são aqueles que permanecem como patrimônio cultural porque, de algum modo, contribuem para a solução dos problemas ainda relevantes para o convívio social. Os conteúdos novos revelam a natureza dos problemas novos que os homens estão enfrentando. O desenvolvimento de instrumentos de medidas de ângulos com maior precisão (Teodolito usado por topógrafos, por exemplo), foi possível graças as idéias precursoras de Tales, Hiparco e outros. E o que chama a atenção ao tratarmos do conteúdo como objetivo social a ser veiculado em sala de aula é que este conteúdo passa a ter uma história, que é a própria história da humanidade ao resolver problemas (Caraça, 1998; Rubinikov, 1987; Ifiali, 1998).

O professor precisa alterar o quadro atual do ensino de matemática, modificando a sua proposta pedagógica, optando por práticas educativas que colocam o aluno como o centro do processo educacional. Essas propostas teriam que considerar o aluno como um ser ativo no processo de construção do seu conhecimento. Nesse contexto o papel do professor é de mediador desse processo nas atividades propostas aos alunos e por eles realizadas. As atividades propostas em sala de aula devem ser orientadas de forma que os alunos não se limitem a memorizar fatos e procedimentos mecânicos, pelo contrário, possam compreender os conceitos e reconhecer a sua aplicabilidade em situações por ele vivenciadas; Atividades que possibilitem o envolvimento ativo dos alunos na formulação de hipóteses, na investigação e exploração de idéias e que os levem a descobrir e colocar em prática a sua própria maneira de pensar, a validar resultados e a construir argumentos que convençam; a matematização de situações reais implicando na criação ou adaptação de um modelo matemático da situação, aplicação de diversos métodos matemáticos a esse modelo e a verificação da sua validade perante a situação concreta; a depuração, em função de resultados encontrados conflitantes quando comparados com os resultados originais entre os colegas. Enfim, atividades que estimulam o aluno a raciocinar e descrever o raciocínio.

A atividade educativa tem por objetivo dar resposta a uma necessidade: ensinar. O corolário dessa afirmação é que o resultado do ensino é dar a resposta a uma outra necessidade: a do aluno que busca aprender. Vamos lançar mão de uma outra premissa que hoje é consensual entre educadores. É quase uma máxima dos que lidam com o ensino que os sujeitos ao aprenderem não o fazem como se nada soubessem, eles partem de conhecimentos já adquiridos para a construção de novos significados.

> "O ensino de matemática se faz, tradicionalmente, sem referência ao que os alunos já sabem. Apesar de todos reconhecermos que os alunos podem aprender sem que o façam na sala de aula, tratamos nossos alunos como se nada soubessem sobre tópicos ainda não ensinados."(Na vida dez, na escola zero, Terezinha Carraher; Ana Lúcia Schliemann; pg 21).

Outro consenso adquirido a partir das contribuições da psicologia de vertentes construtivistas e sociointeracionistas, é que os sujeitos aprendem ao lidar com situações-problema geradoras de conflitos cuja superação os coloca diante de novos conhecimentos que mais tarde servirão de base para a solução de novos problemas. Esse processo se faz não em ações isoladas de cada sujeito. É preciso a interação entre sujeitos ou entre sujeitos e objetos para que se instaure a necessidade do novo conhecimento. Todo este movimento de construção de significados, em diferentes espaços de que fazem parte os sujeitos, são responsáveis pela sua formação integral. A língua materna, os costumes e, de modo geral, a cultura do sujeito, são frutos das múltiplas relações que estabelecem no seu meio. No entanto, há um espaço em que consideramos como mais relevante: a sala de aula. Deve-se fazer deste espaço um lugar onde o ensino e as aprendizagens sejam significativos.

1.1 Proposta Curricular de Santa Catarina

A proposta curricular de Santa Catarina encontra-se no Anexo I.

1.2 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

O ensino da matemática tem passado, ao longo dos anos, por sucessivas reformas. Mesmo assim, o fracasso escolar matemático continua. No momento em que as Secretarias Municipais e Estaduais de Educação se esforçam para absorver e se adequar às novas normas vigentes, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) desempenham importante papel. O objetivo desse capítulo é destacar algumas de suas idéias básicas, relacionadas com a matemática e trazer algumas reflexões sobre as mesmas. "É importante destacar que a matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação".(PCN,1997)

Como se vê, de certo modo, os PCN já estão conseguindo alcançar, em parte, seus objetivos, isto é, estão desacomodando o professor fazendo-o parar para refletir sobre sua prática pedagógica, que é o primeiro passo para uma eventual mudança na mesma. Basear-me-ei no volume 3 (em duas publicações do MEC, através da Secretaria de Educação Fundamental: Parâmetros Curriculares Nacionais, matemática, 1997), com orientações para o ensino básico (1º e 2º ciclos) e outra com o mesmo nome, enfatizando o ensino de 5ª a 8ª séries, 1998.

Ambas trazem, na 1ª parte, uma breve análise Matemática no Brasil, algumas considerações acerca do conhecimento matemático e do aprender e ensinar matemática no ensino fundamental, os objetivos gerais, os conteúdos de matemática e a avaliação na matemática no ensino fundamental, além dos princípios norteadores para o trabalho a ser realizado no mesmo. Na 2ª parte, se diferenciam substancialmente: o primeiro focaliza o ensino de 1ª a 4ª séries e o segundo, de 5ª a 8ª séries, apresentando objetivos, conteúdos, orientações organizadas por ciclos.

As idéias básicas contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais em Matemática refletem, muito mais do que uma mera mudança de conteúdos, uma mudança de filosofia de ensino e de aprendizagem, como não poderia deixar de ser. Apontam para a necessidade de mudanças urgentes não só no que ensinar mas, principalmente, no como ensinar e avaliar e no como organizar as situações de ensino e de aprendizagem. O papel da matemática no ensino fundamental como meio facilitador para a estruturação e o desenvolvimento do pensamento do aluno e para a formação básica de sua cidadania é destacado. "... é importante que a matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares."(MEC/SEF,1997,pg 29). Ao referir-se à pluralidade das etnias existentes no Brasil, à diversidade e à riqueza do conhecimento matemático que nosso aluno já traz para a sala de aula, enfatiza-se nos PCN que o ensino da matemática, a par da valorização da pluralidade sócio cultural do educando pode colaborar para a transformação do seu meio.

Os conteúdos aparecem organizados em blocos, diferentemente do modo tradicional, a saber:

- Números e operações (Aritmética e Álgebra);
- Espaço e formas (Geometria);
- Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria);
- Tratamento da informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade).

Fica evidente, pois, a orientação de se pensar e de se organizar as situações de ensino-aprendizagem, privilegiando as chamadas intraconexões das diferentes áreas da matemática e as inter-conexões com as demais áreas do conhecimento.As intraconexões favorecem uma visão mais integrada, menos compartimentalizada da matemática. Algumas orientações de cunho didático são colocadas ao professor, através de exemplos práticos, mostrando que é possível interligar aritmética com álgebra ou aritmética com geometria e álgebra, numa mesma atividade.(MEC/SEF,1997,p. 97-133).

Os objetivos para o ensino fundamental, de acordo com os PCN, e aqui trazidos de modo resumido, visam levar o aluno a compreender e transformar o mundo à sua volta , estabelecer relações qualitativas e quantitativas, resolver situações-problema, comunicar-se matematicamente, estabelecer as intraconexões matemáticas e as interconexões com as demais áreas do conhecimento, desenvolver sua autoconfiança no seu fazer matemático e interagir adequadamente com seus pares. A matemática pode colaborar para o desenvolvimento de novas competências, novos conhecimentos, para o desenvolvimento de diferentes tecnologias e linguagens que o mundo globalizado exige das pessoas. "Para tal, o ensino de matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios."(MEC/SEF,1997, p. 31).

Os conteúdos nos PCN não são entendidos como uma listagem de conteúdos. Enfatiza-se a necessidade de entender a palavra conteúdo basicamente em três dimensões: conceitos, procedimentos e atitudes. Valoriza-se, portanto, muito mais a compreensão das idéias matemáticas e o modo como estas serão buscadas do que a sua sistematização, muitas vezes vazia de significado. Entende-se os conteúdos como meio para desenvolver atitudes positivas diante do saber em geral e do saber matemático em particular. O gosto pela matemática e o incentivo a procedimentos de busca exploratória, desenvolvendo uma atitude investigativa diante de situações-problema pelos professores são alguns exemplos dessa compreensão mais ampla do que é ensinar e aprender em matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais em matemática apresentam outras idéias básicas, a saber:

- Eliminação do ensino mecânico da matemática;
- Prioridade para a resolução de problemas;
- Conteúdo como meio para desenvolver idéias matemáticas fundamentais (proporcionalidade, equivalência, igualdade, formas, função, entre outras);
- Ênfase ao ensino de geometria;
- Organização dos conteúdos em espiral e não em forma linear, desprivilegiando a idéia de pré-requisitos como condição única para a organização dos mesmos;

- Uso da história da matemática como auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos;

- Uso de recursos didáticos durante todo o processo de ensino-aprendizagem;

- Ênfase ao trabalho em pequenos grupos em sala de aula;

- Atenção aos procedimentos e às atitudes a serem trabalhadas, além dos conteúdos propriamente ditos, como já foi mencionado acima;

- Avaliação como processo contínuo no fazer pedagógico.

Nos PCN há avanços importantes, caso se consiga entender os parâmetros como tal e não como uma listagem de conteúdos. O mais importante é a mudança de postura do professor em sala de aula.. O espírito dos PCN poderá, assim, ser melhor compreendido, permitindo que novas abordagens sejam introduzidas e outras sejam mantidas ou modificadas. Cabe aos educadores matemáticos envolvidos na educação continuada, colaborar para um melhor entendimento e, conseqüentemente, para o uso adequado das orientações contidas nos mesmos, evitando assim que, uma proposta que traga inovações importantes esteja fadada ao fracasso, por ser mal interpretada e/ ou mal utilizada em sala de aula.

Capítulo 2

Proposta de Ensino

Após a análise dos livros didáticos (ver Capítulo 4), posso agora apresentar a forma com a qual o assunto Razões Trigonométricas no triângulo retângulo será abordado em uma turma de 8ª série do Ensino Fundamental, sendo esta uma proposta que tem como finalidade uma melhor aprendizagem dos alunos. Para que entendam as razões trigonométricas e suas aplicações, faz-se necessário trabalhar com os alunos alguns conteúdos. É preciso que tenham noções de razão entre segmentos, semelhança de triângulos, Teorema de Tales e assim poderão estabelecer conexões entre estes diferentes temas matemáticos.

2.1 Um pouco de história

A palavras trigonometria tem origem no grego *trigonos* (triângulo) + *metrum* (medida). Pode-se dizer que, etimologicamente, significa medida de triângulo.

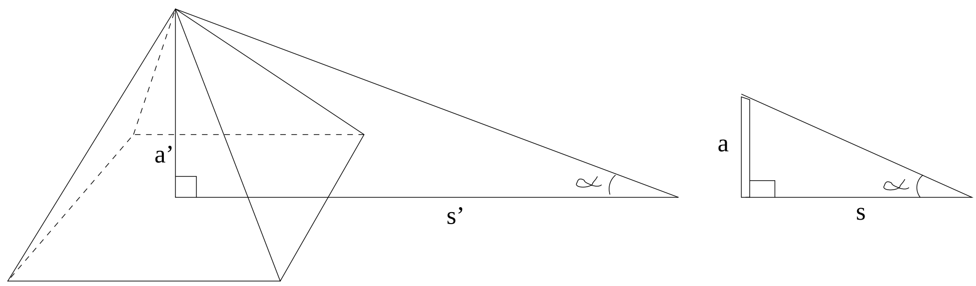
Um dos objetivos da trigonometria é estudar as relações entre os lados e ângulos de um triângulo, e nasceu como resposta à necessidade da Astronomia, da navegação, da cartografia e da topografia.

Tales (624 - 548 a.C.) foi considerado um homem de rara inteligência, com obras discutidas e aprovadas pelos sábios do mundo grego. Os gregos dos tempos posteriores consideravam-no o fundador da ciência, da matemática e da filosofia grega, creditando-lhe a paternidade da maior parte do saber. Viveu na Grécia, no século VI a.C. Era comerciante e, por esse motivo, viajava muito. No Egito, entrou em contato com a cultura científica - em particular astronômica e geométrica. Foi ele quem transformou a geometria, uma ciência de noções apenas esparsas, num sistema lógico. Viajando muito pelos centros antigos do conhecimento, deve Ter obtido informações sobre a astronomia e a matemática, aprendendo geometria no Egito. Na Babilônia, sob o governo de Nabucodonosor, entrou em contato com as primeiras tabelas e instrumentos astronômicos, e diz-se que em 585 a.C., conseguiu predizer o eclipse solar que ocorreria nesse ano, assombrando seus contemporâneos.

O fato histórico pelo qual ele é sempre lembrado é o de Ter medido a altura da pirâmide de Quéops, no Egito, através da semelhança de dois triângulos. Observou as sombras e os raios solares e descobriu que a sombra de uma estaca qualquer era proporcional à sombra da pirâmide. Esse mesmo processo de cálculo está presente em vários projetos de engenharia e em estudos de astronomia, mostrando a importância de se conhecer esse teorema, que também fundamenta o presente trabalho.

Ao responder a uma pergunta de um sacerdote egípcio, Tales valeu-se da proporcionalidade dos lados de triângulos semelhantes para calcular a altura de uma pirâmide. Disse que "espetaria", na areia, uma estaca qualquer, cujo comprimento é conhecido e mediria a sua sombra. Mediria também, na mesma hora, a sombra da pirâmide e adicionaria a metade do comprimento do lado da base. Assim, ele saberia a altura da pirâmide. Em que se baseia o raciocínio de Tales? Por que razão é importante medir as sombras na mesma hora e é irrelevante o comprimento a estaca?

Ao medir, na mesma hora, as sombras da pirâmide e da estaca, têm-se dois ângulos agudos iguais, devido ao paralelismo dos raios solares. Como os triângulos são semelhantes, as medidas de seus lados são proporcionais, isto é:



$$\frac{a'}{a} = \frac{s'}{s} \quad \text{que é equivalente a} \quad \frac{a'}{s'} = \frac{a}{s}.$$

É indiferente a escolha da estaca, pois qualquer que seja o seu comprimento, é constante o quociente entre a medida do comprimento $\underline{a}$ e a medida da sua sombra $\underline{s}$ na mesma hora.

Para realizar as construções de que necessitavam, calcular a altura das pirâmides, a largura dos rios, a altura das montanhas etc., os matemáticos da Antigüidade baseavam-se em dois conceitos: razão entre dois números e triângulos semelhantes. Esses procedimentos marcam o início da Trigonometria.

Enquanto ramo de conhecimento científico, a trigonometria é indissociável da astronomia (um dos primeiros interesses científicos do homem), cujo desenvolvimento progressivo como ciência exata passou a exigir medições e cálculos de crescente precisão.

A trigonometria, como outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem. Antigos egípcios e babilônios conheciam e usavam alguns teoremas sobre razões entre os lados de triângulos semelhantes mas, como não dominavam o conceito de ângulo, não avançaram na elaboração da teoria trigonométrica.

Durante dois séculos e meio, desde Hipócrates até Eratóstenes (276 - 194 a.C.), foram estudados diferentes problemas sobre astronomia, mas isso não resultou uma trigonometria sistemática.

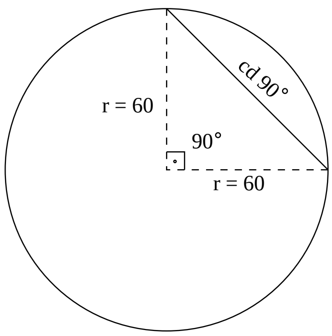
Porém, os gregos, conhecendo o trabalho dos egípcios e babilônios, sistematizaram estes conhecimentos, estabelecendo correspondência entre ângulos e o comprimento das cordas de uma circunferência, bem como a apresentação de algumas propriedades sobre as medições desses ângulos.

O primeiro sábio a construir uma tabela trigonométrica contendo e relacionando cordas e arcos foi o grego Hiparco de Nicéia (180 - 125 a.C.), movido por necessidade de seus cálculos em astronomia e influenciado pela astronomia babilônica construída a partir do sistema de numeração sexagesimal. Por esse motivo, é considerado "pai da trigonometria".

Hiparco construiu uma tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos entre 0^o e 180^o, a qual apresentava a correspondência entre o arco e a sua corda. Essa cosntrução foi um grande avanço para a astronomia.

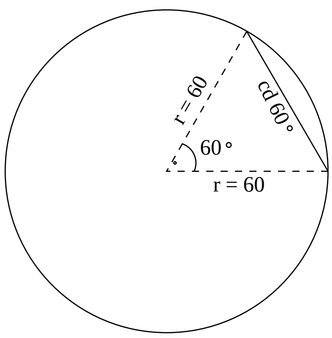
Hiparco pouco deixou escrito sobre seus estudos. A principal fonte de conhecimento de seu trabalho é a obra deixada por outro grande astrônomo grego que viveu três séculos mais tarde - Clarídio Ptolomeu - que, no seu livro *Almagesto* (que significa o maior), desenvolve vários temas que podem ser atribuídos a Hiparcos. Ptolomeu expôs, em Almagesto, métodos usados na construção de tabelas trigonométricas. Muitos conceitos de trigonometria já eram conhecidos e utilizados por Ptolomeu.

No livro Almagesto, encontramos uma tabela trigonométrica bem mais completa que a de Hiparco, em que são fornecidas as medidas das cordas de uma circunferência para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0º e 180º. Para determinar essas medidas, Ptolomeu utilizou a base sexagesimal, o mesmo que fez Hiparco. Em todos os seus cálculos, portanto, ele usou uma circunferência com raio de 60 unidades. Usando o Teorema de Pitágoras, Ptolomeu determinou a corda correspondente ao ângulo de 90º, que ele indicava $cd\,90^{\text{o}}$:



$$(cd\,90^{\text{o}})^2 = r^2 + r^2$$
$$(cd\,90^{\text{o}})^2 = 2r^2$$
$$cd\,90^{\text{o}} = \sqrt{2r^2}$$
$$cd\,90^{\text{o}} = r\sqrt{2}$$
$$cd\,90^{\text{o}} = 60\sqrt{2}$$

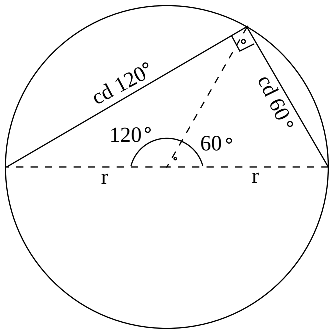
Para calcular a medida da corda de 60º, isto é, $cd\,60^{\text{o}}$, Ptolomeu observou que o triângulo formado é equilátero. Portanto:



$$cd\,60^{\text{o}} = r = 60$$

À medida que calculava o valor da corda de um ângulo, o matemático também calculava a corda do suplemento desse ângulo, aplicando mais uma vez o teorema de Pitágoras:

Durante seis séculos, o Almagesto representou a mais importante fonte de consulta para os astrônomos de todo o mundo. Apenas no século VIII é que os cientistas voltariam



$$(cd\,120^o)^2 + (cd\,60^o)^2 = (r+r)^2$$

Como $cd\,60^o = r$, temos:

$$(cd\,120^o)^+ r^2 = (2r)^2$$

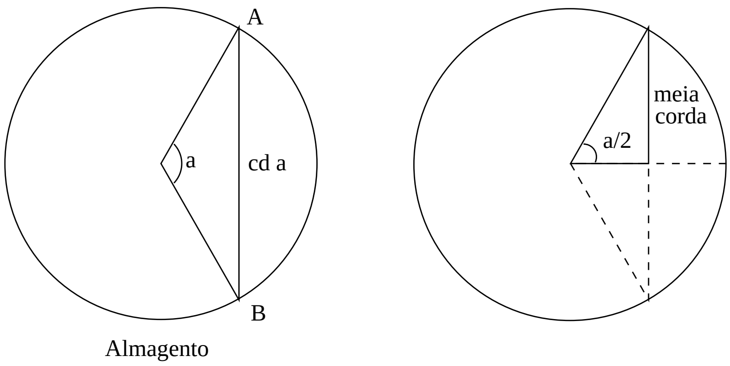
$$cd\,120^o = \sqrt{3r^2}$$

$$cd\,120^o = r\sqrt{3}$$

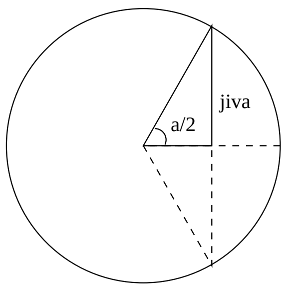
$$cd\,120^o = 60\sqrt{3}$$

a sua atenção para as obras trigonométricas de um povo que sempre surpreendera o mundo com sua matemática original e criativa: os hindus.

Apesar do amplo domínio do Almagesto, no final do século IV começou a surgir, na Índia, um conjunto de textos matemáticos denominados Siddhanta, cujo significado corresponde a sistemas de astronomia. Esses textos apresentam um trabalho fundamental para a trigonometria, que viria melhorar o trabalho de Ptolomeu. Em vez de seguir o caminho do Almagesto de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes, os matemáticos hindus apresentavam uma trigonometria baseada na relação entre a metade da corda e metade do ângulo central.

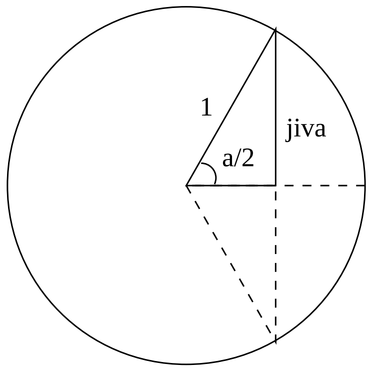


Mas qual a vantagem de trabalhar com meia corda, que os hindus chamavam de *jiva*? Os hindus foram buscar, no interior do círculo, um triângulo retângulo.



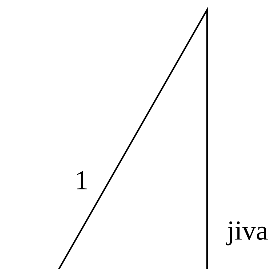
Os autores de Siddhanta construíram uma tabela trigonométrica, calculando os valores da meia corda para os valores da metade dos ângulos centrais correspondentes, em intervalos iguais de $3,75^o$ até 90^o.

Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o Almagesto e a Trigonometria de jiva. O conceito chegou ao final quando, entre os anos 850 e 929, o matemático árabe al-Battani adotou a Trigonometria hindu, introduzindo uma inovação, o círculo de raio unitário e assim calcular as razões.



Assim, nas tabelas trigonométricas elaboradas a partir de al-Battani, o valor da corda correspondente a $\frac{a}{2}$ podia ser interpretado como $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \text{jiva}$.

Como todo número dividido por 1 é o próprio número, podemos escrever:

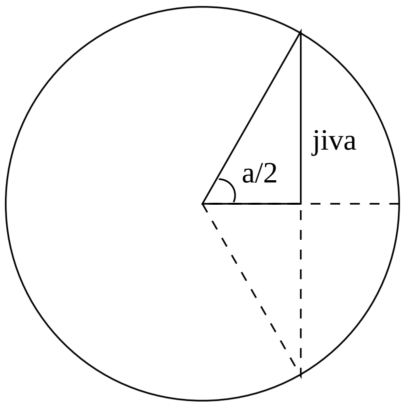


$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{jiva}}{1}$$

No começo do século XII, a matemática árabe tinha atingido um desenvolvimento tão grande, que o restante do mundo não podia ficar alheio. Foi feita uma série de traduções do árabe para o latim, o que possibilitou o desenvolvimento da matemática na Europa. Os tradutores eram, na grande maioria, brilhantes matemáticos. Entre eles, destacava-se o inglês Robert de Chester.

Os árabes, por sua vez, haviam traduzido textos de Trigonometria do Sânscrito, língua a qual o Siddhanta foi escrito. Nesse processo, quando se depararam com o palavra jiva - meia corda - , eles simplesmente escreveram jiba. E mais, na língua árabe é comum escrever apenas as consoantes de uma palavra, deixando que o leitor acrescente mentalmente as vogais. Assim os tradutores árabes registraram: jb. Na sua tradução do árabe para o latim, Robert de Chester interpretou jb como sendo as consoantes da palavra jaib, que em latim, significa baía ou enseada e escreve-se: *sinus*.

A partir daí, a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um triângulo retângulo passou a ser chamado de sinus (em português, seno).



$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{jiva}}{1}$$

Toda a trigonometria que estudamos hoje está baseada no seno dos hindus. Com o tempo, outras razões trigonométricas foram sendo criadas: o cosseno, a tangente, etc.

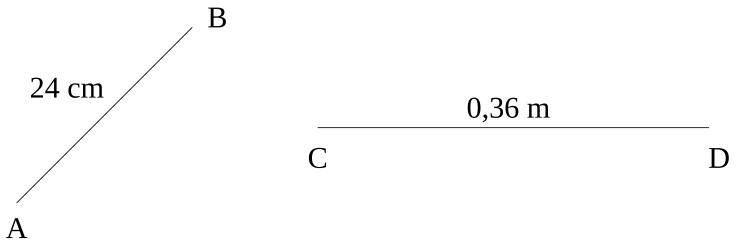
Veremos a seguir mais detalhadamente essas razões.

2.2 Razão e Proporção

Em geral, comparamos dois números através da divisão. Dados dois números a e b, com $b \neq 0$, a razão entre a e b é o quociente $\dfrac{a}{b}$ ou $a : b$.

A razão entre dois segmentos é o quociente da medida de um pela medida do outro, desde que expressemos ambas as medidas na mesma unidade.

A razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é representada por $\dfrac{AB}{CD}$ ou $AB : CD$ e é igual ao número:



$$\frac{AB}{CD} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \text{ (a unidade comum é o centímetro).}$$

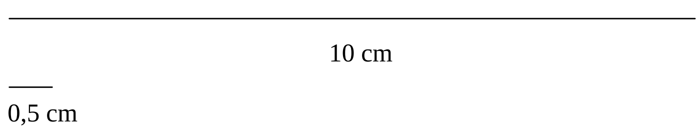
Note que as medidas dos segmentos não estão na mesma unidade. Passando tudo para a mesma unidade, nesse caso centímetros temos, $0,36m = 36cm$.

Se tivermos um segmento de 10 cm e outro de 0,5 cm, o que significa dividirmos 10 por 0,5?

$$\frac{10}{0,5} = \frac{10}{\frac{5}{10}} = 10 \cdot \frac{10}{5} = \frac{100}{5} = \frac{20}{1} = 20.$$

O que este quociente representa?

Representa a comparação entre os segmentos, isto é, “cabem” 20 segmentos de 0,5 cm no segmento 10 cm, ou seja, o segmento de medida 10 cm é 20 vezes maior que o segmento de medida 0,5 cm.



Um exemplo de razão, não aplicada a segmentos:

Qual a razão do carro de corrida e da tartaruga?

$$\frac{\text{velocidade do carro}}{\text{velocidade da tartaruga}} = \frac{300\,km/h}{0,06\,km/h} = 5000.$$

A velocidade do carro é 5000 vezes maior que a da tartaruga.

Uma igualdade entre duas razões é chamada **proporção**.

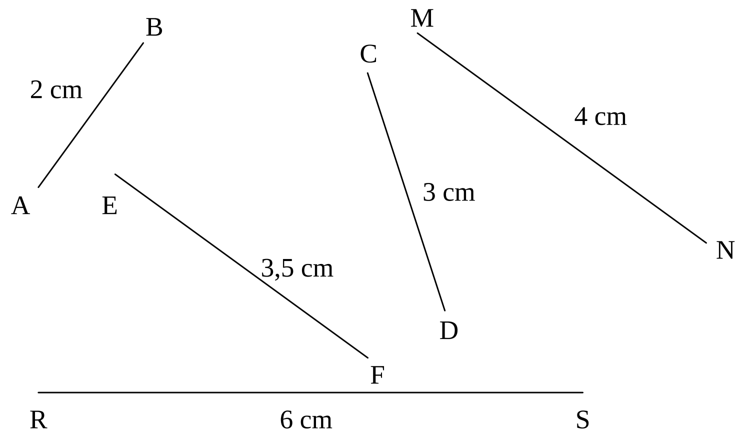
Qualquer proporção tem quatro termos:

$$\begin{array}{ccc} 1^{\text{o}}\ \text{termo} & & 3^{\text{o}}\ \text{termo} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \dfrac{a}{b} & = & \dfrac{c}{d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2^{\text{o}}\ \text{termo} & & 4^{\text{o}}\ \text{termo} \end{array}$$

O primeiro e o quarto termos são chamados extremos; o segundo e o terceiro, meios.

Agora, observe os segmentos de reta da ilustração e tente responder:

Existem quatro segmentos de reta cujas medidas formam uma proporção?



Se você pensou em $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{RS}$, nesta ordem, então encontrou uma das respostas.

Observe:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{MN}{RS} = \frac{4}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \text{ é uma proporção.}$$

Dizemos que $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{RS}$, nesta ordem, são segmentos de reta proporcionais.

Ao final de cada conteúdo, será elaborada uma lista de exercícios e atividades onde os alunos poderão compreender melhor a idéia de razão e proporção entre segmentos para que os utilize em conteúdos posteriores. Estas atividades e exercícios propostos serão anexados a este trabalho.

2.3 Teorema da Proporcionalidade

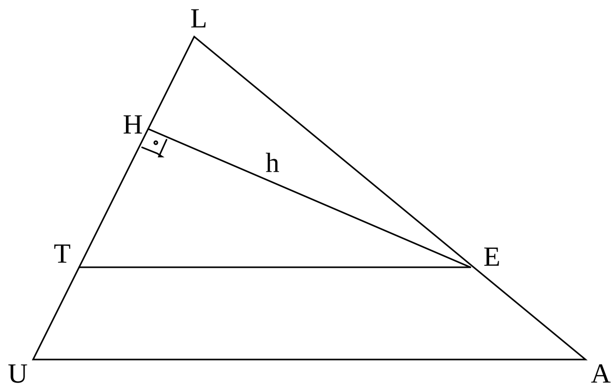
O Teorema da proporcionalidade e o Teorema de Tales serão trabalhados com os alunos para que compreendam melhor a idéia de segmentos proporcionais ajudando a entender com mais clareza a semelhança de triângulos e posteriormente as razões trigonométricas no triângulo retângulo. As áreas de triângulos nos ajudam a verificar uma propriedade muito importante em matemática: o Teorema da proporcionalidade.

