

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Estratégias de Detecção de Objetos
Baseadas num Problema Inverso de
Espalhamento e Regularização

Viviam Giacomelli Pedroso

Orientador: Prof. Dr. Fermín S. V. Bazán

Florianópolis
Fevereiro de 2011

**Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica**

**Estratégias de Detecção de Objetos
Baseadas num Problema Inverso de
Espalhamento e Regularização**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Viviam Giacomelli Pedroso

**Florianópolis
Fevereiro de 2011**

Estratégias de Detecção de Objetos Baseadas num Problema Inverso de Espalhamento e Regularização

por

Viviam Giacomelli Pedroso

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Dr. Clóvis Caesar Gonzaga
Coordenador em Exercício da Pós-Graduação em
Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Fermín S. V. Bazán
(UFSC-Orientador)

Prof. Dr. João Frederico da Costa A. Meyer
(UNICAMP)

Prof. Dr. Luciano Bedin (UFSC)

Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing (UFSC)

Florianópolis, 18 de fevereiro de 2011.

Agradecimentos

Aos meus pais Roseli e Francisco, por seu apoio constante e infindável amor. Por tudo que aprendi convivendo com eles e por toda paciência que eles tem, pelas vezes em que eu precisava estudar e não podia dar toda atenção que eles merecem. Também a minha vó Alverina, que muito torceu e rezou pelo meu bom desempenho no mestrado e sempre me deu muito carinho.

Ao meu orientador, professor Fermín Bazán, pela sua exímia dedicação, paciência e constante incentivo. Agradeço por me apresentar de forma tão didática uma matemática tão encantadora e desafiadora como a matemática aplicada é.

Aos meus colegas da sala 106, pelos momentos de alegria, companheirismo, amizade e incontáveis horas de estudo divididas. Em especial, ao Mateus que esteve ao meu lado em grande parte desta jornada, me dando apoio e participando ativamente no meu crescimento acadêmico.

Aos professores membros da banca examinadora, por gentilmente terem aceitado o convite. Por terem lido o trabalho com tanto cuidado, contribuindo para o melhoramento do material.

Também agradeço todos os outros professores que me auxiliaram e de alguma forma atravessaram meu caminho, como professores e até mesmo amigos.

Ao meu gato Dengo, que inúmeras vezes me acompanhou acordado nas minhas noites/madrugadas de estudos alegrando o ambiente e tentando deitar sobre meus cadernos, quando eu já deveria ter ido dormir horas antes.

Aos amigos que assim posso chamar há 15 anos e que sempre entenderam meu afastamento, em diversos períodos, por causa de estudos. Obrigada pelas ondinhas puladas em conjunto no ano novo de cada ano que chega, pelos laços invisíveis que nos unem, pelas mais variadas conversas, pelas jogatinas, pelo jeito amável e único de me

tratar.

Aos amigos do vôlei ou, melhor dizendo, dos sábados de areia terapêutica. Agradeço até pelas malditas trilhas que já fiz com vocês, pois a companhia tornava até mesmo esses momentos especiais.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro no decorrer desses dois anos.

Resumo

O problema inverso de espalhamento aqui considerado é determinar o formato de um objeto *sound-soft* plano a partir do conhecimento da amplitude de espalhamento para uma quantidade finita de ondas incidentes. Inicialmente, abordamos alguns pontos da teoria de existência e unicidade de solução. Por ser um problema mal posto, aplicamos o método de Tikhonov para a regularização. Discorremos sobre os métodos da curva-L, do ponto fixo, o princípio da discrepância e o princípio da discrepância generalizado para a determinação do parâmetro de regularização. E, em seguida, para a detecção do objeto, apresentamos os métodos LSM, fatoração de Kirsch, MKM-FP, SVD-tail, ISVD-tail e critério do produto máximo. O objetivo é fazer comparativos de forma gráfica da qualidade de imagem obtida.

Abstract

The inverse scattering problem discussed here is a problem of determining the shape of a plan sound-soft object from the knowledge of the far-field pattern for a finite quantity of incident waves. Initially, we discuss some points from the theory of existence and uniqueness of solution. Because it is a ill-posed problem, we apply Tikhonov's method for regularization. Also, we present the L-curve method, fixed point method, Morozov's discrepancy principle and generalized discrepancy principle to determine the regularization parameter. And so, to detect the object, we present the methods: LSM, Kirsch factorization, MKM-FP, SVD-tail, ISVD-tail and maximum product criterion. The final goal is to compare graphically the quality of the image obtained.

Lista de Figuras

2.1	Gráfico de uma curva L	27
2.2	Iterações de ponto fixo.	29
3.1	Malha de pontos para o LSM	38
3.2	Comportamento da superfície $\psi_{\text{LSM}}(\lambda(z))$ como imagem	39
3.3	Coefficiente de Picard para ponto dentro do objeto	47
3.4	Coefficiente de Picard para ponto fora do objeto	47
3.5	Comparação dos parâmetros via MPC e PDG	54
4.1	Curva-L, curva ϕ e correspondentes parâmetros	57
4.2	Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 0.1%	58
4.3	Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 0.1%	59
4.4	Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 10%	60
4.5	Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 10%	60
4.6	Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 30%	61
4.7	Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 30%	61
4.8	Comparação entre métodos, matriz 128x128	62
4.9	Comparação entre métodos, matriz 128x128	62
4.10	Comparação entre métodos, matriz 32x32, ruído de 0.1%	63
4.11	Comparação entre métodos, matriz 32x32, ruído de 0.1%	63
4.12	PDG com $\ E\ $ exata, que vale 1%	64
4.13	PDG com 0.15 vezes $\ E\ $, que vale 1%	64
4.14	PDG com $\ E\ $ exata, que vale 25%	65
4.15	PDG com 0.00000015 vezes $\ E\ $ exata, que vale 25%	65

Lista de Tabelas

4.1	Custo computacional para o caso da matriz 64x64 . . .	58
4.2	Custo computacional para o caso com a matriz 128x128	63
4.3	Custo computacional para 2 objetos e matriz 32x32 . . .	64

Notações

Símbolo	Significado
$I_{n \times n}$	Matriz identidade de ordem n
$A_{m \times n}$	Matriz de ordem m por n
$A_{m \times n}^T$	Matriz transposta de A
$diag(\cdot)$	Matriz diagonal
$span(v_i)$	Espaço gerado pelos vetores v_i
g	Vetor solução numérica
g_{exata}	Vetor da solução exata
g^k	k -ésima solução iterada
λ	Parâmetro de regularização
$\ x\ _p$	Norma- p do vetor x
$cond(A)$	Número de condição da matriz A
σ_i	i -ésimo valor singular
A^\dagger	Pseudo-inversa de A
f^δ	Dado f com nível de ruído δ
g_α^δ	Solução numérica regularizada cujo parâmetro é α
$\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$	Espaços de Hilbert
$N(A)$	Espaço nulo da matriz A
$L^2[a, b]$	Espaço das funções quadrado integráveis em $[a, b]$
\mathbb{S}^{n-1}	Esfera em \mathbb{R}^n
$\frac{\partial^k}{\partial s^k}$	Derivada parcial de ordem k com relação à variável s
\mathcal{A}	Operador integral
SVD	Decomposição em Valores Singulares
TSVD	Decomposição em Valores Singulares Truncada
GSVD	Decomposição em Valores Singulares Generalizada
FP	Método do Ponto Fixo
PDG	Princípio da Discrepância Generalizada
LSM	Linear Sampling Method
$MKM - FP$	Método do Ponto Fixo com Fatoração de Kirsch
MPC	Crítério do Produto Máximo

Sumário

Introdução	1
1 Generalidades sobre o Problema de Espalhamento	5
1.1 Apresentação do Problema	5
1.2 Existência e Unicidade de Solução	8
2 Métodos de Regularização	15
2.1 Histórico sobre Problemas Inversos	15
2.2 Problemas Mal Postos	17
2.3 Conceitos de Regularização	18
2.4 Condição de Picard	20
2.5 Discretização do Problema Mal Posto	22
2.6 Método de Tikhonov	23
2.6.1 Condição discreta de Picard e Método de Tikhonov	25
2.7 Métodos para Determinar o Parâmetro de Regularização	26
2.7.1 Método da Curva-L	26
2.7.2 Método do Ponto Fixo	28
2.7.3 Princípio da Discrepância de Morozov	33
2.7.4 Princípio da Discrepância Generalizada	34
3 Métodos para a Detecção do Objeto	37
3.1 LSM	37
3.2 Método da Fatoração de Kirsch	40
3.2.1 Fatoração do Operador Far Field	41
3.3 MKM-FP	45
3.4 <i>SVD-tail</i>	46
3.5 <i>ISVD-tail</i>	48
3.6 Método do Critério do Produto Máximo	50

4	Resultados Numéricos	55
4.1	A construção da matriz referente ao operador <i>far field</i>	55
4.2	Comparação entre os métodos	56
	Considerações Finais	65
A	Resultados de Análise Funcional	69
A.1	Operadores Compactos	69
A.1.1	Operadores Auto-Adjuntos	70
B	Resultados de Álgebra Linear Computacional	73
B.1	Método <i>Regula Falsi</i>	73
B.2	Teoria da Perturbação de Valor Singular	74
B.3	Fatoração QR	76
B.4	Método da Potência	76
B.4.1	Método da Potência Inversa	78
B.4.2	Método da Iteração Simultânea	78
B.4.3	Método da Iteração Simultânea Inversa	80
	Referências Bibliográficas	80

Introdução

Resolver uma classe especial de problemas matemáticos, chamados problemas inversos, tornou-se um aspecto importante em muitas aplicações dos dias atuais. Podemos citar o uso de imagens de radar [36], identificação biométrica, aplicações industriais (testes não destrutivos, identificação de parâmetros em processos industriais), tomografias e aplicações às ciências médicas (detecção de tumores e fraturas) [13] e [44]; aplicações à geofísica (detecção de reservatórios de minerais, prospeção de hidrocarbonetos). São problemas que exigem soluções rápidas e precisas. Assim, queremos determinar soluções úteis através do espalhamento de ondas acústicas tempo-harmônicas com objetos impenetráveis.

A teoria de espalhamento é relacionada com os efeitos da interação entre ondas incidentes e um objeto D , interação essa que gera ondas espalhadas. Essa teoria nos traz dois tipos de problemas: diretos e inversos. No problema direto, temos informações disponíveis de um campo ¹ de ondas incidentes u^i e propriedades a respeito de um objeto D (por exemplo, condições de fronteira e propriedades físicas). Com essas informações, desejamos determinar o campo de ondas espalhadas u^s , ou seja, as ondas que interagem com o objeto e queremos saber como elas se comportam após a interação. Matematicamente, a onda espalhada u^s é solução de um problema de fronteira exterior que envolve a equação $\Delta u + k^2 u = 0$ conhecida como equação de Helmholtz.

Já no problema inverso, conhecidos o campo de ondas incidentes u^i e o campo de ondas espalhadas u^s , queremos determinar propriedades de um objeto desconhecido D . Para tal, usamos o método de amostragem linear [31] (*Linear Sampling Method*, LSM) baseado na solução numérica

¹Dada uma região X do espaço, podemos associar a cada ponto de X uma grandeza escalar (temperatura, pressão, densidade, distância, ...) ou uma grandeza vetorial (força, velocidade, aceleração, posição, deslocamento, ...). Dizemos, então, que está definido sobre X um campo escalar ou um campo vetorial, respectivamente.

de uma equação linear $\mathcal{A}g = f$, em que \mathcal{A} é um operador integral conhecido como operador far-field. No LSM original, a norma da solução g da chamada equação far field $Ag(x) = e^{-ikx \cdot z}$ tende ao infinito conforme os pontos de amostragem z distam do objeto. Assim, esse comportamento, que depende do ponto tomado, caracteriza o perfil do objeto.

Perceba que, embora o problema de identificação do perfil do objeto seja não linear, a abordagem descrita acima é linear. Caso tratássemos de técnicas não lineares, a abordagem mais apropriada seria através de técnicas de otimização baseadas no método de Newton, por exemplo [22]. A vantagem dos métodos não lineares é não necessitar de muitas informações, normalmente um campo incidente é suficiente para gerar a implementação [10]. A dificuldade neste caso é a convergência local dos métodos e a possibilidade de múltiplos extremos. O LSM não apresenta essas dificuldades, mas o problema linear é mal posto no sentido de Hadamard [20].

Vale lembrar que, em termos práticos, estamos sempre em dimensão finita, muito embora, a verdadeira solução pertença a um espaço de dimensão infinita. Assim, visto que o problema é mal posto, após a discretização lidamos com um problema discreto mal condicionado que deve ser resolvido usando alguma técnica de regularização [6]. Nesta busca, abordamos o método de Tikhonov em conjunção com os métodos de escolha do parâmetro de regularização da Curva-L [21], do Ponto Fixo [3], e o princípio da discrepância [7] e sua generalização [14].

Quanto à identificação do perfil do objeto, o LSM deu origem a muitos outros métodos que apresentam boa robustez, como, o método da fatoração de Kirsch [29], [27] e o MKM-FP [34], uma associação do método da fatoração de Kirsch com o método do ponto fixo, ambos métodos discutidos no trabalho. Também apresentamos o *SVD-tail* [16], técnica baseada no uso da SVD e no comportamento dos coeficientes de Fourier da matriz referente ao operador discretizado, e o *ISVD-tail* [16], que é similar ao *SVD-tail*, porém troca o uso da SVD pela iteração simultânea inversa [18]. Por fim, abordamos o critério do produto máximo [5], que faz determinações de parâmetros que falham com o uso do ponto fixo.

Como a identificação do objeto é através de técnicas do tipo LSM, a verificação do desempenho dos métodos é feita via testes numéricos. Assim, fazemos a comparação gráfica das técnicas por meio de um processo similar a curvas de níveis [14]. Uma outra maneira, que não a utilizada neste trabalho, é realizar uma análise de erro, através da obtenção de u^s numericamente, como se pode observar em [43].

Enfatizamos que o enfoque desta dissertação é apresentar os

métodos e os resultados numéricos obtidos na identificação de objetos via o problema inverso de espalhamento. Assim, muitos dos resultados relativos às equações dos problemas direto e inverso não são demonstrados, apenas citamos referências que ajudem o leitor a aprofundar esse estudo. O objetivo final deste material é analisar os métodos de modo a ver suas vantagens e desvantagens, buscando qualidade de imagem e um custo computacional favorável.

O conteúdo do trabalho está dividido em quatro capítulos. No capítulo 1, apresentamos o problema de espalhamento (direto e inverso) juntamente com as equações governantes. Para melhor entender o que nos leva a estudar métodos numéricos para resolução do problema inverso, apresentamos os resultados que tratam de existência e unicidade de solução. O capítulo 2 inicia-se com um breve histórico sobre o estudo de problemas inversos. Em seguida, discorremos sobre problemas mal postos e como contornar essa dificuldade através de métodos de regularização. Então, apresentamos o método de Tikhonov, o mais popular entre os métodos de regularização. Também, abordamos os métodos de determinação do parâmetro de regularização. No capítulo 3, buscamos o formato do objeto através dos métodos de detecção já citados anteriormente. Ao longo do capítulo 4, exemplos numéricos bidimensionais ilustram as técnicas apresentadas nos capítulos 2 e 3. Por fim, muitos dos resultados auxiliares não se encaixavam no escopo do trabalho e foram colocados nos apêndices *A* e *B*, que tratam de resultados de análise funcional e álgebra linear computacional, respectivamente. Os apêndices têm a função de ajudar o leitor com mais detalhes sobre temas abordados na dissertação.

Capítulo 1

Generalidades sobre o Problema de Espalhamento

Neste capítulo, apresentaremos a estrutura dos problemas direto e inverso de espalhamento, além de um apanhado de resultados que nos permite tratar de existência, unicidade, caracterização e comportamento assintótico de soluções. Iniciamos com uma breve descrição a respeito do problema direto e da equação que o rege, e também uma pequena descrição do problema inverso. Ao longo das subseções, citaremos mais detalhes sobre o tema e como o intuito do trabalho é analisar e comparar métodos numéricos para o problema inverso, muitas demonstrações dos resultados dessa seção serão omitidas. Para detalhes, recomendamos as literaturas [12] e [27].

1.1 Apresentação do Problema

A equação que possibilita a análise do problema de espalhamento, objeto de estudo neste trabalho, é a equação reduzida da onda, conhecida como equação de Helmholtz. No contexto do problema do espalhamento, consideramos ondas acústicas de pequena amplitude de propagação num meio homogêneo como um fluido. O movimento da onda é modelado por um sistema não linear que, quando linearizado, é

da forma [12]

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta p_1,$$

com c sendo a velocidade do som e $p_1(x, t)$ a pressão. Supondo que p_1 é periódico no tempo, isto é, se é da forma $p_1(x, t) = \text{Re}[u(x)e^{-i\omega t}]$ com frequência $\omega > 0$ e $u = u(x)$ uma função de valores complexos, podemos observar que u , que depende somente da variável x , satisfaz a equação de Helmholtz com número de onda $k = \frac{\omega}{c} > 0$, isto é, $u(x)$ satisfaz

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0. \tag{1.1}$$

Agora, vamos assumir que um subconjunto aberto e limitado $D \subset \mathbb{R}^3$ representa um objeto em \mathbb{R}^3 e considerar o espalhamento de ondas planas da forma

$$u^i(x; d) := e^{ikx \cdot d}$$

pelo objeto num meio homogêneo. Aqui, $x \cdot d$ denota o produto interno canônico em \mathbb{R}^3 e $|\cdot|$ denota a norma associada. Também, $d \in \mathbb{S}^2$ é a direção de propagação da onda e $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ é a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . É simples verificar que u^i é uma solução da equação de Helmholtz em todo \mathbb{R}^3 .

