

**RODOLFO CÉSAR COSTA FLESCH**

**CONTRIBUIÇÕES AO CONTROLE DE  
SISTEMAS MONOVARIÁVEIS E  
MULTIVARIÁVEIS COM ATRASO DE  
TRANSPORTE**

FLORIANÓPOLIS - SC

FEVEREIRO DE 2012



**RODOLFO CÉSAR COSTA FLESCH**

**CONTRIBUIÇÕES AO CONTROLE DE  
SISTEMAS MONOVARIÁVEIS E  
MULTIVARIÁVEIS COM ATRASO DE  
TRANSPORTE**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas

**ORIENTADOR: PROF. JULIO ELÍAS NORMEY RICO, Dr.**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

**FLORIANÓPOLIS - SC  
FEVEREIRO DE 2012**

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária  
da  
Universidade Federal de Santa Catarina

F611c Flesch, Rodolfo César Costa  
Contribuições ao controle de sistemas monovariáveis e  
multivariáveis com atraso de transporte [tese] / Rodolfo César  
Costa Flesch ; orientadores, Júlio Elías Normey Rico. -  
Florianópolis, SC, 2012.  
227 p.: il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina,  
Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de sistemas. 2. Automação. 3. Controle de  
processo. 4. Refrigeração. I. Normey-Rico, J. E. (Julio  
Elias). II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III.  
Título.

CDU 621.3-231.2(021)

**Rodolfo César Costa Flesch**

**CONTRIBUIÇÕES AO CONTROLE DE SISTEMAS  
MONOVARIÁVEIS E MULTIVARIÁVEIS COM ATRASO DE  
TRANSPORTE**

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de **Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas** e aprovada em sua forma final pelo **Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas**.

Florianópolis, 10 de fevereiro de 2012.

---

Prof. José Eduardo Ribeiro Cury, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Automação e Sistemas

**Banca examinadora:**

---

Prof. Julio Elias Normey Rico, Dr.  
Orientador — Presidente da banca — DAS — UFSC

---

Prof. Jorge Otávio Trierweiler, Dr.  
Relator — ENQ — UFRGS

---

Prof. Augusto Humberto Bruciapaglia, Dr.  
Examinador — DAS — UFSC

---

Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr.  
Examinador — DAS — UFSC

---

Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
Examinador — DAS — UFSC

---

Prof. Tito Luís Maia Santos, Dr.  
Examinador — DEE — UFBA



## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Carlos e Natália, e ao meu irmão, Filipe, pelos ensinamentos, pelo exemplo de amor e dedicação e por todo o incentivo e apoio.

A Lídia pelo amor, pelo carinho, pela companhia e pela compreensão nos momentos de ausência.

Ao meu orientador, Professor Julio, pela amizade, pela confiança e pelo apoio durante a realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora desta tese e da banca do exame de qualificação pelas contribuições ao trabalho.

A Whirlpool S.A. – Unidade Embraco de Compressores e Soluções de Refrigeração (Embraco) pela confiança depositada durante os anos de pesquisa conjunta.

Aos funcionários da Embraco André Paz Rosa, Maikon Ronsani Borges, João Paulo Rossetto, Filipe Schmitz e Marco Aurélio de Oliveira pelo direto envolvimento com o trabalho, pelo exemplo de competência profissional e pela preciosa ajuda.

Ao Labmetro por ter oferecido os materiais e equipamentos necessários para realização dos ensaios e por ter proposto este tema de pesquisa.

Aos meus colegas integrantes do grupo de pesquisa em Instrumentação e Automação Aplicados a Ensaios de Refrigeração da UFSC pela ajuda e companheirismo.

Ao BNDES pelo financiamento de parte da pesquisa.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho e que não foram explicitamente citados nas linhas acima.



## RESUMO

# CONTRIBUIÇÕES AO CONTROLE DE SISTEMAS MONOVARIÁVEIS E MULTIVARIÁVEIS COM ATRASO DE TRANSPORTE

RODOLFO CÉSAR COSTA FLESCH

Fevereiro/2012

**Orientador:** Prof. Julio Elías Normey Rico, Dr.

**Área de concentração:** Controle, Automação e Sistemas

**Número de páginas:** 227 + 1

Este trabalho apresenta três contribuições ao controle de sistemas com atraso de transporte: uma estratégia unificada para evitar *windup* de controladores que realizam compensação de atraso, uma modelagem do problema de controle preditivo por variáveis de estado que permite acelerar o tempo necessário para obtenção da ação de controle a cada período de amostragem e a generalização de uma estrutura baseada no preditor Smith para sistemas multivariáveis capaz de tratar tanto sistemas estáveis quanto instáveis com múltiplos atrasos. Como o assunto é bastante abrangente, o trabalho foca nas duas últimas contribuições e os avanços na primeira linha são apresentados na forma de apêndice. Todos os resultados foram comprovados através de simulação em processos industriais extraídos da literatura e também através de estudos de caso experimentais realizados em uma bancada para avaliação de desempenho energético de compressores de refrigeração. A técnica de computador rápido do sinal de controle proposta neste trabalho foi capaz de reduzir o tempo demandado em até quatro ordens de grandeza quando comparada com os resultados apresentados até então na literatura para essa classe de controladores. No caso da generalização multivariável da estrutura baseada no preditor de Smith, os resultados mostraram-se tão bons quanto os atingidos por técnicas ótimas de controle para o caso nominal.

**Palavras-chaves:** controle de processos; processos multivariáveis; compensação de atraso de transporte; robustez; refrigeração.



## ABSTRACT

### CONTRIBUTIONS TO THE CONTROL OF SISO AND MIMO SYSTEMS WITH DEAD TIME

RODOLFO CÉSAR COSTA FLESCH

February/2012

**Advisor:** Prof. Julio Elías Normey Rico, Dr.

**Area of concentration:** Control, Automation, and Systems

**Number of pages:** 227 + 1

This thesis presents three novel contributions to the control of systems with dead time: a unified anti-windup strategy for dead-time compensators, a state-space model representation of plants with dead time which reduces the computation time at each sampling interval of model-based predictive control, and a generalization of a control strategy based on the Smith predictor for multiple-input and multiple-output (MIMO) stable or unstable systems with multiple delays. As the subject is very wide, this thesis focus on the last two contributions. The achievements on the anti-windup strategy will be presented as an appendix. All the results have been validated through both simulations using industrial processes from literature and experimental case studies done using a test rig for performance evaluation of refrigerant compressors. The fast-computation technique proposed in this thesis was able to decrease the computation time required by up to four orders of magnitude when compared to the results presented in the literature for this class of controllers. In the case of the MIMO generalization of the Smith predictor-based structure, the results are as good as the ones obtained using optimal control techniques in the nominal case.

**Keywords:** process control; MIMO processes; dead-time compensation; robustness; refrigeration.



# SUMÁRIO

Lista de Abreviaturas

Lista de Símbolos

Lista de Figuras

1	Introdução	37
1.1	Motivação . . . . .	38
1.2	Problema de pesquisa . . . . .	40
1.3	Objetivos . . . . .	41
1.3.1	Objetivo geral . . . . .	41
1.3.2	Objetivos específicos . . . . .	41
1.4	Estrutura do trabalho . . . . .	41
2	Revisão da literatura	43
2.1	Formas de representação dos modelos de sistemas dinâmicos	44
2.1.1	Sistemas monovariáveis . . . . .	44
2.1.2	Sistemas multivariáveis . . . . .	45
2.2	Compensadores de atraso de transporte . . . . .	46
2.2.1	Preditor de Smith . . . . .	46
2.2.2	Modificações do preditor de Smith para plantas integradoras . . . . .	51
2.2.3	Modificações do preditor de Smith para plantas instáveis . . . . .	53
2.2.4	Preditor de Smith filtrado . . . . .	54
2.2.5	Compensadores de atraso multivariáveis . . . . .	60
2.3	Controle preditivo baseado em modelo . . . . .	65
2.3.1	Controlador preditivo generalizado . . . . .	66
2.3.2	Controle por matriz dinâmica . . . . .	75
2.3.3	Abordagem por variáveis de estado . . . . .	80
2.3.4	Cômputo rápido do problema de otimização . . . . .	83
2.4	Considerações finais . . . . .	86
3	Cômputo rápido do MPC para sistemas com atraso	89
3.1	Discussão sobre a formulação tradicional do MPC <sub>EE</sub> para sistemas com atraso . . . . .	89
3.2	Formulação inédita para o MPC <sub>EE</sub> . . . . .	91
3.2.1	Cômputo rápido do MPC <sub>FT</sub> para sistemas com atraso	98

3.3	Estudos de caso . . . . .	101
3.3.1	Análise numérica para um integrador com atraso . . . . .	102
3.3.2	Temperatura de saída do calorímetro . . . . .	106
3.3.3	Máquina de fabricação de papel . . . . .	108
3.4	Comentários finais . . . . .	111
4	Preditor de Smith filtrado multivariável . . . . .	115
4.1	Estrutura de controle proposta . . . . .	115
4.2	Estrutura de predição filtrada e controlador primário . . . . .	117
4.3	Ajuste do filtro . . . . .	117
4.4	Desempenho em malha fechada e robustez . . . . .	122
4.5	Estudos de caso em simulação . . . . .	125
4.5.1	Caso estável . . . . .	125
4.5.2	Caso integrador . . . . .	129
4.5.3	Caso instável . . . . .	134
4.6	Estudo de caso experimental . . . . .	138
4.7	Considerações finais . . . . .	143
5	Considerações finais . . . . .	147
5.1	Conclusões . . . . .	147
5.2	Propostas para trabalhos futuros . . . . .	150
	Referências . . . . .	153
	Apêndice A – Tratamento de restrições no sinal de controle em compen- sadores de atraso . . . . .	165
A.1	Revisão da literatura . . . . .	165
A.2	Estratégia anti- <i>windup</i> unificada para sistemas com atraso . . . . .	167
A.2.1	Formalização da estratégia anti- <i>windup</i> . . . . .	168
A.2.2	Abordagem anti- <i>windup</i> unificada para DTC . . . . .	171
A.2.3	Estudos de caso em simulação . . . . .	175
A.2.4	Estudo de caso experimental . . . . .	186
A.3	Comentários finais . . . . .	190
	Apêndice B – Princípios de termodinâmica e requisitos das bancadas de ensaio de desempenho de compressores . . . . .	193
B.1	Princípios de termodinâmica . . . . .	193
B.2	Princípios de refrigeração . . . . .	196
B.3	Ensaio de desempenho de compressores . . . . .	199
B.3.1	Definições normativas das grandezas . . . . .	200
B.3.2	Principais aspectos metroológicos e operacionais esta- belecidos em norma . . . . .	203

Apêndice C – Descrição das variáveis controladas na bancada de ensaio

de desempenho de compressores em estudo	207
C.1 Descrição geral da bancada . . . . .	207
C.2 Descrição das variáveis controladas . . . . .	209
C.2.1 Temperatura de entrada do compressor . . . . .	211
C.2.2 Temperatura do separador de óleo . . . . .	213
C.2.3 Temperatura de entrada do calorímetro . . . . .	214
C.2.4 Temperatura de saída do calorímetro . . . . .	216
C.2.5 Temperatura do ambiente do calorímetro . . . . .	218
C.2.6 Temperatura do ambiente do compressor . . . . .	220
C.2.7 Pressão de entrada do compressor . . . . .	222
C.2.8 Pressão de saída do compressor . . . . .	224
C.2.9 Pressão na saída do condensador . . . . .	226



## LISTA DE ABREVIATURAS

<b>ABNT</b>	Associação Brasileira de Normas Técnicas
<b>AS</b>	conjunto ativo – do inglês <i>active set</i>
<b>ASHRAE</b>	<i>American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers</i>
<b>CARIMA</b>	auto-regressivo com média móvel e integrador e entrada controlada – do inglês <i>controlled autoregressive integrated moving average</i>
<b>CC</b>	de corrente contínua
<b>CEN</b>	<i>European Committee for Standardization</i>
<b>COP</b>	coeficiente de desempenho – do inglês <i>coefficient of performance</i>
<b>DMC</b>	controle por matriz dinâmica – do inglês <i>dynamic matrix control</i>
<b>DTC</b>	compensador de atraso de transporte – do inglês <i>dead-time compensator</i>
<b>Embraco</b>	Whirlpool S.A. – Unidade Embraco de Compressores e Soluções de Refrigeração
<b>GMDC</b>	compensador generalizado para múltiplos atrasos – do inglês <i>generalized multidelay compensator</i>
<b>GPC</b>	controlador preditivo generalizado – do inglês <i>generalized predictive controller</i>
<b>GPC-T</b>	controlador preditivo generalizado com polinômio $T$
<b>IMC</b>	controle por modelo interno – do inglês <i>internal model control</i>
<b>IP</b>	ponto interior – do inglês <i>interior point</i>
<b>ISE</b>	integral do erro ao quadrado – do inglês <i>integral of squared error</i>
<b>ISO</b>	<i>International Organization for Standardization</i>
<b>Labmetro</b>	Laboratório de Metrologia e Automatização

<b>LIAE</b>	Laboratório de Instrumentação e Automação de Ensaios Aplicados à Refrigeração
<b>LMI</b>	desigualdades matriciais lineares – do inglês <i>linear matrix inequalities</i>
<b>MAC</b>	controle algorítmico baseado em modelo – do inglês <i>model algorithm control</i>
<b>MIMO</b>	múltiplas entradas e múltiplas saídas – do inglês <i>multiple input and multiple output</i>
<b>MIMO-PSF</b>	preditor de Smith filtrado multivariável
<b>MPC</b>	controle preditivo baseado em modelo – do inglês <i>model predictive control</i>
<b>MPC<sub>EE</sub></b>	controle preditivo baseado em modelo com modelagem no espaço de estados
<b>MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup></b>	controle preditivo baseado em modelo com modelagem proposta no espaço de estados
<b>MPC<sub>FT</sub></b>	controle preditivo baseado em modelo com modelagem em função de transferência
<b>NP</b>	tempo polinomial não determinístico
<b>PCI</b>	<i>peripheral component interconnect</i>
<b>PID</b>	proporcional-integral-derivativo
<b>PQ</b>	programação quadrática
<b>PS</b>	preditor de Smith
<b>PSF</b>	preditor de Smith filtrado
<b>PWM</b>	modulação por largura de pulso – do inglês <i>pulse width modulation</i>
<b>PXI</b>	<i>PCI extension for instrumentation</i>
<b>RPC</b>	rejeição de perturbação de carga
<b>RPS</b>	rejeição de perturbação na saída
<b>SCXI</b>	sistema de condicionamento de sinais para instrumentação – do inglês <i>signal conditioning extensions for instrumentation</i>

**SISO** uma entrada e uma saída – do inglês *single input and single output*

**SR** seguimento de referência

**UFSC** Universidade Federal de Santa Catarina



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos numéricos e latinos

<b>1</b>	vetor com todos os elementos iguais a um
<b>A</b>	matriz de transição (ou matriz de estados)
<b>A<sub>ξ</sub></b>	matriz de transição do sistema aumentado para considerar o atraso
<b><math>\bar{A}</math></b>	matriz de transição com os atrasos removidos do modelo
<b><math>A(z^{-1})</math></b>	polinômio associado com a dinâmica dos polos da planta
<b><math>\tilde{A}(z^{-1})</math></b>	polinômio associado com a dinâmica da planta, obtido pela multiplicação de $\Delta$ pelo polinômio $A(z^{-1})$
<b><math>\tilde{a}_i</math></b>	negativo do <i>i</i> ésimo coeficiente do polinômio $\tilde{A}(z^{-1})$
<b>B</b>	matriz de entrada
<b>B<sub>ξ</sub></b>	matriz de entrada do sistema aumentado para considerar o atraso
<b><math>\bar{B}</math></b>	matriz de entrada com os atrasos removidos do modelo
<b><math>B(z^{-1})</math></b>	polinômio associado com a dinâmica dos zeros da planta
<b><math>c_o</math></b>	calor específico do óleo
<b><math>\mathbf{c}_o</math></b>	vetor de ponderação do termo linear em um problema de otimização
<b>C</b>	matriz de saída
<b><math>\bar{C}</math></b>	matriz de saída com os atrasos removidos do modelo
<b>C<sub>c</sub></b>	matriz aumentada composta pelas restrições de igualdade para todo o horizonte da abordagem por variáveis de estado

<b>COP</b>	coeficiente de desempenho
$C(s)$	controlador primário
$C(z)$	controlador primário discreto
<b><math>C(z)</math></b>	controlador primário discreto multivariável
$C_{eq}(s)$	controlador equivalente
$C_{eq}(z)$	controlador equivalente discreto
<b><math>C_{eq}(z)</math></b>	controlador equivalente discreto multivariável
$d$	atraso de transporte discretizado
$d_n$	valor nominal do atraso de transporte discretizado
$dH$	diferencial de entalpia
$dQ$	diferencial de calor
$dS$	diferencial de entropia
$dU$	diferencial de energia interna
<b>D</b>	matriz de transferência direta
<b><math>\bar{D}</math></b>	matriz de transferência direta com os atrasos removidos do modelo
$D(s)$	denominador da função de transferência da referência para a saída
<b><math>D(z)</math></b>	desacoplador discreto
$D(z^{-1})$	polinômio que define o denominador da função de transferência do modelo da perturbação no GPC
$D_c(z)$	denominador do controlador primário $C(z)$
$D_n(z)^+$	polos indesejados da planta (aqueles que não se deseja ter na função de transferência de rejeição de perturbação)
$D_n(z)^-$	polos da planta que podem aparecer na função de transferência de rejeição de perturbação
$D_r(z)$	denominador do filtro $F_r(z)$

$e_p(k)$	erro entre a predição e a saída do processo
$\mathbf{e}_p(k)$	vetor com os erros de predição
$e(t)$	ruído branco
$E$	energia do sistema
$f$	frequência elétrica de alimentação especificada
$\mathbf{f}$	vetor com as restrições de desigualdade
$f_a$	frequência elétrica real de alimentação
$\mathbf{F}$	matriz com as restrições de desigualdade representadas em função dos incrementos de controle
$\mathbf{F}_1$	matriz com as restrições de desigualdade relativas aos estados
$\mathbf{F}_2$	matriz com as restrições de desigualdade relativas ao sinal de controle
$F_l$	fator de perdas do calorímetro
$F(s)$	filtro de referência
$F(z)$	filtro de referência discreto
$\mathbf{F}(z)$	filtro de referência discreto multivariável
$F_r(z)$	filtro do preditor empregado para aprimorar as propriedades do PS
$\mathbf{F}_r(z)$	filtro multivariável do preditor empregado para aprimorar as propriedades do PS
$F_{r_i}(z)$	cada um dos elementos que compõem a diagonal do filtro $\mathbf{F}_r(z)$
$\overline{F}_r(z)$	qualquer filtro discreto próprio e estável
$g(k)$	coeficiente $k$ da resposta ao degrau de um sistema
$\mathbf{G}$	matriz dos coeficientes da resposta ao degrau da planta
$\mathbf{G}(z)$	modelo multivariável da planta sem os atrasos comuns (também chamado de modelo rápido)

$G_m(s)$	modelo modificado da planta sem atraso de transporte utilizado para melhorar as propriedades do preditor
$G_n(s)$	modelo nominal da planta sem atraso de transporte (também chamado de modelo rápido)
$G_n(z)$	modelo nominal discreto da planta sem atraso de transporte e com sustentador de ordem zero (também chamado de modelo rápido)
$\mathbf{G}_n(z)$	modelo rápido nominal discreto multivariável
$G_G(s)$	modelo nominal da parcela não integradora da planta sem atraso de transporte
$\mathbf{G}^\ddagger(z)$	modelo rápido discreto multivariável desacoplado
$h_{f1}$	entalpia específica do refrigerante no estado líquido saturado referente à pressão especificada de saída do compressor
$h_{f2}$	entalpia específica do refrigerante no estado líquido sub-resfriado na entrada da válvula de expansão
$h_{g1}$	entalpia específica do vapor de refrigerante na entrada do compressor nas condições especificadas para o ensaio
$h_{g1a}$	entalpia específica do vapor de refrigerante na entrada do compressor
$h_{g2}$	entalpia específica do vapor superaquecido de refrigerante na saída do calorímetro
$h_{ga}$	entalpia específica teórica do refrigerante na entrada do compressor nas condições especificadas para o ensaio
$h_{gt}$	entalpia específica teórica do vapor de refrigerante à pressão de descarga tendo a mesma entropia que o vapor de refrigerante na entrada do compressor
$h(k)$	coeficiente $k$ da resposta ao impulso de um sistema
$\mathbf{H}$	matriz com estrutura especial que multiplica $\Delta \mathbf{u}_1$ no cálculo da resposta livre de um processo
$H(s)$	função de transferência em malha fechada da referência para a saída

$\mathbf{H}_c$	matriz de ponderação do termo quadrático no problema de otimização padrão
$\mathbf{H}_{un}(z)$	matriz de transferência discreta em malha fechada da perturbação na saída para o sinal de controle
$H_{yn}(z)$	função de transferência discreta em malha fechada da perturbação na saída para a saída
$H_{yq}(z)$	função de transferência discreta em malha fechada da perturbação de carga para a saída
$H_{yr}(z)$	função de transferência discreta em malha fechada da referência para a saída
$\mathbf{H}_{yn}(z)$	matriz de transferência discreta em malha fechada da perturbação na saída para a saída
$\mathbf{H}_{yq}(z)$	matriz de transferência discreta em malha fechada da perturbação de carga para a saída
$\mathbf{H}_{yr}(z)$	matriz de transferência discreta em malha fechada da referência para a saída
$\mathbf{I}$	matriz identidade
$j$	variável complexa (em alguns casos é utilizado como índice em somatórios, matrizes e vetores)
$J(s)$	filtro anti-aliasing
$J_{EE}$	funcional a ser minimizado na abordagem por variáveis de estado
$J_{GPC}$	funcional a ser minimizado no GPC
$k$	tempo discreto (múltiplo do período de amostragem)
$k_n$	ordem do denominador do filtro do preditor $F_r(z)$
$\mathbf{K}$	matriz de ganhos do controlador equivalente ao GPC
$\mathbf{K}_0$	matriz de ponderação do termo quadrático em um problema de otimização
$K_c$	ganho proporcional de um controlador PID
$K_v$	ganho de velocidade

$K_C$	ganho estático de $C(s)$
$K_G$	ganho estático de $G_G(s)$
$K_I$	ganho para implementação de estratégia anti- <i>windup</i>
$K_0$	ganho de realimentação do erro de predição para a abordagem simplificada do PS para plantas integradoras
$K^{\max}$	número máximo de iterações
$L$	valor real do atraso de transporte
$L_n$	valor nominal do atraso de transporte
$\mathbf{L}(z)$	atraso multivariável discreto
$\mathbf{L}_n(z)$	atraso multivariável discreto nominal
$m$	número de variáveis manipuladas no modelo
$M(s)$	controlador de realimentação do erro de predição para a abordagem modificada de PS de para plantas integradoras
$n$	número de variáveis de estado no modelo
$n_a$	ordem do polinômio $A(z^{-1})$
$n_b$	ordem do polinômio $B(z^{-1})$
$n(k)$	aproximação discreta da perturbação na saída $n(t)$
$\mathbf{n}(k)$	vetor das perturbações de saída ou dos ruídos de medição
$n(t)$	perturbação na saída (pode representar também um ruído de medição)
$\hat{n}(t+j t)$	predição feita no instante $t$ da perturbação que atuará no instante $t+j$
$N$	tamanho do horizonte de predição
$N_1$	início do horizonte de predição
$N_2$	final do horizonte de predição
$N_k$	número de coeficientes da resposta ao degrau considerados para realizar a predição no DMC

$N_u$	horizonte de controle
$N_x$	horizonte de predição dos estados
$N(s)$	numerador da função de transferência da referência para a saída
$N_c(z)$	numerador do controlador primário $C(z)$
$N_n(z)$	numerador do modelo rápido da planta $G_n(z)$
$N_r(z)$	numerador do filtro $F_r(z)$
$p$	pressão absoluta
$P$	potência real entregue ao compressor corrigida para a condição de ensaio
$P_a$	potência real entregue ao compressor medida
$\mathbf{P}_c$	matriz aumentada composta pelas restrições de desigualdade para todo o horizonte da abordagem por variáveis de estado
$P(s)$	dinâmica da planta real
$P(z)$	representação equivalente discreta da planta contínua mais o sustentador de ordem zero e o amostrador
$\mathbf{P}(z)$	matriz de transferência que relaciona cada uma das entradas com cada uma das saídas
$P_c(s)$	dinâmica completa da planta, incluindo as restrições
$P_n(s)$	modelo nominal da planta
$P_n(z)$	modelo nominal da planta discretizado com um sustentador de ordem zero
$\mathbf{P}_q(s)$	matriz que representa a dinâmica da perturbação de carga
$q_{mf}$	vazão mássica de refrigerante
$q(t)$	sinal de perturbação de carga
$q(k)$	aproximação discreta do sinal de perturbação de carga $q(t)$
$\mathbf{q}(k)$	vetor das perturbações de carga discretas
$\mathbf{Q}$	penalização do estado

$\mathbf{Q}_\delta$	matriz diagonal composta pelos termos de ponderação $\delta(j)$
$\mathbf{Q}_\lambda$	matriz diagonal composta pelos termos de ponderação $\lambda(j)$
$Q(s)$	representação do sinal $q(t)$ no domínio de Laplace
$\mathbf{Q}(z)$	controlador da malha externa nos laços IMC
$\mathbf{r}$	vetor de resíduos do processo de otimização
$\mathbf{r}_d$	resíduo dual do processo de otimização
$\mathbf{r}_p$	resíduo primal do processo de otimização
$r(t)$	sinal de referência
$r(k)$	sinal discreto de referência
$\mathbf{r}(k)$	vetor das referências discretas
$\mathbf{R}$	penalização do controle
$R(s)$	representação do sinal $r(t)$ no domínio de Laplace
$s$	variável complexa (transformada de Laplace)
$s(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	custo no instante de tempo $t$
$\mathbf{S}$	matriz com estrutura especial que multiplica $\mathbf{y}_1$ no cálculo da resposta livre de um processo
$\mathbf{S}_c$	penalização do produto cruzado estado-controlado
$S(z)$	função de transferência do preditor estável $\left(S(z) = G_n(z) \left[1 - z^{-d_n} F_r(z)\right]\right)$
$\mathbf{S}(z)$	preditor estável multivariável
$t$	tempo
$t_2$	temperatura de saída do calorímetro
$t_a$	temperatura média do ambiente do calorímetro
$t_e$	temperatura do fluido deixando a válvula de expansão (temperatura de evaporação)
$t_f$	temperatura de saturação correspondente à pressão de descarga do compressor
$t_g$	temperatura de sucção do compressor

$t_p$	temperatura de saturação média correspondente à pressão do fluido secundário
$T$	temperatura absoluta
$\mathbf{T}$	matriz triangular inferior cujos elementos não nulos são iguais a um
$T_h$	horizonte de predição para a abordagem por variáveis de estado
$T_i$	tempo integral de um controlador PID
$T_q$	constante de tempo instável
$T_r$	constante de tempo equivalente desejada para a dinâmica de malha fechada
$T_u$	constante de tempo equivalente das dinâmicas não modeladas
$T_s$	período de amostragem
$T(s)$	transformada de Laplace de $t_2$
$T(z^{-1})$	polinômio que define o numerador da função de transferência do modelo da perturbação no GPC
$\mathbf{u}_{-1}$	vetor cujos elementos são todos iguais à ação de controle em $t - 1$
$\mathbf{u}_{\max}$	máxima amplitude de cada ação de controle em $N_u$
$\mathbf{u}(k)$	vetor das entradas de controle discretas
$u(t)$	resposta temporal da variável manipulada ou sinal de controle
$\underline{u}$	limite inferior do sinal de controle
$\bar{u}$	limite superior do sinal de controle
$V$	volume
$V_{ga}$	volume específico real do vapor de refrigerante na sucção do compressor
$V_{gl}$	volume específico do vapor de refrigerante na sucção do compressor nas condições especificadas para ensaio
$w(t + j)$	sinal de referência futura no instante $t + j$

$\mathbf{w}$	vetor com os sinais de referência atual(is) e futuros
$\mathbf{w}(t)$	vetor de perturbação que atua diretamente nas variáveis de estado no instante $t$
$\bar{\mathbf{w}}$	valor esperado de $\mathbf{w}(t)$
$\mathbf{W}_i(z)$	cada uma das matrizes que caracterizam a estrutura espacial e frequencial da incerteza
$x$	título (percentagem em massa) do óleo na mistura fluido refrigerante e óleo
$\mathbf{x}(k)$	vetor das variáveis de estado com tempo representado por $k$
$\mathbf{x}(t)$	vetor das variáveis de estado com tempo representado por $t$
$\tilde{\mathbf{x}}(t)$	notação utilizada para denotar $\mathbf{x}(t + d t)$
$\mathbf{y}_{\max}$	vetor com a máxima amplitude de cada predição em $N$
$y(k)$	resposta temporal amostrada da variável controlada
$\mathbf{y}(k)$	vetor das saídas
$y(t)$	resposta temporal da variável controlada
$\mathbf{y}_c(t)$	resposta forçada do sistema
$y_f(k)$	saída do processo medida e filtrada pelo filtro $F_r(z)$
$\mathbf{y}_f(t)$	vetor de respostas livres do sistema
$y_p(k)$	predição da saída $d_n$ instantes de tempo à frente somada com o erro de predição filtrado
$\mathbf{y}_p(k)$	vetor das predições da saída
$\hat{\mathbf{y}}$	vetor de predições da(s) saída(s) da planta
$\hat{\mathbf{y}}_1$	vetor de predições da(s) saída(s) da planta até $t + d$
$\hat{y}(k)$	predição do modelo para o valor de saída no instante $k$
$\hat{y}(m t)$	predição do valor de saída no instante $m$ feito no instante $t$
$Y(s)$	representação do sinal $y(t)$ no domínio de Laplace
$Y^\dagger(z)$	predição sem atraso da saída $Y(z)$

$\mathbf{Y}^\dagger(z)$	predição sem atraso da saída $\mathbf{Y}(z)$
$s$	variável complexa (transformada Z)
$\mathbf{z}$	variável de otimização para a abordagem por variáveis de estado
$z_c$	zero de um controlador PI
$\mathbf{z}_0$	vetor dos termos independentes em um problema de otimização

### Símbolos gregos e especiais

$\alpha$	posição desejada para o polo múltiplo do filtro do preditor $F_r(z)$
$\beta$	parâmetro de ajuste do polinômio $T(z^{-1})$
$\delta$	ponderação do erro de seguimento
$\delta P(z)$	representação dos erros de modelagem da planta
$\delta Q$	diferencial de calor
$\delta W$	diferencial de trabalho
$\overline{\delta P}(\omega)$	limite superior para a norma de $\delta P(z)$
$\Lambda(z)$	matriz cheia empregada para análise de robustez
$\Delta \mathbf{P}$	incerteza aditiva da planta $\mathbf{P}(z)$
$\Delta \mathbf{u}$	vetor dos incrementos de controle dentro do horizonte de controle
$\Delta \bar{u}$	limite superior da taxa de variação do sinal de controle
$\Delta \mathbf{u}_1$	vetor dos incrementos de controle passados
$\Delta u(t)$	incremento do sinal de controle no instante $t$
$\Delta \phi$	potência de aquecimento efetivamente empregada para aquecimento, depois de descontadas a parcela removida com a evaporação do refrigerante e com as perdas para o ambiente

$\Delta\phi(s)$	transformada de Laplace de $\Delta\phi$
$\eta_l$	eficiência isentrópica
$\kappa$	ponderação da barreira logarítmica
$\lambda$	ponderação do esforço do incremento de controle
$\Lambda$	matriz de ganhos relativos
$\mu$	massa específica
$\mu_r$	massa específica do fluido refrigerante na pressão e temperatura nas quais a vazão mássica foi medida
$\nu$	variável dual (vetor de multiplicadores de Lagrange)
$\nu_o$	volume específico do óleo
$\phi_0$	capacidade de refrigeração do compressor
$\phi_h$	potência externa fornecida ao interior do calorímetro
$\phi_m$	margem de fase
$\phi_r$	potência removida devido à evaporação do fluido refrigerante e às perdas com o ambiente
$\phi(\mathbf{z})$	barreira logarítmica
$\Psi(z)$	preditor da saída sem atraso para estabilização de plantas instáveis
$\omega_0$	frequência para a qual o módulo da resposta em frequência é unitário
$\bar{\sigma}(\mathbf{X})$	valor singular máximo de uma matriz $\mathbf{X}$
$\xi$	vetor de estados do sistema aumentado para considerar o atraso
$\mathcal{L}$	transformada de Laplace
$\mathcal{Z}$	transformada Z
$\mathbb{E}$	valor esperado

## LISTA DE FIGURAS

1	Preditor de Smith . . . . .	47
2	Preditor de Smith com filtro de referência . . . . .	49
3	Preditor de Smith representado na forma de um controlador equivalente . . . . .	50
4	Preditor de Smith modificado proposto por Mataušek e Micić [31] . . . . .	52
5	Estrutura do preditor de Smith filtrado . . . . .	55
6	Estrutura do PSF para implementação . . . . .	56
7	Esquema equivalente do MIMO-PS . . . . .	62
8	Laço para estabilização de plantas instáveis . . . . .	64
9	Esquema IMC-DTC . . . . .	64
10	Ideia do MPC [5] . . . . .	66
11	Estrutura do MPC [1] . . . . .	67
12	Necessidade de desigualdades . . . . .	99
13	Resultados de simulação empregando o algoritmo rápido para o MPC <sub>EE</sub> em um sistema integrador com atraso . . . . .	103
14	Tempo demandado para resolver o problema de PQ para cada amostra usando o método rápido de cômputo com $K^{\max} = 5$ e somente as restrições nos estados não associados ao atraso (MPC <sub>FT</sub> ) . . . . .	104
15	Resultados de simulação para o MPC <sub>FT</sub> com referência unitária e perturbação de carga . . . . .	105
16	Tempo necessário para resolver o problema de PQ para cada amostra empregando o algoritmo de solução exata e todas as restrições (MPC <sub>FT</sub> ) . . . . .	107
17	Esquema geral de uma máquina de produção de papel . . . . .	109
18	Esquema do MIMO-PSF . . . . .	116
19	Esquema equivalente do MIMO-PSF . . . . .	120
20	Estrutura $\Delta - \mathbf{M}$ . . . . .	124
21	Representação esquemática de uma coluna de destilação . . . . .	126
22	Comparação entre o MIMO-PSF (proposto) e o MIMO-PS para o estudo de caso estável . . . . .	128
23	Análise de robustez para o estudo de caso estável . . . . .	129
24	Ilustração da relação existente entre o desempenho de rejeição de perturbação e robustez para o estudo de caso estável . . . . .	130
25	Representação esquemática do evaporador de três estágios . . . . .	131
26	Comparação entre o MIMO-PSF, o IMC-DTC proposto em [7] e o IMC-MIMO-PS para o estudo de caso integrador . . . . .	133
27	Respostas no domínio do tempo para o MIMO-PSF e o GPC-T para o estudo de caso instável . . . . .	135

28	Esquema geral indicando os pontos de medição e atuação da malha multivariável . . . . .	138
29	Comportamento do modelo identificado frente ao comportamento do sistema em um dos ensaios em malha aberta . . . . .	139
30	Comportamento do sistema em malha fechada (dados experimentais e simulação) . . . . .	142
31	Comportamento do sistema em malha fechada (estrutura proposta e PID) . . . . .	144
32	Estratégia anti- <i>windup</i> de Zhang e Shao [95] aplicada à estrutura de Mataušek e Micić [30] . . . . .	166
33	Estratégia anti- <i>windup</i> de Zhang e Jiang [96] . . . . .	167
34	Representação em diagrama de blocos do problema de controle restrito . . . . .	168
35	Representação em diagrama de blocos da estratégia anti- <i>windup</i> . . . . .	169
36	Controlador equivalente ao PSF . . . . .	172
37	Comparação entre o algoritmo proposto e o algoritmo de velocidade para um processo estável com atraso de 15 s . . . . .	174
38	Comparação entre o PSF e o PID com anti- <i>windup</i> para um processo estável com atraso de 15 s . . . . .	176
39	Controlador equivalente do PSF com perturbações e restrições . . . . .	176
40	Dados no domínio do tempo comparando os casos com e sem a estrutura proposta para o caso estável . . . . .	178
41	Dados no domínio do tempo comparando o GPC e a estrutura proposta para o caso estável . . . . .	179
42	Dados no domínio do tempo comparando o GPC e a estratégia anti- <i>windup</i> proposta para o caso estável com incertezas de modelagem . . . . .	180
43	Dados no domínio do tempo comparando os casos com e sem a estrutura proposta para o caso integrador . . . . .	181
44	Dados no domínio do tempo comparando a estrutura proposta com as duas outras abordagens propostas na literatura para o caso integrador . . . . .	182
45	Dados no domínio do tempo comparando os casos com e sem a estrutura proposta para o caso instável . . . . .	185
46	Dados no domínio do tempo comparando o GPC e a estrutura proposta para o caso instável . . . . .	186
47	Identificação da malha de temperatura de entrada do compressor . . . . .	187
48	Controle em malha fechada da temperatura de entrada do compressor com a estrutura proposta . . . . .	188

49	Dados no domínio do tempo comparando os casos com e sem a estratégia de anti- <i>windup</i> proposta para a temperatura de entrada do compressor; esquerda: seguimento de referência; direita: rejeição de perturbação . . . . .	190
50	Diagrama de um circuito de refrigeração por compressão de vapor	197
51	Representação do circuito de refrigeração em um diagrama p-h . .	198
52	Método A estabelecido na norma ISO 917 . . . . .	204
53	Esquema geral da bancada de ensaio de desempenho energético de compressores . . . . .	208
54	Esquema geral da malha de controle da temperatura de entrada do compressor . . . . .	212
55	Esquema geral da malha de controle da temperatura do separador de óleo . . . . .	214
56	Esquema geral da malha de controle da temperatura de entrada do calorímetro . . . . .	215
57	Esquema geral da malha de controle da temperatura de saída do calorímetro . . . . .	217
58	Esquema geral da malha de controle da temperatura ambiente do calorímetro . . . . .	219
59	Esquema geral da malha de controle da temperatura ambiente do compressor . . . . .	221
60	Esquema geral da malha de controle da pressão de entrada do compressor . . . . .	223
61	Esquema geral da malha de controle da pressão de saída do compressor . . . . .	225
62	Esquema geral da malha de controle da pressão de saída do condensador . . . . .	226



## 1 INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico da grande maioria dos processos industriais pode ser representado por um sistema de equações diferenciais em conjunto com atrasos de transporte. Tais atrasos podem aparecer em função do transporte de massa, energia ou informação, porém também podem ser devidos a tempo de processamento ou ao acúmulo do efeito de várias dinâmicas de baixa ordem em série, o que em muitos casos pode ser modelado como um sistema de baixa ordem combinado com um atraso [1, 2].

A presença de atrasos de transporte geralmente dificulta o emprego de técnicas tradicionais de controle e por esse motivo estruturas de compensação de atraso foram objeto de estudo de muitos pesquisadores na última década [3]. O trabalho de Smith [4] foi o pioneiro na área e seu objetivo foi o de eliminar o atraso da equação característica de malha fechada. A partir do trabalho de Smith [4], que deu origem à estrutura conhecida como preditor de Smith (PS), surgiram diversas modificações e generalizações de estruturas de controle clássico para tratar o problema do atraso de transporte. Esse tipo de controlador é conhecido como compensador de atraso de transporte (DTC, do inglês *dead-time compensator*). Outra área de pesquisa mais recente emprega um algoritmo de otimização em linha e um modelo do processo a ser controlado e também é capaz de realizar a compensação do efeito do atraso de transporte, apesar de sua aplicação não ser restrita a sistemas com atraso [5]. Tal técnica é conhecida como controle preditivo baseado em modelo (MPC, do inglês *model predictive control*).

Em sistemas multivariáveis com atraso a situação complica-se mais devido às interações entre variáveis e ao fato de que os atrasos podem ser diferentes para cada um dos pares variável manipulada – variável de processo. O trabalho de Alevisakis e Seborg [6] foi o primeiro a estender o PS para o caso multivariável e essa proposta foi sendo explorada e aprimorada na literatura até que no trabalho de Jerome e Ray [2] houve uma generalização do PS para sistemas multivariáveis quadrados (com mesmo número de entradas e saídas). Desde então a linha de pesquisa de DTC multivariáveis ficou um pouco esquecida na literatura por cerca de duas décadas. Todavia, recentemente alguns trabalhos importantes impulsionaram novamente a área [7]. Existem ainda muitos problemas não resolvidos e alguns deles são explorados neste trabalho.

Na área de MPC, um dos grandes problemas é a necessidade de resolver o algoritmo de otimização a cada período de amostragem. Dessa forma,

em sistemas com dinâmicas rápidas muitas vezes fica inviável a aplicação de um controlador desse tipo. O trabalho de Wang e Boyd [8] reuniu grande parte dos desenvolvimentos apresentados na literatura para resolver o problema de otimização do MPC de forma mais rápida. Resultados bastante bons foram obtidos, porém eles não são completamente adequados para sistemas com atraso de transporte. Um dos resultados deste trabalho é uma modelagem especial para o problema MPC que permite tratar sistemas com atraso de transporte de forma computacionalmente eficiente.

No que diz respeito aos estudos de caso de controladores para compensação de atraso, a literatura geralmente se restringe a resultados de simulação. Trabalhos práticos com técnicas DTC e MPC empregando uma bancada de avaliação de desempenho energético de compressores de refrigeração vêm sendo realizados pelo autor nos últimos cinco anos. Os resultados obtidos até o presente momento são animadores [9, 10, 11]. De forma resumida, ensaios que tipicamente eram realizados manualmente puderam ser automatizados devido à possibilidade de controlar, em malha fechada e em tempo satisfatório, as variáveis críticas do ensaio. Para que pudessem existir avanços mais significativos na área houve necessidade de desenvolvimento de novas técnicas e estratégias de controle, tratadas neste trabalho de doutorado.

## 1.1 Motivação

Exigências atuais fazem com que se busque cada vez mais aumentar a produtividade e a qualidade nos diversos tipos de processos. Para que uma organização assuma posição de liderança no mercado não basta apenas inovar e evoluir, mas é necessário, também, que essa evolução seja mais rápida que a dos concorrentes e que esteja em sintonia com as exigências do mercado. Nesse sentido, pesquisa e desenvolvimento ganham importância no cenário competitivo atual. Na fabricação de compressores não é diferente. É sempre necessário investir na pesquisa de novas tecnologias e no aprimoramento dos produtos já existentes. Além do desenvolvimento de novas alternativas, deve ser destacada a importância da manutenção da qualidade na linha atual de produtos, de forma que atenda às especificações informadas aos clientes.

A capacidade de mensurar os reais ganhos advindos de modificações em produtos é uma tarefa complicada, porém essencial. Nas fases iniciais de projeto de um compressor, estimativas de desempenho são obtidas através de simulação, porém conforme o projeto evolui são realizados ensaios com amostras reais. Dentre esses ensaios, merecem destaque os ensaios de desempenho. Transposta a fase de desenvolvimento, são determinadas características importantes do compressor, que compõem as especificações que constarão em catálogo. Na fase de produção, tais ensaios possibilitam a avaliação de

lotes produzidos, no tocante à compatibilidade com as especificações. Dessa forma, esses ensaios apresentam uma grande demanda nas empresas que produzem compressores e ensaios são importantes ferramentas para a adoção de uma política de garantia da qualidade dos produtos oferecidos ao mercado [11].

Ensaio de desempenho são regidos por normas específicas [12, 13, 14], que estabelecem condições bem definidas para sua realização. Um dos grandes problemas de tais ensaios na indústria é que o custo de uma bancada de ensaios é muito elevado, principalmente devido à instrumentação especializada que é necessária. Assim, é essencial a redução dos tempos demandados por esses ensaios para que os recursos disponíveis possam ser otimizados com o aumento da produtividade. Nesse sentido, a automatização se faz bastante interessante, além de contribuir para a minimização das influências do operador humano sobre o processo. Em contrapartida à redução do tempo de ensaio, deve-se ter um sistema robusto capaz de ensaiar de forma satisfatória uma ampla gama de compressores [9].

No Laboratório de Metrologia e Automatização (Labmetro), mais especificamente no Laboratório de Instrumentação e Automação de Ensaios Aplicados à Refrigeração (LIAE), da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), existe uma bancada experimental para realização de ensaios de desempenho de compressores. Tal bancada foi fornecida pela Whirlpool S.A. – Unidade Embraco de Compressores e Soluções de Refrigeração (Embraco) e serve como objeto de estudos conjuntos entre a empresa e a universidade. Depois de ter sido alvo de vários trabalhos, a bancada conta atualmente com arquitetura e instrumentação que são o estado-da-arte em bancadas para ensaios de desempenho de compressores [9, 15, 16, 17, 18, 19]. Apesar de ter havido bastante avanço em relação à situação inicial, os trabalhos anteriores não trataram das relações existentes entre as variáveis. Mesmo no cenário monovariável havia algumas limitações, especialmente quanto ao tempo necessário para cálculo do sinal de controle em uma abordagem MPC e quanto ao tratamento de restrições no caso do DTC. No campo multivariável, a motivação surgiu da esperança que a determinação de modelos que considerem os principais acoplamentos entre as variáveis possam levar a resultados que permitam diminuir ainda mais o tempo dos ensaios. Todavia, não foram encontrados na literatura todos os resultados formais necessários para que ganhos advindos da modelagem multivariável pudessem ser diretamente obtidos no painel de desempenho utilizando generalizações das técnicas atualmente empregadas, especialmente devido ao comportamento integrador de algumas variáveis.

## 1.2 Problema de pesquisa

Pelo que é apresentado na literatura, técnicas MPC são o caminho natural para tratar sistemas com atraso de transporte e restrições [5]. Todavia, quando a abordagem de cômputo rápido proposta por Wang e Boyd [8], que emprega variáveis de estado, é empregada em sistemas com as características das bancadas de ensaio de desempenho de compressores, o período de amostragem precisa ser muito elevado e em muitos casos deixa de atender aos requisitos dinâmicos das variáveis de interesse. Mesmo com a aplicação das técnicas de cômputo rápido apresentadas na literatura o tempo demandado é maior que o necessário. Assim, o problema foi tratado através de duas frentes diferentes: desenvolver técnicas para calcular o sinal de controle de forma mais rápida em uma abordagem MPC para sistemas com atraso e desenvolver uma técnica para evitar muitos dos efeitos indesejados das restrições operacionais em uma abordagem DTC.

O primeiro problema tratado foi o de estudar uma especialização das técnicas de cômputo rápido do sinal de controle em uma abordagem MPC. O desenvolvimento foi realizado para os casos monovariável e multivariável com atrasos iguais e conseguiu-se mostrar que o tempo de cálculo pode ser reduzido em mais de mil vezes em comparação com a abordagem tradicional. O novo método permite eliminar completamente o atraso da representação de estados em sistemas monovariáveis e os atrasos comuns em sistemas multivariáveis.

Adicionalmente, foi proposta uma estratégia unificada anti-*windup* capaz de tratar sistemas estáveis, instáveis e integradores com atraso e restrições na variável manipulada. Mostrou-se que a estrutura proposta é capaz de apresentar um comportamento muito parecido com o obtido em uma abordagem ótima, porém o tempo demandado para obtenção do sinal de controle é muito inferior. Apesar de ser um desenvolvimento muito importante para aplicação prática de DTC, optou-se por apresentar os resultados dessa estratégia na forma de um apêndice ao trabalho. Isso se deveu a dois motivos principais: a apresentação separada dos resultados dessa linha não prejudica o entendimento dos desenvolvimentos realizados nas outras linhas e os resultados não foram estendidos para o caso multivariável, como ocorreu nas outras linhas (pelo menos para o caso de atrasos comuns).

Uma outra linha que integra o problema de pesquisa é o desenvolvimento de uma técnica DTC geral para sistemas multivariáveis. As técnicas apresentadas na literatura até o ano de 2010 não permitiam o emprego de técnicas DTC em sistemas que não fossem estáveis [7]. Este trabalho formaliza uma generalização do preditor de Smith filtrado (PSF) para sistemas multivariáveis com o mesmo número de entradas e saídas. Apresenta-se uma prova formal de que a estrutura proposta é capaz de estabilizar em malha fechada

qualquer tipo de sistema linear com atraso (estável, integrador e instável), desde que o modelo rápido sem os atrasos comuns por linha possa ser estabilizado por alguma técnica de controle.

### **1.3 Objetivos**

#### **1.3.1 Objetivo geral**

O objetivo geral da pesquisa de doutorado é explorar de forma teórico-experimental técnicas de controle para uma classe de problemas tipificada em sistemas de refrigeração e mais especificamente em ensaios de desempenho de compressores de refrigeração. Os resultados são estruturados, sempre que possível, de forma bastante genérica, a fim de gerar resultados de interesse para uma parcela significativa da comunidade científica.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

Como forma de associar o objetivo geral às atividades operacionais foram elencados objetivos específicos para o trabalho. Esses objetivos são:

- levantar na bibliografia informações relevantes sobre o controle de sistemas monovariáveis e multivariáveis com atraso de transporte;
- desenvolver técnicas que permitam a realização do cálculo do sinal de controle de forma mais rápida em MPC;
- formalizar uma estratégia DTC multivariável que possa ser satisfatoriamente aplicada a sistemas com comportamentos estáveis, integradores e instáveis;
- analisar experimentalmente na bancada de ensaios as técnicas de controle propostas.

### **1.4 Estrutura do trabalho**

O capítulo 2 apresenta os principais resultados da literatura para controle de sistemas com atraso de transporte. O capítulo é dividido em duas seções, sendo a primeira dedicada a analisar as estratégias DTC e a segunda a analisar as estratégias MPC. Na parte de DTC é apresentado o preditor de Smith, são discutidas algumas das modificações da estrutura original para tratar de problemas integradores e instáveis e ao final são discutidas as propostas de generalização para o caso multivariável apresentadas na literatura. Na parte de MPC são formalizados os problemas de controle com base em

três estratégias de modelagem do comportamento da planta: abordagem não paramétrica com base na resposta ao degrau, abordagem por função de transferência e abordagem por variáveis de estado. Em todos os casos a apresentação é realizada tanto para o caso monovariável quanto multivariável.

O capítulo 3 apresenta os resultados obtidos neste trabalho para acelerar a determinação da ação de controle em MPC para sistemas com atraso de transporte. Inicialmente apresentam-se de forma sistemática as principais limitações da técnica MPC com modelagem no espaço de estados para sistemas com atraso e posteriormente formaliza-se uma nova representação do problema que contorna tais limitações. Adicionalmente, algumas propostas de melhorias são apresentadas para os métodos tradicionais para lidar com sistemas com atraso. Os ganhos obtidos com as melhorias propostas e com o método inédito formalizado neste trabalho são validados através de estudos de caso, apresentados ao final do capítulo.

O capítulo 4 formaliza o desenvolvimento de um DTC multivariável capaz de tratar qualquer tipo de processo linear com atraso de transporte. Esse capítulo apresenta o procedimento de ajuste do controlador e prova que a estrutura completa é internamente estável. Além disso, há uma indicação de como deve ser realizada a análise de robustez e é feita uma discussão sobre o compromisso existente entre robustez e desempenho dinâmico. O capítulo é concluído com três estudos de caso que ilustram aspectos importantes da sintonia do controlador proposto e um estudo de caso experimental empregando a bancada de avaliação de desempenho de compressores de refrigeração.

O capítulo 5 apresenta as considerações finais e conclusões obtidas com o trabalho. Como ao final de cada um dos capítulos são apresentadas as principais conclusões específicas referentes a eles, o capítulo 5 se reserva a concluir sob um ponto de vista mais global. Adicionalmente, são listadas propostas para trabalhos futuros, com o intuito de complementar ou aprimorar desenvolvimentos realizados neste trabalho de doutorado.

Ao final do trabalho, são apresentados três apêndices. O primeiro apresenta os principais desenvolvimentos realizados para a formalização da estratégia anti-*windup* unificada para DTC, capaz de tratar sistemas estáveis, integradores e instáveis. A técnica é comparada com propostas anteriores da literatura, quando disponíveis, através de estudos de caso de simulação. Adicionalmente, um estudo de caso empregando a bancada de avaliação de desempenho de compressores é apresentado. O apêndice B apresenta uma descrição do ensaio de desempenho de compressores e das bancadas típicas para realização de tal ensaio. Para facilitar o entendimento, são também apresentados os conceitos fundamentais de termodinâmica e de refrigeração. O apêndice C descreve as principais malhas de controle da bancada, bem como os modelos dinâmicos identificados para cada uma das variáveis.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

O controle em malha fechada de um sistema tem por objetivo fazer com que o mesmo atinja certas metas. Geralmente essas metas estão relacionadas à melhoria do desempenho do sistema tanto em regime transitório (seguimento de certa referência em um tempo compatível com a aplicação) quanto em regime permanente (rejeição de perturbações e minimização do erro com relação à referência) [20].

O emprego de técnicas clássicas de projeto de controladores geralmente não atinge um bom desempenho em plantas com atraso de transporte dominante<sup>1</sup> [1]. Tais plantas são difíceis de controlar com emprego de controladores tradicionais principalmente devido a dois fatores: o efeito da perturbação não é sentido até que um tempo igual ao atraso de transporte tenha se passado e o efeito da ação de controle demora também um tempo igual ao atraso de transporte até poder ser percebido na variável controlada. Como o controlador tenta corrigir os efeitos de uma ação que ocorreu há certo tempo, seu ajuste tem que ser bastante conservador para se garantir a estabilidade do sistema e isso acaba se refletindo diretamente na velocidade de resposta do sistema em malha fechada [21].

Quando o processo apresenta um atraso de transporte considerável<sup>2</sup>, o desempenho da resposta em malha fechada pode ser melhorado através do emprego de uma estrutura de compensação do atraso.

A compensação do atraso de transporte geralmente é realizada com base em um modelo do processo que se deseja controlar. Existem, entretanto, duas grandes linhas de abordagem do problema: compensador de atraso de transporte (DTC) e controle preditivo baseado em modelo (MPC). Os DTC são controladores clássicos que permitem a compensação do atraso de transporte através da inserção explícita do modelo do processo na lei de controle. Os MPC, por outro lado, são controladores que via de regra não apresentam

---

<sup>1</sup>Plantas com atraso dominante são aquelas que apresentam atraso de transporte maior que metade do valor da constante de tempo equivalente [1].

<sup>2</sup>Diz-se que o atraso de transporte é considerável se seu efeito é percebido na dinâmica desejada de malha fechada. Não existe na literatura uma definição precisa de qual deve ser a relação entre o atraso de transporte e o tempo de acomodação de malha fechada para que o atraso seja considerável, porém quanto maior for essa relação maior será a influência do atraso na resposta do sistema. Este trabalho considera que o atraso de transporte é significativo quando seu valor é igual ou superior a um quinto da constante de tempo desejada para a resposta em malha fechada. Esta definição não deve ser confundida com a de plantas com atraso dominante, que analisa o comportamento em malha aberta da planta.

uma representação no domínio da frequência, visto que a ação de controle é calculada a cada iteração com auxílio de um algoritmo de otimização em linha. Ambos os tipos de controlador para compensação de atraso vêm sendo bastante aplicados em diversos ramos da engenharia [10, 22, 23, 24].

Vale ressaltar que existem técnicas de ajuste de controladores clássicos, como é o caso do controlador proporcional-integral-derivativo (PID), para sistemas com atraso de transporte dominante e que o emprego de controladores clássicos na indústria para processos com atraso é muito frequente [1]. Como mostrado em Flesch e Normey-Rico [21], quando se tem um bom modelo do processo as técnicas de compensação de atraso são capazes de melhorar significativamente a resposta do sistema em malha fechada quando comparadas com controladores clássicos. Para uma estimativa perfeita da planta, essa diferença é tão mais significativa quanto mais dominante é o atraso de transporte. Todavia, quando existem erros de modelagem elevados, os controladores baseados no modelo da planta necessitam ser ajustados de forma mais robusta, o que acaba fazendo com que o desempenho desses controladores não seja melhor que o apresentado por técnicas clássicas de controle.

Inicialmente, na seção 2.1, é apresentada uma formalização das formas de representação dos modelos empregados para projeto dos controladores. Posteriormente, são apresentados os principais desenvolvimentos contidos na literatura sobre as duas frentes que tratam do controle de sistemas com atraso de transporte: DTC e MPC. Alguns dos problemas que ainda não se encontram bem resolvidos na literatura são apresentados no decorrer do capítulo e foram esses problemas que serviram de base para os desenvolvimentos do trabalho de doutorado.

## **2.1 Formas de representação dos modelos de sistemas dinâmicos**

Este capítulo apresenta desenvolvimentos tanto para o caso monovariável quanto para o caso multivariável. No caso monovariável as formas mais usuais de representação de sistemas dinâmicos são por função de transferência e por variáveis de estado. No caso multivariável empregam-se matriz de transferência e também variáveis de estado.

### **2.1.1 Sistemas monovariáveis**

Os problemas de controle nos quais existe apenas uma variável manipulada e uma variável controlada são chamados uma entrada e uma saída (SISO, do inglês *single input and single output*) ou simplesmente monovariáveis. Uma das formas mais comuns de representação do comportamento dinâmico de sistemas lineares, invariantes no tempo com atraso é através de funções de transferência. Nesse caso é comum escrever a função de transfe-

rência da planta ( $P(s)$ ) como a composição da dinâmica livre do atraso ( $G(s)$ ) com a parte que representa o atraso ( $e^{-Ls}$ , onde  $L$  é o valor do atraso em unidades de tempo), como

$$P(s) = G(s)e^{-Ls}.$$

No caso discreto ou amostrado, emprega-se a variável complexa  $z$  e a dinâmica completa da planta ( $P(z)$ ) pode ser escrita como

$$P(z) = G(z)z^{-d},$$

onde  $G(z)$  representa a dinâmica livre do atraso e  $z^{-d}$  representa o atraso ( $d$  é o valor do atraso discreto, expresso como um múltiplo do período de amostragem).

Outra forma bastante comum de representação é através do emprego de variáveis de estado. Este trabalho empregará apenas a representação discreta por variáveis de estado, que transforma uma equação a diferenças que rege o comportamento do sistema em um sistema de equações a diferenças de primeira ordem. No caso monovariável, esse sistema pode ser escrito como

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) = \mathbf{c}'\mathbf{x}(k) + du(k) \end{cases},$$

onde  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u(k)$  é a entrada do sistema,  $y(k)$  é a saída do sistema,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de transição de estados,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de entrada,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de saída e  $d$  é o termo de transferência direta.

### 2.1.2 Sistemas multivariáveis

Os problemas de controle que envolvem mais de uma variável manipulada e mais de uma variável controlada são chamados múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *multiple input and multiple output*) ou simplesmente multivariáveis. Neste caso, sem perda de generalidade, será adotada uma representação de matriz de transferência para o processo [25], onde  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor das saídas,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor das entradas de controle e a matriz  $\mathbf{P}(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de transferência que relaciona cada uma

das entradas com cada uma das saídas, escrita como

$$\mathbf{P}(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z)z^{-d_{11}} & \cdots & G_{1n}(z)z^{-d_{1n}} \\ G_{21}(z)z^{-d_{21}} & \cdots & G_{2n}(z)z^{-d_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(z)z^{-d_{n1}} & \cdots & G_{nn}(z)z^{-d_{nn}} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Nesse modelo,  $G_{ij}(z)z^{-d_{ij}}$  é a função de transferência que relaciona a  $j$ -ésima entrada com a  $i$ -ésima saída, onde  $G_{ij}(z)$  é uma função de transferência sem atraso e  $d_{ij}$  é o atraso de transporte discreto.

Uma representação alternativa pode ser realizada empregando variáveis de estado. Com uma transformação adequada, o conjunto de equações a diferenças que regem o comportamento do sistema discreto pode ser escrito como um sistema de equações a diferenças de primeira ordem. Esse sistema pode ser escrito na forma matricial como na equação (2.2), onde  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas do sistema,  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de saídas do sistema,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de transição de estados,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz de saída e  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é a matriz de transferência direta, assim como ocorre no caso SISO.

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (2.2)$$

Definições essenciais referentes a sistemas multivariáveis, tais como polos, zeros, controlabilidade, observabilidade e matriz de ganho relativo não serão tratadas neste documento. Caso o leitor não esteja familiarizado com tais conceitos, recomenda-se a leitura da referência [25].

## 2.2 Compensadores de atraso de transporte

Um compensador de atraso de transporte (DTC) é uma estrutura de controle que tipicamente permite melhorar o comportamento em malha fechada de um sistema com atraso de transporte quando comparado ao resultado obtido com o emprego de controladores clássicos, como o PID. Essa melhoria é devida à existência de um modelo do comportamento da planta no controlador, o que faz com que a ação de controle leve em consideração a informação do atraso em seu cômputo [1].

### 2.2.1 Preditor de Smith

O primeiro sistema de controle a realizar compensação de atraso foi proposto em 1957 e é denominado preditor de Smith (PS) [4]. Apesar de

antiga, essa estrutura ainda é uma das técnicas DTC mais empregadas na indústria [1]. Essa estrutura de controle utiliza um modelo sem atraso da planta ( $G_n(s)$ ) para prever o comportamento esperado do sistema caso não existisse atraso de transporte ( $e^{-L_n s}$ ). Com isso, consegue-se antecipar o provável comportamento que o sistema ( $P(s)$ ) apresentará em um tempo igual ao atraso de transporte [26]. Com base nessa previsão, o controlador ( $C(s)$ ) pode ser projetado levando em consideração a dinâmica do processo como se não existisse atraso. O comportamento ideal de um DTC é atingido para o caso de modelagem perfeita da planta ( $P_n(s) = G_n(s)e^{-L_n s} = P(s)$ ) e no qual não existe qualquer tipo de perturbação.

Todavia, é praticamente impossível a determinação de um modelo sem qualquer erro. Além disso, na prática é comum a existência de algum tipo de perturbação. Para tratar desses problemas, o PS soma a seu sinal de controle uma parcela decorrente do erro de estimação da planta. Na figura 1 é apresentada uma representação da estrutura do PS, onde  $u(t)$  é o sinal de controle,  $y(t)$  é a variável de processo,  $q(t)$  é uma perturbação de carga e  $r(t)$  é o sinal de referência.

