UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANA LICE CAROLINE SPECK

COLETÂNEA DE APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR

FLORIANÓPOLIS - SC
2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANA LICE CAROLINE SPECK

COLETÂNEA DE APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC como requisito para obtenção da Graduação em Matemática – Habilitação: Licenciatura.

Orientador: Professor Dr. Márcio Rodolfo Fernandes

FLORIANÓPOLIS - SC

2006

Este trabalho foi julgado adequado como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 01/CCM/07.

Professora M.Sc. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora da Disciplina

Banca Examinadora

Professor Dr. Márcio Rodolfo Fernandes

Orientador

Professor M.Sc. Nereu Estanislau Burin

Professor Dr. Daniel Noberto Kozakevich

Dedico a vitória desta etapa de minha vida a toda minha família, especialmente para os meus pais, Hilberto Speck Filho e Elisabete Maria Müller, à minha irmã Karina Speck e para meu esposo Vanderlucio Rosa Cunha, pelos esforços nunca poupados, buscando sempre me oferecer o melhor, pelo amor incondicional, presente em todas as horas e, principalmente, por terem sempre acreditado em mim. Merecedores de todo meu amor, pelo que fazem e pelo que são: dignos, trabalhadores e vitoriosos.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a quem teve grande importância para a elaboração deste trabalho.

Primeiramente a Deus, pela minha vida.

Aos meus pais, pela presença e por todo apoio.

À minha irmã Karina pelo incentivo, pela palavra e pela atenção, me dando coragem.

Ao meu esposo, Lucio, por toda paciência, por todo apoio, pela compreensão, por todo incentivo e por acreditar em mim.

Às minhas amigas Ketty, Luciana e Vanessa, por tornarem essa etapa de minha vida mais alegre e por toda ajuda e incentivo.

Ao amigo Alcino por sua disposição, dedicação e auxílio.

Ao Professor Márcio Rodolfo Fernandes, pelos esforços empenhados em me orientar e por sua disposição e paciência durante a realização deste trabalho.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta."

Carl Friedrich Gauss

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência que desde a antiguidade sempre esteve presente no dia-a-dia das pessoas, ainda que essa presença pareça imperceptível.

Estudamos matemática desde os primeiros anos escolares. Ao mesmo tempo em que dizemos que esta disciplina é muito importante em nossas vidas, devido à sua aplicabilidade, não mostramos muitas vezes suas aplicações. Por este motivo resolvi elaborar um trabalho, onde seu principal objetivo seria mostrar algumas aplicações de um determinado conteúdo matemático.

Dentre os inúmeros conteúdos que poderiam ser escolhidos, decidi trabalhar com Álgebra Linear, pois este é um dos assuntos que não conhecemos bem suas aplicações.

O trabalho foi organizado através da apresentação de algumas aplicações da Álgebra Linear. Convém, nesse momento, ressaltar que resolvi trabalhar com apenas quatro tipos de aplicações da Álgebra Linear: Programação Linear Geométrica, O Problema de Alocação de Tarefas, Cadeias de Markov e Criptografia. Outras aplicações que poderiam ser vistas são, por exemplo, Construindo Curvas e Superfícies por Pontos Especificados, Redes Elétricas, Jogos de Estratégia, Interpolação Spline Cúbica, Modelos Econômicos de Leontief, Teoria de Grafos, Administração de Florestas, Computação Gráfica, Distribuição de Temperatura de Equilíbrio, Tomografia Computadorizada, Fractais, Caos, Genética, Crescimento Populacional por Faixa Etária, Colheita de Populações Animais, Um Modelo de Mínimos Quadrados para a Audição Humana e Deformações e Morfismos.

O trabalho que segue está longe de ser um estudo concluído ou terminado. O que se pretende realmente é pôr o assunto em discussão.

2 PROGRAMAÇÃO LINEAR GEOMÉTRICA

2.1 Introdução

O estudo da teoria da Programação Linear foi introduzido por George Dantzig no final da década de 1940. De forma abreviada, Problema de Programação Linear (PPL) pode ser escrito na forma:

max (ou min) $$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (1)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_n \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

A função de várias variáveis z é linear e recebe o nome de ***função-objetivo***. Seu valor deve ser otimizado (maximizado ou minimizado).

As restrições são relações de interdependência entre variáveis, expressas por meio de equações e/ou inequações lineares. Além disso, as variáveis do problema devem assumir valores **não-negativos**.

Hoje em dia, a Programação Linear é aplicada a uma grande variedade de problemas nas indústrias e nas ciências. Neste capítulo descrevemos uma técnica geométrica para resolver PPL's com duas variáveis. Iniciaremos com os seguintes exemplos de formulação de problemas.

EXEMPLO 1 Maximizando o Lucro de Vendas

Um fabricante de bombons tem estocado bombons de chocolate, sendo 130kg com recheio de cerejas e 170kg com recheio de menta. Ele decide vender o estoque na forma de dois pacotes sortidos diferentes. Um pacote contém uma mistura com metade do peso em bombons de cereja e metade em menta e vende por R$ 20,00 por kg. O outro pacote contém uma mistura de um terço de bombons de cereja e dois terços de menta e vende por R$ 12,50 por kg. O vendedor deveria preparar quantos quilos de cada mistura a fim de maximizar seu lucro de vendas?

Solução

Inicialmente vamos formular este problema matematicamente. Chamamos de A a mistura com metade cereja e metade menta e o número de quilos desta mistura que deverá ser preparada é x_1. Chamamos de B a mistura com um terço cereja e dois terços menta e o número de quilos desta mistura que deverá ser preparada é x_2. Como a mistura A vende por R$ 20,00 e a mistura B vende por R$ 12,50 por quilo, o total z de vendas (em reais) será

$$z = 20,00x_1 + 12,50x_2 .$$

Como cada quilo da mistura A contém meio quilo de bombons de cereja e cada quilo da mistura B contém um terço de quilo de bombons de cereja, o número total de quilos de bombons de cereja usados em ambas misturas é

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2$$

De maneira similar, como cada quilo da mistura A contém meio quilo de menta e cada quilo da mistura B contém dois terços de quilo de menta, o número total de quilos de bombons de menta usados em ambas misturas é

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 .$$

Já que o fabricante só pode usar, no máximo, 130 quilos de bombons de cereja e 170 quilos de bombons de menta, devemos ter

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \le 130$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \le 170.$$

Além disso, como x_1 e x_2 não podem ser números negativos, temos

$$x_1 \ge 0 \text{ e } x_2 \ge 0 .$$

Isto mostra que o problema pode ser formulado matematicamente, como segue: Encontrar valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 20,00x_1 + 12,50x_2$$

sujeito a

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \le 130$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \le 170$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0 .$$

Adiante, veremos como resolver geometricamente este tipo de problema matemático.

EXEMPLO 2 Maximizando o Rendimento Anual

Uma mulher tem até R$ 10.000,00 para investir e seu corretor sugere investir em dois títulos, *A* e *B*. O título *A* é bastante arriscado, com lucro anual de 10%, e o título *B* é bastante seguro, com um lucro anual de 7%. Depois de algumas considerações, ela resolve investir no máximo R$ 6.000,00 no título *A*, no mínimo R$ 2.000,00 no título *B* e investir no mínimo tanto no título *A* quanto no título B. Como ela deverá investir seus R$ 10.000,00 a fim de maximizar o rendimento anual?

Solução

Para formular o problema matematicamente, sejam x_1 a quantia investida no título *A* e x_2 a quantia investida no título *B*. Como cada real investido no título *A* rende R$ 0,10 por ano e cada real investido no título *B* rende R$ 0,07 por ano, o total do rendimento anual *z* (em reais) de ambos títulos é dado por

$$z = 0,10x_1 + 0,07x_2$$

Os vínculos impostos podem ser formulados como segue:

Investir no máximo R$ 10.000,00:	$x_1 + x_2 \leq 10.000$
Investir no máximo R$ 6.000,00 no título *A*:	$x_1 \leq 6.000$
Investir no mínimo R$ 2.000,00 no título B:	$x_2 \geq 2.000$
Investir no mínimo tanto no título A quanto no título B:	$x_1 \geq x_2$

Além disto, estamos supondo implicitamente que ambos x_1 e x_2 são números não-negativos:

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0.$$

Assim, uma formulação matemática completa do problema é como segue: Encontrar valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 0,10x_1 + 0,07x_2$$

EXEMPLO 3 O Problema da Dieta

O objetivo do presente programa é determinar, em uma dieta para redução calórica, as quantidades de certos alimentos que deverão ser ingeridos diariamente, de modo que determinados requisitos nutricionais sejam satisfeitos a custo mínimo (existem vários problemas abordando este tema, este exemplo é um dos mais simples possíveis).

Suponha que, por certas razões, uma dieta alimentar esteja restrita a leite desnatado, carne magra de boi, carne de peixe e uma salada pré-definida. Sabe-se ainda que os requisitos nutricionais serão expressos em termos de vitaminas A, C e D e controlados por suas quantidades mínimas (em mg). A tabela abaixo resume a quantidade de cada vitamina em disponibilidade nos alimentos e a sua necessidade diária para a boa saúde da pessoa.

Tabela 1

Vitamina	Leite (mg/l)	Carne (mg/kg)	Peixe (mg/kg)	Salada (mg/kg)	Requisito nutricional mínimo (mg)
A	2	2	10	20	11
C	50	20	10	30	70
D	80	70	10	80	250
Custo	R$2,00	R$4,00	R$1,50	R$1,00	

Descreve o problema por meio de uma Programação Linear.

Solução

1ª) *Variáveis de decisão*

$x_i \equiv$ quantidade de unidades do alimento do tipo: leite ($i=1$), carne ($i=2$), peixe ($i=3$) e salada ($i=4$).

2ª) *Função Objetivo*

$$\min z = 2x_1 + 4x_2 + 1,5x_3 + x_4$$

3ª) *Restrições*

a) *associada à vitamina A*

$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 20x_4 \geq 11$$

b) *associada à vitamina C*

$$50x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 30x_4 \geq 70$$

c) *associada à vitamina D*

$$80x_1 + 70x_2 + 10x_3 + 80x_4 \geq 250$$

d) *não-negatividade*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

2.2 Uma solução geométrica para problemas de programação linear

Mostraremos agora como resolver graficamente um problema de programação linear em duas variáveis. Um par de variáveis (x_1, x_2) que satisfaz todas as restrições é chamado uma ***solução viável***. O conjunto de todas as soluções viáveis determina um subconjunto do plano $x_1\,x_2$ chamado a ***região viável***. Nosso objetivo é encontrar uma solução viável que maximize a função-objetivo. Uma tal solução é chamada ***solução ótima***.

Para examinar a região viável de um problema de programação linear, observamos que cada restrição do tipo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

define uma reta no plano $x_1\,x_2$, enquanto cada restrição da forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \text{ ou } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$$

define um semiplano que inclui a reta de fronteira

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\,.$$

Assim, a região viável é sempre uma interseção de um número finito de retas e semiplanos. Por exemplo, as quatro restrições

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\le 130 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\le 170 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

do Exemplo 1 definem os semiplanos indicados nas partes (a), (b), (c) e (d) da Figura 1. A região viável deste problema é, portanto, a interseção destes quatro semiplanos, que é a região indicada na Figura 1(e)

