

JAMES RUDNEI TORRES

**EQUAÇÃO DE ESTADO PARA
MATÉRIA DE QUARKS E
PROPRIEDADES ESTELARES**

FLORIANÓPOLIS

2011

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM FÍSICA**

**EQUAÇÃO DE ESTADO PARA MATÉRIA DE
QUARKS E PROPRIEDADES ESTELARES**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Física

JAMES RUDNEI TORRES

Florianópolis, Agosto de 2011

EQUAÇÃO DE ESTADO PARA MATÉRIA DE QUARKS E PROPRIEDADES ESTELARES

JAMES RUDNEI TORRES

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de **Mestre em Física**, Área de concentração **Física Nuclear e de Hádrons**, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina.

Roberto Cid Fernandes Jr., Dr.
Coordenador do Programa de
Pós-Graduação em Física

Banca Examinadora:

Débora Peres Menezes, Dra.
Orientadora - Presidente
(FSC/UFSC)

Germán Lugones, Dr.
(UFABC)

Sidney dos Santos Avancini, Dr.
(FSC/UFSC)

Rafael Cavagnoli, Dr.
(FSC/UFSC)

Dedico este trabalho a quem possa interessar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à Professora Dra. Débora Peres Menezes, pela dedicação, atenção, apoio e motivação. Obrigado por fazer-me acreditar na minha escolha.

Agradeço também aos meus pais pelo carinho e a todos da família que incentivaram minhas escolhas e decisões diante do desafio de estudar e fazer ciência.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Física.

EQUAÇÃO DE ESTADO PARA MATÉRIA DE QUARKS E PROPRIEDADES ESTELARES

James Rudnei Torres

Agosto / 2011

Orientador: Débora Peres Menezes, Dra..

Área de Concentração: Física Nuclear e de Hádrons.

Palavras-chave: Estrelas de Quarks, Modelos Efetivos.

Número de Páginas: 167

Nesta dissertação tivemos como por objetivo estudar a matéria nuclear em altas densidades considerando apenas a fase de quarks desconfinados a temperatura zero. O estudo da matéria quarkônica tem por finalidade a aplicação na astrofísica de objetos compactos. Inicialmente construímos as equações de estado (EoS) para matéria quarkônica possivelmente presente no interior dos pulsares. Na etapa de obtenção das EoS lançamos mão de dois modelos efetivos relativísticos; o tradicional modelo de sacolas do MIT e uma recente proposta alternativa ao modelo de sacolas: o modelo de quarks com massa dependente da densidade (QMDD). Nas EoS, o equilíbrio beta para as reações referentes a interação fraca é também considerado. Uma breve discussão sobre a estabilidade da matéria de quarks também é discutida no contexto de ambos os modelos. As EoS resultantes dos modelos são os *inputs* para resolvermos numericamente as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). As soluções da TOV descrevem as principais propriedades estelares; raio máximo, massa máxima e densidade central.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment
of the requirements for the degree of Master in Physics.

QUARK MATTER EQUATION OF STATE AND STELLAR PROPERTIES

James Rudnei Torres

August / 2011

Supervisor: Débora Peres Menezes, Dra..

Area of Concentration: Nuclear and Hadron Physics.

Keywords: Quark Stars, Effective Models.

Number of pages: 167

In the present work we have studied nuclear matter at high densities, considering only the phase of deconfined quarks at zero temperature. The study of quark matter is important in the context of the astrophysics of compact objects. Initially, we have constructed the equations of state (EoS) for deconfined quark matter possibly present inside the pulsars by employing two relativistic effective models: the traditional MIT bag model and a recently proposed alternative model, the quark mass density dependent (QMDD) model. In obtaining the EoS, the equilibrium beta reactions related to the weak interactions were also considered. A discussion on the stability of quark matter was discussed in the context of both models. The resulting EoS were used as input to the equations of Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), whose solutions describe the main properties of the compact objects, namely their masses, radii and central densities.

SUMÁRIO

1	A MATÉRIA QUARKIÔNICA.....	p. 17
1.1	Evolução estelar	p. 17
1.2	Estrelas de Quarks.	p. 20
1.3	A Matéria Quarkiônica	p. 22
1.3.1	Estrelas de Quarks	p. 25
2	O FORMALISMO NO MODELO DO MIT.....	p. 27
2.1	A Lagrangiana do MIT	p. 28
2.2	Gás de Férmí no Modelo de Sacola	p. 34
2.3	Tensor Energia-Momento	p. 36
2.4	Termodinâmica	p. 40
2.5	Equação de Estado	p. 48
2.5.1	Modelo do MIT a temperatura $T > 0$ (finita)	p. 49
2.5.2	Modelo do MIT a temperatura $T = 0$	p. 50
2.6	A Matéria Quarkiônica em Equilíbrio β	p. 54
3	O MODELO DEPENDENTE DA DENSIDADE.....	p. 57
3.1	Equação de Estado	p. 57
3.1.1	Modelo Dependente da densidade a temperatura $T > 0$	p. 58
3.1.2	Modelo dependente da densidade a temperatura $T = 0$	p. 66
3.2	A Matéria Quarkiônica em Equilíbrio β no Modelo QMDD	p. 74
4	EQUAÇÕES DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF	p. 77
5	RESULTADOS.....	p. 79

5.1	Janela de Estabilidade da Matéria Estranha	p. 79
5.1.1	Estabilidade da Matéria Estranha no Modelo do MIT	p. 88
5.1.2	Estabilidade da Matéria Estranha no Modelo QMDD	p. 91
5.1.3	Energia por Bárion versus Densidade Numérica	p. 94
5.1.4	EoS para Matéria Estranha	p. 103
5.1.5	A TOV e a relação de Massa-Raio	p. 104
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.....	p. 119
6.1	O que foi feito neste trabalho	p. 119
6.2	Perspectivas Futuras	p. 120
	Apêndice A – Convenções.....	p. 127
A.1	Unidades Naturais	p. 127
A.2	Outras Convenções	p. 128
	Apêndice B – Equação de Dirac.....	p. 131
	Apêndice C – Segunda Quantização.....	p. 139
C.0.1	Quantização Canônica	p. 140
C.0.2	O Operador Número	p. 142
C.0.3	O Operador Hamiltoniano	p. 144
C.0.4	O operador Momento	p. 148
C.0.5	O operador \hat{p}	p. 150
	Apêndice D – Potenciais Químicos.....	p. 153
D.1	Potenciais Químicos no Modelo do MIT (u,d,s)	p. 153
D.2	Potenciais Químicos no Modelo do QMDD (u,d,s)	p. 158
D.3	Potenciais Químicos no Modelo do MIT (u,d)	p. 163
D.4	Potenciais Químicos no Modelo QMDD (u,d)	p. 165

1 A MATÉRIA QUARKIÔNICA

“Se um pulsar é um cadáver estelar então o astrofísico é um legista com um bisturi de alguns mega parsecs de comprimento”.

1.1 Evolução estelar

Existem muitas regiões no universo onde se encontram imensas massas gasosas contendo hidrogênio. Estes são os locais apropriados para o nascimento de uma estrela. Em tais regiões concentram-se enormes nuvens moleculares. Algumas perturbações, devido a flutuações gravitacionais, podem modificar as densidades das nuvens de maneira a alterar a velocidade de rotação do gás. Desta forma, pela conservação de momento angular, forma-se o disco de acréscimo na massa gasosa. Num processo muito lento a estrela aumentará sua densidade tornando-se uma protoestrela, que nada mais é que o embrião de uma estrela. Esta fase é chamada de pré-sequência principal, na qual ocorre um aumento de temperatura devido a energia cinética do gás na protoestrela. O aumento da energia cinética e da temperatura contribui para diminuição da densidade da protoestrela, que tende a se expandir. Contudo, a gravidade irá contrabalancear esta expansão, iniciando assim um jogo de balanceamento entre o gradiente de temperatura (pressão do gás na protoestrela) e a força gravitacional. Quando a temperatura atingir um valor próximo de $1,6 \times 10^5 K$ ($13,6eV$), inicia-se a ionização do hidrogênio. Com isso surge um gás de elétrons livres que contribuirá para a pressão do gás. O aumento de temperatura será tão significativo que fornecerá energia cinética suficiente aos prótons para que ocorram fusões termonucleares. O surgimento do elemento hélio por fusão termonuclear de núcleos de hidrogênio e a consequente

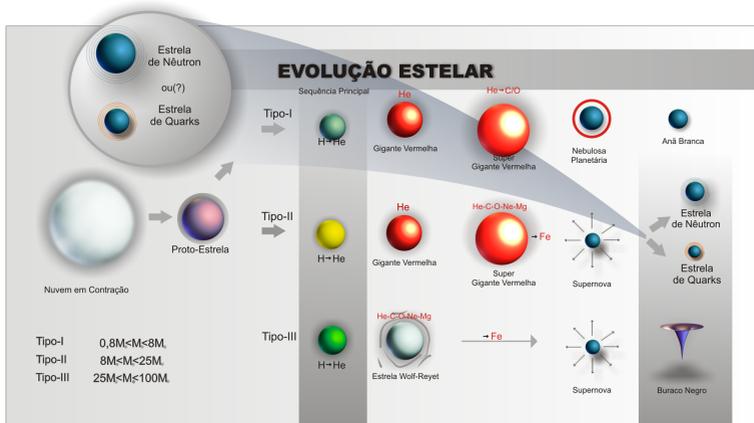


Figura 1: Evolução Estelar.

grande expansão da protoestrela marca o fim do estágio embrionário de uma estrela. A próxima etapa é a sequência principal, etapa mais longa da vida de uma estrela. É importante notar que a massa de uma proto-estrela tem um papel definitivo no seu próprio destino. Para determinados valores de massa, $0,8M_{\odot}$, uma protoestrela pode não chegar a sequência principal e seguir seu desenvolvimento como estrela. Ela pode terminar sua vida como uma anã marrom. Para casos mais massivos a partir de $8M_{\odot}$, a proto-estrela atravessará a sequência principal e terminará num objeto compacto superdenso ou mesmo num buraco negro ($15M_{\odot} < M < 100M_{\odot}$). Estamos interessados na sequência principal de uma estrela que terminará sua vida numa estrela de nêutrons, $8M_{\odot} < M < 25M_{\odot}$. Para aquelas que seguem na sequência principal, a fase é marcada por uma série de reações nucleares envolvendo a queima de hidrogênio e de hélio. A gravidade continua a contrabalancear a pressão devido ao aumento de temperatura. Quando cessa a reação envolvendo o hidrogênio, a gravidade age comprimindo a estrela e vi-

abilizando a queima de hélio. Como a energia liberada pelas reações termonucleares tornam-se maiores, logo a estrela aumenta de temperatura e tamanho. Antes de iniciar a queima de hélio, há primeiramente queima de hidrogênio remanescente que envolve o caroço da estrela, liberando grandes quantidades de energia e fazendo a estrela aumentar de tamanho. Esta é a fase da *gigante vermelha*, caracterizada por temperaturas elevadas proporcionando queima de hélio no caroço da estrela. Nesta fase ocorrem diversas reações nucleares envolvendo hélio, como por exemplo: a reação de ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightleftharpoons {}^8\text{Be}$, mas como ${}^8\text{Be}$ é instável, pode haver reação com outro hélio por exemplo e resultar em: ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He} \rightleftharpoons {}^{12}\text{C} + \gamma$. Desta maneira outras reações nucleares envolvendo o hélio ocorrem sintetizando outros elementos químicos na estrela, como o oxigênio. Ao fim desta fase a estrela tem uma camada externa de hidrogênio, uma intermediária de hélio e um caroço com carbono e oxigênio. Em seguida, na fase da *super gigante vermelha* a elevação da temperatura no caroço da estrela permite a fusão de carbono e oxigênio. Irá ocorrer ainda uma cadeia de reações de fusão nuclear que formará os elementos químicos até o Fe^{56} . A partir desta fase a estrela possui um núcleo formado de ferro e outros constituintes, como elétrons, nêutrons e prótons livres. Pode ocorrer fusão nuclear na camada limítrofe entre o núcleo (caroço) da estrela e a camada externa, aumentando a massa no caroço e também sua densidade. Em densidades e temperaturas altas a estrela sofre uma série de reações. No núcleo, os prótons passam a capturar elétrons livres provocando a neutronização do núcleo até a saturação nuclear, resultando no aparecimento de nêutrons livres. Essas reações contribuem para a diminuição da pressão interna, pois há perda de elétrons e neutrinos, fazendo a estrela contrair rapidamente. Esta é uma fase de pré-supernova e a estrela está prestes a entrar em colapso gravitacional. A partir deste

ponto, a captura eletrônica torna-se mais frequente e devido a isso o caroço se contrai muito rapidamente levando a um desmoronamento da estrela. Quando as camadas mais externas da estrela caem sobre o caroço muito denso, chocando-se contra o núcleo, há uma inversão no sentido da propagação da onda de choque. Devido a colisão, a estrela ejeta as camadas mais externas para o espaço com muita energia cinética. Isto é a explosão de supernova.

As supernovas são divididas em três grupos, a do tipo I, II e III. Acredita-se atualmente que as do tipo I ocorram para sistemas de estrelas binárias. No presente trabalho estamos interessados no estudo teórico de uma segunda possibilidade para o objeto compacto resultante após uma supernova do tipo II, os pulsares. Veremos adiante qual será a motivação para tal estudo.

1.2 Estrelas de Quarks.

Qualitativamente falando, as estrelas de nêutrons possuem algumas analogias com as anãs brancas; ambas são constituídas por um gás de Férmí degenerado, embora as estrelas de nêutrons sejam mais compactas e densas. O gás de Férmí no caso das estrelas de nêutrons é um gás de nêutrons interagentes. A relatividade geral de Einstein tem um papel importante na obtenção das propriedades das estrelas de nêutrons [1], através da solução das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [1]. Com a TOV derivamos as importantes relações de massa e raio de uma estrela. Uma possibilidade interessante para a descrição das estrelas de nêutrons é considerar os quarks em seu interior. Para estas estrelas híbridas, regiões de baixas densidades são compostas basicamente de hádrons enquanto que em altas densidades os quarks podem ser desconfinados, obtendo-se assim uma fase puramente de quarks. As estrelas de quarks são teóricas até o momento,

entretanto observações realizadas pelo observatório de raios-X Chandra em 10 de abril de 2002 detectaram dois possíveis candidatos, denominados de RX J1856.5-3754 e 3C58. Pensava-se que ambos seriam apenas estrelas de nêutrons, mas suas propriedades eram diferentes das conhecidas até então. A fim de tornar mais didática a leitura deste trabalho, faremos aqui algumas observações relevantes. Os pulsares são os objetos compactos em que estamos interessados. Desde a descoberta do nêutron feita em 1932 pelo físico britânico J. Chadwick, um outro grande físico, o russo L. D. Landau já previra a existência de objetos esféricos e muito densos constituídos predominantemente de nêutrons, as estrelas de nêutrons. Para entender melhor tais estrelas, vários físicos, astrofísicos e astrônomos deram suas contribuições. Uma interessante proposta foi feita em 1967 por Pacini. Ele sugere que uma estrela fortemente magnetizada poderia emitir energia. No mesmo ano Hewish e Bell descobrem os pulsares. Os pulsares são então estrelas de nêutrons altamente magnetizadas em rotação. Desde esta época se estuda a matéria nuclear no interior dos pulsares de nêutrons. Mas há também a hipótese que estes objetos sob altas densidades sejam compostos por outros hádrons, como as partículas exóticas. Aqui neste trabalho consideramos que os pulsares, originalmente propostos como sendo constituídos somente por nêutrons, possam também conter um plasma de quarks desconfiados. Na verdade iremos considerar a estrela toda como sendo puramente de quarks, ou seja, levaremos em conta a hipótese de Bodmer-Witten [2, 3], que suscita a existência de um tipo de estrela de quarks: as chamadas estrelas estranhas. Tais objetos compactos seriam os mais densos já encontrados na natureza. Contudo a confirmação de que se trata de estrelas de quarks é ainda um assunto em aberto. A princípio, a ideia da matéria estelar puramente quarkônica pode soar irrealística [1]. O que se espera é que a fase de quarks

confinados nos nucleons seja o estado fundamental da matéria sujeita a interação forte. A matéria quarkiônica, se esta estiver presente nas estrelas de nêutrons, existirá somente em condições de densidades extremas. De qualquer forma é possível que um estado formado pelos três sabores dos quarks, u , d e s , seja na realidade o estado fundamental da interação forte de acordo com a conjectura de Bodmer-Witten. No presente trabalho estamos interessado em tais estrelas estranhas, isto é, estrelas que são compostas apenas de quarks desconfinados. Em tais estrelas consideramos os quarks de sabores up, down e strange, juntamente com os léptons necessários às condições de neutralidade. Achar as equações de estado válidas para estas estrelas é o ponto inicial para este trabalho. Veremos adiante como se pode obter tais equações de estado a partir de diferentes modelos.

1.3 A Matéria Quarkiônica

Neste capítulo iremos discutir os fundamentos do modelo que iremos utilizar para descrever a matéria quarkiônica. De acordo com o modelo padrão das interações fundamentais, crê-se que os constituintes mais fundamentais da matéria sejam os léptons e os quarks. Na década de 30 já eram conhecidas as partículas como o elétron, próton, nêutron e o neutrino. Com os avanços da física nuclear e o desenvolvimento da tecnologia de aceleradores de partículas, novos progressos no entendimento da interação entre nucleons foram alcançados. Portanto a teoria e o experimento revelaram novas partículas, que apesar de serem efêmeras, tiveram suas propriedades bem estudadas, como as (π , K , Λ , Σ , Ξ , Ω). Entretanto somente na década de 60, quando o número de partículas hadrônicas já era muito grande, foi que Gell-Mann e Zweig [4] propuseram a hipótese dos quarks. Estas partículas formariam um grupo de seis objetos fundamentais e indivisíveis que

comporiam os hádrons descobertos nas décadas anteriores. De acordo com o modelo padrão os quarks carregam cargas elétricas fracionárias e possuem números quânticos internos rotulados por sabor e cor. A teoria que se ocupa do estudo dos processos que envolvem a interação forte, portanto interações entre objetos que possuem carga de cor, é a QCD (cromodinâmica quântica). Acredita-se que ela seja a teoria fundamental para descrever a matéria em escala nuclear e subnuclear. A tabela (1) a seguir, apresenta os quarks e suas principais propriedades. A cromodinâmica quântica (QCD) foi proposta primeiramente

Sabor	Massa(MeV)	Carga	isospin	s	c	b	t
u	5.5	2/3	1/2	0	0	0	0
d	7	-1/3	-1/2	0	0	0	0
s	150	-1/3	0	-1	0	0	0
c	1500	2/3	0	0	1	0	0
b	5000	-1/3	0	0	0	1	0
t	> 100000	2/3	0	0	0	0	1

Os quarks e suas massas, cargas, projeções de isospin, *strangeness*, *charm*, *bottomness* e *topness*.

Tabela 1: Quarks.

nos anos 70 por David Politzer, Frank Wilczek e David Gross [6] como uma teoria de campos (TQC) fundamental, que descreve a interação forte envolvendo os quarks por meio dos glúons. As mais interessantes características certamente são o confinamento e a liberdade assintótica. No primeiro caso a interação entre quarks aumenta muito com a distância, e devido a isto, separar dois quarks demanda altíssimas energias. Desta forma os quarks ficariam aprisionados dentro dos hádrons e dos mésons sem que possamos observá-los de alguma maneira através de experimentos. A liberdade assintótica, por outro lado, é também uma propriedade muito interessante. Nas escalas de energias muito altas, isto é, para distâncias arbitrariamente pequenas os quarks passam a

interagir muito fracamente. A liberdade assintótica da QCD pode ser precisamente descrita pelas equações diferenciais do grupo de renormalização [6–8]. Uma alternativa para estudar a interação forte é através da *Gauge Lattice QCD* (cromodinâmica quântica na rede)[7, 9], que tem sido uma opção recorrente na obtenção de resultados computacionais (simulação). Aliada aos métodos computacionais avançados e uma abordagem matemática formal [10], que consiste na discretização espaço e tempo (euclidianos), a *Lattice QCD* evita problemas que são usuais em qualquer TQC no contínuo, como por exemplo as ditas divergências ultravioleta [11] e também questões de renormalizabilidade. Isto se deve ao fato de a rede possuir naturalmente um cut-off para os momentos que é inversamente proporcional ao espaçamento da rede [10]. Devido a não linearidade das equações de movimentos oriundas da QCD, o custo computacional é muito alto mesmo com o uso de supercomputadores. Além disto a *Lattice QCD* viola explicitamente a simetria rotacional contínua e a simetria translacional, uma vez que o espaço-tempo é discretizado [7]. Contudo a simetria de gauge é preservada. Existem outros métodos não-perturbativos que são possíveis para abordar problemas específicos [1]. Aqui neste trabalho usaremos um modelo bastante simplificado, o modelo efetivo de sacola do MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts) [12, 13]. Este modelo relativístico descreve o confinamento dos quarks dentro de um hádron, e pode ser usado na descrição das estrelas sob altíssimas densidades [1]. A sacola modela o confinamento dos quarks num determinado volume sem carga de cor [12]. Os quarks, que são férmions, são tratados no modelo do MIT como uma gás de Fermi degenerado (confinados) [14]. Podemos obter a pressão, densidade de energia, entropia, densidade de quarks do modelo, em temperatura $T = 0$ e para temperatura finita.

1.3.1 Estrelas de Quarks

É comum supor que o estado fundamental da matéria hadrônica seja o estado em que os quarks estão confinados em hádrons individuais. Entretanto as afirmações sobre estrelas de quarks, levam em consideração a hipótese da matéria estranha [3], onde é suposto que o verdadeiro estado fundamental da interação forte é o que considera quarks desconfinados, consistindo um número igual de quarks u , d e s [2].

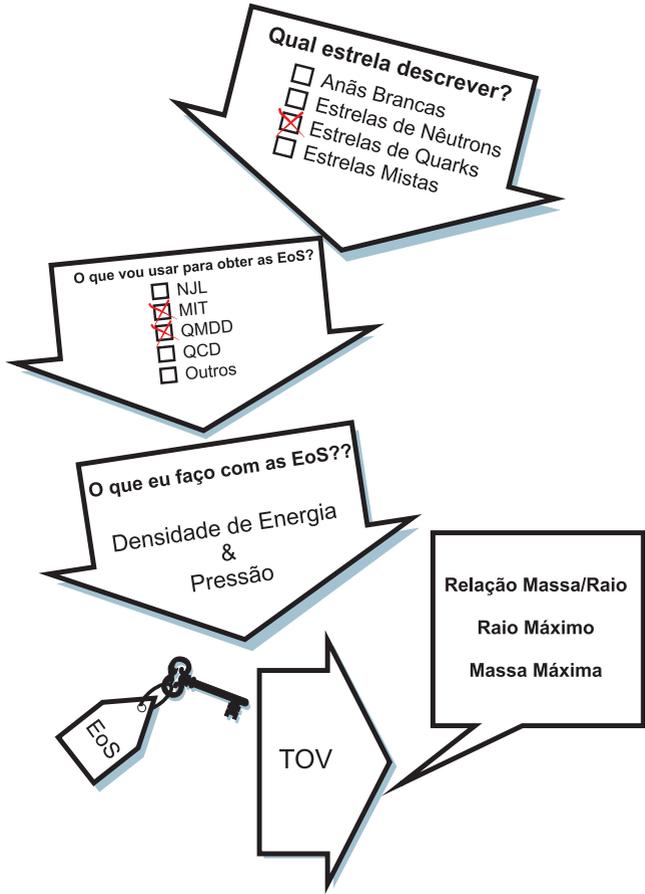


Figura 2: Esquema de como obtivemos os perfis estelares neste trabalho.

2 O FORMALISMO NO MODELO DO MIT

Como fora mencionado anteriormente o modelo de sacola do MIT [2, 12] foi desenvolvido no *Instituto de Tecnologia de Massachusetts* [12] na década de 70 como uma alternativa para explicar a massa dos hádrons em termos dos quarks. Em linhas gerais, o modelo de sacola do MIT descreve o confinamento de quarks em um volume do espaço capaz de conter campos hadrônicos. No interior da sacola, para criar e manter esta região no vácuo é preciso energia potencial constante e positiva por unidade de volume, a chamada *constante de Bag*. Assim vemos que a energia associada à presença de um único quark em um volume V será então dada por BV . Dentro deste volume os quarks em movimento possuirão portanto uma energia cinética associada. No modelo do MIT consideram-se as condições de contorno apropriadas, isto é, que o volume não contenha corrente associado às cargas de cor na sua superfície. Desta maneira podemos supor que os quarks contidos no interior do volume formam um gás de Férmí cuja energia nas fronteiras da sacola são desprezíveis frente aquela presente no interior da sacola. Portanto nota-se que as densidades de energia e pressão da matéria quarkônica constituem-se de dois termos, aquelas oriundas do confinamento da bag e outra da energia cinética dos quarks. Mais adiante mostraremos diversas equações de estado (EoS) para diferentes valores de bag incluindo neutralidade de carga e imposição de equilíbrio beta. No capítulo (3) abordaremos uma variação do modelo do MIT, incluindo uma dependência com a densidade. Cabe neste ponto da dissertação mencionar que utilizaremos a convenção de unidades naturais. Maiores detalhes sobre as unidades estão listadas no apêndice A, por agora basta saber que usaremos $c = \hbar = 1$.

2.1 A Lagrangiana do MIT

Os quarks são partículas que possuem spin 1/2 e que no interior dos hádrons podem assumir altas velocidades. A densidade lagrangiana para descrever campos fermiônicos relativísticos é dada por [15, 16]:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi, \quad (2.1)$$

onde $\psi(x)$ é o campo fermiônico, m é a massa dos quarks. Este é conhecido como o lagrangiano de Dirac livre. De acordo com a propriedade confinante da interação forte os quarks devem permanecer confinados dentro dos bárions e mésons [17]. Desejamos utilizar um modelo efetivo que descreva os quarks condicionalmente livres, ou seja livres no interior de um volume (sacola). Um modelo proposto com tal finalidade é o modelo de sacola do MIT. Neste modelo o confinamento [14] é incorporado usando uma distribuição na densidade lagrangiana de Dirac livre como segue,

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [(\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi] \Theta(R - r), \quad (2.2)$$

a distribuição $\Theta(R - r)$ é do tipo Heaviside onde o R denota o raio da sacola [14]:

$$\Theta(R - r) \begin{cases} 1 & \text{se } r < R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases}. \quad (2.3)$$

Este corte na densidade lagrangiana faz com que os quarks permaneçam numa região limitada por $r < R$. Para $r > R$ não existe campo algum, nem mesmo flutuações devido ao vácuo. Prestando atenção à equação (2.2) vemos que devemos acrescentar algo na densidade de lagrangiano quando $R = r$, nesta região estamos na superfície delgada da sacola,

$$\mathcal{L} = \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi \right] \Theta(R-r) - \frac{1}{2} \bar{\psi} \Delta_s \psi. \quad (2.4)$$

Para uma superfície esférica temos $\Delta_s = \delta(R-r)$, que é uma função tipo delta de Dirac,

$$\delta(R-r) \begin{cases} \infty & \text{se } r = R \\ 0 & \text{se } r \neq R \end{cases}. \quad (2.5)$$

Desta maneira, no interior da sacola, os quarks estão livres (liberdade assintótica), entretanto fora da sacola eles não podem existir (confinamento) [13]. Vamos adicionar a lagrangiana (2.4) um termo conhecido como constante de sacola B , que está relacionada com a energia de vácuo da QCD,

$$\mathcal{L} = \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi - B \right] \Theta(R-r) - \frac{1}{2} \bar{\psi} \Delta_s \psi. \quad (2.6)$$

Para a sacola existir e comportar os quarks em seu interior, ela deve ser criada a partir do vácuo da (QCD) [14]. O vácuo da QCD existe em dois regimes distintos, não-perturbativo e perturbativo [12]. No primeiro caso, a escala de energia é baixa e a constante de acoplamento é alta e está ligado a fenômenos que ocorrem em uma escala de $\sim 1fm$ (exterior aos hádrons). Em escala de energia maiores, no interior dos hádrons, onde há interações quark-glúon e portanto grandes transferências de momento, o uso de métodos perturbativos torna-se muito importante. Resumindo o papel da constante B , é que ela simplificada mente incorpora os efeitos da QCD à longas distâncias (baixos momentos) [13]. Analisando a ação do modelo,

$$W = \int dt \int_V d^3x \mathcal{L}, \quad (2.7)$$

mais explicitamente,

$$W = \int_V d^4x \left[\left(\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi - B \right) \Theta(R-r) - \frac{1}{2} \int_S \bar{\psi} \Delta_s \psi \right], \quad (2.8)$$

V denota o volume da sacola e S é a superfície limitadora da mesma. Utilizando as equações de Euler-Lagrange, resulta nas seguintes condições:

$$\left\{ (i\partial_\mu \gamma^\mu \psi - m) \psi = 0 \quad \text{campos livres de Dirac no interior do volume } V \right. , \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_\mu i\gamma^\mu \psi = \psi \\ B = \frac{1}{2} n_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \psi) \end{array} \right. \quad \text{sobre a superfície } S, \quad (2.10)$$

aqui n^μ corresponde ao vetor normal a superfície. A primeira condição sobre a superfície é a condição de contorno para o interior de V . A última das condições na superfície S requer que a pressão dos quarks seja balanceada pela bag B [14]. Vamos verificar as soluções de maneira mais detalhada, mas primeiro estudaremos as condições de contorno enunciadas em (2.10). Derivando $\Theta(R-r)$,

$$\partial_\mu \Theta(R-r) = (0, \hat{r}) \frac{d}{dr} \Theta(R-r) = n_\mu \delta(R-r), \quad (2.11)$$

vamos utilizar o cálculo variacional no campo $\bar{\psi}$ na expressão (2.6),

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \frac{i}{2} \left[\gamma^\mu \partial_\mu \psi (\delta \bar{\psi}) \Theta(R-r) - (\partial_\mu \delta \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \Theta(R-r) \right] \\ & - m (\delta \bar{\psi}) \psi \Theta(R-r) - \frac{1}{2} \delta(R-r) \psi (\delta \bar{\psi}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

integrando o segundo termo de (2.12) por partes tendo em mente que não há variação na superfície,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \left[\gamma^\mu \partial_\mu \psi \Theta(R-r) + \frac{i}{2} \gamma^\mu \psi n_\mu \delta(R-r) \right] \delta \bar{\psi} \\ & - m \psi \Theta(R-r) (\delta \bar{\psi}) - \frac{1}{2} \delta(R-r) \psi (\delta \bar{\psi}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

e minimizando a ação,

$$\delta W = 0, \quad (2.14)$$

chegamos nas equações de movimento,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi) \Theta(R-r) - \frac{1}{2} (in_\mu \gamma^\mu - \psi) \delta(R-r) = 0, \quad (2.15)$$

vamos considerar soluções independentes para os quarks em duas regiões distintas,

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi = 0 \quad \text{campos livres de Dirac no volume } V \text{ em } r < R \quad (2.16)$$

$$n_\mu i\gamma^\mu \psi = \psi \quad \text{sobre a superfície } S \text{ em } r = R. \quad (2.17)$$

Tomaremos agora a adjunta da equação (2.17),

$$-n_\mu i\gamma^\mu \bar{\psi} = \bar{\psi}, \quad \text{em } r = R \quad (2.18)$$

e usando propriedade,

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^\mu (\gamma^0)^2 = \gamma^\mu. \quad (2.19)$$

Multiplicando por ψ a direita da equação (2.18),

$$-in^\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \psi \quad r = R \quad , \quad (2.20)$$

finalmente multiplicando a equação (2.17) pela esquerda por $\bar{\psi}$, ficamos com,

$$\left\{ \begin{array}{l} -n^\mu \bar{\psi} i\gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \psi \quad \text{sobre a superfície } S \text{ em } r = R \quad . \end{array} \right. \quad (2.21)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} n_\mu \bar{\psi} i\gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \psi \quad \text{sobre a superfície } S \text{ em } r = R \quad , \end{array} \right. \quad (2.22)$$

que admite solução apenas quando $n_\mu \bar{\psi} i\gamma^\mu \psi = 0$, pois consideramos que $n_\mu \neq 0$ na superfície. O termo $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ expressa a corrente vetorial dos quarks,

$$n_\mu \bar{\psi} i\gamma^\mu \psi = 0 \quad r = R \quad , \quad (2.23)$$

que nos diz que a superfície da sacola está descarregada, isto é, não há cargas e correntes de cor em $r = R$ [12]. Observando a ação minimizada na superfície,

$$\delta W = \int d^4x \left[\left(\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi - B \right) \Theta(R-r) - \frac{1}{2} \int_S \bar{\psi} \Delta_s \psi \right]_{r=R} = 0, \quad (2.24)$$

juntamente com a condição de que $n_\mu j^\mu = 0$ em $r = R$, verificamos que os termos quadráticos nos campos $\bar{\psi} \psi|_{r=R}$ são nulos em (2.24) [14]. Podemos resolver a equação (2.24) para B em termos dos campos dos quarks. Do vetor normal e unitário a superfície $n^\mu n_\mu = 1$, onde $n^\mu = (0, \hat{r})$ e $n_\mu = (0, -\hat{r})$. Vamos usar n^μ em (2.17) e (2.18),

$$n^\mu \psi = i \gamma^\mu \psi, \quad (2.25)$$

$$n^\mu \bar{\psi} = -i \gamma^\mu \bar{\psi}. \quad (2.26)$$

Resolvendo a ação na superfície, isto é $r = R$, para B resulta em,

$$\begin{aligned} B &= \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{2} [n^\mu \psi \partial_\mu \psi + (\partial_\mu \bar{\psi}) n^\mu \psi] \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{2} n^\mu \partial_\mu (\bar{\psi} \psi) \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{2} (0, \hat{r}) (\partial_r, \nabla_r) (\bar{\psi} \psi) \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\psi} \psi) \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Esta é a condição de contorno não-linear, que exige que a pressão dos campos de quarks no interior da sacola seja balanceada pela constante de bag B .