Quando a onda incidente u^i atinge o objeto, produz a onda espalhada u^s . Sobrepondo essas ondas geramos uma onda total $u = u^i + u^s$; o comportamento da onda total na fronteira ∂D do objeto basta para determinar a onda espalhada.

- A condição de fronteira de Dirichlet $u = 0$ em ∂D caracteriza obstáculos *sound-soft*. Isso corresponde ao fato da pressão da onda total ser nula na fronteira;
- A condição de fronteira de Neumann $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ em ∂D , em que ν é a normal unitária externa à ∂D , modela obstáculos *sound-hard*, ou seja, a velocidade normal da onda total se anula na fronteira;
- A condição de impedância ou condição generalizada de Neumann: $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda u = 0$ em ∂D .

Outro fator relevante nesse estudo, é o fato de haver uma condição que faz com que o campo espalhado u^s se comporte como uma onda esférica

quando distante do objeto. Essa condição é chamada de condição de radiação de Sommerfeld e é dada por

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \quad (1.2)$$

em que $r = |x|$ e o limite deve ser válido uniformemente em todas as direções $\hat{x} := x/|x| \in \mathbb{S}^2$. Nosso intuito é estudar soluções que tenham a característica de ser radiating¹.

Neste trabalho, abordaremos apenas o caso com condição de fronteira de Dirichlet. Assim, para uma frequência fixa com número de onda k , o problema direto em \mathbb{R}^2 consiste em encontrar uma função u^s satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \\ u^s(x) + u^i(x) = 0, & x \in \partial D, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, o limite acima é considerado em todas as direções $\hat{x} = x/|x|$, e u^i é um campo conhecido de ondas incidentes. Note que nessa formulação, a onda espalhada u^s é solução de um problema exterior de fronteira, visto que $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$.

Já o problema inverso, que procura descrever o perfil da fronteira do objeto, envolve a solução numérica de uma equação linear $\mathcal{A}g = f$, onde

$$(\mathcal{A}g_z)(\hat{x}) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{x} \cdot z}, \quad (1.4)$$

em que o lado direito é a amplitude de espalhamento da solução fundamental da equação de Helmholtz, $z \in \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{A} : L^2(\mathbb{S}) \rightarrow L^2(\mathbb{S})$ é dada por

$$(\mathcal{A}g_z)(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}} u_\infty(\hat{x}, d) g_z(d) ds(d), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}, \quad (1.5)$$

\mathcal{A} é um operador integral conhecido como operador far-field, \mathbb{S} é a bola unitária em \mathbb{R}^2 , d é a direção de propagação, e u_∞ denota amplitude de espalhamento.

Na prática, apenas aproximações do núcleo do operador são disponíveis e a equação integral deve ser resolvida considerando-se um operador perturbado $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + E$. Além disso, para efeito de simulações, o problema inverso depende de u_∞ que é gerado pelo problema direto. Outra dificuldade associada ao problema inverso é que o problema (1.4) pode não possuir solução.

¹Uma solução para a equação de Helmholtz cujo domínio de definição contém o exterior de alguma esfera é denominada radiating se satisfaz a condição de radiação de *Sommerfeld* uniformemente em todas as direções

1.2 Existência e Unicidade de Solução

Ao tratarmos do problema de espalhamento (1.3) é de fundamental importância abordarmos as questões de existência e unicidade dos problemas direto e inverso, até mesmo para melhor entendermos a dificuldade da descrição numérica de soluções. Assim, apresentaremos alguns dos resultados fundamentais na abordagem do problema direto. Como já foi citado, muitas demonstrações serão omitidas, visto que o foco principal do trabalho é o estudo de métodos numéricos para a resolução do problema inverso.

O seguinte resultado, consequência do teorema da divergência de Green [42], é essencial na representação das soluções da equação de Helmholtz.

Teorema 1.1. *Seja D um domínio simplesmente conexo em \mathbb{R}^n para $n = 2, 3$ com fronteira $\partial D \in C^2$ e normal unitária exterior ν . Se $u, v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, temos a primeira identidade de Green*

$$\int_D \{u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v\} dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds \quad (1.6)$$

e a segunda identidade de Green

$$\int_D \{u\Delta v - v\Delta u\} dx = \int_{\partial D} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} ds. \quad (1.7)$$

Agora, vamos caracterizar soluções radiating da equação de Helmholtz em $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ usando a solução fundamental do operador $-\Delta - k^2$ definida por

$$\Phi(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad x \neq y. \quad (1.8)$$

Teorema 1.2. *Suponha que o conjunto limitado D seja o complemento aberto de um domínio ilimitado de classe C^2 com normal unitária externa ν à fronteira ∂D . Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ uma solução radiating para a equação de Helmholtz em $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ que possui uma derivada normal na fronteira no sentido do limite*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \cdot \nabla u(x + h\nu(x)), \quad x \in \partial D,$$

existe uniformemente na fronteira. Então,

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}. \quad (1.9)$$

Por fim, outro fator importante no estudo de um problema de espalhamento é o comportamento da onda espalhada u^s para x longe da fronteira de D . O teorema a seguir fundamenta esse comportamento.

Teorema 1.3. *Cada solução radiating u da equação de Helmholtz tem o comportamento assintótico de uma onda esférica outgoing*

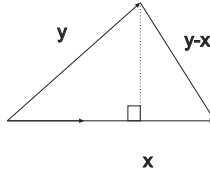
$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} \quad (1.10)$$

uniformemente em todas direções $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ conforme $|x| \rightarrow \infty$. A função u_∞ definida na esfera unitária \mathbb{S}^2 é chamada de amplitude de espalhamento de u .

Demonstração: Primeiramente, vamos provar que a identidade

$$|x - y| = |x| - \hat{x} \cdot y + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

é válida uniformemente para $y \in \partial D$. De fato, note que



$$|x - y| = (|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2)^{1/2}. \quad (1.12)$$

Agora considere a série de Taylor de $f(t) = (1+t)^\alpha$ em torno da origem:

$$f(t) = 1 + \alpha t + \frac{1}{2!} \alpha(\alpha - 1)t^2 + \dots, \quad |t| < 1.$$

Então, com $t = -2\frac{x \cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2}$ e $\alpha = 1/2$ em (1.12) obtemos

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x| \left(1 - 2\frac{x \cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)^{1/2} \\ &= |x| \left(1 - \frac{x \cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{2|x|^2} - \frac{1}{8} \left(-2\frac{x \cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

O resultado acima pode ser escrito como:

$$1) |x - y| = |x| - \widehat{x} \cdot y + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad 2) |x - y| = |x| \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)\right), \quad (1.14)$$

as quais são válidas quando y é fixo e x suficientemente afastado de ∂D (i.e., para $|x|$ grande). Então

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}e^{-ik\widehat{x}\cdot y}}{|x|} \frac{e^{\mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)}}{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)}$$

ou

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ e^{-ik\widehat{x}\cdot y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}. \quad (1.15)$$

Tomando a derivada normal em relação a y , chegamos a

$$\frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \frac{\partial e^{-ik\widehat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}.$$

A partir dessas duas últimas expressões e do Teorema 1.4, da representação (1.9) obtemos

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\widehat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - e^{-ik\widehat{x}\cdot y} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\} ds(y),$$

que é da forma (1.10). Da mesma equação (1.10), para a amplitude de espalhamento, obtemos:

$$u_\infty(\widehat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\widehat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - e^{-ik\widehat{x}\cdot y} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right\} ds(y), \quad \widehat{x} \in \mathbb{S}^2. \quad (1.16)$$

■

Após abordarmos a representação de soluções e seu comportamento assintótico, apresentaremos muito brevemente alguns resultados a respeito de questões como a existência e a unicidade de solução no problema direto. De fato, se considerarmos o problema de valor de fronteira mais geral, conhecido como problema exterior de Dirichlet:

Dados um domínio limitado $D \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira C^2 e $f \in C(\partial D)$, determinar uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & x \in \mathbb{R}^3 \setminus D, \\ u = f, x \in \partial D, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

prova-se que esse problema exterior tem no máximo uma solução. Detalhes constam em [12, Teorema 5.2]. Dessa forma, temos a garantia de que, se existir solução para o problema direto, essa será única. Resta saber se a existência dessa solução também é garantida pela teoria.

Na investigação da existência de solução do problema exterior de Dirichlet, considera-se o conceito de potenciais de fronteira.

Definição 1.4. *Dada uma função ϕ integrável, as integrais*

$$v(x) := \int_{\partial D} \phi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

$$w(x) := \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

são chamadas, respectivamente, de single e double layer potentials com densidade ϕ .

Ambos potenciais satisfazem a equação de Helmholtz em D e em $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Eles também satisfazem a condição de radiação de Sommerfeld, já que a solução fundamental também a satisfaz. Para estabelecer a existência, precisamos saber como os potenciais se comportam quando passam pela fronteira. Informalmente, o *single layer potential* se mantém contínuo enquanto o *double layer potential* tem saltos na fronteira. As derivadas normais correspondentes se comportam de maneira oposta [12].

Na busca por uma solução para o problema exterior de fronteira, é útil usarmos uma combinação de single e double layer potentials como

$$u(x) = \int_{\partial D} \phi(y) \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - i\eta \Phi(x, y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

em que ϕ é contínuo e η é um parâmetro real não nulo. Para mostrarmos que essa escolha é útil, definamos os seguintes operadores integrais de fronteira

$$S\phi(x) := 2 \int_{\partial D} \phi(y) \Phi(x, y) ds(y),$$

$$K\phi(x) := 2 \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y),$$

para $x \in \partial D$. Então prova-se que u resolve o problema exterior de Dirichlet quando a densidade ϕ é uma solução da equação integral [27]

$$\phi + K\phi - i\eta S\phi = 2f. \quad (1.18)$$

Para garantirmos a existência, nos baseamos no fato dos operadores $S, K : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ serem compactos. Assim, a existência de uma solução para (1.18) pode ser estabelecida pela teoria de Riesz-Fredholm para equações da segunda espécie com um operador compacto [33]. A teoria de Riesz-Fredholm reduz o problema a estabelecer a existência e a unicidade de uma solução ϕ para (1.18) e sua dependência contínua do lado direito f ao problema muito mais simples de mostrar que a equação homogênea

$$\phi + K\phi - i\eta S\phi = 0 \tag{1.19}$$

tem, apenas, a solução trivial $\phi = 0$. Por meio dessa análise, podemos concluir também que o problema exterior de Dirichlet é bem-posto. A demonstração desse fato encontra-se em [12].

Teorema 1.5. *O problema exterior de Dirichlet tem solução única e a solução depende continuamente dos dados da fronteira com respeito a convergência uniforme da solução em $\mathbb{R}^3 \setminus D$ e todas suas derivadas em subconjuntos fechados em $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.*

Quanto ao problema inverso, existem muitos tipos possíveis, por exemplo, se as condições de fronteira são conhecidas, determinar o formato do objeto ou se o formato é conhecido, determinar as condições de fronteira. O problema que consideraremos é: dada amplitude de espalhamento para uma ou várias ondas planas incidentes e sabendo que o objeto é *sound-soft*, determinar o formato do mesmo.

Além disso, é possível mostrar sob quais condições um obstáculo é unicamente determinado pelo conhecimento da amplitude de espalhamento para ondas planas incidentes. A prova dá-se com o uso de funções esféricas de Bessel e mostra que dados dois objetos contidos numa bola com um raio fixo, existe um valor a partir do qual se as amplitudes de espalhamento coincidirem para esse número de ondas incidentes, então os objetos são iguais. [12].

Garantida a unicidade, resta tratarmos da existência de solução para o problema inverso, e esta deve ser abordada de forma diferente. Isso ocorre devido à observação de que o problema inverso é mal posto (veja Seção 2.2), ou seja, em qualquer situação prática, as informações são inexatas e uma solução para o problema pode não existir. Assim, o questionamento apropriado quanto à existência é como o problema inverso pode ser estabilizado e como determinar soluções aproximadas para o mesmo [12].

Todos os resultados teóricos citados até o momento permanecem válidos em \mathbb{R}^2 com pequenas modificações [12]. Assim:

A solução fundamental para a equação de Helmholtz é dada por

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|), \quad x \neq y,$$

em que $H_0^{(1)}$ é a função de Hankel de ordem zero e de primeira espécie. Já a condição de radiação de Sommerfeld é dada da forma

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0,$$

em que $r = |x|$ e supoe-se que o limite seja válido uniformemente em todas direções $\hat{x} := \frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^1$. Então o comportamento assintótico do campo espalhado do Teorema 1.5, torna-se

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

com

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial \nu(y)} - e^{-ik\hat{x} \cdot y} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right\} ds(y), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^1.$$

Capítulo 2

Métodos de Regularização

No capítulo 1, descrevemos a estrutura do problema específico que abordaremos neste trabalho. Agora, veremos um breve histórico sobre problemas inversos trazendo um pouco da relevância de seu estudo em vários âmbitos, a descrição breve de problemas mal postos e a apresentação das técnicas utilizadas para contornar esse fator.

2.1 Histórico sobre Problemas Inversos

O estudo de problemas inversos é muito novo e também muito velho. Há cerca de dois milênios, no livro VII do diálogo “República”, Platão¹ propôs o filosófico problema de reconstruir a “realidade” através da observação da imagem de objetos ou pessoas, cujas sombras eram projetadas na penumbra de uma caverna. Com a ideia de discutir aspectos filosóficos das fontes de conhecimento humano, Platão, também acabou introduzindo o primeiro exemplo de problemas inversos de que se tem relatos [38].

Nas ciências aplicadas, possivelmente, um dos primeiros problemas inversos data de 200 anos antes de Cristo. Eratóstenes² propôs o problema de determinar o diâmetro da terra através de medições

¹Platão foi um filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, autor de diversos diálogos filosóficos e fundador da Academia em Atenas, a primeira instituição de educação superior do mundo ocidental. Juntamente com seu mentor, Sócrates, e seu pupilo, Aristóteles, Platão ajudou a construir os alicerces da filosofia natural, da ciência e da filosofia ocidental.

²Eratóstenes (285 - 194 a.C.) foi matemático, bibliotecário e astrônomo grego. Os contemporâneos chamavam-no de “beta” porque o consideravam o segundo melhor do mundo em vários aspectos.

feitas em duas cidades distintas. Eram conhecidas a distância entre as cidades, as suas latitudes e dado o ângulo que a sombra de um marco vertical (em cada uma destas cidades) fazia com a direção do sol [19].

Em 1800, Gauss³ fez uso do método de mínimos quadrados para reconstruir a órbita de um cometa a partir de dados de órbitas anteriores. Este também é um exemplo de problema inverso.

A transformada, que hoje em dia chamamos de Transformada de Radon, é uma das precursoras do estudo de Tomografia computadorizada [15]. A solução do problema inverso associado à Transformada de Radon foi publicada por Radon em 1917. A solução deste problema inverso permite determinar o coeficiente de absorção μ de cada parte do objeto escaneado.

Nas últimas quatro décadas um novo campo de estudos na área de matemática aplicada tem conquistado uma grande quantidade de pesquisadores adeptos. Este campo trata de problemas como os formulados por Platão, Eratóstenes entre outros, cuja abordagem exige o desenvolvimento de métodos matemáticos como os apresentados por Gauss e Radon. A essa área de estudos denominamos Problemas Inversos.

A área de Problemas Inversos se desenvolveu rapidamente nos últimos anos. O súbito crescimento deve-se, certamente, ao grande número de aplicações em outras ciências e ao desenvolvimento de novas técnicas e teorias matemáticas envolvidas na resolução de tais problemas. Por exemplo, em geofísica e ciências ambientais, ciências médicas e tomografias (com ênfase na reconstrução de imagens, ultrasonografia), em engenharia (detecção de fraturas em estruturas, testes não-destrutivos em componentes de semi-condutores e nanotecnologia), física, química, biologia, finanças, entre outras [7].

Para J.B. Keller [24], dois problemas são o inverso um do outro, se a formulação de um envolve o conhecimento (mesmo que parcial) do outro, este último, conhecido como "Problema Direto". Assim, a grosso modo, problemas inversos estão relacionados com a determinação de causas, através da observação (ou medida) de efeitos.

Do ponto de vista de aplicações, existem pelo menos duas motivações distintas para estudar "Problemas Inversos". A primeira é movida pela curiosidade humana de conhecer estados físicos passados ou parâmetros em um sistema físico que descreve certos modelos. Como exemplos temos os estudos de mudanças climáticas drásticas ocorridas

³ Gauss foi um matemático, astrônomo e físico alemão. Conhecido como o príncipe dos matemáticos, muitos o consideram o maior gênio da história da matemática.

milhões de anos atrás, através de medidas observáveis hoje nas camadas glaciais das calotas polares. A segunda é prever os fenômenos futuros influenciados pelos estados atuais ou por parâmetros de um sistema físico. Ambas motivações são modeladas por equações matemáticas.

2.2 Problemas Mal Postos

Uma questão de crucial importância e que torna a resolução de muitos problemas inversos mais trabalhosa é a propriedade do problema ser mal posto. Quanto a esse conceito, em 1902, o matemático Hadamard apontou que um modelo matemático para problemas físicos é propriamente posto ou bem posto se tem as três seguintes propriedades:

- Existe uma solução para o problema (**existência**);
- Existe, no máximo, uma solução para o problema (**unicidade**);
- A solução depende continuamente dos dados (**estabilidade**).