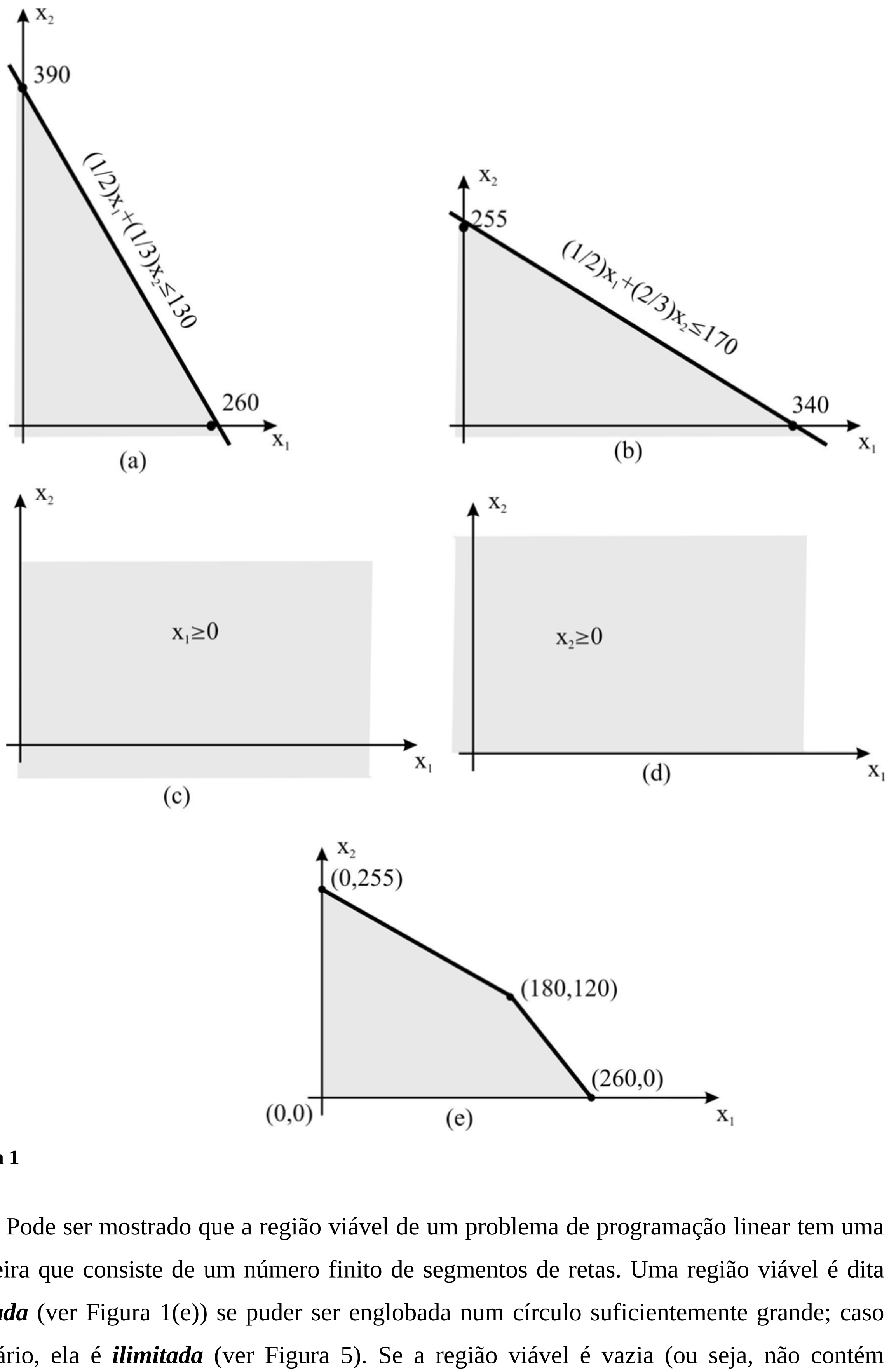

Figura 1

Pode ser mostrado que a região viável de um problema de programação linear tem uma fronteira que consiste de um número finito de segmentos de retas. Uma região viável é dita ***limitada*** (ver Figura 1(e)) se puder ser englobada num círculo suficientemente grande; caso contrário, ela é ***ilimitada*** (ver Figura 5). Se a região viável é vazia (ou seja, não contém pontos), então as restrições são inconsistentes e o problema de programação linear não possui solução (ver Figura 6).

Os pontos de fronteira de uma região viável que são interseções de dois segmentos de retas de fronteira, são chamados ***pontos extremos*** (também são chamados de pontos de *esquina* ou *vértice*). Por exemplo, pela Figura 1(e), a região viável do Exemplo 1 tem quatro pontos extremos,

$$(0,0),\ (0,255),\ (180,120),\ (260,0) \qquad (3)$$

A importância dos pontos extremos de uma região viável é mostrada pelo seguinte teorema.

Teorema 1 Valores Máximos e Mínimos

Se a região viável de um problema de programação linear é não-vazia e limitada, então a função-objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo; contudo, se atingir um máximo ou um mínimo, este ocorrerá em pontos extremos.

A Figura 2 sugere a idéia por trás da prova do teorema. Como a função-objetivo

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

de um problema de programação linear é uma função linear de x_1 e de x_2, suas curvas de nível (as curvas ao longo das quais z tem valor constante) são retas. À medida que nos deslocamos perpendicularmente a estas retas, a função-objetivo ou cresce ou decresce monotonamente. Para determinar a direção em que isto ocorre, utilizamos o vetor gradiente da função z, dado por

$$\nabla z\left(x_1, x_2\right) t = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

e que aponta para a direção de maior crescimento da função z. A direção oposta $\left(-\nabla z\right)$ aponta para a direção de maior decrescimento. Dentro de uma região viável limitada, os valores máximos e mínimos de z devem ocorrer, portanto, nos pontos extremos (ver Figura 2).

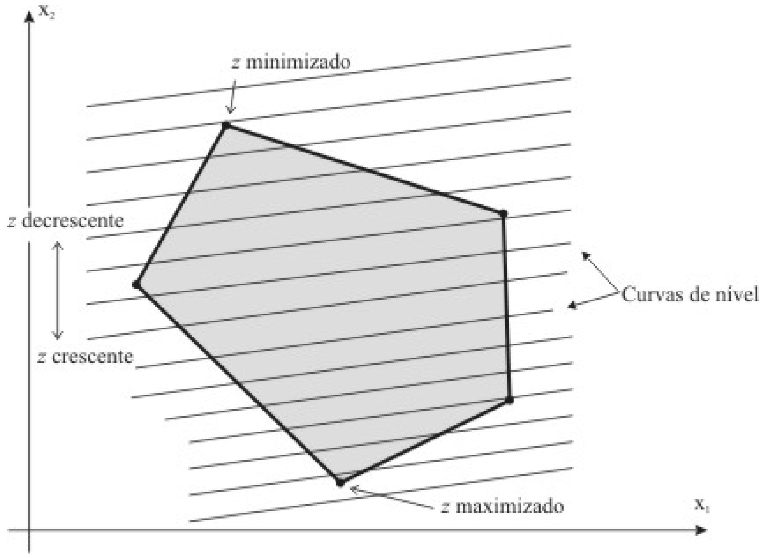

Figura 2

Nos próximos exemplos usaremos o Teorema 1 para resolver vários problemas de programação linear e ilustrar as variações na natureza das soluções que podem ocorrer.

EXEMPLO 4 Considere o Exemplo 1 Novamente

Da Figura 1(e) vemos que a região viável do Exemplo 1 é limitada. Conseqüentemente, pelo Teorema 1 a função-objetivo

$$z = 20,00x_1 + 12,50x_2$$

atinge tanto um valor mínimo quanto um valor máximo em pontos extremos. Os quatro pontos extremos e os correspondentes valores de z são dados na tabela seguinte.

Tabela 2

Ponto Extremo (x_1, x_2)	**Valor de** $z = 20,00x_1 + 12,50x_2$
$(0,0)$	0
$(0,255)$	3187,50
$(180,120)$	5100,00
$(260,0)$	5200,00

Vemos que o maior valor de z é 5.200,00 e a correspondente solução ótima é $(260,0)$. Assim, o fabricante de balas atinge um máximo de R$ 5.200,00 de vendas quando ele produz 260 quilos da mistura *A* e nada da mistura *B*.

EXEMPLO 5 Usando o Teorema 1

Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = x_1 + 3x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 - x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Solução

Na Figura 3 desenhamos a região viável deste problema. Por ser limitada, o valor máximo de *z* é atingido em um dos cinco pontos extremos. Os valores da função-objetivo nos cinco pontos extremos são dados na tabela seguinte.

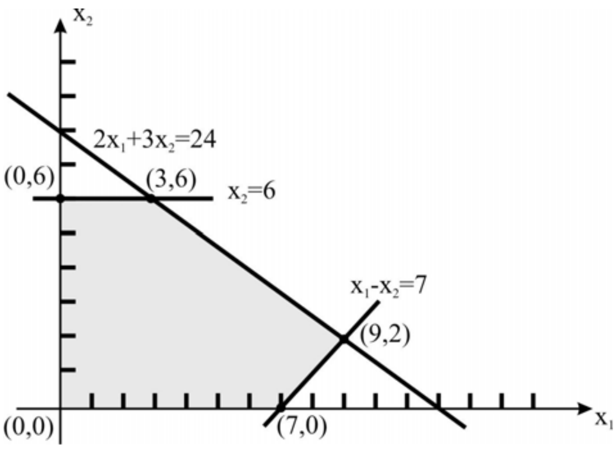

Figura 3

Tabela 3

Ponto Extremo (x_1, x_2)	**Valor de** $z = x_1 + 3x_2$
$(0,6)$	18
$(3,6)$	21
$(9,2)$	15
$(7,0)$	7
$(0,0)$	0

A partir desta tabela vemos que o valor máximo de *z* é 21, atingido em $x_1 = 3$ e $x_2 = 6$.

♦

EXEMPLO 6 Usando o Teorema 1

Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 4x_1 + 6x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 - x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Solução

As restrições neste problema são idênticas às restrições do Exemplo 5, portanto a região viável deste problema também é dada pela Figura 3. Os valores da função-objetivo nos pontos extremos são dados na tabela seguinte.

Tabela 4

Ponto Extremo (x_1, x_2)	**Valor de** $z = 4x_1 + 6x_2$
$(0,6)$	36
$(3,6)$	48
$(9,2)$	48
$(7,0)$	28
$(0,0)$	0

Vemos que a função-objetivo atinge um valor máximo de 48 nos dois pontos extremos adjacentes $(3,6)$ e $(9,2)$. Isto mostra que uma solução ótima em um problema de programação linear não precisa ser única. Se a função-objetivo assume o mesmo valor em dois pontos extremos adjacentes, ela tem o mesmo valor em todos os pontos do segmento de reta da fronteira que conecta estes dois pontos extremos. Assim, neste exemplo, o valor máximo de z é alcançado em todos os pontos do segmento de reta que conecta os pontos extremos $(3,6)$ e $(9,2)$.

♦

EXEMPLO 7 A Região Viável é um Segmento de Reta

Encontre valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 2x_1 - x_2$$

sujeito a

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$
$$2x_1 - 3x_2 \geq 0$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0\,.$$

Solução

Na Figura 4 desenhamos a região viável deste problema. Como uma das restrições é uma restrição de igualdade, a região viável é um segmento de reta com dois pontos extremos. Os valores de *z* nos dois pontos extremos são dados na tabela seguinte.

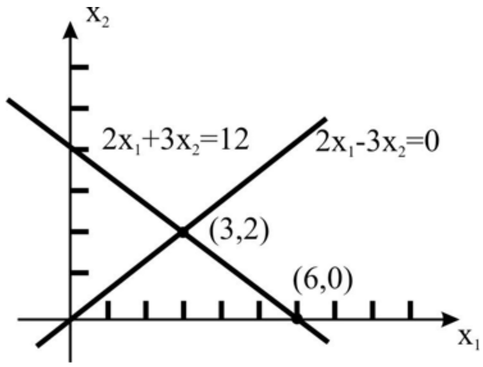

Figura 4

Tabela 5

Ponto Extremo (x_1, x_2)	**Valor de** $z = 2x_1 - x_2$
$(3,2)$	4
$(6,0)$	12

Assim, o valor mínimo de *z* é 4, atingido em $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$.

♦

EXEMPLO 8 Usando o Teorema 1

Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$2x_1 + x_2 \geq 8$$
$$-4x_1 + x_2 \leq 2$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 0$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Solução

A região viável deste problema de programação linear é indicada na Figura 5. Por ser ilimitada, o Teorema 1 não nos garante que a função-objetivo atinge um valor máximo. De fato, é fácil verificar que, como a região viável contém pontos nos quais ambos x_1 e x_2 são arbitrariamente grandes e positivos, a função-objetivo

$$z = 2x_1 + 5x_2$$

toma valores arbitrariamente grandes e positivos. Este problema não tem solução ótima. Em vez disto, dizemos que o problema tem uma solução ilimitada.

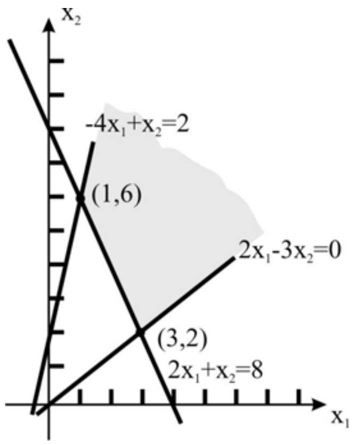

Figura 5

EXEMPLO 9 Usando o Teorema 1

Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = -5x_1 + x_2$$

sujeito a

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ -4x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Solução

As restrições acima são as mesmas que as do Exemplo 8, portanto a região viável deste problema também é dada pela Figura 5. A função-objetivo deste problema atinge um máximo na região viável. Pelo Teorema 1, este máximo deve ser atingido num ponto extremo. Os valores de *z* nos dois pontos extremos são dados na tabela seguinte.

Tabela 6

Ponto Extremo (x_1, x_2)	**Valor de** $z = -5x_1 + x_2$
$(1,6)$	1
$(3,2)$	-13

Assim, o valor máximo de z é l e é atingido no ponto extremo $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

♦

EXEMPLO 10 Restrições Inconsistentes

Encontre valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 3x_1 - 8x_2$$

sujeito a

$$2x_1 - x_2 \le 4$$
$$3x_1 + 11x_2 \le 33$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 24$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

Solução

Como pode ser visto na Figura 6, a interseção dos cinco semiplanos definidos pelas cinco restrições é vazio. Este problema de programação linear não possui soluções viáveis, pois as restrições são inconsistentes.