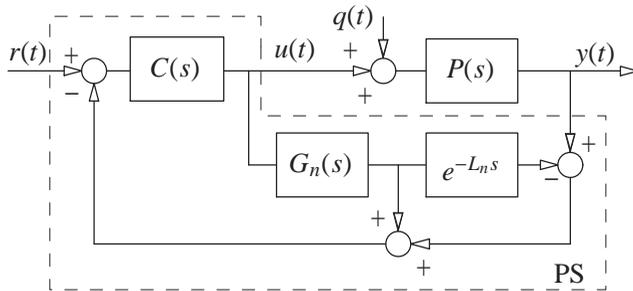


Figura 1: Preditor de Smith

A estrutura do PS pode ser dividida em duas partes: o controlador primário  $C(s)$  e o preditor. O controlador primário tipicamente é um controlador PID, mas também pode assumir a estrutura de um controlador de ordem mais alta [1]. O preditor é formado por um modelo da planta sem atraso de transporte ( $G_n(s)$ ) e por um modelo do atraso de transporte ( $e^{-L_n s}$ ).

Caso o atraso de transporte seja bem conhecido, o emprego do PS levará o sistema em malha fechada a apresentar desempenho dinâmico melhor que aquele que seria obtido com o emprego de um controlador sem estrutura de preditor, como um PID, por exemplo. Mesmo que o atraso de transporte seja pequeno se comparado com a dinâmica sem atraso do processo, melhores

resultados são obtidos com emprego do PS. A estrutura de preditor garante uma melhor margem de fase ao sistema em malha fechada, o que permite acelerar a resposta de seguimento de referência tanto quanto seria possível se o sistema não tivesse atraso. Para o caso de um controlador PID, mesmo que o atraso de transporte seja pequeno quando comparado com as demais dinâmicas, chega-se a um ponto no qual a resposta de seguimento de referência não pode mais ser acelerada, visto que a dinâmica do atraso é excitada e o sistema torna-se instável [21].

Para o caso ideal ( $P(s) = P_n(s)$ ), a equação característica é dada pela equação (2.3), na qual percebe-se que o atraso é compensado.

$$1 + C(s)G_n(s) = 0 \quad (2.3)$$

Ainda para o caso ideal, as funções de transferência em malha fechada entre referência e saída e entre perturbação de carga e saída são dadas pelas equações (2.4) e (2.5), respectivamente, onde  $\mathcal{L}$  representa a transformada de Laplace.

$$H_{yr}(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{y(t)}{r(t)} \right\} = \frac{C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.4)$$

$$H_{yq}(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{y(t)}{q(t)} \right\} = P_n(s) \left[ \frac{1 + C(s)(G_n(s) - P_n(s))}{1 + C(s)G_n(s)} \right] \quad (2.5)$$

Da forma como foi proposto, o PS é uma estrutura de controle com um grau de liberdade. Assim, como os parâmetros de ajuste estão apenas no controlador primário  $C(s)$ , não é possível impor simultaneamente as dinâmicas de  $H_{yr}(s)$  e  $H_{yq}(s)$ . Para contornar esse problema, pode-se empregar um filtro de referência com ganho unitário para desacoplar as dinâmicas de seguimento de referência e rejeição de perturbação. Para esse caso, ilustrado sob a forma de diagrama de blocos na figura 2, a função de transferência entre perturbação e saída permanece inalterada e a função de transferência entre referência e saída passa a ser dada pela equação (2.6).

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{y(t)}{r(t)} \right\} = \frac{F(s)C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)} \quad (2.6)$$

Outra observação relevante sobre o PS é que os polos de  $P(s)$  não podem ser eliminados da função de transferência de rejeição de perturbação, exceto para o caso de um polo em  $s = 0$  (este caso especial será tratado em detalhes nos parágrafos que seguem). Duas importantes consequências desse fato são: a rejeição de perturbação não pode ser mais rápida que a dinâmica de malha aberta da planta e o PS não pode ser utilizado com plantas instáveis

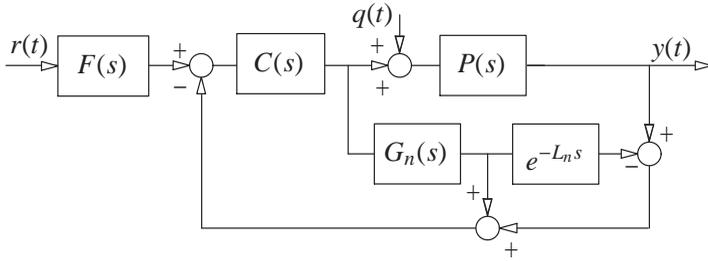


Figura 2: Preditor de Smith com filtro de referência

em malha aberta [1].

Para o caso especial de plantas integradoras, como o polo na origem é cancelado na função de transferência da rejeição de perturbação, perturbações de carga constantes não instabilizam o sistema em malha fechada. Todavia, perturbações de carga constantes resultam em um erro estático na saída [27]. Considerando-se que  $G_n(s)$  possui um polo na origem e que  $C(s)$  estabiliza o sistema e o faz seguir referência, a função de transferência em malha fechada tem ganho estático unitário e seu denominador tem raízes com parte real negativa. Denotando o numerador da função de transferência da referência para a saída por  $N(s)$  e o denominador por  $D(s)$ , conforme a equação (2.4), a função de transferência da perturbação para a saída pode ser escrita como na equação (2.7).

$$H_{yq}(s) = P_n(s) \left[ 1 - \frac{N(s)}{D(s)} \right] \quad (2.7)$$

A partir da equação (2.7) verifica-se que a raiz em  $s = 0$  no denominador de  $P_n(s)$  é cancelada, pois

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{N(s)}{D(s)} \right] = 0$$

e esse termo multiplica o termo  $P_n(s)$ . Restam, pois, as dinâmicas dos demais polos de  $P_n(s)$ .

A demonstração de que uma perturbação do tipo degrau não é rejeitada em regime permanente é equivalente à demonstração de que o controle equivalente à estrutura do PS não contém um integrador, ou seja, o ganho estático de  $C_{eq}(s)$  não é infinito. O controlador equivalente é aquele que colocado à frente da planta apresentaria o mesmo comportamento da estrutura apresentada na figura 1. Esse conceito é ilustrado na figura 3.

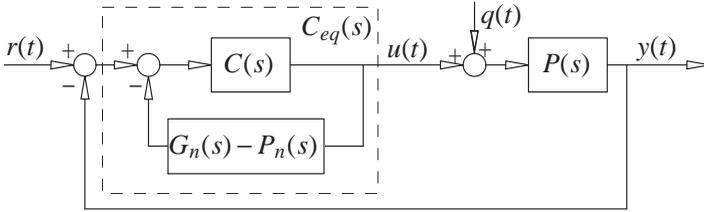


Figura 3: Preditor de Smith representado na forma de um controlador equivalente

A função de transferência do controlador equivalente é apresentada na equação (2.8).

$$C_{eq}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)[G_n(s) - P_n(s)]} \quad (2.8)$$

O ganho estático do controlador equivalente pode ser obtido pelo limite com  $s$  tendendo a zero de  $C_{eq}(s)$ . Reescrevendo a parcela não dependente do atraso da planta como  $G_n(s) = \frac{G_G(s)}{s}$ , sendo  $G_G(s)$  a parcela não integradora da planta e sendo  $K_G$  o ganho estático de  $G_G(s)$  ( $K_G = \lim_{s \rightarrow 0} G_G(s)$ ), pode-se afirmar que  $\lim_{s \rightarrow 0} G_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_G}{s}$ . Assumindo inicialmente que  $C(s)$  é estável e não contém um integrador<sup>3</sup>, seu ganho estático pode ser escrito como  $K_C$  e o limite do controle equivalente pode ser escrito como apresentado na equação (2.9).

$$\lim_{s \rightarrow 0} C_{eq}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_C}{1 + K_C G_G(s) \left[ \frac{1 - e^{-L_n s}}{s} \right]} = \frac{K_C}{1 + K_C K_G L_n} \quad (2.9)$$

Assumindo o outro caso possível, ou seja, um controlador primário com ação integral, o ganho estático do controlador equivalente passa a ser escrito como apresentado na equação (2.10).

$$\lim_{s \rightarrow 0} C_{eq}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{K_C}{s}}{1 + \frac{K_C}{s} G_G(s) \left[ \frac{1 - e^{-L_n s}}{s} \right]} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_C}{s + K_C G_G(s) L_n} = \frac{1}{K_G L_n} \quad (2.10)$$

Em ambos os casos verifica-se que o ganho estático do controlador equivalente é um valor finito. Logo, não haverá rejeição de perturbação de carga do tipo degrau. Como na quase totalidade das aplicações reais há algum tipo de perturbação que pode ser modelada na forma de um degrau entrando

<sup>3</sup>Como a planta é integradora não é necessário usar ação integral em  $C(s)$  para que o sistema em malha fechada possa seguir referências do tipo degrau.

antes da ação integral do processo, a aplicação do PS a plantas integradoras não é recomendável.

Como forma de contornar os problemas apresentados pelo PS, surgiram diversas modificações da estrutura original. Inicialmente essas modificações foram propostas para plantas integradoras, porém Normey-Rico e Camacho [28] propuseram uma estrutura unificada, conhecida como preditor de Smith filtrado (PSF), que permite tratar tanto casos estáveis quanto integradores e instáveis, além de permitir o aumento da robustez do sistema de controle a erros de modelagem.

### 2.2.2 Modificações do preditor de Smith para plantas integradoras

Diversas soluções foram propostas na literatura como forma de contornar o problema da aplicação do PS tradicional a plantas integradoras. Watanabe e Ito [27] propuseram um PS modificado no qual o estado do integrador não é observável na saída do modelo, mas esse comportamento somente pode ser atingido se o valor do atraso de transporte for perfeitamente conhecido. Åström, Hang e Lim [29] apresentaram um PS modificado para plantas integradoras que contorna esse problema e é capaz de desacoplar as respostas de rejeição de perturbação e seguimento de referência. Um DTC simples para plantas integradoras baseado na estimação da perturbação foi proposto em [30] e posteriormente estendido para considerar outras dinâmicas além do integrador por Mataušek e Micić [31]. Procedimentos para ajuste robusto dessa estrutura e resultados experimentais foram apresentados por Ingimundarson e Hägglund [32]. Versões modificadas dessa estrutura foram apresentadas em diversos trabalhos, nos quais algoritmos mais complexos são analisados [1, 33, 34, 35].

Um dos esquemas de controle que apresenta a melhor relação entre desempenho e simplicidade de ajuste é o de Mataušek e Micić [31]. O esquema de controle pode ser visto na figura 4, onde  $P_n(s)$  é o modelo do processo e  $G_n(s)$  é o modelo livre de atraso de transporte. A ideia desse esquema é estimar o valor da amplitude de um degrau de perturbação em  $q(t)$  através da comparação entre as saídas do modelo e do processo. Assim, utilizando  $M(s)$ , o valor estimado é introduzido no laço de controle para eliminar o efeito da perturbação. Como o parâmetro  $M(s)$  age como um controlador de realimentação, ele deve ser ajustado para garantir estabilidade do sistema em malha fechada e também para garantir respostas adequadas para seguimento de referência e rejeição de perturbação. Além disso, o controlador primário  $C(s)$  é empregado para definir a resposta de seguimento de referência.

A solução mais simples para esse problema é empregar o modelo  $P_n(s) = \frac{K_v e^{-Lns}}{s}$  e um ganho em cada controlador, como exposto em [30].

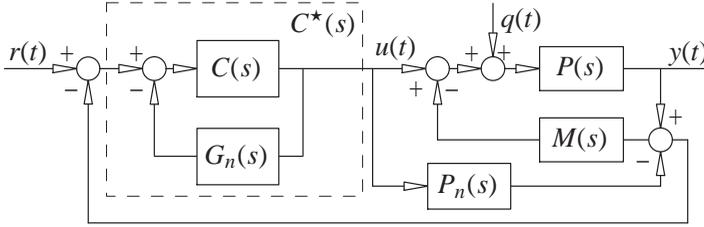


Figura 4: Preditor de Smith modificado proposto por Mataušek e Micić [31]

Assim, tem-se  $C(s) = K_c$  e  $M(s) = K_0$ . Nesse caso, considerando modelagem perfeita ( $P(s) = P_n(s)$ ), a função de transferência em malha fechada é apresentada na equação (2.11).

$$H_{yr}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{y(t)}{r(t)}\right\} = \frac{e^{-L_n s}}{1 + T_r s}, \quad T_r = \frac{1}{K_c K_v} \quad (2.11)$$

Assim, o parâmetro  $T_r$  pode ser usado para definir a velocidade da resposta de seguimento de referência e o ganho do controlador é  $K_c = \frac{1}{T_r K_v}$ . Para completar o ajuste do controlador,  $K_0$  é calculado impondo uma margem de fase de aproximadamente  $\phi_m = 60^\circ$  à malha interna, cuja equação característica é apresentada na equação (2.12), para o caso de modelagem ideal.

$$1 + M(s)P_n(s) = 1 + \frac{K_v K_0}{s} e^{-L_n s} = 1 + W(s) = 0 \quad (2.12)$$

Expressões para módulo e fase de  $W(j\omega)$  são apresentadas nas equações (2.13) e (2.14), respectivamente. A margem de fase imposta à malha interna é calculada empregando-se a frequência para a qual o módulo é unitário ( $\omega_0 = K_v K_0$ ) na equação (2.15).

$$|W(j\omega)| = \left| \frac{K_v K_0}{j\omega} e^{-L_n j\omega} \right| = \frac{K_v K_0}{\omega} \quad \forall \omega > 0 \quad (2.13)$$

$$\arg W(j\omega) = \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) + \arg(e^{-j\omega L_n}) = -\frac{\pi}{2} - L_n \omega \quad \forall \omega > 0 \quad (2.14)$$

$$\phi_m = \pi + \arg W(j\omega_0) \quad (2.15)$$

A proposta de Mataušek e Micić [30] é empregar uma margem de fase

dada por  $\phi_m = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = 61,35^\circ$  que simplifica os cálculos e apresenta bom comportamento tanto para seguimento de referência quanto para rejeição de perturbação. Empregando a margem de fase anteriormente apresentada, o valor de  $K_0$  é obtido com o cômputo da equação (2.16).

$$K_0 = \frac{1}{2K_v L_n} \quad (2.16)$$

Com esses parâmetros, no caso nominal, a função de transferência que relaciona a saída e a perturbação de carga é dada pela equação (2.17), que é, como esperado, uma função de transferência estável com ganho estático nulo. Detalhes sobre a dedução da equação (2.17) e sobre a análise de robustez dessa estrutura de controle podem ser obtidos em [11].

$$H_{yq}(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{y(t)}{q(t)} \right\} = \left[ 1 - \frac{e^{-L_n s}}{1 + sT_r} \right] \left[ \frac{K_v e^{-L_n s}}{s + K_0 K_v e^{-L_n s}} \right] \quad (2.17)$$

Pode-se notar que no caso nominal (sem erros de modelagem e sem perturbações), duas propriedades fundamentais dos DTC são verificadas para essa estrutura: (i) o atraso de transporte é eliminado do laço principal de realimentação, (ii) a predição da saída do sistema feita no instante  $t$  coincide com a saída do sistema no instante  $t + L$ .

### 2.2.3 Modificações do preditor de Smith para plantas instáveis

Como já discutido na seção 2.2.1, o PS tradicional não pode ser empregado para controlar sistemas instáveis em malha aberta porque torna-se internamente instável. Uma análise da equação (2.4) permite verificar que em princípio o seguimento de referência pode ser obtido mesmo no caso instável, desde que o controlador primário estabilize o modelo rápido da planta. Entretanto, a função de transferência da perturbação para a saída sempre apresenta polos instáveis, como pode ser verificado com uma análise da equação (2.5).

Como forma de contornar esses problemas, surgiram algumas propostas de modificação da estrutura original do PS para tratar o caso de plantas instáveis. A grande maioria dessas propostas emprega um modelo rápido modificado como forma de eliminar os polos instáveis da planta da função de transferência da perturbação [3].

Para um processo com um número qualquer de polos, sendo apenas um deles instável (localizado no semiplano direito), dado por

$$P_n(s) = \frac{G_e(s)e^{-L_n s}}{T_q s - 1} \quad T_q > 0$$

onde  $G_e(s)$  é uma função de transferência com polos estáveis e sem atrasos, então um modelo rápido modificado

$$G_m(s) = G_e(s) \frac{T_m s + 1}{T_q s - 1}$$

é capaz de eliminar o polo instável da planta da função de transferência da perturbação para a saída [1]. A modificação do modelo rápido implica em uma nova função de transferência  $H_{yq}(s)$  dada por

$$H_{yq}(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{y(t)}{q(t)} \right\} = P_n(s) \left[ \frac{1 + C(s)[G_m(s) - P_n(s)]}{1 + C(s)G_m(s)} \right].$$

Assim, basta que  $G_m(s) - P_n(s)$  não tenha um polo em  $s = 1/T_q$  e que  $C(s)$  estabilize  $G_m(s)$  para que o sistema em malha fechada seja internamente estável. Como o elemento de realimentação do controlador primário (ver figura 3), dado por  $G_m(s) - P_n(s)$  neste caso e expressor por

$$G_m(s) - P_n(s) = G_e(s) \frac{1}{T_q s - 1} [T_m s + 1 - e^{-L_n s}]$$

tem que ser estável, o cancelamento da raiz em  $s = 1/T_q$  é obtido se  $[T_m s + 1 - e^{-L_n s}]|_{s=1/T_q} = 0$ , ou seja,

$$T_m = -T_q(1 - e^{-L_n/T_q}).$$

Note que nesse caso o modelo rápido  $G_m(s)$  tem um polo e um zero no semiplano direito, o que faz com que o projeto do controlador primário  $C(s)$  seja mais complexo do que seria para estabilizar o modelo rápido tradicional  $G_n(s)$  [1].

Existem diversas outras estruturas mais complexas propostas na literatura que buscam tratar de casos mais gerais de instabilidade [36, 37, 38, 39, 40]. Todavia, tais estruturas geralmente envolvem o ajuste de três ou mais controladores e isso faz com que elas acabem perdendo em simplicidade para o caso mais geral do PSF, apresentado na seção 2.2.4. Dessa forma, tais estruturas não serão detalhadas neste documento.

#### 2.2.4 Preditor de Smith filtrado

Normey-Rico, Bordons e Camacho [41] propuseram a inserção de um filtro adicional na estrutura do PS para aumentar o índice de robustez do sistema em malha fechada, dando origem ao PSF. Apenas a versão discreta do PSF será tratada neste documento, visto que sua implementação é muito mais

fácil que a do caso contínuo, já que o atraso de transporte no domínio discreto apresenta representação polinomial.

O filtro proposto atua sobre o erro entre a predição e a saída do processo ( $e_p(k)$ ), como apresentado na figura 5, onde  $P_n(z) = G_n(z)z^{-d_n}$  é o processo nominal discretizado com um sustentador de ordem zero,  $G_n(z)$  é o modelo rápido (modelo do processo sem os atrasos de transporte),  $F(z)$  é um filtro de referência tradicional que permite melhorar a resposta de seguimento de referência,  $F_r(z)$  é o filtro do preditor empregado para aprimorar as propriedades do PS,  $C(z)$  é o controlador primário, ZOH é o sustentador de ordem zero e  $P(s)$  é a planta. Todos os sinais discretos são representados como funções da variável  $k$ , indicando um múltiplo do período de amostragem  $T_s$ . Na figura,  $r(k)$  é a referência,  $y(k)$  é a saída amostrada do processo,  $\hat{y}(k)$  é a saída predita pelo modelo,  $e_p(k)$  é o erro de predição,  $y_p(k)$  é a predição da saída  $d_n$  instantes de tempo à frente somada com o erro de predição filtrado,  $q(t)$  é uma perturbação de carga e  $n(t)$  é uma perturbação na saída (pode representar também um ruído de medição). Além disso, para análise e projeto pode-se mostrar que existe uma representação equivalente discreta da planta contínua mais o sustentador de ordem zero e o amostrador dada por  $P(z) = G(z)z^{-d}$  para perturbações nulas. A partir deste ponto, será considerado sem perda de generalidade que o sinal de perturbação pode ser aproximado por um sinal discreto  $q(k)$  e que a perturbação na saída pode ser aproximada por um sinal discreto  $n(k)$ , que são  $q(t)$  e  $n(t)$ , respectivamente, amostrados a uma frequência de  $1/T_s$ . Assim, toda a análise será realizada no domínio discreto.

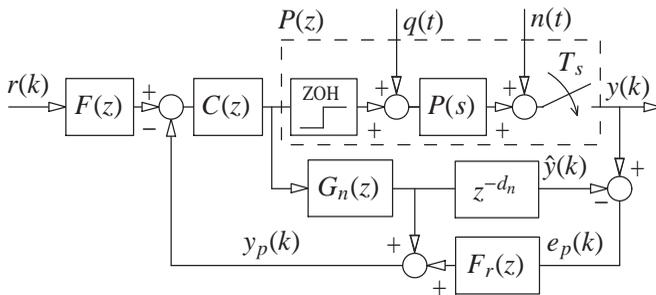


Figura 5: Estrutura do preditor de Smith filtrado

Em sua proposta original, o filtro  $F_r(z)$  era ajustado para atenuar oscilações na saída da planta nas frequências de interesse, porém a mesma estrutura foi aproveitada para propor uma estratégia unificada para projeto de

DTC que seja possível de ser empregada para controle de sistemas estáveis e instáveis [28]. Além de ser uma estrutura DTC geral, o PSF pode ser ajustado para melhorar a dinâmica de rejeição de perturbação do processo para que ela ocorra mais rápido que a dinâmica de malha aberta, além de continuar sendo possível o aumento da robustez do sistema em malha fechada.

A estrutura da figura 5 serve apenas para análise e não pode ser utilizada para implementação em casos instáveis, visto que ocorre instabilidade interna. Nesse caso deve ser empregado para implementação o esquema apresentado na figura 6, onde

$$S(z) = G_n(z) \left[ 1 - z^{-d_n} F_r(z) \right] \quad (2.18)$$

é estável [28].

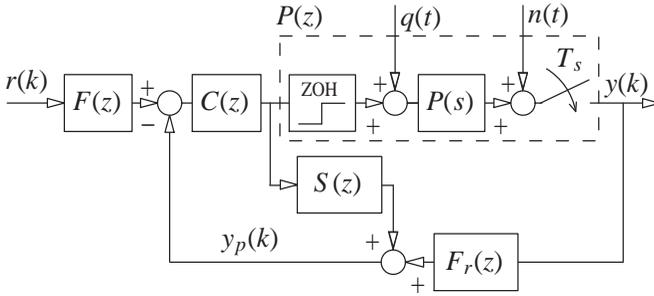


Figura 6: Estrutura do PSF para implementação

No caso em que a modelagem da planta é perfeita, ou seja  $P_n(z) = P(z)$ , as funções de transferência de malha fechada são dadas pela equação (2.19) (referência), equação (2.20) (perturbação de carga) e equação (2.21) (perturbação na saída e ruído de medição), onde  $\mathcal{Z}$  representa a transformada  $z$ .

$$H_{yr}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{y(k)}{r(k)} \right\} = \frac{F(z)C(z)P_n(z)}{1 + C(z)G_n(z)} \quad (2.19)$$

$$H_{yq}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{y(k)}{q(k)} \right\} = P_n(z) \left[ 1 - \frac{C(z)P_n(z)F_r(z)}{1 + C(z)G_n(z)} \right] \quad (2.20)$$

$$H_{yn}(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{y(k)}{n(k)} \right\} = 1 - \frac{C(z)P_n(z)F_r(z)}{1 + C(z)G_n(z)} \quad (2.21)$$

## Análise do filtro do preditor

O filtro do preditor exerce três funções importantes: (i) ajustar as respostas de rejeição de perturbação e atenuação de ruído, (ii) aumentar a robustez a erros de modelagem e (iii) garantir a estabilidade interna da estrutura de controle. Cada uma dessas funções é analisada brevemente nos parágrafos que seguem.

**Rejeição de perturbação** Pode-se notar na equação (2.19) que  $F_r(z)$  não altera a resposta para seguimento de referência no caso nominal. Todavia, o filtro  $F_r(z)$  pode ser empregado para alterar as respostas de rejeição de perturbação (veja as equações (2.20) e (2.21)). Caso existam polos lentos, instáveis ou integradores em  $P_n(z)$ , não é interessante que eles apareçam nas respostas de rejeição de perturbação. Para evitar esse problema, pode-se calcular o termo  $(1 - z^{-d_n} F_r(z))$  para evitar que esses polos indesejados do modelo da planta apareçam em  $S(z)$ . Assim, o controle equivalente deixa de alocar zeros para cancelar as dinâmicas lentas da planta<sup>4</sup>, o que faz com que seja possível acelerar a rejeição de perturbação. Por outro lado, um filtro  $F_r(z)$  calculado dessa forma tende a reduzir a robustez do sistema, como será analisado na sequência.

**Análise de robustez** As funções de transferência foram obtidas com modelagem perfeita da planta. Para analisar a robustez do sistema a erros de modelagem, considera-se uma família de plantas  $P(z)$  todas com igual número de polos instáveis de tal forma que  $P(z) = P_n(z)[1 + \delta P(z)]$ , além de um limite superior para a norma de  $\delta P(e^{j\omega T_s})$  dado por  $\overline{\delta P}(\omega)$  para  $0 \leq \omega < \pi/T_s$  [42]. A equação característica para  $P(z)$  é dada por

$$1 + C(z)G_n(z) + C(z)G_n(z)P_n(z)F_r(z)\delta P(z) = 0.$$

Considerando-se que o sistema nominal é estável em malha fechada, a condição de estabilidade robusta para o PSF é dada pela equação (2.22). Alternativamente, a equação (2.22) pode ser reescrita para considerar explicitamente a influência de  $F_r(z)$  na robustez do sistema, resultando na equação (2.23) para  $0 \leq \omega < \pi/T_s$ . Dessa forma,  $F_r(z)$  pode ser ajustado considerando

---

<sup>4</sup>Note que o controlador equivalente de um PS tradicional é dado por  $C_{eq}(z) = \frac{C(z)}{1 + C(z)G_n(z) + C(z)P_n(z)}$ , que pode ser desmembrado nos numeradores e denominadores de cada termo para verificar que o denominador de  $G_n(z)$  aparece no numerador de  $C_{eq}(z)$ , caracterizando um controle por cancelamento. No caso do PSF, o controle equivalente é dado por  $C_{eq}(z) = \frac{C(z)}{1 + C(z)S(z)}$ , que contém no numerador o denominador de  $S(z)$  e não mais de  $G_n(z)$ .

$\overline{\Omega}(\omega)$  como um limite para a robustez.

$$\overline{\delta P}(\omega) < \left| \frac{1 + C(e^{j\omega T_s})G_n(e^{j\omega T_s})}{C(e^{j\omega T_s})G_n(e^{j\omega T_s})F_r(e^{j\omega T_s})} \right| \quad 0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_s} \quad (2.22)$$

$$\left| F_r(e^{j\omega T_s}) \right| < \left| \frac{1 + C(e^{j\omega T_s})G_n(e^{j\omega T_s})}{C(e^{j\omega T_s})G_n(e^{j\omega T_s})\overline{\delta P}(\omega)} \right| = \overline{\Omega}(\omega) \quad (2.23)$$

**Estabilidade interna** Para ser implementada na prática a estrutura de controle deve ser internamente estável. Como mostrado em [28], para que o PSF seja internamente estável, tanto  $F_r(z)$  quanto  $S(z)$  devem ser estáveis. O filtro  $F_r(z)$  sempre pode ser ajustado de tal forma que seja estável, visto que seus polos são escolhidos livremente. Por outro lado, como  $S(z) = G_n(z)[1 - z^{-d_n}F_r(z)]$ , é fácil de verificar que se  $G_n(z)$  tem polos integradores ou instáveis,  $F_r(z)$  é o único grau de liberdade que se tem para evitar a instabilidade interna. Assim, o termo  $(1 - z^{-d_n}F_r(z))$  sempre deve ser calculado para cancelar os modos instáveis ou integradores do modelo rápido da planta  $G_n(z)$  e  $S(z)$  deve ser implementado sem os polos e zeros cancelados. Nesse caso,  $y_p(k)$  é uma “predição estável” de  $y(k)$  para qualquer processo. O ajuste do filtro  $F_r(z)$  é tratado em mais detalhes na sequência.

### Ajuste do filtro do preditor

Um procedimento completo para ajuste do PSF tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto pode ser obtido em [28]. Esta seção apresenta as ideias principais para ajuste no caso discreto e se limita a apresentar como o filtro  $F_r(z)$  deve ser sintonizado. Os ajustes do controlador primário e do filtro de referência podem ser feitos seguindo métodos tradicionais de projeto de controladores de dois graus de liberdade considerando-se apenas a parcela sem atraso, dada por  $G_n(z)$ . Para detalhes sobre procedimentos tradicionais de ajuste de controladores recomenda-se a leitura de [1, 42, 43].

Para o projeto do filtro  $F_r(z)$  o modelo nominal do processo  $P_n(z)$  pode ser explicitamente escrito em termos do numerador e do denominador, como na equação (2.24), onde as raízes de  $D_n(z)^+$  são os polos indesejados da planta<sup>5</sup>, representados como  $D_n(z)^+ = (z - z_1) \dots (z - z_n)$ . Polos indesejados são todos aqueles que não se deseja que apareçam na resposta de rejeição de perturbação, ou seja, os polos lentos e instáveis. Os polos instáveis devem obrigatoriamente ser listados como indesejados, uma vez que se não forem eliminados de  $S(z)$  não haverá garantia de estabilidade interna. A mesma se-

<sup>5</sup>Apesar de o caso tratado ser discreto, escolheu-se a representação  $D_n(z)^+$  para o polinômio dos polos indesejados por fazer alusão ao semiplano direito (valores positivos) no caso contínuo.

paração em numerador e denominador é feita para o filtro do preditor, que pode ser escrito como  $F_r(z) = \frac{N_r(z)}{D_r(z)}$ . Adicionalmente, é necessário que o ganho estático do filtro seja unitário, ou seja  $F_r(1) = 1$ , para que ele não altere o comportamento do sistema em regime permanente [28].

$$P_n(z) = \frac{N_n(z)}{D_n(z)} z^{-d_n} = \frac{N_n(z)}{D_n(z) - D_n(z)^+} z^{-d_n} \quad (2.24)$$

O denominador  $D_r(z)$  do filtro  $F_r(z)$  pode ser escolhido arbitrariamente, porém deve-se tomar o cuidado de escolher um polinômio com raízes estáveis<sup>6</sup>. A escolha de  $D_r(z)$  deve ser realizada levando-se em consideração a robustez e também a dinâmica desejada para rejeição de perturbação, visto que as raízes de  $D_r(z)$  são também raízes das funções de transferência das perturbações para a saída em malha fechada (equações (2.20) e (2.21)). Do ponto de vista da robustez, entretanto, quanto mais lentas forem as raízes de  $D_r(z)$  mais robusto o sistema tende a se tornar, pois o módulo de  $F_r(e^{j\omega T_s})$  iniciará sua queda em frequências mais baixas (ver equação (2.23)). Normey-Rico e Camacho [28] sugerem que o denominador seja escolhido com a forma  $D_r(z) = (z - \alpha)^{k_n}$ , onde  $\alpha$  varia no intervalo (0,1) e  $k_n \geq 1$  é um número inteiro de tal forma que o filtro  $F_r(z)$  seja próprio. Note que  $k_n$  deve ser pelo menos igual ao número de raízes indesejadas de  $G_n(z)$  que se deseja eliminar de  $S(z)$  e que a escolha de  $k_n$  maior que esse número tende a aumentar a robustez a erros de modelagem e a diminuir a velocidade de resposta a perturbações [44].

Estando o denominador definido, o numerador  $N_r(z)$  deve ser computado de modo a satisfazer a equação (2.25), onde  $z_0 = 1$  e  $p(z)$  é um polinômio desconhecido.

$$\begin{aligned} 1 - z^{-d_n} F_r(z) &= \frac{D_r(z) - z^{-d_n} N_r(z)}{D_r(z)} \\ &= \frac{(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n) p(z)}{D_r(z) z^{d_n}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Esse procedimento garante que  $S(z)$  é estável e dado por

$$S(z) = \frac{N_n(z)}{D_n(z)^-} \frac{p(z)(z - z_0)}{D_r(z)}$$

Assim, como o numerador do filtro é escolhido tendo raízes estáveis, a estrutura de controle é internamente estável [28]. Além disso, é interessante notar que o termo  $(z - z_0) = (z - 1)$  é empregado para garantir que  $F_r(1) = 1$  (sim-

<sup>6</sup>Utiliza-se o termo *raízes estáveis* como um abuso de linguagem para indicar raízes localizadas dentro do círculo de módulo unitário, ou seja, raízes tais que  $|z| < 1$ .

plesmente tome o limite de  $z$  tendendo a 1 na equação (2.25) para verificar essa condição).

Da forma como foi proposto até o momento, o PSF é capaz de seguir referências do tipo degrau e rejeitar perturbações do tipo degrau para qualquer tipo de processo com atraso, desde que o controlador primário  $C(z)$  seja capaz de fazer o mesmo com o modelo rápido do processo  $G_n(z)$ . Caso seja necessário rejeitar perturbações do tipo rampa, o numerador do filtro  $F_r(z)$  deve ser projetado para que  $1 - z^{-d_n} F_r(z)$  tenha uma raiz dupla em  $z = 1$  ao invés de uma raiz simples. Essa condição pode ser verificada a partir da equação (2.20), considerando que  $\frac{C(z)P_n(z)}{1+C(z)G_n(z)}$  tende para 1 em regime permanente (quando  $z \rightarrow 1$ ). O tratamento de ruídos de medição também pode ser realizado com um correto ajuste do filtro  $F_r(z)$  [45].

## 2.2.5 Compensadores de atraso multivariáveis

Como em sistemas multivariáveis com múltiplos atrasos cada relação entre as entradas e as saídas pode apresentar um valor diferente de atraso, o projeto de controladores para essa classe de sistemas é bastante complexo [2]. O emprego de DTC nesse caso pode simplificar bastante o projeto de controladores primários. Na sequência são analisadas duas abordagens apresentadas na literatura para o controle de sistemas com atraso de transporte: a primeira para sistemas estáveis e a segunda para processos com modos instáveis.

O primeiro trabalho publicado com uma extensão do PS para o caso multivariável foi publicado por Alevisakis e Seborg [6] e tratava apenas problemas com todos os atrasos de igual magnitude. Em Ogunnaike e Ray [46], o PS foi estendido para o caso de múltiplos valores de atraso e em Jerome e Ray [2] a estrutura foi generalizada para possuir uma ou mais das propriedades do PS e o desempenho foi aprimorado através da introdução de atrasos adicionais na estrutura do controlador.

Em [47] o PS multivariável é estendido para sistemas estáveis não quadrados com múltiplos atrasos. Em [48] um PS multivariável ótimo desacoplado é analisado, enquanto Sánchez-Peña, Bolea e Puig [49] estenderam a análise de robustez e desempenho do PS clássico para o caso de sistemas incertos com múltiplos atrasos. Técnicas de desacoplamento também foram propostas na literatura como forma de utilizar uma abordagem PS monovariável para cada laço [2, 28, 49, 50, 51]. Em todos os casos, a principal desvantagem dos métodos é que eles empregam o modelo completo da planta para prever a saída sem atraso [1]. Assim, eles não podem ser empregados para controlar sistemas MIMO instáveis com atraso [52]. Em um artigo recente, García e Albertos [7] apresentaram um procedimento de projeto para tratar o caso de plantas MIMO instáveis com múltiplos atrasos com diferentes valores em cada um dos canais. O algoritmo calcula uma predição da saída sem

atraso que permite o uso de um controlador multivariável para estabilizá-la e emprega um laço externo que melhora o desempenho para seguimento de referência e rejeição de perturbação.

Ao longo desta seção serão apresentados e discutidos os principais trabalhos relacionados aos DTC multivariáveis: o trabalho de Jerome e Ray [2], que consiste na generalização do PS para o caso MIMO, e o trabalho de García e Albertos [7], que permite o controle realimentado de processos MIMO instáveis com atraso. Em suas versões originais os trabalhos foram apresentados com formulações de tempo contínuo, porém aqui todo o tratamento será feito para o caso discreto.

### Abordagem de Jerome e Ray (1986)

O trabalho de Ogunnaike e Ray [46] foi o primeiro a tratar do problema de sistemas multivariáveis com atrasos diferentes em cada uma das relações entrada-saída. A proposta do trabalho foi uma estrutura de compensação de atrasos de transporte para permitir que controladores primários fossem projetados para um modelo sem muitos dos efeitos dos atrasos. Todavia, a estrutura de predição era calculada simplesmente removendo-se os atrasos de  $\mathbf{P}(z)$  para formar  $\mathbf{G}(z)$ . Essa abordagem foi aprimorada no trabalho de Jerome e Ray [2] e foi chamada pelos autores de compensador generalizado para múltiplos atrasos (GMDC, do inglês *generalized multidelay compensator*). Neste trabalho, a estrutura é chamada de versão MIMO do PS (MIMO-PS).

A ideia básica consiste em separar da matriz de transferência do processo (equação (2.1)) os atrasos efetivos de cada saída. O atraso efetivo de cada saída  $i$  é  $d_i$ , calculado como o atraso mínimo da  $i$ -ésima linha, ou seja,  $d_i = \min_{j=1,\dots,n}(d_{ij})$ . Assim, definindo-se  $\mathbf{L}(z) = \text{diag}\{z^{-d_1}, \dots, z^{-d_n}\}$  como o atraso multivariável da planta  $\mathbf{P}(z)$  e  $\mathbf{G}(z)$  como o modelo sem os atrasos comuns (também chamado de modelo rápido), obtém-se

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{L}(z)\mathbf{G}(z) \rightarrow \mathbf{G}(z) = \mathbf{L}(z)^{-1}\mathbf{P}(z).$$

Note que  $\mathbf{G}(z)$  ainda pode conter múltiplos atrasos [1, 44].

A estrutura do MIMO-PS é apresentada na figura 7, onde  $\mathbf{G}_n(z)$  é o modelo rápido nominal,  $\mathbf{L}_n(z)$  é o atraso MIMO nominal,  $\mathbf{C}(z)$  é um controlador primário MIMO e  $\mathbf{F}(z)$  é um filtro de referência MIMO. Além disso,  $\mathbf{r}(k)$  é o vetor das referências,  $\mathbf{y}(k)$  é o vetor de saídas,  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  é o vetor de saídas do modelo,  $\mathbf{y}_p(k)$  é o vetor das predições da saída,  $\mathbf{q}(k)$  é o vetor das perturbações de carga e  $\mathbf{n}(k)$  é o vetor das perturbações de saída ou dos ruídos de medição.

Para essa estrutura, no caso nominal, as matrizes de transferência são apresentadas nas equações (2.26) (referência), (2.27) (perturbação de carga)

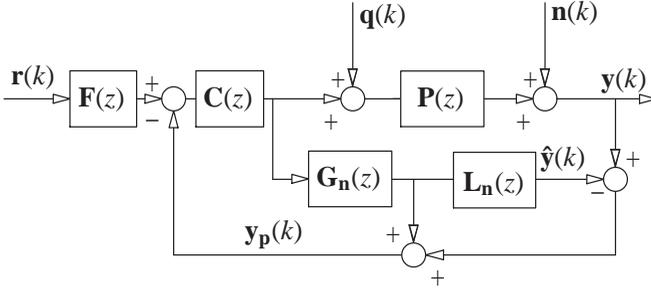


Figura 7: Esquema equivalente do MIMO-PS

e (2.28) (perturbação na saída e ruído de medição).

$$\mathbf{H}_{yr}(z) = \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}(z) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{H}_{yq}(z) = \{\mathbf{I} - \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\}\mathbf{P}_n(z) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{H}_{yn}(z) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1} \quad (2.28)$$

Jerome e Ray [2] definiram o que chamaram de teste de rearranjo (tradução livre do original *rearrangement test*). Um sistema que passa no teste de rearranjo é aquele no qual consegue-se posicionar o menor atraso de transporte de cada linha na diagonal principal apenas através de trocas de linhas ou colunas. Caso um sistema passe no teste de rearranjo, então pode-se compensar o atraso em todas as malhas e pode-se projetar um controlador capaz de desacoplar os efeitos entre uma malha e outra [2].

Com base nos trabalhos de Holt e Morari [53], Jerome e Ray [2] sugeriram que adicionar atrasos no sistema para que ele passe no teste de rearranjo em muitos casos pode melhorar, ou pelo menos pode não piorar, a resposta em malha fechada. Tal fato foi demonstrado com alguns exemplos de simulação.

Assim como ocorre no caso monovariável, a estrutura do MIMO-PS não é capaz de tratar satisfatoriamente os casos integradores e instáveis. No caso de plantas integradoras a estrutura não é capaz de rejeitar perturbações de carga do tipo degrau e no caso de sistemas instáveis ocorre instabilidade interna. Apenas recentemente foi proposta na literatura uma abordagem para sistemas integradores e instáveis, que será detalhada na seção 2.2.5.

## Abordagem de García e Albertos (2010)

García e Albertos [7] propuseram uma estrutura de controle capaz de tratar sistemas instáveis com atrasos diferentes em cada canal. A estratégia consiste em encontrar uma predição da planta sem atraso e em seguida encontrar um controlador que estabilize essa predição sem atraso. Caso o modelo rápido definido pelo preditor possa ser estabilizado, garante-se que o sistema completo também será estável [7]. Posteriormente um laço adicional é empregado para definir os requisitos de seguimento e regulação.

No caso SISO, uma predição sem atraso  $Y^\dagger(z)$  da saída  $Y(z)$  pode ser obtida empregando a identidade  $Y^\dagger(z) = \Psi_d(z)U(z) + Y(z)$ , na qual

$$\Psi_d(z) = \mathbf{c}\mathbf{A}^{-d} \sum_{i=1}^d \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{b}z^{-i},$$

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  são a matriz, o vetor e o vetor linha que representam o sistema,  $d$  é a representação discreta do atraso de transporte e  $Y(z)$  é a saída do sistema com atraso. Note que a função de transferência que relaciona a saída com a entrada pode ser escrita como  $P_n(z) = G_n(z)z^{-d}$  e  $G_n(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ . No caso MIMO a ideia pode ser estendida com o emprego de uma matriz de transferência  $\Psi(z)$  com cada elemento sendo calculado de acordo com a equação (2.29).

$$\Psi_{ij}(z) = \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{d_{ij}} \sum_{k=1}^{d_{ij}} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}_j z^{-k} \quad (2.29)$$

Note que neste caso a matriz de transferência pode ser escrita como  $\mathbf{G}_n(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  e que  $\mathbf{b}_j$  representa a coluna  $j$  da matriz  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{c}_i$  representa a linha  $i$  da matriz  $\mathbf{C}$ .

Com isso pode-se encontrar uma predição sem atraso  $\mathbf{G}^\dagger(z)$  da matriz de transferência. Como  $\mathbf{Y}^\dagger(z) = \Psi(z)\mathbf{U}(z) + \mathbf{Y}(z)$  e  $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{P}_n(z)\mathbf{U}(z)$ , a relação entre a entrada  $\mathbf{U}(z)$  e a saída sem atraso  $\mathbf{Y}^\dagger(z)$  pode ser escrita como

$$\mathbf{G}^\dagger(z) = \Psi(z) + \mathbf{P}_n(z).$$

Note que o modelo rápido  $\mathbf{G}^\dagger(z)$  contém ganhos diferentes dos apresentados pelo modelo original e que dependendo do caso pode ser bastante complicado projetar um controlador  $\mathbf{C}(z)$  que estabilize tal modelo. Experimentalmente observou-se que para valores elevados de atraso de transporte o acoplamento torna-se bastante grande, dificultando sobremaneira ou mesmo impossibilitando o ajuste de um controlador que estabilize o modelo rápido [44].

A estabilização da planta completa pode ser realizada com uma estrutura similar à do PS. A figura 8 ilustra a estrutura empregada para estabiliza-

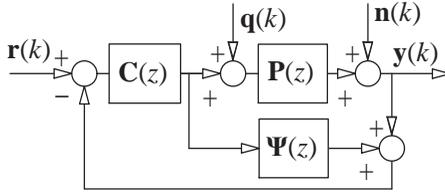


Figura 8: Laço para estabilização de plantas instáveis

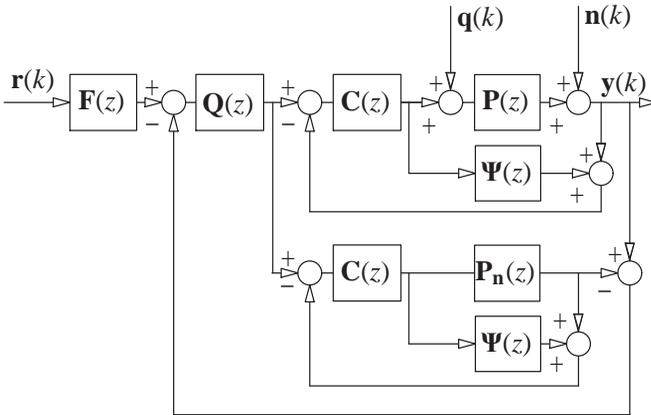


Figura 9: Esquema IMC-DTC

ção. Para garantir a estabilidade de malha fechada no caso nominal basta que o controlador primário  $C(z)$  estabilize o modelo sem atraso  $G^\dagger(z)$  [7].

Assim como ocorre com o PS em plantas integradoras, a estrutura por si só não é capaz de rejeitar perturbações de carga do tipo degrau. Dessa forma, García e Albertos [7] propuseram a utilização de um laço de controle por modelo interno (IMC, do inglês *internal model control*) auxiliar para contornar esse comportamento. A estrutura completa de controle é apresentada na figura 9. O controlador da malha externa  $Q(z)$  é ajustado para satisfazer

$$Q(1) = \left\{ P_n(1)C(1)[I + G^\dagger(1)C(1)]^{-1} \right\}^{-1},$$

garantindo seguimento de referências e rejeição de perturbações do tipo degrau.

A mesma estrutura pode ser empregada para permitir que o PS rejeite

perturbações de carga em plantas integradoras. Para simplificar a notação, essa estrutura será chamada de IMC-MIMO-PS. A estrutura de controle é a mesma da figura 9, porém nesse caso  $\Psi(z) = \mathbf{G}_n(z) - \mathbf{P}_n(z)$ , que deve ser implementado sem cancelamento polo-zero em  $z = 1$ .

### 2.3 Controle preditivo baseado em modelo

O termo controle preditivo baseado em modelo (MPC) é utilizado para designar a estratégia de controle que faz uso explícito do modelo da planta para obter o sinal de controle através da minimização de uma função custo [5].

A ideia do método é calcular uma sequência de sinais de controle futuros de forma a minimizar uma função custo definida em um horizonte de predição ( $N$ ). Com base no modelo da planta são geradas  $N$  predições da saída, representadas por  $\hat{y}(t + j|t)$  com  $j$  variando de 1 até  $N$ , que dependem das entradas e saídas da planta até o instante  $t$  e dos sinais de controle futuros  $u(t + j|t)$  com  $j$  variando de 0 até  $N_u - 1$  ( $N_u$  é chamado de horizonte de controle)<sup>7</sup>. Essa ideia geral do método é ilustrada na figura 10. Apenas o primeiro valor de controle é aplicado na planta e no próximo período de amostragem todo o processo é repetido, visto que novas informações do estado atual da planta estarão disponíveis. Essa ideia do método de prever saídas e gerar sinais de controle com base na otimização de uma função custo é a base dos MPC. A estrutura de um MPC está ilustrada na figura 11. É interessante notar que, como é realizado um processo de otimização para determinar o sinal de controle, as restrições podem ser explicitamente levadas em consideração nesse cálculo. Além disso, caso os valores de referência futura sejam conhecidos, é possível ter variações no sinal de controle e na variável de saída antes mesmo da mudança de referência efetivamente ocorrer [5].

A principal diferença entre os diferentes métodos de MPC está na forma de representação do modelo da planta e das perturbações para o cálculo das predições. Nas primeiras aplicações de MPC os modelos eram representações entrada/saída da planta (funções de transferência ou respostas ao degrau ou impulso), porém atualmente é mais comum encontrar artigos que discutem os problemas do MPC considerando uma representação em variáveis de estado [54].

As seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 tratam dos principais conceitos da abordagem MPC representando o modelo da planta por função de transferência,

---

<sup>7</sup>Note que em toda a seção que trata de controle preditivo baseado em modelo será empregada a variável  $t$  como um abuso de notação para descrever instantes discretos de tempo. Na seção 2.2 optou-se por empregar a variável  $k$  para evitar confusão com o tempo contínuo, porém esta seção trata apenas de sistemas em tempo discreto, logo será empregada a variável  $t$ .

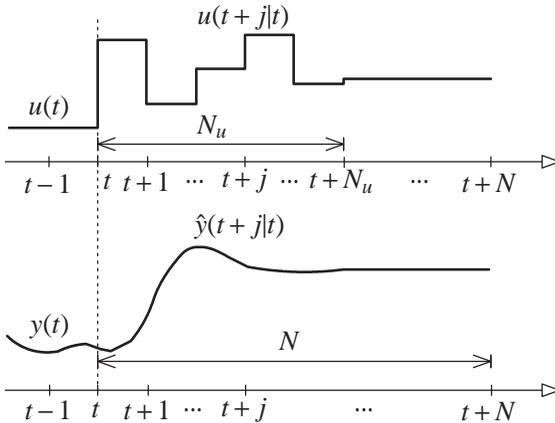


Figura 10: Ideia do MPC [5]

resposta ao degrau e variáveis de estado, respectivamente. Para mais detalhes sobre os métodos baseados em entrada e saída recomenda-se a leitura de Camacho e Bordons [5] ou Normey-Rico e Camacho [1]. Para os métodos baseados em variáveis de estado recomenda-se a leitura de Kwon e Han [55], Wang [56] ou Rawlings [57].

### 2.3.1 Controlador preditivo generalizado

O controlador preditivo generalizado (GPC, do inglês *generalized predictive controller*) foi proposto por Clarke, Mohtadi e Tuffs [58] e se tornou um dos métodos de MPC mais empregados na academia, com boa aceitação também em alguns ramos do setor industrial [59, 60]. O GPC pode lidar com uma grande diversidade de problemas de controle, incluindo sistemas instáveis em malha aberta [61] e sua implementação é realizada através do emprego de um modelo do processo em funções de transferência.

#### Critério de otimização

O critério a ser otimizado pelo GPC depende das saídas futuras previstas, de um sinal de referência que pode ser conhecido ou não e de uma função quadrática do esforço de controle. Esse funcional é apresentado na equação (2.30). O GPC considera os valores de  $y(t)$  dentro de um horizonte de predição, que tem início em  $N_1$  e fim em  $N_2$ . O termo  $N_u$  é denominado horizonte de controle e define a janela dentro da qual o esforço de controle é

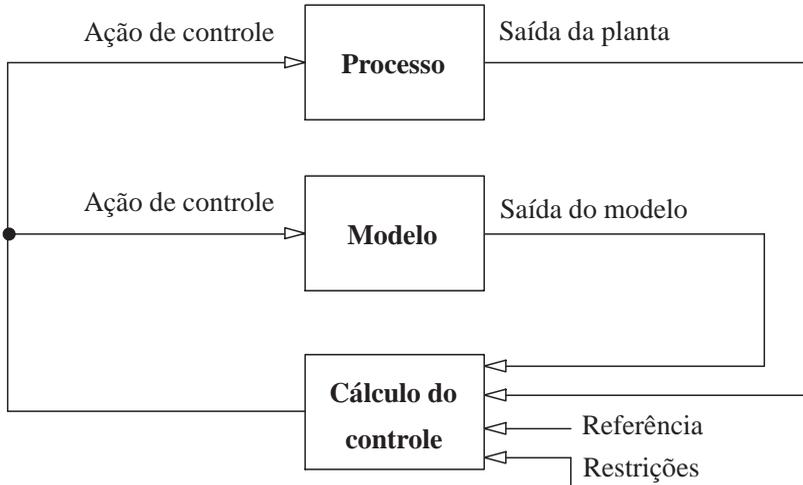


Figura 11: Estrutura do MPC [1]

ponderado. Os termos  $\delta$  e  $\lambda$  são valores reais não negativos que representam a ponderação do erro de seguimento e a ponderação do esforço do incremento de controle<sup>8</sup>  $\Delta u(t) = (1 - z^{-1})u(t)$ , respectivamente, e  $w(t + j)$  é a referência futura no instante  $t + j$ . Como a multiplicação do funcional quadrático por um número positivo não influencia o resultado do processo de otimização [62], no caso monovariável quando  $\delta$  e  $\lambda$  são constantes ao longo do horizonte pode-se empregar apenas um dos termos de ponderação, sendo o outro sempre unitário.

$$J_{\text{GPC}} = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t + j|t) - w(t + j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t + j - 1)]^2 \quad (2.30)$$

Como forma de tratar o atraso de transporte do processo, os horizontes  $N_1$  e  $N_2$  são escritos como função do atraso e de um termo genérico  $N$ . Assim,  $N_1 = d + 1$  e  $N_2 = d + N$ . Isso implica em considerar apenas as predições de  $y$  depois de decorrido o atraso, o que é bastante razoável sob o ponto de vista prático [1].

<sup>8</sup>Neste documento,  $z^{-1}$  representa o operador deslocamento para trás nas equações temporais, assim como o inverso da variável complexa  $z$  quando pertinente.

## Predições da saída

A estrutura GPC, assim como outras técnicas de controle preditivo de múltiplos passos à frente, trabalha com um modelo da planta conhecido como auto-regressivo com média móvel e integrador e entrada controlada (CA-RIMA, do inglês *controlled autoregressive integrated moving average*) para o cálculo das predições, como ilustrado na equação (2.31). Nessa equação,  $A$  e  $B$  são polinômios do operador deslocamento para trás  $z^{-1}$  e, em conjunto com o atraso  $d$ , definem a dinâmica do modelo da planta. Os polinômios  $T(z^{-1})$  e  $D(z^{-1})$ , por sua vez, definem o modelo da perturbação. O termo  $\Delta$  é um incremento e  $e(t)$  é um sinal de ruído branco.

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + \frac{T(z^{-1})e(t)}{D(z^{-1})\Delta} \quad (2.31)$$

O caso mais simples do GPC considera perturbações do tipo degrau e não trata as características estocásticas do ruído. Tipicamente essas características são desconhecidas e os polinômios  $T(z^{-1})$  e  $D(z^{-1})$  são escolhidos como  $T(z^{-1}) = 1$  e  $D(z^{-1}) = 1$ . Apesar disso, mesmo quando os valores reais de  $T(z^{-1})$  e  $D(z^{-1})$  são desconhecidos é possível empregá-los como parâmetros de ajuste do controlador [1, 63]. Inicialmente será tratada a situação na qual os polinômios são definidos com valor unitário.

As predições da saída são computadas empregando o modelo da equação (2.31) multiplicado por  $\Delta$  ( $\Delta(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$ ) em ambos os lados. A saída do modelo para um instante de tempo  $t + j$  é apresentada na equação (2.32), onde  $n_a$  e  $n_b$  são as ordens dos polinômios  $A$  e  $B$ , e  $\tilde{a}_i$  é o negativo do  $i$ ésimo coeficiente do polinômio  $\tilde{A}(z^{-1})$  dado por  $\tilde{A}(z^{-1}) = A(z^{-1})(1 - z^{-1}) = 1 - \tilde{a}_1z^{-1} - \dots - \tilde{a}_{n_a+1}z^{-(n_a+1)}$ . Como o valor do sinal  $e(t)$  no instante  $t + j$  não é conhecido no instante  $t$ , a melhor predição é seu valor esperado. Como trata-se de um ruído branco, de média nula, seu valor esperado é zero. Assim, a predição em  $t + j$  é dada pela equação (2.33).

$$y(t+j) = \sum_{i=1}^{n_a+1} \tilde{a}_i y(t+j-i) + \sum_{i=1}^{n_b+1} b_{i-1} \Delta u(t+j-d-i) + e(t+j) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+j|t) &= \mathbb{E}\{y(t+j)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n_a+1} \tilde{a}_i y(t+j-i) + \sum_{i=1}^{n_b+1} b_{i-1} \Delta u(t+j-d-i) \end{aligned} \quad (2.33)$$

A partir da equação (2.33) é possível verificar que de  $t+1$  até  $t+d$  a

saída dependerá apenas dos valores passados do sinal de controle e dos valores conhecidos e preditos da saída. A determinação desses valores pode ser feita de forma recursiva ou então através do emprego da equação Diophantina

$$1 = \tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}).$$

Para calcular valores de predição depois de passado o atraso serão também necessários os valores do sinal de controle calculados como ótimos. Caso a predição seja feita recursivamente para os valores de  $d + j$ , com  $j$  variando de 1 até  $N$ , pode-se escrever um vetor de predições  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^N$  dado por  $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(t + d + 1|t) \hat{y}(t + d + 2|t) \dots \hat{y}(t + d + N|t)]'$  como uma função dos incrementos de controle futuros  $\Delta \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_u}$ , dos últimos  $n_b$  incrementos de controle  $\Delta \mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^{n_b}$  e das predições até  $t + d$  dadas por  $\hat{\mathbf{y}}_1 \in \mathbb{R}^{n_a+1}$ . Os vetores  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_1$  e  $\hat{\mathbf{y}}_1$  são, respectivamente, dados por  $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u(t) \Delta u(t + 1) \dots \Delta u(t + N_u - 1)]'$ ,  $\Delta \mathbf{u}_1 = [\Delta u(t - 1) \Delta u(t - 2) \dots \Delta u(t - n_b)]'$  e  $\hat{\mathbf{y}}_1 = [\hat{y}(t + d|t) \hat{y}(t + d - 1|t) \dots \hat{y}(t + d - n_a|t)]'$ . Note que se  $d \leq n_a$ ,  $\hat{y}(t + d - n_a|t)$  não é uma predição e sim um valor medido. A expressão para determinação do vetor de predições é

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta \mathbf{u} + \mathbf{H}\Delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{S}\hat{\mathbf{y}}_1, \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$ ,  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times n_b}$  e  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times n_a+1}$  são matrizes constantes dadas por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N_u} & g_{N_u-1} & \dots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N & g_{N-1} & \dots & g_{N-N_u+1} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &g_0 = 0, \\ &g_j = -\sum_{i=1}^j a_i g_{j-i} + \sum_{i=0}^{j-1} b_i, \\ &j = 1, \dots, N; \end{aligned}$$

$$h_{1,j} = b_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n_b,$$

$$h_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{a}_k h_{i-k,j} + h_{1,i+j-1}, \quad i = 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_b;$$

$$s_{1,j} = \tilde{a}_j, \quad j = 1, \dots, n_a + 1,$$

$$s_{i,j} = s_{i-1,j+1} + s_{i-1,1}s_{1,j}, \quad i = 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_a,$$

$$s_{i,n_a+1} = s_{i-1,1}s_{1,n_a+1}, \quad i = 2, \dots, N.$$

Note que  $\mathbf{y}_f(t) = \mathbf{H}\Delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{S}\hat{\mathbf{y}}_1$  corresponde à resposta livre do sistema, ou seja,

a saída que seria obtida através do modelo caso o sinal de controle fosse mantido constante (incrementos nulos no sinal de controle). A outra parcela da resposta é chamada de resposta forçada ( $\mathbf{y}_c(t)$ ) e corresponde à predição da saída relativa à variação do sinal de controle. Dessa forma, a resposta livre pode ser interpretada como a dinâmica de evolução do processo dado o seu estado atual e a resposta forçada como a evolução decorrente das variações futuras no sinal de controle.

Caso opte-se pela resolução da equação Diophantina a abordagem continua a mesma, porém cada predição para o instante  $t + j$  é dada por

$$\hat{y}(t + j|t) = F_j(z^{-1})y(t) + E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t - d + j - 1)$$

ou equivalentemente

$$\hat{y}(t + j|t) = F_j(z^{-1})y(t) + [1 - F_j(z^{-1})z^{-j}]G(z)u(t - d + j),$$

expressão na qual a predição é determinada apenas em função de  $F_j(z^{-1})$  [1].

### Resolução para o caso irrestrito

Para o caso no qual o sistema é linear e não existem restrições, o processo de minimização necessita ser calculado apenas uma vez. A solução é analítica e é dada pela minimização do funcional  $J_{GPC}$ , apresentado de forma matricial na equação (2.35), que leva em consideração as matrizes já definidas na equação (2.34) e as matrizes  $\mathbf{Q}_\lambda$  e  $\mathbf{Q}_\delta$ , que são matrizes diagonais compostas pelos termos de ponderação  $\lambda(j)$  e  $\delta(j)$ , respectivamente. Para os casos nos quais o sistema não é linear ou nos quais existe algum tipo de restrição, o processo de minimização deve ser resolvido a cada iteração. É interessante notar que para o caso linear e irrestrito o procedimento de otimização não precisa ser repetido, mas o sinal de controle deve ser calculado a cada iteração, de forma a levar em consideração as novas informações disponíveis na saída do sistema.

$$J_{GPC} = \Delta \mathbf{u}' (\mathbf{Q}_\lambda + \mathbf{G}' \mathbf{Q}_\delta \mathbf{G}) \Delta \mathbf{u} + 2 (\mathbf{H} \mathbf{u}_1 + \mathbf{S} \mathbf{y}_1 - \mathbf{w})' \mathbf{Q}_\delta \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{H} \mathbf{u}_1 + \mathbf{S} \mathbf{y}_1 - \mathbf{w})' \mathbf{Q}_\delta (\mathbf{H} \mathbf{u}_1 + \mathbf{S} \mathbf{y}_1 - \mathbf{w}) \quad (2.35)$$

Para o caso de solução analítica, a minimização do funcional  $J_{GPC}$  com relação ao incremento do sinal de controle  $\Delta \mathbf{u}$  resulta na equação (2.36).

$$\Delta u(t) = \mathbf{m} \mathbf{P}_0 \mathbf{y}_1 + \mathbf{m} \mathbf{P}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{m} \mathbf{P}_2 \mathbf{w} \quad (2.36)$$

Onde  $\mathbf{m}$  é a primeira linha da matriz  $\mathbf{M}^{-1}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{G}' \mathbf{Q}_\delta \mathbf{G} + \mathbf{Q}_\lambda$ ,  $\mathbf{P}_0 = -\mathbf{G}' \mathbf{Q}_\delta \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{P}_1 = -\mathbf{G}' \mathbf{Q}_\delta \mathbf{H}$  e  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{G}' \mathbf{Q}_\delta$ .

