

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

Andrés Codas

**OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE POÇOS DE  
PETRÓLEO COM INJEÇÃO CONTÍNUA DE GÁS E  
ALINHAMENTO POÇO-SEPARADOR:  
MODELOS LINEARES POR PARTES E ALGORITMOS**

Florianópolis

2011



Andrés Codas

**OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE POÇOS DE  
PETRÓLEO COM INJEÇÃO CONTÍNUA DE GÁS E  
ALINHAMENTO POÇO-SEPARADOR: MODELOS  
LINEARES POR PARTES E ALGORITMOS**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia de  
Automação e Sistemas para a obten-  
ção do Grau de mestre.  
Orientador: Prof. Eduardo Campono-  
gara, Dr.

Florianópolis

2011

Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da  
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:

<http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html>

Andrés Cotas

**OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE POÇOS DE PETRÓLEO COM  
INJEÇÃO CONTÍNUA DE GÁS E ALINHAMENTO  
POÇO-SEPARADOR**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “mestre”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 15 de Dezembro 2011.

---

Prof. Jose Eduardo Ribeiro Cury, Dr.  
Coordenador do Curso

---

Prof. Eduardo Camponogara, Dr.  
Orientador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Eduardo Camponogara, Dr.  
Presidente

---

Ricardo Cunha Mattos Portella, Dr.



---

Victor Fernandes Cavalcante, Dr.

---

Prof. Agostinho Plucenio, Dr.





Para mi madre que me enseñó el valor del trabajo, la dedicación y la perseverancia.



## **AGRADECIMENTOS**

A meu professor, orientador e amigo Eduardo Camponogara pelo apoio incondicional no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) inicialmente e logo a Petrobras pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

A meus amigos que apoiaram e incentivaram a realização deste trabalho.

A minha família que da suporte desde longe para atingir meus objetivos.



*Deus não joga dados*

Albert Einstein



## RESUMO

O problema de alocação de gás com restrições de alinhamento poço-separador é um problema inteiro-misto não-linear de dificuldade considerável. Para resolvê-lo, uma formulação inteira-mista (compacta) é obtida por meio da linearização por partes das curvas não lineares. Dois tipos de variáveis binárias são necessárias, uma para modelar a linearização e a outra para modelar as direções de alinhamento. Uma nova formulação (integrada) que combina as variáveis de decisão de linearização e alinhamento é proposta. Na formulação integrada um único tipo de variável de decisão binária é necessária. A estrutura das duas formulações é explorada para obter cortes de cobertura. Testes numéricos mostram que a introdução de planos de corte por meio de algoritmos de *cut-and-branch* diminui o tempo de resolução. A solução da formulação integrada usando o algoritmo de planos de corte é mais rápida apesar de ter mais variáveis do que a formulação compacta.

**Palavras-chave:** linearização por partes, cortes de cobertura, alocação de gás de injeção, restrição de alinhamento.





## ABSTRACT

The lift-gas allocation problem with well-separator routing constraints is a mixed-integer nonlinear program of considerable complexity. To this end, a mixed-integer linear formulation (compact) is obtained by piecewise-linearizing the nonlinear curves, using binary variables to express the linearization and routing decisions. A new formulation (integrated) combining the decisions on linearization and routing is developed by using a single type of binary variable. The structures of both formulations are explored to generate lifted cover cuts. Numerical tests show that the use of cutting planes in a cut-and-branch scheme accelerates the resolution time. The solution of the integrated formulation using cutting-plane generation is faster in spite of having more variables than the compact formulation.

**Keywords:** piecewise linearization, lifted cover cuts, lift-gas allocation, routing constraints.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	<i>Gas-lift</i> .....	34
Figura 2	Curva de performance de poço.....	35
Figura 3	Rede de produção.....	41
Figura 4	Formulações equivalentes.....	44
Figura 5	Aproximação utilizando a formulação Clássica.....	49
Figura 6	Aproximação pela formulação proposta por Sherali.....	52



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Curva de performance dos poços e frações.....	42
Tabela 2	Capacidade de separação. ....	42
Tabela 3	Tempo médio (s) de execução. ....	75
Tabela 4	Impacto de cortes.....	76
Tabela 5	Comparação de tempo de execução entre formulações. .	77
Tabela 6	Impacto da utilização da heurística gulosa. ....	78



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CPP	Curva de Performance do Poço.....	29
MINLP	Programação Não Linear Inteira-Mista .....	30
MILP	Programação Linear Inteira-Mista.....	30





## LISTA DE SÍMBOLOS

CPP	Curva de Performance do Poço .....	29
$P$	Problema .....	38
$N$	Número total de poços considerados no problema .....	39
$\mathcal{N}$	Conjunto de poços considerados no problema .....	39
$\mathcal{N}_s$	Conjunto de poços cuja produção pode ser enviada ao separador $s$ .....	39
$S$	Número total separadores considerados no problema .....	39
$\mathcal{S}$	Conjunto de separadores considerados no problema .....	39
$\mathcal{S}_n$	Conjunto de separadores que podem receber a produção do poço $n$ .....	39
$\mathcal{H}$	Conjunto de fases do fluido .....	39
g	Fase gás .....	39
o	Fase óleo .....	39
w	Fase água .....	39
p	Produção, união das fases óleo, água e gás .....	39
$q_i^{\max}$	Vazão de gás de injeção disponível .....	39
$q_p^{s,\max}$	Limite de tratamento da fase produção do separador $s$ .....	39
$q_g^{s,\max}$	Limite de tratamento da fase gás do separador $s$ .....	39
$q_o^{s,\max}$	Limite de tratamento da fase óleo do separador $s$ .....	39
$q_w^{s,\max}$	Limite de tratamento da fase água do separador $s$ .....	39
$l_n$	Limite inferior de vazão de injeção de gás no poço $n$ .....	39
$u_n$	Limite superior de vazão de injeção de gás no poço $n$ .....	39
$f$	Função objetivo .....	40
$q_i^n$	Vazão de injeção alocada ao poço $n$ .....	40
$f_n$	Função ganho associada ao poço $n$ .....	40
$p_g$	Ganho obtido pela venda de um barril padrão de gás .....	40
$p_o$	Ganho obtido pela venda de um barril padrão de óleo .....	40
$p_w$	Custo de tratamento de um barril padrão de água .....	40
$y_n$	Variável binária que indica a ativação do poço $n$ .....	40
$z_{n,s}$	Variável binária que indica a ativação do alinhamento do poço $n$ ao separador $s$ .....	40
$q_h^{n,s}$	Vazão de fase $h$ proveniente do poço $n$ direcionada ao separador $s$ .....	40

$q_g^n$	Vazão de gás fluindo do poço $n$ .....	40
$q_o^n$	Vazão de óleo fluindo do poço $n$ .....	40
$q_w^n$	Vazão de água fluindo do poço $n$ .....	40
$\tilde{P}$	Problema aproximado utilizando a formulação compacta...	54
$(q_{i,k}^n, q_{h,k}^n)$	$k$ ésimo ponto de amostragem de $q_h^n(q_i^n)$ .....	54
$K$	Número de pontos de amostragem utilizados na discretização	54
$\mathcal{K}$	Conjunto de intervalos gerados pela amostragem da CPP ..	54
$\tilde{q}_h^n$	Vazão de fluido de fase $h$ do poço $n$ aproximada pela função linear por partes .....	54
$\tilde{q}_h^{n,s}$	Vazão de fluido de fase $h$ do poço $n$ ao separador $s$ aproximada pela função linear por partes .....	54
$\lambda_{L,k}^n$	Peso associado à amostra $k$ da CPP do poço $n$ na linearização por partes .....	54
$\lambda_{R,k}^n$	Peso associado à amostra $k$ da CPP do poço $n$ na linearização por partes .....	54
$\zeta_k^n$	Variável binária que indica se a aproximação linear $k$ é utilizada para o poço $n$ .....	54
$\tilde{P}^\dagger$	Problema aproximado utilizando a formulação integrada...	55
$\zeta_k^{n,s}$	Variável binária que indica simultaneamente se a linearização $k$ e o separador $s$ são utilizados para o poço $n$ .....	55
$\lambda_{L,k}^{n,s}$	Peso associado à amostra $k$ da CPP do poço $n$ e ao separador $s$ na linearização por partes .....	55
$\lambda_{R,k}^{n,s}$	Peso associado à amostra $k$ da CPP do poço $n$ e ao separador $s$ na linearização por partes .....	55
$\Omega_s$	Conjunto de níveis de operação dos poços que podem ter sua produção direcionada ao separador $s$ .....	56
$(n,k)$	Par representando um nível de operação, o poço $n$ opera no nível $k$ .....	56
$\Omega$	Conjunto de níveis de operação de todos os poços .....	56
$\Omega^\dagger$	Conjunto de níveis de operação e alinhamentos de todos os poços .....	57
$\mathbf{w}$	Vetor <i>surrogate</i> associado às capacidades de separação .....	59
$q_k^n(\mathbf{w})$	Capacidade <i>surrogate</i> mínima consumida pelo poço $n$ quando opera no nível $k$ .....	59
$q(C, \mathbf{w})$	Capacidade <i>surrogate</i> mínima consumida pelos poços operando nos níveis dados em $C$ .....	59

$q^{\max}(U, \mathbf{w})$	Capacidade <i>surrogate</i> dos separadores em $U$ .....	59
$U$	Conjunto de separadores .....	59
$C$	Cobertura .....	59
$C(U)$	Cobertura para o conjunto de separadores $U$ .....	59
$E[C(U)]$	Extensão da cobertura $C(U)$ .....	61
$\beta_k^n$	Fator de <i>lifting</i> aproximado do nível de operação $(n, k)$ .....	62
$D$	Disponibilidade de recursos para a operação do campo .....	73
h	Disponibilidade alta .....	73
m	Disponibilidade média .....	73
l	Disponibilidade baixa .....	73
$t_i$	Tempo computacional consumido pelo algoritmo $i$ para resolver um problema .....	76



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	29
1.1 CONTRIBUIÇÃO .....	30
1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	31
<b>2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	33
2.1 ELEVAÇÃO ARTIFICIAL POR INJEÇÃO CONTÍNUA DE GÁS: UMA BREVE REVISÃO .....	33
2.2 PROBLEMA DE SEPARAÇÃO NA PRODUÇÃO DE ÓLEO E GÁS .....	34
2.3 TRABALHOS RELACIONADOS .....	36
2.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	38
2.5 INSTÂNCIA EXEMPLO .....	41
2.6 SUMÁRIO .....	42
<b>3 FUNDAMENTOS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA</b> .	43
3.1 FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS INTEIROS .....	43
3.2 RELAXAÇÕES .....	45
3.2.1 Relaxação Linear .....	46
3.2.2 Relaxação <i>Surrogate</i> .....	46
3.3 ALGORITMOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA-MISTA .....	46
3.4 LINEARIZAÇÃO POR PARTES .....	48
3.4.1 Formulação Clássica .....	49
3.4.2 Formulação proposta por Sherali .....	50
3.4.3 Algumas observações sobre formulações lineares por partes .....	51
3.5 SUMÁRIO .....	52
<b>4 ABORDAGEM DE SOLUÇÃO</b> .....	53
4.1 FORMULAÇÃO LINEAR POR PARTES .....	53
4.1.1 Formulação Compacta .....	53
4.1.2 Formulação Integrada .....	55
4.1.3 Notação .....	56
4.1.4 Conversão entre Formulações .....	57
4.2 DESIGUALDADES VÁLIDAS PARA A FORMULAÇÃO INTEGRADA .....	58
4.2.1 Desigualdades de cobertura <i>Surrogate</i> .....	59
4.2.2 Coberturas <i>Surrogate</i> estendidas .....	61
4.2.3 Separação .....	63

4.3	DESIGUALDADES VÁLIDAS PARA A FORMULAÇÃO COMPACTA .....	65
4.3.1	Separação .....	69
4.4	DESIGUALDADES VÁLIDAS PARA A DISPONIBILIDADE DE GÁS DE INJEÇÃO .....	69
4.4.1	Desigualdade de cobertura de gás de injeção .....	69
4.4.2	Extensão das coberturas .....	70
4.5	SUMÁRIO .....	71
5	ANÁLISE COMPUTACIONAL .....	73
5.1	CENÁRIOS .....	73
5.2	ALGORITMO .....	74
5.3	ANÁLISE .....	74
5.3.1	Tempo de execução .....	74
5.3.2	Impacto da utilização de planos de corte .....	76
5.3.3	Comparação de formulações .....	77
5.3.4	Comparação de algoritmos de separação .....	77
5.4	SUMÁRIO .....	78
6	CONCLUSÃO .....	81
	Referências Bibliográficas .....	85

# 1 INTRODUÇÃO

A demanda crescente de petróleo e os mercados competitivos induzem as indústrias petrolíferas a inovar em tecnologia, visando a redução de custos e a otimização dos processos de produção, sempre respeitando as restrições ambientais. Em resposta a estas demandas foi proposto o conceito de *campos inteligentes*<sup>1</sup> (UNNELAND; HAUSER, 2005), ideia que procura explorar recursos tecnológicos visando obter ganhos em eficiência. Para que estes novos recursos tecnológicos possam ser empregados no sentido de aumentar a produção, novos modelos e algoritmos deverão ser desenvolvidos. Modelos de reservatório e ferramentas de simulação de processos de extração de petróleo são cada vez mais rápidos e exatos. Toda a informação útil gerada por estas novas tecnologias poderia ser aplicada de uma forma mais eficaz nos campos de petróleo através da conciliação entre as diferentes áreas de conhecimento. Este trabalho propõe modelos e algoritmos no sentido de fortalecer a integração existente entre modelo de reservatório, ferramentas de extração e a operação dos campos de petróleo, para tornar a estratégia de produção eficiente.

As estratégias de produção são planejadas em diferentes escalas de tempo, variando desde o tempo de vida do poço até a escala mensal. Na escala de tempo de vida do poço são tomadas decisões relativas ao método de extração de óleo e as instalações a serem construídas dependendo das características do reservatório. Na escala de tempo anual estratégias de produção são planejadas visando satisfazer as necessidades de mercado. Por fim, estratégias mensais de produção são geradas, que dependem da produção passada, das características do reservatório, do método de extração e das instalações disponíveis incluindo os possíveis alinhamentos entre poços e separadores. Portanto, a produção ótima de um campo depende de bons modelos para prever a produção dos poços e de algoritmos capazes de resolver problemas de otimização complexos.

Campos de produção de grande escala como Urucu (CAMPOS et al., 2010) e Troll (GUNNERUD; FOSS, 2010) possuem vários separadores de água-óleo-gás. Neste tipo de campos surge a necessidade de integração da informação da Curva de Performance do Poço (CPP), a disposição topológica dos separadores e a capacidade das instalações, de tal maneira a maximizar o ganho obtido pela produção. Esta não é

---

<sup>1</sup> *Campos inteligentes* também é conhecido como *operações integradas, gerenciamento digital integrado* (GeDig) e *campos de petróleo digitais do futuro*

uma tarefa fácil pois as CPPs não são convexas e a existência de múltiplas possibilidades de alinhamento tornam a tarefa um problema de Programação Não Linear Inteiro-Misto (MINLP) com um conjunto de soluções não conexo e disjunto.

Este trabalho está focado na escala de tempo diária e mensal, considerando o método de extração com injeção contínua de gás (*gas-lift*) aplicado a campos de petróleo de grande porte com restrições de separação. O objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento e avaliação de algoritmos para diminuir o tempo de resolução do problema de maximização do ganho econômico da produção de óleo. Apesar destes problemas serem tratados desde a década dos anos 70 (REDDEN; SHERMAN; BLANN, 1974), a maioria das abordagens são conservativas e convergem a soluções não ótimas. Aqui essas abordagens são generalizadas ao considerar CPPs não lineares, restrições de alinhamento e restrições de separação ao mesmo tempo. Os modelos não lineares são linearizados utilizando-se abordagens semelhantes a outros trabalhos (GUNNERUD; FOSS, 2010; MISENER; GOUNARIS; FLOUDAS, 2009; CAMPONOGARA et al., 2010). Duas formulações são apresentadas, a primeira utiliza variáveis binárias para indicar o alinhamento poço-separador e a linearização das curvas (*compacta*) e a segunda utiliza uma única variável binária combinando as decisões citadas anteriormente (*integrada*). A estrutura de ambas as formulações é explorada para obter cortes de cobertura que são submetidos a um procedimento de *lifting* e utilizados em algoritmos de planos de corte. Espera-se que com a introdução destes planos de corte à formulação inicial do problema, o tempo computacional para a resolução seja reduzido. Esta técnica é conhecida como *cut-and-branch* e foi aplicada com sucesso em outros trabalhos (CAMPONOGARA; CONTO, 2005; CROWDER; JOHNSON; PADBERG, 1983).

## 1.1 CONTRIBUIÇÃO

Com o objetivo de resolver o problema de alocação de gás e alinhamento poço-separador foram geradas as contribuições seguintes:

- Formulação MINLP do problema.
- Duas formulações que aproximam o problema MINLP por programação linear inteira-mista (MILP), obtidas pela aplicação de uma ferramenta de linearização por partes sobre a formulação MINLP.



