Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Matemática

Introdução ao Cálculo Variacional

Antônio João

Orientador: Celso Melchiades Doria

Florianópolis

19 de março de 2006

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática

Curso de Matemática

Introdução ao Cálculo Variacional

Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como trabalho de conclusão de curso, para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Antônio João

Florianópolis

19 de março de 2006

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 36/CCM/05.

Profª. Carmen Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Depto. de Matemática\ UFSC (Orientador)

Prof. Dr. Antônio Carlos Gardel Leitão
Depto. de Matemática\ UFSC

Eliezer Batista

Prof. Dr. Eliezer Batista
Depto. de Matemática\ UFSC

Agradecimentos

Ao professor Celso Melchiades Doria pela amizade, competência e dedicação durante a orientação deste trabalho.

A todos aqueles professores com os quais tive contato durante esses anos e que foram fundamentais para minha formação.

Aos meus grandes amigos de curso e de vida: Rui, Roberto, Márcio, Raquel, Velani, Bruna e em especial ao pessoal do ônibus escolar de Garopaba com quem convivi durante esse tempo: Raquel Ko Freitag, Carlinhos, Moisés e Asteroide.

Aos meus pais, meus irmãos e a todos os meus familiares que sempre me apoiaram e me incentivaram durante todos esses anos.

Às funcionárias Silvia e Iara da secretaria do Curso pela atenção e empenho em ajudar sempre que necessário.

A meus pais.

Sumário

Introdução

Desde a antiguidade os antigos gregos já tinham conhecimento de que o círculo é a curva de perímetro dado que possui área máxima, e que Galileo (1564-1642), em 1630, formulou o problema da braquistócrona (do grego Brachystos = brevíssimo + Chronos = tempo) parcialmente, comparando o tempo de descida de uma partícula num seguimento circular com o tempo de descida da mesma num polígono inscrito. Em 1686, Newton (1642-1727) propôs um problema próprio, o da superfície de revolução de resistência mínima, e enunciou sem provar, a propriedade característica da curva.

O desenvolvimento sistemático da teoria do cálculo das variações realmente começou quando John Bernoulli (1667-1748) propôs o problema da braquistócrona em 1696. O método de solução seu dependia do método usado para determinar o caminho de um raio de luz em um meio com indíce de refração variável. Porém o método usado no mesmo ano por James Bernoulli (1654-1705) para resolver o problema da braquistócrona e, em 1701, à um problema isoperimétrico que ele havia proposto numa carta a seu irmão, era mais eficaz.

Euler (1707-1783) foi aluno de John Bernoulli em Basle e estava familiarizado com o trabalho de ambos, John e seu irmão. Ele reelaborou o método de James Bernoulli e, em 1774, resumiu numa biografia o resultado que tinha obtido para muitos problemas. Dentre as muitas coisas importantes que Euler desenvolveu está a equação diferencial $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$. Porém, uma dificuldade surgia quando se utilizavam os métodos de Euler, os problemas de grande dificuldade se tornavam mais complicados.

Lagrange (1736-1813), entre os anos de 1762 e 1770, elaborou um método analítico, o qual tornou possível deduzir fácilmente as equações diferenciais de mínimos de curvas de problemas do cálculo das variações. Euler prontamente adotou o método e a notação de Lagrange chamando $\delta y(x)$ de uma variação da função $y(x)$, e de δI a variação da integral. Foi quando a teoria estudada foi denominada *Cálculo das Variações*. Lagrange formulou esta nova análise e aplicou a problemas mais gerais, com extremos variáveis encontrando condições as quais deveriam ser satisfeitas para curvas fixas. Legendre (1752-1833) empreendeu-se na análise da chamada segunda variação δ^2 de uma integral, ou seja, a de encontrar um critério com o qual poder-se-ia distinguir um máximo de um mínimo. Por uma transformação a qual ele não justificou plausivelmente, ele encontrou as condições $f_{y'y'} \geq 0$ para um mínimo e $f_{y'y'} \leq 0$ para um máximo.

Desde então a teoria do cálculo das variações tornou-se muito importante em diversas áreas da Matemática Pura e da Matemática Aplicada, da Física e da Engenharia. Dizemos que o cálculo das variações é a versão em dimensão infinita de otimização. A analogia entre as variações de Lagrange e as equações diferenciais ordinárias do cálculo atraiu o interesse de muitos estudantes para o assunto, os quais elaboravam soluções com duvidoso rigor. Em 1837, 50 anos após a descoberta das condições de Legendre, Jacobi (1804-1851) deu um grande passo em favor do cálculo das variações. Numa pequena obra contendo seus resultados que quase não continham provas ou somente sugestões, Jacobi reexaminou a transformação da segunda variação de Legendre e descobriu os casos em que o método falha. O resultado foi a descoberta do conceito de ponto conjugado.

Até a última metade século XIX, a validade dos métodos e o rigor matemático das publicações que surgiam sobre o cálculo das variações frequentemente estava sobre dúvida. A incerteza estava nos requerimentos da análise e da lógica. Weirstrass (1815-1897) tinha grande influência no desenvolvimento do pensamento preciso da teoria do cálculo das variações como em outros importantes domínios da matemática. Weierstrass formulou seus problemas com grande atenção encontrando uma nova condição necessária para a existência de valores extremos, distinguindo claramente as condições necessárias das condições suficientes para a existência de um extremo e foi o primeiro a dar a prova sobre a condição suficiente para a existência de um valor extremo. Ele deu a seus problemas uma compreensão mais geométrica, adotando representações paramétricas para suas curvas.

Capítulo 1

A Primeira Variação do Funcional

O objetivo inicial deste capítulo é introduzir o conceito de funcional para então estender a idéia de valores estacionários de funções de uma variável real para funcionais.

1.1 Diferenciação de funções de uma variável

A teoria de máximos e mínimos de funções de uma variável real definidas num subconjunto dos números reais, onde para cada elemento desse subconjunto associa-se um número real, consiste em encontrar elementos no domínio em que a função está definida para o qual a função assume o maior ou menor valor neste domínio, valores estes que chamamos de valores extremos ou pontos críticos da função. A condição necessária para a ocorrência de um valor extremo é a de que a primeira derivada se anule, ou seja

$$f' = 0.$$

Ao examinarmos a definição de diferenciabilidade de funções de uma variável, temos que uma função f é diferenciável no ponto x_0 se existe um número $f'(x_0)$, a que chamamos de derivada de $f(x)$ em x_0, tal que:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

Se expressarmos o numerador como

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

temos

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} [\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)] = 0$$

Definimos $\epsilon(\Delta x)$ como sendo o erro na aproximação de $f'(x_0)$ por $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, isto é

$$\epsilon(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)$$

onde $lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$.

Assim, uma função f de uma variável é diferenciável em x_0 se existe um número $f'(x_0)$ tal que Δf pode ser escrita na forma:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x$$

onde ϵ é uma função de Δx tal que $\epsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$ e $\epsilon = 0$ se $\Delta x = 0$.

A partir daí podemos definir o número $f'(x_0)$ como sendo a derivada de $y = f(x)$ em x_0 se e somente se

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Equivalentemente $f'(x_0)$ é a derivada de $y = f(x)$ em x_0 se, e somente se, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x$$

para todo e qualquer $\mid \Delta x \mid < \delta$, onde $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\epsilon(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

1.2 Espaços vetoriais normados

Antes de introduzirmos a definição de variação de funcionais iremos definir espaço linear.

Definição 1.1 *Um conjunto S é dito um espaço vetorial sobre um corpo K, se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *Se $x, y \in S$, então a soma $x + y$, é definida e $x + y \in S$.*

2. *Para quaisquer* $x, y \in S$, $x + y = y + x$.

3. *Para quaisquer* $x, y, z \in S$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

4. *Há um elemento em* S, *denotado por* 0, *para o qual* $x + 0 = x$ *para qualquer* $x \in S$.

5. *Para cada* $x \in S$, *existe um elemento em* S, *denotado por* $(-x)$, *tal que* $x+(-x) = 0$.

6. *Para qualquer escalar* $k \in K$ *e quaisquer* $x, y, \in S$, $k(x + y) = kx + ky$.

7. *Para quaisquer escalares* $a, b \in K$ *e qualquer* $x \in S$, $(ab)x = a(bx)$.

8. *Para quaisquer escalares* $a, b \in K$ *e qualquer vetor* $x \in S$, $(a + b)x = ax + bx$

9. $1x = x$, *para qualquer* $x \in S$.

Definição 1.2 *Seja* S *um espaço linear sobre os reais* $\mathbb{R}$. *Um funcional* $||x||$ *definido em* S *é chamado uma norma de* $x \in S$ *se possui as seguintes propriedades:*

1. $|| x ||> 0$ *para todo* $x \neq 0$, $x \in S$.

2. $|| x ||= 0$ *se* $x = 0$.

3. $|| ax ||=| a ||| x ||$ *para todo* $x \in S$, $a \in \mathbb{R}$.

4. $|| x + y ||\leq|| x || + || y ||$ *(desigualdade triângular)*.

Definição 1.3 S *é um espaço vetorial normado sobre* $\mathbb{R}$ *se sobre* S *existe uma norma* $|| \ . \ || : S \to \mathbb{R}$ *definida.*

Definição 1.4 *A bola aberta com centro em* $f \in S$ *e raio* ϵ *é o conjunto*

$$B_\epsilon(f) = \{g \in S| \ ||g - f|| < \epsilon\}$$

Definição 1.5 *Um conjunto* $Y \subset S$ *é aberto se para todo ponto* $t \in S$ *existe um* $\epsilon > 0$ *tal que,* $B_\epsilon(f) \subset Y$. *Neste caso, dizemos que* Y *é um subconjunto aberto de* S

Desta maneira se $y_0 \in Y$ e $h \in S$, então $(y_0 + h) \in Y$ desde que $| \ h \ |< \delta$ para algum $\delta > 0$, e $I(y_0 + h)$ esteja definido.