Realizando as multiplicações matriciais, o incremento de controle pode ser escrito como apresentado na equação (2.37), onde  $\mathbf{mP}_0 = [l_{y_1} \ l_{y_2} \ \dots \ l_{y_{n_a+1}}]$ ,  $\mathbf{mP}_1 = [l_{u_1} \ l_{u_2} \ \dots \ l_{u_{n_b}}]$  e  $\mathbf{mP}_2 = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N]$ .

$$\begin{aligned} \Delta u(t) = & l_{y_1} \hat{y}(t+d|t) + \dots + l_{y_{n_a+1}} \hat{y}(t+d-n_a|t) + l_{u_1} \Delta u(t-1) \\ & + l_{u_{n_b}} \Delta u(t-n_b) + \sum_{i=1}^N f_i w(t+d+i) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para implementação, tipicamente se trabalha com a resposta livre do sistema. Para o caso linear e sem restrições chega-se a uma matriz de ganhos  $\mathbf{K}$ , que multiplica a diferença entre a resposta livre e a referência. A representação matricial da obtenção do sinal de controle é apresentada na equação (2.38).

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{G}'\mathbf{Q}_\delta\mathbf{G} + \mathbf{Q}_\lambda)^{-1} \mathbf{G}'\mathbf{Q}_\delta(\mathbf{w} - \mathbf{y}_f) = \mathbf{K}(\mathbf{w} - \mathbf{y}_f) \quad (2.38)$$

Onde  $\mathbf{y}_f$  é a resposta livre do sistema e  $\mathbf{w}$  é o sinal de referência [5].

Como demonstrado por Normey-Rico e Camacho [1], no caso de solução explícita o GPC pode ser representado na forma de uma estrutura DTC equivalente à do PSF. A representação é a mesma da figura 5 e a forma como os parâmetros  $C(z)$ ,  $F(z)$  e  $F_r(z)$  devem ser calculados é apresentada nas equações (2.39), (2.40) e (2.41).

$$C(z) = - \frac{l_{y_1} + l_{y_2}z^{-1} + \dots + l_{y_{n_a+1}}z^{-n_a}}{(1-z^{-1})(1-l_{u_1}z^{-1} - \dots - l_{u_{n_b}}z^{-n_b})} \quad (2.39)$$

$$F(z) = - \frac{f_1z^{d+1} + f_2z^{d+2} + \dots + f_Nz^{d+N}}{l_{y_1} + l_{y_2}z^{-1} + \dots + l_{y_{n_a+1}}z^{-n_a}} \quad (2.40)$$

$$F_r(z) = \frac{l_{y_1}F_d(z^{-1}) + l_{y_2}F_{d-1}(z^{-1}) + \dots + l_{y_{n_a+1}}F_{d-n_a}(z^{-1})}{l_{y_1} + l_{y_2}z^{-1} + \dots + l_{y_{n_a+1}}z^{-n_a}} \quad (2.41)$$

Os termos  $F_j$ , com  $j$  variando de  $d-n_a$  a  $d$ , são oriundos da resolução da equação Diophantina empregada para determinação das predições do sinal de saída para valores de tempo até  $t+d$ .

Pode-se notar que o controlador primário  $C(z)$  apresenta a mesma ordem do modelo da planta. Além disso, o filtro de referência  $F(z)$  cancela os zeros do controlador para resposta de seguimento de referência.

A diferença entre as abordagens GPC e PSF é que no GPC o ajuste de  $F(z)$ ,  $C(z)$  e  $F_r(z)$  é realizado através de um processo de otimização que leva em consideração desempenho dinâmico e não robustez. Isso faz com

que o PSF apresente uma robustez maior que a do GPC, especialmente para grandes valores de atraso de transporte. Pode-se demonstrar que a robustez do GPC varia com a variação do valor nominal do atraso de transporte, coisa que não acontece no PSF. Dessa forma, para um mesmo erro na estimação do atraso de transporte, no PSF o comportamento dinâmico independerá do valor absoluto do atraso, enquanto que no GPC será tão pior quando maior for o atraso de transporte nominal [1].

### Resolução para o caso com restrições

As restrições podem ser modeladas como um conjunto de  $l$  desigualdades lineares. Note que até este ponto, todas as equações foram escritas em função do vetor de incrementos de controle  $\Delta \mathbf{u}$ . O mesmo será feito com as restrições.

Restrições no incremento de controle são imediatas, visto que já estão diretamente representadas na forma de interesse. Restrições no valor absoluto do sinal de controle podem ser escritas como  $\mathbf{T}\Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}_{-1}$ , onde  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}$  é uma matriz triangular inferior cujos elementos não nulos são iguais a um,  $\mathbf{u}_{\max} \in \mathbb{R}^{N_u}$  é a máxima amplitude de cada ação de controle em  $N_u$  e  $\mathbf{u}_{-1} \in \mathbb{R}^{N_u}$  é um vetor cujos elementos são todos iguais à ação de controle em  $t-1$ . Restrições na amplitude da variável de saída podem ser escritas como  $\mathbf{G}\Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{y}_{\max} - \mathbf{y}_f$ , onde  $\mathbf{y}_{\max} \in \mathbb{R}^N$  é a máxima amplitude de cada predição em  $N$ . Assim, é possível escrever as restrições como apresenta a equação (2.42), onde a matriz  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{l \times N_u}$  e o vetor  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^l$  são obtidos de acordo com as restrições definidas e com os dados do problema e  $\leq$  denota desigualdade de vetor (elemento a elemento). Para mais detalhes sobre como modelar outros tipos de restrições, sugere-se a leitura de Camacho e Bordons [5].

$$\mathbf{F}\Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{f} \quad (2.42)$$

O problema de controle consiste novamente em encontrar um sinal de controle  $u(t)$  no instante de tempo atual  $t$ . Todavia, no caso restrito geralmente não existe solução analítica. Assim, deve-se resolver um problema de otimização que leva em conta o funcional  $J_{\text{GPC}}$ , as restrições e as predições obtidas com o modelo de planta. Se a equação (2.34) for substituída na equação (2.30), o problema de otimização pode escrito como apresentado na equação (2.43), onde  $\mathbf{Q}_\delta \in \mathbb{R}^{N \times N}$  e  $\mathbf{Q}_\lambda \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}$  são as matrizes diagonais de ponderação,  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}_\lambda + \mathbf{G}'\mathbf{Q}_\delta\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{c}_0' = 2(\mathbf{H}\Delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{S}\mathbf{y}_1 - \mathbf{r})'\mathbf{Q}_\delta\mathbf{G}$  e  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{H}\Delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{S}\mathbf{y}_1 - \mathbf{r})'\mathbf{Q}_\delta(\mathbf{H}\Delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{S}\mathbf{y}_1 - \mathbf{r})$ . O termo  $\mathbf{z}_0$  não multiplica o incremento de controle (variável de otimização) e, dessa forma, ele não influencia o resultado do procedimento de otimização e pode ser eliminado do

funcional.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \Delta \mathbf{u}' \mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{u} + \mathbf{c}_0' \Delta \mathbf{u} + \mathbf{z}_0 \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{F} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

### Inclusão do polinômio $T(z^{-1})$

A inclusão do polinômio  $T(z^{-1})$  geralmente é realizada como uma segunda etapa de ajuste do GPC e tem efeitos diretos na robustez da estrutura de controle [1]. Toda a análise feita até então continua válida, porém a inclusão do polinômio  $T(z^{-1})$  acarreta algumas modificações que serão detalhadas na sequência. Para simplificar a notação, será adotada a nomenclatura controlador preditivo generalizado com polinômio  $T$  (GPC-T).

Antes de realizar qualquer análise é importante ressaltar que modificações no polinômio  $D(z^{-1})$  não implicam em alterações no que foi apresentado até o momento. Como apontado por Normey-Rico e Camacho [1], caso  $D(z^{-1}) \neq 1$ , podem-se definir dois novos polinômios  $A'(z^{-1}) = A(z^{-1})D(z^{-1})$  e  $B'(z^{-1}) = B(z^{-1})D(z^{-1})$  e empregar as mesmas equações que vinham sendo empregadas até então. Dessa forma, a análise será voltada apenas à inclusão do polinômio  $T(z^{-1})$ , assumindo  $D(z^{-1}) = 1$ .

O fato de o polinômio  $T(z^{-1})$  ser considerado implica em uma alteração na equação Diophantina a ser resolvida para encontrar as predições [1]. A nova equação é dada por

$$T(z^{-1}) = \tilde{A}(z^{-1})E_j(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}),$$

o que resulta em uma predição dada por

$$\hat{y}(t+j|t) = \frac{F_j(z^{-1})}{T(z^{-1})}y(t) + \frac{E_j(z^{-1})B(z^{-1})}{T(z^{-1})}\Delta u(t-d+j-1)$$

que é a mesma expressão encontrada para o caso que não considera o polinômio  $T(z^{-1})$ , com exceção do polinômio  $T(z^{-1})$  que aparece dividindo tanto a medição atual  $y(t)$  quando os incrementos do sinal de controle  $\Delta u(t-d+j-1)$ . Assim, do ponto de vista prático, pode-se afirmar que tanto a saída medida quanto os incrementos do sinal de controle são filtrados por um termo  $1/T(z^{-1})$  [5].

Como realizado no caso mais simples do GPC, pode-se reorganizar a equação de predição para ser escrita apenas em função dos polinômios  $F_j(z^{-1})$  e não mais em função de  $E_j(z^{-1})$  e  $F_j(z^{-1})$ . O resultado é

$$\hat{y}(t+j|t) = \frac{F_j(z^{-1})}{T(z^{-1})}y(t) + \left[ 1 - \frac{z^{-j}F_j(z^{-1})}{T(z^{-1})} \right] G(z)u(t-d+j),$$

que é a mesma expressão para o caso de  $T(z^{-1}) = 1$  com um filtro modificado dado por

$$F'_j(z^{-1}) = \frac{F_j(z^{-1})}{T(z^{-1})}.$$

Como os termos  $F_j(z^{-1})$  só aparecem no filtro  $F_r(z)$  na implementação em estrutura de DTC, o polinômio  $T(z^{-1})$  tem um efeito equivalente ao filtro de robustez do PSF. Como demonstrado na literatura, o polinômio  $T(z^{-1})$  apenas tem influência na robustez e na resposta de rejeição de perturbações [1, 5], assim como o filtro  $F_r(z)$  do PSF. Dessa forma, no caso nominal e sem perturbações, as respostas obtidas por um GPC e um GPC-T são idênticas [1].

O fato de o polinômio  $T(z^{-1})$  atuar como um filtro fez com que diversos autores propusessem regras de ajuste para esse polinômio [1, 64, 65]. Note que nesse caso, o polinômio  $T(z^{-1})$  deixa de ser empregado para modelar a característica estocástica da perturbação e passa a servir como um parâmetro de ajuste para aumentar a robustez da estrutura de controle. Como regra geral, para processos estáveis geralmente o polinômio é escolhido como

$$T(z^{-1}) = A(z^{-1}) [1 - \beta z^{-1}]^k$$

com  $\beta$  próximo à raiz dominante de  $A(z^{-1})$  e  $k$  sendo um número natural positivo, como discutido na referência [5].

### Generalização para o caso multivariável

Como um sistema multivariável tipicamente apresenta mais de uma saída, o vetor de predições das saídas deve conter as predições de todas elas. A forma mais natural de agrupar os vetores associados a cada saída é escrever um vetor de predições  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{nN}$  dado por  $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{\mathbf{y}}_1 \ \hat{\mathbf{y}}_2 \ \dots \ \hat{\mathbf{y}}_n]'$ , onde  $n$  é o número de saídas e  $N$  é o horizonte de predição. A rigor pode-se escolher um horizonte de predição diferente para cada saída e nesse caso a dimensão do vetor  $\hat{\mathbf{y}}$  será dada pela soma dos horizontes de predição de cada uma das saídas. De forma semelhante, o vetor das referências futuras  $\mathbf{w}$  é dado pelo agrupamento dos vetores de referência futura para cada uma das saídas preditas e o vetor dos incrementos de controle  $\Delta \mathbf{u}$  é dado pelo agrupamento dos incrementos de controle de cada uma das variáveis manipuladas do processo, ou seja,  $\Delta \mathbf{u} = [\Delta \mathbf{u}_1 \ \Delta \mathbf{u}_2 \ \dots \ \Delta \mathbf{u}_m]$ , onde  $m$  é o número de entradas [1]. O mesmo procedimento de agrupamento de vetores é realizado com o vetor das respostas livres  $\mathbf{y}_f$ .

Além disso, a matriz  $\mathbf{G}$  passa a ser escrita como uma matriz com blocos dados por  $\mathbf{G}_{ij}$ , onde  $\mathbf{G}_{ij}$  é a matriz  $\mathbf{G}$  dos coeficientes da resposta ao

degrau que relaciona a saída  $i$  com a entrada  $j$  (equação (2.44)).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \cdots & \mathbf{G}_{1m} \\ \mathbf{G}_{21} & \cdots & \mathbf{G}_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n1} & \cdots & \mathbf{G}_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

No caso multivariável, o funcional  $J$  pode ser escrito como

$$J_{\text{GPC}} = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{w})' \mathbf{Q}_\delta (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{w}) + \Delta \mathbf{u}' \mathbf{Q}_\lambda \Delta \mathbf{u},$$

onde a matriz  $\mathbf{Q}_\delta$  é uma matriz bloco diagonal na qual cada bloco contém as ponderações de cada um dos erros de seguimento de cada uma das saídas preditas para cada instante do horizonte de predição (ou dos horizontes de predição caso não seja empregado o mesmo valor para todas as saídas preditas) e  $\mathbf{Q}_\lambda$  é uma matriz bloco diagonal com as ponderações dos incrementos de controle.

Como no caso SISO, em sistemas com atraso o limite inferior de cada um dos horizontes de predição pode ser escolhido como o atraso efetivo da saída correspondente (atraso mínimo por linha) mais um. É interessante notar que com essa escolha algumas das matrizes  $\mathbf{G}_{ij}$  que compõem a matriz  $\mathbf{G}$  podem conter linhas nulas que representam os atrasos residuais de cada saída [5].

Assim como ocorre no caso SISO, o problema sem restrições tem solução analítica dada por  $\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{G}' \mathbf{Q}_\delta \mathbf{G} + \mathbf{Q}_\lambda)^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{Q}_\delta (\mathbf{w} - \mathbf{y}_f)$ . Todavia, no caso MIMO deve-se ter cuidado para escolher os elementos adequados de  $\Delta \mathbf{u}$  que representam os incrementos de controle no instante atual  $t$ , visto que agora o vetor  $\Delta \mathbf{u}$  contém os incrementos de mais de um sinal de controle agrupados.

No caso com restrições o problema de otimização pode ser escrito na mesma forma padrão apresentada na equação (2.43). Deve-se, entretanto, atentar à estrutura especial que as matrizes de restrição assumem. Cada bloco da matriz deve ser definido para tratar dos elementos correspondentes àquela restrição.

### 2.3.2 Controle por matriz dinâmica

O controle por matriz dinâmica (DMC, do inglês *dynamic matrix control*) é um exemplo de MPC no qual a representação do modelo do processo é não paramétrica. No DMC o comportamento do processo é representado pelos coeficientes da resposta ao degrau, ou seja, pelos valores que são medidos na saída do processo ao se aplicar um degrau na variável manipulada [66]. Outra técnica bastante conhecida de MPC na qual se modela a planta de

forma não paramétrica é o controle algorítmico baseado em modelo (MAC, do inglês *model algorithm control*), que se baseia nos coeficientes da resposta ao impulso [67]. Apesar de serem muito empregadas na indústria, tais técnicas não podem ser aplicadas a sistemas instáveis [1]. No caso integrador as estruturas não são capazes de rejeitar perturbações de carga do tipo degrau, levando o sistema a apresentar um erro constante em regime permanente [68].

Assim como ocorre no GPC, a função custo a ser minimizada pelo incremento de controle é a apresentada na equação (2.30) [5]. A grande diferença em relação ao GPC está na forma de realizar as previsões, como discutido na sequência.

### Predições da saída

Como já comentado, o DMC emprega os coeficientes da resposta ao degrau como forma de modelagem do processo. Tradicionalmente, a soma de convolução que permite obter a saída de determinado processo discreto a um sinal de entrada qualquer é dada em função dos coeficientes da resposta ao impulso [69], todavia a resposta ao impulso pode ser obtida a partir da resposta ao degrau

$$h(k) = g(k) - g(k - 1),$$

onde  $h(k)$  é a resposta ao impulso no instante  $k$  e  $g(k)$  é a resposta ao degrau no instante  $k$ . Com emprego dessa igualdade, a saída de um sistema no instante  $t$  para uma entrada qualquer pode ser representada em função dos coeficientes  $g(k)$  como na equação (2.45) para uma condição inicial nula e sem considerar possíveis perturbações.

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g(i) \Delta u(t - i) \quad (2.45)$$

O DMC emprega a equação (2.45) para realizar as previsões da saída, que são dadas por

$$\hat{y}(t + j|t) = \sum_{i=1}^{\infty} g(i) \Delta u(t + j - i) + \hat{n}(t + j|t),$$

onde  $\hat{n}(t + j|t)$  é uma previsão feita no instante  $t$  da perturbação que atuará no instante  $t + j$  [5]. A previsão da saída pode ser separada em duas parcelas, como ocorre também no GPC: uma que depende só de dados passados e outra que depende de dados futuros. Assim, a previsão pode ser escrita como na equação (2.46), na qual o primeiro somatório representa os termos futuros e

o segundo os termos que dependem de dados passados.

$$\hat{y}(t+j|t) = \sum_{i=1}^j g(i)\Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g(i)\Delta u(t+j-i) + \hat{h}(t+j|t) \quad (2.46)$$

Como em princípio não se tem informações sobre as perturbações que ocorrerão no futuro, a predição da perturbação em todo instante futuro é considerada como sendo igual à perturbação no instante  $t$ , ou seja,  $\hat{h}(t+j|t) = \hat{h}(t|t) = y(t) - \hat{y}(t|t)$ , onde  $y(t)$  é o valor medido em  $t$  e  $\hat{y}(t|t) = \sum_{i=1}^{\infty} g(i)\Delta u(t-i)$  é a predição para a saída no instante  $t$  [5]. Dessa forma, a predição pode ser reescrita como

$$\hat{y}(t+j|t) = \sum_{i=1}^j g(i)\Delta u(t+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g(i)\Delta u(t+j-i) + y(t) - \sum_{i=1}^{\infty} g(i)\Delta u(t-i),$$

que por sua vez pode ser simplificada com uma mudança de variável no segundo somatório para

$$\hat{y}(t+j|t) = \sum_{i=1}^j g(i)\Delta u(t+j-i) + y_f(t+j),$$

onde  $y_f(t+j)$  é a resposta livre do sistema no instante  $t+j$  dada por

$$y_f(t+j) = y(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [g(j+i) - g(i)]\Delta u(t-i).$$

Em processos assintoticamente estáveis os coeficientes da resposta ao degrau tendem a um valor constante depois de passado um número grande  $N_k$  de amostras [69]. Dessa forma,  $g(t+j+N_k) \approx g(t+N_k)$ , ou de forma equivalente,  $g(j+i) - g(i) \approx 0, i > N_k$ . Assim, pode-se escrever a predição para  $t+j$  como na equação (2.47).

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+j|t) &= \sum_{i=1}^j g(i)\Delta u(t+j-i) + y_f(t+j) \\ y_f(t+j) &= y(t) + \sum_{i=1}^{N_k} [g(j+i) - g(i)]\Delta u(t-i) \end{aligned} \quad (2.47)$$

As predições podem ser agrupadas em um vetor, de maneira análoga

ao que ocorre no GPC. Assim, o vetor de predições é dado por

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{y}_f,$$

onde  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$  é a matriz dos coeficientes da resposta ao degrau (mesma matriz  $\mathbf{G}$  do GPC) e  $\mathbf{y}_f \in \mathbb{R}^N$  é o vetor das respostas livres dado por

$$\mathbf{y}_f = [y_f(t+1) \ y_f(t+2) \ \dots \ y_f(t+N)]'.$$

Para sistemas que apresentam atraso de transporte, as predições podem ser realizadas apenas depois de passado o atraso de transporte, em procedimento similar ao que foi realizado no GPC. Assim, o vetor de predições  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^N$  passa a ser dado por  $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(t+d+1|t) \ \hat{y}(t+d+2|t) \ \dots \ \hat{y}(t+d+N|t)]'$  e pode ser calculado como uma função dos incrementos de controle futuros  $\Delta\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_u}$ , dos últimos  $N_k$  incrementos de controle  $\Delta\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^{N_k-1}$  e da predição em  $t+d$  dada por  $\hat{y}(t+d|t)$ . Os vetores  $\Delta\mathbf{u}$  e  $\Delta\mathbf{u}_1$  são, respectivamente, dados por  $\Delta\mathbf{u} = [\Delta u(t) \ \Delta u(t+1) \ \dots \ \Delta u(t+N_u-1)]'$  e  $\Delta\mathbf{u}_1 = [\Delta u(t-1) \ \Delta u(t-2) \ \dots \ \Delta u(t-N_k-1)]'$ . O vetor de predições é apresentado na equação (2.48)

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{H}\Delta\mathbf{u}_1 + \mathbf{s}\hat{y}(t+d|t) \quad (2.48)$$

onde o vetor  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$  possui todos os elementos iguais a 1 e  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$  e  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N_k-1}$  são matrizes constantes dadas por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(d+1) & 0 & \dots & 0 \\ g(d+2) & g(d+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(d+N_u) & g(d+N_u-1) & \dots & g(d+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(d+N) & g(d+N-1) & \dots & g(d+N-N_u+1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,N_k-2} & h_{1,N_k-1} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,N_k-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{N,1} & h_{N,2} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h_{i,j} = g(d+i+j) - g(d+j), \quad i+j \leq N_k;$$

$$h_{i,j} = 0, \quad i+j > N_k.$$

A resposta livre é dada por  $\mathbf{y}_f = \mathbf{H}\Delta\mathbf{u}_1 + \mathbf{s}\hat{y}(t+d|t)$ .

## Cômputo do sinal de controle

No caso irrestrito o problema de otimização tem solução analítica dada por

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{G}'\mathbf{Q}_\delta\mathbf{G} + \mathbf{Q}_\lambda)^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{Q}_\delta(\mathbf{w} - \mathbf{y}_f).$$

É comum encontrar na literatura a mesma expressão, porém considerando apenas a ponderação  $\lambda$  no incremento de controle. Nesse caso, o incremento do sinal de controle é dado pelo primeiro elemento do vetor

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{G}'\mathbf{G} + \mathbf{Q}_\lambda)^{-1}\mathbf{G}'(\mathbf{w} - \mathbf{y}_f),$$

já que a matriz  $\mathbf{Q}_\delta$  passa a ser a matriz identidade [5].

Como mostrado em [1], o DMC irrestrito pode ser representado como um PS com um filtro de referência (figura 2). A dedução das expressões do controlador primário e do filtro de referência são apresentados na referência [1]. Dessa forma, é interessante notar que o DMC apresenta os mesmos problemas do PS: a rejeição de perturbação não pode ser mais rápida que a dinâmica de malha aberta da planta, não é possível estabilizar sistemas com polos fora do círculo unitário em malha aberta e em sistemas integradores não é possível rejeitar perturbações de carga constantes.

No caso que considera restrições, o sinal de controle deve ser calculado a cada iteração como a solução do problema de otimização

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \Delta \mathbf{u}'\mathbf{K}_0\Delta \mathbf{u} + \mathbf{c}_0'\Delta \mathbf{u} + \mathbf{z}_0 \\ &\text{sujeito a} && \mathbf{F}\Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{f} \end{aligned} ,$$

onde  $\mathbf{Q}_\delta \in \mathbb{R}^{N \times N}$  e  $\mathbf{Q}_\lambda \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}$  são as matrizes diagonais de ponderação,  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}_\lambda + \mathbf{G}'\mathbf{Q}_\delta\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{c}_0' = \mathbf{G}'\mathbf{Q}_\delta(\mathbf{y}_f - \mathbf{w}\mathbf{G})$  e  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{y}_f - \mathbf{w})'(\mathbf{y}_f - \mathbf{w})$ . Novamente, o termo  $\mathbf{z}_0$  não multiplica o incremento de controle (variável de otimização) e, dessa forma, ele não influencia o resultado do procedimento de otimização e pode ser eliminado do funcional. As restrições são modeladas de forma análoga ao caso do GPC (ver seção 2.3.1 para detalhes).

## Generalização para o caso multivariável

Empregando o mesmo formalismo apresentado na seção 2.3.1, o DMC pode ser estendido para o caso MIMO. Tanto os vetores quanto as matrizes de ponderação e a matriz  $\mathbf{G}$  terão as mesmas estruturas já apresentadas. A grande diferença está no cálculo da resposta livre  $\mathbf{y}_f$ . A resposta livre deve considerar todas as contribuições de todas as variáveis manipuladas em determinada saída, porém como o sistema é linear, cada elemento da resposta livre é dado pela soma das respostas livres que seriam calculadas no caso SISO

para cada uma das entradas. Deve-se, entretanto, atentar que a saída medida deve ser somada apenas uma vez em cada elemento.

### 2.3.3 Abordagem por variáveis de estado

A abordagem por variáveis de estado considera um modelo da planta representado no espaço de estados discreto. Uma representação simples da dinâmica dos estados é apresentada na equação (2.49), onde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  é a variável de estado,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^n$  é uma perturbação,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de transição (ou matriz de estados) e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor de entrada<sup>9</sup>. Sempre que não houver ambiguidade com outro termo definido neste trabalho será mantida a nomenclatura proposta no trabalho de Wang e Boyd [8], que será explorada na seção 2.3.4 e no capítulo 3.

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t), \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.49)$$

Para realizar uma predição geralmente assume-se que os vetores de perturbação  $\mathbf{w}(t)$  para diferentes valores de  $t$  são independentes e identicamente distribuídos (IID) e que  $\bar{\mathbf{w}} = \mathbb{E}\{\mathbf{w}(t)\}$ , que denota o valor esperado de  $\mathbf{w}(t)$ , é conhecido. Em aplicações nas quais o valor de  $\bar{\mathbf{w}}$  não é conhecido, é comum a adoção de um vetor nulo para o valor esperado da perturbação. O sinal de controle  $\mathbf{u}(t)$  é obtido a cada passo através da minimização de uma função custo que depende dos sinais de controle e das predições dos estados dentro de um horizonte de predição  $T_h$  [62]. Há diferentes formulações para a função objetivo e será empregada a apresentada na equação (2.50), onde  $s(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  é o custo no instante de tempo  $t$  [8]. A função custo é definida como uma função quadrática apresentada na equação (2.51), onde  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a penalização do estado,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}' \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é a penalização do controle e  $\mathbf{S}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a penalização do produto cruzado. Em aplicações práticas é comum que se considere uma matriz  $\mathbf{S}_c$  nula [54]. É importante mencionar que uma matriz de ponderação positiva semidefinida é considerada na equação (2.51).

$$J_{EE} = \frac{1}{T_h} \sum_{\tau=t}^{t+T_h-1} s(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \quad (2.50)$$

$$s(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S}_c \\ \mathbf{S}_c' & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

<sup>9</sup>Como apenas as dimensões de  $\mathbf{u}(t)$  e do vetor  $\mathbf{B}$  são alteradas no caso multivariável, o desenvolvimento será mantido genérico com notação vetorial para  $\mathbf{u}(t)$  e matricial para  $\mathbf{B}$ . No caso geral,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , onde  $m$  é o número de entradas. No caso monovariável basta considerar  $m = 1$ , o que implica em um sinal de controle escalar e um vetor de entrada.

As restrições são modeladas como um conjunto de  $l$  desigualdades lineares de forma acoplada. Isso é apresentado na equação (2.52), onde  $\mathbf{F}_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $\mathbf{F}_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$  e  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^l$  podem ser facilmente obtidas dos dados do problema e  $\leq$  denota desigualdade de vetor (elemento a elemento).

$$\mathbf{F}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_2 \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{f} \quad (2.52)$$

O problema a ser resolvido consiste em encontrar um sinal de controle  $\mathbf{u}(t)$  no instante atual  $t$  através da solução de um problema de otimização que considera o estado atual  $\mathbf{x}(t)$ , o funcional  $J_{EE}$ , as restrições e as condições obtidas do modelo da planta.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \frac{1}{T_h} \sum_{\tau=t}^{t+T_h-1} s(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{F}_1 \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{F}_2 \mathbf{u}(\tau) \leq \mathbf{f}, \tau = t, \dots, t + T_h - 1; \\ & && \mathbf{x}(\tau + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) + \bar{\mathbf{w}}, \\ & && \tau = t, \dots, t + T_h - 2; \\ & && \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t + T_h - 1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t + T_h - 1) + \bar{\mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Deve-se notar que o somatório na função objetivo (equação (2.53)) tem limite superior em  $t + T_h - 1$ , visto que a última restrição de igualdade na mesma equação impõe que o sistema convirja ao ponto de equilíbrio (origem) em  $t + T_h$ . A adoção da restrição terminal de igualdade leva a garantia de estabilidade caso o problema seja factível, porém em muitos casos é necessário aumentar demasiadamente o horizonte de predição para que o problema se torna factível. Existem outras abordagens menos restritivas que também oferecem garantia de estabilidade no caso nominal, porém será mantida a abordagem original de Wang e Boyd [8]. Para uma abordagem baseada em custo terminal sugere-se a leitura de Flesch *et al.* [54].

O problema pode ser escrito em uma forma padrão através da definição de uma variável de otimização  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{T_h m + (T_h - 1)n}$  como

$$\mathbf{z} = [\mathbf{u}(t)' \ \mathbf{x}(t+1)' \ \mathbf{u}(t+1)' \ \dots \ \mathbf{x}(t+T_h-1)' \ \mathbf{u}(t+T_h-1)']'.$$

Assim, o problema de programação quadrática (PQ) torna-se a expressão da equação (2.54)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \mathbf{z}' \mathbf{H}_c \mathbf{z} + \mathbf{g}' \mathbf{z} \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{P}_c \mathbf{z} \leq \mathbf{h}; \\ & && \mathbf{C}_c \mathbf{z} = \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde as matrizes e vetores  $\mathbf{H}_c \in \mathbb{R}^{T_h m + (T_h - 1)n \times T_h m + (T_h - 1)n}$ ,  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{T_h m + (T_h - 1)n}$ ,  $\mathbf{P}_c \in \mathbb{R}^{T_h l \times T_h m + (T_h - 1)n}$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{T_h l}$ ,  $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{T_h n \times T_h m + (T_h - 1)n}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{T_h n}$  são dados

por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \mathbf{S}_c & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_c' & \mathbf{R} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Q} & \mathbf{S}_c \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{S}_c' & \mathbf{R} \end{bmatrix}; \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{S}_c' \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{P}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{F}_1 \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{f} \\ \vdots \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{C}_c &= \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A} & -\mathbf{B} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{A} & -\mathbf{B} \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{w}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{w}} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como apresentada aqui, a formulação do problema torna-se muito mais simples que a utilizada nos casos do GPC e do DMC, uma vez que as expressões para formação das matrizes e vetores do problema são bastante diretas. O preço pago pela simplicidade é a dimensão do problema, que torna-se muito maior que nos dois casos citados anteriormente. Isso ocorre principalmente pelo fato de as restrições de igualdade não serem explicitamente substituídas no modelo e também pelo fato de a representação por variáveis de estado manter internamente todas as informações necessárias para definir o estado no qual o sistema se encontra, o que não ocorre numa representação do tipo entrada-saída. Uma opção para reduzir a dimensão do problema é substituir explicitamente as restrições de igualdade no funcional, porém nesse caso a estrutura especial e a esparsidade das matrizes, que serão necessárias para desenvolvimentos futuros, serão perdidas. Detalhes sobre a importância dessa estrutura especial para acelerar o cálculo do sinal de controle da abordagem no espaço de estados são apresentados na seção 2.3.4 e o problema será tratado em detalhes para sistemas com atraso no capítulo 3.

Nesta representação, a única diferença entre os casos SISO e MIMO está na dimensão das matrizes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  que descrevem o comportamento do sistema. Como foi mantido um número de entradas genérico  $m$  e como a abordagem não considera as saídas e sim os estados, todo o desenvolvimento

desta seção já se estende para o caso MIMO.

### 2.3.4 Cômputo rápido do problema de otimização

Nos últimos anos vários trabalhos apresentados na literatura se preocuparam em desenvolver técnicas para acelerar o tempo de resolução do problema de otimização decorrente do MPC [8, 70, 71, 72, 73]. A quase totalidade desses trabalhos se preocupou em resolver problemas decorrentes da abordagem por variáveis de estado, que será tratada neste trabalho com a nomenclatura controle preditivo baseado em modelo com modelagem no espaço de estados (MPC<sub>EE</sub>).

Wright [70] apresentou um método de ponto interior (IP, do inglês *interior point*) com tempo polinomial para resolução do problema de PQ decorrente do cálculo do sinal de controle do MPC<sub>EE</sub>. Desenvolvimento adicional foi apresentado em Wright [71], onde especializações são apresentadas para os métodos de IP e conjunto ativo (AS, do inglês *active set*), incluindo o uso de um método IP com inicialização infactível e inicialização das variáveis de otimização<sup>10</sup>. Wills e Heath [72] propuseram o uso de um termo fixo de ponderação da barreira no método de IP para acelerar o cálculo em problemas de controle. Wang e Boyd [8] descreveram um conjunto de métodos apresentados na literatura de otimização que podem ser empregados para acelerar a resolução do MPC<sub>EE</sub>. Com relação ao GPC, Camacho e Bordons [5] propuseram algumas manipulações para simplificar o problema de otimização no caso do GPC restrito para alguns casos especiais de restrição. Além disso, Zheng [73] propôs uma redução no número de restrições do GPC considerando apenas aquelas relacionadas ao primeiro incremento de controle, visto que ele é que será efetivamente aplicado à planta.

### Cômputo rápido do MPC<sub>EE</sub>

Wang e Boyd [8] propuseram o emprego de um método primal de barreira com ponto inicial infactível para resolver o problema da equação (2.54), que deve ser resolvido a cada período de amostragem. As restrições de desigualdade são substituídas por um termo de barreira logarítmica na função objetivo para que se obtenha um problema aproximado (equação (2.55)) cuja solução é mais simples e converge para a solução do problema original quando  $\kappa$  tende a zero.  $\kappa > 0$  é a ponderação da barreira e  $\phi(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{IT_h} -\log(h_i - \mathbf{p}_i' \mathbf{z})$ , onde  $\mathbf{p}_i'$  é a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{P}_c$ , é a barreira logarítmica (note que  $\phi(\mathbf{z}) = \infty$

---

<sup>10</sup>A inicialização das variáveis com valores adequados obtidos a partir da iteração anterior é geralmente tratada pelo nome de *warm start*.

se uma restrição de desigualdade é violada).

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \mathbf{z}'\mathbf{H}_c\mathbf{z} + \mathbf{g}'\mathbf{z} + \kappa\phi(\mathbf{z}) \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{C}_c\mathbf{z} = \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

O problema da equação (2.55) é um problema convexo de otimização com função objetivo suave e restrições lineares de igualdade. De acordo com Wright [71], uma sequência de métodos de Newton com inicialização infactível pode ser usada para resolver o problema para uma sequência decrescente de  $\kappa$ . É comum reduzir  $\kappa$  por um fator de 10 ou 20 a cada vez que a solução da equação (2.55) é computada [62]. Para um dado  $\kappa$ , uma variável dual (vetor de multiplicadores de Lagrange)  $\nu \in \mathbb{R}^{T_h m}$  é associada com a restrição de igualdade  $\mathbf{C}_c\mathbf{z} = \mathbf{b}$ . O método de Newton com inicialização infactível, que é um método iterativo, provê uma série de passos primal e dual ( $\Delta\mathbf{z}$  e  $\Delta\nu$ ) de forma a encontrar as variáveis primal e dual ( $\mathbf{z}$  e  $\nu$ ) que minimizam o problema. Cada passo é encontrado pela solução da equação (2.56), onde  $\mathbf{r}_d = 2\mathbf{H}_c\mathbf{z} + \mathbf{g} + \kappa\mathbf{P}_c'\mathbf{d} + \mathbf{C}_c'\nu$  é o resíduo dual,  $\mathbf{r}_p = \mathbf{C}_c\mathbf{z} - \mathbf{b}$  é o resíduo primal,  $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_d' \ \mathbf{r}_p']'$  é o vetor de resíduos e  $d_i = 1/(h_i - \mathbf{p}_i'\mathbf{z})$  é o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{d}$ . Uma vez computados os passos, um tamanho de passo  $s \in (0, 1]$  é encontrado com emprego de uma busca linear com retrocesso (*backtracking line search*) na norma do resíduo  $\mathbf{r}$ , tomando cuidado para respeitar a restrição  $\mathbf{P}_c\mathbf{z} < \mathbf{h}$  [62]. Os valores de  $\mathbf{z}$  e  $\nu$  são atualizados e o processo é repetido até que a norma dos resíduos seja menor ou igual a um limiar aceitável.

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{H}_c + \kappa\mathbf{P}_c'\mathbf{diag}(\mathbf{d})^2\mathbf{P}_c & \mathbf{C}_c' \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{z} \\ \Delta\nu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_d \\ \mathbf{r}_p \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

A operação crítica é o cômputo do passo de Newton, que custaria  $(1/3)T_h^3(2n+m)^3$  operações caso a estrutura das matrizes não fosse explorada. Wang e Boyd [8] propuseram que cada passo de Newton pode ser encontrado empregando eliminação de bloco, descrita pela seguinte sequência de passos, onde  $\Phi$  é definida como  $\Phi = 2\mathbf{H}_c + \kappa\mathbf{P}_c'\mathbf{diag}(\mathbf{d})^2\mathbf{P}_c$  para simplificar a notação.

1. Forme a matriz  $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_c\Phi^{-1}\mathbf{C}_c'$  e o vetor  $\beta = -\mathbf{r}_p + \mathbf{C}_c^{-1}\mathbf{r}_d$ .
2. Determine  $\Delta\nu$  resolvendo  $\mathbf{Y}\Delta\nu = -\beta$ .
3. Determine  $\Delta\mathbf{z}$  resolvendo  $\Phi\Delta\mathbf{z} = -\mathbf{r}_d - \mathbf{C}_c'\Delta\nu$ .

Como a matriz  $\Phi$  é simétrica, positiva definida e diagonal por blocos com o primeiro bloco  $m \times m$  e os demais  $T_h - 1$  blocos  $(n+m) \times (n+m)$ , sua inversa  $\Phi^{-1}$  pode ser eficientemente calculada no passo 1 empregando a fatoração de Cholesky de cada bloco [74]. O passo 2 pode ser eficientemente resolvido calculando a fatoração de Cholesky de  $\mathbf{Y}$  recursivamente ( $\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{L}'$ , onde

$\mathbf{L}_{1,1} = \mathbf{Y}_{1,1}$ ,  $\mathbf{L}_{i,i}\mathbf{L}'_{i+1,i} = \mathbf{Y}_{i,i+1}$   $i = 1, \dots, T_h - 1$  e  $\mathbf{L}_{i,i}\mathbf{L}'_{i,i} = \mathbf{Y}_{i,i} - \mathbf{L}_{i,i-1}\mathbf{L}'_{i,i-1}$   $i = 2, \dots, T_h$ ), seguida por substituição inversa e direta (*backward-and-forward substitution*) com  $\mathbf{L}\mathbf{q} = -\beta$  e  $\mathbf{L}'\Delta\mathbf{v} = \mathbf{q}$ . O passo 3 pode ser eficientemente resolvido empregando a fatoração de Cholesky de  $\Phi$  calculada no passo 1. Deve-se atentar ao fato de que o cálculo pode ser realizado de forma mais eficiente devido às características especiais das matrizes que descrevem o problema para a modelagem empregada. Em especial, é necessário que  $\Phi$  seja simétrica, positiva definida e diagonal por blocos e que  $\mathbf{Y}$  seja bloco tri-diagonal. Wang e Boyd [8] afirmam que o custo total requerido pelo método proposto é da ordem de  $T_h(m+n)^3$ .

### Métodos gerais para todas as abordagens

Esta seção traz uma coleção de métodos apresentados na literatura que podem ser empregados para resolver o problema de otimização de forma mais rápida. Como as estratégias estão relacionadas somente ao problema de otimização elas podem ser aplicadas a qualquer uma das técnicas de MPC. O primeiro método explora a inicialização das variáveis a cada cálculo e os demais são aproximações para o problema de otimização que podem trazer ganhos significativos sem prejudicar em demasia o resultado final. Uma estratégia MPC encontra os melhores valores para o sinal de controle com base em uma função custo definida por uma função objetivo. Na maioria das aplicações reais a solução não precisa ser exatamente a melhor, mas precisa estar próxima desta. O controle resultante do MPC é geralmente baseado em um plano de longo prazo que considera modelagem perfeita e não considera perturbações. Essa não é a realidade em aplicações práticas e uma solução aproximada, que é calculada de forma muito mais rápida, pode ser quase tão boa quanto a solução exata [54].

**Inicialização das variáveis** Como o MPC calcula o sinal de controle atual predizendo os comportamentos do sinal de controle e do comportamento do processo sendo controlado dentro de um horizonte, uma boa abordagem de ponto inicial para o problema de otimização é a solução factível encontrada na iteração anterior devidamente deslocada no tempo [5]. Wright [71] relatou que métodos de AS geralmente obtêm maiores ganhos com a inicialização adequada que os métodos de IP. Quando um método de AS é empregado não só o ponto inicial pode ser inicializado com base na iteração anterior como também o conjunto ativo de restrições [5]. Além disso, é importante notar que se a referência sofreu uma alteração no instante  $t$ , este procedimento pode não ser uma boa opção [54].

Para o problema do MPC<sub>EE</sub>, Wang e Boyd [8] propuseram o emprego

da trajetória previamente calculada no instante  $t - 1$ , dada por

$$\tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{\mathbf{u}}(t-1)' \tilde{\mathbf{x}}(t)' \dots \tilde{\mathbf{x}}(t+T_h-2)' \tilde{\mathbf{u}}(t+T_h-2)']',$$

como ponto inicial para o problema de otimização no instante  $t$ , como

$$\mathbf{z}^{\text{init}} = [\tilde{\mathbf{u}}(t)' \tilde{\mathbf{x}}(t+1)' \dots \tilde{\mathbf{x}}(t+T_h-2)' \tilde{\mathbf{u}}(t+T_h-2)' \mathbf{0}' \mathbf{0}']'.$$

Como reportado por Flesch *et al.* [54], no caso no qual é considerada restrição terminal de igualdade, resultado um pouco melhor pode ser obtido setando o último elemento do vetor como a ação de controle ( $\mathbf{u}(t+T_h-1)$ ) que é solução de  $\mathbf{B}\mathbf{u}(t+T_h-1) = -\bar{\mathbf{w}}$ . Essa escolha faz com que o sinal de controle  $\mathbf{u}$  compense o termo  $\bar{\mathbf{w}}$ , mantendo o sistema em equilíbrio na origem. Nos casos nos quais a matriz  $\mathbf{B}$  não é quadrada pode não ser possível encontrar uma solução exata, todavia nesses casos o emprego da pseudo-inversa da matriz  $\mathbf{B}$  leva a uma solução que minimiza a diferença entre  $\mathbf{B}\mathbf{u}(t+T_h-1)$  e  $-\bar{\mathbf{w}}$ .

Para o problema do GPC, Camacho e Bordons [5] propuseram um procedimento semelhante no qual o valor previamente calculado para  $\Delta\mathbf{u}$  é deslocado de um período de amostragem e um termo nulo é adicionado no final para formar o ponto inicial. Neste caso, o melhor valor para ser adicionado realmente é zero, visto que o ruído tem valor esperado nulo.

**$\kappa$  fixo** Se um método de IP é usado, o problema pode ser substancialmente simplificado pela resolução do problema para um valor fixo de  $\kappa$  ao invés de resolvê-lo para uma sequência decrescente com  $\kappa \rightarrow 0$  [8, 72]. O maior problema está em definir o valor ideal de  $\kappa$  que combina um número razoável de passos de Newton e uma diferença aceitável entre a solução aproximada e a solução exata. Tal seleção depende dos dados do problema e precisa ser analisada em cada caso.

**Número fixo de iterações** Wang e Boyd [8], com base em diversas simulações numéricas, propuseram o uso de um número limite de iterações muito baixo (entre 3 e 10) para o cálculo da solução ótima a cada período de amostragem. Assim, o processo de minimização é executado no máximo  $K^{\text{max}}$  vezes, independentemente de quão grande o resíduo seja. Esta estratégia pode ser empregada tanto para o método de IP quanto para o de AS.

## 2.4 Considerações finais

Este capítulo apresentou os principais desenvolvimentos existentes na literatura para controle de sistemas com atraso de transporte. Deve-se, entretanto, atentar ao fato de que por ser um assunto extremamente explorado

na literatura, algumas técnicas específicas não foram incluídas. De modo geral, o problema de controle de sistemas SISO com atraso encontra-se bem resolvido na literatura. Tanto na abordagem DTC quanto na MPC os resultados são bastante consistentes e existem pequenas particularidades em aberto. Como primeira parte deste trabalho de doutorado procurou-se explorar essas particularidades a fim de tornar ainda mais completo o arcabouço teórico da área.

No caso MIMO, a quase totalidade das propostas da literatura emprega uma abordagem MPC para tratar problemas com atraso, especialmente se a planta a ser controlada apresenta dinâmicas integradoras ou instáveis. Recentemente surgiu na literatura uma técnica DTC para o controle de processos com atraso instáveis em malha aberta, porém não existe uma estrutura geral baseada no PS para tratar esses casos. Ao contrário do cenário do caso SISO, os desenvolvimentos para o caso de processos MIMO com atraso são bastante incipientes e existe grande necessidade de novos desenvolvimentos na área.



### 3 CÔMPUTO RÁPIDO DO MPC PARA SISTEMAS COM ATRASO

A grande maioria das técnicas para aceleração do cálculo em MPC explora a estrutura das matrizes do problema e é voltada à abordagem que modela o sistema através de variáveis de estado. Nenhum trabalho da literatura analisa especificamente propostas de aceleração para essa abordagem no caso particular de problemas com atraso, que são muito comuns na indústria. A formulação tradicional do GPC, por outro lado, considera de forma explícita o atraso no modelo da planta. Este capítulo apresenta uma breve discussão sobre os impactos do uso da formulação usual do controle preditivo baseado em modelo com modelagem no espaço de estados (MPC<sub>EE</sub>) rápido [8] para sistemas com atraso e, guiado pelas limitações ali apresentadas, propõe uma formulação inédita para o problema que permite o uso eficiente das técnicas de cômputo rápido também nos problemas com atraso de transporte. Antes dos estudos de caso, são apresentadas ideias de estratégias para cômputo rápido no caso da abordagem controle preditivo baseado em modelo com modelagem em função de transferência (MPC<sub>FT</sub>).

#### 3.1 Discussão sobre a formulação tradicional do MPC<sub>EE</sub> para sistemas com atraso

Apesar de a formulação tradicional do MPC<sub>EE</sub> empregada para cômputo rápido por Wang e Boyd [8] ser bastante boa para fins de análise, sua aplicação não é adequada para aplicações práticas com atrasos dominantes ou com pequenos períodos de amostragem [54]. Existem outras formulações para MPC que empregam variáveis de estado, porém elas não são adequadas para cômputo rápido. Por esse motivo, será tratada nesta seção a formulação de Wang e Boyd [8], que não prevê a inclusão de atrasos no modelo. Uma possibilidade de inserir atrasos nessa formulação no espaço de estados consiste em utilizar um modelo aumentado com matrizes

$$\mathbf{A}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e um vetor de estados dado por

$$\xi = [\mathbf{x}(t)' \mathbf{u}(t-d)' \mathbf{u}(t-d+1)' \dots \mathbf{u}(t-2)' \mathbf{u}(t-1)']',$$

o que torna o problema a ser resolvido muito grande tanto quando o atraso é grande quanto no caso em que o atraso não tem magnitude elevada porém o período de amostragem é pequeno. Assim, a primeira desvantagem da formulação tradicional do MPC<sub>EE</sub> rápido para sistemas com atraso é que a dimensão do modelo discreto cresce conforme o valor do atraso é aumentado ou conforme o período de amostragem é diminuído. Essa última condição é especialmente indesejada, uma vez que o esforço computacional para cálculo do sinal de controle tende a crescer justamente quando deseja-se que ele seja pequeno (para que o sinal de controle possa ser determinado dentro do período de amostragem).

A segunda desvantagem da formulação tradicional do MPC<sub>EE</sub> é que não é possível definir dois horizontes diferentes para observação dos estados e dos sinais de controle, uma vez que o único parâmetro para os horizontes é o parâmetro  $T_h$ . Na prática, quando são empregadas outras estratégias de controle, é muito comum encontrar horizontes de controle muito menores que os horizontes de predição (não é difícil encontrar relações da ordem de dez vezes). Isso ocorre principalmente porque a dimensão das variáveis de busca cresce com o crescimento do horizonte de controle e não com o do horizonte de predição. Além disso, para um sistema com atraso, a variação do controle cessa  $d$  instantes de tempo antes da variação nos estados, onde  $d$  é o atraso discreto. No caso no qual os horizontes são os mesmos, o processo de minimização precisa considerar tanto as variáveis de estado quando os sinais de controle no mesmo intervalo, o que é um desperdício de esforço computacional.

A terceira desvantagem da formulação tradicional do MPC<sub>EE</sub> é que ela não permite a escolha de pontos diferentes para início de observação dos horizontes de controle e predição. Essa possibilidade de escolher pontos diferentes para início das observações é especialmente desejável quando o sistema apresenta atraso, uma vez que a variação no estado inicia somente depois de passado o período relativo ao atraso. Assim, uma escolha natural para o início do horizonte de controle é  $t$ , enquanto para o horizonte de predição a escolha natural é  $t + d + 1$ .

Adicionalmente, assume-se que todos os estados podem ser medidos no instante  $t$ , o que quase nunca é verdade. Para contornar esse problema é necessário projetar um observador de estados baseado nas variáveis medidas e nos sinais de controle. Na realidade, isso não é um problema, mas um fato que deve ser levado em consideração na escolha da estratégia que será empregada: MPC<sub>EE</sub> ou MPC<sub>FT</sub>.

Da forma como está proposto o problema atualmente, uma possibilidade de abordagem para reduzir o número de restrições em sistemas com atraso consiste em definir as restrições nos estados somente para aqueles associados com as dinâmicas sem atraso da planta. Na representação aumentada no espaço de estados, o atraso aumenta o número de estados em  $d$  e cada um desses estados adicionais consiste somente em um sustentador para transferir o sinal para o próximo estado no instante de amostragem seguinte. Como os valores são somente cascadeados, não é necessário associar uma restrição a cada um dos estados. Esse procedimento simples reduz o número de restrições em pelo menos  $T_h d$  se comparado com a abordagem tradicional.

### 3.2 Formulação inédita para o MPC<sub>EE</sub>

Esta seção apresenta uma formulação inédita para o MPC<sub>EE</sub> que resolve os três problemas da abordagem tradicional apresentados na seção 3.1. Além disso, mostra-se que os métodos de cômputo rápido do MPC apresentados na literatura podem ser diretamente aplicados a essa nova formulação. Neste momento a formulação está consolidada para o caso SISO e só é capaz de compensar os efeitos do atraso comum no caso MIMO.

O primeiro problema da formulação tradicional – o crescimento do tamanho do problema com o aumento da magnitude do atraso – pode ser resolvido através da eliminação explícita do atraso do modelo da planta. Isso pode ser feito através da implementação do modelo utilizando as matrizes  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  e  $\bar{\mathbf{D}}$ , que formam uma realização de  $\bar{G}(z)$ , onde  $G(z) = \bar{G}(z)z^{-d}$ . Assim, a representação da transição de estado no domínio do tempo torna-se

$$\mathbf{x}(t+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t-d) + \mathbf{w}(t).$$

Entretanto, a representação da transição de estados pode ser deslocada  $d$  instantes de tempo e tornar-se

$$\mathbf{x}(t+d+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t+d) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t+d).$$

Como os valores dos vetores de perturbação do instante  $t+1$  ao instante  $t+d$  não são conhecidos,  $\mathbf{x}(t+d+1)$  não pode ser explicitamente determinado em  $t$ , porém sua predição  $\mathbf{x}(t+d+1|t)$  pode. Entretanto, se uma nova variável  $\tilde{\mathbf{x}}$  for definida como

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t+d|t),$$

a expressão de transição de estados para predição torna-se

$$\tilde{\mathbf{x}}(t+1) = \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{w}}.$$

Como não há efeito de  $\mathbf{u}(t)$  em  $\mathbf{x}(t+1|t), \dots, \mathbf{x}(t+d|t)$  devido ao atraso,  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  depende somente das ações de controle passadas e do estado atual  $\mathbf{x}(t)$ . Dessa forma, aplicando-se recursivamente a equação de transição de estados, pode-se calcular  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  como

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}^d \mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^d \left\{ \bar{\mathbf{A}}^{j-1} \left[ \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t-j) + \bar{\mathbf{w}} \right] \right\}.$$

Assim, é intuitivo que o procedimento de otimização somente necessita ser realizado de  $\tilde{\mathbf{x}}(t+1)$  em diante, uma vez que  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  pode ser explicitamente determinado no instante  $t$  [75]. Isso resolve o terceiro problema da formulação padrão do MPC<sub>EE</sub>, ou seja, permite pontos distintos de início para os horizontes de predição e controle. A única desvantagem dessa formulação é a necessidade de manter registro das últimas  $d$  ações de controle em um vetor separado, uma vez que eles deixaram de estar explicitamente incluídos no modelo da planta utilizado para predição pelo controlador.

O segundo problema (mesmo horizonte para predição e controle) pode ser resolvido através da definição de dois valores diferentes para o horizonte de controle ( $N_u$ ) e horizonte de predição do estado ( $N_x$ ). Nesse caso, o problema passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{\tau=t}^{t+N_u-1} s(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + \sum_{\tau=t+N_u}^{t+N_x-1} s_x(\tilde{\mathbf{x}}(\tau)) + \\ & s_f(\tilde{\mathbf{x}}(t+N_x)) \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{F}_x \tilde{\mathbf{x}}(\tau) + \mathbf{F}_u \mathbf{u}(\tau) \leq \mathbf{f}, \tau = t, \dots, t+N_x-1; \\ & \mathbf{F}_f \tilde{\mathbf{x}}(t+N_x) \leq \mathbf{f}_f; \\ & \tilde{\mathbf{x}}(\tau+1) = \bar{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}(\tau) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(\tau) + \bar{\mathbf{w}}, \\ & \tau = t, \dots, t+N_x-1; \\ & \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(\tau-1), \tau = t+N_u, \dots, t+N_x. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Agora os sinais de controle de  $N_u$  a  $N_x$  não são mais considerados no problema de otimização e  $\mathbf{u}(t+N_u+j) = \mathbf{u}(t+N_u-1)$ ,  $j = 0, \dots, N_x - N_u$ , ou seja, considera-se que o controle permanece constante nesse intervalo. Adicionalmente, é necessário definir uma função custo  $s_x$  para os estados nesse intervalo.

O problema apresentado na equação (3.1) pode ser reescrito na forma padrão da equação (2.54) se uma variável  $\tilde{\mathbf{z}}$  for definida como

$$\tilde{\mathbf{z}} = [\mathbf{u}(t)' \ \tilde{\mathbf{x}}(t+1)' \ \dots \ \mathbf{u}(t+N_u-1)' \ \tilde{\mathbf{x}}(t+N_u)' \ \tilde{\mathbf{x}}(t+N_u+1)' \ \dots \ \tilde{\mathbf{x}}(t+N_x)']'.$$

As técnicas de cômputo rápido detalhadas na seção 2.3.4 podem ser diretamente utilizadas em conjunto com essa formulação. A nova matriz  $\check{\Phi}$  tem a mesma estrutura da nova matriz  $\check{\mathbf{H}}_c$  e sua inversa pode ser determinada de forma eficiente do ponto de vista computacional.

Todavia, esse problema não será tratado em detalhes pois suas dimensões podem ser ainda mais reduzidas caso ele seja reescrito na forma equivalente descrita na sequência. Algumas das restrições de igualdade podem ser explicitamente substituídas no modelo para que se escreva de  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u)$  a  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_x)$  como funções de  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1)$  e  $\mathbf{u}(t + N_u - 1)$ , mantendo a estrutura especial. A expressão geral para as predições é

$$\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k) = \left[ \sum_{j=0}^k \bar{\mathbf{A}}^j \right] \left[ \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + N_u - 1) + \bar{\mathbf{w}} \right] + \bar{\mathbf{A}}^{k+1} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1), \quad k = 0 \dots N_x - N_u.$$

A dedução dessa expressão pode ser realizada por indução matemática a partir da substituição recursiva da equação de transição de estado, como segue:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u) = \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + N_u - 1) + \bar{\mathbf{w}},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + 1) &= \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + N_u - 1) + \bar{\mathbf{w}} \\ &= \bar{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1) + [\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{I}] \left[ \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + N_u - 1) + \bar{\mathbf{w}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + 2) &= \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + 1) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + N_u - 1) + \bar{\mathbf{w}} \\ &= \bar{\mathbf{A}}^3\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1) + [\bar{\mathbf{A}}^2 + \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{I}] \left[ \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t + N_u - 1) + \bar{\mathbf{w}} \right], \end{aligned}$$

até que se chegue a  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k)$ . Assim, é possível incorporar os custos desses estados nos custos de  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1)$  e  $\mathbf{u}(t + N_u - 1)$  e eliminar as restrições de igualdade a eles associados. Isso pode ser realizado verificando-se que o somatório dos custos até  $t + N - 1$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N_x - N_u - 1} [\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k)' \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k)] = \\ \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1)' \mathbf{Q}_e \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1) + \\ \mathbf{u}(t + N_u - 1)' \mathbf{R}_e \mathbf{u}(t + N_u - 1) + q_e, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_e &= \sum_{k=0}^{N_x-N_u-1} \left[ (\bar{\mathbf{A}}^{k+1})' \mathbf{Q} \bar{\mathbf{A}}^{k+1} \right], \\ \mathbf{R}_e &= \bar{\mathbf{B}}' \sum_{k=0}^{N_x-N_u-1} \left[ \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j)' \mathbf{Q} \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j) \right] \bar{\mathbf{B}}, \\ q_e &= \bar{\mathbf{w}}' \sum_{k=0}^{N_x-N_u-1} \left[ \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j)' \mathbf{Q} \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j) \right] \bar{\mathbf{w}},\end{aligned}$$

e o custo final pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(t+N_x)' \mathbf{Q}_f \tilde{\mathbf{x}}(t+N_x) &= \tilde{\mathbf{x}}(t+N_u-1)' \mathbf{Q}_{fe} \tilde{\mathbf{x}}(t+N_u-1) + \\ &\quad \mathbf{u}(t+N_u-1)' \mathbf{R}_{fe} \mathbf{u}(t+N_u-1) + q_{fe},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{fe} &= (\bar{\mathbf{A}}^{N_x-N_u+1})' \mathbf{Q}_f \bar{\mathbf{A}}^{N_x-N_u+1}, \\ \mathbf{R}_{fe} &= \bar{\mathbf{B}}' \sum_{k=0}^{N_x-N_u} (\bar{\mathbf{A}}^k)' \mathbf{Q}_f \sum_{k=0}^{N_x-N_u} (\bar{\mathbf{A}}^k) \bar{\mathbf{B}}, \\ q_{fe} &= \bar{\mathbf{w}}' \sum_{k=0}^{N_x-N_u} (\bar{\mathbf{A}}^k)' \mathbf{Q}_f \sum_{k=0}^{N_x-N_u} (\bar{\mathbf{A}}^k) \bar{\mathbf{w}}.\end{aligned}$$

Os pesos equivalentes para  $\tilde{\mathbf{x}}(t+N_u-1)$  e  $\mathbf{u}(t+N_u-1)$  são dados respectivamente por

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_g &= \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_{fe} \text{ e} \\ \mathbf{R}_g &= \mathbf{R} + \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_{fe}.\end{aligned}$$

Note que  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  aparecem nas matrizes  $\mathbf{Q}_g$  e  $\mathbf{R}_g$  pois representam os custos associados a  $\tilde{\mathbf{x}}(t+N_u-1)$  e  $\mathbf{u}(t+N_u-1)$ , respectivamente. Além disso, caso considere-se que o custo terminal tem um termo linear, ele aparece na nova formulação como

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_g &= (\bar{\mathbf{A}}^{N_x-N_u+1})' \mathbf{q}_f \text{ e} \\ \mathbf{r}_g &= \bar{\mathbf{B}}' \sum_{k=0}^{N_x-N_u} (\bar{\mathbf{A}}^k)' \mathbf{q}_f.\end{aligned}$$

As constantes independentes  $q_e$  e  $q_{fe}$  podem ser removidas do problema de otimização sem perda de generalidade, visto que somente deslocam a função custo, sem influenciar no valor ótimo da solução.