Matematicamente, a existência de uma solução pode ser forçada ampliando o espaço solução. Se um problema tem mais de uma solução, então há informações faltantes sobre o modelo. Nesse caso, propriedades adicionais podem ser incluídas. O quesito da estabilidade é o mais importante. Se a solução do problema não depende continuamente dos dados, então, em geral, a solução calculada não tem relação com a solução exata.

Matematicamente, formulamos a noção de bem posto da seguinte maneira:

Definição 2.1. *Sejam X, Y espaços normados, $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ uma aplicação (linear ou não linear). A equação $\mathcal{A}x = y$ é chamada propriamente posta ou bem posta se as seguintes afirmações são válidas:*

- *Existência:* Para todo $y \in Y$ há (pelo menos um) $x \in X$ tal que $\mathcal{A}x = y$.
- *Unicidade:* Para todo $y \in Y$ há, no máximo, um $x \in X$ com $\mathcal{A}x = y$.
- *Estabilidade:* A solução x depende continuamente de y , isto é, para toda sequência $(x_n) \subset X$ com $\mathcal{A}x_n \rightarrow \mathcal{A}x$ ($n \rightarrow \infty$), segue que $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$).

Equações para as quais (pelo menos) uma das propriedades acima não é válida são chamadas de impropriamente postas ou mal postas.

O problema inverso de espalhamento aqui abordado é um problema mal-posto. Isso ocorre pois o operador *far-field* é compacto e o domínio tem dimensão infinita (estamos em $L^2(\mathbb{S}^2)$). O teorema abaixo caracteriza tal fato.

Teorema 2.2. *Sejam X, Y espaços normados e seja $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ um operador compacto. Então $\mathcal{A}g = f$ é mal posto se X tem dimensão infinita.*

Demonstração: Suponha que \mathcal{A}^{-1} exista e seja contínua. Então, conforme visto no apêndice A, $I = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} : X \rightarrow X$ é compacta e, consequentemente, X tem dimensão finita. Contradição. ■

De acordo com a definição formulada por Hadamard, podemos distinguir três tipos de problemas mal-postos. Se \mathcal{A} não é sobrejetivo, então a equação $\mathcal{A}g = f$ não tem solução para todo $f \in Y$. Se \mathcal{A} não é injetivo, então a equação pode ter mais de uma solução. Se \mathcal{A}^{-1} existe, mas não é contínuo, então a solução g não depende continuamente de f . O último caso de instabilidade citado é um dos principais interesses no estudo de problemas mal postos. Observe-se que essas três propriedades, em geral, não são independentes. Por exemplo, se $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ é um operador linear limitado mapeando um espaço Banach X bijetivamente num espaço de Banach Y , então, pelo teorema do mapeamento inverso, o operador inverso $\mathcal{A}^{-1} : Y \rightarrow X$ é limitado e, consequentemente, contínuo [26].

Ainda, se uma equação é mal posta, poderíamos reestabelecer a estabilidade mudando os espaços X, Y e suas normas. Mas, em geral, isso é inadequado visto que os espaços X e Y , incluindo suas normas, são determinados por necessidades práticas.

Logo, quando temos um problema mal posto, é necessário incorporar informações sobre a solução desejada para estabilizar o problema e determinar uma solução útil e estável. Para contornar essas dificuldades, usamos métodos de regularização.

2.3 Conceitos de Regularização

Métodos de regularização são técnicas para a construção de soluções aproximadas estáveis para um problema mal posto. Quando o operador \mathcal{A} é compacto, como é o caso do operador $\mathcal{A} : X \rightarrow \mathcal{A}$ do problema inverso apresentado no capítulo anterior, se a inversa existir,

teremos que \mathcal{A}^{-1} é não limitada e tal fato acarreta $\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{A} \rightarrow X$ não ser contínua, ou seja, pequenas perturbações nos dados podem causar grandes mudanças na solução. A ideia por trás dos métodos de regularização é justamente gerar “aproximações contínuas” para a inversa descontínua. Assim, o problema original, que é mal posto, é analisado através de um problema associado bem posto, facilitando o estudo.

A partir dessa seção, analisaremos algumas dessas técnicas. Começaremos pelos conceitos básicos sobre a regularização do problema proposto.

Definição 2.3. *Sejam X e Y espaços normados e seja $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ um operador linear limitado injetivo. Então uma família de operadores lineares limitados $\mathcal{A}_\lambda : Y \rightarrow X$, $\lambda > 0$, tal que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}g = g \forall g \in X$ é denominada esquema de regularização para \mathcal{A} . O parâmetro λ é chamado de parâmetro de regularização.*

Claramente, é possível observar que $\mathcal{A}_\lambda f \rightarrow \mathcal{A}^{-1}f$ conforme $\lambda \rightarrow 0$, $\forall f \in \mathcal{A}(X)$. O teorema a seguir mostra que para operadores compactos esta convergência não é uniforme.

Teorema 2.4. *Sejam X e Y espaços normados, $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ um operador compacto injetivo e suponha que X tenha dimensão infinita. Então os operadores \mathcal{A}_λ não podem ser uniformemente limitados em relação a λ conforme $\lambda \rightarrow 0$ e $\mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}$ não tem convergência uniforme de operador quando $\alpha \rightarrow 0$.*

Demonstração: Suponha que $\|\mathcal{A}_\lambda\| \leq C$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Então, já que $\mathcal{A}_\lambda f \rightarrow \mathcal{A}^{-1}f$ quando $\lambda \rightarrow 0 \forall f \in \mathcal{A}(X)$, temos que $\|\mathcal{A}^{-1}f\| \leq C\|f\|$ e então \mathcal{A}^{-1} é limitado em $\mathcal{A}(X)$. Mas isso implica em $I = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ ser compacto em X , o que contradiz o fato de X ter dimensão infinita.

Agora, suponha que $\mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}$ converge para I em norma quando $\lambda \rightarrow 0$, isto é, $\|\mathcal{A}_\lambda \mathcal{A} - I\| \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$. Então existe $\lambda > 0$ tal que $\|\mathcal{A}_\lambda \mathcal{A} - I\| < \frac{1}{2}$ e, assim, $\forall f \in \mathcal{A}(X)$, temos

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{A}^{-1}f\| &= \|\mathcal{A}^{-1}f - \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A} \mathcal{A}^{-1}f + \mathcal{A}_\lambda f\| \\
 &\leq \|\mathcal{A}^{-1}f - \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A} \mathcal{A}^{-1}f\| + \|\mathcal{A}_\lambda f\| \\
 &\leq \|I - \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}\| \|\mathcal{A}^{-1}f\| + \|\mathcal{A}_\lambda\| \|f\| \\
 &\leq \frac{1}{2} \|\mathcal{A}^{-1}f\| + \|\mathcal{A}_\lambda\| \|f\|.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dessa forma, $\|\mathcal{A}^{-1}f\| \leq 2\|\mathcal{A}_\lambda\| \|f\|$, isto é, $\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{A}(X) \rightarrow X$ é limitado. Contradição. ■

2.4 Condição de Picard

Nesta seção, apresentaremos a condição de Picard, que fornece, para operadores compactos, uma condição necessária e suficiente para a existência de solução. Começamos introduzindo o conceito de sistemas singulares [26], conceito fundamental para a condição de Picard.

Teorema 2.5. *Para um operador linear limitado $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$, valem $\mathcal{A}(X)^\perp = N(\mathcal{A}^*)$ e $N(\mathcal{A}^*)^\perp = \overline{\mathcal{A}(X)}$, sendo X e Y espaços de Hilbert.*

Demonstração: $g \in \mathcal{A}(X)^\perp$ significa que $(\mathcal{A}\varphi, g) = 0 \ \forall \varphi \in X$. Equivalentemente, $(\varphi, \mathcal{A}^*g) = 0 \ \forall \varphi \in X$, que também equivale a $\mathcal{A}^*g = 0$, ou seja, $g \in N(\mathcal{A}^*)$. Então $\mathcal{A}(X)^\perp = N(\mathcal{A}^*)$. Abreviamos $U = \mathcal{A}(X)$ e, trivialmente, temos $\overline{U} \subset (U^\perp)^\perp$. Denote por $P : X \rightarrow \overline{U}$ a projeção ortogonal. Para $\varphi \in (U^\perp)^\perp$ arbitrário, vale a ortogonalidade $P\varphi - \varphi \perp U$. Mas também temos que $P\varphi - \varphi \perp U^\perp$, já que é conhecido que $\overline{U} \subset (U^\perp)^\perp$. Dessa forma, segue que $\varphi = P\varphi \in \overline{U}$, de onde $\overline{U} = (U^\perp)^\perp$, isto é, $\overline{\mathcal{A}(X)} = N(\mathcal{A}^*)^\perp$. ■

Teorema 2.6. *Seja $A : X \rightarrow Y$ um operador linear compacto, $A^* : Y \rightarrow X$ seu operador adjunto e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots > 0$ a sequência ordenada de valores singulares positivos de A com X, Y espaços de Hilbert. Então existem sistemas ortonormais $(x_j) \subset X$ e $(y_j) \subset Y$ com as seguintes propriedades:*

$$Ax_j = \sigma_j y_j \quad e \quad A^* y_j = \sigma_j x_j \quad \forall j \in J.$$

O sistema (σ_j, x_j, y_j) é chamado um sistema singular para A . Todo $x \in X$ possui a decomposição em valor singular

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} (x, x_j) x_j$$

para algum $x_0 \in N(A)$ e

$$Ax = \sum_{j \in J} \sigma_j (x, x_j) y_j.$$

Teorema 2.7. (Picard) *Seja $\mathcal{A} \in K(X, Y)$, sejam X, Y espaços de Hilbert (σ_j, v_j, u_j) um sistema singular de \mathcal{A} de modo que $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ seja linear. Dado $y \in Y$, as seguintes condições são equivalentes:*

a) $f \in \text{Im}(\mathcal{A})$;

b) $f \in \overline{Im(\mathcal{A})}$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\langle f, u_j \rangle}{\sigma_j} \right)^2 < \infty. \quad (2.2)$$

Demonstração: Daremos uma ideia da prova.

a) \Rightarrow b) De $f \in Im(\mathcal{A}) \subset \overline{Im(\mathcal{A})}$. Seja $g \in X$ tal que $\mathcal{A}g = f$. Segue do teorema anterior que $\mathcal{A}^*u_j = \sigma_j v_j$. Assim, usando a desigualdade de Bessel,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|\langle f, u_j \rangle|}{\sigma_j} \right)^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|\langle \mathcal{A}g, u_j \rangle|}{\sigma_j} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|\langle g, \mathcal{A}^*u_j \rangle|}{\sigma_j} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |\langle g, v_j \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|g\|^2 \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (2.3)$$

b) \Rightarrow a) Defina $g_n := \sum_{j=1}^n \frac{\langle f, u_j \rangle v_j}{\sigma_j}$. Portanto, para $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, temos:

$$\|g_n - g_m\|^2 = \sum_{j=n+1}^m \left(\frac{|\langle f, u_j \rangle|}{\sigma_j} \right)^2$$

e, portanto, $\{g_n\}$ é uma sequência de Cauchy, cujo limite denotaremos por $g := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$. Pela continuidade de \mathcal{A} e definição de g_n , segue que $\mathcal{A}g = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, u_j \rangle u_j$ e $\|\mathcal{A}g\| \leq \|f\|$.

Defina $z := f - \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, u_j \rangle u_j$. Segue que $\|z\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, u_j \rangle|^2$; $\langle z, u_j \rangle = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{A}^*z = 0$. Portanto, como $f \in \overline{Im(\mathcal{A})} = N(\mathcal{A}^*)^\perp$, temos

$$0 = \langle z, f \rangle = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, u_j \rangle|^2 = \|z\|^2.$$

Logo, $f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, u_j \rangle u_j = \mathcal{A}g$. ■

Note que o teorema força a função f a ter uma certa regularidade para que o problema tenha solução. Em particular, exige que a sequência de coeficientes de Fourier $|\langle f, u_j \rangle|$ decresca suficientemente rápido para conter o crescimento de $\frac{1}{\sigma_i}$, que cresce sem controle devido ao comportamento dos valores singulares.

2.5 Discretização do Problema Mal Posto

Quando tratamos o problema de resolver uma equação integral de primeira espécie

$$\int_a^b K(s, t)g(t)dt = f(s) \quad (c \leq s \leq d), \quad (2.4)$$

é preciso utilizar algum método de discretização. Por exemplo, através de alguma regra de quadratura⁴, temos

$$\int_a^b K(s, t)g(t)dt = \sum_{j=1}^n w_j K(s, t_j) \tilde{g}(t_j) = f(s) \quad (2.5)$$

em que t_1, \dots, t_n são as abscissas da regra de quadratura escolhida, e w_j os pesos correspondentes. Note que $g(t_j)$ é substituído por $\tilde{g}(t_j)$, pois, em geral, a regra de quadratura não calcula a integral exatamente. Agora, usando o método de colocação, obtemos

$$\sum_{j=1}^n w_j K(s_i, t_j) \tilde{g}(t_j) = f(s_i), \quad i = 1, \dots, m$$

e as relações acima resultam num sistema de equações lineares da forma

$$\begin{pmatrix} w_1 K(s_1, t_1) & w_2 K(s_1, t_2) & \cdots & w_n K(s_1, t_n) \\ w_1 K(s_2, t_1) & w_2 K(s_2, t_2) & \cdots & w_n K(s_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 K(s_m, t_1) & w_2 K(s_m, t_2) & \cdots & w_n K(s_m, t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g}(t_1) \\ \tilde{g}(t_2) \\ \vdots \\ \tilde{g}(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(s_1) \\ f(s_2) \\ \vdots \\ f(s_m) \end{pmatrix}$$

que matricialmente pode ser escrito como $Ax = b$, em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $a_{ij} = w_j K(s_i, t_j)$, $x \in \mathbb{R}^n$ com $x_j = \tilde{g}(t_j)$ e $b \in \mathbb{R}^m$ com $b_i = f(s_i)$.

Os valores de $g(t_j)$ são estimados resolvendo

$$x = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2. \quad (2.6)$$

⁴Em geral, uma fórmula de quadratura é um método numérico para aproximação de uma integral da forma $Q(g) := \int_G w(x)g(x)dx$ em que w é alguma função peso.

Vale lembrar que, como a matriz provém da discretização de um problema mal posto, (2.6) é muito sensível a variações em b , tornando a solução ruim. Para entender a sensibilidade do problema usamos a decomposição em valores singulares (SVD).

Teorema 2.8. *A SVD de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m \geq n$ é uma fatoração da forma*

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T,$$

tal que $U = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes com colunas ortonormais, $U^T U = V^T V = I_n$. Ainda, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definidas por $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ com elementos da diagonal não negativos aparecendo em ordem não crescente tal que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ são os valores singulares de A . Os vetores u_i e v_i são os vetores singulares à esquerda e à direita de A , respectivamente.

Definição 2.9. *Designa-se por número de condição de uma matriz A relativamente à norma $\|\cdot\|$, o valor $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.*

Assim, sendo $b = b^{\text{exato}} + e$, com b^{exato} desconhecido e e representando uma perturbação, a solução de (2.6) é dada por $g_{LS} = A^\dagger b$ em que A^\dagger é a pseudoinversa da matriz A . Então temos que

$$\begin{aligned} g_{LS} &= \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b^{\text{exato}}}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T e}{\sigma_i} v_i. \end{aligned}$$

Daí, segue que para valores singulares pequenos, os coeficientes $\frac{u_i^T e}{\sigma_i}$ são grandes, tornando a segunda parcela dominante e inutilizando a solução. Esse tipo de problema é denominado problema discreto mal posto.

Para lidar com esse tipo de situação na presença de perturbação em b , surgiram diversos métodos de regularização.

2.6 Método de Tikhonov

O matemático russo Andrei Nikolaevich Tikhonov trabalhou no consagrado Instituto de Matemática Steklov da Academia Russa de

Ciências, onde passaram outros ilustres matemáticos, como A. N. Krylov, S. L. Sobolev e A. A. Markov. Em 1963, ele introduziu a regularização de Tikhonov que talvez seja o método mais popular existente.

Tikhonov estudou o problema $\mathcal{A}g = f$, sendo f, g funções e \mathcal{A} um operador integral. A idéia do método é substituir o problema

$$g = \operatorname{argmin}_{g \in \mathcal{H}} \|f - \mathcal{A}g\|_2^2$$

por

$$g_\lambda = \operatorname{argmin}_{g \in \mathcal{H}} \{ \|f - \mathcal{A}g\|_2^2 + \lambda^2 \Omega(g) \} \quad (2.7)$$

em que

$$\Omega(g) = \int_a^b [v(s)g(s)^2 + w(s)g'(s)^2] ds$$

com v e w funções positivas chamadas de funções peso e \mathcal{H} um espaço de funções apropriado (um espaço de Sobolev). Essa formulação apresenta elementos de extrema importância: uma constante positiva λ denominada parâmetro de regularização e $\Omega(g)$, um funcional contínuo chamado de funcional estabilizador (satisfazendo condições apropriadas).

A escolha do parâmetro λ deve ser feita de modo que:

- i) se f é livre de ruídos, então $g_\lambda \rightarrow g_{exato}$ quando $\lambda \rightarrow 0$;
- ii) se f é contaminado por ruídos: $f = f_{exato} + e$, então $\lambda = \lambda(e)$ (λ deve ser escolhido como função de $\|e\|$) tal que se $\|e\| \rightarrow 0$, então $\lambda(e) \rightarrow 0$ e $g_{\lambda(e)} \rightarrow g_{exato}$.