1.3 Primeira variação do funcional

Salientamos que não vamos lidar com funções cujo domínio esteja contido nos números reais, mas sim com uma classe de funções cujo domínio são outras funções, a essa classe de funções chamamos de funcionais.

Assumindo que $I(y)$ é definido num subconjunto aberto Y de um espaço linear normado S, então de modo análogo a função de uma variável,

$$I(y_0 + h) - I(y_0) = L(h) + \epsilon(h),$$

onde $L(h)$ é chamado de variação do funcional e $L(h)$ é um funcional linear de h com $\lim_{||h|| \to 0} \dfrac{\epsilon(h)}{||h||} = 0$ sendo $L(h)$ é designado por $\delta I(h)$, ou seja,

$$\delta I = \frac{d}{dt} I(y_0 + th)|_{t=0} = L(h) \tag{1.2}$$

Definição 1.6 *O funcional $I : S \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $y_0 \in S$ se existe um funcional linear $\delta I : S \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(y_0 + th) - I(y_0)}{t} = \delta I_{y_0}(h), \ \forall \ t \in \mathbb{R} e h \in S.$$

Demonstração 1.1 *Suponha que $\delta I(h)$ exista. Então*

$$\delta I(h) = \lim_{t \to 0} \frac{I(y_0 + th) - I(y_0)}{t} \tag{1.3}$$

portanto

$$\frac{I(y_0 + th) - I(y_0)}{t} = \delta I(h) + \epsilon(th) \tag{1.4}$$

onde $lim_{t \to 0} \epsilon(th) = 0$. Multiplicando ambos os lados da equação 1.4 por t temos

$$I(y_0 + th) - I(y_0) = t\delta I(h) + t\epsilon(th)$$

como $\delta I(h)$ é homogênea temos que $t\delta I(h) = \delta I(th)$ e seja $th = k$, temos

$$I(y_0 + h) - I(y_0) = \delta I(h) + \epsilon_1(k)$$

onde $\epsilon_1(k) = t\epsilon(k)$. Portanto

$$\frac{\epsilon(tk)}{t} = \epsilon(tk) \to 0$$

com $t \to 0$. *E consequentemente*

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(y_0+th)-I(y_0)}{t} = \delta I(h)$$

Exemplo 1.1 *Vamos considerar o funcional* $I : \mathbb{R}, Y \subset S$

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \tag{1.5}$$

onde y possui primeira derivada contínua.

Então

$$\begin{aligned} I(y_0+th) &= \int_a^b F(x, y_0(x)+th(x), y_0'(x)+th'(x))dx \\ \delta I(h) &= \frac{d}{dt} I(y_0+th)|_{t=0} \\ &= \int_a^b \left[F_y(x, y_0(x), y_0'(x))h(x) + F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))h'(x)\right] dx. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Onde a equação 1.6 é a primeira variação do funcional 1.5.

1.4 Condição necessária para a existência de um valor extremo

Do mesmo modo que para funções de uma variável a condição de existência de um valor critíco ou valor extremo é a de que a primeira derivada se anule, veremos que para o caso de valor extremo de funcionais a condição será a de que a primeira variação se anule.

Teorema 1.1 *Se y_0 é um extremo de $I(y)$, então $\delta I(y_0) = 0$.*

Demonstração 1.2 *Suponha que y_0 é um ponto de mínimo. Seja $f(t) = I(y_0 + th)$; se $t > 0$ então*

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} > 0 \Rightarrow \delta I_{y_0}(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} > 0, \ \forall \ h \in S.$$

Se $t < 0$, analogamente,

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} < 0 \Rightarrow \delta I_{y_0}(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} < 0, \ \forall \ h \in S.$$

Portanto, $\delta I_{y_0}(h) = 0 \ \forall \ h \in S$, ou seja, $\delta I_{y_0} = 0$.

Desta forma se considerarmos o funcional

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

teremos que a condição para que o funcional possua um valor extremo é a de que a sua primeira variação se anule ou seja

$$\delta I(y) = \int_a^b \left[F_y h(x) + F_{y'} h'(x)\right] dx = 0$$

Capítulo 2

A equação de Euler-Lagrange

Vimos que a condição para a existência de um valor extremo para um funcional é a de que a primeira variação se anule, ou seja $\delta I(y) = 0$. Assim, se considerarmos o funcional

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \tag{2.1}$$

teremos como primeira variação

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(F_y(x, y(x), y_0'(x) \right) \eta(x) + F_{y'} \left((x, y_0(x), y_0'(x) \right) \eta'(x) \right] dx = 0,$$

onde a função $\eta(x)$ é diferenciável e $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Seja

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x) \right] dx \tag{2.2}$$

assumiremos que $\Phi(x)$ possui primeira derivada contínua, então efetuando uma integração por partes no segundo termo teremos

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \eta'(x) dx = \Psi(x)$$

segue que

$$\Psi(x) = \left[\eta(x) F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \right] \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx} F_{y'},$$

o primeiro termo se anula uma vez que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, portanto

$$\Psi(x) = - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) dx.$$

Logo

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))dx$$

e então

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x) - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x) \right] dx$$

Desta maneira

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \right) \eta(x)dx = 0 \tag{2.3}$$

Se escrevermos $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = M(x)$ teremos a seguinte equação,

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta(x)dx = 0 \tag{2.4}$$

Lema 2.1 (Lema fundamental do cálculo das variações) *Seja $M(x)$ uma função contínua num intervalo (x_0, x_1). Se $\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta(x)dx = 0$ para qualquer função arbitrária $\eta : (x_0, x_1) \to \mathbb{R}$ de classe C^2, com $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, então $M(x) = 0$ para qualquer valor de x no intervalo (x_0, x_1).*

Demonstração 2.1 *Suponha que exista $\xi \in (x_0, x_1)$ tal que $M(x) \neq 0$, tomamos então $M(x) > 0$. Pela continuidade de $M(x)$ podemos encontrar um subintervalo $\xi_0 < \xi < \xi_1$ contido em (x_0, x_1) de forma que $M(x)$ se mantenha positiva em qualquer parte dele. Considere*

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \textit{para } x_0 \leq x \leq \xi_0 \\ (x - \xi_0)^2(x - \xi_1)^2 & \textit{para } \xi_0 \leq x \leq \xi_1 \\ 0 & \textit{para } \xi_1 \leq x \leq x_1 \end{cases}$$

Assim, o produto $M(x)\eta(x)$ é positivo no subintervalo e nulo fora dele. Desta maneira,

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta(x)dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} M(x)(x - \xi_0)^2(x - \xi_1)^2 dx \tag{2.5}$$

Mas sabemos que a integral de uma função contínua e positiva é positiva , exceto quando o integrando se anula em qualquer parte. Logo, $\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta(x)dx > 0$ o que contradiz a hipótese. Portanto segue que $M(x) = 0$ para todo $x \in (x_0, x_1)$ e por continuidade, $M(x)$ se anula nos extremos do intervalo.

Ao aplicarmos o lema 2.1 na integral $\int_{x_0}^{x_1}(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\eta(x)dx = 0$, segue que

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{2.6}$$

a equação 2.6 é a chamada equação diferencial de Euler-Lagrange. Portanto, para encontrarmos o extremo de um funcional, devemos resolver a equação de Euler-Lagrange.

2.1 Soluções da equação de Euler

Em muitos casos, não é possível resolver a equação diferencial de Euler de maneira exata. Vejamos alguns casos onde a equação de Euler é integrável.

2.1.1 Primeiro caso

O primeiro caso é aquele em que F depende somente de x e y'. Neste caso $F = F(x, y')$ e então a equação de Euler se reduz a $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$. Segue que

$$F_{y'}(x, y') = C \tag{2.7}$$

Exemplo 2.1 *Ache os extremos do funcional* $\int_{x_0}^{x_1}(xy' + y'^2)dx$.

Como F depende somente de x e y', a equação de Euler $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ se reduz a $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ e então

$$F_{y'} = C \tag{2.8}$$

Logo seja $F = xy' + y'^2$ temos que $F_{y'} = x + 2y'$ assim de 2.8 temos

$$x + 2y' = C \Rightarrow y' = C_1 - \frac{x}{2}$$

e uma integração nos dá

$$y = C_1 x - \frac{x^2}{4} + C_2 \tag{2.9}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração que podem ser encontradas a partir das condições de valores iniciais.

2.1.2 Segundo caso

O segundo caso é aquele onde F depende somente de y e y', ou seja $F = F(y, y')$. Assim, a equação de Euler será

$$\Phi = F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{2.10}$$

Que escrita na forma explicita tem a forma

$$\Phi = F_y - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0 \tag{2.11}$$

Se multiplicarmos ambos os lados de 2.11 por y' e observarmos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) &= y'F_y + y''F_{y'} - y''F_{y'} - y'^2F_{yy'} - y'y''F_{y'y'} \\ &= y'F_y - y'^2F_{yy'} - y''y'F_{y'y'} \\ &= y'(F_y - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'}) \\ &= y'\Phi\end{aligned}$$

Então $\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0$ ou seja

$$F - y'F_{y'} = C \tag{2.12}$$

Exemplo 2.2 *Determine os extremos do funcional* $I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$.