Teorema 2.3.1 *Em um triângulo LUA qualquer, um segmento $\overline{TE}$, paralelo a $\overline{UA}$ e com os pontos T e E, respectivamente, sobre os lados $\overline{LU}$ e $\overline{LA}$, determina sobre esses lados segmentos proporcionais, de forma que:*

$$\frac{LT}{TU} = \frac{LE}{EA}.$$

Demonstração:

Vamos mostrar que a afirmação é verdadeira. Primeiramente, traçamos $\overline{EH}$ perpendicular a $\overline{LU}$:



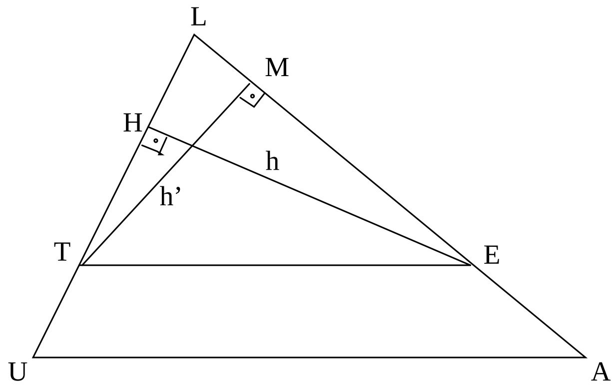
Os triângulos LET e TEU têm a mesma altura h, em relação aos lados $\overline{LT}$ e $\overline{TU}$, respectivamente. Vamos escrever a área dos dois triângulos:

$$\begin{aligned} \text{Área do triângulo } LET &= \frac{LT \cdot h}{2} \\ \text{Área do triângulo } TEU &= \frac{TU \cdot h}{2} \end{aligned}$$

A razão entre as áreas é:

$$\frac{\text{Área do triângulo } LET}{\text{Área do triângulo } TEU} = \frac{\frac{LT \cdot h}{2}}{\frac{TU \cdot h}{2}} = \frac{LT}{TU}.$$

Agora traçamos $\overline{TM}$ perpendicular a $\overline{LA}$:



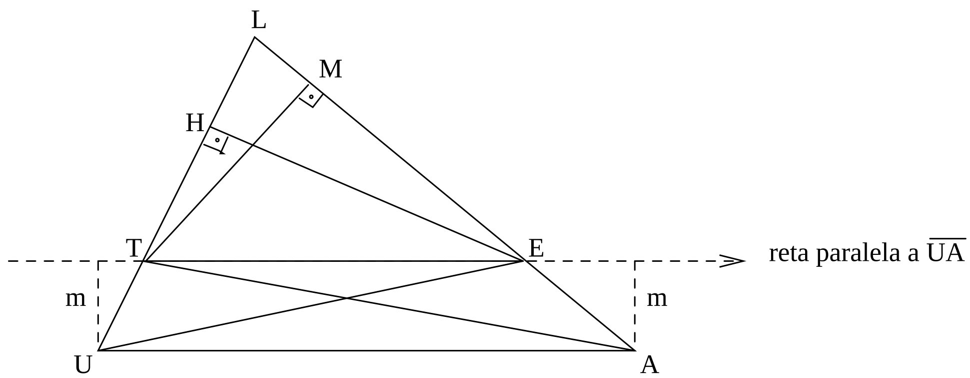
Os triângulos LET e TEA têm a mesma altura h', em relação aos lados $\overline{LE}$ e $\overline{EA}$, respectivamente.

Escrevendo as áreas dos triângulos:

$$\begin{aligned}\text{Área do triângulo } LET &= \frac{LE \cdot h'}{2}\\ \text{Área do triângulo } TEA &= \frac{EA \cdot h'}{2}\end{aligned}$$

A razão entre as áreas é:

$$\frac{\text{Área do triângulo } LET}{\text{Área do triângulo } TEA} = \frac{\frac{LE \cdot h'}{2}}{\frac{EA \cdot h'}{2}} = \frac{LE}{EA}.$$



Os triângulos TEU e EUA têm áreas iguais porque têm a mesma base $\overline{TE}$ e a mesma altura m. Dessa forma, a razão entre as áreas dos triângulos LET e TEU é igual à razão entre as áreas dos triângulos LET e TEA. Assim, podemos escrever que:

$$\frac{LT}{TU} = \frac{LE}{EA}.$$

■

Uma aplicação importante do Teorema da proporcionalidade é o Teorema de Tales.

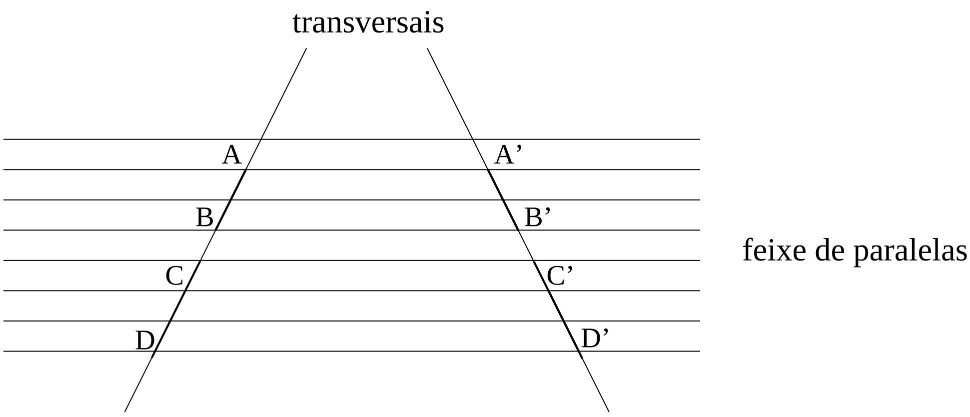
Definição 2.3.1

1) **Feixe de retas paralelas:** *é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.*

2) **Transversal do feixe de retas paralelas:** *é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.*

3) **Pontos correspondentes de duas retas transversais:** *são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.*

4) **Segmentos correspondentes de duas transversais:** *são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.*



A e A', B e B', C e C', D e D' são pontos correspondentes.

$\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ são segmentos correspondentes.

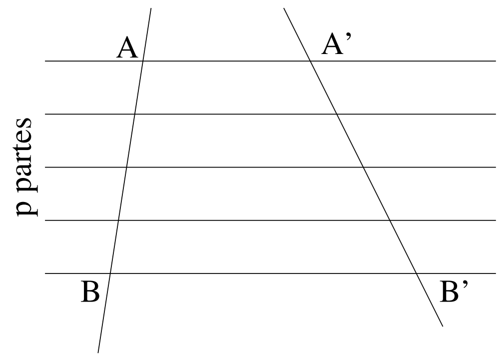
Teorema 2.3.2 *Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e o segmento de uma delas é dividido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:*

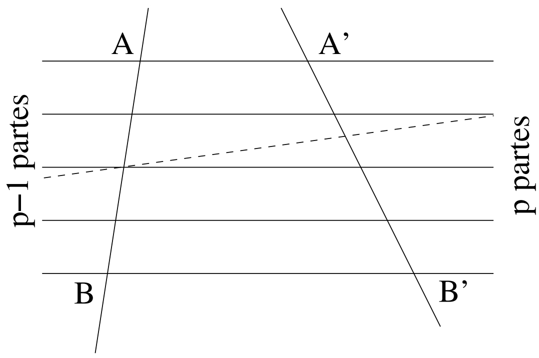
1º) também é dividido em p partes.

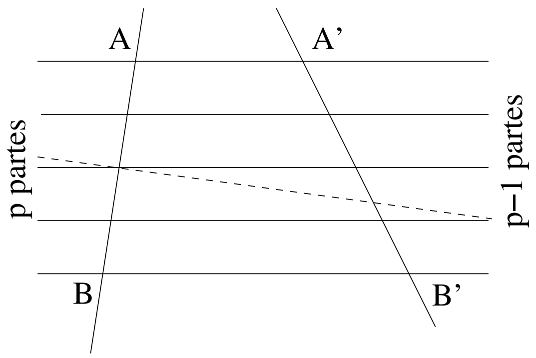
2º) e essas partes também são congruentes entre si. Isto é, um feixe de retas paralelas que determina segmentos de reta congruentes sobre uma reta transversal, determinará segmentos de reta congruentes em qualquer outra reta transversal a este feixe.

Demonstração:

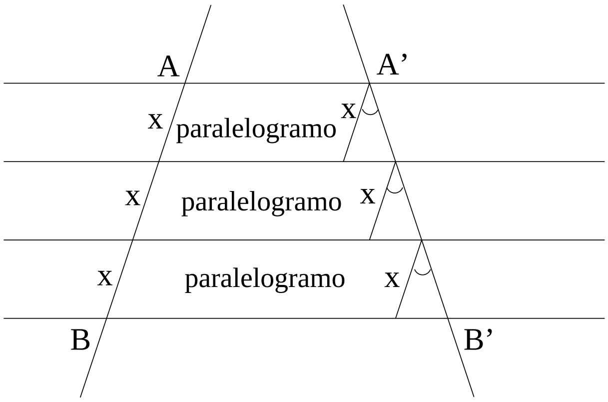
1ª parte: $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ sao segmentos correspondentes e $\overline{AB}$ é dividido em p partes por retas do feixe. Se $\overline{A'B'}$ ficasse dividido em menos partes (ou mais partes), pelo menos duas retas do feixe iriam se encontrar em pontos de $\overline{AB}$ (ou de $\overline{A'B'}$), o que é absurdo pois as retas do feixe são paralelas.







2ª parte: $\overline{AB}$ é dividido em partes congruentes a x. Pelos pontos de divisão de $\overline{A'B'}$, conduzindo paralelas a $\overline{AB}$, obtemos um triângulo para cada divisão. Todos os triângulos são congruentes pelo caso ALA (basta notar os paralelogramos e os ângulos de lados respectivamente paralelos que são obtidos).

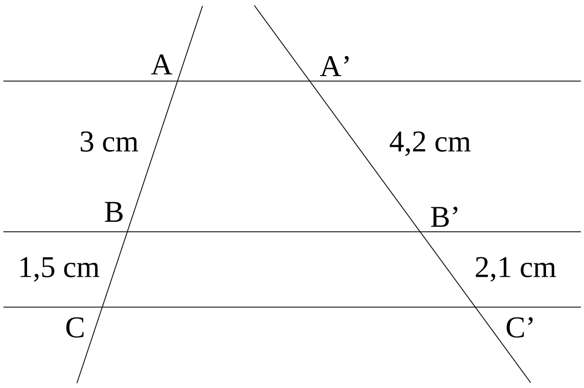


Com isso, $\overline{A'B'}$ é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

■

2.4 Teorema de Tales

Observe a figura



$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{1,5} = 2$$

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{4,2}{2,1} = 2$$

Observe que estas medidas formam uma proporção. Em nossa figura, a distância da primeira à segunda paralela é o dobro da distância da segunda à terceira. Em situações como esta, sempre ocorre uma proporção. Por exemplo, se a distância entre as paralelas estiver na razão 2 para 3, então os segmentos das transversais também estarão na razão 2 para 3.

Teorema 2.4.1 Teorema de Tales *Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos dos correspondentes da outra.*

Podemos demonstrar este Teorema:

Hipótese

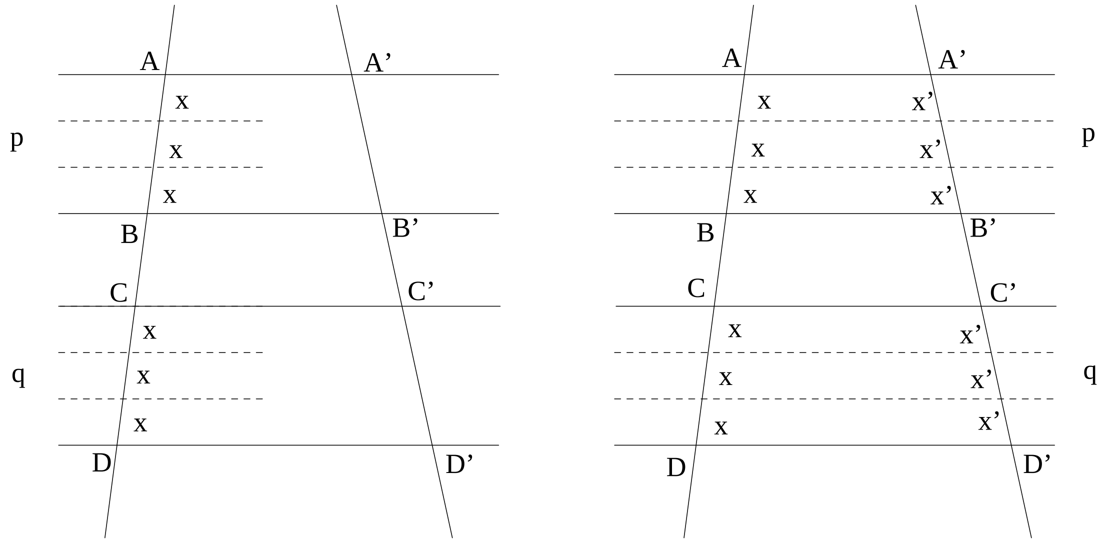
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos de uma transversal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos segmentos correspondentes da outra.

$\Rightarrow$

Tese

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Demonstração:



Existe um segmento x que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$.

$$\begin{matrix} \overline{AB} = px \\ \overline{CD} = qx \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \tag{2.4.1}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (vide figura) e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\begin{matrix} \overline{A'B'} = px' \\ \overline{C'D'} = qx' \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \tag{2.4.2}$$

Comparando (2.4.1) e (2.4.2), temos: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$. ■

Mais tarde, veremos por que o Teorema de Tales é importante. Por enquanto, vamos aprender a utilizá-lo.

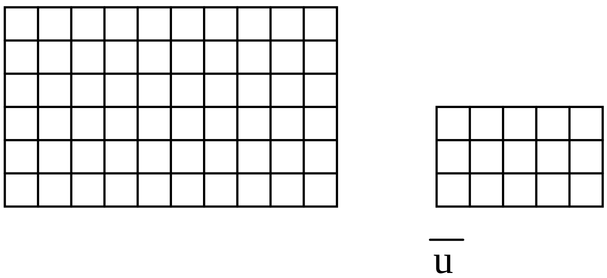
Atividades e exercícios sobre o Teorema de Tales (em anexo).

2.5 Semelhança de Triângulos

Estudaremos agora a semelhança nos triângulos pois posteriormente precisaremos deste conceito. A questão da semelhança em polígonos e figuras já foi abordada anteriormente mas será brevemente revisada a seguir.

Dois polígonos são semelhantes quando os lados que se correspondem são proporcionais e os ângulos que se correspondem são congruentes.

Exemplo 1



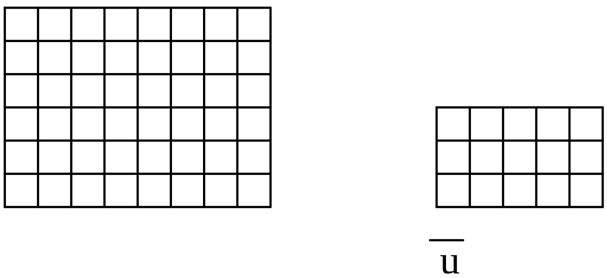
Nesses dois retângulos (note que aqui os ângulos correspondente são congruentes), como em todas as demais figuras semelhantes, existe uma proporção entre as dimensões de um e de outro, que no caso é:

$$\frac{10u}{6u} = \frac{5u}{3u}.$$

$\overline{u}$ denota a unidade de medida da figura.

Contra-exemplo

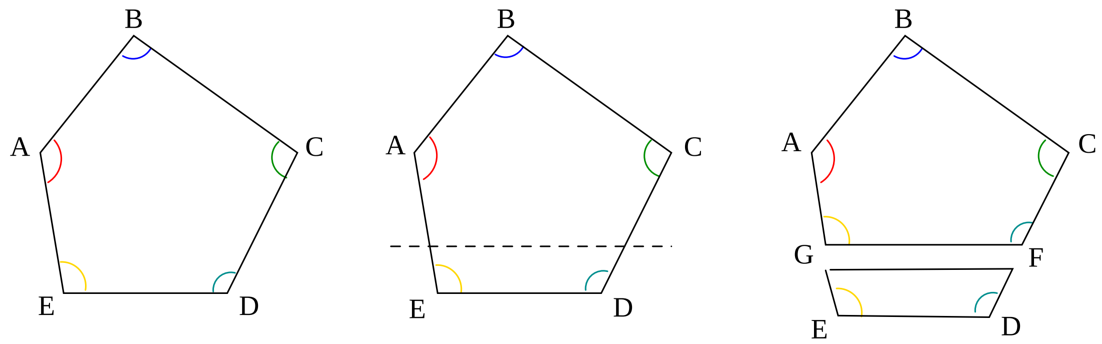
Os dois retângulos seguintes **não** são semelhantes, pois não podemos escrever uma proporção com seus lados.



$$\frac{8u}{6u} \neq \frac{5u}{3u}.$$

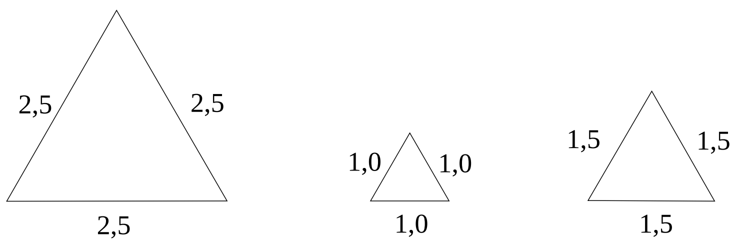
Contra-exemplo

O pentágono $ABCDE$ foi cortado por uma reta paralela a um de seus lados:



Os pentágonos $ABCDE$ e $ABCFG$ têm ângulos iguais, os ângulos $\hat{G}$ e $\hat{E}$, $\hat{F}$ e $\hat{D}$ são iguais devido a propriedade de ângulos correspondentes em paralelas, mas eles não são semelhantes porque de AB para AG o lado diminui enquanto outros lados como AB, não mudaram.

Então os pentágonos possuem ângulos correspondentes iguais mas os lados que se correspondem **não** são proporcionais.



E com os triângulos, o que aconteceu?

Dois triângulos são sempre semelhantes?

Não, mas dois triângulos eqüiláteros, sim.

Aqui, todos os triângulos são semelhantes, pois os ângulos correspondentes são iguais (60°) e todos os lados são proporcionais.

Para dois polígonos serem semelhantes, eles precisam satisfazer as duas condições.

- terem ângulos respectivamente congruentes e

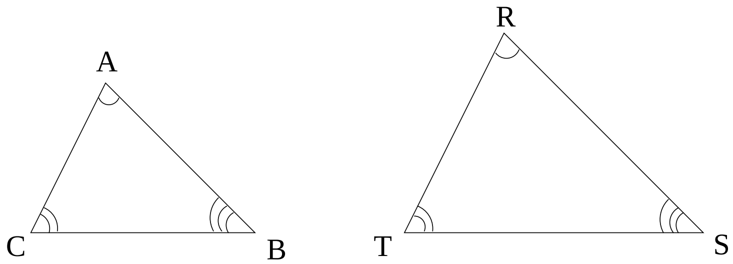
- lados respectivamente proporcionais.

Com os triângulos, no entanto, ocorre uma particularidade: basta satisfazer a apenas uma das condições, para que sejam semelhantes. Isso porque, no triângulo, uma dessas condições leva à outra, e vice-versa.

Teorema 2.5.1 *Se dois triângulos têm os ângulos respectivamente, congruentes, então seus lados são, respectivamente, proporcionais.*

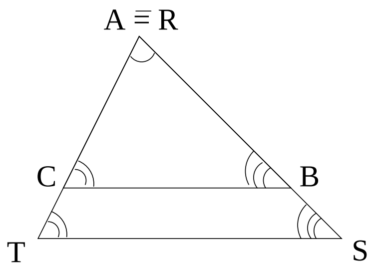
Demonstração:

Considere os triângulos ABC e RST, de modo que $\hat{A} \equiv \hat{R}$, $\hat{B} \equiv \hat{S}$ e $\hat{C} \equiv \hat{T}$.



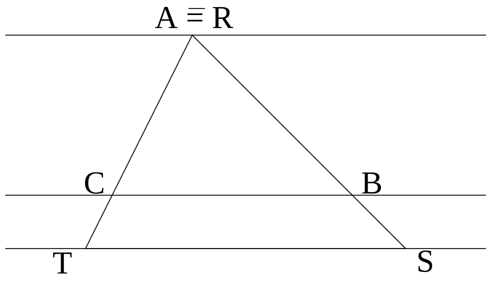
Vamos provar que $\dfrac{AB}{RS} = \dfrac{AC}{RT} = \dfrac{BC}{ST}$.

Como $\hat{A} \equiv \hat{R}$, podemos colocar o triângulo ABC sobre e triângulo RST de maneira que $\hat{A}$ e $\hat{R}$ fiquem superpostos.



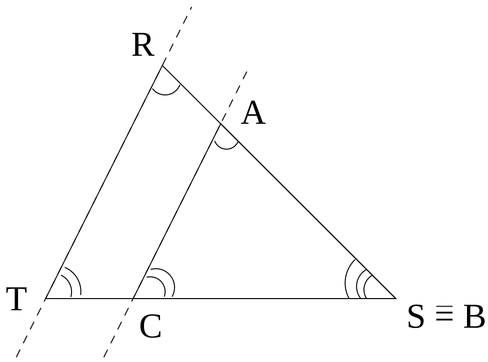
Nesse caso, temos $\overleftrightarrow{CB} // \overleftrightarrow{ST}$, pois $\hat{B} \equiv \hat{S}$, e esses ângulos são correspondentes.

Traçamos a paralela a $\overleftrightarrow{ST}$ que passa pelo vértice R e aplicamos o Teorema de Tales:



$$\frac{AC}{RT} = \frac{AB}{RS} \qquad (I)$$

Agora, vamos repetir o que fizemos, colocando o triângulo ABC sobre o triângulo RST mas, desta vez, fazemos com que $\hat{B}$ e $\hat{S}$ fiquem superpostos.



Como $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{RT}$, usamos novamente o Teorema de Tales:

$$\frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} \qquad (II)$$

Das igualdades (I) e (II), concluímos que:

$$\frac{AB}{RS} = \frac{AC}{RT} = \frac{BC}{ST}.$$

Portanto, os lados do triângulo ABC e do triângulo RST são, respectivamente, proporcionais.

$\blacksquare$

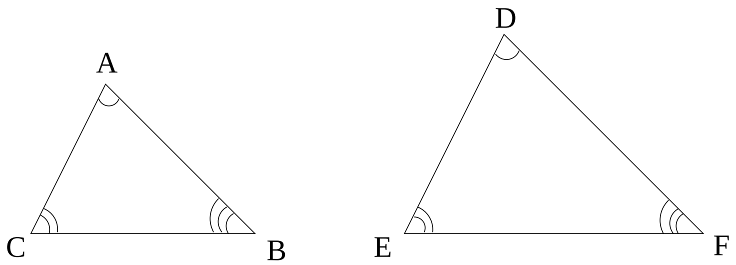
2.5.1 O caso AA de semelhança

Vimos que, se dois triângulos têm os ângulos respectivamente congruentes, eles têm os lados respectivamente proporcionais. portanto, eles são triângulos semelhantes. Na verdade, para saber se dois triângulos são semelhantes, não é preciso verificar se eles têm os três ângulos respectivamente congruentes. Basta verificar dois ângulos. Se eles tiverem dois ângulos respectivamente congruentes, já se pode concluir que os triângulos são semelhantes. Isso porque, nos triângulos, a soma dos ângulos internos é 180º. Assim, se dois ângulos forem respectivamente congruentes, o mesmo acontecerá com o ângulo restante.

Propriedade 2.5.1 Caso AA de semelhança *Se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.*

Demonstração:

Consideremos os triângulos ABC e DEF, nos quais $\hat{B} \cong \hat{F}$ e $\hat{C} \cong \hat{E}$.



Lembrando que a soma das medidas dos ângulo internos de um triângulo é igual a 180º :

- triângulo ABC: $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = 180^{o}$ (I)
- triângulo DEF: $med(\hat{D}) + med(\hat{E}) + med(\hat{F}) = 180^{o}$ (II)

Comparando (I) e (II), podemos escrever:

$$med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = med(\hat{D}) + med(\hat{E}) + med(\hat{F}).$$

Como $med(\hat{B}) = med(\hat{E})$ e $med(\hat{C}) = med(\hat{F})$, podemos concluir que

$$med(\hat{A}) = med(\hat{D}),$$

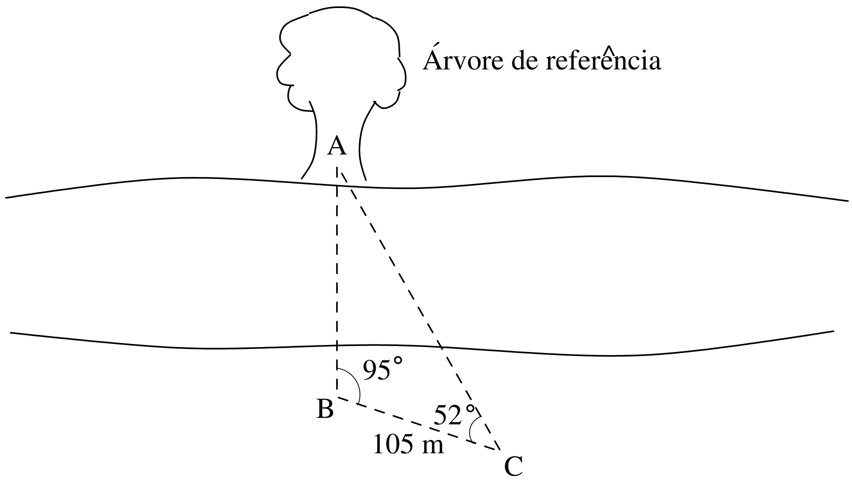
ou seja, os triângulos são semelhantes.

$\blacksquare$

Essa propriedade dos triângulos tem inúmeras aplicações práticas. Vejamos alguns exemplos.

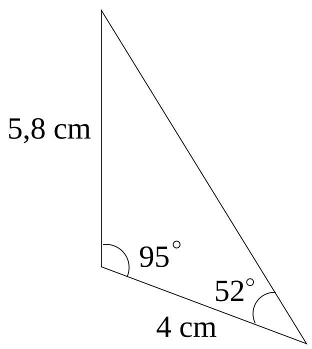
Exemplo 1

Imagine que, para fazer um mapa, seja necessário saber a largura de um rio. Graças a essa propriedade dos triângulos a largura pode ser obtida facilmente. Veja:



Medem-se os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e a distância BC.

Apenas com essas medidas resolve-se o problema. Para isso, desenha-se um triângulo semelhante com medidas bem menores que serão proporcionais àquelas do rio, medindo seus lados e usando proporcionalidade encontra-se a largura:



largura do rio: x

$$\frac{x}{5,8} = \frac{105}{4}$$

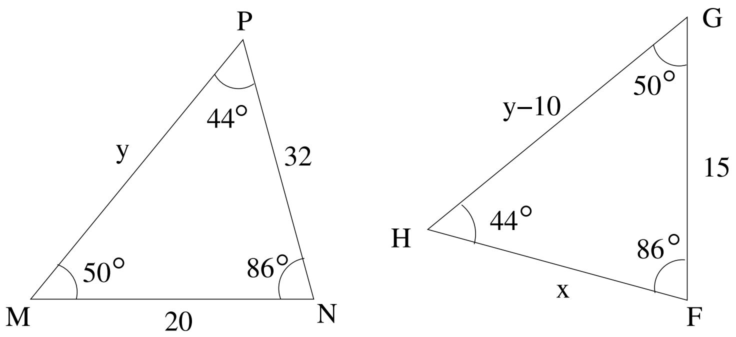
$$x = \frac{5,8 \cdot 105}{4} = 152,25$$

largura aproximada do rio: 152 m

Calculando a largura do rio dessa maneira, evita-se muito trabalho. É por isso que a semelhança de triângulos é um conhecimento importante para geógrafos, cartógrafos, agrimensores, topógrafos e engenheiros. Estes profissionais usam instrumentos especiais para medir ângulos, um deles é o teodolito.

Exemplo 2

Os triângulos MNP e FGH são semelhantes. Nessas condições, determine as medidas dos lados $\overline{MP}$, $\overline{GH}$e $\overline{FH}$.



De acordo com as indicações nas figuras, temos $\triangle MNP \cong \triangle FGH$. Então, podemos escrever:

$$\frac{MN}{FG} = \frac{MP}{GH} = \frac{NP}{FH} \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{15} = \frac{y}{y-10} = \frac{32}{x}$$

ou seja,

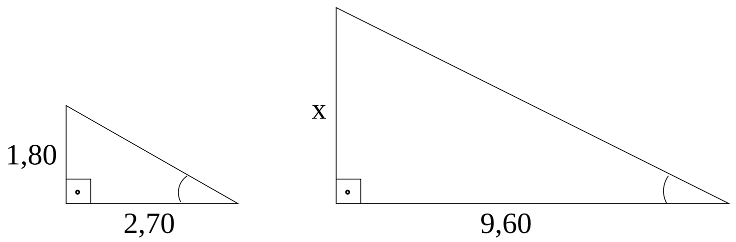
$\dfrac{20}{15} = \dfrac{y}{y-10} \;\Rightarrow\; 20(y-10) = 15y \;\Rightarrow\; 20y - 200 = 15y \;\Rightarrow\; 5y = 200 \;\Rightarrow\; y = 40.$

$\dfrac{20}{15} = \dfrac{32}{x} \;\Rightarrow\; 20x = 280 \;\Rightarrow\; x = 24.$

Como $y = 40$, temos $MP = 40$ e $GH = 40 - 10 = 30$. Como $x = 24$, temos $FH = 24$.

Exemplo 3

Um homem de 1,80m de altura projeta uma sombra de 2,70m de comprimento no mesmo instante em que um poste projeta uma sombra de 9,60m de comprimento. Qual é a altura do poste?



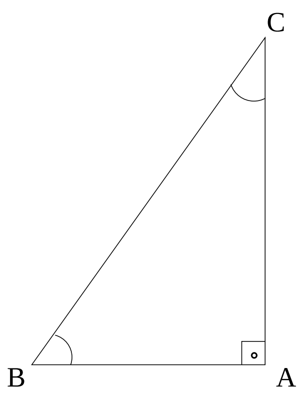
Indicando por x a altura do poste e como os triângulos são semelhantes, temos:

$$\frac{1,80}{x} = \frac{2,70}{9,60} \quad \Rightarrow \quad 2,70x = 17,28 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{17,28}{2,70} = 6,40.$$

Logo, a altura do poste é de 6,40m.

Após a exposição desses exemplos, os alunos irão resolver uma lista de exercícios, sendo estes, de fixação e compreensão além de algumas atividades feitas em sala de aula.

2.6 Relações trigonométricas no triângulo retângulo



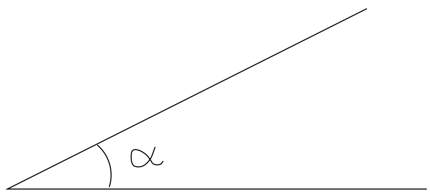
No triângulo retângulo ABC destacamos a hipotenusa $\overline{BC}$ e os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Se usarmos como referência o ângulo $\hat{B}$, podemos escrever:

- $\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$.
- $\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$.

E se usarmos como referência o ângulo $\hat{C}$, podemos escrever:

- $\overline{AB}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{C}$.
- $\overline{AC}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$.

Vamos, agora, considerar que a figura seguinte seja uma rampa na qual destacamos o ângulo de medida α (ou simplesmente ângulo alfa), chamado ângulo de subida.