Quando o problema (1.5) é discretizado, as aproximações para g são obtidas por

$$g_\lambda = \operatorname{argmin} \{ \| \mathcal{A}g - f \|_2^2 + \lambda^2 \| Lg \|_2^2 \}, \quad (2.8)$$

em que L é uma matriz escolhida para incorporar propriedades desejáveis na solução. Geralmente, $L = I$ (matriz identidade), como é o caso do problema que abordaremos neste trabalho, mas pode ser uma aproximação discreta do operador diferencial definido pela primeira ou segunda derivada. Se $L = I$, então o problema está na forma padrão, caso contrário o problema está na forma geral. Ambos problemas são equivalentes no sentido de que é possível transformar um problema no outro. Alguns problemas podem apresentar soluções mais úteis usando a forma padrão, outros usando a forma geral.

O primeiro autor a propôr uma maneira viável de resolver o problema (2.8) foi Golub, em 1965 [35]. Sua proposta consiste em trabalhar (2.8) como um problema de mínimos quadrados

$$g_\lambda = \operatorname{argmin}_{g \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \lambda L \end{pmatrix} g - \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2. \quad (2.9)$$

Sob a forma de equações normais, obtemos

$$(A^T A + \lambda^2 L^T L) g_\lambda = A^T f. \quad (2.10)$$

Tal expressão é conhecida como equações normais regularizadas.

2.6.1 Condição discreta de Picard e Método de Tikhonov

No caso discreto, temos um conceito importante que é a condição discreta de Picard (CDP):

Definição 2.10. *Dizemos que o vetor lado direito b do problema de mínimos quadrados original satisfaz a condição discreta de Picard se os coeficientes de Fourier $|u_i^T b|$ decaem, em média, a zero com mais rapidez que os valores singulares σ_i .*

A condição de Picard é satisfeita automaticamente no caso finito e não serve como condição para garantir a existência de solução como fizemos no caso infinito. Neste ambiente, a razão entre o decaimento dos valores singulares da matriz A e o decaimento dos coeficientes de Fourier de b , $u_i^T b$ determina quão boa a solução regularizada pode ser. Se os coeficientes de Fourier $|u_i^T b|$ decaem mais rápido para zero do que os valores singulares, então a solução regularizada x_λ tem aproximadamente as mesmas propriedades da solução exata [21].

Na prática, a matriz A ou o lado direito é dominado por erros, assim raramente a condição discreta de Picard é satisfeita. Mas se a solução exata do problema satisfaz a condição discreta de Picard, então é possível determinar um λ de modo que o problema regularizado a satisfaça. Por outro lado, se o problema exato não satisfaz a condição discreta de Picard, então, geralmente, não é possível calcular uma solução boa pelo método de Tikhonov ou qualquer outro método relacionado [21].

Tendo um método de regularização em vista, o próximo passo é determinar o parâmetro de regularização de modo a gerar uma solução g_λ que seja tão próxima, como possível, da solução exata.

2.7 Métodos para Determinar o Parâmetro de Regularização

Utilizando um pequeno parâmetro de regularização, podemos não filtrar o suficiente o ruído e obter uma solução não viável e, se utilizarmos um parâmetro grande, podemos perder informações importantes do problema. Nesta seção, apresentaremos algumas técnicas para a determinação do parâmetro de regularização de Tikhonov: o princípio da discrepância [14], o método da curva-L [21] e o método do ponto fixo [3]. Destes, apenas o princípio da discrepância tem a propriedade de que quando a norma do erro nos dados tende a zero, a solução gerada converge à exata.

Para tanto, sejam o quadrado da norma da solução g_λ de (2.9) e o quadrado da norma do vetor residual correspondente:

$$y(\lambda) = \|g_\lambda\|_2^2, \quad x(\lambda) = \|f - Ag_\lambda\|_2^2. \quad (2.11)$$

Então, usando a SVD de A , com $\alpha_i = |u_i^T f|^2$ (coeficiente de Fourier de f ao quadrado) e $\delta_o = \|(I - UU^T)f\|_2$ (o tamanho da componente incompatível de f que fica fora do espaço coluna de A), temos as seguintes caracterizações:

$$x(\lambda) = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda^4 \alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2} + \delta_o^2, \quad y(\lambda) = \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_i^2 \alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2}, \quad \lambda > 0 \quad (2.12)$$

e que as respectivas derivadas em relação a λ são

$$x'(\lambda) = 4\lambda^3 \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_i^2 \alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^3} > 0 \quad e \quad y'(\lambda) = -4\lambda \sum_{i=1}^p \frac{\sigma_i^2 \alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^3} < 0. \quad (2.13)$$

Nessa seção, abordaremos os métodos recém citados, mas de forma bem detalhada apenas o método do ponto fixo. O método da curva-L e o princípio da discrepância são apresentados para gerar comparativos numéricos com o método do ponto fixo.

2.7.1 Método da Curva-L

Na busca de um bom parâmetro de regularização, tornam-se favoráveis métodos que precisem de poucas e acessíveis informações de entrada e que apresentem robustez. Esse é o caso da curva-L, que necessita apenas do conhecimento das normas ao quadrado da solução regularizada e do resíduo correspondente (2.12). O método é muito

popular e tem sido utilizado com sucesso em diversos problemas. A curva-L é uma curva parametrizada por $\lambda \in [0, \infty[$ dada por

$$L(\lambda) = \{(a, b)/a = \log(x(\lambda)), b = \log(y(\lambda))\}. \quad (2.14)$$

O gráfico, geralmente, tem o formato de um L com partes horizontal e vertical bem distintas, conforme a figura abaixo.

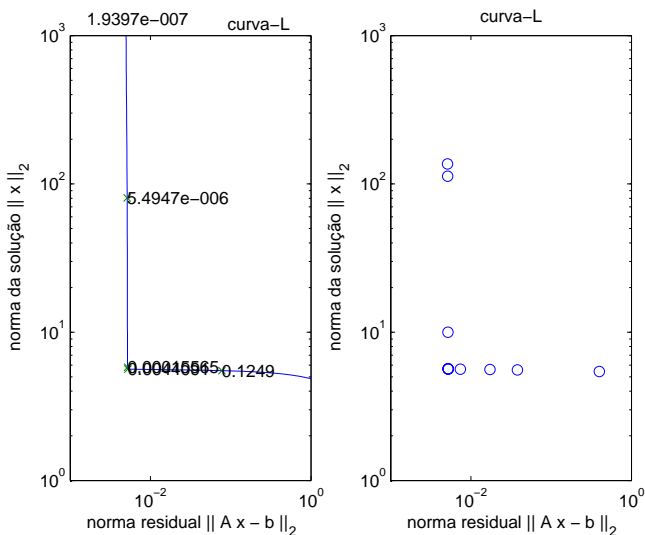


Figura 2.1: Gráfico de uma curva L

A característica principal da curva-L é que para a parte vertical da curva, pequenas mudanças em λ correspondem a variar rapidamente soluções regularizadas g_λ com pequenas mudanças na norma residual $x(\lambda)$. Enquanto isso, para a parte horizontal, grandes valores de λ correspondem a pequenas variações de $y(\lambda)$ com grandes mudanças na norma residual. Então uma solução regularizada razoável deve estar na vizinhança do “canto” da curva L .

O parâmetro determinado pelo método da curva-L é aquele que maximiza a curvatura da curva (2.14).

Uma desvantagem do método é que maximizar a curvatura é uma tarefa nada fácil, visto que a curvatura da curva-L é dada por

$$k = \rho\eta \frac{\rho\eta|\eta'| - \lambda^2 - \lambda^4\eta}{(\rho^2 + \lambda^4\eta^2)^{3/2}} \quad (2.15)$$

em que $\rho = \|f - Ag_\lambda\|_2$, $\eta = \|g_\lambda\|_2$ e $|\eta'|$ é dada por

$$|\eta'| = \sum_{i=1}^r \frac{2\sigma_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^3} (u_i^T f)^2. \quad (2.16)$$

2.7.2 Método do Ponto Fixo

Utilizando as observações feitas sobre a curva-L, temos que uma solução regularizada razoável deve estar na vizinhança do “canto” da curva-L, em que $y(\lambda)$ está prestes a crescer e λ se mantém praticamente o mesmo. O método do ponto fixo determina esse parâmetro de regularização de modo iterativo, contornando a dificuldade causada pelo cálculo da curvatura da curva-L e alcançando bons resultados em poucos passos de iterações. Basicamente, é um processo iterativo para o cálculo de λ baseado no trabalho de Reginska ([39]), em que o parâmetro λ que maximiza a curvatura da curva L é relacionado a um mínimo local da função

$$\psi_\mu(\lambda) = x(\lambda)y^\mu(\lambda), \quad \mu > 0. \quad (2.17)$$

A partir de (2.13) e (2.12) obtemos $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\lambda^2}$, ou seja, y é uma função monótona decrescente em relação a x .

Como queremos determinar um mínimo local de ψ_μ , suponha que λ^* seja esse minimizador. Então uma condição necessária é

$$\psi'_\mu(\lambda^*) = y(\lambda^*)^\mu y'(\lambda^*) \left[\mu \frac{x(\lambda^*)}{y(\lambda^*)} + \frac{x'(\lambda^*)}{y'(\lambda^*)} \right] = 0. \quad (2.18)$$

Como $y(\lambda)^\mu y'(\lambda) \neq 0$, por (2.12) e (2.13), então $\frac{x'(\lambda^*)}{y'(\lambda^*)} = -(\lambda^*)^2$. Portanto, para que ψ_μ tenha um mínimo local em λ^* é necessário que

$$\lambda^{*2} = \mu \frac{x(\lambda^*)}{y(\lambda^*)} \Leftrightarrow \lambda^* = \sqrt{\mu} \frac{\eta(\lambda^*)}{\xi(\lambda^*)}$$

em que $\eta(\lambda) = \sqrt{x(\lambda)}$ e $\xi(\lambda) = \sqrt{y(\lambda)}$. Dessa forma, se ψ_μ atinge um mínimo local em $\lambda = \lambda^* \neq 0$, λ^* é um ponto fixo de $\phi : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$, definido por

$$\phi(\lambda, \mu) = \sqrt{\mu} \frac{\eta(\lambda)}{\xi(\lambda)}, \quad 0 \leq \lambda < \infty. \quad (2.19)$$

Reginska [39] provou que se a curvatura da curva-L é maximizada em $\lambda = \lambda^*$, e se a tangente à curva-L em $(\log x(\lambda^*), \log y(\lambda^*))$ tem

inclinação $\frac{-1}{\mu}$, então ψ_μ é minimizada em $\lambda = \lambda^*$. Porém, o trabalho de Reginska parou nesse estágio. O método do ponto fixo (FP) surgiu da observação teórica de que os minimizadores podem ser calculados através de um algoritmo de ponto fixo que determina um ponto próximo ao parâmetro de máxima curvatura da curva-L. O método FP pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \lambda_0 : \text{aproximação inicial;} \\ \lambda_{j+1} = \phi(\lambda_j, \mu), \quad j \geq 0. \end{cases}$$

O comportamento das iterações está ilustrado na figura 2.2.

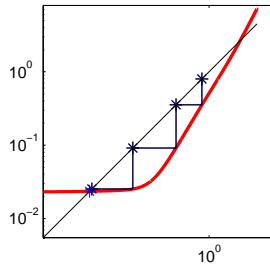


Figura 2.2: Iterações de ponto fixo.

Como se trata de um método iterativo, temos que pensar também num critério de parada. Defina-se $s_k = \frac{\phi(\lambda_k, \mu)}{\lambda_k}$. Como vimos acima, quando λ_k se aproxima do ponto fixo, a inclinação aproxima-se de -1 , ou seja, queremos que s_k tenda a 1. Dessa forma, um critério de parada plausível é

$$\frac{|\lambda_{k+1} - \lambda_k|}{|\lambda_k|} = |s_k - 1| < \varepsilon,$$

em que ε é alguma tolerância.

Outro quesito que deve ser discutido sobre o método é a questão da convergência. A princípio, lidamos somente com $\mu = 1$, mas pode ocorrer de $\phi(\lambda, 1)$ não ter ponto fixo, caso com $\delta_0 \neq 0$. Nessa situação, a sequência λ_k deve divergir e o algoritmo recomeça com um parâmetro μ escolhido de modo que seja garantido que $\phi(\lambda, \mu)$ tenha um ponto fixo em $]0, \max \sigma_i[$. Detalhes em [3].

ALGORITMO:**Dados de entrada:**

- σ_{max} : maior valor singular de A , tol : tolerância.

1. Passo 1:

Com $\mu = 1$ e $k = 0$, escolha λ_0 pequeno o suficiente de modo que $\phi(\lambda_0, \mu) > \lambda_0$.

2. Passo 2:

Calcule $s_0 = \frac{\phi(\lambda_0, \mu)}{\lambda_0}$.

3. Passo 3:

While ($|s_k - 1| > tol$ e $\lambda_k < \sigma_{max}$),

$$\lambda_{k+1} = \phi(\lambda_k, \mu), s_k = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}$$

$k = k + 1$

end while

4. Passo 4:

If $(\lambda_k) < \sigma_{max}$ e $\phi'(\lambda_k, 1) < 1$,

$\lambda_* = \lambda_k$

Elseif $(\lambda_k < \sigma_{max}$ e $\phi'(\lambda_k, 1) = 1)$

$$\sqrt{\mu} = \frac{2\sigma_{max}}{(\phi(\sigma_{max}, 1) + \sigma_{max})}$$

Defina $\lambda_0 = \lambda_k$, $k = 0$ e volte ao passo 2

Else

Determine k_* tal que $s_{k_*} = \min s_k$

Determine $\theta \gtrsim s_{k_*}$ (por exemplo, o menor inteiro maior que s_{k_*})

$$\text{Escolha } \sqrt{\mu} = \frac{2}{(s_{k_*} + \theta)}$$

Defina $\lambda_0 = \lambda_{k_*}$, $k = 0$ e volte ao passo 2

end if

É de extrema importância notar que o algoritmo do FP necessita apenas do cálculo das normas da solução e da norma residual, enquanto o método da curva-L requer a SVD e o cálculo da derivada da norma da solução em relação a λ . Dessa forma, o FP torna-se favorável, principalmente, para problemas de larga escala, visto que o uso da SVD gera um alto custo computacional.

A seguir, apresentamos os resultados provenientes da análise do ponto fixo.

Lema 2.11. *Suponha $\mu = 1$. Sejam $\underline{\gamma} = \min_i \sigma_i$ e $\overline{\gamma} = \max_i \sigma_i$. Se $\delta_0 = 0$ e $0 \leq \lambda \leq \underline{\gamma}$, então $0 \leq \phi(\lambda, 1) \leq \lambda$. Além disso, se $\lambda \geq \overline{\gamma}$, então independentemente de δ_0 , vale $\phi(\lambda, 1) \geq \lambda$.*

Demonstração: Como $\lambda \leq \underline{\gamma}$, temos $\lambda^4 \alpha_i \leq \underline{\gamma}^4 \alpha_i$, o que implica em

$$x(\lambda) = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda^4 \alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2} \leq \underline{\gamma}^4 \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2}. \quad (2.20)$$

Outra consequência é que, para $\lambda \geq 0$, temos

$$y(\lambda) \geq \underline{\gamma}^2 \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2}. \quad (2.21)$$

Assim, de (2.20) e (2.21), para $0 \leq \lambda \leq \underline{\gamma}$, concluímos que $0 \leq \phi(\lambda, 1) \leq \underline{\gamma}$.

Para um $\check{\lambda}$ fixo tal que $0 \leq \lambda \leq \check{\lambda} \leq \underline{\gamma}$, temos

$$x(\lambda) \leq \check{\lambda}^4 \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2}.$$

Com base nessas informações, $\phi(\lambda, 1)^2 \leq \frac{\check{\lambda}^4}{\underline{\gamma}^2} \leq \check{\lambda}^2$, provando a primeira parte do lema. Agora, observe que a desigualdade $2\sigma_i \lambda \leq \sigma_i^2 + \lambda^2$ nos leva a

$$\frac{\sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2} \leq \frac{1}{4\lambda^2}$$

e, para $\lambda \geq \bar{\gamma}$ vale

$$\sum_{i=1}^p \frac{\sigma_i^2 \alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2} \leq \frac{1}{4\bar{\gamma}^2} \sum_{i=1}^p \alpha_i. \quad (2.22)$$

Temos também que $\lambda^4 \geq \bar{\gamma}^2 \sigma_i^2$, devido a $\lambda \geq \bar{\gamma}$, implicando em

$$\sum_{i=1}^p \frac{\lambda^4 \alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2} \geq \bar{\gamma}^2 \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i \sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2}. \quad (2.23)$$

Dessa forma, de (2.22) e (2.23), para λ como o acima, obtemos

$$\phi(\lambda, 1)^2 \geq \bar{\gamma}^2 \left(1 + 4 \frac{\delta_0^2}{\sum_{i=1}^p \alpha_i} \right) \geq \bar{\gamma}^2. \quad \blacksquare$$

Esse lema garante que não há ponto fixo para $\lambda \geq \bar{\gamma}$ independente de δ_0 . Temos também o teorema a seguir que caracteriza a existência ou não de ponto fixo em outros casos [3].