Sendo $F(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$, a derivada parcial de F em relação a y' será:

$$F_{y'} = \frac{1}{2}\frac{2y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}$$

e como F depende somente de y e y', a equação de Euler para este problema é dada por

$$F - y'F_{y'} = C$$

Logo

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow \frac{1+y'^2-y'^2}{y\sqrt{1+y^2}} = C$$

Ou seja

$$\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = C \tag{2.13}$$

Se fizermos $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \mathrm{sen}(\theta) \Rightarrow y' = \cot(\theta)$. A equação 2.13 fica

$$\frac{1}{y}\mathrm{sen}(\theta) = C \Rightarrow y = C_1\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.14}$$

diferenciando obtemos

$$dy = C_1 \cos(\theta) d\theta$$

mas

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

Obtemos então

$$dx = \frac{dy}{y'} \Rightarrow dx = \frac{C_1 \cos(\theta) d\theta}{\cot(\theta)}$$

ou seja

$$dx = C_1\mathrm{sen}(\theta) d\theta \tag{2.15}$$

Fazendo uma integração na equação 2.15 temos

$$\int dx = \int C_1\mathrm{sen}(\theta) d\theta \tag{2.16}$$

$$x = -C_1 \cos(\theta) + C_2 \tag{2.17}$$

e da equação 2.14

$$y = C_1\mathrm{sen}(\theta)$$

Logo as equações 2.17 e 2.14 nos dão

$$(x - C_2)^2 = C_1^2 \cos^2(\theta)$$

e

$$y^2 = C_1^2\mathrm{sen}^2(\theta)$$

e então

$$(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2 \cos^2(\theta) + C_1^2\mathrm{sen}^2(\theta)$$

$$(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2 \tag{2.18}$$

Exemplo 2.3 *Achar os valores extremos do funcional* $\int_{x_0}^{x_1} \frac{1+y^2}{y'^2} dx$.

Seja $F(y,y') = \frac{1+y^2}{y'^2}$. Como F depende somente de y e y' a equação de Euler para o funcional fica $F - y'F_{y'} = C$ e temos ainda que $F_{y'} = \frac{-2(1+y^2)}{y'^3}$

Desta forma temos

$$\begin{aligned} \frac{1+y^2}{y'^2} + \frac{2y'(1+y^2)}{y'^3} &= C \\ \frac{1+y^2+2(1+y^2)}{y'^2} = C \end{aligned}$$

Logo

$$3(1+y^2) = y'^2 C$$

e, consequentemente

$$y'^2 = C_1(1+y^2) \Rightarrow y' = C\sqrt{1+y^2}$$

Fazendo $y = \operatorname{senh}(\theta) \Rightarrow dy = \cosh(\theta)d\theta$, segue da identidade $\cosh(\theta) = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(\theta)}$ que $y' = C\cosh(\theta)$. Onde

$$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow dx = \frac{\cosh(\theta)}{C\cosh(\theta)}d\theta$$

Então

$$dx = Cd\theta$$

Ao integrarmos, obtemos

$$x = C\theta + C_1$$

de onde $\theta = \frac{x-C_1}{C}$.

Logo, encontramos como solução

$$y = \operatorname{senh}\left(\frac{x-C_1}{C}\right) \Rightarrow y = \operatorname{senh}(C_2 x - C_3)$$

Onde C, C_1, C_2 e C_3 são constantes de integração, que podem ser obtidas a partir das condições de contorno.

Exemplo 2.4 *Determine os extremos do funcional* $\int_{x_0}^{x_1}[y^2 + y'^2 - 2ysen(x)]dx$

Temos que $F = (y^2 + y'^2 - 2y\operatorname{sen}x)$, então escrevendo a equação de Euler $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ na forma explícita teremos

$$F_y - F_{xy'} - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0 \tag{2.19}$$

Onde

$$\begin{aligned} F_y &= 2y - 2\text{sen}\, x, \\ F_{xy'} &= 0, \\ F_{yy'} &= 0, \\ F_{y'y'} &= 2. \end{aligned}$$

Desta forma, substituindo na equação 2.19 obtemos

$$2y - 2\text{sen}\, x - 2y'' = 0$$

e por conseguinte,

$$y'' - y = -\text{sen}\, x \tag{2.20}$$

Para encontrarmos a solução desta equação diferencial devemos encontrar a solução particular e a solução homogênea.

Ao supormos que $y = e^{rx}$ é solução de 2.20, temos

$$y' = re^{rx} \qquad\qquad y'' = r^2 e^{rx}$$

Fazendo $x = 0$ teremos a equação característica

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$$

Portanto, a solução da equação diferencial homogênea é

$$y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \tag{2.21}$$

Agora, temos que obter uma solução particular e para isto seja

$$y_p = A\cos x + B\text{sen}\, x \tag{2.22}$$

cujas derivadas são;

$$y_p' = -A\text{sen}\, x + B\cos x \tag{2.23}$$

$$y_p'' = -A\cos x - B\text{sen}\, x \tag{2.24}$$

Substituindo as equações 2.23 e 2.24 na equação 2.22 obtemos

$$y_p' - y_p = -\text{sen}\, x$$

e então

$$
\begin{aligned}
-A\cos x - B\text{sen}\, x - A\cos x - B\text{sen}\, x &= -\text{sen}\, x \\
-2A\cos x - 2B\text{sen}\, x &= -\text{sen}\, x
\end{aligned}
$$

Logo $A = 0$ e $B = \frac{1}{2}$. Desta forma, a solução geral para a equação 2.20 é

$$
\begin{aligned}
y &= y_c - y_p \\
y &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\text{sen}\, x
\end{aligned}
$$

2.2 Equação de Euler para casos mais gerais

2.2.1 Funcionais com mais de uma variável

O problema de se obter as condições necessárias para que uma certa integral seja estacionária pode ser extendido para o caso de n funções $y_i = y_i(x)$, com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Desta forma, a integral a qual queremos encontrar os valores extremos é

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx \tag{2.25}$$

onde F possui segunda derivada contínua no intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$. O problema exige agora que dentre todas as funções $y_i(x)$, devamos selecionar uma $y_i(x) = u_i(x)$, para a qual a integral 2.25 seja estacionária.

Considerando a família das funções

$$y_i(x) = u_i(x) + \epsilon\eta_i(x) \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.26}$$

onde $\eta_1(x), \eta_2(x), \ldots, \eta_n(x)$ são n funções contínuas e possuem as primeiras e segundas derivadas contínuas em $[x_0, x_1]$ escolhidas arbitrariamente e satisfazem as condições de valores iniciais $\eta_i(x_0) = \eta_i(x_1) = 0$. Temos ainda que $\epsilon\eta_i(x) = \delta u_i$ é uma variação da função u_i. Desta forma a integral 2.25 se torna

$$I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u_1 + \epsilon\eta_1, \ldots, u_n + \epsilon\eta_n, u_1' + \epsilon\eta_1', \ldots, u_n' + \epsilon\eta_n')dx \tag{2.27}$$

A condição necessária para que ela seja um valor extremo para $y_i = u_i(x)$ é que para $\epsilon = 0$ teremos $I'(0) = 0$ ou seja $\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$. Como as funções η_i são arbitrárias, então podemos escolher $\eta_1 \neq 0$ e $\eta_2 = \eta_3 = \ldots = \eta_n = 0$, com isso a integral 2.27 se torna

$$I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u_1 + \epsilon_1 \eta_1, u_2, \ldots, u_n, u_1' + \epsilon \eta_1', u_2', \ldots, u_n') dx \tag{2.28}$$

e então

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\epsilon} &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta_1 \frac{\partial F}{\partial(u_1 + \epsilon\eta_1)} + \eta_1' \frac{\partial F}{\partial(u_1' + \epsilon\eta_1')} \right) dx \\ \left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + \eta_1' \frac{\partial F}{\partial u_1'} \right) dx = 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

mas uma integração por partes no segundo termo de 2.29 resulta em

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta_1' \frac{\partial F}{\partial u_1'} dx = \eta_1 \frac{\partial F}{\partial u_1'}\bigg|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta_1 \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_1'} \right) dx$$

onde da condição de contorno $\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = 0$ temos

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta_1' \frac{\partial F}{\partial u_1'} dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta_1 \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_1'} \right) dx$$

Logo, 2.29 se torna

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \eta_1 \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_1'} \right) dx = 0$$

o que dá

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$F_{u_1} - \frac{d}{dx} F_{u_1'} = 0$$

Como poderíamos ter escolhido qualquer uma das funções $u_i(x)$, obteremos então

$$F_{u_i} - \frac{d}{dx} F_{u_i'} = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.30}$$

Então, as n funções $u_i(x)$ satisfazem este sistema de n equações diferenciais de segunda ordem.