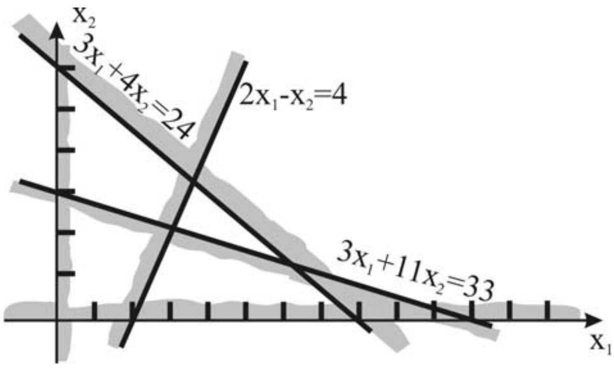

Figura 6 - Não há pontos comuns a todas as cinco regiões sombreadas

Para encerrar este capítulo, apresentamos outros exemplos que ilustram as várias possibilidades de solução apresentadas nos exemplos anteriores, com o intuito de melhorar a fixação dos conceitos introduzidos neste capítulo.

Exemplos:

1) Resolver graficamente o problema de Programação Linear:

Encontre valores de x e y que maximizam

$$z = 10x + 20y$$

sujeito a

$$x + y \le 10$$

$$0 \le x \le 8$$

$$0 \le y \le 5$$

Solução

Iremos descrever as regiões definidas pelo conjunto de restrições.

Vértices:

A: $x + y = 10 \cap y = 5$

$(5,5)$

B: $x + y = 10 \cap x = 8$

$(8,2)$

C: $(8,0)$

D: $(0,0)$

E: $(0,5)$

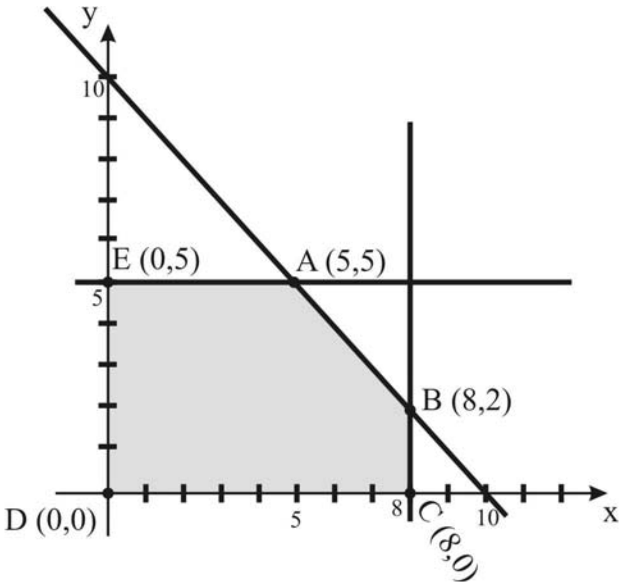

Figura 7

Os valores da função-objetivo nos cinco pontos extremos são dados na tabela seguinte.

Tabela 7

Ponto Extremo (x, y)	Valor de $z = 10x + 20y$
$(0,5)$	100
$(5,5)$	150
$(8,2)$	120
$(8,0)$	80
$(0,0)$	0

Vemos que a função-objetivo atinge um valor máximo de 150 no ponto extremo $(5,5)$.

2) Resolver graficamente o problema de Programação Linear:

Encontre valores de *x* e *y* que minimizam

$$z = 2x + 3y$$

sujeito a

$$\begin{gathered} y + 2x \geq 7 \\ 3y - 2x \leq 13 \\ x + y \geq 4 \\ 2x + 5y \leq 34 \\ 2x - y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{gathered}$$

Solução

Iremos descrever as regiões definidas pelo conjunto de restrições.

Vértices:

A: $y + 2x = 7 \cap 3y - 2x = 13$

$(1,5)$

B: $x + y = 4 \cap y + 2x = 7$

$(4,7)$

C: 2y+5$x = 34 \cap 2x - y = 10$

$(6,2)$

D: $(5,0)$

E: $(4,0)$

F: $y + 2x = 7 \cap x + y = 4$

$(3,1)$

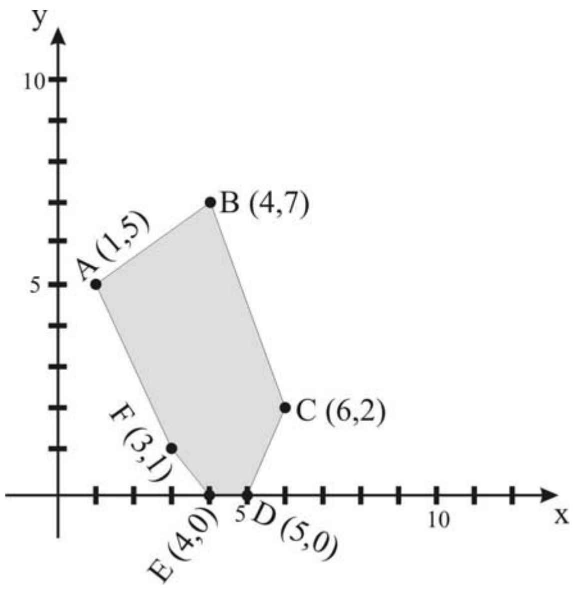

Figura 8

Os valores da função-objetivo nos seis pontos extremos são dados na tabela seguinte.

Tabela 8

Ponto Extremo (x, y)	Valor de $z = 2x + 3y$
$(1,5)$	17
$(4,7)$	29
$(6,2)$	18
$(5,0)$	10
$(4,0)$	8
$(3,1)$	9

Vemos que a função-objetivo atinge um valor mínimo de 8 no ponto extremo $(4,0)$.

3) Resolver graficamente o problema de Programação Linear:

Múltiplas Soluções

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$0 \le x_1 \le 3$$
$$0 \le x_2 \le 4$$
$$x_1 + 2x_2 \le 9$$

Solução

Iremos descrever as regiões definidas pelo conjunto de restrições.

Vértices:

$A: \quad (0,0)$

$B: \quad (0,4)$

$C: \quad x_1 + 2x_2 = 9 \cap x_2 = 4$

$(1,4)$

$D: \quad x_1 + 2x_2 = 9 \cap x_1 = 3$

$(3,3)$

$E: \quad (3,0)$

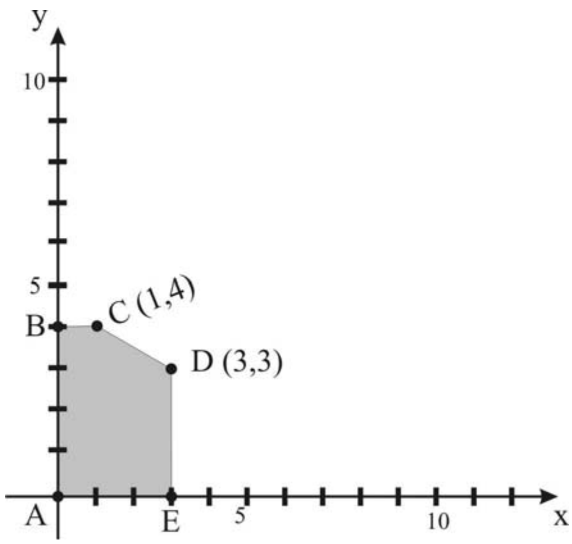

Figura 9

Os valores da função-objetivo nos cinco pontos extremos são dados na tabela seguinte.

Tabela 9

Ponto Extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = x_1 + 2x_2$
$(0,0)$	0
$(0,4)$	8
$(1,4)$	9
$(3,3)$	9
$(3,0)$	3

Vemos que a função-objetivo atinge um valor máximo de 9 nos dois pontos extremos $(1,4)$ e $(3,3)$. Isto mostra que uma solução ótima em um problema de programação linear não precisa ser única. Se a função-objetivo assume o mesmo valor em dois pontos extremos adjacentes, ela tem o mesmo valor em todos os pontos do segmento de reta da fronteira que conecta estes dois pontos extremos. Assim, neste exemplo, o problema possui múltiplas soluções, o valor máximo de z é alcançado em todos os pontos do segmento de reta que conecta os pontos extremos $(1,4)$ e $(3,3)$.

Observação: Além do polígono obtido pela representação do conjunto de restrições, determinação dos vértices e análise dos valores de função-objetivo para cada um dos vértices, para resolver o problema de Programação Linear, podemos utilizar o seguinte resultado:

A melhor direção de deslocamento é a do gradiente que corresponde a um sentido ortogonal ao suporte da reta $z = ax + by$, no caso de um problema de Programação Linear de maximizar, e a direção oposta a do gradiente, no caso de um problema de Programação Linear de minimizar.

Examinando a equação geral das retas associadas às curvas de nível da função-objetivo, percebemos que cada valor numérico de z corresponde ao termo independente de alguma reta perpendicular à direção do gradiente, configurada pelos coeficientes de custos (c_1, c_2) (pois o vetor gradiente z possui coordenadas constantes reais por ser $\frac{df}{dx}$ na 1ª coordenada e $\frac{df}{dy}$ na 2ª coordenada de uma função linear, nestes casos de problema de Programação Linear).

3 O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE TAREFAS

Neste trabalho, apresentamos o estudo de um algoritmo de otimização, para encontrar uma alocação de tarefas de custo mínimo. O algoritmo é chamado de "método Húngaro" e foi criado pelos húngaros D. König e E. Egerváry. Por tratar-se de um método discreto de otimização, baseado na manipulação de matrizes, no qual não é necessário o uso de cálculo Diferencial e Integral, os pré-requisitos são mínimos, o que torna sua compreensão e utilização extremamente acessíveis.

Em nossa sociedade, é muito freqüente depararmos com problemas que requerem tomadas de decisões visando a melhoria da relação custo-benefício por meio da maximização ou minimização de elementos do problema. Esse tipo de problema forma uma classe especial de problemas de otimização, ou seja, problemas cuja solução consiste em maximizar ou minimizar uma função numérica de um determinado número de variáveis (ou funções), estando estas sujeitas a certas restrições. Por exemplo, o problema pode ser encontrar a melhor distribuição de trabalhadores em empregos, jogadores de um esporte em posições no campo, maquinário em locais de construção e assim por diante. O problema da alocação de tarefas requer que haja o mesmo número de instalações e tarefas, digamos n. Neste caso, há exatamente n! maneiras distintas de alocar univocamente as tarefas às instalações. Isto ocorre pois há n maneiras de alocar a primeira tarefa, $n-1$ maneiras de alocar a segunda, $n-2$ maneiras de alocar a terceira e assim por diante – um total de

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

maneiras de alocar as tarefas. Entre estas $n!$ possíveis alocações, devemos encontrar uma que é ótima em algum sentido. Para definir a noção de alocação ótima precisamente, nós introduzimos as seguintes quantidades. Seja

$$c_{ij} = \text{custo de alocar à } i\text{-ésima instalação a } j\text{-ésima tarefa}$$

para $i, j = 1, 2, \ldots, n$. As unidades de c_{ij} podem ser reais, quilômetros, horas – o que for apropriado ao problema. Nós definimos a ***matriz-custo*** como a matriz $n \times n$

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Exigir que a cada instalação seja atribuída uma tarefa de maneira única é equivalente à condição que não haja duas entradas c_{ij} da mesma linha ou coluna. Isto leva à seguinte definição.

Definição Dada uma matriz-custo C de ordem $n \times n$, uma ***alocação de tarefas*** é um conjunto de $\boldsymbol{n}$ entradas da matriz tais que não há duas da mesma linha ou coluna.

Uma alocação ótima é definida como segue.

Definição A soma das n entradas de uma alocação é chamada o ***custo*** da alocação. Uma alocação com o menor custo possível é denominada uma ***alocação ótima***.

O ***problema da alocação de tarefas*** é encontrar uma alocação ótima em uma dada matriz-custo. Por exemplo, para distribuir n unidades de máquinas para n locais de construção, c_{ij} poderia ser a distância em quilômetros entre a i-ésima máquina e o j-ésimo local de construção. Uma alocação ótima é uma na qual soma um mínimo a distância total percorrida pelas n máquinas.

EXEMPLO 1 Minimizando a Soma de Três Propostas

Consideramos o seguinte problema fictício: o governo estadual sancionou uma lei de apoio ao desenvolvimento da metade sul do Estado do Rio Grande do Sul, na qual todas as cidades devem ser atendidas num determinado setor de carência de investimentos e que o governo não pode investir em dois setores iguais. Os orçamentos estão dispostos na Tabela 10, onde as linhas correspondem à cidade e as colunas ao setor.

Tabela 10 – Orçamento de 3 cidades

	Orçamentos (R$)		
	Saúde	**Moradia**	**Educação**
Alegrete	10.000,00	37.000,00	15.000,00
Uruguaiana	8.000,00	30.000,00	19.000,00
Bagé	12.000,00	32.000,00	14.000,00

Devido a uma série de despesas que devem ser pagas, o governo decide minimizar tanto quanto possível a verba destinada à metade sul. Quanto o governo transferiria para cada setor de qual cidade para minimizar a verba destinada à metade sul?