A dedução das matrizes de custo pode ser realizada através da substituição dos termos  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k)$  com  $k = 0 \dots N_x - N_u - 1$  na função quadrática de custo  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k)' \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k)$  e posterior soma dos termos. Um termo genérico em função de  $k$  que compõe a soma pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k)' \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k) = & \\ & \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1)' (\bar{\mathbf{A}}^{k+1})' \mathbf{Q} (\bar{\mathbf{A}}^{k+1}) \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1) + \\ & \mathbf{u}(t + N_u - 1)' \bar{\mathbf{B}}' \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j)' \mathbf{Q} \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t + N_u - 1) + \\ & \bar{\mathbf{w}}' \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j)' \mathbf{Q} \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

O custo terminal também segue a mesma lógica, com substituição de  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_x)$  escrito em função de  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1)$  e  $\mathbf{u}(t + N_u - 1)$  na expressão do custo terminal, o que resulta em

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_x)' \mathbf{Q}_f \tilde{\mathbf{x}}(t + N_x) + \mathbf{q}_f \tilde{\mathbf{x}}(t + N_x) = & \\ & \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1)' (\bar{\mathbf{A}}^{N_x - N_u + 1})' \mathbf{Q}_f (\bar{\mathbf{A}}^{N_x - N_u + 1}) \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1) + \\ & \mathbf{u}(t + N_u - 1)' \bar{\mathbf{B}}' \sum_{j=0}^{N_x - N_u} (\bar{\mathbf{A}}^j)' \mathbf{Q}_f \sum_{j=0}^{N_x - N_u} (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t + N_u - 1) + \\ & \bar{\mathbf{w}}' \sum_{j=0}^{N_x - N_u} (\bar{\mathbf{A}}^j)' \mathbf{Q}_f \sum_{j=0}^{N_x - N_u} (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

Adicionalmente, para que os estados  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u)$  a  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_x)$  possam ser removidos do problema de otimização, é necessário escrever as restrições de desigualdade associadas a esses estados em função dos sinais de controle e dos estados que permanecerão como variáveis de busca do problema. Uma forma de fazer isso e ao mesmo tempo manter uma estrutura adequada para utilização das técnicas de cômputo rápido apresentadas na seção 2.3.4 consiste em expressar essas restrições como funções de  $\tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1)$  e  $\mathbf{u}(t + N_u - 1)$ . Para um  $k = 0, \dots, N_x - N_u - 1$  genérico, é possível escrever

$\mathbf{F}_x \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u + k) + \mathbf{F}_u \mathbf{u}(t + N_u - 1) \leq \mathbf{f}$  como

$$\mathbf{F}_x \bar{\mathbf{A}}^{k+1} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1) + \left[ \mathbf{F}_x \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{F}_u \right] \mathbf{u}(t + N_u - 1) \leq \mathbf{f} - \mathbf{F}_x \sum_{j=0}^k (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{w}}.$$

De modo equivalente, as restrições do estado terminal  $\mathbf{F}_f \tilde{\mathbf{x}}(t + N_x) \leq \mathbf{f}_f$  podem ser escritas como

$$\mathbf{F}_f \bar{\mathbf{A}}^{N_x - N_u + 1} \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1) + \mathbf{F}_f \sum_{j=0}^{N_x - N_u} (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t + N_u - 1) \leq \mathbf{f}_f - \mathbf{F}_f \sum_{j=0}^{N_x - N_u} (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{w}}.$$

Assim, é possível expressar as restrições de  $t + N_u$  a  $t + N_x$  como  $\tilde{\mathbf{F}}_x \tilde{\mathbf{x}}(t + N_u - 1) + \tilde{\mathbf{F}}_u \mathbf{u}(t + N_u - 1) \leq \tilde{\mathbf{f}}$ , onde

$$\tilde{\mathbf{F}}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{F}_x \bar{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_x \bar{\mathbf{A}}^{N_x - N_u} \\ \mathbf{F}_f \bar{\mathbf{A}}^{N_x - N_u + 1} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_x (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{I}) \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{F}_u \\ \vdots \\ \mathbf{F}_x \sum_{j=0}^{N_x - N_u - 1} (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_f \sum_{j=0}^{N_x - N_u} (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{F}_x \bar{\mathbf{w}} \\ \mathbf{f} - \mathbf{F}_x (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{I}) \bar{\mathbf{w}} \\ \vdots \\ \mathbf{f} - \mathbf{F}_x \sum_{j=0}^{N_x - N_u - 1} (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{w}} \\ \mathbf{f}_f - \mathbf{F}_f \sum_{j=0}^{N_x - N_u} (\bar{\mathbf{A}}^j) \bar{\mathbf{w}} \end{bmatrix}.$$

O novo vetor de variáveis do problema de otimização é dado por

$$\tilde{\mathbf{z}} = [\mathbf{u}(t)' \tilde{\mathbf{x}}(t+1)' \dots \tilde{\mathbf{x}}(t+N_u-1)' \mathbf{u}(t+N_u-1)']'.$$

As novas matrizes e vetores do problema  $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{N_u m + (N_u-1)n \times N_u m + (N_u-1)n}$ ,  $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{N_u m + (N_u-1)n}$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{N_x l + l_f \times N_u m + (N_u-1)n}$ ,  $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^{N_x l + l_f}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{(N_u-1)n \times N_u m + (N_u-1)n}$  e  $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{(N_u-1)n}$  são dados por

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \mathbf{S} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}' & \mathbf{R} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Q} & \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{S}' & \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\mathbf{g}} & \mathbf{S} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}' & \mathbf{R}_{\mathbf{g}} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{u}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\mathbf{x}} & \mathbf{F}_{\mathbf{u}} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{F}_{\mathbf{x}} & \mathbf{F}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} & \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{u}} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{B}} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{A}} & -\bar{\mathbf{B}} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{A}} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\bar{\mathbf{A}} & -\bar{\mathbf{B}} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{S}'\tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{g}} \\ \mathbf{r}_{\mathbf{g}} \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{F}_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{f} \\ \vdots \\ \mathbf{f} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{w}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{w}} \\ \bar{\mathbf{w}} \end{bmatrix}.$$

Note que nessa formulação  $n$  é a dimensão de  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ . Assim, nessa formulação as dimensões das matrizes  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$  diferem das dimensões das matrizes

correspondentes da formulação convencional, onde  $n$  é a dimensão de  $\mathbf{x}(t)$ .

Quando comparada à formulação convencional do MPC<sub>EE</sub>, a apresentada nesta seção, chamada de controle preditivo baseado em modelo com modelagem proposta no espaço de estados (MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup>), resulta em um problema menor, que não depende da dimensão do atraso. Enquanto na formulação tradicional cada período de atraso corresponde a um estado adicional no modelo, na formulação proposta utiliza-se o fato de que os estados não são alterados pelo controle até que se passe o atraso para predizer os estados  $d$  instantes para frente em função dos dados conhecidos em  $t$ . A implicação prática disso é que o atraso é representado explicitamente no problema a ser resolvido e não mais no modelo da planta, o que permite que somente a dinâmica sem atraso da planta seja considerada no cálculo da ação de controle. Além disso, as técnicas de cômputo rápido detalhadas na seção 2.3.4 podem ser diretamente empregadas em conjunto com esta formulação proposta, que ainda apresenta a vantagem de possuir uma clara separação entre os horizontes de controle e predição. A matriz  $\tilde{\Phi}$  tem a mesma estrutura de  $\tilde{\mathbf{H}}_c$  e sua inversa pode ser determinada de forma eficiente. Resultados numéricos apresentados na seção 3.3 comparam ambas as abordagens e também os resultados alcançados com o GPC.

### 3.2.1 Cômputo rápido do MPC<sub>FT</sub> para sistemas com atraso

Como as matrizes resultantes no caso do GPC, que é a técnica MPC<sub>FT</sub> discutida neste trabalho, são densas, não foi identificada nenhuma vantagem no desenvolvimento de métodos especializados para resolver o problema de PQ. Assim, um método tradicional de IP ou de AS pode ser utilizado. Diversos experimentos numéricos mostraram que métodos de AS obtiveram melhores resultados na maioria das aplicações práticas, especialmente quando o número de restrições violadas é pequeno. Tal fato já foi observado por Bartlett, Wächter e Biegler [76], que relataram que em problemas com poucas restrições e grau de liberdade, métodos de AS apresentaram melhor desempenho. Conforme o número de restrições (e grau de liberdade) aumenta, o método de resolução de IP torna-se mais competitivo, visto que em tal método se paga um “preço fixo” independentemente do número de restrições ativas. Por outro lado, a estratégia de AS é um algoritmo combinatório que é NP difícil no pior caso [76].

É interessante notar que em algumas situações o emprego da estratégia anti-*windup* proposta na seção A.2 consegue uma boa aproximação da solução do GPC mesmo com restrições no sinal de controle. Todavia, em alguns casos pode ser interessante o emprego do GPC propriamente dito, o que requer a solução numérica do problema a cada período de amostragem. Nesse caso, a possibilidade de empregar horizontes de predição e de

controle com valores diferentes e a estratégia de remover o atraso do início do horizonte – equação (2.43) – reduzem o tamanho da matriz de restrições  $\mathbf{F}$  para  $N_{ul} \times N_{um}$ , o que consiste em um valor muito menor que os  $T_h l \times T_h m + (T_h - 1)n$  do MPC<sub>EE</sub>. Além disso, em aplicações práticas é muito comum que se empregue um horizonte de controle menor que o horizonte de predição, logo o número de variáveis de decisão no processo de otimização pode ser significativamente reduzido. Por outro lado, o modelo do GPC é bastante acoplado e não existem restrições de igualdade, que já foram previamente substituídas no modelo.

Em conjunto com a redução absoluta no número de restrições de desigualdade, o problema de minimização do GPC pode ser ainda mais simplificado com a eliminação das restrições desnecessárias. Neste trabalho os termos redundância, dominância e necessidade de restrições serão tratados como sinônimos, porém uma definição rigorosa pode ser encontrada em [77]. Uma desigualdade válida é considerada necessária se sua eliminação altera o fecho convexo do conjunto de desigualdades. A figura 12 apresenta um exemplo de um conjunto de desigualdades no  $\mathbb{R}^2$ , onde as setas indicam as regiões nas quais as desigualdades são satisfeitas. Note que a desigualdade mostrada em linha tracejada não é necessária, visto que sua eliminação não altera o fecho convexo do conjunto de desigualdades.

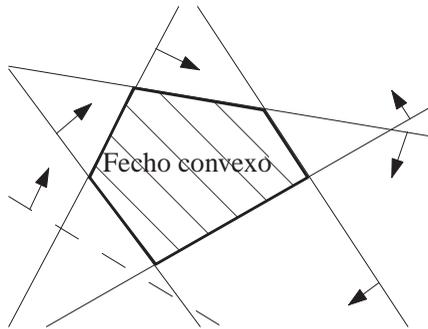


Figura 12: Necessidade de desigualdades

Em geral verificar a necessidade de desigualdades pode requerer bastante esforço computacional, especialmente no caso no qual o fecho convexo não é conhecido de antemão. Na sequência um método heurístico baseado nos desenvolvimentos de Camacho e Bordons [5] será proposto para explorar a estrutura especial das desigualdades na formulação da equação (2.43). O método proposto não garante o número mínimo de restrições, porém o requi-

sito computacional é muito menor que o exigido para que seja determinado o caso ideal. Um método heurístico é interessante porque o custo computacional da eliminação exata das restrições de desigualdade desnecessárias e a resolução do problema reduzido costuma ser maior que o da resolução do problema original com todas as restrições de desigualdade [54].

As desigualdades associadas com as restrições impostas no sinal de controle são expressas como matrizes triangulares inferiores e as impostas na saída predita são expressas como matrizes com a mesma estrutura de  $\mathbf{G}$ . Assim, os limites inferior e superior para o primeiro elemento do incremento de controle ( $\Delta u(t)$ ) podem ser facilmente obtidos com o uso das desigualdades associadas com o primeiro elemento de cada bloco de  $\mathbf{F}$  e isolando  $\Delta u(t)$  em cada um deles. O limite inferior é dado pelo máximo dos limites inferiores e o limite superior é dado pelo mínimo dos limites superiores de cada bloco. Dessa forma, o número de restrições em  $\Delta u(t)$  é reduzido a dois: um limite superior ( $p_1$ ) e um limite inferior ( $l_1$ ). A segunda linha de cada matriz (bloco) tem uma restrição que envolve simultaneamente  $\Delta u(t)$  e  $\Delta u(t+1)$ . É possível isolar o incremento de controle  $\Delta u(t+1)$  e avaliar cada uma das restrições para os limites inferior e superior de  $\Delta u(t)$  já encontrados. Considere o caso com  $2h$  restrições envolvendo  $\Delta u(t)$  e  $\Delta u(t+1)$  apresentado na equação (3.2).

$$\begin{aligned} \Delta u(t+1) &\leq c_1 + d_1 \Delta u(t) & \dots & \quad \Delta u(t+1) \leq c_h + d_h \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) &\geq f_1 + g_1 \Delta u(t) & \dots & \quad \Delta u(t+1) \geq f_h + g_h \Delta u(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Considerando apenas as primeiras  $h$  equações, se para algum par  $i = 1, \dots, h$  e  $j = 1, \dots, h$ ,  $c_i + d_i p_1 \geq c_j + d_j p_1$  e  $c_i + d_i l_1 \geq c_j + d_j l_1$ , então a  $i$ -ésima desigualdade para o limite superior de  $\Delta u(t+1)$  é certamente desnecessária e pode ser eliminada<sup>1</sup>. Assim, o limite superior para a variável  $\Delta u(t+1)$ , que será denominado  $p_2$ , pode ser encontrado empregando somente as restrições não eliminadas. Isso pode ser feito de modo conservador mantendo-se somente a equação de uma reta cujos coeficientes linear e angular são escolhidos para que a reta passe pelos pontos dados pelo mínimo das restrições avaliadas em  $l_1$  e pelo mínimo das restrições avaliadas em  $p_1$ <sup>2</sup>. Valor ainda mais conservador

---

<sup>1</sup>Note que por se tratar de uma restrição que define uma reta, se a reta da restrição  $i$  avaliada nos limites inferior ( $l_1$ ) e superior ( $p_1$ ) da variável  $\Delta u(t)$  apresentar um valor maior que a reta definida por  $j$  significa que as duas retas não se cruzam e que basta ser mantida a restrição definida pela reta  $j$ , uma vez que é mais restritiva que a definida pela reta  $i$ . Caso o valor seja igual em apenas uma das extremidades, as retas encontram-se apenas nesse ponto e a reta que estiver por cima poderá ser eliminada sem alteração do fecho convexo. Caso o valor seja igual em ambas as extremidades, as retas são coincidentes e uma delas pode ser eliminada sem prejuízo.

<sup>2</sup>Note que neste caso não se tem um limite superior  $p_2$  para a variável  $\Delta u(t+1)$  e sim uma reta que relaciona os valores de  $\Delta u(t)$  e  $\Delta u(t+1)$ . Por um lado isso diminui o conservadorismo, porém por outro dificulta a aplicação da técnica proposta de modo recursivo para as próximas restrições.

pode ser estimado por  $\min\{(c_i + d_i l_1), (c_i + d_i p_1), \dots, (c_k + d_k l_1), (c_k + d_k p_1)\}$ , sendo  $k$  o número de desigualdades que não foram eliminadas. Procedimento análogo pode ser realizado para as  $h$  restrições na segunda linha da equação (3.2), de modo a encontrar uma reta que defina a restrição ou um limite  $l_2$ . Depois de realizado esse procedimento, caso opte-se pela solução mais conservadora, ambos  $\Delta u(t)$  e  $\Delta u(t+1)$  serão limitados por  $(l_1, p_1)$  e  $(l_2, p_2)$ , respectivamente. Como as matrizes de restrição são triangulares inferiores ou têm a mesma estrutura de  $\mathbf{G}$ , o mesmo procedimento pode ser empregado para eliminar as restrições desnecessárias em  $\Delta u(t+2)$ , assim como definir os limites inferior e superior  $l_3$  e  $p_3$ . Este procedimento pode ser aplicado recursivamente às demais restrições.

Além disso, métodos especializados podem ser utilizados para resolver o problema quando somente um tipo de restrição é imposta. Para métodos relativos a restrições na taxa de variação do sinal de controle, na amplitude do sinal de controle e na saída predita (quando  $N_u = N$ ), recomenda-se a leitura da referência [5].

Apesar de ser bastante evidente, vale comentar que muitas das matrizes do problema são constantes, ou seja, não dependem da medição atual. Dessa forma, para acelerar o cálculo é interessante que tais matrizes sejam montadas na primeira iteração e que sejam gravadas em memória para utilização posterior.

### 3.3 Estudos de caso

Como forma de analisar os tempos requeridos para calcular os sinais de controle, os algoritmos rápidos do MPC<sub>EE</sub> e do MPC<sub>FT</sub> foram implementados em *LabVIEW* 2010. Apesar de não ser a opção que demandaria menor tempo de desenvolvimento, optou-se pela implementação em *LabVIEW* para facilitar a implantação dos resultados na bancada de ensaios utilizada no trabalho, que por questão de padronização da empresa parceira é toda programada em *LabVIEW*. Os tempos relatados foram obtidos em um Intel Core2Duo T5300 com sistema operacional *Windows* 7.

Esta seção apresenta três estudos de caso em simulação. No primeiro caso avalia-se como os parâmetros do controlador e da planta impactam no tempo necessário para resolver os problemas de controle, especialmente sob o ponto de vista do número de restrições. No segundo e terceiro casos, baseados em aplicações industriais apresentadas na literatura, os algoritmos são comparados, especialmente em termos de consumo de tempo. O segundo estudo de caso consiste no controle da temperatura de saída do calorímetro da bancada de avaliação de desempenho de compressores e o terceiro estudo de caso consiste no controle de uma máquina de fabricação de papel [78]. Como

o foco da análise é nos tempos de CPU, o emprego de plantas simuladas ao invés de plantas experimentais não afeta os resultados. Todos os tempos de CPU apresentados para as abordagens  $\text{MPC}_{\text{EE}}^-$  e  $\text{MPC}_{\text{EE}}^+$  empregam os algoritmos de cômputo rápido quando não houver menção explícita afirmando o contrário, enquanto os tempos para a abordagem  $\text{MPC}_{\text{FT}}$  foram obtidos com emprego dos algoritmos de otimização de propósito geral do *LabVIEW*.

### 3.3.1 Análise numérica para um integrador com atraso

Esta seção considera um sistema integrador com atraso que possui restrições no sinal de controle e na variável de saída. As análises deste caso avaliarão apenas os métodos já apresentados na literatura, com introdução de algumas das modificações propostas neste trabalho para redução do esforço computacional. Dessa forma, os métodos não são diretamente comparados entre si e a análise para o  $\text{MPC}_{\text{EE}}^+$  não é apresentada. Os dois casos que seguem, apresentados nas seções 3.3.2 e 3.3.3, realizam comparações diretas entre os métodos, incluindo o  $\text{MPC}_{\text{EE}}^+$ .

A representação em função de transferência discreta da planta é  $G(z) = z^{-6}/(z-1)$ , ou equivalentemente  $G(z^{-1}) = (z^{-7})/(1-z^{-1})$ , onde  $d = 6$  é o atraso de transporte. Uma possível representação discreta no espaço de estados é apresentada na equação (3.3), onde a variável de saída é  $x_1(t)$  na representação aumentada. Note que nessa representação os primeiros  $d$  estados são necessários para representar o atraso de transporte.

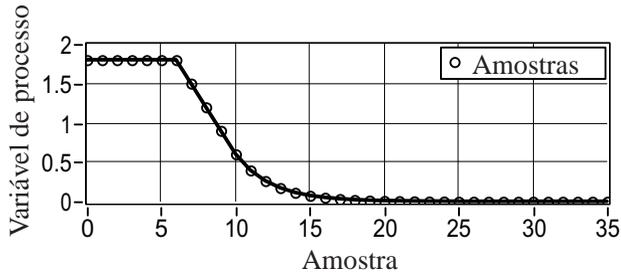
$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_d(t+1) \\ x_{d+1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \\ x_{d+1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.3)$$

### Eliminação das restrições redundantes no $\text{MPC}_{\text{EE}}$

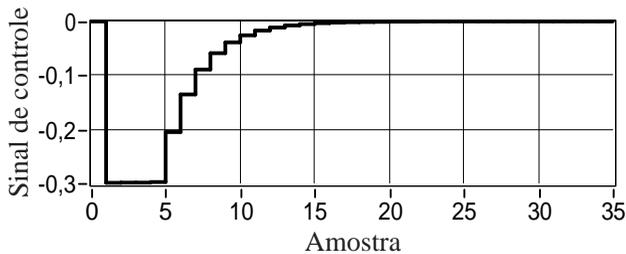
Neste item o problema de cômputo do  $\text{MPC}_{\text{EE}}$  é comparado para dois casos distintos: no primeiro as restrições são impostas a todos os estados e no segundo as restrições são impostas somente aos estados que não são usados para representar o atraso. Em ambos os casos são apresentados resultados numéricos para o algoritmo rápido apresentado na seção 2.3.4 e para os algoritmos genéricos disponíveis no *LabVIEW* (tanto IP quando AS), que não exploram a esparsidade do problema. Para o algoritmo rápido é imposto um valor fixo  $\kappa = 10^{-4}$ , de acordo com o exposto na seção 2.3.4, um horizonte  $T_h = 15$ , um limite de iterações  $K^{\text{max}} = 5$ , assim como busca linear com retrocesso com parâmetros  $\alpha = 0,1$  e  $\beta = 0,5$ . A matriz de ponderação  $\mathbf{Q}$  é

escolhida a identidade e  $\mathbf{R} = [40]$ . O limite de iterações para os algoritmos de propósito geral também é ajustado para 5, como foi feito no caso do algoritmo de cômputo rápido.

As condições iniciais são ajustadas para 1,8 em cada um dos estados e para zero no sinal de controle. Todos os estudos de caso consideraram limites inferior e superior na ação de controle ( $u_{\min} = -0,3$  e  $u_{\max} = +0,3$ ) e na variável de saída ( $x_{1_{\min}} = -2$  e  $x_{1_{\max}} = +2$ ). Os sinais de controle e as saídas em malha fechada são equivalentes em ambos os casos e as respostas empregando o algoritmo de cômputo rápido são apresentadas na figura 13.



(a) Variável de processo



(b) Sinal de controle

Figura 13: Resultados de simulação empregando o algoritmo rápido para o MPC<sub>EE</sub> em um sistema integrador com atraso

A tabela 1 apresenta os tempos de CPU para os dois casos. Cada tempo de cômputo é representado por dois números: o primeiro é o tempo médio necessário para calcular a ação de controle (resolver o problema de PQ) em cada intervalo de amostragem e o segundo é o tempo máximo de cômputo observado para uma amostra. Todos os resultados são baseados na observação de 10 repetições, todas com duração de 35 amostras, para as mesmas condições iniciais. A inicialização das variáveis não é empregada em nenhum dos casos.

Tabela 1: Tempo necessário para resolver o problema de PQ para o MPC<sub>EE</sub>

Restrições	Rápido (ms)	Geral (ms)	
		AS	IP
Todos os estados	38,0/136	318,3/713	497,7/1883
Só nos sem atraso	11,8/51	308,0/688	489,6/1882

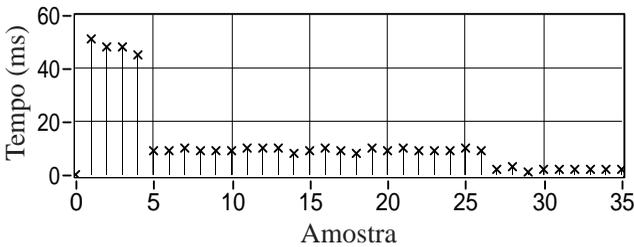


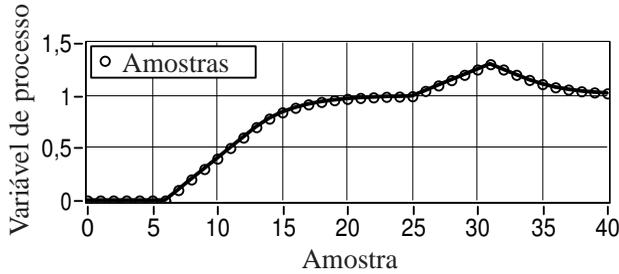
Figura 14: Tempo demandado para resolver o problema de PQ para cada amostra usando o método rápido de cômputo com  $K^{\max} = 5$  e somente as restrições nos estados não associados ao atraso (MPC<sub>FT</sub>)

É interessante notar a redução substancial no tempo de CPU necessário para resolver o algoritmo rápido do MPC<sub>EE</sub> com a eliminação das restrições nos estados associados ao atraso. Esse ganho é bastante grande mesmo quando as restrições não são violadas, que é o caso deste exemplo. O mesmo resultado não é obtido com os algoritmos de propósito geral que foram usados, visto que eles requerem a introdução dos limites  $\pm\infty$  para os estados sem restrições, o que mantém o mesmo número de restrições.

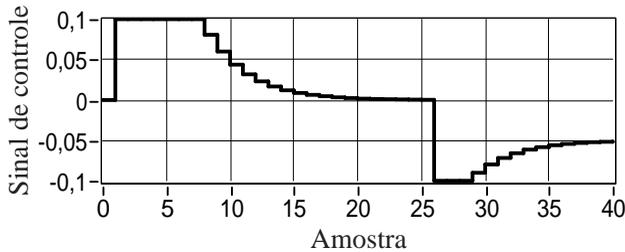
O tempo necessário para resolver cada problema de PQ varia de acordo com o estado no qual o sistema se encontra. Tal comportamento foi observado para todos os métodos analisados e é apresentado na figura 14 para o mesmo caso analisado na figura 13. É interessante notar que o pior caso acontece em  $t = 1$  e que os tempos são maiores quando o sistema opera próximo a uma restrição.

### Eliminação das restrições redundantes no MPC<sub>FT</sub>

Nesta seção o problema de cômputo do GPC, técnica MPC<sub>FT</sub> explorada neste trabalho, é comparado para os casos com todas as restrições e com somente as necessárias. A resposta temporal do sistema em malha fechada é apresentada na figura 15 para um sinal de controle computado como a solução exata do problema de otimização. Por solução exata entenda-se a solução



(a) Variável de processo



(b) Sinal de controle

Figura 15: Resultados de simulação para o MPC<sub>FT</sub> com referência unitária e perturbação de carga

que leva a norma do resíduo a ser menor ou igual a  $10^{-8}$  independentemente do número de iterações necessárias para que se alcance tal valor. Uma referência unitária do tipo degrau é imposta em  $t = 0$  e uma perturbação de carga de  $q = 0,05$  é imposta em  $t = 20$ . Os parâmetros do controlador são:  $\lambda = 20$ ,  $\delta = 1$ ,  $N = 10$  e  $N_u = 4$ . As restrições são:  $-0,1 \leq u(t) \leq 0,1$  e  $-2 \leq y(t) \leq 2$ . Todas as condições iniciais são nulas e a inicialização das variáveis não é utilizada.

A tabela 2 lista os tempos de CPU para os dois casos, empregando, em cada caso, os métodos de IP e AS. Novamente, o primeiro número representa o tempo médio e o segundo o tempo máximo observado em 100 repetições para a mesma condição inicial (foram simuladas 40 amostras em cada repetição).

Para este problema específico a eliminação das restrições desnecessárias praticamente não altera o valor médio do tempo de CPU demandado para o método de AS. Por outro lado, a redução é significativa para o método de IP. Os tempos de cômputo em cada amostra são apresentados na figura 16. Além dos efeitos da eliminação das restrições desnecessárias é importante observar

Tabela 2: Tempo necessário para resolver o problema de PQ para o GPC

Restrições	AS (ms)		IP (ms)	
	$K^{\max} = 5$	Exata	$K^{\max} = 5$	Exata
Todas	1,2/12	1,4/23	11,2/37	31,5/152
Necessárias	1,2/8	1,3/16	3,1/10	8,5/44

a rapidez com que o método de AS converge para este caso. O método de IP também apresenta bom desempenho, especialmente no caso com um número limitado de iterações e somente considerando as restrições necessárias.

### 3.3.2 Temperatura de saída do calorímetro

Como forma de avaliar o desempenho das técnicas de MPC estudadas nesta seção, o modelo da temperatura de saída do calorímetro da bancada de avaliação de desempenho de compressores foi utilizado. O modelo nominal tem atraso  $L_n = 200$  s e um ganho de velocidade de  $K_v = 2,4 \cdot 10^{-4}$  K/(sW), ou seja,

$$P_n(s) = \frac{T_o(s)}{\Delta\phi(s)} = \frac{2,4 \cdot 10^{-4}}{s} e^{-200s}, \quad (3.4)$$

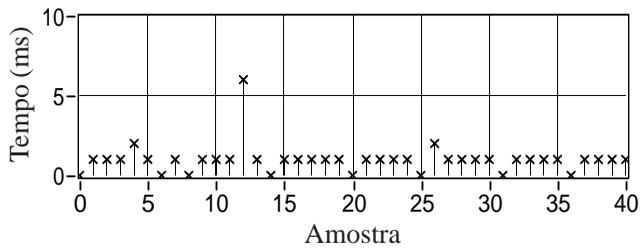
onde  $T_o(s)$  é a temperatura de saída do calorímetro e  $\Delta\phi(s)$  é a potência linearizada [10].

A fonte que fornece a alimentação para os resistores que aquecem o interior do calorímetro opera na faixa de 0 W a 700 W. Como o modelo da equação (3.4) foi obtido em um ponto no qual a potência era 115 W, as restrições de fornecimento de potência para o sistema linearizado são  $-115$  W e  $+585$  W. Além disso, considerou-se uma restrição adicional de segurança forçando que a temperatura na saída do calorímetro não ultrapasse os  $36^\circ\text{C}$ , o que representa um desvio de  $4^\circ\text{C}$  em relação ao ponto de operação.

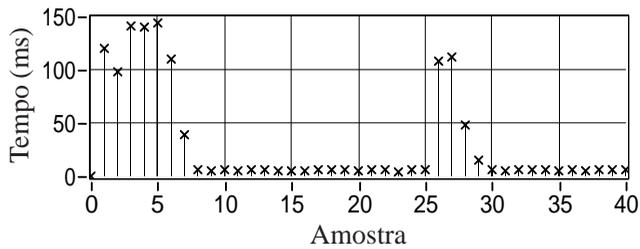
Os tempos de CPU para diferentes valores de período de amostragem são apresentados na tabela 3, onde o primeiro valor é o tempo médio e o segundo é o tempo máximo observado para resolver o problema de otimização em 20 repetições. O primeiro conjunto de resultados é obtido para um período de amostragem de 100 s ( $d = 2$ ) e o segundo para um período de amostragem de 8 s ( $d = 25$ ). Os seguintes parâmetros de ajuste foram empregados para reproduzir respostas equivalentes no domínio do tempo para todas as estratégias analisadas:

$$\text{MPC}_{\text{EE}}^-: \quad K^{\max} = 10, \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \mathbf{R} = [0.01], \kappa = 10^{-4} \text{ e } T_h = 30;$$

$$\text{MPC}_{\text{EE}}^+: \quad K^{\max} = 10, \mathbf{Q} = [1], \mathbf{R} = [0.01], \kappa = 10^{-4} \text{ e } N_x = 30;$$



(a) Método de conjunto ativo (AS)



(b) Método de ponto interior (IP)

Figura 16: Tempo necessário para resolver o problema de PQ para cada amostra empregando o algoritmo de solução exata e todas as restrições ( $MPC_{FT}$ )

Tabela 3: Tempos de CPU (médico/máximo) para o exemplo do calorímetro (tempos expressos em milissegundos)

$d$	$N_u$	MPC <sub>FT</sub>		MPC <sub>EE</sub>	MPC <sub>EE</sub> <sup>+</sup>
		AS	IP		
$d = 2$	$N_u = 30$	6,4/15	45,7/64	12,3/27	4,8/12
	$N_u = 3$	2,7/8	2,2/4	–	1,3/4
$d = 25$	$N_u = 30$	7,1/14	190,2/218	56552/60531	6,5/12
	$N_u = 3$	2,7/12	31,4/39	–	2,2/6

**MPC<sub>FT</sub>**:  $K^{\max} = 10$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\delta = 1$  e  $N = 30$ .

É importante notar que  $T_h = 30$  é diferente de  $N_x = 30$  e  $N_u = 30$ , uma vez que  $N_x$  inicia somente depois de passado o atraso. Adicionalmente, alguns valores da tabela 3 não são apresentados porque na formulação original do MPC<sub>EE</sub> não é possível empregar valores diferentes para os horizontes de controle e predição dos estados.

Para um período de amostragem  $T_s = 100$ s todas as três técnicas podem ser empregadas, porém fica claro que a proposta neste trabalho é mais rápida que as demais tanto do ponto de vista do tempo médio quanto do tempo máximo exigido para o cálculo. Por outro lado, para um período de amostragem  $T_s = 8$ s não é possível empregar a formulação tradicional do MPC<sub>EE</sub>, mesmo com técnicas de cômputo rápido.

Adicionalmente, se forem empregados valores pequenos para  $N_u$  a diferença na resposta temporal é praticamente imperceptível quando comparada ao caso com  $N_u$  grande. Todavia, o esforço computacional necessário em cada período de amostragem para cálculo da ação de controle pode ser significativamente reduzido. Neste caso específico, a diferença entre os tempos com diferentes valores de  $N_u$  não é tão expressiva quanto se esperaria porque o sistema tem restrições na saída. Esse tema será discutido em detalhes na seção 3.3.3.

### 3.3.3 Máquina de fabricação de papel

Máquinas de fabricação de papel produzem papel a partir da polpa de celulose e existem diversos problemas de controle interessantes em máquinas automatizadas. Elas consistem basicamente de um tanque no qual a polpa pré-processada é misturada com água para que se atinja certa concentração, uma prensa, uma seção de secagem e uma bobina. Uma representação esquemática da máquina é apresentada na figura 17, mostrando seus principais componentes.

A concentração da polpa é um dos problemas de controle que é ex-



Figura 17: Esquema geral de uma máquina de produção de papel

plorado na literatura. A variável de processo é a concentração da polpa de celulose e a variável manipulada é a vazão de água que entra no tanque de mistura. Hägglund [78] empregou um experimento de resposta ao degrau para modelar esse sistema em torno de um ponto de operação e propôs o modelo de primeira ordem dominante apresentado na equação (3.5), onde  $H(s)$  é a concentração da polpa e  $V(s)$  é a abertura da válvula.

$$P_n(s) = \frac{H(s)}{V(s)} = \frac{-3}{6s+1} e^{-37s} \quad (3.5)$$

Como o ponto de linearização é 60% de concentração da polpa e 25% de abertura da válvula, a saída linearizada deve permanecer entre  $-60\%$  e  $+40\%$  e o sinal de controle linearizado deve permanecer entre  $-25\%$  e  $+75\%$ . Os seguintes parâmetros de sintonia foram empregados para a simulação:

**MPC<sub>EE</sub>**:  $K^{\max} = 10$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{R} = [10]$  e  $\kappa = 10^{-4}$ ;

**MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup>**:  $K^{\max} = 10$ ,  $\mathbf{Q} = [1]$ ,  $\mathbf{R} = [100]$  e  $\kappa = 10^{-4}$ ;

**MPC<sub>FT</sub>**:  $K^{\max} = 10$ ,  $\lambda = 100$  e  $\delta = 1$ .

Os tempos de cômputo para diferentes valores de período de amostragem são apresentados na tabela 4, na qual o primeiro valor é a média e o segundo é o máximo do tempo necessário para resolver o problema de PQ em 20 repetições. Para gerar a tabela 4, foram utilizados os seguintes parâmetros de sintonia:  $N = 10$ ,  $N_x = 10$ ,  $N_u = 3$  e  $T_h = n_c + 3$ , onde  $n_c$  é a ordem do sistema mais o atraso de transporte. O período de amostragem crítico para o MPC<sub>EE</sub> é de 3s, enquanto a abordagem MPC<sub>FT</sub> empregando AS é capaz de operar com períodos de amostragem da ordem de 70ms (o tempo médio de CPU foi de 10,8ms e o tempo máximo foi de 68ms) e o MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup> pode operar

Tabela 4: Tempos de CPU (médios/máximos) para o exemplo da máquina de fabricação de papel (para variações no período de amostragem)

$T_s$ (s)	MPC <sub>FT</sub>		MPC <sub>EE</sub> (ms)	MPC <sub>EE</sub> <sup>+</sup> (ms)
	AS (ms)	IP (ms)		
1	1,9/14	4,8/9	16472/16539	1,9/8
2	1,8/13	4,6/8	945/2120	1,6/4
3	1,7/17	4,3/6	88/98	1,4/5

Tabela 5: Tempos de CPU (médios/máximos) para o exemplo da máquina de fabricação de papel (para variações no horizonte de predição)

$N$ ou $N_x$	MPC <sub>FT</sub>		MPC <sub>EE</sub> <sup>+</sup> (ms)
	AS (ms)	IP (ms)	
5	2,1/16	3,1/5	1,2/3
10	2,0/21	4,8/9	1,9/6
20	2,1/22	11,7/13	2,2/8
50	2,2/21	62,5/81	4,0/8
100	2,3/19	301,3/322	8,7/16

com períodos de amostragem da ordem de 45 ms (o tempo médio de CPU foi de 22,3 ms e o tempo máximo foi de 42 ms). Se o comportamento dinâmico do processo é analisado, um período de amostragem de 3 s não é adequado. Assim, uma abordagem MPC<sub>EE</sub>, mesmo com cômputo rápido, não pode ser empregada neste caso para controlar satisfatoriamente a planta.

O efeito da variação do horizonte de predição no tempo de cômputo da ação de controle é apresentado na tabela 5, considerando um período de amostragem  $T_s = 1$  s e um horizonte de controle fixo  $N_u = 3$ . Quando emprega-se MPC<sub>FT</sub> com um algoritmo de otimização baseado em AS, o efeito da variação do horizonte de predição é praticamente imperceptível no tempo de cômputo. Para as outras duas abordagens pode parecer inicialmente que o efeito é grande, porém isso só ocorre porque restrições na saída estão sendo consideradas. Caso o sinal de controle seja obtido considerando somente as restrições no controle, para  $N = 100$  o tempo de cômputo do MPC<sub>FT</sub> com algoritmo IP é reduzido para 2,0/3 ms e o tempo de cômputo do MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup> é reduzido para 3,7/7 ms. Assim, uma possibilidade para reduzir o tempo de ocupação do processador é eliminar as restrições não necessárias, seguindo a ideia proposta na seção 3.2.1.

O efeito da variação do horizonte de controle no tempo de cômputo da ação de controle é apresentado na tabela 6, considerando um período de amostragem  $T_s = 1$  s e um horizonte de predição fixo  $N_x = N = 100$ . O tempo

Tabela 6: Tempos de CPU (médio/máximo) para o exemplo da máquina de fabricação de papel (para variações no horizonte de controle)

$N_u$	MPC <sub>FT</sub>		MPC <sub>EE</sub> <sup>+</sup> (ms)
	AS (ms)	IP (ms)	
2	2,1/16	284/306	7,1/12
3	2,2/19	306/321	8,7/16
10	2,2/21	381/398	19,1/26
20	2,7/22	533/555	27,2/30
50	8,8/29	1299/1370	58,0/68
100	32,4/48	6593/6688	95,9/135

de cômputo cresce aproximadamente como uma função linear do horizonte de controle tanto para o caso do MPC<sub>FT</sub> com AS quanto do MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup>. Novamente, o efeito das restrições de saída podem ser percebidos nos tempos de CPU, dado que  $N$  e  $N_x$  são grandes. Caso as restrições de saída não sejam consideradas, para  $N_u = 2$  o tempo de cômputo do MPC<sub>FT</sub> IP é reduzido para 2,3/7 ms e o do MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup> é reduzido para 3,4/9 ms. Para  $N_u = 100$ , os tempos de cômputo são 932/1233 ms para MPC<sub>FT</sub> IP e 41,3/62 ms para MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup>. Assim, MPC<sub>FT</sub> IP não é uma abordagem interessante para este problema com horizontes de controle grandes.

### 3.4 Comentários finais

Esta parte do trabalho teve foco na análise de técnicas para cômputo rápido do sinal de controle em duas estratégias MPC: uma que emprega um modelo da planta em variáveis de estado (MPC<sub>EE</sub>) e outra que usa um modelo de funções de transferência (MPC<sub>FT</sub>). Algumas especializações são apresentadas para o caso de processos com atraso de transporte e uma nova formulação para o problema, chamada MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup> é deduzida. Todos os experimentos numéricos analisam sistemas com atraso e as comparações são realizadas em termos do tempo de CPU necessário para calcular a ação de controle.

Apesar de a abordagem no espaço de estados ser preferida atualmente para análise teórica, os resultados anteriores da literatura não permitiam o uso prático do MPC<sub>EE</sub> com pequenos períodos de amostragem se o sistema possuísse atraso dominante. Mesmo o algoritmo de cômputo rápido para o MPC<sub>EE</sub> não era apto a tratar sistemas com períodos de amostragem pequenos. A formulação MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup> desenvolvida durante este trabalho de doutorado não só resolve esse problema como também se mostrou mais rápida que muitos dos relatos prévios da literatura para diversos sistemas com atraso. Sua implementação não é tão direta quanto a da formulação original do MPC<sub>EE</sub>,

porém o problema resultante é muito menor e pode ser resolvido de forma muito mais rápida. Adicionalmente, a formulação  $\text{MPC}_{\text{EE}}^+$  permite o emprego de valores diferentes para os horizontes de controle e predição e seu uso pode ser interessante mesmo para sistemas que não têm atraso.

Para sistemas com pequenos valores de atraso discreto, os tempos requeridos por todos os métodos estudados são equivalentes se os horizontes de predição são pequenos. Conforme o horizonte de predição é ampliado, a abordagem  $\text{MPC}_{\text{EE}}$  padrão com cômputo rápido começa a apresentar diferenças significativas em relação às demais abordagens em relação ao tempo de CPU necessário para a determinação da ação de controle. Os tempos de cômputo do  $\text{MPC}_{\text{FT}}$  e do  $\text{MPC}_{\text{EE}}^+$  mostraram-se praticamente imunes a variações no horizonte de predição ( $N$  ou  $N_x$ , respectivamente), enquanto o tempo demandado pelo algoritmo rápido do  $\text{MPC}_{\text{EE}}$  cresce conforme o horizonte de predição ( $T_h$ ) é aumentado. O horizonte de controle ( $N_u$ ) tem um papel importante para definição do tempo de cômputo tanto do  $\text{MPC}_{\text{FT}}$  quanto do  $\text{MPC}_{\text{EE}}^+$ , porém processos industriais tipicamente apresentam um bom comportamento em malha fechada mesmo com pequenos horizontes de controle e, por causa disso, a maioria das aplicações industriais de MPC utiliza pequenos horizontes de controle. A capacidade de utilizar valores diferentes para os horizontes de predição e controle pode ser explorada para reduzir significativamente o número de variáveis envolvidas no problema de otimização e mostrou-se neste trabalho que a ação de controle pode ser calculada de forma muito rápida para pequenos horizontes de controle, de modo quase independente do tamanho do horizonte de predição. Além disso, como já afirmado, o uso de horizontes de controle pequenos geralmente não representa prejuízo para o desempenho do sistema em malha fechada, o que torna o  $\text{MPC}_{\text{FT}}$  e o  $\text{MPC}_{\text{EE}}^+$  escolhas atrativas mesmo para processos que necessitam de períodos de amostragem bastante reduzidos.

Os dois estudos de caso baseados em aplicações industriais dão suporte ao fato de que o método de cômputo rápido do  $\text{MPC}_{\text{EE}}$  não é adequado para sistemas com atraso dominante, enquanto a formulação proposta neste trabalho ( $\text{MPC}_{\text{EE}}^+$ ) e a por função de transferência ( $\text{MPC}_{\text{FT}}$ ) são. No caso da temperatura de saída do calorímetro, o  $\text{MPC}_{\text{EE}}$  não foi capaz de atingir tempos de cômputo inferiores ao período de amostragem da planta (3 s), enquanto as outras duas abordagens foram capazes de atingir tempos computacionais inferiores a 100 ms. No caso da máquina de fabricação de papel, o menor período de amostragem no qual a abordagem  $\text{MPC}_{\text{EE}}$  pode ser empregada é 3 s, valor muito maior que os 70 ms atingidos pelo  $\text{MPC}_{\text{FT}}$  e que os 45 ms atingidos pelo  $\text{MPC}_{\text{EE}}^+$ .

Para os estudos de caso apresentados neste trabalho, foi observado que o tempo de cômputo tende a crescer quando restrições são violadas se um

*solver* IP é utilizado. Caso seja empregado um *solver* AS, o tempo de CPU tende a crescer no primeiro instante de tempo no qual a violação da restrição ocorre, uma vez que o conjunto ativo é alterado. Para os problemas estudados neste trabalho, caso seja empregado um *solver* de propósito geral, é melhor empregar o método AS em detrimento do IP. Adicionalmente, foi observado que o tempo de cômputo tende a ser mais repetitivo caso seja empregado um método de cômputo rápido que explora a estrutura do problema.

É importante ficar bastante claro que não se está afirmando que um método é melhor que outro. Cada método tem suas vantagens e desvantagens e um dos objetivos do estudo aqui apresentado é auxiliar o engenheiro de aplicação a escolher entre as alternativas disponíveis para tratar um sistema com atraso dominante. O MPC<sub>EE</sub> tradicional é mais fácil de ser implementado que as demais estratégias, porém os tempos de cômputo apresentados pelo método geralmente são bem maiores. Essa é uma das vantagens do MPC<sub>EE</sub><sup>+</sup>, que não é tão complicado de ser implementado quanto uma abordagem MPC<sub>FT</sub> e ao mesmo tempo oferece tempos de cômputo competitivos. Outro ponto que merece ser levado em consideração na escolha da estratégia é que quando os estados não são medidos, o emprego do MPC<sub>FT</sub> é mais simples, pois observadores de estado não são necessários. Uma grande vantagem do GPC, que é a técnica MPC<sub>FT</sub> discutida nesta seção, para aplicações reais é que ele impõe ação integral no controlador equivalente, o que permite rejeição de perturbações do tipo degrau em regime permanente. O mesmo não se aplica à modelagem apresentada para o MPC<sub>EE</sub>, apesar de ser fácil introduzir integradores no sistema de controle. Todavia, nesse caso a ordem do sistema será aumentada pelo número de saídas. Por outro lado, nos últimos anos a análise de estabilidade e desempenho sofreu muitos avanços empregando a abordagem no espaço de estados e esse é o método mais comum de ser encontrado na literatura atualmente.



## 4 PREDITOR DE SMITH FILTRADO MULTIVARIÁVEL

Com base nas ideias apresentadas em [1] e na abordagem unificada do PSF para o caso SISO apresentada em [28], várias ideias foram formalizadas e alguns aspectos foram aprimorados dando origem a uma abordagem DTC unificada para o controle de sistemas multivariáveis  $n \times n$  com múltiplos atrasos. Neste capítulo apresenta-se esse novo controlador, chamado de preditor de Smith filtrado multivariável (MIMO-PSF), assim como exemplos de simulação e um estudo de caso experimental para verificar suas propriedades. Os resultados foram submetidos sob a forma de artigo à revista *Journal of Process Control* [44].

O MIMO-PSF é capaz de controlar processos multivariáveis estáveis, integradores e instáveis com múltiplos atrasos. Além disso, o ajuste da estrutura de predição é simples e pode ser realizado em um único passo empregando qualquer técnica de controle MIMO. O ajuste se dá em termos do compromisso existente entre desempenho e robustez. Três estudos de caso são utilizados para demonstrar o ajuste do MIMO-PSF e alguns resultados são comparados com outras abordagens presentes na literatura.

### 4.1 Estrutura de controle proposta

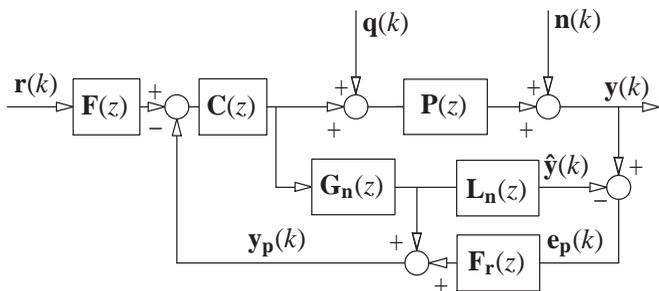
A estrutura de controle MIMO-PSF proposta é apresentada na figura 18, onde  $\mathbf{G}_n(z)$  é o modelo rápido nominal,  $\mathbf{L}_n(z)$  é o atraso MIMO nominal,  $\mathbf{F}_r(z)$  é o filtro do preditor MIMO,  $\mathbf{S}(z)$  é o preditor estável MIMO,  $\mathbf{C}(z)$  é um controlador primário MIMO e  $\mathbf{F}(z)$  é um filtro de referência MIMO. Além disso,  $\mathbf{r}(k)$  é o vetor das referências,  $\mathbf{y}(k)$  é o vetor de saídas,  $\hat{\mathbf{y}}(k)$  é o vetor de saídas do modelo,  $\mathbf{e}_p(k)$  é o vetor com os erros de predição,  $\mathbf{y}_p(k)$  é o vetor das predições da saída,  $\mathbf{q}(k)$  é o vetor das perturbações de carga e  $\mathbf{n}(k)$  é o vetor das perturbações de saída ou dos ruídos de medição.

Para essa estrutura, no caso nominal, as matrizes de transferência são apresentadas nas equações (4.1) (referência), (4.2) (perturbação de carga) e (4.3) (perturbação na saída e ruído de medição).

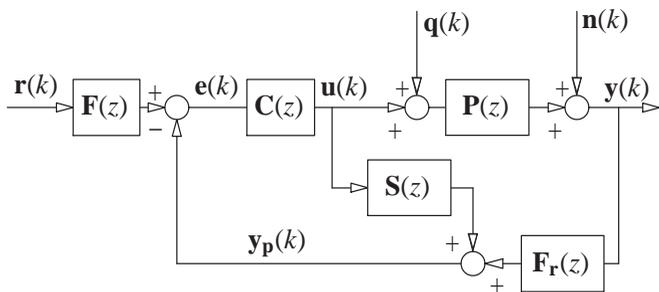
$$\mathbf{H}_{yr}(z) = \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}(z) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H}_{yq}(z) = \{\mathbf{I} - \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}_r(z)\}\mathbf{P}_n(z) \quad (4.2)$$

$$\mathbf{H}_{yn}(z) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}_r(z) \quad (4.3)$$



(a) Estrutura para análise



(b) Estrutura para implementação

Figura 18: Esquema do MIMO-PSF

Como pode ser visto com auxílio dessas equações, o MIMO-PSF tem a propriedade principal de qualquer estrutura de previsão, que é a possibilidade de se projetar o controlador primário para um modelo rápido (note que não há atrasos comuns em  $\det[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]$ ). Como será mostrado na seção 4.3, um ajuste apropriado de  $\mathbf{F}_r(z)$  também permite que o MIMO-PSF controle processos MIMO integradores ou instáveis com atraso (garante a estabilidade da estrutura de previsão), permite que se alcance uma relação adequada entre desempenho e robustez e permite atenuação de ruídos de medição.

## 4.2 Estrutura de predição filtrada e controlador primário

O filtro do preditor  $\mathbf{F}_r(z)$  proposto neste trabalho é um filtro diagonal  $n \times n$  com elementos dados por

$$F_{r_i}(z) = \frac{a_{v_i}z^{v_i} + \dots + a_1z + a_0}{(z - \alpha_i)^{v_i}} \bar{F}_{r_i}(z),$$

onde  $v_i \geq 1$  é um inteiro positivo,  $\alpha_i$  varia no intervalo  $(0, 1)$  e  $\bar{F}_{r_i}(z)$  são filtros próprios e estáveis.

O controlador primário  $\mathbf{C}(z)$  deve ser projetado para estabilizar  $\mathbf{G}_n(z)$  e também satisfazer alguns requisitos relacionados com o comportamento do sistema em malha fechada (note que  $\mathbf{C}(z)$  deve garantir a estabilidade interna do modelo rápido  $\mathbf{G}_n(z)$  ou o sistema completo com atraso não será internamente estável em malha fechada – mais detalhes são apresentados no teorema 4.2). Isso pode ser alcançado por qualquer abordagem clássica de projeto de controladores MIMO. Nos exemplos apresentados neste trabalho, abordagens clássicas e por desacoplamento [79] são utilizadas, porém abordagens ótimas ou qualquer outra abordagem poderiam ser empregadas. Em geral, ação integral é inserida em  $\mathbf{C}(z)$  para que se obtenha uma resposta de malha fechada sem erros de seguimento de degraus.

## 4.3 Ajuste do filtro

Das relações entrada-saída (equações (4.1) a (4.3)), pode-se perceber que no caso nominal o filtro afeta somente as respostas de rejeição de perturbação e de ruído. Dessa forma, ele pode ser projetado para se obter uma resposta adequada para rejeição de perturbação sem afetar o desempenho de seguimento de referência, inclusive para processos instáveis.

É interessante notar que o sinal de realimentação  $\mathbf{y}_p(k)$  produzido pelo preditor é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_p(z) &= \mathbf{G}_n(z)\mathbf{U}(z) + \mathbf{F}_r(z)[\mathbf{Y}(z) - \mathbf{P}_n(z)\mathbf{U}(z)] \\ &= \mathbf{F}_r(z)\mathbf{Y}(z) + [\mathbf{G}_n(z) - \mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}_n(z)]\mathbf{U}(z) \\ &= \mathbf{F}_r(z)\mathbf{Y}(z) + \mathbf{S}(z)\mathbf{U}(z), \end{aligned}$$

que no caso nominal e sem perturbações antecipa a saída do sistema, uma vez que da figura 18(a) observa-se que nesse caso  $\mathbf{e}_p(k) = \mathbf{0}$ , o que faz com que  $\mathbf{y}_p(k)$  assuma o valor do sinal de saída do controlador passado pelo modelo da planta  $\mathbf{G}_n(z)$ . Como a saída do controlador  $\mathbf{U}(z)$  é também a entrada da planta, esse sinal pode ser escrito como  $\mathbf{U}(z) = (\mathbf{P}(z))^{-1}\mathbf{Y}(z)$ . Assim, pode-se

afirmar que

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_p(z) &= \mathbf{G}(z)\mathbf{U}(z) \\ &= \mathbf{G}(z)(\mathbf{P}(z))^{-1}\mathbf{Y}(z) \\ &= \mathbf{L}(z)^{-1}\mathbf{Y}(z).\end{aligned}$$

Logo,  $y_{p_i}(t) = y_i(t + d_i)$  para todo  $i$ .

Dessa análise também fica claro que quando perturbações são consideradas,  $\mathbf{F}_r(z)$  afetará as dinâmicas de  $\mathbf{Y}_p(z)$ . Dois casos são analisados para que se possa entender a importância do filtro [1]:

1. **Plantas estáveis.** Neste caso se  $\mathbf{F}_r(z)$  não for devidamente escolhido (por exemplo  $\mathbf{F}_r(z) = \mathbf{I}$  como na versão MIMO do PS), a resposta de rejeição de perturbação é governada pela dinâmica de malha aberta da planta  $\mathbf{P}_n(z)$  (veja a equação (4.2)). Isso é crítico quando se deseja obter uma resposta de rejeição de perturbação mais rápida que a de malha aberta.
2. **Plantas instáveis ou integradoras.** No caso de plantas instáveis ou integradoras,  $\mathbf{F}_r(z)$  deve ser projetado para se obter uma predição estável, ou então o sistema de malha fechada não será capaz de rejeitar perturbações do tipo degrau em regime permanente e pode-se tornar internamente instável.

Os seguintes teoremas apresentam as soluções para esses problemas.

**Teorema 4.1** *Dada uma planta MIMO  $\mathbf{P}(z)$  com múltiplos atrasos, é possível projetar um filtro estável diagonal  $\mathbf{F}_r(z)$  de tal forma que qualquer polo indesejado de  $G_{ij}(z), \forall i, j$  seja eliminado dos elementos de  $\mathbf{S}(z)$ . No caso de processos instáveis ou integradores esse filtro permite que se obtenha uma “predição estável de malha aberta”  $\mathbf{Y}_p(z)$ .*

**Prova** Considere a saída do preditor dada por

$$\mathbf{Y}_p(z) = \mathbf{S}(z)\mathbf{U}(z) + \mathbf{F}_r(z)\mathbf{Y}(z)$$

e um vetor linha dos polos indesejados das funções de transferência de cada linha  $i$  de  $\mathbf{G}_n(z)$  escrito como

$$\mathbf{z}_i^+ = [\mathbf{1}_{m_1} z_{11}, \dots, \mathbf{1}_{m_k} z_{k1}],$$

onde,  $\mathbf{1}_{m_j} = [1 \ 1 \cdots 1]_{1 \times m_j}$ ,  $z_j$  é um polo indesejado e  $m_j$  é a multiplicidade máxima desse polo indesejado considerando todas as funções de transferência da  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{G}_n(z)$ .

Considerando-se que a matriz de transferência  $\mathbf{S}(z)$  é dada por  $\mathbf{S}(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_r(z)\mathbf{L}(z)]\mathbf{G}(z)$  e que  $\mathbf{F}_r(z)\mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(z)\mathbf{F}_r(z)$  é diagonal, cada linha de  $\mathbf{S}(z)$  pode ser calculada como

$$\mathbf{S}_i(z) = \begin{bmatrix} [1 - F_{r_i}(z)z^{-d_i}]G_{i1}(z) & [1 - F_{r_i}(z)z^{-d_i}]G_{i2}(z) & \cdots \\ [1 - F_{r_i}(z)z^{-d_i}]G_{in}(z) \end{bmatrix},$$

onde  $z^{-d_i}$  é o elemento da  $i$ -ésima diagonal de  $\mathbf{L}(z)$ , que corresponde ao atraso mínimo da  $i$ -ésima linha do modelo da planta (também pode ser interpretado como o atraso efetivo da  $i$ -ésima saída).

Para cancelar as raízes indesejadas do denominador de todas as funções de transferência de  $\mathbf{P}(z)$  de uma linha de  $\mathbf{S}(z)$ ,  $[1 - F_{r_i}(z)z^{-d_i}]$  deve ter zeros em todas essas raízes. Isso é satisfeito se  $F_{r_i}(z)$  satisfizer a seguinte condição:

$$\left. \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} (1 - F_{r_i}(z)z^{-d_i}) \right|_{z=z_j} = 0, \quad \lambda = 0, 1, \dots, m_j - 1, j = 1, \dots, k.$$

Essa condição é equivalente à obtida no caso SISO (veja a equação (2.25)), logo por divisão polinomial é possível implementar as equações do preditor associadas a  $\mathbf{S}_i(z)$  sem os polos indesejados.

Note que se todos os polos dos elementos de  $\mathbf{P}_1(z)$  fora do círculo unitário ou sobre ele forem incluídos em  $\mathbf{z}_i^+$ , os filtros  $F_{r_i}(z)$  obtidos levam a  $\mathbf{S}_i(z)$  com funções de transferência estáveis em todos os elementos. Assim, como  $\mathbf{S}(z)$  e  $\mathbf{F}_r(z)$  são estáveis, a estrutura proposta permite que se obtenha uma “predição estável em malha aberta”  $\mathbf{Y}_p(z)$  para qualquer processo com atraso, seja ele estável ou instável. Isso completa a prova do teorema.  $\square$

**Teorema 4.2** *Considere um sistema MIMO  $\mathbf{P}(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com múltiplos atrasos e um filtro  $\mathbf{F}_r(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  também diagonal que satisfaça o teorema 4.1. Se um controlador  $\mathbf{C}(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e um filtro do preditor  $\mathbf{F}_r(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  podem ser projetados de tal forma que: (i)  $\mathbf{C}(z)$  estabiliza o modelo rápido da planta  $\mathbf{G}_n(z)$  sem cancelamentos polo-zero nos polos indesejados de  $\mathbf{P}_n(z)$  (note que esta hipótese garante que o sistema rápido em malha fechada é internamente estável); (ii)  $\mathbf{C}(z)$  tem ação integral para permitir erro nulo de seguimento de referências do tipo degrau em regime permanente; e (iii)  $\mathbf{F}_r(z)$  não tem zeros em nenhum polo  $z_0$  de  $\mathbf{P}_n(z)$  com  $|z_0| \geq 1$ , então:*

- o sistema completo em malha fechada apresentado na figura 19 é internamente estável;
- os polos indesejados de  $\mathbf{P}_n(z)$ , mesmo que estáveis, não afetarão a resposta de rejeição de perturbação em malha fechada.

**Prova** Considere a representação equivalente do MIMO-PSF em diagrama de blocos<sup>1</sup> mostrada na figura 19, onde  $\mathbf{w}(k)$  é um sinal de referência equivalente e o controlador equivalente é dado pela expressão da equação (4.4).

$$\mathbf{C}_{eq}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{C}(z)\mathbf{S}(z)]^{-1}\mathbf{C}(z)\mathbf{F}_r(z) \quad (4.4)$$

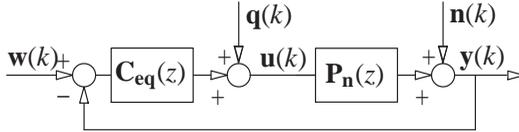


Figura 19: Esquema equivalente do MIMO-PSF

Para mostrar estabilidade interna, as seguintes matrizes de transferência devem ser estáveis

$$\mathbf{H}_{uq}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{C}_{eq}(z)\mathbf{P}_n(z)]^{-1},$$

$$\mathbf{H}_{un}(z) = -\mathbf{C}_{eq}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}_{eq}(z)]^{-1},$$

$$\mathbf{H}_{yq}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}_{eq}(z)]^{-1}\mathbf{P}_n(z),$$

$$\mathbf{H}_{yn}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}_{eq}(z)]^{-1}.$$

Uma condição equivalente é mostrar que somente uma das matrizes de transferência  $\mathbf{H}_i(z)$  é estável e que não há cancelamentos polo-zero com  $|z| \geq 1$  entre  $\mathbf{C}_{eq}(z)$  e  $\mathbf{P}_n(z)$  [80]. Assim, a prova será dividida em duas partes: primeiro mostrar que não há cancelamento polo-zero entre a planta e o controlador equivalente e então mostrar que  $\mathbf{H}_{yq}(z)$  é estável.

Suponha que  $z_0$  seja um polo de  $\mathbf{P}_n(z)$  tal que  $|z_0| \geq 1$ . Será mostrado que  $z_0$  não pode ser um zero de  $\mathbf{C}_{eq}(z)$  ou, o que é equivalente, que o posto de  $\mathbf{C}_{eq}(z_0)$  é  $n$ , ou  $\det[\mathbf{C}_{eq}(z_0)] \neq 0$ . Empregando a equação (4.4), uma condição suficiente é que as equações (4.5) a (4.7) sejam satisfeitas simultaneamente.

$$\det[\mathbf{F}_r(z_0)] \neq 0 \quad (4.5)$$

$$\det[\mathbf{C}(z_0)] \neq 0 \quad (4.6)$$

$$\det[(\mathbf{I} + \mathbf{C}(z_0)\mathbf{S}(z_0))^{-1}] \neq 0 \quad (4.7)$$

<sup>1</sup>A representação mais usual para o controlador equivalente do PSF é a apresentada na figura 36, porém neste ponto preferiu-se a representação da figura 19 para facilitar a prova do teorema.