Em particular, se o funcional depende somente de duas funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$, ou seja

$$I(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z') dx \tag{2.31}$$

teremos que o sistema de equações de Euler será

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \qquad\qquad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \tag{2.32}$$

Exemplo 2.5 *Encontrar os extremos do funcional* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx$. *Com* $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $z(0) = 0$ *e* $z(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Temos $F = y'^2 + z'^2 + 2yz$, então suas derivadas parciais serão

$$F_y = 2z \qquad\qquad F_{y'} = 2y'$$

$$F_z = 2y \qquad\qquad F_{z'} = 2z'$$

De 2.32 obtemos

$$\begin{aligned} 2z - \frac{d}{dx}(2y') &= 0 \\ 2y - \frac{d}{dx}(2z') &= 0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Portanto

$$y'' - z = 0 \tag{2.34}$$

$$z'' - y = 0 \tag{2.35}$$

De 2.34 temos $z = y''$. Logo $z'' = y^{iv}$ onde y^{iv} corresponde a derivada de quarta ordem de y, assim 2.35 se torna

$$y^{iv} - y = 0 \tag{2.36}$$

Cuja solução é

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x \tag{2.37}$$

Como $z = y''$ basta derivarmos a equação 2.37 duas vezes para encontrarmos z. Temos

$$z = y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \operatorname{sen} x$$

Das condições de contorno $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$ temos

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$C_1 + C_2 - C_3 = 0$$

O que concluimos $C_1 = -C_2$ e $C_3 = 0$. E de $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ e $z(\frac{\pi}{2}) = -1$ assim $C_1 = C_2 = 0$ e $C_4 = 1$. Logo, os extremos do problema são

$$y = \operatorname{sen} x \qquad\qquad z = -\operatorname{sen} x$$

2.2.2 Funcionais envolvendo derivadas de ordens superiores

O mesmo raciocínio da seção anterior pode ser extendido para funcionais do tipo

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')dx \tag{2.38}$$

Assumindo que $y = u(x)$ seja um extremo do funcional I, formamos então a família das funções $y = u(x) + \epsilon\eta(x)$, onde ϵ é uma constante e η é uma função arbitrária, com derivadas contínuas até a quarta ordem, a qual se anula juntamente com suas primeiras derivadas, nos extremos do intervalo. Desta forma a equação 2.38 se torna

$$I(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \epsilon\eta, u' + \epsilon\eta', u'' + \epsilon\eta'')dx \tag{2.39}$$

Novamente, a condição necessária para a ocorrência de um valor extremo

$$\frac{dI}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}$$

deve ser satisfeita. Derivando a equação acima e aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial(u + \epsilon\eta)}\eta + \frac{\partial F}{\partial(u' + \epsilon\eta')}\eta' + \frac{\partial F}{\partial(u + \epsilon\eta'')}\eta'' \right) dx$$

e portanto

$$\frac{dI}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta\frac{\partial F}{\partial u} + \eta'\frac{\partial F}{\partial u'} + \eta''\frac{\partial F}{\partial u} \right) dx = 0 \tag{2.40}$$

Integrando, uma vez por partes, reduziremos o termo em η' por um em η. Levando em consideração as condições de contorno

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u}\eta' &= \eta F_{u'}\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx & (2.41) \\ &= -\int_{x_0}^{x_1} \eta \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx & (2.42) \end{aligned}$$

Integrando por partes duas vezes, reduziremos o termo em η'' a um em η e das condições de contorno obtemos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \eta''\frac{\partial F}{\partial u''} &= \eta'\frac{\partial F}{\partial u''}\Big|_{x_0}^{x_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u''}\eta\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right)\eta dx & (2.43) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \eta \left(\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial u''} \right) dx & (2.44) \\ & & (2.45) \end{aligned}$$

Desta forma, a equação 2.40 fica

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left[F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u''} \right] dx = 0 \tag{2.46}$$

Portanto, a condição necessária para a existência de um valor extremo, é

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u'} = 0 \tag{2.47}$$

Esta é a equação diferencial de Euler para o integrando da forma $F = F(x, u, u', u'')$. Podemos observar que a equação 2.47 se trata de uma equação diferencial de quarta ordem.

Porém, se o integrando for da forma $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, as equações de Euler serão

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dx^3} F_{u'''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{u^{(n)}} = 0 \tag{2.48}$$

2.2.3 Funcionais envolvendo funções de várias variáveis

O mesmo método utilizado nas seções anteriores para determinação das condições necessárias para a ocorrência de um valor extremo pode também ser aplicado quando a integral for múltipla. Seja D uma região dada limitada por uma curva C do plano xy.

A integral a ser estudada é

$$\iint_D F(x, y, z, z_x, z_y) dx\, dy \tag{2.49}$$

Seja $F(x, y, z, z_x, z_y)$ contínua e duas vezes diferenciável. Considerando então a família de funções

$$z(x, y) = u(x, y) + \epsilon \eta(x, y)$$

onde $u(x, y)$ é um extremo para o funcional e $\eta(x, y)$, possui até a segunda derivada contínua anulando-se na fronteira de C. Desta forma, o funcional se torna

$$I(\epsilon) = \iint_D F(x, y, z, z_x, z_y) dx\, dy \tag{2.50}$$

que será estacionário satisfazendo $I'(0) = 0$. Temos então que

$$I'(\epsilon) = \iint_D (\eta F_z + \eta_x F_{z_x} + \eta_y F_{z_y}) dx\, dy \tag{2.51}$$

e conseqüentemente

$$I'(0) = \iint_D \left(\eta F_u + \eta_x F_{u_x} + \eta_y F_{u_y}\right) dx\, dy = 0$$

onde $\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}$ e $\eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}$. Fazemos uma integração por partes para eliminar os termos η_x e η_y. Então segue do Teorema de Green[1] que

$$\iint_D \eta \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{\partial u_x} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) dx\, dy + \int_C \eta \left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{dx}{ds}\right) ds$$

onde ds é o elemento diferencial do comprimento de arco C. Mas $\eta(x,y)|_C = 0$ portanto

$$I'(0) = \iint_D \eta \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) dx\, dy = 0$$

Usando o lema 2.2 podemos concluir que se $z = z(x,y)$ é um extremo do funcional 2.49 e encontramos como equação de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} = 0 \tag{2.52}$$

Lema 2.2 *Seja $M \in C$ e se $\iint_D \eta(x,y)M(x,y)dx\, dy = 0$ para toda função $\eta(x,y)$, então $M(x,y) = 0$ para todo par $(x,y) \in D$.*

Demonstração 2.2 *Seja D um domínio do plano xy para o qual $\eta(x,y)M(x,y)dxdy = 0$. Para toda função $\eta(x,y)$ continuamente diferenciável anulando-se na fronteira de C, onde $M(x,y)$ é continua para todo x e y em D. Nós queremos concluir que $M(x,y) = 0$ em D.*

Suponha o contrário, que $M(x,y) \neq 0$ em D, então existe um domínio retangular D_1 de D para o qual $M(x,y) \neq 0$. Sendo $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$, $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ e assumindo que $M(x,y) > 0$ no interior de D.

Escolhendo $\eta(x,y) = (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2(y-\eta_1)^2(y-\eta_2)^2$ em D_1 e $\eta(x,y) = 0$ no restante de D. Então

$$\iint_D \eta(x,y)M(x,y)dx\, dy = \iint_{D_1} \eta(x,y)M(x,y)dx\, dy > 0$$

[1]**Teorema de Green:** Seja D uma região fechada e C o seu contorno. Suponha $P : D \to \mathbb{R}$ e $Q : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Então

$$\iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \int_C (Pdx + Qdy)\,.$$

O que contraria a hipótese. Logo ao assumirmos que $M(x, y) > 0$ em D_1, isso nos leva a uma contradição. Logo $M = 0$ é a única possibilidade.

Capítulo 3

O Problema da Braquistócrona

Vimos na introdução que o problema da braquistócrona serviu de motivação para o desenvolvimento do cálculo das variações.

Vamos agora discutir a formulação analítica do problema, que como sabemos consiste em encontrar dentre todas as curvas que ligam dois pontos num plano vertical, aquela que minimiza o tempo que uma partícula leva para percorrer o percurso entre estes dois pontos.

3.1 Formulação analítica do problema da braquistócrona

Consideraremos que a partícula desliza sem atrito ao longo da curva definida pelo gráfico da função $y = f(x)$, sob a influência da gravidade, escolhendo o eixo y como o eixo vertical orientado na mesma direção da gravidade, então, em todo ponto da curva, a força da gravidade atua na direção do eixo y com intensidade mg. Se denotarmos por θ o ângulo formado pelo eixo y e a tangente a curva, temos

$$F = mg\cos\theta \tag{3.1}$$

mas

$$\cos\theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$F = mg\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Mas da segunda lei de Newton $F = ma$ onde a é a aceleração logo

$$ma = mg\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{3.2}$$

Introduzindo o comprimento de arco s como parâmetro, teremos $a = \ddot{s}$ e $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$. Portanto a equação 3.2 fica

$$\ddot{s} = g\frac{dy}{ds} \tag{3.3}$$

Multiplicando ambos os lados da equação 3.3 por $\dot{s}$ obtemos

$$\dot{s}\ddot{s} = g\frac{dy}{ds}\dot{s}$$

se observarmos que

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{s^2}) = \dot{s}\ddot{s}$$

temos que a equação 3.1 se torna,

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{s^2}) = g\frac{dy}{dt}$$

Integrando obtemos

$$\int \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{s}^2)dt = \int g\frac{dy}{dt}dt, \tag{3.4}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\dot{s^2} = gy + C \tag{3.5}$$

onde C é uma constante de integração. Se considerarmos que no tempo $t = 0$ temos $y(t = 0) = y_0$ e $\dot{s}(0) = 0$, então $-gy_0 = C$ e a equação 3.5 fica

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = gy - gy_0 \Rightarrow \dot{s} = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

ou seja,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y-y_0)} \Rightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y-y_0)}}$$

então,

$$t = \int_0^l \frac{ds}{\sqrt{2g(y-y_0)}} \Rightarrow t = \int_0^l \frac{ds}{\sqrt{2g}\sqrt{y-y_0}} =$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^l \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y-y_0}}dx. \tag{3.6}$$

onde l é o comprimento da curva.