Teorema 2.12. *Suponha que $\mu = 1$. Sejam I_1 e I_2 intervalos abertos tais que $\phi(\lambda, 1) < \lambda, \forall \lambda \in I_1$ e $\phi(\lambda, 1) > \lambda, \forall \lambda \in I_2$. Então ψ_μ é crescente em I_1 e decrescente em I_2 . Além disso, também são válidas as seguintes afirmações:*

- a) *Se $\delta_0 = 0$ e $\alpha_i \neq 0, i = 1, \dots, p$, existe $\check{\lambda} \in]\underline{\gamma}, \overline{\gamma}[$ tal que ψ_μ atinge um máximo local em $\check{\lambda}$. Também, se $\check{\lambda}$ é ponto fixo de ϕ mais próximo de zero e ψ_μ atinge um mínimo local em λ^* , então $\check{\lambda} < \lambda^*$ e ψ_μ atinge outro máximo local em $]\lambda^*, \overline{\gamma}[$.*
- b) *Se $\delta_0 \neq 0$ e ψ_μ atinge um mínimo em λ^* , existe um parâmetro $\check{\lambda}$ em $]\lambda^*, \overline{\gamma}[$ no qual ψ_μ atinge um máximo local.*
- c) *Suponha que ϕ tenha um ponto fixo λ^* e seja P o ponto na curva- L associado a λ^* . Então a curva- L é convexa numa vizinhança de P se e somente se λ^* minimiza localmente ψ_μ , e é côncavo numa vizinhança de P se e somente se λ^* maximiza localmente ψ_μ .*

Corolário 2.13. *Se $\delta_0 \neq 0$, existe $\mu^* > 0$ tal que ψ_{μ^*} atinge um mínimo local em $]0, \overline{\gamma}[$.*

Demonstração: Observe que $\phi_\mu(0) > 0$. Suponha que $\mu = 1$. Se $\phi_1(\bar{\lambda}) < \bar{\lambda}$ para algum $\bar{\lambda} \in]0, \overline{\gamma}[$, pela continuidade de ϕ segue que $(\phi_1(\lambda) - \lambda)$ muda de sinal em $]0, \bar{\lambda}[$. Assim, existe λ^* tal que $\phi_1(\lambda^*) = \lambda^*$ com a propriedade de que $\phi_1(\lambda) > \lambda, \forall \lambda$ em algum intervalo à esquerda de λ^* e $\phi_1(\lambda) < \lambda, \forall \lambda$ em algum intervalo à direita de λ^* . Isso significa que ψ_μ é uma função decrescente em algum intervalo a esquerda de λ^* e ψ_μ é crescente em algum intervalo a direita de λ^* . Consequentemente, para $\mu = 1$, a função ψ_μ atinge um mínimo local em $\lambda^* \in]0, \overline{\gamma}[$.

Suponha que $\phi_1(\lambda) > \lambda \forall \lambda > 0$. Denote por $m_L(\lambda)$ a curvatura da curva L no ponto $(\log x(\lambda), \log y(\lambda))$. Então, já que $m_L(\lambda) = -\frac{\phi_1(\lambda)^2}{\lambda^2}$, temos que $\phi_\mu(\lambda)^2 = \lambda^2$ com $\mu = -\frac{1}{m_L(\lambda)}$. Isso mostra que qualquer $\lambda > 0$ pode ser visto como um ponto fixo de $\phi_\mu(\lambda)$ desde que $\mu = \frac{-1}{m_L(\lambda)}$. Para concluir a prova, é suficiente selecionar qualquer λ^* no qual a curva L seja convexa, que sempre temos a garantia de existência perto de zero, e então defina $\mu = -\frac{1}{m_L(\lambda^*)}$. Isto implica que $\phi(\lambda^*, \mu^*) = \lambda^*$. A prova está concluída se usarmos o item (c) do teorema anterior. ■

O corolário acima nos permite dizer que sob a condição de $\delta_0 \neq 0$ podemos adequar a função ϕ de acordo com o parâmetro μ garantindo a determinação de um mínimo de Ψ_{μ^*} .

Na prática, o método FP funciona muito bem quando a curva-L apresenta um formato em L com partes vertical e horizontal bem definidas, mas pode falhar quando a curva-L apresenta diversos "cantos" convexos. Para solucionar esse caso, Bazán e Francisco [4] desenvolveram uma variação do método do ponto fixo. O problema está no fato de, dependendo do chute inicial escolhido, chegarmos à vizinhança de algum "canto" que não gere o resultado desejado. A fundamentação desse novo método deve-se às propriedades sobre convexidade da curva-L. A partir desse tipo de análise, contornaram-se as dificuldades e o método desenvolvido apresenta robustez. Um estudo detalhado do método, consta em [4].

2.7.3 Princípio da Discrepância de Morozov

O princípio da discrepância pode ocorrer em três versões: com ruído no lado direito (conhecido pelo nome de princípio da discrepância de Morozov), com ruído no operador (conhecido como princípio da discrepância generalizada) ou com ruído em ambos, no operador e no lado direito. Primeiramente, de modo superficial, apresentaremos o caso apenas com ruído no lado direito. Em seguida, apresentaremos o caso com ruído no operador, utilizado no problema de espalhamento discutido nesse trabalho.

O princípio da discrepância de Morozov é, segundo Hansen [21], o método mais difundido baseado na norma do vetor perturbação, $\|e\|_2 = \|f - f_{exata}\|_2$, para escolha do parâmetro de regularização. Quando temos o conhecimento do nível de ruído, o método apresenta resultados muito bons e sua convergência pode ser provada teoricamente. Se o problema é consistente no sentido que $Ag_{exata} = f_{exata}$, a idéia para a escolha do parâmetro de regularização λ é que a norma do resíduo não deve exceder uma cota superior para o erro nos dados, isto é, o parâmetro de regularização deve satisfazer

$$\|f - Ag_\lambda\|_2 = \delta_e, \|e\|_2 \leq \delta_e. \quad (2.24)$$

Resolver tal equação equivale a encontrar a intersecção entre a curva da norma do resíduo e a reta horizontal $z = \delta$, ou seja, determinar a raiz da função discrepância

$$\omega(\lambda) = \|f - Ag_\lambda\|_2 - \delta_e.$$

O caso em que a perturbação consta no lado direito tem sua fundamentação no seguinte teorema [7]:

Teorema 2.14. *Seja $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ um operador linear, injetivo, compacto e $\mathcal{A}(X) = Y$. Sejam $f \in \mathcal{A}(X)$ e $f_\delta \in Y$ tais que $\|f - f_\delta\| \leq \delta < \|f_\delta\|$. Então existe um único $\lambda(\delta)$ tal que*

$$\|\mathcal{A}\mathcal{A}_{\lambda(\delta)}f_\delta - f_\delta\| \leq \delta$$

e temos $\mathcal{A}_{\lambda(\delta)}f_\delta \rightarrow \mathcal{A}^{-1}f$, conforme $\delta \rightarrow 0$.

A demonstração do teorema é omitida, pois o problema que estudamos nesse trabalho apresenta ruído no operador e não no lado direito da equação. A grande dificuldade deste método é que precisamos de uma estimativa para a norma do erro e . Quando uma boa estimativa é conhecida para $\|e\|_2$, este método produz um bom parâmetro de regularização para a solução regularizada.

2.7.4 Princípio da Discrepância Generalizada

Nesse caso, lidamos de forma análoga à apresentada no princípio da discrepância de Morozov, mas com perturbação agora no operador,

$$\|A - A_\delta\|_2 = \delta,$$

também denotado por $\|E\| = \delta$. Considere a função discrepância

$$\beta(\lambda) = \delta\|g_\lambda\|_2 - \|A_\delta g_\lambda - f\|_2. \quad (2.25)$$

Usando (2.13), segue que $\beta'(\lambda) < 0$ e a função β é decrescente. Assim, se (2.25) tem uma raiz (zero), ela é única. O princípio da discrepância generalizada sugere escolher o parâmetro de regularização como o único zero de $\beta(\lambda)$.

Para tal cálculo, é necessária a utilização de algum método como: secante, bissecção, *regula falsi*, entre outros (vide apêndice B).

O teorema a seguir garante o funcionamento do princípio da discrepância generalizada (PDG).

Teorema 2.15. *Seja $\mathcal{A}_\delta : X \rightarrow Y$, $\delta \geq 0$, uma família de operadores injetivos e compactos entre espaços de Hilbert X e Y com imagens densas $Im(\mathcal{A}_\delta)$ tais que $\|\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_\delta\| \leq \delta$ para todo $\delta > 0$. Além disso, seja $r \in Y$ com $r \notin N(\mathcal{A}_\delta^*)$ para todo $\delta \geq 0$ e seja $(\lambda_\delta, g_\delta) \in \mathbb{R}^+ \times X$ a solução da equação $\mathcal{A}_\delta g = r$ por Tikhonov-Morozov, isto é, a solução do sistema*

$$(\lambda_\delta I + \mathcal{A}_\delta^* \mathcal{A}_\delta)g_\delta = \mathcal{A}_\delta^* r, \quad \|\mathcal{A}_\delta g_\delta - r\| = \delta\|g_\delta\|. \quad (2.26)$$

Então:

- (i) Se a equação não perturbada $\mathcal{A}_0 g = r$ tem solução dada por algum $g \in X$, então $g_\delta \rightarrow g$ conforme $\delta \rightarrow 0$.
- (ii) Se a equação não perturbada $\mathcal{A}_0 g = r$ não admite solução, então $\|g_\delta\| \rightarrow \infty$ conforme $\delta \rightarrow 0$.

Demonstração: Primeiramente, vamos provar que o sistema (2.26) tem uma única solução para todo $\delta > 0$. Definamos a função

$$\beta(\lambda) := \delta \|g^{(\lambda)}\| - \|\mathcal{A}_\delta g^{(\lambda)} - r\| \quad \lambda > 0$$

em que $g^{(\lambda)} \in X$ é a única solução da equação de Tikhonov $(\lambda I + \mathcal{A}_\delta^* \mathcal{A}_\delta)g^{(\lambda)} = \mathcal{A}_\delta^* r$. As aplicações $\lambda \mapsto \|g^{(\lambda)}\|$ e $\lambda \mapsto \|\mathcal{A}_\delta g^{(\lambda)} - r\|$ são estritamente monotonamente decrescente e crescente, respectivamente (conforme as representações em (2.12) e (2.13) para a norma da solução e a norma residual). Além disso, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|g^{(\lambda)}\| = 0$ e $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\mathcal{A}_\delta g^{(\lambda)} - r\| = 0$. Também, concluímos que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \beta(\lambda) = -\|r\| < 0$ e $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta(\lambda) = \delta \sup_{\lambda > 0} \|g^{(\lambda)}\| > 0$. O fato de β ser contínua e estritamente monótona nos leva à existência de um único $\lambda_\delta > 0$ com $\beta(\lambda_\delta) = 0$.

- (i) Suponha que $\mathcal{A}_0 g = r$ tenha solução. Vamos mostrar que $\|g_\delta\| \leq \|g\|$. Na verdade, como a primeira equação de (2.26) é a equação normal do problema para minimizar o funcional de Tikhonov

$$J(h) := \|\mathcal{A}_\delta h - r\|^2 + \lambda \|h\|^2 \quad em \quad X,$$

concluímos que

$$\begin{aligned} (\delta^2 + \lambda_\delta) \|g_\delta\|^2 &= \|\mathcal{A}_\delta g_\delta - r\|^2 + \lambda_\delta \|g_\delta\|^2 \\ &= J(g_\delta) \\ &\leq J(g) \\ &= \|\mathcal{A}_\delta g - r\|^2 + \lambda_\delta \|g\|^2 \\ &= \|(\mathcal{A}_\delta - \mathcal{A}_0)g\|^2 + \lambda_\delta \|g\|^2 \\ &\leq (\|\mathcal{A}_\delta - \mathcal{A}_0\|^2 + \lambda_\delta) \|g\|^2 \\ &\leq (\delta^2 + \lambda_\delta) \|g\|^2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

isto é,

$$\|g_\delta\| \leq \|g\|.$$

Agora, seja $\varepsilon > 0$. Escolhemos $u_\varepsilon \in Y$ com $\|g - \mathcal{A}_0^* u_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. isso é possível, pois \mathcal{A}_0 é injetivo, isto é, $Im(\mathcal{A}_0^*)$ é denso em X .

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|g_\delta - g\|^2 &= \|g_\delta\|^2 + \|g\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle g_\delta, g \rangle \leq 2[\|g\|^2 - \operatorname{Re}\langle g_\delta, g \rangle] \\
&\quad 2\operatorname{Re}\langle g - g_\delta, g - \mathcal{A}_0^* u \rangle + 2\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}_0(g - g_\delta), u \rangle \\
&\leq 2\|g - g_\delta\| \|g - \mathcal{A}_0^* u\| + 2\operatorname{Re}\langle r - \mathcal{A}_\delta g_\delta, u \rangle + 2\operatorname{Re}\langle (\mathcal{A}_\delta - \mathcal{A}_0)g_\delta, u \rangle \\
&\leq \sqrt{2}\|g - g_\delta\| \varepsilon + 2[\|r - \mathcal{A}_\delta g_\delta\| + \|\mathcal{A}_{\delta - \mathcal{A}_0}\| \|g_\delta\|] \|u\| \\
&\leq \sqrt{2}\|g - g_\delta\| \varepsilon + 4\delta \|g_\delta\| \|u\| \leq \sqrt{2}\|g - g_\delta\| \varepsilon + 4\delta \|g\| \|u\|,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

isto é,

$$\|g_\delta - g\| - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leq 4\delta \|g\| \|u\| + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Escolhemos $\delta_0 > 0$ tal que $4\delta \|g\| \|u\| \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$ para $\delta \leq \delta_0$. Assim, $\|g_\delta - g\| - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leq \varepsilon^2$ e, além disso, $\|g_\delta - g\| \leq (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})\varepsilon$ para $\delta \leq \delta_0$. Dessa forma, (i) está provado.

- (ii) Suponha que existam $c > 0$ e uma sequência $\delta_j \rightarrow 0$ com $\|g_j\| \leq c$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Aqui, definimos $g_j := g_{\delta_j}$. Como (g_j) é limitado, existe um ponto de acumulação fraco, além disso, $g_j \rightarrow g$ para alguma subsequência e algum $g \in X$. Então

$$\begin{aligned}
\delta_j \|g_j\| &= \|\mathcal{A}_j g_j - r\| \\
&\geq \|\mathcal{A}_0 g_j - r\| - \|(\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_j)g_j\| \\
&\geq \|\mathcal{A}_0 g_j - r\| - \|\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_j\| \|g_j\|
\end{aligned} \tag{2.29}$$

em que $\mathcal{A}_j := \mathcal{A}_{\delta_j}$. A partir disso, vemos que $\|\mathcal{A}_0 g_j - r\| \leq (\|\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_j\| + \delta_j) \|g_j\| \rightarrow 0$ conforme $j \rightarrow \infty$. A compacidade de \mathcal{A}_0 implica que $\mathcal{A}_0 g_j \rightarrow \mathcal{A}_0 g$ e, assim, $\mathcal{A}_0 g = r$ o que é uma contradição em relação à suposição de que a equação $\mathcal{A}_0 g = r$ não tem solução. ■

A precisão do método depende do conhecimento do nível de ruído, conforme veremos no capítulo 4. Todavia, em situações práticas, normalmente, não temos essa informação a disposição.

Capítulo 3

Métodos para a Detecção do Objeto

Existem diversos tipos de métodos de detecção e, neste estudo, optamos pelos métodos de amostragem, que são recomendados no caso de problemas inversos lineares. Métodos de amostragem se tornaram populares porque utilizam a amplitude de espalhamento e não dependem de informação *a priori* das informações físicas do objeto. Até a década de 90 o problema de reconstrução de objetos quase sempre era abordada através do Linear Sampling Method (LSM). Depois, surgiram métodos mais eficientes sendo que abordaremos alguns baseados no LSM.

Neste capítulo apresentaremos o LSM, o método da fatoração de Kirsch, o MKM-FP, o SVD-tail, o ISVD-tail e o critério do produto máximo incluindo fundamentação teórica e desvantagens.

3.1 LSM

O *Linear Sampling Method* (LSM) toma um ponto $z \in \mathbb{R}^3$ e calcula uma solução $g = g(\cdot, z) \in L^2(\mathbb{S})$ para a equação *far-field*

$$(\mathcal{A}g_z)(\hat{x}) = \frac{e^{-ik\hat{x}\cdot z}}{4\pi}, \quad (\mathcal{A}g_z)(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}} u_{\infty}(\hat{x}, d)g_z(d)ds(d), \quad \hat{x} \in \mathcal{S}, \quad (3.1)$$

em que $u_{\infty}(\hat{x}, z)$ é o *far field pattern* associado e d é a direção de propagação.

O método é motivado pela observação que, mesmo quando a equação (3.1) não tem solução, prova-se a existência de uma quase-solução $g_\varepsilon(\cdot, z) \in L^2(\mathbb{S})$, no sentido que $\|Ag_\varepsilon(\cdot, z) - e^{-ik\hat{x}\cdot z}/4\pi, \| \leq \varepsilon$, em que ε é um pequeno parâmetro independente de z . A solução é tal que

$$\lim_{z \rightarrow \partial D} \lim_{z \in D} \|g_\varepsilon(\cdot, z)\|_{L^2(\mathbb{S})} = \infty,$$

e, além disso, $\|g_\varepsilon(\cdot, z)\| = \infty$ para $z \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Detalhes podem ser vistos em [11, Lemma,]. Consequentemente, a norma- L^2 de $g_\varepsilon(\cdot, z)$ pode ser usada como um indicador do perfil D que queremos reconstruir. Essa é a observação central na qual o LSM tem sua fundamentação.