- Desenvolvimento, separação e *lifting* aproximado de desigualdades válidas inspiradas em desigualdades de cobertura do problema da mochila.
- Análise de performance das formulações e de impacto da aplicação das desigualdades válidas.

## 1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Este documento está estruturado da seguinte forma. O Capítulo 2 descreve brevemente o processo de elevação artificial por injeção contínua de gás e o problema de separação das fases do fluido na produção. Em seguida é apresentada uma pequena revisão bibliográfica que descreve problemas similares abordados na literatura. Finalmente o problema é formulado como um MINLP e é apresentada uma instância exemplo que será utilizada ao longo do documento.

No Capítulo 3 é feita uma revisão de conceitos que auxiliam a melhor compreensão das ferramentas de programação linear inteira-mista utilizadas na abordagem de solução do problema. Logo são revisados os conceitos de formulação e relaxação, tipos de relaxações frequentemente utilizadas são apresentadas. Por último a ferramenta de linearização por partes é apresentada junto com os modelos de linearização de interesse para esta dissertação.

No Capítulo 4 é aplicada a ferramenta de linearização por partes e obtidas duas formulações MILP que aproximam o problema não linear. Em seguida são desenvolvidas desigualdades válidas e *lifting* aproximado das desigualdades para cada formulação. São propostos dois algoritmos de separação de desigualdades válidas: o primeiro consiste num programa inteiro e o segundo é uma heurística gulosa.

No Capítulo 5 são avaliadas as formulações desenvolvidas e o impacto da aplicação das desigualdades válidas.

Por último, o Capítulo 6 apresenta as conclusões e propostas de trabalhos futuros que foram percebidos durante o desenvolvimento desta dissertação.



## 2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Este trabalho busca desenvolver um sistema de suporte à decisão para um campo de petróleo composto por um conjunto de poços produtores, um conjunto de separadores e dutos que geram possíveis alinhamentos poço-separador. Os poços são operados por *gas-lift* contínuo, cada poço possui uma curva de performance (CPP) que relaciona a vazão de gás de injeção aplicada à vazão de fluidos produzidos. Cada poço possui um conjunto de separadores que podem atender a produção, os separadores têm capacidade de tratamento de vazão de fluido limitada. O problema consiste em determinar a vazão de gás de injeção por poço e os alinhamentos poço-separador que otimizam uma função de ganho econômico.

Neste capítulo são revisados os conceitos ligados à engenharia de petróleo necessários para a compreensão do problema, são brevemente discutidos trabalhos relacionados e finalmente é apresentada a formulação do problema com uma instância de exemplo.

### 2.1 ELEVAÇÃO ARTIFICIAL POR INJEÇÃO CONTÍNUA DE GÁS: UMA BREVE REVISÃO

No processo de elevação por injeção contínua de gás (*gas-lift*) gás pressurizado é injetado no fundo do tubo de produção do poço de petróleo. Este processo é ilustrado na Figura 1 (retirada de (WINKLER; BLANN, 2007)).

O gás misturado com o óleo diminui o peso da coluna de fluido, reduzindo então a pressão de fundo ( $P_{wf}$ ). A diferença entre a pressão de reservatório ( $P_R$ ) e a pressão de fundo induz a vazão de fluidos do reservatório para o poço. Diminuindo a pressão de fundo aumenta-se a produção. O controle de injeção de gás é feito através de reguladores de vazão na superfície (THOMAS, 2001).

A CPP relaciona a vazão de gás injetada à vazão de fluidos produzida. Uma CPP característica é ilustrada na Figura 2.

A CPP da Figura 2 representa um poço que não responde a baixas vazões de gás de injeção, a vazão mínima de injeção para produção é aquela do ponto 'A'. Os pontos entre 'A' e 'C', em particular o 'B', são os pontos de interesse econômico para operar o poço. Quando o custo de injeção é nulo e a disponibilidade de gás infinita, o ponto ótimo de operação é o 'C'. Entretanto quando existem restrições de compressão,

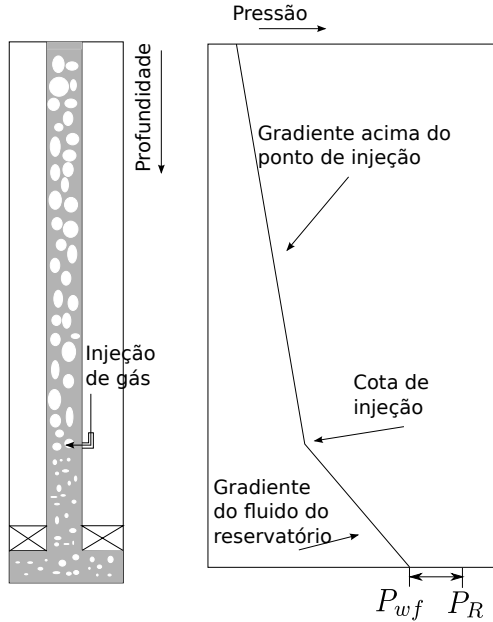


Figura 1: *Gas-lift*.

o ponto 'C' pode não ser factível. O ponto 'D' não é de interesse econômico pois existe outro ponto de operação no qual é possível produzir o mesmo injetando menos gás.

## 2.2 PROBLEMA DE SEPARAÇÃO NA PRODUÇÃO DE ÓLEO E GÁS

Poços de petróleo ou gás produzem uma mistura gasosa (gás natural), líquida (hidrocarboneto e água) e eventualmente sólida (pequenas partículas). A água normalmente vem com outros elementos dissolvidos, entre eles grandes quantidades de sal. Na mistura de gases também encontra-se nitrogênio, dióxido de carbono e gás sulfídrico; sólidos encontrados são areia do reservatório e restos de corrosão dos tubos (THRO, 2007).

O objetivo final da operação é produzir óleo e gás que atendam as especificações do consumidor. Estas especificações são dadas em quantidade máxima de impurezas presentes nos produtos requeridos.

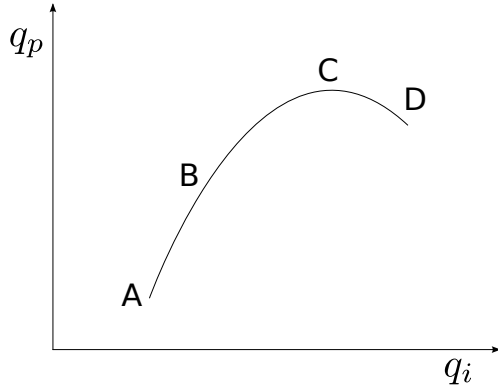


Figura 2: Curva de performance de poço.

A água deve ser tratada antes de ser descartada, implicando num custo de produção. Os fins mais comuns da água são:

- Eliminação no mar, no caso de plataformas *offshore*.
- Re-injeção no reservatório para manutenção da pressão interna.
- Uso em caldeiras de gás.
- Irrigação.

Antes do transporte do fluido produzido existe uma primeira etapa de separação. Este tratamento é diferente daquele que acontece em refinarias pois a transformação é de natureza física e não química. Estes processos físicos são realizados por separadores onde acontece separação de fases, mudanças de temperatura e pressão.

A separação acontece em vários estágios que dependem da pressão de produção. Cada estágio possui um separador com referência de pressão controlada e este conjunto de separadores em série é chamado de trem de separação. A produção acontece a pressões muito superiores à pressão atmosférica, portanto é necessário vários estágios de separação de tal maneira a tratar o gás dissolvido nos líquidos. No final do processo o óleo produzido é transferido para um tanque a pressão atmosférica (THRO, 2007).

Em campos de petróleo de grande porte, vários trens de separação são utilizados para dividir as fases do fluido. Neste trabalho, cada trem de separação é considerado como um único separador, pois os

separadores em cada trem processam a produção em série. Considera-se que existem diferentes separadores quando estes podem processar a produção em paralelo.

Idealmente, a capacidade de separação instalada não deve restringir a operação dos poços, entretanto, restrições de separação podem existir dependendo do projeto inicial destas instalações ou no caso em que a produção aumente pela perfuração de novos poços não previstos inicialmente. Depois de um longo período de operação, certos poços podem apresentar comportamento de conificação, como descrito em (CAMPOS et al., 2010). Poços operando em conificação produzem mais água ou gás que o esperado, portanto a capacidade de separação das instalações que tratam estes poços pode ser ultrapassada.

Os separadores que atendem a produção dos poços podem estar distribuídos em uma vasta área. Dependendo da localização dos poços e a disposição dos separadores, tubulações para o escoamento da produção entre esses elementos são instaladas. Quando existem vários possíveis alinhamentos entre um poço e separadores nasce o problema de escolha de alinhamento que é de natureza combinatória inteira.

## 2.3 TRABALHOS RELACIONADOS

Redden, Sherman e Blann (1974) propuseram um procedimento analítico para determinar a distribuição de gás mais proveitosa para poços operados por *gas-lift*. O procedimento utiliza dados de superfície para prever o comportamento da produção do poço. A solução deles foi utilizada na Venezuela em um reservatório com 1500 poços e no Texas com 150 poços. Dadas as limitações na compressão de gás eles propuseram um algoritmo iterativo para reduzir a injeção nos poços baseado em categorias de poços.

Buitrago, Rodríguez e Espin (1996) estiveram entre os pioneiros na pesquisa de uma solução para o problema de otimização global de alocação de gás para poços operados por *gas-lift* considerando restrições de disponibilidade de gás. A solução proposta por eles consiste em um algoritmo que combina técnicas estocásticas de exploração de domínio e heurísticas para calcular direções de descenso. Eles deram atenção especial a poços onde não existe uma resposta instantânea à injeção de gás.

Grothey e McKinnon (2000) modelaram a rede completa de produção de *gas-lift* incluindo os compressores, *manifolds*, poços e separadores. Eles resolveram um problema de programação não linear, com

descontinuidades nas CPPs. Eles mostraram que métodos especializados de decomposição podem ser utilizados para tratar este tipo de problema.

Alarcón, Torres e Gomez (2002) propuseram um método de otimização global para a injeção de gás para um grupo de poços utilizando programação não linear com restrições. Eles consideraram restrições na injeção máxima de gás e discutiram o custo da compressão de gás.

Wang, Litvak e Aziz (2002) propuseram uma técnica de otimização para alinhar vazões de produção e vazões de gás de injeção para os poços sujeito a restrições de vazão e pressão. O problema resultante é resolvido pelo método de programação quadrática sequencial.

Kosmidis, Perkins e Pistikopoulos (2005) modelaram uma rede de produção com os seguintes elementos: reservatório, restrições de vazão e pressão nos *manifolds* e separadores, restrições lógicas de rede, restrições de vazão nas linhas e restrições no número máximo de mudanças de operação de poços. O problema resultante é um programa não linear inteiro-misto que foi resolvido com uma sequência de programas inteiros-mistos lineares.

Camponogara e Nakashima (2006a) usaram programação dinâmica para otimizar a distribuição de uma vazão limitada de gás de injeção. Eles introduziram restrições de precedência na ativação dos poços. Uma vantagem da programação dinâmica está na solução de uma família de problemas, cobrindo toda a faixa de disponibilidade de gás de injeção.

Ray e Sarker (2007) aplicaram algoritmos genéticos para uma versão multiobjetivo do problema de alocação de gás de injeção. Em um primeiro estágio procura-se a maximização de óleo produzido e em um segundo estágio a minimização de gás alocado para o processo.

Misener, Gounaris e Floudas (2009) resolveram um problema de otimização global da operação de poços por *gas-lift* utilizando formulações lineares por partes diferentes da curva de produção dos poços. As instâncias utilizadas consistem em um grupo de poços que podem ser ativados ou não e, se ativados, a vazão de gás alocada obedece restrições de máximo e mínimo. Eles utilizaram quatro formulações diferentes para resolver o problema e compararam a eficiência destas formulações.

Camponogara et al. (2010) desenvolveram um método para estimar a CPP por meio de medições de pressão de fundo e um estimador de disponibilidade de vazão mássica de gás fornecida pelas estações de compressão para o *manifold* de *gas-lift*. Eles implementaram um algoritmo de programação linear inteira-mista para resolver o problema

de alocação de gás considerando cada curva de desempenho dos poços, incluindo restrições associadas aos poços e separadores. Os algoritmos foram validados no simulador de escoamento multifásico OLGA<sup>®</sup>.

Campos et al. (2010) estabeleceram os requisitos principais para atingir uma produção integrada de um campo de petróleo. Eles ressaltaram a importância de modelos precisos de poços para prever efeitos de conificação e a integração com algoritmos de otimização em tempo real para atingir melhores condições de operação. Eles comentaram a importância de algoritmos capazes de alinhar vazões de produção. Este tipo de problema requer a utilização de algoritmos de programação inteira-mista.

Gunnerud e Foss (2010) resolveram o problema de otimização de produção de óleo do campo Troll Oeste. Este campo é estruturado em *clusters* e portanto é adequado para aplicar decomposições. As curvas não lineares são linearizadas por partes, assim o problema é reduzido a um programa linear inteiro-misto. A decomposição Dantzig Wolfe foi aplicada, o que permitiu a resolução do problema com um algoritmo de *branch-and-price*.

Apesar de existirem muitos trabalhos abordando otimização para o processo de *gas-lift*, existem poucos trabalhos tratando o problema descrito em (CAMPOS et al., 2010). Neste trabalho procura-se integrar os modelos recentes de produção com as limitações dadas por restrições nas facilidades disponíveis. Procura-se desenvolver formulações eficientes e identificar ferramentas que melhoram o desempenho dos mecanismos de resolução visando aplicações de campo. A literatura atual não considera um estudo comparativo de eficiência de formulações para resolver o problema de otimização com restrições impostas pela disponibilidade de vários separadores, tal como no campo de Urucu descrito em (CAMPOS et al., 2010), que demanda vários separadores e com fenômenos de conificação que produzem variações diárias na produção dos poços.

## 2.4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de distribuir uma vazão limitada de gás de injeção sob múltiplas restrições e com seleção de unidades de separação pode ser formulado em programação matemática da seguinte maneira:



$$P: \quad \max \quad f = \sum_{n \in \mathcal{N}} f_n(q_i^n) \quad (2.1a)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{n \in \mathcal{N}} q_i^n \leq q_i^{\max} \quad (2.1b)$$

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$l_n y_n \leq q_i^n \leq u_n y_n \quad (2.1c)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} z_{n,s} = y_n \quad (2.1d)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} q_h^{n,s} = q_h^n(q_i^n), h \in \mathcal{H} \quad (2.1e)$$

$$0 \leq q_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max} z_{n,s}, s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H} \quad (2.1f)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_s} q_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max}, s \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{H} \quad (2.1g)$$

$$y_n \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N} \quad (2.1h)$$

$$z_{n,s} \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n \quad (2.1i)$$

onde os parâmetros são:

- $N$  é o número total de poços considerados no problema,  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  e  $\mathcal{N}_s \subseteq \mathcal{N}$  são os poços cuja produção pode ser enviada ao separador  $s$ ;
- $S$  é o número total de separadores aos quais a produção é enviada,  $\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$  e  $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}$  é o conjunto de separadores que podem receber a produção do poço  $n$ ;
- $\mathcal{H} = \{\text{o, g, w, p}\}$  contém as vazões monofásicas óleo (o), gás (g) e água (w); e a vazão multifásica produção (p) que consiste da composição das vazões monofásicas;
- $q_i^{\max}$  é a vazão de gás de injeção disponível para distribuição entre os  $N$  poços;
- $q_p^{s,\max}$ ,  $q_o^{s,\max}$ ,  $q_g^{s,\max}$  e  $q_w^{s,\max}$  são as capacidades de separação e os limites de tratamento de óleo, gás e água, respectivamente, para o separador  $s$ ;
- $l_n$  ( $u_n$ ) é o limite inferior (superior) de vazão de injeção de gás do poço  $n$  devido a questões técnicas ou estratégicas, como a estabilidade da produção e limites de pressões e vazão;

e as variáveis são:

- $f$  é a função objetivo que representa o ganho econômico dado pela produção;
- $q_i^n$  é a vazão de injeção alocada ao poço  $n$ ;
- $f_n(q_i^n) = p_o q_o^n(q_i^n) + p_g q_g^n(q_i^n) - p_w q_w^n(q_i^n) - p_i q_i^n$  é a função ganho para o poço  $n$ ;  $p_o$  e  $p_g$  representam o lucro obtido pela venda de um barril padrão de óleo e gás, respectivamente,  $p_w$  é o custo de tratamento de um barril padrão de água antes do descarte e  $p_i$  representa o custo de injeção de gás por cada unidade de volume de gás de injeção<sup>1</sup>;
- $y_n$  é uma variável binária que assume o valor 1 se o poço  $n$  será ativado e 0 caso contrário;
- $z_{n,s}$  assume o valor 1 se a produção do poço  $n$  será enviada ao separador  $s$  e 0 caso contrário;
- $q_h^{n,s}$  é a vazão de fase  $h$  proveniente do poço  $n$  direcionada ao separador  $s$ , a qual depende da curva de performance do poço dada por  $q_h^n(q_i^n)$ .