Colocando o ponto de partida da partícula na origem, ou seja, $y(0) = y_0 = 0$ e desprezando o fator $\sqrt{2g}$, teremos

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} dx \qquad y(0) = y_0 = 0. \tag{3.7}$$

Podemos observar que o funcional não depende explicitamente de x e portanto a equação de Euler-Lagrange é do tipo

$$F - y' F_{y'} = C$$

onde

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \Rightarrow F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

Logo a equação de Euler se torna

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \Rightarrow \frac{(1+y'^2)-y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \tag{3.8}$$

Se introduzirmos t como parâmetro, fazendo $y' = \cot(t)$ na equação acima obtemos $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \mathrm{sen}(t)$ desta forma temos que da equação 3.8

$$\frac{1}{\sqrt{y}\mathrm{sen}(t)} = C \Rightarrow y = C_1 \mathrm{sen}^2(t)$$

e então

$$\frac{dy}{dt} = 2C_1 \mathrm{sen}(t)\cos(t) \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \mathrm{sen}(t)\cos(t)dt}{\cot(t)}$$

$$dx = 2C_1 \mathrm{sen}^2(t)dt \Rightarrow dx = C_1(1-\cos(2t))dt.$$

Integrando esta última equação

$$\int dx = \int C_1 (1-\cos(2t))\, dt \Rightarrow x = C_1 \left(t - \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}\right) + C_2$$

$$x - C_2 = C_1 \left(\frac{2t - \mathrm{sen}(2t)}{2}\right) \Rightarrow x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \mathrm{sen}(2t))$$

Obtemos então

$$x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \operatorname{sen}(2t)) \qquad\qquad y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

Observando que das condições de contorno $y(0) = 0$ temos $C_1 = 0$ e que $x = 0$ nos leva a $C_2 = 0$, e fazendo $2t = t_1$, obtemos uma família de ciclóides na forma.

$$x = \frac{C_1}{2}(t_1 - \operatorname{sen}(t_1)) \tag{3.9}$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos(t_1)) \tag{3.10}$$

onde $\frac{C_1}{2}$ é o raio do círculo que gera a ciclóide. Desta maneira os extremos do problema da Braquistócrona são ciclóides.

3.2 O problema da menor distância no plano

Outro problema a ser considerado é o problema da menor distância no plano, ou seja, dentre todas as curvas que ligam dois pontos A e B no plano, determinar aquela que tenha comprimento mínimo. Sabemos que o comprimento de uma curva plana é dada pela seguinte integral,

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Como o funcional depende somente de y', temos que a equação de Euler-Lagrange será

$$y'' F_{y'y'} = 0$$

onde podemos concluir os seguintes casos, $y'' = 0$ ou $F_{y'y'} = 0$.

Se $y'' = 0$ efetuando uma dupla integração obtemos

$$y = Cx + C_1 \tag{3.11}$$

ou seja uma reta.

Por outro lado se $F_{y'y'} = 0$ então $y' = C$ e outra integração encontramos

$$y = Cx + C_1 \tag{3.12}$$

que também é uma reta.

Então, podemos concluir que as curvas que minimizam distâncias no plano são as retas.

3.3 O problema da superfície de revolução de área mínima

Outro problema semelhante ao apresentado na seção anterior é o chamado problema do sólido de revolução de área mínima. Esse problema consiste em dados dois pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, onde $x_1 > x_0$, $y_0 > 0$ e $y_1 > 0$, determinar a curva $y = y(x)$, situada acima do eixo dos x, de forma que a área da superfície de revolução gerada pela rotação da curva em torno do eixo x seja mínima.

Sabemos do cálculo que a área de uma superfície de revolução é dada por

$$I = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx. \tag{3.13}$$

Desprezando o fator 2π temos que o funcional a ser minimizado é

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx \tag{3.14}$$

Observando que o integrando depende somente de y e y', temos que a equação de Euler-Lagrange é da forma $F - y'F_{y'} = C$, onde

$$F = y\sqrt{1+y'^2} \;\Rightarrow\; F_{y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Desta forma

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow \frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow y' = \frac{1}{C}\sqrt{y^2 - C^2}. \tag{3.15}$$

Fazendo uma mudança de parâmetro onde $y = C\cosh(t)$, então $dy = C\text{senh}(t)dt$. A equação 3.15 fica

$$y' = \frac{1}{C}\sqrt{C^2\cosh^2(t) - C^2} \Rightarrow y' = \sqrt{\cosh^2(t) - 1};$$

segue da identidade $\cosh^2(t) - 1 = \text{senh}^2(t)$ que

$$y' = \text{senh}(t).$$

Porém,

$$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} \Rightarrow dx = C\frac{\text{senh}(t)}{\text{senh}(t)}dt \Rightarrow dx = Cdt.$$

Integrando obtemos

$$\int dx = \int C\,dt$$

ou seja

$$x = Ct + C_1 \Rightarrow t = \frac{x - C_1}{C} \tag{3.16}$$

$$y = C\cosh(\frac{x - C_1}{C}) \tag{3.17}$$

A equação encontrada acima é equação da catenária. Concluimos então que a curva que gera a superfície de revolução de área mínima é uma catenária.

Capítulo 4

Multiplicadores de Lagrange para Funcionais

Na maior parte dos problemas de obtenção de valores extremos de funções de várias variáveis sujeitas a certas restrições, usamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Usaremos um metodo análogo para a obtenção de valores extremos com restrições para funcionais. Suponha que se queira achar os extremos do funcional

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})dt,$$

$t_0 \leq t \leq t_1$ sujeita a restrição $G(x, y, z) = 0$. Suponha que $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sejam as funções procuradas e que z possa ser escrita na forma $z = z(x, y)$, e sejam $x = u(t)$, $y = v(t)$ e $z = w(t)$ os extremos de I. Então uma variação nos dá

$$\begin{aligned} x &= u(t) + \epsilon_1\eta_1 \\ y &= v(t) + \epsilon_2\eta_2 \\ z &= w(t) + \epsilon_3\eta_3 \end{aligned}$$

Logo, uma variação para I é

$$I(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, u + \epsilon_1\eta_1, v + \epsilon_2\eta_2, w + \epsilon_3\eta_3, \dot{u} + \epsilon_1\dot{\eta_1}, \dot{v} + \epsilon_2\dot{\eta_2}, \dot{w} + \epsilon_3\dot{\eta_3})dt$$

Onde para que I seja estacionário, ou seja, possua um extremo é necessário que a primeira variação se anule, ou seja,

$$\frac{\partial I}{\partial \epsilon_1} = \frac{\partial I}{\partial \epsilon_2} = \frac{\partial I}{\partial \epsilon_3} \qquad \text{quando } \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0. \tag{4.1}$$

Assim temos

$$\frac{\partial I}{\partial \epsilon_i}\Big| \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0 = \frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z}$$

Logo,

$$dI = \int_{t_0}^{t_1} \Big[(F_u \eta_1 + F_{\dot{u}} \dot{\eta_1}) + (F_v \eta_2 + F_{\dot{v}} \dot{\eta_2}) + (F_w \eta_3 + F_{\dot{w}} \dot{\eta_3})\Big] dt = 0$$

Integrando por partes e levando em consideração as condições de contorno ou seja a de que $\eta_i|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad i = 1, 2, 3$, teremos

$$dI = \int_{t_0}^{t_1} [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \eta_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} [F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}}] \eta_2 dt + \int_{t_0}^{t_1} [F_z - \frac{d}{dt} F_{\dot{z}}] \eta_3 dt = 0. \qquad (4.2)$$

Como I deve satisfazer a restrição $G(x, y, z) = 0$, então seja

$$G(x + \epsilon_1 \eta_1, y + \epsilon_2 \eta_2, z + \epsilon_3 \eta_3) = 0$$

uma variação para $G(x, y, z)$. Desta forma teremos que

$$dG = G_x(x, y, z)\eta_1 + G_y(x, y, z)\eta_2 + G_z(x, y, z)\eta_3 = 0$$

multiplicando dG pela função $\lambda = \lambda(t)$ e integrando encontramos

$$\int_{t_0}^{t_1} [\lambda G_x \eta_1 + \lambda G_y \eta_2 + \lambda G_z \eta_3] dt = 0. \qquad (4.3)$$

Igualando as equações 4.2 e 4.3 temos

$$dI = \lambda dG$$

Assim temos

$$\begin{aligned} dI = \int_{t_0}^{t_1} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} - \lambda G_x\right] \eta_1 dt \quad &+ \quad \int_{t_0}^{t_1} \left[F_y - \frac{d}{dt} F_{\dot{y}} - \lambda G_y\right] \eta_2 dt + \\ &+ \quad \int_{t_0}^{t_1} \left[F_z - \frac{d}{dt} F_{\dot{z}} - \lambda G_z\right] \eta_3 dt = 0. \end{aligned}$$

Assumindo que as derivadas parciais G_x, G_y e G_z, não se anulem simultâneamente na superfície $G(x, y, z) = 0$, então escolhendo $G_x \neq 0$ e $G_y = G_z = 0$, teremos

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} - \lambda G_x = 0 \qquad (4.4)$$

$$F_y - \frac{d}{dt}F_{\dot{y}} - \lambda G_y = 0 \tag{4.5}$$

$$F_z - \frac{d}{dt}F_{\dot{z}} - \lambda G_z = 0 \tag{4.6}$$

As equações 4.4, 4.5 e 4.6 juntamente com a restrição $G(x, y, z) = 0$ formam um sistema de quatro equações nas incógnitas x, y, z e λ. Basta resolver esse sistema para encontrar os valores estacionários $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ e o multiplicador $\lambda(t)$.