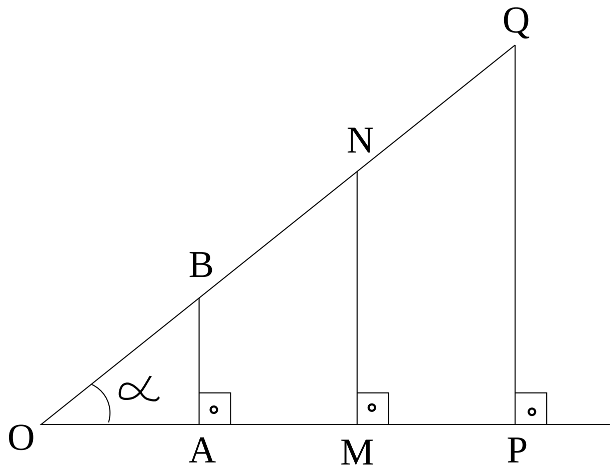
Sobre um dos lados da rampa marcamos os pontos B, N e Q, e por esses pontos traçamos perpendiculares sobre o outro lado.

Por **semelhança de triângulos**, notemos que:

$$\triangle OAB \sim \triangle OMN \sim \triangle OPQ \sim \triangle \cdots$$

Podemos, então, estabelecer as seguintes **razões**:

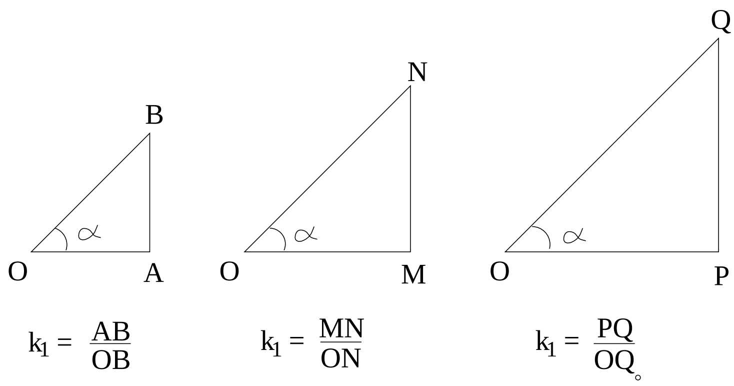
$$\frac{AB}{OB} = \frac{MN}{ON} = \frac{PQ}{OQ} = \cdots = k_1(constante)$$



$$\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON} = \frac{OP}{OQ} = \cdots = k_2 (constante)$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{MN}{OM} = \frac{PQ}{OP} = \cdots = k_3 (constante)$$

O número k_1 é chamado seno do ângulo agudo α e representa a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa em **qualquer** triângulo retângulo, conforme você observa nas figuras seguintes, obtidas a partir da figura original:

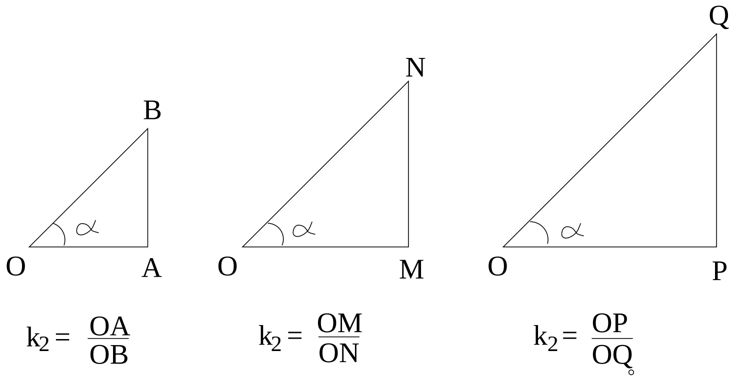


$$\text{seno do ângulo } \alpha = k_1 = \frac{AB}{OB} = \frac{MN}{ON} = \frac{PQ}{OQ}$$

ou

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

O número k_2 é chamado cosseno do ângulo agudo α e representa a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α e a medida da hipotenusa em **qualquer** triângulo retângulo, conforme você observa nas figuras seguintes, obtidas a partir da figura original:

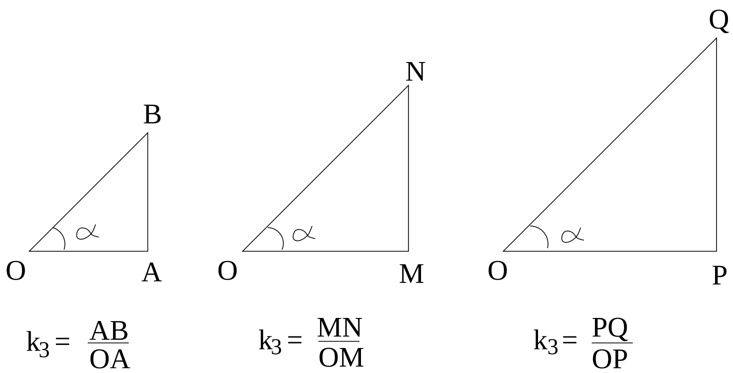


$$\text{cosseno do ângulo } \alpha = k_2 = \frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON} = \frac{OP}{OQ}$$

ou

$$\cos\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

O número k_3 é chamado tangente do ângulo agudo α e representa a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo α em **qualquer** triângulo retângulo. Observe as figuras seguintes, obtidas a partir da figura original:



$$\text{tangente do ângulo } \alpha = k_3 = \frac{AB}{OA} = \frac{MN}{OM} = \frac{PQ}{OP}$$

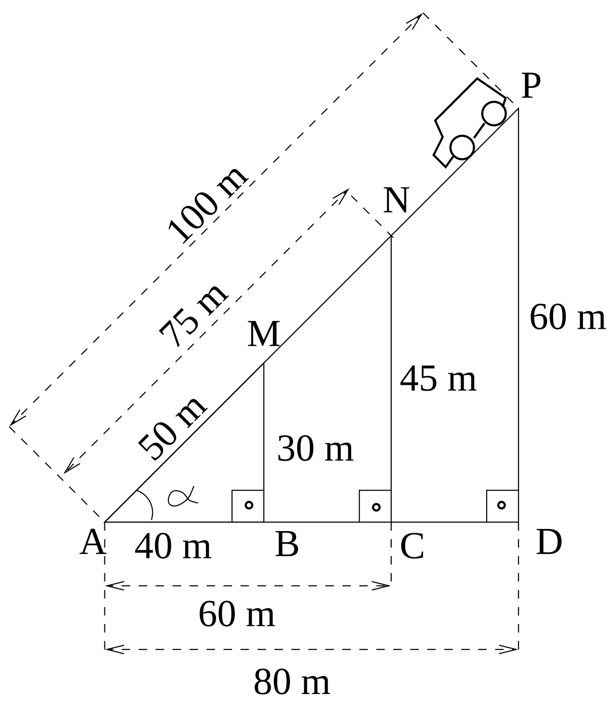
ou

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}.$$

Os números k_1, k_2 e k_3, que expressam, respectivamente, o seno, o cosseno e a tangente do ângulo agudo α, são denominados **razões trigonométricas** relativas ao ângulo α.

Ilustração

Observe a figura abaixo:



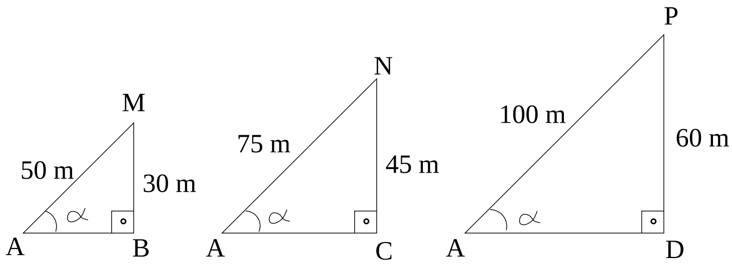
Suponha que a figura represente uma rampa que forma um ângulo α com o piso.

- Quando o carrinho percorre $50m$ sobre a rampa, atinge uma altura de $30m$, e o seu deslocamento na horizontal é de $40m$.
- Quando o carrinho percorre $75m$ sobre a rampa, atinge uma altura de $45m$, e o seu deslocamento na horizontal é de $60m$.
- Quando o carrinho percorre $100m$ sobre a rampa, atinge uma altura de $60m$, e o seu deslocamento na horizontal é de $80m$.

Considerando que os triângulos retângulos ABM, ACN e ADP são semelhantes entre si, vamos escrever a **razão** entre a altura que ele atinge e a distância que o carrinho percorre sobre a rampa, para os três momentos considerados.

Veja como podemos desmembrar a figura para estabelecer várias relações:

$$\triangle ABM \sim \triangle ACN \sim \triangle ADP$$



Podemos, então, escrever as seguintes razões:

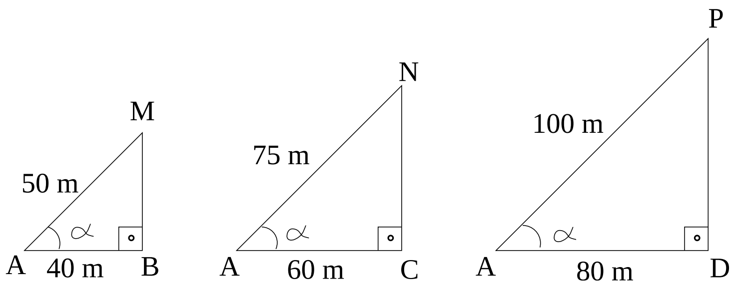
$$\frac{BM}{AM} = \frac{CN}{AN} = \frac{DP}{AP} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{50} = \frac{45}{75} = \frac{60}{100} = 0,6 \ \text{ valor constante}$$

Notemos que, em qualquer um dos triângulos retângulos considerados, a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa é expressa pelo mesmo número (no caso 0,6), **independentemente** das medidas dos lados considerados.

Para qualquer outro ponto da rampa, poderíamos formar um triângulo retângulo e calcular a mesma razão que obteríamos esse mesmo número. Portanto, esse quociente ao qual chamamos de **seno**, não depende das medidas dos lados do triângulo, mas unicamente das medidas do ângulo.

Voltando à rampa e ao triângulo ABM, ACN e ADP, podemos estabelecer outra igualdade entre razões:

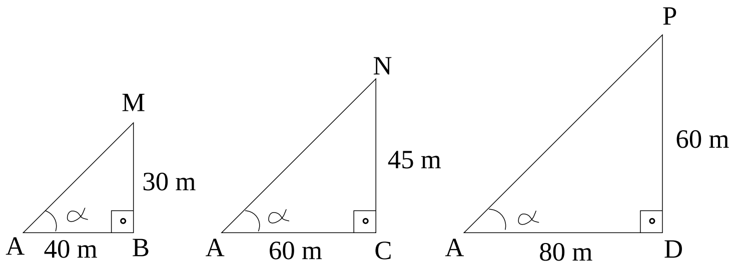
$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{AD}{AP} \quad \Rightarrow \quad \frac{40}{50} = \frac{60}{75} = \frac{80}{100} = 0,8 \ \text{ valor constante}$$



Em qualquer dos triângulos retângulos considerados, a razão chamada **cosseno** é o quociente entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α e a medida da hipotenusa, é expressa pelo mesmo número (no caso 0,8), independentemente das medidas dos lados considerados, como já foi visto no caso anterior.

Há ainda uma terceira igualdade que pode ser estabelecida entre razões:

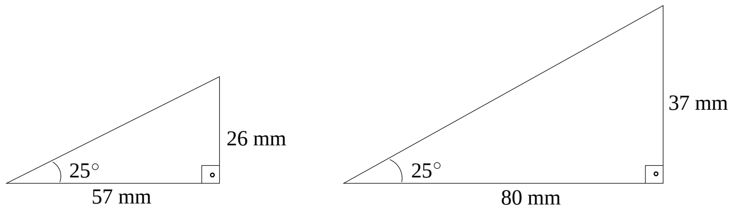
$$\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{DP}{AD} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{40} = \frac{45}{60} = \frac{60}{80} = 0,75 \ \text{ valor constante}$$



Em qualquer dos triângulos retângulos considerados, a razão chamada **tangente** é o quociente entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo α e é expressa pelo mesmo número (no caso 0,75), independentemente das medidas dos lados considerados.

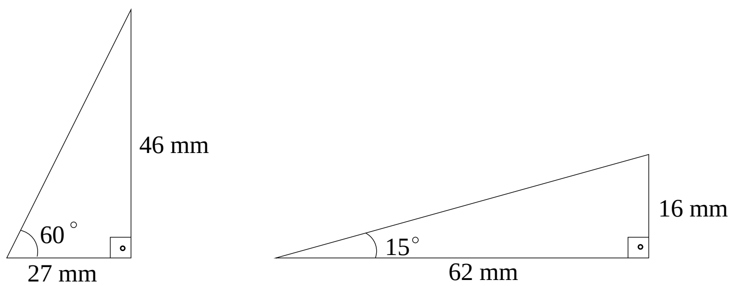
Por que o quociente (razão) não muda?

Porque todos esses triângulos são semelhantes. Somente quando mudamos o ângulo, a divisão entre o cateto oposto pela hipotenusa, o cateto adjacente pela hipotenusa e o cateto oposto pelo cateto adjacente, dá outros resultados. Veja:



$$\frac{36}{57} \cong 0,46 \qquad \frac{37}{80} \cong 0,46$$

triângulos semelhantes $\quad \Rightarrow \quad$ razão tangente igual



$$\frac{46}{27} \cong 1,7 \qquad \frac{16}{62} \cong 0,26$$

Isso quer dizer que em todo triângulo retângulo com um ângulo de 60º o valor $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ é aproximadamente 1,7. O triângulo pode ser minúsculo ou gigantesco, que o valor da divisão é sempre o mesmo.

O mesmo ocorrerá com os triângulos retângulos com um ângulo de 15º , as razões entre os lados serão as mesmas pois todos os triângulos serão semelhantes.

Os matemáticos perceberam a importância desse fato e fizeram tabelas com os calores das razões trigonométricas. Como a cada ângulo agudo está associado um **único** valor para o seno, o cosseno e a tangente, pode-se elaborar uma tabela que nos forneça esses valores, evitando assim a necessidade de calculá-los a toda hora.

A tabela que consta no Anexo V foi construída há séculos e nos dá os valores de seno, cosseno e tangente de ângulos de 1º até 89º com aproximação até milésimos.

A trigonometria que relaciona as medidas dos lados de um triângulo com as medidas de seus ângulos é de grande utilidade na medição de distâncias inacessíveis ao ser humano, como a altura de montanhas, torres e árvores, ou a largura de rios e lagos. Por esse motivo, a Trigonometria foi considerada, em sua origem, como uma extensão da Geometria.

2.7 Tabelas importantes

Na resolução de alguns problemas é mais conveniente usar os valores da seguinte tabela:

ângulo	sen	cos	tg
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Por extensão de definição, consideraremos:

ângulo	sen	cos	tg
0º	0	1	0
90º	1	0	$\nexists$

Capítulo 3

Atividades Propostas

"Eu ouço e eu esqueço

Eu vejo e eu lembro

Eu faço e eu aprendo!"

(Provérbio chinês)

As atividades a seguir tem como objetivo criar oportunidades para o aluno desenvolver o pensamento geométrico e o raciocínio proporcional. Estas atividades estimulam a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Procuram fazer com que a aprendizagem seja vivenciada como uma experiência progressiva, interessante e formativa, apoiada na ação, na descoberta, na reflexão e na comunicação, como preceituam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática. Por outro lado, minimizam ou evitam adestramento do cálculo mecânico, o uso de regras ou dispositivos práticos, a memorização, sem compreensão, de fórmulas como as razões trigonométricas. Enfim, prioriza-se a compreensão dos conceitos e procedimentos, para sua possível posterior aplicação na resolução de problemas.

3.1 Razão e proporção

A) Escala

Quando desenhamos plantas de casas, objetos, animais, pessoas, mapas, fazemos uma redução do tamanho natural dos objetos. Para saber seu tamanho real é preciso ampliá-lo conforme alguma informação. No caso deste mapa (Anexo III), a informação da escala significa: $1cm$ no desenho é igual a $135km$ no real. Essa escala indica a razão entre as medidas do desenho e as medidas reais, podemos escrever assim também: 1:13500000. Portanto:

Escala é uma razão entre um comprimento considerado no desenho e o comprimento real, medidos na mesma unidade.

$$\text{escala} = (\text{comprimento no desenho}):(\text{comprimento real})$$

ou

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}.$$

Veja o mapa de uma parte do Brasil (no Anexo II):

Usando uma régua podemos saber as distâncias aproximadas entre duas cidades do mapa. Por exemplo,quantos quilômetros separam Salvador de Fortaleza?

Se a régua indica $7,5cm$, na realidade o valor aproximado dessa distância é $7,5 \cdot 135km = 1020km$.

Agora é sua vez:

Este é o mapa de nosso município (no Anexo III): Paulo Lopes. Ele está desenhado na escala: _______.

Vamos descobrir a distância do seu bairro ao bairro da escola. Usando uma régua, meça a distância no desenho e encontre o valor real.

B) Atividade em grupo: 4 alunos

Cada equipe deverá encontrar uma foto e uma ampliação desta foto (geralmente as reveladas dão pôsteres de brinde). As fotos podem ser ampliadas ou reduzidas.

As dimensões de duas fotos, uma normal e outra ampliada, são proporcionais. Por exemplo, temos uma foto no tamanho normal com as dimensões $1,5cm$ por $2,3cm$ e as da ampliação $6,75cm$ por $10,35cm$. A razão entre as duas larguras e os dois comprimentos são:

$$\text{larguras: } \frac{6,75}{1,5} = 4,5 \quad \text{comprimentos: } \frac{10,35}{2,3} = 4,5.$$

Cada equipe deverá medir a foto original e a ampliação e calcular as devidas razões e, responder as perguntas abaixo:

a) As razões encontradas foram iguais? O que isso significa?

b) Em que escala foi ampliada a foto?

c) Em uma loja, a revelação de fotografia normal tem dimensões de $10cm$ por $15cm$ e as ampliações possíveis têm as seguintes dimensões: $13cm$ por $19,5cm$; $15cm$ por $22,5cm$ e $20cm$ por $30cm$. Em que escalas são feitas essas ampliações?

C) Ampliação e redução de figuras (Atividade individual)

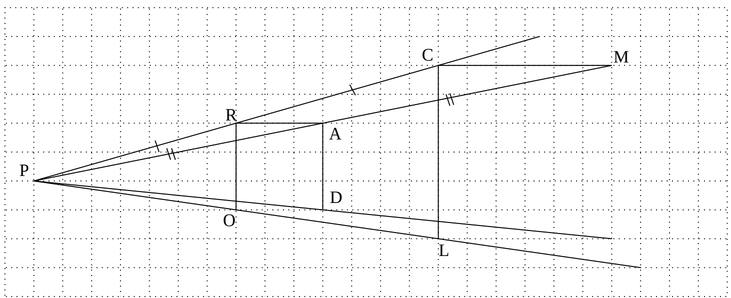
Em uma folha de papel quadriculado, faça:

a) a redução de uma figura qualquer na razão 1:2.

b) a ampliação de uma figura qualquer na razão 3:2.

D) Usando um foco para ampliar

Em um papel milimetrado, escolha um ponto P qualquer e trace as semi-retas $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PD}$ e $\overrightarrow{PO}$.



Marque os pontos C, M e L de modo que:

$$PC = 2 \cdot PR \quad PM = 2 \cdot PA \quad PL = 2 \cdot PO.$$

Agora, responda:

a) Qual é a razão entre os segmentos $\overline{CM}$ e $\overline{RA}$, nessa ordem?

b) Os segmentos de reta $\overline{CM}$, $\overline{RA}$, $\overline{CL}$ e $\overline{RO}$, nesta ordem, são proporcionais?

c) Como marcar um ponto E na semi-reta PD de modo que $CLEM$ seja uma ampliação de $RODA$?

d) Como obter um quadrado maior do que $CLEM$?

(a) Indique quantas vezes:

   a) 20 é maior que 0,4.

   b) 13 é menor que 169.

   c) 0,36 é maior que 0,036.

   d) 1200 é maior que 1.

   e) $\frac{2}{3}$ cabem em 2 inteiros.

(b) Determine o número que é:

   a) 3 vezes maior que 8.

   b) 1,5 vezes maior que 16.

   c) 2,5 vezes menor que 100.

(c) Dia de jogo entre Grêmio e Palmeiras. O estádio está com sua lotação máxima, 35000 pessoas. De cada 7 torcedores, 3 são do Palmeiras e 4 são do Grêmio.

   a) Escreva no caderno a razão entre os torcedores do Palmeiras e os do Grêmio.

   b) Agora, escreva a razão entre os torcedores do Palmeiras e os torcedores dos dois times.

   c) Está correto dizer que dos 35000 torcedores, 20000 são gremistas? Por que?

(d) No mês passado choveu demais. Foram dois dias de chuva para um dia de sol.

   a) Se o mês teve 30 dias, quantos foram os dias de chuva?

   b) Qual é a razão entre o número de dias de chuva e o número de dias do mês?

(e) 4/5 é a razão entre as velocidades de um carro e de uma moto. Se o motorista do carro dobrar o valor de sua velocidade, o que deverá fazer o motociclista para que a razão não se altere?

(f) De vez em quando duas irmãs têm aumentos de mesada. Mas, a razão entre o que recebe a mais velha e a mais nova fica sempre igual a 6/5.

a) Qual era a mesada da irmâ mais nova quando a mais velha recebia R$ 15,00?

b) Qual era a mesada da mais velha quando a mais nova recebia R$ 15,00?

(g) Na bandeira brasileira, o comprimento e a largura são proporcionais a 10 e 7. Pretendo fazer duas bandeiras: uma delas com $45cm$ de comprimento e a outra com $120cm$ de comprimento. Que largura devem ter essas bandeiras?

(h) Uma indústria produz combustível misturando gasolina e álcool em quantidades proporcionais a 8 e 5. Numa das misturas, havia $4800l$ de gasolina. Quantos litros de álcool foram utilizados?

(i) A diferença entre dois números naturais é 15. A razão entre eles é 4 para 3. Quais são esses números?

(j) Um ponto P, pertencente ao segmento $\overline{AB}$, é tal que $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{2}{3}$. Sabendo que $AP = 12cm$, determine $\overline{PB}$, $\overline{AB}$ e a distância de P a M, ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

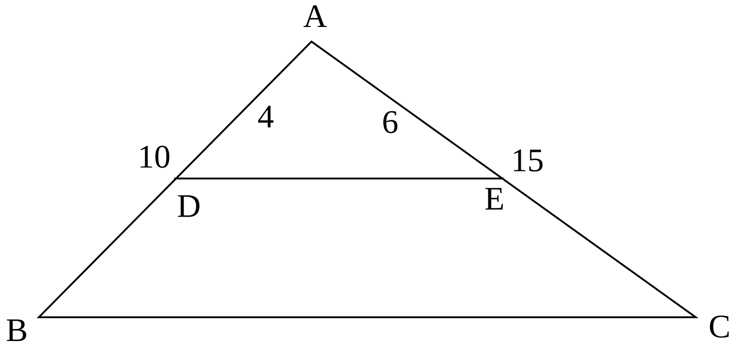
(k) Dado um segmento $\overline{MN}$, consideremos um ponto $Q \in \overline{MN}$, tal que $\dfrac{MQ}{QN} = \dfrac{5}{9}$. Se o ponto Q está situado a $15cm$ da extremidade M do segmento $\overline{MN}$, determine a medida de $\overline{QN}$ e $\overline{MN}$.

(l) Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos tais que $AB = 2cm$ e $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{3}$. qual a medida de $\overline{CD}$?

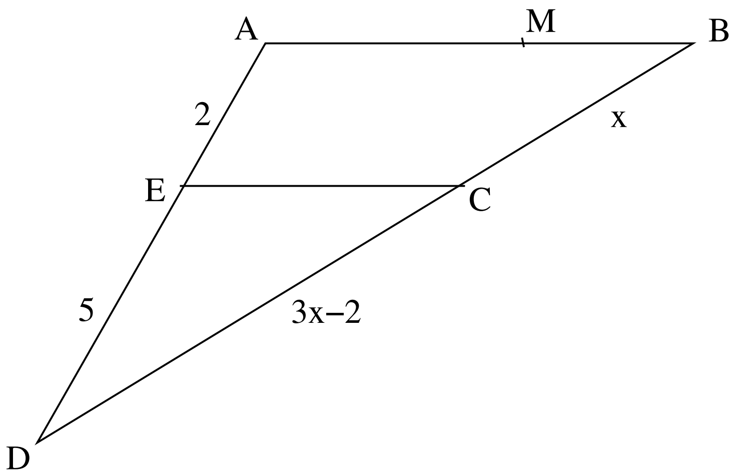
(m) Dado um segmento $\overline{RQ}$, determinamos um ponto $P \in \overline{RQ}$, distante $6cm$ de R. Sabendo-se que $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{3}{10}$, qual a medida de RQ?

(n) Verificar se os segmentos $AB = 25cm$, $MN = 15cm$, $PQ = 10cm$ e $RS = 6cm$ são, nessa ordem, proporcionais. Estabeleça duas outras ordens entre os quatro segmentos, para que eles permaneçam proporcionais.

(o) No triângulo ABC da figura abaixo, o segmento $\overline{DE}$é paralelo ao lado $\overline{BC}$. De acordo com as medidas indicadas, verifique se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, nessa ordem, são proporcionais.



(p) As medidas marcadas na figura estão em centímetros:



Responda:

a) Se $\overline{AE}$, $\overline{ED}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais, quais são as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$?

b) Se $\overline{BM}$, $\overline{MA}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem, são segmentos de reta proporcionais e $AB = 10,5cm$, a que distância de A está o ponto M?

(q) O Cristo Redentor, no alto do morro do Corcovado, no Rio de Janeiro, mede $38m$ de altura. Que escala devemos usar para desenhar esse monumento com altura de $10cm$?

(r) Veja o Estado do Rio de Janeiro no mapa:

a) Use uma régua para descobrir quantos centímetros correspondem aos $200km$ indicados na escala.

b) Qual a distância em linha reta no mapa entre:

- Cabo Frio e Vassouras?
- Petrópoles e Conservatório?

c) Calcule a distância real em quilômetros entre:

- Cabo Frio e Vassouras?
- Petrópoles e Conservatório?

(s) Em um mapa com escala 1:60000000 foi desenhada e pintada uma região retangular com medidas de $3cm$ por $2cm$. Calcule o perímetro e a área reais da região correspondente à que foi desenhada.

3.2 Aplicações do Teorema de Tales

A) **"Quando um feixe de retas paralelas intercepta duas transversais quaisquer, então os segmentos correspondentes determinados sobre as transversais são proporcionais."**

Verifique você mesmo a propriedade enunciada.

Construa um feixe de três retas paralelas mantendo uma distância fixa entre cada uma delas.

Trace uma transversal qualquer ao feixe de paralelas.

Trace outra transversal qualquer, porém distinta da anterior, formando um ângulo qualquer com o feixe de paralelas.

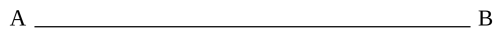
Meça os segmentos correspondentes e verifique se eles são realmente proporcionais. Para isso, se necessário, use uma calculadora.

Com essa atividade os alunos poderão averiguar se a propriedade realmente funciona, e isto é importante no processo de construção do conhecimento: que os alunos se convençam da veracidade dos conceitos.

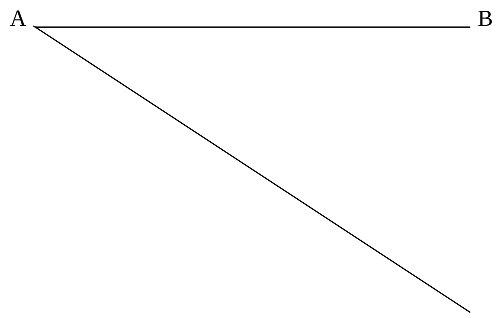
B) Uma das aplicações do Teorema de Tales é a divisão de um segmento em partes proporcionais.

Dividir determinado segmento em duas, quatro, oito ou mesmo dezesseis partes iguais não é tarefa complicada, pois podemos facilmente obter o ponto médio de um segmento com o auxílio de régua e compasso. Mas, para dividir um segmento em, por exemplo, sete partes iguais será necessário aplicarmos o Teorema de Tales. Vejamos como:

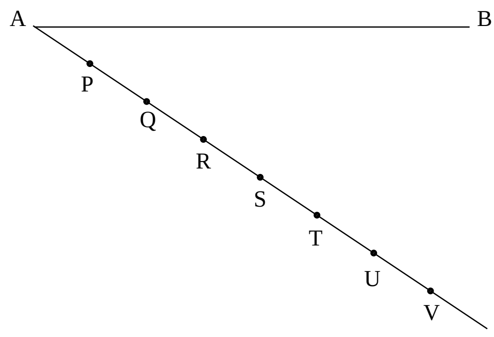
O segmento $\overline{AB}$, representado abaixo deverá ser dividido em sete partes iguais:



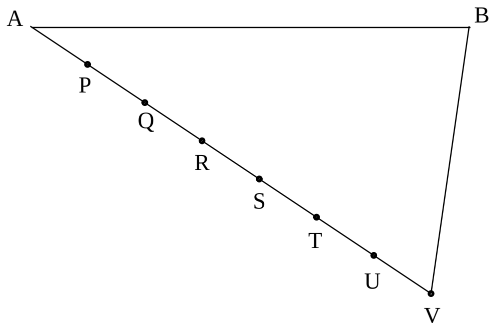
Para isso, comece traçando uma semi-reta que tenha origem no ponto A, mas direção diferente de $\overline{AB}$.



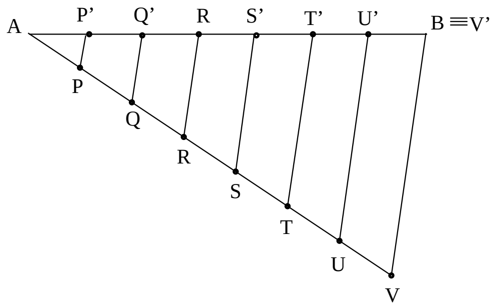
Em seguida, escolha uma unidade de medida qualquer u e, com o compasso, marque sobre a semi-reta sete segmentos cujas medidas sejam iguais a u. Esses segmentos, além de congruentes, devem ser consecutivos: $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$ e $\overline{UV}$.



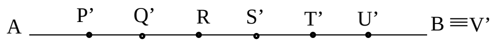
Agora, trace o segmento $\overline{BV}$:



Finalmente, trace retas paralelas ao segmento $\overline{BV}$, passando pelos pontos P, Q, R, S, T e U. Esses segmentos determinam no segmento $\overline{AB}$ os pontos P', Q', R', S', T' e U'.



Veja: O segmento $\overline{AB}$ ficou dividido em sete partes iguais, como queríamos:



Para quem conhece o Teorema de Tales, a implicação é simples: "Se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina também segmentos congruentes sobre outra transversal".

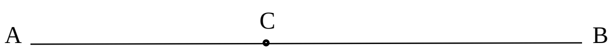
Agora é a sua vez.

a) Divida um segmento de $11cm$ em cinco partes iguais.