Limites de compressão de gás de injeção, de vazão de injeção de gás nos poços e de capacidade de separação de óleo, gás e água são estabelecidos nas restrições (2.1b), (2.1c) e (2.1g), respectivamente.

O alinhamento de poços para separadores é determinado pelas restrições (2.1d)-(2.1f) e garantem que a produção de um poço é enviada para precisamente um separador, enquanto a produção do poço  $n$  enviada ao separador  $s$  é nula quando  $z_{n,s} = 0$  e em caso contrário, limitada pela capacidade máxima e mínima.

O problema de distribuição de gás de injeção com alinhamento poço-separador é um problema de programação não linear inteiro-misto de dificuldade computacional considerável, devido à característica não linear da CPP  $q_h^n$  e às variáveis discretas. O problema é NP-difícil<sup>2</sup> pois o problema padrão da mochila<sup>3</sup> é redutível a  $P$  em tempo e espaço polinomial (CAMPONOGARA; NAKASHIMA, 2006a).

<sup>1</sup>Contudo, qualquer função separável das vazões de injeção e das decisões discretas (ativação e alinhamento) pode ser utilizada.

<sup>2</sup>Um problema é dito NP-difícil se for um problema canônico de decisão para o qual não se conhece algoritmo eficiente (tempo polinomial no tamanho da instância).

<sup>3</sup>O problema padrão da mochila consiste em selecionar dentre um conjunto finito de objetos, aqueles que podem ser acomodados numa caixa (mochila) de capacidade limitada de tal maneira a maximizar o valor agregado dos objetos.

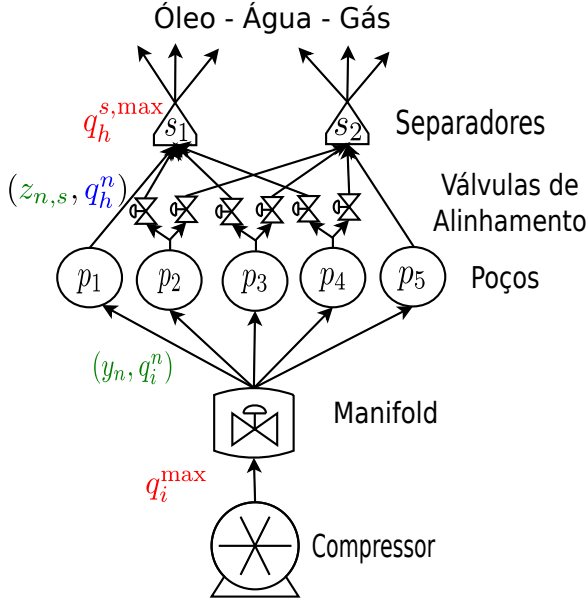


Figura 3: Rede de produção.

## 2.5 INSTÂNCIA EXEMPLO

A instância exemplo é constituída por um grupo de 5 poços e 2 separadores. As CPPs dos poços são obtidas a partir daquelas apresentadas em (BUIRAGO; RODRÍGUEZ; ESPIN, 1996). Cada curva é projetada para um espaço de funções côncavas da forma  $q_p(q_i) = \alpha_0 + \alpha_1 q_i + \alpha_2 q_i^2 + \alpha_3 \ln(q_i + 1)$  (ALARCÓN; TORRES; GOMEZ, 2002) e quatro amostras são obtidas para descrever a curva. As frações de óleo  $\gamma_o$ , gás  $\gamma_g$  e água  $\gamma_w$  são consideradas constantes, definidas de tal maneira a satisfazer a relação  $q_h = \gamma_h q_p$ ,  $h \in \mathcal{H} \setminus \{p\}$  e independentes da injeção de gás. Todas as curvas são amostradas nos mesmos pontos  $q_i$ . A Tabela 1 contém a amostragem das curvas. As unidades de medida relativas as vazões e capacidades de separação não são explícitas pois a análise de algoritmos desenvolvida neste trabalho é independente das grandezas consideradas. A Figura 3 ilustra a rede de produção com as instalações e as restrições associadas.

A vazão de gás disponível para injeção é fixada em 280, valor que não permite ativar todos os poços simultaneamente. Na Tabela 2

Tabela 1: Curva de performance dos poços e frações.

$n$	$q_p^{n,1}$	$q_p^{n,2}$	$q_p^{n,3}$	$q_p^{n,4}$	$\gamma_o^n$	$\gamma_g^n$	$\gamma_w^n$
1	650,12	1467,90	1484,98	1437,23	0,70	0,20	0,10
2	923,08	1962,76	1981,83	1850,79	0,75	0,17	0,08
3	1076,82	2255,50	2253,84	2104,91	0,65	0,25	0,10
4	883,09	1895,33	1906,90	1797,93	0,65	0,20	0,15
5	780,20	1761,49	1781,91	1724,72	0,60	0,30	0,10

$n$	$q_i^{n,1}$	$q_i^{n,2}$	$q_i^{n,3}$	$q_i^{n,4}$
*	80,00	1297,67	2515,33	3733,00

Tabela 2: Capacidade de separação.

$s$	$q_p^{s,\max}$	$q_o^{s,\max}$	$q_g^{s,\max}$	$q_w^{s,\max}$
1	1459	1021,3	291,8	145,9
2	1459	1021,3	291,8	145,9

são apresentadas as capacidades de separação que foram definidas de tal maneira a restringir a produção. As restrições de separação combinadas com a disponibilidade de gás de injeção obrigam a utilização dos dois separadores, impossibilitando a utilização de um único separador para tratar a produção total dos poços. Os poços pertencentes ao conjunto  $\mathcal{N}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$  podem ter sua produção direcionada ao separador 1, enquanto os poços no conjunto  $\mathcal{N}_2 = \{2, 3, 4, 5\}$  podem ter sua produção processada no separador 2.

## 2.6 SUMÁRIO

Nesta seção foi apresentado o problema que é abordado na dissertação. Inicialmente é realizada uma revisão dos conceitos ligados à engenharia de petróleo, tais como elevação artificial por injeção contínua de gás e o problema de separação na produção. Em seguida é feita uma revisão bibliográfica que comenta brevemente trabalhos relacionados. Logo o problema a ser tratado é formulado como um programa não linear inteiro-misto. Por último descreveu-se uma instância do problema que será utilizada a modo de exemplo ilustrativo nos próximos capítulos.

### 3 FUNDAMENTOS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA

A programação inteira trata problemas com variáveis discretas, indivisíveis ou inteiras. Estas variáveis podem modelar decisões binárias de liga-desliga, compra-venda ou quantidades discretas, como quantidade de caminhões a serem utilizados numa construção, número de separadores necessários num campo de petróleo, *etc.* Como pode-se observar nos exemplos citados, problemas envolvendo variáveis inteiras aparecem em diferentes domínios e uma solução de boa qualidade pode trazer ganhos econômicos relevantes.

Em muitas ocasiões, quando problemas desta natureza se apresentam, soluções factíveis sub-ótimas são tomadas, seja por desconhecimento das ferramentas de programação inteira ou por falta de tempo para tomar uma decisão. A priori, é impossível saber quanto ganho se está deixando de lado pela adoção de uma solução arbitrária e este ganho pode ser significativo.

A utilização adequada de ferramentas de programação inteira permite encontrar soluções com certificados de qualidade, em tempo computacional razoável. É importante distinguir problemas fáceis de difíceis e as características da representação do problema para se escolher, customizar e utilizar um algoritmo corretamente na resolução do problema.

O barateamento e por consequência a sobra de capacidade computacional das máquinas é cada vez mais frequente, assim também como a disseminação massiva de microcontroladores em praticamente todos os aparelhos do nosso cotidiano. Estes fenômenos vêm acontecendo e aumentando desde os anos 1980, tornando viável a utilização de tecnologias como a otimização inteira no auxílio à tomada de decisão.

Neste capítulo são introduzidos aspectos fundamentais da programação inteira, necessários para familiarizar o leitor com os desenvolvimentos desta dissertação. Os conceitos apresentados foram extraídos de (WOLSEY, 1998).

#### 3.1 FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS INTEIROS

Uma formulação é uma ferramenta matemática que ajuda a representar as soluções factíveis de um problema de programação matemática sendo obtida sistematicamente a partir da descrição do problema.

**Definição 1.** Um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  descrito por um conjunto finito de restrições (desigualdades) lineares  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  é um poliedro.

**Definição 2.** Um poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$  é uma formulação para um conjunto  $X \subseteq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p$  se e somente se  $X = P \cap (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p)$ .

O conjunto  $X$  apresentado na Definição 2 pode ser utilizado para representar as soluções factíveis de um problema. No caso de problemas inteiros-mistos, cada elemento de  $X$  possui variáveis reais e inteiras.

É possível encontrar diferentes formulações para o mesmo conjunto  $X$ . Observe que é possível encontrar dois poliedros diferentes  $P_1$  e  $P_2$  tais que  $X = (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p) \cap P_1 = (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p) \cap P_2$ . Na Figura 4 são ilustradas duas formulações  $P_1$  e  $P_2$  para o mesmo conjunto de pares de inteiros.

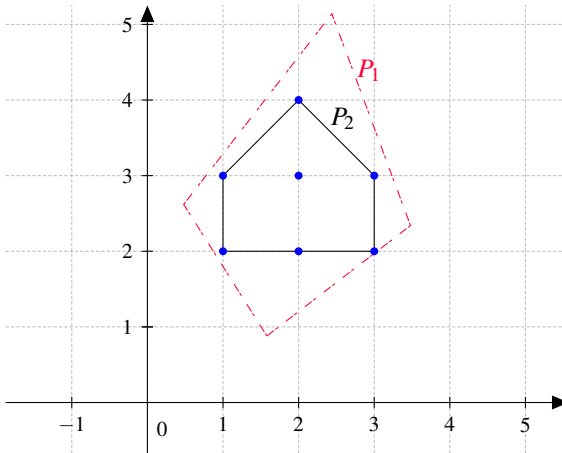


Figura 4: Formulações equivalentes.

Os poliedros da Figura 4 são comparáveis. Observe que o poliedro  $P_1$  precisa menos desigualdades que  $P_2$  para definir os pontos inteiros e neste sentido, o poliedro  $P_1$  é melhor do que o poliedro  $P_2$ . Por outro lado, o poliedro  $P_2$  está totalmente contido no poliedro  $P_1$  e segundo este aspecto  $P_2$  é melhor do que  $P_1$  pois o espaço de busca é menor.

**Definição 3.** Dado um conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , o fecho convexo de  $X$ , denotado como  $\text{conv}(X)$ , é definido como:  $\text{conv}(X) = \{x : x = \sum_{i=1}^t \lambda_i x^i, \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, t \text{ sobre todos os subconjuntos finitos } \{x^1, \dots, x^t\} \text{ de } X\}$ .

**Proposição 1.**  $\text{conv}(X)$  é um poliedro.

**Proposição 2.** Os pontos extremos de  $\text{conv}(X)$  estão todos em  $X$ .

Devido ao resultado remarcado na Proposição 2, é possível resolver o programa inteiro  $\{\max cx : x \in X\}$  por meio do programa linear  $\{\max cx : x \in \text{conv}(X)\}$ .

Neste sentido a formulação  $\text{conv}(X)$  é dita ideal. No entanto, em problemas de grandes dimensões,  $\text{conv}(X)$  precisa de muitas desigualdades para ser descrito, e portanto sua representação explícita não é de utilidade prática. Na Figura 4,  $P_2$  é o fecho convexo dos pontos inteiros representados.

### 3.2 RELAXAÇÕES

Quando se resolvem problemas complexos de otimização e soluções factíveis são difíceis de serem encontradas, é de muita utilidade conhecer limites para a função objetivo. Estes limites são utilizados para estabelecer critérios de parada.

No caso de problemas de maximização, a partir de qualquer solução factível, pode-se determinar um limite inferior da função ganho ótima. Por outro lado, é necessário encontrar limites superiores da função ganho. Quando a diferença entre limites é desprezível, pode-se assumir a melhor solução factível encontrada como ótima.

Limites superiores da função objetivo podem ser determinados por meio de relaxações do problema inicial.

**Definição 4.** O problema (RP)  $z^R = \max \{f(x) : x \in T \subseteq \mathbb{R}^n\}$  é uma relaxação para (IP)  $z = \max \{c(x) : x \in X, X \subseteq \mathbb{R}^n\}$  se:

1.  $X \subseteq T$ ,
2.  $f(x) \geq c(x), \forall x \in X$ .

Observe que toda solução  $x$  factível de IP é também factível para RP, em particular isto é verdade para a solução ótima  $x^*$  de IP. Logo RP determina limites superiores, pois  $z^R \geq f(x^*) \geq c(x^*) = z$

As relaxações encontradas com frequência na literatura são:

**Relaxação Linear:** A Relaxação Linear é obtida a partir de um problema de programação linear inteiro (inteiro-misto) eliminando-se as restrições de integralidade.

**Relaxação Combinatória:** Tratando-se de problemas de busca combinatória, como o problema do caixeiro viajante, relaxações combinatórias são obtidas considerando conjuntos mais abrangentes de busca.

**Relaxação Lagrangeana:** Restrições são removidas e colocadas na função objetivo de tal maneira a penalizar o ganho quando são violadas. Os fatores de penalização são conhecidos como multiplicadores de Lagrange.

### 3.2.1 Relaxação Linear

**Definição 5.** *Considere o programa inteiro  $\max \{cx : x \in P \cap \mathbb{Z}^n\}$  com formulação  $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$ . A relaxação linear é o programa linear  $z^{LP} = \max \{cx : x \in P\}$*

A relaxação linear de programas inteiros é uma relaxação pois:

1.  $P \cap \mathbb{Z}^n \subseteq P$ .
2. A função objetivo permanece igual.

O limite definido pela relaxação linear depende da formulação  $P$ . Quanto mais apertado for  $P$ , melhor será o limite induzido.

### 3.2.2 Relaxação Surrogate

Relaxações *surrogate* foram introduzidas em (GLOVER, 1975).

**Definição 6.** *Considere o problema  $P : \max \{f(x) : g(x) \leq 0, x \in X\}$ . A relaxação surrogate deste problema é  $SP(u) : \max \{f(x) : ug(x) \leq 0, x \in X\}$  para  $u \geq 0$ .*

A relaxação *surrogate* é de fato uma relaxação pois:

1. As funções objetivos de  $P$  e  $SP(u)$  são iguais.
2.  $\{x \in X : ug(x) \leq 0, u \geq 0\} \supseteq \{x \in X : g(x) \leq 0\}$ .

## 3.3 ALGORITMOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA-MISTA

Problemas de programação linear inteira-mista podem ser resolvidos usando ferramentas de programação linear (não inteira). Para a



resolução do problema inteiro-misto  $P$ , todas as variáveis pertencentes ao domínio dos inteiros são aproximadas por variáveis contínuas, em outras palavras, trabalha-se com a relaxação linear  $\tilde{P}$  do problema  $P$ .

Pela Definição 4, observa-se que uma solução ótima de  $\tilde{P}$  induz um limite superior para o ganho obtido por soluções de  $P$ . A ideia dos algoritmos apresentados abaixo consiste em eliminar as melhores soluções de  $\tilde{P}$  que não satisfazem as restrições de integralidade de  $P$ .

Como é esperado, a solução ótima de  $\tilde{P}$ ,  $x_F$ , pode possuir uma das variáveis relaxadas não inteira. Portanto esta solução é inválida para  $P$ . Seja  $x_f = c \notin \mathbb{Z}$  a variável de  $x_F$  aproximada com valor não inteiro.

Duas abordagens podem ser utilizadas para contornar este problema:

- Ramificar: a partir de  $\tilde{P}$ , geram-se as formulações  $\tilde{P}_1$  e  $\tilde{P}_2$ .  $\tilde{P}_1$  possui todas as restrições de  $\tilde{P}$  e se acrescenta  $x_f \leq \lfloor c \rfloor$ . Analogamente,  $\tilde{P}_2$  possui todas as restrições de  $\tilde{P}$  e  $x_f \leq \lceil c \rceil$ . Observe que a solução  $x_F$  não é admitida por  $\tilde{P}_1$  nem por  $\tilde{P}_2$ , entretanto, todas as soluções factíveis de  $P$  estão na união dos conjuntos de soluções factíveis de  $\tilde{P}_1$  e  $\tilde{P}_2$ . Utilizando este método, resolve-se recursivamente  $\tilde{P}_1$  e  $\tilde{P}_2$  gerando uma árvore de subproblemas, a melhor das soluções inteiras obtidas é a solução ótima de  $P$ .

Esta é a base dos algoritmos de *branch-and-bound*. Os algoritmos de *branch-and-bound* tratam as ramificações de tal maneira a não explorar todas as soluções possíveis. Isto é possível determinando limites superiores para a função objetivo dos subproblemas. Se o limite superior de um subproblema é menor que uma solução já conhecida, então esse subproblema pode ser descartado.