4.1 Geodésicas

Outro problema elementar do cálculo das variações é o chamado problema geodésico, ou seja, o problema de encontrar a curva de menor comprimento que liga dois pontos. Vimos que para dois pontos no plano, as curvas que minimiza distâncias no plano são as retas.

Se nós considerarmos o problema de encontrar a curva de menor comprimento ligando dois pontos numa superfície e expressarmos a curva paramétricamente na forma $x(t), y(t)$ e $z(t)$, teremos que o comprimento da curva será dado por

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \tag{4.7}$$

Supondo que a superfície é representada por $G(x, y, z) = 0$

O problema geodésico caracteriza-se então por encontrar funções que minimizam ou maximizam o funcional

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

sujeito a condição $G(x, y, z) = 0$, onde $x(t), y(t)$ e $z(t)$ são funções continuamente diferenciáveis em $t = t_0$ e $t = t_1$

Tomando

$$F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

as derivadas parciais de F com respeito a $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ serão:

$$F_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{\dot{x}}{F} \qquad F_{\dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{\dot{y}}{F} \qquad F_{\dot{z}} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{\dot{z}}{F}$$

Obtendo assim o sistema de equações de Euler

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{F}\right) = \lambda G_x \tag{4.8}$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{F}\right) = \lambda G_y \tag{4.9}$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{F}\right) = \lambda G_z \tag{4.10}$$

O sistema de equações acima pode ser reescrito como

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{F}\right)}{G_x} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{F}\right)}{G_y} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{F}\right)}{G_z} \tag{4.11}$$

Lembrando que $G_x \neq 0$, $G_y \neq 0$ e $G_z \neq 0$.

Desta forma vamos considerar o problema da Geodésica na esfera.

Exemplo 4.1 *Determine a curva de menor comprimento que liga dois pontos na esfera.*

A equação da esfera em coordenadas retangulares é descrita por

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

onde r é o raio da esfera.

O problema consiste em minimizar o funcional $I = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$ sujeito a condição $G(x, y, z) = 0$.

Temos então

$$G_x = 2x \qquad\qquad G_y = 2y \qquad\qquad G_z = 2z$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{F}\right) = \frac{\ddot{x} - \dot{F}\dot{x}}{F^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{F}\right) = \frac{\ddot{y} - \dot{F}\dot{y}}{F^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{F}\right) = \frac{\ddot{z} - \dot{F}\dot{z}}{F^2}$$

Logo do sistema 4.11 obtemos

$$\frac{\ddot{x}F - \dot{x}\dot{F}}{2xF^2} = \frac{\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F}}{2yF^2} = \frac{\ddot{z}F - \dot{z}\dot{F}}{2zF^2} \tag{4.12}$$

Simplificando

$$\frac{\ddot{x}F - \dot{x}\dot{F}}{x} = \frac{\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F}}{y} = \frac{\ddot{z}F - \dot{z}\dot{F}}{z} \tag{4.13}$$

Tomando a primeira igualdade do sistema 4.13

$$\frac{\ddot{x}F - \dot{x}\dot{F}}{x} = \frac{\ddot{y}F - \dot{y}\dot{F}}{y} \tag{4.14}$$

obtemos

$$y\ddot{x}F - y\dot{x}\dot{F} = x\ddot{y}F - x\dot{y}\dot{F}$$

$$y\ddot{x}F - x\ddot{y}F = y\dot{x}\dot{F} - x\dot{y}\dot{F}$$

$$F(y\ddot{x} - x\ddot{y}) = \dot{F}(y\dot{x} - x\dot{y})$$

portanto

$$\frac{y\ddot{x} - x\ddot{y}}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{\dot{F}}{F}$$

de 4.13

$$\frac{y\ddot{x} - x\ddot{y}}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{\dot{F}}{F} = \frac{z\ddot{y} - y\ddot{z}}{z\dot{y} - y\dot{z}} = \frac{\dot{F}}{F} \tag{4.15}$$

Entretanto se observarmos que

$$\frac{d}{dt}(y\dot{x} - x\dot{y}) = \dot{y}\dot{x} + y\ddot{x} - \dot{x}\dot{y} - x\ddot{y} = y\ddot{x} - x\ddot{y}$$

a igualdade do sistema 4.15 se torna

$$\frac{\frac{d}{dt}(y\dot{x} - x\dot{y})}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{\frac{d}{dt}(z\dot{y} - y\dot{z})}{z\dot{y} - y\dot{z}} \tag{4.16}$$

Fazendo $y\dot{x} - x\dot{y} = u$ e $z\dot{y} - y\dot{z} = v$ teremos

$$du = \frac{d}{dt}(y\dot{x} - x\dot{y}) \qquad\qquad dv = \frac{d}{dt}(z\dot{y} - y\dot{z}) \tag{4.17}$$

Desta maneira o sistema 4.16 se torna

$$\frac{du}{u} = \frac{dv}{v} \tag{4.18}$$

Integrando ambos os lados da igualdade 4.18

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dv}{v} \tag{4.19}$$

Lembrando que $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ onde C é uma constante de integração. Logo da equação 4.19 obtemos

$$\ln|u| = \ln|v| + C \tag{4.20}$$

Podemos escrever $C = \ln|C_1|$ então temos

$$\ln|u| = \ln|v| + \ln C_1$$

$$\ln|u| = \ln|vC_1|$$

Da igualdade de logaritmos temos

$$u = C_1 v$$

ou seja

$$y\dot{x} - x\dot{y} = C_1(z\dot{y} - y\dot{z})$$

que pode ser reescrita como

$$y\dot{x} + C_1 y\dot{z} = C_1 z\dot{y} + x\dot{y}$$

$$\frac{\dot{x} + C_1\dot{z}}{x + C_1 z} = \frac{\dot{y}}{y} \tag{4.21}$$

Fazendo $x + C_1 z = w$ teremos que $dw = \frac{d}{dt}(x + C_1 z)$ e a equação 4.21 fica

$$\frac{dw}{w} = \frac{dy}{y}$$

Integrando obtemos

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{dy}{y}$$

ou seja

$$\ln|x + C_1 z| = \ln|y| + C$$

$$x + C_1 z = yC_2$$

Esta é a equação do plano que passa pelo centro da esfera a qual tem seu centro na origem dos eixos, onde a interseção do plano que contém os dois pontos dados e o centro da esfera é o arco de um grande círculo, C_1 e C_2 são constantes que podem ser determinadas a partir das condições iniciais.

4.2 Problemas isoperimétricos

Na seção anterior discutimos o problema de se encontrar valores extremos sujeito a restrição $G(x, y, y') = 0$, porém agora nossa condição subsidiária terá um valor prescrito. Desta forma, o problema de se encontrar o valor extremo para uma certa integral, sujeita a uma outra que tenha um valor definido, é chamado *problema isoperimétrico*. Em especial, o problema de se encontrar a curva fechada de comprimento dado, que possui área máxima é chamado de problema isoperimétrico, demonstraremos este problema no fim deste capítulo.

Suponha que queiramos encontrar os valores extremos da integral

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \tag{4.22}$$

sujeita à condição subsidiária

$$L = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = \text{uma certa constante } c \tag{4.23}$$

Este tipo de problema não pode ser tratado como na seção anterior, de formar uma variação $y = u + \epsilon\eta$. Por que uma mudança no valor do parâmetro ϵ poderá causar uma mudança no valor de L, que deve ser constante. Com isto, adimitindo que $y = u$ seja a função procurada , formaremos a variação

$$y = u + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2 \tag{4.24}$$

onde η_1 e η_2 são funções continuamente diferenciáveis com

$$\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = 0 \text{ e } \eta_2(x_0) = \eta_2(x_1) = 0$$

Desta foma, substituindo 4.24 em 4.22 e 4.23 obtemos

$$I(\epsilon_1\epsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2, u' + \epsilon_1\eta_1' + \epsilon_2\eta_2{}')dx$$

e

$$L(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, u + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2, u' + \epsilon_1\eta_1{}' + \epsilon_2\eta_2{}')dx = c$$

a função $I(\epsilon_1\epsilon_2)$ será estacionária para $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, sujeita a condição $L(\epsilon_1, \epsilon_2) = c$. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange da seção anterior obtemos

$$H(\epsilon_1, \epsilon_2) = I(\epsilon_1\epsilon_2) + \lambda L(\epsilon_1, \epsilon_2) \tag{4.25}$$

Desta forma, de 4.22 e 4.23,

$$H(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_0}^{x_2} \phi(x, y, y')dx \tag{4.26}$$

onde

$$\phi(x,y,y') = F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y') \tag{4.27}$$

Como queremos encontrar um valor estacionário para H temos então que

$$\frac{\partial H}{\partial \epsilon_1} = \frac{\partial H}{\partial \epsilon_2} = 0 \qquad\qquad \text{com } \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0 \tag{4.28}$$

Temos então que de acordo com a regra da cadeia

$$\frac{\partial H}{\partial \epsilon_i} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \epsilon_i} + \frac{\partial \phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \epsilon}\right] dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y}\eta_i + \frac{\phi}{\partial y'}\eta_i'\right] dx \qquad\qquad i = 1,2. \tag{4.29}$$

Desta forma,

$$\frac{\partial H}{\partial \epsilon_i}\Big|_{\epsilon_1=\epsilon_2=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial u}\eta_i + \frac{\partial \phi}{\partial u'}\eta_i'\right] dx = 0 \tag{4.30}$$

Integrando por partes temos

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial u'}\eta_i'\, dx = \frac{\partial \phi}{\partial u}\eta_i\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta_i \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial u'}\, dx \tag{4.31}$$

mas das condições de contorno $\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = 0$ e $\eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0$, então

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \phi}{\partial u'}\eta_i'\, dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta_i \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial u'}\, dx$$

O que torna a equação 4.30

$$\frac{\partial H}{\partial \epsilon_i}\Big|_{\epsilon_1=\epsilon_2=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial u'}\right]\eta_i\, dx = 0 \tag{4.32}$$

Sendo as funções η_i funções arbitrárias e continuamente diferenciáveis e satisfazendo as condições de contorno, aplicando o lema fundamental do cálculo das variações temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial u'} = 0 \tag{4.33}$$

que pode ser reescrita como

$$\phi_u - \frac{d}{dx}\phi_{u'} = 0 \tag{4.34}$$

Exemplo 4.2 *Vamos considerar o exemplo de determinar a curva de comprimento L para o qual, $I = \int_a^b y dx$ é um máximo com as seguintes condições de valor inicial $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$.*

O comprimento da curva é a nossa condição subsidiária.