Outro fator importante é que na prática o problema (3.1) deve ser discretizado; nesse caso o que deve ser resolvido é um problema discreto

$$Ag = r_z, \tag{3.2}$$

onde A é o operador *far-field* discreto e inexato. Assim, um método de regularização torna-se necessário a fim de contornar instabilidades provenientes de mau condicionamento de A . O LSM original utiliza o método de Tikhonov associado ao princípio da discrepância generalizada para determinar o parâmetro λ .

A idéia do método LSM consiste na realização dos seguintes passos:

- 1 - Resolver a equação (3.2) usando regularização de Tikhonov para cada ponto z de uma malha que contém o objeto (veja figura 3.1),
- 2 - Utilizar a função indicadora dada por $\psi_{\text{LSM}}(\lambda(z)) = 1/\|g_{\lambda,z}\|^2$ para determinar se o ponto z tomado pertence ou não ao objeto.

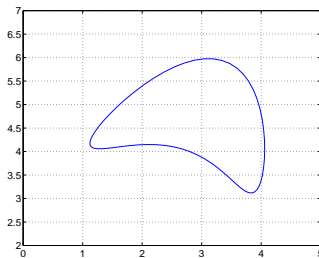


Figura 3.1: Malha de pontos para o LSM

Quanto à reconstrução do objeto, o processo é similar à geração de curvas de nível da superfície $\psi_{\text{LSM}}(\lambda(z))$. O comportamento típico da função indicadora ψ para um exemplo de reconstrução é mostrado na figura 3.2. A coloração indica o valor atingido pela função indicadora em cada ponto da malha, conforme a barra de cores que aparece na lateral do perfil reconstruído.

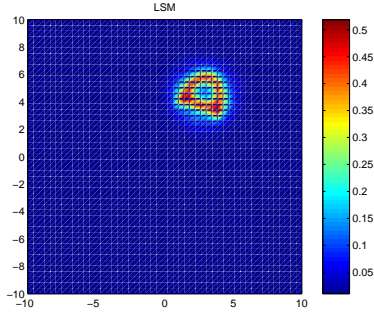


Figura 3.2: Comportamento da superfície $\psi_{\text{LSM}}(\lambda(z))$ como imagem

Outra forma de apresentar o formato gerado pelo método é pela aplicação (função indicadora)

$$z \rightarrow \lambda(z).$$

Essa caracterização é possível, pois, para valores altos de λ , a norma de g_λ assume pequenos valores, conforme visto no capítulo anterior.

Apesar do método apresentar resultados razoáveis, existem as seguintes desvantagens:

- Como já foi explicitado anteriormente, o problema pode não ter solução devido ao fato da equação *far field* ser mal posta;
- A norma da solução pode atingir valores altos em pontos dentro de D , não contradizendo o teorema e dificultando a identificação do objeto. Na literatura [11], constam exemplos desse fato.
- Para o LSM ser eficiente, a escolha do parâmetro de regularização precisa da informação do nível de ruído no operador discreto,

$$\|A - A_{\text{exato}}\|.$$

3.2 Método da Fatoração de Kirsch

Sabe-se que o LSM resolve a equação (3.1) baseado em observações numéricas de que sua solução terá norma grande fora e perto de ∂D . Então, as reconstruções são obtidas plotando a norma da solução. Entretanto, o núcleo do operador integral, normalmente, é contaminado por erros significativos. Assim, o lado direito da equação, em geral, não pertence à imagem do operador \mathcal{A} . Kirsch contornou essa dificuldade com a introdução de uma nova versão do LSM baseada numa fatoração apropriada do operador *far-field* \mathcal{A} .

Nesse método, denominado Método da Fatoração de Kirsch, usam-se as propriedades espectrais do operador \mathcal{A} para caracterizar o objeto. Em particular, a seguinte equação *far-field* é usada no lugar da equação (3.1)

$$(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4} g_z = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{x}\cdot z} \quad (3.3)$$

em que o operador é definido via sistema singular. O sistema singular referente a \mathcal{A} é dado por $\{u_j, v_j, \sigma_j\}$ e, conseqüentemente, o referente a $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4}$ é dado por $\{v_j, \sigma_j^{1/2}\}$.

Em situações práticas, o problema (3.3) deve ser discretizado, assim como no LSM; nesse caso, devemos resolver um problema discreto

$$(A^* A)^{1/4} g_z = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} e^{-ik\hat{x}\cdot z}, \quad (3.4)$$

onde A é o operador *far-field* discreto e inexato. Vale lembrar que o operador *far-field* discreto usado no método de Kirsch é o mesmo que aparece no LSM. Assim, um método de regularização torna-se necessário a fim de contornar instabilidades provenientes de mau condicionamento de A . Logo, a solução de (3.3) é obtida pelo método de Tikhonov e o parâmetro determinado pelo princípio da discrepância. Se $A = U\Sigma V^*$ é a SVD da matriz far-field, então

$$\psi_{\text{FAT}}(\lambda(z)) := 1/\|g_{\lambda,z}\|^2 = \left(\sum_{j=1}^M \frac{|\rho_j|^2}{\sigma_j} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

é a função indicadora do método de Kirsch, em que ρ_j é o j -ésimo coeficiente de Fourier do problema (3.4). Assim, o método de Kirsch envolve os seguintes passos:

- 1 - Resolver a equação (3.4) para cada ponto z da malha construída usando regularização de Tikhonov;

2 - Usar a função indicadora dada em (3.5) para identificar o objeto.

Como vantagens, o método apresenta processamento rápido e necessita de pouca informação das propriedades físicas do problema. Mas para ser eficiente, a escolha do parâmetro de regularização precisa da informação do nível de ruído no operador discreto, $\|A - A_{\text{exato}}\|$, o que se torna uma desvantagem.

3.2.1 Fatoração do Operador Far Field

Como visto anteriormente, a amplitude de espalhamento u_∞ define o operador *far field* $\mathcal{A} : L^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^2)$ por

$$\mathcal{A}g(\hat{x}) := \int_{\mathbb{S}^2} u_\infty(\hat{x}; d)g(d)ds(d), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2.$$

Também definimos o operador solução linear $G : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^2)$ por

$$Gh = v_\infty,$$

em que $v_\infty \in L^2(\mathbb{S}^2)$ é a amplitude de espalhamento da solução v do problema exterior de Dirichlet tendo $h \in L^2(\partial D)$ como seu dado de fronteira.

Além disso, os operadores \mathcal{A} e G são relacionados pelo *single layer potential* $S : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial D)$ definido por

$$S\phi(x) := \int_{\partial D} \phi(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \partial D \quad (3.6)$$

de forma que

$$\mathcal{A} = -4\pi GS^*G^*, \quad (3.7)$$

em que $G^* : L^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow L^2(\partial D)$ e $S^* : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial D)$ são os L^2 -adjuntos de G e S , respectivamente.

Lema 3.1. *Suponha que k^2 não seja um autovalor de Dirichlet do laplaciano negativo em D . Então \mathcal{A} e G são compactos e injetivos com imagens densas em $L^2(\mathbb{S}^2)$. Além disso, o operador \mathcal{A} é normal e seus autovalores $\lambda_j \in \mathbb{C}$ pertencem ao círculo de raio $\frac{2\pi}{k}$ centrado em $\frac{2\pi}{k}i$. Finalmente, as autofunções correspondentes $\{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ formam um sistema ortonormal completo em $L^2(\mathbb{S}^2)$.*

A demonstração do lema acima consta em [27].

Para continuar o estudo da fatoração do operador *far-field*, ao longo dessa seção, será necessário utilizar conceitos relativos a espaços de Sobolev; para detalhes sobre o assunto recomendamos referência [1].

Iniciamos com lemas e definições preliminares [27] que nos fornecem suporte suficiente para o teorema que caracteriza a identificação do objeto via o método de fatoração de Kirsch.

Lema 3.2. *Suponha que k^2 não seja um autovalor de Dirichlet do laplaciano negativo em Ω . Então S é um isomorfismo do espaço de Sobolev $H^{-1/2}(\partial D)$ para $H^{1/2}(\partial D)$.*

Definição 3.3. *O sistema de funções $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ é chamado de uma base de Riesz do espaço de Hilbert \mathcal{H} se satisfaz as seguintes condições:*

- toda $\phi \in \mathcal{H}$ tem uma única forma $\phi = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j$, em que a sequência $(\alpha_j) \subset \mathbb{C}$ satisfaz $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty$
- existem constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ tais que

$$c_1 \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \leq c_2 \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}.$$

Suponha que k^2 não seja um autovalor de Dirichlet do laplaciano negativo em D . O Lema 3.1 nos garante que \mathcal{A} é normal, injetiva e tem autovalores $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com $\psi_j \in L^2(\mathbb{S}^2)$, autovetores correspondentes, formando um sistema ortonormal completo em $L^2(\mathbb{S}^2)$. Dessa forma, (3.7) nos permite escrever

$$-4\pi G S^* G^* \psi_j = \lambda_j \psi_j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Além disso, definimos funções $\phi_j \in L^2(\partial D)$ por

$$G^* \psi_j = \sqrt{\lambda_j} \phi_j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Corolário 3.4. *As funções $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ definidas por $G^* \psi_j = \sqrt{\lambda_j} \phi_j$, $j \in \mathbb{N}$ formam uma base de Riesz de $H^{-1/2}(\partial D)$, isto é, $H^{-1/2}(\partial D)$ consiste exatamente de funções ϕ da forma*

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j \quad \text{com} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty.$$

Então

$$\mathcal{A} \psi_j = \lambda_j \psi_j = |\lambda_j| \text{ sinal}(\lambda_j) \psi_j$$

e

$$\mathcal{A}^* \lambda_j \psi_j = |\lambda_j|^2 \psi_j,$$

isto é,

$$\mathcal{A}^* \mathit{sinal}(\lambda_j) \psi_j = |\lambda_j| \psi_j.$$

Aqui, denotamos o sinal de um número complexo por $\mathit{sinal}(z) = \frac{z}{|z|}$. Dessa forma, o autosistema $\{|\lambda_j|, \psi_j, \mathit{sinal}(\lambda_j) \psi_j\}$ mostra-se um exemplo de sistema singular de \mathcal{A} .

Teorema 3.5. *Suponha que k^2 não seja um autovalor de Dirichlet do laplaciano negativo em D . Então a imagem $R(G)$ de $G : H^{1/2}(\partial D) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^2)$ é dada por*

$$R(G) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\rho_j|^2}{\sigma_j} < \infty \right\} = R((\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4}),$$

em que $\{\sigma_j, \psi_j, \widetilde{\psi}_j\}$ é um sistema singular de \mathcal{A} .

Demonstração: É suficiente fazer a prova para o sistema singular particular $\{\sigma_j, \psi_j, \widetilde{\psi}_j\}$ com $\sigma_j = |\lambda_j|$ e $\widetilde{\psi}_j = \mathit{sinal}(\lambda_j) \psi_j$, já que esse é o único sistema singular de \mathcal{A} a não ser o caso de constantes.

Primeiramente, seja $\psi \in R(G)$, isto é, $\psi = G\phi$ para alguma $\phi \in H^{1/2}(\partial D)$. O operador $S^* : H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$ é um isomorfismo, pois $S^* \phi = \overline{S\phi}$ e S é um isomorfismo de $H^{1/2}(\partial D)$ para $H^{-1/2}(\partial D)$ pelo Lema 3.2.

Assim, $(S^*)^{-1} \phi \in H^{-1/2}(\partial D)$ e, pelo Corolário 3.4, podemos escrevê-lo com o auxílio da base de Riesz $\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ de $H^{-1/2}(\partial D)$ como

$$(S^*)^{-1} \phi = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j,$$

com $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty$.

Agora, (3.8) e (3.9) implicam que $GS^* \phi_j = -\frac{\sqrt{\lambda_j}}{4\pi} \psi_j$ e, então, podemos calcular

$$\begin{aligned} \psi &= G\phi = GS^*((S^*)^{-1}\phi) = GS^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j GS^* \phi_j = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha \sqrt{\lambda_j}}{4\pi} \psi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j, \end{aligned}$$

em que definimos $\rho_j := -\frac{\alpha_j \sqrt{\lambda_j}}{4\pi}$. Dessa forma,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\rho_j|^2}{\sigma_j} = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty.$$

Por outro lado, seja

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j \quad \text{com} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\rho_j|^2}{\sigma_j} < \infty \quad (3.10)$$

e defina $\phi := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \phi_j$, em que $\alpha_j := -\frac{4\pi \rho_j}{\sqrt{\lambda_j}}$. Então $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty$, isto é, $\phi \in H^{-1/2}(\partial D)$ por (3.4) e, como acima, temos

$$G(S^* \phi) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j \sqrt{\lambda_j}}{4\pi} \psi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j = \psi.$$

Então $\psi \in R(G)$, pois $S^* \phi \in H^{1/2}(\partial D)$. Até o momento, provamos que

$$R(G) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\rho_j|^2}{\sigma_j} < \infty \right\}.$$

É claro que $R(G) = R((\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4})$. Na verdade, se ψ é como em (3.10), então o elemento

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} (\psi, \psi_j)_{L^2} \psi_j,$$

satisfaz $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4} \phi = \psi$, já que $\sqrt{|\lambda_j|}$ e ψ_j são os autovalores e os autovetores do operador compacto $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4} = |\mathcal{A}|^{1/2}$. Em outras palavras, $\psi \in R((\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4})$. Por outro lado, se $\psi \in R((\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4})$, então $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4} \phi$ para alguma ϕ .

Também, a SVD implica que

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|\lambda_j|} (\phi, \psi_j)_{L^2} \psi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j,$$

em que definimos $\rho_j := \sqrt{|\lambda_j|} (\phi, \psi_j)_{L^2}$. Agora, podemos concluir, a partir da desigualdade de Bessel, que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\rho_j|^2}{\sigma_j} = \sum_{j=1}^{\infty} |(\phi, \psi_j)_{L^2}|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\phi\|^2 < \infty.$$

Assim, o elemento ψ da imagem tem a forma desejada e provamos que

$$R(G) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \psi_j : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\rho_j|^2}{\sigma_j} < \infty \right\} = R((\mathcal{A}^* \mathcal{A})^{1/4}).$$

A utilidade desse teorema vem do fato que há conhecidos exemplos de elementos da imagem de G . Podemos, então, usar tal função para testar se um ponto dado pertence ou não ao objeto.

Teorema 3.6. *Para todo $z \in \mathbb{R}^3$, defina a função $r_z \in L^2(\mathbb{S}^2)$ por*

$$r_z(\hat{x}) := e^{-ik\hat{x} \cdot z}, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2.$$

Então $r_z \in R(G)$ se e somente se $z \in D$ onde G é novamente considerado como um operador em $H^{1/2}(\partial D)$.

Teorema 3.7. *Suponha que k^2 não seja um autovalor de Dirichlet do laplaciano negativo em D . Então, temos a seguinte caracterização de D :*

$$D = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\rho_j^{(z)}|^2}{\sigma_j} < \infty \right\} = \{z \in \mathbb{R}^3 : r_z \in R((A^* A)^{1/4})\},$$

em que $\{\sigma_j, \psi_j, \widetilde{\psi}_j\}$ é um sistema singular de A e $\rho_j^{(z)}$ são os coeficientes de expansão (de Fourier) de r_z em relação a $\{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$, isto é, $\rho_j^{(z)} = (r_z, \psi_j)_{L^2}$.

3.3 MKM-FP

O MKM-FP é um método de detecção de objetos baseado no método da fatoração de Kirsch e regularização de Tikhonov, onde o parâmetro é calculado pelo método do ponto fixo. A sigla MKM-FP provém dos nomes método de Kirsch modificado e ponto fixo em inglês [34]. Dizemos método de Kirsch modificado, pois como citamos anteriormente, o original conta com a determinação do parâmetro realizada através do princípio da discrepância generalizada. Assim, torna-se a associação de dois métodos que apresentam bons resultados na identificação de objetos.

Como já vimos anteriormente, utilizando a SVD de A no método de regularização de Tikhonov, a norma ao quadrado do resíduo é dada

por

$$x(\lambda) = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda^4 \alpha_i}{(\sigma_i^2 + \lambda^2)^2} + \delta_0^2,$$

em que δ_0^2 é a parte que não pertence ao espaço coluna de A . Todavia, como A é uma matriz quadrada e não singular, o sistema $Ag = f$ é compatível, fazendo com que $\delta_0^2 = 0$.

Nessa situação, em geral, só há um ponto fixo de ϕ . E, se tomarmos um chute inicial menor que o ponto fixo, o método nos leva a zero e se tomarmos um chute inicial maior, o método faz λ tender ao infinito. Ou seja, sob essas condições, não alcançamos o ponto fixo da função ϕ .

Para contornar essa dificuldade, se $A = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T$ é a SVD de A , a proposta do MKM-FP é usar a SVD truncada de A : $\hat{A} = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$, com $k < n$. Então consideramos o sistema $Ag = f$, que fornece $\delta_0 = \sum_{i=k+1}^n |u_i^T f|^2$ não-nulo, garantindo a determinação do ponto fixo pelo Corolário 2.13.

A proposta do MKM-FP torna-se interessante por apresentar a combinação de um método de boa eficiência para o parâmetro de regularização e de um aprimoramento do LSM para a identificação do objeto.

3.4 *SVD-tail*

O *SVD-tail* é um processo iterativo para a detecção de objetos cuja fundamentação surge do uso da SVD no operador discreto [16].