2.2 Gás de Férmí no Modelo de Sacola

Consideramos as estrelas de quarks como constituídas basicamente de um gás de Férmí [1, 18, 19], cujas partículas obedecem a estatística de Férmí-Dirac [19] portanto satisfazem a exigência do princípio da exclusão de Pauli (PEP) [1, 23, 24]. O princípio diz que dois férmions não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente (números quânticos idênticos). Rigorosamente, pode-se dizer que este princípio enuncia que a função de onda total de um sistema composto por dois férmions idênticos deve ser antissimétrica. Isto ocorre somente para férmions, ao passo que os bósons podem formar condensados [20], isto é, as partículas bosônicas podem ser encontradas no mesmo estado quântico. O comportamento dos férmions de estar num mesmo estado de energia, apenas com projeções de spin diferentes é conhecido como degenerescência de spin, que gera uma pressão de spin (devido ao PEP). Basicamente desde a formação da protoestrela existe um gás de Férmí que contrabalança a força gravitacional pela pressão de degenerescência. Pode ser um gás de elétrons e prótons nas etapas iniciais de fusão termonucleares ou um gás contendo outros elementos em etapas posteriores da vida estelar. Após uma supernova (morte de uma estrela), teremos ainda um gás degenerado de Férmí, com no caso de uma anã branca (gás de elétrons), ou numa estrela de nêutrons (gás de nêutrons). Estes objetos levam um nome vulgarmente sugestivo, são conhecidos como *cadáveres estelares*. Ainda no contexto da morte de uma estrela. Uma hipótese interessante é que para massas elevadas (limite de Tolmann), a supernova tipo II originaria um objeto compacto com densidade maior que para uma estrela de nêutrons. Para estas altas densidades os quarks estariam desconfinados (quarks livres do modelo MIT) [2], porém limitados pela bag. O gás de quarks resul-

tante, é também um gás degenerado de Férmí e exerce uma pressão de degenerescência de spin. Esta pressão é análoga àquela presente no interior das anãs brancas e estrelas de nêutrons. A constante de bag que aparece em (2.6) assumirá valores específicos de maneira a obtermos equações de estado válidas. Para deduzirmos as equações de movimento partiremos do lagrangiano de Dirac [7]. Por meio do cálculo de variações no campo espinorial adjunto $\bar{\psi}$ ficamos com:

$$\delta \mathcal{L} = (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi \delta \bar{\psi} = 0, \quad (2.28)$$

que resulta na equação de Dirac [15],

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi = 0, \quad (2.29)$$

a equação adjunta é,

$$\bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu + m) = 0. \quad (2.30)$$

multiplicando a equação de movimento pelo campo adjunto $\bar{\psi}$ e a equação adjunta pelo campo ψ , somando os resultados encontramos uma lei de conservação,

$$\partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) = 0, \quad (2.31)$$

isto é

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (2.32)$$

A solução da equação de Dirac foi obtida no apêndice B, aqui expressaremos a solução geral encontrada,

$$\begin{aligned} \psi(x) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} \left\{ A_{\lambda \vec{k}} u(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \varepsilon^{(+)} t \right) \right] \times \right. \\ \left. \times B_{\lambda \vec{k}}^* v(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(-\vec{k} \cdot \vec{x} - \varepsilon^{(-)} t \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

os $A_{\lambda \vec{k}}^s$ e $B_{\lambda \vec{k}}^{*s}$ são coeficientes da expansão de Fourier.

2.3 Tensor Energia-Momento

Agora que temos a solução geral para a equação de Dirac voltamos a atenção ao estudo dos observáveis físicos. Isto é a obtenção das equações de estado (EoS) da matéria nuclear, densidade de energia, pressão, densidade de partículas e densidade de número bariônico. Um meio de obtermos tais EoS é através do tensor energia-momento [7],

$$T_{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu q_i)} \partial_\nu q_i - \mathcal{L} g_{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

onde as coordenadas generalizadas q_i serão representadas pelos campos de matéria ψ e $\bar{\psi}$. O objeto $g_{\mu\nu}$ é a métrica usual do espaço-tempo,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Utilizando as definições acima chegamos em,

$$T_{\mu\nu} = i\gamma_\mu \bar{\psi} \partial_\nu \psi - \bar{\psi} \left[(i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi \right] g_{\mu\nu}, \quad (2.36)$$

o segundo termo entre colchetes é nulo pois é a própria equação de Dirac restando apenas

$$T_{\mu\nu} = i\gamma_\mu \bar{\psi} \partial_\nu \psi. \quad (2.37)$$

É interessante neste ponto explicitar as componentes de $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ k_2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ k_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

a quadri-divergência do tensor momento-energia é

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = \mathcal{J}_\mu, \quad (2.39)$$

É possível chegar em equações de continuidade envolvendo as componentes do tensor $T_{\mu\nu}$. Seja uma fonte de forças dado por $\mathcal{J}_\mu = (\vec{q} \cdot \vec{u}, \vec{q})$, onde \vec{u} representa uma velocidade em relação a algum referencial assumido. Os índices ν são fixados em (2.39) pela regra da soma, verificamos então a componente $\mu = 0$,

$$\frac{\partial T_{00}}{\partial t} + \nabla_i \cdot T_{i0} = q_i u_j \delta_{ij}, \quad (2.40)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{k} = \vec{q} \cdot \vec{u}, \quad (2.41)$$

e para $\mu = i$,

$$\frac{\partial T_{i0}}{\partial t} + \nabla_j T_{ij} = q_i. \quad (2.42)$$

Explicitamente em termos das componentes do tensor energia-momento,

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \nabla_j P_{ij} = q_i, \quad (2.43)$$

as equações acima são típicas equações de continuidade. A primeira (2.41) reflete que qualquer variação temporal na densidade de energia que flui através de uma superfície é compensada por um fluxo de momento linear na superfície limitadora. O lado direito de (2.41) diz também que a causa de mudanças locais na densidade de energia do sistema é devido a forças externas. Para a equação (2.43) vale uma interpretação análoga, só que desta vez falamos de variação de momento no tempo acompanhado de uma variação no *tensor stress* (P_{ij}).

O tensor de energia-momento de um fluido perfeito pode ser escrito na forma [1]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (2.44)$$

para um fluido estático, $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ denota a velocidade do fluido, com $u_0^2 = 1$ e $|\vec{u}|^2 = 0$,

$$\langle T_{00} \rangle = (\varepsilon + p) u_0^2 - p g_{00}, \quad (2.45)$$

logo,

$$\langle T_{00} \rangle = p - \varepsilon + p, \quad (2.46)$$

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle \quad (2.47)$$

e

$$\langle T_{ii} \rangle = (\varepsilon + p) |\vec{u}|^2 - p g_{ii}. \quad (2.48)$$

Destacamos aqui que a pressão é fornecida por meio da seguinte expressão,

$$p = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle. \quad (2.49)$$

A estrutura matricial do tensor energia-momento para um fluido estático pode ser expressa da seguinte forma,

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Lembrando que o hamiltoniano do sistema é dado pela integral de volume da densidade de hamiltoniano \mathcal{H} ,

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad (2.51)$$

substituindo a densidade de energia,

$$H = \int d^3x T_{00} = i \int d^3x \psi^\dagger \partial_0 \psi. \quad (2.52)$$

A densidade de número bariônico também é conservada pela equação (2.32),

$$j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi,$$

ficamos com,

$$N = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi^\dagger \psi. \quad (2.53)$$

Devemos calcular várias quantidades físicas importantes, como a pressão, densidade de energia e densidade bariônica. Para realizar esta tarefa é preciso quantizar os campos fermiônicos na expressão (2.33). A este procedimento chamamos de segunda quantização, pois evoca a quantização dos campos. Os cálculos em detalhes se encontram no apêndice C. Apresentaremos aqui os principais resultados do operado-

res número, hamiltoniano, momento e pressão respectivamente:

$$\widehat{N} = \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left(A_{\lambda \vec{k}}^\dagger A_{\lambda \vec{k}} - B_{\lambda \vec{k}}^\dagger B_{\lambda \vec{k}} \right), \quad (2.54)$$

$$\widehat{H} = \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} E(k) \left(A_{\lambda \vec{k}}^\dagger A_{\lambda \vec{k}} + B_{\lambda \vec{k}}^\dagger B_{\lambda \vec{k}} \right), \quad (2.55)$$

$$\widehat{\mathcal{P}}_i = \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} k_i \left(A_{\lambda \vec{k}}^\dagger A_{\lambda \vec{k}} + B_{\lambda \vec{k}}^\dagger B_{\lambda \vec{k}} \right), \quad (2.56)$$

e também a pressão na forma de operadores,

$$\widehat{p} = \frac{1}{3} \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left(\frac{k^2}{E(k)} \right) \left(A_{\lambda \vec{k}}^\dagger A_{\lambda \vec{k}} + B_{\lambda \vec{k}}^\dagger B_{\lambda \vec{k}} \right), \quad (2.57)$$

lembrando a seguinte relação,

$$E(k) = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}. \quad (2.58)$$

2.4 Termodinâmica

Nesta seção iremos investigar as propriedades termodinâmicas do gás de Férmis (quarks, antiquarks, elétrons, pósitrons etc...) [1, 18–20, 22], a densidade bariônica, pressão, densidade de energia para temperatura finita $T > 0$ [17]. Na sequência discutiremos o caso do gás de Férmis completamente degenerado [1, 18], isto é $T = 0$. Discutiremos propriedades globais termodinâmicas (potencias globais, pressão global, densidade de energia global etc...)[19, 22]. Devemos lembrar que a soma das pressões parciais são devido as espécies fermiônicas presentes, e no caso do modelo de sacolas a bag pode ser identificada como uma pressão parcial confinante [14, 23]. Iniciaremos esta seção introduzindo o grande potencial termodinâmico [17, 20] do sistema, isto é, de um gás de Férmis;

$$\Omega(T, V, \mu) = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z}, \quad (2.59)$$

onde a função de partição é definida por,

$$\mathcal{Z} \equiv \text{Tr} \left\{ e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} \right\}, \quad (2.60)$$

onde \hat{N} é o operador número e $\beta \equiv 1/T$. É válida a seguinte relação termodinâmica,

$$\Omega = -pV. \quad (2.61)$$

A forma diferencial para um processo quasi-estático [22, 23] é dado por,

$$d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu, \quad (2.62)$$

na expressão S , p e N denotam a entropia, pressão e número médio de partículas respectivamente. Devemos tomar o traço da função de partição quântica (2.60) [19, 23] e reescrever os operadores que aparecem na exponencial da função de partição, e que são dados por:

$$\hat{H} = \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \sqrt{k^2 + m^2} \left\{ A_{\lambda \vec{k}}^\dagger A_{\lambda \vec{k}} + B_{\lambda \vec{k}}^\dagger B_{\lambda \vec{k}} \right\}, \quad (2.63)$$

e

$$\hat{N} = \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left(A_{\lambda \vec{k}}^\dagger A_{\lambda \vec{k}} - B_{\lambda \vec{k}}^\dagger B_{\lambda \vec{k}} \right). \quad (2.64)$$

Esses operadores são diagonais na base de autoestados [17] do operador número para bárion e anti-bárion,

$$\begin{aligned}
A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle &= n_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle \\
B_{\vec{k}\lambda}^\dagger B_{\vec{k}\lambda} |\bar{n}_{\vec{k}\lambda}\rangle &= \bar{n}_{\vec{k}\lambda} |\bar{n}_{\vec{k}\lambda}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Vamos calcular o potencial termodinâmico tomando o traço dos operadores na base dada por (2.65)[17]. Antes vamos utilizar a representação de números de ocupação, onde a base de estados de partículas independentes em função do número de ocupação de bárions (n_i) e antibárions (\bar{n}_i) no estado i , pode ser escrita como:

$$\left\{ n_{\vec{k}\lambda} \right\} \equiv \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_\infty\} \tag{2.66}$$

$$\equiv \{n_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, \infty. \tag{2.67}$$

A grande função de partição [17, 23] é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \prod_i \sum_{n_i} \langle n_i | \exp \{ -\beta (E_i - \mu_i) n_i \} | n_i \rangle \times \\
&\times \prod_j \sum_{\bar{n}_j} \langle \bar{n}_j | \exp \{ -\beta (E_j + \mu_j) \bar{n}_j \} | \bar{n}_j \rangle.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Existem apenas dois valores para o número de ocupação para férmions $n_i, \bar{n}_i = 0, 1$. Então a função de partição fica,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \prod_i \{ \langle 0 | 1 | 0 \rangle + \langle 1 | \exp \{ -\beta (E_i^* - \mu_i) \} | 1 \rangle \} \times \\
&\times \prod_j \{ \langle 0 | 1 | 0 \rangle + \langle 1 | \exp \{ -\beta (E_j^* + \mu_j) \} | 1 \rangle \}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\mathcal{Z} = \prod_i \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i^* - \mu_i)} \right\} \prod_j \left\{ 1 + e^{-\beta(E_j^* + \mu_j)} \right\}. \quad (2.69)$$

O potencial termodinâmico (2.59)[17, 23] agora tem a seguinte forma;

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \sum_i \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i^* - \mu_i)} \right\} - \frac{1}{\beta} \sum_j \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_j^* + \mu_j)} \right\}. \quad (2.70)$$

É importante lembrar que a diferencial do potencial termodinâmico é

$$d\Omega(T, V, \{\mu_i\}) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{\mu_i, V} dT + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu_i} dV + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} \right)_{T, V} d\mu_i \quad (2.71)$$

e as relações das equações de estado via derivadas do potencial termodinâmico são [17, 22, 23] obtidas por:

$$\boxed{S = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{\mu_i, V}; \quad p = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu_i}; \quad N_i = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} \right)_{T, V}.} \quad (2.72)$$

Antes mesmo de estudarmos as propriedades termodinâmicas do gás, devemos na expressão (2.70) tomar o seguinte limite:

$$\sum_i \rightarrow \frac{\gamma_i V}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (2.73)$$

e ficar com o resultado;

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_i \Omega_i \\ &= -\frac{1}{\beta} \sum_i \frac{\gamma_i V}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\} + \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i + \mu_i)} \right\} \right],\end{aligned}\quad (2.74)$$

o índice i no somatório acima é sobre todos os férmions no sistema, o número médio de partículas é dado por,

$$N_i = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} \right)_{T,V} \quad (2.75)$$

e ficamos com:

$$N_i = \frac{\gamma_i V}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\frac{1}{\{1 + e^{\beta(E_i - \mu_i)}\}} - \frac{1}{\{1 + e^{\beta(E_i + \mu_i)}\}} \right]. \quad (2.76)$$

Logo a densidade também resulta em:

$$\rho_i = \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\frac{1}{\{1 + e^{\beta(E_i - \mu_i)}\}} - \frac{1}{\{1 + e^{\beta(E_i + \mu_i)}\}} \right]. \quad (2.77)$$

A pressão global é obtida imediatamente do potencial termodinâmico (2.74) e (2.61);

$$p = \sum_i p_i = \frac{1}{\beta} \sum_i \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\} + \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i + \mu_i)} \right\} \right]. \quad (2.78)$$

Note que podemos realizar uma integração por partes na expressão acima, com o objetivo de obtermos uma forma mais simplificada no integrando [18]. Para isso, faremos a explicitamente a integração apenas

na primeira parcela em (2.78) (pressão parcial das partículas). Para as antipartículas que é o segundo termo em (2.78) o cálculo é totalmente análogo. A fim de não fazer confusão de notação nesta passagem, denotemos por p_i a pressão das partículas e no caso das anti-partículas usaremos por \bar{p}_i ;

$$p_i = \frac{1}{\beta} \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\}, \quad (2.79)$$

em coordenadas polares esféricas,

$$p_i = \frac{1}{\beta} \frac{1}{2\pi^2} \gamma_i \int_0^\infty k^2 dk \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\}. \quad (2.80)$$

O integrando da expressão acima fica:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty k^2 dk \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\} \\ &= \frac{1}{3} k^3 \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\} \Big|_0^\infty \\ &+ \frac{\beta}{3} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}} \frac{1}{\left\{ 1 + e^{\beta(E_i - \mu_i)} \right\}}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Note que o termo integrado desaparece nos limites, mas para mostrar isso verificamos que;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} k^3 \ln \left\{ 1 + \frac{1}{e^{\beta(E_i - \mu_i)}} \right\} = \infty \times 0, \quad (2.82)$$

temos uma indeterminação para $k \rightarrow \infty$, pela regra de L'Hôpital,

$$\frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dk} \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\}}{\frac{d}{dk} \frac{1}{k^3}} \quad (2.83)$$

$$= \frac{1}{9} \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\exp(\beta(\mu_i - E_i)) + 1} \right\} \frac{k^5}{\sqrt{k^2 + m^{*2}}} \rightarrow 0. \quad (2.84)$$

A exponencial garante a existência do limite, que é identicamente nulo

$$\frac{1}{3} k^3 \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\} \Big|_0^\infty = 0. \quad (2.85)$$

Depois destas considerações a expressão para pressão finalmente fica [17]:

$$p = \sum_i p_i = \frac{1}{3} \frac{1}{2\pi^2} \sum_i \gamma_i \int_0^\infty dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}} [n_i + \bar{n}_i], \quad (2.86)$$

onde temos que o número de ocupação de partícula e antipartícula é definido respectivamente por,

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{1}{\{1 + e^{\beta(E_i - \mu_i)}\}} \\ \bar{n}_i &= \frac{1}{\{1 + e^{\beta(E_i + \mu_i)}\}}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

A densidade de energia é obtida da fórmula;

$$\frac{E}{V} = \langle \hat{H} \rangle = \frac{1}{V} \frac{\partial(\beta\Omega)}{\partial\beta} + \mu_i \rho_i, \quad (2.88)$$

com

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{E}{V} = \varepsilon. \quad (2.89)$$

Calculando a derivada da função de partição que aparece em (2.88),

$$\frac{1}{V} \frac{\partial(\beta\Omega)}{\partial\beta} = \sum_i \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int d^3k E_i [n_i + \bar{n}_i] - \mu_i \rho_i. \quad (2.90)$$

Após os cancelamentos algébricos e tomando o devido limite ($V \rightarrow \infty$); a densidade de energia fica;

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i = \frac{1}{2\pi^2} \sum_i \gamma_i \int_0^\infty k^2 dk E_i [n_i + \bar{n}_i]. \quad (2.91)$$

Vamos obter o mesmo resultado por outro caminho. Da transformada de Legendre;

$$\Omega = E - ST - \mu_i N_i, \quad (2.92)$$

obtemos a densidade do grande potencial termodinâmico no limite $V \rightarrow \infty$,

$$\tilde{\Omega}(\mu, T) = \varepsilon - sT - \rho_i \mu_i \quad (2.93)$$

e por definição a densidade global do grande potencial termodinâmico é:

$$\tilde{\Omega} \equiv \frac{\Omega(T, V, \mu)}{V}. \quad (2.94)$$

Lembrando que,

$$d\tilde{\Omega}(\mu, T) = -sdT - \rho_i d\mu. \quad (2.95)$$

A densidade de potencial explicitamente é,

$$\tilde{\Omega}(\mu, T) = -\frac{1}{\beta} \sum_i \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\} + \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i + \mu_i)} \right\} \right]. \quad (2.96)$$

Usando a expressão para transformada de Legendre no limite de $V \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \tilde{\Omega} + sT + \mu_i \rho_i \\
&= \tilde{\Omega} + \beta \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \beta} \right)_{\mu_i} + \mu_i \rho_i.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Calculando a seguinte derivada,

$$\begin{aligned}
\beta \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \beta} \right)_{\mu_i} &= \frac{1}{\beta} \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i - \mu_i)} \right\} + \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i + \mu_i)} \right\} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi^2} \gamma_i \int k^2 dk E_i^* [n_i + \bar{n}_i] - \mu_i \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_i - \bar{n}_i],
\end{aligned} \tag{2.98}$$

o primeiro termo é identificado com a expressão (2.96). Então ficamos com:

$$\beta \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \beta} \right)_{\mu_i} = -\tilde{\Omega} + \frac{1}{2\pi^2} \gamma_i \int k^2 dk E_i [n_i + \bar{n}_i] - \mu_i \rho_i. \tag{2.99}$$

Para finalizar, vamos colocar a derivada acima em (2.97). Após os cancelamentos o resultado é;

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i = \frac{1}{2\pi^2} \sum_i \gamma_i \int_0^\infty k^2 dk E_i [n_i + \bar{n}_i]. \tag{2.100}$$

Este é o resultado esperado e está de acordo com aquele obtido a partir de (2.88).

2.5 Equação de Estado

Vamos considerar nesta seção as EoS que obtivemos nas seções precedentes. Isto é, as integrais para pressão, densidade de energia e

densidade de número bariônico. Vamos apenas deixá-las na forma integral sem maiores comentários. As expressões são bastante simplificadas em $T = 0$, e podemos resolvê-las analiticamente. Para que não se tenha dúvidas sobre a escolha de estudar o gás Férmi em $T = 0$ (degenerescência) é importante justificar tal escolha. Na verdade é bastante razoável considerar este regime de temperatura apesar de objetos compactos terem temperaturas elevadas da ordem da temperatura do núcleo do sol $10^6 K$. A consideração a seguir é válida:

$$T_F \ll E_F = \sqrt{k_i^2 + m_i^2}, \quad (2.101)$$

onde $i = u, d, s, \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$, T_F e E_F são os sabores, temperatura e a energia de Férmi respectivamente. A energia dos quarks é $E_F > m_{u,d} = 5MeV \sim 10^{10}K$. Em outras palavras, a energia de Fermi é grande comparada a temperatura dos pulsares da ordem de $10^6 K$. No MIT usamos a massa corrente dos quarks leves $m_{u,s} = 5MeV$ e a aproximação anterior é justificada. No modelo QMDD (*Quark Mass Density Dependent*), veremos adiante, usamos a massa efetiva dos quarks u e d como sendo; $m_{u,d} \propto 1/n_B \sim 100MeV \sim 10^{12}K$. Mesmo sem a contribuição do quark estranho com massa corrente $m_{0s} \sim 150MeV$ (não aparece em baixas densidades) a degenerescência é bastante grande.

Voltando as EoS, vamos considerar o termo de bag nas expressões para pressão e densidade de energia. Esta constante é oriunda do formalismo Lagrangiano já discutido.

2.5.1 Modelo do MIT a temperatura $T > 0$ (finita)

Vamos escrever as EoS para o modelo de sacola em $T > 0$,

$$p = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \int_0^\infty k^3 \frac{\partial E_i(k)}{\partial k} [n(k, \mu_i) + n(k, -\mu_i)] dk - B, \quad (2.102)$$

$$\varepsilon = \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 E_i(k) [n(k, \mu_i) + n(k, -\mu_i)] dk + B, \quad (2.103)$$

e a densidade de número bariônico,

$$n_B = \frac{1}{3} \sum_i \rho_i, \quad (2.104)$$

ou explicitamente,

$$n_B = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 [n(k, \mu_i) - n(k, -\mu_i)] dk, \quad (2.105)$$

onde a energia relativística total é dada por,

$$E_i(k) = \sqrt{k_i^2 + m_i^2}, \quad (2.106)$$

a distribuição estatística para os férmions é dada por (2.87). O parâmetro B é a constante de sacola e está associada a energia do vácuo necessária para manter os quarks confinados dentro de um volume V .