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$$

então iremos achar o extremo da integral,

$$H=\int_a^b (y+\lambda\sqrt{1+y'^2})dx$$

Chamando o integrando de $\phi(y,y')$ temos

$$\phi(y,y')=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$$

Podemos observar que o integrando depende somente de y e y', então temos a equação de Euler

$$\phi-y'\phi_{y'}=C$$

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C$$

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C$$

$$y-C=-\frac{\lambda(1+y'^2)+\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$y-C=-\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Fazendo $y'=\tan(\theta)$, temos $\sqrt{1+y'^2}=\sec(\theta)$.

Logo

$$y-C=-\lambda\cos(\theta)$$

de

$$\frac{dy}{dx}=y'\Rightarrow dx=\frac{dy}{y'}$$

obtemos

$$dx=\frac{\lambda\text{sen}(\theta)d\theta}{\tan(\theta)}$$

$$dx=\lambda\cos(\theta)d\theta$$

uma integração em ambos os membros

$$\int dx=\int\lambda\cos(\theta)d\theta\Rightarrow x=\lambda\text{sen}(\theta)+C_1$$

$$(x - C_1)^2 = \lambda^2 \text{sen}^2(\theta)$$

e de $y - C = -\lambda \cos(\theta)$ obtemos a seguinte relação

$$(y - C)^2 = \lambda^2 \cos^2(\theta)$$

Logo

$$(x - C_1)^2 + (y - C)^2 = \lambda^2$$

Ou seja, o extremo do funcional é um arco de circunferência de centro (C_1, C) e raio λ, onde C e C_1 são constantes de integração que podem ser determinadas a partir das condições de contorno.

4.3 Curvatura

Para resolvermos o chamado problema isoperimétrico, introduziremos o conceito de curvatura.

Sabemos do cálculo que a curvatura de uma curva C parametrizada em termos do comprimento de arco é definida por:

$$\kappa(s) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|,$$

onde $\frac{dT}{ds}$ é a taxa de variação do vetor tangente unitário T em relação ao comprimento de arco s. Entretanto, se a curva for representada em coordenadas polares, através do parâmetro θ ou seja, $\gamma = f(\theta)$, poderemos reescrever a curvatura como

$$\kappa(\theta) = \frac{\mid \gamma'(\theta) \times \gamma''(\theta) \mid}{\mid \gamma'(\theta) \mid^3}. \tag{4.35}$$

Temos que seja θ o parâmetro, então $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\text{sen}(\theta)$, uma representação para a curva será

$$\gamma = (r\cos(\theta), r\text{sen}(\theta)) = r\cos(\theta)\vec{i} + r\text{sen}(\theta)\vec{j}. \tag{4.36}$$

cuja derivada é

$$\gamma' \quad = \quad [r'\cos(\theta) - r\text{sen}(\theta)]\vec{i} + [r'\text{sen}(\theta) + r\cos(\theta)]\vec{j}$$

$$\begin{aligned}
|\gamma'| &= \sqrt{(r'\cos(\theta) - r\mathrm{sen}(\theta))^2 + (r'\mathrm{sen}(\theta) + r\cos(\theta))^2} \\
|\gamma'| &= \sqrt{r'^2(\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + r^2(\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta))} \\
|\gamma'| &= \sqrt{r'^2 + r^2}
\end{aligned}$$

Derivando uma segunda vez 4.36 obtemos

$$\gamma'' = [r''\cos(\theta) - 2r'\mathrm{sen}(\theta) - r\cos(\theta)]\vec{i} + [r''\mathrm{sen}(\theta) + 2r'\cos(\theta) - r\mathrm{sen}(\theta)]\vec{j}.$$

$$\gamma' \times \gamma'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r'\cos(\theta) - r\mathrm{sen}(\theta) & r'\mathrm{sen}(\theta) + r\cos(\theta) & 0 \\ r''\cos(\theta) - 2r'\mathrm{sen}(\theta) - r\cos(\theta) & r''\mathrm{sen}(\theta) + 2r'\cos(\theta) - r\mathrm{sen}(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|\gamma' \times \gamma''| &= |\,(r'\cos(\theta) - r\mathrm{sen}(\theta))(r''\mathrm{sen}(\theta) + 2r'\cos(\theta) - r\mathrm{sen}(\theta)) - \\
&- (r'\mathrm{sen}(\theta) + r\cos(\theta))(r''\mathrm{sen}(\theta) - 2r'\mathrm{sen}(\theta) - r\cos(\theta))\,| \\
&= |\,2r'^2\cos^2(\theta) + 2r'^2\mathrm{sen}^2(\theta) - rr''\mathrm{sen}^2(\theta) - rr''\cos^2(\theta) + r^2\mathrm{sen}^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta)\,| \\
&= |\,2r'^2 - rr'' + r^2\,|
\end{aligned}$$

Da equação 4.35 obtemos que a curvatura em termos do parâmetro θ é dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{|\,r^2 - rr'' + 2r'^2\,|}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.37}$$

Agora, observe que se a curva for um círculo de raio λ cuja equação é dada por

$$\gamma = \lambda\cos(\theta)\vec{i} + \lambda\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} \tag{4.38}$$

Da equação 4.37 obtemos

$$\kappa(\theta) = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda}$$

Podemos observar então que o círculo tem curvatura constante $\frac{1}{\lambda}$.

4.4 O problema isoperimétrico

Outro problema isoperimétrico interessante, consiste em encontrar dentre todas as curvas planas fechadas de comprimento dado, aquela que tenha área máxima.

Se resolvermos o problema em coordenadas polares, a curva terá a seguinte representação $r = r(\theta)$ e sabemos do cálculo que a área de uma curva em coordenadas polares é dada pela integral

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta. \tag{4.39}$$

Nossa condição subsidiária ou seja o comprimento da curva é dado por

$$L = \int_0^{2\pi} (r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} d\theta \tag{4.40}$$

Desta forma, o funcional a ser minimizado é

$$H = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 + \lambda(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}\right] d\theta \tag{4.41}$$

Sendo

$$\phi = \frac{1}{2}r^2 + \lambda(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.42}$$

cuja equação de Euler

$$\phi_r - \frac{d}{d\theta}\phi_{r'} = 0 \tag{4.43}$$

nos dá

$$r + \lambda r(r^2 + r'^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{d}{d\theta}\lambda r'(r^2 + r'^2)^{-\frac{1}{2}} = 0. \tag{4.44}$$

Como r depende de θ

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\lambda r'(r^2 + r'^2)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\lambda r''(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{r'(2rr' + 2r'r'')}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}}}{(r^2 + r'^2)} \\
&= \lambda\left[\frac{r''(r^2 + r'^2) - rr'^2 - r'^2 r''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \\
&= \lambda\frac{(r''r^2 - rr'^2)}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado obtido na equação 4.44 temos que

$$r + \frac{\lambda r}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\lambda r'' r^2 + \lambda r r'^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\frac{\lambda r(r^2 + r'^2) - \lambda r'' r^2 + \lambda r r'^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = -r$$

$$\frac{\lambda r\left[r^2 + r'^2 - r'' r + r'^2\right]}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = -r$$

Ou seja,

$$\frac{r^2 - r''r + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\lambda}$$

O que nos dá

$$\frac{r''r - 2r'^2 - r^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda} \tag{4.45}$$

Como podemos observar da seção anterior, a equação 4.45 é a curvatura de um círculo de raio λ. Portanto, dentre todas as curvas de comprimento dado, a curva que possui área máxima é a circunferência.

Capítulo 5

O Princípio de Hamilton

5.1 Funções homogêneas

Diz-se que uma função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é homogênea de grau h se

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^h f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.1}$$

Em geral, um polinômio em x e y ou em maior número de variáveis é uma função homogênea de grau h se, em cada termo, a soma dos expoentes das variáveis independentes for igual a h.

As funções homogêneas mais simples são os polinômios homogêneos, como por exemplo $z = ax^2 - bxy + cxz - y^2$, que é uma função homogênea de grau 2. As funções

$$g = \frac{3x^3 - 2x^2y + y^3}{4y^7 - 2x^5z^2}, \quad h = x\cos\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad z = \tan\left(\frac{x}{x+y}\right) \tag{5.2}$$

são funções homogêneas de grau -4, 1 e 0 respectivamente.