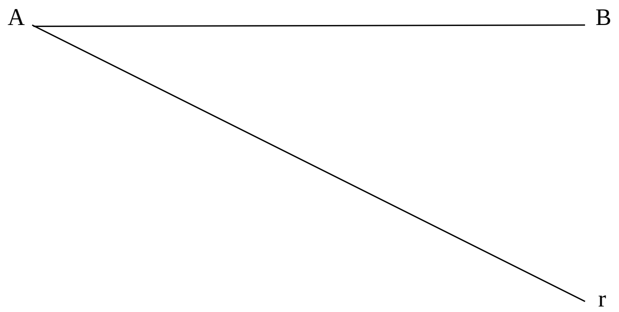
b) Divida um segmento de $5cm$ em três partes iguais.

Mas, se precisássemos dividir um segmento $\overline{AB}$ em duas partes diferentes proporcionais? Vejamos:

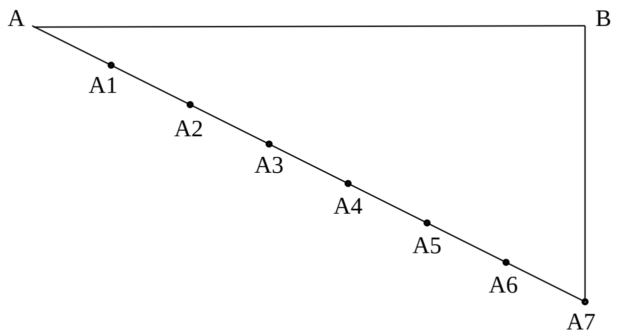
Sobre um segmento $\overline{AB}$ qualquer, indique um ponto C de modo que : $\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$.



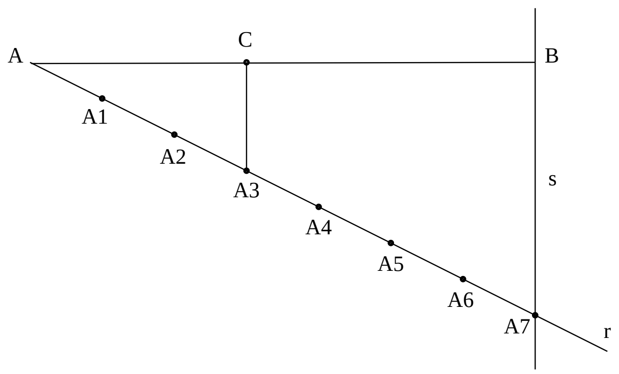
Primeiramente, traçamos um segmento $\overline{AB}$ qualquer. Depois, traçamos uma reta r passando por A, de maneira que essa reta forme um ângulo agudo com $\overline{AB}$.



Depois, com a ajuda do compasso, marcamos sobre a reta r, a partir do ponto A os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 e A_7, equidistantes entre si e com uma régua traçamos uma reta s passando pelos pontos B e A_7.



Por último, utilizando esquadros, traçamos uma reta paralela à reta s, passando pelo ponto A_3, determinando assim o ponto C que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão 3/4.



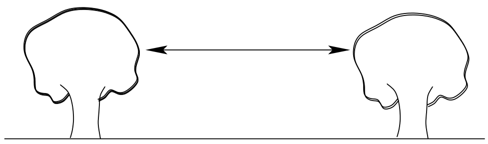
c) Agora, trace um segmento $\overline{CD}$ medindo $7,3cm$ e nele indique um ponto E de modo que $\dfrac{CE}{ED} = \dfrac{2}{3}$.

d) Divida um segmento de $9cm$ em duas partes diretamente proporcionais a 3 e 5.

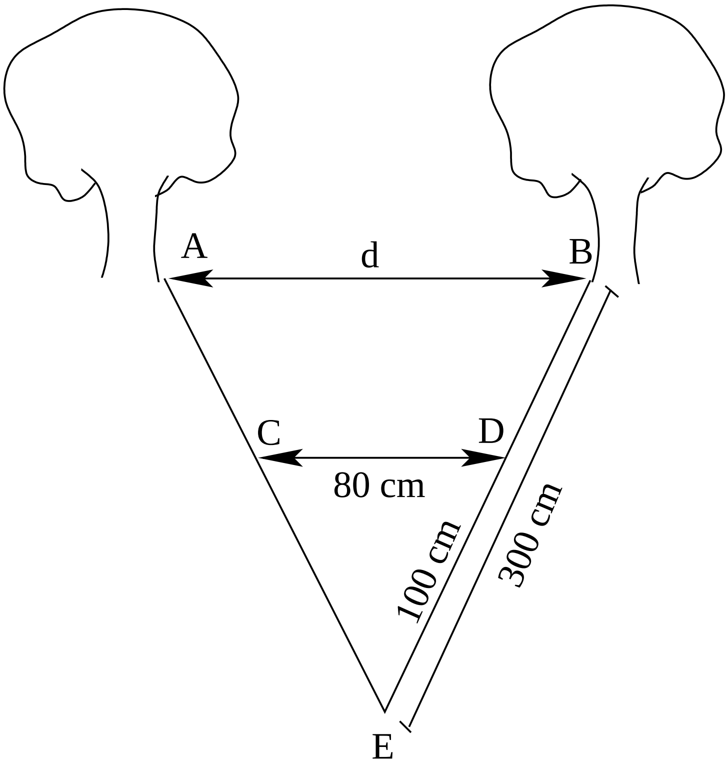
e) Desenhe três segmentos de modo que $med(\overline{AB}) = 6cm$, $med(\overline{CD}) = 8cm$ e $med(\overline{EF}) = 11cm$. Depois marque, sobre cada um desses segmentos um ponto Y de acordo com a proporção indicada:

$$\frac{AY}{YB} = \frac{2}{3} \qquad \frac{CY}{YD} = \frac{3}{7} \qquad \frac{EY}{YF} = \frac{4}{9}$$

C) No pátio da escola temos a seguinte situação:



Podemos, usando o Teorema de Tales, calcular a distância entre as duas árvores. Primeiramente, vamos fazer algumas marcações:



Podemos analisar a situação e descobrir a distância entre as árvores:

$$\frac{300}{100} = \frac{d}{80} \quad \Rightarrow \quad 300 \cdot 80 = d \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{300 \cdot 80}{100} = 240cm$$

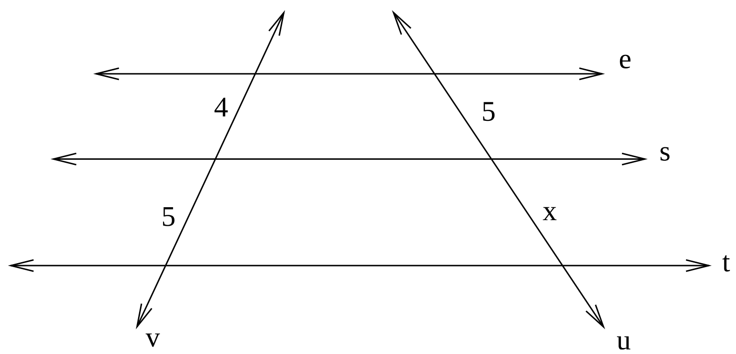
$$d = 2,4m.$$

Depois dos alunos fazerem as marcações corretamente irão fazer o cálculo e encontrar a medida da distância entre as árvores: $2,4m$. Para verificar, um aluno medirá usando uma trena a real distância que será $2,4m$.

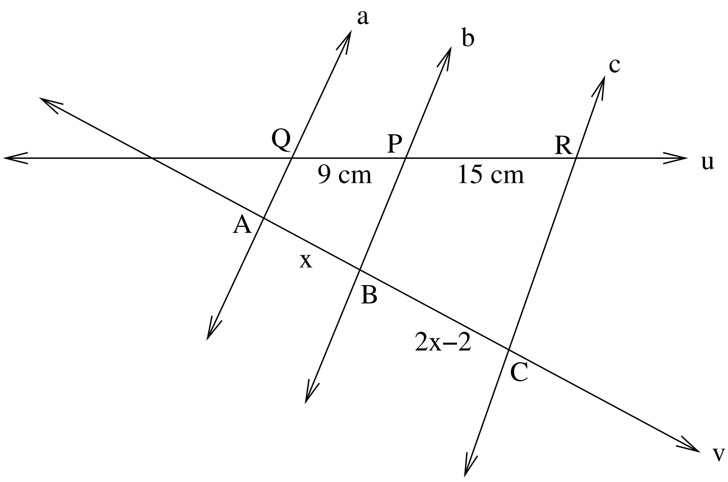
Com esta atividade, os alunos perceberão a utilidade do Teorema de Tales. É claro que neste caso seria mais simples medir diretamente a distância entre as árvores, mas esta atividade foi só para ilustrar a aplicação do Teorema de Tales, mas será esclarecido aos alunos que medições como estas somente são feitas quando se faz necessário.

Exercícios de Fixação

1. Neste exercício, admita que as medidas estão em centímetros. Sendo $r//s//t$, determine x.



2. As retas a, b e c são paralelas. Determine as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

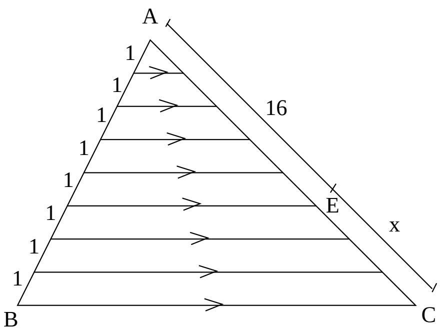


3. Desenhe em uma folha sem pauta um feixe de três retas paralelas que tenham entre si as distâncias de $1cm$ e $2cm$. Depois, trace uma transversal t qualquer. Meça os segmentos determinados pelas paralelas na transversal t e mostre que vale a relação:

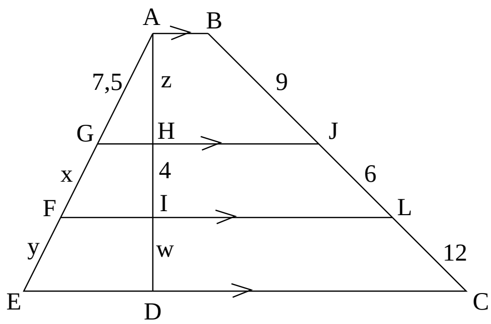
$$\frac{1}{2} = \frac{a}{b}.$$

4. Nestas figuras, o paralelismo entre as retas está indicado por flechas. Em cada item, determine o(s) elemento(s) desconhecido(s):

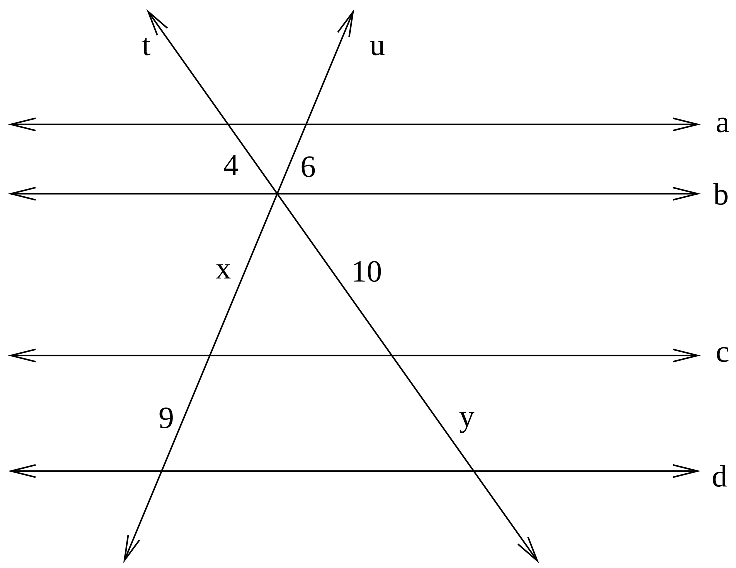
a)



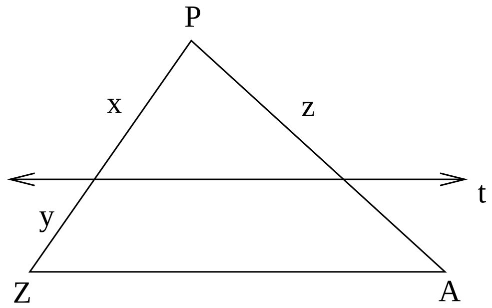
b)



5. Se as retas a, b, c e d são paralelas, use o que você já sabe sobre feixe de retas paralelas cortadas por transversais para calcular x e y. (Uma dica: desloque a transversal t para a direita, mantendo sua inclinação em relação ao feixe de paralelas.)



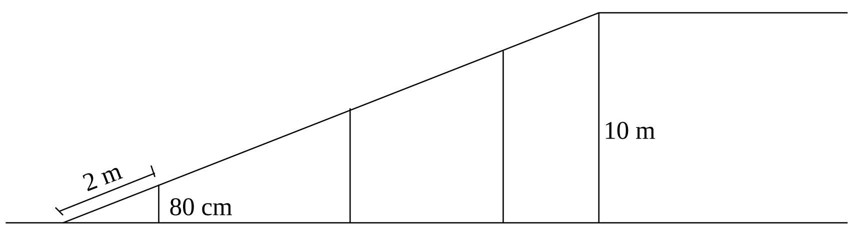
6. No triângulo PAZ, o lado $\overline{PA}$ mede $25cm$. A reta t é paralela ao lado $\overline{ZA}$, e a razão entre as medidas x e y é 3/2. Calcule a medida z.



7. Mãe e filha, caminhando pela praia, observam que a sombra da mãe é de $2,10m$, enquanto a da filha é de $1,80m$. Se a filha tem $1m$ e $50cm$, qual é a altura da mãe?

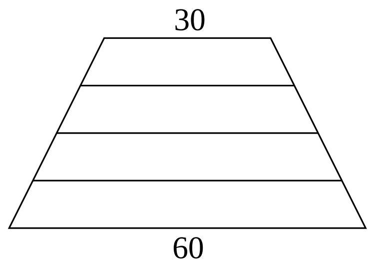
8. Uma pessoa está de pé diante de um poste. Essa pessoa tem $1,60m$ e sua sombra tem $3,20m$. A sombra do poste tem $4,80m$. Descubra a altura do poste.

9. Observe a figura e calcule o comprimento da rampa.



10. (ENEM) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus,

de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras, respectivamente iguais a $60cm$ e $30cm$, conforme a figura:

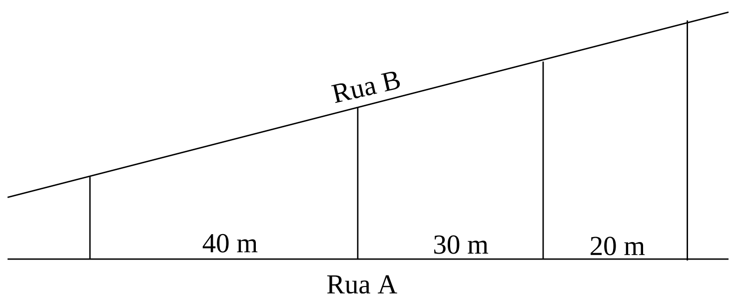


Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em centímetros, deve ser:

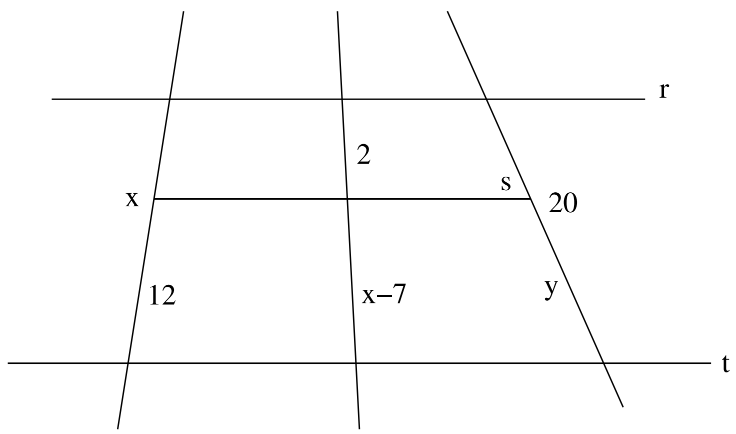
a) 144 b) 180 c) 210 d) 225 e) 240

11. Um feixe de quatro paralelas determina sobre uma transversal, três segmentos que medem $5cm$, $6cm$ e $9cm$, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos que esse mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre a primeira e a quarta paralela mede $60cm$.

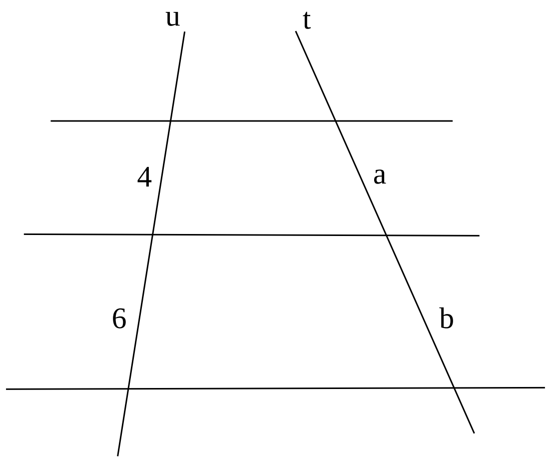
12. Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é $180m$?



13. Determine x e y, sendo r, s e t retas paralelas.



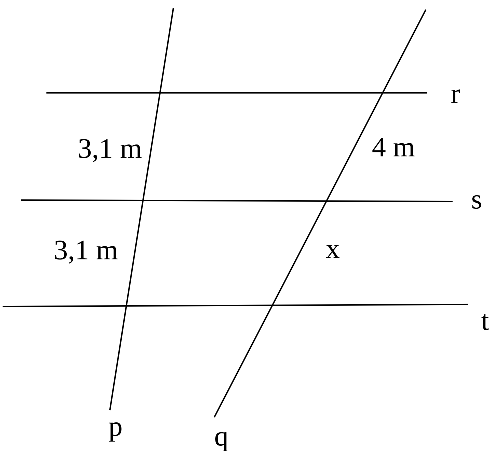
14. Calcule em seu caderno as medidas a e b dos segmentos determinados pelas paralelas cortadas pela transversal t, sabendo que a diferença dessas medidas é $1,5cm$.



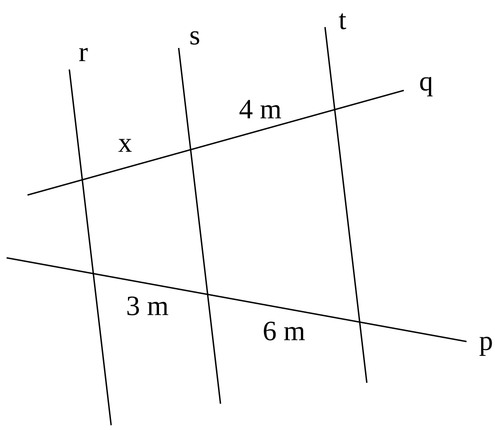
15. Um triângulo ABC tem os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medindo $24cm$ e $20cm$, respectivamente. Sobre o lado $\overline{AC}$, a $6cm$ do vértice C, tomamos um ponto M. Determine a distância de um ponto N situado sobre o lado $\overline{BC}$ para que o segmento $\overline{MN}$ seja paralelo a $\overline{AB}$.

16. Sem efetuar cálculos por escrito, encontre a medida x nas seguintes figuras, sabendo-se que r, s e t são retas paralelas:

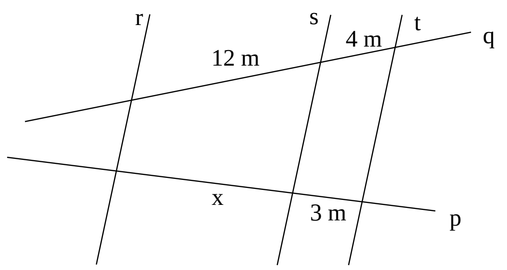
a)



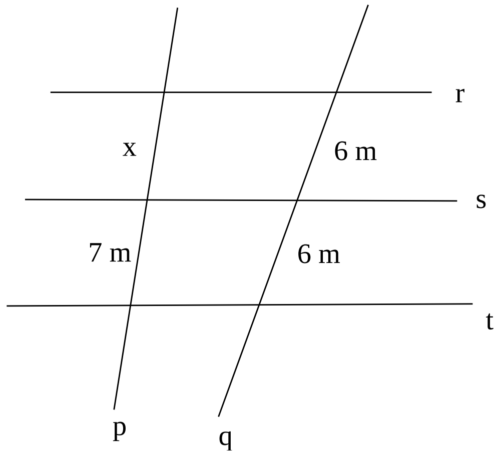
b)



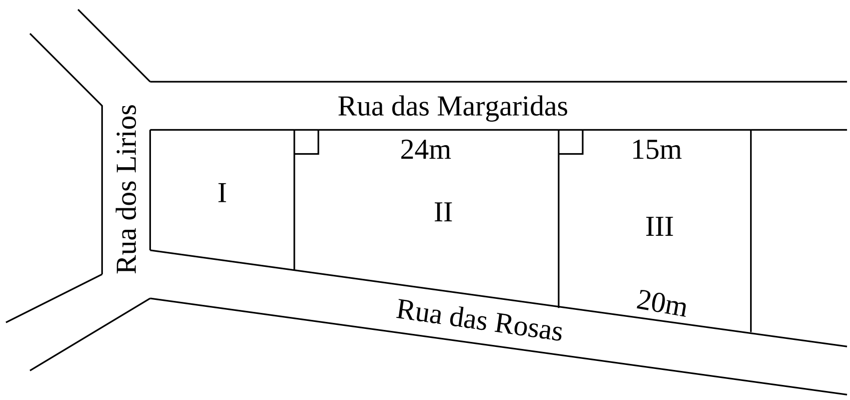
c)



d)



17. (SAESP-SP) No desenho abaixo estão representados os terrenos I, II e III. Quantos metros de comprimento deverá ter o muro que o proprietário do terreno II construirá para fechar o lado que faz frente com a rua das Rosas?



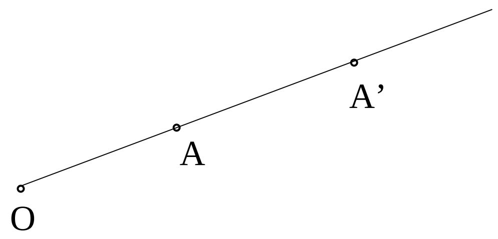
a) $20m$ b) $24m$ c) $32m$ d) $35m$

3.3 Semelhança de Triângulos

A) **Homotetia**

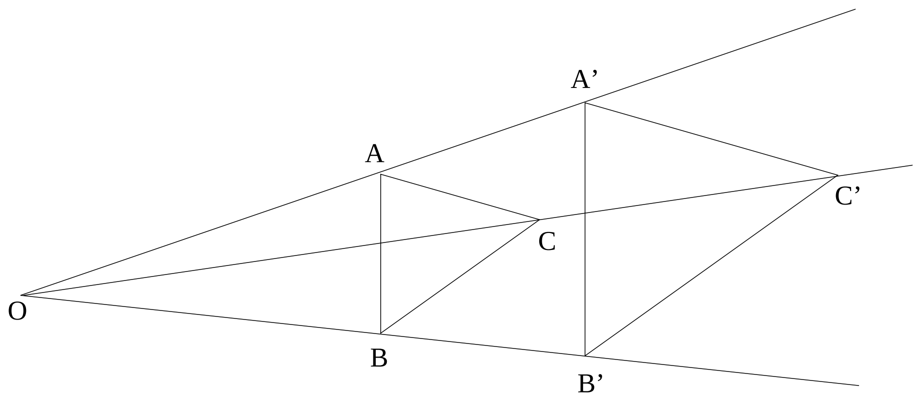
Duas figuras semelhantes dispostas de tal modo que os seus lados correspondentes sejam paralelos são chamadas figuras homotéticas.

Para entendermos como pode ser obtida a figura homotética de uma figura dada, consideremos dois pontos O e A do plano. Vamos construir o ponto A', correspondente de A, do seguinte modo: traçamos a semi-reta $\overrightarrow{OA}$ e nela marcamos o ponto A' tal que $OA' = 2OA$, por exemplo.



Nesse caso dizemos que A' é o homotético de A em relação ao ponto O (centro de homotetia) e razão $k = 2$ (razão de homotetia).

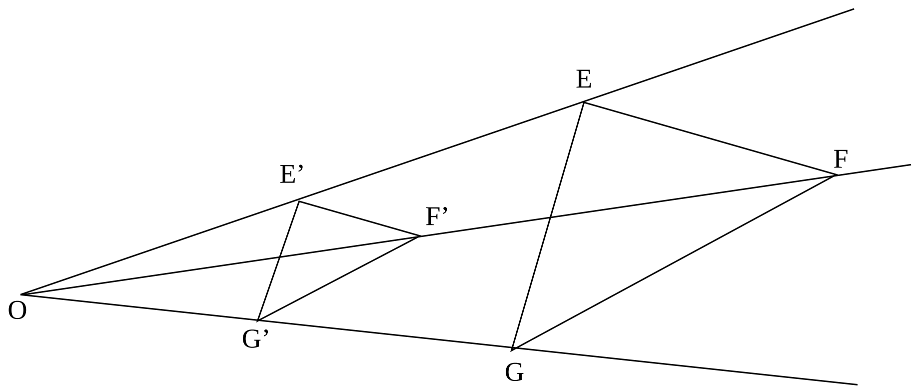
Na figura a seguir, construimos o triângulo $A'B'C'$, homotético do triângulo ABC, usando O como centro de homotetia e a razão $k = 2$.



O triângulo $A'B'C'$ é semelhante ao triângulo ABC e a razão de semelhança entre eles é 2. Além disso, os lados correspondentes são paralelos. É claro que podemos atribuir valores diferentes para a razão k, obtendo outras figuras homotéticas à figura dada.

E para reduzirmos uma figura?

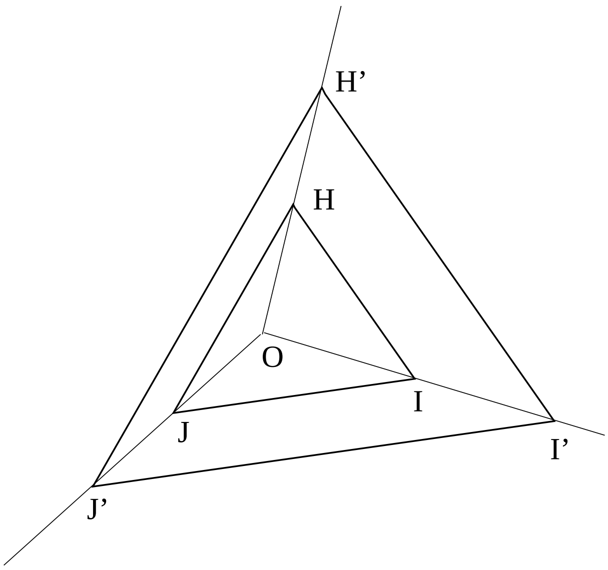
Vamos pensar um pouco. Na ampliação a figura original fica entre o centro e a ampliação. A figura reduzida deve ficar entre o centro e o polígono a ser reduzido. Vamos reduzir o triângulo EFG à sua metade, a partir do ponto O.



Em que lugar da semi-reta devemos marcar F'? Como estamos reduzindo a figura à sua metade, $\frac{OF}{OF'} = 2$, e então F' é o ponto médio de $\overline{OF}$.

Agora, auxiliados por régua e compasso, marcamos entre O e F o ponto F'; procedemos da mesma forma com os outros vértices para determinar os pontos E' e G'. O triângulo $E'F'G'$ é uma redução do triângulo EFG.

Esse processo funciona em qualquer figura. O pólo O pode até ser um ponto da própria figura ou um ponto qualquer interno a ela.



Vamos ampliar o triângulo HIJ, na figura acima, na razão 2. Começamos escolhendo o pólo O (interno). A seguir, descobrimos as semi-retas $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OI}$ e $\overrightarrow{OJ}$.

Agora é a sua vez!

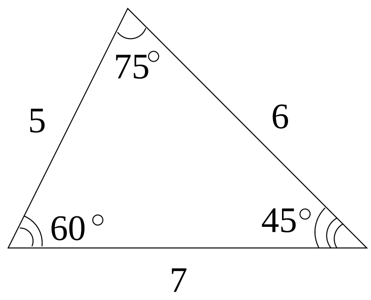
1) Desenhe um triângulo qualquer ABC. Escolha um pólo O externo a ele e usando a homotetia amplie este triângulo a uma razão $k = 3$.

2) Agora, faça a redução deste triângulo ABC à sua metade.

3) Desenhe um outro triângulo DEF e agora com um pólo qualquer interno, amplie-o na razão 4.

Obs.: Com estas atividades os alunos podem fazer uma reflexão quanto à semelhança de triângulos, podendo eles mesmos, construir figuras semelhantes à original por meio da redução ou ampliação por homotetia bem como a construção de triângulos semelhantes em papel milimetrado. A partir daí, serão feitos alguns exercícios de fixação sobre semelhança de triângulos.

B) Em um papel quadriculado construa triângulos semelhantes ao triângulo abaixo, sendo que as razões dos lados homólogos devem ser: 1/2, 2 e 3.



Agora, construa um triângulo qualquer e faça dois triângulos semelhantes a ele.

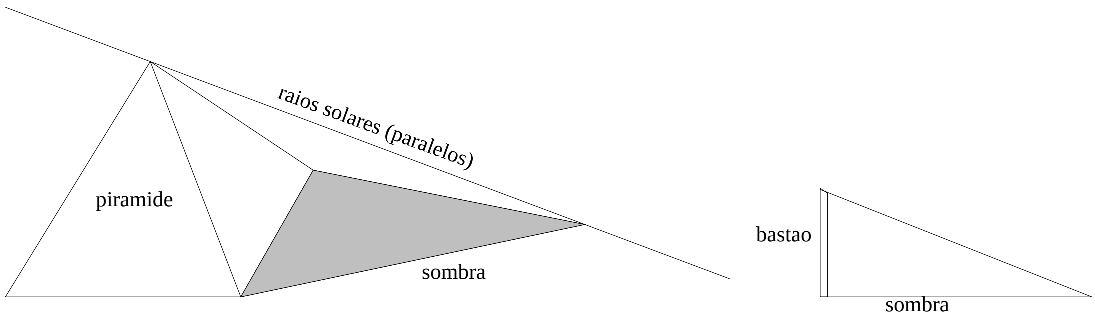
C) **Utilizando a semelhança de triângulos**

Uma vara, duas sombras e uma idéia genial: triângulos semelhantes!

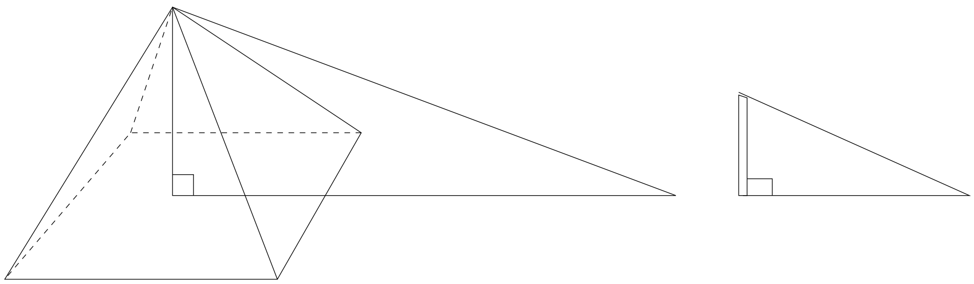
Foi assim, conta a lenda, que Tales de Mileto (640 a.C., 546 a.C.) conseguiu descobrir a altura das pirâmides do Egito. Assim ficou conhecido por conseguir tamanha façanha para época: podia calcular a altura de qualquer construção, por maior que fosse, sem precisar subir nela.