- Cortar: procura-se uma desigualdade que é satisfeita por todas as soluções inteiras mas que não é satisfeita pela solução  $x_F$ . Esta desigualdade é acrescentada à formulação  $\tilde{P}$  e o problema é novamente resolvido. Vários tipos de corte são apresentados em (NEMHAUSER; WOLSEY, 1988; WOLSEY, 1998). A diferença em relação ao caso de ramificação é que não são gerados subproblemas a partir do problema inicial, este se mantém e se acrescenta uma desigualdade a mais. A qualidade dos cortes encontrados depende da formulação do problema.

O processo de adição de cortes se repete até chegar a uma solução satisfazendo as restrições de integralidade. Entretanto, encontrar uma solução para  $P$  só com este recurso pode ser impossível ou

muito oneroso. Assim surge a abordagem *cut-and-branch* proposta por Crowder, Johnson e Padberg (1983), em que cortes são adicionados à formulação inicial e depois a formulação resultante é resolvida por *branch-and-bound*.

*Solvers* especializados utilizam a abordagem de *branch-and-cut*, que utiliza os recursos de corte e ramificação em cada subproblema gerado.

### 3.4 LINEARIZAÇÃO POR PARTES

Dada uma função conhecida  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  e  $K$  pares  $(x, f(x))$ , a função  $f$  pode ser aproximada pela combinação convexa<sup>1</sup> destes pares. Existem várias maneiras de se aproximar uma função pela combinação convexa de parâmetros. Técnicas populares introduzem variáveis de natureza inteira com este objetivo.

Linearização por partes é uma técnica antiga que recebeu atenção recente com novos desenvolvimentos em teorias e modelos. Em (PADBERG, 2000), foi demonstrado que uma formulação linear por partes baseada em gradientes é localmente ideal, isto indica que a relaxação linear define o fecho convexo se a função objetivo é separável e se o problema não possui restrições de acoplamento. Neste sentido, esta formulação é superior à formulação linear por partes clássica baseada em combinações convexas que aparecem em certos livros (NEMHAUSER; WOLSEY, 1988). Mais tarde em (SHERALI, 2001), foi desenvolvida uma variação da formulação linear por partes baseada em combinações convexas que também é localmente ideal e válida para funções semi-contínuas. Funções lineares por partes podem ser modeladas sem variáveis binárias, forçando implicitamente as restrições no algoritmo de *branch-and-bound* utilizando conjuntos especialmente ordenados conhecidos por SOS2 (*Specially ordered sets of type 2*) (KEHA; FARIAS; NEMHAUSER, 2004). Modelos para linearização por partes de funções multidimensionais não separáveis são discutidos em (VIELMA; AHMED; NEMHAUSER, 2010).

Apresentamos aqui a formulação clássica com fins didáticos e finalmente mostramos a formulação proposta por Sherali (2001), que foi utilizada no desenvolvimento de algoritmos nesta dissertação.

---

<sup>1</sup> $\mathbf{x}_c$  é combinação convexa do conjunto  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  se  $\mathbf{x}_c = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_j$ ,  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  e  $\lambda_j \geq 0$  para  $j = 1, \dots, n$ .

### 3.4.1 Formulação Clássica

A formulação clássica é a mais didática, sendo encontrada na maioria dos livros de programação inteira-mista (WOLSEY, 1998). A ideia utilizada é representada na Figura 5.

Na Figura 5 são mostradas as variáveis  $\lambda_k \in \mathcal{R}$ ,  $k \in \mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$ . Com a introdução das variáveis  $\lambda_k$ , a variável independente  $x$  e a função  $f(x)$  tornam-se combinações convexas dos parâmetros  $\{(x_k, f(x_k)) : k \in \mathcal{K}\}$ .

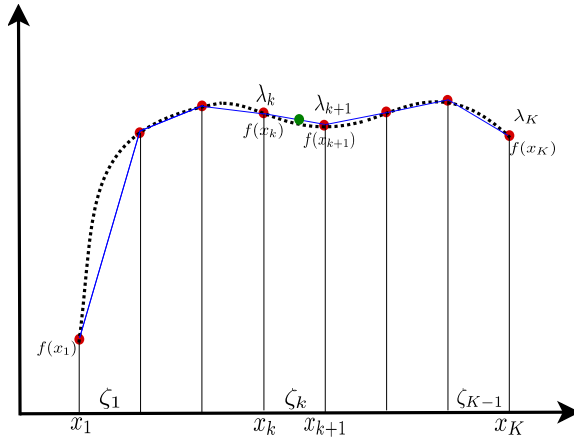


Figura 5: Aproximação utilizando a formulação Clássica.

A aproximação é gerada pela combinação convexa de dois pares  $(x_k, f(x_k))$  e  $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ . Os pesos da combinação convexa são determinados pelas variáveis  $\lambda_k$  e  $\lambda_{k+1}$ . As variáveis  $\zeta_k \in \{0, 1\}, k \in \mathcal{K}^- = \mathcal{K} \setminus \{K\}$ , são necessárias para indicar qual par  $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$  será ativo.

As restrições necessárias para impor a combinação convexa entre

pontos consecutivos são as seguintes:

$$(x, \tilde{f}) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k(x_k, f_k) \quad (3.1a)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k = 1 \quad (3.1b)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^-} \zeta_k = 1 \quad (3.1c)$$

$$\lambda_1 \leq \zeta_1 \quad (3.1d)$$

$$\lambda_k \leq \zeta_k + \zeta_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq K-1 \quad (3.1e)$$

$$\lambda_K \leq \zeta_{K-1} \quad (3.1f)$$

$$0 \leq \lambda_k \leq 1, \quad k \in \mathcal{K} \quad (3.1g)$$

$$\zeta_k \in \{0, 1\}, \quad k \in \mathcal{K}^- \quad (3.1h)$$

- Através da equação (3.1a) a função  $f(x)$  é aproximada por  $\tilde{f}$ .
- A restrição (3.1b) estabelece que a soma das variáveis  $\lambda_k$  deve ser 1.
- A restrição (3.1c) estabelece que um (e só um) intervalo deve ficar ativo, *i.e.*, apenas um  $\zeta_k = 1$ .
- A restrições (3.1d), (3.1e) e (3.1f) relacionam o intervalo ativo aos  $\lambda_k$  associados, indicando quais devem ser ativos.
- Na equação (3.1g) a natureza das variáveis  $\lambda_k$  é indicada.
- Na equação (3.1h) a natureza das variáveis  $\zeta_k$  é indicada.

### 3.4.2 Formulação proposta por Sherali

Sherali (2001) propôs uma nova formulação que é localmente ideal, porém mais simples do que a formulação de Padberg (2000). A ideia por trás da formulação é ilustrada na Figura 6, e o equacionamento

a seguir:

$$x = \sum_{k \in \mathcal{K}^-} \left( \lambda_k^l x_k + \lambda_k^r x_{k+1} \right) \quad (3.2a)$$

$$\tilde{f} = \sum_{k \in \mathcal{K}^-} \left( \lambda_k^l f(x_k) + \lambda_k^r f(x_{k+1}) \right) \quad (3.2b)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^-} \zeta_k = 1 \quad (3.2c)$$

$$\lambda_k^l + \lambda_k^r = \zeta_k, \quad k \in \mathcal{K}^- \quad (3.2d)$$

$$0 \leq \lambda_k^l, \lambda_k^r \leq 1, \quad k \in \mathcal{K}^- \quad (3.2e)$$

$$\zeta_k \in \{0, 1\}, \quad k \in \mathcal{K}^- \quad (3.2f)$$

- A equação (3.2b) define  $\tilde{f}$  como a aproximação de  $f(x)$ .
- A restrição (3.2c) estabelece que um (e só um) intervalo deve ser ativo.
- A restrição (3.2d) relaciona o intervalo ativo  $k$  com as variáveis  $\lambda_k^l$  e  $\lambda_k^r$  associadas, indicando quais podem ser diferente de zero. Além disso estabelece uma restrição associada a valores de  $\lambda_k^l$  e  $\lambda_k^r$ . Se  $\zeta_k$  é ativa a soma dessas variáveis deve ser 1 pois devem induzir combinações convexas.
- A restrição (3.2e) estabelece os limites das variáveis  $\lambda_k^r$  e  $\lambda_k^l$ .
- A restrição (3.2f) define a natureza binária das variáveis  $\zeta_k$ .

Os parâmetros  $x_k$  devem ser colocados em ordem ascendente, *i.e.*,  $x_i < x_j$  sempre que  $i < j$  e a relação  $f_k = f(x_k)$  deve ser respeitada.

### 3.4.3 Algumas observações sobre formulações lineares por partes

As relações não lineares podem ser aproximadas através das reformulações lineares por partes apresentadas acima. Abaixo são citadas algumas das principais vantagens e desvantagens deste tipo de formulação, começando pelas vantagens:

- os problemas não lineares podem ser tratados com ferramentas e algoritmos de programação linear inteira-mista.
- o erro de aproximação poder ser tão pequeno quanto desejado.

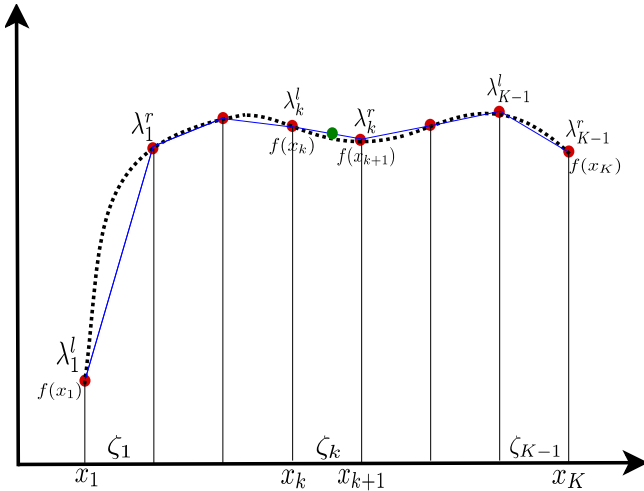


Figura 6: Aproximação pela formulação proposta por Sherali.

- as funções podem ser amostradas utilizando-se qualquer padrão desejado.
- a linearização implicitamente estabelece limites nas variáveis  $x$ .

e as desvantagens:

- algumas funções podem precisar muitas amostras para ficarem bem definidas.
- precisa-se de novas variáveis auxiliares para representar uma função.
- novas restrições são adicionadas.

### 3.5 SUMÁRIO

Neste capítulo foram apresentados conceitos importantes para o entendimento das ferramentas de programação inteira utilizadas nesta dissertação. Inicialmente foram revisados o conceito de formulação, o conceito de relaxação e foram mostradas as relaxações utilizadas nesta dissertação. Por último foi revisada a ferramenta de linearização por partes, o modelo clássico foi mostrado por ser de interesse didático e o modelo proposto por Sherali (2001) por ser utilizado na dissertação.

## 4 ABORDAGEM DE SOLUÇÃO

A solução direta do problema de distribuição de gás de injeção  $P$  apresenta diversas dificuldades científicas e tecnológicas. Além da natureza não linear das Curvas de Performance dos Poços (CPPs), o espaço factível é não convexo e disjunto independentemente de estruturas especiais nas funções tais como a concavidade. Uma alternativa é converter  $P$  em um programa inteiro-misto linear linearizando por partes as CPPs. Esta abordagem já teve sua eficiência comprovada em vários problemas encontrados na literatura técnica (MISENER; GOUNARIS; FLOUDAS, 2009).

Esta dissertação está focada na aproximação linear por partes do problema  $P$  usando variáveis binárias e também no desenvolvimento de desigualdades com vistas à diminuir o tempo de execução de algoritmos de programação inteira.

### 4.1 FORMULAÇÃO LINEAR POR PARTES

Duas formulações foram desenvolvidas, a primeira obtida pela linearização por partes direta das curvas de produção dos poços e a segunda obtida pela combinação das variáveis de alinhamento poço-separador e as variáveis binárias induzidas pela linearização por partes. O modelo proposto em (SHERALI, 2001) foi escolhido neste trabalho por ser localmente ideal e relativamente mais simples.

#### 4.1.1 Formulação Compacta

Pela linearização por partes das CPPs, uma aproximação por Programação Linear Inteira-Mista (MILP) é obtida:

$$\tilde{P}: \quad \max \quad \tilde{f} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \tilde{f}_n(q_i^n) \quad (4.1a)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{n \in \mathcal{N}} q_i^n \leq q_i^{\max} \quad (4.1b)$$

Para todo  $n \in \mathcal{N}$ :

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} z_{n,s} = y_n \quad (4.1c)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} \tilde{q}_h^{n,s} = \tilde{q}_h^n, h \in \mathcal{H} \quad (4.1d)$$

$$0 \leq \tilde{q}_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max} z_{n,s}, s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H} \quad (4.1e)$$

$$\tilde{q}_h^n = \sum_{k \in \mathcal{K}} (\lambda_{L,k}^n q_{h,k}^n + \lambda_{R,k}^n q_{h,k+1}^n), h \in \mathcal{H} \quad (4.1f)$$

$$q_i^n = \sum_{k \in \mathcal{K}} (\lambda_{L,k}^n q_{i,k}^n + \lambda_{R,k}^n q_{i,k+1}^n) \quad (4.1g)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \zeta_k^n = y_n \quad (4.1h)$$

$$\lambda_{L,k}^n + \lambda_{R,k}^n = \zeta_k^n, k \in \mathcal{K} \quad (4.1i)$$

$$0 \leq \lambda_{L,k}^n, \lambda_{R,k}^n \leq 1, k \in \mathcal{K} \quad (4.1j)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_s} \tilde{q}_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max}, s \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{H} \quad (4.1k)$$

$$y_n \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N} \quad (4.1l)$$

$$z_{n,s} \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n \quad (4.1m)$$

$$\zeta_k^n \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{K} \quad (4.1n)$$

Particularmente,  $\tilde{P}$  é similar a  $P$ . Os novos parâmetros que aparecem na formulação linear por partes são:

- $(q_{i,k}^n, q_{h,k}^n)$  é o  $k^{\text{ésimo}}$  ponto de amostragem de  $q_i^n(q_i^n)$ ;
- $\mathcal{K} = \{1, \dots, K-1\}$  é o conjunto de intervalos gerados pela amostragem sendo  $K$  o número de pontos de amostragem das funções não lineares.

E as novas variáveis:

- $\tilde{q}_h^n$  é a vazão de fluido de fase  $h$  do poço  $n$  aproximada pela função linear por partes;
- $\tilde{q}_h^{n,s}$  é a vazão de fluido de fase  $h$  do poço  $n$  ao separador  $s$  aproximada pela função linear por partes;



- $\lambda_{L,k}^n$ ,  $\lambda_{R,k}^n$  e  $\zeta_k^n$  são variáveis auxiliares utilizadas para realizar a linearização das curvas.

Para simplificar, as funções  $q_h^n$  que modelam as vazões das fases do fluido, *i.e.*,  $q_o^n$ ,  $q_g^n$  e  $q_w^n$ , são amostradas nos mesmos valores. Considerando poços diferentes, não há restrição para se utilizar valores diferentes de  $q_i^n$  para a amostragem das vazões das fases de produção ou até mesmo um número diferente de amostras. Os valores de  $q_i^n$  podem ser escolhidos visando minimizar o erro entre o modelo de CPP não linear e a sua aproximação linear por partes.

#### 4.1.2 Formulação Integrada

A formulação integrada obtida pela combinação das variáveis de decisão de alinhamento e de linearização é:

$$\tilde{P}^\dagger : \quad \max \quad \tilde{f} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \tilde{f}_n(q_i^n) \quad (4.2a)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{n \in \mathcal{N}} q_i^n \leq q_i^{\max} \quad (4.2b)$$

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$\tilde{q}_h^{n,s} = \sum_{k \in \mathcal{H}} \left( \lambda_{L,k}^{n,s} q_{h,k}^n + \lambda_{R,k}^{n,s} q_{h,k+1}^n \right), s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H} \quad (4.2c)$$

$$q_i^n = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \sum_{k \in \mathcal{H}} \left( \lambda_{L,k}^{n,s} q_{i,k}^n + \lambda_{R,k}^{n,s} q_{i,k+1}^n \right) \quad (4.2d)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_n} \sum_{k \in \mathcal{H}} \zeta_k^{n,s} = y_n \quad (4.2e)$$

$$\lambda_{L,k}^{n,s} + \lambda_{R,k}^{n,s} = \zeta_k^{n,s}, s \in \mathcal{S}_n, k \in \mathcal{H} \quad (4.2f)$$

$$0 \leq \lambda_{L,k}^{n,s}, \lambda_{R,k}^{n,s} \leq 1, s \in \mathcal{S}_n, k \in \mathcal{H} \quad (4.2g)$$

$$\sum_{n \in \mathcal{N}_s} \tilde{q}_h^{n,s} \leq q_h^{s,\max}, s \in \mathcal{S}, h \in \mathcal{H} \quad (4.2h)$$

$$y_n \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N} \quad (4.2i)$$

$$\zeta_k^{n,s} \in \{0, 1\}, n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n, k \in \mathcal{H} \quad (4.2j)$$

A vantagem da formulação integrada é a eliminação das variáveis  $z_{n,s}$  que decidem as direções de alinhamento. As direções de alinhamento são implementadas com as variáveis  $\zeta_k^{n,s}$ , que simultaneamente indicam

o separador servindo o poço e o segmento de reta que aproxima a CPP correspondente.