A equação (4.5) sempre é satisfeita pela definição de  $\mathbf{F}_r(z)$ . Além disso, se  $\mathbf{C}(z)$  não é ajustado para cancelar os polos instáveis da planta, a equação (4.6) é satisfeita para todo  $|z_0| \geq 1$ . Assim as equações (4.5) e (4.6) sempre são satisfeitas dados ajustes adequados de  $\mathbf{C}(z)$  e  $\mathbf{F}_r(z)$ . Se a equação (4.7) é satisfeita, a primeira parte da prova está completa.

Considere agora que exista  $z_0$  tal que  $|z_0| \geq 1$  e  $\det[(\mathbf{I} + \mathbf{C}(z_0)\mathbf{S}(z_0))^{-1}] = 0$ . Com isso tem-se  $\det[(\mathbf{I} + \mathbf{C}(z_0)\mathbf{S}(z_0))] \rightarrow \infty$ , o que implica que pelo menos um elemento de  $\mathbf{C}(z)$  ou  $\mathbf{S}(z)$  tem um polo em  $z_0$ . Como a prova de que  $\mathbf{S}(z)$  é estável já foi realizada, a condição restante é que  $z_0$  seja um polo de  $\mathbf{C}(z)$ . Assim,  $\mathbf{C}(z_0) \rightarrow \infty$ . Nesse caso,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \mathbf{C}_{\text{eq}}(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [\mathbf{C}(z)\mathbf{S}(z)]^{-1} \mathbf{C}(z)\mathbf{F}_r(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \mathbf{S}(z)^{-1} \mathbf{F}_r(z)$$

e

$$\det \left[ \lim_{z \rightarrow z_0} \mathbf{C}_{\text{eq}}(z) \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\det[\mathbf{S}(z)]} \det[\mathbf{F}_r(z)],$$

que não é nulo por causa da estabilidade de  $\mathbf{S}(z)$  e por causa da condição (iii) do enunciado com respeito a  $\mathbf{F}_r(z)$ . Isso completa a primeira parte da prova.

Para provar a segunda parte do teorema note que como  $\mathbf{C}_{\text{eq}}(z)$  estabiliza  $\mathbf{P}_n(z)$  quando  $\mathbf{C}(z)$  estabiliza  $\mathbf{G}_n(z)$ , e não há cancelamentos polo-zero entre  $\mathbf{C}_{\text{eq}}(z)$  e  $\mathbf{P}_n(z)$  em  $\mathbf{H}_{yq}(z)$ , para qualquer polo indesejado de  $\mathbf{P}_n(z)$ ,  $\mathbf{P}_n(z)$  e  $\mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}_{\text{eq}}(z)$  têm os mesmos polos indesejados, os quais não aparecerão em  $\mathbf{H}_{yq}(z)$ . Isso conclui a prova.  $\square$

**Teorema 4.3** *Considere um sistema MIMO  $\mathbf{P}(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com múltiplos atrasos, além de um filtro diagonal e estável  $\mathbf{F}_r(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e de um controlador primário  $\mathbf{C}(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que satisfaçam os teoremas 4.1 e 4.2, então o sistema em malha fechada apresentado na figura 18(b) é internamente estável.*

**Prova** Se a estrutura de controle não é implementada empregando a estrutura equivalente da figura 19, é necessário mostrar que todas as funções de transferência entre as entradas e as saídas dos blocos da estrutura da figura 18(b) são estáveis. Os sinais de entrada são  $\mathbf{r}(k)$ ,  $\mathbf{q}(k)$  e  $\mathbf{n}(k)$ . Como o filtro de referência  $\mathbf{F}(z)$  é estável e já foi provado que  $\mathbf{S}(z)$  e  $\mathbf{F}_r(z)$  são estáveis, basta considerar  $\mathbf{e}(k)$ ,  $\mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{y}_p(k)$  e  $\mathbf{y}(k)$  como sinais de saída.

Todas as expressões das matrizes de transferência para a saída  $\mathbf{y}(k)$  são apresentadas nas equações (4.1) a (4.3). Caso o controlador primário  $\mathbf{C}(z)$  estabilize  $\mathbf{G}_n(z)$ , então a equação (4.1) é estável. Além disso, o teorema 4.2 é suficiente para mostrar que as outras duas expressões para essa saída são estáveis. O teorema 4.2 também pode ser usado para mostrar que as expressões para a saída  $\mathbf{u}(k)$  com respeito a  $\mathbf{q}(k)$  e  $\mathbf{n}(k)$  são estáveis. Adicionalmente, note que  $\mathbf{H}_{ur}(z) = \mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}(z)$ , que é estável visto que  $\mathbf{F}(z)$  é

estável e que  $\mathbf{C}(z)$  estabiliza  $\mathbf{G}_n(z)$ .

Com respeito à saída  $\mathbf{e}(k)$ , as matrizes de transferência são: para a entrada  $\mathbf{q}(k)$ ,  $\mathbf{H}_{eq}(z) = -[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}_n(z)$ ; para a entrada  $\mathbf{n}(k)$ ,  $\mathbf{H}_{en}(z) = -[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}_r(z)$ ; e finalmente para a entrada de referência  $\mathbf{r}(k)$ ,  $\mathbf{H}_{er}(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{C}(z)\mathbf{G}_n(z)]^{-1}\mathbf{F}(z)$ . Como  $\mathbf{F}(z)$  e  $\mathbf{F}_r(z)$  são estáveis,  $\mathbf{C}(z)$  estabiliza  $\mathbf{G}_n(z)$  e não há cancelamento entre os zeros de  $\mathbf{F}_r(z)$  e os polos fora do círculo unitário de  $\mathbf{G}_n(z)$ , todas as três matrizes de transferência são estáveis.

Para a saída  $\mathbf{y}_p(k)$  as matrizes de transferência são  $\mathbf{H}_{y_pq}(z) = -\mathbf{H}_{eq}(z)$  e  $\mathbf{H}_{y_pn}(z) = -\mathbf{H}_{en}(z)$ , que são estáveis visto que os termos à direita do símbolo de igualdade já foram provados ser estáveis, e  $\mathbf{H}_{y_pr}(z) = \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}(z)$ , que é estável dado que  $\mathbf{F}(z)$  é estável e  $\mathbf{C}(z)$  estabiliza  $\mathbf{G}_n(z)$ . Isso completa a prova.  $\square$

Note que a estrutura proposta é capaz de lidar com instabilidades em qualquer um dos elementos da matriz de transferência da planta (não somente nos elementos da diagonal principal) dado que o controlador primário seja capaz de estabilizar o modelo rápido da planta. Como o filtro é calculado para eliminar todos os polos indesejados das funções de transferência de uma linha, a predição é estável mesmo que as instabilidades apareçam fora da diagonal principal. Outro ponto que merece destaque é que o MIMO-PSF mantém as propriedades do PS, ou seja, compensação do atraso, predição e compensação dinâmica ideal, que permitem que o projeto de  $\mathbf{C}(z)$  possa ser realizado sem considerar os atrasos comuns por saída.

#### 4.4 Desempenho em malha fechada e robustez

Como apresentado na seção 2.2.4, para o caso SISO o filtro do PSF afeta tanto a estabilidade robusta quanto o desempenho de rejeição de perturbação. Por outro lado,  $F_r(z)$  não afeta a resposta nominal de seguimento de referência. Nesta seção as propriedades são estendidas para sistemas multi-variáveis.

A matriz de transferência de referência  $\mathbf{H}_{yr}(z)$  – equação (4.1) – pode ser definida por um projeto apropriado do controlador primário  $\mathbf{C}(z)$  e, se necessário, pelo emprego de um filtro de referência  $\mathbf{F}(z)$ . Para erro nulo de seguimento de referência do tipo degrau,  $\mathbf{C}(z)$  deve ter ação integral e  $\mathbf{F}(1) = \mathbf{I}$ . Em um segundo passo,  $\mathbf{F}_r(z)$  é definido empregando as condições apresentadas no teorema 4.1 e seus parâmetros livres são ajustados levando em conta um compromisso entre robustez e desempenho na rejeição de perturbações.

Primeiro note que assim como acontece no caso SISO para se obter um sistema de malha fechada que seja capaz de rejeitar perturbações do tipo degrau, o ganho estático do filtro  $\mathbf{F}_r(z)$  tem que ser unitário. Isso pode ser verificado considerando que a matriz de transferência  $\mathbf{H}_{yq}(z)$  pode ser escrita

como

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\mathbf{yq}}(z) &= \{\mathbf{I} - \mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}_r(z)\}\mathbf{P}_n(z) \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{H}_{\mathbf{fr}}(z)\mathbf{F}_r(z)]\mathbf{P}_n(z),\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{F}(z)\mathbf{H}_{\mathbf{fr}}(z) = \mathbf{H}_{\mathbf{yr}}(z)$  e notando que  $\mathbf{H}_{\mathbf{yr}}(1) = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{F}(1) = \mathbf{I}$ . Como isso implica em  $F_{r_i}(1) = 1$  para todo  $i$ , a condição apresentada no teorema 4.1 deve ser alterada de forma a considerar uma raiz adicional em  $z = 1$  para  $1 - F_{r_i}(z)$ , isto é

$$\left. \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} (1 - F_{r_i}(z)z^{-d_i}) \right|_{z=1} = 0, \quad \lambda = 0, 1, \dots, m_j - 1, \quad (4.8)$$

onde  $m_j$  é agora a multiplicidade da raiz em  $z = 1$  da linha  $i$  de  $\mathbf{P}_n(z)$  mais um. Para perturbações do tipo rampa,  $m_j$  é novamente aumentado em um. Note que a condição imposta pela equação (4.8) é a inclusão de  $m_j$  zeros em  $z = 1$ . A necessidade dessa condição pode ser verificada analisando a equação (4.2) e verificando que quando  $z \rightarrow 1$ ,  $\mathbf{P}_n(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1} \rightarrow \mathbf{I}$ , o que resulta na necessidade de um zero adicional para perturbações do tipo degrau, dois zeros adicionais para perturbações do tipo rampa e assim sucessivamente.

Note que por causa da estrutura diagonal do filtro  $\mathbf{F}_r(z)$ , como no caso SISO, cada canal entrada-saída tem um parâmetro livre  $\alpha_i$  que pode ser ajustado levando em conta um compromisso entre robustez e desempenho. Isso é discutido na sequência.

Para análise de robustez serão consideradas incertezas aditivas, isto é,

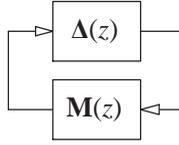
$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{P}_n(z) + \Delta\mathbf{P}(z),$$

onde  $\mathbf{P}(z)$  representa a planta real,  $\mathbf{P}_n(z)$  o modelo nominal e  $\Delta\mathbf{P}(z)$  as incertezas. Em geral  $\Delta\mathbf{P}(z)$  pode ser escrito como

$$\Delta\mathbf{P}(z) = \mathbf{W}_2(z)\Delta(z)\mathbf{W}_1(z), \quad \overline{\sigma}(\Delta(z)) \leq 1 \quad \forall \omega \in [0, \pi/T_s)$$

(ou equivalentemente  $\|\Delta(z)\|_\infty < 1$ ) onde, neste caso,  $\Delta(z)$  é uma matriz cheia,  $\overline{\sigma}(\mathbf{X})$  denota o valor singular máximo de  $\mathbf{X}$ , e  $\mathbf{W}_1(z)$  e  $\mathbf{W}_2(z)$  são duas matrizes de transferência estáveis que caracterizam a estrutura espacial e frequencial da incerteza [25].

Para análise de robustez a estrutura  $\Delta - \mathbf{M}$  mostrada na figura 20 é considerada, obtida do sistema original com sinais de referência e perturbação nulos e

Figura 20: Estrutura  $\Delta - M$ 

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z) &= \mathbf{W}_1(z)\mathbf{M}'(z)\mathbf{W}_2(z) \\ &= -\mathbf{W}_1(z)\mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}\mathbf{F}_r(z)\mathbf{W}_2(z), \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\mathbf{M}(z) = -\mathbf{W}_1(z)\mathbf{M}_0(z)\mathbf{F}_r(z)\mathbf{W}_2(z),$$

onde  $\mathbf{M}_0(z) = \mathbf{C}(z)[\mathbf{I} + \mathbf{G}_n(z)\mathbf{C}(z)]^{-1}$  é estável porque  $\mathbf{C}(z)$  estabiliza  $\mathbf{G}_n(z)$ .

A condição de estabilidade robusta sob perturbações bloco diagonais é dada por [25]

$$\bar{\sigma}(\Delta(e^{j\omega T_s})) < \frac{1}{\bar{\sigma}(\mathbf{M}(e^{j\omega T_s}))}, \quad \forall \omega \in [0, \pi/T_s).$$

Agora, utilizando a desigualdade  $\bar{\sigma}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{X})\bar{\sigma}(\mathbf{Y})$ , é possível es-  
crever

$$\bar{\sigma}(\mathbf{M}) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{M}_0)\bar{\sigma}(\mathbf{F}_r)\bar{\sigma}(\mathbf{W}_1)\bar{\sigma}(\mathbf{W}_2).$$

Assim, para determinadas matrizes de incerteza  $\mathbf{W}_1$  e  $\mathbf{W}_2$ , além de um controlador  $\mathbf{C}(z)$  definido *a priori*, a robustez do MIMO-PSF é definida por  $\bar{\sigma}(\mathbf{F}_r)$ .

Como  $\mathbf{F}_r(z)$  é diagonal, os valores singulares são os valores absolutos dos elementos da diagonal, ou seja,

$$\sigma_i(\mathbf{F}_r(e^{j\omega T_s})) = |F_{r_i}(e^{j\omega T_s})| \quad \forall \omega \in [0, \pi/T_s).$$

Assim, as características de robustez da estrutura completa do MIMO-PSF são definidas pelas formas das funções escalares  $F_{r_i}(e^{j\omega T_s})$  que são definidas utilizando o parâmetro livre  $\alpha_i$ . Quando  $\alpha_i \rightarrow 1$  a robustez é aumentada, mas ao mesmo tempo, como esses são os polos do filtro que afeta  $\mathbf{H}_{yq}(z)$ , a resposta de rejeição de perturbação torna-se mais lenta. Esse compromisso entre robustez e desempenho deve ser resolvido para cada caso durante o processo de ajuste da estrutura de controle.

Note que como no caso SISO, no controle de processos instáveis a robustez não pode ser aumentada arbitrariamente empregando  $F_{r_i}(z)$ , pois

uma ação de realimentação mínima é necessária para manter a estabilidade nominal de malha fechada [1]. Além disso, em qualquer caso pode ser necessário um retorno ao ajuste do controlador primário  $C(z)$  para aumentar a robustez do sistema sem prejudicar tanto a velocidade de rejeição de perturbação. Em alguns casos são necessárias algumas iterações até que se atinja um compromisso adequado entre as respostas desejadas e a robustez a erros de modelagem.

Como no caso SISO, o filtro  $F_r(z)$  pode ser projetado com mais polos que zeros para atenuar ruídos de medição [45] e para aumentar a robustez a erros de modelagem. Um filtro  $F_r(z)$  com comportamento passa-baixas evita que ruídos de medição de alta frequência apareçam diretamente no sinal de controle, como pode ser visto em

$$H_{\text{um}}(z) = -C(z)[I + G_n(z)C(z)]^{-1}F_r(z).$$

Além disso, um filtro do preditor  $F_r(z)$  no qual todos os elementos apresentam característica passa-baixas ajudam a aumentar a robustez em altas frequências, visto que o valor singular máximo em frequências elevadas diminui. Isso é tratado em mais detalhes no exemplo da seção 4.5.1.

## 4.5 Estudos de caso em simulação

Nesta seção três estudos de caso são apresentados: um para um processo estável, um para um processo integrador e outro para um processo instável. Os resultados são comparados com outras estruturas de compensação de atraso para o caso multivariável apresentadas na literatura ou com GPC e pontos específicos são discutidos em mais detalhes em cada uma das subseções.

### 4.5.1 Caso estável

Será considerada como caso estável a coluna de destilação de água e metanol cujo modelo foi apresentado por Wood e Berry [81]. Essa é uma planta MIMO bastante empregada na literatura e que apresenta fortes interações entre as variáveis, além de múltiplos atrasos. Uma representação esquemática simplificada do processo mostrando somente as variáveis de interesse é apresentada na figura 21 e as matrizes de transferência são dadas por

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{12,8 e^{-s}}{16,7s + 1} & \frac{-18,9 e^{-3s}}{21s + 1} \\ \frac{6,6 e^{-7s}}{10,9s + 1} & \frac{-19,4 e^{-3s}}{14,4s + 1} \end{bmatrix}, \quad P_q(s) = \begin{bmatrix} \frac{3,8 e^{-8,1s}}{14,9s + 1} \\ \frac{4,9 e^{-3,4s}}{13,2s + 1} \end{bmatrix},$$

onde  $\mathbf{y}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{u}(s) + \mathbf{P}_q(s)q(s)$ ,  $\mathbf{y}(s) = [y_1(s) \ y_2(s)]'$ ,  $\mathbf{u}(s) = [u_1(s) \ u_2(s)]'$ ,  $y_1(s)$  é a fração molar de metanol no produto de topo,  $y_2(s)$  é a fração molar de metanol no produto de fundo,  $u_1(s)$  é a vazão de refluxo,  $u_2(s)$  é a vazão de vapor no refeedor e  $q(s)$  é a vazão de alimentação da coluna. Os atrasos e constantes de tempo são todos dados em minutos, as frações molares são dadas em porcentagem e as vazões são dadas em libras por minuto ( $1 \text{ lb/min} \approx 7,56 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$ ). O ponto de operação considerado é dado por  $y_1 = 96,25 \text{ mol\%}$ ,  $y_2 = 0,50 \text{ mol\%}$ ,  $u_1 = 1,95 \text{ lb/min}$ ,  $u_2 = 1,71 \text{ lb/min}$  e  $q = 2,45 \text{ lb/min}$ .

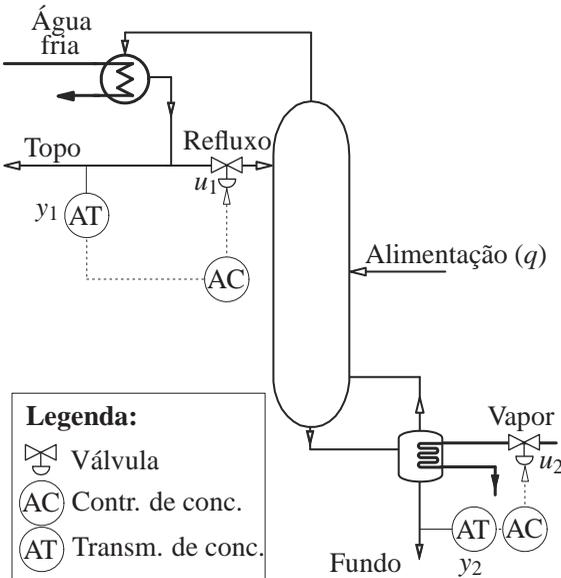


Figura 21: Representação esquemática de uma coluna de destilação

A representação discreta do modelo com sustentadores de ordem zero e período de amostragem  $T_s = 1 \text{ min}$  é dada pela equação (4.9). O modelo da perturbação não será discretizado, visto que uma ação de pré-alimentação da perturbação não será considerada. Entretanto, é possível adicionar um

controlador de pré-alimentação da perturbação na estrutura de controle.

$$\mathbf{P}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,7440z^{-1}}{z-0,9419} & \frac{-0,8789z^{-3}}{z-0,9535} \\ \frac{0,5786z^{-7}}{z-0,9123} & \frac{-1,3015z^{-3}}{z-0,9329} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Os atrasos mínimos por linha são 1 min e 3 min, respectivamente. Assim, a estrutura proposta será capaz de compensar esses atrasos e o controlador primário deverá ser ajustado considerando o modelo rápido dado por

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,7440}{z-0,9419} & \frac{-0,8789z^{-2}}{z-0,9535} \\ \frac{0,5786z^{-4}}{z-0,9123} & \frac{-1,3015}{z-0,9329} \end{bmatrix}.$$

Em princípio qualquer estrutura de controle pode ser utilizada e seu ajuste deve ser realizado considerando o modelo rápido da planta. Neste caso específico, um controlador PI diagonal com expressão

$$\left( C_{jj}(z) = K_{c_j} + \frac{K_{c_j}}{T_{i_j}} \frac{T_s z}{z-1}, j = \{1,2\}; C_{ij} = 0, i \neq j \right)$$

e parâmetros de ajuste  $K_{c_1} = 0,5$ ,  $T_{i_1} = 9$ ,  $K_{c_2} = -0,2$  e  $T_{i_2} = 9$  é empregado. A estrutura de controle adotada (figura 21) é conhecida na literatura como LV, em alusão às variáveis manipuladas, que tipicamente são tratadas na literatura específica pelos símbolos L (refluxo de topo) e V (refluxo de fundo). Os resultados são comparados com o PS tradicional multivariável com o mesmo controlador PI diagonal.

O filtro  $\mathbf{F}_r(z)$  foi ajustado para que a rejeição de perturbação ocorresse em aproximadamente 15 min. Assim, todos os polos de malha aberta da planta que estão fora do círculo de raio  $e^{-(3/15)T_s} \approx 0,8$  são cancelados pelo filtro do preditor (equação (2.25)). Os polos do filtro foram escolhidos para serem ligeiramente mais rápidos que a dinâmica desejada ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,7$ ). Assim, o filtro do preditor é dado por

$$\mathbf{F}_r(z) = \begin{bmatrix} \frac{1,495z^2 - 2,303z + 0,898}{(z-0,7)^2} & 0 \\ 0 & \frac{2,376z^2 - 3,908z + 1,622}{(z-0,7)^2} \end{bmatrix}.$$

Para a simulação, a referência da fração molar do produto de topo

( $y_1$ ) é elevada em 0,75 mol% em  $t = 0$  min, a referência da fração molar do produto de fundo ( $y_2$ ) é aumentada em 0,5 mol% em  $t = 66$  min e a vazão de alimentação ( $q$ ) é diminuída em 0,15 lb/min em  $t = 132$  min. Os resultados de simulação são apresentados na figura 22 e mostram como o emprego do MIMO-PSF proposto pode melhorar a resposta de rejeição de perturbação (as referências são apresentadas em linhas pontilhadas). No caso nominal, as respostas de seguimento de referência do PS MIMO e do MIMO-PSF são as mesmas, porém como o MIMO-PSF é ajustado para evitar cancelamentos polo-zero, a resposta de rejeição de perturbação pode ser mais rápida que a dinâmica de malha aberta de  $\mathbf{P}(z)$ .

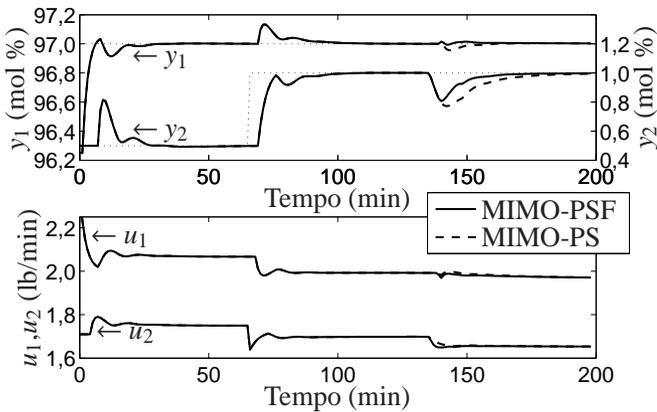


Figura 22: Comparação entre o MIMO-PSF (proposto) e o MIMO-PS para o estudo de caso estável

É importante levar em consideração o compromisso existente entre a dinâmica desejada de rejeição de perturbação e a robustez a erros de modelagem. Se um limite aditivo de  $\pm 10\%$  do ganho estático for considerado ao redor da resposta nominal com

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1,28 & 1,89 \\ 0,66 & 1,94 \end{bmatrix},$$

o valor de  $1 / (\bar{\sigma}(\mathbf{M}_0)\bar{\sigma}(\mathbf{W}_1)\bar{\sigma}(\mathbf{W}_2))$  é apresentado em linha cheia na figura 23. Como pode ser visto na figura 23, a condição  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,7$  (linha tracejada) não garante a estabilidade robusta e o mesmo pode ser dito sobre a versão MIMO do PS tradicional (linha tracejada e pontilhada). Para garantir a estabilidade robusta a erros de modelagem, o filtro do preditor deve ser ajustado

com  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,9$  e um polo extra deve ser adicionado a cada elemento do filtro (linha pontilhada). Entretanto, note que como a planta é estável, não há vantagem em se utilizar um filtro que cancele as dinâmicas lentas da planta e tenha polos lentos, pois esses polos lentos aparecerão na resposta de rejeição de perturbação. Dessa forma, o efeito final é uma resposta de rejeição de perturbação que continua sendo lenta. Nesse caso, para garantia de estabilidade robusta, é mais simples empregar um filtro que garanta as características frequenciais desejadas. Um exemplo de filtro que poderia ser empregado neste caso é um filtro diagonal com elementos dados por  $F_{r_i}(z) = \frac{0,2(z-0,4)}{(z-0,8)^{0,6}}$  (linha cinza cheia).

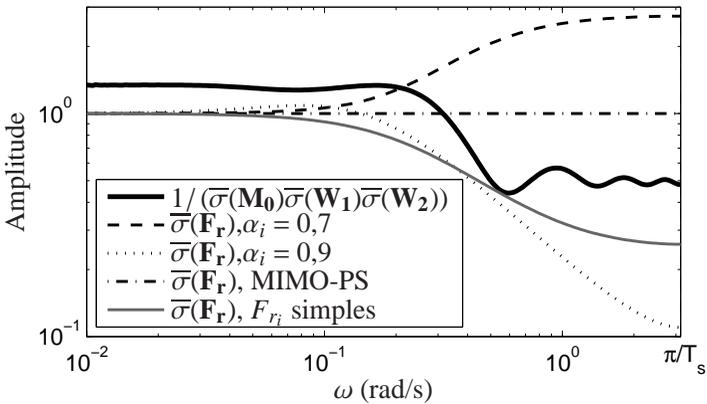


Figura 23: Análise de robustez para o estudo de caso estável

No caso nominal as respostas temporais para seguimento de referência são as mesmas para todos os casos. Por outro lado, as respostas de rejeição de perturbação são diferentes, como pode ser observado na figura 24. Quando um erro de modelagem de 2 min é considerado em todos os valores de atraso, somente os casos com ajuste mais conservador do filtro do preditor permanecem estáveis. As respostas com erro de modelagem também são apresentadas na figura 24.

#### 4.5.2 Caso integrador

O caso integrador que será considerado será o mesmo utilizado por García e Albertos [7] e por Normey-Rico e Camacho [1]. Ele consiste no controle de nível e temperatura de um evaporador de três estágios, mostrado

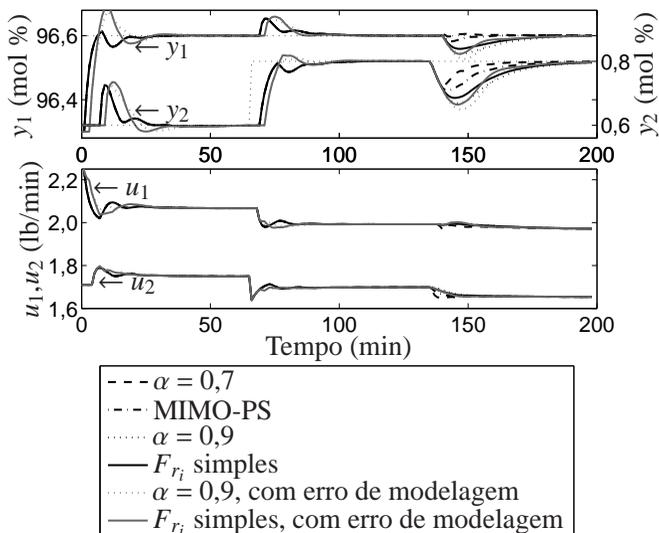


Figura 24: Ilustração da relação existente entre o desempenho de rejeição de perturbação e robustez para o estudo de caso estável

na figura 25. O processo é descrito por

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{3,5 e^{-s}}{s} & \frac{-e^{-5s}}{2s+1} \\ \frac{2 e^{-7s}}{1,5s+1} & \frac{-e^{-5s}}{3,2s+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_q(s) = \begin{bmatrix} \frac{3,5 e^{-3s}}{s} \\ \frac{-4,5 e^{-2s}}{2s+1} \end{bmatrix},$$

onde  $\mathbf{y}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{u}(s) + \mathbf{P}_q(s)q(s)$ ,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são o nível e a temperatura no tanque de armazenagem respectivamente,  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  são as vazões de caldo e vapor respectivamente e a perturbação  $q(t)$  é a vazão de saída do tanque [1].

A representação discreta da planta com período de amostragem de  $T_s = 0,2 \text{ min}$  é

$$\mathbf{P}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,7z^{-5}}{z-1} & \frac{-0,0952z^{-25}}{z-0,9048} \\ \frac{0,2497z^{-35}}{z-0,8752} & \frac{-0,0606z^{-25}}{z-0,9394} \end{bmatrix}$$

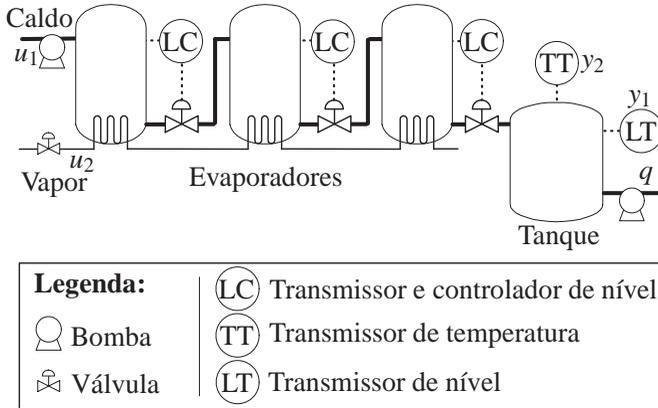


Figura 25: Representação esquemática do evaporador de três estágios

e seu modelo rápido é dado por

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,7}{z-1} & \frac{-0,0952z^{-20}}{z-0,9048} \\ \frac{0,2497z^{-10}}{z-0,8752} & \frac{-0,0606}{z-0,9394} \end{bmatrix}.$$

Para que os resultados possam ser comparados com os de García e Albertos [7], os parâmetros do controlador primário foram escolhidos  $K_{c1} = 0,14$ ,  $T_{i1} = 10$ ,  $K_{c2} = -0,95^2$  e  $T_{i2} = 3,2$ . O primeiro elemento do filtro do preditor é ajustado de acordo com a equação (2.25) para evitar o polo integrador do primeiro elemento de  $\mathbf{P}(z)$  e para rejeitar perturbações do tipo degrau. O polo do filtro foi escolhido  $\alpha_1 = 0,9$  considerando a relação existente entre robustez e dinâmica de rejeição de perturbação. O filtro resultante é

$$\mathbf{F}_r(z) = \begin{bmatrix} \frac{1,5z-1,4}{z-0,9} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<sup>2</sup>Note que  $K_{c2} = -0,95$  é diferente de  $K_{c2} = -5$  apresentado em [7] e de  $K_{c2} = -0,2$  apresentado em [1]. O primeiro valor é muito alto e a resposta torna-se muito oscilatória (na realidade, para se obter as mesmas respostas apresentadas em [7] foi necessário ajustar  $K_{c2} = -0,2$  no primeiro caso e  $K_{c2} = -0,02$  no caso IMC-DTC). O segundo valor é adequado somente para o exemplo apresentado em [1] porque não foi considerada uma mudança de referência em  $y_2(t)$ . Todavia, caso ela seja considerada o valor é muito pequeno e a resposta torna-se muito lenta.

Note que neste caso um valor muito conservador para  $\alpha_1$  não faz diferença em termos da estabilidade global do sistema em malha fechada, visto que o segundo elemento da diagonal do filtro é constante e igual a um. Como a estratégia proposta para análise de robustez emprega o valor singular máximo de  $\mathbf{F}_r(z)$ , mesmo que  $F_{r_1}(z)$  tenda a valores muito pequenos em alta frequência, o valor singular máximo será dado pelo segundo elemento da diagonal. Caso seja necessário aumentar a robustez, então será necessário modificar também  $F_{r_2}(z)$  (por exemplo  $F_{r_2}(z) = \frac{0,1}{z-0,9}$ ).

Neste estudo de caso a estrutura proposta será comparada com a de García e Albertos [7] e com o IMC-MIMO-PS. Para o IMC-MIMO-PS o controlador  $\mathbf{Q}(z)$  foi mantido a matriz identidade e o controlador primário  $\mathbf{C}(z)$  é mantido o mesmo que o da estrutura proposta. Para empregar o preditor de [7], o controlador  $\mathbf{Q}(z)$  é ajustado para satisfazer a condição de ganho estático unitário da malha, ou seja  $\mathbf{Q}(1) = \left\{ \mathbf{P}_n(1)\mathbf{C}(1)[\mathbf{I} + \mathbf{G}^\dagger(1)\mathbf{C}(1)]^{-1} \right\}^{-1}$ , visto que o modelo rápido tem ganhos estáticos diferentes dos ganhos do modelo da planta. A realização mais simples é

$$\mathbf{Q}(z) = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,6489 \\ 0 & 4,7710 \end{bmatrix}.$$

Pela mesma razão, o ganho proporcional  $Kc_2$  necessita ser diminuído (dividido por 4,7710), o que resulta em  $Kc_2 = -0,95/4,77 = -0,2$ . Como em [7], alguns atrasos são mantidos no modelo que gera as saídas “sem atraso”  $\mathbf{G}^\dagger(z)$  como tentativa de reduzir os ganhos dos elementos fora da diagonal. Assim,  $\mathbf{G}^\dagger(z)$  é dada por

$$\mathbf{G}^\dagger(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,7}{z-1} & \frac{-0,1569z^{-20}}{z-0,9048} \\ \frac{0,9471z^{-25}}{z-0,8752} & \frac{-0,2890}{z-0,9394} \end{bmatrix}$$

e o filtro  $\Psi(z)$  é

$$\Psi(z) = \begin{bmatrix} \Psi_{11}(z) & \Psi_{12}(z) \\ \Psi_{21}(z) & \Psi_{22}(z) \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(z) &= \frac{0,7z^4 + 0,7z^3 + 0,7z^2 + 0,7z + 0,7}{z^5}, \\ \Psi_{12}(z) &= \frac{(-0,1569z^4 - 0,142z^3 - 0,1285z^2 - 0,1162z - 0,1052)z^{-20}}{z^5}, \\ \Psi_{21}(z) &= \frac{(0,9471z^9 + 0,8289z^8 + \dots + 0,3259z + 0,2853)z^{-25}}{z^{10}}, \text{ e} \end{aligned}$$

$$\Psi_{22}(z) = \frac{-0,289z^{24} - 0,2715z^{23} - \dots - 0,06865z - 0,06449}{z^{25}}.$$

A figura 26 mostra as respostas de malha fechada para as três estratégias consideradas neste estudo de caso. Os sinais de referência são mostrados em linha pontilhada. A simulação considera uma mudança na referência de  $y_1(t)$  com amplitude 0,75 no instante  $t = 5$  min, uma mudança de 0,5 na referência de  $y_2(t)$  em  $t = 40$  min e uma perturbação em degrau com amplitude de 0,05 em  $t = 80$  min.

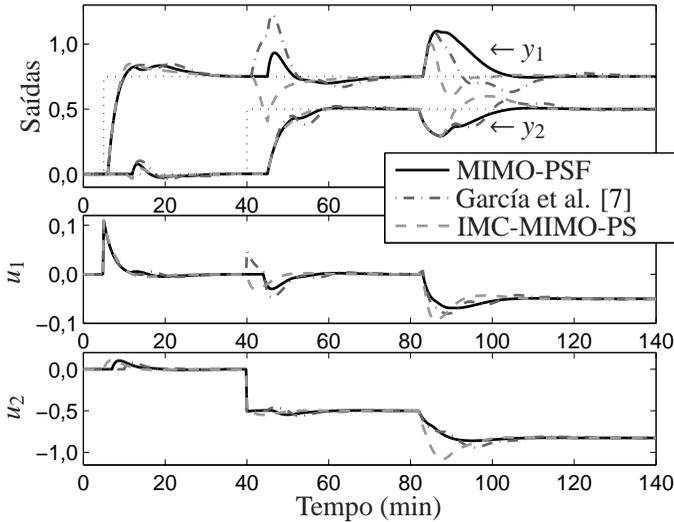


Figura 26: Comparação entre o MIMO-PSF, o IMC-DTC proposto em [7] e o IMC-MIMO-PS para o estudo de caso integrador

Como pode ser observado na figura 26, todas as três estratégias são capazes de seguir referências do tipo degrau e rejeitar perturbações em degrau sem erros em regime permanente. Como o IMC-DTC proposto em [7] e o IMC-MIMO-PS têm um laço adicional com um controlador as formas das curvas são diferentes, apesar de o controlador primário ter sido ajustado empregando a mesma estratégia em todos os casos. Além disso, é importante salientar que em todas as estruturas o controlador primário pode ser ajustado para que se atinja determinado desempenho desejado e esse ajuste deve ser realizado considerando o modelo rápido da planta. Apesar de o MIMO-PSF parecer ter um desempenho melhor que o apresentado pelas outras estruturas, neste caso a grande vantagem da estrutura proposta é que ela é mais simples que as demais tanto na questão de ajuste quanto de implementação [44].

### 4.5.3 Caso instável

O estudo de caso instável considerará um processo hipotético com instabilidades diagonais<sup>3</sup> descrito por

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,6 e^{-4s}}{-2,6s + 1} & \frac{0,6 e^{-6s}}{2,5s + 1} \\ \frac{0,7 e^{-5s}}{3s + 1} & \frac{1,7 e^{-3s}}{-2,2s + 1} \end{bmatrix}.$$

A representação discreta da planta com um período de amostragem de  $T_s = 0,2s$  é

$$\mathbf{P}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0,1279z^{-20}}{z - 1,08} & \frac{0,04797z^{-30}}{z - 0,92} \\ \frac{0,04515z^{-25}}{z - 0,9355} & \frac{-0,1618z^{-15}}{z - 1,095} \end{bmatrix}$$

e o modelo rápido é dado por

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0,1279}{z - 1,08} & \frac{0,04797z^{-10}}{z - 0,92} \\ \frac{0,04515z^{-10}}{z - 0,9355} & \frac{-0,1618}{z - 1,095} \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo o controlador proposto é comparado com uma estratégia de controle diferente. Um método utilizado com bastante frequência na indústria para controlar processos MIMO com atraso é o MPC. Neste caso, devido à instabilidade em malha aberta da planta, uma técnica MPC capaz de tratar sistemas instáveis, tal como o GPC-T [5] deve ser empregado. Neste caso, um GPC-T foi ajustado para impor uma resposta transitória com tempo de assentamento de aproximadamente 12s em cada variável de processo e para apresentar baixo acoplamento entre as variáveis. Os resultados são apresentados na figura 27 (em linhas tracejadas-pontilhadas) para os seguintes parâmetros de ajuste:  $\mathbf{Q}_\delta = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{Q}_\lambda = \begin{bmatrix} 25\mathbf{I}_{N_{u1} \times N_{u1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 5\mathbf{I}_{N_{u2} \times N_{u2}} \end{bmatrix}$ ,  $N_1 = N_2 = 40$ ,  $N_{u1} = N_{u2} = 15$ ,  $T_1(z) = z^2 - 1,6731z + 0,6923$ ,  $T_2(z) = z^2 - 1,4355z + 0,4678$ ,  $\alpha_1 = 0,82$  e  $\alpha_2 = 0,90$  (parâmetros do filtro de referência de primeira ordem com estrutura  $F(z) = \frac{1-z_c}{1-z_c^{1/\alpha}} \frac{z-z_c^{1/\alpha}}{z-z_c}$ , onde  $z_c$  é o zero do controlador). Os sinais de

<sup>3</sup>Note que a estrutura proposta também é capaz de tratar o problema de instabilidades fora da diagonal principal, considerando inclusive o caso de termos instáveis em todos os elementos da matriz de transferência. A condição para garantia da estabilidade em malha fechada no caso nominal é que o controlador primário seja capaz de estabilizar o modelo rápido da planta.

referência são mostrados em linhas pontilhadas. A simulação considera uma mudança na referência de  $y_1(t)$  com amplitude 0,75 no instante  $t = 5$  min, uma mudança de 0,5 na referência de  $y_2(t)$  em  $t = 40$  min e uma perturbação em degrau com amplitude de 0,05 em  $t = 80$  min.

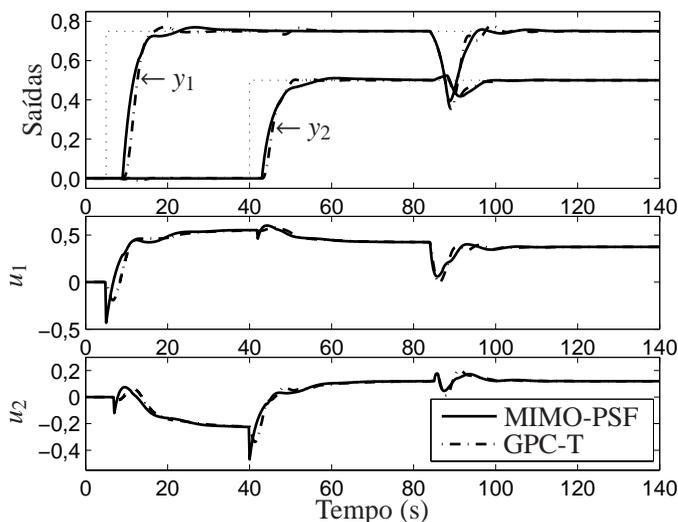


Figura 27: Respostas no domínio do tempo para o MIMO-PSF e o GPC-T para o estudo de caso instável

Note que o GPC-T permite uma resposta praticamente desacoplada com os tempos de assentamento desejados. Para mostrar que o MIMO-PSF é capaz de obter um desempenho semelhante ao apresentado pelo GPC-T, um controlador primário baseado em desacoplamento será utilizado. Assim, o ajuste do controlador será dividido em quatro etapas: (i) ajuste do desacoplador, (ii) ajuste do controlador primário, (iii) ajuste do filtro de referência e (iv) ajuste do filtro do preditor. Note que o ajuste do filtro do preditor é completamente independente do ajuste dos outros elementos do laço de controle (controlador primário, desacoplador e filtro de referência), logo a etapa (iv) pode ser realizada antes das demais.

O desacoplador é dado por

$$\mathbf{D}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{0,04797(z-1,08)z^{-10}}{(z-0,92)(-0,1279)} \\ -\frac{0,04515(z-1,095)z^{-10}}{(z-0,9355)(-0,1618)} & 1 \end{bmatrix}$$

e as dinâmicas resultantes de sua aplicação são

$$\mathbf{D}(z) \cdot \mathbf{P}_n(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0,1279z^{-20}}{(z-1,08)\lambda_{11}(z)} & 0 \\ 0 & \frac{-0,1618z^{-15}}{(z-1,095)\lambda_{22}(z)} \end{bmatrix},$$

onde  $\lambda_{ij}(z)$  é cada um dos elementos da matriz de ganhos relativos dinâmicos de  $\mathbf{P}_n(z)$ . Como pode ser observado em um diagrama de Bode,  $\lambda_{ij}(z) \approx \lambda_{ij}, \forall i, j \in \{1, 2\}$ , i.e., os ganhos relativos dinâmicos podem ser aproximados pelos ganhos relativos (estáticos). Assim, neste caso específico o controlador primário pode ser ajustado considerando o modelo rápido da planta dado por

$$\mathbf{G}^\ddagger(z) = \mathbf{D}(z) \cdot \mathbf{G}(z) \approx \begin{bmatrix} \frac{-0,1279}{(z-1,08)1,1826} & 0 \\ 0 & \frac{-0,1618}{(z-1,095)1,1826} \end{bmatrix}.$$

O controlador primário para cada laço  $C_i(z)$  é ajustado para controlar  $G_{ii}^\ddagger(z)$ . Neste caso, um controlador PI diagonal foi empregado para alocar os polos de malha fechada do modelo rápido  $G_{ii}^\ddagger(z)$  em 0,9. O controlador resultante tem parâmetros  $K_{c1} = -2,189$ ,  $T_{i1} = 5,0$ ,  $K_{c2} = -2,081$  e  $T_{i2} = 5,7$ . Como cada dinâmica de malha fechada tem um zero dominante, um filtro de referência pode ser utilizado para evitar sobressinais nas respostas. Neste caso, o filtro é

$$\mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,2533z - 0,2153}{z - 0,9620} & 0 \\ 0 & \frac{0,2267z - 0,1927}{z - 0,9660} \end{bmatrix}.$$

O filtro do preditor precisa ser ajustado para evitar que os polos instáveis do modelo da planta apareçam como zeros do controlador equivalente, resultando em instabilidade interna. Os elementos da diagonal do filtro do preditor são ajustados de acordo com a equação (2.25). O polo do primeiro

elemento foi escolhido em 0,9 e o segundo foi escolhido 0,95 considerando o compromisso entre robustez e desempenho. O filtro resultante é

$$\mathbf{F}_r(z) = \begin{bmatrix} \frac{9,232z - 9,132}{z - 0,9} & 0 \\ 0 & \frac{5,439z - 5,389}{z - 0,95} \end{bmatrix}.$$

O comportamento do sistema em malha fechada com o MIMO-PSF é apresentado em linhas cheias na figura 27. Como pode ser observado, o desempenho alcançado pela estratégia proposta é similar ao do GPC-T. Na realidade, no caso nominal irrestrito é possível ajustar o controlador primário do MIMO-PSF empregando um procedimento de otimização baseado no GPC-T. Nesse caso é necessário determinar o controlador equivalente do GPC-T e implementá-lo como um MIMO-PSF.

Para finalizar o estudo de caso, alguns comentários sobre os controladores utilizados na seção 4.5.2 são apresentados na sequência. Neste caso, o IMC-MIMO-PS não pode ser utilizado, visto que o comportamento de malha aberta da planta é instável. Por outro lado, o IMC-DTC proposto em [7] pode. O modelo rápido neste caso é dado por

$$\mathbf{G}^\dagger(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0,02747}{z - 1,08} & \frac{0,5844}{z - 0,92} \\ \frac{0,239}{z - 0,9355} & \frac{-0,04137}{z - 1,095} \end{bmatrix}.$$

Assim, é necessário encontrar um controlador  $\mathbf{C}(z)$  que estabilize o modelo rápido para que se consiga estabilidade do sistema completo em malha fechada. O grande problema neste caso é encontrar um controlador que estabilize  $\mathbf{G}^\dagger(z)$ , visto que há muita interação entre os canais do sistema. Como indicado por uma análise empregando a matriz de ganhos relativos (equação (4.10)), o emparelhamento mais adequado das variáveis seria a dos termos que estão fora da diagonal, porém neste caso o controlador não seria ajustado considerando os modos instáveis. Mesmo um controlador obtido empregando uma abordagem por *loop-shaping*  $H_\infty$  (comando `loopsyn` no MATLAB<sup>®</sup>) não foi capaz de estabilizar o modelo contínuo (nominal) da planta. Neste caso, necessita-se investir mais tempo para tentar encontrar alguma configuração que permita o emprego do preditor proposto em [7].

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -0,0055 & 1,0055 \\ 1,0055 & -0,0055 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

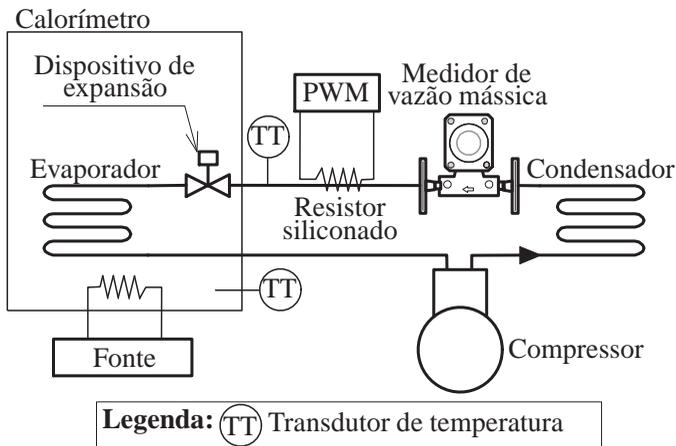


Figura 28: Esquema geral indicando os pontos de medição e atuação da malha multivariável

#### 4.6 Estudo de caso experimental

A fim de validar experimentalmente o comportamento do MIMO-PSF, foram realizados ensaios empregando a bancada de avaliação de desempenho de compressores de refrigeração. Foram escolhidas como variáveis de processo as temperaturas de entrada e interna do calorímetro e como variáveis manipuladas a potência de alimentação da fonte que alimenta o resistor no interior do calorímetro e a razão cíclica do PWM que alimenta o resistor siliconado enrolado na tubulação na entrada do calorímetro. Essas duas temperaturas são bastante importantes no processo, pois estão diretamente relacionadas com o balanço energético no calorímetro, que é utilizado para determinação da capacidade de refrigeração do compressor. Dessa forma, é importante que sejam bem controladas para que a incerteza do resultado final seja baixa. Pela proximidade dos pontos de medição no circuito, existe um acoplamento entre as mesmas e por isso o uso de um controlador MIMO pode trazer benefícios. Uma representação esquemática dos pontos de medição e atuação é apresentada na figura 28.

Foram realizados ensaios de resposta ao degrau na proximidade do ponto de operação nominal de 32 °C para identificar o comportamento dinâ-

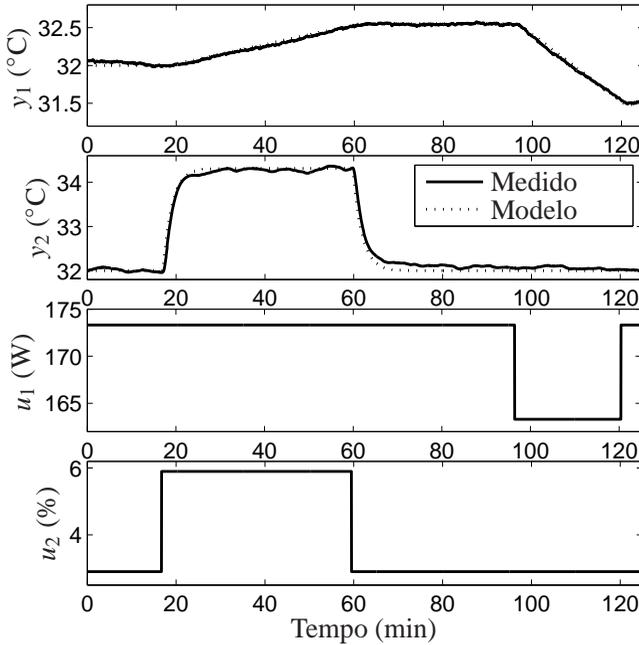


Figura 29: Comportamento do modelo identificado frente ao comportamento do sistema em um dos ensaios em malha aberta

mico do sistema. O modelo nominal encontrado foi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7,40 \times 10^{-5} e^{-45s}}{s} & \frac{7,41 \times 10^{-5} e^{-90s}}{s} \\ 0 & \frac{0,77 e^{-18s}}{120s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

onde  $y_1$  é a temperatura interna do calorímetro,  $y_2$  é a temperatura de entrada do calorímetro,  $u_1$  é a potência de alimentação do resistor localizado no interior do calorímetro e  $u_2$  é a razão cíclica do PWM de alimentação do resistor na entrada do calorímetro. Uma comparação gráfica do resultado do processo de identificação com o melhor ensaio realizado é apresentada na figura 29. Mais detalhes acerca das variáveis e das explicações físicas para os comportamentos podem ser obtidos no apêndice C.

Deve-se notar que existe apenas um acoplamento parcial das variáveis e que esse problema poderia ser contornado com o emprego de um controlador de pré-alimentação de perturbação em conjunto com dois PSF SISO. Todavia, para ilustrar as capacidades de desacoplar e compensar atrasos em

plantas reais não estáveis, escolheu-se essa aplicação como estudo de caso do MIMO-PSF.

O período de amostragem empregado foi o mesmo utilizado para as demais malhas de controle de temperatura, ou seja,  $T_s = 3$  s. Assim, o modelo discreto é dado por

$$\mathbf{P}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,000267z^{-15}}{z-1} & \frac{0,0002223z^{-30}}{\frac{z-1}{0,01901z^{-6}}} \\ 0 & \frac{z-1}{z-0,9753} \end{bmatrix}$$

e o modelo rápido é

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,000267}{z-1} & \frac{0,0002223z^{-15}}{\frac{z-1}{0,01901}} \\ 0 & \frac{z-1}{z-0,9753} \end{bmatrix}.$$

A estrutura de controle empregada é constituída por dois controladores PI ajustados de forma independente para cada uma das variáveis de processo. Como todos os atrasos são compensados pela estrutura de predição, o ajuste foi realizado considerando-se apenas as dinâmicas sem atraso do modelo rápido. O controlador PI diagonal tem expressão

$$C_{jj}(z) = K_{c_j} + \frac{K_{c_j} T_s z}{T_{i_j} z - 1}, j = \{1, 2\}; C_{ij} = 0, i \neq j$$

e parâmetros de ajuste  $K_{c_1} = 131,4$ ,  $T_{i_1} = 338$ ,  $K_{c_2} = 1,58$  e  $T_{i_2} = 117$ , com tempos em segundos. O controlador foi projetado para que os tempos de assentamento fossem de aproximadamente 15 min para a temperatura interna e 12 min para a temperatura de entrada, com uma resposta criticamente amortecida. Apesar de a dinâmica da temperatura de entrada ser bastante mais rápida, optou-se por manter as duas respostas com tempos semelhantes, visto que só se considera que o ensaio está em regime quando todas as variáveis são levadas aos seus valores de referência. Como os controladores projetados impõem zeros dominantes de malha fechada, foi projetado um filtro de referência para eliminar o pico no seguimento de referência imposto pelo efeito desses zeros. O filtro de referência tem ganho unitário e é dado por

$$\mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,2933z - 0,2845}{z - 0,9912} & 0 \\ 0 & \frac{0,5z - 0,475}{z - 0,975} \end{bmatrix}.$$

O filtro do preditor foi projetado apenas para que o controlador equivalente não cancele o polo integrador da planta. Dessa forma, foi necessário projetar apenas o primeiro elemento do filtro, já que ambos os integradores estão na primeira linha. Foi alocado um polo em  $z = 0,99$  e o zero foi calculado empregando a equação (2.25). O filtro do preditor resultante foi

$$\mathbf{F}_r(z) = \begin{bmatrix} \frac{1,15z - 1,14}{z - 0,99} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como o sistema é integrador, a implementação deve ser feita através do preditor estável  $\mathbf{S}(z)$  ou do controlador equivalente para que o controlador não seja internamente instável. O preditor estável vale

$$\mathbf{S}(z) = \begin{bmatrix} \frac{2,67 \times 10^{-3}(z^{15} + 0,02z^{14} + \dots + 0,02z - 1,28)}{z^{16} - 0,99z^{15}} & \frac{2,223 \times 10^{-3}(z^{15} + 0,02z^{14} + \dots + 0,02z - 1,28)}{z^{31} - 0,99z^{30}} \\ 0 & \frac{0,01901(z^6 - 1)}{z^7 - 0,9753z^6} \end{bmatrix}.$$

O controlador equivalente tem a mesma estrutura da matriz  $\mathbf{S}(z)$ , porém a ordem é ligeiramente maior. Caso opte-se pela implementação com o controlador equivalente, deve-se tomar o cuidado de realizar todos os cancelamentos das raízes comuns do numerador e do denominador que se encontram fora do círculo de raio unitário.

A resposta alcançada pelo sistema em malha fechada é apresentada na figura 30, juntamente com a resposta obtida através de simulação. Inicialmente a referência da temperatura de entrada foi alterada de 30°C para 32°C no instante  $t = 7$  min e posteriormente a referência da temperatura de saída foi alterada de 30°C para 32°C no instante  $t = 22,5$  min. A opção por variar primeiro a temperatura de entrada se deu pelo fato de variações na potência entregue na entrada do calorímetro influenciarem a temperatura de saída. Dessa forma, ao variar primeiro a temperatura de entrada excita-se o acoplamento existente no sistema. No instante  $t = 67$  min foi aplicada uma perturbação de carga através de uma elevação de 0,1 bar na pressão de entrada do compressor. Essa alteração se reflete diretamente em um aumento da vazão mássica, o que provoca um aumento na taxa de retirada de calor do interior do calorímetro por parte do fluido refrigerante. Observa-se que a estrutura de predição é capaz de satisfazer aos requisitos impostos inicialmente no projeto do controlador, além de rejeitar perturbações de carga. Como a resposta desejada de malha fechada foi ajustada para ser lenta, foi possível alcançar um comportamento muito semelhante de malha fechada com o emprego de dois controladores PID independentes devidamente ajustados e com o emprego dos mesmos filtros de referência.

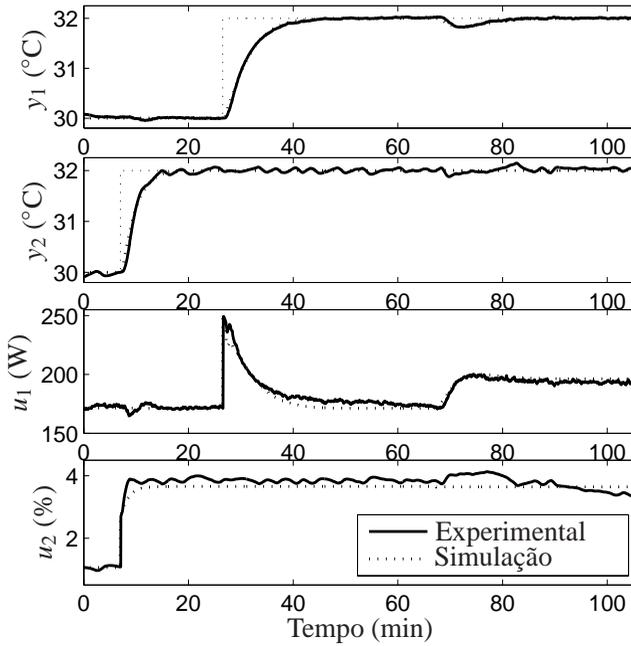


Figura 30: Comportamento do sistema em malha fechada (dados experimentais e simulação)

Todavia, caso a resposta seja acelerada, as malhas de controle PID tornam o sistema de malha fechada muito oscilatório e isso acaba se refletindo em um tempo de assentamento muito maior que o obtido empregando a estrutura de controle proposta. Essa diferença é ilustrada na figura 31, na qual o tempo de assentamento desejado de malha fechada é acelerado para 4 min para a entrada do calorímetro e 5 min para a saída. O controlador PID foi ajustado empregando uma aproximação do atraso de primeira ordem e no caso do MIMO-PSF foram alterados apenas o controlador primário e o filtro de referência. O novo controlador primário assumiu novamente a forma de um controlador PI diagonal, com parâmetros  $K_{c1} = 370$ ,  $T_{i1} = 148$ ,  $K_{c2} = 3$  e  $T_{i2} = 120$ , com tempos em segundos. O filtro de referência também é diagonal, com ganho unitário, cancela o zero dominante imposto pelo controlador e aloca um novo zero à esquerda dos polos dominantes de malha fechada. Inicialmente a referência da temperatura de entrada foi alterada de 32 °C para 34 °C no instante  $t = 7$  min e posteriormente a referência da temperatura de saída foi alterada de 30 °C para 32 °C no instante  $t = 22,5$  min. Adicionalmente foi aplicada uma perturbação de carga em  $t = 44$  min através de uma elevação de 0,1 bar na pressão de entrada do compressor.

O principal resultado desse experimento foi mostrar que a estrutura de controle é internamente estável e adequada para aplicação prática, mesmo em um sistema com comportamento integrador. Todo o projeto do controlador primário foi realizado considerando o sistema rápido (sem atraso) e a estrutura final é capaz de compensar satisfatoriamente o atraso do sistema. Como o grau de acoplamento entre as variáveis é baixo, a diferença em relação a técnicas clássicas de controle é bastante pequena caso a dinâmica desejada para a resposta em malha fechada seja lenta, porém ela aumenta conforme a resposta desejada de malha fechada é acelerada.

#### 4.7 Considerações finais

Mostrou-se que as boas propriedades do preditor de Smith filtrado (PSF) podem ser estendidas para o caso de sistemas multivariáveis com o mesmo número de entradas e saídas e com múltiplos atrasos. Nesse caso, a versão multivariável do PSF emprega um filtro com estrutura de uma matriz de transferência diagonal que pode ser ajustado elemento a elemento considerando cada uma das saídas da planta.

Como no caso SISO, o MIMO-PSF pode ser aplicado para controlar qualquer tipo de processo linear (estável, integrador ou instável). Uma estrutura tão geral baseada no preditor de Smith ainda não havia sido reportada na literatura. O IMC-DTC proposto por García e Albertos [7] em princípio pode tratar qualquer tipo de processo linear, apesar de ter sido desenvolvido

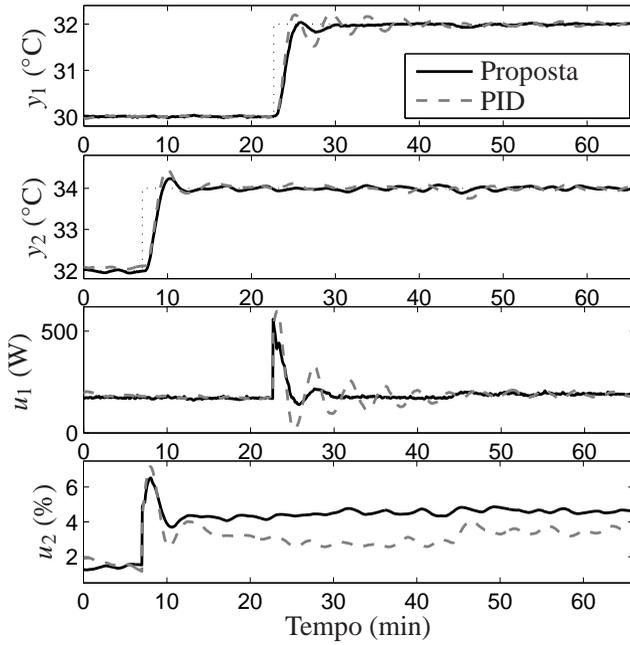


Figura 31: Comportamento do sistema em malha fechada (estrutura proposta e PID)

com foco em processos instáveis, visto que sua estratégia é baseada em um laço de estabilização e outro de controle, porém a implementação da estrutura formalizada neste trabalho é muito mais simples. Além disso, o MIMO-PSF é mais imune a interações entre as variáveis. Conforme os valores dos atrasos aumentam, o modelo rápido da estrutura IMC-DTC tende a tornar-se muito difícil de ser controlado satisfatoriamente, visto que aparecem muitos acoplamentos entre as variáveis.