2.5.2 Modelo do MIT a temperatura $T = 0$

Passaremos rapidamente a discussão do modelo de sacola em $T = 0$, que é importante para o estudo da matéria nuclear no interior das estrelas. A distribuição de Férmis-Dirac torna-se a simples distribuição degrau, como momento máximo denotado por k_f , no limite $T \rightarrow 0$:

$$n(k, +\mu_i) \sim \theta(k - k_f), \quad (2.107)$$

as EoS ficam,

$$p = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \int_0^{k_f} k^3 \frac{\partial E_i(k)}{\partial k} - B, \quad (2.108)$$

$$\varepsilon = \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \int_0^{k_f} k^2 E_i(k) dk + B, \quad (2.109)$$

e a densidade de número bariônico é;

$$n_B = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \int_0^{k_f} k^2 dk. \quad (2.110)$$

A última expressão é trivial, repetiremos o resultado aqui,

$$n_B = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{6\pi^2} k_{if}^3. \quad (2.111)$$

Multiplicaremos a pressão (2.108) e a densidade de energia (2.109) por 3 e somando as expressões ficamos com,

$$3(p + \varepsilon) = \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \int_0^{k_f} \left[k^3 \frac{\partial E_i(k)}{\partial k} + k^2 E_i(k) \right] dk \quad (2.112)$$

Devemos realizar uma integração por partes,

$$(p + \varepsilon) = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \int_0^{k_f} \frac{\partial}{\partial k} (k^3 E_i(k)) dk, \quad (2.113)$$

para ficar com:

$$(p + \varepsilon) = \left(\sum_i \frac{\gamma_i k_f^3}{6\pi^2} \right) E_i(k_f). \quad (2.114)$$

Pela densidade de partícula calculada anteriormente temos;

$$(p + \varepsilon) = n_i E_i(k_f), \quad (2.115)$$

onde potencial químico é definido como,

$$E_i(k_f) \equiv \mu_i = \sqrt{k_{if}^2 + m_i^2}, \quad (2.116)$$

ficamos com uma importante relação termodinâmica,

$$p = n_i \mu_i - \varepsilon. \quad (2.117)$$

Lembrando que (2.117) pode ser obtida via a transformada

de Legendre da energia. Isto é, do grande potencial termodinâmico (variáveis $[T, \mu]$):

$$U[T, \mu] = \Phi(T, V, \mu) = U(S, V, N) - ST + \mu_i N_i, \quad (2.118)$$

e lembrando a definição, (2.94) em temperatura $T = 0$ a expressão (2.118) resulta em;

$$-\tilde{\Omega} = p = -\varepsilon + n_i \mu_i. \quad (2.119)$$

Depois desta pequena digressão para termodinâmica voltaremos para as EoS e seus resultados. As integrais (2.108), (2.109) podem ser resolvidas analiticamente utilizando métodos de integração conhecidos. Mostraremos as respostas conforme estão nas referências [1, 17]. Utilizaremos também uma parametrização usual de acordo com os autores [1, 18]. Nas expressões abaixo todos os momentos k_i são na verdade o momento k_{if} de Fermi, suprimiremos o índice f e deixaremos o índice i associado aos sabores das partículas;

$$p = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \left(\frac{1}{8} \left[k_i (k_i^2 + m_i^2)^{1/2} (2k_i^2 - 3m_i^2) + 3m_i^4 \ln \left(\frac{(k_i^2 + m_i^2)^{1/2} + k_i}{m} \right) \right] \right) - B, \quad (2.120)$$

usando a relação (2.117) chegamos em,

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \left(\frac{3}{8} \left[k_i (k_i^2 + m_i^2)^{1/2} (2k_i^2 + m_i^2) - m_i^4 \ln \left(\frac{(k_i^2 + m_i^2)^{1/2} + k_i}{m} \right) \right] \right) + B. \quad (2.121)$$

Uma outra maneira de expressar a mesma resposta é usando uma parametrização [18, 19, 25, 30–32]. Colocando em evidência a

razão k_i/m_i ,

$$p = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \frac{m_i^4}{8} \left[\frac{k_i}{m_i} \left(\frac{k_i^2}{m_i^2} + 1 \right)^{1/2} \left(2 \frac{k_i^2}{m_i^2} - 3 \right) + 3 \ln \left(\left(\frac{k_i^2}{m_i^2} + 1 \right)^{1/2} + \frac{k_i}{m_i} \right) \right] - B, \quad (2.122)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \frac{3m_i^4}{8} \left[\frac{k_i}{m_i} \left(\frac{k_i^2}{m_i^2} + 1 \right)^{1/2} \left(2 \frac{k_i^2}{m_i^2} + 1 \right) - \ln \left(\left(\frac{k_i^2}{m_i^2} + 1 \right)^{1/2} + \frac{k_i}{m_i} \right) \right] + B, \quad (2.123)$$

$$n_B = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{6\pi^2} k_i^3. \quad (2.124)$$

definindo a variável,

$$x_i = \frac{k_i}{m_i}, \quad (2.125)$$

usando a relação; $k_i^2 = \mu_i^2 - m_i^2$, em termos do parâmetro ficamos com,

$$x_i = \left[\left(\frac{\mu_i}{m_i} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (2.126)$$

Para finalmente resultar nas seguintes expressões:

$$p = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \frac{m_i^4}{8} \left[x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (2x_i^2 - 3) + 3 \ln \left((x_i^2 + 1)^{1/2} + x_i \right) \right] - B, \quad (2.127)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{2\pi^2} \frac{3m_i^4}{8} \left[x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (2x_i^2 + 1) - \ln \left((x_i^2 + 1)^{1/2} + x_i \right) \right] + B \quad (2.128)$$

e

$$n_B = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i}{6\pi^2} m_i^3 x_i^3. \quad (2.129)$$

Costuma-se escrever as respostas de uma maneira mais compacta,

$$p = \sum_i \frac{\gamma_i m_i^4}{48\pi^2} F(x_i) - B, \quad (2.130)$$

e

$$\varepsilon = \sum_i \frac{\gamma_i m_i^4}{48\pi^2} 3H(x_i) + B, \quad (2.131)$$

cujas as funções que aparecem nas expressões acima são definidas como:

$$F(x_i) = x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (2x_i^2 - 3) + 3 \ln \left((x_i^2 + 1)^{1/2} + x_i \right) \quad (2.132)$$

e

$$H(x_i) = x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (2x_i^2 + 1) - \ln \left((x_i^2 + 1)^{1/2} + x_i \right). \quad (2.133)$$

2.6 A Matéria Quarkiônica em Equilíbrio β

Para a matéria nuclear das estrelas de quarks nós impomos tanto a neutralidade de carga quanto o equilíbrio dinâmico para as reações relacionadas com a interação fraca. Chamamos a isto de condição de equilíbrio β . No presente trabalho consideramos o estágio após a desleptonização da estrela, quando não há mais neutrinos presentes. Podemos, desta maneira, considerar o potencial químico dos neutrinos identicamente nulo. As relações entre potenciais químicos dos diferentes constituintes são expressos pelas relações de equilíbrio β ,

$$\mu_s = \mu_d = \mu_u + \mu_{e^-}, \quad \mu_\mu = \mu_{e^-}, \quad (2.134)$$

e para neutralidade de carga impomos,

$$\rho_e + \rho_\mu = \frac{1}{3} (2\rho_u - \rho_d - \rho_s). \quad (2.135)$$

A densidade lagrangiana total da matéria quarkiônica para estrelas de quarks:

$$\mathcal{L}_{\text{MIT}} = \sum_{q=u,d,s} \bar{\Psi}_q (\nu \gamma_\mu \partial^\mu - m_q) \Psi_q \quad (2.136)$$

e léptons,

$$\mathcal{L}_{\text{léptons}} = \sum_{l=e^-, \mu^-} \bar{\Psi}_l (\nu \gamma_\mu \partial^\mu - m_l) \Psi_l. \quad (2.137)$$

As EoS para os léptons presentes é dada por:

$$p_l = \sum_j \frac{\gamma_j m_j^4}{48\pi^2} F(x_j), \quad (2.138)$$

e

$$\varepsilon_l = \sum_j \frac{\gamma_j m_j^4}{48\pi^2} 3H(x_j), \quad (2.139)$$

onde temos $j = e^-, \mu^-$ e $\beta_j = 2$ é a degenerescência dos elétrons e múons. O parâmetro x_j agora é em termos da massa dos léptons:

$$x_j = \left[\left(\frac{\mu_j}{m_j} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (2.140)$$

cujas as funções que aparecem nas expressões acima são definidas como:

$$F(x_j) = x_j (x_j^2 + 1)^{1/2} (2x_j^2 - 3) + 3 \ln \left((x_j^2 + 1)^{1/2} + x_j \right) \quad (2.141)$$

e

$$H(x_j) = x_j (x_j^2 + 1)^{1/2} (2x_j^2 + 1) - \ln \left((x_j^2 + 1)^{1/2} + x_j \right). \quad (2.142)$$

A figura a seguir mostra o comportamento do potencial químico com a densidade no modelo do MIT.

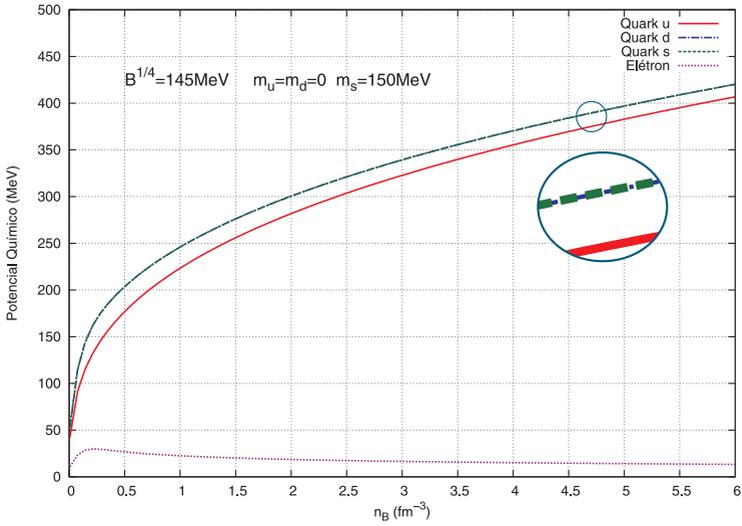


Figura 3: Relação entre potencial químico e densidade no modelo do MIT. A figura está de acordo com as equações (2.134) quando tomamos $m_u = m_d = 0$ e $m_s = 150\text{MeV}$.

3 O MODELO DEPENDENTE DA DENSIDADE

Uma proposta recente para obtermos as EoS das estrelas de quarks é o modelo *quark mass density dependent* (QMDD) [25, 26]. É um modelo efetivo que de forma semelhante ao modelo do MIT descreve o confinamento. Contudo o modelo QMDD tem massa dinâmica [29, 34] para os quarks. Assim como fizemos no modelo do MIT, vamos assumir a matéria estranha nas estrelas de quarks. Os constituintes do gás são uma mistura de quarks u , d e s mais suas antipartículas \bar{u} , \bar{d} e \bar{s} . Inicialmente consideraremos o caso geral a temperatura finita. Após a apresentação do modelo em $T > 0$ abordaremos o caso de maior interesse, isto é, $T = 0$. Nas seções 2-4 do capítulo 2 tratamos especificamente do modelo de sacola MIT. Exceto pela constante de bag B adicionada *ad hoc* e pela massa constante dos quarks no modelo do MIT, toda dedução pode ser aproveitada no modelo QMDD. Para ser mais claro, usaremos o grande potencial termodinâmico do gás ideal (2.74), com a troca $m \rightarrow m^*$ e $B = 0$. Denotamos a massa efetiva por m^* , que definiremos logo mais. Ainda nas próximas seções desenvolveremos uma maneira de obter um termo de confinamento que tenha o papel análogo a constante B no MIT. Este termo adicional será obtido com o uso das derivadas parciais do grande potencial termodinâmico do gás ideal. No modelo QMDD o termo confinante será dependente da densidade numérica bariônica.

3.1 Equação de Estado

As EoS em $T = 0$ serão resolvidas analiticamente e os resultados comparados com o gás livre e com o modelo do MIT. A massa dos quarks no modelo dependente da densidade é parametrizada pela den-

tidade numérica bariônica [25, 26, 28, 30–32], e tem a seguinte forma:

$$m_q^* = \frac{C}{3n_B}, \quad (q = u, \bar{u}, d, \bar{d}), \quad (3.1)$$

e para o quark estranho,

$$m_{s,\bar{s}}^* = m_{0s,0\bar{s}} + \frac{C}{3n_B}, \quad , \quad (3.2)$$

onde C é uma constante, m_{0s} é a massa de corrente do quark estranho, $m_{0\bar{s}}$ é a massa da antipartícula. Para efeitos de simulação assumimos que o valor de m_{0s} ora é $100MeV$, ora $150MeV$ (idem para MIT). A densidade bariônica é definida da seguinte forma.

$$n_B = \frac{1}{3} [(\rho_u - \rho_{\bar{u}}) + (\rho_d - \rho_{\bar{d}}) + (\rho_s - \rho_{\bar{s}})], \quad (3.3)$$

Na equação (3.3), os ρ_u , ρ_d , e ρ_s são as densidades de partículas e $\rho_{\bar{u}}$, $\rho_{\bar{d}}$, $\rho_{\bar{s}}$ são as densidades de antipartículas.

3.1.1 Modelo Dependente da densidade a temperatura $T > 0$

Partiremos da discussão termodinâmica do modelo. O grande potencial termodinâmico global do modelo dependente da densidade QMDD é dado por,

$$\Omega_{QMDD} = \sum_i \Omega_i + \Omega_C(n_B), \quad (3.4)$$

onde $\Omega_C(n_B)$ é o potencial associado ao termo de confinamento (pressão negativa). O somatório em $(i = u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s})$ é sobre todos os quarks presentes, o potencial do gás livre com uma massa efetiva m^* [25, 26] é:

$$\Omega_{id} \equiv \sum_i \Omega_i = -\frac{1}{\beta} \frac{\gamma_i V}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i^* - \mu_i)} \right\} + \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i^* + \mu_i)} \right\} \right], \quad (3.5)$$

onde γ_i é um fator de degenerescência para os quarks, a notação Ω_{id} é para denotar o gás ideal (pressões parciais dos quarks). O potencial do gás ideal (3.5) será útil na dedução do potencial Ω_{QMDD} como veremos adiante. A relação de dispersão com massa efetiva é dada por,

$$E_i^*(k) = \sqrt{k^2 + m_i^{*2}}. \quad (3.6)$$

A pressão total do gás com massa efetiva m_i^* é dado por,

$$p_{QMDD} = \sum_i p_i - B(n_B), \quad (3.7)$$

isto é,

$$p_{QMDD} = \frac{1}{\beta} \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i^* - \mu_i)} \right\} + \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i^* + \mu_i)} \right\} \right] - B(n_B), \quad (3.8)$$

o termo $B(n_B)$ é o análogo ao termo de bag \mathbf{B} no modelo do MIT. Vejamos uma maneira de determinar $B(n_B)$ via derivadas parciais do potencial termodinâmico do gás ideal (3.5). Depois de determinar p_{QMDD} totalmente, calcularemos as demais grandezas de interesse, a saber densidade de energia e densidade de partículas. Seja o vínculo,

$$n_B = \frac{N_B}{V}, \quad (3.9)$$

onde N_B é o número médio bariônico e é fixo. Seguem as relações; para entropia e número médio de partículas:

$$-S = \left(\frac{\partial \Omega_{ideal}}{\partial T} \right)_{V, \mu_i} \quad (3.10)$$

e

$$-N_i = \left(\frac{\partial \Omega_{ideal}}{\partial \mu_i} \right)_{T, V}. \quad (3.11)$$

A pressão pode ser manipulada da seguinte forma;

$$\begin{aligned} -p &= \left(\frac{\partial \Omega_{ideal}}{\partial V} \right)_{T, \mu} \\ &= \left(\frac{\partial \Omega_{ideal}}{\partial (N_B/n_B)} \right)_{T, \mu} \\ &= \frac{1}{N_B} \left(\frac{\partial \Omega_{ideal}}{\partial (1/n_B)} \right)_{T, \mu}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

mas como $N_B = V n_B$ é fixo resulta que,

$$\begin{aligned} -p &= \left(\frac{\partial (\Omega_{ideal}/V n_B)}{\partial (1/n_B)} \right)_{T, \mu} \\ &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega_{ideal}}{\partial (1/n_B)} \right)_{T, \mu} + \frac{\Omega_{ideal}}{V} \\ &= -n_B \left(\frac{\partial (\Omega_{ideal}/V)}{\partial n_B} \right)_{T, \mu} + \frac{\Omega_{ideal}}{V}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Definindo a densidade do grande potencial termodinâmico $(\Omega/V) \equiv \tilde{\Omega}$ ficamos com:

$$-p = -n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T, \mu} + \tilde{\Omega}_{ideal}. \quad (3.14)$$

A densidade de entropia é

$$-s = n_B \left(\frac{\partial \left(\tilde{\Omega}_{ideal}/n_B \right)}{\partial T} \right)_{\mu_i} \quad (3.15)$$

e a densidade de partículas

$$-\rho_i = n_B \left(\frac{\partial \left(\tilde{\Omega}_{ideal}/n_B \right)}{\partial \mu_i} \right)_T. \quad (3.16)$$

A pressão da maneira como foi obtida em (3.14) tem um termo adicional àquela obtida diretamente da relação do potencial com a pressão:

$$\tilde{\Omega}_{ideal} = -p_{ideal}. \quad (3.17)$$

Se tivéssemos o conhecimento total da função de partição para o modelo QMDD, certamente não seria necessário usar as derivadas do potencial termodinâmico para calcular a pressão, mas somente a relação $\tilde{\Omega} = -p$ [23]. Conhecendo a função de partição contendo todos os ingredientes do modelo, ou os correspondentes campos numa aproximação de campo médio por exemplo, seria possível obter a pressão de maneira direta via relações termodinâmicas. Usaremos o potencial termodinâmico do gás ideal como um artifício para obter uma expressão analítica para $B(n_B)$ [25]. Nosso gás ideal tem uma massa efetiva m^* dado por (3.1). Esta derivação nada mais é que um *ansatz*¹ [28, 34] para o termo de confinamento, não há consistência termodinâmica envolvida pois partimos de uma pressão já conhecida pela relação (3.17), contudo insistimos em usar as regras para derivadas parciais no potencial (3.5) visando a dependência com massa $m^*(n_B)$ [25, 30–32]. Agora que temos uma expressão para uma pressão efetiva (com termo confinante) e que

¹*Ansatz* aqui é empregado no sentido em que não há derivação em termos de primeiros princípios, apenas argumentos heurísticos, numa direção mais empírica que formal. No caso a obtenção de um termo confinante.

denotaremos por p_{QMDD} ,

$$p_{QMDD} = -\tilde{\Omega}_{ideal} + n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T,\mu}, \quad (3.18)$$

ou ainda,

$$p_{QMDD} = p_{ideal} + B(n_B), \quad (3.19)$$

onde definimos o termo confinante como $B(n_B) \equiv n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T,\mu}$ [30].

Usaremos a relação $\tilde{\Omega}_{QMDD} = -p_{QMDD}$ para identificar qual é o grande potencial termodinâmico por volume com nosso *ansatz* $B(n_B)$ que imediatamente resulta em:

$$\tilde{\Omega}_{QMDD} = \tilde{\Omega}_{ideal} - B(n_B). \quad (3.20)$$

De posse deste potencial $\tilde{\Omega}_{QMDD}$, é fácil verificar que o modelo QMDD não é consistente com o potencial $\tilde{\Omega}_{ideal}$ devido ao termo adicional em (3.19). Mas como temos um novo potencial para o modelo dado por $\tilde{\Omega}_{QMDD}$ podemos usar as regras de derivas parciais livremente sem inconsistência. Por exemplo tendo em mente as variáveis que estão fixadas nas expressões abaixo,

$$\begin{aligned} -s_{QMDD} &= \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{QMDD}}{\partial T} \right)_{\mu_i} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial T} \left[-n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T,\mu_i} + \tilde{\Omega}_{ideal} \right] \right)_{\mu_i} \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial T} \right)_{\mu_i} = -s_{ideal} \end{aligned} \quad (3.21)$$

a entropia não muda pois a derivada é realizada a T constante o que re-

sulta no termo nulo na expressão acima. Para a densidade de partículas ocorre o mesmo

$$\begin{aligned}
 -\rho_i &= \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{QMDD}}{\partial \mu_i} \right)_T \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[-n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T, \mu_i} + \tilde{\Omega}_{ideal} \right] \right)_T \\
 &= \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial \mu_i} \right)_T = -\rho_{i(ideal)}. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Da transformada de Legendre [19, 23] para o grande potencial termodinâmico Ω segue a relação,

$$U_{QMDD}(n_B(V); S, V, N) = ST - p_{QMDD}V + \mu_i N_i, \tag{3.23}$$

carregamos a notação em p_{QMDD} para denotar que haverá uma contribuição para pressão devido a uma variável dependente de V , a saber $n_B(V)$, que está separada por ponto e vírgula no argumento da energia. A transformada é feita nas variáveis S e N ,

$$\Omega_{QMDD}(\mu, T) = U_{QMDD}(n_B(V); S, V, N) - ST - \mu_i N_i, \tag{3.24}$$

resultando na conhecida relação [19, 20, 23],

$$\Omega_{QMDD}(\mu, T) = -p_{QMDD}V \tag{3.25}$$

tomando a diferencial de $\Omega_{QMDD}(\mu, T)$,

$$\begin{aligned}
 d\Omega_{QMDD}(\mu, T) &= dU_{QMDD}(S, V, N) - d(ST) - d(\mu_i N_i) \\
 &= -SdT - p_{QMDD}dV - N_i d\mu_i, \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

a densidade de potencial é;

$$\tilde{\Omega}_{QMDD}(\boldsymbol{\mu}, T) = \varepsilon_{QMDD} - s_{ideal}T - \rho_{i(ideal)}\mu_i, \quad (3.27)$$

ou ainda resolvendo para a densidade de energia,

$$\varepsilon_{QMDD} = -P_{QMDD} + T \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial T} \right)_{\mu_i} + \mu_i \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial \mu_i} \right)_T. \quad (3.28)$$

Usando P_{QMDD} ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{QMDD} &= \tilde{\Omega}_{ideal} + T \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial T} \right)_{\mu_i} + \mu_i \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial \mu_i} \right)_T - n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T, \mu}, \\ &= \varepsilon_{ideal} - n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T, \mu}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

De maneira mais compacta, isto é, usando a mesma definição que em (3.19),

$$\varepsilon_{QMDD} = \varepsilon_{ideal} - B(n_B). \quad (3.30)$$

Verificando que a pressão é,

$$P_{QMDD} = P_{ideal} + B(n_B), \quad (3.31)$$

poderíamos mostrar que a entropia não depende do termo $B(n_B)$ de diversas maneiras, mas isto já foi feito em (3.21) [26], pois a densidade de entropia é a mesma do gás ideal com uma massa m^* que denotamos por s_{ideal} .

Vamos reescrever $B(n_B)$ em (3.19) de maneira mais explícita. Usando a regra da cadeia e o *ansatz* da massa,

$$B(n_B) = n_B \left(\frac{dm^*(n_B)}{dn_B} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T,\mu}, \quad (3.32)$$

que resulta em:

$$B(n_B) = -\frac{C}{3n_B} \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T,\mu}. \quad (3.33)$$

Vamos calcular a seguinte derivada,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T,\mu} &= -\frac{1}{\beta} \sum_i \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial n_B} \int d^3k \left[\ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i^* - \mu_i)} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \ln \left\{ 1 + e^{-\beta(E_i^* + \mu_i)} \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

que resulta na expressão;

$$\left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T,\mu} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_i \gamma_i \int k^2 dk \frac{m_i^*}{E_i^*} (n_i + \bar{n}_i), \quad (3.35)$$

onde $n_i = \left\{ 1 + e^{\beta(E_i^* - \mu_i)} \right\}^{-1}$ e $\bar{n}_i = \left\{ 1 + e^{\beta(E_i^* + \mu_i)} \right\}^{-1}$ são as distribuições para quark e antiquark respectivamente. O termo confinante fica:

$$B(n_B) = -\frac{C}{3n_B} \frac{1}{2\pi^2} \sum_i \gamma_i \int_0^\infty k^2 dk \frac{m_i^*}{E_i^*} (n_i + \bar{n}_i). \quad (3.36)$$

Vamos colecionar as equações de estado para o modelo dependente da densidade. A pressão, densidade de energia, densidade de partículas e a densidade bariônica são:

$$p = \frac{1}{2\pi^2} \sum_i \gamma_i \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_i^{*2}}} \left[\frac{k^2}{3} - \left(\frac{Cm_i^*}{3n_B} \right) \right] (n_i + \bar{n}_i), \quad (3.37)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi^2} \sum_i \gamma_i \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_i^{*2}}} \left[(k^2 + m_i^{*2}) + \left(\frac{Cm_i^*}{3n_B} \right) \right] (n_i + \bar{n}_i), \quad (3.38)$$

$$\rho_i = \frac{1}{2\pi^2} \gamma_i \int_0^\infty k^2 dk (n_i - \bar{n}_i) \quad (3.39)$$

e finalmente,

$$n_B = \frac{1}{3} \frac{1}{2\pi^2} \gamma_i \int_0^\infty k^2 dk (n_i - \bar{n}_i). \quad (3.40)$$

3.1.2 Modelo dependente da densidade a temperatura $T = 0$

Em temperatura $T = 0$, a função distribuição de Fermi-Dirac se aproxima da função degrau [1, 24] e as EoS (3.37-3.40) para o modelo dependente da densidade são calculadas com respeito ao potencial termodinâmico do modelo QMDD em $T = 0$ [25];

$$\tilde{\Omega}_{QMDD} = \tilde{\Omega}_{id} - B(n_B), \quad (3.41)$$

onde temos que a expressão em $T = 0$ para o potencial do gás ideal é dada por

$$\tilde{\Omega}_{id} = - \sum_i \frac{\gamma_i}{48\pi^2} m_i^4 F(x_i). \quad (3.42)$$

Na expressão (3.42), $F(x_i)^2$ é a análoga a função parametrizada por x_i definida no capítulo em que tratávamos do modelo do MIT em $T = 0$ [18, 19], vide equações (2.141) e (2.142). Devemos sempre recordar que no modelo QMDD temos uma massa efetiva m^* :

²Vamos suprimir o asterisco na maioria das expressões no modelo QMDD. Isto porque é clara a dependência da variável x_i^* com m^* evidente em (3.44).

$$F(x_i) = x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (2x_i^2 - 3) + 3 \arg \sinh(x_i), \quad (3.43)$$

cujos parâmetro x_i está relacionado com o potencial químico da partícula e a massa efetiva da mesma por:

$$x_i = \left[\left(\frac{\mu_i}{m_i^*} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad (3.44)$$

e o termo confinante a temperatura $T = 0$ fica:

$$B(n_B) = -\frac{C}{3n_B} \frac{1}{2\pi^2} \sum_i \gamma_i \int_0^{k_f} k^2 dk \frac{m_i^*}{\sqrt{k^2 + m_i^{*2}}}, \quad (3.45)$$

cujas integrais podem ser facilmente calculadas. A pressão então fica;

$$p_{QMDD} = p_{id} + B(n_B). \quad (3.46)$$

Podemos resolver (3.45) derivando (3.42) ao invés de integrarmos, basta usar a definição,

$$B(n_B) = n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{id}}{\partial n_B} \right)_{T, \mu}. \quad (3.47)$$

Vamos calcular a derivada acima usando (3.42),

$$n_B \frac{\partial \tilde{\Omega}_{id}}{\partial n_B} = - \sum_i \frac{\gamma_i}{48\pi^2} n_B \frac{\partial (m_i^{*4} F(x_i))}{\partial n_B}, \quad (3.48)$$

sabemos que as quantidades $m_i^*(n_B)$ e $F\{x_i[m_i(n_B)]\}$ dependem de n_B , pela regra do produto de derivadas;

$$n_B \frac{\partial \tilde{\Omega}_{id}}{\partial n_B} = - \sum_i \frac{\gamma_i n_B}{48\pi^2} \left[F(x_i) \frac{\partial m_i^{*4}}{\partial n_B} + m_i^{*4} \frac{\partial F(x_i)}{\partial n_B} \right]. \quad (3.49)$$

Calculemos a derivada na primeira parcela em (3.49),

$$\begin{aligned} \frac{dm_i^{*4}}{dn_B} &= 4 \left(m_{i0} + \frac{C}{3n_B} \right)^3 \left(-\frac{C}{3n_B^2} \right) \\ &= - \left(\frac{4Cm_i^3}{3n_B^2} \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

E na segunda parcela,

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial n_B} = \frac{\partial}{\partial n_B} \left[x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (2x_i^2 - 3) + 3 \arg \sinh(x_i) \right]. \quad (3.51)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial n_B} = \frac{\partial}{\partial n_B} \left[(x_i^2 + 1)^{1/2} (2x_i^3 - 3x_i) + 3 \arg \sinh(x_i) \right]. \quad (3.52)$$

A seguir vamos definir as seguintes funções auxiliares e suas respectivas derivadas,

$$f_1(x_i) \equiv (x_i^2 + 1)^{1/2}, \quad (3.53)$$

$$\frac{df_1(x_i)}{dx_i} = x_i (x_i^2 + 1)^{-1/2}, \quad (3.54)$$

$$f_2(x_i) \equiv (2x_i^3 - 3x_i), \quad (3.55)$$

$$\frac{df_2(x_i)}{dx_i} = (6x_i^2 - 3), \quad (3.56)$$

e também,

$$f_3(x_i) \equiv 3 \arg \sinh(x_i), \quad (3.57)$$

e a derivada

$$\frac{df_3(x_i)}{dx_i} = 3(x_i^2 + 1)^{-1/2}. \quad (3.58)$$

Utilizando as definições (3.53-3.58) em (3.52),

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial n_B} = \frac{\partial}{\partial n_B} [f_1(x_i) f_2(x_i) + f_3(x_i)], \quad (3.59)$$

pela regra do produto,

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial n_B} = f_1(x_i) \frac{\partial}{\partial n_B} f_2(x_i) + f_2(x_i) \frac{\partial}{\partial n_B} f_1(x_i) + \frac{\partial}{\partial n_B} f_3(x_i). \quad (3.60)$$

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_i)}{\partial n_B} = \\ \left(\frac{dx_i}{dm_i^*} \right) \left(\frac{dm_i^*}{dn_B} \right) \left[f_1(x_i) \frac{df_2(x_i)}{dx_i} + f_2(x_i) \frac{df_1(x_i)}{dx_i} + \frac{df_3(x_i)}{dx_i} \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

dos resultados (3.53-3.58) junto com,

$$\frac{dx_i}{dm_i^*} = -\frac{1}{m_i^* x_i} (x_i^2 + 1). \quad (3.62)$$

e também

$$\frac{dm_i^*}{dn_B} = -\frac{C}{3n_B^2}, \quad (3.63)$$

ficamos com:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F(x_i)}{\partial n_B} \\
&= \frac{C}{3n_B^2 m_i^*} \frac{(x_i^2 + 1)}{x_i} \left[(x_i^2 + 1)^{1/2} (6x_i^2 - 3) \right. \\
&\quad \left. + (2x_i^3 - 3x_i) x (x_i^2 + 1)^{-1/2} + 3 (x_i^2 + 1)^{-1/2} \right]. \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Manipulando um pouco chegamos em

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F(x_i)}{\partial n_B} \\
&= \frac{C}{3n_B^2 m_i^*} \frac{(x_i^2 + 1)^{1/2}}{x_i} \left[(x_i^2 + 1) (6x_i^2 - 3) + (2x_i^3 - 3x_i) x + 3 \right], \\
&= \frac{8C}{3n_B^2 m_i^*} (x_i^2 + 1)^{1/2} x_i^3. \quad (3.65)
\end{aligned}$$