Seu método, usando uma vara, construir triângulos semelhantes.

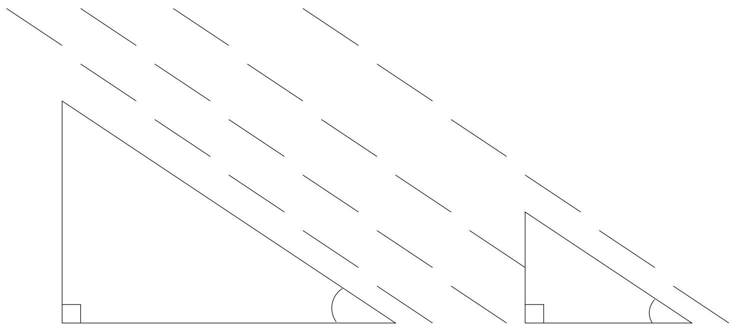
O triângulo grande contém a altura da pirâmide; o triângulo pequeno contém a da vara. A metade da medida do lado da base da pirâmide mais sua sombra é um dos lados do triângulo, que corresponde, no triângulo pequeno, ao lado que é a sombra da vara. Veja:



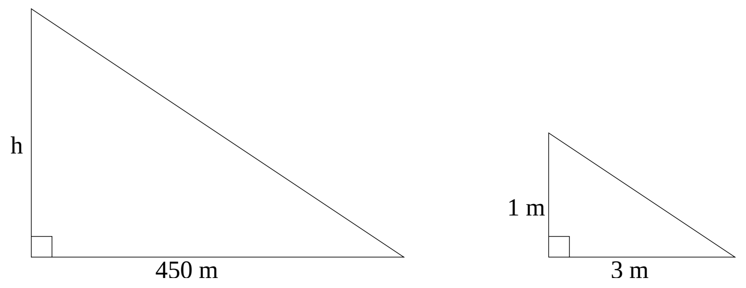
Tales considerou estes dois triângulos imaginários:



Tales percebeu que esses dois triângulos são semelhantes, porque têm dois ângulos, respectivamente iguais. Veja só: a altura da pirâmide é perpendicular ao solo; a da vara também. Então cada triângulo tem um ângulo reto. Além disso, os raios do sol são paralelos, e devido ao paralelismo dos raios solares encontramos mais dois ângulos iguais, um em cada triângulo.



Depois de perceber a semelhança dos triângulos, Tales fez algumas medidas. Mediu o lado da base da pirâmide, a sombra da pirâmide, a sombra da vara e o comprimento da vara. Imagine que ele tenha obtido estas medidas:



Como os triângulos semelhantes têm lados correspondentes proporcionais, fica fácil calcular a altura x da pirâmide:

$$\frac{x}{1} = \frac{450}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 150\,m.$$

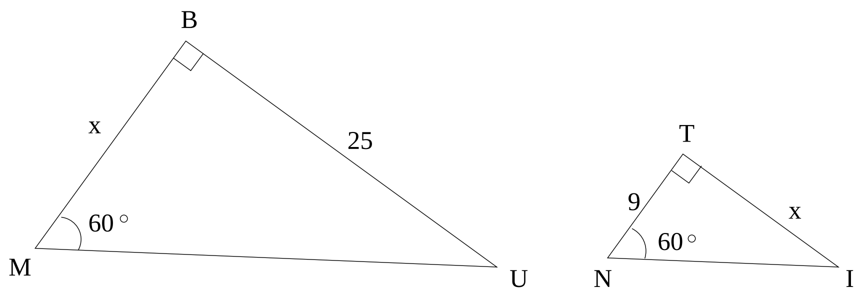
Foi assim que Tales calculou a altura da pirâmide. Com suas realizações matemáticas, Tales ganhou muito prestígio. Esse exemplo de aplicação da semelhança de triângulos acabou entrando para a história.

Vamos agora calcular a altura da nossa sala de aula usando o mesmo método de Tales. Para isso precisaremos de um bastão e, é claro, de sol!

Há ainda uma outra forma de medir a altura usando a semelhança de triângulos. Observe a história em quadrinhos no Anexo IV, em seguida, mediremos a altura da nossa sala de aula da mesma forma que o professor da história abaixo, e vamos comparar a medida com a encontrada pelo método de Tales.

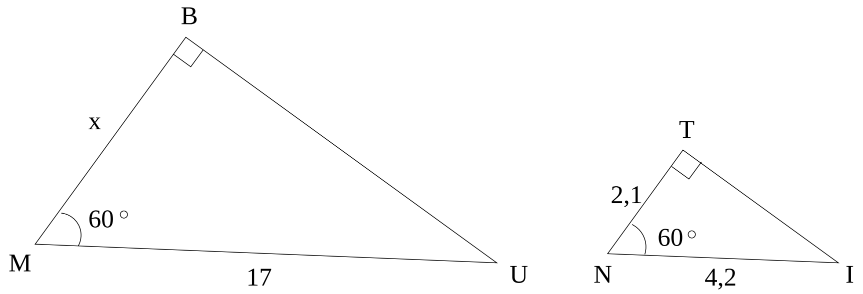
Exercícios de Fixação

1. Calcule o comprimento x:

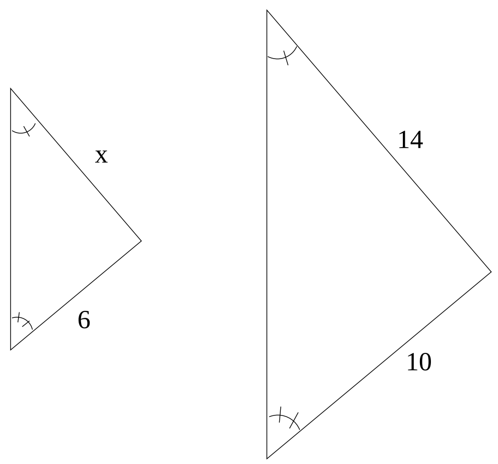


2. Calcule a medida x:

a)

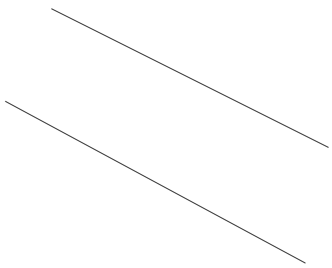


b)

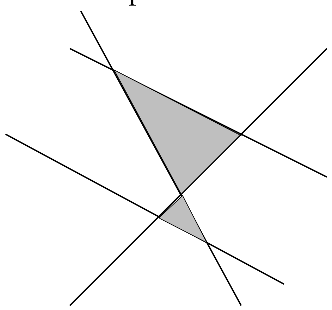


3. Observe a construção:

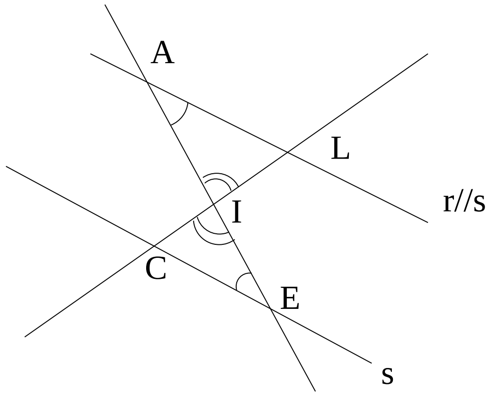
Duas retas paralelas ...



... são cortadas por duas transversais.



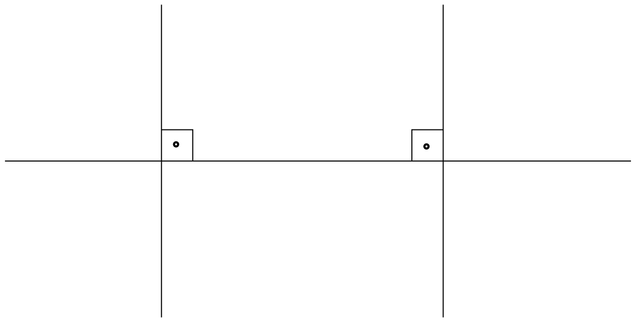
Usando as igualdades dos ângulos dos dois triângulos, podemos provar que eles são semelhantes. Veja:



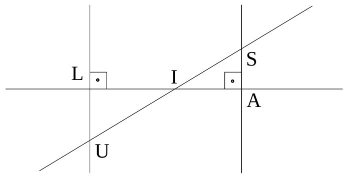
$\hat{A} \equiv \hat{E}$ (ângulos alternos internos). Em I, os ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) são iguais. Portanto, o $\triangle ALI \sim \triangle ECI$.

Agora, observe esta construção:

Duas retas perpendiculares a uma terceira.

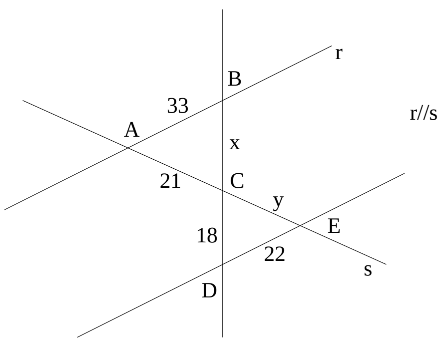


E uma quarta reta.



Prove que os triângulos obtidos são semelhantes.

4. Os triângulos ABC e EDC são semelhantes:

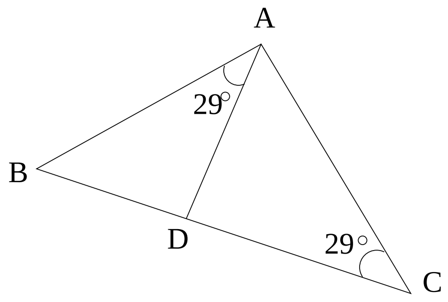


a) Copie e complete com a medida adequada:

$$\frac{33}{?} = \frac{21}{?} = \frac{x}{?}$$

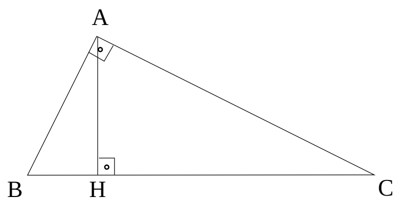
b) Calcule o valor de x e de y.

5. Há três triângulos na figura abaixo. Dois deles são semelhantes. Quais são? Justifique sua resposta.



Obs.: O professor confeccionará estes triângulos em papel emborrachado com cores distintas e durante a correção irá superpor os triângulos para uma maior compreensão pelos alunos.

6. Na figura abaixo suponha que: $AB = 6cm$, $AC = 8cm$ e $BC = 10cm$.



a) Mostre que os triângulos ABC e ABH são semelhantes.

b) Usando essa semelhança calcule AH, BH e CH.

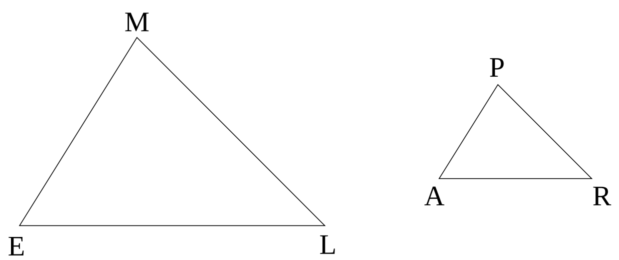
c) Invente mais uma pergunta para este problema e responda-a.

7. Se dois triângulos têm os lados respectivamente proporcionais, os triângulos são semelhantes? Vamos verificar se isso é verdadeiro construindo triângulos.

a) Com régua e compasso construa no seu caderno o triângulo OLA com lados, por exemplo, de $6cm$, $7,5cm$ e $12cm$.

b) Agora, construa um triângulo VEU cujos lados $\overline{VE}$, $\overline{EU}$ e $\overline{UV}$ meçam, respectivamente, $2cm$, $2,5cm$ e $4cm$. O triângulo VEU que você construiu é semelhante ao triângulo OLA? Para responder a essa questão, faça as medidas necessárias e justifique sua resposta.

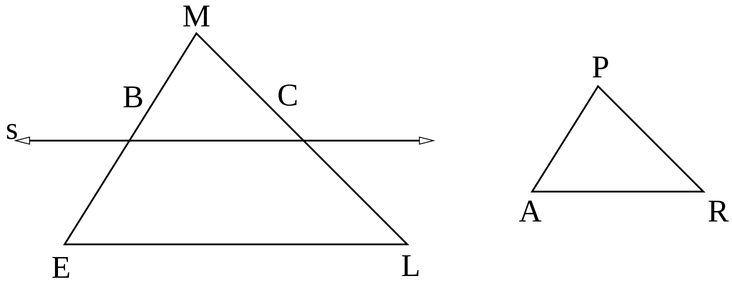
8. Você vai demonstrar que dois triângulos MEL e PAR, que têm os lados, respectivamente, proporcionais são semelhantes.



Nos triângulos MEL e PAR os lados são proporcionais:

$$\frac{PA}{ME} = \frac{PR}{ML} = \frac{AR}{EL} = k.$$

a) Desenhe o esboço dos dois triângulos MEL e PAR no seu caderno. Trace a reta s, paralela a $\overline{EL}$ e que passe por B e C, de forma que $MB \equiv PA$.



Podemos escrever $\dfrac{MB}{ME} = \dfrac{MC}{ML}$? Justifique sua resposta.

b) Os triângulos MBC e MEL são semelhantes? Justifique.

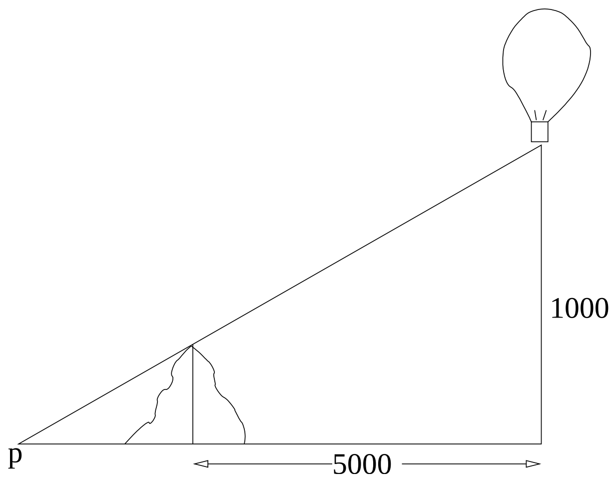
c) Como $\dfrac{PA}{ME} = k$ e $PA \equiv MB$, qual é a razão de semelhança entre os triângulos MBC e MEL?

d) Por que podemos então afirmar que $MC \equiv PR$ e $BC \equiv AR$?

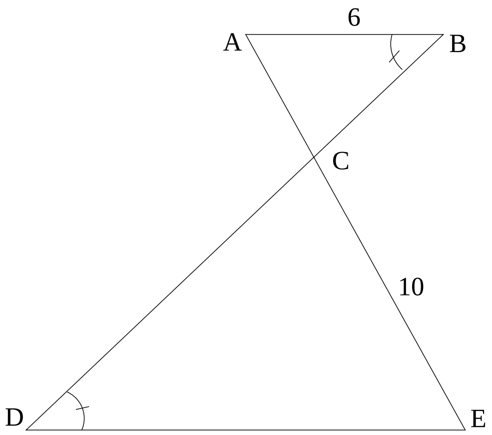
e) Os triângulos MEL e PAR são semelhantes? justifique.

9. Um mastro usado para hasteamento de bandeiras projeta um sombra cujo comprimento é $6m$ no mesmo instante em que uma barra vertical de $1,8m$ de altura projeta uma sombra de $1,20m$ de comprimento. Qual é a altura do mastro?

10. Um balão está a $100m$ de altitude. Um observador está no ponto P e vê o balão como mostra a ilustração. O morro tem $200m$ de altura. A que distância, do sopé do morro, está o observador?



11. Na figura abaixo, os triângulos ABC e EDC são semelhantes. Sabendo que $AC = x - 5$ e $DE = 2x + 4$, responda:

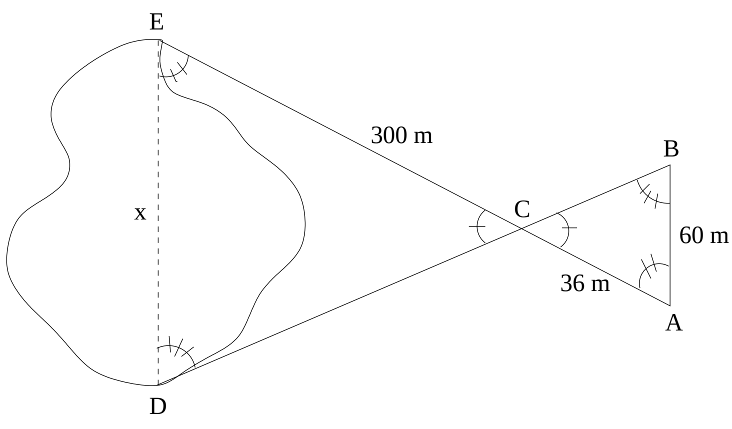


a) Qual é o valor de x?

b) Qual é a medida de $\overline{AC}$?

c) Qual é a razão de semelhança entre o $\triangle ABC$ e o $\triangle EDC$?

12. Para medir a largura x de um lago, foi utilizado o esquema abaixo. Nessas condições, obteve-se $\triangle ABC \equiv \triangle EDC$. Determine, então, a largura x do lago.



13. Dois triângulos, T_1 e T_2, são semelhantes, sendo $4/3$ a razão de semelhança. O triângulo T_1 tem $38cm$ de perímetro e dois lados do triângulo T_2 medem $6cm$ e $9cm$. Determine as medidas dos lados do triângulo T_1 e a medida do lado desconhecido do triângulo T_2.

3.4 Razões Trigonométricas

A) Faça o que se pede:

a) Pegue uma folha de papel milimetrado ou quadriculado, compasso, esquadro e transferidor.

b) Desenhe um triângulo retângulo OAB, reto em $\hat{B}$, com $OA = 10cm$.

c) Trace segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, $\cdots$, paralelos ao lado $\overline{AB}$, com extremidades sobre $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{OB}$.

d) Meça os segmentos $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, $\overline{OA_3}$, $\cdots$ e $\overline{OB_1}$, $\overline{OB_2}$, $\overline{OB_3}$, $\cdots$

e) Calcule as razões: $\dfrac{AB}{OA}$, $\dfrac{A_1B_1}{AO_1}$, $\dfrac{A_2B_2}{AO_2}$, $\dfrac{A_3B_3}{AO_3}$ $\cdots$.
O que elas têm em comum?

f) Repita a atividade em uma outra folha de papel milimetrado, com o ângulo $A\hat{O}B$ medindo 10º, 20º, 30º, 40º e 50º.

g) Construa uma tabela como a seguinte e preencha-a.

Ângulo $A\hat{O}B$	$\dfrac{AB}{OA}$	$\dfrac{OB}{OA}$	$\dfrac{AB}{OB}$
10º			
20º			
30º			
40º			
50º			

Você pode observar que, independente dos triângulos considerados, as razões entre os lados do triângulo se mantêm constantes, e as possíveis diferenças observadas devem-se a imprecisões nas medições e ao arredondamento dos números obtidos.

B) Usando régua e transferidor, vamos desenhar em um papel milimetrado, um triângulo retângulo no qual um ângulo agudo mede 30º e o cateto adjacente mede $8cm$.

Meça o cateto oposto e a hipotenusa e faça as seguintes razões com estas medidas:

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad e \quad \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Agora, construa um outro triângulo retângulo com um ângulo agudo de 20º. Faça o mesmo procedimento do triângulo anterior.

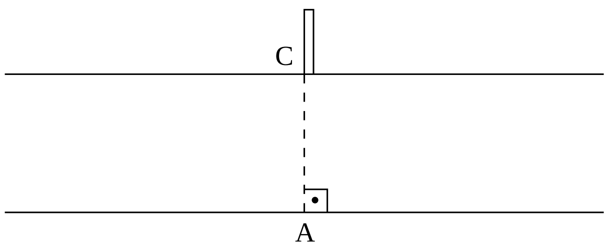
O que você percebeu? Explique.

C) Atividade em grupo

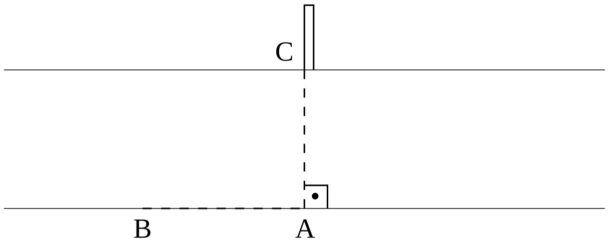
Vamos medir a largura da rua em frente à nossa escola, sem precisar atravessá-la.

Vamos adotar o seguinte processo:

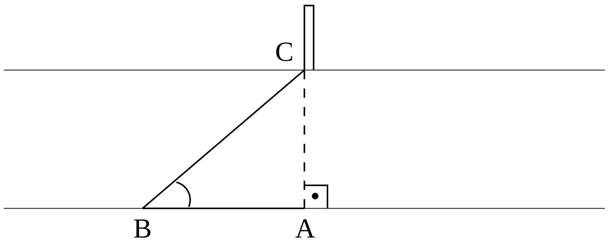
- Marcamos dois pontos, o ponto A (estaca) de um lado da rua e um ponto C do outro lado da rua (um poste).



- marcamos um ponto B (estaca). Ao fazê-la, deve-se conseguir um ângulo reto em A.



- Com mira (teodolito confeccionado pelos alunos), mede-se o ângulo $\hat{B}$. Com uma trena ou uma fita métrica, mede-se a distância de AB.



Com esses dados e usando trigonometria, calcula-se a largura da rua.

Depois, só para conferir, meça a largura da rua com a trena.

Faça um relatório do qual devem constar um desenho esquemático da situação, a descrição do processo, os dados obtidos, os cálculos e o resultado.

Como confeccionar o teodolito

Teodolito é um equipamento óptico capaz de medir ângulos, muito utilizado na construção civil. Essa é uma construção com sucata cujo preço“ não chega a R$ 1,00”. O aparelho mostra aplicações práticas do estudo de ângulos e da congruência e semelhança de triângulos e permite medir a altura de objetos perpendiculares ao chão.

Material necessário: copo plástico com tampa (de iogurte, por exemplo), xerox de transferidor colado no centro de uma base quadrada, 15cm de arame fino e 15cm de um tubo de antena de TV (ou canudo).

Cole a tampa do copo (de cabeça par abaixo) alinhada no centro do transferidor. Faça dois furos diametralmente opostos na lateral do copo, próximo da boca, e passe o arame pelos furos, deixando-o atravessado no copo; ele será o ponteiro. O tubo de antena será a mira por onde você avistará os pontos. Cole o tubo na base do copo paralelo ao ponteiro. Para apurar a mira, cole na extremidade do tubo dois pedaços de linha em forma de cruz. Encaixe a tampa no copo.

Como medir um poste:

(Atividade sugerida mas, medir a rua foi escolhida por cotação)

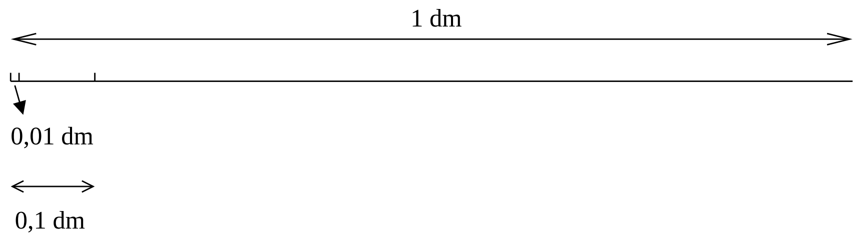
Imagine um triângulo formado entre o poste e o teodolito. Posicione o aparelho numa mesa plana e aponte o 0° do transferidor para a base do poste. Coloque o ponteiro do teodolito em 0º e, olhando de mira, peça a alguém para marcar um ponto no poste. Essa linha de mira forma 90º com o poste. Levante a mira até avistar a ponta do poste e anote o ângulo indicado no transferidor. Esses dados permitem que se desenhe o triângulo em escala reduzida. Meça o cateto que representa o poste e volte a escala original.

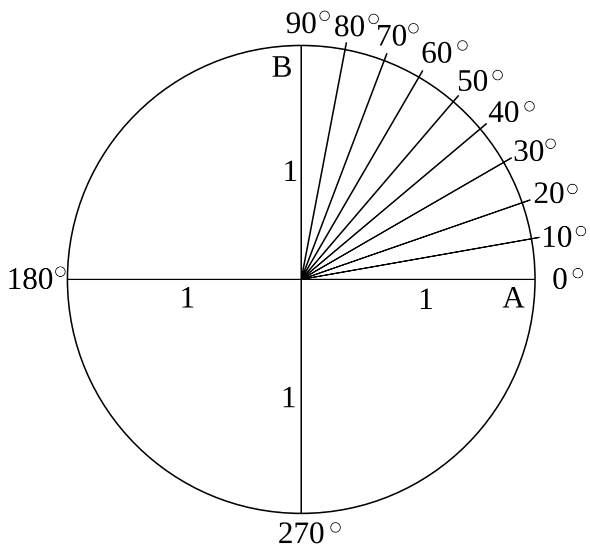
D) Confecção de um instrumento para determinar seno e cosseno (goniômetro)

Atividade individual

Desta vez, você vai construir uma tabela diferente para valores de seno, cosseno e tangente. Providencie uma folha de papel milimetrado e construa uma circunferência de $1dm$ de raio, isto é, $10cm$. Marque, auxiliado por um transferidor, os arcos correspondentes a 0º, 10º, 20º, 30º, $\cdots$, 360º. Cole este desenho em uma cartolina ou em um pedaço de compensado.

Observe que, se o raio mede $1dm$ (ou $10cm$), cada quadrado maior do papel milimetrado mede $0,1dm$ (ou $1cm$), e cada quadradinho menor mede $0,01dm$ (ou $1mm$).

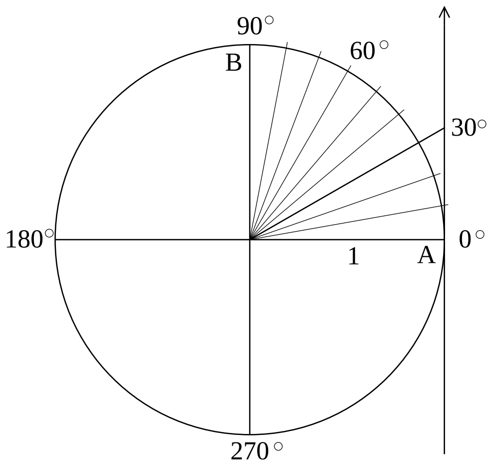




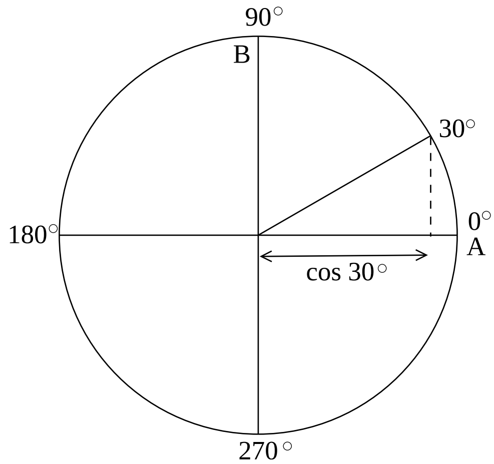
Corte uma tira de cartolina ou plástico do tamanha do raio, fixe uma de suas extremidades no ponto O da circunferência (com tachinha) e na outra extremidade amarre um pedaço de linha (ou fixe com o mesmo plástico).

Gradue os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, lembrando que $OA = OB = 1$.

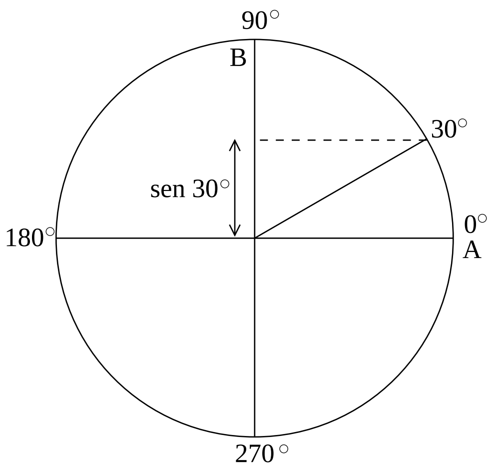
Para determinar o cosseno de um ângulo de 30º, por exemplo, desloque a tira de cartolina (ou de plástico) até a marcação 30º. Descendo a linha (ou plástico) perpendicularmente a $\overline{OA}$, você terá em $\overline{OA}$ o $cos 30^{o}$. Para saber a tangente, colocamos a cartolina na marcação do ângulo 30º e esticamos a linha até encontrar o eixo da tangente.



Para determinar a tangente do ângulo de 30º.



Para determinar o cosseno do ângulo de 30º.



Para determinar o seno do ângulo de 30º.

Agora, usando esta sua tabela, escolha alguns ângulos, um de cada quadrante e determine o seno, o cosseno e a tangente desses ângulos.

Construa uma tabela com os valores que você obteve e confira-a com a tabela trigonométrica da página seguinte. Agora, responda:

Qual é o valor que você encontrou para $sen\,0^o$, $cos\,0^o$ e $tg\,0^o$? E para $sen\,90^o$ e $cos\,90^o$?Explique por que não temos $tg\,90^o$.

E) As razões trigonométricas nos quadrantes

Para calcular o valor aproximado das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de ângulos agudos, também pode-se proceder da forma descrita abaixo, observando a construção da figura abaixo:

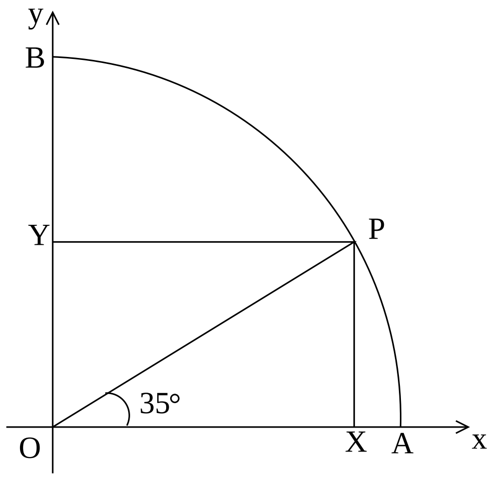


Figura 3.1:

No papel milimetrado foram traçados os eixos coordenados, e com o compasso foi desenhado um arco $\widehat{AB}$ equivalente a um quarto da circunferência, de raio $10cm$, com centro em O.

Com o transferidor foi marcado um ângulo de 35^o, com vértice em O, a partir da semi-reta $\overrightarrow{OA}$.