Ganhos estruturais também podem ser apontados. As desigualdades (4.2b) e (4.2h) são vistas como restrições de mochila, enquanto que as outras restrições estão relacionadas à linearização por partes. Estas características fazem a estrutura de restrições mais simples que a da formulação compacta. As variáveis  $z_{n,s}$  e  $\zeta_k^n$  possuem um acoplamento implícito na formulação compacta que é explícito na formulação integrada.

A desvantagem da formulação integrada reside no número de variáveis inteiras necessárias. A formulação integrada precisa  $\sum_{n \in \mathcal{N}} (1 + |\mathcal{S}_n| |\mathcal{H}|)$  variáveis binárias, enquanto a compacta precisa somente  $\sum_{n \in \mathcal{N}} (1 + |\mathcal{S}_n| + |\mathcal{H}|)$ . Portanto a formulação integrada precisa mais memória. Entretanto, a introdução de novas variáveis tipicamente permite modelar estruturas combinatórias com maior precisão e assim induzir a integralidade através de restrições lineares mais apertadas (VANDERBECK; WOLSEY, 2010).

As equações (4.2c), (4.2d) e (4.2f) podem ser eliminadas pela substituição das variáveis  $\tilde{q}_h^{n,s}$ ,  $q_i^n$  e  $\lambda_{R,k}^{n,s}$  com suas expressões definidas pelas variáveis restantes. Substituições similares podem ser feitas na formulação compacta.

### 4.1.3 Notação

A definição dos poliedros das formulações e os desenvolvimentos daqui em diante dependem da seguinte notação.

Para a formulação compacta:

- $\Omega_s = \{(n, k) : n \in \mathcal{N}_s, k \in \mathcal{H}\}$  contém os níveis de operação dos poços que podem ter sua produção direcionada ao separador  $s$ ; o poço  $n$  opera no nível  $k$  se  $\zeta_k^n = 1$ ;
- $\Omega = \cup_{s \in \mathcal{S}} \Omega_s$  possui os níveis de operação de todos os poços;
- $\zeta = (\zeta_k^n : (n, k) \in \Omega)$ ;
- $\lambda = (\lambda_{k,L}^n, \lambda_{k,R}^n : (n, k) \in \Omega)$ ;
- $\mathbf{y} = (y_n : n \in \mathcal{N})$ ;
- $\mathbf{z} = (z_{n,s} : n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n)$ ;
- $\mathbf{q} = (q_i^n : n \in \mathcal{N}) \cup (\tilde{q}_h^n : n \in \mathcal{N}, h \in \mathcal{H}) \cup (\tilde{q}_h^{n,s} : n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H})$ ; e

- $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \zeta, \mathbf{z}, \lambda, \mathbf{q})$  é o vetor com todas as variáveis.

Para a formulação integrada:

- $\Omega^\dagger = \{(n, s, k) : (n, k) \in \Omega, s \in \mathcal{S}_n\}$  é o conjunto de níveis de operação e alinhamentos de todos os poços; o poço  $n$  opera no nível  $k$  e a sua produção é enviada ao separador  $s$  se  $\zeta_k^{n,s} = 1$ ;
- $\zeta^\dagger = (\zeta_k^{n,s} : (n, s, k) \in \Omega^\dagger)$ ;
- $\lambda^\dagger = (\lambda_{k,L}^{n,s}, \lambda_{k,R}^{n,s} : (n, s, k) \in \Omega^\dagger)$ ;
- $\mathbf{q}^\dagger = (q_i^n : n \in \mathcal{N}) \cup (\tilde{q}_h^{n,s} : n \in \mathcal{N}, s \in \mathcal{S}_n, h \in \mathcal{H})$ ; e
- $\mathbf{x}^\dagger = (\mathbf{y}, \zeta^\dagger, \lambda^\dagger, \mathbf{q}^\dagger)$  é o vetor com todas as variáveis.

Com esta notação, a formulação compacta é definida pelo poliedro  $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \text{ satisfaz (4.1b)-(4.1k), } \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{1}, \mathbf{0} \leq \zeta \leq \mathbf{1}, \mathbf{0} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{1}\}$ . A formulação integrada é definida por  $\mathcal{P}^\dagger = \{\mathbf{x}^\dagger : \mathbf{x}^\dagger \text{ satisfaz (4.2b)-(4.2h), } \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{1}, \mathbf{0} \leq \zeta^\dagger \leq \mathbf{1}\}$ .

Obviamente, o conjunto factível da formulação compacta é  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P} : \mathbf{y}, \zeta, \mathbf{z} \text{ são inteiros}\}$ , enquanto que o conjunto factível da formulação integrada é  $\mathcal{X}^\dagger = \{\mathbf{x}^\dagger \in \mathcal{P}^\dagger : \mathbf{y} \text{ e } \zeta^\dagger \text{ são inteiros}\}$ .

Os poliedros  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}^\dagger$  não são diretamente comparáveis dado que diferem em dimensões e variáveis. Contudo, a comparação com respeito às variáveis comuns, que têm significado físico, pode ser feita. Seja  $\text{proj}(\mathcal{P}) = \{(\mathbf{y}, \mathbf{q}^\dagger) : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$  a projecção de  $\mathcal{P}$  no espaço gerado por  $(\mathbf{y}, \mathbf{q}^\dagger)$ . Analogamente, defina  $\text{proj}(\mathcal{P}^\dagger) = \{(\mathbf{y}, \mathbf{q}^\dagger) : \mathbf{x}^\dagger \in \mathcal{P}^\dagger\}$ . Mostrou-se que  $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P}^\dagger$  e  $\mathcal{P} \supsetneq \mathcal{P}^\dagger$  com contra exemplos numéricos (CODAS; CAMPONOGARA, 2011), que não são mostrados aqui para manter a brevidade.

#### 4.1.4 Conversão entre Formulações

Toda solução factível  $\mathbf{x}^\dagger$  da formulação integrada pode ser convertida numa solução factível  $\mathbf{x}$  da formulação compacta da maneira seguinte:

$$z_{n,s} := \sum_{k \in \mathcal{K}} \zeta_k^{n,s} \quad (4.3a)$$

$$\zeta_k^n := \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \zeta_k^{n,s} \quad (4.3b)$$

$$\lambda_{L,k}^n := \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \lambda_{L,k}^{n,s} \quad (4.3c)$$

$$\lambda_{R,k}^n := \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \lambda_{R,k}^{n,s} \quad (4.3d)$$

$$\tilde{q}_h^n := \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \tilde{q}_h^{n,s} \quad (4.3e)$$

De maneira recíproca, dada uma solução factível  $\mathbf{x}$  da formulação compacta é possível determinar a solução correspondente na formulação integrada:

$$\zeta_k^{n,s} := \zeta_k^n z_{n,s} \quad (4.4a)$$

$$\lambda_{L,k}^{n,s} := \lambda_{L,k}^n z_{n,s} \quad (4.4b)$$

$$\lambda_{R,k}^{n,s} := \lambda_{R,k}^n z_{n,s} \quad (4.4c)$$

$$\tilde{q}_h^{n,s} := \tilde{q}_h^n z_{n,s} \quad (4.4d)$$

## 4.2 DESIGUALDADES VÁLIDAS PARA A FORMULAÇÃO INTEGRADA

Desigualdades válidas desempenham um papel importante no melhoramento da eficiência de algoritmos. Softwares de uso comercial como CPLEX, XPress-MP e Mosek fazem uso desta tecnologia. As restrições do problema de distribuição de gás de injeção têm estrutura de mochila. Estas restrições representam o limite de capacidade dos separadores e o limite de disponibilidade de gás de injeção. Portanto, um procedimento plausível para melhorar o desempenho de algoritmos é identificar desigualdades válidas baseadas em desigualdades de cobertura de mochila (BALAS, 1975; BALAS; ZEMEL, 1978). Daqui em diante, são apresentadas notações e são desenvolvidas desigualdades válidas inspiradas nas desigualdades de cobertura de mochila para as formulações lineares por partes.

#### 4.2.1 Desigualdades de cobertura *Surrogate*

As desigualdades são baseadas no conceito de coberturas de mo-chila (BALAS, 1975; BALAS; ZEMEL, 1978) e em restrições *surrogate* (GLOVER, 1968) aplicadas à capacidade de separação de vazão de cada fase do fluido. Com este fim, a seguinte notação é necessária:

- $\Omega(U) = \cup_{s \in U} \Omega_s$  é o conjunto de níveis de operação dos poços que podem ser atendidos pelos separadores do conjunto  $U \subseteq \mathcal{S}$ ;
- $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_h : h \in \mathcal{H})$  define uma restrição *surrogate* sobre as restrições de capacidade de separação de fases dos separadores em  $U$ . Por convenção,  $\mathbf{w}_h \geq 0$  para todo  $h$  e  $\sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h = 1$ ;
- $q_k^n(\mathbf{w}) = \min\{\sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h q_{h,k}^n, \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h q_{h,k+1}^n\}$  é a capacidade *surrogate* mínima consumida pelo poço  $n$  quando opera no nível  $k$ ; o consumo mínimo  $q_k^n(\mathbf{w})$  corresponde ao mínimo de uma função linear de  $q_i^n$  sujeito a  $q_i^n \in [q_{i,k}^n, q_{i,k+1}^n]$ , que é portanto atingido em um dos extremos;
- $q(C, \mathbf{w}) = \sum_{(n,k) \in C} q_k^n(\mathbf{w})$  é a capacidade *surrogate* mínima consumida pelos poços operando nos níveis dados em  $C \subseteq \Omega(U)$ ; e
- $q^{\max}(U, \mathbf{w}) = \sum_{s \in U} \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h q_h^{s, \max}$  é a capacidade *surrogate* associada ao conjunto de separadores  $U \subseteq \mathcal{S}$ .

**Definição 7.** Dado  $U \subseteq \mathcal{S}$  e um vetor *surrogate*  $\mathbf{w}$ , um conjunto  $C(U) \subseteq \Omega(U)$  define uma cobertura *surrogate* para os separadores de  $U$  se:

1. Se para todo  $(n, k), (n', k') \in C(U)$  distintos, tem-se  $n \neq n'$ ; e
2.  $q(C(U), \mathbf{w}) > q^{\max}(U, \mathbf{w})$ .

Tomando  $(n, k) \in C(U)$ , define-se  $C(U)_{n,k} = C(U) \setminus \{(n, k)\}$ . Uma cobertura  $C(U)$  é dita mínima se nenhuma das condições seguintes é satisfeita:

- Existe  $(n, k) \in C(U)$  e  $k' \in \mathcal{K} \setminus \{k\}$  com  $q_{k'}^n(\mathbf{w}) < q_k^n(\mathbf{w})$  tal que  $\tilde{C} = C(U)_{n,k} \cup \{(n, k')\}$  induz uma cobertura *surrogate*;
- $C(U)_{\hat{n}, \hat{k}}$  induz uma cobertura *surrogate* para  $(\hat{n}, \hat{k}) = \arg \min\{q_k^n(\mathbf{w}) : (n, k) \in C(U)\}$ .

Considerando a instância exemplo, define-se  $U = \{2\}$  e  $\mathbf{w}$  tal que  $\mathbf{w}_p = 1$  e os outros valores iguais a zero.  $C = \{(2, 1), (3, 1)\}$  é uma cobertura para  $U$  pois  $q(C, \mathbf{w}) = \min\{923, 08; 1962, 76\} + \min\{1076, 82; 2255, 50\} = 1999, 90 > 1459, 00 = q^{\max}(U, \mathbf{w})$ . Esta cobertura é mínima.

**Proposição 3.** *Uma cobertura surrogate  $C(U)$  induz uma desigualdade válida para  $\text{conv}(\mathcal{X}^\dagger)$  chamada desigualdade de cobertura surrogate:*

$$\sum_{(n,k) \in C(U)} \sum_{s \in U \cap \mathcal{S}_n} \zeta_k^{n,s} \leq |C(U)| - 1 \quad (4.5)$$

*Demonstração.* Para qualquer  $\mathbf{x}^\dagger \in \mathcal{X}^\dagger, s \in \mathcal{S}$  e  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$q_h^{s,\max} \geq \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \tilde{q}_h^{n,s} = \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} (\lambda_{L,k}^{n,s} q_{h,k}^n + \lambda_{R,k}^{n,s} q_{h,k+1}^n)$$

que após ser multiplicada por  $\mathbf{w}_h$  para todo  $h \in \mathcal{H}$  e adicionada resulta na seguinte desigualdade válida:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h q_h^{s,\max} \geq \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h (\lambda_{L,k}^{n,s} q_{h,k}^n + \lambda_{R,k}^{n,s} q_{h,k+1}^n) \quad (4.6a)$$

$$\geq \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^{n,s} \quad (4.6b)$$

onde a última desigualdade (4.6b) é resultado da minimização de uma função linear sobre um intervalo. Para provar este resultado, suponha  $\zeta_k^{n,s} = 1$  que implica em  $\lambda_{L,k}^{n,s}, \lambda_{R,k}^{n,s} \geq 0$  e  $\lambda_{L,k}^{n,s} + \lambda_{R,k}^{n,s} = 1$ . Substituindo  $\lambda_{R,k}^{n,s}$  por  $1 - \lambda_{L,k}^{n,s}$ , o termo interno do lado direito da desigualdade (4.6a) vira uma função de  $\lambda_{L,k}^{n,s}$ :

$$\begin{aligned} g(\lambda_{L,k}^{n,s}) &= \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h \left( q_{h,k+1}^n + (q_{h,k}^n - q_{h,k+1}^n) \lambda_{L,k}^{n,s} \right) \\ &= \mathbf{w}^T \left( \mathbf{q}_{k+1}^n + (\mathbf{q}_k^n - \mathbf{q}_{k+1}^n) \lambda_{L,k}^{n,s} \right) \end{aligned}$$

Como  $g(\lambda_{L,k}^{n,s})$  é linear com domínio  $\lambda_{L,k}^{n,s} \in [0, 1]$ , o mínimo é atingido em um dos extremos:

$$\min\{g(\lambda_{L,k}^{n,s}) : \lambda_{L,k}^{n,s} \in [0, 1]\} = \min\{\mathbf{w}^T \mathbf{q}_{k+1}^n, \mathbf{w}^T \mathbf{q}_k^n\} = q_k^n(\mathbf{w})$$

Logo, somando a desigualdade (4.6) para todo  $s \in U$ , chega-se à

desigualdade válida:

$$\sum_{s \in U} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^{n,s} \leq \sum_{s \in U} \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h q_h^{s, \max} = q^{\max}(U, \mathbf{w}) \quad (4.7)$$

Suponha que existe  $\mathbf{x}^\dagger \in \mathcal{X}^\dagger$  que viola a desigualdade (4.5). Claramente  $\sum_{s \in U \cap \mathcal{S}_n} \zeta_k^{n,s} = 1$  para todo  $(n, k) \in C(U)$ , pois de outra forma o valor do lado esquerdo de (4.5) seria menor que  $|C(U)|$ . Por consequência,

$$\begin{aligned} \sum_{s \in U} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^{n,s} &\geq \sum_{(n,k) \in C(U)} \sum_{s \in U \cap \mathcal{S}_n} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^{n,s} \\ &= \sum_{(n,k) \in C(U)} q_k^n(\mathbf{w}) \sum_{s \in U \cap \mathcal{S}_n} \zeta_k^{n,s} \\ &= \sum_{(n,k) \in C(U)} q_k^n(\mathbf{w}) \\ &= q(C(U), \mathbf{w}) \\ &> q^{\max}(U, \mathbf{w}), \end{aligned}$$

contradizendo a hipótese que  $\mathbf{x}^\dagger$  é factível.  $\square$

#### 4.2.2 Coberturas *Surrogate* estendidas

A extensão de uma cobertura *surrogate*  $C(U)$  consiste dos pares  $(n, k) \in \Omega(U) \setminus C(U)$  cujas variáveis correspondentes  $\zeta_k^{n,s}$  podem ser adicionadas no lado esquerdo de (4.5), para assim fortalecer a desigualdade. Seja  $\mathcal{N}(C) = \{n : (n, k) \in C\}$  para qualquer  $C \subseteq \Omega$ .

**Definição 8.**  $E[C(U)] = E_A \cup E_B$  é a extensão de uma cobertura *surrogate*  $C(U)$  onde:

$$\begin{aligned} E_A &= \{(n, k) \in \Omega(U) \setminus C(U) : (n, k') \in C(U), q_k^n(\mathbf{w}) \geq q_{k'}^n(\mathbf{w})\} \\ E_B &= \{(n, k) \in \Omega(U) : n \notin \mathcal{N}(C(U)), \\ &\quad q_k^n(\mathbf{w}) \geq \max \{q_{k'}^{n'}(\mathbf{w}) : (n', k') \in C(U)\}\} \end{aligned}$$

A extensão consiste dos pares de operação  $(n, k)$  que não pertencem à cobertura e consomem mais recursos que um par correspondente  $(n, k')$  na cobertura  $C(U)$ , ou de outro modo dos pares cujo consumo

*surrogate* excede o consumo *surrogate* de todos os pares da cobertura. Pode-se induzir uma desigualdade válida mais forte que a desigualdade *surrogate* (4.5) pela extensão da cobertura.