Solução

A matriz-custo para este problema é a matriz 3×3

$$\begin{bmatrix} 10000 & 37000 & 15000 \\ 8000 & 30000 & 19000 \\ 12000 & 32000 & 14000 \end{bmatrix}$$

Como só há seis $(=3!)$ alocações possíveis, nós podemos resolver este problema por inspeção. Destacamos as entradas associadas a cada uma das seis alocações e calculamos sua soma.

$\begin{bmatrix} \mathbf{10000} & 37000 & 15000 \\ 8000 & \mathbf{30000} & 19000 \\ 12000 & 32000 & \mathbf{14000} \end{bmatrix}$ $1000+30000+14000=54000$ (a)	$\begin{bmatrix} \mathbf{10000} & 37000 & 15000 \\ 8000 & 30000 & \mathbf{19000} \\ 12000 & \mathbf{32000} & 14000 \end{bmatrix}$ $1000+19000+32000=61000$ (b)	$\begin{bmatrix} 10000 & \mathbf{37000} & 15000 \\ \mathbf{8000} & 30000 & 19000 \\ 12000 & 32000 & \mathbf{14000} \end{bmatrix}$ $37000+8000+14000=59000$ (c)
$\begin{bmatrix} 10000 & \mathbf{37000} & 15000 \\ 8000 & 30000 & \mathbf{19000} \\ \mathbf{12000} & 32000 & 14000 \end{bmatrix}$ $37000+19000+12000=68000$ (d)	$\begin{bmatrix} 10000 & 37000 & \mathbf{15000} \\ \mathbf{8000} & 30000 & 19000 \\ 12000 & \mathbf{32000} & 14000 \end{bmatrix}$ $15000+8000+32000=55000$ (e)	$\begin{bmatrix} 10000 & 37000 & \mathbf{15000} \\ 8000 & \mathbf{30000} & 19000 \\ \mathbf{12000} & 32000 & 14000 \end{bmatrix}$ $15000+30000+12000=57000$ (f)

Observe que os totais de possibilidades variam de um mínimo de R$ 54.000,00 a um máximo de R$ 68.000,00. Como o mínimo total de possibilidades de R$ 54.000,00 é atingido pela alocação (a), o governo transferiria verba da seguinte maneira:

- ✓ R$ 10.000,00 para Alegrete em saúde;
- ✓ R$ 30.000,00 para Uruguaiana em moradia;
- ✓ R$ 14.000,00 para Bagé em educação.

O método de força bruta usado neste exemplo logo se torna impraticável, à medida que aumenta o tamanho da matriz-custo. Por exemplo, para uma matriz 10×10, há um total de 3.628.800 $(=10!)$ alocações possíveis. Iremos descrever agora um método prático para resolver qualquer problema de alocações.

♦

3.1 O Método Húngaro

Esse nome teve origem em 1955 devido a H. W. Kuhn, pesquisador na área de programação linear, que em um de seus trabalhos, fez homenagem aos descobridores do algoritmo em 1931, os húngaros E. Egerváry e D. König, sendo que este último demonstrou um teorema combinatório em 1916 que serviu de base para o algoritmo (Teorema de König).

O Método Húngaro pode ser aplicado em diversos problemas práticos de alocação de tarefas. Suponha que um problema específico de alocação de tarefas tem a matriz-custo

$$\begin{bmatrix} 0 & 14 & 9 & 3 \\ 9 & 20 & 0 & 22 \\ 23 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & 12 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos notar que todas as entradas desta matriz-custo são não-negativas e que ela contém muitos zeros. Observamos também que podemos encontrar uma alocação consistindo somente de zeros, a saber

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 14 & 9 & 3 \\ 9 & 20 & \mathbf{0} & 22 \\ 23 & \mathbf{0} & 3 & \mathbf{0} \\ 9 & 12 & 14 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Esta alocação deve ser ótima, pois seu custo é zero e é impossível encontrar uma alocação com custo menor do que zero se todas as entradas são não-negativas.

Pouquíssimos problemas de alocação de tarefas são tão fáceis de resolver como este. No entanto, o próximo teorema leva a um método de converter um problema arbitrário de alocação de tarefas em um que pode ser tão facilmente resolvido quanto este.

Teorema 3 Alocação Ótima

Se um número é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna de uma matriz-custo, então uma alocação de tarefas ótima para a matriz-custo resultante é também uma alocação de tarefas ótima para matriz-custo original.

Para ver por que este teorema é verdadeiro, suponha que cinco é somado a cada entrada da segunda fila de uma matriz-custo dada. Como cada alocação contém exatamente uma entrada da segunda linha, segue que o custo de cada alocação para a nova matriz é exatamente cinco a mais do que o custo da alocação correspondente para a matriz original. Assim, alocações correspondentes preservam seu ordenamento em relação ao custo, de modo que alocações ótimas de cada matriz correspondem a alocações ótimas da outra matriz. Um argumento similar vale se um número é somado a qualquer coluna da matriz-custo, ou se usamos subtração em vez de adição.

Observamos que se pudermos aplicar o Teorema 3 em uma matriz-custo de tal modo a gerar uma matriz-custo que possua todas as entradas não-negativas e, tal que contém uma alocação consistindo inteiramente de zeros, de modo que dois deles não estejam na mesma linha ou coluna, não teremos dificuldades em achar a alocação ótima que, na última matriz, terá soma nula. O algoritmo chamado de Método Húngaro para alocação ótima de tarefas baseia-se nessa idéia.

Na tabela a seguir delineamos o método húngaro para uma matriz-custo $n \times n$. Os primeiros dois passos usam o Teorema 3 para gerar uma matriz com entradas não-negativas e com pelo menos um zero em cada linha e coluna. Os três últimos passos são aplicados iteradamente tantas vezes quanto for necessário para gerar uma matriz-custo que contém uma alocação ótima de zeros. Cada vez que o Passo 5 é aplicado, a soma das entradas da nova matriz-custo gerada é estritamente menor do que a soma das entradas da matriz anterior. Isto garante que o processo iterativo não pode continuar indefinidamente.

Tabela 11

O Método Húngaro

Passos	**Observações**
1. Subtraia a menor entrada de cada linha de todas as entradas da mesma linha.	Depois deste passo, cada linha tem pelo menos uma entrada zero e todas as outras entradas são não-negativas.
2. Subtraia a menor entrada de cada coluna de todas as entradas da mesma coluna.	Depois deste passo, cada linha *e cada* coluna têm pelo menos uma entrada zero e todas as outras entradas são não-negativas.
3. Risque um traço ao longo de linhas e colunas de tal modo que todas as entradas zero da matriz-custo são riscadas e utilizando um número *mínimo* de traços.	Pode haver várias maneiras de fazer isto. O que é importante é usar o número mínimo de traços.
4. *Teste de Otimalidade* (i) Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é *n*, então uma alocação ótima de zeros é possível e encerramos o procedimento.	Se o teste é afirmativo, uma escolha criteriosa irá produzir um conjunto de *n* entradas zero, tais que não há duas na mesma linha ou coluna. Existem algoritmos para encontrar uma tal alocação ótima de zeros de

(ii) Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é menor do que *n*, então ainda não é possível uma alocação ótima de zeros. Continue com o Passo 5.	maneira sistemática, mas isto não será discutido aqui.
5. Determine a menor entrada não riscada por nenhum traço. Subtraia esta entrada de todas as entradas não riscadas e depois a some a todas as entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente. Retome ao Passo 3.	Este passo é equivalente a aplicar o Teorema 3 subtraindo a menor entrada não riscada de cada linha não riscada e depois somando esta menor entrada não riscada a cada coluna riscada.

É importante mencionar que para utilizarmos o método húngaro três condições têm que ser satisfeitas:

1 – A matriz-custo precisa ser quadrada. Caso isso não aconteça, basta introduzir uma tarefa ou uma instalação fictícia que não interfira no resultado final;

2 – As entradas da matriz-custo deveriam ser números inteiros. Para contas à mão isto é somente uma conveniência, mas para calculadoras e computadores isto permite utilizar a aritmética exata de inteiros e evitar erros de arredondamento. Para problemas práticos, as entradas não-inteiras podem ser sempre transformadas em entradas inteiras multiplicando a matriz-custo por uma potência conveniente de dez;

3 – O problema deve ser de minimização. O problema de maximizar a soma das entradas de uma matriz-custo é facilmente convertido em um problema de minimizar a soma das entradas multiplicando cada entrada da matriz-custo por -1.

EXEMPLO 2 Minimizando o custo total da obra

Imaginamos uma licitação de quatro obras, impedindo consórcios e que nenhuma empreiteira ganha mais de uma obra. Seis empreiteiras apresentaram seis orçamentos diferentes. Na Tabela 12 aparecem listadas as propostas de orçamento (em unidades de 1000 reais).

Tabela 12

	Orçamentos			
	Obra 1	Obra 2	Obra 3	Obra 4
Empreiteira 1	48	56	96	42
Empreiteira 2	48	60	94	44
Empreiteira 3	50	60	90	54
Empreiteira 4	44	68	85	46
Empreiteira 5	49	59	92	50
Empreiteira 6	47	65	92	52

Cada empreiteira só ganhará uma obra. Para qual obra deveria ser contratada cada empreiteira para minimizar o custo total das obras?

Solução

Como há duas empreiteiras a mais do que obras, duas delas não serão contratadas. Assim, a matriz-custo não é quadrada e o método húngaro não pode ser aplicado diretamente. Para contornar este problema, introduzimos duas obras fictícias cujo orçamento é zero: as empreiteiras que forem contratadas para estas obras fictícias são, então, na realidade, as empreiteiras que não serão contratadas para nenhuma das obras reais. Portanto, acrescentamos duas colunas de zeros à Tabela 12, correspondendo às obras fictícias, e dessa maneira somos levados à seguinte matriz-custo quadrada:

$$\begin{bmatrix} 48 & 56 & 96 & 42 & 0 & 0 \\ 48 & 60 & 94 & 44 & 0 & 0 \\ 50 & 60 & 90 & 54 & 0 & 0 \\ 44 & 68 & 85 & 46 & 0 & 0 \\ 49 & 59 & 92 & 50 & 0 & 0 \\ 47 & 65 & 92 & 52 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Vamos aplicar o método húngaro à matriz (4), que é a matriz-custo para o problema.

Passo 1. Como todas as linhas da matriz (4), contêm entradas zero, não precisamos utilizar o Passo 1 da Tabela 12.

Passo 2. As duas últimas colunas da matriz (4) já contêm entradas zero, portanto, subtraímos 44 da primeira coluna da matriz (4), 56 da segunda coluna, 85 da terceira coluna e 42 da quarta coluna. O resultado é a matriz (5).

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 7 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Passo 3. Riscamos as entradas zero da matriz (5) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 4. Como o número mínimo de traços usados no Passo 3 é quatro, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

Passo 5. Subtraímos 2, que é a menor entrada não riscada da matriz (5), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 2 às quatro entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente. O resultado é a matriz (6).

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 11 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Passo 6. Riscamos as entradas zero da matriz (6) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 7. Como o número mínimo de traços usados é cinco, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

Passo 8. Subtraímos 1, que é a menor entrada não riscada da matriz (6), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 1 às seis entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente. O resultado é a matriz (7).

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 11 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Passo 9. Riscamos as entradas zero da matriz (7) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 10. Como as entradas zero da matriz (7) não podem ser riscadas com menos do que seis traços, a matriz deve conter uma alocação ótima de zeros. Uma tal alocação é dada na matriz (8).

$$\begin{bmatrix} 4 & \mathbf{0} & 11 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 12 & \mathbf{0} & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 6 & 4 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 4 & \mathbf{0} & 11 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 12 & \mathbf{0} & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 6 & 4 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

A alocação ótima indicada em (8) é a seguinte:

Empreiteira 1 na obra 2

Empreiteira 2 na obra 4

Empreiteira 3 sem obra

Empreiteira 4 na obra 3

Empreiteira 5 sem obra

Empreiteira 6 na obra 1

O custo total mínimo é

$$56 + 44 + 85 + 47 = 232$$

R$ 232.000,00.

EXEMPLO 3 O Problema das Moedas

Um negociante de moedas vai vender quatro moedas num leilão eletrônico. Ele recebe propostas para cada uma das quatro moedas de cinco interessados, mas estes interessados também afirmam que podem honrar no máximo uma das propostas. As propostas estão dadas na Tabela 13.

Tabela 13

	Propostas (R$)			
	Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Moeda 4
Interessado 1	150	65	210	135
Interessado 2	175	75	230	155
Interessado 3	135	85	200	140
Interessado 4	140	70	190	130
Interessado 5	170	50	200	160

Como o negociante deveria alocar as quatro moedas para maximizar a soma das propostas correspondentes?