Juntando os resultados (3.50) e (3.65) na expressão (3.49),

$$\begin{aligned}
n_B \frac{\partial \tilde{\Omega}_{id}}{\partial n_B} &= - \sum_i \frac{\gamma_i n_B}{48\pi^2} \left[F(x_i) \left(-\frac{4C m_i^{3*}}{3n_B^2} \right) + m_i^{4*} \left(\frac{8C}{3n_B^2 m_i^*} (x_i^2 + 1)^{1/2} x_i^3 \right) \right] \\
&= - \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left(\frac{4C}{3n_B m_i^*} \right) \left[2 (x_i^2 + 1)^{1/2} x_i^3 - F(x_i) \right] \\
&= - \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left(\frac{4C}{3n_B m_i^*} \right) \left[2 (x_i^2 + 1)^{1/2} x_i^3 \right. \\
&\quad \left. - x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (2x_i^2 - 3) - 3 \arg \sinh(x_i) \right] \\
&= - \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left(\frac{4C}{3n_B m_i^*} \right) \left[3 (x_i^2 + 1)^{1/2} x_i - 3 \arg \sinh(x_i) \right] \\
&= - \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left(\frac{4C}{n_B m_i^*} \right) G(x_i), \quad (3.66)
\end{aligned}$$

onde definimos a seguinte função,

$$G(x_i) = x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} - \arg \sinh(x_i). \quad (3.67)$$

Substituindo (3.66) em (3.47) e o resultado na expressão (3.46) juntamente com (3.42) a pressão finalmente fica:

$$p_{QMDD} = \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left[F(x_i) - \frac{C}{n_B} \left(\frac{4}{m_i^*} \right) G(x_i) \right]. \quad (3.68)$$

Para encontrarmos a densidade de energia usaremos a seguinte relação termodinâmica (3.28) e a expressão (3.68) juntamente com $\tilde{\Omega}_{ideal} = -p_{ideal}$ em $T = 0$,

$$\varepsilon_{QMDD} = \tilde{\Omega}_{ideal} + \mu_i \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial \mu_i} \right)_T - n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T, \mu}. \quad (3.69)$$

Precisamos calcular ainda a densidade por partícula $\rho_{i_{QMDD}}$. Usando a expressão (3.42) na relação abaixo,

$$\rho_{i_{QMDD}} = \rho_{i_{(ideal)}} = - \left. \frac{\partial \tilde{\Omega}_{i_{(ideal)}}}{\partial \mu_i} \right|_{T, n_B}, \quad (3.70)$$

lembrando de (3.22) logo;

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{i_{(ideal)}}}{\partial \mu_i} = - \left(- \frac{\gamma_i m_i^4}{48\pi^2} \frac{\partial F(x_i)}{\partial \mu_i} \right). \quad (3.71)$$

Derivando $F(x_i)$ em relação a μ_i

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial \mu_i} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (2x_i^2 - 3) + 3 \arg \sinh(x_i) \right], \quad (3.72)$$

faremos uso das funções auxiliares (3.54-3.58) e suas respectivas deri-

vadas,

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial \mu_i} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} [f_1(x_i) f_2(x_i) + f_3(x_i)]. \quad (3.73)$$

Pela regra do produto de derivadas,

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial \mu_i} = f_1(x_i) \frac{\partial}{\partial \mu_i} f_2(x_i) + f_2(x_i) \frac{\partial}{\partial \mu_i} f_1(x_i) + \frac{\partial}{\partial \mu_i} f_3(x_i), \quad (3.74)$$

lembrando da relação (3.62), pela regra da cadeia reescrevemos (3.74),

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_i)}{\partial \mu_i} &= f_1(x_i) \frac{df_2(x_i)}{dx_i} \left(\frac{dx_i}{d\mu_i} \right) \\ &\quad + f_2(x_i) \frac{df_1(x_i)}{dx_i} \left(\frac{dx_i}{d\mu_i} \right) \\ &\quad + \frac{df_3(x_i)}{dx_i} \left(\frac{dx_i}{d\mu_i} \right), \end{aligned} \quad (3.75)$$

substituindo os resultados (3.54-3.58), (3.62) em (3.75) ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_i)}{\partial \mu_i} &= \left(\frac{(x_i^2 + 1)}{x_i \mu_i} \right) \left[(x_i^2 + 1)^{1/2} (6x_i^2 - 3) \right. \\ &\quad \left. + (2x_i^3 - 3x_i) x (x_i^2 + 1)^{-1/2} + 3(x_i^2 + 1)^{-1/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Simplificando e fatorando os termos resulta em;

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial \mu_i} = \frac{(x_i^2 + 1)^{1/2}}{\mu_i} 8x_i^3. \quad (3.77)$$

Mas usando

$$m_i^* = \frac{\mu_i}{(x_i^2 + 1)^{1/2}}, \quad (3.78)$$

resultando em,

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial \mu_i} = \frac{8x_i^3}{m_i^*}. \quad (3.79)$$

Finalmente colocando (3.79) em (3.71) ficamos com:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i} = \gamma_i \frac{m_i^{3*} x_i^3}{6\pi^2}. \quad (3.80)$$

Logo,

$$\rho_i = \gamma_i \frac{8m_i^{3*} x_i^3}{48\pi^2}. \quad (3.81)$$

O resultado (3.81) permite-nos finalmente calcular a densidade de energia (3.69). Note o termo entre colchetes na expressão que segue;

$$\varepsilon_{QMDD} = - \left[-\tilde{\Omega}_{ideal} + n_B \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial n_B} \right)_{T,\mu} \right] + \mu_i \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}_{ideal}}{\partial \mu_i} \right)_T, \quad (3.82)$$

é justamente a pressão p_{QMDD} dada por (3.68) junto com (3.81) ficamos com:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{QMDD} &= - \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left[F(x_i) - \frac{C}{n_B} \left(\frac{4}{m_i^*} \right) G(x_i) \right] + \frac{8\gamma_i m_i^3 x_i^3 \mu_i}{48\pi^2} \\ &= \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left[-F(x_i) + \frac{C}{n_B} \left(\frac{4}{m_i^*} \right) G(x_i) + 8x_i^3 \left(\frac{\mu_i}{m_i^*} \right) \right] \\ &= \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left\{ \frac{C}{n_B} \left(\frac{4}{m_i^*} \right) G(x_i) - \left[F(x_i) - 8x_i^3 (x_i^2 + 1)^{1/2} \right] \right\} \\ &= \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left\{ \frac{C}{n_B} \left(\frac{4}{m_i^*} \right) G(x_i) + 3 \left[x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (1 + 2x_i^2) - \arg \sinh(x_i) \right] \right\} \\ &= \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left[3H(x_i) + \frac{C}{n_B} \left(\frac{4}{m_i^*} \right) G(x_i) \right], \end{aligned} \quad (3.83)$$

onde definimos a nova função parametrizada,

$$H(x_i) = x_i (x_i^2 + 1)^{1/2} (1 + 2x_i^2) - \arg \sinh(x_i). \quad (3.84)$$

Finalmente vamos colecionar os resultados e expressar as quantidades de interesse em $T = 0$,

$$P = \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left[F(x_i) - \frac{C}{n_B} \left(\frac{4}{m_i^*} \right) G(x_i) \right], \quad (3.85)$$

$$\varepsilon = \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{4*}}{48\pi^2} \left\{ 3H(x_i) + \frac{C}{n_B} \left(\frac{4}{m_i^*} \right) G(x_i) \right\}, \quad (3.86)$$

$$\rho_i = \frac{\gamma_i m_i^{3*} x_i^3}{6\pi^2}, \quad (3.87)$$

e

$$n_B = \frac{1}{3} \sum_i \frac{\gamma_i m_i^{3*} x_i^3}{6\pi^2}. \quad (3.88)$$

3.2 A Matéria Quarkiônica em Equilíbrio β no Modelo QMDD

Nesta seção não repetiremos todas as considerações sobre neutralidade de carga e equilíbrio beta feitos na seção 2.5.1. Consideraremos a participação dos léptons necessários em termos das EoS no modelo QMDD. No caso do MIT, apenas somamos ao lagrangiano o setor leptônico. Aqui no modelo QMDD, adicionaremos os léptons nas quantidades termodinâmicas. O potencial termodinâmico, a pressão, a densidade de energia e a densidade de partículas são dados por:

$$\Omega_{\text{Total}} = \Omega_{\text{QMDD}} + \Omega_{\text{Léptons}}, \quad (3.89)$$

$$p_{\text{Total}} = p_{\text{QMDD}} + p_{\text{Léptons}}, \quad (3.90)$$

$$\varepsilon_{\text{Total}} = \varepsilon_{\text{QMDD}} + \varepsilon_{\text{Léptons}}, \quad (3.91)$$

e finalmente,

$$\rho_{\text{Total}} = \rho_{\text{QMDD}} + \rho_{\text{Léptons}}. \quad (3.92)$$

As EoS para os léptons presentes:

$$p_l = \sum_j \frac{\gamma_j m_j^4}{48\pi^2} F(x_j) \quad (3.93)$$

e

$$\varepsilon_l = \sum_j \frac{\gamma_j m_j^4}{48\pi^2} 3H(x_j), \quad (3.94)$$

onde temos $j = e^-, \mu^-$ e $\gamma_j = 2$ é a degenerescência dos elétrons e múons. O parâmetro x_j agora é em termos da massa dos léptons:

$$x_j = \left[\left(\frac{\mu_j}{m_j} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (3.95)$$

cujas as funções que aparecem nas expressões acima são definidas como:

$$F(x_j) = x_j (x_j^2 + 1)^{1/2} (2x_j^2 - 3) + 3 \ln \left((x_j^2 + 1)^{1/2} + x_j \right) \quad (3.96)$$

e

$$H(x_j) = x_j (x_j^2 + 1)^{1/2} (2x_j^2 + 1) - \ln \left((x_j^2 + 1)^{1/2} + x_j \right). \quad (3.97)$$

A figura a seguir mostra o comportamento do potencial químico com a densidade no modelo do QMDD.

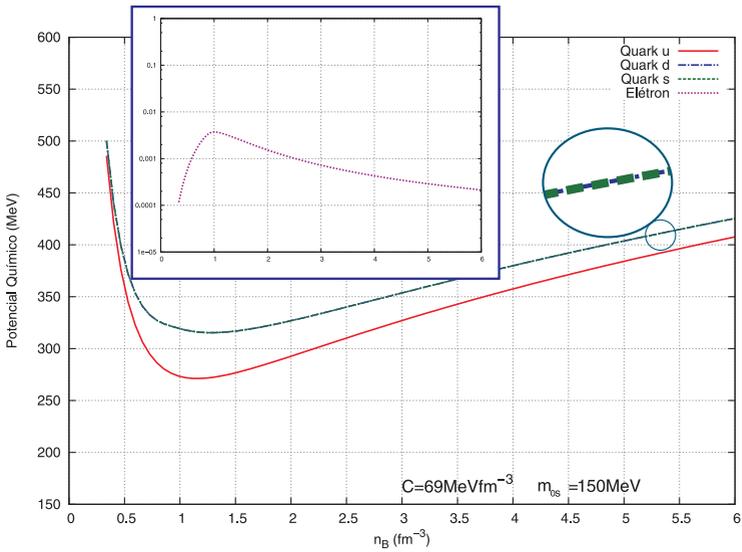


Figura 4: Relação entre potencial químico e densidade no modelo QMDD. A figura está de acordo com as equações (2.134) quando tomamos $m_{0s} = 150 \text{ MeV}$ na equação (3.2). A janela na figura tem o potencial químico em escala logarítmica.

4 EQUAÇÕES DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF

Para a descrição das propriedades das estrelas de nêutrons e quarks e a construção dos perfis estelares utilizaremos as equações da relatividade geral conhecidas como as *equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (TOV) [35]. Estas equações são deduzidas a partir das equações de Einstein considerando a estrela como uma distribuição de matéria esfericamente simétrica, estática e que se comporta como um fluido perfeito. No sistema natural de unidades as TOV possuem a seguinte forma:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{[P(r) + \varepsilon(r)][M(r) + 4\pi r^3 P(r)]}{r[r - 2GM(r)]} \quad (4.1)$$

e

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r), \quad (4.2)$$

onde P é a pressão, M é a massa gravitacional, ε é a densidade de energia e G é a constante da gravitação universal.

As equações de TOV podem ser integradas desde a origem, com a condição inicial $M(0) = 0$ e um valor arbitrário para a densidade central de energia $\varepsilon(0)$, até a pressão $P(r)$ ir a zero para um raio R . Como *pressão zero* significa que a atração gravitacional da estrela não pode suportar mais matéria sobreposta, R define o raio gravitacional da estrela e $M(R)$ sua massa gravitacional. Para uma dada equação de estado, existe apenas uma única relação entre a massa e densidade central de energia $\varepsilon(0)$. Então, para cada possível equação de estado, existe uma única família de estrelas, parametrizadas por, digamos, a densidade central de energia ou a pressão central.

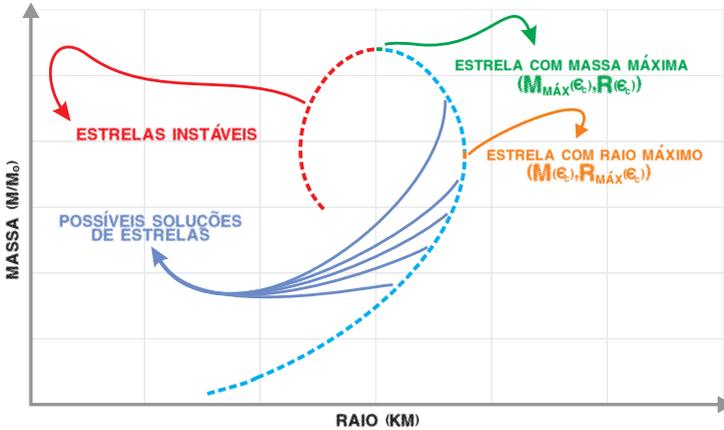


Figura 5: A figura mostra como se faz a leitura das curvas que resultam da TOV. São curvas parametrizadas pela densidade de energia ($R(\epsilon_0), M(\epsilon_0)$). Como podemos visualizar, cada ponto representa uma solução em equilíbrio hidrostático (uma estrela).

5 RESULTADOS

5.1 Janela de Estabilidade da Matéria Estranha

Após nosso estudo sobre a matéria quarkônica é imprescindível analisar a estabilidade da matéria estranha. O gás de Fermi contendo os sabores *up*, *down* e *strange* torna-se estável energeticamente para baixas densidades sempre que a energia por bárion (com pressão nula, $p = 0$.) satisfaça a condição:

$$\left(\frac{\varepsilon}{n_B} \right)_{u,d,s} \leq 930 \text{MeV}, \quad (5.1)$$

o valor 930MeV corresponde a típica energia por nucleon do núcleo de ferro ^{56}Fe . Obteremos uma janela no espaço de parâmetros nos modelos do MIT e QMDD respectivamente. Uma segunda condição ainda deve ser considerada;

$$\left(\frac{\varepsilon}{n_B} \right)_{u,d} > 930 \text{MeV}. \quad (5.2)$$

Apresentaremos alguns resultados referentes às condições (5.1) e (5.2) para ambos os modelos: MIT e QMDD. Consideraremos a matéria de quarks com sabores (\mathbf{u}, \mathbf{d}) (2QM) e a matéria estranha, $(\mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{s})$ (SM). Os quarks presentes são não-massivos ¹ e a matéria é eletricamente neutra. Mostraremos os valores da energia por nucleon a pressão zero para ambas as situações, 2QM e SM. No apêndice encontram-se as deduções para neutralidade de carga elétrica da e as relações entre os potenciais químicos dos quarks. Queremos saber para quais valores

¹No modelo do MIT significa que: $m_u = m_d = 0$ e m_{0s} será um parâmetro livre na discussão das janelas de estabilidade. Já no modelo QMDD não há sentido no gás de Fermi não-massivo devido as massas efetivas, m_u^* , m_d^* e m_s^* de acordo com a equação (3.1). Contudo é importante lembrar que m_{0s} será um parâmetro importante na construção das janelas de estabilidade.

dos parâmetros temos matéria estranha estável; a figura (6) mostra um esquema de como obter a janela de estabilidade.

A condição (5.2) é referente a matéria 2QM. Se a energia por nucleon da matéria (\mathbf{u}, \mathbf{d}) fosse menor que a do ^{56}Fe , então o núcleo de ^{56}Fe poderia ser feito apenas da matéria 2QM (desconfinados) e não por nucleons [39], o que contradiz a física nuclear. No esquema da figura (6) item d) e e) temos um esboço da janela em que as condições (5.1) e (5.2) são satisfeitas. Faremos um estudo comparativo entre os modelos do MIT e QMDD em $T = 0$. Para cada um deles consideraremos dois casos possíveis para a matéria estranha, vejamos quais são eles: um pulsar massivo pode ter uma semente de quarks desconfinados em seu núcleo. A estrela pode passar da fase predominantemente hadrônica para uma fase puramente quarkiônica. Esta passagem pode acontecer de duas formas: o caso em que o equilíbrio beta é mantido durante toda a transição e um outro caso em que há uma fase intermediária fora do equilíbrio, isto é, sem o equilíbrio beta [37]. A figura (7) ilustra a segunda possibilidade, a seta do tempo na ilustração mostra o sentido da transição. Apresentaremos nossos resultados considerando sempre a matéria em equilíbrio beta e sem equilíbrio beta. A discussão, acerca dos efeitos da inclusão do equilíbrio dinâmico das reações fracas nos diferentes modelos, será sempre considerada. Pode-se verificar que os pontos em vermelho (pressão nula) nas figuras (8-11) são equivalentes aos pontos onde a pressão é nula nas curvas das EoS, conforme as figuras (24-31). Mas antes de discutirmos as EoS, note que as figuras (8-11) devem ser compreendidas no contexto do esquema da figura (6). Por exemplo; partindo da condição (5.2) e a figura (8) para a matéria 2QM no MIT, concluímos que o valor do parâmetro (ponto vermelho) na figura (6) item a) deve ser 145MeV . Na fronteira vermelha no esquema (6) item a), b), c), d) e e) a matéria 2QM não é estável. Assim como na

ESQUEMA JANELA DE ESTABILIDADE

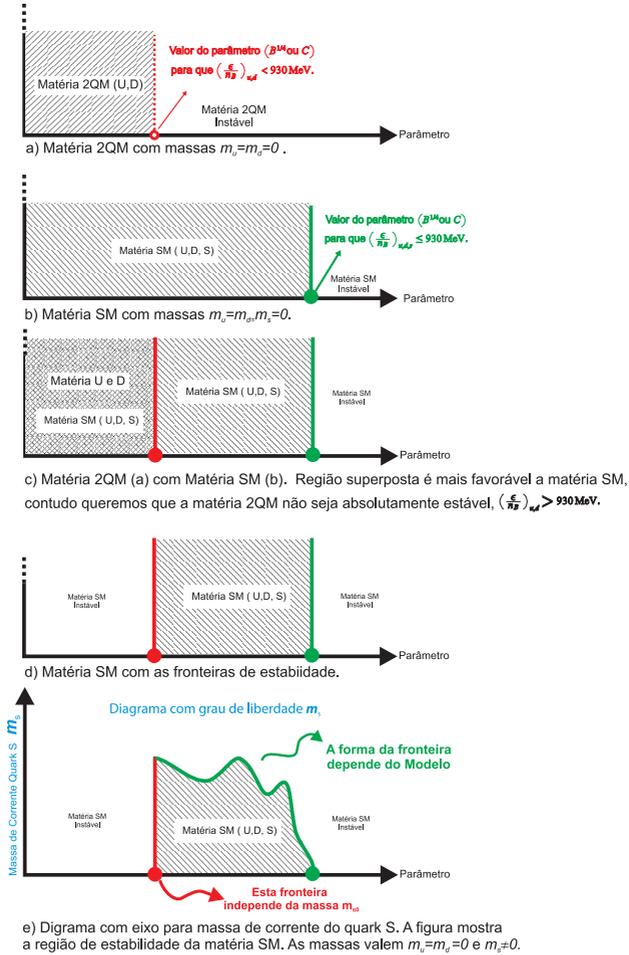


Figura 6: Esquema para obter uma janela de estabilidade.

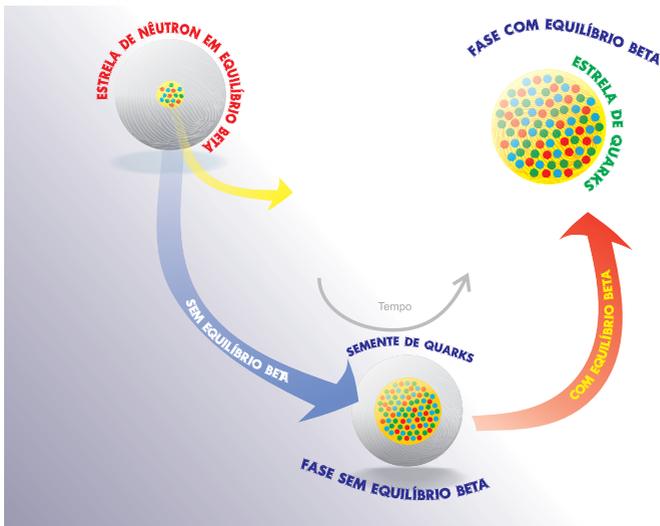


Figura 7: A ilustração mostra as possibilidades em que uma estrela de nêutrons, com uma semente de quarks desconfiados no núcleo, pode evoluir para se transformar numa estrela puramente quarkiônica.

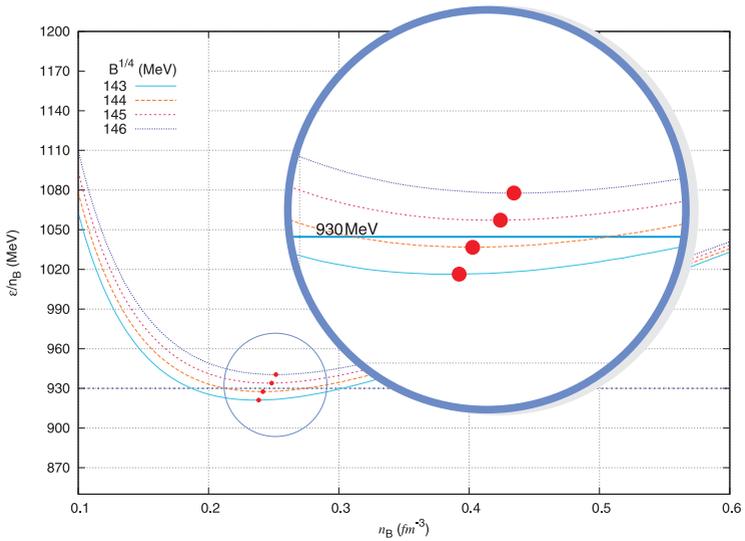


Figura 8: Este gráfico, energia por nucleon versus densidade bariônica, mostra os pontos para $p = 0$ no modelo do MIT. Com o valor $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ a matéria 2QM já não é mais estável. Este ponto corresponde ao ponto e a linha vermelha vertical na figura (6) item a). É possível visualizar este ponto sobre o eixo de parâmetro ($B^{1/4}$) nas figuras (12) e (13).

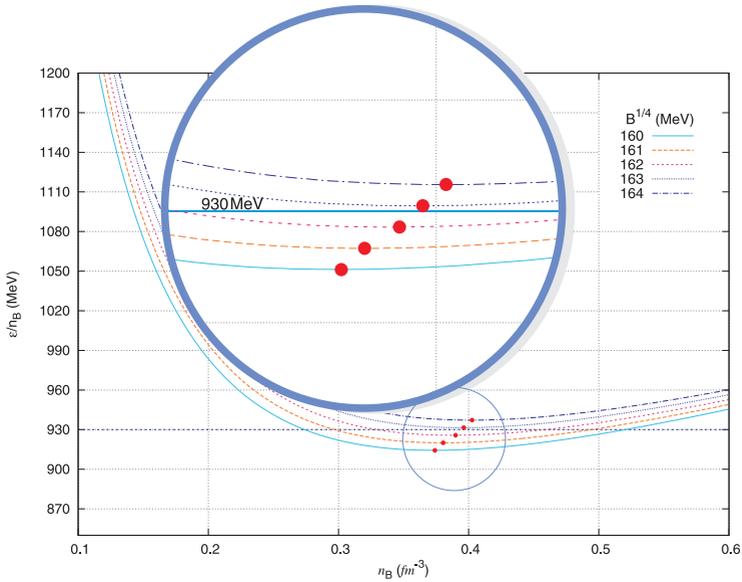


Figura 9: Este gráfico, energia por nucleon versus densidade bariônica, mostra os pontos para $p = 0$ no modelo do MIT. Com o valor $B^{1/4} = 162\text{MeV}$ a matéria SM ainda é estável. Este ponto corresponde ao ponto e a linha verde na figura (6) item b). É possível visualizar este ponto no local onde a curva que corresponde a $\left(\frac{\epsilon}{n_B}\right)_{u,d,s} = 930\text{MeV}$ toca o eixo de parâmetro ($B^{1/4}$) nas figuras (12) e (13).

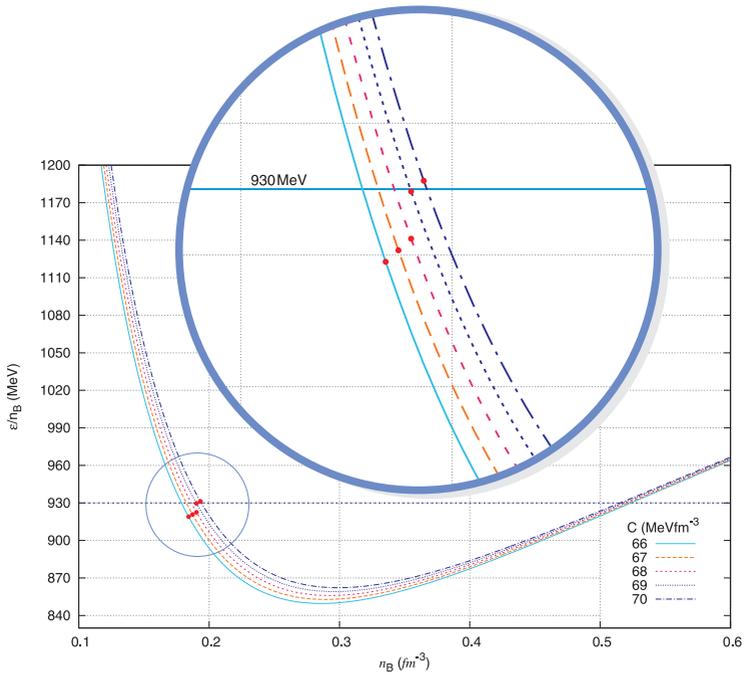


Figura 10: Este gráfico, energia por nucleon versus densidade bariônica, mostra os pontos para $p = 0$ no modelo do QMDD. Com o valor $C = 70 MeV fm^{-3}$ a matéria 2QM já não é mais estável. Este ponto corresponde ao ponto e a linha vermelha na figura (6) item a).

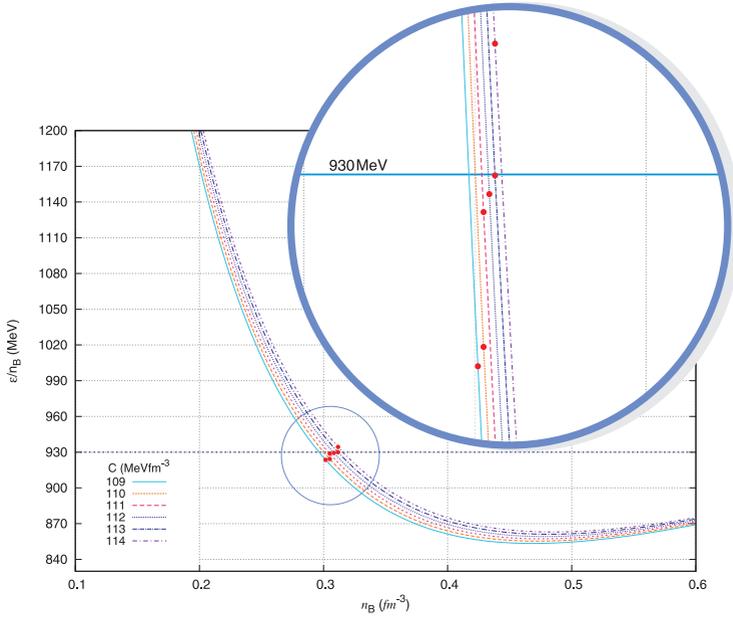


Figura 11: Este gráfico, energia por nucleon versus densidade bariônica, mostra os pontos para $p = 0$ no modelo do QMDD. Com o valor $C = 112 \text{ MeVfm}^{-3}$ a matéria SM ainda é estável. Este ponto corresponde ao ponto e a linha verde na figura (6) item b). É possível visualizar este ponto no local onde a curva que corresponde a $\left(\frac{\epsilon}{n_B}\right)_{u,d,s} = 930 \text{ MeV}$ toca o eixo de parâmetro (C) nas figuras (14) e (15).

fronteira vermelha quanto na verde do esquema da figura (6) a matéria SM é energeticamente favorecida. No gráfico da figura (9) da matéria SM no MIT junto com a condição (5.1) vemos claramente que a matéria estranha é estável até o valor de 162MeV , que fica abaixo da linha pontilhada horizontal no gráfico (9). Logo, olhando para o esquema (6) item b), identificamos o valor do parâmetro (ponto verde) que delimitará a janela pelo lado direito. Agora estamos prontos para adicionar mais um grau de liberdade no esquema da janela (6) item e). O grau de liberdade no espaço dos parâmetros nada mais é que a massa de corrente do quark estranho. Obviamente que para matéria que é feita somente de quarks *up* e *down* a presença ou não de massa para o quark *strange* é irrelevante. Logo a fronteira vermelha no nosso espaço de parâmetros bidimensional² ($m_{0s} \times B^{1/4}$) ou ($m_{0s} \times C$) será uma linha reta como ilustra a figura (6) item e). A fronteira verde irá se modificar conforme variamos a massa de corrente do quark estranho m_{0s} no eixo vertical da janela. A partir do que foi discutido até agora em relação a estabilidade podemos analisar os resultados para os modelos do MIT e QMDD nas figuras (12-15). É fácil notar que a forma das curvas dependem do modelo que estamos estudando. A inclusão do equilíbrio beta provoca também modificações nas curvas. Assim como mostra o esquema da figura (6) as figuras (12-15) exibem a região onde a matéria SM tem energia por nucleon mais baixa que a do ^{56}Fe . A seguir discutiremos cada modelo separadamente.