Dado um inteiro  $d$ , define-se  $C(U)^d \subseteq C(U)$  tal que:

- $|C(U)^d| = d$ ;
- $\min\{q_l^m(\mathbf{w}) : (m, l) \in C(U)^d\} \geq \max\{q_l^m(\mathbf{w}) : (m, l) \in C(U) \setminus C(U)^d\}$ .

$C(U)^d$  contém os  $d$  pares de maior consumo em  $C(U)$ . Similarmente, dado um inteiro  $d$  define-se  $C(U)_{n,k}^d \subseteq C(U)_{n,k}$  tal que:

- $|C(U)_{n,k}^d| = d$ ;
- $\min\{q_l^m(\mathbf{w}) : (m, l) \in C(U)_{n,k}^d\} \geq \max\{q_l^m(\mathbf{w}) : (m, l) \in C(U)_{n,k} \setminus C(U)_{n,k}^d\}$ .

Portanto  $C(U)_{n,k}^d$  é o subconjunto de  $C(U)_{n,k}$  com os  $d$  pares de maior consumo. Se  $d = 0$ , então assume-se que  $C(U)^d = \emptyset$  e  $C(U)_{n,k}^d = \emptyset$ .

Para qualquer  $(n, k) \in E[C(U)]$ , define-se o fator de *lifting* aproximado  $\beta_k^n$  da seguinte maneira:

$$\beta_k^n = \begin{cases} 1 + \max\{d : q_k^n(\mathbf{w}) - q_{\tilde{k}}^n(\mathbf{w}) \geq q(C(U)_{n,k}^d, \mathbf{w})\}, \\ \quad \text{onde } (n, \tilde{k}) \in C(U), \text{ se } (n, k) \in E_A \\ \max\{d : q_k^n(\mathbf{w}) \geq q(C(U)^d, \mathbf{w})\}, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

**Proposição 4.** *A desigualdade de cobertura estendida surrogate de uma cobertura  $C(U)$  é válida para  $\text{conv}(\mathcal{X})$ :*

$$\sum_{(n,k) \in C(U)} \sum_{s \in U \cap \mathcal{S}_n} \zeta_k^{n,s} + \sum_{(n,k) \in E[C(U)]} \sum_{s \in U \cap \mathcal{S}_n} \beta_k^n \zeta_k^{n,s} \leq |C(U)| - 1 \quad (4.8)$$

*Demonstração.* Suponha que existe  $\mathbf{x}^\dagger \in \mathcal{X}^\dagger$  que viola a desigualdade (4.8). Com respeito a  $\mathbf{x}^\dagger$ , definem-se os conjuntos seguintes:

- $\Phi_C = \{(n, k) \in C(U) : \exists s \in U \cap \mathcal{S}_n, \zeta_k^{n,s} = 1\}$ ;
- $\Phi_A = \{(n, k) \in E_A : \exists s \in U \cap \mathcal{S}_n, \zeta_k^{n,s} = 1\}$  e  
 $\Phi_A^d = \{(n, k) \in \Phi_A : \beta_k^n = d\}$ ; e
- $\Phi_B = \{(n, k) \in E_B : \exists s \in U \cap \mathcal{S}_n, \zeta_k^{n,s} = 1\}$  e  
 $\Phi_B^d = \{(n, k) \in \Phi_B : \beta_k^n = d\}$ .



Observe que a produção de cada poço presente em  $\Phi_C \cup \Phi_A \cup \Phi_B$  é direcionada para um separador em  $U$ .

Seja  $q = \sum_{d=1}^{|C(U)|} d|\Phi_A^d| + \sum_{d=1}^{|C(U)|} d|\Phi_B^d|$ . Como  $\mathbf{x}^\dagger$  viola (4.8),  $|\Phi_C| + q > |C(U)| - 1$ . Logo, pela definição da cobertura estendida *surrogate* e dos fatores de *lifting* aproximado,

$$\sum_{(n,k) \in \Phi_C \cup \Phi_A \cup \Phi_B} q_k^n(\mathbf{w}) \geq \sum_{(n,k) \in C(U)} q_k^n(\mathbf{w}) > q^{\max}(U, \mathbf{w})$$

o que contradiz a hipótese de que  $\mathbf{x}^\dagger$  é factível.  $\square$

Na instância exemplo apresentada na Seção 2.5, a extensão da cobertura *surrogate*  $C(U) = \{(2,1), (3,1)\}$  dada por  $U = \{2\}$  é definida por:  $E_A = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$  e  $E_B = \{(1,2), (1,3), (4,2), (4,3), (5,2), (5,3)\}$ . Para calcular os fatores  $\beta_k^n$ , os elementos de  $C(U)$  são ordenados em forma não-crescente de consumo *surrogate*:  $C(U) = \{(3,1)_{1076,82}, (2,1)_{923,08}\}$ .

O consumo do elementos em  $E_A$  é  $\{(2,2)_{1962,76}, (2,3)_{1850,79}, (3,2)_{2253,84}, (3,3)_{2104,91}\}$ .  $\beta_2^2 = 1$  pois  $1962,76 - 923,08 = 1039,68 \not\geq q(C(U)_{2,1}^1, \mathbf{w}) = 1076,82$ .  $\beta_2^3 = 2$  pois  $2253,84 - 1076,82 = 1177,02 \geq q(C(U)_{3,1}^1, \mathbf{w}) = 923,08$ . Da mesma maneira, pode ser verificado que  $\beta_3^2 = 1$  e  $\beta_3^3 = 2$ .

O consumo dos elementos em  $E_B$  é  $\{(1,2)_{1467,90}, (1,3)_{1437,23}, (4,2)_{1895,33}, (4,3)_{1797,93}, (5,2)_{1761,49}, (5,3)_{1724,72}\}$ .  $\beta_2^1 = 1$  pois  $1467,90 \geq q(C(U)^1, \mathbf{w}) = 1076,82$ , mas  $1467,90 \not\geq q(C(U)^2, \mathbf{w}) = 1999,9$ . É também fácil provar que  $\beta_3^1 = \beta_2^4 = \beta_3^4 = \beta_2^5 = \beta_3^5 = 1$ .

### 4.2.3 Separação

O problema de separação consiste em encontrar uma cobertura  $C(U)$  que induz um plano de corte para uma solução fracionária  $\mathbf{x}^\dagger$ . Dado um conjunto de separadores  $U$  e um vetor *surrogate*  $\mathbf{w}$ , a busca de uma cobertura que induz um plano de corte ou que minimiza uma margem de factibilidade é um programa inteiro:

$$SP(U, \mathbf{w}) : v(U, \mathbf{w}) = \max_{(n,k) \in \Omega(U)} \left( \sum_{s \in U \cap \mathcal{S}_n} \zeta_k^{n,s} - 1 \right) \theta_k^n + 1 \quad (4.9a)$$

$$\text{s.a : } \sum_{(n',k) \in \Omega(U): n'=n} \theta_k^n \leq 1, n \in \mathcal{N}(\Omega(U)) \quad (4.9b)$$

$$\sum_{(n,k) \in \Omega(U)} q_k^n(\mathbf{w}) \theta_k^n > q^{\max}(U, \mathbf{w}) \quad (4.9c)$$

$$\theta_k^n \in \{0, 1\}, (n, k) \in \Omega(U) \quad (4.9d)$$

A cobertura resultante é definida por  $C(U) = \{(n, k) : \theta_k^n = 1\}$ .

A desigualdade (4.9b) garante que o resultado  $C(U)$  contém no máximo um nível de operação por poço, enquanto a desigualdade (4.9c) garante que o consumo total de recursos *surrogate* ultrapassa a capacidade máxima. Como a função objetivo é o lado esquerdo da desigualdade de cobertura (4.5) subtraído do lado direito, a cobertura  $C(U)$  obtida pela solução  $SP(U, \mathbf{w})$  é um plano de corte para  $\mathbf{x}^\dagger$  se  $v(U, \mathbf{w}) > 0$ .

Como  $\Omega(U)$  pode ser um conjunto grande, a busca de uma cobertura pode ser restringida somente aos elementos do conjunto  $\Omega(U, \mathbf{x}^\dagger) = \{(n, k) \in \Omega(U) : \zeta_k^{n,s} > 0 \text{ para algum } s \in U \cap \mathcal{S}_n\}$ .

O problema de separação  $SP(U, \mathbf{w})$  é um problema NP-Difícil inspirado no procedimento geral de separação para desigualdades de cobertura enunciado em (CROWDER; JOHNSON; PADBERG, 1983). O problema de separação de desigualdades de cobertura estendidas é mais complicado pois fatores de *lifting* exatos ou aproximados devem ser calculados.

Como a solução exata de  $SP$  pode consumir muito tempo para ser obtida, heurísticas podem ser utilizadas para separar coberturas e produzir desigualdades de cobertura estendidas. Kaporis e Letchford (2008) testaram numericamente várias heurísticas propostas por outros autores, chegando à conclusão que heurísticas gulosas são melhores que outras estratégias. Por esta razão, aqui é utilizada uma heurística gulosa que é semelhante àquela apresentada por Kaporis e Letchford (2008). Dado um subconjunto de separadores  $U$  e um vetor *surrogate*  $\mathbf{w}$ , uma heurística gulosa eficaz escolhe  $C(U)$  seguindo as ideias seguintes:

- O conjunto  $C(U)$  deve ser de baixa cardinalidade. Se  $C(U)$  é de alta cardinalidade a desigualdade de cobertura (4.8) gerada é fraca pois a o lado direito da desigualdade possui um alto valor.

- Os elementos  $(n, k) \in \Omega(U)$  para os que existe  $s \in \mathcal{S}_n$  com valor de  $\zeta_k^{n,s}$  perto de 1 devem ser considerados com maior prioridade como elementos de  $C(U)$ .
- Com relação ao valor de  $q_k^n(\mathbf{w})$ , o peso do elemento  $(n, k)$  do ponto de vista do problema da mochila, elementos  $q_k^n(\mathbf{w})$  de alto valor tenderão a diminuir a cardinalidade de  $C$  mas a extensão da cobertura é melhor quando os valores de  $q_k^n(\mathbf{w})$  são pequenos.

Dados  $U$  e  $\mathbf{w}$ , a heurística de separação inspirada nas ideias acima é dada por:

1. Ordene os elementos  $(n, k) \in \Omega(U)$  em ordem não-crescente de  $\sum_{s \in \mathcal{S}_n \cap U} \zeta_k^{n,s}$ .
2. Adicione os elementos  $(n, k)$  de acordo com a ordem, garantindo que  $C(U)$  tem no máximo um elemento para cada poço, até que  $q(C(U), \mathbf{w}) > q^{\max}(U, \mathbf{w})$ .

### 4.3 DESIGUALDADES VÁLIDAS PARA A FORMULAÇÃO COMPACTA

O conceito de cobertura *surrogate* desenvolvido para a formulação integrada (Definição 7) é aplicável à formulação compacta. Esta seção apresenta brevemente a desigualdade de cobertura *surrogate* para a formulação compacta sem muitos detalhes, dada a similaridade aos resultados obtidos para a formulação integrada.

**Proposição 5.** *Para o conjunto de separadores  $U$  e o vetor surrogate  $\mathbf{w}$ , uma cobertura surrogate  $C(U)$  induz uma desigualdade de cobertura surrogate que é válida para  $\text{conv}(\mathcal{X})$ :*

$$\sum_{(n,k) \in C(U)} \zeta_k^n \leq |C(U)| - 1 + \sum_{n \in \mathcal{N}(C(U))} \sum_{s \in \mathcal{S}_n \setminus U} z_{n,s} \quad (4.10)$$

*Demonstração.* Para qualquer  $s \in \mathcal{S}$  e  $h \in \mathcal{H}$ , segue da desigualdade (4.1k):

$$q_h^{s, \max} \geq \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \tilde{q}_h^{n,s} = \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} (\lambda_{L,k}^n q_{i,k}^n + \lambda_{R,k}^n q_{i,k+1}^n) z_{n,s} \quad (4.11)$$

Multiplicando a equação (4.11) por  $\mathbf{w}_h \geq 0$  e somando para todo  $h \in \mathcal{H}$  chega-se a:

$$\begin{aligned}
\sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h q_h^{s, \max} &\geq \sum_{h \in \mathcal{H}} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbf{w}_h (\lambda_{L,k}^n q_{i,k}^n + \lambda_{R,k}^n q_{i,k+1}^n) z_{n,s} \\
&= \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h (\lambda_{L,k}^n q_{i,k}^n + \lambda_{R,k}^n q_{i,k+1}^n) z_{n,s} \\
&\geq \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^n z_{n,s} \tag{4.12}
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_h : h \in \mathcal{H})$  e a última desigualdade segue do mesmo desenvolvimento realizado na prova da Proposição 3, na desigualdade (4.6). Para qualquer  $U \subseteq \mathcal{S}$ , adicione a desigualdade (4.12) para todo  $s \in U$ , chegando a:

$$\begin{aligned}
q^{\max}(U, \mathbf{w}) &= \sum_{s \in U} \sum_{h \in \mathcal{H}} \mathbf{w}_h q_h^{s, \max} \\
&\geq \sum_{s \in U} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^n z_{n,s} \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Suponha que existe  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  que não satisfaz a desigualdade de cobertura dada por (4.10) para algum  $U \in \mathcal{S}$ , cobertura  $C(U)$  e vetor *surrogate*  $\mathbf{w}$ . Uma vez que  $\mathbf{x}$  viola (4.10), conclui-se que:

$$\sum_{(n,k) \in C(U)} \zeta_k^n = |C(U)| \tag{4.14a}$$

$$\forall n \in \mathcal{N}(C(U)), \exists s \in (U \cap \mathcal{S}_n) : z_{n,s} = 1 \tag{4.14b}$$

Observe que se  $\zeta_n^k = 1$  então existe um separador  $s(n,k)$  que recebe a produção consequente da ativação do par  $(n,k)$ , isto implica em  $z_{n,s(n,k)} = 1$ . Partindo da desigualdade (4.13):

$$\sum_{s \in U} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{K}} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^n z_{n,s} \geq \sum_{(n,k) \in C(U)} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^n z_{n,s(n,k)} \tag{4.15}$$

$$= \sum_{(n,k) \in C(U)} q_k^n(\mathbf{w}) \tag{4.16}$$

$$> q^{\max}(U, \mathbf{w}) \tag{4.17}$$

Mas isto viola a desigualdade (4.13) e, portanto, contradiz a hipótese.  $\square$

De propósito, a formulação integrada foi motivada pelo termo envolvendo as variáveis de alinhamento  $z_{n,s}$  do lado direito da desigualdade (4.10), que tende a enfraquecer a desigualdade de cobertura. Esta observação levou à utilização das variáveis inteiras  $\zeta_k^{n,s}$  para decidir simultaneamente alinhamento poço-separador e linearização para cada poço.

**Definição 9.** A extensão de uma cobertura  $C(U)$  é definida por  $E[C(U)] = \{(n,k) \in \Omega(U) \setminus C(U) : (n,k') \in C(U), q_k^n(\mathbf{w}) \geq q_{k'}^n(\mathbf{w})\}$ .

Dito de outra maneira, a extensão consiste dos níveis de operação  $(n,k)$  que não estão presentes na cobertura e que consomem mais recursos *surrogate* que os pares correspondentes  $(n,k')$  presentes na cobertura.

**Proposição 6.** A desigualdade de cobertura estendida *surrogate* é válida para  $\text{conv}(\mathcal{X})$ :

$$\sum_{(n,k) \in C(U) \cup E[C(U)]} \zeta_k^n \leq |C(U)| - 1 + \sum_{n \in \mathcal{N}(C(U))} \sum_{s \in \mathcal{S}_n \setminus U} z_{n,s} \quad (4.18)$$

*Demonstração.* Suponha que existe  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  que não satisfaz a desigualdade de cobertura estendida dada por (4.18) para algum  $U \subseteq \mathcal{S}$ , cobertura  $C(U)$  e vetor *surrogate*  $\mathbf{w}$ . Uma vez que  $\mathbf{x}$  viola (4.18), conclui-se que:

$$\forall n \in \mathcal{N}(C(U)), \exists k \in \mathcal{X} : (n,k) \in (C(U) \cup E[C(U)]), \zeta_k^n = 1 \quad (4.19a)$$

$$\forall s \in \mathcal{N}(C(U)), \exists s \in (U \cap \mathcal{S}_n) : z_{n,s} = 1 \quad (4.19b)$$

Partindo da desigualdade (4.13):

$$\sum_{s \in U} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} \sum_{k \in \mathcal{X}} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^n z_{n,s} \geq \sum_{(n,k) \in (C(U) \cup E[C(U)])} q_k^n(\mathbf{w}) \zeta_k^n \sum_{s \in U} z_{n,s} \quad (4.20a)$$

$$\geq \sum_{(n,k) \in C(U)} q_k^n(\mathbf{w}) \quad (4.20b)$$

$$> q^{\max}(U, \mathbf{w}) \quad (4.20c)$$

Mas isto viola a desigualdade (4.13) e, portanto, contradiz a hipótese.  $\square$

Em oposição à desigualdade de cobertura estendida para a formulação integrada, as variáveis introduzidas pela extensão não podem

ser multiplicadas por fatores maiores que um, dependendo do menor consumo *surrogate*. Para ilustrar este fato, suponha que um par  $(n, k) \in E[C(U)]$  possui um fator maior que 1, por exemplo 2, multiplicando  $\zeta_k^n$ . Logo, quando  $\zeta_k^n = 1$  e a produção do poço  $n$  é direcionada a um separador  $s \notin U$ , a variável  $z_{n,s}$  teria que ser multiplicada por um fator de pelo menos 2.