Observe que a semi-reta corta o arco $\widehat{AB}$ no ponto P de coordenadas (x, y), obtendo-se assim o triângulo retângulo POX, cuja medida dos catetos foi encontrada mediante uma contagem. Assim, obteve-se:

$$OX = 8,1cm \quad e \quad PX = 5,7cm$$

Com as razões trigonométricas definidas anteriormente e lembrando que o raio, que é a hipotenusa do triângulo, mede $10cm$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
sen\,35^o &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5,7cm}{10cm} = 0,57.\\
cos\,35^o &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8,1cm}{10cm} = 0,81.\\
tg\,35^o &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{5,7cm}{8,1cm} = 0,70.
\end{aligned}$$

Proposta de atividade:

Faça a mesma construção para um ângulo de 35^o, usando um raio diferente de $10cm$.

1) Qual o comprimento dos catetos na sua construção?

2) Calcule as razões trigonométricas do ângulo de 35^o e compare os seus resultados com os obtidos por seus colegas e com a primeira construção feita. O que você percebeu?

3) A medida do raio interfere nas razões trigonométricas que você encontrou?

Tendo concluído que os valores das razões trigonométricas (seno, cossseno e tangente) independem do comprimento do raio passa-se a analisar um caso particular em que o raio é igual a uma unidade de comprimento. Para isso, volte a analisar a figura (3.1) (considere o raio igual a $1u.c.$) e, por contagem, encontre as medidas dos catetos $\overline{OX}$ e $\overline{PX}$.

Com esses dados, calcule novamente as razões trigonométricas para o ângulo de 35^o, e responda:

a) Que valores você encontrou?

b) Qual é a relação entre o valor do cateto oposto e do seno de 35^o?

c) Qual é a relação entre o valor do cateto adjacente e do cosseno de 35^o?

Obs.: Neste caso (raio=1), pode-se dizer que a abscissa é o valor do cosseno do ângulo e, conseqüentemente, o eixo das abscissa é o eixo dos cossenos. A ordenada é o valor do seno do ângulo e, portanto, o eixo das ordenadas é o eixo dos senos. Justifique essas afirmações. Observe a construção da figura seguinte:

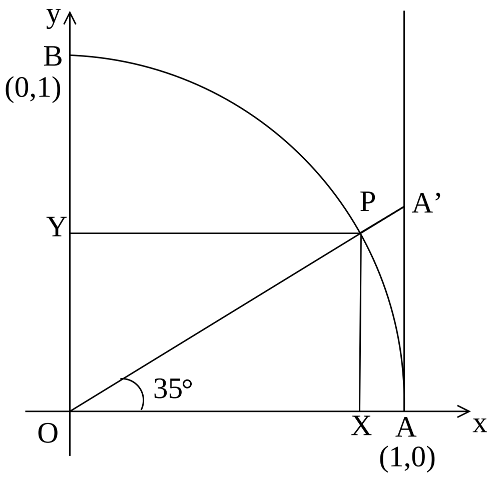


Figura 3.2:

Nela você observa que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP} = 1$ (unidade de comprimento). Compare as medidas da figura (3.1) com as da figura (3.2).

Na figura (3.2), os triângulos POX e AOA' são semelhantes, logo:

$$\frac{OX}{OA} = \frac{PX}{AA'} \quad \Rightarrow \quad \frac{0,81}{1} = \frac{0,57}{AA'} \quad \Rightarrow \quad AA' = 0,70.$$

Comparando esse resultado com o valor obtido para a tangente de 35°, pode-se afirmar que a medida do segmento $\overline{AA'}$, também representa a tangente de 35°.

Prolongando o lado $\overline{AA'}$ do triângulo, constrói-se um novo eixo chamado eixo das tangentes. Pode-se observar que o eixo tangencia o arco $\widehat{AB}$ no ponto A (figura 3.3).

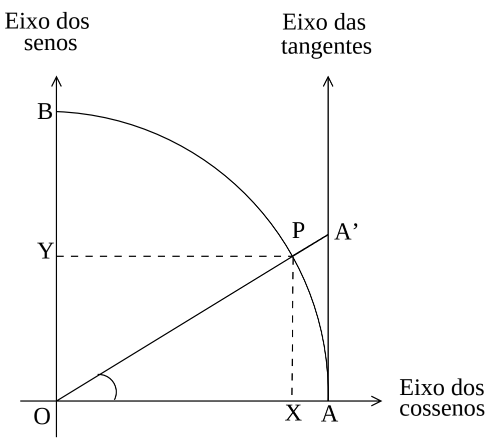


Figura 3.3:

Portanto, uma outra maneira de determinar o valor da tangente de um ângulo qualquer é prolongar o raio $\overline{OP}$ até interceptar o eixo das tangentes.

Obtém-se assim o segmento $\overline{AA'}$, que é a medida algébrica da tangente do ângulo a.

Proposta de atividade:

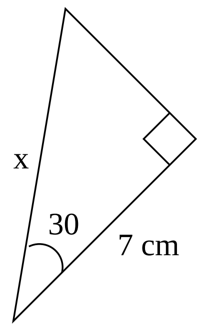
a) No papel milimetrado, repita o processo de construção da figura (3.2) para um ângulo de 45º, e encontre o valor do seno, cosseno e tangente desse ângulo.

b) Repita o processo para um ângulo de 80º.

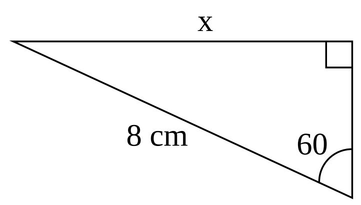
Exercícios de Fixação

1. Consultando uma tabela de razões trigonométricas, vemos que sen 30º=0,5, cos 30º=0,87, sen 25º=0,42, cos 25º=0,90, sen 60º=0,87, cos 60º=0,5. A partir dos valores dados, calcule o valor aproximado de x em cada triângulo abaixo. Depois, em papel milimetrado, desenhe os triângulos e verifique os resultados.

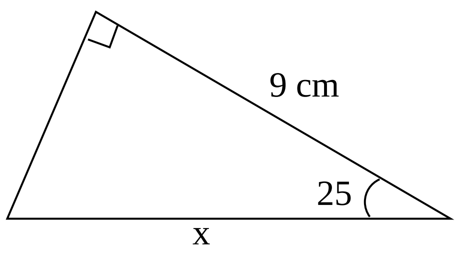
a)



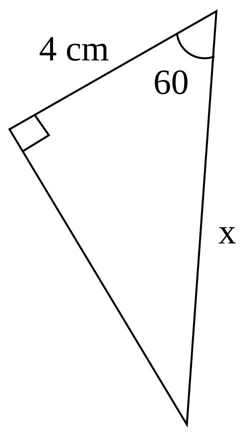
b)



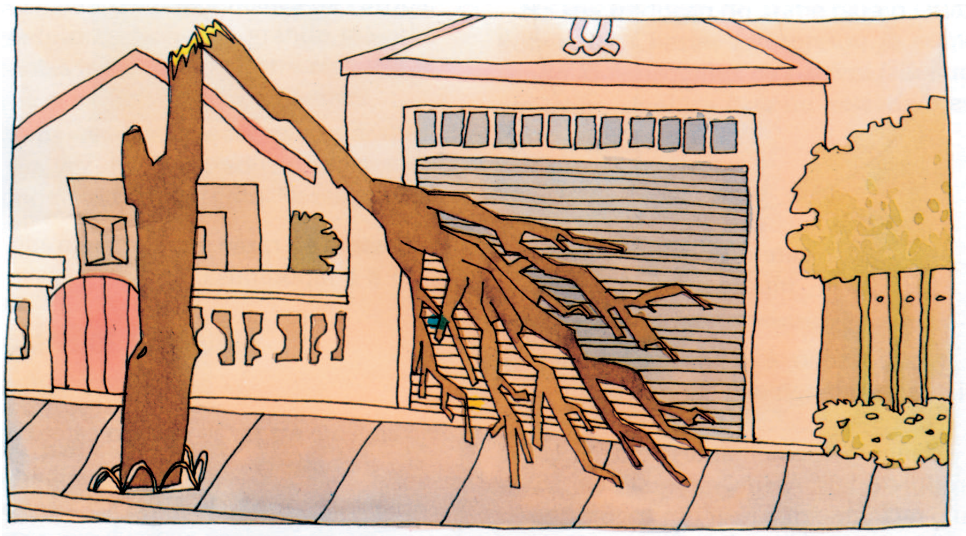
c)



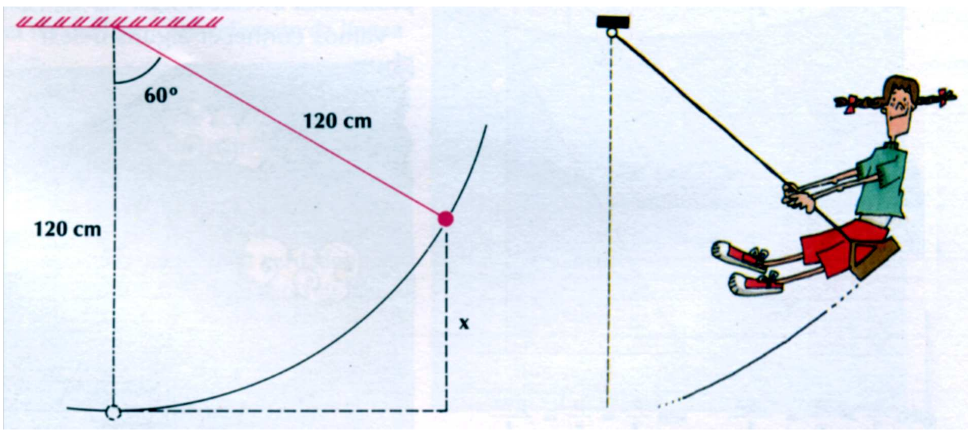
d)



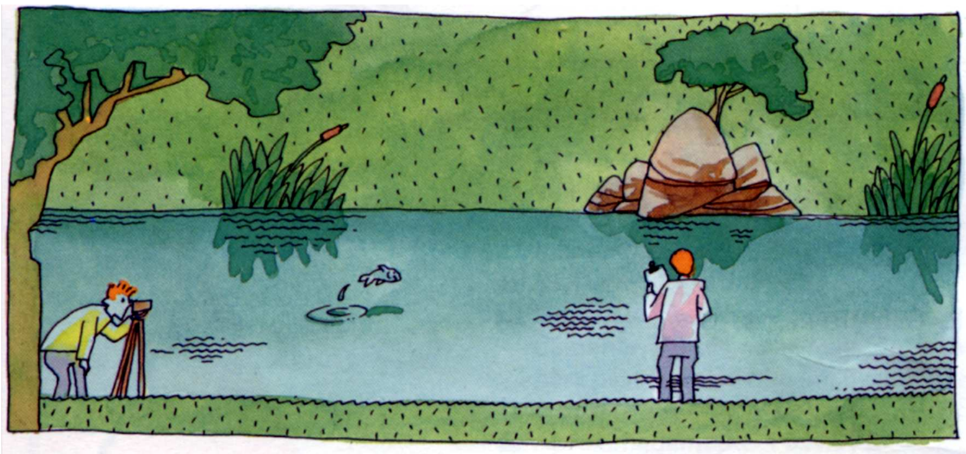
2. O vento quebra uma árvore durante uma tempestade. A copa dessa árvore encosta no solo a $10m$ de sua base. Sabendo que o ângulo formado entre a copa da árvore e o solo é de 30º, determine a altura da árvore. (Dados tg 30º=0,577 e cos 30º=0,866)



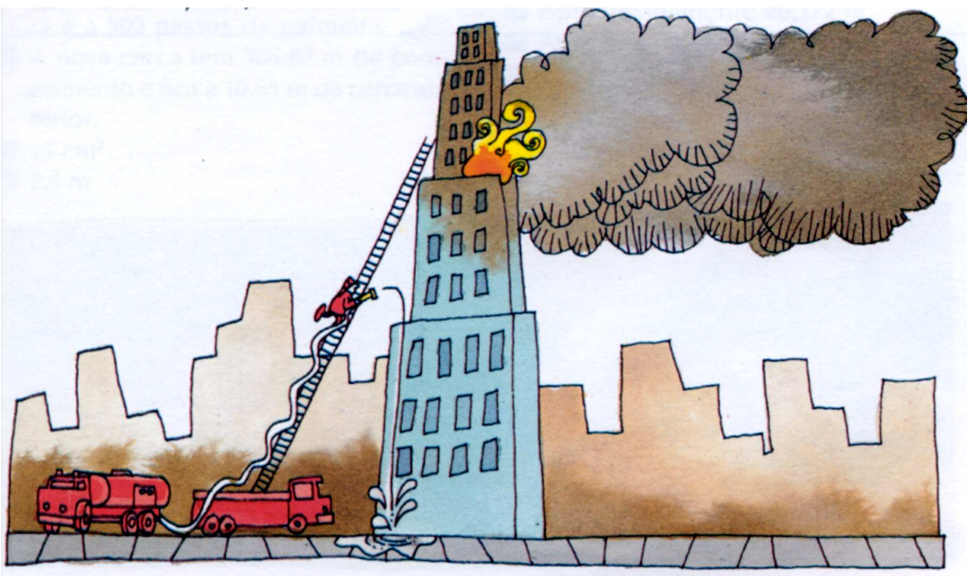
3. Ao se mover, um pêndulo de $120cm$ de comprimento forma um ângulo de 60º com a vertical. Quantos centímetros sobe a extremidade inferior do pêndulo? (Dados cos 60º=0,5)



4. Dois topógrafos estão na mesma margem de um rio, separados $36m$ um do outro. Um deles observa uma pedra que está na outra margem, bem em frente ao seu companheiro. Com a ajuda de um teodolito, o observador verifica que a linha perpendicular que une a pedra ao seu colega forma um ângulo de 36º com a linha de mira do teodolito à pedra. Qual é a largura do rio?



5. Para combater o incêndio em um edifício de $58m$ de altura, os bombeiros estacionam o carro em frente e manejam a escada até que ela atinja o topo do prédio. Dessa forma, a escada forma um ângulo de 75^o com a horizontal. Se a base da escada está a $2m$ do chão, quantos metros de escada os bombeiros utilizam nesse incêndio?



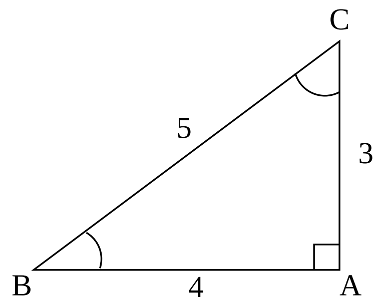
6. Sabendo que, num triângulo isósceles, cada lado congruente mede $40cm$. Se cada ângulo da base desse triângulo mede 62^o, determine:

   a) a medida x da base.

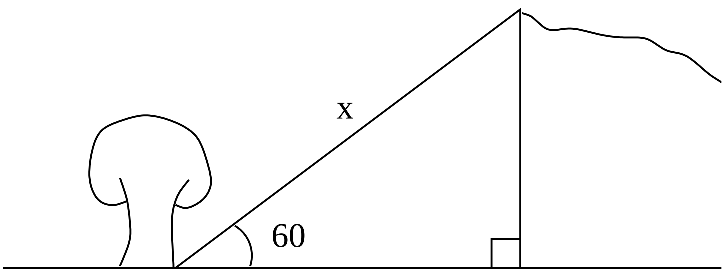
   b) a medida h da altura.

7. Você já sabe que um triângulo com os lados medindo $3cm$, $4cm$ e $5cm$ é retângulo,

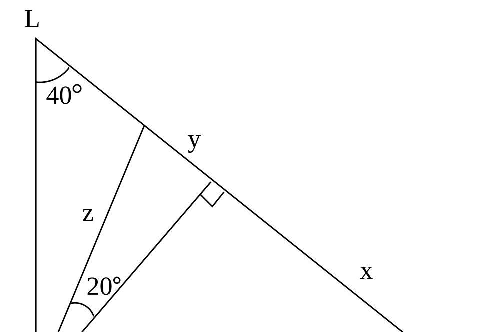
pois vale a relação $5^2 = 3^2 + 4^2$. Calcule a medida aproximada dos ângulos desse triângulo.



8. O ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta é de 60º. Sabendo-se que a árvore está distante $50m$ da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta?



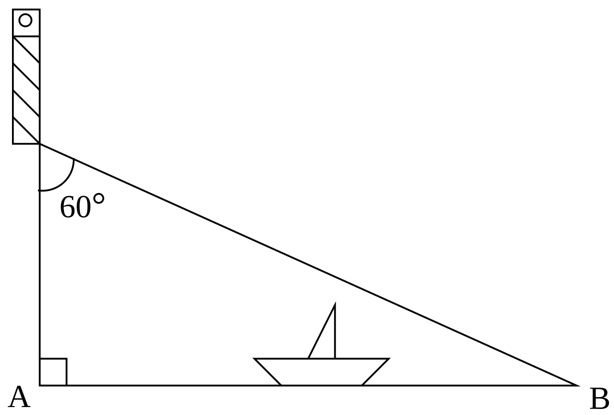
9. Calcule os valores aproximados de x, y e z.



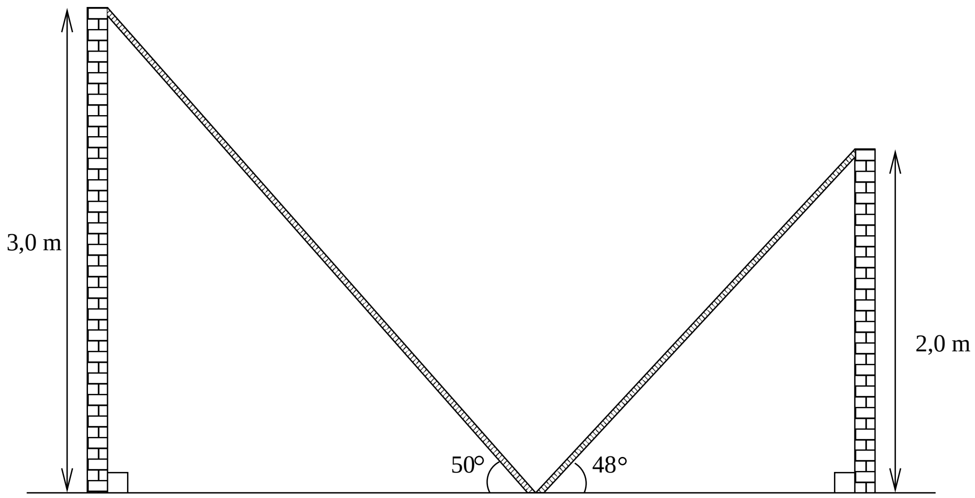
10. Um navio, navegando em linha reta, vai de um ponto B até um ponto A. Quando o navio está no ponto B, é possível observar um farol situado num ponto C de tal forma que o ângulo $A\hat{C}B$ mede 60º. Sabendo que o ângulo $C\hat{A}B$ é reto e que a distância entre os pontos A e B é de 9 milhas, calcule a distância, em milhas:

a) do ponto A ao farol.

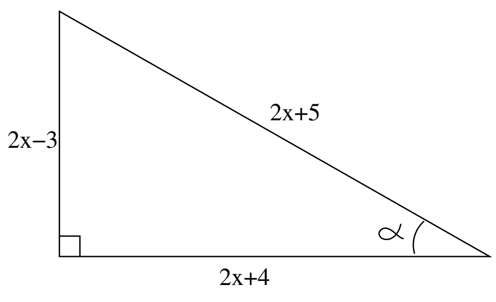
b) do ponto B ao farol.



11. Duas escadas estavam encostadas em dois muros, como mostra a figura abaixo. Qual é a distância entre os muros?

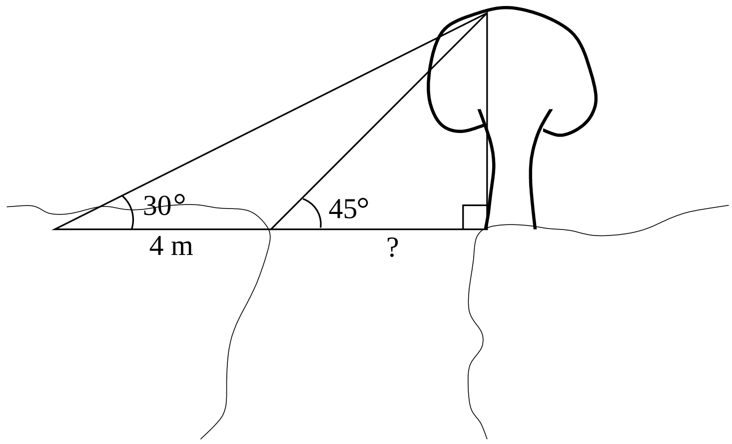


12. Calcule senα:

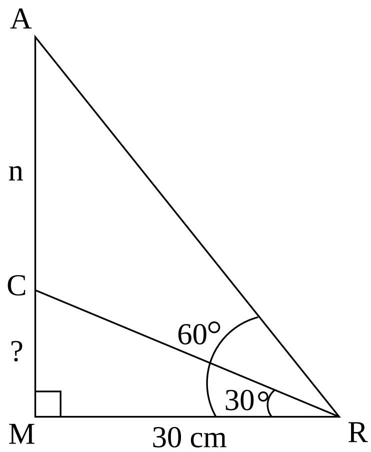


13. Teresa descobriu a distância entre dois penhascos usando uma árvore que nasceu

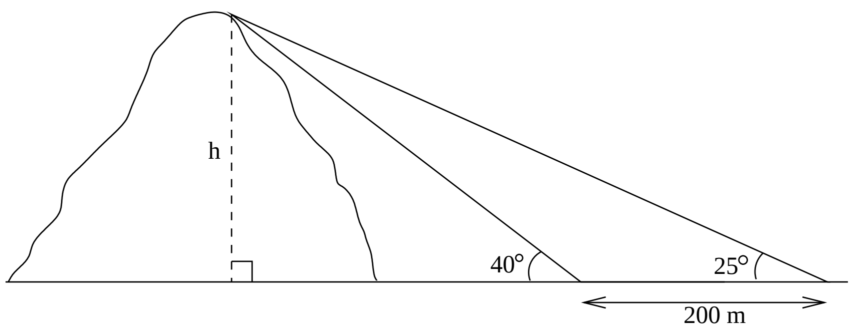
em um deles, bem na sua beirada. Com as medidas que ela conseguiu obter, calcule a largura aproximada do penhasco.



14. A medida n é expressa por um número irracional. Qual é ele?

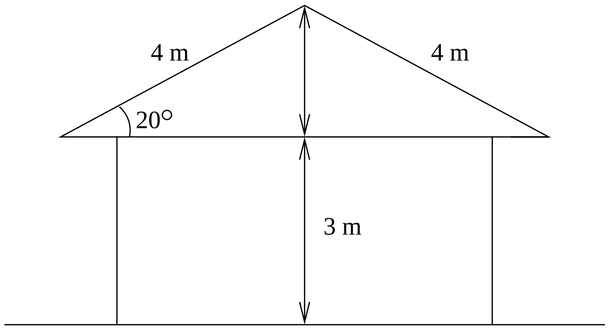


15. Determine a altura de uma montanha em que não é possível alcançar a base.

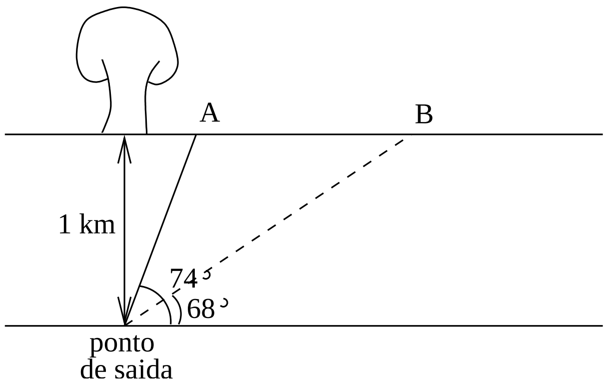


16. Na construção de um telhado foram usadas telhas francesas e o "caimento" do telhado é de 20° em relação ao plano horizontal. Sabendo que, em cada lado da

casa, foram construídos $4m$ de telhado e, que, até a laje do teto, a casa tem $3m$ de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa. (Use: sen 20º=0,34, cos 20º=0,94, tg 20º=0,36)



17. Dois nadadores atravessaram a nado um rio que tem $1km$ de largura. Ambos partiram do mesmo ponto e queriam atingir a outra margem mirando uma árvore que estava colocada perpendicularmente ao ponto de saída dos nadadores em relação à margem. Só que eles foram puxados pela correnteza e cada acabou fazendo um trajeto deferente. O primeiro nadador fez uma trajetória que formava um ângulo de 68º com a margem, como mostra o desenho, e o segundo fez uma trajetória que formava um ângulo de 74º.



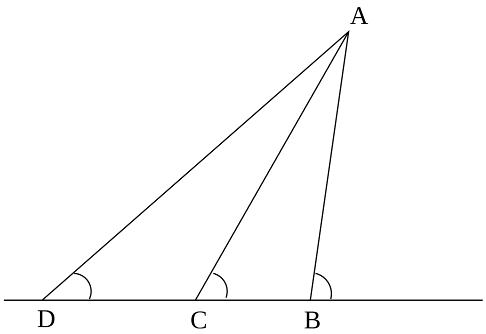
Calcule a distância:

a) que o primeiro nadador percorre.

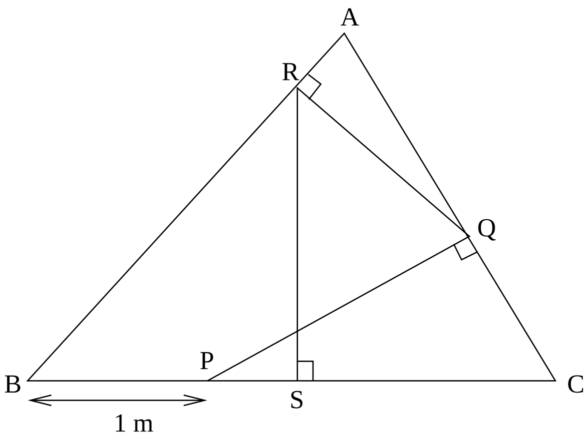
b) percorrida pelo segundo nadador.

c) entre os ponto A e B de chegada dos dois nadadores.

18. Nesta figura, os ângulos assinalados medem 30º, 45º e 60º. Sabendo que $\overline{AB}$ mede $5cm$, calcule as medidas de $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$.



19. Na figura, o triângulo ABC é equilátero, com lados de $7m$. Uma pessoa sai do ponto P e caminha perpendicularmente a $\overline{AC}$, até Q; a seguir, vai perpendicularmente a $\overline{AB}$, até R; finalmente, ela vai perpendicularmente a $\overline{BC}$, até S. Chegando em S, a que distância ela estará do ponto P, de onde partiu?

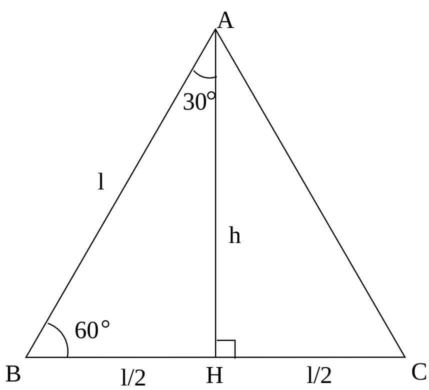


$AB = BC = AC = 7m$

$BP = 1m$

$PS = ?$

20. O triângulo da figura é equilátero e seus lados são iguais a l.



a) Escreva a fórmula que dá h em função de l.

b) Calcule sen 60º, cos 60º e tg 60º.

c) Calcule sen 30º, cos 30º e tg 30º.

Dê as respostas com os denominadores racionalizados.

Capítulo 4

Avaliação Crítica de Alguns Livros Didáticos

Neste capítulo, faremos uma breve avaliação crítica de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental em relação ao estudo de Trigonometria. Foram analisados três livros de 8ª série do Ensino Fundamental. Apresentamos aqui uma especificação do conteúdo e dos exercícios de cada livro.

4.1 Matemática- Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis

Este livro inicia o estudo das razões trigonométricas de uma forma bem interessante. Uma situação-problema em que alunos gostariam de medir a altura de um edifício usando um transferidor com mira, daí ele apresenta a solução dividindo os lados dos triângulos e encontrando a altura do edifício, justificando com a semelhança de triângulos. Em seguida apresenta as razões seno, cosseno e tangente explicando que essas razões não mudam se os triângulos são semelhantes. O conteúdo vai sendo exposto através de exemplos.

A característica mais marcante desse livro é a utilização de situações-problema para ensinar o conteúdo desejado. Aborda-se também assuntos de outras áreas, como o uso de aparelhos de medidas(Teodolito), construção civil e outros. Explora-se ainda noções de grandezas e unidades de medidas.

Em cada capítulo há um espaço chamado "Conversando sobre o texto", onde são feitos alguns questionamentos em que os alunos, geralmente precisam explicar suas respostas, o que estimula a construção de uma linguagem matemática significativa, além de desenvolver a argumentação e as atitudes críticas. Utiliza-se diferentes modos de representação que são adequados, ou seja, muitos problemas são representados de forma verbal, algébrica ou geométrica, e essas representações estão bem relacionadas umas com as outras.

O livro possui um dicionário ilustrado que tem o objetivo de explicar os conceitos num nível adequado ao aluno. Assim durante as explicações aparecem ilustrações com uma pergunta sobre alguma definição matemática e, então, aconselha-se o aluno a procurar o dicionário.

O livro possui também, uma seção chamada "Ação", onde os alunos podem fazer experimentos sobre o conteúdo dado.

No final traz uma lista de exercícios variados. Estes são bem elaborados e estão adequados ao conteúdo ensinado. Trabalha-se bastante situações do dia a dia e assuntos de outras áreas. Além disso, há exercícios que orientam, o aluno a fazer demonstrações e exercícios de curiosidades, o que aumenta o interesse dos alunos. Listaremos aqui os principais tipos de exercícios:

1) Encontrar, usando as razões trigonométricas, a altura de postes, antenas, mastros, montanhas, tendo como informação o ângulo de mira e a distância até a base.

2) Exercícios de construção de triângulos, dando-se a medida de algum dos lados e pedindo para encontrar a medida dos outros lados bem como o valor das razões trigonométricas dos ângulos em questão.

3) Exercícios que trabalham com porcentagem, como o exercício sobre a inclinação de um telhado. É explicado que os carpinteiros usam esta linguagem: "num telhado com inclinação de 40

4) Medidas indiretas de larguras de rios, estradas, tendo como ponto de referencia algum ponto na outra margem.

5) Comprimento de um cabo de aço de um teleférico que liga o chão ao alto de uma montanha.

6) A partir de outros polígonos encontrar os valores de seno, cosseno,e tangente de ângulos notáveis.

7) A partir da trigonometria, deduzir no triângulo retângulo algumas relações métricas.

8) Construção de triângulos, para encontrar os possíveis valores de seno ,cosseno e tangente de determinados ângulos para a confecção de tabelas trigonométricas.

Foi observado que o autor abordou o assunto razões trigonométricas após trabalhar a semelhança de triângulos, mas não fez uma revisão de razão entre segmentos, segmentos proporcionais ou Teorema de Tales.