²Note que, m_{0s} nas janelas de estabilidade é apenas um parâmetro do modelo (massa de corrente do quark estranho) e não a massa efetiva, no caso do modelo QMDD.

5.1.1 Estabilidade da Matéria Estranha no Modelo do MIT

Habitualmente o modelo do MIT possui apenas um parâmetro livre, a famosa constante de sacola ($B^{1/4}$), que tem unidades em **MeV**. Vamos admitir que a massa de corrente do quark estranho possa assumir diversos valores também [38]. Utilizando as condições (5.1) e (5.2) a pressão zero, obtemos numericamente o gráfico:

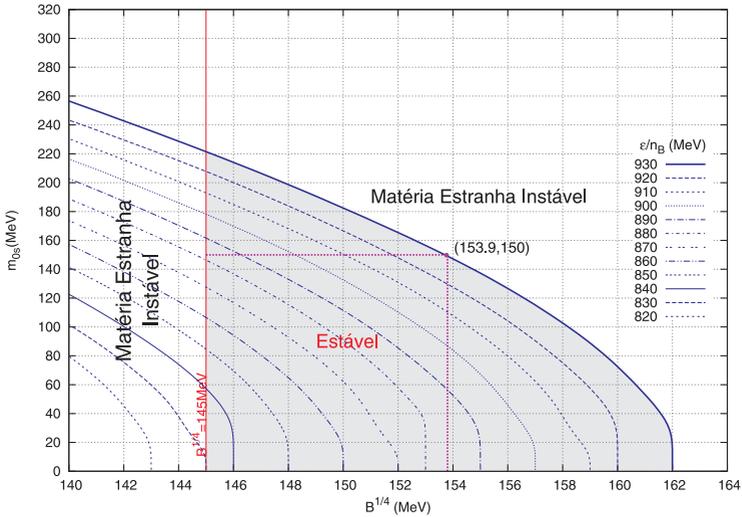


Figura 12: Janela de estabilidade para matéria estranha no modelo do MIT. Veja que esta janela corresponde ao item e) da figura (6).

As curvas delimitam áreas de estabilidade para diversos valores de energia por nucleon. A linha mais externa, à direita, corresponde a fronteira da região de estabilidade para matéria nuclear, isto é, a típica energia por nucleon do núcleo de ferro ^{56}Fe . Note que, a linha vertical é o limite inferior do parâmetro em que a matéria estranha SM permanece estável. Para um valor fixo da massa de corrente do quark estranho, $m_{0s} = 150\text{MeV}$ na presente circunstância, é fácil visualizar qual é a

faixa de valores que a Bag pode assumir mantendo a estabilidade da matéria estranha, figura (12). Vamos considerar a seguir a matéria SM em equilíbrio beta no modelo do MIT.

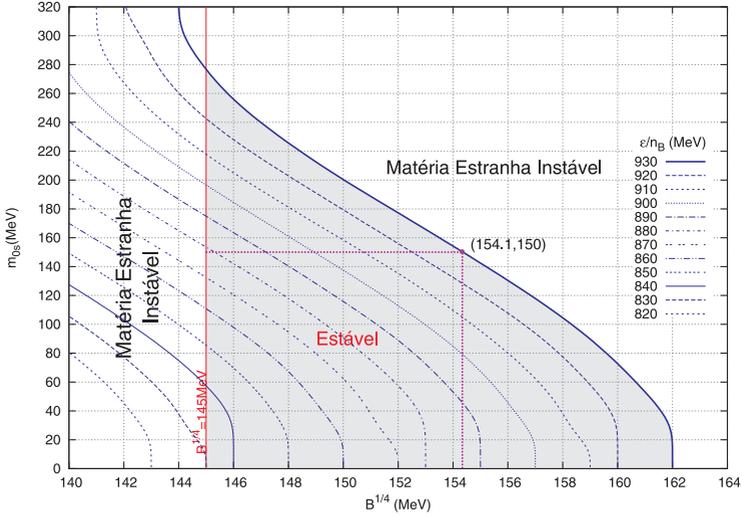


Figura 13: Janela de estabilidade para matéria estranha no modelo do MIT com equilíbrio beta. Da mesma forma que na figura (12) esta janela corresponde ao item e) da figura (6).

Por matéria de quarks, nós compreendemos que seja feita por um gás de Fermi com $3A$ tipos de quarks. Juntos estes quarks formam um singlete-de-cor bariônico, com número bariônico A . O equilíbrio químico dinâmico entre os sabores de quarks e léptons presentes é mantido pela interação fraca [38, 39]. Com a presença dos elétrons as curvas são modificadas ampliando as possibilidades para a massa do quark estranho. Entretanto estas possibilidades incluem regiões onde m_0s é arbitrariamente grande, resultando em matéria instável, segundo [38]. Quando tomamos o limite $m_0s \mapsto 0$, as curvas nos gráficos (12) e (13) tendem a atingir os mesmos pontos sobre o eixo do parâmetro $B^{1/4}$.

No limite $m_{0s} \mapsto 0$ verificamos que a janela de estabilidade para matéria SM com e sem equilíbrio beta é a mesma. Isto é, não temos elétrons presentes na matéria em equilíbrio beta quando $m_{0s} \mapsto 0$. Tomando um valor fixo de $m_{0s} = 150\text{MeV}$ temos um pequeno alargamento na faixa de valores possíveis para a $B^{1/4}$. A diferença ocasionada pela inclusão do equilíbrio beta aparece quando a massa do quark estranho assume valores significativamente maiores que zero. Em nosso estudo das estrelas de quarks, estabelecer vínculos para os valores que o parâmetro $B^{1/4}$ pode assumir é muito importante. Queremos considerar somente a matéria estranha estável, as ditas janelas de estabilidade são apenas guias para decidirmos sobre as EoS. A seguir abordaremos o mesmo tópico de estabilidade para o modelo QMDD.

5.1.2 Estabilidade da Matéria Estranha no Modelo QMDD

Analogamente ao que foi discutido no modelo do MIT, a análise da janela de estabilidade para os parâmetros do modelo QMDD é importante. No modelo QMDD o parâmetro livre não é o simples valor da constante de bag que aparece no MIT, nas equações (2.130) e (2.131). No modelo QMDD o termo confinante é proporcional a densidade bariônica como aparece em (3.85), e nosso parâmetro livre é a constante que aparece no ansatz para massa efetiva dos quarks (3.1). O parâmetro de “bag” neste modelo é denotado por C e tem unidades em $\text{MeV}fm^{-3}$. O estudo da estabilidade é totalmente análogo ao que já fora feito no modelo do MIT e tem como objetivo facilitar as escolhas dos parâmetros. As condições (5.1) e (5.2) são exigidas também neste modelo. Utilizando o esquema da figura (6) juntamente com os gráficos (10) e (11) encontramos os valores para as fronteiras da janela sobre o eixo horizontal do parâmetro C : encontramos $C = 69\text{MeV}fm^{-3}$ que corresponde a fronteira vermelha da figura (6) item d) e $C \simeq 112\text{MeV}fm^{-3}$ que é a fronteira verde. Os resultados numéricos são exibidos nas figuras (14) e (15). As curvas delimitam regiões triangulares de estabilidade, no sentido que é feito em [25, 38, 39]. A linha mais externa, à direita, corresponde a fronteira da região de estabilidade para matéria nuclear, isto é, corresponde a típica energia por nucleon do núcleo de ferro ${}^{56}\text{Fe}$. A linha vertical é o limite inferior do parâmetro em que a matéria estranha permanece estável. Para um valor fixo de $m_0s = 150\text{MeV}$ é fácil visualizar qual é a faixa de valores que C pode assumir mantendo a estabilidade da matéria estranha: isto é $69\text{MeV}fm^{-3} \lesssim C \lesssim 72\text{MeV}fm^{-3}$. Vamos considerar a seguir o equilíbrio beta no modelo QMDD.

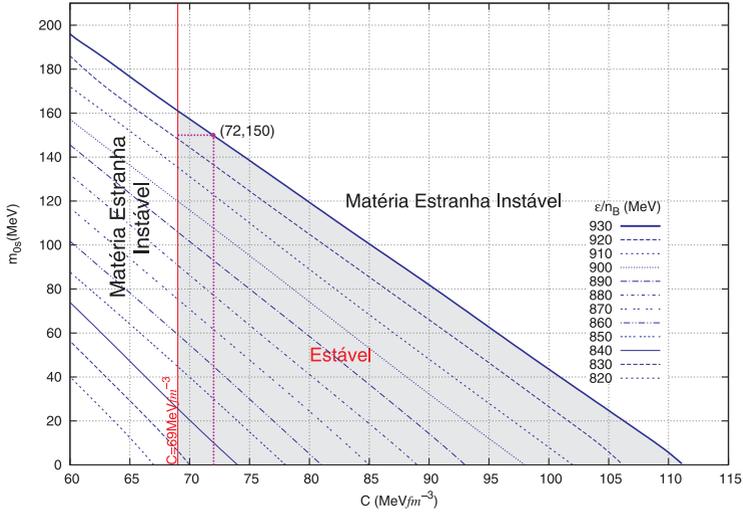


Figura 14: Janela de estabilidade para matéria estranha no modelo do QMDD. Veja que esta janela corresponde ao item e) da figura (6).

A presença dos elétrons altera as curvas ampliando as possibilidades para a massa do quark estranho, contudo quando tomamos o limite $m_{0s} \mapsto 0$, as curvas nos gráficos (14) e (15) tendem a atingir os mesmos pontos sobre o eixo do parâmetro C . Novamente para um valor fixo de 150 MeV temos agora uma alargamento na faixa de valores possíveis para C . A faixa de valores é $69 \text{ MeV fm}^{-3} \lesssim C \lesssim 77 \text{ MeV fm}^{-3}$.

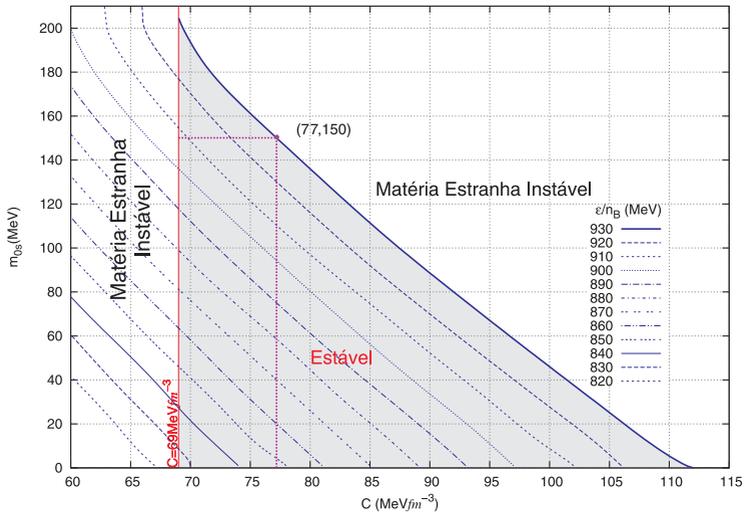


Figura 15: Janela de estabilidade para matéria estranha no modelo do QMDD com equilíbrio beta. Da mesma forma que na figura (14) esta janela corresponde ao item e) da figura (6).

5.1.3 Energia por Bárion versus Densidade Numérica

Uma maneira bastante intuitiva de verificar a estabilidade da matéria estranha é através do gráfico energia por bárion versus densidade numérica. Basta assinalar os pontos em que a pressão é zero nas curvas e comparar com a energia por nucleon da matéria nuclear ordinária. Vamos apresentar o caso para o modelo do MIT com seu parâmetro de bag $B^{1/4}$. Devemos escolher valores aceitáveis para m_0s tendo em mente a estabilidade da matéria. Vamos admitir dois valores possíveis para m_0s dentro da região $(100 - 200)\text{MeV}$ [37]. Escolhemos os seguintes valores 100MeV e 150MeV , motivados pelas figuras (12-14). Nas figuras a seguir, os pontos indicados são: vermelho para as curvas que representam matéria instável e azuis para aquelas estáveis, em ambos os casos os pontos marcados denotam o ponto onde a pressão é nula.

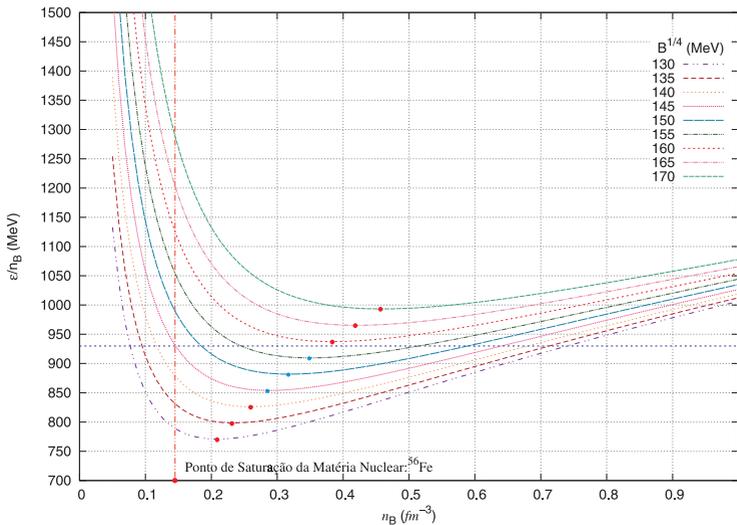


Figura 16: Energia por bárion versus densidade numérica varrendo o valor do parâmetro $B^{1/4}$ no modelo do MIT com $m_0s = 100\text{MeV}$.

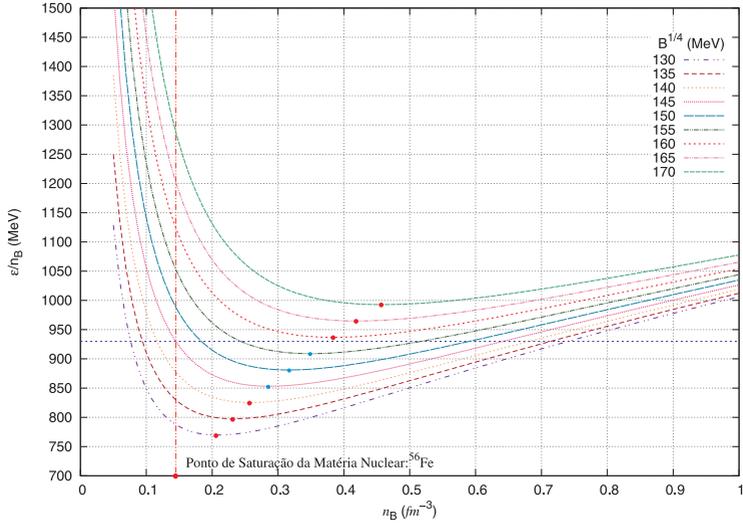


Figura 17: Energia por bárion versus densidade numérica varrendo o valor do parâmetro $B^{1/4}$ no modelo do MIT com $m_0s = 100\text{MeV}$. Neste caso há equilíbrio beta.

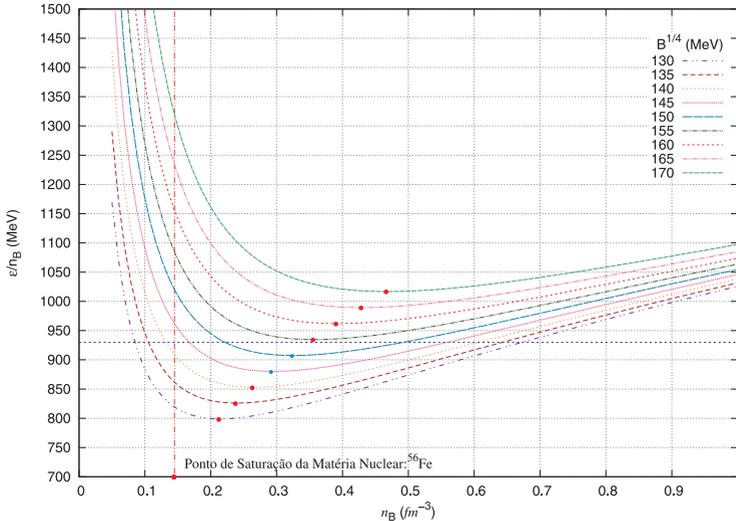


Figura 18: Energia por bárion versus densidade numérica varrendo o valor do parâmetro $B^{1/4}$ no modelo do MIT com $m_0s = 150\text{MeV}$.

É fácil perceber que a diminuição da massa do quark estranho implica num alargamento na faixa de possibilidades de escolhas nos parâmetros $B^{1/4}$ e C (MIT e QMDD respectivamente). Claro que queremos somente a faixa de escolhas que elege a matéria estável. É importante notar que os mínimos das curvas não correspondem aos pontos onde a pressão é zero. Mas ocorrem aproximadamente na ordem de $\sim (2-3)\rho_0$ (ρ_0 é saturação nuclear). As figuras (16) e (17) nos mostram que a inclusão do equilíbrio beta desloca de maneira diminuta as curvas na direção do ponto de saturação da matéria nuclear. O mesmo acontece com as curvas das figuras (18) e (19) no modelo do MIT. Já para o modelo QMDD, o deslocamento é mais perceptível como ilustra as figuras (20), (21), (22) e (23). A razão para o ponto onde a pressão é zero não coincidir com o mínimo da energia por bárion no modelo QMDD é devido a presença do termo confinante dependente da densi-

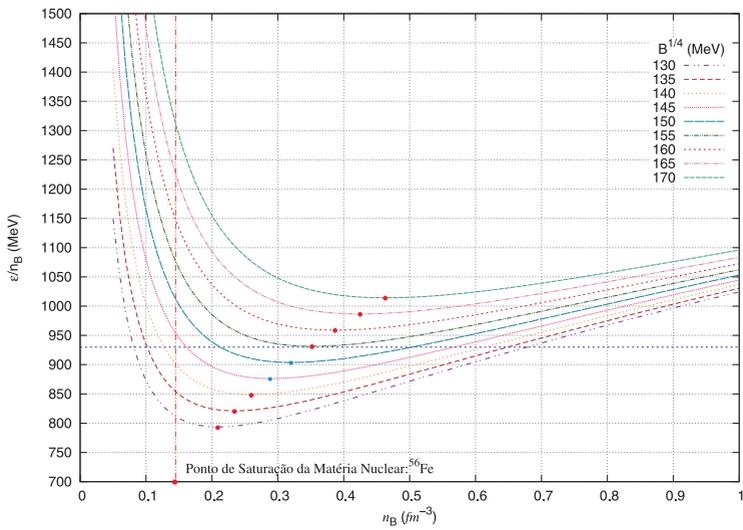


Figura 19: Energia por bárion versus densidade numérica varrendo o valor do parâmetro $B^{1/4}$ no modelo do MIT com $m_0s = 150\text{MeV}$. Neste caso há equilíbrio beta.

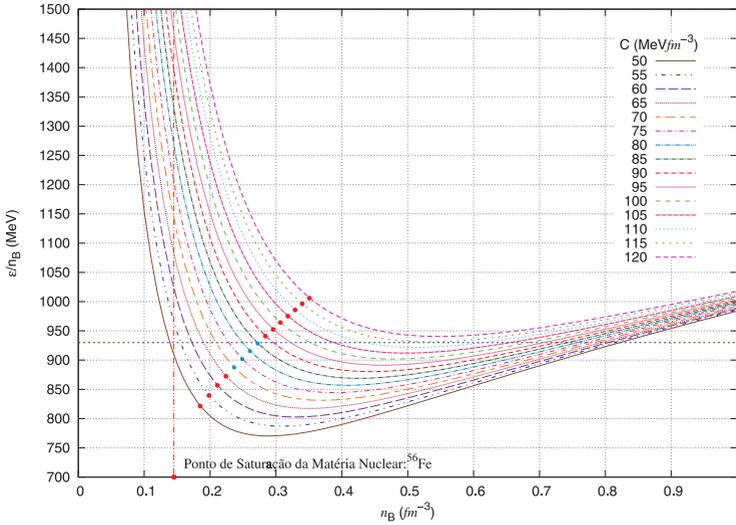


Figura 20: Energia por bárion versus densidade numérica varrendo o valor do parâmetro C no modelo do QMDD com $m_0s = 100\text{MeV}$.

dade bariônica. A diminuição da massa de corrente do quark s desloca as curvas predominantemente na direção vertical, isto também pode ser visto nos diagramas (12) e (14). Das figuras (12-23) podemos definir uma faixa aproximada para os parâmetros:

$$145\text{MeV} \lesssim B^{1/4} \lesssim 158\text{MeV};$$

$$\text{MIT **com** e **sem** equilíbrio } \beta \text{ e } m_0s = 100\text{MeV} \text{ fixo.} \quad (5.3)$$

$$145\text{MeV} \lesssim B^{1/4} \lesssim 154\text{MeV};$$

$$\text{MIT **com** e **sem** equilíbrio } \beta \text{ e } m_0s = 150\text{MeV} \text{ fixo.} \quad (5.4)$$

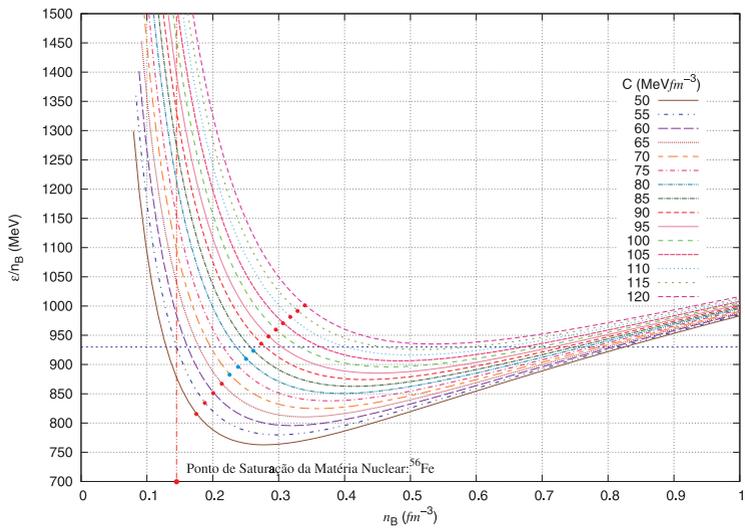


Figura 21: Energia por bárion versus densidade numérica varrendo o valor do parâmetro C no modelo do QMDD com $m_0s = 100\text{MeV}$. Neste caso há equilíbrio beta.

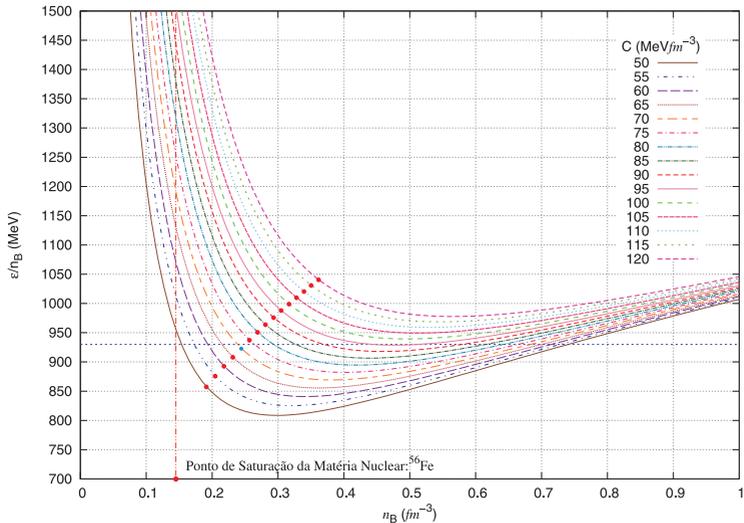


Figura 22: Energia por bárion versus densidade numérica varrendo o valor do parâmetro C no modelo do QMDD com $m_0s = 150\text{MeV}$.

$$69\text{MeV}fm^{-3} \lesssim C \lesssim 87\text{MeV}fm^{-3};$$

QMDD **com** e **sem** equilíbrio β e $m_0s = 100\text{MeV}$ fixo. (5.5)

No modelo QMDD com massa de corrente $m_0s = 150\text{MeV}$: os casos sem e com equilíbrio beta, respectivamente são:

$$69\text{MeV}fm^{-3} \lesssim C \lesssim 72\text{MeV}fm^{-3};$$

QMDD **sem** equilíbrio β e $m_0s = 150\text{MeV}$ fixo. (5.6)

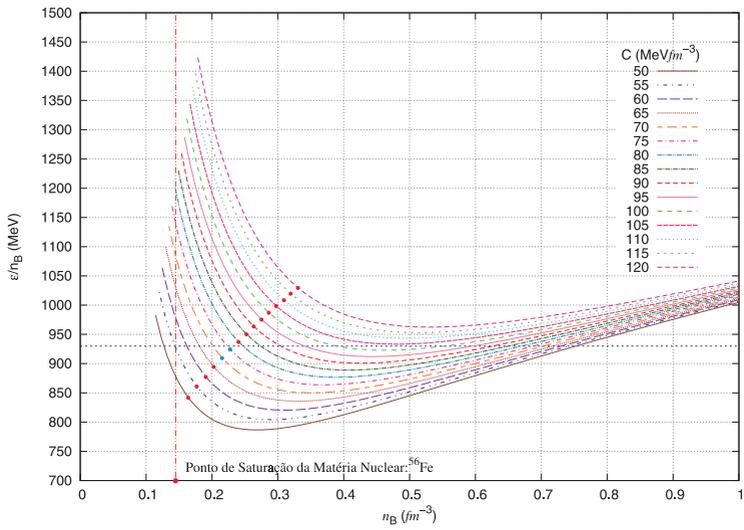


Figura 23: Energia por bárion versus densidade numérica varrendo o valor do parâmetro C no modelo do QMDD com $m_0s = 150\text{MeV}$. Neste caso há equilíbrio beta.

$$69\text{MeVfm}^{-3} \lesssim C \lesssim 77\text{MeVfm}^{-3};$$

QMDD com equilíbrio β e $m_0s = 150\text{MeV}$ fixo. (5.7)

Note que a presença do equilíbrio beta resulta nas diferentes regiões para C em (5.6) e (5.7).

5.1.4 *EoS para Matéria Estranha*

Motivados pela breve discussão sobre estabilidade da SM, e pelas equações (5.3-5.7), agora temos condições de escolher valores apropriados para os parâmetros dos modelos. Para o MIT, as figuras (24-27) representam EoS válidas para matéria estranha. A imposição do equilíbrio beta praticamente não altera os gráficos no modelo do MIT, isto é devido a escolha feita para a massa do quark estranho, $m_0s = 100\text{MeV}$ e $m_0s = 150\text{MeV}$. Pelas figuras (12) e (13) está claro que para valores de $m_0s \sim (220 - 280)\text{MeV}$ teríamos possibilidades diferentes para EoS estáveis. No modelo QMDD as figuras (28-31) representam EoS válidas. Com $m_0s = 100\text{MeV}$ e $m_0s = 150\text{MeV}$ temos uma faixa restrita de parâmetros, escolhemos alguns dentro do limite estabelecido em (5.4) e (5.7). Nas EoS para SM, a medida que a pressão vai a zero, existe uma densidade de energia diferente de zero. Isto é, as EoS não partem da origem devido a presença do termo confinante. Em outras palavras, existe uma fronteira para o gás de Fermi, a pressão negativa no MIT ou o termo dependente da densidade no modelo QMDD. Num modelo que descreve matéria de nêutrons, para baixas densidades e pressão zero a densidade de energia também é zero. Assim as curvas das EoS partem da origem. Isto é típico das EoS das estrelas ligadas apenas pela gravidade.

- No modelo MIT, a bag faz um papel de parâmetro linear para os gráficos (24-27). Varrendo $B^{1/4}$, nota-se que as EoS não são igualmente espaçadas. A medida que $B^{1/4}$ aumenta as curvas vão sendo deslocadas para a direita, o que é bastante natural. Como a bag é um valor constante é de se esperar que as curvas tenham

uma forma bastante simplificada. No caso do QMDD existe uma mudança na forma das EoS, que justificaremos a seguir.

- No modelo QMDD, para $n_B \mapsto 0$ e pela equação (3.1) temos uma “modelagem simplificada” do confinamento dos quarks. A natureza dinâmica do termo de confinamento no modelo QMDD é implementada pela dependência com a densidade. Nas simulações, varremos a densidade numérica de baixos valores, pequenos o suficiente para que os valores mais baixos da pressão sejam não-negativos. Se olharmos as equações (2.130) e (2.131) veremos que valores pequenos de densidade contribuem significativamente para densidade de energia. Isto acontece porque o termo confinante depende inversamente da densidade numérica. As figuras (28-31) ilustram a frase anterior, é fácil ver que as EoS em baixas pressões é levemente côncava para baixo.

5.1.5 A TOV e a relação de Massa-Raio

De posse das EoS para matéria quarkônica resta apenas saber se tais EoS são válidas para descrever a matéria das estrelas de quarks. A etapa que compreende resolver a TOV numericamente é um teste crucial para as nossas EoS. Basicamente as EoS (pressão e densidade de energia) servem como *inputs* para resolvermos um conjunto de equações acopladas. A partir da TOV obtemos as propriedades mais importante das estrelas, tais como massa máxima e raio máximo. Se as EoS que possuímos descrevem estrelas válidas, então teremos como verificar através da relação de massa-raio. A seguir mostraremos as curvas que resultaram da TOV, cujas EoS são oriundas do MIT e do modelo QMDD. As EoS consideradas como *inputs* para TOV têm equilíbrio beta. A discussão sobre a matéria sem equilíbrio beta é devido a pos-

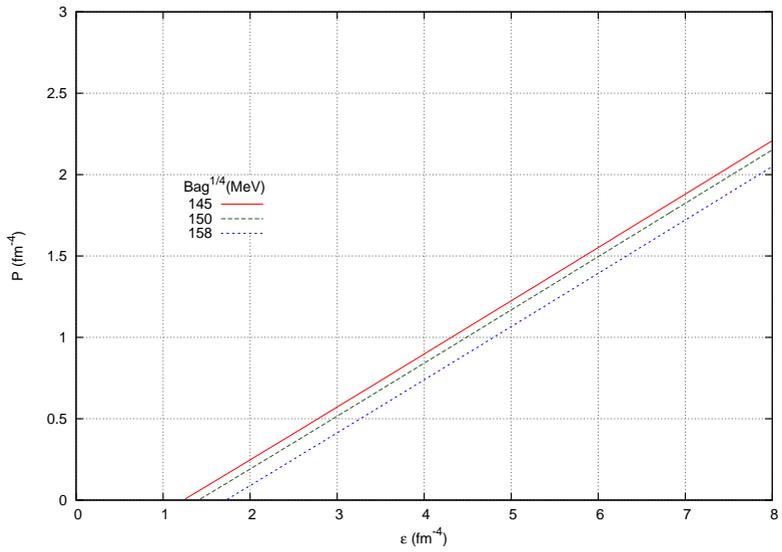


Figura 24: EoS para alguns valores do parâmetro $B^{1/4}$ no modelo do MIT com $m_{0s} = 100\text{MeV}$.