Como pode ser observado nas simulações, os resultados obtidos com o MIMO-PSF são melhores ou iguais aos obtidos com as estruturas previamente relatadas na literatura (MIMO-PS para o caso estável e IMC-DTC para os casos integrador e instável). Comportamento adequado foi obtido também nos ensaios realizados na bancada de ensaio de desempenho de compressores.

Mostrou-se no decorrer do trabalho que o MIMO-PSF é capaz de rejeitar perturbações de carga com dinâmicas mais rápidas que as de malha aberta da planta. Por outro lado, aumentar a velocidade de rejeição de perturbação acaba reduzindo a robustez a erros de modelagem. Assim, o filtro do MIMO-PSF necessita ser ajustado considerando o compromisso existente entre desempenho e robustez. Quando o modelo consiste em uma boa representação da planta real, é possível acelerar a resposta de rejeição de perturbações, porém quando os erros de modelagem são grandes o ajuste do filtro precisa ser mais conservador para priorizar a robustez do sistema em malha fechada.

O MIMO-PSF apresentou bons resultados preliminares, além de ter se mostrado de simples implementação. Assim, apesar de os resultados não serem ótimos, ele torna-se uma alternativa prática para o MPC, especialmente se alguma estratégia anti-*windup* for integrada à malha principal no caso de as variáveis manipuladas apresentarem restrições. Além disso, é importante ressaltar que o controlador primário pode ser ajustado com base em qualquer técnica de controle e que esse ajuste é feito considerando o modelo rápido sem os atrasos comuns por linha.

O MIMO-PSF também foi comparado com o MIMO MPC para o caso irrestrito. Mostrou-se que o controlador proposto pode ser ajustado para obter uma resposta com desempenho semelhante à apresentada pelo MPC. Na realidade, um procedimento de otimização pode ser utilizado para se calcular o controlador primário, obtendo-se um MIMO-PSF com controlador semelhante a um MPC. A utilização de técnicas clássicas ou de otimização para determinação do controlador primário depende da familiarização do engenheiro de controle com uma ou outra técnica, visto que o ajuste do controlador pode ser realizado empregando qualquer técnica de síntese.

Nos experimentos práticos realizados na bancada de ensaios de compressores de refrigeração optou-se por manter uma estrutura primária de con-

trole bastante simples, composta por dois controladores PI ajustados de forma independente. Apesar dessa escolha simples, que facilita a aceitação na indústria, os resultados foram bastante bons quando comparados aos obtidos com o emprego de controladores PID. Outro fato que merece destaque é que o ajuste dos controladores PI com a estrutura de predição é mais fácil que o dos controladores PID, visto que o atraso pode ser desconsiderado do problema. A implementação é mais complicada, porém uma vez implementado o código, basta alterar o controlador primário e o modelo da planta para replicar o resultado para outras variáveis de processo. Caso opte-se pela implementação na forma de um controlador equivalente, deve-se atentar ao fato de que os cancelamentos existentes entre polos e zeros fora do círculo unitário em cada uma das funções de transferência do controlador devem ser realizados explicitamente para evitar que erros numéricos tornem o sistema de controle internamente instável.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo final da tese de doutorado são apresentadas tanto as principais conclusões e ganhos obtidos com o trabalho quanto sugestões para trabalhos futuros. De modo geral, as conclusões específicas sobre cada um dos desenvolvimentos individuais foram apresentadas ao final de cada capítulo correspondente. As conclusões aqui serão limitadas a comentários mais gerais sobre cada solução e também a aspectos vistos sob um ponto de vista mais abrangente.

### 5.1 Conclusões

O trabalho foi motivado por uma aplicação industrial bastante específica. Do ponto de vista da aplicação, os resultados foram muito positivos e superaram os objetivos inicialmente propostos. Em primeiro lugar, houve impactos diretos na redução da incerteza de medição dos ensaios, uma vez que agora as variáveis de processo seguem suas referências, sem a existência de grandes flutuações ou de erros de seguimento em regime permanente. A reprodutibilidade dos ensaios também foi bastante aumentada, uma vez que a influência do operador sobre o ensaio foi eliminada com a possibilidade de fechamento de todas as malhas de controle. Ainda na linha de redução de incertezas de medição, atividades desenvolvidas durante o trabalho de doutorado e não apresentadas formalmente neste documento contribuíram para o aumento da confiabilidade do processo de medição como um todo. Um exemplo disso é a criação de uma biblioteca em *LabVIEW* para acessar as propriedades termodinâmicas dos fluidos refrigerantes de uma base bastante conhecida chamada REFPROP [82].

Além da redução de incertezas, o tempo de realização dos ensaios foi reduzido de quatro horas e meia (rotina atual da indústria) para cerca de duas horas ou até menos, em alguns casos. Todos os tempos foram medidos em um painel piloto já implantado na rotina da empresa, que inicialmente encontrava-se na planta do Brasil e agora foi transferido para a nova planta do México. A opção pela transferência se deu por questão de custo operacional, visto que a eficiência do painel é muito superior e ele substituiu os dois painéis inicialmente previstos para a nova planta. Com o recurso orçado para esses dois painéis, estão sendo fabricados mais dois painéis aptos a suportarem as novas estratégias de controle e pelo menos um deles deve ficar na planta do Brasil. É bastante gratificante para todos os envolvidos o reconhecimento da

indústria pelo trabalho e o ganho direto levado para o setor, com aumento da confiabilidade e da produtividade dos ensaios para atividades de pesquisa e desenvolvimento, geração de dados para catálogos e aprovação de produtos. A UFSC também conta com um painel totalmente automatizado para que as pesquisas na área possam ter continuidade.

Apesar de os resultados práticos terem sido explorados neste documento para algumas malhas de controle da bancada, foi necessário atuar no controle de todas as malhas, para permitir a realização dos ensaios. Grande parte das malhas, como é o caso das malhas de pressão e de temperatura dos ambientes climatizados, pode ser controlada com emprego de controladores PID e preferiu-se manter essa estrutura de controle quando possível. Isso se deve principalmente à facilidade de manutenções futuras tanto na universidade quanto na empresa. Além dos projetos de todas as malhas de controle, houve grande envolvimento na adaptação do software empregado na indústria para a realidade da academia, dotando o aplicativo da flexibilidade necessária para as atividades de pesquisa.

A utilização de uma bancada real impõe dificuldades adicionais ao problema de controle. Por melhor que seja o modelo estimado da planta, ele consiste em uma representação matemática do que ocorre fisicamente. Dessa forma, há dinâmicas que não são modeladas e muitas vezes há dinâmicas que sequer podem ser previstas. Além das dinâmicas não modeladas, que muitas vezes podem ser não lineares, sistemas físicos estão sujeitos a ruídos de medição e sinais de perturbação com diferentes formatos. A soma desses efeitos constitui-se em uma dificuldade adicional ao emprego de controladores que realizam compensação de atraso de transporte. Esses controladores baseiam-se no modelo da planta para realizarem previsões, logo uma boa modelagem é essencial para que o sistema em malha fechada apresente resultados satisfatórios. Conforme mostrado no decorrer do trabalho, a possibilidade de acelerar ou não a resposta de uma estrutura baseada em preditor está diretamente relacionada com o erro de estimação. Baixos erros de estimação, em especial no valor de atraso de transporte, permitem que o controlador preditivo seja ajustado de forma pouco conservadora. Esse ajuste faz com que as dinâmicas apresentadas por controladores tradicionais, como o PID, e por controladores com preditores sejam significativamente diferentes. Por outro lado, erros elevados de estimação fazem com que estruturas com preditores tenham que ser ajustadas de forma conservadora. Esse ajuste faz com que as dinâmicas apresentadas pelos controladores tradicionais e pelos controladores com compensação de atraso de transporte sejam bastante semelhantes.

Os controladores propostos são relativamente simples de serem ajustados e levaram a resultados bastante bons. Os parâmetros de ajuste dos controladores foram divididos em três grandes grupos e a escolha de qual conjunto

utilizar é feita com base no compressor que está sendo ensaiado. Essa política foi adotada por questão de facilidade operacional, porém o cadastro de parâmetros específicos de controle para cada modelo e cada condição pode levar a comportamentos muito mais rápidos. Atualmente o ajuste é feito para garantir a robustez necessária para atender às necessidades de ensaio de uma família de compressores.

Além de o trabalho ter alcançado bons resultados na aplicação específica motivadora do mesmo, os resultados teóricos desenvolvidos também foram expressivos. Foram desenvolvidas três soluções inéditas para problemas encontrados em sistemas com atraso: uma estratégia anti-*windup* geral para DTC, técnicas para cômputo rápido do sinal de controle empregando MPC e a generalização do PSF para o caso multivariável. Artigos científicos foram elaborados e submetidos a importantes periódicos indexados e dois deles diretamente relacionados a este trabalho já foram publicados (ver referências [10] e [44]). Outros dois estão em análise, referências [83] e [54], e mais dois estão em fase de elaboração, sendo um para revista e outro para o maior congresso mundial de refrigeração. Além dos artigos anteriormente citados, outros três já publicados tiveram contribuição direta do autor e dos resultados desenvolvidos nesta tese: referências [84], [85] e [86].

Do ponto de vista teórico mais diretamente relacionado a esta tese, são tratados em detalhes neste documento dois dos avanços obtidos durante a realização do trabalho de doutorado. O primeiro deles é uma formulação que permite o cômputo rápido do sinal de controle em MPC mesmo quando a modelagem por espaço de estados é empregada para sistemas com atraso. O segundo é a generalização do PSF para o caso de sistemas quadrados com mais de uma entrada e mais de uma saída. Em ambos os casos os resultados foram bastante expressivos e foram validados na bancada de ensaio de desempenho de compressores.

Adicionalmente, sob a forma de apêndice é apresentada uma estratégia anti-*windup* para DTC capaz de lidar com qualquer tipo de processo linear (estável, integrador e instável). Além de extremamente geral, a estrutura proposta é válida não somente para saturações, mas também para limitações na taxa de variação e pode ser adaptada para outros tipos de restrição. Uma técnica tão flexível não foi previamente relatada na literatura para o controle de sistemas com atraso e os resultados de simulação mostram que os resultados são melhores ou pelo menos iguais aos obtidos com as estruturas previamente relatadas para o caso integrador (a única explorada na literatura). Além disso, um estudo experimental foi apresentado para validar o conceito e os resultados mostraram-se extremamente promissores.

Assim, pode-se afirmar que os objetivos propostos para o trabalho de doutorado foram alcançados, tanto do ponto de vista de aplicação quanto de

formação do pesquisador e de contribuição para a comunidade científica. Na aplicação obteve-se uma redução da incerteza de medição dos ensaios da ordem de 70% e uma redução de tempo da ordem de 50%. Na formação do pesquisador e na contribuição científica destacam-se a orientação de trabalhos de conclusão e a publicação de cinco artigos em periódicos indexados do mais alto nível, sendo quatro em revistas Qualis A1 e um em revista Qualis A2. Além disso, há outros dois artigos em análise em revistas Qualis A1 e três em fase de elaboração.

## 5.2 Propostas para trabalhos futuros

O presente trabalho faz parte de um projeto de parceria desenvolvido entre a UFSC e a Embraco e consiste em apenas uma das etapas do projeto. O projeto como um todo terá continuidade na universidade e, além disso, muitos dos resultados já estão implementados na rotina da empresa. No tocante especificamente ao domínio deste trabalho, existem alguns pontos que não foram explorados durante o doutorado por não serem limitantes para aplicação na bancada de desempenho de compressores, porém podem apresentar resultados bastante interessantes.

A primeira sugestão é reescrever o teorema 4.2 para adicionar a direção dos polos e zeros. Com isso consegue-se um teorema menos restritivo, uma vez que o cancelamento entre polo e zero passa a não poder ocorrer numa mesma direção. Da forma como está apresentado o teorema, o resultado é perfeitamente válido, porém em alguns casos especiais pode ser descartada a aplicação do PSF em sistemas MIMO quando ela seria possível.

Ainda na linha do PSF para sistemas MIMO, existe a possibilidade de estender os resultados para sistemas não quadrados. A primeira proposta de extensão do PS MIMO para sistemas não quadrados foi feita por Seshagiri Rao e Chidambaram [47] para um sistema representado por funções de transferência de primeira ordem com atraso. Essa proposta foi aprimorada e o trabalho mais recente do qual se tem notícia é o de Pop, De Keyser e Ionescu [87], que generaliza o método para sistemas estáveis de qualquer ordem. Estudos com base nesses trabalhos podem levar a uma generalização do MIMO-PSF para sistemas não quadrados.

Uma sugestão final para aprimorar os resultados deste trabalho é tentar buscar uma forma mais efetiva de tratar sistemas que não passam no teste de rearranjo. O MIMO-PSF pode ser empregado, porém nesse caso o controlador primário deve ser ajustado para um sistema que ainda tem atrasos. A abordagem de Jerome e Ray [2] de adicionar atrasos para fazer com que o sistema passe no teste de rearranjo ainda hoje é tida pela comunidade científica como a melhor solução para o problema, porém publicações recentes questi-

onaram esse fato [88, 89, 90]. Alguns estudos preliminares da nova proposta foram realizados e indicaram certo grau de similaridade com a solução de García e Albertos [7]. Todavia, é bastante interessante estudar se a nova proposta sofre dos mesmos problemas apresentados pela estratégia de García e Albertos [7]. Caso contrário, um preditor baseado na mistura do MIMO-PSF com a estratégia de Mirkin, Palmor e Shneiderman [90] tornar-se-ia uma ferramenta extremamente poderosa e genérica para sistemas multivariáveis com atraso de transporte.

A proposta do PSF garantiu uma série de vantagens em comparação com a abordagem clássica do PS. Uma dessas vantagens é a possibilidade de se acelerar a rejeição de perturbação, de modo a torná-la mais rápida que o comportamento em malha aberta da planta. Quando analisada a estratégia DMC, ela apresenta exatamente os mesmos problemas do PS tradicional. Uma proposta de trabalho futuro é investigar se existe alguma forma de modificar os coeficientes da resposta ao degrau que modelam a planta com base na estratégia utilizada pelo PSF para evitar os comportamentos indesejados também no DMC.

Por fim, propõe-se a aplicação dos conhecimentos sistematizados durante a realização deste trabalho a sistemas de refrigeração, como refrigeradores e *freezers*. A estrutura de tais sistemas, em essência, é a mesma de uma bancada de ensaio de desempenho, porém os objetivos são diferentes. A maior dificuldade para aplicação das técnicas em um sistema de refrigeração é a necessidade de atuadores, muitas vezes ausentes para reduzir os custos de fabricação. Todavia, é bastante provável que os ganhos vindos da otimização do ponto de operação para cada condição paguem a diferença de preço no produto final em pouco tempo. Em termo de eficiência, a evolução dos compressores para aplicações domésticas foi muito grande nos últimos 20 anos, porém está muito próxima do limite teórico. Na atualidade, modificações no projeto de um compressor levam a ganhos da ordem de 1% em eficiência. Nos sistemas de refrigeração, por outro lado, se investe muito no desenvolvimento de novos trocadores de calor e novos isolantes térmicos. Todavia, os ganhos que podem ser obtidos com a inclusão de mais inteligência aos produtos são enormes. Dessa forma, acredita-se que a tendência para o mercado de refrigeração seja a criação de dispositivos mais inteligentes, que se adaptem aos hábitos de uso e que sempre busquem operar no ponto ótimo de coeficiente de desempenho (COP). O controle é conhecimento fundamental nesse processo e as técnicas validadas na bancada de ensaio de desempenho de compressores podem ser de grande utilidade.



## REFERÊNCIAS

- 1 NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. **Control of dead-time processes**. London: Springer, 2007.
- 2 JEROME, F.; RAY, W. H. High-performance multivariable control strategies for systems having time delays. **AIChE Journal**, v. 32, n. 6, p. 914–931, 1986.
- 3 NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Dead-time compensators: A survey. **Control Engineering Practice**, v. 16, n. 4, p. 407–428, 2008.
- 4 SMITH, O. J. M. Closed control of loops with dead time. **Chemical Engineering Progress**, v. 53, p. 217–219, May 1957.
- 5 CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Model predictive control**. London: Springer, 1998.
- 6 ALEVISAKIS, G.; SEBORG, D. E. An extension of the Smith predictor to multivariable linear systems containing time delays. **International Journal of Control**, v. 17, n. 3, p. 541–551, 1973.
- 7 GARCÍA, P.; ALBERTOS, P. Dead-time-compensator for unstable MIMO systems with multiple time delays. **Journal of Process Control**, v. 20, n. 7, p. 877–884, 2010.
- 8 WANG, Y.; BOYD, S. Fast model predictive control using online optimization. In: **Proceedings of the 17th IFAC World Congress**. Seoul, Korea: IFAC, 2008. p. 6974–6979.
- 9 FLESCHE, R. C. C. **Desenvolvimento e instalação de recursos de automação aplicados a ensaios de compressores de refrigeração da Embraco**. 2006. 130 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) — Departamento de Automação e Sistemas, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.
- 10 FLESCHE, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E. Modelling, identification and control of a calorimeter used for performance evaluation of refrigerant compressors. **Control Engineering Practice**, v. 18, n. 3, p. 254–261, Mar. 2010.
- 11 FLESCHE, R. C. C. **Estudo e projeto de estratégias de controle para aplicação em uma bancada de ensaio que apresenta atraso de transporte**. 2008. 97 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em

Engenharia de Automação e Sistemas, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

12 INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 917**: Testing of refrigerant compressors. Switzerland, Sept. 1989. 31 p.

13 AMERICAN SOCIETY OF HEATING, REFRIGERATING AND AIR-CONDITIONING ENGINEERS. **ANSI/ASHRAE 23**: Methods of testing for rating positive displacement refrigerant compressors and condensing units. Atlanta, GA, 2005. 14 p.

14 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15826**: Compressores de refrigeração – Método de ensaio. Rio de Janeiro, 2010. 39 p.

15 POLETTTO, E. L. **Aprimoramento de uma bancada de ensaios de desempenho de compressores herméticos visando reduzir incertezas de medição**. 2006. 107 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

16 BARBOSA, F. Q. **Redução das incertezas nas medições de grandezas elétricas em uma bancada de ensaios de desempenho de compressores**. 2006. 192 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

17 HENKLEIN, P. **Análise de ensaios de desempenho de compressores herméticos durante o transitório**. 2006. 136 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

18 SCUSSEL, J. N. **Propostas de ações para reduzir o tempo demandado por ensaio de desempenho de compressores herméticos**. 2006. 152 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

19 PETROVICIC, S. A. B. **Proposta de arquitetura do sistema de automação aplicado a ensaios de desempenho de compressores herméticos de refrigeração**. 2007. 115 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

- 20 HOUPIS, C. H.; LAMONT, G. B. **Digital control systems: theory, hardware, software**. 2. ed. New York: McGraw Hill, 1992.
- 21 FLESCH, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E. Estudo de um controlador PID e de um Controlador Preditivo Generalizado aplicados a um processo integrador com atraso de transporte dominante e incerteza na estimação paramétrica. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA. **Anais do XVII CBA**. Juiz de Fora: UFJF, 2008.
- 22 HUZMEZAN, M.; GOUGH, W. A.; DUMONT, G. A.; KOVAC, S. Time delay integrating systems: A challenge for process control industries. A practical solution. **Control Engineering Practice**, v. 10, n. 10, p. 1153–1161, 2002.
- 23 MASCOLO, S. Modeling the Internet congestion control using a Smith controller with input shaping. **Control Engineering Practice**, v. 14, n. 4, p. 425–435, 2006.
- 24 O'BRIEN, M.; MACK, J.; LENNOX, B.; LOVETT, D.; WALL, A. Model predictive control of an activated sludge process: A case study. **Control Engineering Practice**, v. 19, n. 1, p. 54–61, 2011.
- 25 SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: Analysis and design**. New York: John Wiley and Sons, 2001.
- 26 ZHONG, Q.-C. **Robust control of time-delay systems**. London: Springer, 2006.
- 27 WATANABE, K.; ITO, M. A process-model control for linear systems with delay. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 26, n. 6, p. 1261–1269, Dec. 1981.
- 28 NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Unified approach for robust dead-time compensator design. **Journal of Process Control**, v. 19, n. 1, p. 38–47, 2009.
- 29 ÅSTRÖM, K. J.; HANG, C. C.; LIM, B. C. A new Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 2, p. 343–345, Feb. 1994.
- 30 MATAUŠEK, M. R.; MICIĆ, A. D. A modified Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 41, n. 8, p. 1199–1203, Aug. 1996.

- 31 \_\_\_\_\_. On the modified Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 44, n. 8, p. 1603–1606, Aug. 1999.
- 32 INGIMUNDARSON, A.; HÄGGLUND, T. Robust tuning procedures of dead-time compensating controllers. **Control Engineering Practice**, v. 9, n. 11, p. 1195–1208, Nov. 2001.
- 33 NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. Robust tuning of dead-time compensators for processes with an integrator and long dead-time. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 44, n. 8, p. 1597–1603, 1999.
- 34 KAYA, I. Two-degree-of-freedom IMC structure and controller design for integrating processes based on gain and phase-margin specifications. **Control Theory and Applications, IEE Proceedings D**, v. 151, n. 4, p. 401–407, 2004.
- 35 LU, X.; YANG, Y.-S.; WANG, Q.-G.; ZHENG, W.-X. A double two-degree-of-freedom control scheme for improved control of unstable delay processes. **Journal of Process Control**, v. 15, n. 5, p. 605–614, Aug. 2005.
- 36 MAJHI, S.; ATHERTON, D. P. A new Smith predictor and controller for unstable and integrating processes with time delay. In: **Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control**. Tampa, FL: IEEE, 1998. v. 2, p. 1341–1345.
- 37 SESHAGIRI RAO, A.; CHIDAMBARAM, M. Analytical design of modified Smith predictor in a two-degrees-of-freedom control scheme for second order unstable processes with time delay. **ISA Transactions**, v. 47, n. 4, p. 407–419, 2008.
- 38 KWAK, H. J.; SUNG, S. W.; LEE, I.-B.; PARK, J. Y. A modified Smith predictor with a new structure for unstable processes. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 38, n. 2, p. 405–411, 1999.
- 39 KAYA, I.; ATHERTON, D. P. Use of Smith predictor in the outer loop for cascade control of unstable and integrating processes. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 47, n. 6, p. 1981–1987, 2008.
- 40 ALBERTOS, P.; GARCÍA, P. Robust control design for long time-delay systems. **Journal of Process Control**, v. 19, n. 10, p. 1640–1648, 2009.
- 41 NORMEY-RICO, J. E.; BORDONS, C.; CAMACHO, E. F. Improving the robustness of dead-time compensating PI controllers. **Control Engineering Practice**, v. 5, n. 6, p. 801–810, 1997.

- 42 MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. **Robust process control**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
- 43 VISIOLI, A. **Practical PID control**. London: Springer, 2006.
- 44 FLESCH, R. C. C.; TORRICO, B. C.; NORMEY-RICO, J. E.; CAVALCANTE, M. U. Unified approach for minimal output dead time compensation in MIMO processes. **Journal of Process Control**, v. 21, n. 7, p. 1080–1091, 2011.
- 45 SANTOS, T. L. M.; BOTURA, P. E. A.; NORMEY-RICO, J. E. Dealing with noise in unstable dead-time process control. **Journal of Process Control**, v. 20, n. 7, p. 840–847, 2010.
- 46 OGUNNAIKE, B. A.; RAY, W. H. Multivariable controller design for linear systems having multiple time delays. **AIChE Journal**, v. 25, n. 6, p. 1043–1057, 1979.
- 47 SESHAGIRI RAO, A.; CHIDAMBARAM, M. Smith delay compensator for multivariable non-square systems with multiple time delays. **Computers & Chemical Engineering**, v. 30, n. 8, p. 1243–1255, 2006.
- 48 ZHANG, W.; LIN, C. Multivariable Smith predictors design for nonsquare plants. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 14, n. 6, p. 1145–1149, 2006.
- 49 SÁNCHEZ-PEÑA, R. S.; BOLEA, Y.; PUIG, V. MIMO Smith predictor: Global and structured robust performance analysis. **Journal of Process Control**, v. 19, n. 1, p. 163–177, 2009.
- 50 NICULESCU, S.-I. **Delay effects on stability: A robust control approach**. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- 51 WANG, Q. G.; ZHOU, H. Q.; ZHANG, Y.; ZHANG, Y. A comparative study on control of unstable processes with time delay. In: **5th Asian Control Conference**. Melbourne, Australia: IEEE, 1996. p. 2006–2014.
- 52 PALMOR, Z. J. Time-delay compensation – Smith predictor and its modifications. In: LEVINE, W. S. (Ed.). **The control handbook**. Boca Raton: CRC Press and IEEE Press, 1996. cap. 10.8, p. 224–237.
- 53 HOLT, B. R.; MORARI, M. Design of resilient processing plants – V: The effect of deadtime on dynamic resilience. **Chemical Engineering Science**, v. 40, n. 7, p. 1229–1237, 1985.

- 54 FLESCH, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E.; CAMPONOGARA, E.; PENZ, C. A. Fast MPC computation for dead-time processes. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 2011. Manuscrito submetido para avaliação.
- 55 KWON, W. H.; HAN, S. **Receding horizon control**. London: Springer, 2005.
- 56 WANG, L. **Model predictive control system design and implementation using MATLAB**. London: Springer, 2009.
- 57 RAWLINGS, J. B. Tutorial overview of model predictive control. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 20, n. 3, p. 38–52, 2000.
- 58 CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. E. Generalized predictive control – part I: the basic algorithm. **Automatica**, v. 23, n. 2, p. 137–148, 1987.
- 59 SUICHIES, M.; LEROUX, D.; DECHERT, C.; TRUSIAK, A. An implementation of generalized predictive control in a flotation plant. **Control Engineering Practice**, v. 8, n. 3, p. 319–325, 2000.
- 60 XU, M.; LI, S.; CAI, W. Cascade generalized predictive control strategy for boiler drum level. **ISA Transactions**, v. 44, n. 3, p. 399–411, 2005.
- 61 CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. E. Generalized predictive control – part II: extensions and interpretations. **Automatica**, v. 23, n. 2, p. 149–160, 1987.
- 62 BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- 63 ROSSITER, J. A. **Model-based predictive control: a practical approach**. Florida: CRC Press, 2003.
- 64 ROBINSON, B. D.; CLARKE, D. W. Robustness effects of a prefilter in generalized predictive control. **Control Theory and Applications, IEE Proceedings D**, v. 138, n. 1, p. 2–8, 1991.
- 65 YOON, T. W.; CLARKE, D. W. Observer design in receding-horizon predictive control. **International Journal of Control**, v. 61, n. 1, p. 171–191, 1995.
- 66 CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control – A computer control algorithm. In: **Proceedings of AIChE 86th National Meeting**. Houston, TX: AIChE, 1979.

- 67 RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J. L.; PAPON, J. Algorithm control for industrial processes. In: **Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation**. Tbilisi, USSR: IFAC, 1976. p. 1855–1860.
- 68 GUPTA, Y. P. Control of integrating processes using dynamic matrix control. **Chemical Engineering Research and Design**, v. 76, n. 4, p. 465–470, 1998.
- 69 OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H. **Signals and systems**. 2. ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.
- 70 WRIGHT, S. J. Interior point methods for optimal control of discrete-time systems. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 77, n. 1, p. 161–187, 1993.
- 71 \_\_\_\_\_. Applying new optimization algorithms to model predictive control. In: **Proceedings of the 5th International Conference on Chemical Process Control**. Tahoe City, CA, USA: CACHE Publications, 1997. p. 147–155.
- 72 WILLS, A. G.; HEATH, W. P. Barrier function based model predictive control. **Automatica**, v. 40, n. 8, p. 1415–1422, 2004.
- 73 ZHENG, A. Reducing on-line computational demands in model predictive control by approximating QP constraints. **Journal of Process Control**, v. 9, n. 4, p. 279–290, 1999.
- 74 GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matrix computations**. 3. ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.
- 75 RAO, C. V.; WRIGHT, S. J.; RAWLINGS, J. B. Application of interior-point methods to model predictive control. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 99, n. 3, p. 723–757, 1998.
- 76 BARTLETT, R. A.; WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T. Active set vs. interior point strategies for model predictive control. In: **Proceedings of the American Control Conference**. Chicago, IL, USA: IEEE, 2000. p. 4229–4233.
- 77 WOLSEY, L. A. **Integer programming**. New York: Wiley-Interscience, 1998.
- 78 HÄGGLUND, T. An industrial dead-time compensating PI controller. **Control Engineering Practice**, v. 4, n. 6, p. 749–756, 1996.

- 79 CHEN, P.; ZHANG, W. Improvement on an inverted decoupling technique for a class of stable linear multivariable processes. **ISA Transactions**, v. 46, n. 2, p. 199–210, 2007.
- 80 ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and optimal control**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.
- 81 WOOD, R. K.; BERRY, M. W. Terminal composition control of a binary distillation column. **Chemical Engineering Science**, v. 28, n. 9, p. 1707–1717, 1973.
- 82 LEMMON, E. W.; HUBER, M. L.; MCLINDEN, M. O. **NIST Standard Reference Database 23: Reference Fluid Thermodynamic and Transport Properties - REFPROP**. 9.0. ed. Gaithersburg, 2010.
- 83 FLESCH, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E.; FLESCH, C. A. A unified anti-windup strategy for discrete dead-time compensators. **Control Engineering Practice**, 2011. Manuscrito submetido para avaliação.
- 84 MARTINS, E. F.; FLESCH, C. A.; FLESCH, R. C. C.; BORGES, M. R. Conception of a test bench to generate known and controlled conditions of refrigerant mass flow. **ISA Transactions**, v. 50, n. 3, p. 513–520, 2011.
- 85 BRANDÃO, E.; FLESCH, R. C. C.; LENZI, A.; FLESCH, C. A. Estimation of pressure-particle velocity impedance measurement uncertainty using the Monte Carlo method. **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 130, n. 1, p. EL25–EL31, 2011.
- 86 PENZ, C. A.; FLESCH, C. A.; NASSAR, S. M.; FLESCH, R. C. C.; DE OLIVEIRA, M. A. Fuzzy-Bayesian network for refrigeration compressor performance prediction and test time reduction. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 4, p. 4268–4273, Mar. 2012.
- 87 POP, C. I.; DE KEYSER, R.; IONESCU, C. A simplified control method for multivariable stable nonsquare systems with multiple time delays. In: **Proceedings of the 19th Mediterranean Conference on Control and Automation**. Corfu, Greece: IEEE, 2011. p. 382–387.
- 88 MIRKIN, L.; PALMOR, Z. J.; SHNEIDERMAN, D. H2 optimization for systems with adobe input delays: A loop shifting approach. In: **Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control**. Shanghai, P. R. China: IEEE, 2009. p. 257–262.
- 89 SHNEIDERMAN, D.; PALMOR, Z. J.; MIRKIN, L. On the dynamic resilience and novel control structures for plants with multiple dead times.

In: **Proceedings of the 8th Workshop on Time Delay Systems**. Sinaia, Romania: IFAC, 2009. Paper 63.

90 MIRKIN, L.; PALMOR, Z. J.; SHNEIDERMAN, D. **Dead-time compensation for systems with multiple I/O delays: A loop shifting approach**. Haifa, Israel, Aug. 2010. Disponível em: <http://meeng.technion.ac.il/Research/TReports/2010/ETR-2010-01.pdf>. Acesso em: 5 dez. 2011.

91 LOZIER, J. C. A steady state approach to the theory of saturable servo systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, v. 1, n. 1, p. 19–39, 1956.

92 KOTHARE, M. V.; CAMPO, P. J.; MORARI, M.; NETT, C. N. A unified framework for the study of anti-windup designs. **Automatica**, v. 30, n. 12, p. 1869–1883, 1994.

93 FERTIK, H. A.; ROSS, C. W. Direct digital control algorithm with anti-windup feature. **ISA Transactions**, v. 6, n. 4, p. 317–328, 1967.

94 PAGANO, D. J.; NORMEY-RICO, J. E.; FRANCO, A. L. D. Stability analysis of a modified Smith predictor for integrative plants with dead-time uncertainties and saturations. In: **40th IEEE Conference on Decision and Control**. Florida, USA: IEEE, 2001. p. 1855–1860.

95 ZHANG, G.; SHAO, H. Anti-windup design for the controllers of integrating processes with long delay. **Journal of Systems Engineering and Electronics**, v. 18, n. 2, p. 297–303, 2007.

96 ZHANG, M.; JIANG, C. Problem and its solution for actuator saturation of integrating process with dead time. **ISA Transactions**, v. 47, n. 1, p. 80–84, 2008.

97 NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. A unified approach to design dead-time compensators for stable and integrative processes with dead-time. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 47, n. 2, p. 299–305, Feb. 2002.

98 BRUCIAPAGLIA, A. H.; APOLONIO, R. Uma estratégia de eliminação da sobrecarga da ação integral para controladores PID discretos: aplicação no controle de velocidade de um motor CC. In: **II Congresso Latino Americano de Controle Automático**. Buenos Aires, Argentina: AADECA, 1986. p. 519–524.

- 99 RÖNNBÄCK, S.; WALGAMA, K.; STERNBY, J. An extension to the generalized anti-windup compensator. In: **Imacs World Congress**. Dublin, Ireland: Elsevier, 1991. p. 275–285.
- 100 HIPPE, P. **Windup in control**: its effects and their prevention. Berlin: Springer, 2006.
- 101 PENG, Y.; VRANCIC, D.; HANUS, R. Anti-windup, bumpless, and conditioned transfer techniques for PID controllers. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 16, n. 4, p. 48–57, 1996.
- 102 KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2002.
- 103 GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 50, n. 1, p. 106–111, 2005.
- 104 \_\_\_\_\_. Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. **Systems & Control Letters**, v. 55, n. 3, p. 184–192, 2006.
- 105 HENCEY, B.; ALLEYNE, A. An anti-windup technique for LMI regions. **Automatica**, v. 45, n. 10, p. 2344–2349, 2009.
- 106 ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **PID controllers**: theory, design, and tuning. 2. ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.
- 107 SESHAGIRI RAO, A.; RAO, V. S. R.; CHIDAMBARAM, M. Simple analytical design of modified Smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay (FOPTD) processes. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 46, n. 13, p. 4561–4571, 2007.
- 108 BEJAN, A. Thermodynamics fundamentals. In: KUTZ, M. (Ed.). **Mechanical engineers' handbook**. 2. ed. New York: Wiley-Interscience, 1998. cap. 62, p. 1331–1350.
- 109 ÇENGEL, Y. A.; BOLES, M. A. **Thermodynamics**: An engineering approach. 6. ed. New York: McGraw Hill Higher Education, 2007.
- 110 WYLEN, G. J. V.; SONNTAG, R. E. **Fundamentos da termodinâmica clássica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1995.
- 111 O'NEAL, D. L.; COOPER, K. W.; HICKMAN, K. E. Refrigeration. In: KUTZ, M. (Ed.). **Mechanical engineers' handbook**. 2. ed. New York: Wiley-Interscience, 1998. cap. 62, p. 1879–1913.

112 STOECKER, W. J.; JABARDO, J. M. S. **Refrigeração industrial**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

113 STOECKER, W. F.; JONES, J. W. **Refrigeration and air-conditioning**. New York: McGraw Hill, 1982.

114 EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 13771-1**: Compressors and condensing units for refrigeration – Performance testing and test methods – Part 1: Refrigerant compressors. Brussels, Apr. 2003. 25 p.

115 \_\_\_\_\_. **EN 12900**: Refrigerant compressors – Rating conditions, tolerances and presentation of manufacturer’s performance data. Brussels, Oct. 2005. 12 p.

116 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15828**: Compressores de refrigeração – Apresentação dos dados de desempenho. Rio de Janeiro, 2010. 3 p.

117 AIR-CONDITIONING AND REFRIGERATION INSTITUTE. **ARI 540**: Performance rating of positive displacement refrigerant compressors and compressor units. Arlington, VA, 2004. 12 p.

118 AMERICAN SOCIETY OF HEATING, REFRIGERATING AND AIR-CONDITIONING ENGINEERS. **ANSI/ASHRAE 41.9**: Calorimeter test methods for mass flow measurements of volatile refrigerants. Atlanta, GA, 2000. 22 p.

119 \_\_\_\_\_. **ANSI/ASHRAE 41.10**: Flowmeter test methods for mass flow measurements of volatile refrigerants. Atlanta, GA, 2003. 21 p.

120 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14665**: Sistema de refrigeração com gás R134a – Requisitos. Rio de Janeiro, abr. 2001. 5 p.

121 DOSSAT, R. J. **Princípios de refrigeração**. São Paulo: Hermus, 1980.

122 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 13410**: Condições de ensaio para determinação da capacidade de refrigeração nominal de compressores herméticos e semi-herméticos para refrigeração. Rio de Janeiro, jun. 1995. 4 p.

123 DEMAY, M. B.; FLESCHE, C. A.; ROSA, A. P. Indirect measurement of hermetic compressor speed through externally-measurable quantities. **International Journal of Refrigeration**, v. 34, n. 5, p. 1268–1275, 2011.



## APÊNDICE A – TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES NO SINAL DE CONTROLE EM COMPENSADORES DE ATRASO

Este apêndice apresenta uma estratégia anti-*windup* geral para estruturas DTC. O desenvolvimento foi realizado dentro do âmbito deste trabalho de doutorado e culminou na elaboração de um artigo [83], porém por se tratar de um assunto que pode ser tratado separadamente do restante do trabalho, optou-se por apresentá-lo na forma de um apêndice.

### A.1 Revisão da literatura

Compensadores de atraso não são capazes de tratar restrições explicitamente no cálculo do sinal de controle, como ocorre no caso do MPC. Todavia, caso as restrições não sejam tratadas de forma adequada, elas podem comprometer o desempenho do sistema em malha fechada, levando a grandes oscilações, tempos de assentamento elevados e até mesmo instabilidade. Esse efeito vem sendo reportado na literatura desde a década de 1950 [91]. Inicialmente esse fenômeno foi associado com a parcela integral do controlador e com saturação no sinal de controle, porém atualmente é sabido que modos relativamente lentos ou instáveis estão sujeitos ao fenômeno chamado de *windup* quando o sinal de entrada apresenta restrições. Isso ocorre porque a entrada real da planta é diferente da saída do controlador e, como resultado disso, os estados do controlador são atualizados de forma errônea, sem refletir a realidade [92].

Em controladores clássicos é comum o uso de estratégias conhecidas como anti-*windup* para evitar esses efeitos indesejados. Tais estratégias são empregadas em conjunto com um controlador previamente projetado levando em consideração o sistema irrestrito [43]. Tais técnicas, em geral, não levam a um comportamento ótimo, porém conseguem evitar muitos dos efeitos indesejados impostos pelas restrições [83].

Um dos métodos mais difundidos na literatura para evitar *windup* em controladores PID é a implementação na forma de velocidade. Nessa estratégia, calcula-se um incremento de controle a cada período de amostragem

e somente a parcela que não causa violação das restrições é somada ao sinal de controle atual [43]. Outra abordagem bastante difundida, conhecida pelo nome de *back calculation*, consiste em separar a parcela integral do controlador e somar a essa parcela um termo proporcional à diferença entre o sinal de controle calculado e o sinal de controle efetivamente percebido pela planta [93].

O desenvolvimento de estratégias anti-*windup* para DTC está limitada a poucas referências. Pagano, Normey-Rico e Franco [94] estudaram os efeitos da saturação dos atuadores na estabilidade de malha fechada e propuseram um primeiro esquema anti-*windup*, baseado no IMC, para plantas integradoras. Ideia semelhante é proposta em [95] para cinco estruturas DTC para processos integradores com a diferença básica que a saturação é também inserida antes do modelo utilizado para predição e não somente antes do modelo utilizado para detecção de perturbações<sup>1</sup>. Como forma de ilustração, a estrutura de Zhang e Shao [95] aplicada à estrutura de Mataušek e Micić [30] é apresentada na figura 32. Ambas as estruturas anti-*windup* têm a limitação que o efeito anti-*windup* ocorre apenas para seguimento de referência e não para rejeição de perturbação [10].

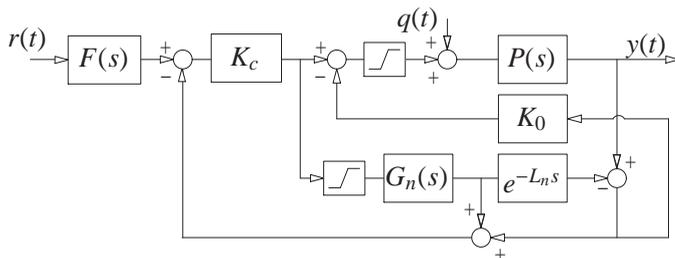


Figura 32: Estratégia anti-*windup* de Zhang e Shao [95] aplicada à estrutura de Mataušek e Micić [30]

Zhang e Jiang [96] propuseram uma estratégia de anti-*windup* para o controlador PI primário da estrutura DTC de Normey-Rico e Camacho [97] para processos integradores e obtiveram bons resultados tanto para seguimento de referência quanto para rejeição de perturbação. Para tanto, o controlador primário foi separado em suas parcelas proporcional e integral e quando ocorre saturação a parcela integral é subtraída pelo valor que o sinal de controle ultrapassa a saturação multiplicado por um ganho  $K_I$ . Uma represen-

<sup>1</sup>A mesma estratégia já havia sido utilizada por Flesch [9], um ano antes da publicação de Zhang e Shao [95]

tação esquemática da estratégia é apresentada na figura 33, onde  $G_m(s)$  é o modelo rápido modificado da planta conforme [97].

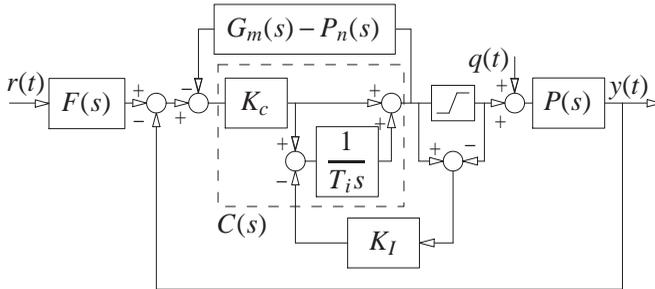


Figura 33: Estratégia anti-*windup* de Zhang e Jiang [96]

## A.2 Estratégia anti-*windup* unificada para sistemas com atraso

Como exposto na seção A.1, todos os relatos de técnicas anti-*windup* para DTC encontrados na literatura são voltados a evitar *windup* em processos integradores com atraso. Além disso, ou as estruturas tentam evitar os efeitos de *windup* devidos ao integrador do controlador primário (como é o caso do trabalho de Zhang e Jiang [96]) ou então devidos ao integrador do modelo da planta (trabalho de Zhang e Shao [95], por exemplo).

A proposta desenvolvida durante o trabalho de doutorado apresenta duas grandes vantagens em relação ao que era previamente apresentado na literatura: a possibilidade de tratar qualquer tipo de processo (estável, integrador ou instável) e a capacidade de evitar os efeitos de *windup* devidos a qualquer um dos elementos da estrutura DTC [83].

Bruciapaglia e Apolonio [98] propuseram uma abordagem para evitar *windup* em controladores PID que consiste em modificar tanto o sinal de controle para se adequar à restrição como o erro atual para que assuma o valor que seria necessário para fazer o sinal de controle ser o limite antes de violar a restrição. Essa abordagem nunca foi rigorosamente analisada na literatura, porém uma generalização desse método capaz de tratar controladores de qualquer ordem mostrou-se muito eficaz para evitar *windup* em DTC. Assim, na seção A.2.1 apresenta-se uma primeira tentativa de formalização da versão generalizada da estratégia de Bruciapaglia e Apolonio [98]. Na sequência, a seção A.2.2 apresenta a utilização desse método para melhorar o desempenho da resposta em malha fechada de sistemas com restrições na entrada controlados por DTC.

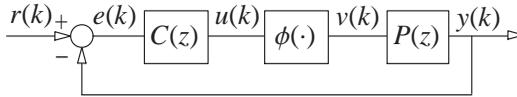


Figura 34: Representação em diagrama de blocos do problema de controle restrito

### A.2.1 Formalização da estratégia anti-*windup*

Considere o problema de controle discreto apresentado na figura 34, onde  $C(z)$  é o controlador,  $P(z)$  é a planta,  $\phi(\cdot)$  é a não linearidade,  $r(k)$  é o sinal de referência,  $e(k)$  é o sinal de erro,  $u(k)$  é o sinal de controle desejado,  $v(k)$  é o sinal de controle restrito (entrada da planta) e  $y(k)$  é o sinal medido na saída da planta.

A ideia principal de qualquer estratégia anti-*windup* é manter consistência entre o sinal de entrada efetivamente percebido pela planta e o sinal de controle desejado, que é utilizado na expressão recursiva do controlador. A abordagem de Bruciapaglia e Apolonio [98] consiste em modificar tanto o sinal de controle atual desejado quanto o sinal de erro atual como forma de manter essa consistência. Essa ideia foi inicialmente proposta para controladores PID e é estendida neste trabalho para controladores de qualquer ordem.

É possível escrever o controlador como uma função do operador atraso  $z^{-1}$ , resultando em

$$C(z^{-1}) = \frac{N_c(z^{-1})}{D_c(z^{-1})} = \frac{n_0 + n_1 z^{-1} + \dots + n_r z^{-r}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_s z^{-s}}. \quad (\text{A.1})$$

Tal estrutura é interessante porque o sinal de controle atual pode ser calculado em função dos últimos  $s$  sinais de controle, dos últimos  $r$  erros de seguimento e do erro atual como

$$u(k) = n_0 e(k) + n_1 e(k-1) + \dots + n_r e(k-r) - d_1 u(k-1) - \dots - d_s u(k-s). \quad (\text{A.2})$$

Caso as restrições não sejam consideradas,  $D_c(z^{-1})u(k) = N_c(z^{-1})e(k)$ , ou, de modo equivalente,  $u(k) = [1 - D_c(z^{-1})]u(k) + N_c(z^{-1})e(k)$ . Adicionalmente, caso seja assumido que até o instante de amostragem anterior  $k-1$  os sinais de controle desejados  $u(k-1) \dots u(k-s)$  são consistentes com as entradas da planta  $v(k-1) \dots v(k-s)$  e os sinais de erro  $e(k-1) \dots e(k-r)$  são consistentes com os erros que seriam esperados para que a as igualdades

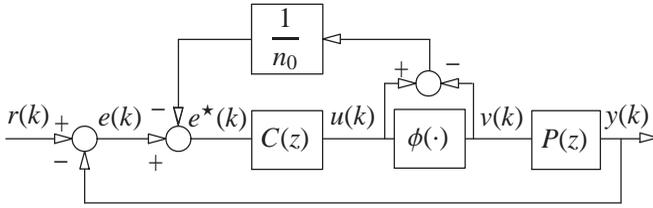


Figura 35: Representação em diagrama de blocos da estratégia anti-windup

$u(k-j) = v(k-j) \forall j = 1 \dots s$  ( $e^*(k-j)$ ) sejam satisfeitas, a equação (A.3) é válida. Note que essas suposições não são restritivas caso seja considerado que o sinal de controle não violou qualquer restrição até o instante  $k$  ou se o método anti-windup proposto é aplicado em todos os instantes de amostragem anteriores a  $k$ .

$$u(k) = [1 - D_c(z^{-1})]v(k) + n_0 e(k) + [N_c(z^{-1}) - n_0]e^*(k) \quad (\text{A.3})$$

Para implementar a técnica anti-windup proposta, se  $u(k) \neq v(k)$ ,  $e(k)$  deve ser modificado para garantir que  $u(k) = v(k)$ . Isso é expresso na equação (A.4). Note que  $e^*(k)$  é o valor que seria esperado para o erro atual para que a igualdade  $u(k) = v(k)$  seja satisfeita.

$$v(k) = [1 - D_c(z^{-1})]v(k) + n_0 e^*(k) + [N_c(z^{-1}) - n_0]e^*(k) \quad (\text{A.4})$$

Subtraindo a equação (A.4) da equação (A.3), é possível encontrar uma expressão para  $e^*(k)$ , como apresentado na equação (A.5). Assim, é possível encontrar uma representação em diagrama de blocos da estratégia proposta, como apresentado na figura 35.

$$e^*(k) = e(k) + \frac{v(k) - u(k)}{n_0} \quad (\text{A.5})$$

Apesar de ser possível encontrar uma representação em diagrama de blocos da estrutura anti-windup, geralmente não é possível implementar a estrutura de controle equivalente dessa forma. Como pode ser visto na figura 35, há um laço algébrico envolvendo uma não linearidade e algoritmos tradicionais de solução não apresentam bom comportamento nessa situação. Felizmente, a estratégia pode ser facilmente implementada de forma algorítmica isolando  $e(k)$  na equação (A.2). Para o caso específico de saturação do atuador, o caso mais comum de restrição, um algoritmo é apresentado na sequência. O mesmo procedimento pode ser aplicado a outros tipos de restri-

ção, como limitações na variação do sinal de controle. Neste caso, a condição da linha 6 deve ser substituída por  $u(k) > u(k-1) + \Delta\bar{u}$  e, na linha 7,  $u(k)$  deve ser atualizado com valor  $u(k-1) + \Delta\bar{u}$ , onde  $\Delta\bar{u}$  é o limite da taxa de variação.

**Algoritmo** *Controle com estratégia anti-windup (saturação)*

1. inicialize as variáveis
2. **repita**
3.     meça a saída da planta  $y(k)$
4.      $e(k) \leftarrow r(k) - y(k)$
5.     calcule o sinal de controle  $u(k)$
6.     **se**  $u(k) > \bar{u}$
7.         **então**  $u(k) \leftarrow \bar{u}$
8.          $tmp1 \leftarrow u(k) + d_1u(k-1) + \dots + d_su(k-s)$
9.          $tmp2 \leftarrow n_1e(k-1) + \dots + n_re(k-r)$
10.          $e(k) \leftarrow (tmp1 - tmp2)/n_0$
11.     aplique  $u(k)$  à planta
12.      $k \leftarrow k + 1$
13.     aguarde  $T_s$
14. **até** controlador ser parado

A partir das equações (A.3) e (A.5) é possível escrever uma expressão para  $u(k)$  que não depende explicitamente de  $e^*(k)$ . Substituindo a equação (A.5) na equação (A.3) chega-se a

$$\frac{N_c(z^{-1})}{n_0}u(k) = \left[ \frac{N_c(z^{-1})}{n_0} - D_c(z^{-1}) \right] v(k) + N_c(z^{-1})e(k),$$

$$u(k) = \left[ 1 - n_0C^{-1}(z^{-1}) \right] v(k) + n_0e(k). \quad (\text{A.6})$$

A partir da equação (A.6) é possível deduzir que a técnica proposta só pode ser empregada quando o controlador não tem zeros com  $|z| \geq 1$ . Caso contrário, o termo entre colchetes será instável e uma vez que  $u(k) \neq v(k)$ ,  $u(k)$  nunca atingirá o valor de  $v(k)$  novamente. Para o caso de uma não linearidade do tipo saturação, por exemplo, isso significa que o sinal de controle não deixará mais de tornar-se saturado. No caso de uma limitação na taxa de variação do sinal de controle, isso significa que uma vez que o incremento de controle atinge o valor máximo, o incremento manterá sempre esse valor e o sinal de controle crescerá indefinidamente.

Outra desvantagem da técnica proposta aparece quando as restrições de entrada do processo são muito restritivas. Esse fenômeno é chamado de *miopia* na literatura e é causado por limitações opostas sucessivas na entrada do processo que levam a oscilações em sua saída [99, 100]. É interessante notar que tal comportamento não é característica exclusiva da estrutura pro-

posta e o mesmo pode acontecer mesmo no caso de controladores lineares sem qualquer tipo de estratégia anti-*windup*. Nesse caso, se a violação da restrição é causada por mudanças de referência pode-se empregar um filtro de referência para suavizar as dinâmicas que estão causando as oscilações indesejadas e, conseqüentemente, melhorar o desempenho do sistema em malha fechada. Uma solução mais geral para o problema é um ajuste mais conservador do controlador primário ou a introdução de um grau de liberdade adicional no laço de realimentação da estratégia anti-*windup*, como indicado por Peng, Vrancic e Hanus [101].

Excetuando-se os dois casos previamente apresentados, a técnica proposta apresentou excelentes resultados na prática para as não linearidades saturação e limitação na taxa de variação. Caso provas mais formais de estabilidade sejam necessárias é possível empregar ferramentas para mostrar o domínio de atração da estrutura de controle resultante para um caso específico, tais como o critério do círculo, o critério de Popov, função descritiva ou mesmo uma abordagem por desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *linear matrix inequalities*) [100, 102, 103, 104, 105]. A principal desvantagem de se realizar o projeto diretamente para maximizar o domínio de atração é a complexidade associada, além do conservadorismo envolvido, uma vez que não é possível determinar precisamente o domínio de atração do sistema.

Assim como ocorre na implementação na forma de velocidade, uma das grandes vantagens da estratégia proposta é o fato de que não é necessário ajustar nenhum parâmetro para se obter uma boa resposta. Por outro lado, quando comparado com a implementação na forma de velocidade, o algoritmo proposto tipicamente resulta em respostas mais rápidas. Além disso, ele não se limita a evitar o efeito de *windup* causado pelo termo integral do controlador. Assim, como pode ser visto na seção A.2.2, o algoritmo proposto mostrou ter um comportamento mais satisfatório que o algoritmo de velocidade para controladores de ordem mais alta, que tipicamente apresentam outros modos que podem causar *windup* além da ação integral. Como comentário final vale à pena ressaltar que este algoritmo é capaz de evitar os efeitos de *windup* causados não somente por mudanças de referência, como também por perturbações.

### A.2.2 Abordagem anti-*windup* unificada para DTC

Para a proposição de uma abordagem unificada para evitar *windup* em DTC foi tomada como estrutura de base o PSF, que, como relatado na seção 2.2.4, é capaz de controlar satisfatoriamente qualquer tipo de sistema linear SISO com atraso. Para que os resultados da seção A.2.1 possam ser utilizados em conjunto com o PSF é necessário encontrar uma implementação alternativa do controlador que seja adequada à representação da figura 34. Uma

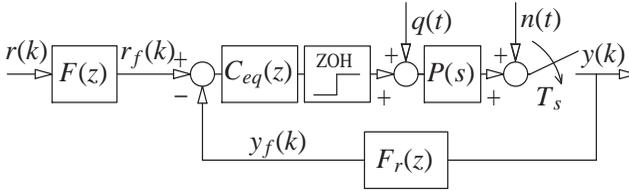


Figura 36: Controlador equivalente ao PSF

forma alternativa de implementar o PSF é determinar o controlador equivalente que apresenta o mesmo comportamento dinâmico da estrutura do PSF. Através de uma simples reorganização de blocos da figura 6 é fácil de notar que a estrutura equivalente pode ser representada como na figura 36, onde o controlador equivalente  $C_{eq}(z)$  é dado pela expressão da equação (A.7).

$$C_{eq}(z) = \frac{C(z)}{1 + C(z)S(z)} = \frac{C(z)}{1 + C(z)[G_n(z) - P_n(z)F_r(z)]} \quad (A.7)$$

É intuitivo que o controlador equivalente  $C_{eq}(z)$  deve ter pelo menos um polo em  $z = 1$  para que seja capaz de rejeitar perturbações de carga do tipo degrau (note que o filtro  $F_r(z)$  tem ganho estático unitário). Substituindo a expressão de  $S(z)$  (equação (2.18)) na equação (A.7) e escrevendo  $C(z)$  como função de seu numerador ( $N_c(z)$ ) e denominador ( $D_c(z)$ ), o controlador equivalente pode ser escrito como na equação (A.8). Como o filtro  $F_r(z)$  é estável,  $D_r(z)$  não tem uma raiz em  $z = 1$ . O mesmo pode ser concluído sobre  $D_n(z)^-$ , já que todos os possíveis modos integradores de  $D_n(z)$  estão em  $D_n(z)^+$ . Assim, é necessário que  $D_c(z)$  tenha uma raiz em  $z = 1$  a fim de rejeitar perturbações de carga do tipo degrau.

$$C_{eq}(z) = \frac{N_c(z)D_r(z)D_n(z)^-z^{d_n}}{D_r(z)D_n(z)^-D_c(z)z^{d_n} + (z-1)N_c(z)N_n(z)p(z)} \quad (A.8)$$

É possível escrever o controlador equivalente como uma função do operador atraso  $z^{-1}$ , resultando na equação (A.9). Essa estrutura é interessante porque o sinal de controle atual pode ser computado diretamente como função dos  $s$  sinais de controle passados, dos  $r$  sinais de erro passados e do erro atual como  $u(k) = n_0e(k) + n_1e(k-1) + \dots + n_re(k-r) - d_1u(k-1) - \dots - d_su(k-s)$ .

$$C_{eq}(z^{-1}) = \frac{n_0 + n_1z^{-1} + \dots + n_rz^{-r}}{1 + d_1z^{-1} + \dots + d_sz^{-s}} \quad (A.9)$$

Uma vez adotada esta representação do PSF, a aplicação da técnica anti-windup descrita na seção A.2.1 torna-se direta. Nesse caso, a única alteração na formulação é que o controlador equivalente  $C_{eq}(z)$  deve ser empregado ao invés de  $C(z)$ . Assim, a condição imposta para os zeros de  $C(z)$  na equação (A.6) pode ser reescrita em termos dos zeros de  $C_{eq}(z)$ . Da equação (A.7) é possível verificar que os zeros de  $C_{eq}(z)$  são dados pelos zeros do controlador primário  $C(z)$  e pelos polos do preditor estável  $S(z)$ . Como o preditor  $S(z)$  é estável, a condição para o emprego da técnica anti-windup é imposta pelo controlador primário  $C(z)$ , que não deve ter zeros com  $|z| \geq 1$ .

A representação em diagrama de blocos é essencialmente a mesma apresentada na figura 35, com duas diferenças fundamentais: (i) deve-se empregar  $C_{eq}(z)$  no lugar de  $C(z)$  e (ii) deve-se utilizar um filtro de realimentação  $F_r(z)$ , como ilustrado na figura 36. Outro ponto que merece destaque é o fato de agora  $n_0$  ser o coeficiente independente do numerador de  $C_{eq}(z^{-1})$  a não mais de  $C(z^{-1})$ . O algoritmo para implementação é essencialmente o mesmo apresentado na seção A.2.1, com as seguintes mudanças: (i) depois do passo 3 é necessário calcular a saída filtrada  $y_f(k)$  e (ii) o passo 4 deve ser ' $e(k) \leftarrow r_f(k) - y_f(k)$ ', onde  $r_f(k)$  é o sinal de referência filtrado.

É bastante simples implementar tal algoritmo empregando um controlador digital, visto que o projeto é desenvolvido diretamente no domínio discreto. Além disso, não há necessidade de se ajustar nenhum parâmetro da técnica anti-windup proposta. As únicas informações necessárias são sobre as restrições existentes no sinal de controle.

Uma questão que pode surgir é sobre a razão para o emprego da técnica anti-windup proposta ao invés de outras técnicas mais difundidas na literatura, como é o caso dos algoritmos de velocidade [43] e de *back calculation* [93]. Técnicas clássicas anti-windup não apresentaram bons resultados quando empregadas em conjunto com o controlador equivalente do PSF, especialmente quando o modelo da planta apresenta modos integradores ou instáveis. Isso ocorre porque as abordagens clássicas são voltadas a eliminar o efeito de windup causado pela parte integral do controlador. Entretanto, o controlador equivalente do PSF tipicamente apresenta outros modos com baixo amortecimento, que também pode causar windup do controlador [100]. Tanto para o estudo de caso integrador quanto para o instável apresentados na seção A.2.3, por exemplo, o algoritmo de velocidade não foi capaz de estabilizar as respostas de malha fechada do sistema restrito. Resultados semelhantes são obtidos quando o controlador equivalente é separado em uma parcela integradora e outra sem ação integral e um método de *back calculation* é empregado. Por outro lado, a técnica proposta age no controlador equivalente como um todo, evitando todas as possíveis fontes de windup. A figura 37 apresenta um exemplo que atesta o desempenho ruim que é observado quando um algoritmo de

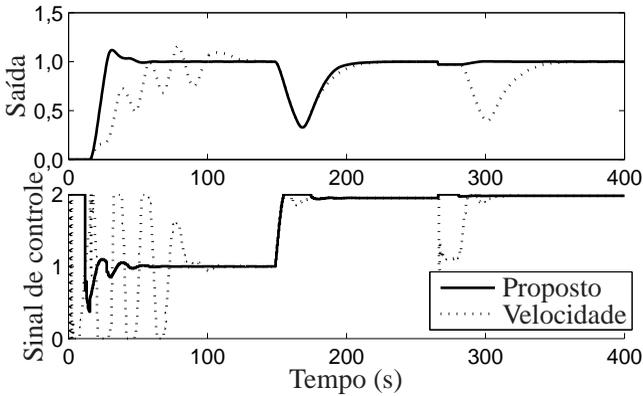


Figura 37: Comparação entre o algoritmo proposto e o algoritmo de velocidade para um processo estável com atraso de 15 s

velocidade (ou incremental) é utilizado. No caso apresentado, um sistema de segunda ordem estável dado por  $P(s) = \frac{0,1s+1}{(10s+1)(5s+1)}e^{-15s}$  é controlado por um PSF cujo filtro de robustez é dado por  $F_r(z) = \frac{0,6515z-0,5515}{z-0,9}$  e cujo controlador primário é um PID ISA com  $K_c = 8,4$ ,  $T_i = 7$ ,  $T_d = 1,5$  e  $T_f = 0,1$ . Empregou-se um período de amostragem de 0,5s e considerou-se um limite superior de 2 na variável de entrada do sistema (sinal de controle). O primeiro setor representa uma mudança de referência do tipo degrau, o segundo uma perturbação de carga do tipo degrau e o terceiro uma perturbação do tipo degrau na saída da planta. Cabe também mencionar que conforme o filtro de robustez do PSF é ajustado para acelerar a resposta de rejeição de perturbação, o comportamento do algoritmo incremental torna-se pior. Por outro lado, o comportamento do algoritmo proposto não é influenciado pelo ajuste do filtro.