Como exposto anteriormente, \mathcal{A} é compacto e, conseqüentemente, o problema é mal posto e necessita de regularização. Para tanto, poderíamos utilizar o método de Tikhonov com o princípio da discrepância de Morozov ou métodos como a curva-L e GCV [21]. A vantagem de usar curva-L ou GCV está no fato que esses métodos não requerem o nível de ruído nos dados, mas dependem da condição discreta de Picard. Sendo assim, é válido analisar, no nosso problema, se tal condição é satisfeita. A validade da condição discreta de Picard garante que o ponto da malha tomado pertença ao objeto. Nas figuras 3.3 e 3.4 temos, primeiramente, o exemplo de um ponto pertencente ao objeto e, a seguir, um ponto fora do objeto.

Graficamente, verificamos a condição discreta de Picard analisando se os coeficientes de Fourier decaem a zero com maior rapidez que os valores singulares σ_i . Se isso ocorrer, então o ponto pertence ao objeto, como visto na figura 3.3. O método *SVD-tail* está baseado

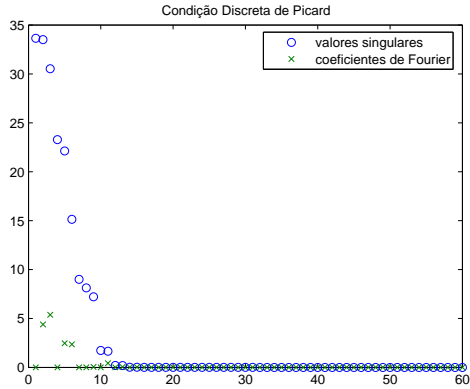


Figura 3.3: Coeficiente de Picard para ponto dentro do objeto

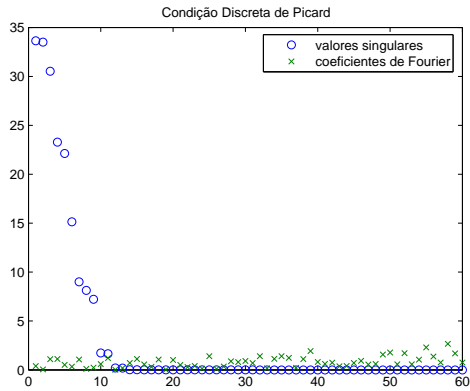


Figura 3.4: Coeficiente de Picard para ponto fora do objeto

nesse fato. Trata-se de uma técnica heurística¹ inspirada na observação de que os coeficientes de Fourier, $u_i^T f$ referentes aos últimos i 's da SVD de A apresentam grande diferença de tamanho se pertencem ou não ao objeto.

Assim, se calcularmos os d últimos coeficientes de Fourier, a função indicadora é definida por

$$\psi_d(z) = \|(u_{n-d+1}^T f(z), \dots, u_n^T f(z))^T\|^{-1}, \quad (3.11)$$

que informará se o ponto z da malha em questão pertence ao objeto ou não. Valores pequenos indicam que z está fora do objeto e valores grandes indicam que z pertence ao objeto.

Na prática, a *SVD-tail* faz uso da escolha da dimensão d como parâmetro de entrada e do conhecimento de uma base $\{w_1, \dots, w_d\}$ para o subespaço gerado pelos d últimos u_i 's. Se a SVD de A é conhecida, a escolha $w_l = u_{N-l+1}$ é óbvia e adequada. Outras técnicas também podem ser utilizadas tendo um custo menor que o da SVD. Além disso, observe que o custo computacional de $\psi_d(z)$ para um único z varia essencialmente linearmente em relação a d . Assim, pequenos valores de d são particularmente vantajosos quando $\psi_d(z)$ precisa ser computado para um grande número de vetores z .

Vale notar que, devido ao uso da SVD, a *SVD-tail* é um método viável apenas para n pequeno. Também, não temos uma estimativa de qual valor de d gera um resultado mais vantajoso, a determinação de d fica a cargo do usuário. A dificuldade do método é que a qualidade da reconstrução é sensível à escolha de d (como veremos no capítulo 4).

3.5 *ISVD-tail*

Com o intuito de tornar o *SVD-tail* um método favorável para sistemas com n grande, desenvolveu-se a idéia de substituir o uso da SVD pela Iteração Inversa Simultânea afim de diminuir o custo da SVD. Se o problema tem dimensão muito grande, a ideia é gerar uma base

$$\{\hat{u}_{n-d+1}, \dots, \hat{u}_n\}$$

tal que $\text{span}\{\hat{u}_i\} \approx \text{span}\{u_i\}$ sem depender da SVD para amenizar o custo computacional e tornar o método viável. Essa base é gerada pelo

¹Para ser aceito, um método heurístico deve ser testado em diversos problemas com níveis de ruído realistas. Não têm a propriedade de convergência. Na prática, podem ter um desempenho melhor que métodos comprovados teoricamente, o que acontece com frequência.

Método da Iteração Simultânea Inversa [18] que é uma generalização do Método da Potência aplicado a A^{-1} . Essa variação da SVD-tail é conhecida como *ISVD-tail*.

Nesse método, iniciamos com os seguintes dados de entrada: a dimensão d desejada, o número de iterações que desejamos e uma matriz inicial $W_{N \times d}$. Como se trata da iteração simultânea inversa, aplicamos a fatoração *LU* da matriz A . Em seguida, resolvemos o sistema

$$AA^*Y_4 = W.$$

Por fim, atualizamos W realizando a fatoração *QR* de Y_4 .

ALGORITMO:

Dados de entrada:

- Dimensão d da base desejada, número máximo de iterações n_{max} , valor máximo aceitável no critério de parada ϵ .

1. Passo 1:

A matriz de *far-field* A_0 é dada no próprio algoritmo. Como a mesma é praticamente singular, precisamos perturbá-la para não comprometer o algoritmo.

2. Passo 2:

Gerar e ortonormalizar uma matriz complexa randômica W que tenha a função de chute inicial para a base desejada.

3. Passo 3:

Realizar a fatoração *LU* da matriz an , a matriz de *far-field* perturbada.

4. Passo 4:

A cada iteração, resolver o sistema $(A_n \cdot A_n^*)Y_4 = W$ através dos sistemas triangulares gerados pela fatoração no passo anterior.

Para k de 1 a n_{max} :

$$LY_1 = W$$

$$UY_2 = Y_1$$

$$U^*Y_3 = Y_2$$

$$L^*Y_4 = Y_3$$

5. Passo 5:

Calcular a distância entre o subespaço gerado nessa iteração e na anterior. Este valor atua como critério de parada. Caso a distância seja maior que ϵ , ortonormalizamos a matriz Y_4 alcançada no passo anterior, gerando uma nova aproximação W .

$$H = W^*Y_4$$

Se $\|Y_4 - WH\| < \epsilon$

Parar

Senão $WR = Y_4$

Fim

Note que, com esse algoritmo, não geramos uma aproximação para os autovetores de $(AA^*)^{-1}$, mas sim uma aproximação para uma base do subespaço gerado. Dessa forma, se as colunas da matriz resultante W são denotadas por w_i , a identificação do objeto é feita usando a função indicadora

$$\psi_d(z) = \|(w_1^T f(z), \dots, w_d^T f(z))^T\|^{-1}. \quad (3.12)$$

Os métodos das potências, da iteração simultânea e a fatoração QR que auxiliam no algoritmo da ISVD-tail constam no apêndice B .

3.6 Método do Critério do Produto Máximo

Já comentamos que o sucesso do LSM e do método da fatoração de Kirsch depende do conhecimento da norma do ruído. Nesse caso, a reconstrução do perfil do objeto está baseada no fato de que norma $\|g_{\lambda,z}\|$ torna-se grande para pontos z fora ou próximo do objeto Ω e pequena para pontos dentro. O critério do produto máximo busca a reconstrução do perfil do objeto de modo que o processo independa do conhecimento dessa informação e que norma $\|g_{\lambda,z}\|$ se comporte de modo a garantir uma boa reconstrução do objeto. De modo resumido, o método do critério do produto máximo (MPC) aplica o método da fatoração de Kirsch e substitui o parâmetro do critério da discrepância generalizada pelo parâmetro λ que maximiza a função

$$\Psi(\lambda) = x(\lambda)y(\lambda), \quad \lambda \geq 0, \quad (3.13)$$

sendo

$$x(\lambda) = \|r - Ag_{\lambda,z}\|_2^2, \quad \text{e} \quad y(\lambda) = \|g_{\lambda,z}\|_2^2.$$

A existência de máximo é garantida quando a matriz A é não singular. De fato, como $x(0) = 0$ (pois A é não singular) e $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y(\lambda) = 0$, temos que

$$\Psi(0) = 0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi(\lambda).$$

Como $y(\lambda)$ é decrescente e $x(\lambda)$ é crescente, então existe um ponto λ no qual Ψ é maximizado. Para determinar tal λ , utilizamos o lema abaixo [5].

Lema 3.8. *Para z fixo e $\lambda \geq 0$, defina as funções ϕ e φ por*

$$\phi = \frac{\|r_z - Ag_{\lambda,z}\|_2}{\|g_{\lambda,z}\|_2}, \quad \varphi = -\lambda^2 y(\lambda) + x(\lambda).$$

Então a função Ψ associada ao método $(A^*A)^{1/4}$ satisfaz:

$$\Psi'(\lambda) = \varphi(\lambda)y'(\lambda) \quad (3.14)$$

$$\Psi''(\lambda) = [-2\lambda + 2\phi(\lambda)\phi'(\lambda)]y(\lambda)y'(\lambda) + [-\lambda^2 + \phi^2(\lambda)][y(\lambda)y'(\lambda)]'. \quad (3.15)$$

Suponha que λ_* seja o maximizador de Ψ . Assim, é preciso que $\Psi'(\lambda_*) = 0$ e $\Psi''(\lambda_*) < 0$. Pela SVD de $(A^*A)^{1/4}$, podemos caracterizar $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ de modo análogo ao realizado no método do ponto fixo. Dessa forma, $x'(\lambda) > 0$ e $y'(\lambda) < 0$. Logo, em relação à primeira derivada de Ψ , temos que $\varphi(\lambda_*) = 0$, ou seja, o ponto que maximiza Ψ é ponto fixo de ϕ .

Observação 3.9. *Do lema concluímos que o parâmetro de regularização para o MPC pode ser calculado como ponto fixo de ϕ ou como raiz de φ . Isso pode ser feito usando métodos como o regula falsi (vide apêndice), que calcula raízes de equações não-lineares.*

Teorema 3.10. *Suponha que a matriz far-field A tem sistema singular $\{\sigma_j, u_j, v_j\}$ com todos os σ_j distintos. Então as seguintes afirmações são válidas:*

- a) *A função Ψ tem, no mínimo, um ponto crítico em $(\sqrt{\sigma_n}, \sqrt{\sigma_1})$ e, no máximo, um ponto crítico em $(\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_1})$.*
- b) *Ψ tem um máximo local em $\hat{\lambda}$ se e somente se $\varphi(\hat{\lambda}) = 0$ e $\phi'(\hat{\lambda}) > 1$.*

Demonstração: Como $y'(\lambda) \neq 0$, $\lambda > 0$, temos que os pontos críticos de Ψ , são raízes de φ devido a (3.14). Mas usando o sistema singular de A , obtemos

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda^2(\lambda^2 - \sigma_i\alpha_i)}{(\sigma_i + \lambda^2)^2},$$

então segue que $\varphi(\lambda) \geq 0$ se $\lambda \geq \sqrt{\sigma_1}$ e $\varphi(\lambda) \leq 0$ se $\lambda \leq \sqrt{\sigma_n}$. Agora, perceba que para $\sqrt{\sigma_1}$ ser uma raiz de φ , todos os valores singulares devem ser iguais a σ_1 . Mas isso não pode acontecer já que por hipótese todos valores singulares são distintos, então $\sqrt{\sigma_1}$ não pode ser raiz de φ . Uma observação similar se aplica a $\sqrt{\sigma_n}$.

Isso implica que φ deve ter, pelo menos, uma raiz em $(\sqrt{\sigma_n}, \sqrt{\sigma_1})$.

Agora, observe que, como temos $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\lambda^2}$,

$$\begin{aligned}\varphi'(\lambda) &= -2\lambda y(\lambda) - \lambda^2 y'(\lambda) + x'(\lambda) \\ &= -2[\lambda y(\lambda) + x'(\lambda)] \\ &= -2 \sum_{j=1}^n \frac{\lambda \sigma_j (3\lambda^2 - \sigma_j) \alpha_j}{(\sigma_j + \lambda^2)^3},\end{aligned}\tag{3.16}$$

em que a última igualdade é válida devido à caracterização de $y'(\lambda)$.

Isso mostra que $\varphi'(\lambda)$ não muda de sinal em $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\sigma_1}, \sigma_1\right)$, assim, se Ψ tem um ponto crítico nesse intervalo, esse ponto crítico é único e a demonstração de (a) está completa.

Para provar o item (b), observe a partir de (3.14) que $\widehat{\lambda}$ é um ponto crítico de Ψ se e somente se $\varphi(\widehat{\lambda}) = 0$, isto sendo verdade se e somente se $\phi(\widehat{\lambda}) = \widehat{\lambda}$. Assim, no ponto $\widehat{\lambda}$, por (3.15), temos $\Psi''(\widehat{\lambda}) < 0$ se e somente se $\phi'(\widehat{\lambda}) > 1$, e (b) está provado. ■

O teorema a seguir demonstra que existe uma relação entre a norma da solução regularizada associada ao MPC e a associada ao PDG. Para tanto, seja $A^{(e)}$ o operador *far-field* discreto exato e defina $\varepsilon = \|A - A^{(e)}\|_2$. Usando a teoria de perturbação de valor singular [18] segue que

$$\sqrt{\sigma_i^{(e)}} - \varepsilon \leq \sqrt{\sigma_i} \leq \sqrt{\sigma_i^{(e)}} + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n$$

em que $\sigma_i^{(e)}$ denota o i -ésimo valor singular de $A^{(e)}$. Como $\sigma_n^{(e)}$ é extremamente pequeno para n moderado, deduzimos que uma boa limitação inferior para ε é $\sqrt{\sigma_n} \leq \varepsilon$. Assim, baseado no teorema anterior, concluímos que, se $\sqrt{\sigma_n} < \varepsilon$, então o maximizador de Ψ pertence a $(\sqrt{\sigma_n}, \varepsilon]$ ou a $[\varepsilon, \sqrt{\sigma_1})$.

Teorema 3.11. *Para z fixo, sejam $\lambda_{MPC}^{(z)}$ e $\lambda_{GDP}^{(z)}$ os parâmetros de regularização associados ao MPC e ao GDP, respectivamente. Suponha que $\sqrt{\sigma_n} < \varepsilon$. Então*

$$\|g_{\lambda_{MPC}^{(z)}}\|_2 \leq \|g_{\lambda_{GDP}^{(z)}}\|_2 \leq \|g_z\|_2, \quad \text{se } \lambda_{MPC}^{(z)} \geq \varepsilon \tag{3.17}$$

em que g_z denota a solução de $(A^{(e)*}A^{(e)})^{1/4}g = r_z$, enquanto se $\lambda_{MPC}^{(z)} < \varepsilon$, existe um número K , $K > 1$, tal que

$$\|g_{\lambda_{GDP}^{(z)}}\|_2 \leq \|g_{\lambda_{MPC}^{(z)}}\|_2 \leq \sqrt{\frac{1+K^2}{2}} \|g_z\|_2. \tag{3.18}$$

Demonstração: A desigualdade da direita em (3.17) é um resultado conhecido atribuído ao princípio da discrepância de Morozov que vale independentemente da condição $\lambda_{MPC}^{(z)} \geq \varepsilon$. Resta provar a desigualdade da esquerda. Para isso, observe que para o princípio da discrepância temos $\phi(\lambda_{GDP}^{(z)}) = \|A - A^{(e)}\|_2$ e para o MPC, temos $\phi(\lambda_{MPC}^{(z)}) = \lambda_{MPC}^{(z)}$. Assim, $\phi(\lambda_{MPC}^{(z)}) = \phi(\lambda_{GDP}^{(z)})$, aqui usamos a suposição de que $\lambda_{MPC}^{(z)} \geq \varepsilon$. Mas como ϕ é uma função crescente, $\lambda_{MPC}^{(z)} \geq \lambda_{GDP}^{(z)}$ e a desigualdade pedida segue percebendo-se que a norma da solução regularizada é decrescente.