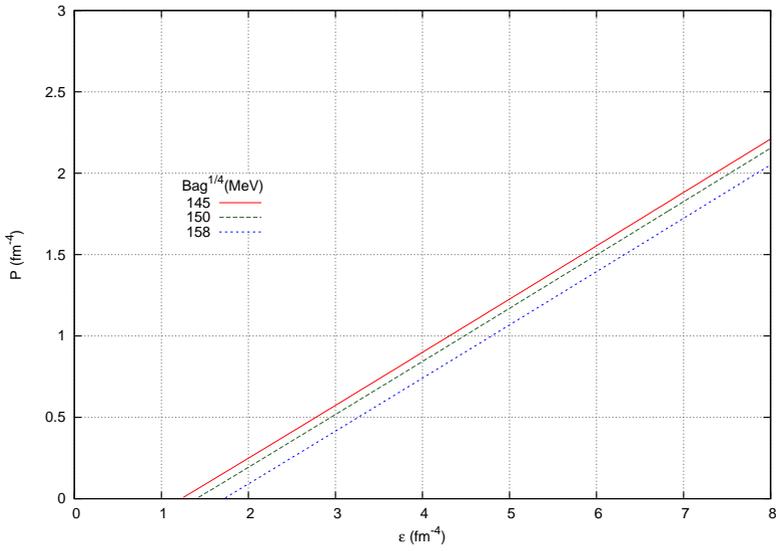


Figura 25: EoS para alguns valores do parâmetro $B^{1/4}$ no modelo do MIT com $m_0s = 100\text{MeV}$ e com equilíbrio beta.

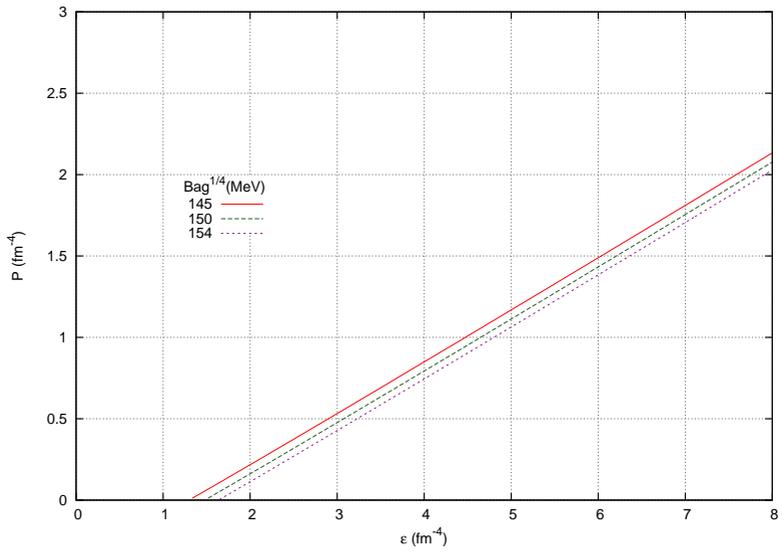


Figura 26: EoS para alguns valores do parâmetro $B^{1/4}$ no modelo do MIT com $m_{0s} = 150\text{MeV}$.

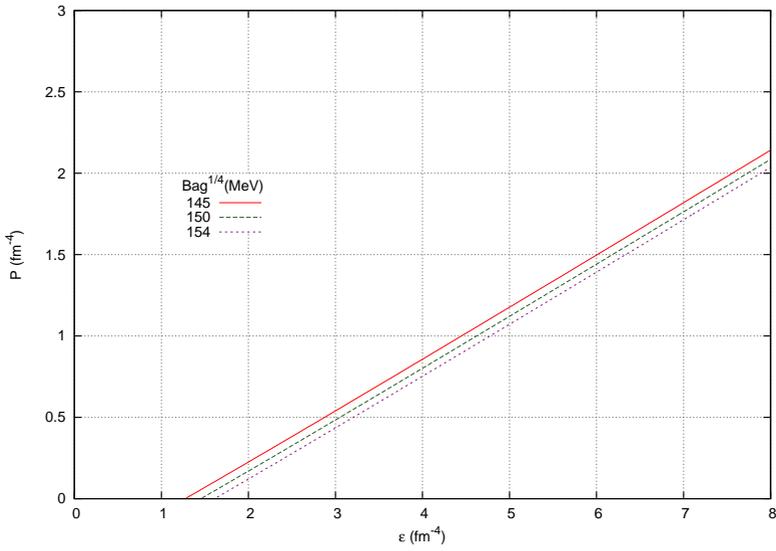


Figura 27: EoS para alguns valores do parâmetro $B^{1/4}$ no modelo do MIT com $m_0s = 150\text{MeV}$ e com equilíbrio beta.

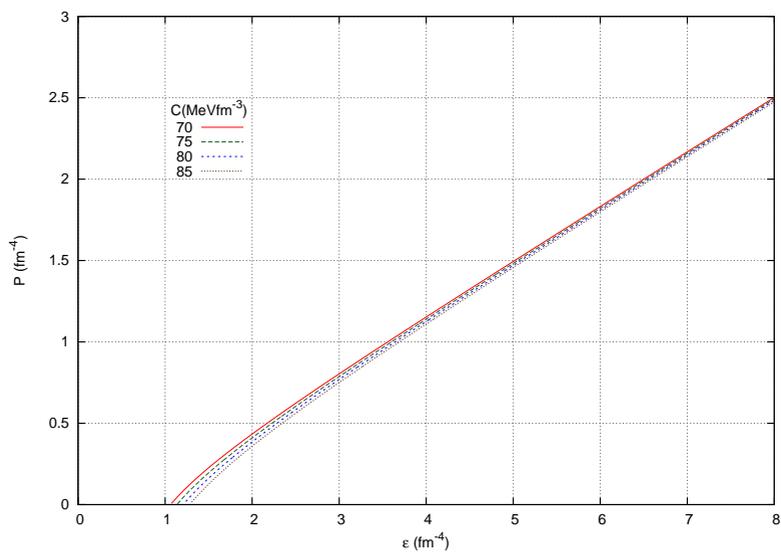


Figura 28: EoS para alguns valores do parâmetro C no modelo do QMDD com $m_{0s} = 100\text{MeV}$.

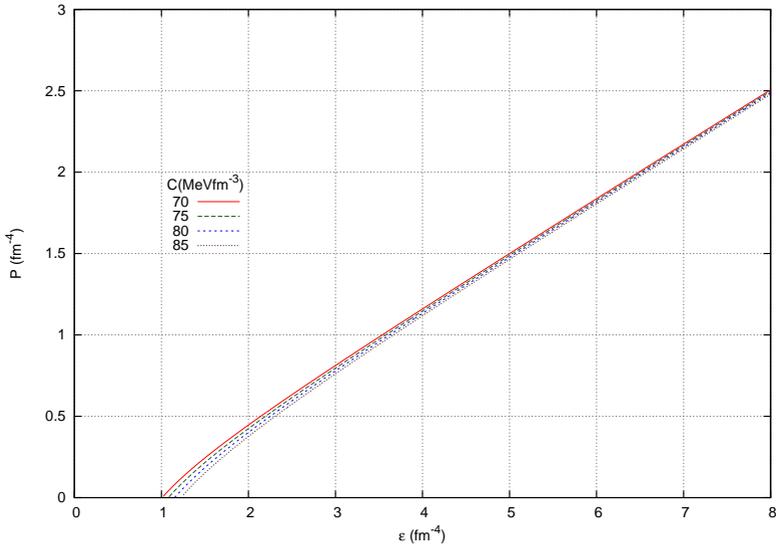


Figura 29: EoS para alguns valores do parâmetro C no modelo do QMDD com $m_0s = 100\text{MeV}$ e com equilíbrio beta.

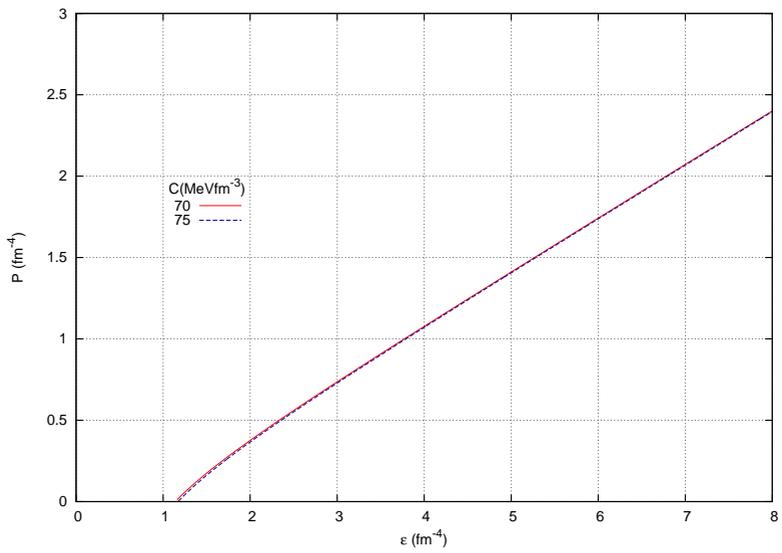


Figura 30: EoS para alguns valores do parâmetro C no modelo do QMDD com $m_{0s} = 150\text{MeV}$.

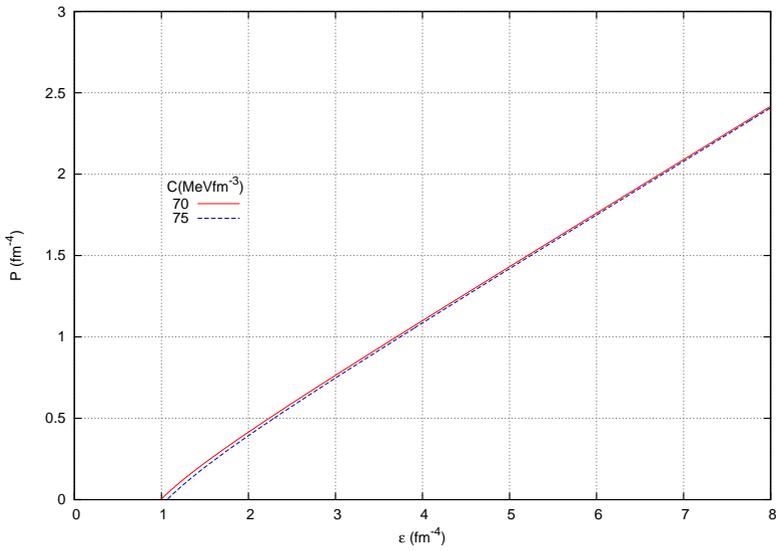


Figura 31: EoS para alguns valores do parâmetro C no modelo do QMDD com $m_0s = 150\text{MeV}$ e com equilíbrio beta.

sibilidade de existir uma fase intermediária na passagem da matéria hadrônica para quarkiônica como ilustra a figura (7).

A natureza do termo de confinamento nos modelos determinará se as EoS são *moles* ou *duras*. As EoS moles resultam em massas máximas $\sim 1.6M_{\odot}$, já as *duras* resultam em massas máximas elevadas $\sim 2.4M_{\odot}$. É bem conhecido na literatura que o modelo do MIT resulta em EoS muito *moles* [32, 33] para descrever as recentes descobertas de pulsares com massa da ordem de $\sim 2.1M_{\odot}$ [30, 42]. A partir das EoS do modelo fenomenológico QMDD, obtivemos massas máximas mais elevadas que aquelas que resultaram do MIT [32]. Podemos observar as diferenças nas curvas exibidas nas figuras (32-35)³. Os pulsares observados com massas $\sim 1.5M_{\odot}$ [40] podem ser descritos com as EoS obtidas via MIT. O motivo pelo qual as massas máximas são mais elevadas para EoS obtidas via QMDD é devido ao caráter dinâmico do termo de confinamento, expressão (3.33). A pressão confinante torna-se mais elevada para densidades baixas deixando as EoS mais duras no modelo QMDD. As figuras (32-35) exibem, além das curvas de massa-raio, alguns vínculos de medidas de pulsares em sistemas binários, rádio e raio-X. O pulsar J0751+1807 [44] possui uma massa estimada de $M = (2.1 \pm 0.14)M_{\odot}$ [40] e pode ser descrito pelas EoS do QMDD, os gráficos (34) e (35) mostram que o raio deve ser $R \sim (12 - 13)\text{Km}$. Para a estrela compacta J 1903+0327 com $M = (1.67 \pm 0.001)M_{\odot}$ temos uma EoS que pode resultar numa solução válida da TOV, o que pode ser verificado nos gráficos (32-35). O raio segundo o modelo do MIT fica em torno de $R \sim 11\text{Km}$. Outro objeto que podemos modelar é o pulsar EXO 0748-676 [42], com uma massa de $M = (2.1 \pm 0.28)M_{\odot}$ e um raio

³As linhas horizontais nas figuras não são as típicas barras de erros nas medidas de raio. As linhas apenas mostram que as medidas de raio são muito pouco conhecidas ou mesmo indeterminadas. Para as barras verticais, nas massas, vale a interpretação de barra de erro.

estimado de $R \geq (13.8 \pm 1.8)\mathbf{km}$ [32]. Somente o modelo QMDD fornece EoS duras para descrever este último pulsar, uma possível solução estável (considerando os desvios de medidas) pode ser encontrada em uma das curvas das figuras (34) e (35). Para o pulsar EXO 1745-248 temos duas possíveis medidas para massa e raio [43], isto é, temos os vínculos $M = 1.4M_{\odot}$ e $R = 11\mathbf{km}$ ou $M = 1.7M_{\odot}$ com raio de $R = 9\mathbf{km}$. Para o primeiro par encontramos soluções estáveis nas curvas obtidas via QMDD com valores de $C = 80\mathbf{MeVfm}^{-3}$, $C = 85\mathbf{MeVfm}^{-3}$ e ambas com $m_{0s} = 100\mathbf{MeV}$, como mostra a figura (34). Na figura (35) temos um outra possibilidade de solução, $C = 75\mathbf{MeVfm}^{-3}$ com $m_{0s} = 150\mathbf{MeV}$. É possível modelar utilizando o MIT, verificando as curvas com valores de $B^{1/4} = 145\mathbf{MeV}$ e com $m_{0s} = 100\mathbf{MeV}$, figura (32). Vamos verificar a outra possível medida para EXO 1745-248, ou seja, $M = 1.7M_{\odot}$ e $R = 9\mathbf{km}$. Para este dado os modelos que utilizamos não resultam em soluções satisfatórias [33]. O pulsar bastante massivo PSR J1748-2021B [45] tem massa estimada $M = (2.74 \pm 0.21)M_{\odot}$. Vamos claramente que não possuímos EoS estáveis que sejam tão duras para alcançar esta massa.

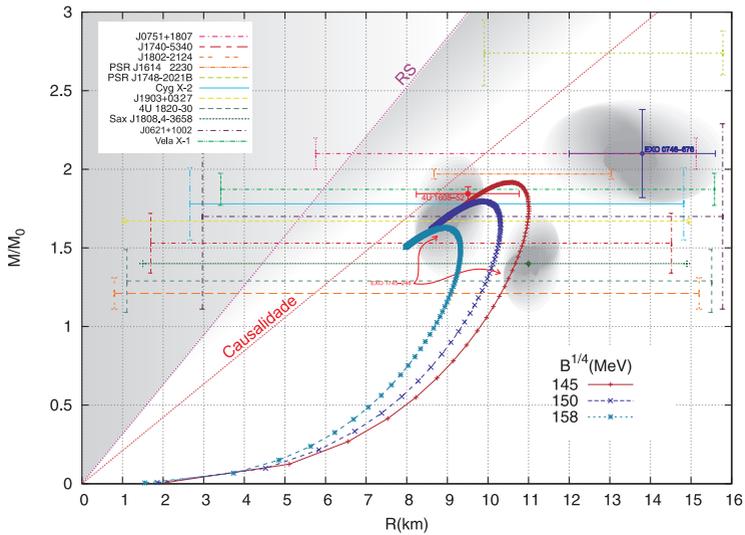


Figura 32: Relação Massa-Raio: modelo do MIT com $m_0s = 100\text{MeV}$. As linhas horizontais que aparecem são os vínculos conhecidos, isto é, medidas de massas de alguns pulsares. Esses vínculos aparecem como linhas horizontais devido ao fato de não conhecermos os seus respectivos raios. Apenas para alguns pulsares temos medidas de raios nas figuras.

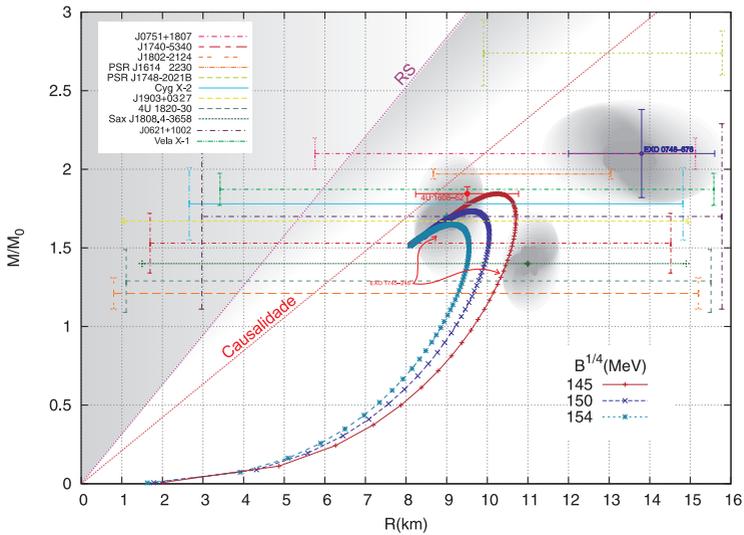


Figura 33: Relação Massa-Raio: modelo do MIT com $m_0s = 150 \text{ MeV}$. As linhas horizontais que aparecem são os vínculos conhecidos, isto é, medidas de massas de alguns pulsares. Esses vínculos aparecem como linhas horizontais devido ao fato de não conhecermos os seus respectivos raios. Apenas para alguns pulsares temos medidas de raios nas figuras.

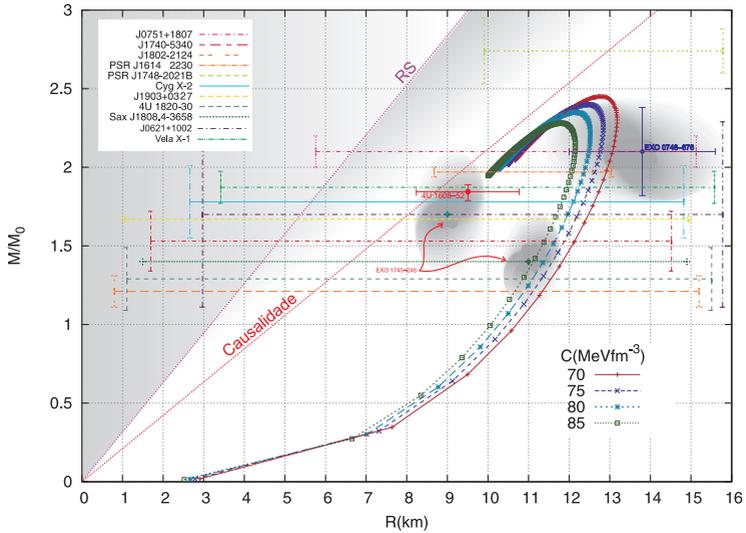


Figura 34: Relação Massa-Raio: modelo do QMDD com $m_{\sigma} = 100\text{MeV}$. As linhas horizontais que aparecem são os vínculos conhecidos, isto é, medidas de massas de alguns pulsares. Esses vínculos aparecem como linhas horizontais devido ao fato de não conhecermos os seus respectivos raios. Apenas para alguns pulsares temos medidas de raios nas figuras.

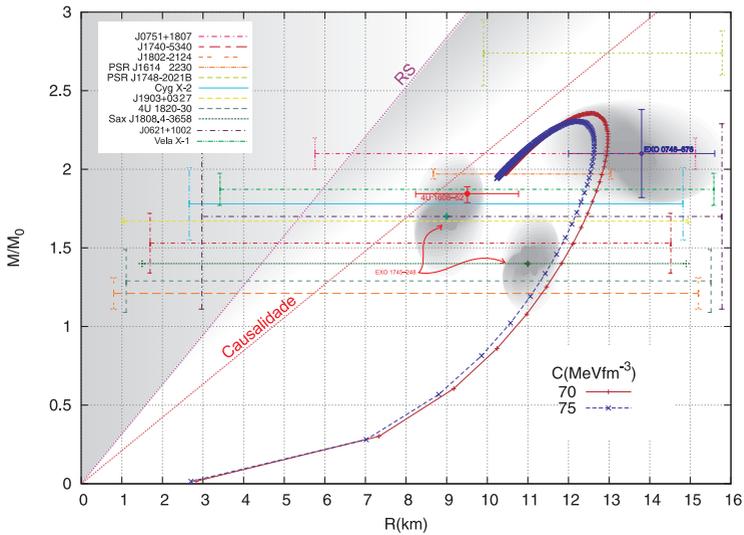


Figura 35: Relação Massa-Raio: modelo do QMDD com $m_0s = 150 \text{ MeV}$. As linhas horizontais que aparecem são os vínculos conhecidos, isto é, medidas de massas de alguns pulsares. Esses vínculos aparecem como linhas horizontais devido ao fato de não conhecermos os seus respectivos raios. Apenas para alguns pulsares temos medidas de raios nas figuras.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

6.1 O que foi feito neste trabalho

Para a realização do presente trabalho fomos motivados pelo estudo das EoS a partir de dois modelos efetivos distintos, o conhecido modelo do MIT e o modelo fenomenológico QMDD. O primeiro vem sendo amplamente utilizado nos estudos das EoS que governam as possíveis estrelas de quarks. O segundo, pretende ser mais fenomenológico, incluindo algumas propriedades fundamentais dos quarks. A massa dos quarks, no modelo QMDD, possui uma dependência com a densidade numérica. O termo de confinamento contido nas EoS também depende de maneira não-trivial da densidade numérica. De maneira geral, cada modelo tem suas características peculiares, embora sejam bastante semelhantes. O modelo do MIT resulta em EoS, que podem ser usadas como *input* na TOV para descrever perfis estelares com massas máximas não muito elevadas. Esta característica prestigia vários pulsares observados. No caso de pulsares bastante massivos ($\sim 2.4M_{\odot}$) o modelo QMDD é mais adequado devido a dureza das EoS que dele resultam.

Em ambos os modelos que utilizamos temos a liberdade de escolha dos parâmetros nas EoS, isto é as constantes que dão conta do confinamento ($B^{1/4}, C$) e a massa corrente do quark estranho (m_{0s}). A matéria de quarks na qual estamos interessados é aquela que compreende os sabores *up*, *down* e *strange* num gás de Fermi completamente degenerado (matéria estranha). Construímos a partir do gás de Fermi de quarks e das condições de estabilidade para a matéria estranha as janelas de estabilidade para os dois modelos considerados. De posse dos parâmetros adequados para construir EoS válidas para matéria estranha estável comparamos as EoS resultantes dos modelos.

Os perfis estelares foram obtidos a partir das equações de

Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). As curvas de massa-raio resultaram em massas máximas mais elevadas para o modelo QMDD do que no MIT contemplando novas possibilidades de modelagem, como a do pulsar EXO 0748-676 . Claro que seria interessante se um dos dois modelos fossem eficientes para descrever pulsares com massas pequenas e massas grandes, entretanto há dificuldades em medir o raio com precisão [40] tornando as conclusões difíceis. A princípio o modelo QMDD descreve também pulsares com massas da ordem de $\sim 1.4M_{\odot}$ embora o raio seja maior do que aquele que se encontra quando usamos o modelo do MIT. Se a hipótese da matéria estranha como estado fundamental da interação forte estiver correta, então há a possibilidade de construir EoS válidas tanto no modelo do MIT com no modelo QMDD contemplando vários pulsares observados. Novas descobertas de pulsares e medidas mais precisas de raio certamente ajudarão a clarificar um pouco mais o estudo das estrelas de quarks.

6.2 Perspectivas Futuras

- Estudar as janelas de estabilidade da matéria estranha a temperatura finita no MIT e QMDD, observar os efeitos causados pela inclusão da temperatura.
- Estudar a transição de fase da matéria hadrônica para quarkiônica utilizando o modelo de Walecka para fase hadrônica incluindo o octeto bariônico em equilíbrio beta, e o modelo QMDD para matéria de quarks. É interessante aplicar este estudo a matéria estelar, como aquela matéria de quarks presente no interior de uma protoestrela [46].
- Incluir campo magnético no modelo dependente da densidade QMDD e comparar com as EoS obtidas via MIT. Obter os per-

fis estelares para matéria de quarks sujeita a campos magnéticos intensos da ordem $\sim (10^{16} - 10^{18})$ Gauss.

- Estudar a evolução da protoestrela (PNS) a temperatura finita (entropia por partícula fixa) e obter as EoS para baixas densidades e também para densidades próximas a densidade de saturação nuclear (estudo da crosta). Para entender a evolução da PNS é importante considerar varias possibilidades de matéria no interior da PNS, desde matéria nuclear ordinária, fases exóticas, pasta fase, fases mistas com quarks ou somente de quarks desconfinados. No presente trabalho nos familiarizamos com modelos que descrevem a matéria puramente de quark servindo como motivação para estudar situações onde temos transição de fase ou coexistência de fases por exemplo [47].

REFERÊNCIAS

- [1] N. K. Glendenning, *Compact Stars*, Springer-Verlag, New-York, (2000).
- [2] D.P. Menezes and D.B. Melrose, *Publ. Astr. Soc. Aust.* **22**, 292 (2005).
- [3] E. Witten, *Phys. Rev. D* **30**, 272 (1984).
- [4] D.J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2nd ed. Wiley-VCH.
- [5] D.P. Menezes, C. Providência and D.B. Melrose, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **32**, 1981 (2006).
- [6] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley.
- [7] M. Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford.
- [8] D. Bailin, A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, 2ed, University of Sussex Press, 1993.
- [9] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton and Oxford Press (2003).
- [10] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, *Phys. Rev. D* **10**, 8 (1974).
- [11] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press (1984).
- [12] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorne and V.F. Weiskopf, *Phys. Rev. D* **9**, 3471 (1974).
- [13] C. E. DeTar, J. F. Donoghue, *Bag Models of Hadrons*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 1983. 33: 235-64.
- [14] R. P. Bhaduri, *Models of the nucleon*, Addison-Wesley, (1988).
- [15] Michael E. Peskin and Dan V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, Westview Press (1995).
- [16] J.D. Bjorken, S. Drell. *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill (1965).

- [17] J. D. Walecka, *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*, World Scientific (2004).
- [18] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover Science, 1ed (1973).
- [19] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2ed, Butterworth-Heinemann, 2ed (1996).
- [20] L. D. Landau, E.M Lifshitz, *Statistical Physics Part 1*, 2ed, Butterworth-heinemann, 3ed (1993).
- [21] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, (1989).
- [22] H.B.Callen, *Thermodynamics and Introduction to Thermostatistics*, 2ed, World Scientific (2004).
- [23] W. Greiner, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag (1995).
- [24] K.C. Chung, *Introdução à Física Nuclear*, EDUERJ.
- [25] O. G. Benvenuto and G. Lugones, Strange matter equation of state in the quark mass-density-dependent model *Phys. Rev. D***51**, 1989 (1995).
- [26] G. Lugones and O. G. Benvenuto, Strange matter equation of state and the combustion of nuclear matter into strange matter in the quark mass-density-dependent model at $T>0$ *Phys. Rev. D* **52**, 1276 (1995).
- [27] G. N. Fowler, S. Raha and R. M. Weiner, *Z. Phys. C* **9**, 271 (1981).
- [28] S. Chakrabarty, *Phys. Rev. D* **43**, 627 (1991).
- [29] M. B. Pinto, Introducing the notion of bare and effective mass via Newton's second law of motion, *Eur.J.Phys.*28:171-182,(2007).
- [30] J. C. Oliveira, H. Rodrigues, and S. B. Duarte, Massive Compact Stars as Quark Stars, *ApJ* **730** 31 (2011).