Quando  $U = \mathcal{S}$ , os termos do lado direito da desigualdade (4.18) envolvendo as variáveis  $z_{n,s}$  somem, tornando a desigualdade de cobertura estendida *surrogate* idêntica em essência à correspondente desigualdade da formulação integrada. A extensão da cobertura e os fatores de *lifting* aproximado são obtidos pela aplicação do mesmo procedimento da formulação integrada utilizando  $U = \mathcal{S}$ .

**Proposição 7.** *Dada uma cobertura  $C(\mathcal{S})$  e um vetor surrogate  $\mathbf{w}$ , a seguinte desigualdade de cobertura estendida é válida para  $\text{conv}(\mathcal{X})$ :*

$$\sum_{(n,k) \in C(\mathcal{S})} \zeta_k^n + \sum_{(n,k) \in E[C(\mathcal{S})]} \beta_k^n \zeta_k^n \leq |C(\mathcal{S})| - 1 \quad (4.21)$$

*Demonstração.* Suponha que existe  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  que viola a desigualdade (4.21). Com respeito a  $\mathbf{x}$ , definem-se os conjuntos seguintes:

- $\Phi_C = \{(n, k) \in C(\mathcal{S}) : \zeta_k^n = 1\}$ ;
- $\Phi_A = \{(n, k) \in E_A : \zeta_k^n = 1\}$  e  
 $\Phi_A^d = \{(n, k) \in \Phi_A : \beta_k^n = d\}$ ; e
- $\Phi_B = \{(n, k) \in E_B : \zeta_k^n = 1\}$  e  
 $\Phi_B^d = \{(n, k) \in \Phi_B : \beta_k^n = d\}$ .

Seja  $q = \sum_{d=1}^{|C(\mathcal{S})|} d|\Phi_A^d| + \sum_{d=1}^{|C(\mathcal{S})|} d|\Phi_B^d|$ . Como  $\mathbf{x}^\dagger$  viola (4.21),  $|\Phi_C| + q > |C(\mathcal{S})| - 1$ . Logo, pela definição da cobertura estendida *surrogate* e dos fatores de *lifting* aproximado,

$$\sum_{(n,k) \in \Phi_C \cup \Phi_A \cup \Phi_B} q_k^n(\mathbf{w}) \geq \sum_{(n,k) \in C(\mathcal{S})} q_k^n(\mathbf{w}) > q^{\max}(\mathcal{S}, \mathbf{w})$$

o que contradiz a hipótese de que  $\mathbf{x}^\dagger$  é factível. □

### 4.3.1 Separação

A separação de coberturas também é feita de maneira similar ao caso da formulação integrada. Para manter a brevidade aqui são comentadas somente as diferenças:

- O programa inteiro de separação (4.9) possui as mesmas variáveis e restrições. A função objetivo neste caso é:

$$\sum_{(n,k) \in \Omega(U)} \left( \zeta_k^n - 1 - \sum_{s \in \mathcal{S}_n \setminus U} z_{n,s} \right) \theta_k^n + 1 \quad (4.22)$$

- A ordenação de elementos  $(n,k) \in \Omega(U)$  na heurística gulosa é feita em ordem não-crescente de  $\zeta_k^n - 1 - \sum_{s \in \mathcal{S}_n \setminus U} z_{n,s}$ .

## 4.4 DESIGUALDADES VÁLIDAS PARA A DISPONIBILIDADE DE GÁS DE INJEÇÃO

Desigualdades válidas baseadas em coberturas obtidas a partir da disponibilidade de gás são aplicadas em ambas formulações integrada e compacta. Estas desigualdades são essencialmente aquelas desenvolvidas em (CAMPONOGARA; NAKASHIMA, 2006b) para o problema de alocação de gás de injeção que é restrito somente pela capacidade de compressão. Para este problema em particular foram obtidas condições para que as desigualdades baseadas em coberturas sejam facetas do poliedro, procedimentos simples para calcular fatores aproximados de *lifting*, e finalmente condições para que estes fatores aproximados sejam de fato exatos.

Para manter a brevidade da apresentação, as desigualdades são desenvolvidas somente para a formulação compacta, e a partir desta, facilmente pode-se estender para o caso da formulação integrada substituindo  $\zeta_k^n$  por  $\sum_{s \in \mathcal{S}_n} \zeta_k^{n,s}$ . As demonstrações também são omitidas pois elas podem ser obtidas diretamente de (CAMPONOGARA; NAKASHIMA, 2006b; NAKASHIMA, 2007).

#### 4.4.1 Desigualdade de cobertura de gás de injeção

Para qualquer conjunto  $C \subseteq \Omega$ , seja  $q_i(C) = \sum_{(n,k) \in C} q_{i,k}^n$  a menor vazão de gás de injeção necessária para operar os poços em  $\mathcal{N}(C)$  nos níveis de operação presentes em  $C$ .

**Definição 10.** *Um subconjunto  $C \subseteq \Omega$  define uma cobertura de gás de injeção se:*

1. para todos os pares distintos  $(n,k), (n',k') \in C, n \neq n'$ ; e
2.  $q_i(C) > q_i^{\max}$

**Proposição 8.** *Uma cobertura para gás de injeção  $C$  induz uma desigualdade válida de gás de injeção para  $\text{conv}(\mathcal{X})$ :*

$$\sum_{(n,k) \in C} \zeta_k^n \leq |C| - 1 \quad (4.23)$$

Para uma cobertura  $C$  e  $(n,k) \in C$ , seja  $C_{n,k} = C \setminus \{(n,k)\}$ .  $C$  é mínima se nenhuma das condições seguintes é satisfeita:

1. existe  $(n,k) \in C$  tal que  $C_{n,k} \cup \{(n,k-1) : k \geq 2\}$  induz uma cobertura de gás de injeção;
2.  $C_{\hat{n},\hat{k}}$  é uma cobertura de gás de injeção para  $(\hat{n},\hat{k}) = \arg \min \{q_{i,k}^n : (n,k) \in C\}$ .

Suponha que  $q_i^{\max} = 2000$  para o exemplo ilustrativo dado na Seção 2.5. Então,  $C = \{(1,2), (2,2)\}$  define uma cobertura de gás de injeção pois  $q_i(C) = 2595,34 > 2000 = q_i^{\max}$ .  $C$  é obviamente mínima.

O problema de separação para coberturas de gás de injeção não é formulado aqui pois é similar ao problema de separação de coberturas *surrogate*. Da mesma maneira, a heurística de separação pode ser obtida da estratégia gulosa desenvolvida para as coberturas *surrogate*.

#### 4.4.2 Extensão das coberturas

A desigualdade (4.23) é fortalecida pela adição de variáveis  $\zeta_k^n$  para alguns pares de  $\Omega \setminus C$ . Esses pares  $(n,k)$  são aqueles que consomem mais gás de injeção que os pares correspondentes  $(n,k') \in C$ , ou os pares  $(n,k)$  que não tem um par correspondente em  $C$  e que consomem mais gás de injeção que todos os pares da  $C$ .



**Definição 11.**  $E[C] = E_A \cup E_B$  é a extensão de uma cobertura de gás de injeção onde:

$$E_A = \{(n, k) : (n, k') \in C, k = k' + 1, \dots, K - 1\}$$

$$E_B = \{(n, k) \in \Omega : n \notin \mathcal{N}(C), q_{i,k}^n \geq \max\{q_{i,k'}^n : (n', k') \in C\}\}$$

Para um inteiro  $d$ , define-se  $C^d \subseteq C$  tal que:

- $|C^d| = d$ ;
- $\min\{q_{i,l}^m : (m, l) \in C^d\} \geq \max\{q_{i,l}^m : (m, l) \in C \setminus C^d\}$ .

O conjunto  $C^d$  contém os  $d$  pares de  $C$  que consomem mais gás de injeção que aqueles que sobraram. Similarmente, para um inteiro  $d$  e  $(n, k) \in C$ , defina  $C_{n,k}^d \subseteq C_{n,k}$  tal que:

- $|C_{n,k}^d| = d$ ;
- $\min\{q_{i,l}^m : (m, l) \in C_{n,k}^d\} \geq \max\{q_{i,l}^m : (m, l) \in C_{n,k} \setminus C_{n,k}^d\}$ .

Claramente,  $C_{n,k}^d$  contém os  $d$  elementos de  $C_{n,k}$  que consomem mais gás de injeção que os sobranes. Sempre que  $d = 0$ , assume-se que  $C^d = \emptyset$  e  $C_{n,k}^d = \emptyset$ .

Para qualquer  $(n, k) \in E[C]$ , os fatores de *lifting* aproximados  $\beta_k^n$  são calculados como segue:

$$\beta_k^n = \begin{cases} 1 + \max\{d : q_{i,k}^n - q_{i,\bar{k}}^n \geq q_i(C_{n,\bar{k}}^d)\}, \\ \quad \text{onde } (n, \bar{k}) \in C, \text{ se } (n, k) \in E_A \\ \max\{d : q_{i,k}^n \geq q_i(C^d)\}, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

**Proposição 9.** A desigualdade de cobertura estendida de gás de injeção de  $C$  é válida para  $\text{conv}(\mathcal{X})$ :

$$\sum_{(n,k) \in C} \zeta_k^n + \sum_{(n,k) \in E[C]} \beta_k^n \zeta_k^n \leq |C| - 1 \quad (4.24)$$

## 4.5 SUMÁRIO

Neste capítulo a abordagem de solução do problema foi apresentada. Inicialmente foi mostrada a aplicação da ferramenta de linearização por partes para obter as formulações compacta e integrada. Logo após foi apresentado como são geradas as desigualdades válidas para

ambas as formulações, para as quais mostrou-se como se obtém desigualdades simples e logo a aplicação de extensão e *lifting* aproximado para fortalecer as desigualdades.

## 5 ANÁLISE COMPUTACIONAL

Neste capítulo comparam-se os modelos desenvolvidos e avalia-se a utilidade dos cortes baseados em coberturas por meio de experimentos computacionais. Os testes foram executados numa estação de trabalho com unidade central de processamento Intel Xeon® @ 2,40 Gigahertz e 4096 Kilobytes de memória cache. Os algoritmos foram implementados e resolvidos no CPLEX versão 11.

### 5.1 CENÁRIOS

Para realizar os experimentos computacionais, 36 instâncias do problema foram criadas variando os parâmetros seguintes:

- Número de poços no campo ( $N = 32, 64, 128$ ).
- Disponibilidade de recursos ( $D =$  alta, média e baixa).
- Concavidade e número de pontos de amostragem de cada CPP, não côncava com 19 pontos de amostragem e côncava com 19, 40 e 60 pontos de amostragem.

Todas as instâncias consideram 3 separadores que podem receber a produção de qualquer poço. Os pontos de amostragem das CPPs não côncavas são do campo de petróleo descrito em (BUITRAGO; RODRÍGUEZ; ESPIN, 1996). As CPPs das instâncias côncavas foram obtidas ajustando uma curva polinomial-logarítmica da forma  $\alpha_0 + \alpha_1 q_i + \alpha_2 q_i^2 + \alpha_3 \ln(q_i + 1)$  (ALARCÓN; TORRES; GOMEZ, 2002) aos pontos das CPPs em (BUITRAGO; RODRÍGUEZ; ESPIN, 1996). Os parâmetros do ajuste ( $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) foram calculados pelo método dos mínimos quadrados e em todos os casos foi possível achar os parâmetros ótimos. Posteriormente esta curva é amostrada e obtém-se uma função côncava linear por partes. Os parâmetros de todas as instâncias estão disponibilizados eletronicamente em arquivos formatados na linguagem AMPL em (CODAS; CAMPONOGARA, 2011), juntamente com os modelos da formulação compacta e integrada.

Nas instâncias com alta disponibilidade de recursos a soma das capacidades dos separadores e a disponibilidade de gás de injeção são muito superiores à capacidade necessária para processar a máxima produção de todos os poços. Quando a disponibilidade de recursos é média, no máximo 50 % dos poços podem produzir: todas as soluções factíveis

satisfazem  $\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{y_n}{|\mathcal{N}|} \leq 0,50$ . Quando a disponibilidade de recursos é baixa, todas as soluções factíveis admitem no máximo 10% dos poços ativados.

## 5.2 ALGORITMO

É utilizada a abordagem de *cut-and-branch*, *i.e.*, cortes são adicionados somente na formulação inicial do problema e a formulação resultante é resolvida por *branch-and-bound*. Na fase de adição de cortes, a solução  $\mathbf{x}$  da relaxação contínua corrente é obtida pela solução de um programa linear. Uma desigualdade válida que corta uma solução  $\mathbf{x}$  fracionária é gerada, adicionada à formulação corrente e o processo é repetido. Quando um corte não pode ser encontrado, a formulação corrente é resolvida pelo algoritmo de *branch-and-bound*. Na fase de *branch-and-bound*, a geração de cortes do *solver* foi desativada de tal maneira a avaliar o impacto dos cortes propostos nesta dissertação.

Planos de corte para soluções fracionárias são induzidos por desigualdades de cobertura estendidas de gás de injeção e por desigualdade de cobertura estendidas *surrogate*. As desigualdades de cobertura estendidas *surrogate* são geradas considerando  $U = \{1\}, \dots, \{S\}$  e  $U = \mathcal{S}$ . O vetor *surrogate*  $\mathbf{w}$  é escolhido atribuindo  $\mathbf{w}_h = 1$  sendo  $h \in \mathcal{H}$  o recurso mais demandado: o cálculo da demanda de  $h$  é dado por  $\sum_{s \in U} \sum_{n \in \mathcal{N}_s} q_h^{n,s} / q_h^{s,\max}$ . As coberturas  $C$  e  $C(U)$  são obtidas pela resolução do problema de separação correspondente ou executando a heurística gulosa.

## 5.3 ANÁLISE

Os valores apresentados nas tabelas desta seção correspondem à média dos índices correspondentes a 4 instâncias que se diferenciam pela concavidade e número de amostras: uma instância possui CPPs não côncavas com 19 amostras; as outras instâncias possuem CPPs côncavas com 19, 40 e 60 amostras.

### 5.3.1 Tempo de execução

Na Tabela 3 são apresentados os tempos consumidos para obter uma solução ótima. Uma solução é considerada ótima quando o *gap*,

Tabela 3: Tempo médio (s) de execução.

$D \backslash N$		$t_I^n$			$t_I^s$		
		32	64	128	32	64	128
alta		0,08	0,23	0,76	0,08	0,23	0,76
média		2,56	24,13	* 2057	3,11	2,72	20,11
baixa		104,75	13,87	* 2156	5,50	1,77	* 2160

$D \backslash N$		$t_C^n$			$t_C^s$		
		32	64	128	32	64	128
alta		0,02	0,05	0,22	0,10	0,22	0,60
média		6,92	45,72	* 2115	4,00	37,66	* 1615
baixa		23,07	16,96	* 2164	17,94	1,61	* 2163

*i.e.*, a diferença do valor da função objetivo da melhor solução factível encontrada e do melhor valor da função objetivo obtido nos subproblemas remanescentes, é inferior a 0,01%. Não foi possível achar uma solução ótima para todas as instâncias, entretanto sempre foi possível achar uma solução factível. Quando o tempo de execução é superior a 2100 s, o processo de resolução é terminado e a melhor solução factível é retornada. Neste caso é dito que o algoritmo não convergiu a uma solução ótima. As células contendo alguma instância que não convergiu a uma solução ótima é marcada com \*. Os sobrescritos se referem ao algoritmo de separação de coberturas:  $n$  representa o caso em que não foram geradas coberturas,  $s$  o caso em que foi utilizado o programa inteiro. Os subscritos se referem à formulação utilizada:  $C$  se refere à formulação compacta e  $I$  à formulação integrada.

Observa-se que quando a disponibilidade é alta o tempo de convergência é sempre inferior a um segundo. Este resultado está correlacionado ao fato da ferramenta de linearização por partes utilizada ser localmente ideal. No caso de alta disponibilidade, pode-se assumir que as restrições associadas à capacidade de injeção e separação não existem, pois estas restrições nunca representarão um gargalo. O alinhamento ótimo pode ser escolhido arbitrariamente. Portanto o problema resultante consiste em encontrar o melhor ponto econômico de cada poço independentemente, sem importar o alinhamento. As únicas restrições ativas seriam aquelas relativas à linearização por partes, portanto, a solução da relaxação do nó raiz é uma solução factível do

problema inteiro-misto graças à característica de idealidade local.