Outra questão relevante está relacionada à vantagem real de se empregar o PSF com uma estratégia anti-*windup* em relação a empregar um controlador PID tradicional com anti-*windup*. Em geral, as conclusões são as mesmas obtidas no caso irrestrito. Vários livros apresentam seções específicas sobre as vantagens e desvantagens de usar controladores PID para processos com atraso e as principais conclusões podem ser assim resumidas:

- a melhora no desempenho obtida com um controlador compensador de atraso está associada com o erro de estimação do atraso [1];
- no caso de sistemas com atraso dominante, a resposta a sinais de referência e a rejeição de perturbações de carga podem ser melhoradas com

o emprego de compensadores de atraso [106];

- para pequenos erros de modelagem, as vantagens de DTC podem ser significativas mesmo para pequenos valores de atraso, especialmente quando a resposta desejada de malha fechada apresenta dinâmicas rápidas [1].

Entretanto, há casos nos quais os ganhos obtidos com o uso do PSF são fortemente atenuados pelas restrições no sinal de controle. Isso é verdade em vários exemplos nos quais o sinal de controle é muito restrito, visto que o desempenho de qualquer estratégia de controle é limitada pelas restrições, o que faz com que a resposta do PSF não seja muito diferente da obtida por um controlador clássico. Num caso como esses, dado que o controlador PID seja capaz de estabilizar o sistema de malha fechada, a diferença pode ser percebida somente na região linear de operação do controlador, que é muito pequena. Assim, caso a resposta do sistema seja analisada como um todo, pode-se pensar que as respostas são muito semelhantes. De fato, nesse caso elas são, porque quando uma restrição está ativa ambos os controladores se comportam exatamente da mesma forma e a diferença de comportamento poderá ser observada apenas na região linear. Por outro lado, em alguns casos é muito difícil de se encontrar um controlador PID que estabilize o sistema restrito, especialmente em casos instáveis.

A mesma planta de segunda ordem utilizada anteriormente foi empregada para realizar um comparação entre a abordagem unificada de anti-*windup* para DTC e um controlador PID. O PID foi ajustado com base nas regras de Normey-Rico e Camacho [1], que são derivadas a partir do PSF, e os parâmetros de ajuste foram:  $K_c = 1,0267$ ,  $T_i = 22$ ,  $T_d = 4,9432$  e  $T_f = 2,25$ . Para o caso do PID tanto a estratégia anti-*windup* formalizada na seção A.2.1 quanto a implementação de velocidade foram usadas e os resultados são apresentados na figura 38. De acordo com a discussão anterior, o desempenho obtido com o PSF é melhor que aqueles obtidos com o controlador PID.

### A.2.3 Estudos de caso em simulação

Nesta seção três estudos de caso são apresentados, um para um processo estável, um para um processo integrador e um para um processo instável. Os resultados obtidos com a técnica anti-*windup* proposta são comparados com estruturas recentemente publicadas na literatura para o caso integrador [95, 96]. Além disso, todos os resultados são comparados com os resultados obtidos empregando um controlador GPC. Por fim, para mostrar que a estratégia proposta não se limita apenas ao caso nominal, incerteza de modelagem é considerada e uma breve discussão é apresentada.

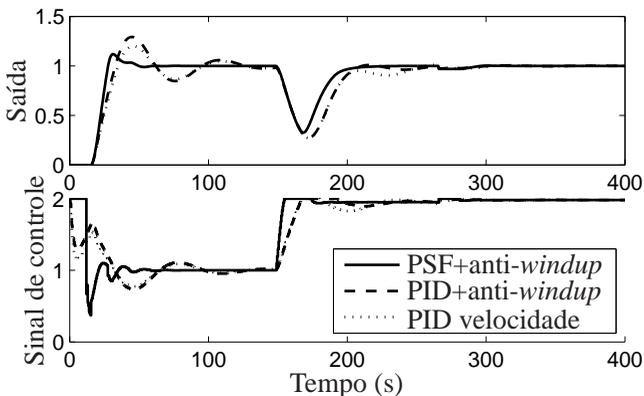


Figura 38: Comparação entre o PSF e o PID com *anti-windup* para um processo estável com atraso de 15 s

Todas as simulações são divididas em três fases. Na primeira, um degrau de referência  $r(k)$  é aplicado em  $t = 0$  s. Na segunda, um degrau de perturbação de carga  $q(t)$  é aplicado em um terço do tempo total de simulação. Na terceira, uma perturbação na saída  $n(t)$  é aplicada na planta quando a simulação alcança dois terços do tempo total. As amplitudes dos sinais variam de caso para caso e são detalhadas em cada exemplo específico. As restrições aplicadas ao sinal de controle também variam de caso para caso e são detalhadas em cada seção. Uma representação esquemática dos pontos onde as perturbações são consideradas é apresentada na figura 39, onde  $P_c(s)$  representa o comportamento completo da planta, incluindo as restrições no sinal de controle.

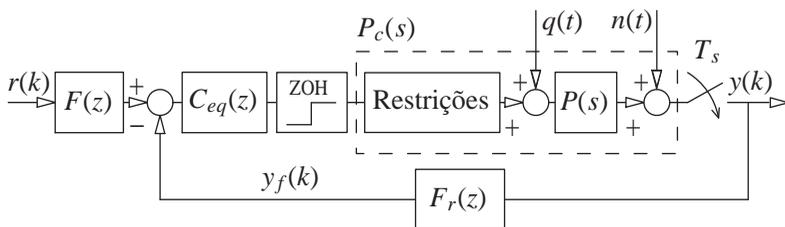


Figura 39: Controlador equivalente do PSF com perturbações e restrições

### Caso estável

O caso estável a ser considerado é o mesmo estudado em Normey-Rico e Camacho [28], que consiste em um trocador de calor no qual a temperatura  $T$  da água fria é controlada empregando a válvula  $V$  que manipula a vazão de entrada de água quente. O comportamento desse processo próximo ao ponto de operação pode ser representado pelo modelo apresentado na equação (A.10).

$$\frac{T(s)}{V(s)} = P(s) = \frac{0,12}{1 + 6s} e^{-3s} \quad (\text{A.10})$$

A representação discreta equivalente do modelo com um sustentador de ordem zero e um período de amostragem de 1 s é dado pela equação (A.11).

$$P(z) = \frac{0,0184}{z - 0,8465} z^{-3} = \frac{0,0184 z^{-1}}{1 - 0,8465 z^{-1}} z^{-3} \quad (\text{A.11})$$

Neste caso será considerado que a válvula pode abrir no máximo 0,5 unidades por segundo (restrição na taxa de variação). O controlador primário é um PI  $(C(z) = K_c + \frac{K_c T_s z}{T_i(z-1)})$  com  $K_c = 8,33$  e  $T_i = 5,51$ , escolhido para ter uma resposta no tempo semelhante com a apresentada no artigo original. O filtro  $F_r(z)$  é projetado impondo um polo mais rápido que o de malha aberta da planta e o zero é determinado utilizando a equação (2.25)

$$F_r(z^{-1}) = \frac{2,6 - 2,2z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1}}.$$

Neste caso não é empregado filtro de referência.

Da expressão da equação (A.7), o controlador equivalente pode ser escrito como

$$C_{eq}(z^{-1}) = \frac{8,33 - 12,05z^{-1} + 4,23z^{-2}}{1 - 1,45z^{-1} + 0,51z^{-2} - 0,40z^{-4} + 0,34z^{-5}}.$$

Apesar da expressão final para o controlador equivalente parecer complicada, todo o projeto é realizado empregando estruturas simples de controle (um controlador PI e um filtro de primeira ordem) e a expressão final é obtida pela substituição do controlador e do filtro na equação (A.7). Comparando o resultado com a equação (A.9), os coeficientes  $n_0$  a  $n_2$  e  $d_1$  a  $d_5$  podem ser facilmente determinados e o algoritmo pode ser empregado diretamente. Para a simulação, a referência foi considerada como um degrau unitário e as perturbações de carga e na saída foram escolhidas como degraus de amplitude  $-7,0$  e  $+0,6$ , respectivamente. Os resultados de simulação são apresentados na figura 40 e mostram como o uso da estratégia proposta pode melhorar a

resposta da planta quando esta é sujeita a uma restrição.

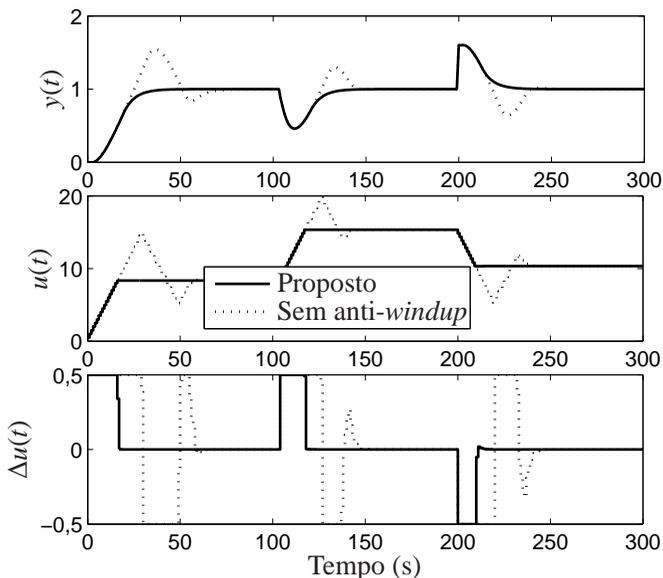


Figura 40: Dados no domínio do tempo comparando os casos com e sem a estrutura proposta para o caso estável

Como pode ser visto na figura 41, um GPC ajustado com um horizonte de predição  $N = 10$ , um horizonte de controle  $N_u = 10$ , uma ponderação do erro de seguimento  $\delta = 1$  e uma ponderação do incremento de controle  $\lambda = 0,3$  resulta em uma resposta temporal muito parecida com a obtida com o controlador proposto. A tabela 7 resume a comparação de ambos os controladores para as três fases: seguimento de referência (SR), rejeição de perturbação de carga (RPC) e rejeição de perturbação na saída (RPS). A comparação é realizada empregando dois índices de desempenho diferentes: integral do erro ao quadrado (ISE, do inglês *integral of squared error*) e uma versão modificada do funcional do GPC dado por  $J = \sum_{t=i}^{i+100} \delta [y(t) - r(t)]^2 + \sum_{t=i}^{i+100} \lambda [\Delta u(t)]^2$  com  $i = 0$  para SR,  $i = 101$  para RPC e  $i = 201$  para RPS<sup>2</sup>. Os resultados obtidos comprovam a equivalência das soluções, apesar de sob o ponto de

<sup>2</sup>Note que o funcional modificado analisa uma janela fixa de valores, que tem início no instante da aplicação da referência ou perturbação e fim um instante de tempo antes de ser aplicada nova perturbação ou de a simulação ser concluída. Como esses eventos ocorrem em múltiplos de 100s, que neste caso corresponde a 100 instantes de amostragem, justifica-se o emprego da janela fixa de tamanho 100.

Tabela 7: Comparação de desempenho para o estudo de caso estável

Controlador	SR		RPC		RPS	
	ISE	$J$	ISE	$J$	ISE	$J$
GPC	13,08	14,40	3,40	4,49	3,73	4,53
Proposto	13,16	14,40	3,45	4,50	3,78	4,53

vista de esforço computacional a abordagem proposta ser bastante mais interessante, exigindo 0,03 ms de tempo de CPU por período de amostragem, tempo cerca de 100 vezes menor que o demandado pelo GPC. Mais detalhes sobre a comparação computacional são apresentados na seção A.3.

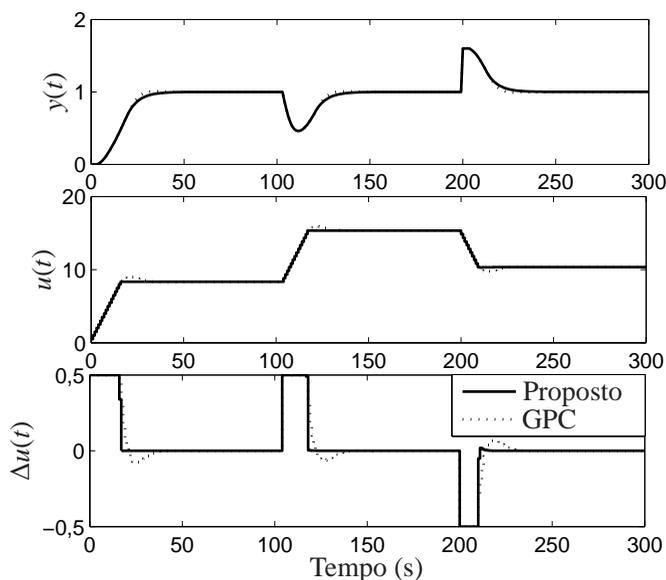


Figura 41: Dados no domínio do tempo comparando o GPC e a estrutura proposta para o caso estável

Por fim, uma análise empírica de robustez será realizada para mostrar que o método proposto é adequado para casos com incertezas de modelagem. A figura 42 mostra o comportamento de malha fechada do sistema em duas situações: (i) 100% de erro no atraso (planta real com  $L = 6$  s) e (ii) 100% de erro no ganho estático da planta (planta real com ganho estático de  $0,24^\circ\text{C}/\%$ ). Os resultados mostram que com as sintonias adotadas a abordagem unificada proposta neste trabalho é mais robusta que o GPC para erros

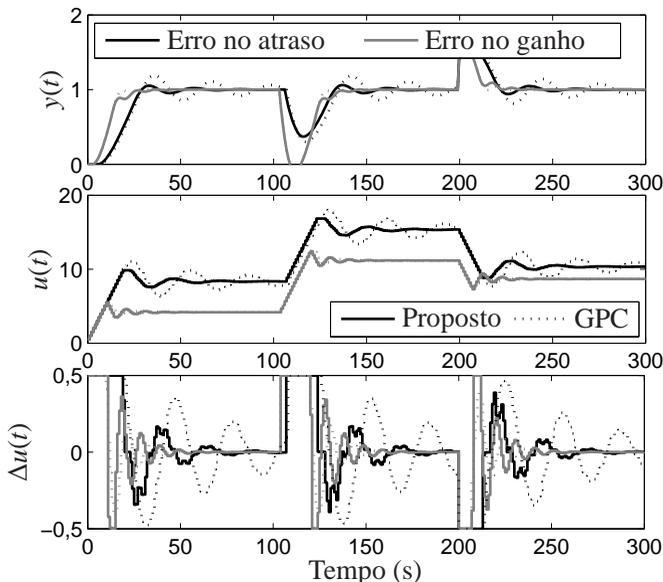


Figura 42: Dados no domínio do tempo comparando o GPC e a estratégia anti-*windup* proposta para o caso estável com incertezas de modelagem

na estimação do atraso e a robustez de ambos é muito similar para variações no ganho estático.

### Caso integrador

O caso integrador considerado é o mesmo estudado por Zhang e Jiang [96]. A função de transferência da planta é dada pela equação (A.12) e consiste de um integrador com ganho de velocidade unitário e 5 s de atraso de transporte.

$$P(s) = \frac{1}{s} e^{-5s} \quad (\text{A.12})$$

A representação discreta do modelo com um sustentador de ordem zero e um período de amostragem de 1 s é dada pela equação (A.13).

$$P(z) = \frac{1}{z-1} z^{-5} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} z^{-5} \quad (\text{A.13})$$

É importante notar que a implementação de Zhang e Jiang [96] consi-

dera que a perturbação de carga é aplicada antes da saturação. Em aplicações práticas é mais comum de se encontrar o caso no qual a perturbação não está sujeita à saturação. Além disso, esta é a situação mais genérica. Isso explica o motivo de Zhang e Jiang [96] terem conseguido utilizar uma perturbação de carga com amplitude de 1,8 quando os limites de saturação eram  $\underline{u} = -1$  e  $\bar{u} = 1$ . Para este exemplo os limites de saturação foram mantidos, porém a amplitude da perturbação de carga foi reduzida para 0,8. A amplitude da perturbação na saída foi considerada como sendo 4 unidades.

A primeira simulação (figura 43) compara os comportamentos de malha fechada com e sem a estratégia anti-*windup* proposta. O controlador primário é um PI com parâmetros  $K_c = 0,26$  e  $T_i = 5,67$ . O filtro do preditor foi escolhido como

$$F_r(z^{-1}) = \frac{2,5 - 2,2z^{-1}}{1 - 0,7z^{-1}},$$

o que resulta em um controlador equivalente

$$C_{eq}(z^{-1}) = \frac{0,30 - 0,47z^{-1} + 0,18z^{-2}}{1 - 1,40z^{-1} + 0,54z^{-2} + 0,01z^{-3} + 0,01z^{-4} + 0,01z^{-5} + 0,74z^{-6} + 0,56z^{-7}}.$$

Os resultados mostram que o esquema proposto é capaz de evitar os efeitos indesejados de *windup*.

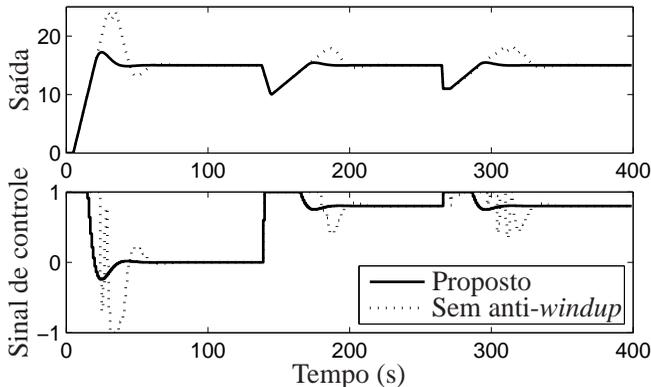


Figura 43: Dados no domínio do tempo comparando os casos com e sem a estrutura proposta para o caso integrador

A segunda simulação (figura 44) compara o esquema proposto com os de Zhang e Shao [95] e Zhang e Jiang [96]. O ajuste de Zhang e Jiang [96] foi tomado como referência e os controladores dos outros esquemas foram ajustados de forma a se comportarem de modo semelhante quando o sinal de

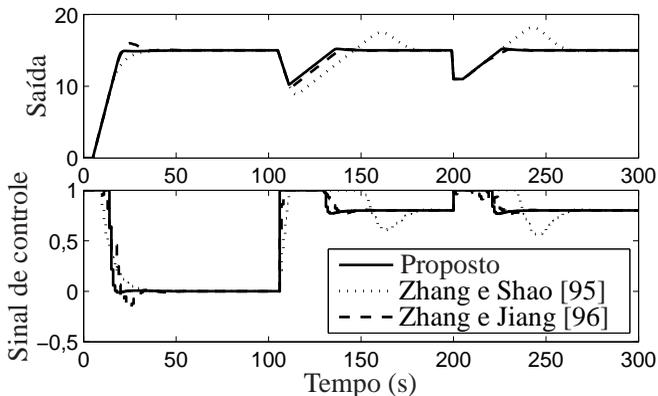


Figura 44: Dados no domínio do tempo comparando a estrutura proposta com as duas outras abordagens propostas na literatura para o caso integrador

controle não está sujeito a restrições. Os resultados do GPC não são apresentados na mesma figura porque é muito difícil de notar diferença entre o comportamento com o GPC e com a estrutura proposta quando os parâmetros de ajuste do controlador são  $N = 30$ ,  $N_u = 15$ ,  $\delta = 1$  e  $\lambda = 3$ . Neste caso, a estrutura proposta utiliza um controlador PI como controlador primário com parâmetros  $K_c = 0,68$  e  $T_i = 5,67$ . O filtro do predictor é o mesmo utilizado para gerar a figura 43, resultado em um controlador equivalente

$$C_{eq}(z^{-1}) = \frac{0,80 - 1,24z^{-1} + 0,48z^{-2}}{1 - 0,90z^{-1} + 0,26z^{-2} + 0,04z^{-3} + 0,04z^{-4} + 0,04z^{-5} + 1,96z^{-6} + 1,50z^{-7}}$$

Neste caso um filtro de referência dado por

$$F(z^{-1}) = \frac{0,4 - 0,28z^{-1}}{1 - 0,88z^{-1}}$$

é empregado na estrutura proposta e na de Zhang e Jiang [96] para reduzir o pico na resposta de seguimento de referência.

Para seguimento de referência, o comportamento das quatro estruturas é semelhante, porém a estrutura proposta, o GPC e a de Zhang e Shao [95] apresentam sinal de controle mais suave. A estrutura de Zhang e Shao [95] não é capaz de reduzir os efeitos de *windup* quando eles são provocados pela rejeição de perturbações, sejam elas de carga ou na saída. Por outro lado, as outras três estruturas comparadas apresentam comportamentos semelhantes. Além disso, se comparado com as outras duas estruturas anti-*windup*

Tabela 8: Comparação de desempenho para o estudo de caso integrador

Controlador	SR		RPC		RPS	
	ISE	$J$	ISE	$J$	ISE	$J$
GPC	1097,8	1102,3	231,2	234,3	194,8	195,0
Proposto	1097,8	1101,8	231,4	234,4	195,0	195,2
Zhang e Jiang [96]	1108,7	1112,4	306,7	307,9	199,6	199,8
Zhang e Shao [95]	1114,7	1117,9	662,2	662,8	337,5	337,6

apresentadas na literatura, o esquema proposto é mais flexível e permite um ajuste mais refinado, visto que o PSF, controlador que serve de base para a estrutura, permite um ajuste considerando tanto velocidade de resposta quanto robustez. Os índices de desempenho que dão suporte ao que foi exposto neste parágrafo são apresentados na tabela 8. É interessante notar que o valor de  $J$  do controlador proposto para SR é menor que o valor obtido com o GPC e isso acontece porque o GPC é uma técnica de horizonte deslizante que avança a janela de predição a cada período de amostragem. O valor de  $J$  utilizado para construir a tabela é obtido empregando um horizonte fixo, como já discutido no caso estável.

### Caso instável

O estudo de caso instável considera um reator químico descrito pelo modelo de Cholette, como apresentado em Seshagiri Rao, Rao e Chidambaram [107]. O modelo não linear do processo é dado por

$$\frac{dC}{dt} = \frac{Q}{V}(C_f - C) - \frac{k_1 C}{(k_2 C + 1)^2},$$

onde  $Q$  é a vazão de entrada em l/s,  $C_f$  é a concentração de entrada em mol/l (variável manipulada) e  $C$  é a concentração de saída em mol/l (variável de processo). Os valores do ponto de operação são dados por  $Q = 0,03333$  l/s,  $V = 1$  l,  $k_1 = 10$  l/s e  $k_2 = 10$  l/mol. Para  $C_f = 3,288$  mol/l há dois pontos de equilíbrio estáveis, um em  $C = 1,7673$  mol/l e outro em  $0,01424$  mol/l, e um ponto de equilíbrio instável em  $C = 1,316$  mol/l, que é o ponto que será considerado.

O modelo linearizado no ponto de operação considerando um atraso de medição de 20s pode ser expresso pela função de transferência da equação (A.14), onde a constante de tempo  $T = 103,1$  e o atraso de transporte  $L_n = 20$  são medidos em segundos, a variável manipulada é a concentração de entrada

$C_f(s)$  e a saída do processo é a concentração de saída  $C(s)$ .

$$\frac{C(s)}{C_f(s)} = P(s) = \frac{3,433}{103,1s - 1} e^{-20s} \quad (\text{A.14})$$

A representação discreta do modelo com um sustentador de ordem zero e um período de amostragem de 5 s é dada pela equação (A.15).

$$P(z) = \frac{0,1706}{z - 1,0497} z^{-4} = \frac{0,1706z^{-1}}{1 - 1,0497z^{-1}} z^{-4} \quad (\text{A.15})$$

Neste caso, uma saturação simétrica com amplitude de 0,05 mol/l e uma restrição na taxa de variação do sinal de controle de  $\pm 0,02$  mol/(l.s) são consideradas. O controlador primário é um PI com  $K_c = 2,7$  e  $T_i = 45$ . O filtro  $F_r(z)$  é ajustado de acordo com o exposto na seção 2.2.4 e sua função de transferência é

$$F_r(z^{-1}) = \frac{1,832 - 2,999z^{-1} + 1,201z^{-2}}{1 - 1,55z^{-1} + 0,585z^{-2}}.$$

O controlador equivalente é dado por

$$C_{eq}(z^{-1}) = \frac{3 - 4,65z^{-1} + 1,76z^{-2}}{1 - 1,14z^{-1} + 0,39z^{-2} + 0,03z^{-3} + 0,03z^{-4} - 0,90z^{-5} + 0,59z^{-6}}.$$

Um filtro de referência foi adotado para cancelar o zero dominante imposto pelo controlador primário e sua expressão é

$$F(z^{-1}) = \frac{0,5 - 0,4z^{-1}}{1 - 0,9z^{-1}}.$$

A referência é um degrau de 0,1 mol/l e as perturbações de carga e na saída são escolhidas como degraus de amplitude 0,015 mol/l e 0,2 mol/l, respectivamente. Os resultados de simulação são apresentados na figura 45.

Novamente o esquema proposto foi capaz de evitar os efeitos de *windup* no laço de controle, apesar de a planta ser instável e de dois tipos diferentes de restrição terem sido considerados simultaneamente. Além disso, pode ser observado que o sinal de controle resultante da estrutura proposta é mais suave que o obtido com uma estrutura de controle puramente linear. A comparação com o GPC é apresentada na figura 46 para  $N = 10$ ,  $N_u = 10$ ,  $\delta = 1$  e  $\lambda = 10,6$ . Como se pode observar, o controle proposto tem resultado equivalente ao do GPC também neste caso.

Por questão de brevidade, resultados de simulação incluindo incertezas não foram apresentados para os casos integrador e instável. Neste último

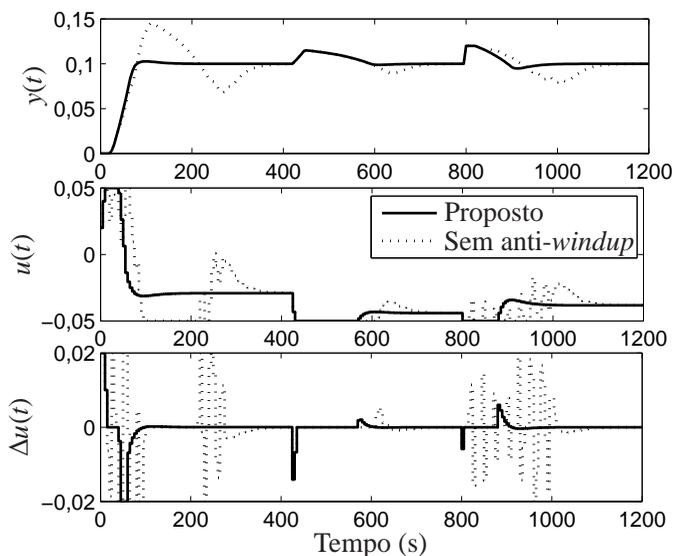


Figura 45: Dados no domínio do tempo comparando os casos com e sem a estrutura proposta para o caso instável

Tabela 9: Comparação de desempenho para o estudo de caso instável

Controlador	SR		RPC		RPS	
	ISE	$J$	ISE	$J$	ISE	$J$
GPC	0,0364	0,0611	0,0032	0,0061	0,0041	0,0046
Proposto	0,0362	0,0595	0,0034	0,0061	0,0042	0,0053

caso, o mais crítico deles, o uso da abordagem proposta neste trabalho é capaz de estabilizar o modelo não linear da planta com restrições sem causar muita degradação de desempenho. Se o modelo não linear é considerado com um erro de estimação de 25% ( $L = 15$  s), aparece um ciclo limite estável com amplitude pico a pico de aproximadamente 0,01 mol/l. Comportamento semelhante é observado se o atraso não é considerado ( $L = 0$  s) (neste caso a amplitude pico a pico é de aproximadamente 0,012 mol/l). Se o atraso do modelo não linear é considerado como  $L = 25$  s, um pico de 20% é observado durante o seguimento de referência, porém em regime permanente a referência é seguida com erro nulo. Se um modelo não linear com 10% de erro de estimação nos parâmetros é considerado ( $V = 1,1$  l,  $k_1 = 11$  l/s e  $k_2 = 11$  l/mol), o novo ponto de operação é dado por  $C = 1,4095$  mol/l e o

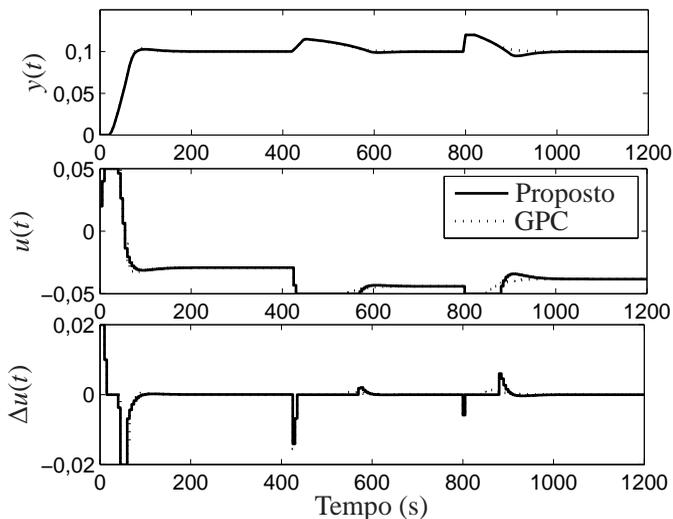


Figura 46: Dados no domínio do tempo comparando o GPC e a estrutura proposta para o caso instável

resultado praticamente não pode ser diferenciado do obtido no caso nominal.

#### A.2.4 Estudo de caso experimental

A fim de validar os reais benefícios da estrutura proposta, testes foram realizados empregando a bancada de ensaios de desempenho de compressores de refrigeração. Na prática todas as variáveis manipuladas e controladas da bancada têm restrições. A maioria dessas restrições são impostas por limitações físicas, como abertura das válvulas ou razão cíclica (*duty cycle*) dos atuadores com modulação por largura de pulso (PWM, do inglês *pulse width modulation*), porém algumas delas são impostas por questão de segurança.

Este estudo de caso explorará a malha de controle da temperatura de entrada do compressor, que pode ser vista em mais detalhes na seção C.2.1. De forma resumida, essa malha é caracterizada por um comportamento de primeira ordem com atraso e a variável manipulada é a razão cíclica de um PWM que é empregado para aquecer um resistor siliconado enrolado em forma de espiral ao redor da tubulação de sucção.

A identificação do modelo da planta foi realizada com emprego de uma sequência de degraus na variável manipulada em torno de um ponto de operação (temperatura de 32 °C e razão cíclica de 97%). Os dados medidos e a

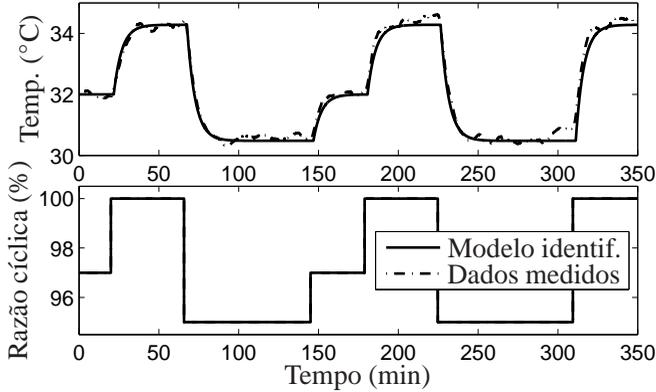


Figura 47: Identificação da malha de temperatura de entrada do compressor

curva gerada com o modelo identificado são apresentados na figura 47. Como pode ser observado, o comportamento é bem caracterizado por um sistema de primeira ordem com atraso com constante de tempo de 304,7 s, ganho estático de 0,7607 °C/% e atraso de transporte de 108 s (equação (A.16)), onde  $T$  é a temperatura e  $U$  é a razão cíclica do PWM.

$$\frac{T(s)}{U(s)} = \frac{0,7607}{304,7s + 1} e^{-108s} \quad (\text{A.16})$$

A representação discreta do modelo com um sustentador de ordem zero e período de amostragem de 3 s é dada pela equação (A.17). O período de amostragem foi mantido o mesmo que é empregado para as demais malhas de controle de temperatura da bancada.

$$\frac{T(z)}{U(z)} = \frac{0,007453}{z - 0,9902} z^{-36} = \frac{0,007453 z^{-1}}{1 - 0,9902 z^{-1}} z^{-36} \quad (\text{A.17})$$

Devido a uma limitação imposta pela forma como o PWM está implementado na bancada, quando operando em malha fechada a razão cíclica não pode ser inferior a 0,5% e nem superior a 99,5%.

## Resultados experimentais

Com base no modelo identificado, um PSF foi ajustado. O controlador primário foi escolhido como um PI  $(C(z) = K_c + \frac{K_c T_s z}{T_i(z-1)})$  com parâmetros  $K_c = 4,1308$  °C/% e  $T_i = 218,48$  s para impor um tempo de assentamento

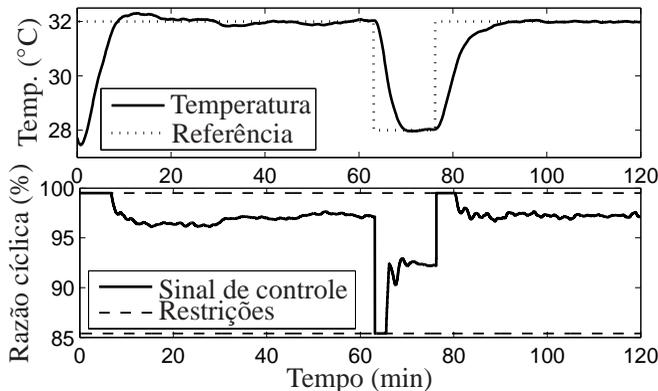


Figura 48: Controle em malha fechada da temperatura de entrada do compressor com a estrutura proposta

de aproximadamente 12 min em malha fechada. Um filtro de referência foi utilizado para cancelar o zero dominante de malha fechada imposto pelo controlador. A estrutura do filtro de referência é  $F(z) = \frac{1-z_c}{1-z_c^{1/\alpha}} \frac{z-z_c^{1/\alpha}}{z-z_c}$ , onde  $\alpha$  é o parâmetro de ajuste ( $0 < \alpha \leq 1$ ) e  $z_c$  é o zero do controlador ( $z_c = \frac{T_i}{T_i+T_s}$ ).

Para que seja possível obter uma resposta de rejeição de perturbação com dinâmica mais rápida que a da planta em malha aberta, o filtro do preditor foi ajustado para cancelar o polo da planta que aparece no modelo. O compromisso entre robustez e velocidade de rejeição de perturbação é analisado na sequência.

O primeiro experimento foi realizado com um filtro do preditor ajustado para rejeitar perturbações em 11 min. Como pode ser visto na figura 48, o controlador é capaz de rejeitar as perturbações do tipo degrau impostas ao sistema nos instantes 30 min e 50 min (aproximadamente). As dinâmicas de rejeição de perturbação são compatíveis com os 11 min esperados. Além disso, o parâmetro de ajuste do filtro de referência foi alterado em cada mudança de referência. No primeiro degrau  $\alpha = 1$ , ou seja, o filtro de referência não tem efeito. Como pode ser observado, há um sobressinal causado pela dominância do zero. No segundo degrau  $\alpha = 0,75$  e o zero tem aproximadamente a mesma dominância dos polos de malha fechada. Note que um limite inferior foi artificialmente introduzido no sinal de controle para mostrar o efeito da estrutura de anti-*windup*. No terceiro degrau,  $\alpha = 0,65$  e os polos de malha fechada tornam-se dominantes, resultando em um seguimento de referência mais lento quando comparado aos outros casos.

A figura 49 apresenta uma comparação entre os casos com e sem a estrutura anti-*windup* proposta. A coluna do lado esquerdo compara as respostas de seguimento de referência e a coluna da direita compara as dinâmicas de rejeição de perturbação. Para seguimento de referência ambos os controladores foram ajustados com  $\alpha = 0,65$ , 12 min para seguimento de referência e 11 min para rejeição de perturbação. Pode-se observar que a estrutura proposta evita os efeitos de *windup*. O tempo de assentamento da estrutura proposta é de aproximadamente 15 min, enquanto o tempo de assentamento do PSF tradicional é próximo a 20 min. Vale ressaltar que mesmo com a estrutura proposta o tempo de assentamento é um pouco maior que o valor desejado por causa da saturação do sinal de controle, visto que enquanto o sinal de controle está saturado a planta opera em malha aberta e a resposta não pode ser acelerada.

Para análise de rejeição de perturbação ambos os controladores foram ajustados com  $\alpha = 0,65$ , 12 min para seguimento de referência e 6 min para rejeição de perturbação. A perturbação foi criada com a elevação da vazão de água fria por 10 min e posterior redução para o valor nominal. Como pode ser visto na figura 49, a estrutura proposta é capaz de rejeitar a perturbação em aproximadamente 9 min, enquanto o PSF necessita de aproximadamente 16 min para fazer o mesmo. Novamente vale à pena mencionar que o tempo é maior que o desejado por causa da restrição no sinal de controle.

É interessante notar que neste caso o sistema em malha fechada com controlador PSF é capaz de rejeitar perturbações de carga mais rápido do que a dinâmica de malha aberta, o que não é possível com o PS tradicional. Isso pode ser observado tanto na figura 48, na qual as perturbações são rejeitadas em cerca de 11 min frente a um tempo de assentamento de aproximadamente 15 min em malha aberta, quanto na figura 49, na qual a perturbação é rejeitada em cerca de 9 min, frente aos mesmos 15 min de assentamento em malha aberta. Por outro lado, quando o controlador foi ajustado para rejeitar perturbações muito mais rápido que a dinâmica de malha aberta, a robustez do sistema diminuiu. Isso fica muito claro na coluna da direita da figura 49, na qual é possível observar que o sinal de controle tornou-se muito mais oscilatório que no primeiro caso. Assim, é importante sempre levar em conta o compromisso existente entre a velocidade desejada para rejeição de perturbação e a robustez a erros de modelagem, como discutido na seção 2.2.4. Deve-se também atentar ao fato de que o ajuste do controlador primário para acelerar o seguimento de referência prejudica a robustez do sistema em malha fechada, porém não é possível acelerar a resposta de rejeição de perturbação de forma a se tornar mais rápida que a dinâmica de malha aberta apenas com alteração do controlador primário. Para uma discussão mais aprofundada sobre o assunto recomenda-se a leitura da referência [1].

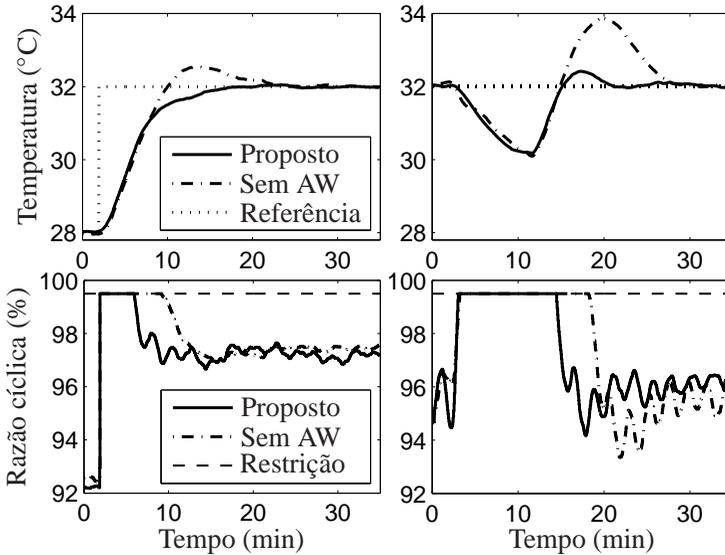


Figura 49: Dados no domínio do tempo comparando os casos com e sem a estratégia de anti-*windup* proposta para a temperatura de entrada do compressor; esquerda: seguimento de referência; direita: rejeição de perturbação

### A.3 Comentários finais

A técnica anti-*windup* proposta para DTC foi baseada em desenvolvimentos anteriores de Bruciapaglia e Apolonio [98] para o caso de controladores PID. Neste trabalho mostrou-se que pequenas adaptações da técnica permitiram atingir resultados extremamente satisfatórios para controladores de alta ordem, como é o caso do controlador equivalente de um DTC. A integração com o PSF permitiu lidar com o efeito de *windup* em qualquer tipo de sistema linear com atraso, seja ele estável, integrador ou instável.

O método proposto é de simples implementação e evita o efeito de *windup* tanto no controlador quando nos modos integradores e lentos do modelo da planta. As duas grandes razões para a simplicidade são: não há parâmetro de ajuste e todo o projeto da estrutura de controle pode ser feita de forma independente da estratégia proposta. Além disso, todo o projeto é feito diretamente no domínio  $z$ , o que torna-se uma vantagem para a implementação prática, visto que a maioria dos DTC são implementados em dispositivos digitais. Outro ponto que deve ser enfatizado é que a estrutura de controle é linear quando não há restrições ativas e torna-se não linear somente quando

ocorre a violação de uma restrição por parte do sinal de controle. Fica claro que a estrutura de controle proposta não é tão simples quanto um PID, porém em muitas situações práticas as vantagens de sua adoção compensam o esforço adicional de implementação, especialmente quanto o atraso é dominante e bem conhecido.

Todos os estudos de caso de simulação são comparados com o GPC, que é um controlador ótimo. Os resultados mostram que para sistemas lineares com atraso os comportamentos de ambas as estratégias são muito parecidos quando restrições são consideradas no sinal de controle. Assim, apesar de o método proposto não ser ótimo, ele pode oferecer soluções quase-ótimas sem a necessidade de empregar um otimizador em linha. Isso é especialmente importante para processos com dinâmicas rápidas, visto que o sinal de controle da estrutura proposta pode ser obtido quase instantaneamente (média de 0,03 ms para o cômputo de cada sinal de controle para os exemplos apresentados, contra uma média de 31 ms com picos de 285 ms do GPC empregando um algoritmo de ponto interior genérico).

O ajuste do controlador primário pode ser realizado considerando o sistema irrestrito e o esquema anti-*windup* pode ser adicionado *a posteriori*. Assim, não há superposição entre o ajuste do controlador (feito para um compromisso entre desempenho e robustez) e a estrutura anti-*windup*, o que infelizmente acontece quando o esquema anti-*windup* apresenta algum parâmetro de ajuste. A garantia de robustez não é a mesma do caso irrestrito, porém foram apresentadas formas de realizar essa análise caso a caso. A união do PSF com a estrutura anti-*windup* é muito flexível, sendo capaz de apresentar bons resultados para processos estáveis, integradores e instáveis, apesar de a estrutura como um todo ser bastante simples.



## **APÊNDICE B – PRINCÍPIOS DE TERMODINÂMICA E REQUISITOS DAS BANCADAS DE ENSAIO DE DESEMPENHO DE COMPRESSORES**

Este apêndice apresenta uma breve revisão dos conceitos básicos de termodinâmica, refrigeração e das definições e exigências normativas para os ensaios de desempenho energético de compressores. Na parte dos requisitos normativos apresentam-se apenas os requisitos para os métodos de ensaio presentes na bancada disponível para realização dos estudos de caso. Detalhes específicos sobre as grandezas medidas e a topologia da bancada de ensaios são apresentados no apêndice C.

### **B.1 Princípios de termodinâmica**

Termodinâmica pode ser entendida como o estudo das relações entre os sistemas térmicos e os sistemas mecânicos, ou seja, o estudo das relações existentes entre calor, trabalho mecânico e outras formas de energia [108]. O estudo pode ser realizado sob o ponto de vista microscópico (estudo do comportamento das moléculas e da interação entre as mesmas) ou sob o ponto de vista macroscópico (no qual o objetivo de estudo é o comportamento do conjunto). Devido ao interesse do presente trabalho no tema, será apresentada apenas a abordagem macroscópica da termodinâmica, também denominada termodinâmica clássica [108].

Existe uma série de propriedades que são essenciais para o estudo do comportamento macroscópico da matéria em termodinâmica. Essas propriedades termodinâmicas dependem apenas do estado instantâneo do sistema e não do comportamento do sistema até atingir tal estado. As grandezas envolvidas podem ser divididas nas que apresentam dependência da massa, ou seja, da dimensão do sistema (propriedade extensiva) e das que são independentes da massa (propriedade intensiva). Exemplos de propriedades extensivas são volume e energia e exemplos de propriedades intensivas são pressão e temperatura [109].

O estudo da termodinâmica clássica é feito com base em três leis fundamentais. Além das três leis, existe um postulado, muitas vezes denominado de “lei zero da termodinâmica”. Esse postulado afirma que se dois corpos apresentam a mesma temperatura e um deles tem a mesma temperatura de um terceiro corpo, o outro também terá a mesma temperatura do terceiro corpo [109, 110].

A primeira lei da termodinâmica enuncia que o calor recebido por um sistema é inteiramente transformado em trabalho ou em aumento da energia do sistema (seja na forma de energia cinética, gravitacional ou interna). Dessa forma, o somatório do calor transferido entre os estados inicial e final é igual à diferença de energia entre os estados final e o inicial, adicionada ao trabalho realizado pelo sistema entre os dois estados. Como decorrência da primeira lei, pode-se afirmar que se um sistema opera em um ciclo, ou seja, se o estado inicial é igual ao estado final, o trabalho realizado pelo sistema é numericamente igual ao calor recebido pelo mesmo [108]. Matematicamente, a primeira lei da termodinâmica é apresentada na equação (B.1).

$$\int_1^2 \delta Q + \int_1^2 \delta W = E_2 - E_1 \quad (\text{B.1})$$

Onde

$\delta Q$	diferencial de calor
$\delta W$	diferencial de trabalho
$E_1$	energia do sistema no estado inicial
$E_2$	energia do sistema no estado final

A segunda lei da termodinâmica estabelece que em sistemas irreversíveis (reais), a entropia de um sistema termodinamicamente isolado tende a crescer ao longo do tempo. Usa-se com muita frequência entropia definida como o grau de desordem de um sistema. De modo mais formal, é definida através de um diferencial de entropia, que é o quociente entre o diferencial de calor e a temperatura absoluta, como apresentado na equação (B.2).

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (\text{B.2})$$

Onde

$dS$	diferencial de entropia
$dQ$	diferencial de calor

$T$  temperatura absoluta

Há duas implicações imediatas da segunda lei da termodinâmica que interessam bastante para o presente trabalho. A primeira é que o calor não se transfere de forma natural de um corpo mais frio para um corpo mais quente, ou seja, é impossível transferir calor de um corpo frio para um corpo quente sem ao mesmo tempo transformar certa porção de trabalho em calor. A segunda é que para uma máquina que opera em ciclos poder transformar parte do calor em trabalho ela precisa ao mesmo tempo transferir o calor de um reservatório quente para um reservatório frio [108, 109, 110].

A terceira lei da termodinâmica estabelece que conforme um sistema se aproxima do zero absoluto de temperatura, todos os processos cessam e a entropia tende a seu valor mínimo. Em termos práticos, pode-se afirmar que é impossível, por qualquer método que seja, atingir o zero absoluto de temperatura em um número finito de operações. A grande contribuição dessa lei para os estudos desenvolvidos neste trabalho é o fato de poder estabelecer um ponto ideal no qual a entropia torna-se mínima. A esse ponto pode ser atribuído valor zero e ele pode ser usado como referência para determinação de um valor absoluto de entropia. Todavia, tipicamente são empregadas diferenças de entropia para caracterização de processos termodinâmicos.

Um dos conceitos fundamentais de termodinâmica para o entendimento dos ensaios de compressores é o de entalpia. Entalpia é uma grandeza física associada a um estado de um determinado sistema. Pode ser definida como a soma da energia interna de um sistema termodinâmico com o trabalho realizado pelo sistema sobre a atmosfera. O trabalho realizado é numericamente igual ao produto da pressão pelo volume. Matematicamente, a definição é apresentada na equação (B.3).

$$dH = dU + d(pV) \quad (\text{B.3})$$

Onde

$dH$  diferencial de entalpia

$dU$  diferencial de energia interna

$d(pV)$  diferencial do produto da pressão pelo volume

Assim como tipicamente ocorre na entropia, a entalpia é uma grandeza que isolada não traz informação sobre o sistema, uma vez que é definida de forma diferencial. Todavia, variações de entalpia revelam muitas informações sobre a mudança ocorrida com o sistema e facilitam a análise do problema [108].

## B.2 Princípios de refrigeração

O'Neal, Cooper e Hickman [111] definem refrigeração como “o uso de máquinas mecanicamente ou termicamente ativadas com objetivo de reduzir a temperatura de um ambiente” (p. 1879). Tais máquinas são constituídas por equipamentos que operam de forma integrada para transferir calor de um ambiente a uma baixa temperatura para um ambiente submetido a uma temperatura maior. Como foi enunciado na segunda lei da termodinâmica, esse processo não ocorre de forma natural. Assim, todo sistema de refrigeração necessita de uma fonte externa de energia para ser capaz de realizar a troca de calor [111].

As aplicações para circuitos de refrigeração são bastante diversificadas. Tais tipos de circuito são aplicados no condicionamento de ar, no armazenamento de alimentos, no armazenamento de medicamentos, na conservação de sangue e outros tecidos de seres vivos e na fabricação de equipamentos, por exemplo. Dessa forma, é de se esperar que existam diversas configurações de circuitos de refrigeração, cada uma mais indicada para certa aplicação [112]. Para o presente trabalho interessam os circuitos de compressão de vapor, ou seja, aqueles que utilizam compressores.

Nos circuitos de compressão de vapor, um fluido, que é denominado refrigerante, sucessivamente evapora e condensa a pressões definidas para a correta operação do sistema. Enquanto evapora, o refrigerante retira calor do ambiente a ser resfriado e na condensação entrega esse calor à fonte quente (tipicamente o ambiente externo). Para que o processo possa acontecer, de acordo com as leis da termodinâmica, é necessário que exista uma fonte de energia para o sistema. Essa fonte, denominada compressor, realiza trabalho sobre o gás ao comprimi-lo. A estrutura básica de um circuito de refrigeração desse tipo é apresentada na figura 50.

Para explicar o funcionamento de um circuito de refrigeração de compressão de vapor, será analisado o caminho do refrigerante ao longo do circuito. A análise será feita partindo do ponto identificado como 1 na figura 50 e terá fim nesse mesmo ponto. No ponto 1 o refrigerante encontra-se vaporizado, superaquecido e a baixa pressão. O compressor é responsável por elevar a pressão do vapor de refrigerante (ponto 2), que passa, em seguida, pelo condensador. No condensador o refrigerante cede calor ao meio (que está mais frio do que o vapor superaquecido) e com isso condensa. Dessa forma, no ponto 3 tem-se refrigerante líquido, sub-resfriado e em alta pressão. Na sequência, o líquido passa por um dispositivo de expansão (tipicamente um capilar ou uma válvula com algum tipo de ajuste), o que faz com que sua pressão caia bruscamente. Com essa queda de pressão, qualquer calor absorvido do meio externo fará com que o refrigerante localizado no ponto 4 evapore. Esse calor é obtido no evaporador, retirando calor do meio a ser resfriado.

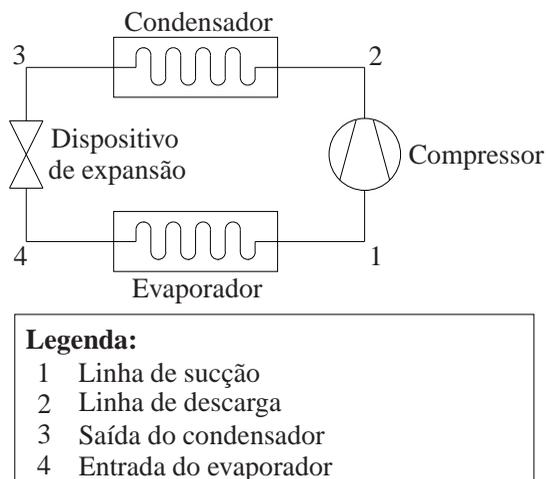
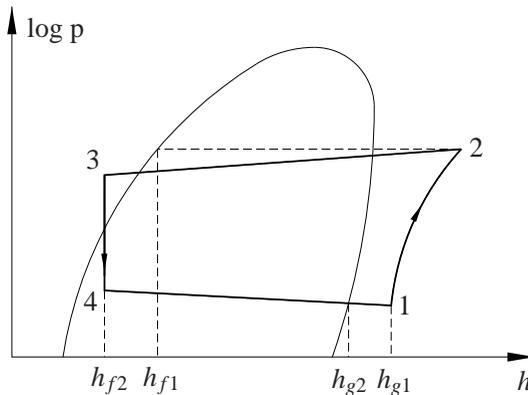


Figura 50: Diagrama de um circuito de refrigeração por compressão de vapor

Com isso, o refrigerante retorna ao ponto inicial de análise vaporizado e em baixa pressão. O ciclo é continuamente repetido, retirando calor do meio frio e entregando-o ao meio quente [111, 113].

O comportamento de um circuito de refrigeração pode, também, ser explicado com emprego de um diagrama que relaciona pressão e entalpia do fluido refrigerante (diagrama p-h). O diagrama p-h (figura 51) é dividido em três áreas que são separadas umas das outras pelas linhas de líquido e vapor saturados. Na área à esquerda da linha de líquido saturado, o refrigerante encontra-se totalmente na fase líquida e é dito sub-resfriado. Na área à direita da linha de vapor saturado, o refrigerante encontra-se totalmente na fase de vapor e é dito superaquecido. A região compreendida entre as duas linhas representa a mudança de fase do refrigerante de líquido para vapor (caminhando-se para a direita) ou de vapor para líquido (caminhando-se para a esquerda) [109].

A figura 51 apresenta um diagrama p-h simplificado, no qual as perdas de carga no interior do compressor não são representadas. A análise será feita partindo do ponto identificado como 1 na figura 51 e terá fim nesse mesmo ponto, em analogia com o que foi feito na análise da figura 50. No ponto 1 o fluido refrigerante está superaquecido e em baixa pressão e, após o trabalho de compressão, chega ao ponto 2. Nesse processo ocorre realização de trabalho sobre o refrigerante e isso provoca um aumento da entalpia do mesmo. No ponto 2 o refrigerante encontra-se em alta pressão e superaquecido. Antes


**Legenda:**

- |     |                       |
|-----|-----------------------|
| 1   | Linha de sucção       |
| 2   | Linha de descarga     |
| 3   | Saída do condensador  |
| 4   | Entrada do evaporador |
| $h$ | Entalpia              |
| $p$ | Pressão               |

Figura 51: Representação do circuito de refrigeração em um diagrama p-h

que o vapor seja condensado (para chegar ao ponto 3) é necessário eliminar o superaquecimento do refrigerante reduzindo sua temperatura até que o estado esteja sobre a linha de saturação. Tipicamente esse processo ocorre no condensador, antes da ocorrência da condensação propriamente dita. Durante o processo de condensação o vapor cede calor ao meio e tem sua entalpia reduzida, chegando sob a forma de líquido sub-resfriado ao dispositivo de expansão (ponto 3). Entre os pontos 3 e 4 ocorre a expansão. A entalpia do refrigerante não é alterada durante o processo de expansão, o que faz com que o ponto 4 seja localizado seguindo-se a linha de entalpia constante do ponto 3. O processo 3-4 é uma expansão adiabática irreversível durante a qual o refrigerante passa por uma série de estados nos quais não há uma distribuição uniforme das propriedades. Por esse motivo, a linha que liga os pontos 3 e 4 não indica o caminho seguido pelo refrigerante no diagrama p-h, mas apenas que o processo tem início no ponto 3 e termina no ponto 4. A partir do ponto 4, o refrigerante passa pelo evaporador, onde ocorre troca de calor com

o meio a ser refrigerado. O calor fornecido pelo meio ao refrigerante faz com que sua entalpia se eleve e ele chegue ao ponto inicial de análise vaporizado e em baixa pressão.

Os circuitos de refrigeração empregados na prática geralmente apresentam elementos adicionais aos quatro principais (compressor, condensador, evaporador e dispositivo de expansão). Esses elementos geralmente são empregados para melhorar o desempenho do sistema de refrigeração ou por questão de segurança. Exemplos de dispositivos para segurança são válvulas de alívio de pressão e indicadores da fase do refrigerante. Exemplos de dispositivos para melhorar o desempenho do sistema são filtro secador de refrigerante e separador de óleo de lubrificação do compressor.

### **B.3 Ensaios de desempenho de compressores**

O ensaio de desempenho é uma atividade experimental que visa determinar quatro características fundamentais do compressor: capacidade de refrigeração, potência elétrica ativa consumida (consumo), eficiência isentrópica e COP, do inglês *coefficient of performance*. É aplicado tanto para atividades de pesquisa e desenvolvimento quanto para estabelecimento de dados para catálogo (testes para venda) e para controle de qualidade. Tais ensaios tipicamente são realizados em bancadas especiais, devido à necessidade de medição, controle e monitoramento de diversas variáveis [9, 15].

Esses ensaios são regulados por normas internacionais que definem características tanto do processo de medição quanto do sistema de refrigeração empregado e de suas variáveis. As que merecem maior destaque neste trabalho são a norma internacional da *International Organization for Standardization* (ISO) ISO 917 [12], a norma estadunidense da *American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers* (ASHRAE) ANSI/ASHRAE 23 [13], a norma europeia do *European Committee for Standardization* (CEN) EN 13771 [114] e a norma brasileira da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) NBR 15826 [14]. Além dessas, existem outras normas acessórias que especificam condições de ensaio [115, 116, 117], regulamentam métodos de medição [118, 119] e definem requisitos para circuitos de refrigeração com refrigerantes específicos [120]. As normas mencionadas são bastante coerentes, principalmente no que diz respeito às definições e requisitos. Por questão de organização do trabalho e devido à maior abrangência territorial da norma, procurou-se adotar o exposto na norma ISO 917 [12] como padrão para este trabalho.

Esta seção foi dividida em duas partes para facilitar o entendimento dos ensaios de desempenho de compressores. Inicialmente são apresentadas as definições normativas para as grandezas envolvidas no ensaio e posterior-

mente são apresentados os principais requisitos metrológicos e operacionais estabelecidos em normas.

### **B.3.1 Definições normativas das grandezas**

Capacidade de refrigeração é uma quantidade expressa em unidades de potência (tipicamente em watts) que é obtida pelo produto da vazão mássica de refrigerante que circula pelo sistema de refrigeração por uma diferença de entalpias. Em refrigeração, tipicamente se está interessado na avaliação da capacidade de refrigeração de um sistema como um todo (refrigerador, congelador ou câmara fria, por exemplo) e as entalpias empregadas para fazer a diferença que multiplica a vazão mássica são tomadas na saída e na entrada do evaporador [112]. Dessa forma, a capacidade de um sistema de refrigeração é “a taxa à qual o sistema removerá calor da câmara de refrigeração” [121, p. 179].

A definição anterior, apesar de bem aceita no meio industrial, não é perfeitamente adequada para avaliação de compressores. Em sua definição usual, capacidade de refrigeração é afetada por características do circuito como um todo, como perdas de carga e graus de sub-resfriamento e de superaquecimento. Para contornar esse problema e permitir a obtenção de um dado relativo ao compressor propriamente dito e não ao sistema formado pelo compressor e por seu sistema de ensaio, as normas definem o que é chamado de capacidade de refrigeração do compressor [12, 14, 114]. Apesar de essa definição ser uma abstração, visto que o compressor isolado não é capaz de ter uma capacidade de refrigeração, ela é bastante útil para avaliação das características do compressor de forma independente do sistema de ensaio que está sendo empregado. A norma ASHRAE 23 [13] emprega a definição tradicional de capacidade de refrigeração (entalpias na entrada do compressor e na entrada do dispositivo de expansão), porém determina que os graus de superaquecimento e sub-resfriamento devem ser medidos em cada ensaio.