- [31] J. C. Oliveira, H. Rodrigues, and S. B. Duarte, Effects of strong interaction on the structure of color-flavor-locked quark stars *Phys. Rev. D* **78**, 123008 (2008).
- [32] J. C. Oliveira, H. Rodrigues, and S. B. Duarte, EXO 0748-676 as a Quark Star, *IJMPD* Vol.**19** (2010).
- [33] J. C. Oliveira, H. Rodrigues, and S. B. Duarte, Quark matter in compact stars, *Nuclear Physics B, (Proc. Suppl.)* **199**, 333–336 (2010).
- [34] R. M. Weiner, *Analogies in Physics and Life - A Scientific Autobiography*, World Scientific Publishing (2008).
- [35] Tolman, R.C., *Phys. Rev.* **55**, 364 (1939).
- [36] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939).
- [37] G. Lugones, *Phys. Rev. D* **81**, 085012 (2010).
- [38] E.Farhi e R.L. Jaffe, *Phys. Rev. D* **30**, 11 (1984).
- [39] Ch. Kettner, F. Weber, M.K. Weigel. N.K. Glendenning, *Phys. Rev. D* **51**, 4 (1995).
- [40] C. M. Zhang, J. Wang, Y. H. Zhao, H. X. Yin, L. M. Song, D. P. Menezes, D. T. Wickramasinghe, L. Ferrario, and P. A& A **527**, A83 (2011).
- [41] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts & J. W. T. Hessels, A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay, *Nature* **467**, (1081–1083) (2010).
- [42] F. Özel, Soft equations of state for neutron-star matter ruled out by EXO 0748 - 676, *Nature* **441**, (1115-1117) (2006).
- [43] F. Özel, T. Güver, D. Psaltis, The Mass and Radius of The Neutron Star in EXO-1745 248, *ApJ* **693**, 1775 (2009).
- [44] David J. Nice et al., A $2.1M_{\odot}$ Pulsar Measured by Relativistic Orbital Decay, *ApJ* **634**, 1242 (2005).
- [45] Paulo C. C. Freire, Eight New Millisecond Pulsars in NGC 6440 and NGC 6441, *ApJ* **675**, (670-682) (2008).

- [46] R. Cavagnoli, Modelos hadrônicos quânticos: transições de fases em matéria nuclear e aplicações em matéria estelar, Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, (2009).
- [47] M. D. Alloy, D. P. Menezes, Nuclear “pasta phase” and its consequences on neutrino opacities, *Phys. Rev. C* **83**, 035803 (2011).

APÊNDICE A – CONVENÇÕES

A.1 Unidades Naturais

Na presente dissertação manipulamos as expressões assumindo a convenção do sistema natural de unidades SN:

$$G = c = \hbar = 1.$$

Lembrando que no S.I; ($c = 299792458 \text{ m/s}$) é velocidade da luz no vácuo, ($G = 6,67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg s}^2$) a constante de gravitação universal de Newton e a constante de Plank ($\hbar = 1,05457266 \text{ km}^2 / \text{s}$). Abaixo segue uma tabela de conversão de unidades para SI e SN:

Quant. Física	SI	SN	Fator SI→SN
distância	m	m	1
tempo	s	m	c
massa	kg	m^{-1}	c/\hbar
velocidade	m/s	adimensional	$1/c$
momento linear	$\text{kg} \cdot \text{m/s}$	m^{-1}	$1/\hbar$
momento angular	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$	adimensional	$1/\hbar$
energia	$\text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$	m^{-1}	$1/\hbar c$
ação	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$	adimensional	$1/\hbar$

A.2 Outras Convenções

Tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Coordenadas contravariantes de um quadrivetor:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}). \quad (\text{A.2})$$

Coordenadas covariantes:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\vec{x}). \quad (\text{A.3})$$

Produto escalar entre quadrivetores:

$$A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (\text{A.4})$$

Derivada contravariante e covariante:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{A.7})$$

Quadridivergência:

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad (\text{A.8})$$

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (\text{A.9})$$

Matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (\text{A.11})$$

Matrizes de Pauli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}), \quad \gamma_\mu = (\gamma_0, -\vec{\gamma}), \quad (\text{A.13})$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

APÊNDICE B – EQUAÇÃO DE DIRAC

Vamos obter as soluções para a equação de movimento de Dirac,

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0. \quad (\text{B.1})$$

Para energias positivas, a solução é dada pela expressão:

$$\psi^{(+)}(x) = u(\vec{k}, \lambda) \exp(-i\varepsilon^{(+)}t + \vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (\text{B.2})$$

As soluções para energia negativas são:

$$\psi^{(-)}(x) = v(\vec{k}, \lambda) \exp(-i\varepsilon^{(-)}t - \vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (\text{B.3})$$

Nas respectivas soluções, λ representa alguma simetria interna como a de spin ou isospin por exemplo, e N é uma constante de normalização a determinar. Colocando as soluções na equação de movimento,

$$\begin{aligned} [(\gamma^0 \partial_t - \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}) - m] u(\vec{k}, \lambda) &= 0, \\ (\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \gamma^0 m) u(\vec{k}, \lambda) &= \varepsilon^{(+)} u(\vec{k}, \lambda) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

e ainda definindo,

$$\vec{\alpha} \equiv \gamma^0 \vec{\gamma} \quad (\text{B.5})$$

$$\beta \equiv \gamma^0, \quad (\text{B.6})$$

ficamos com,

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m) u(\vec{k}, \lambda) = \varepsilon^{(+)} u(\vec{k}, \lambda). \quad (\text{B.7})$$

Para obtermos a relação de dispersão, multiplicaremos a equação (B.7) a esquerda por $(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m)$, que resulta em,

$$E = \varepsilon^{(\pm)} = \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}; \quad (\text{B.8})$$

A equação de movimento para energia positiva,

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m) u(\vec{k}, \lambda) = E u(\vec{k}, \lambda), \quad (\text{B.9})$$

e para energias negativas,

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} - \beta m) v(\vec{k}, \lambda) = E v(\vec{k}, \lambda). \quad (\text{B.10})$$

Explicitando os espinores de duas componentes η e ϕ ,

$$u(\vec{k}, \lambda) = N \begin{pmatrix} \eta \\ \phi \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

e lembrando das propriedades das matrizes de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

e

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

A equação de movimento para $E > 0$ fica,

$$\begin{aligned}
(E - m)\eta - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \phi &= 0 \\
(E + m)\phi - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \eta &= 0,
\end{aligned} \tag{B.14}$$

resolvendo para ϕ , os espinores explicitamente tem a seguinte forma,

$$u(\vec{k}, \lambda) = N \begin{pmatrix} \eta^{(\lambda)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(E+m)} \eta^{(\lambda)} \end{pmatrix}. \tag{B.15}$$

Para o espinor de energia negativa,

$$\begin{aligned}
(E + m)\eta - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \phi &= 0 \\
(E - m)\phi - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \eta &= 0,
\end{aligned} \tag{B.16}$$

resolvendo para η , o espinor fica,

$$v(\vec{k}, \lambda) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(E+m)} \phi^{(\lambda)} \\ \phi^{(\lambda)} \end{pmatrix}. \tag{B.17}$$

Devemos escolher uma base para o espinor de duas componentes relativo a energia positiva e negativa, definindo $\eta^{(\lambda)} = \phi^{(\lambda)} = \xi^{(\lambda)}$,

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{B.18}$$

para $E > 0$ as soluções ficam,

$$u(\vec{k}, \lambda) = N \begin{pmatrix} \xi^{(\lambda)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(E+m)} \xi^{(\lambda)} \end{pmatrix}, \lambda = 1, 2 \tag{B.19}$$

e para $E < 0$,

$$v\left(\vec{k}, \lambda\right) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(E+m)} \xi^{(\lambda)} \\ \xi^{(\lambda)} \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1, 2. \quad (\text{B.20})$$

Introduziremos agora o fator de normalização em $u\left(\vec{k}, \lambda\right)$ e $v\left(\vec{k}, \lambda\right)$. Para o cálculo explícito partiremos da solução para energias positivas por exemplo, com a condição de normalização $\eta^\dagger \eta = 1$

$$\int_V u_{\vec{k}\lambda}^\dagger u_{\vec{k}\lambda} d^3x = 1, \quad (\text{B.21})$$

$$\int_V u_{\vec{k}\lambda}^\dagger u_{\vec{k}\lambda} d^3x = N^2 (\eta^\dagger \eta) \left(1 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(E+m)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(E+m)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

mas como,

$$\int_V u_{\vec{k}\lambda}^\dagger u_{\vec{k}\lambda} d^3x = N^2 \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2}{(E+m)^2} \right] = 1,$$

e usando $(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2 = k^2$ e a relação $E^2 = k^2 + m^2$,

$$\int_V u_{\vec{k}\lambda}^\dagger u_{\vec{k}\lambda} d^3x = N^2 \left[\frac{2E}{(E+m)} \right] = 1,$$

o fator de normalização fica,

$$N = \sqrt{\frac{(E+m)}{2E}}. \quad (\text{B.23})$$

As soluções normalizadas explicitando os espinores de duas componentes [15] é dada por,

$$\psi^{(+)}(x) = \sqrt{\frac{(E+m)}{2E}} \exp\left(-i\varepsilon^{(+)}t + \vec{k} \cdot \vec{x}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(E+m)} \end{pmatrix} \eta, \quad (\text{B.24})$$

para energia negativas [15] fica,

$$\psi^{(-)}(x) = \sqrt{\frac{(E+m)}{2E}} \exp\left(-i\varepsilon^{(-)}t - \vec{k} \cdot \vec{x}\right) \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(E+m)} \\ 1 \end{pmatrix} \phi. \quad (\text{B.25})$$

para energias positivas e negativas temos ainda a relação de ortogonalidade entre os espiniores,

$$\begin{aligned} v(\vec{k}, \lambda) v^\dagger(\vec{k}', \lambda') &= \delta_{\lambda\lambda'} \\ u(\vec{k}, \lambda) u^\dagger(\vec{k}', \lambda') &= \delta_{\lambda\lambda'} \\ u^\dagger(\vec{k}, \lambda) v(-\vec{k}, \lambda) &= v^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(-\vec{k}, \lambda) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Futuramente na obtenção da pressão precisaremos de alguns resultados que podem ser obtidos agora. Partindo da equação (B.9) e multiplicando ambos os membros por $\beta u^\dagger(\vec{k}, \lambda)$ ficamos com,

$$u^\dagger(\vec{k}, \lambda) (\vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m) u(\vec{k}, \lambda) = E(k) \bar{u}(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda), \quad (\text{B.27})$$

agora partindo do hermitiano conjugado de (B.9),

$$\bar{u}(\vec{k}, \lambda) (\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m) = E(k) \bar{u}(\vec{k}, \lambda), \quad (\text{B.28})$$

e multiplicando ambos os membros a direita por $\beta u(\vec{k}, \lambda)$, usando a propriedade,

$$(\vec{\alpha})^\dagger = \beta \vec{\gamma}^\dagger = -\beta \vec{\gamma} \quad (\text{B.29})$$

resulta em,

$$u^\dagger(\vec{k}, \lambda) (-\vec{\gamma} \cdot \vec{k} + m) u(\vec{k}, \lambda) = E(k) \bar{u}(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda), \quad (\text{B.30})$$

juntando os dois resultados (B.27) e (B.30) temos que,

$$u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) m = E(k) u(\vec{k}, \lambda) \bar{u}(\vec{k}, \lambda), \quad (\text{B.31})$$

analogamente para energias negativas,

$$v^\dagger(\vec{k}, \lambda) v(\vec{k}, \lambda) m = -E(k) v(\vec{k}, \lambda) \bar{v}(\vec{k}, \lambda). \quad (\text{B.32})$$

Multiplicando pelo hermitiano conjugado do espinor $u(\vec{k}, \lambda)$ a equação (B.27),

$$\begin{aligned} & u^\dagger(\vec{k}, \lambda) (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) u(\vec{k}, \lambda) \\ &= [E(k) - \beta m] u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) \\ &= E(k) u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) - m \bar{u}(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

mas de (B.31),

$$u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) \left(\frac{m}{E(k)} \right) = u(\vec{k}, \lambda) \bar{u}(\vec{k}, \lambda),$$

resultando em,

$$\begin{aligned}
& u^\dagger(\vec{k}, \lambda) (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) u(\vec{k}, \lambda) \\
&= [E(k) - \beta m] u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) \\
&= \left[E(k) - \frac{m^2}{E(k)} \right] u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) \\
&= \left[\frac{E(k)^2 - m^2}{E(k)} \right] u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) \\
&= \left[\frac{k^2}{E(k)} \right] u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda). \tag{B.34}
\end{aligned}$$

finalmente segue que,

$$u^\dagger(\vec{k}, \lambda) (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) u(\vec{k}, \lambda) = \frac{k^2}{E(k)}. \tag{B.35}$$

para energias negativas analogamente,

$$v^\dagger(\vec{k}, \lambda) (\vec{\alpha} \cdot \vec{k}) v(\vec{k}, \lambda) = \frac{k^2}{E(k)}. \tag{B.36}$$

A solução mais geral para a equação de Dirac é dado pela superposição das soluções para energias negativas e positivas [15],

$$\begin{aligned}
\psi(x) = & \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left\{ A_{\lambda \vec{k}} u(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \varepsilon^{(+)} t) \right] \right. \\
& \left. + B_{\lambda \vec{k}}^* v(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i(-\vec{k} \cdot \vec{x} - \varepsilon^{(-)} t) \right] \right\} \tag{B.37}
\end{aligned}$$

os $A_{\lambda \vec{k}}^s$ e $B_{\lambda \vec{k}}^{*s}$ são coeficientes da expansão de Fourier.

APÊNDICE C – SEGUNDA QUANTIZAÇÃO

Um passo importante na obtenção das EoS no modelo do MIT é a quantização dos campos fermiônicos [6–8, 15–17, 21]. Nesta seção lançaremos mão de um procedimento usual de quantização dos campos (relação de comutação das variáveis canônicas de campo). Na literatura técnica encontra-se ainda a nomenclatura *quantização canônica dos campos* [15, 16], que nada mais é que um procedimento para se construir teorias de campos a partir de teorias clássicas de campos. É importante ressaltar que até a seção 2.3 nada foi quantizado, apenas partimos do lagrangiano de campos clássicos (Dirac livre). Existem alguns procedimentos para se quantizar uma teoria de campos relativísticos, talvez o mais conhecido seja a *quantização canônica*, por se tratar de uma extensão do procedimento utilizado na mecânica quântica de partículas (MQ) [16]. Na MQ os observáveis são tratados como operadores no espaço de Hilbert e impomos relações de comutação para as variáveis canônicas. No caso da quantização dos campos relativísticos para obtermos soluções corretas para os observáveis devemos abandonar a noção de partícula da mecânica quântica e usar a noção de campos como operadores [15, 16]. Um método de quantização interessante e bastante empregado nas teorias de gauge (modelo padrão) é o método introduzido por Feynman [6–8], conhecido como método de integrais de trajetória. Neste *approach*, grosso modo, faz-se uma conexão entre a ação clássica e uma amplitude de probabilidade quântica. O objeto matemático de maior relevância é o propagador. A referida conexão está intimamente ligada a soma sob todas as trajetórias de uma partícula, isto é, a noção de integral de caminho de Feynman. Optamos nesta dissertação pelo método de quantização canônica, que se encontra detalhada nos livros textos [15–17].

C.0.1 Quantização Canônica

Tratando-se de férmions temos o operador de campo $\psi(x)$, e seu momento conjugado π definido por,

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} = i\psi^\dagger, \quad (\text{C.1})$$

a quantização do campo de Dirac é estabelecida através das relações de anticomutação dos operadores [15]:

$$\{\psi_a(x), \pi_b(x')\}_{x_0=x'_0} = i\delta_{ab}^{(3)}(x-x'), \quad (\text{C.2})$$

e

$$\{\psi_a(x), \psi_b(x')\}_{x_0=x'_0} = \{\pi_a(x), \pi_b(x')\}_{x_0=x'_0} = 0. \quad (\text{C.3})$$

As relações de anticomutação em termos dos operadores aniquilação; de bárion e antibárions $A_{\lambda \vec{k}}, B_{\lambda \vec{k}}$ respectivamente e os operadores de criação de bárions e antibárions $A_{\lambda \vec{k}}^\dagger$ e $B_{\lambda \vec{k}}^\dagger$ [17]: para o momento linear \vec{k} e número quântico λ , segue a relação:

$$\left\{A_{\lambda \vec{k}}, A_{\lambda \vec{k}}^\dagger\right\}_{x_0=x'_0} = \left\{B_{\lambda \vec{k}}, B_{\lambda \vec{k}}^\dagger\right\}_{x_0=x'_0} = \delta_{\vec{k} \vec{k}'} \delta_{\lambda \lambda'}, \quad (\text{C.4})$$

bárions = antibárions

os coeficientes de Fourier $A_{\lambda \vec{k}}^*$ e $B_{\lambda \vec{k}}^*$ em (B.37) são agora operadores $A_{\lambda \vec{k}}^\dagger$ e $B_{\lambda \vec{k}}^\dagger$. Vamos reescrever a equação (B.37) em termos da função de onda expandida na representação de Schrödinger, para bárions

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left\{ A_{\lambda \vec{k}} u(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \epsilon^{(0)} t \right) \right] + \right. \\ & \left. + B_{\lambda \vec{k}}^\dagger v(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(-\vec{k} \cdot \vec{x} - \epsilon^{(-)} t \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

e antibárions,

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(x) = & \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left\{ A_{\lambda \vec{k}}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \epsilon^{(+)} t \right) \right] \right. \\ & \left. + B_{\lambda \vec{k}} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(-\vec{k} \cdot \vec{x} - \epsilon^{(-)} t \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

onde u e v são os espinores de Dirac normalizados correspondente respectivamente as soluções positivas e negativas. As soluções acima representam as soluções da equação de Dirac em modos normais de oscilação. Consideremos o sistema contido em um cubo de volume $V = L^3$. Com as condições de contorno periódicas,

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad (\text{C.7})$$

onde $i = x, y, z$ e $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Aqui, formalmente o limite $V \rightarrow \infty$ foi tomado, que é o limite para a matéria nuclear infinita. Vale lembrar que nas equações (C.5) e (C.6) a relação de dispersão é dada por,

$$E(k) = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} = k_0. \quad (\text{C.8})$$

Resta-nos agora expressar o operador número, a hamiltoniana e o operador momento em termos dos operadores $A_{\lambda \vec{k}}$, $A_{\lambda \vec{k}}^\dagger$, $B_{\lambda \vec{k}}$ e $B_{\lambda \vec{k}}^\dagger$.

C.0.2 O Operador Número

Para calcular o número bariônico [14, 17] vamos integrar o produto $\psi^\dagger \psi$ sobre todo o espaço,

$$\hat{N} = \int_V \psi^\dagger \psi d^3x, \quad (\text{C.9})$$

utilizando (C.5) e (C.6)

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \frac{1}{V^2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \int_V d^3x \left\{ A_{\lambda\vec{k}} \vec{u}(\vec{k}', \lambda') \exp \left[i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(+)}t) \right] \right. \\ &\quad \left. + B_{\lambda\vec{k}}^\dagger \vec{v}(\vec{k}', \lambda') \exp \left[i(-\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(-)}t) \right] \right\} \times \\ &\quad \left\{ A_{\lambda\vec{k}}^\dagger \vec{u}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i(-\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon^{(0)}t) \right] + \right. \\ &\quad \left. + B_{\lambda\vec{k}} \vec{v}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon^{(-)}t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Efetuando os produtos e lembrando que u e v , são linearmente independente, isto é, os termos cruzados se anulam pela relação (B.26). Ficamos com a expressão:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \frac{1}{V^2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \int_V d^3x A_{\lambda\vec{k}} A_{\lambda\vec{k}}^\dagger \vec{u}(\vec{k}', \lambda') \vec{u}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x} \right] \\ &\quad + \frac{1}{V^2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \int_V d^3x B_{\lambda\vec{k}}^\dagger B_{\lambda\vec{k}} \vec{v}(\vec{k}', \lambda') \vec{v}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x} \right] \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \left[A_{\lambda\vec{k}} A_{\lambda\vec{k}}^\dagger \vec{u}(\vec{k}', \lambda') \vec{u}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \right. \\ &\quad \left. + B_{\lambda\vec{k}}^\dagger B_{\lambda\vec{k}} \vec{v}(\vec{k}', \lambda') \vec{v}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \right] \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}} \left[A_{\lambda\vec{k}} A_{\lambda\vec{k}}^\dagger \delta_{\lambda\lambda'} + B_{\lambda\vec{k}}^\dagger B_{\lambda\vec{k}} \delta_{\lambda\lambda'} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Usamos a propriedade de filtro da função delta de Dirac na expressão acima:

$$\frac{1}{V} \int_V d^3x \exp \left[i \left(\vec{k}' - \vec{k} \right) \cdot \vec{x} \right] = \delta^{(3)} \left(\vec{k}' - \vec{k} \right). \quad (\text{C.12})$$

O número bariônico fica portanto,

$$\hat{N} = \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left(A_{\lambda \vec{k}} A_{\lambda \vec{k}}^\dagger + B_{\lambda \vec{k}}^\dagger B_{\lambda \vec{k}} \right). \quad (\text{C.13})$$

A seguir adotaremos a convenção de posicionar sempre o operador aniquilação a direita de maneira que atue diretamente no vetor de estado. Se o vetor de estado em questão for o vácuo da teoria ficamos com;

$$A_{\lambda \vec{k}} |0\rangle = B_{\lambda \vec{k}} |0\rangle = 0. \quad (\text{C.14})$$

Dado as relações de anticomutação podemos sempre mudar de posição os operadores $A_{\lambda \vec{k}}$, $A_{\lambda' \vec{k}'}^\dagger$ e $B_{\lambda \vec{k}}$, $B_{\lambda' \vec{k}'}^\dagger$ quando $\lambda' = \lambda$ e $\vec{k}' = \vec{k}$,

$$1 - A_{\lambda \vec{k}}^\dagger A_{\lambda \vec{k}} = A_{\lambda \vec{k}} A_{\lambda \vec{k}}^\dagger. \quad (\text{C.15})$$

Vamos usar este resultado na expressão para o número bariônico (C.14) para ordenar os operadores,

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left(1 - A_{\lambda \vec{k}}^\dagger A_{\lambda \vec{k}} + B_{\lambda \vec{k}}^\dagger B_{\lambda \vec{k}} \right) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} 1 + \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left(A_{\lambda \vec{k}}^\dagger A_{\lambda \vec{k}} - B_{\lambda \vec{k}}^\dagger B_{\lambda \vec{k}} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Note que a mudança na ordem dos operadores gerou uma contribuição divergente, isto é, o primeiro termo está somando sob todos os momen-

tos e é claramente divergente. Podemos redefinir o vácuo da teoria de maneira a cancelarmos esta contribuição [15] em (C.16). Isto pode ser feito através da amplitude relacionada ao número bariônico no vácuo,

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \widehat{N} | 0 \rangle &= \langle 0 | \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} 1 + \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} \left(A_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda} \vec{k}} - B_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger B_{\vec{\lambda} \vec{k}} \right) | 0 \rangle, \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} 1 \langle 0 | 0 \rangle + \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} \langle 0 | A_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda} \vec{k}} | 0 \rangle - \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} \langle 0 | B_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger B_{\vec{\lambda} \vec{k}} | 0 \rangle \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} 1 \langle 0 | 0 \rangle. \tag{C.17}
 \end{aligned}$$

Logo ficamos com

$$\widehat{N} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} 1 - \langle 0 | \widehat{N} | 0 \rangle + \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} \left(A_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda} \vec{k}} - B_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger B_{\vec{\lambda} \vec{k}} \right),$$

e finalmente,

$$\widehat{N} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} \left(A_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda} \vec{k}} - B_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger B_{\vec{\lambda} \vec{k}} \right). \tag{C.18}$$

O procedimento de trocar a ordem dos operadores sempre implicará num termo adicional de carácter divergente que pode ser subtraído da expressão. Na prática podemos trocar a ordem dos operadores e alterar o sinal.

C.0.3 O Operador Hamiltoniano

Vamos calcular o operador hamiltoniano [7, 15, 17] usando a forma clássica expressa em (2.52). Em termos dos operadores de criação e aniquilação de bárions e antibárions

$$\widehat{H} = \int_V d^3x T_{00} = i \int_V d^3x \langle \psi^\dagger \partial_0 \psi \rangle, \quad (\text{C.19})$$

esplicitamente,

$$\begin{aligned} \widehat{H} = & \frac{1}{V^2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \int_V d^3x \left\{ A_{\lambda\vec{k}}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(-\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(+)} t \right) \right] \right. \\ & + B_{\lambda\vec{k}} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(-)} t \right) \right] \left. \right\} \times \\ & \times \partial_0 \left\{ A_{\lambda\vec{k}} u(\vec{k}', \lambda') \exp \left[i \left(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(+)} t \right) \right] \right. \\ & + B_{\lambda\vec{k}}^\dagger v(\vec{k}', \lambda') \exp \left[i \left(-\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(-)} t \right) \right] \left. \right\}. \quad (\text{C.20}) \end{aligned}$$

Derivando:

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \frac{1}{V^2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \int_V d^3x \left\{ A_{\lambda\vec{k}}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(-\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(+)} t \right) \right] \right. \\
& + B_{\lambda\vec{k}} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(-)} t \right) \right] \left. \right\} \times \\
& \times \left\{ -i\varepsilon(k')^{(+)} A_{\lambda\vec{k}'} u(\vec{k}', \lambda') \exp \left[i \left(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(+)} t \right) \right] \right. \\
& \left. - i\varepsilon(k')^{(-)} B_{\lambda\vec{k}'}^\dagger v(\vec{k}', \lambda') \exp \left[i \left(-\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(-)} t \right) \right] \right\} \quad (C.21)
\end{aligned}$$

e efetuando os produtos,

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \frac{1}{V^2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \int_V d^3x \left\{ -i\varepsilon(k')^{(+)} A_{\lambda\vec{k}}^\dagger A_{\lambda\vec{k}'} u^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}', \lambda') \times \right. \\
& \times \exp \left[i \left(\vec{k}' - \vec{k} \right) \cdot \vec{x} \right] \\
& - i\varepsilon(-k')^{(-)} A_{\lambda\vec{k}}^\dagger B_{\lambda\vec{k}'}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) v(-\vec{k}', \lambda') \times \\
& \times \exp \left[i \left(+\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(-)} t \right) \right] \exp \left[i \left(-\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(+)} t \right) \right] \\
& - i\varepsilon(-k')^{(+)} B_{\lambda\vec{k}} A_{\lambda\vec{k}'} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) u(-\vec{k}', \lambda') \times \\
& \times \exp \left[i \left(-\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(+)} t \right) \right] \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(-)} t \right) \right] \\
& + i\varepsilon(k')^{(-)} B_{\lambda\vec{k}} B_{\lambda\vec{k}'}^\dagger v^\dagger(\vec{k}, \lambda) v(\vec{k}', \lambda') \times \\
& \times \exp \left[i \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) \cdot \vec{x} \right] \left. \right\}. \quad (C.22)
\end{aligned}$$

Em (C.22) usamos nos termos cruzados o fato de estarmos somando sobre todos os momentos, isto é, $\vec{k}' = -\vec{k}$. Usando as relações de ortogonalidade entre u e v (B.26) [17], os termos cruzados se anulam,

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{V} \sum_{\lambda \lambda'} \sum_{\vec{k} \vec{k}'} \left[\varepsilon(k')^{(+)} A_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} u^{\dagger}(\vec{k}, \lambda) A_{\lambda \vec{k}} u(\vec{k}', \lambda') \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \right. \\ & \left. + \varepsilon(k')^{(-)} B_{\lambda \vec{k}} B_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} v^{\dagger}(\vec{k}, \lambda) v(\vec{k}', \lambda') \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Servindo-se da delta de Dirac temos que;

$$\hat{H} = \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \left(A_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} \varepsilon(k)^{(+)} A_{\lambda \vec{k}} + B_{\lambda \vec{k}} \varepsilon(k)^{(-)} B_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} \right). \quad (\text{C.24})$$

Substituindo os autovalores de energia,

$$\hat{H} = \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} E(k) \left(A_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} A_{\lambda \vec{k}} - B_{\lambda \vec{k}} B_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} \right), \quad (\text{C.25})$$

realizando o ordenamento dos operadores [15],

$$\hat{H} = \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} E(k) \left(A_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} A_{\lambda \vec{k}} + B_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} B_{\lambda \vec{k}} \right) - \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} E(k). \quad (\text{C.26})$$

A última contribuição do Hamiltoniano diverge, portanto devemos subtrair desta quantidade. A amplitude no vácuo de \hat{H} é

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} E(k) \left(\langle 0 | A_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} A_{\lambda \vec{k}} | 0 \rangle + \langle 0 | B_{\lambda \vec{k}}^{\dagger} B_{\lambda \vec{k}} | 0 \rangle \right) \\ &\quad - \frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \langle 0 | E(k) | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{V} \sum_{\lambda \vec{k}} \langle 0 | E(k) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Ficamos então com:

$$\widehat{H} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda}, \vec{k}} E(k) \left(A_{\vec{\lambda}, \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda}, \vec{k}} + B_{\vec{\lambda}, \vec{k}}^\dagger B_{\vec{\lambda}, \vec{k}} \right) - \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda}, \vec{k}} E(k) + \langle 0 | \widehat{H} | 0 \rangle, \quad (\text{C.28})$$

que resulta em

$$\widehat{H} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda}, \vec{k}} E(k) \left(A_{\vec{\lambda}, \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda}, \vec{k}} + B_{\vec{\lambda}, \vec{k}}^\dagger B_{\vec{\lambda}, \vec{k}} \right). \quad (\text{C.29})$$

Onde $E(k)$ é dado por,

$$E(k) = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}. \quad (\text{C.30})$$

C.0.4 O operador Momento

Vamos calcular o operador $\widehat{\mathcal{P}}$ [7, 15, 17] que definiremos a seguir;

$$\widehat{\mathcal{P}}_i = \int_V d^3x T_{0i} = \int_V d^3x \psi^\dagger \left(-i \vec{\nabla} \right) \psi. \quad (\text{C.31})$$

Iremos explicitar as soluções em termos dos espinores;