Nos casos mais restritos, como as restrições de capacidade e de alinhamento não são desprezíveis, as boas propriedades de idealidade local são perdidas. Observa-se que os casos mais restritos são mais difíceis de serem resolvidos. Nestes casos, para atingir a convergência no processo de resolução por *branch-bound*, é necessário gerar vários subproblemas desenvolvendo assim uma enumeração implícita de todas as possíveis soluções.

### 5.3.2 Impacto da utilização de planos de corte

Seja  $t_i$  o tempo computacional consumido pelo algoritmo  $i$  para resolver uma certa instância. O índice  $g(t_i, t_j) = (t_i - t_j) / \min\{t_i, t_j\}$  é utilizado para comparar o tempo de execução dos algoritmos  $i$  e  $j$ . Observe que  $g(t_i, t_j) > 0$  se o algoritmo  $i$  é mais lento que  $j$ , e  $g(t_i, t_j) < 0$  caso contrário. Além disso,  $g(t_i, t_j) = -g(t_j, t_i)$ . O valor absoluto  $|g(t_i, t_j)|$  indica quantas vezes um algoritmo é mais rápido ou lento em relação ao outro. Por meio do índice  $g$  é possível comparar o desempenho de abordagens diferentes de resolução.

Tabela 4: Impacto de cortes.

$N$		$g(t_1^n, t_1^s)$			$g(t_C^n, t_C^s)$		
		32	64	128	32	64	128
$D$	alta	-0,03	-0,03	-0,02	-3,24	-3,02	-1,74
	média	0,86	23,25	* 668,33	-0,73	3,10	* 5,77
	baixa	21,03	17,71	* 0,00	-0,37	14,36	* 0,00

Na Tabela 4 analisa-se o impacto da utilização de cortes. Observa-se que nos casos de alta disponibilidade os cortes pioram a eficiência do algoritmo de resolução. Nestes casos a utilização de cortes não é necessária pois o algoritmo converge para uma solução factível na primeira iteração. Nenhum corte é gerado no processo, testes adicionais necessários pelo mecanismo de geração de cortes produzem a diferença de performance.

Nos casos mais restritos os ganhos obtidos pela aplicação de cortes na formulação integrada são evidentes. Observa-se grandes ganhos nas instâncias de disponibilidade média com 128 poços. Tal ganho é consequência de instâncias em que foi possível convergir a uma solução

ótima com cortes mas não sem eles. O valor nulo referente ao caso de disponibilidade baixa com 128 poços indica que não houve ganho. Isto aconteceu pois em ambos os casos não foi possível achar uma solução ótima no limite de tempo.

Os ganhos obtidos na formulação compacta não são evidentes. Nas instâncias com menor quantidade de poços a utilização de cortes reduz a velocidade de resolução. Entretanto, em instâncias de maiores dimensões ganhos são obtidos quando cortes são utilizados.

### 5.3.3 Comparação de formulações

Tabela 5: Comparação de tempo de execução entre formulações.

$N$		$g(t_C^s, t_I^s)$			$g(t_C^n, t_I^n)$		
		32	64	128	32	64	128
$D$	alta	0,45	0,30	0,15	-2,11	-2,54	-2,03
	média	1,07	20,04	* 1741	0,63	1,05	* 0,03
	baixa	4,40	0,88	* 0,00	-3,38	0,39	* 0,00

Na Tabela 5 é realizada a comparação de performance segundo a formulação utilizada. Observa-se que quando não são utilizados cortes, na maioria dos casos a formulação compacta possui melhor desempenho. Os valores contraditórios nas instâncias de alta disponibilidade não tem um impacto muito marcante, pois o tempo de resolução para qualquer formulação é sempre inferior a um segundo. Uma vez que está sendo realizada uma análise relativa esses valores podem ser muito altos quando os tempos de resolução são muito pequenos.

A comparação de tempos de resolução considerando diferentes formulações e utilização de cortes mostra que a formulação integrada em todos os casos é melhor que a formulação compacta. Este resultado reflete que os cortes se ajustam melhor à formulação integrada.

### 5.3.4 Comparação de algoritmos de separação

Na Tabela 6 são apresentados os índices relativos à utilização da heurística gulosa. A formulação integrada foi resolvida utilizando o programa inteiro e a heurística gulosa para realizar a comparação. O

Tabela 6: Impacto da utilização da heurística gulosa.

$N$		$t_1^g$ (s)			$g(t_1^s, t_1^g)$		
		32	64	128	32	64	128
$D$	alta	0,09	0,16	0,44	0,02	-0,08	0,00
	média	2,33	3,79	15,02	0,00	0,09	* 0,00
	baixa	15,89	3,23	* 2166	-0,01	-0,01	* 0,00

sobrescrito  $g$  é utilizado para identificar os casos em que a heurística gulosa foi utilizada. Não se observa vantagem significativa na utilização da heurística gulosa em vez do programa inteiro.

#### 5.4 SUMÁRIO

Os resultados apresentados neste capítulo levam às seguintes conclusões com respeito:

- **às formulações:** os resultados mostram que a formulação compacta é mais rápida que a integrada quando planos de corte não são gerados. Este fato é esperado pois a relaxação linear da formulação integrada possui mais variáveis, demandando mais tempo para resolver as instâncias com algoritmos de *branch-and-bound*. Por outro lado, a formulação integrada é mais rápida que a compacta com algoritmos de geração de cortes.
- **aos cortes baseados em coberturas:** os tempos de resolução de ambas formulações são diminuídos quando planos de corte são utilizados. No caso da formulação integrada, os ganhos são claros e aumentam quando o tamanho das instâncias aumenta. No caso da formulação compacta, os ganhos não são muito evidentes e a separação é mais difícil, tornando o algoritmo mais lento. Uma análise de ganho dos algoritmos de plano de corte mostra que os cortes baseados em coberturas são mais efetivos na formulação integrada, indicando que a sua estrutura possui maior vantagem.
- **ao algoritmo de separação:** o tempo de solução não é muito influenciado pelo algoritmo de separação escolhido, sendo as possíveis alternativas a heurística gulosa ou o problema de separação exato para o caso sem extensão.



- **à amostragem das curvas não lineares:** O número de amostras (19, 40 e 60) utilizadas para representar as curvas não-lineares não afeta significativamente o tempo de execução dos algoritmos.



## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho apontou a necessidade de maior integração de áreas de conhecimento ligadas à produção de campos de petróleo. Os engenheiros de reservatório determinam as características do fluido, a ocorrência de conificação, as dimensões e pressões do reservatório. Estas informações são utilizadas na concepção de curvas de performance que por fim ajudam no planejamento da recuperação do petróleo. Os engenheiros de produção em campo procuram maximizar a produção levando em consideração as restrições impostas pelas instalações disponíveis. A falta de instrumentação e o baixo aproveitamento da instrumentação disponível têm contribuído à falta de integração entre os sistemas de planejamento e de otimização da produção. Medições são empregadas periodicamente por engenheiros de reservatório para ajustar modelos de produção nas características do reservatório e por engenheiros de produção para identificação de condições operacionais. Entretanto, procedimentos heurísticos para a toma de decisões são frequentemente empregados de forma independente, com baixa integração, acarretando uma possível perda de produtividade a curto e longo prazo.

Buscando integrar informações de reservatório e procedimentos operacionais, esta dissertação propôs modelos e algoritmos para otimização da produção de campos considerando poços produtores, separadores e alinhamentos entre poços e separadores. As informações de reservatório utilizadas são as curvas de performance dos poços, enquanto as informações das instalações são os possíveis alinhamentos e as capacidades dos separadores. O método de elevação artificial *gas-lift* é utilizado, portanto o problema consiste em determinar as vazões de injeção para cada poço e os alinhamentos poço-separador de tal maneira a maximizar uma função de ganho econômico, ao mesmo tempo que se respeita as capacidades de processamento dos separadores e a de gás de injeção.

O problema em questão é não linear por causa das curvas que relacionam a injeção de gás nos poços com a vazão de fluido produzido. A presença de diferentes opções de alinhamento do fluido produzido induz um problema combinatório que é tratado utilizando-se variáveis inteiras. Portanto, o problema em questão é um programa não linear inteiro-misto.

Visando contornar a dificuldade de resolução do problema não linear, foi proposta a linearização por partes das curvas de performance dos poços, transformando o problema num programa linear inteiro-

misto. Duas abordagens de linearização foram exploradas:

1. A formulação compacta que utiliza dois tipos de variáveis binárias, a primeira para indicar o segmento de reta que aproxima a curva de performance dos poços, e a segunda para indicar o direcionamento dos fluidos produzidos pelos poços aos equipamentos de separação.
2. A formulação integrada que utiliza apenas um tipo de variável binária, que combina as decisões de linearização e alinhamento.

Apesar de ter sido demonstrado com exemplos numéricos que nenhuma formulação contém a outra, observa-se que a formulação compacta é resolvida com maior rapidez que a integrada quando o problema é resolvido utilizando-se um procedimento de *Branch & Bound* puro. Acredita-se que este resultado é consequência da presença de mais variáveis binárias na formulação integrada em relação à compacta.

Visando melhorar o tempo de resolução foram exploradas desigualdades válidas baseadas em coberturas de mochila. Pode-se relacionar a capacidade dos separadores com a capacidade da mochila e as vazões dos poços com os volumes a serem ocupados na mochila. As desigualdades de cobertura são fortalecidas por meio de estratégias de *lifting* exato e aproximado. A similaridade das duas formulações desenvolvidas permitiu que os mesmos conceitos de cobertura fossem aplicados na geração de desigualdades válidas, porém a estrutura da formulação integrada se mostrou mais apropriada à geração deste tipo de desigualdade. Por meio de ensaios numéricos observou-se que o problema é resolvido com maior rapidez quando se emprega a formulação integrada juntamente com a geração de desigualdades válidas.

Apesar das contribuições desta dissertação, os cenários considerados não trataram algumas características complexas de campos reais que poderão ser estudadas e incorporadas em trabalhos futuros:

- A rede de produção tratada neste trabalho não considera *manifolds* que podem ser vistos como nós intermediários da rede de produção os quais tem a função de concentrar vazões de fluidos. A inclusão destes elementos torna a rede estruturalmente mais complexa e as desigualdades desenvolvidas anteriormente não podem ser aplicadas nesta situação.
- Não foram levadas em consideração restrições de pressão. A pressão nos separadores é controlada e deve estar dentro de faixas pré-determinadas. Por outro lado também existem restrições nas pressões máximas permitidas nos nós da rede de produção.

- Assume-se que a produção de um poço não pode ser enviada a vários separadores ao mesmo tempo. Na prática é possível alinhar um poço a mais de um separador, um procedimento conhecido como *equalização*. Para determinar a factibilidade de dividir as vazões é importante levar em consideração a perda de carga nas linhas de transmissão associadas. Deve ser feita uma suposição relativa às frações de óleo, água e gás em todas as linhas de saída, o que introduz novas restrições não lineares. Uma hipótese coerente seria supor que as frações são iguais nas linhas de saída, entretanto, esta hipótese pode não ser satisfatória dado que as frações na saída dependem da geometria das junções.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALARCÓN, G. A.; TORRES, C. F.; GOMEZ, L. E. Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear constrained programming. *Journal of Energy Resources Technology*, ASME, v. 124, n. 4, p. 262–268, 2002.
- BALAS, E. Facets of the knapsack polytope. *Mathematical Programming*, v. 8, p. 146–164, 1975.
- BALAS, E.; ZEMEL, E. Facets of the knapsack polytope from minimal covers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 34, n. 1, p. 119–148, January 1978.
- BUITRAGO, S.; RODRÍGUEZ, E.; ESPIN, D. Global optimization techniques in gas allocation for continuous flow gas lift systems. In: *Proceedings of the SPE Gas Technology Symposium*. Calgary, Alberta, Canada: Society of Petroleum Engineers, 1996.
- CAMPONOGARA, E.; CONTO, A. de. Gas-lift allocation under precedence constraints: Piecewise-linear formulation and k-covers. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005. p. 4422–4427.
- CAMPONOGARA, E.; NAKASHIMA, P. H. Solving a gas-lift optimization problem by dynamic programming. *European Journal of Operational Research*, v. 174, n. 2, p. 1220–1246, 2006.
- CAMPONOGARA, E.; NAKASHIMA, P. H. R. Optimizing gas-lift production of oil wells: Piecewise linear formulation and computational analysis. *IIE Transactions*, v. 38, n. 2, p. 173–182, 2006.
- CAMPONOGARA, E. et al. An automation system for gas-lifted oil wells: Model identification, control, and optimization. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 70, p. 157–167, 2010.
- CAMPOS, S. R. V. et al. Urucu field integrated production modeling. In: *SPE Intelligent Energy Conference and Exhibition*. Utrecht, The Netherlands: Society of Petroleum Engineers, 2010.
- CODAS, A.; CAMPONOGARA, E. *Test instances of the lift-gas allocation problem with well-separator routing in AMPL format*. 2011. <<http://www.das.ufsc.br/~camponog/EJOR-glcsep-paper>>.

CROWDER, H.; JOHNSON, E. L.; PADBERG, M. Solving large-scale zero-one linear programming problems. *Operations Research*, v. 31, n. 5, p. 803–834, 1983.

GLOVER, F. Surrogate constraints. *Operations Research*, v. 16, n. 4, p. 741–749, July–August 1968.

GLOVER, F. Surrogate constraint duality in mathematical programming. *Operations Research*, v. 23, n. 3, p. 434–451, 1975.

GROTHEY, A.; MCKINNON, K. *Decomposing the Optimization of a Gas Lifted Oil Well Network*. Department of Mathematics and Statistics. University of Edinburgh, March 2000.

GUNNERUD, V.; FOSS, B. Oil production optimization—a piecewise linear model, solved with two decomposition strategies. *Computers & Chemical Engineering*, v. 34, n. 11, p. 1803–1812, 2010.

KAPARIS, K.; LETCHFORD, A. N. Local and global lifted cover inequalities for the 0-1 multidimensional knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, v. 186, n. 1, p. 91–103, 2008.

KEHA, A. B.; FARIAS, I. R. de; NEMHAUSER, G. L. Models for representing piecewise linear cost functions. *Operations Research Letters*, v. 32, p. 44–48, 2004.

KOSMIDIS, V. D.; PERKINS, J. D.; PISTIKOPOULOS, E. N. A mixed integer optimization formulation for the well scheduling problem on petroleum fields. *Computers & Chemical Engineering*, v. 29, n. 7, p. 1523–1541, 2005.

MISENER, R.; GOUNARIS, C. E.; FLOUDAS, C. A. Global optimization of gas lifting operations: A comparative study of piecewise linear formulations. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 48, n. 13, p. 6098–6104, 2009.

NAKASHIMA, P. *Otimização de Processos de Produção de Petróleo via Injeção Contínua de Gás*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. *Integer and Combinatorial Optimization*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1988.

PADBERG, M. Approximating separable nonlinear functions via mixed zero-one programs. *Operations Research Letters*, v. 27, n. 1, p. 1–5, 2000.



RAY, T.; SARKER, R. Genetic algorithm for solving a gas lift optimization problem. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 59, n. 1-2, p. 84–96, 2007.

REDDEN, D.; SHERMAN, T. A. G.; BLANN, J. R. Optimizing gas-lift systems. In: *Proceedings of the 49th Annual Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME*. Houston, Texas: Society of Petroleum Engineers, 1974.

SHERALI, H. D. On mixed-integer zero-one representations for separable lower-semicontinuous piecewise-linear functions. *Operations Research Letters*, v. 28, p. 155–160, 2001.

In: THOMAS, J. E. (Ed.). *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora Interciência, 2001. cap. Elevação.

THRO, M. In: ARNOLD, K. E.; LAKE, L. W. (Ed.). *Petroleum Engineering Handbook*. Austin, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2007. v. 3, cap. Oil and Gas Processing.

UNNELAND, T.; HAUSER, M. Real-time asset management: From vision to engagement—an operator’s experience. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Dallas, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2005.

VANDERBECK, F.; WOLSEY, L. A. Reformulation and decomposition of integer programs. In: JUNGER, M. et al. (Ed.). *50 Years of Integer Programming 1958-2008*. Berlin, Germany: Springer, 2010. p. 431–502.

VIELMA, J. P.; AHMED, S.; NEMHAUSER, G. Mixed-integer models for nonseparable piecewise-linear optimization: Unifying framework and extensions. *Operations Research*, v. 58, n. 2, p. 303–315, 2010.

WANG, P.; LITVAK, M.; AZIZ, K. Optimization of production operations in petroleum fields. In: *Proc. 17th World Petroleum Congress*. Rio de Janeiro, Brazil: [s.n.], 2002.

WINKLER, H. W.; BLANN, J. R. In: ARNOLD, K. E.; LAKE, L. W. (Ed.). *Petroleum Engineering Handbook*. Austin, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2007. v. 4, cap. Gas Lift.

WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1998.