Solução

Para utilizar o método húngaro, observamos que duas condições não são satisfeitas: a “matriz-custo” não é quadrada e esse problema é de maximização. Para resolver esses problemas, criamos uma moeda fictícia cuja proposta será zero (o interessado que receber a moeda fictícia não recebe nenhuma moeda real) e multiplicamos cada entrada da matriz-custo por -1 de modo que esse problema se torne um problema de minimização.

$$\begin{bmatrix} -150 & -65 & -210 & -135 & 0 \\ -175 & -75 & -230 & -155 & 0 \\ -135 & -85 & -200 & -140 & 0 \\ -140 & -70 & -190 & -130 & 0 \\ -170 & -50 & -200 & -160 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Agora nós aplicamos o método húngaro à matriz (9) para encontrar uma alocação ótima.

Passo 1. Como todas as linhas da matriz (9) contêm entradas zero, não precisamos utilizar o Passo 1 da tabela Tabela 11.

Passo 2. Subtraímos -175 da primeira coluna da matriz (9), -85 da segunda coluna, -230 da terceira coluna e -160 da quarta coluna para obter a matriz (10).

$$\begin{bmatrix} 25 & 20 & 20 & 25 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 5 & 0 \\ 40 & 0 & 30 & 20 & 0 \\ 35 & 15 & 40 & 30 & 0 \\ 5 & 35 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Passo 3. Riscamos as entradas zero da matriz (10) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 4. Como o número mínimo de traços usados no Passo 3 é quatro, não é possível uma alocação ótima de zeros.

Passo 5. Subtraímos 5, que é a menor entrada não riscada da matriz (10), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 5 às três entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente. O resultado é a matriz (11).

$$\begin{bmatrix} 20 & 20 & 15 & 25 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 10 & 5 \\ 35 & 0 & 25 & 20 & 0 \\ 30 & 15 & 35 & 30 & 0 \\ 0 & 35 & 25 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Passo 6. Riscamos as entradas zero da matriz (11) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 7. Como o número mínimo de traços usados é quatro, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

Passo 8. Subtraímos 15, que é a menor entrada não riscada da matriz (11), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 15 às quatro entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente. O resultado é a matriz (12).

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 10 & 20 \\ 20 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 15 & 15 & 20 & 15 & 0 \\ 0 & 50 & 25 & 0 & 15 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Passo 9. Riscamos as entradas zero da matriz (12) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 10. Como as entradas zero da matriz (12) não podem ser riscadas com menos do que cinco traços, a matriz deve conter uma alocação ótima de zeros. Uma tal alocação é dada na matriz (13).

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 & \mathbf{0} & 10 & 0 \\ \mathbf{0} & 30 & 0 & 10 & 20 \\ 20 & \mathbf{0} & 10 & 5 & 0 \\ 15 & 15 & 20 & 15 & \mathbf{0} \\ 0 & 50 & 25 & \mathbf{0} & 15 \end{bmatrix} \tag{13}$$

A alocação ótima indicada em (13) leva às seguintes vendas:

O interessado 1 recebe a moeda 3 (R$ 210,00);

O interessado 2 recebe a moeda 1 (R$ 175,00);

O interessado 3 recebe a moeda 2 (R$ 85,00);

O interessado 4 não recebe moeda;

O interessado 5 recebe a moeda 4 (R$ 160,00);

A soma das propostas é R$ 630,00.

EXEMPLO 4 O Problema da Escalação

O treinador de um time de futebol de segunda divisão pode mudar a escalação de nove de seus jogadores em nove posições diferentes. O treinador classifica cada um destes jogadores em uma escala de 0 a 25 para cada uma das posições, levando em conta tanto a habilidade do jogador na posição quanto a importância da posição no jogo.

Tabela 14

Posição	**Jogador**								
	Silmar	Jorge	Júlio	Leandro	Adão	Luís	Paulo	Artur	Heitor
Ponta E	20	15	10	10	17	23	25	5	15
Ponta D	10	10	12	15	9	7	8	7	8
Centro	12	9	9	10	10	5	7	13	9
Meia E	13	14	10	15	15	5	8	20	10
Meia D	12	13	10	15	14	5	9	20	10
Zaga E	15	14	15	16	15	5	10	20	10
Zaga D	7	9	12	12	7	6	7	15	12
Lateral E	5	6	8	8	5	4	5	10	7
Lateral D	5	6	8	8	5	4	5	10	7

Usando a Tabela 14, como deverá o treinador escalar os nove jogadores para maximizar a soma das classificações?

Solução

Da maneira como foi enumerado, o problema é o de maximizar uma soma. Para convertê-lo em um problema de minimizar uma soma, multiplicamos cada entrada da matriz-custo por -1 para obter

$$\begin{bmatrix} -20 & -15 & -10 & -10 & -17 & -23 & -25 & -5 & -15 \\ -10 & -10 & -12 & -15 & -9 & -7 & -8 & -7 & -8 \\ -12 & -9 & -9 & -10 & -10 & -5 & -7 & -13 & -9 \\ -13 & -14 & -10 & -15 & -15 & -5 & -8 & -20 & -10 \\ -12 & -13 & -10 & -15 & -14 & -5 & -9 & -20 & -10 \\ -15 & -14 & -15 & -16 & -15 & -5 & -10 & -20 & -10 \\ -7 & -9 & -12 & -12 & -7 & -6 & -7 & -15 & -12 \\ -5 & -6 & -8 & -8 & -5 & -4 & -5 & -10 & -7 \\ -5 & -6 & -8 & -8 & -5 & -4 & -5 & -10 & -7 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Agora nós aplicamos o método húngaro à matriz (14) para encontrar uma alocação ótima.

Passo 1. Subtraímos -25 da primeira linha da matriz (14), -15 da segunda linha, -20 da quinta linha, -20 da sexta linha, -15 da sétima linha, -10 da oitava linha e -10 da nona linha para obter a matriz (15).

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 & 15 & 8 & 2 & 0 & 20 & 10 \\ 5 & 5 & 3 & 0 & 6 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 8 & 6 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 10 & 5 & 5 & 15 & 12 & 0 & 10 \\ 8 & 7 & 10 & 5 & 6 & 15 & 11 & 0 & 10 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 5 & 15 & 10 & 0 & 10 \\ 8 & 6 & 3 & 3 & 8 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 5 & 6 & 5 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 5 & 6 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Passo 2. Subtraímos 1 da primeira coluna da matriz (15), 4 da segunda coluna, 2 da terceira coluna, 3 da quinta coluna, 2 da sexta coluna e 3 da nona coluna. As outras três colunas da matriz (15) já contêm entradas zeros, portanto não é necessário subtrair.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 13 & 15 & 5 & 0 & 0 & 20 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 3 & 6 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 8 & 5 & 2 & 13 & 12 & 0 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 5 & 3 & 13 & 11 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 13 & 10 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Passo 3. Riscamos as entradas zero da matriz (16) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 4. Como o número mínimo de traços usados no Passo 3 é sete, não é possível uma alocação ótima de zeros.

Passo 5. Subtraímos 2, que é a menor entrada não riscada da matriz (16), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 2 às entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente. O resultado é a matriz (17).

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 & 17 & 5 & 0 & 0 & 22 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 5 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 & 6 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 5 & 0 & 11 & 10 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 8 & 5 & 1 & 11 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 & 11 & 8 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 3 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Passo 6. Riscamos as entradas zero da matriz (17) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 7. Como o número mínimo de traços usados é oito, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

Passo 8. Subtraímos 2, que é a menor entrada não riscada da matriz (17), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 2 às entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente.

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 17 & 17 & 7 & 0 & 0 & 24 & 11 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 4 & 5 & 10 & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 5 & 2 & 6 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 8 & 3 & 0 & 9 & 8 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 8 & 3 & 1 & 9 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 9 & 6 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Passo 9. Riscamos as entradas zero da matriz (18) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 10. Como o número mínimo de traços usados é oito, ainda não é possível uma alocação ótima de zeros.

Passo 11. Subtraímos 2, que é a menor entrada não riscada da matriz (18), de cada uma de suas entradas não riscadas e somamos 2 às entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente.

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 & 17 & 19 & 9 & 0 & 0 & 26 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 0 & 7 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 1 & 7 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 5 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Passo 12. Riscamos as entradas zero da matriz (19) com um número mínimo de traços horizontais e verticais.

Passo 13. Como as entradas zero da matriz (19) não podem ser riscadas com menos do que nove traços, a matriz deve conter uma alocação ótima de zeros. Uma tal alocação é dada na matriz (20).

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 & 17 & 19 & 9 & 0 & \mathbf{0} & 26 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 3 & 2 & 3 & 10 & 4 \\ \mathbf{0} & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & \mathbf{0} & 6 & 3 & 0 & 7 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 1 & 7 & 5 & \mathbf{0} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \mathbf{0} & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 5 & 3 & 4 & 2 & \mathbf{0} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & \mathbf{0} & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 6 & 10 & 17 & 19 & 9 & 0 & \mathbf{0} & 26 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 3 & 2 & 3 & 10 & 4 \\ \mathbf{0} & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & \mathbf{0} & 7 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 1 & 7 & 5 & \mathbf{0} & 5 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 2 & 0 & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 5 & 3 & 4 & 2 & \mathbf{0} \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & \mathbf{0} & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \mathbf{0} & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

A alocação ótima indicada em (20) leva a seguinte escalação:

- Ponta E – Paulo
- Ponta D – Leandro
- Centro – Silmar
- Meia E – Jorge ou Adão
- Meia D – Artur
- Zaga E – Adão ou Jorge
- Zaga D – Heitor
- Lateral E – Júlio ou Luís
- Lateral D – Luís ou Júlio

4 CADEIAS DE MARKOV

Descrevemos aqui um modelo geral de um sistema que, em cada instante, está em apenas **um** entre um número finito de estados. Em seguida aplicamos o modelo a vários problemas concretos.

Suponha que um sistema físico ou matemático está sofrendo mudanças tais que a cada momento ele pode ocupar **um** dentre um número finito de estados. Por exemplo, o tempo em determinada região pode estar chuvoso ou seco; uma pessoa pode ser fumante ou não-fumante; o sistema pode mudar de um estado para outro. Vamos supor que o estado do sistema é observado em períodos fixos de tempo (uma vez por dia, a cada hora, a cada semana, a cada mês e assim por diante). Em muitas aplicações conhecemos o estado atual do sistema e queremos prever o estado no próximo período de observação ou em algum período futuro. Podemos prever, muitas vezes, a probabilidade de o sistema estar em um determinado estado em um período futuro de observação a partir de sua história pregressa. Esse processo de mudança de um estado para outro é chamado uma ***cadeia*** ou um ***processo de Markov***, chamado assim em homenagem ao matemático Andrei Andreyervich Markov.

Markov é particularmente lembrado pelo seu estudo de Cadeias de Markov. Em 1923 Norbert Winter se tornou o primeiro a tratar rigorosamente um processo contínuo de Markov. A fundação da teoria geral ocorreu em 1930 por Andrei Kolmogorov.

Definição Uma **cadeia de Markov** ou **processo de Markov** é um processo no qual a probabilidade de um sistema estar em determinado estado em um dado período de observação depende apenas do estado no período de observação imediatamente anterior.

Denotemos por $1, 2, \ldots, k$ os k estados possíveis de uma cadeia de Markov. A probabilidade de estando o sistema no estado j em um determinado período de observação então ele estará no estado i no próximo período de observação é denotada por p_{ij} e é chamada de probabilidade de transição do estado j para o estado i.

Como p_{ij} é uma probabilidade, temos que ter

$$0 \le p_{ij} \le 1 \quad (1 \le i,\ j \le k).$$

Além disso, se o sistema está no estado j em um determinado período de observação, então ele tem que estar em um dos k estados possíveis (inclusive pode permanecer no estado j) no próximo período de observação. Logo:

$$p_{1j} + p_{2j} + p_{3j} + \ldots + p_{kj} = 1 \qquad (21)$$

É conveniente escrever as probabilidades de transição em uma matriz $n \times n$, $P = \left[p_{ij} \right]$, chamada de **matriz de transição** da cadeia de Markov. A matriz de transição também recebe outros nomes: matriz de markov, matriz estocástica ou matriz de probabilidade. Os elementos da matriz *P* são não-negativos e a soma de suas colunas é sempre igual a 1.

Por exemplo, em uma cadeia de Markov de três estados, a matriz de transição tem o seguinte formato

$$\begin{array}{c c}
\text{Estado Precedente} & \\
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\
\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \ \text{Novo Estado} \\ 3 \end{array}
\end{array}$$

Nesta matriz, p_{23} é a probabilidade do sistema mudar do estado 3 para o estado 2, p_{22} é a probabilidade do sistema continuar no estado 2 após ter sido observado no estado 2, e assim sucessivamente.