Para definirem capacidade de refrigeração do compressor, as normas [12, 14, 114] tomam as entalpias das condições especificadas para o ensaio na entrada do compressor e no ponto de saturação correspondente a líquido saturado à pressão de descarga do compressor. A interpretação física dessa capacidade é a capacidade de refrigeração que seria obtida quando o compressor sob ensaio fosse utilizado em um circuito ideal, sem perdas de carga, com um sub-resfriamento nulo na saída do condensador e com o superaquecimento do fluido refrigerante antes de entrar no compressor sendo todo realizado no interior do evaporador. Além disso, como são tomadas as condições especificadas para ensaio para realização do cálculo, é feita a correção da frequência rotacional do motor e do volume específico do refrigerante. A norma ASHRAE 23 [13] não prevê qualquer correção no valor da capacidade medida e,

dessa forma, a definição de capacidade de refrigeração adotada no trabalho é a de capacidade de refrigeração do compressor, como definida nas normas ISO 917 [12] e NBR 15826 [14]. A equação da capacidade de refrigeração do compressor ( $\phi_0$ ) é apresentada em (B.4).

$$\phi_0 = q_{mf} \frac{V_{ga}}{V_{gl}} \frac{f}{f_a} (h_{g1} - h_{f1}) \quad (\text{B.4})$$

Onde

$\phi_0$	capacidade de refrigeração do compressor
$q_{mf}$	vazão mássica de refrigerante
$V_{ga}$	volume específico real do vapor de refrigerante na sucção do compressor
$V_{gl}$	volume específico do vapor de refrigerante na sucção do compressor nas condições especificadas para ensaio
$f$	frequência elétrica de alimentação especificada
$f_a$	frequência elétrica real de alimentação
$h_{g1}$	entalpia específica do vapor de refrigerante na entrada do compressor nas condições especificadas para o ensaio
$h_{f1}$	entalpia específica do refrigerante no estado líquido saturado referente à pressão especificada de saída do compressor

Potência elétrica ativa consumida (doravante denominada apenas de consumo e denotada por  $P$ ) é uma grandeza expressa em unidades de potência (tipicamente em watts) que representa a potência elétrica real entregue ao compressor para que este seja capaz de transferir calor da fonte fria para a fonte quente. Para o caso de compressores abertos, a norma estabelece que trata-se da potência disponibilizada no eixo [12]. O consumo deve também considerar todos os possíveis instrumentos e equipamentos que, em condições normais, operam em conjunto com o compressor, como dispositivos de partida e inversores de frequência, por exemplo. Assim como a capacidade de refrigeração, a potência também deve ser corrigida para corresponder à condição especificada de ensaio através da multiplicação pela relação entre volumes específicos e entre frequências rotacionais, como apresentado na equação (B.5). Em oposição às normas ISO 917 [12] e NBR 15826 [14], a norma EN 13771 [114] não inclui o termo do volume específico na correção do valor

de potência, apenas a relação de frequências. A norma ANSI/ASHRAE 23 [13], por sua vez, não prevê qualquer tipo de correção no valor de consumo.

$$P = P_a \frac{V_{ga} f}{V_{gt} f_a} \quad (\text{B.5})$$

Onde

$P$  potência real entregue ao compressor corrigida para a condição de ensaio

$P_a$  potência real entregue ao compressor medida

Eficiência isentrópica ( $\eta_l$ ) é a razão entre o produto da vazão mássica real e da variação na entalpia isentrópica através do compressor pelo consumo, como apresentado na equação (B.6). Trata-se, pois, de uma medida da relação entre a potência térmica de compressão caso o processo fosse isentrópico e a potência real consumida pelo compressor, seguindo a definição de consumo adotada neste trabalho.

$$\eta_l = q_{mf} \frac{h_{gt} - h_{ga}}{P} \quad (\text{B.6})$$

Onde

$\eta_l$  eficiência isentrópica

$h_{gt}$  entalpia específica teórica do vapor de refrigerante à pressão de descarga tendo a mesma entropia que o vapor de refrigerante na entrada do compressor

$h_{ga}$  entalpia específica teórica do refrigerante na entrada do compressor nas condições especificadas para o ensaio

Coefficiente de desempenho (COP) é uma grandeza adimensional dada pelo quociente da capacidade de refrigeração pelo consumo (equação (B.7)). A interpretação mais comum é a razão do calor trocado pelo sistema de refrigeração pela energia utilizada para se fazer essa troca de calor. Todavia, a interpretação física depende dos conceitos adotados para capacidade de refrigeração e para consumo. Em refrigeração, COP tipicamente é definido como a relação entre o efeito refrigerante (diferença de entalpias tomada sobre o evaporador) e o calor de compressão. No caso das normas deve-se prestar atenção para as sutilezas na definição dos termos que definem COP para não recair em interpretações errôneas. Além disso, é importante ter em mente que a grandeza não representa o rendimento do compressor, logo é possível a existência de valores de COP maiores que um. Em suma, trata-se de uma medida

da eficiência do compressor e é um dos valores mais empregados na indústria para comparação entre compressores de diferentes modelos e fabricantes.

$$\text{COP} = \frac{\phi_0}{P} \quad (\text{B.7})$$

### B.3.2 Principais aspectos metrológicos e operacionais estabelecidos em norma

As normas apresentam exigências que vão desde os pontos de medição até os limites de variação de cada variável para que o ensaio seja considerado válido. Além disso, exigem que a determinação da vazão mássica em um ensaio de desempenho seja realizada simultaneamente através de dois métodos diferentes e independentes. As próprias normas apresentam diferentes alternativas para realizar essa medição, mas elas podem ser agrupadas em dois grandes grupos: (i) métodos de medição direta de vazão e (ii) métodos de medição indireta através de balanço de energia.

Os métodos empregados no sistema que servirá de estudo de caso são **A** (calorímetro de fluido secundário) e **F** (medição direta de vazão mássica de refrigerante líquido). Para o método F, o equacionamento é mais direto e pode ser realizado com emprego da equação (B.8), que compensa os efeitos da circulação de óleo pelo circuito, como indicado em [12].

$$\phi_0 = \frac{q_{mf}}{1 - x(1 - \mu_r \nu_o)} \left[ (1 - x)(h_{g1} - h_{f1}) - c_o x(t_f - t_g) \right] \frac{V_{ga} f}{V_{gl} f_a} \quad (\text{B.8})$$

Onde

$q_{mf}$	vazão mássica de refrigerante
$x$	título (percentagem em massa) do óleo na mistura fluido refrigerante e óleo
$\mu_r$	massa específica do fluido refrigerante na pressão e temperatura nas quais a vazão mássica foi medida
$\nu_o$	volume específico do óleo
$c_o$	calor específico do óleo
$t_f$	temperatura de saturação correspondente à pressão de descarga do compressor
$t_g$	temperatura de sucção do compressor

Para os métodos nos quais a medição é feita através do balanço de energia, estima-se o valor da vazão mássica através de equações. Aqui será tratado apenas o equacionamento do método A, mas outros métodos baseados em calorímetro apresentam equacionamento semelhante. A ideia básica do método é a determinação da vazão mássica pelo balanço de energia no interior de um calorímetro (que contém o evaporador). O refrigerante ingressa no calorímetro com temperatura e pressão controladas, evapora no interior do mesmo e sai com temperatura e pressão também controladas. No interior do calorímetro coloca-se um fluido secundário volátil (tipicamente um fluido refrigerante não explosivo) e o calor necessário para a evaporação do refrigerante que circula pela parte interna de uma serpentina é fornecido por meio de resistores ao fluido secundário. Este, por sua vez, transfere o calor ao fluido que circula no interior da serpentina. Esquemáticamente, a configuração do sistema é apresentada na figura 52, onde  $t_a$  é a temperatura média do ambiente no qual o calorímetro se encontra e  $t_p$  é a temperatura de saturação média correspondente à pressão do fluido secundário. Os pontos  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $f_1$  e  $f_2$  são os pontos indicados pela norma ISO 917 [12] para determinação das entalpias empregadas para cálculo da capacidade de refrigeração.

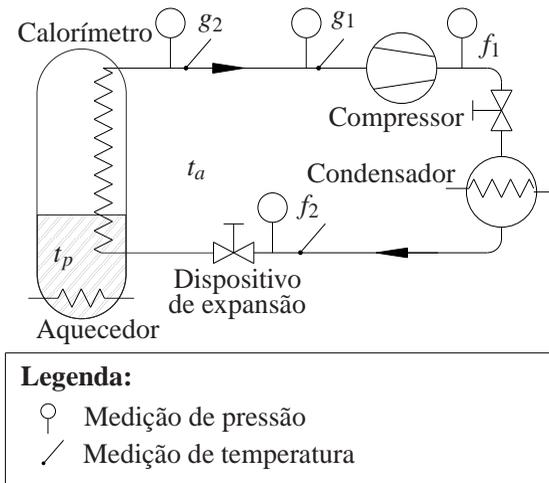


Figura 52: Método A estabelecido na norma ISO 917 – Fonte: ISO 917 [12]

Para determinação da vazão mássica leva-se em consideração a potência efetivamente retirada do calorímetro devido à evaporação do refrigerante e a diferença de entalpia entre o refrigerante na saída e na entrada do calorímetro. Para o caso de aquecimento por potência elétrica, a determinação da

vazão mássica é feita com emprego da equação (B.9) [12].

$$q_{mf} = \frac{\phi_h + F_l(t_p - t_a)}{h_{g2} - h_{f2}} \quad (\text{B.9})$$

Onde

$q_{mf}$	vazão mássica de refrigerante
$\phi_h$	potência externa fornecida ao interior do calorímetro
$F_l$	fator de perdas do calorímetro
$t_p$	temperatura de saturação média correspondente à pressão do fluido secundário
$t_a$	temperatura média do ambiente do calorímetro
$h_{g2}$	entalpia específica do vapor superaquecido de refrigerante na saída do calorímetro
$h_{f2}$	entalpia específica do refrigerante no estado líquido sub-resfriado na entrada da válvula de expansão

No tocante às incertezas de medição, as normas estabelecem a incerteza máxima aceitável para cada tipo de medição. A norma ISO 917 [12], por exemplo, define essas incertezas em termos de desvio-padrão das medições. Já a norma ANSI/ASHRAE 23 [13] define a característica dos sistemas de medição com base em erros máximos. Essas exigências estão relacionadas com a veracidade do valor medido, ou seja, buscam estabelecer uma incerteza máxima para o processo de medição de forma que os resultados do ensaio não sejam comprometidos pela existência de grandes erros de medição.

Além dos limites de incerteza, as normas definem limites de variação aceitáveis em cada grandeza para realização do ensaio. As normas utilizadas desconsideram as condições transitórias do compressor sob ensaio e estabelecem que os parâmetros de interesse devem ser determinados em condições de regime [12, 13, 14, 114]. Para que o estado do sistema seja considerado regime permanente, e não mais transitório, todas as variáveis devem ficar dentro dos limites de variação definidos durante um período determinado. A título de exemplo, os principais limites de variação impostos pela norma ISO 917 [12] para que o sistema seja considerado como operando em regime permanente são apresentados na tabela 10. Os valores definidos em norma geralmente são tomados pelos fabricantes como valores máximos de variação estabelecidos para os ensaios. É bastante comum a adoção de faixas mais estreitas

Tabela 10: Limites de variação estabelecidos pela norma ISO 917

<b>Grandeza</b>	<b>Limite de variação</b>
Pressões	$\pm 1\%$ do valor de <i>setpoint</i>
Temperaturas	$\pm 3$ K
Tensão de alimentação	$\pm 3\%$ do valor de <i>setpoint</i>
Frequência de alimentação	$\pm 1\%$ do valor de <i>setpoint</i>
Volume específico do fluido	$\pm 2\%$ da média das últimas medições
Capacidade de refrigeração	$\pm 1\%$ da média das últimas medições

de variação nos ensaios realizados, o que impõe requisitos de controle mais exigentes.

O emprego de controladores é extremamente importante para garantir dois comportamentos nas variáveis medidas durante o ensaio: (i) levá-las aos valores de referência desejados no menor tempo possível e (ii) mantê-las dentro dos limites de variação permitidos pelas normas ou exigidos para o ensaio. Como o ensaio é realizado apenas depois de o sistema como um todo atingir regime permanente, a redução do período demandado pelo transitório reduz significativamente o período de ensaio como um todo. Além disso, para o ensaio ser considerado válido, todas as variáveis devem permanecer dentro dos limites de variação permitidos durante um período igual a meia hora [114] ou a uma hora [12, 14]. Caso ocorram perturbações no sistema e elas não sejam rejeitadas, a contagem do tempo de ensaio só é iniciada depois de o sistema voltar às condições de operação.

Um mesmo painel de ensaio é empregado para realização de ensaios de diversos modelos de compressor, os quais podem ser ensaiados em diferentes condições. Essas condições estão estabelecidas em normas e servem para possibilitar a comparação de compressores similares de diferentes fabricantes. A alteração da condição modifica significativamente o ponto de operação de muitas das variáveis, o que exige um comportamento robusto dos controladores. Tipicamente os compressores são ensaiados na condição chamada de *check-point*, que corresponde a uma temperatura de evaporação de  $-23,3^{\circ}\text{C}$  ( $-10^{\circ}\text{F}$ ) e a uma temperatura de condensação de  $+54,4^{\circ}\text{C}$  ( $+130^{\circ}\text{F}$ ) para o mercado estadunidense [117] e a uma temperatura de evaporação de  $-25^{\circ}\text{C}$  e a uma temperatura de condensação de  $+55^{\circ}\text{C}$  para o mercado europeu [115]. A norma brasileira aceita qualquer uma das condições, desde que a opção adotada esteja claramente identificada junto aos dados de desempenho [122].

## **APÊNDICE C – DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS CONTROLADAS NA BANCADA DE ENSAIO DE DESEMPENHO DE COMPRESSORES EM ESTUDO**

Para realização deste trabalho foram empregadas duas bancadas distintas, uma que utiliza R600a como fluido refrigerante e outra que utiliza R134a. A bancada de R134a foi a mais utilizada e por esse motivo a descrição realizada aqui será para essa bancada. Todavia, estruturalmente ambas têm configurações muito parecidas, sendo a principal diferença o dimensionamento de alguns componentes. Entretanto, os modelos encontrados podem ser bastante diferentes devido a variações nas condições de ensaio por diferença do fluido refrigerante.

### **C.1 Descrição geral da bancada**

As bancadas empregadas para realização dos ensaios de controle deste trabalho são bancadas para avaliação de desempenho energético de compressores de refrigeração. Como apresentado em mais detalhes no apêndice B, tais bancadas são formadas por um circuito de refrigeração que possui várias malhas de controle para ajustar as condições de realização dos ensaios. Uma visão geral da bancada é apresentada na figura 53 e mais detalhes sobre cada uma das variáveis controladas são apresentados na seção C.2.

Nota-se na figura 53 que existem dois ambientes com temperatura controlada na bancada: um para o compressor em ensaio e outro para o calorímetro. O calorímetro utilizado no estudo é um calorímetro de fluido secundário e consiste em um ambiente termicamente isolado do ambiente no qual ele está localizado. Em seu interior, o calorímetro contém uma tubulação de cobre em formato de serpentina dentro da qual circula o fluido refrigerante. Adicionalmente, enche-se até metade do calorímetro com fluido refrigerante na fase líquida, chamado fluido secundário, e a troca térmica para evaporar o fluido que se encontra dentro da serpentina ocorre indiretamente através do aquecimento desse fluido secundário por resistores. Assim, os resistores aquecem o fluido secundário e o calor do fluido secundário é transferido para

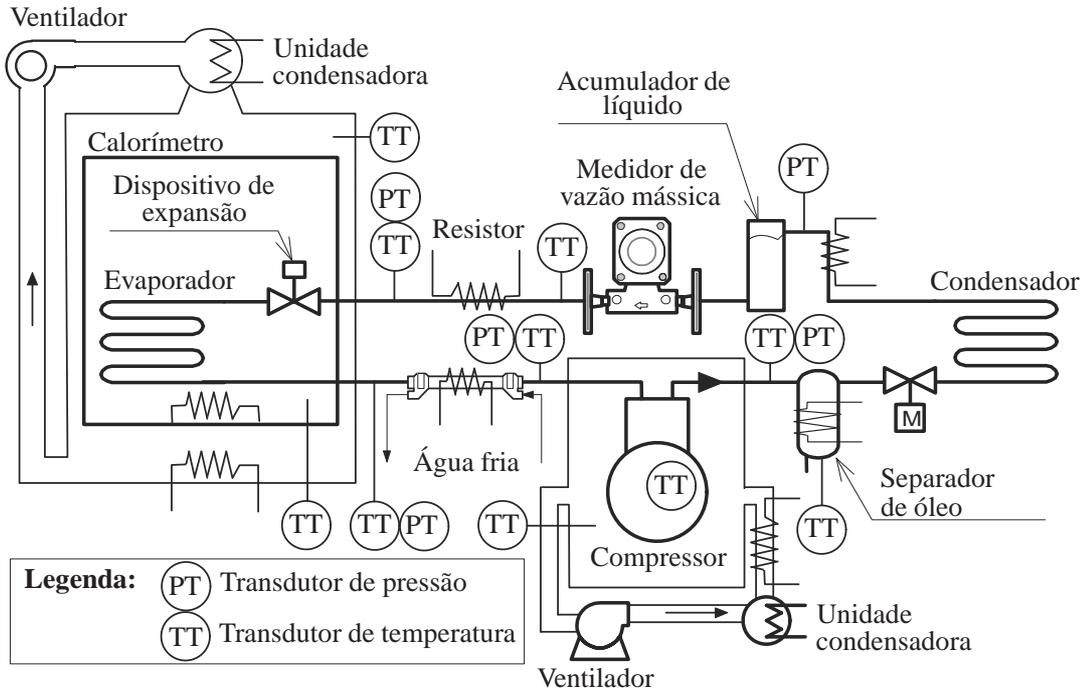


Figura 53: Esquema geral da bancada de ensaio de desempenho energético de compressores

o fluido refrigerante que passa pelo evaporador. Apesar de introduzir uma inércia térmica maior no sistema, essa transferência indireta é mais interessante do que a direta pela homogeneidade com que ela ocorre, minimizando borbulhamentos em pontos isolados da tubulação. Além da serpentina, está contida no interior do calorímetro a válvula de expansão, que provoca a queda de pressão necessária para a evaporação do fluido refrigerante.

A aquisição e o processamento dos dados são realizados por um sistema conjugado formado por um barramento *PCI extension for instrumentation* (PXI) e dois módulos de condicionamento de sinais baseados em sistema de condicionamento de sinais para instrumentação (SCXI, do inglês *signal conditioning extensions for instrumentation*). O SCXI realiza um condicionamento analógico prévio de alguns sinais, de modo a adequá-los ao sistema de aquisição presente no PXI. O PXI, por sua vez, realiza a aquisição dos dados em placas específicas e também realiza o processamento desses dados, incluindo o cálculo dos sinais de controle. Isso é possível porque o PXI possui uma unidade controladora que conta com processador, memória, unidades de armazenamento e um sistema operacional de tempo real. Adicionalmente, um sistema supervisor que roda em ambiente *Windows* permite ao usuário acompanhar os ensaios e alterar parâmetros durante a realização do mesmo. Toda a programação, tanto do sistema de tempo real quanto do sistema supervisor, foi realizada em *LabVIEW*.

A seção C.2 apresenta a descrição de cada uma das nove variáveis controladas na bancada: seis temperaturas e três pressões. Além dessas variáveis, existem diversas medições adicionais que são empregadas para cálculo dos resultados do ensaio ou como parâmetros adicionais para avaliação do projeto do compressor. As principais variáveis adicionais são: temperatura do corpo do compressor, temperatura de saída do compressor, temperatura da superfície do calorímetro, temperatura da bobina principal do motor do compressor, pressão na entrada do calorímetro, pressão na saída do calorímetro, pressão na entrada do condensador, tensão de alimentação do compressor, corrente de alimentação do compressor, frequência de alimentação do compressor, frequência rotacional do compressor, potência de alimentação dos resistores do calorímetro, vazão mássica de fluido refrigerante e massa específica do fluido refrigerante na saída do condensador.

## **C.2 Descrição das variáveis controladas**

Atualmente o controle nas bancadas tem uma abordagem SISO e a descrição será realizada dessa mesma forma. Da seção C.2.1 à seção C.2.9 cada uma das variáveis é detalhada, mostrando a importância de controlar a variável, as formas de medição e atuação, a estratégia de controle atualmente

empregada e o comportamento dinâmico típico.

Antes de passar à descrição das variáveis propriamente ditas é importante realizar alguns esclarecimentos sobre as condições de ensaios, especialmente no que diz respeito às pressões na entrada e saída do compressor. No projeto de sistemas de refrigeração há duas temperaturas fundamentais: temperatura de evaporação e temperatura de condensação. A primeira representa a temperatura na qual o fluido a baixa pressão passa do estado líquido para o estado de vapor, ou seja, a temperatura mínima que o fluido refrigerante atinge no circuito. Dessa forma, alterações na temperatura de evaporação se refletem como alterações na temperatura atingida dentro do gabinete que está sendo refrigerado. A temperatura de condensação, por sua vez, representa a temperatura na qual o fluido a alta pressão passa do estado de vapor para líquido. Para que o circuito possa operar de forma satisfatória, essa temperatura deve ser alguns graus Celsius mais alta que a temperatura do ambiente no qual o sistema será empregado. Caso contrário, não será possível ceder calor ao meio externo para provocar a condensação do fluido no condensador. Devido ao fato de ambos os fluidos de trabalho serem substâncias puras, na mudança de fase ocorre um patamar tanto de temperatura quanto de pressão. Assim, ao serem definidas as temperaturas de evaporação e condensação são também definidas as pressões de evaporação e condensação. A pressão de evaporação é também a pressão encontrada na entrada do compressor, descontando as perdas de carga na tubulação, que tipicamente são pequenas nesse trecho. Em um sistema, que não possui válvula para controle da pressão de descarga, a pressão de condensação é a pressão encontrada na saída do compressor, também descontadas as perdas de carga na tubulação. Dessa forma, do ponto de vista do compressor, a temperatura de evaporação está associada com a pressão na entrada (sucção) e a temperatura de condensação está associada à pressão na saída (descarga). Isso é bastante importante, pois as condições de evaporação e condensação (características de sistema) são impostas no ensaio através da definição das referências para as pressões de entrada e saída do compressor, respectivamente.

Além das pressões na entrada e saída do compressor, a condição de ensaio é definida pela temperatura na entrada do compressor e pela frequência rotacional do mesmo [12, 14]. A temperatura na entrada do compressor é bastante importante por exercer influência direta na massa específica do fluido refrigerante naquele ponto, que é crítica para definição da vazão mássica e, conseqüentemente, da capacidade de refrigeração. Isso se deve ao fato de o compressor possuir um volume de fluido refrigerante que pode ser comprimido por ciclo, que corresponde aproximadamente ao volume formado entre o pistão e o cilindro. Assim, quanto maior a massa específica, maior massa de fluido refrigerante poderá ser comprimida por ciclo de compressão. Se-

guindo o mesmo raciocínio é imediato perceber que a variação da frequência rotacional do compressor apresenta efeito direto na vazão mássica de fluido refrigerante, uma vez que uma frequência mais baixa implica em menos ciclos de compressão por unidade de tempo.

Há variáveis que não definem a condição específica de ensaio, porém devem sempre ser mantidas em certo valor para garantir homogeneidade entre dados de diferentes fabricantes, como é o caso da temperatura do ambiente no qual o compressor é ensaiado. Dependendo dos métodos de ensaio empregados é necessário manter outras variáveis dentro de certos limites, como é o caso da temperatura de saída do calorímetro em métodos calorimétricos. Além disso, há variáveis que não apresentam especificação normativa para seus valores, porém a condição de ensaio é atingida mais facilmente quando essas variáveis são mantidas dentro de certos limites, como é o caso da pressão na saída do condensador.

### **C.2.1 Temperatura de entrada do compressor**

A temperatura do fluido refrigerante que entra no compressor é uma das variáveis que define a condição de ensaio [14]. Essa variável deve ser medida na tubulação de entrada do compressor e a variação admitida em norma em torno da temperatura especificada para a condição de ensaio é de  $\pm 3^\circ\text{C}$ . Apesar de a tolerância ser bastante grande, na prática é comum reduzi-la para que a incerteza associada ao resultado final do ensaio também seja menor. Na indústria não é raro encontrar limites de  $\pm 1^\circ\text{C}$  em torno do valor de referência.

O controle da temperatura de entrada do compressor desempenha dois papéis importantes na realização do ensaio. O primeiro, como já apresentado, é a manutenção da condição de ensaio. A alteração na temperatura de entrada do compressor provoca uma alteração de massa específica do fluido refrigerante naquele ponto, o que faz com que a vazão mássica do circuito seja alterada. Para uma dada pressão, quanto mais alta a temperatura na entrada, mais baixa torna-se a massa específica, o que faz com que menos massa seja bombeada pelo compressor por ciclo de compressão. O segundo papel é manter a integridade do compressor em ensaio. Caso a temperatura na entrada do compressor assuma valores que estão próximos ou abaixo da temperatura de condensação para a pressão de entrada do fluido no compressor, pode ocorrer a entrada de fluido refrigerante no estado líquido no compressor. Nesse caso, é bastante provável que o compressor seja danificado, pois o sistema de compressão é projetado para comprimir vapor.

Na bancada em estudo essa temperatura é medida com o uso de um termorresistor do tipo Pt100 inserido na tubulação de entrada através de um poço termométrico. Para atuação existem dois graus de liberdade: (i) um

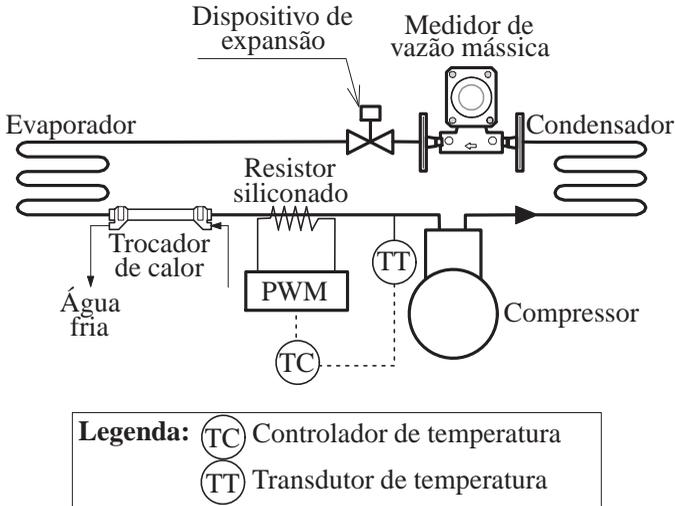


Figura 54: Esquema geral da malha de controle da temperatura de entrada do compressor

resistor siliconado enrolado na tubulação de entrada na seção imediatamente anterior ao ponto de medição cuja potência equivalente pode ser ajustada com variação da razão cíclica de um PWM ligado a um relé de estado sólido e (ii) uma válvula manual que permite ajustar a vazão de água fria que passa por um trocador de calor tubo em tubo (tipo HE) por dentro do qual o fluido refrigerante também passa. Um esquema simplificado da bancada contendo detalhes apenas desse laço é apresentado na figura 54.

Atualmente, o controlador da variável é um PID que determina a razão cíclica de acionamento do resistor. A vazão de água é ajustada manualmente para cada condição de ensaio e não é alterada no decorrer do mesmo, a menos que não esteja sendo possível atingir a condição devido a uma vazão de água muito alta ou muito baixa. Na prática, a vazão permanece a mesma para uma grande gama de ensaios, havendo pouca necessidade de alteração na abertura da válvula. O controlador começa a operar quando o compressor é ligado e sua operação cessa quando o ensaio é finalizado e o compressor é desligado. Atualmente o período de amostragem é de 3 s.

O comportamento dinâmico da variável para um compressor na faixa de 100 W é bem caracterizado por um sistema de primeira ordem com atraso com constante de tempo de 304,7 s, ganho estático de 0,7607 °C/% e atraso

de transporte de 108 s, ou seja,

$$\frac{T(s)}{U(s)} = \frac{0,7607}{304,7s + 1} e^{-108s},$$

onde  $T$  é a temperatura e  $U$  é a razão cíclica do PWM. Mais detalhes acerca do processo de identificação podem ser obtidos com a leitura da seção A.2.4, na qual um estudo de caso envolvendo a variável é apresentado. Na faixa de 200 W na nova configuração da bancada o ganho estático é de 0,58 °C/%, a constante de tempo é de 120 s e o atraso é de 45 s.

### C.2.2 Temperatura do separador de óleo

Existe um separador de óleo entre a saída do compressor em ensaio e a válvula empregada para atuar na pressão de descarga. Os compressores tradicionais utilizam óleo para lubrificação dos mecanismos internos e parte desse óleo é expelido para o circuito junto com o fluido refrigerante que sai do compressor a alta pressão. Como forma de minimizar a quantidade de óleo que circula no sistema, emprega-se esse separador, que retém em seu interior o óleo. Ao final do ensaio o óleo retido no interior do separador é retornado para o compressor.

A eficiência de separação é aumentada em temperaturas mais elevadas, nas quais o fluido refrigerante encontra-se em estado de vapor superaquecido. Por esse motivo, trabalha-se com uma referência de 80 °C para a temperatura do separador. O valor específico de temperatura foi escolhido de forma a garantir fluido refrigerante superaquecido em qualquer condição de ensaio, uma vez que a condição de maior temperatura de condensação ensaiada é de 70 °C. A temperatura do separador de óleo é medida através de um termorresistor do tipo Pt100 posicionado em sua parte inferior e o aquecimento é realizado através de um resistor do tipo coleira posicionado em sua superfície lateral. O resistor é alimentado pela rede elétrica e a potência fornecida ao resistor é ajustada através da razão cíclica de um PWM que aciona um relé de estado sólido que está em série com a alimentação. Uma representação esquemática dos componentes pertencentes a essa malha de controle é apresentada na figura 55.

Por não se tratar de uma temperatura crítica para a condição de ensaio, a tolerância em relação ao valor de referência é de  $\pm 5$  °C. Todavia, deve-se atentar ao fato de que mesmo não sendo uma variável crítica para a condição de ensaio, temperaturas baixas em ensaios com altas temperaturas de condensação podem fazer com que mais óleo do que o admissível passe para o sistema, alterando o resultado do ensaio. Ao mesmo tempo, a temperatura não pode ser excessivamente alta para não danificar os componentes mecâ-

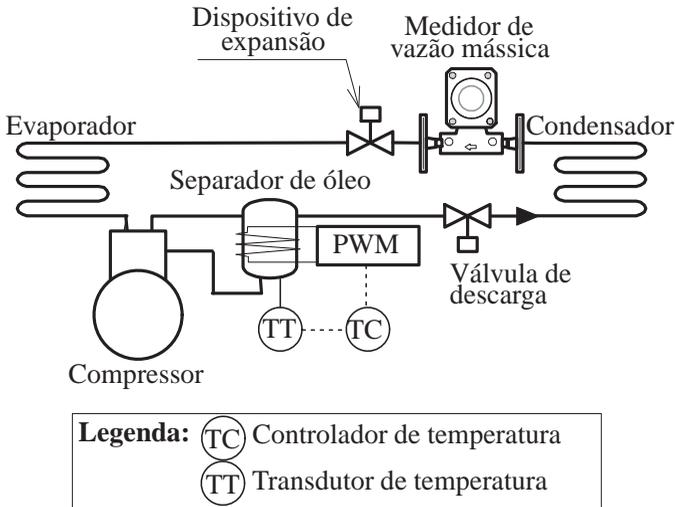


Figura 55: Esquema geral da malha de controle da temperatura do separador de óleo

nicos na região. Por fim, não é interessante que a temperatura no separador de óleo apresente grande oscilação no decorrer do ensaio, uma vez que isso causa variações diretas na pressão de descarga do compressor.

Ensaio de resposta ao degrau em torno do ponto de operação de  $80^{\circ}\text{C}$  indicaram um comportamento dominante de primeira ordem com pequeno atraso. Essa é uma das poucas malhas do painel que continua operando mesmo sem a existência de um compressor em ensaio, porém o comportamento dinâmico no caso de o compressor estar em operação ou não é diferente. Com o compressor desligado, a constante de tempo identificada foi de 960s, o ganho estático foi de  $3,65^{\circ}\text{C/s}$  e o atraso foi de 90s. Com o compressor ligado, a constante de tempo passou para 1350s, o ganho estático passou para  $1,40^{\circ}\text{C/s}$  e o atraso para 42s. Atualmente o controlador empregado é um PID sintonizado para apresentar bom desempenho com o compressor em funcionamento, por mais que isso possa significar uma oscilação excessiva na outra condição.

### C.2.3 Temperatura de entrada do calorímetro

Para o método de determinação da capacidade de refrigeração que emprega o balanço energético em um calorímetro é importante manter as con-

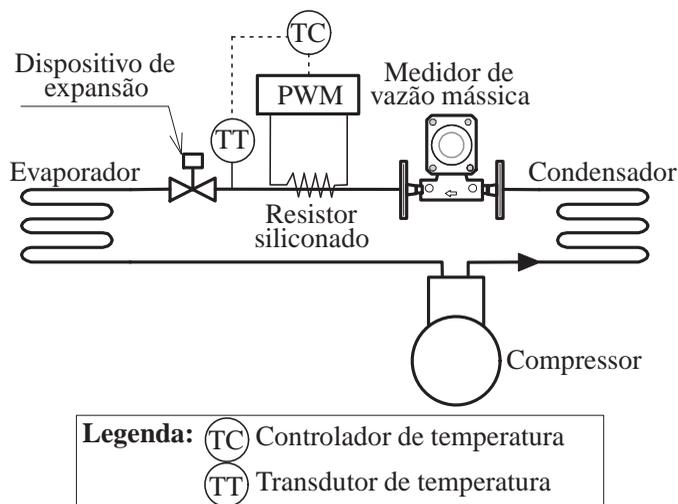


Figura 56: Esquema geral da malha de controle da temperatura de entrada do calorímetro

dições na entrada e saída do calorímetro constantes e bem conhecidas. Não existe um valor definido em norma para a temperatura na entrada do calorímetro, porém é prática comum ser empregado o valor de  $32,2^{\circ}\text{C}$  tanto na entrada quanto na saída. A diferença entre as condições de entrada e saída é a pressão, que faz com que na entrada o fluido refrigerante esteja líquido e na saída ele se encontre vaporizado. A potência fornecida para a mudança de fase é medida e, a partir do conhecimento das características do fluido refrigerante, determina-se a capacidade de refrigeração.

A temperatura na entrada do calorímetro é medida com o uso de um termorresistor do tipo Pt100 inserido na tubulação de entrada através de um poço termométrico. Como o calorímetro envolve o evaporador e o dispositivo de expansão, a medição é realizada imediatamente antes do dispositivo de expansão. A atuação é realizada através de um resistor siliconado enrolado na tubulação localizado antes do ponto de medição da temperatura de entrada. Como ocorre nos demais resistores, um relé de estado sólido comandado por um *driver* PWM é empregado para determinar a potência equivalente dissipada no resistor. Uma representação esquemática da malha de controle é apresentada na figura 56.

A dinâmica da temperatura na entrada do calorímetro pode ser bem representada por um sistema de primeira ordem com atraso de 18s, ganho es-

tático de  $0,77^{\circ}\text{C}/\%$  e constante de tempo de 120s. O controlador empregado é do tipo proporcional-integral (PI).

#### C.2.4 Temperatura de saída do calorímetro

Assim como ocorre na temperatura de entrada do calorímetro, não existe um valor estabelecido em norma para a referência da condição de ensaio, todavia é comum que seja adotado o valor de  $32,2^{\circ}\text{C}$ . Essa escolha é feita por questão de comodidade, uma vez que para minimizar perdas térmicas a temperatura do ambiente do calorímetro deve estar equalizada com a temperatura do fluido secundário. Assim, escolhe-se uma temperatura mais alta que a temperatura do laboratório para a saída para garantir que a temperatura do fluido secundário estará também acima da temperatura do laboratório. Isso dispensa necessidade de resfriamento para controle da temperatura do ambiente dentro do qual o calorímetro é posicionado.

A temperatura de saída do calorímetro é medida na tubulação de saída, pelo lado de fora do calorímetro, com o uso de um termorresistor do tipo Pt100 posicionado em um poço termométrico. A atuação é feita por dois resistores encapsulados conectados em série que ficam imersos no fluido secundário do calorímetro. A potência dissipada nos resistores pode ser ajustada através de uma fonte de corrente contínua (CC), que pode ser comandada remotamente por um sistema de aquisição. Uma representação esquemática do sistema de controle é apresentada na figura 57.

Apesar de a exigência normativa de tolerância ser de  $\pm 3^{\circ}\text{C}$  para as temperaturas [12], é típico encontrar na indústria uma tolerância de  $\pm 0,3^{\circ}\text{C}$  para a temperatura de saída do calorímetro. Isso se deve à importância que essa grandeza apresenta no resultado final do ensaio. Pelo método A de medição, a capacidade de refrigeração pode ser determinada em função da potência elétrica fornecida ao interior do calorímetro. Como é justamente essa potência que é empregada como grau de liberdade pelo controlador para ajuste da temperatura na saída do calorímetro e a modelagem empregada para medição considera condições quase estáticas, é importante manter a temperatura próxima ao valor de referência.

A modelagem dessa variável e a análise da relação existente com as demais variáveis da bancada são analisadas em detalhes nas referências [10] e [11] para um sistema com trocador a seco. De forma bastante resumida, existe uma pequena influência da temperatura do ambiente no qual o calorímetro é posicionado, porém devido ao isolamento do calorímetro o fluxo de calor do ambiente interno para o externo do calorímetro é muito baixo e o comportamento da temperatura de saída para variações na potência de alimentação pode ser bem representado por um integrador com atraso. Na realidade, o aquecimento ocorre de forma distribuída ao longo de toda a tu-

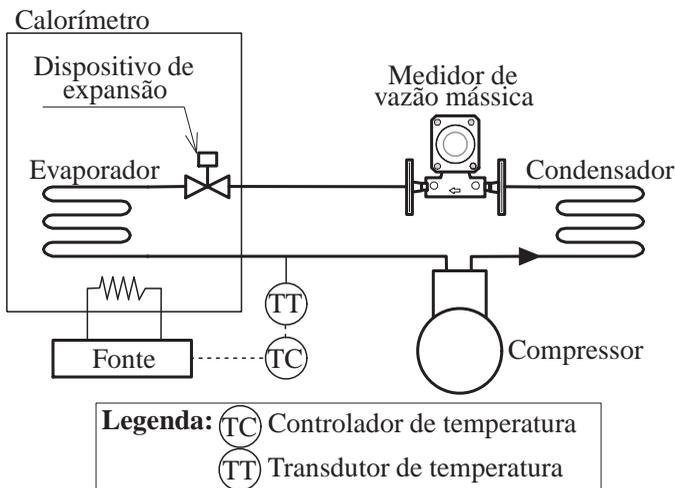


Figura 57: Esquema geral da malha de controle da temperatura de saída do calorímetro

bulação do evaporador e o atraso pode ser dividido em uma parcela de atraso efetivo causada pelo tempo necessário para o fluido atingir o sistema de medição e em uma parcela aparente, que na realidade é uma simplificação de um modelo de mais alta ordem. Todavia, por questões de simplicidade será adotado um modelo com atraso equivalente. Além disso, existe grande influência da pressão de sucção (entrada do compressor) na temperatura de saída. A explicação física detalhada para o fenômeno pode ser obtida em [11], porém é importante mencionar que essas variações se manifestam como alterações bastante rápidas no valor de temperatura de saída e, por esse motivo, é importante manter a pressão de sucção dentro de uma faixa de variação bastante estreita.

Apesar de a variável de interesse ser a temperatura de saída do calorímetro, notou-se durante a realização deste trabalho que realizar o controle com base na temperatura interna do calorímetro (temperatura do fluido secundário) leva a um atraso muito menor na resposta. Em regime permanente, entretanto, as temperaturas são iguais, salvo alguma perda para o ambiente. Como as temperaturas são equalizadas, as perdas são praticamente nulas e o esquema de controle funciona bem. Apesar de atualmente isso não ser realizado, poderia ser pensado em um esquema de controle com uma malha externa mais lenta que medisse a temperatura de saída e alterasse a referên-

cia da temperatura interna do calorímetro para que em regime permanente a temperatura de saída seguisse exatamente sua referência.

O comportamento dinâmico em torno do ponto de operação é de um sistema de primeira ordem com atraso, porém como as perdas são baixas, tanto o ganho estático quanto a constante de tempo são grandes. Dessa forma, como deseja-se que o comportamento em malha fechada seja muito mais rápido que o comportamento em malha aberta, é comum aproximar a resposta por um integrador com atraso. Considerando como variável de processo a temperatura interna do calorímetro, o ganho de velocidade encontrado foi  $K_v = 7,40 \times 10^{-5} \text{ W}/(\text{s}^\circ\text{C})$  e o atraso foi  $L = 45 \text{ s}$ . Com a temperatura medida na saída do calorímetro, o ganho de velocidade é semelhante, porém o atraso é de 195 s (mais de quatro vezes o atraso quando a medição é realizada no interior do calorímetro). Atualmente o controlador empregado é um preditor de Smith modificado para plantas integradoras de Mataušek e Micić [30].

### C.2.5 Temperatura do ambiente do calorímetro

Parte da energia entregue no interior do calorímetro é perdida para o ambiente externo através das paredes laterais, da base e do topo. Como forma de minimizar essas perdas, o calorímetro é colocado dentro de um ambiente com temperatura controlada e a referência da temperatura desse ambiente deve ser a temperatura medida no interior do calorímetro. Caso as duas temperaturas sejam iguais, a troca térmica cessa e toda a potência entregue, em regime permanente, é utilizada para aquecimento do fluido refrigerante que circula no evaporador. Como nem sempre é possível manter a diferença entre as temperaturas dentro de um limite bastante estreito, no cálculo da capacidade de refrigeração considera-se um termo proporcional à diferença de temperatura entre o interior do calorímetro e o ambiente no qual o calorímetro é posicionado. Todavia, essa aproximação linear do fenômeno introduz erros significativos quando as diferenças de temperatura são grandes.

A medição da temperatura no ambiente do calorímetro é realizada através da média dos valores medidos em três pontos distintos localizados em diferentes alturas dentro do ambiente, sendo utilizados termorresistores do tipo Pt100 em todos os pontos. A temperatura do interior do calorímetro, que é utilizada como referência para o controle da temperatura do ambiente do calorímetro, é determinada através da média de quatro termorresistores do tipo Pt100, também localizados em diferentes alturas dentro do calorímetro. As medições em diferentes alturas são importantes para caracterizar o comportamento médio das variáveis, uma vez que existe um gradiente de temperatura que varia em função da altura em que a medição é realizada.

Muitos painéis apresentam apenas um resistor localizado na parte inferior do ambiente do calorímetro para aquecê-lo. Nesse caso, só podem ser

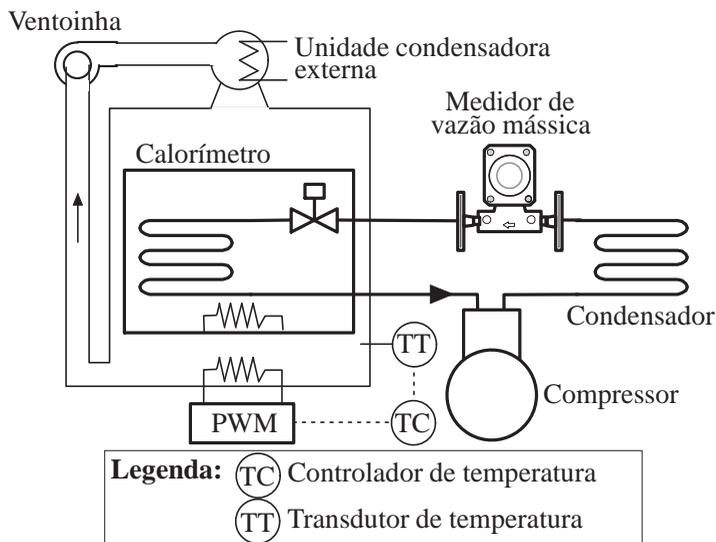


Figura 58: Esquema geral da malha de controle da temperatura ambiente do calorímetro

realizados ensaios com temperatura de saída do calorímetro acima da temperatura ambiente, ou as incertezas do ensaio serão grandes. O painel em estudo permite tanto o aquecimento quanto o resfriamento do ambiente do calorímetro, fazendo com que possam ser utilizadas temperaturas bastante baixas na saída do calorímetro. Para tanto, existe um circuito de refrigeração auxiliar (unidade condensadora) cujo evaporador está localizado em um trocador de calor posicionado na parte superior do ambiente do calorímetro. Além disso, há um resistor também inserido em um trocador de calor que permite o aquecimento do ar que é recirculado no ambiente do calorímetro. A capacidade de refrigeração da unidade condensadora não pode ser variada, então ou o ensaio é realizado com a unidade condensadora ligada a plena capacidade e a potência no resistor sendo variada ou somente o resistor atua. Em todos os casos, a potência dissipada no resistor pode ser ajustada através da razão cíclica de um PWM. Além disso, existe um ventilador para promover a circulação do ar pelo ambiente, como é representado na figura 58.

A variação admitida para a variável em relação à temperatura medida no interior do calorímetro é de  $\pm 1^\circ\text{C}$ . Além disso, para que o ensaio possa ser considerado como estando em regime, a temperatura no interior do calorímetro não pode estar fora do limite de  $\pm 0,5^\circ\text{C}$  em relação à média dos valores

medidos da variável nos últimos 60 min de ensaio.

O controlador atualmente empregado para a variável é do tipo PID. A referência a ser seguida não é uma constante, mas apresenta uma dinâmica relativamente lenta, que é satisfatoriamente seguida pelo controlador, com o erro ficando dentro da tolerância estabelecida para o ensaio antes de a temperatura interna do calorímetro chegar a seu valor de regime. A dinâmica da variável é bem representada por um sistema de primeira ordem, com ganho estático de  $0,65\text{ }^{\circ}\text{C}/\%$ , constante de tempo de 650 s e atraso de 70 s.

### **C.2.6 Temperatura do ambiente do compressor**

A condição de ventilação e temperatura à qual o compressor em ensaio é submetido altera significativamente o resultado do ensaio de eficiência energética. Uma velocidade de circulação do ar maior ou uma temperatura reduzida no ambiente aumentam a dissipação do calor gerado com o funcionamento do compressor, o que favorece um aumento da capacidade de refrigeração. Assim, para que produtos possam ser comparados, existem condições estabelecidas em norma [12] para a temperatura no ambiente onde o compressor em ensaio é posicionado e para a velocidade de circulação do ar na região do compressor. Para facilitar o controle das condições ambientais, o compressor é ensaiado dentro de um ambiente termicamente isolado do laboratório e com circulação forçada de ar.

A temperatura no ambiente do compressor é medida através da média de três termorresistores de platina do tipo Pt100 localizados de forma distribuída pelo ambiente do compressor. A atuação é realizada de forma semelhante ao que ocorre no ambiente do calorímetro, com uma unidade condensadora e um resistor. No caso do ambiente do compressor, como o compressor pode atingir temperaturas da ordem de  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  durante o ensaio, a unidade condensadora fica permanentemente ligada e a potência dissipada no resistor é regulada através da razão cíclica de um PWM. Uma representação esquemática da malha de controle é apresentada na figura 59. A velocidade de circulação do ar é medida uma única vez com auxílio de um anemômetro externo e ajustada para atingir o valor desejado. Depois disso a malha da velocidade de circulação de ar permanece aberta durante o ensaio.

As referências de temperatura e velocidade variam de acordo com a condição desejada para o ensaio. Nos ensaios de pesquisa e desenvolvimento, podem ser testadas condições extremas ou condições semelhantes às que serão encontradas na aplicação do compressor. Todavia, ensaios para geração de dados de catálogo e para aprovação de lotes são realizados na temperatura de  $32,2\text{ }^{\circ}\text{C}$  (ou  $32\text{ }^{\circ}\text{C}$  para o mercado europeu [115]) e velocidade de  $0,2\text{ m/s}$ . Admite-se uma variação de  $\pm 1\text{ }^{\circ}\text{C}$  na temperatura e como a velocidade do ar não é variada e nem medida durante o ensaio não há uma tolerância definida

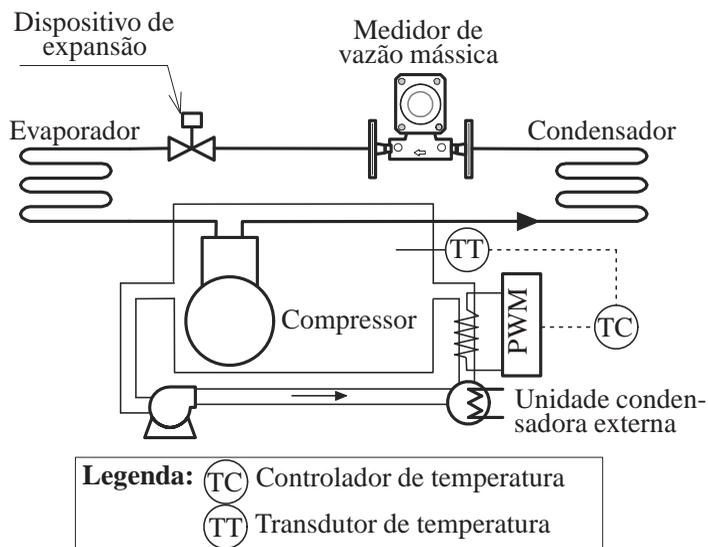


Figura 59: Esquema geral da malha de controle da temperatura ambiente do compressor

para essa variável.

Da forma como encontra-se hoje a bancada, a unidade condensadora está superdimensionada para o resistor empregado. Assim, para atingir a condição de ensaio, o sistema opera muito próximo do limite superior de 80% da razão cíclica do PWM imposto para garantir a integridade física do resistor. Nas situações nas quais a bancada é iniciada fria, o resistor fica saturado por cerca de três horas e meia até que a condição no ambiente do compressor seja atingida. Nesse sentido, o emprego de uma técnica anti-*windup* se faz necessária para evitar comportamentos indesejados. Nos próximos meses será alterada a carga de fluido refrigerante na unidade condensadora como forma de diminuir sua capacidade de refrigeração, fazendo com que seja necessária uma potência menor para aquecimento do ambiente.

Em torno do ponto de operação, o sistema se comporta como um sistema de segunda ordem com um zero e atraso de transporte. Um dos polos é mais rápido que o par polo-zero restante e, dessa forma, a resposta apresenta um comportamento característico de primeira ordem no início com uma deriva mais lenta para o valor de regime permanente. O modelo identificado através de respostas ao degrau e o emprego da técnica de mínimos quadrados (para detalhes do emprego do método para sistemas com atraso, sugere-se a leitura de [11]) é dado por

$$0,4226 \frac{5950s + 1}{(1115s + 1)(11825s + 1)} e^{-111s}.$$

O controle atualmente é realizado por um PID ajustado manualmente de forma a conseguir rejeitar a perturbação imposta pelo aquecimento da carga do compressor durante o ensaio sem que a temperatura do ambiente ultrapasse os limites de tolerância definidos em norma [12].

### C.2.7 Pressão de entrada do compressor

A pressão na entrada do compressor, ou pressão de sucção, é uma das variáveis mais críticas para definição da condição de ensaio. Essa pressão está intimamente relacionada com a pressão de evaporação no circuito, uma vez que a pressão na entrada do compressor é a mesma que é encontrada na saída do calorímetro, a menos da perda de carga encontrada na tubulação, que possui valores típicos de dezenas de milibar [11]. Pequenas alterações na pressão de sucção podem ser suficientes para alterar bastante a condição de ensaio e, conseqüentemente, o comportamento de muitas das variáveis de interesse. Dessa forma, uma das prioridades do controle no ensaio de desempenho deve ser manter a pressão de sucção dentro de uma faixa bastante estreita de valores. Por norma a variação aceitável é de  $\pm 1\%$  do valor medido, porém quanto

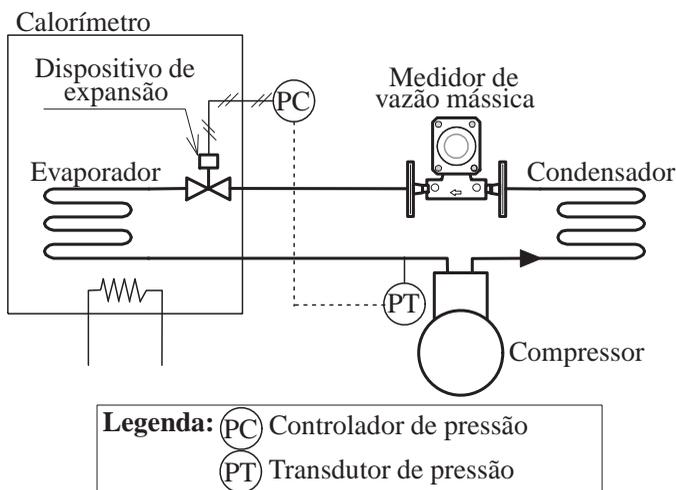


Figura 60: Esquema geral da malha de controle da pressão de entrada do compressor

menor for essa variação, melhor será a qualidade dos resultados.

A pressão é medida na tubulação de entrada do compressor através de uma tomada de pressão perpendicular à direção de escoamento do fluido refrigerante conectada em um transmissor absoluto de pressão com saída digital. A atuação é realizada diretamente no dispositivo de expansão, que no caso da bancada de avaliação de desempenho é uma válvula com ajuste fino e linear da perda de carga. Como ilustrado na figura 60, o sinal elétrico do controlador na faixa de (0 a 10) V é convertido em um sinal pneumático de (0 a 6) bar, que aciona a válvula.

Ensaio em torno do ponto de operação da condição de *check-point* indicaram um comportamento predominante de primeira ordem com atraso. A dinâmica da variável é muito rápida quando comparada com o período de amostragem escolhido para o ensaio, então o controlador opera muito mais como um regulador de nível mais alto que busca reduzir os efeitos de perturbações causadas por variações de temperatura, que apresentam dinâmicas lentas. Com período de amostragem de 1 s, encontrou-se um modelo com ganho estático  $K_p = 0,4625 \text{ V/bar}$ , um período de atraso e constante de tempo também de um período. Como o foco não é rejeição de perturbações instantâneas na malha de pressão, atualmente um controlador PID com período de amostragem de 1 s atende às necessidades. Um detalhe bastante importante

nessa malha de controle é que ela necessita de transferência *bumpless*, pois no início do ensaio a operação é manual em função do valor histórico da condição de ensaio e, passada a fase inicial do transitório do ensaio, o controlador é chaveado para o modo automático de operação.

### C.2.8 Pressão de saída do compressor

A pressão na saída do compressor, ou pressão de descarga, está associada à condição de condensação do sistema de refrigeração. Isso se deve ao fato de em um sistema o condensador tipicamente estar localizado logo na saída do compressor, sem elementos intermediários que possam causar grandes perdas de carga. Assim, ao variar a pressão de descarga do compressor em ensaio se está variando a condição de temperatura de condensação que seria percebida por ele caso fosse instalado em um sistema (pelo fato de grande parte dos fluidos refrigerantes se tratarem de substâncias puras, na mudança de fase os valores de pressão e temperatura permanecem constantes). Dessa forma, também é importante manter a pressão de descarga dentro de limites estreitos em torno do valor de operação definido. Por norma, essa tolerância é de  $\pm 1\%$  do valor medido [12].

Variações na pressão de descarga tipicamente não influenciam tanto as demais variáveis do ensaio quanto variações na pressão de sucção [9]. Além disso, por se tratar de uma pressão com magnitude bem maior que a de sucção, uma mesma variação percentual se reflete em uma faixa absoluta de pressão muito mais ampla. A combinação dos dois fatores anteriores se reflete em uma menor exigência na dinâmica de controle da pressão de saída do compressor em comparação com o que é exigido na pressão de entrada do compressor. Do ponto de vista de controle isso é bom, pois o controle da pressão de descarga atuando na válvula de descarga só é possível caso a pressão de sucção seja mantida constante através de alteração na válvula de sucção. Esse fenômeno é detalhado na referência [84].

Assim como ocorre na pressão de sucção, a medição da pressão de descarga também é realizada através de uma tomada de pressão perpendicular à direção de escoamento do fluido refrigerante conectada em um transmissor absoluto de pressão com saída digital. A maior diferença é que o transdutor empregado, além da saída digital, apresenta uma saída analógica em tensão proporcional ao valor medido. Essa saída analógica é empregada para medição da frequência rotacional do compressor em ensaio através do estudo do efeito da pulsação de pressão no espectro de frequência do sinal [123]. A atuação é realizada através de uma válvula do tipo agulha acoplada a um motor elétrico CC que pode ser acionado em ambos os sentidos. Um esquema geral da malha de controle é apresentado na figura 61.

Como a atuação no motor é proporcional à sua velocidade, o compor-

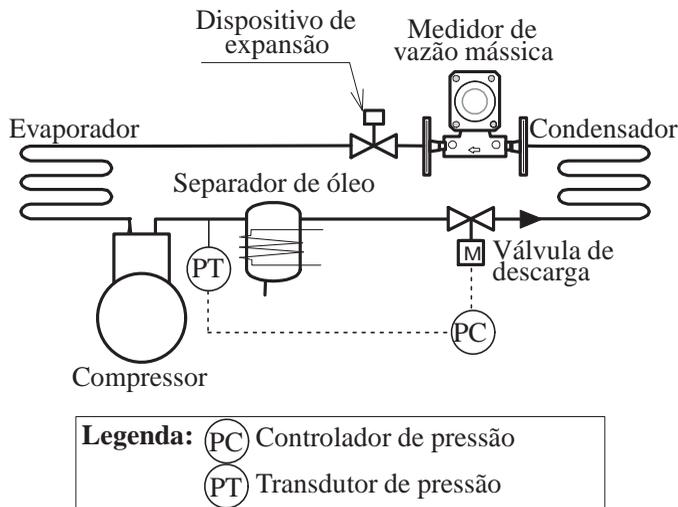


Figura 61: Esquema geral da malha de controle da pressão de saída do compressor

tamento da planta possui ação integral. Para efeitos de modelagem, empregou-se a posição da válvula medida através de um encoder absoluto acoplado ao eixo da mesma e posteriormente adicionou-se a dinâmica integradora (integrador e ganho de velocidade) que relaciona a tensão do motor com a posição da válvula. Apesar de existir a possibilidade de se medir a posição da válvula, atualmente essa informação não é utilizada pelo controlador, que é proporcional-derivativo (PD).

Para um ensaio realizado em torno do ponto de operação definido por  $55^{\circ}\text{C}$  de temperatura de condensação, encontrou-se um modelo de primeira ordem com atraso que relaciona a pressão e a posição da válvula. O modelo apresenta um ganho estático de  $-0,001038\text{ bar}/^{\circ}$ , uma constante de tempo de  $51\text{ s}$  e um atraso de  $6\text{ s}$ . O modelo que relaciona a razão cíclica do PWM com a posição em graus do motor de descarga é bem aproximado por um integrador com ganho de velocidade  $K_v = 1,4452^{\circ}/(\text{s}\%)$ . Com a união dos dois modelos encontra-se a relação entre a pressão e a razão cíclica do PWM, dada por

$$P(s) = -\frac{0,0015e^{-6s}}{(51s + 1)s}.$$

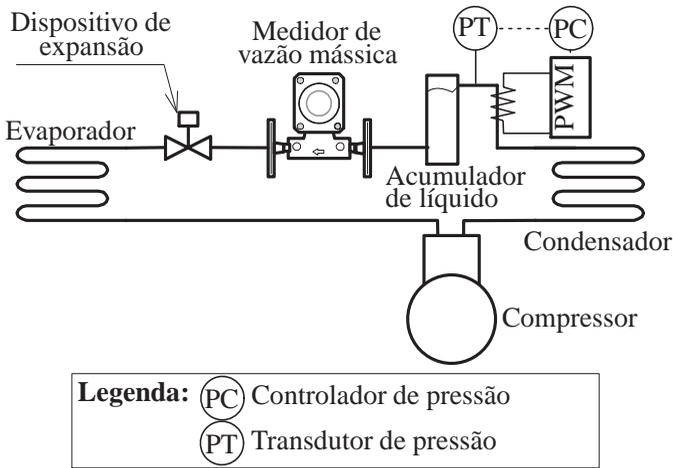


Figura 62: Esquema geral da malha de controle da pressão de saída do condensador

### C.2.9 Pressão na saída do condensador

A pressão na saída do condensador não é uma variável que define a condição de ensaio e também não há qualquer especificação em norma para o comportamento dessa variável. Todavia, observou-se que com o controle adequado da pressão na região intermediária do circuito (entre a saída do condensador e a entrada do dispositivo de expansão) era possível atingir a condição de ensaio de forma mais rápida, além de se garantir um comportamento mais amortecido de outras variáveis, como a própria pressão de entrada do compressor, por exemplo. Assim, optou-se por elevar a pressão na saída do condensador através de um aquecimento do fluido que acaba de ser resfriado. Como esse aquecimento ocorre antes de um acumulador de líquido, o fluido refrigerante liquefeito na saída do acumulador apresentará uma pressão mais elevada, o que elevará sua temperatura de evaporação. Sendo assim, à temperatura ambiente o fluido refrigerante estará com um nível de subresfriamento maior, o que aumenta o amortecimento no comportamento das pressões. O posicionamento do resistor siliconado empregado para aquecimento, bem como do transdutor de pressão empregado e do acumulador de líquido, é apresentado de forma esquemática na figura 62.

Tipicamente na realização dos ensaios, o valor de referência da pressão na saída do condensador é assumido como um percentual da referência da pressão de saída do compressor. Experimentalmente determinou-se que

valores na faixa de 90% a 95% da referência da pressão de saída do compressor levam a bons resultados. O controlador empregado é do tipo PID e o sinal de controle é a razão cíclica do PWM conectado a um relé de estado sólido que permite ou não a alimentação do resistor siliconado enrolado na tubulação. No início do ensaio é necessário aquecer bastante o circuito para acelerar o ensaio, porém depois de a bancada como um todo estar quente, o próprio calor gerado pelo ensaio é capaz de aquecer o fluido para garantir a condição de pressão e a potência necessária no resistor cai muito e tende a zero.

Além do resistor para auxiliar na elevação da pressão, emprega-se uma válvula que regula a vazão de água fria no condensador em função da pressão na saída do mesmo. Essa válvula possui ajuste manual e deve ser alterada em função da condição de ensaio desejada, especialmente em função da temperatura de condensação especificada para o ensaio. O comportamento da variável é aqui apresentado para uma condição de ensaio com um ajuste de válvula.

Como o resistor empregado necessita ser enrolado sobre ele mesmo para caber no comprimento de tubulação disponível, a potência fornecida tem que ser limitada a 70% de seu valor nominal para evitar danos ao isolamento de silicone existente ao redor do resistor. Quando a bancada é ligada fria, o sinal de controle permanece durante bom tempo saturado, exigindo algum tipo de estratégia anti-*windup* no controlador. Atualmente o controlador empregado é do tipo PID e sua sintonia foi realizada manualmente com base na resposta do sistema em malha fechada.

O modelo varia muito em função da carga de fluido refrigerante na bancada. Além disso, há o controle realizado pela válvula de água, que varia em função do ajuste da mesma. Em uma condição normal de operação a válvula é ajustada de forma a manter a pressão em torno do ponto desejado. Dessa forma, uma variação na razão cíclica do resistor de aquecimento praticamente não influencia na resposta do sistema. Em torno do ponto de operação, o comportamento da temperatura para variações na razão cíclica pode ser expresso por um sistema de primeira ordem com atraso. O ganho estático encontrado foi de 0,006 bar/%, a constante de tempo foi de 67 s e o atraso foi de 19 s.