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}}_i &= -i \frac{1}{V^2} \sum_{\vec{\lambda}, \vec{\lambda}'} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \int_V d^3x \left\{ A_{\vec{\lambda}, \vec{k}}^\dagger u^\dagger \left(\vec{k}, \lambda \right) \exp \left[i \left(-\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(+)} t \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + B_{\vec{\lambda}, \vec{k}} v^\dagger \left(\vec{k}, \lambda \right) \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(-)} t \right) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \partial_i \left\{ A_{\vec{\lambda}', \vec{k}'} u \left(\vec{k}', \lambda' \right) \exp \left[i \left(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(+)} t \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + B_{\vec{\lambda}', \vec{k}'} v \left(\vec{k}', \lambda' \right) \exp \left[i \left(-\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(-)} t \right) \right] \right\}. \quad (\text{C.32}) \end{aligned}$$

Utilizando a ortogonalidade dos espinores nos termos cruzados, como feito em (C.22) para (C.23),

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{P}}_i &= -i \frac{1}{V^2} \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \int_V d^3x \left\{ A_{\lambda\vec{k}}^\dagger u^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(-\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(+)} t \right) \right] \right. \\
&\quad \times \partial_i A_{\lambda\vec{k}} u(\vec{k}', \lambda') \exp \left[i \left(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(+)} t \right) \right] + \\
&\quad + \sum_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} B_{\lambda\vec{k}} v^\dagger(\vec{k}, \lambda) \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \varepsilon(k)^{(-)} t \right) \right] \times \\
&\quad \left. \times \partial_i B_{\lambda\vec{k}}^\dagger v(\vec{k}', \lambda') \exp \left[i \left(-\vec{k}' \cdot \vec{x} - \varepsilon(k')^{(-)} t \right) \right] \right\}. \tag{C.33}
\end{aligned}$$

A ortogonalidade dos espinores resulta numa delta de Kronecker $\delta_{\lambda,\lambda'}$, manipulando e arranjando para obter as deltas de Dirac:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{P}}_i &= -i \frac{1}{V^2} \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \int_V d^3x \left\{ ik_i A_{\lambda\vec{k}}^\dagger A_{\lambda\vec{k}} \exp \left[i \left(\vec{k}' - \vec{k} \right) \cdot \vec{x} \right] \right. \\
&\quad \left. - ik_i B_{\lambda\vec{k}} B_{\lambda\vec{k}}^\dagger \exp \left[i \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) \cdot \vec{x} \right] \right\}. \tag{C.34}
\end{aligned}$$

Temos as deltas de Dirac

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{P}}_i &= -i \frac{1}{V} \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \left[ik_i A_{\lambda\vec{k}}^\dagger A_{\lambda\vec{k}} \delta^{(3)}(\vec{k}' - \vec{k}) \right. \\
&\quad \left. - ik_i B_{\lambda\vec{k}} B_{\lambda\vec{k}}^\dagger \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \right]. \tag{C.35}
\end{aligned}$$

Usando a propriedade de filtro da delta finalmente chegamos em:

$$\widehat{\mathcal{P}}_i = \frac{1}{V} \sum_{\lambda\vec{k}} k_i \left(A_{\lambda\vec{k}}^\dagger A_{\lambda\vec{k}} - B_{\lambda\vec{k}} B_{\lambda\vec{k}}^\dagger \right). \tag{C.36}$$

Temos ainda que ordenar os operadores,

$$\widehat{\mathcal{P}}_i = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} k_i \left(A_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda} \vec{k}} - B_{\vec{\lambda} \vec{k}} B_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger \right) - \langle 0 | \widehat{P}_i | 0 \rangle, \quad (\text{C.37})$$

onde o termo que cancela a divergência é dado pela amplitude no vácuo,

$$\langle 0 | \widehat{P}_i | 0 \rangle = -\frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} \langle 0 | k_i | 0 \rangle, \quad (\text{C.38})$$

de modo que o resultado final fica,

$$\widehat{\mathcal{P}}_i = \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} k_i \left(A_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda} \vec{k}} + B_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger B_{\vec{\lambda} \vec{k}} \right). \quad (\text{C.39})$$

C.0.5 O operador \widehat{p}

Vamos calcular o operador \widehat{p} que nada mais é que a pressão escrita numa forma operatorial, denotamos por \widehat{p} minúsculo para diferenciar do operador momento escrito como $\widehat{\mathcal{P}}$ caligráfico ,

$$3\widehat{p} \equiv \int_V d^3x \widehat{T}_{ii} = \int_V d^3x (i\bar{\psi} \gamma_i \partial_i \psi) = \int_V d^3x (i\psi^\dagger \alpha_i \partial_i \psi) \quad (\text{C.40})$$

ou ainda usando as propriedades das matrizes de Dirac e escrevendo em termos do operador momento,

$$3\widehat{p} \equiv \int_V d^3x \widehat{T}_{ii} = \gamma_i \gamma^0 \int_V d^3x (i\bar{\psi} \gamma^0 \partial_i \psi) = \gamma_i \gamma^0 \cdot \widehat{\mathcal{P}}_i = \vec{\alpha} \cdot \widehat{\mathcal{P}}_i \quad (\text{C.41})$$

o operador associado a pressão finalmente fica,

$$3\widehat{p} \equiv \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda} \vec{k}} \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} \right) \left(A_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda} \vec{k}} + B_{\vec{\lambda} \vec{k}} B_{\vec{\lambda} \vec{k}}^\dagger \right) \quad (\text{C.42})$$

utilizaremos a seguinte igualdade (B.35),

$$\hat{p} = \frac{1}{3} \frac{1}{V} \sum_{\vec{\lambda}, \vec{k}} \left(\frac{k^2}{E(k)} \right) \left(A_{\vec{\lambda}, \vec{k}}^\dagger A_{\vec{\lambda}, \vec{k}} + B_{\vec{\lambda}, \vec{k}}^\dagger B_{\vec{\lambda}, \vec{k}} \right). \quad (\text{C.43})$$

APÊNDICE D – POTENCIAIS QUÍMICOS

Neste apêndice vamos tratar a matéria de quarks com dois sabores (\mathbf{u}, \mathbf{d}) e com três sabores $(\mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{s})$. Vamos obter as relações entre os potenciais químicos dos quarks para a matéria eletricamente neutra. Consideraremos que não há léptons presentes¹. Este apêndice está ligado ao capítulo (5) em que realizamos o estudo da estabilidade da matéria com a presença de léptons e também na ausência dos mesmos. Estudamos a matéria com dois sabores (\mathbf{u}, \mathbf{d}) a fim de justificar o esquema da figura (6) e as figuras (12-15) presentes capítulo (5). O estudo da matéria (\mathbf{u}, \mathbf{d}) fornece vínculos² importantes para obtermos as janelas de estabilidade para a matéria estranha $(\mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{s})$ ³.

D.1 Potenciais Químicos no Modelo do MIT $(\mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{s})$

A relação de igualdade entre as densidades dos quarks é válida:

$$\rho_u = \rho_d = \rho_s, \quad (\text{D.1})$$

pois satisfaz a condição de neutralidade de carga elétrica:

$$2\rho_u = (\rho_d + \rho_s), \quad (\text{D.2})$$

A densidade bariônica é dada por:

$$n_B = \frac{1}{3} (\rho_u + \rho_d + \rho_s), \quad (\text{D.3})$$

¹O estudo da matéria em equilíbrio beta é considerado no final capítulo (2) e (3).

²São as linhas vermelhas que aparecem nas figuras (12-15) presentes capítulo (5).

³Neste caso não há léptons presentes.

usando as equações (D.2) em (D.3) e a equação (D.1) ficamos com:

$$n_B = \rho_i, \quad (\text{D.4})$$

onde o índice i denota os sabores dos quarks $(\mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{s})$. Usando a expressão para a densidade de partículas em $T = 0$:

$$\rho_i = \frac{\gamma_i}{6\pi^2} k_{if}^3, \quad (\text{D.5})$$

Segue que

$$k_u^3 = k_d^3 = k_s^3, \quad (\text{D.6})$$

escrevendo o momento de Fermi explicitamente

$$k_{if} = \sqrt{\mu_i^2 - m_i^2} \quad (\text{D.7})$$

e

$$\mu_u^2 - m_u^2 = \mu_d^2 - m_d^2 = \mu_s^2 - m_s^2. \quad (\text{D.8})$$

Usando também o fato de que as massas dos quarks up e down são:

$$m_u \approx m_d. \quad (\text{D.9})$$

Resulta que a relação entre os três potenciais químicos são as seguintes:

$$\mu_u = \mu_d. \quad (\text{D.10})$$

e

$$\mu_s = \sqrt{\mu_u^2 + (m_s^2 - m_u^2)}. \quad (\text{D.11})$$

Note que para massa $m_u = m_d = m_s \approx 0$, os potenciais químicos são $\tilde{\mu}_u \approx \tilde{\mu}_d \approx \tilde{\mu}_s$.

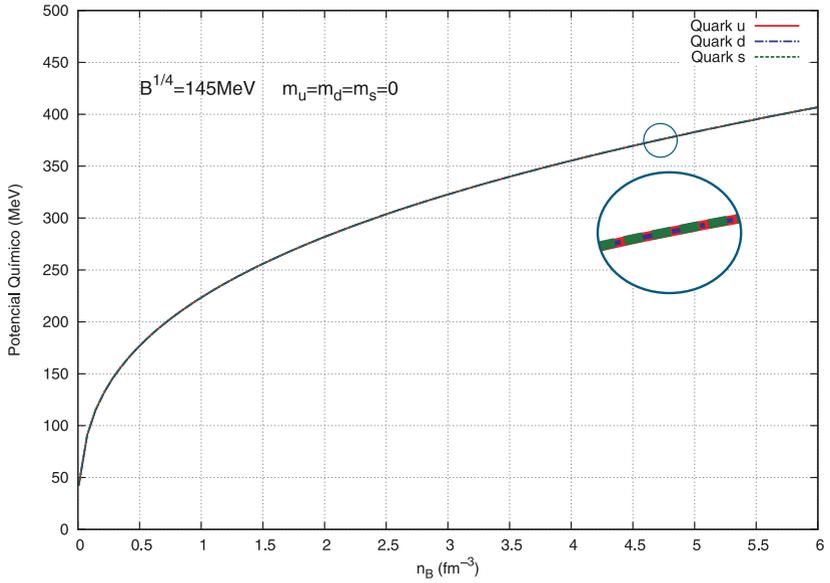


Figura 36: Relação entre potencial químico e densidade no modelo do MIT. A figura está de acordo com as equações (D.10-D.11) quando tomamos $m_u = m_d = m_s = 0$.

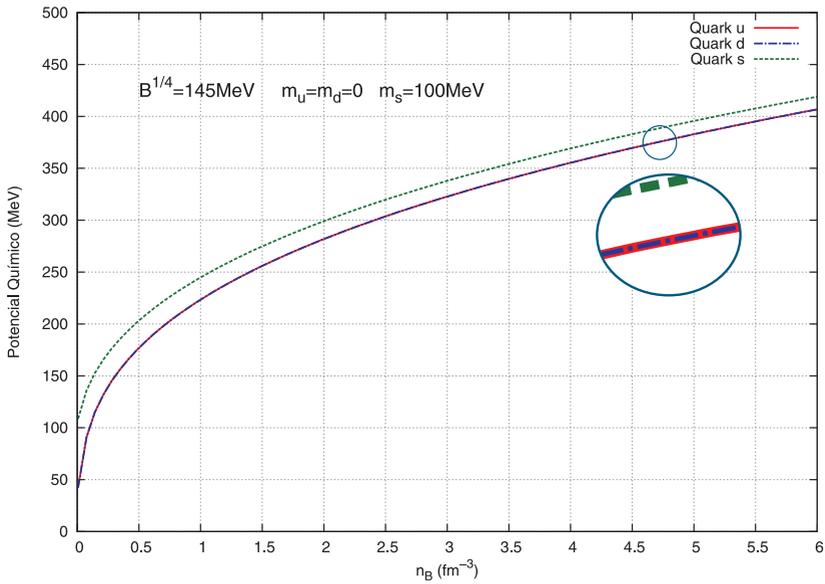


Figura 37: A figura está de acordo com as equações (D.10-D.11) quando tomamos $m_u = m_d = 0$ e $m_s = 100 \text{ MeV}$ no modelo do MIT.

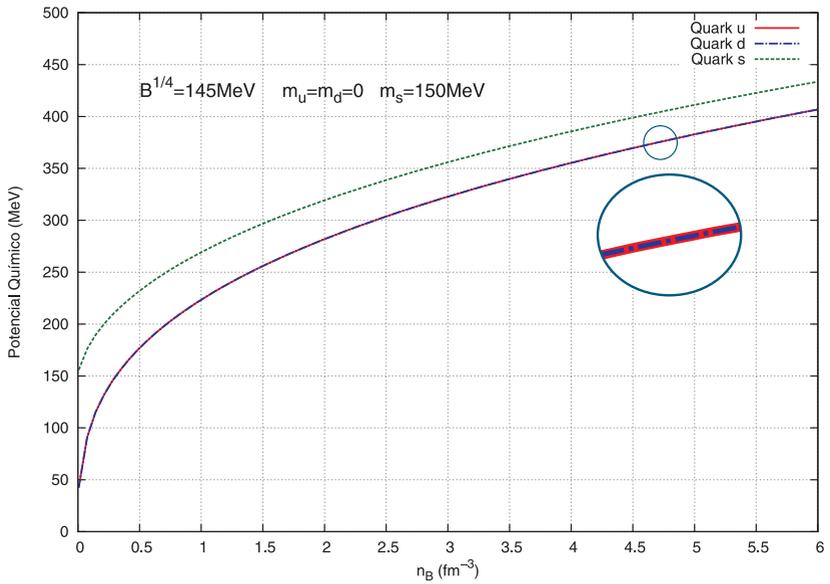


Figura 38: A figura está de acordo com as equações (D.10-D.11) quando tomamos $m_u = m_d = 0$ e $m_s = 150 \text{ MeV}$ no modelo do MIT.

D.2 Potenciais Químicos no Modelo do QMDD ($\mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{s}$)

Todo o raciocínio anterior para a matéria ($\mathbf{u}, \mathbf{d}, \mathbf{s}$) no modelo do MIT pode ser estendido para o modelo QMDD. Devemos apenas substituir a massa fixa dos quarks pela massa efetiva. Resulta que a relação entre os três potenciais químicos são as seguintes:

$$\mu_u = \mu_d. \quad (\text{D.12})$$

e

$$\mu_s = \sqrt{\mu_u^2 + (m_s^{*2} - m_u^{*2})}. \quad (\text{D.13})$$

Note que, para massa $m_u^* = m_d^* \approx m_s^*$ ($m_{0s} \approx 0$ no *ansatz* para massa, a equação (3.2)), os potenciais químicos são $\mu_u \approx \mu_d \approx \mu_s$. Usando o *ansatz* ficamos com a seguinte expressão em termos dos parâmetros e da densidade.

$$\mu_s = \sqrt{\mu_u^2 + m_{0s} \left(m_{0s} + 2 \frac{C}{3\rho_u} \right)}, \quad (\text{D.14})$$

onde m_{0s} é a massa de corrente do quark estranho e C é o parâmetro que aparece nas equações (3.1) e (3.2). A dependência com a densidade na relação acima é complicada, contudo pode-se resolver numericamente.

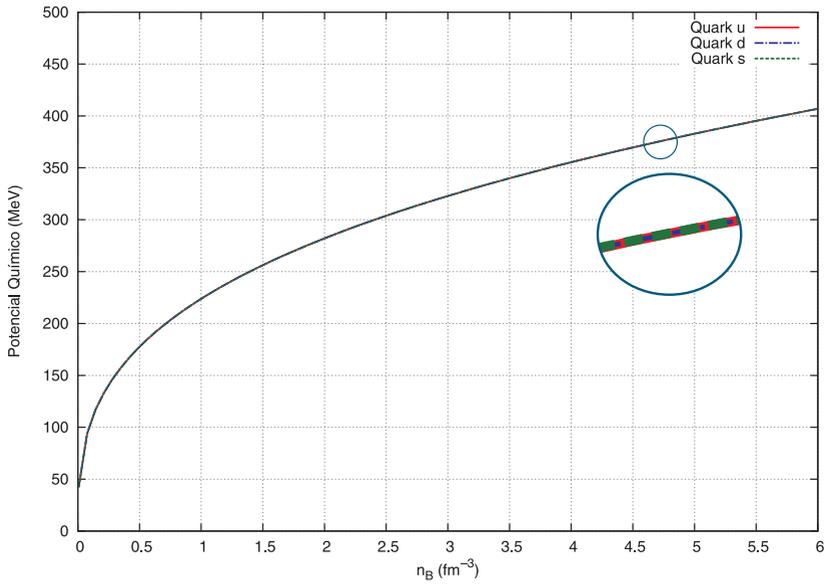


Figura 39: A figura mostra que para $C = 0$ no modelo QMDD e $m_{0s} = 0$, recupera-se o resultado obtido com MIT ($B^{1/4} = 145\text{MeV}$) na figura (36).

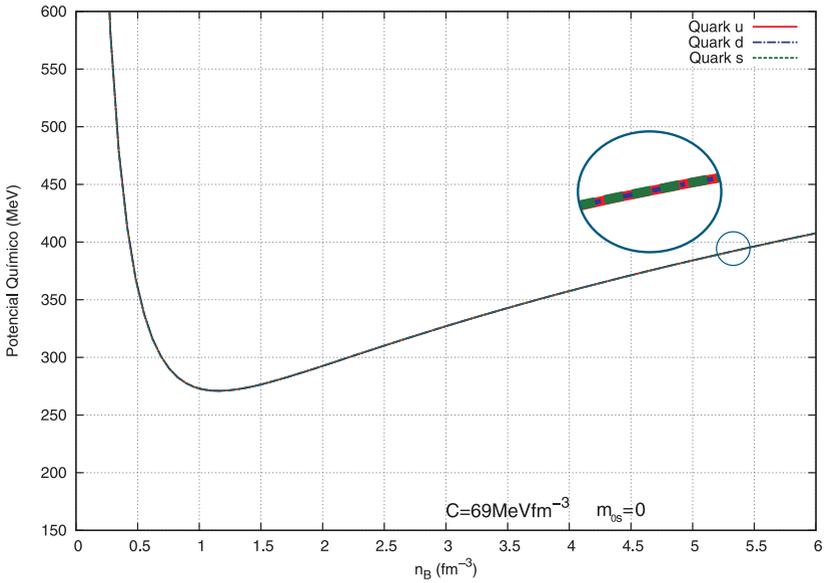


Figura 40: A figura mostra que para $C = 69\text{MeVfm}^{-3}$ no modelo QMDD e $m_{0s} = 0$ (isto é, $m_u^* = m_d^* = m_s^*$) as curvas estão de acordo com as equações (D.12-D.14).

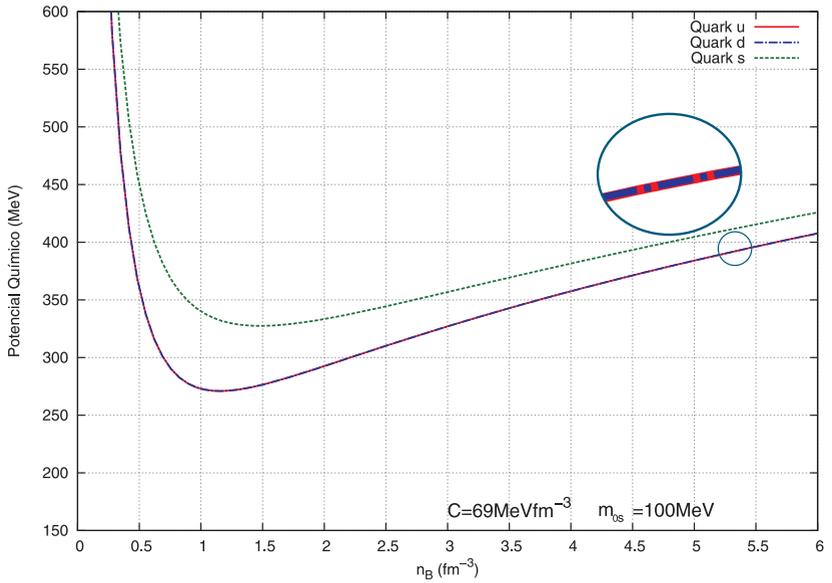


Figura 41: A figura mostra que para $C = 69 \text{ MeV fm}^{-3}$ no modelo QMDD e $m_{0s} = 100 \text{ MeV}$ as curvas estão de acordo com as equações (D.12-D.14).

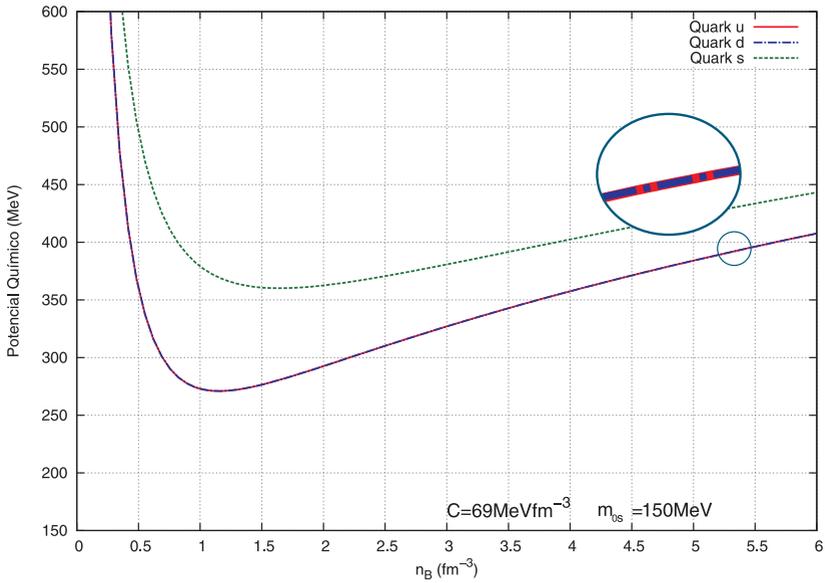


Figura 42: A figura mostra que para $C = 69 \text{ MeV fm}^{-3}$ no modelo QMDD e $m_{0s} = 150 \text{ MeV}$ as curvas estão de acordo com as equações (D.12-D.14).

D.3 Potenciais Químicos no Modelo do MIT (u,d)

A imposição de neutralidade de carga elétrica exige que as densidades dos quarks se relacionem da seguinte forma:

$$2\rho_u = \rho_d, \quad (\text{D.15})$$

A densidade bariônica em termos de dois sabores de quarks fica

$$n_B = \frac{1}{3}(\rho_u + \rho_d), \quad (\text{D.16})$$

mas pela condição de neutralidade de carga ficamos com:

$$n_B = \rho_u. \quad (\text{D.17})$$

Usando a seguinte expressão para a densidade de partículas em $T = 0$:

$$\rho_i = \frac{\gamma_i}{6\pi^2} k_{if}^3, \quad (\text{D.18})$$

em termos dos momentos de Férmí,

$$2k_u^3 = k_d^3, \quad (\text{D.19})$$

mais explicitamente

$$k_{if} = \sqrt{\mu_i^2 - m_i^2}, \quad (\text{D.20})$$

para ficarmos com a seguinte igualdade:

$$2^{2/3}(\mu_u^2 - m_u^2) = (\mu_d^2 - m_d^2), \quad (\text{D.21})$$

Resolvendo para μ_d em termos de μ_u e das massas:

$$\mu_d = \sqrt{2^{2/3} \mu_u^2 + (m_d^2 - 2^{2/3} m_u^2)}, \quad (\text{D.22})$$

Usaremos o seguinte fato

$$m_u \approx m_d, \quad (\text{D.23})$$

logo

$$\mu_d = \sqrt{2^{2/3} (\mu_u^2 - m_u^2) + m_u^2}. \quad (\text{D.24})$$

Note que para massa $m_u = m_d = 0$, os potenciais químicos são:
 $\mu_d = 2^{1/3} \mu_u$.

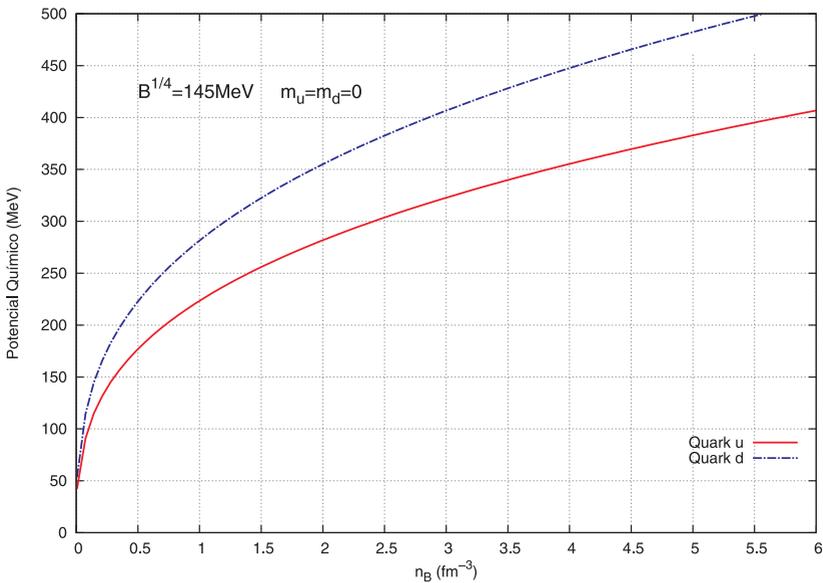


Figura 43: A figura mostra que para $B^{1/4} = 145 \text{MeV}$ no modelo QMDD e $m_u = m_d = 0$ as curvas estão de acordo com a equação (D.24).

D.4 Potenciais Químicos no Modelo QMDD (u,d)

Vamos utilizar o que já foi resolvido para o modelo do MIT, partiremos da equação (D.22) levando em consideração a presença da massa efetiva. Resolvendo para μ_d em termos de μ_u e das massas:

$$\mu_d = \sqrt{2^{2/3}\mu_u^2 + (m_d^{*2} - 2^{2/3}m_u^{*2})}, \quad (\text{D.25})$$

Usaremos o seguinte fato

$$m_u^* \approx m_d^*, \quad (\text{D.26})$$

$$\mu_d = \sqrt{2^{2/3}\mu_u^2 + (1 - 2^{2/3})m_u^{*2}}, \quad (\text{D.27})$$

Somente para densidades muito altas teremos que: $\mu_d = 2^{1/3}\mu_u$, que seria idêntico ao que teríamos no MIT para qualquer densidade quando $m_u = m_d = 0$. É importante notar que a massa depende da densidade bariônica, que por sua vez é idêntica à ρ_u :

$$m_u^* = m_d^* = \frac{C}{3\rho_u}. \quad (\text{D.28})$$

A equação (D.27) mostra uma dependência recursiva na densidade ρ_u , isto pode ser visualizado iterando a densidade.

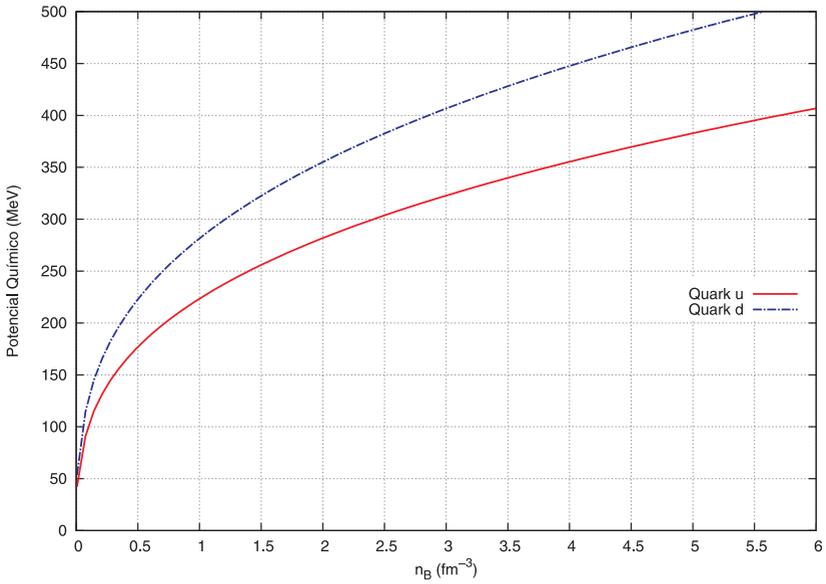


Figura 44: A figura mostra que para $C = 0$ no modelo QMDD as curvas estão de acordo com a equação (D.27) e são idênticas as da figura (43).

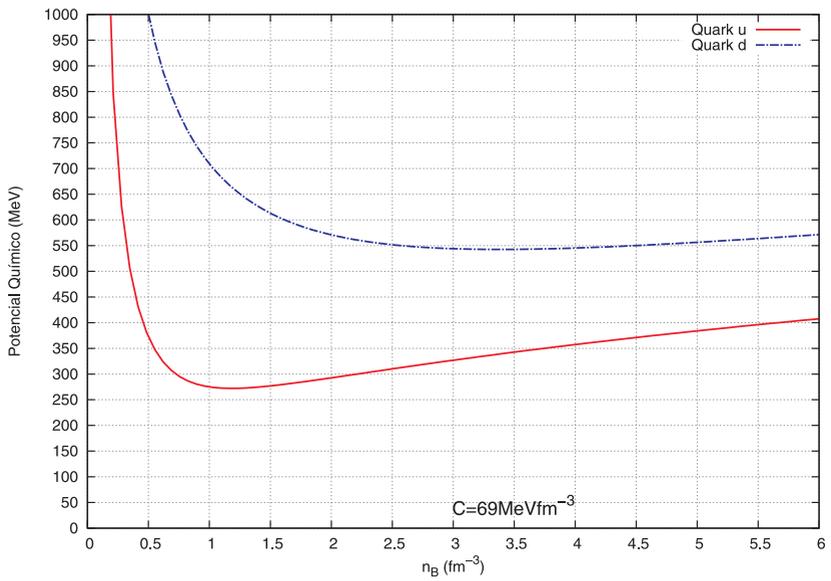


Figura 45: A figura mostra que para $C = 69 \text{ MeV fm}^{-3}$ no modelo QMDD as curvas estão de acordo com a equação (D.27).