EXEMPLO 1 Matriz de Transição da Cadeia de Markov

Suponha que o tempo em uma determinada cidade é chuvoso ou seco. Como resultado do grande número de registros existentes, determinou-se que a probabilidade de se ter um daí chuvoso logo após um dia seco é de $\frac{1}{3}$, e a probabilidade de se ter um dia seco após um dia chuvoso é de $\frac{1}{2}$. Se representarmos por *S* o estado de um dia seco e por *C* o de um dia chuvoso, então a matriz de transição dessa cadeia de Markov é

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} S & C \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{c} S \\ C \end{array} \end{array} \quad \text{ou} \quad P = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,50 \\ 0,33 & 0,50 \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO 2 Matriz de Transição da Cadeia de Markov

Uma organização que faz pesquisa de mercado está analisando o comportamento de um grande grupo de compradores de café que compram um pacote por semana. Descobriu-se que 50% dos que utilizam atualmente a marca *A* vão comprar novamente a marca *A* na próxima semana, enquanto 25% vão mudar para a marca *B* e 25% vão mudar para outra marca. Entre os que usam atualmente a marca *B*, 30% vão comprar a marca *B* na próxima semana, enquanto que 60% vão mudar para a marca *A* e 10% vão mudar para outra marca. Entre os que usam atualmente outras marcas, 30% vão continuar com essas marcas na próxima semana, 40% vão mudar para a marca *A* e 30% vão mudar para a marca *B*. Os estados *A*, *B* e *O* (outras) correspondem às marcas *A*, *B* e outras, respectivamente. A matriz de transição dessa cadeia de Markov é:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & O \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ O \end{array} \end{array}$$

♦

EXEMPLO 3 O Problema dos Cruzamentos

Um guarda de trânsito é designado para controlar o tráfego nos oito cruzamentos indicados na Figura 10.

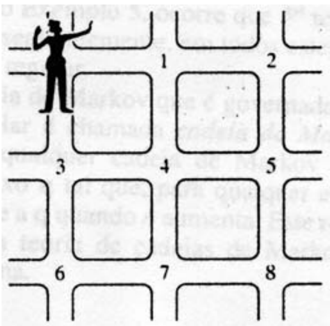

Figura 10

Ele é instruído a permanecer em cada cruzamento por uma hora e, em seguida, ou permanecer no mesmo cruzamento ou seguir para um cruzamento adjacente. Para evitar que ele estabeleça um padrão, ele deve escolher o novo cruzamento de maneira aleatória, com qualquer escolha igualmente provável. Por exemplo, se ele está no cruzamento 5, seu próximo cruzamento pode ser 2, 4, 5 ou 8, cada um com probabilidade $\frac{1}{4}$. Cada dia ele começa no cruzamento em que parou no dia anterior. A matriz de transição desta cadeia de Markov é

$$P=\begin{array}{c} \text{Cruzamento Velho} \\ \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \end{array} \end{array} \text{ Cruzamento Novo}$$

EXEMPLO 4 O Problema das Vendas

Três companhias *X*, *Y* e *Z* introduzem simultaneamente um novo computador pessoal no mercado. No início das vendas cada uma delas detém $\dfrac{1}{3}$ do mercado. A cada mês a companhia *X* perde 5% de seus clientes para a companhia *Y*, 10% de seus clientes para a companhia *Z*, retendo os outros 85%. A companhia *Y* retém 75% de seus clientes a cada mês, mas perde 15% para a companhia *X* e 10% para a companhia *Z*. A companhia *Z* mantém 90% de seus clientes mas perde 5% para cada uma das duas outras companhias. A matriz de transição dessa cadeia de Markov é

$$P=\begin{array}{c} \text{Esse mês} \\ \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \end{array} \end{array} \text{ Próximo mês}$$

Convém ressaltar novamente que as matrizes de transição das cadeias de Markov têm a propriedade que suas entradas em qualquer coluna somam 1.

Em geral não pode ser determinado com certeza o estado de um sistema em uma cadeia de Markov numa observação arbitrária. O melhor que podemos fazer é especificar probabilidades para cada um dos estados possíveis. Por exemplo, podemos descrever o estado possível do sistema em uma certa observação em uma cadeia de Markov com três estados, por um vetor-coluna

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

no qual x_1 é a probabilidade que o sistema está no estado 1, x_2 é a probabilidade do sistema estar no estado 2 e x_3 é a probabilidade dele estar no estado 3. Isso será melhor formalizado a seguir.

Definição O ***vetor-estado*** de uma observação de uma cadeia de Markov com k estados é um vetor-coluna $\boldsymbol{x}$ cujo i-ésimo componente x_i é a probabilidade do sistema estar, naquela observação, no i-ésimo estado.

Suponhamos, que seja conhecido o vetor-estado $x^{(0)}$ de uma cadeia de Markov em alguma observação inicial. A próxima definição nos permitirá determinar os vetores-estado

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$$

nas observações subseqüentes.

Definição Se $\boldsymbol{P}$ é a matriz de transição de uma cadeia de Markov e $x^{(n)}$ é o vetor-estado na n-ésima observação, então

$$x^{(n+1)} = Px^{(n)}.$$

Desta definição segue que

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Px^{(0)} \\ x^{(2)} &= Px^{(1)} = P^2x^{(0)} \\ x^{(3)} &= Px^{(2)} = P^3x^{(0)} \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= Px^{(n-1)} = P^nx^{(0)} \end{aligned}$$

Desta maneira, o vetor-estado inicial $x^{(0)}$ e a matriz de transição P determinam $x^{(n)}$ para $n = 1, 2, \ldots$.

Definição

O vetor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é chamado de **vetor de probabilidade** se $x_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$) e $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

EXEMPLO 5 Considere Novamente o Exemplo 1

Supondo agora que ao iniciar nossas observações (dia 0), o dia está seco, de modo que o vetor-estado inicial é

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, de acordo com a definição acima, o vetor de estado no dia 1 (o dia seguinte de nossas observações) é

$$x^{(1)} = Px^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,5 \\ 0,33 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,67 \\ 0,33 \end{bmatrix}.$$

Logo, a probabilidade de não chover no dia 1 é de 67% e a probabilidade de chover é de 33%.

Analogamente, considerando três casas decimais, temos que:

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,5 \\ 0,33 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,67 \\ 0,33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,614 \\ 0,386 \end{bmatrix};$$

$$x^{(3)} = Px^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,5 \\ 0,33 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,614 \\ 0,386 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,604 \\ 0,394 \end{bmatrix};$$

$$x^{(4)} = Px^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,5 \\ 0,33 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,604 \\ 0,394 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,603 \\ 0,397 \end{bmatrix};$$

$$x^{(5)} = Px^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,5 \\ 0,33 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,603 \\ 0,397 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,603 \\ 0,397 \end{bmatrix};$$

$$x^{(6)} = Px^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,5 \\ 0,33 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,603 \\ 0,397 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,603 \\ 0,397 \end{bmatrix}.$$

A partir do quarto dia, o vetor-estado do sistema é sempre o mesmo,

$$\begin{bmatrix} 0,603 \\ 0,397 \end{bmatrix}.$$

Isso significa que, a partir do quarto dia, fica seco aproximadamente 60% do tempo e chove aproximadamente 40% do tempo.

EXEMPLO 6 Considere Novamente o Exemplo 2

Suponha que, no início da pesquisa, verificamos que a marca *A* detém 20% do mercado, *B* detém 20% do mercado e as demais marcas ficam com 60% do mercado. Logo, o vetor de estado inicial é

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,6 \end{bmatrix}.$$

O vetor de estado depois da primeira semana é

$$x^{(1)} = Px^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,60 & 0,40 \\ 0,25 & 0,30 & 0,30 \\ 0,25 & 0,10 & 0,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4600 \\ 0,2900 \\ 0,2500 \end{bmatrix}.$$

Analogamente,

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,4 \\ 0,25 & 0,30 & 0,30 \\ 0,25 & 0,10 & 0,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4600 \\ 0,2900 \\ 0,2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5040 \\ 0,2770 \\ 0,2190 \end{bmatrix};$$

$$x^{(3)} = Px^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,4 \\ 0,25 & 0,30 & 0,30 \\ 0,25 & 0,10 & 0,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5040 \\ 0,2770 \\ 0,2190 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5058 \\ 0,2748 \\ 0,2194 \end{bmatrix};$$

$$x^{(4)} = Px^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,4 \\ 0,25 & 0,30 & 0,30 \\ 0,25 & 0,10 & 0,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5058 \\ 0,2748 \\ 0,2194 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5055 \\ 0,2747 \\ 0,2198 \end{bmatrix};$$

$$x^{(5)} = Px^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,4 \\ 0,25 & 0,30 & 0,30 \\ 0,25 & 0,10 & 0,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5055 \\ 0,2747 \\ 0,2198 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5055 \\ 0,2747 \\ 0,2198 \end{bmatrix}.$$

Portanto, à medida que o tempo passa, o vetor de estado se aproxima do vetor fixo

$$\begin{bmatrix} 0,5055 \\ 0,2747 \\ 0,2198 \end{bmatrix}.$$

Isso significa que depois de bastante tempo a marca A vai ter aproximadamente 51% do mercado, a marca B aproximadamente 27% do mercado e as outras marcas ficarão com aproximadamente 22% do mercado.

EXEMPLO 7 Considere Novamente o Exemplo 4

Sabemos que neste exemplo o vetor estado inicial é

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

O vetor de estado depois do primeiro mês é

$$x^{(1)} = Px^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,283 \\ 0,367 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, considerando quatro casas decimais, temos

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,283 \\ 0,367 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3583 \\ 0,2481 \\ 0,3936 \end{bmatrix};$$

$$x^{(3)} = Px^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3583 \\ 0,2481 \\ 0,3936 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3614 \\ 0,2237 \\ 0,4149 \end{bmatrix};$$

$$x^{(4)} = Px^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3614 \\ 0,2237 \\ 0,4149 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3615 \\ 0,2066 \\ 0,4319 \end{bmatrix};$$

$$x^{(5)} = Px^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3615 \\ 0,2066 \\ 0,4319 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3599 \\ 0,1946 \\ 0,4455 \end{bmatrix};$$

$$x^{(6)} = Px^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3599 \\ 0,1946 \\ 0,4455 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3574 \\ 0,1862 \\ 0,4564 \end{bmatrix};$$

$$x^{(7)} = Px^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3574 \\ 0,1862 \\ 0,4564 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3545 \\ 0,1804 \\ 0,4651 \end{bmatrix};$$

$$x^{(8)} = Px^{(7)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3545 \\ 0,1804 \\ 0,4651 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3516 \\ 0,1763 \\ 0,4721 \end{bmatrix};$$

$$x^{(9)} = Px^{(8)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3516 \\ 0,1763 \\ 0,4721 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3489 \\ 0,1734 \\ 0,4777 \end{bmatrix};$$

$$x^{(10)} = Px^{(9)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3489 \\ 0,1734 \\ 0,4777 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3464 \\ 0,1714 \\ 0,4822 \end{bmatrix};$$

$$x^{(11)} = Px^{(10)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3464 \\ 0,1714 \\ 0,4822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3443 \\ 0,1699 \\ 0,4858 \end{bmatrix};$$

$$x^{(12)} = Px^{(11)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3443 \\ 0,1699 \\ 0,4858 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3424 \\ 0,1689 \\ 0,4887 \end{bmatrix};$$

$$x^{(13)} = Px^{(12)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3424 \\ 0,1689 \\ 0,4887 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3408 \\ 0,1682 \\ 0,4910 \end{bmatrix};$$

$$x^{(14)} = Px^{(13)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3408 \\ 0,1682 \\ 0,4910 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3395 \\ 0,1677 \\ 0,4928 \end{bmatrix};$$

$$x^{(15)} = Px^{(14)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3395 \\ 0,1677 \\ 0,4928 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3383 \\ 0,1674 \\ 0,4943 \end{bmatrix};$$

$$x^{(16)} = Px^{(15)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3383 \\ 0,1674 \\ 0,4943 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3366 \\ 0,1671 \\ 0,4963 \end{bmatrix};$$

$$x^{(17)} = Px^{(16)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3366 \\ 0,1671 \\ 0,4963 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3360 \\ 0,1670 \\ 0,4970 \end{bmatrix};$$

$$x^{(18)} = Px^{(17)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3360 \\ 0,1670 \\ 0,4970 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3355 \\ 0,1669 \\ 0,4976 \end{bmatrix};$$

$$x^{(19)} = Px^{(18)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3355 \\ 0,1669 \\ 0,4976 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3351 \\ 0,1668 \\ 0,4981 \end{bmatrix};$$

$$x^{(20)} = Px^{(19)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3351 \\ 0,1668 \\ 0,4981 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3348 \\ 0,1667 \\ 0,4985 \end{bmatrix};$$

$$x^{(21)} = Px^{(20)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3348 \\ 0,1667 \\ 0,4985 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3345 \\ 0,1667 \\ 0,4988 \end{bmatrix};$$

$$x^{(22)} = Px^{(21)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3345 \\ 0,1667 \\ 0,4988 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3343 \\ 0,1667 \\ 0,4990 \end{bmatrix};$$

$$x^{(23)} = Px^{(22)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3343 \\ 0,1667 \\ 0,4990 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3341 \\ 0,1667 \\ 0,4992 \end{bmatrix};$$

$$x^{(24)} = Px^{(23)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3341 \\ 0,1667 \\ 0,4992 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3339 \\ 0,1667 \\ 0,4994 \end{bmatrix};$$

$$x^{(25)} = Px^{(24)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3339 \\ 0,1667 \\ 0,4994 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3338 \\ 0,1667 \\ 0,4995 \end{bmatrix};$$

$$x^{(26)} = Px^{(25)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3338 \\ 0,1667 \\ 0,4995 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3337 \\ 0,1667 \\ 0,4996 \end{bmatrix};$$

$$x^{(27)} = Px^{(26)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3337 \\ 0,1667 \\ 0,4996 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3336 \\ 0,1667 \\ 0,4997 \end{bmatrix};$$

$$x^{(28)} = Px^{(27)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3336 \\ 0,1667 \\ 0,4997 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3335 \\ 0,1667 \\ 0,4998 \end{bmatrix};$$

$$x^{(29)} = Px^{(28)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3335 \\ 0,1667 \\ 0,4998 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3334 \\ 0,1667 \\ 0,4999 \end{bmatrix};$$

$$x^{(30)} = Px^{(29)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3334 \\ 0,1667 \\ 0,4999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3334 \\ 0,1667 \\ 0,4999 \end{bmatrix}.$$

Portanto, à medida que o tempo passa, o vetor de estado se aproxima do vetor fixo

$$\begin{bmatrix} 0,3334 \\ 0,1667 \\ 0,4999 \end{bmatrix}.$$

Isso significa que após 30 meses, as companhias *X*, *Y* e *Z* terão, respectivamente, aproximadamente 33%, 16% e 50% do mercado.