As funções homogêneas que também são diferenciáveis, satisfazem a *equação diferencial parcial*

$$x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} + \ldots + x_n f_{x_n} = hf(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.3}$$

conhecida como *relação característica de Euler.*

Teorema 5.1 *A condição necessária e suficiente para que uma função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definida e diferenciável num domínio aberto D, seja homogênea de grau h é que ela satizfaça a relação de Euler.*

Demonstração 5.1 *Derivemos ambos os membros da equação 5.1 em relação a t, isto é permitido, já que a equação é uma identidade em t. Aplicando a regra da cadeia ao primeiro membro, obtemos*

$$x_1 f_{x_1}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) + \ldots + x_n f_{x_n}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = ht^{h-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (5.4)$$

Escrevemos f_x, para designar a derivada de f em relação à primeira variável, isto é, primeiro calculamos

$$\frac{\partial f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{\partial \xi_1}$$

para depois substituir $\xi_1 = tx_1$, $\xi_2 = tx_2$, $\ldots$, $= \ldots = \xi_n = tx_n$. Não devemos confundir $f_{x_1}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$, com a derivada

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t f_{x_1}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n).$$

Fazendo $t = 1$, mostramos que a relação de Euler é condição necessária para a homogeneidade de f. Para demonstrar que a condição é suficiente, devemos admitir a relação 5.3 e provar que f é homogênea de grau h.

Substituindo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por $(tx_1, \ldots, tx_n)$ a equação 5.3 se torna

$$tx_1 f_{x_1}(tx_1, \ldots, tx_n) + \ldots + tx_n f_{x_n}(tx_1, \ldots, tx_n) = hf(tx_1, \ldots, tx_n)$$

Multiplicando esta equação por t^{h-1}, obtemos

$$t^h(x_1 f_{x_1} + \ldots + x_n f_{x_n}) - ht^{h-1} f = 0$$

Observando que o primeiro membro é igual a

$$t^{2h} \frac{d}{dt} \frac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^h} = t^h(x_1 f_{x_1} + \ldots + x_n f_{x_n}) - ht^{h-1} f,$$

segue que $\frac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^h}$ é constante em t. Quando $t = 1$, isto se reduz a $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, portanto

$$\frac{f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)}{t^h} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ou seja

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^h f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

como queríamos demonstrar.

5.2 Princípio de Hamilton

Os sistemas de equações diferenciais de Euler possuem uma grande importância no ramo da matemática aplicada. Um dos mais significativos conceitos da física matemática é conhecido como *Princípo de Hamilton*, que diz que o movimento de um sistema de partículas, pode ser expresso pela condição de que a integral

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt$$

chamada de integral de Hamilton, seja estacionária, onde T é a energia cinética e U a energia potencial do sistema.

Vamos considerar por exemplo uma partícula de massa m sobre a ação de uma força F. Se denotarmos o vetor deslocamento por x, da segunda Lei de Newton temos que

$$F = m\ddot{x} \tag{5.5}$$

onde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Sendo δx uma variação no deslocamento com $\delta x|_{t=t_1} = 0$ e $\delta x|_{t=t_2} = 0$.

Tomando o produto escalar com δx de ambos os lados da equação 5.5 e integrando temos

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\ddot{x} \cdot \delta x - F \cdot \delta x)dt = 0 \tag{5.6}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}dt = m\dot{x}\delta x|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\delta\dot{x}dt \tag{5.7}$$

mas das condições de valor inicial $m\dot{x}\delta|_{t_1}^{t_2} = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\delta x dt = -\int_{t_1}^{t_2} m\dot{x}\delta\dot{x}dt \tag{5.8}$$

Observando que $\delta\dot{x}^2 = 2\dot{x}\delta\dot{x}$, a equação 5.8 se torna

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\delta x dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}\delta\dot{x}^2 dt \tag{5.9}$$

mas $\frac{m\dot{x}^2}{2}$ é a energia cinética da partícula. Fazendo $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ a equação 5.7 se torna

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\delta x dt = -\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \tag{5.10}$$

e substituindo a equação 5.10 na equação 5.6 temos

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + F\delta x)dt = 0 \tag{5.11}$$

Sabemos que o trabalho realizado por F sobre a partícula percorrendo trajetória σ é dado pela integral de linha $\int_\sigma F ds$. O valor da integral depende somente dos extremos do intervalo ou seja de $\sigma(t_1)$ e $\sigma(t_2)$. Em outras palavras, se nós usarmos outra trajetória com os mesmos extremos do intervalo, nós encontraremos a mesma resposta ou seja, a integral independe do caminho. Então podemos encontrar uma função $\phi(x, y, z)$ chamada de função potencial tal que $\delta\phi = F\delta x$, o que torna a equação 5.11 igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta\phi)dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + \phi)dt = 0 \tag{5.12}$$

Definindo a energia potencial por $U = -\phi$, teremos

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt = 0 \tag{5.13}$$

onde a diferença de energia $L = T - U$ é chamada potencial cinético, ou função lagrangiana, desta forma podemos escrever a equação 5.13 como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$

Exemplo 5.1 *Consideremos o movimento de uma partícula de massa m em três dimensões.*

Se a posição da partícula no instante t é expressa em coordenadas retangulares $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, onde a energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Enquanto que a energia potencial U é dada por

$$U = U(x, y, z)$$

Então

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

O sistema de equações de Euler para L é

$$\begin{aligned} L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} &= 0 \\ L_y - \frac{d}{dt}L_{\dot{y}} &= 0 \\ L_z - \frac{d}{dt}L_{\dot{z}} &= 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

mas se observarmos que $L_x = U_x$, $L_y = U_y$ e $L_z = U_z$ e que

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}), \qquad \frac{d}{dt}L_{\dot{y}} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) \qquad \frac{d}{dt}L_{\dot{z}} = \frac{d}{dt}(m\dot{z})$$

o sistema 5.14 fica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + U_x &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + U_y &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + U_z &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

que pode ser resolvido a partir das condições iniciais.

5.3 Princípio da conservação de energia

Se nós considerarmos um sistema mecânico com n graus de liberdade, onde um sistema é dito ter n graus de liberdade se as suas posições forem determinadas por n coordenadas independentes $q_1, q_2, \ldots, q_n$, então denotando o tempo por t no lugar de x e as variáveis dependentes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ no lugar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ onde q_i são funções do tipo $q_i(t)$ com segunda derivada contínua, sendo assim $\dot{q}_i = \frac{d}{dt}q_i$.

Desta forma há uma função associada ao sistema dinâmico denominada energia cinética que é da forma

$$T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad a_{ij} = a_{ji} \tag{5.16}$$

A energia cinética é portanto uma função homogênea de grau dois. Há ainda uma outra função associada ao sistema dinâmico, a energia potencial $U(q_1, \ldots, q_2)$ que depende somente da posição. Assim podemos observar que $L = L(t, q_1, q_2, \ldots, q_i, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_i)$

Podemos descrever então o *Princípio de Hamilton* como sendo o movimento de um sistema dinâmico, no intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, de uma posição inicial dada a outra final também dada, de tal forma que a integral $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt$ seja estacionária para o movimento. As equações de Euler para o sistema dinâmico são

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{5.17}$$

Em vista do integrando L não depender explicitamente da variável independente t, a equação de Euler pode ser reescrita como

$$T - U - \sum_{i=0}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} = C \tag{5.18}$$

Como U não depende de $\dot{q}_i$, temos

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=0}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Mas T é uma função homogênea quadrática em q_i, logo

$$\sum_{i=0}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_1 T_{\dot{q}_1} + \dot{q}_2 T_{\dot{q}_2} + \ldots + \dot{q}_n T_{\dot{q}_n} = 2T$$

Com isso a equação 5.18 fica

$$\begin{aligned} (T - U - 2T) &= C & (5.19) \\ T + U &= -C & (5.20) \end{aligned}$$

Ou seja, durante o movimento, a soma da energia cinética com a energia potencial não varia com o tempo. Este princípio é conhecido como *Princípio da Conservação de Energia*.

Conclusão

Neste trabalho, a teoria de máximos e mínimos de funções de uma variável real foi extendida para casos mais gerais onde os valores extremos não eram mais um valor real, mas sim funções. O procedimento foi então derivar condições necessárias para a existência de valores extremos para funcionais. Mostrando assim que a equação de Euler é condição necessária para a existência de um valor extremo. A escolha dos exemplos foi feita com base nos problemas da física e da matemática aplicada.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. L. M., Geometria Diferencial e Cálculo das Variações.

[2] COURANT, R., Cálculo Diferencial e Integral, II Volume, Editora Globo.

[3] ELSGOLC, L. E., Calculus of Variations, Pergamon Press, Inc., New York, 1962.

[4] FORRAY, M. J., Variational Calculus in Science and Engineering, McGraw-Hill, Inc., 1968.

[5] BLISS, G. A., Calculus of Variations, The Mathematical Association of America, 1925.

[6] COURANT, R., Diferencial and Integral Calculus, Volume I, Wiley Classics Library Edition Published, 1988.

[7] ÁVILA, Geraldo, S. S., Cálculo 3, Funções de Várias Variáveis, Livros Técnicos e Científicos S.A., 1983.

[8] BUTKOV, Eugene, Física Matemática, Editora Guanabara Koogan S.A.

[9] SAGAN, Hans, Introduction to the Calculus of Variations, McGraw-Hill, Inc., 1969.

[10] ANTON, Howard, Cálculo, um novo horizonte, Bookman, 2000.

[11] GOLDSTINE, Herman Heine, A history of calculus of variations from the seventeenth through the nineteenth century, Springer-Verlag, Inc., New York, 1980.