4.2 Tudo é matemática- Dante

Este livro introduz o assunto de razões trigonométricas falando sobre o ângulo de subida em ladeiras ou rampas, calculando o índice de subida, como sendo: Subida $= \dfrac{\text{altura}}{\text{afastamento}}$. Depois de fazer alguns exercícios sobre o índice de subida ele apresenta as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente como sendo $tg\alpha = \dfrac{\text{altura}}{\text{afastamento}}$, $sen\alpha = \dfrac{\text{altura}}{\text{percurso}}$ e $cos\alpha = \dfrac{\text{afastamento}}{\text{percurso}}$. Depois ele apresenta essas razões como a divisão da medida dos lados de um triângulo retângulo usando as denominações $tg\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$, $sen\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ e $cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$. O livro possui uma seção chamada "Trocando idéias" onde os alunos podem conversar informalmente entre si e com o professor sobre o conteúdo. Nesse momento há uma troca de idéias, percepções e experiências. Ao se expressar oralmente, o aluno organiza suas idéias e seus pensamentos. Ao verbalizar conceitos e procedimentos ele promove a comunicação matemática que auxilia na aprendizagem. O professor que estiver utilizando este livro como livro didático, nesta seção, poderá aproveitar para verificar como o aluno se expressa, como ele pensa, que tipo de dificuldades tem, etc, e agir pedagogicamente com base nesta observação.

Há uma outra seção "Você sabia que ...", em que há sempre uma informação ou uma curiosidade interessante para desencadear um assunto ou para mostrar uma aplicação do conteúdo estudado.

Além dessas seções, ainda têm-se: Oficina de matemática, onde os alunos poderão agir e construir seus conhecimentos. O livro também apresenta bastante desafios, onde o professor pode considerar que nem todos os alunos resolverão a contento os desafios, mas é importante que todos tentem, de modo persistente, resolve-los.Nessas tentativas ocorrem muita aprendizagem, além disso estará desenvolvendo no aluno uma atitude positiva para enfrentar problemas e situações novas com persistência, levando-o a não desistir diante dos primeiros obstáculos.

O livro também apresenta idéias para projetos em equipe onde juntos os alunos tem oportunidades de criarem, planejarem, executarem, tomarem decisões e exporem um projeto sempre trabalhando cooperativamente respeitando as características individuais de cada um.

Os exercícios são colocados numa seqüência de complexidade e são apresentados de acordo com o assunto; não há muitos exemplos.

Cada assunto é bem explorado, traz bastante exercícios de cada tipo e alguns desafios. O livro não possui abordagem dos aspectos históricos neste capítulo nem exercícios que mencionem a história da Trigonometria.Há bastante exercícios de demonstração de fórmulas e relações nos triângulos.

Listaremos aqui os principais tipos de exercícios:

1) Exercícios sobre a determinação do índice de subida de rampas, usando o cálculo de razão entre a altura e o afastamento correspondente.

2) Exercícios em que o aluno deve examinar os índices de subida para dizer qual é mais ou menos íngreme.

3) Através de polígonos demonstrar relações trigonométricas.

4) Exercícios que envolvem geometria analítica, explicando que a tangente do ângulo que uma reta faz com o eixo x nos fornece a inclinação da reta.

5) Dado um triângulo com suas medidas dos lados, calcular o valor das razões seno, cosseno e tangente.

6) Dados os valores de seno, cosseno e tangente de um ângulo no triângulo retângulo calcular as razões do outro ângulo agudo do triângulo.

7) Exercícios para descobrir a altura de prédios, altura de torre, comprimento de cabos de aço e de rampas.

8) Exercícios de construção de triângulos com régua e transferidor para encontrar os valores aproximados de seno, cosseno e tangente dos ângulos deste triângulo.

Foi observado que o autor introduziu o assunto razões trigonométricas após o estudo de semelhança de triângulos, não fez uma revisão de razão entre segmentos nem de segmentos proporcionais e apresentou o Teorema de Tales depois de semelhança de triângulos.

Considerações Finais

A intenção de fazer uma proposta de ensino de trigonometria para uma turma de 8ª série foi de poder abordar este assunto de uma forma um pouco diferente da convencional.

Primeiramente foi feito um estudo de revisão de razão e proporção (já que é um assunto estudado na 6ª série) para que, quando se falasse em razão trigonométrica o aluno tivesse uma melhor compreensão do seu significado, pois muitos professores somente apresentam as fórmulas do seno, cosseno e tangente como se "caíssem do céu"e os alunos apenas memorizam e aplicam em exercícios automáticos em que os alunos "encaixam"os dados nas fórmulas e pronto!

Dessa forma não temos uma aprendizagem pois o aluno não empregou um significado no que fez. A partir do momento em que o professor faz uma revisão sobre razão entre segmentos, segmentos proporcionais, quando for falar da razão trigonométrica o aluno entenderá que se trata de uma divisão entre segmentos (os lados do triângulo).

Depois disso foi apresentado o Teorema da Proporcionalidade e o Teorema de Tales, pois assim os alunos terão uma melhor compreensão de semelhança de triângulos, já que a mesma é facilmente demonstrada utilizando o Teorema de Tales.

Depois de trabalhar a semelhança de Triângulos usando-a para encontrar medidas dos lados dos triângulos ou aplicando-a em situações-problema como a medição indireta de alturas,de lagos, de estradas, fazendo com que o aluno compreenda que dado dois triângulos se eles possuem dois ângulos congruentes então seus lados correspondentes serão proporcionais, isto é, a razão entre os lados correspondentes é a mesma. Se o aluno compreender isso, quando for apresentado a ele as razões trigonométricas seno , cosseno e tangente, ele compreenderá que em todos os triângulos retângulos com um mesmo ângulo agudo, as razões entre os lados de um serão iguais às razões entre os lados do outro ou de qualquer um (maior ou menor), pois serão todos semelhantes. Assim o aluno faz interconexões entre os conteúdos como propõe os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Esta seqüência de conteúdos foi escolhida após a observação de alguns livros didáticos e pela prática exercida pela autora durante cinco anos de magistério na rede Estadual de ensino. Concluímos que esta seria uma boa forma de introduzir o assunto Razões Trigonométricas.

Quanto às atividades, acreditamos que estas possam promover situações enriquecedoras de trocas entre os alunos, momentos em que o professor pode observar o aluno e perceber quais suas dificuldades, onde o aluno pode construir por si só as conexões entre os conteúdos e assim ter uma melhor compreensão do que é ensinado.

É claro que devem existir outros recursos talvez mais eficazes do que estes utilizados aqui nesta proposta, mas a intenção maior deste trabalho é mostrar que o professor é o maior responsável no processo ensino-aprendizagem, já que cabe a ele a escolha coerente dos conteúdos, a forma como é abordado o conteúdo e por isso ele deve procurar meios eficientes de fazer com que a maior parte de seus alunos compreendam o que está sendo ensinado.

Dessa forma, o professor está deixando de ser aquele repassador de conceitos e sim um mediador de conhecimentos e para isso deve constantemente repensar a sua prática docente.

"Como professor não me é possível ajudar o educando a superar sua ignorância se não supero permanentemente a minha. Não posso ensinar o que não sei. Mas, este, repito, não é saber de que apenas devo falar e falar com palavras que o vento leva. É saber, pelo contrário, que devo viver concretamente com os educandos."(Paulo Freire, Pedagogia da Autonomia, pg 95).

O ideal seria comprovar, com dados estatísticos, o êxito desta proposta, mas isto não foi possível no momento. Porém, como exercerei esta profissão, terei oportunidades para aplicá-la.

Referências Bibliográficas

[1] BERENICE, L.; ENRICONI, M. H. S.; SEIBERT, T. E. *A trigonometria por meio da construção de conceitos*. São Leopoldo. Unisinos. 2001.

[2] BIGODE, A. J. L. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo. Editora FTD. 2002.

[3] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo. Editora Edgard Blücher LTDA. 1974.

[4] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria e números complexos*. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática. 2001.

[5] CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. *Ensinar a Ensinar: Didática para a Escola Fundamentla e Média*. Pioneira. 1989.

[6] CAVALCANTE, L. G.; SOSSO, J.; VIEIRA, F.; ZEQUI, C. *Mais Matemática na medida certa*. 8ª série. São Paulo. Editora Saraiva. 2001.

[7] DANTE, L. R. *Tudo é Matemática*. 6ª série. São Paulo. Editora Ática. 2004.

[8] DANTE, L. R. *Tudo é Matemática*. 8ª série. São Paulo. Editora Ática. 2004.

[9] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar: geometria plana*. São Paulo. Editora Atual. 2001.

[10] DORIA, C. M.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. B. *Tópicos especiais em Matemática II: Geometria e trigonometria*. Florianópolis. Laboratório de Ensino à Distância. Universidade Federal de Santa Catarina. 2001.

[11] FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à Prática Educativa.* São Paulo. Editora Paz e Terra. 1996.

[12] GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI Jr., J. r. *Matemática pensar e descobrir.* 8ª série. São Paulo. Editora FTD. 2002.

[13] GUELLI, O.. *Matemática uma aventura do pensamento.* 8ª série. São Paulo. Editora Ática. 1997.

[14] JAKUBO, J.; BELLIS. M. *Matemática na medida certa.* 8ª série. São Paulo. Editora Scipione. 1998.

[15] IMENES, L. M.; JAKUBO, J.; BELLIS, M. *Pra que serve Matemática? Ângulos.* São Paulo. Editora Atual. 1992.

[16] IMENES, L. M.; JAKUBO, J.; BELLIS, M. *Pra que serve Matemática? Semelhança.* São Paulo. Editora Atual. 1992.

[17] IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática.* 8ª série. São Paulo. Editora Scipione. 1998.

[18] KENNEDY, E. S. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula.* São Paulo. Editora Atual. 1994.

[19] MACHADO, N. J. *Vivenciando a Matemática: semelhança não é mera coincidência.* São Paulo. Editora Scipione. 1989.

[20] MORI, I.; ONAGA, D. S. *Matemática idéias e desafios.* 8ª série. São Paulo. Editora Saraiva. 1998.

[21] NETO, E. R. *A descoberta da matemática: saída pelo triângulo.* São Paulo. Editora Ática. 1989.

[22] NETTO, S. P.; SOARES, E. *Matemática em atividades.* 8ª série. São Paulo. Editora Scipione. 2004.

[23] PIRES, C. C.; CURI, E.; PIETROPAOLO, R. *Educação matemática.* 8ª série. São Paulo. Editora Ática. 2002.

[24] *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília. MEC - SEF. 1998.

[25] *Proposta Curricular de Santa Catarina: Educação Infantil. Ensino Fundamental e Médio*. 1998.

[26] SPINELLI, W.; SOUZA, M. H. *Matemática*. 6ª série. São Paulo. Editora Ática. 2001.

[27] SPINELLI, W.; SOUZA, M. H. *Matemática*. 8ª série. São Paulo. Editora Ática. 2001.

Anexos

Anexo I

MATEMÁTICA

O objetivo da Secretaria de Estado da Educação e do Desporto, de Santa Catarina, ao desencadear o processo de elaboração e implementação da Proposta Curricular/91 era de propiciar aos educadores um espaço de discussão e produção coletiva visando a transformação da prática pedagógica.

A avaliação deste processo, pautada nos dados do Sistema Estadual de Registro e Informação Escolar (SERIE), na execução do Programa de Capacitação da SED e na elaboração do Plano Político-Pedagógico das unidades escolares, indica que uma parcela significativa dos professores que atuam com Matemática não conseguiu viabilizar, na escola, a transformação esperada da prática pedagógica tradicional em Educação Matemática. O que aconteceu nesta caminhada que não possibilitou a transformação nos níveis almejados?

Dentre os fatores que impediram a transformação pode-se elencar:

- a falta de leitura ou desconhecimento do documento da Proposta Curricular/91;
- dentre os que leram o documento, muitos não conseguiram se apropriar do conteúdo da Proposta;
- realização de cursos de capacitação para a operacionalização da Proposta Curricular, que nem sempre contemplavam as idéias presentes no documento;
- descontinuidade do plano que previa a produção de subsídios pedagógicos para implementação da Proposta Curricular em sala de aula;
- uma parcela significativa das agências formadoras de professores não trabalhou a Proposta Curricular nos cursos de Magistério e Licenciatura;
- falta de conhecimento do professor decorrente de um processo precário de sua formação inicial;
- falta de condições objetivas de trabalho (salário defasado, disponibilidade de tempo para se atualizar, excesso de horas/aula, excessivo número de alunos em sala de aula...);
- falta de leitura sobre os diversos temas relacionados a sua disciplina e a educação;
- acomodação gerada pelo fato de o professor utilizar um único livro didático como instrumento de organização de seu trabalho;
- rotatividade de professores, que acontece durante cada ano letivo.

Diante deste quadro, algumas ações se fazem necessárias. Neste sentido, o Plano de Ação da SED 95-98 estabelece como uma das ações prioritárias a revisão e aprofundamento da Proposta Curricular/91, com o objetivo de proporcionar aos professores as condições teórico-metodológicas para a implementação da Proposta nas escolas estaduais.

O processo de revisão está sob a coordenação do Grupo Multidisciplinar composto por educadores da Rede Pública Estadual de Ensino. Especificamente no que se refere à Educação Matemática, há que se considerar alguns aspectos relevantes para a execução da revisão.

Ao refletirmos sobre os 8 (oito) anos (1988/1996) do processo de implementação da Proposta Curricular, constata-se que a situação do ensino de Matemática nas escolas públicas de Santa Catarina pouco se alterou. Os conteúdos matemáticos ainda são enfatizados numa abordagem internalista, isto é, trabalha-se a Matemática desconsiderando tanto os aspectos políticos, econômicos e sociais, quanto os conceituais.

A Matemática ainda é vista somente como uma ciência exata – pronta e acabada, cujo ensino e aprendizagem se dá pela memorização ou por repetição mecânica de exercícios de fixação, privilegiando o uso de regras e "macetes".

Subjacente a esta prática, percebe-se uma concepção de ensino de Matemática que privilegia o caráter utilitário deste conhecimento, ou seja, a Matemática é entendida apenas como ferramenta para a resolução de problemas ou como necessária para assegurar a continuidade linear do processo de escolarização, não contemplando a multiplicidade de fatores necessários ao desenvolvimento de uma efetiva **Educação Matemática**.

A Secretaria de Estado da Educação e do Desporto, em contraposição a esta concepção tradicional, vem tentando produzir, com os professores de Matemática da Rede Pública Estadual de Ensino, uma Proposta Curricular que pretende romper com a prática pedagógica vigente. Após discussões e reivindicações de uma parcela dos educadores, somadas às pressões desencadeadas pelo movimento neoliberal e pela iniciativa do Ministério da Educação/MEC, com a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais, decidiu-se retomar o debate em torno da Proposta Curricular de Matemática para o Estado de Santa Catarina.

Neste contexto ponderou-se, de um lado, pela reafirmação dos pressupostos básicos da Proposta Curricular/91, e de outro, por um trabalho de ampliação, aprofundamento, explicitação e operacionalização da mesma.

Por conceber a educação e a sociedade em incessante movimento, a equipe de Matemática do Grupo Multidisciplinar entende que uma proposta também deve apresentar este caráter dinâmico e processual. Isto significa dizer que ela não será definitiva, estando sempre aberta a novas contribuições e reformulações oriundas do coletivo de professores.

Embora já existam alguns grupos regionais de estudo, em Matemática, é necessária a continuidade e a ampliação do trabalho para que não ocorra a imposição de propostas, mas sim que se desencadeie o processo de produção coletiva de subsídios curriculares.

Além disso, é necessário que os integrantes dos referidos grupos participem de encontros de diferentes graus de abrangência, com o objetivo de trocar experiências e produzir subsídios para que ocorra a socialização do conhecimento matemático entre todos os profissionais da Educação. Para dinamizar esses processos a SED/CREs/Grupo Multidisciplinar estão estudando as possibilidades de viabilizar as condições objetivas necessárias à concretização dessa idéia, via Programa de Capacitação continuada. Isso significa a constante retomada dos pressupostos da concepção histórico-crítica do ensino de Matemática na qual se fundamenta a Proposta Curricular/91.

Neste sentido, reporte-se ao texto da referida Proposta: ... *na verdade, há que se transformar o ensino de Matemática em Educação Matemática*.... Educação Matemática entendida como uma postura político-ideológica de quem se propõe a ensinar Matemática, o que implica na compreensão de que todos têm o direito de se apropriar do conhecimento matemático sistematizado e de que é dever da Escola a sua socialização. Para educar matematicamente os sujeitos, é necessário buscar elementos teóricos e conceituais nos diversos campos da Ciência, entre eles História, Psicologia, Sociologia, Filosofia e Antropologia, que subsidiarão o trabalho pedagógico.

O educador matemático é o sujeito que tem consciência de que:

> *Não são os conteúdos em si e por si o que importa, mas os conteúdos enquanto veículos de grandes realizações humanas... os conteúdos enquanto veículos de produção de bens culturais (materiais e espirituais) de esperanças e utopias sim... mas também os conteúdos enquanto veículos de produção de dominação, da desigualdade, da ignorância, da miséria e da destruição... da natureza, de homens, de idéias e de crenças.* (MIGUEL, apud ABREU, 1994: 70).

Nesta concepção, a Matemática, sob uma visão histórico-crítica, não pode ser concebida como um saber pronto e acabado, ou um conjunto de técnicas e algoritmos, tal como concebe o ensino tradicional e tecnicista. Pelo contrário, a Matemática deve ser entendida como um conhecimento vivo, dinâmico, produzido historicamente nas diferentes sociedades, sistematizado e organizado com linguagem simbólica própria em algumas culturas, atendendo às necessidades concretas da humanidade.

Sobre isso, FIORENTINI (1995:32), contribui dizendo:

> *Assim como acontece com todo conhecimento a Matemática é também um saber historicamente em construção que vem sendo produzido nas e pelas relações sociais e, como tal, tem seu pensamento e sua linguagem. Ocorre entretanto, que essa linguagem com o passar dos anos foi se tornando formal, precisa e rigorosa, distanciando-se daqueles conteúdos dos quais se originou, ocultando, assim, os processos que levaram a Matemática a tal nível de abstração e formalização.*

Neste contexto, a alfabetização, compreendida como apropriação das diferentes linguagens, contempla em sentido amplo a Alfabetização Matemática, *que consiste em ter desenvolvidas capacidades cognitivas próprias que permitem ao sujeito histórico a leitura e a produção de significados, a resolução de problemas de seu cotidiano, a leitura contextualizada de sua realidade social e a apropriação de novos conhecimentos, contribuindo para a realização do desejo humano de transcendência.* (ABREU, 1997, mimeo).

Diante disso, iniciar o ensino de um conceito matemático a partir de sua elaboração mais atual, isto é, pelas definições formais, sem levar em consideração o processo de formação do pensamento matemático, significa dificultar para o aluno o acesso a esse saber. Sendo a Matemática uma forma especial de pensamento e de linguagem, a apropriação deste conhecimento pelo aluno se dá por um trabalho gradativo, interativo e reflexivo. Na formação desse pensamento e dessa linguagem o professor tem a função fundamental de ser o mediador entre o conhecimento historicamente produzido e sistematizado e aquele adquirido pelo aluno em situações que não envolvam a atividade na Escola. O conhecimento socialmente relevante para o aluno é aquele que é capaz de desenvolver suas capacidades cognitivas, que permite produzir significados, estabelecer relações, justificar, analisar e criar. Estes são requisitos básicos para a formação da cidadania no sentido de que possibilitam ao Homem: ler, compreender e transformar a realidade em sua dimensão física e social.

A função do professor, enquanto mediador no processo ensino-aprendizagem, comprometido com a construção da cidadania do aluno, consiste em criar, em sala de aula, situações que permitam estabelecer uma postura crítica e reflexiva perante o conhecimento historicamente situado dentro e fora da Matemática. Isto se dá num processo de produção de significados, de trabalhos interativo e de pesquisa. Um outro fator importante para que esta concepção de Matemática seja viabilizada em sala de aula é a necessidade de o professor se apropriar das teorias de aprendizagem, e fundamentalmente aquela teoria que entende a aprendizagem como um processo de interação de sujeitos históricos.

Segundo VYGOTSKY (1989) a interação social é o fator determinante para o sujeito passar do nível de pensamento de pseudoconceito, para a elaboração de conceitos. No contexto escolar, interagindo com os "mais capazes", os alunos inferem as estruturas dos conceitos e os significados dos mesmos. Este é o espaço privilegiado para que se faça a aproximação dos conceitos espontâneos – entendidos como os conceitos derivados das ações empíricas, da prática cotidiana em situações não escolares – com os conceitos científicos, que são sistematizados em situações de aprendizagem no processo educativo.

Assim, de acordo com FIORENTINI, o professor

> *procurará tomar como ponto de partida a prática do aluno, suas experiências acumuladas; sua forma de raciocinar, conceber e resolver determinados problemas. A esse saber popular e empírico trazido pelo aluno – continuidade – o professor contrapõe outras formas de saber e compreender – ruptura – os conhecimentos matemáticos produzidos historicamente* (1994: 68).

Para que o professor exerça efetivamente, em sala de aula, a função de mediador entre o saber matemático informal ou prático que o aluno tem e aquele historicamente produzido e sistematizado é imprescindível que:

- se atualize permanentemente procurando, junto com seus colegas, conhecer e estudar as pesquisas que vêm sendo produzidas em Educação Matemática e as metodologias que vêm se firmando neste campo como, por exemplo, a Etnomatemática, a Modelagem Matemática, a Resolução de Problemas, Projetos e Teoria dos Jogos, sendo que alguns autores e respectivos trabalhos estão relacionados na bibliografia em anexo;
- tenha uma atitude reflexiva sobre seu trabalho e sua função sócio-política;
- realize inovações em sala de aula e as divulgue e discuta com outros colegas.

Apresentamos a seguir os conteúdos matemáticos, organizados em quatro campos do conhecimento: Campos Numéricos, Campos Algébricos, Campos Geométricos e Estatística e Probabilidades. Estes temas têm como proposta metodológica a abordagem articulada, sempre que possível, sem considerar a linearidade, utilizada apenas para efeito de organização.

Na leitura e no estudo dos quadros devem ser observados aspectos muito importantes:

A passagem gradativa da cor branca para a cor preta, em cada conteúdo, corresponde a uma também gradativa passagem de um tratamento assistemático para sistemático. Tratar assistematicamente um conteúdo significa abordá-lo enquanto noção ou significação social, sem preocupação em defini-lo simbólica ou formalmente. Por exemplo, pode-se explorar informalmente o raciocínio combinatório nas séries iniciais, sem que, para isso, seja definido o que é Combinação ou Permutação. Tratar sistematicamente um conteúdo matemático significa dizer que ele será trabalhado conceitualmente, utilizando-se na medida do possível, a linguagem matemática simbólica tal como foi historicamente convencionada e organizada. A gradação da passagem deve ser feita a critério do professor e de acordo com as peculiaridades dos alunos com os quais está trabalhando.

Por outro lado, embora esta proposta esteja sugerindo a sistematização dos conceitos a partir de uma determinada série, isto não impede que ela possa ocorrer antes, sobretudo quando se fizer necessária e existirem as condições favoráveis para isso. Também convém lembrar que a utilização de determinado conteúdo não se esgota nas séries onde é sistematizado, mas que a partir daí possa ser utilizado regularmente na solução de problemas.

	ENSINO FUNDAMENTAL									ENSINO MÉDIO		
CAMPOS NUMÉRICOS	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª
1. NÚMEROS NATURAIS												
• Produção histórico-cultural												
• Conceito												
• Sistema de numeração decimal												
• Operações												
2. NÚMEROS RACIONAIS												
• Produção histórico-cultural												
• Conceito												
• Operações												
2.1. Números decimais												
• Proporcionalidade e Matemática Comercial/Financeira (Razão/Proporção)												
• Porcentagem												
• Sistema Monetário												
• Câmbio												
3. NÚMEROS INTEIROS												
• Produção histórico-cultural												
• Conceito												
• Operações												
4. N$^{\underline{OS}}$ IRRACIONAIS E REAIS												
• Produção histórico-cultural												
• Conceito												
• Operações												
5. NÚMEROS COMPLEXOS												
• Produção histórico-cultural												
• Conceitos												
• Operações												
6. ANÁLISE COMBINATÓRIA												

	ENSINO FUNDAMENTAL									ENSINO MÉDIO		
CAMPOS ALGÉBRICOS	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª
1. ALGEBRA												
• Produção histórico-cultural												
• Seqüências												
• Conceitos												
• Operações com expressões algébricas (cálculo algébrico, produtos notáveis e fatoração)												
• Expressões polinomiais de uma ou mais variáveis												
2. RELAÇÕES E FUNÇÕES												
3. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES												
4. MATRIZES E SISTEMAS LINEARES												

	ENSINO FUNDAMENTAL									ENSINO MÉDIO		
CAMPOS GEOMÉTRICOS	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª
1. GEOMETRIA												
• Produção histórico-cultural												
• Exploração do espaço tridimensional												
• Elementos de Desenho Geométrico												
• Estudo das Representações Geométricas no Plano												
• Geometria Analítica												
2. SISTEMAS DE MEDIDAS												
• Produção histórico-cultural												
• Conceitos e Medidas de: Comprimento, superfície, Volume, capacidade, ângulo, Tempo, massa, peso, velocidade e temperatura												
3. TRIGONOMETRIA												
• Produção histórico-cultural												
• Relações trigonométricas no Triângulo retângulo												
• Funções trigonométricas												

ESTATÍSTICA E	ENSINO FUNDAMENTAL									ENSINO MÉDIO		
PROBABILIDADES	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª
1. ESTATÍSTICA												
• Produção histórico-cultural												
• Noções Básicas												
2. LEITURA, INTERPRETAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE TABELAS E GRÁFICOS												
3. PROBABILIDADES												
4. PARÂMETROS ESTATÍSTICOS (média, mediana, moda e desvio padrão)												

ABORDAGEM DOS CONTEÚDOS: ALGUMAS ORIENTAÇÕES PEDAGÓGICAS BÁSICAS.

A concepção do conhecimento como uma produção histórico-cultural é um posicionamento a ser adotado na ação pedagógica da escola formal desde a Educação Infantil até a Educação de Jovens e Adultos.

É fundamental, na abordagem dos conteúdos, que se conheça a natureza e os significados sócio-culturais e científicos das idéias matemáticas. Este conhecimento permite ao professor vislumbrar a função social de cada conteúdo matemático, o que é essencial para pensar e produzir a ação pedagógica em sala de aula.

Desta forma, no estudo do Campo Numérico, tradicionalmente entendido por Aritmética, o significado privilegiado pela escola é o de número enquanto quantidade. Entretanto, quando a criança chega à sala de aula já possui uma significação de número que normalmente é diferente da escolar. Ela apresenta significados de ordem sócio-cultural tais como: números de telefone, da casa, de sua idade, de placas de carro, de sinalização de trânsito, entre outros. O professor deve explorar estes e outros significados e gradativamente fazer ponte com outras significações numéricas historicamente produzidas.

Outro aspecto importante diz respeito à prática social envolvendo os Números Naturais. Socialmente, as operações fundamentais são realizadas de diversos modos: cálculo oral, escrito, utilizando máquinas calculadoras e outros instrumentos. Estas práticas devem ser exploradas pelo professor em sala de aula. No cálculo oral pode-se explorar o cálculo estimativo, aproximado e outras estratégias diferentes do algoritmo escolar. Por sua vez, o algoritmo escrito pode ser sistematizado a partir do cálculo oral ou de outras formas que permitam ao aluno compreender o processo de sua própria elaboração e também aquele produzido ao longo da história pelos diferentes grupos sociais. A calculadora como um instrumento tecnológico utilizado socialmente, deve ser explorada didaticamente em sala de aula com vistas a: a) apropriação dos recursos tecnológicos deste tempo, fundamental para a formação do cidadão desta sociedade; b) compreensão do processo realizado pela calculadora e; c) compreensão das várias formas de cálculo.

Este trabalho deve se dar estreitamente articulado ao estudo lógico-histórico dos sistemas de numeração, focalizando sobretudo o sistema decimal, bem como à exploração dos conceitos, e seus respectivos significados sócio-culturais e científicos, de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e da logaritmação.

O estudo dos Números Racionais começa com as frações nas séries iniciais do Ensino Fundamental, cujo significado e conceito pode ser explorado a partir da relação parte/todo, da noção de divisão e de atividades com medição, tal como ocorreu historicamente. Nas séries seguintes o conceito é ampliado para Número Racional, envolvendo a noção de razão entre dois inteiros e podendo também ser explorada a noção de proporcionalidade, porcentagem e probabilidade.

Assim como ocorre com os Números Naturais, quando a criança inicia o estudo das frações já tem algumas noções, resultado das interações cotidianas, tais como: metade, metade da metade (um quarto), e sobretudo de números decimais (Sistema Monetário). O professor deve identificar estas noções e, caso os alunos não as tenham, cabe-lhe organizar atividades para que estes se apropriem das mesmas. Isto deve ser explorado pedagogicamente pelo professor e comparado com a construção de conceitos mais elaborados cientificamente.

É importante também explorar as diversas formas de representação dos Números Fracionários – geométrica, concreta e simbólica – envolvendo grandezas discretas e contínuas em sua dimensão linear, plana e espacial.

O conceito de Função, com a exploração da noção de variável, contribui significativamente para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica. O estudo das equações pode ocorrer em relação com o das Funções (Zèros da Função). O que ainda pode se considerar é que o conceito de Função está presente em quase todos os conteúdos matemáticos como Geometria, Trigonometria, Matemática Comercial e Financeira, Estatística e também está na base de outras ciências como a Química, Física, Geografia e nas Artes.

A exploração do conceito de Função, quando trabalhado a partir de tabelas, com valores variando um em função dos outros (relação entre grandezas), pode conduzir automaticamente para o estudo de um outro conceito fundamental – o conceito de Proporcionalidade. Este conceito é fundamental na formação do pensamento matemático e pode ser trabalhado desde as séries iniciais. Também é importante pela sua ampla aplicação social na interpretação de tabelas estatísticas, de gráficos, de mapas, de ampliação e redução de figuras, de plantas de construção, de receitas (médicas, culinárias...) e de outras misturas.

O pensamento proporcional deve ser desenvolvido a partir de situações problemas desafiadoras, sem formalizá-lo, num primeiro momento, através de regras e de nomenclaturas como: antecedentes, conseqüentes, quarta proporcional, meios e extremos.

Quanto ao estudo dos Números Inteiros Relativos, inicia-se explorando os significados social e etimológico de número negativo e da palavra "negativo". A noção de zero relativo (como ponto de referência) em contraposição a noção de zero absoluto (o qual não admite outro valor inferior) fundamenta o conceito de Número Inteiro Relativo.

O professor criará situações que possibilitem ao aluno perceber as limitações dos Números Naturais e a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos. É recomendável que se dê ênfase à gênese do conceito de Número Inteiro Relativo, como o Homem se apropria dele e como ocorreu o processo histórico de sua sistematização. O estudo destes números exige que o aluno articule todos os aspectos (histórico, contextual...) que envolvem seu conceito.

Atenção especial também deve ser dada para a especificidade e características de cada uma das operações. Isto significa a superação da prática vigente em que o ensino destas operações se resume à memorização de regras e sinais.

No estudo dos Números Irracionais, sugere-se como situações de análise: o problema vivido pelos pitagóricos no cálculo da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles; o problema de Hipasus ao traçar as diagonais de um pentágono regular; a relação entre o comprimento e o diâmetro da circunferência. Estas situações de análise possibilitam a compreensão de que existe uma ruptura da concepção de número como quantidade discreta para uma concepção de número como quantidade contínua.