Nos nossos exemplos vimos que os vetores-estado convergem a um vetor fixo à medida que o número de observações cresce. Nesse caso dizemos que o processo de Markov atingiu o equilíbrio. O vetor fixo é chamado de **vetor de estado estacionário**.

Os processos e Markov em geral são usados para determinar o comportamento de um sistema depois de um longo período de tempo. Portanto, determinar se um processo de Markov atinge ou não o equilíbrio é de importância primordial. Mas nem sempre os vetores-estado irão convergir para um vetor fixo em uma cadeia de Markov.

Um exemplo bem simples mostra que nem sempre os vetores-estado irão convergir para um vetor fixo em uma cadeia de Markov.

EXEMPLO 8 O Sistema Oscila Entre Dois Estados

Seja *P* a matriz de transição e $x^{(0)}$ o vetor de estado inicial.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P^3 = PP^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $P^2 = I$ e $P^3 = P$, temos

$$x^{(0)} = x^{(2)} = x^{(4)} = \cdots = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

e

$$x^{(1)} = x^{(3)} = x^{(5)} = \cdots = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}.$$

Em geral: $P^{2k} = I$ e $P^{2k+1} = P$, onde $k \in IN$.

Este sistema oscila indefinidamente entre os dois vetores-estado $\begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}$, e portanto não converge a nenhum vetor fixo.

♦

No entanto, se exigirmos que a matriz de transição de um processo de Markov satisfaça uma certa condição, mostraremos que o sistema se aproxima de um vetor fixo atingindo, portanto, o equilíbrio. Esta condição é descrita na definição abaixo.

Definição Uma matriz de transição *P* é ***regular*** se todas as entradas de alguma potência de *P* são positivas.

Uma cadeia de Markov que é governada por uma matriz de transição regular é chamada ***cadeia de Markov regular***. As cadeias de Markov dos exemplos 1 e 2 e do exemplo 4 são regulares, já que todas as estradas da própria matriz de transição são positivas. Poderíamos ter a falsa impressão de que a cadeia de Markov do exemplo 3 não é regular, mas calculando suas potências notamos que P^4 tem todas as entradas positivas. Portanto pela definição acima podemos concluir que a matriz de transição inicial é também uma matriz regular.

Veremos que qualquer cadeia de Markov regular possui um vetor-estado fixo *u* tal que, para qualquer escolha $x^{(0)}$, o vetor $P^n x^{(0)}$ converge a *u* quando *n* aumenta. Este resultado é da maior importância na teoria de cadeias de Markov e é baseado no próximo teorema.

Antes de enunciarmos esse teorema veremos algumas definições necessárias.

Definição Considere uma seqüência infinita de matrizes de ordem $r \times s$, $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, ..., onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1s}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1}^{(1)} & a_{r2}^{(1)} & \cdots & a_{rs}^{(1)} \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1s}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1}^{(2)} & a_{r2}^{(2)} & \cdots & a_{rs}^{(2)} \end{bmatrix}, \ldots,\ A_n = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \cdots & a_{1s}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1}^{(n)} & a_{r2}^{(n)} & \cdots & a_{rs}^{(n)} \end{bmatrix}, \ldots$$

com todos $a_{ij}^{(k)}$ números reais. Representamos tal seqüência por $\{A_n\}\, n \in N$.

Dizemos que a seqüência $\{A_n\} n \in N$ de matrizes converge para a matriz $A = \{a_{ij}\}$ se os elementos das matrizes A_n se aproximam dos elementos correspondentes da matriz *A*, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij} \text{ para } \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, r \\ j = 1, 2, \ldots, s \end{cases}.$$

Neste caso, usaremos a notação

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \text{ ou } A_n \to A.$$

Exemplo: Seja a seqüência $\{A_n\} n \in N$ onde $A_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 1+\frac{5}{n^2} \\ 3 & \frac{3n+1}{2n} \end{bmatrix}$, então:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ 3 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}, \ldots, \text{ e } \lim_{n\to\infty} A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Definição Seja *A* uma matriz $n \times n$. Um escalar λ é um autovalor de *A* se existe um vetor não-nulo $\boldsymbol{x}$ tal que $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. O vetor $\boldsymbol{x}$ é um autovetor associado a λ.

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{x}$$

Portanto, $\lambda = 3$ é um autovetor de *A* e $x = (2,1)^T$ é um autovetor associado a λ.

Teorema 4 *Se P é a matriz de transição de um processo de Markov regular, então:*

a) Quando $n \to \infty$, P^n tende à matriz,

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & \cdots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_n & u_n & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

que tem todas as colunas iguais;

b) todas as colunas

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

de A são vetores de probabilidade com todos os elementos positivos, isto é,

$$u_i > 0 \ \left(1 \le i \le n\right) \text{ e } u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1.$$

Observação: Este teorema não será demonstrado, pois envolve resultados mais elaborados de Álgebra Linear, como Forma de Jordan e resultados da Teoria de Matrizes Positivas.

Teorema 5 *Se P é uma matriz de transição regular e se A e **u** são como no teorema anterior, então:*

*a) Qualquer que seja o vetor de probabilidade **x**, temos que* $P^n\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{u}$ *quando* $n \to \infty$*, de modo que **u** é um vetor de estado estacionário;*

b) O vetor de estado estacionário u é o único vetor de probabilidade que satisfaz a equação matricial $P\mathbf{u} = \mathbf{u}$*, isto é, u é um autovetor de P associado ao autovalor* $\lambda = 1$.

Demonstração – a) Seja

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

um vetor probabilidade. Quando $n \to \infty$, $P^n \to A$. Logo, $P^n\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$. Por outro lado,

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & \cdots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_n & u_n & \cdots & u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1x_1 + u_1x_2 + \cdots + u_1x_n \\ u_2x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_2x_n \\ \vdots \\ u_nx_1 + u_nx_2 + \cdots + u_nx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) \\ u_2\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) \\ \vdots \\ u_n\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

já que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Como $P^n\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ e $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$, $P^n\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{u}$.

b) Como $P^n \to A$ também temos $P^{n+1} \to A$. No entanto, $P^{n+1} = PP^n$, de modo que $P^{n+1} \to PA$. Logo $PA = A$.

Sabemos que todas as colunas de A são iguais ao vetor de probabilidade ***u***. Ao igualarmos as colunas correspondentes da equação matricial $PA = A$ (lembrar de multiplicação de matriz por colunas), temos: $PA = \begin{bmatrix} P\boldsymbol{u} & P\boldsymbol{u} & \cdots & P\boldsymbol{u} \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} & \cdots & \boldsymbol{u} \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$. Logo $P\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Para mostrarmos que ***u*** é o único vetor de probabilidade que satisfaz esta equação, devemos supor, por absurdo, que existe um outro vetor de probabilidade $\boldsymbol{q}$ tal que $P\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$. Do item a) deste mesmo teorema temos que $P^n\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{u}$ e, como $P\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$, temos $P^n\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ para todo *n*, assim $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{u}$. Portanto $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}$.

♦

Da parte b) deste teorema, podemos escrever,

$$P\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$$

como:

$$P\boldsymbol{u} = I_n\boldsymbol{u} \text{ ou } \left(I_n - P\right)\boldsymbol{u} = 0 .$$

Mostramos que o sistema homogêneo acima tem uma única solução $\boldsymbol{u}$ que é um vetor de probabilidade, de modo que:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1. \tag{22}$$

Nos exemplos 5, 6 e 7 calculamos vetores de estado estacionário calculando as potências $P^n\boldsymbol{x}$. Vamos descrever agora um outro modo de calcular o vetor de estado estacionário de uma matriz de transição utilizando o resultado do teorema acima.

Primeiramente, devemos resolver o sistema homogêneo: $\left(I_n - P\right)\boldsymbol{u} = 0$. Entre as infinitas soluções obtidas na primeira etapa devemos escolher a única solução $\boldsymbol{u}$ cujos elementos satisfaçam a equação (22). Vejamos

EXEMPLO 9 No Exemplo 1, a matriz de transição era

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

O sistema linear $\left(I_n - P\right)\boldsymbol{u} = 0$, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto leva à equação

$$\frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{2}u_2 = 0 \text{; logo } u_1 = \frac{3}{2}u_2 .$$

Para satisfazer a equação (22) acima, temos $\frac{3}{2}u_2 + u_2 = 1$.

Então, $\frac{5}{2}u_2 = 1$, e segue que $u_2 = \frac{2}{5} = 0,4$.

Assim,

$$u_1 = \frac{3}{2}u_2 = \frac{3}{5} = 0,6 .$$

Portanto, $u = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$.

Isso significa que, a partir do quarto dia, fica seco aproximadamente 60% do tempo e chove aproximadamente 40% do tempo.

EXEMPLO 10 Considere a matriz de transição do Exemplo 2:

$$P = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,60 & 0,40 \\ 0,25 & 0,30 & 0,30 \\ 0,25 & 0,10 & 0,30 \end{bmatrix}.$$

O sistema homogêneo $\left(I_n - P\right)\boldsymbol{u} = 0$, é:

$$\begin{bmatrix} 0,50 & -0,60 & -0,40 \\ -0,25 & 0,70 & -0,30 \\ -0,25 & -0,10 & 0,70 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Devemos escalonar a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,50 & -0,60 & -0,40 & 0 \\ -0,25 & 0,70 & -0,30 & 0 \\ -0,25 & -0,10 & 0,70 & 0 \end{array}\right].$$

Resolveremos o sistema equivalente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2 & -0,8 & 0 \\ 0 & 2,8 & -1,2 & 0 \\ 0 & -0,4 & 2,8 & 0 \end{array}\right].$$

Escalonando, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2 & -0,8 & 0 \\ 0 & 2,8 & -1,2 & 0 \\ 0 & -0,4 & 2,8 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2 & -0,8 & 0 \\ 0 & 1,6 & -2,0 & 0 \\ 0 & -1,6 & 2,0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2 & -0,80 & 0 \\ 0 & 1 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2,30 & 0 \\ 0 & 1 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2,30 & 0 \\ 0 & 1 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ esta é a matriz aumentada na forma escada reduzida por linhas.

Portanto, as soluções são da forma

$$u_1 = 2,3r;$$
$$u_2 = 1,25r;$$
$$u_3 = r.$$

De (22), temos: $2,3r+1,25r+r=1$ ou $r=\dfrac{1}{4,55}\approx 0,2198$.

Logo podemos concluir que

$$u_1 = 0,5055\,;$$
$$u_2 = 0,2747\,;$$
$$u_3 = 0,2198\,.$$

Conseqüentemente, $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0,5057\\0,2747\\0,2198\end{bmatrix}$ é o vetor de estado estacionário.

Isso significa que as vendas se estabilizarão com a marca *A* com aproximadamente 51% do mercado, a marca *B* com aproximadamente 27% e as outras marcas ficarão com 22% do mercado.

EXEMPLO 11 Considere a matriz de transição do Exemplo 4:

$$P=\begin{bmatrix}0,85 & 0,15 & 0,05\\ 0,05 & 0,75 & 0,05\\ 0,10 & 0,10 & 0,90\end{bmatrix}$$

O sistema homogêneo $\left(I_n - P\right)\boldsymbol{u}=0$, é:

$$\begin{bmatrix}0,15 & -0,15 & -0,05\\ -0,05 & 0,25 & -0,05\\ -0,10 & -0,10 & 0,10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Devemos escalonar a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0,15 & -0,15 & -0,05 & 0\\ -0,05 & 0,25 & -0,05 & 0\\ -0,10 & -0,10 & 0,10 & 0\end{array}\right].$$

Escalonando, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0,15 & -0,15 & -0,05 & 0\\ -0,05 & 0,25 & -0,05 & 0\\ -0,10 & -0,10 & 0,10 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-0,10 & -0,10 & 0,10 & 0\\ -0,05 & 0,25 & -0,05 & 0\\ 0,15 & -0,15 & -0,05 & 0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1,00 & 1,00 & -1,00 & 0\\ -0,05 & 0,25 & -0,05 & 0\\ -0,10 & -0,10 & 0,10 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1,0 & -1,0 & 0\\ 0 & 0,3 & -0,1 & 0\\ 0 & -0,3 & 0,1 & 0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0,3 & -0,1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

A última matriz aumentada já está na forma escada reduzida por linhas.

Logo, as soluções são da forma

$$u_1 = \frac{2}{3} r \ ;$$

$$u_2 = \frac{1}{3} r \ ;$$

$$u_3 = r \ .$$

De (22), temos: $\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r + r = 1$ ou $r = \frac{1}{2}$.

Portanto podemos concluir que

$$u_1 = \frac{1}{3} ;$$

$$u_2 = \frac{1}{6} ;$$

$$u_3 = \frac{1}{2} .$$

Conseqüentemente, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0,3334 \\ 0,1666 \\ 0,5000 \end{bmatrix}$ é o vetor de estado estacionário.

Isso significa que após 30 meses, as companhias *X*, *Y* e *Z* terão respectivamente 33%, 16% e 50% do mercado.

5 CRIPTOGRAFIA

O envio e o recebimento de informações sigilosas é uma necessidade antiga, que existe há centenas de anos. Com o surgimento da Internet e sua facilidade de entregar informações de maneira precisa e extremamente rápida, a criptografia tornou-se uma ferramenta fundamental para permitir que apenas o emissor e o receptor tenham acesso livre à informação trabalhada. Este capítulo tem por objetivo dar uma abordagem introdutória à criptografia, mostrando os aspectos e conceitos mais importantes.

O termo criptografia surgiu da fusão das palavras gregas “kryptós” e “gráphien”, que significam “oculto” e “escrever” respectivamente. Trata-se de um conjunto de conceitos e técnicas que visam codificar uma informação de forma que somente o emissor e o receptor possam acessá-la, evitando que um intruso consiga interpretá-la. Para isso, uma série de técnicas é usada e muitas outras surgem com o passar do tempo. Descrevemos abaixo um método bastante simples, para codificar e decodificar mensagens, que envolve apenas um par de matrizes de ordem *n*, *A* e A^{-1}, cujos elementos devem ser números inteiros.

Primeiramente ilustraremos o método utilizando uma matriz *A* e a sua inversa A^{-1}.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

A matriz *A* é apropriada, pois seus elementos são números inteiros, assim como os da matriz A^{-1}.

O remetente vai usar a matriz *A* para codificar a mensagem, e o destinatário vai usar a matriz A^{-1} para decodificá-la. O objetivo deste método é que a mensagem seja codificada utilizando pares de caracteres, de modo que tabelas de freqüência de letras e outras alternativas não ajudem em nada a um decodificador não-amigável.

Dada uma mensagem para ser codificada, o primeiro passo será convertê-la da forma alfabética para a forma numérica. Para isso usamos a seguinte correspondência entre letras e números:

A ou Ã	B	C ou Ç	D	E	F
01	02	03	04	05	06

G	H	I	J	K	L
07	08	09	10	11	12

M	N	O ou Õ	P	Q	R
13	14	15	16	17	18

S	T	U	V	W	X
19	20	21	22	23	24

Y	Z	.	,	#
25	26	27	28	29

Qualquer outra numeração dos 29 símbolos tipográficos também seria possível, mas o remetente e os destinatários teriam que combiná-la previamente. Para maior clareza usamos o símbolo # para indicar inexistência de letras (espaços entre palavras, etc.).

EXEMPLO 1 Suponha que "AMAR E RESPEITAR" é a mensagem a ser codificada e transmitida. Para convertê-la para a forma numérica, usamos a correspondência entre letras e números exibida acima:

A	M	A	R	#	E	#	R	E	S	P	E	I	T	A	R
01	13	01	18	29	05	29	18	05	19	16	05	09	20	01	18

Uma vez que a matriz codificadora A é uma matriz 2×2, arrumamos nossa seqüência de números como os elementos de uma matriz com duas linhas:

$$M = \begin{bmatrix} 01 & 13 & 01 & 18 & 29 & 05 & 29 & 18 \\ 05 & 19 & 16 & 05 & 09 & 20 & 01 & 18 \end{bmatrix}$$

Como a mensagem tem um número par de elementos, a matriz se completa naturalmente. No caso de uma mensagem com um número ímpar de elementos completamos o fim da última linha com o número 29 que está associado ao símbolo #, que representa um espaço final inofensivo (um "zero") somado à mensagem.

Para codificação da mensagem, multiplicamos a matriz M à esquerda pela matriz codificadora A:

$$N = AM$$

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 01 & 13 & 01 & 18 & 29 & 05 & 29 & 18 \\ 05 & 19 & 16 & 05 & 09 & 20 & 01 & 18 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$N = \begin{bmatrix} 8 & 58 & 19 & 59 & 96 & 35 & 88 & 72 \\ 7 & 45 & 18 & 41 & 47 & 30 & 59 & 54 \end{bmatrix}.$$

Os elementos de $N = AM$ constituem a mensagem codificadora, e utilizaremos vírgulas entre esses elementos para maior clareza:

8, 58, 19, 59, 96, 35, 88, 72, 7, 45, 18, 41, 47, 30, 59, 54.

Quando esta mensagem codificada chegar ao destinatário este deve utilizar a matriz decodificadora A^{-1} para reverter os passos acima, pois

$$A^{-1}\cdot N = A^{-1}\cdot AM = I\cdot M = M\,.$$

Portanto, se o decodificador usar a mensagem codificada para construir uma matriz com duas linhas e depois multiplicar esta matriz à esquerda por A^{-1}, irá obter a matriz M do remetente.

Vejamos:

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 58 & 19 & 59 & 96 & 35 & 88 & 72 \\ 7 & 45 & 18 & 41 & 47 & 30 & 59 & 54 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 01 & 13 & 01 & 18 & 29 & 05 & 29 & 18 \\ 05 & 19 & 16 & 05 & 09 & 20 & 01 & 18 \end{bmatrix}.$$

Note que o produto é de fato a matriz M do remetente. O passo final de decodificação é:

01	13	01	18	29	05	29	18	05	19	16	05	09	20	01	18
A	M	A	R	#	E	#	R	E	S	P	E	I	T	A	R

EXEMPLO 2 Utilizando uma Matriz 3×3

Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -9 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Suponhamos que a mensagem a ser transmitida e codificada seja “POSITIVO, CHEGOU AGORA”. Primeiro, devemos converter as letras em números usando o mesmo esquema anterior, e então organizamos estes números em uma matriz com *três* linhas, pois as matrizes codificadora e decodificadora são de ordem 3. Ou seja:

P	O	S	I	T	I	V	O	,	#	C	H	E	G	O	U	#
16	15	19	09	20	09	22	15	28	29	03	08	05	07	15	21	29

A	G	O	R	A	#	#
01	07	15	18	01	29	29

$$M = \begin{bmatrix} 16 & 15 & 19 & 09 & 20 & 09 & 22 & 15 \\ 28 & 29 & 03 & 08 & 05 & 07 & 15 & 21 \\ 29 & 01 & 07 & 15 & 18 & 01 & 29 & 29 \end{bmatrix}.$$

Para codificar a mensagem, multiplicamos M à esquerda por A para obter:

$$N = AM = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 15 & 19 & 09 & 20 & 09 & 22 & 15 \\ 28 & 29 & 03 & 08 & 05 & 07 & 15 & 21 \\ 29 & 01 & 07 & 15 & 18 & 01 & 29 & 29 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 134 & 76 & 74 & 65 & 101 & 36 & 139 & 124 \\ 31 & 58 & 34 & 11 & 27 & 24 & 30 & 22 \\ 163 & 77 & 81 & 80 & 119 & 37 & 168 & 153 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a mensagem codificada é:

134, 76, 74, 65, 101, 36, 139, 124, 31, 58, 34, 11, 27, 24, 30, 22, 163, 77, 81, 80, 119, 37, 168, 153.

Quando esta mensagem chegar ao decodificador o mesmo deve construir uma matriz com três linhas e depois multiplicar esta matriz por A^{-1}, obtendo assim a matriz M do remetente. Ou seja:

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -9 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 134 & 76 & 74 & 65 & 101 & 36 & 139 & 124 \\ 31 & 58 & 34 & 11 & 27 & 24 & 30 & 22 \\ 163 & 77 & 81 & 80 & 119 & 37 & 168 & 153 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 15 & 19 & 09 & 20 & 09 & 22 & 15 \\ 28 & 29 & 03 & 08 & 05 & 07 & 15 & 21 \\ 29 & 01 & 07 & 15 & 18 & 01 & 29 & 29 \end{bmatrix} = M$$

Portanto a mensagem original é:

16	15	19	09	20	09	22	15	28	29	03	08	05	07	15	21	29
P	O	S	I	T	I	V	O	,	#	C	H	E	G	O	U	#

01	07	15	18	01	29	29
A	G	O	R	A	#	#

Em resumo, o remetente multiplica a mensagem original (na forma matricial numérica M) por A para obter a mensagem codificada. O destinatário multiplica a mensagem codificada (na forma matricial N) por A^{-1} para reconstruir a mensagem original. Como A e A^{-1} são matrizes inversas, a multiplicação por A^{-1} feita pelo destinatário desfaz o efeito da multiplicação por A feita pelo remetente.

O processo pode ser efetivado rápida e automaticamente por computador (aumentando, portanto, a sua segurança) mas, se for preciso, pode ser feito com lápis e papel apenas (realçando, portanto, sua utilidade). Tudo o que precisa ser secreto são as matrizes codificadora e decodificadora.

6 CONCLUSÃO

Procuramos através deste trabalho mostrar algumas das muitas aplicações da Álgebra Linear.

Notamos durante o seu desenvolvimento que o estudo destas aplicações exige o conhecimento de assuntos como sistemas lineares, determinantes, geometria analítica, desigualdades lineares, notação matricial, matrizes, conceitos básicos de probabilidade, eliminação gaussiana, operações matriciais, independência linear e transformações lineares.

Além disso, este trabalho foi uma boa oportunidade de correlacionar conteúdos estudados nas disciplinas de cálculo do curso.

Também foi importante porque nas disciplinas de Álgebra Linear as aplicações, muitas vezes por indisponibilidade de tempo, não foram vistas e trabalhadas.

Assim, consideramos que o objetivo principal deste trabalho foi alcançado plenamente.

7 REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BAYER, F. M. **Matrizes - Codificação e Decodificação de Mensagens**. Disponível em: <http://coralx.ufsm.br/depmat/matriz.html> Acesso em 13 out 2006.

BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to linear optimization**. Belmont-Massachussets: Athena Scientific, 1997.

BODRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra linear**. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1980.

CASTRO, D. **Criptografia**. Disponível em: <http://www.turma-guia.com/davi/ss/cripto.htm> Acesso em 13 out 2006.

Criptografia. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Criptografia> Acesso em 13 out 2006.

Criptografia. Disponível em: <http://www.gta.ufrj.br/grad/00_2/firewall/criptografia.htm> Acesso em 13 out 2006.

EGERVÁRY, E. **On combinatorial properties of matrices**. In: *Matematikaés fizikai lapok*. Vol 38, 1931; translated as *On combinatorial properties of matrices* by H. W. Kuhn, Office of Naval Research Logistics Project Report, Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ, 1953.

GASS, S. I. **Linear programming: methods and applications**. 5th ed. New York: McGraw-Hill, 1985.

HADLEY, G. **Programação linear**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1982.

História e Aplicações da Criptografia. Disponível em: <http://www.absoluta.org/cripty/cripty_h.htm> Acesso em 13 out 2006.

HOWARD, A.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução Claus Ivo Doering. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman. 2000.

KUHN, H. W. **The hungarian method for assigment problem**. In: *Naval Research Logistics Quartely*, Vol 2, nº 1 e 2, 1955, pp. 83-97.

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC Editora. 1997.

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**. Tradução Ricardo Camelier. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC Editora. 1999.

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução Valéria de Magalhães Iorio. 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC Editora. 1999.

LIPSCHUTZ S. **Álgebra linear.** 3ª ed. (Coleção Schaum). São Paulo: Makron Books, 1994.

PRADO, D. **Programação linear**. 3ª ed. Belo Horizonte: DG, 2003.