Os Números Reais devem ser entendidos como uma ampliação do Campo Numérico dos Racionais que contribui para resolver matematicamente situações-problema de natureza diversa. No estudo das operações com os Números Reais é fundamental considerá-las nas especificidades dos subconjuntos (N,Z,Q). Por exemplo, a adição de dois Números Naturais envolve um raciocínio operatório próprio resultando um Número Natural que também é um Número Real. Já a adição de um Número Natural com um Número Irracional envolve um outro raciocínio operatório. Esta expressão aditiva tem dois significados: o resultado da operação e uma representação de um Número Real. Entende-se que no estudo destas operações, é preciso ter presente as similaridades com as operações de polinômios, e estabelecer a relação entre estes conteúdos.

No estudo das equações de 2º grau, cuja solução não seja um Número Real, surge a necessidade de ampliação do Campo Numérico dos Reais, momento em que o aluno pode ter uma primeira noção de Números Complexos.

A Análise Combinatória é um conteúdo a ser estudado desde a Educação Infantil – Pré-Escolar, com atividades de agrupamentos e combinações que podem ser representadas por meio de desenhos e colagens.

O desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem exige atividades ricas em significados que permitam ao aluno pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar estas regularidades matematicamente, pensar analiticamente e estabelecer relações entre grandezas variáveis. A Álgebra, portanto contribui com uma forma especial de pensamento e de leitura da realidade. Segundo FIORENTINI et alii (1993), o pensamento algébrico pode se desenvolver gradativamente a partir das séries iniciais, antes mesmo de uma linguagem simbólica. Isto acontece quando o aluno:

- estabelece relações/comparações entre expressões numéricas;
- percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema;
- produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação problema;
- ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica;
- interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas;
- transforma uma expressão aritmética em outra mais simples;
- desenvolve algum tipo de processo de generalização;
- percebe e tenta expressar regularidades ou invarianças;
- desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente; etc.

A introdução da linguagem simbólica dar-se-á gradativamente no Ensino Fundamental, sendo ela um instrumento facilitador na simplificação de cálculos, possibilitando as operações com variáveis. No processo de apropriação da linguagem algébrica o registro gráfico exerce um papel fundamental. Daí a necessidade de utilização das diversas formas de representação – diagramas, tabelas, gráficos e expressões matemáticas .

Portanto, o ensino de Álgebra não se reduz ao transformismo algébrico, tradicionalmente entendido como cálculo algébrico. Trabalha-se Álgebra também quando se estudam Equações e Inequações, Relações e Funções; exploram-se os vários significados das letras (como valores numéricos, como incógnitas, como variáveis e como símbolos abstratos); atribuem-se significados geométricos, físicos ou sociais às expressões algébricas; obtêm-se modelos matemáticos representativos de situações problemas da realidade e exploram-se geometricamente os processos do transformismo algébrico (operações com polinômios e fatoração).

Um trabalho crítico com a Álgebra minimiza o desenvolvimento de habilidades técnicas de manipulação de expressões algébricas (como por exemplo Equações Algébricas Biquadradas, Irracionais e Fracionárias) e maximiza o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No que diz respeito ao ensino dos Campos Geométricos é preciso primeiro refletir sobre as possíveis características e habilidades que constituem o pensamento geométrico. Algumas destas características e habilidades socialmente relevantes, que podem contribuir para a formação do pensamento do aluno, são:

- estudo ou exploração do espaço físico e das formas;
- orientação, visualização e representação do espaço físico;

- visualização e representação das formas geométricas;
- denominação e reconhecimento das formas, segundo suas características;
- classificação de objetos segundo suas formas;
- estudo das propriedades das figuras e das relações entre elas;
- construção de figuras ou modelos geométricos;
- medição do espaço geométrico uni, bi e tridimensional (conceito e cálculo de perímetro, de área, de volume e capacidade);
- construção e justificação de relações e proposições tendo como base o raciocínio hipotético dedutivo.

Desta forma o ensino crítico dos Campos Geométricos deve dar conta do desenvolvimento das habilidades anteriormente especificadas, a partir da Educação Infantil – Pré-Escola – e das séries iniciais do Ensino Fundamental onde esse trabalho tem uma abordagem mais experimental e exploratória do espaço e das formas presentes no cotidiano do aluno. Gradativamente, passa a ter uma abordagem mais sistemática, momento em que se intensifica o uso do raciocínio hipotético-dedutivo.

Convém salientar que o estudo dos Campos Geométricos não se restringe às formas e ao Sistema de Medidas. É importante explorar também a noção de ângulo, envolvendo movimento giratório, inclinações e diferença de orientações no espaço físico, representação no papel, a partir da qual ocorre um estudo mais sistemático do conceito euclidiano de ângulo. O trabalho sistemático com ângulo e com a semelhança de triângulo pode conduzir ao estudo da Trigonometria.

Feita esta explicitação da relação conteúdo-forma em Matemática é importante ressaltar que a organização dos temas aqui apresentados não obedece obrigatoriamente a uma seqüência a ser adotada na prática pedagógica; é apenas uma forma de apresentação dos conteúdos. Assim, o estudo de um determinado tema deve acontecer de forma contextualizada, tanto no aspecto sócio-histórico de produção do conhecimento, quanto nas relações com os demais conteúdos da Matemática, bem como com as outras áreas do conhecimento.

Uma questão que não se pode deixar de mencionar neste documento diz respeito à informatização cada vez maior dos serviços oferecidos à população. Nisso se inclui a chegada do computador e outros equipamentos tecnológicos nas escolas públicas. Os conteúdos matemáticos podem ser também trabalhados utilizando-se estes recursos – que são uma realidade do nosso tempo – na formação de sujeitos historicamente situados e capazes de se apropriarem e de dominarem os instrumentos trazidos pelo desenvolvimento tecnológico.

É imprescindível ao professor a compreensão de que a utilização dos recursos tecnológicos é irreversível, o que não significa, neste momento histórico, que a máquina o substituirá na sua função de mediador. O acesso à tecnologia está se tornando cada vez mais comum e, portanto, é necessária ao sujeito a apropriação do conhecimento que a informatização disponibiliza. Além disso, a utilização do computador pode contribuir para a produção de novos saberes.

O objetivo desta Proposta é apresentar à sociedade catarinense as orientações pedagógicas básicas para a Educação Matemática em Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos. Por serem ainda gerais essas orientações, este documento não pode ser considerado conclusivo ou definitivo e nem se restringe apenas a uma parcela dos professores de Matemática. Ele, na verdade, representa mais um passo em direção à produção de uma "Proposta Curricular Catarinense para o Ensino da Matemática".

Esse processo, portanto, deve ter continuidade e pressupõe uma história que se espera não tenha fim. Nesse sentido, este documento serve de subsídio e guia orientador para que os professores de Matemática produzam atividades e subsídios didático-pedagógicos para uso em sala de aula. Entretanto, para que a Proposta Curricular possa ser construída coletivamente, é fundamental, como já foi afirmado no início, que os professores se organizem em grupos regionais. A Secretaria de Educação dará apoio a esses grupos e, sobretudo, promoverá encontros para troca de experiências e socialização dos subsídios produzidos, os quais pretende publicar.

Ao finalizar este documento, convém salientar, uma vez mais, que o mesmo foi produzido pelo Grupo Multidisciplinar de Educação Matemática de Santa Catarina com as contribuições dos professores da Rede Pública Estadual, em particular nos cursos de capacitação promovidos pela Secretaria de Estado da Educação e do Desporto.

Além das contribuições incorporadas ao texto, são elencadas a seguir sugestões para a implementação da Proposta Curricular, encaminhadas pelos professores:

- No Projeto Político-Pedagógico da Escola, incluir o trabalho do professor de Matemática, com o objetivo de ter aliados à consecução do seu trabalho;
- solicitar às agências formadoras o trabalho sistemático com a Proposta Curricular (Instituições de Ensino Superior e cursos de Magistério da Rede Pública e Privada), com acompanhamento das Coordenadorias Regionais de Educação;
- organizar o horário dos docentes na Unidade Escolar de tal forma que seja respeitado (por região) um dia por disciplina, para grupos de estudo;
- formar grupos de estudo com o objetivo de trocar experiências, estudar o histórico de conteúdos específicos e elaborar subsídios metodológicos;
- atualizar-se na bibliografia referente à Proposta Curricular, observando, na Escola, as obras enviadas pela Secretaria;
- utilizar parte do orçamento descentralizado, de cada Escola, para atualizar o acervo da Biblioteca;
- socializar a Proposta com as Secretarias Municipais de Educação;
- criar uma política de pessoal que permita manter os professores habilitados, ACTs, que receberam capacitação, nas Escolas onde estão atuando;
- incentivar a participação da comunidade no Projeto Político-Pedagógico.

BIBLIOGRAFIA

ABREU, Mª A M. **Idéia relacionadora "CTS": uma aposta no enfraquecimento das relações de poder na educação matemática.** Florianópolis, UFSC, 1994 dissertação de Mestrado.

AZEVEDO, Maria Veronica de. **Matemática através de Jogos: Uma proposta Metodológica.** São Paulo: Atual, 1994.

BARCO, Luiz **Dois mais dois: A aventura de um Matemático no mundo da comunicação.** São Paulo: Thema Editorial, 1993.

BASSANEZI, R.C. **Modelagem como metodologia de Ensino de Matemática.** Boletim de Educação da SEMAC, 1988.

BICUDO, Maria Aparecida (org). **Educação Matemática.** São Paulo: Moraes, 1995.

BIGODE, Antonio Lopes. **Matemática Atual.** São Paulo: Atual Editora, 1994.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgar Blucher, 1974

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Sá da Costa, 1984.

CARVALHO, Dione L. **A interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar.** Campinas, SP. Fe. UNICAMP, 1995. Tese de Doutorado.

______. **Metodologia do Ensino da Matemática.** São Paulo: Cortez. 1990 (Coleção Magistério)

CARRAHER, T. et. Alii. **Na vida dez na escola Zero.** São Paulo: Cortez, 1988

______. (org.) **Aprender Pensando – contribuições da psicologia cognitiva para a educação.** Petrópolis: Vozes, 1982.

CENPEC. **Oficinas de Matemática e de leituras e escrita.** São Paulo: Plexus, 1995.

CHRETIEN, Claude. **A Ciência em ação.** Campinas: Papirus, 1994.

DAMÁZIO, Ademir. **A prática docente do professor de matemática: a pedagogia que fundamenta o planejamento e a execução do ensino.** Florianópolis: UFSC, 1991 (dissertação de Mestrado).

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de matemática.** São Paulo, Àtica, 1989

DAVIS Philip; HERSCH, Reuben. **A experiência Matemática.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, Ed. S/A 1989.

DIENES, Z.P. **Aprendizado Moderno da Matemática.** Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 1974.

______. **Lógica e Jogos Lógicos.** São Paulo, EPU, 1976

D AMBRÓSIO, Ubiratã. **Etnomatemática.** São Paulo: Ática, 1990

______. **Educação matemática.** Campinas, SP: Papirus, 1996

______. **Etnomatemática: um programa.** In: Educação Matemática em Revista. Blumenau/SC, SBEM, 1{1}, 5 – 11, 1993.

DUARTE, N. **O Ensino de Matemática na educação de Adultos**. São Paulo, Cortez 1986.
______. **A relação entre o lógico e o histórico no ensino da Matemática Elementar**. São Carlos, SP, UFSCAR. Dissertação de Mestrado, 1987.
______. **A Individualidade para Si**. Campinas (SP): Autores Associados, 1993.
FRAGA, Maria Lúcia. **A Matemática na escola primária: Uma observação do cotidiano**. São Paulo: EPU, 1988
FIORENTINI, Dario. **Tendências temáticas e metodológicas da pesquisa em educação matemática**. In: Anais do I Encontro Paulista de Educação Matemática. Campinas, SBEM, (pp: 186-193), 1989.
______. **Memória e análise da pesquisa acadêmica em educação matemática no Brasil: o banco de teses do CEMPE/FE – UNICAMP**. In: Ver. Zetetiké. 1 (1): 25-63. Campinas, CEMPEM/FE – UNICAMP, 1993.
______. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática: o caso da produção cientifica em cursos de pós-graduação**. Campinas: FE – UNICAMP. Tese de Doutorado, 1994.
______. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. In: Ver. Zetetiké. 3(4): 1-37. Campinas, CEMPEM/FE – UNICAMP, 1995.
FONTES, Hélio. **No passado da matemática**. Rio de Janeiro: Fundação Getútio Vargas, 1969.
GARNIER, Catherine. **Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista**. Escolas Russas e Ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.
GARDNER, M. **Divertimentos Matemáticos**. São Paulo: IBRASA, 1967.
GAZETTA, M. (1989). **A Modelagem como estratégia de aprendizagem da Matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores**. Rio Claro, SP, UNESP. Dissertação de Mestrado.
GENTILI, Pablo e Silva, Tomaz T. (orgs.) **Neoliberalismo, qualidade total e educação**. Petrópolis: Vozes, 1994.
GERDES, Paulus. **Etnomatemática: cultura, matemática, educação**. Moçambique: Institito Superior Pedagógico, 1991.
GUELLI, Oscar. **A Invenção dos Números**. São Paulo: Ática, 1992. (Contando a História da Matemática).
______. **Jogando com a Matemática**. São Paulo, Ática, 1992 (Contando a História da Matemática).
______. **História de Potências e raízes**. São Paulo: Ática, 1992. (Contando a História de Matemática).
HOZ, Vitor Garcia. **La Ensenanza de Las matemáticas en la educacion intermédia**. Madrid: Ediciones Rialp, S.ª 1994.
IFRAH, G. **Os Números: a história de uma grande invenção**. Rio de Janeir: Globo, 1989.
IMENES, L. M.P (1989). **Um estudo sobre o fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática**. Rio Claro: IGCE – UNESP. Dissertação de Mestrado.
______. **Geometria das dobraduras**. São Paulo. Scipione, 1992.
______. **Geometria dos Mosaicos**. São Paulo: Scipione, 1992 (Vivendo a Matemática).
______. **A numeração indo-arábica**. São Paulo: Scipione, 1992. (Vivendo a Matemática).
______. **Os números na história da civilização**. São Paulo: Scipione, 1992. (Vivendo a Matemática).
______. **Problemas Curiosos**. São Paulo: Scipione, 1992. Vivendo a (Matemática).
______. **Brincando com números**. São Paulo: Scipione, 1992. (Vivendo a Matemática).
KNIJNIK, G. **O Saber Popular e o Saber Acadêmico na luta pela** Terra. Educação Matemática em Revista. Blumenau (SC): SBEM, 1 (1), 28-42, 1993.
______. **Cultura, Matemática, educação na luta pela Terra**. Porto Alegre: FE-UFRGS, 1995.
LINDQUIST, Mary Montgomery e Shulte, Albert P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Editora Atual, 1994.
MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e didática**. São Paulo: Cortez, 1995.
______. **Matemática e Língua Materna**. São Paulo: Cortez, 1990.
______. **Interdisciplinaridade e Matemática**. Pro-posições, vol. 4, nº 1 [10], p. 24-34, 1993.
______. **Medindo comprimentos**. São Paulo: Scipione, 1992 (Vivendo a Matemática).
______. **Os poliedros de Platão e os dedos da mão**. São Paulo: Scipione, 1992 (Vivendo Matemática).
______. **Lógica? É lógico?** São Paulo: Scipione, 1992 (Vivendo a Matemática).
______. **Polígonos, centopéias e outros bichos**. São Paulo: Scipione, 1992 (Vivendo a matemática).
______. **Semelhança não é mera coincidência**. São Paulo: Scipione, 1992 (Vivendo a Matemática).
MARTÍ, José. **Ideario Pedagógico**. Imprenta Nacional de Cuba, La Habana, 1961.
MIGUEL, Antonio. **Três Estudos sobre História e Educação Matemática**. Campinas: FE-UNICAMP – Tese de Doutorado, 1993.
NETO, Ernesto Rosa. **Didática da Matemática**. São Paulo, Ática, 1988.
______. **Geometria na Amazônia**. São Paulo: Ática, 1991 (A descoberta da Matemática).
______. **Saída Pelo Triângulo**. São Paulo: Ática, 1989. (A descoberta da Matemática).
______. **Em busca das Coordenadas**. São Paulo: Ática, 1989. (A descoberta da Matemática).
PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org). **Didática da Matemática; reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PEREIRA, Tania M. et alii. **Matemática nas séries iniciais**. Ijuí: Livraria UNIJUÍ Ed, 1989.
RAMOS, Luzia Faraco. **O segredo dos Números**. São Paulo: Ática, 1991 (A descoberta da Matemática).
_______. **O que fazer primeiro?** São Paulo: Ática, 1991 (A descoberta da Matemática).
_______. **Frações sem mistérios**. São Paulo: Ática, 1991 (A descoberta da Matemática).
_______. **Aventura Decimal**. São Paulo: Ática, 1991 (A descoberta da Matemática).
_______. **Uma proporção ecológica**. São Paulo: Ática 1991 (A descoberta da Matemática).
_______. **Uma raiz diferente**. São Paulo: Ática, 1995. (A descoberta da Matemática).
RIBINIKOV, K. **História de las matemáticas**. Moscú: Editorial Mir, 1987.
SANTOS, Vania M. P. e REZENDE, Iovana Fereira. **Números Línguagem Universal**. Instituto de Matemática – UFRJ. Projeto Fundão.
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCACÃO (Santa Catarina). **Proposta Curricular: Uma contribuição para a escola pública do pré-escolar, 1° Grau, 2° Grau e educação de adultos**. Florianópolis: IOESC, 1991.
VYGOTSKY, Lev S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.
_____. **A Formação Social da Mente**. São Paulo : Martins Fontes, 1989.

REVISTAS E BOLETINS

TEMAS E DEBATES, Blumenau: SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática).
A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Blumenau: SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática).
BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro: UNESP.
ZETETIKÉ – Campinas, São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, CEMPEM.

GRUPO MULTIDISCIPLINAR/96
ADAUTO ALVES ROLIN – IEE
ANEMARI R.L.V. LOPES – 10ª CRE
BERTA MARIA SIMÃO CANI – 4ª CRE
EVANIR CECÍLIA SENS DOS SANTOS – 2ª CRE
GILVAN LUIZ MACHADO COSTA – 5ª CRE
JUÇARA TEREZINHA CABRAL – SED/DIEF
MARCOS FLÁVIO DA CUNHA – 6ª CRE
MARIA AUXILIADORA MARONEZE DE ABREU – SED/DIEF
MARIA JOAQUINA P. MENGARDA – 8ª CRE
MARLENE DE OLIVEIRA – SED/DIEM
MAURÍCIO DA SILVA – 2ª CRE

GRUPO MULTIDISCIPLINAR/97
ADALBERTO MATIAS BEPPLER – 22ª CRE
BERTA MARIA SIMÃO CANI – 4ª CRE
ELOIR FÁTIMA MONDARDO CARDOSO – 3ª CRE
EVANIR CECÍLIA SENS DOS SANTOS – 2ª CRE
HENRIQUE BREUCKMANN – 4ª CRE
LÉA REGINA CARDOSO GIL – IEE
JUÇARA TEREZINHA CABRAL – SED/DIEF
MARCOS FLÁVIO DA CUNHA – 6ª CRE
MARIA AUXILIADORA MARONEZE DE ABREU – SED/DIEF
MARIA EDITH PEREIRA – SED/GETED
MARIA IEDA MONTEIRO – 20ª CRE
MARIA JOAQUINA P. MENGARDA – 8ª CRE
MARLENE DE OLIVEIRA – SED/DIEM
MAURÍCIO DA SILVA – 2ª CRE

COORDENADORA
MARIA AUXILIADORA MARONEZE DE ABREU – SED/DIEF

CONSULTORIA
ADEMIR DAMAZIO – UNESC – CRICIÚMA
DARIO FIORENTINI – UNICAMP – CAMPINAS

Anexo II


N
O
S
Fortaleza
MARANHÃO
CEARÁ
RIO GRANDE DO NORTE
PIAUÍ
PARAÍBA
PERNAMBUCO
ALAGOAS
BAHIA
SERGIPE
Salvador
Escala
0 135 270 km
1 cm – 135 km

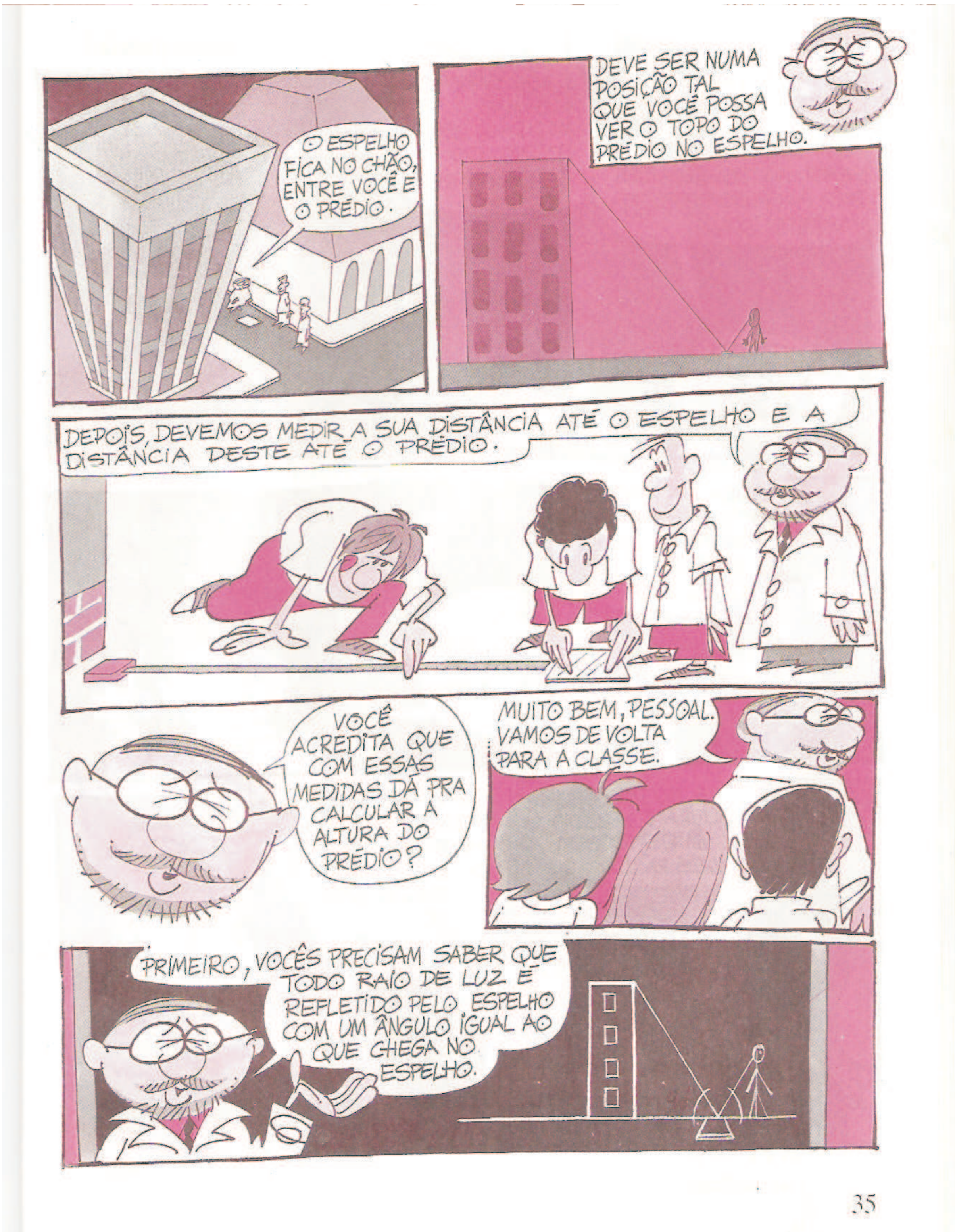

N
O
L
S
Fortaleza
MARANHÃO
CEARÁ
RIO GRANDE DO NORTE
PIAUÍ
PARAÍBA
PERNAMBUCO
ALAGOAS
BAHIA
SERGIPE
Salvador
0 1 2 3 4 5 6 7 8
Escala
0 135 270 km
1 cm – 135 km

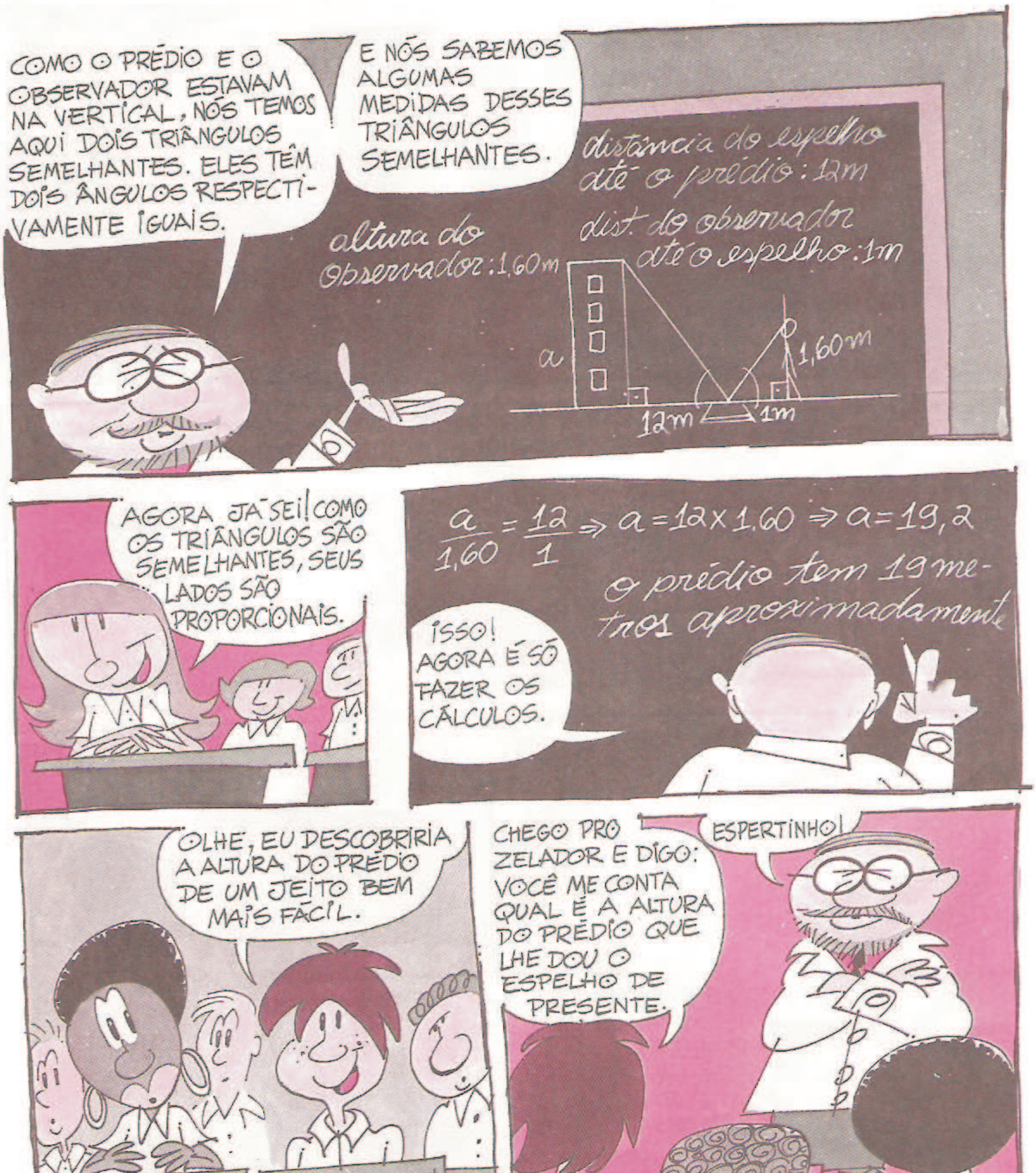
Anexo III

Santo Amaro
Serra do Tabuleiro
Rio Cachoeira do Norte
Rio Cachoeira do Sul
Palhoça
Rio Cachoeira
Sertão do Campo
São Bonifácio
Povo Novo
Sorocaba
Rio da Guarda
Sta. Rita
Miranda
Águas Ferras
Rib. Grande
Gamboinha
Bom Retiro
Morro da Palha
Figueira Oca
Toca
Freitas
Saquinho
Rio Paulo
Morro Agudo
Serra do Capivari
Espraiado
Vargem do Negro
M. Freitas
Cova Triste
OCEANO ATLÂNTICO
Tijela
Serraria
BR 101
Garopaba
Rio Miguel
Barrinha
Sanga
Penha
Alto da Penha
Riachão ou Laranjal
Rio Chicão
Rio d'Una
Rio Araçatuba
São Martinho
Imaruí
Imbituba

Anexo IV

Espelho serve para medir?


O ESPELHO FICA NO CHÃO, ENTRE VOCÊ E O PRÉDIO.
DEVE SER NUMA POSIÇÃO TAL QUE VOCÊ POSSA VER O TOPO DO PRÉDIO NO ESPELHO.
DEPOIS, DEVEMOS MEDIR A SUA DISTÂNCIA ATÉ O ESPELHO E A DISTÂNCIA DESTE ATÉ O PRÉDIO.
VOCÊ ACREDITA QUE COM ESSAS MEDIDAS DÁ PRA CALCULAR A ALTURA DO PRÉDIO?
MUITO BEM, PESSOAL. VAMOS DE VOLTA PARA A CLASSE.
PRIMEIRO, VOCÊS PRECISAM SABER QUE TODO RAIO DE LUZ É REFLETIDO PELO ESPELHO COM UM ÂNGULO IGUAL AO QUE CHEGA NO ESPELHO.
35


COMO O PRÉDIO E O OBSERVADOR ESTAVAM NA VERTICAL, NÓS TEMOS AQUI DOIS TRIÂNGULOS SEMELHANTES. ELES TÊM DOIS ÂNGULOS RESPECTIVAMENTE IGUAIS.
E NÓS SABEMOS ALGUMAS MEDIDAS DESSES TRIÂNGULOS SEMELHANTES.
distância do espelho até o prédio: 12m
dist. do observador até o espelho: 1m
altura do observador: 1,60m
a
1,60m
12m
1m
AGORA JÁ SEI! COMO OS TRIÂNGULOS SÃO SEMELHANTES, SEUS LADOS SÃO PROPORCIONAIS.
$\frac{a}{1,60} = \frac{12}{1} \Rightarrow a = 12 \times 1,60 \Rightarrow a = 19,2$
o prédio tem 19 metros aproximadamente
ISSO! AGORA É SÓ FAZER OS CÁLCULOS.
OLHE, EU DESCOBRIRIA A ALTURA DO PRÉDIO DE UM JEITO BEM MAIS FÁCIL.
CHEGO PRO ZELADOR E DIGO: VOCÊ ME CONTA QUAL É A ALTURA DO PRÉDIO QUE LHE DOU O ESPELHO DE PRESENTE.
ESPERTINHO!

36

Anexo V

ângulo	sen	cos	tg	ângulo	sen	cos	tg
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,467
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000	—	—	—	—