Vamos então provar a desigualdade à direita em (3.18). De fato, como $\varphi(\lambda_{MPC}^{(z)}) = 0$ implica $[\lambda_{MPC}^{(z)}]^2 \|g_{\lambda_{MPC}^{(z)}}\|_2^2 = \|r_z - Ag_{\lambda_{MPC}^{(z)}}\|_2^2$, e como o funcional de Tikhonov é minimizado em $g_{\lambda_{MPC}^{(z)}}$, temos

$$\begin{aligned} 2[\lambda_{MPC}^{(z)}]^2 \|g_{\lambda_{MPC}^{(z)}}\|_2^2 &= \|r_z - Ag_{\lambda_{MPC}^{(z)}}\|_2^2 + [\lambda_{MPC}^{(z)}]^2 \|g_{\lambda_{MPC}^{(z)}}\|_2^2 \\ &\leq \|r_z - Ag_z\|_2^2 + [\lambda_{MPC}^{(z)}]^2 \|g_z\|_2^2 \\ &= \|(A^{(e)} - A)g_z\|_2^2 + [\lambda_{MPC}^{(z)}]^2 \|g_z\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

que implica em

$$2[\lambda_{MPC}^{(z)}]^2 \|g_{\lambda_{MPC}^{(z)}}\|_2^2 \leq (\varepsilon^2 + [\lambda_{MPC}^{(z)}]^2) \|g_z\|_2^2. \quad (3.20)$$

Assim, se $\lambda_{MPC}^{(z)} < \varepsilon$, existe uma constante $K > 1$ tal que $\varepsilon = K\lambda_{MPC}^{(z)}$, e a desigualdade requerida segue de (3.20). Finalmente, se $\varepsilon > \lambda_{MPC}^{(z)} = \phi(\lambda_{MPC}^{(z)})$, já que ϕ é uma função crescente $\lambda_{MPC}^{(z)} \leq \lambda_{GDP}^{(z)}$, e a desigualdade da esquerda em (3.17) segue do comportamento monotônico da norma da solução regularizada. ■

Vale lembrar que o método de Kirsch trabalha baseado na separação de grandes valores da função indicadora dos pequenos. E levando isso em conta, o teorema acima nos mostra que a separação é mais aparente utilizando o MCP, como podemos ver na figura 3.5. De modo mais específico, suponha primeiramente que $\lambda_{MPC}^{(z)} < \varepsilon$ (que ocorre quando z não pertence a D). Então uma consequência imediata de (3.18) é que os parâmetros do MPC são menores do que os correspondentes do PDG. Já, para o caso $\lambda_{MPC}^{(z)} > \varepsilon$ (que ocorre para z pertencente a D), a desigualdade (3.17) indica que os parâmetros do MPC são maiores que aqueles que correspondem ao PDG. Dessa forma, a visualização do objeto tem melhor qualidade, pois há uma grande separação de valores entre as duas situações.

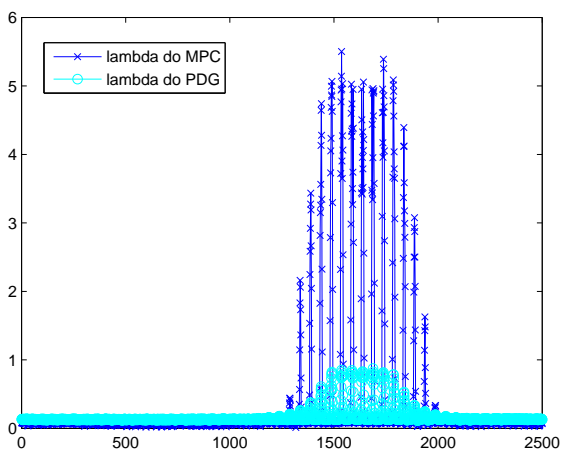


Figura 3.5: Comparação dos parâmetros via MPC e PDG

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Neste capítulo, através de experimentos numéricos faremos a comparação entre os métodos apresentados nos capítulos anteriores. Este capítulo é de crucial importância, visto que o desempenho dos métodos só pode ser avaliado via testes numéricos e inspeção visual. Todos os exemplos numéricos são restritos ao caso bidimensional e consideram a reconstrução do perfil de um amendoim, de uma pipa e de uma elipse (as duas últimas constando na mesma figura e simulando dois objetos disjuntos), e uma pipa sozinha. Todas as implementações aqui analisadas foram realizadas no MATLAB.

4.1 A construção da matriz referente ao operador *far field*

Vale observar que a amplitude de espalhamento u_∞ , crucial na solução do problema inverso, só pode ser determinada analiticamente em casos muito particulares via funções especiais (harmônicos esféricos, por exemplo, [12, 17]). Por isso, a função u_∞ é acessível apenas na forma de medidas experimentais ou via processos numéricos de aproximação.

Portanto, para gerar os resultados numéricos neste trabalho a u_∞ é obtida usando métodos de aproximação. Para isso, primeiramente a equação integral (veja eq. (1.18)) e o problema exterior (1.17))

$$\phi + k\phi - i\eta S\phi = 2f$$

deve ser resolvida aproximadamente com $f = -u^i$ e $\eta = k$. A seguir parametrizamos a integral de superfície e, então, aplica-se o método de

Nyström para determinar uma aproximação para a densidade ϕ [12]. Finalmente a amplitude de espalhamento é parametrizada e aproximada usando a regra trapezoidal [12].

A amplitude de espalhamento é calculada em $M \in \mathbb{N}$ direções distribuídas equidistantemente (ângulos) $\theta_j = \frac{2\pi j}{M}$, $j = 1, 2, \dots, M$ do intervalo $[0, 2\pi]$ e então obtemos uma matriz *far-field* A de ordem M com entradas

$$a_{ij} = u_\infty(\hat{\theta}_i; \hat{\theta}_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

contendo os valores aproximados da amplitude de espalhamento. Vale lembrar que, aqui, denotamos $\theta_j = (\cos \theta_j, \sin \theta_j)$, $j = 1, 2, \dots, M$.

Neste trabalho, a matriz far-fiel usada nos experimentos numéricos foi construída usando uma rotina cedida gentilmente pelo professor G. Pelekanos, da Southern Illinois University.

4.2 Comparação entre os métodos

Nos experimentos a seguir, exceto para *ISVD-tail*, todos os métodos usam a SVD da matriz *far-field* e os resultados numéricos são ilustrados usando as funções indicadoras apresentadas no Capítulo 3. Quanto à determinação do parâmetro de regularização do MPC, optamos por calcular a raiz da equação não-linear

$$\varphi = -\lambda^2 y(\lambda) + x(\lambda). \quad (4.1)$$

resolvendo um problema de minimização

$$\lambda_{\text{MPC}} = \operatorname{argmin} \kappa(\lambda), \quad \kappa(\lambda) = \left(\lambda - \frac{x(\lambda)}{y(\lambda)} \right)^2. \quad (4.2)$$

Para isso usamos a função do MATLAB `fminbnd.m`. O parâmetro associado ao método de Kirsch foi calculado analogamente.

Agora vamos discutir o problema da reconstrução de um amendoim e começamos com a observação que não há necessidade de comparar parâmetros de regularização visto que para um mesmo ponto da malha, métodos distintos podem produzir parâmetros muito diferentes. Um exemplo disso está ilustrado em Figura 4.2.

Observe que os parâmetros obtidos diferem bastante, o primeiro obtido pelo método da curva-L sendo 0.0395 e o segundo associado ao MPC sendo 0.2296. Portanto, para a identificação do objeto, a comparação de parâmetros não é necessária, já que, como veremos mais

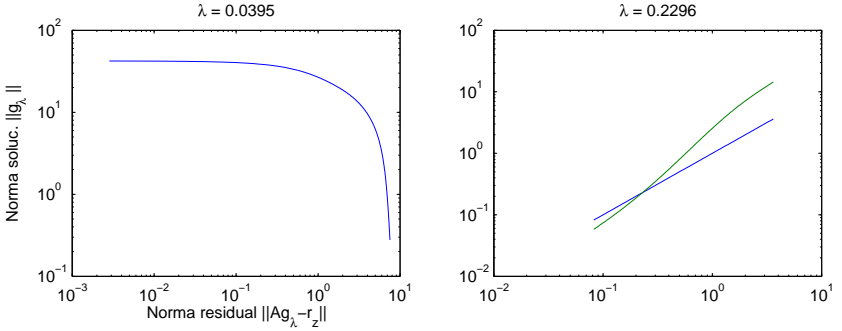


Figura 4.1: Curva-L, curva ϕ e correspondentes parâmetros

adiante, mesmo com parâmetros relativamente distintos, como é o caso entre MPC e PDG, obtemos identificações muito próximas, tornando essa diferença de valores irrelevante do ponto de vista prático. Ainda sobre o desempenho dos métodos, é interessante destacar em relação ao PDG que, em situação ideal, ou seja, com o conhecimento de $\|E\|$, o método faz uma reconstrução com qualidade muito boa, mas sem essa informação a solução obtida degrada-se. Assim, apesar de existir uma teoria para convergência no PDG, a necessidade de $\|E\|$ como dado inicial torna o método, na prática, menos eficiente que, por exemplo, o MPC, como veremos no fim do capítulo.

Agora consideramos a performance dos métodos estudados. Para isso, usamos uma malha com 2500 pontos (devido a limitações do computador utilizado) e perturbação de 0.1% de erro relativo na matriz A . Temos dois casos exemplificados, o primeiro com 64 ondas incidentes, ou seja, o operador discreto (matriz) tem ordem 64×64 e o segundo com 128 ondas incidentes. Esses casos foram escolhidos de modo a podermos analisar a robustez dos métodos em situações relativamente distintas. Além disso, ao longo do capítulo, vamos variar o nível de ruído relativo em A , adotaremos os valores de 0, 1%, 10% e 30% para verificar a sensibilidade do problema. Ainda sobre a questão do ruído, é importante notar que, por exemplo, um ruído de 0, 1% em A , quando trabalhamos com a matriz de Kirsch $(A^*A)^{1/4}$, torna-se um erro relativo de 2,9%.

Na situação com 64 ondas incidentes e nível de ruído de 0, 1%, Figura 4.2 e Figura 4.3, podemos observar, visualmente, que os métodos MKM-FP, PDG e MPC obtiveram melhores resultados. Nota-se que o ruído presente no background é menor com a utilização do PDG, apesar

método utilizado	SVD-tail	ISVD-tail	MKM-FP	MPC	PDG
tempo gasto	3.464	0.561	10.280	5.959	4.976

Tabela 4.1: Custo computacional para o caso da matriz 64x64

do MPC fornecer uma imagem visualmente mais próxima da desejada. Além disso, o PDG necessita da informação da norma do erro a qual, nos problemas práticos, normalmente não temos acesso.

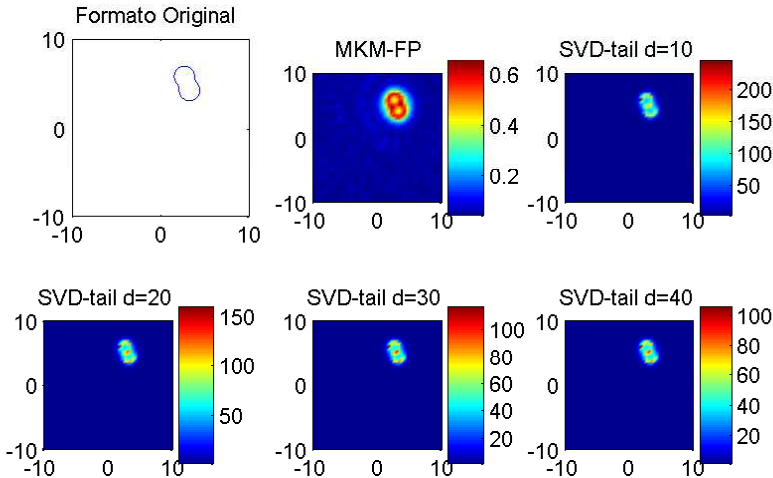


Figura 4.2: Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 0.1%

Abaixo segue uma tabela comparativa com o tempo gasto (em segundos) no cálculo dos métodos citados.

Perceba, pelo que é apresentado nas figuras e tabelas, que o ISVD-tail gerou uma identificação similar à do SVD-tail sem o uso da SVD, reduzindo o custo computacional. A redução, no exemplo, não foi de valor relevante, pois exemplificamos com ordens pequenas devido às limitações do computador, mas para situações práticas que requerem um volume muito maior de dados, essa redução de custo torna-se significante.

Outro fator que deve-se levar em conta na prática é a presença de ruído. Então, simulamos os resultados para diferentes valores de erro relativo em relação à matriz A . Com um erro relativo de 10%, o método

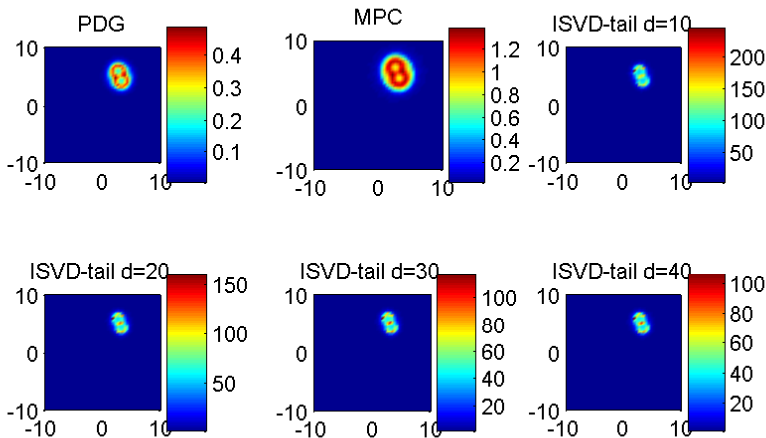


Figura 4.3: Comparação entre métodos, matriz 64×64 , ruído de 0.1%

MKM-FP perde sua precisão e todos métodos passam a apresentar ruído no background. Neste ensaio, mesmo com esse nível de ruído, MPC e PDG mostram as melhores identificações do objeto. Com um erro relativo de 30%, MPC e PDG começam a degradar-se; para os outros métodos, os resultados são ruins e similares aos apresentados com ruído de 10%.

Constam abaixo as imagens geradas pelos métodos para 128 ondas incidentes. Podemos observar que MKM-FP, MPC e PDG nos fornecem uma imagem de boa qualidade quanto ao objeto desconhecido, apesar das perturbações no background, principalmente no MKM-FP. Nota-se que o MPC aproxima-se mais da imagem desejada, tal desempenho pode ser justificado pela grande separação de valores na função indicadora para pontos pertencentes ou não ao objeto. Note também que a *SVD-tail* e a *ISVD-tail* têm a desvantagem de depender da escolha de d e a qualidade de suas imagens é similar entre si, além de ser de baixa precisão.

Agora, faremos o mesmo comparativo para a detecção de dois objetos de uma só vez, uma pipa e uma elipse.

Perceba que a apresentação de dois objetos, foi bem sucedida com os métodos MKM-FP, PDG e MPC. Utilizando *SVD-tail* e *ISVD-tail* que apresentam resultados similares, a menor escolha de d foi a mais

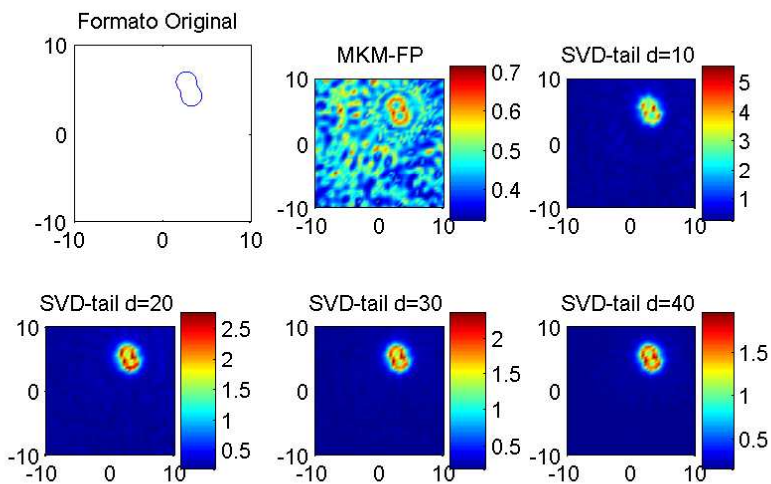


Figura 4.4: Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 10%

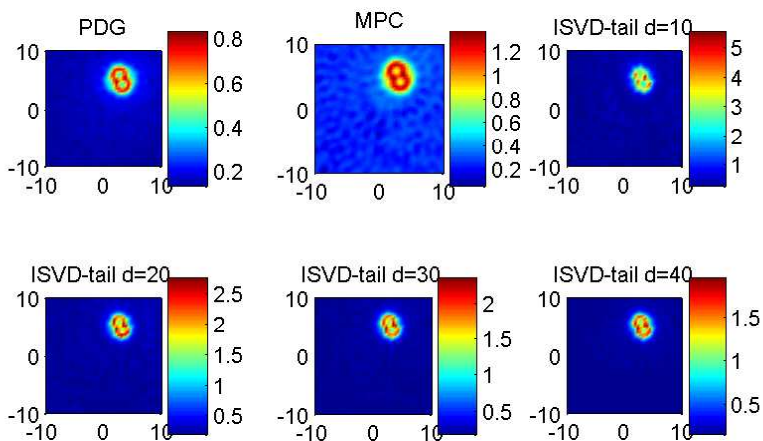


Figura 4.5: Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 10%

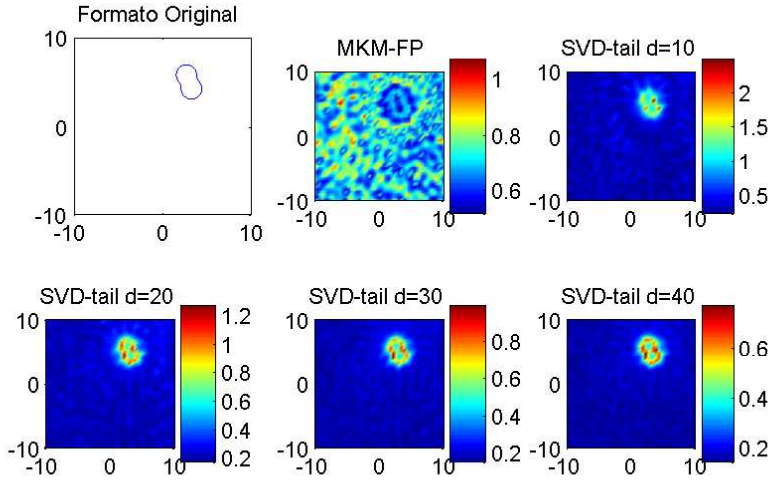


Figura 4.6: Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 30%

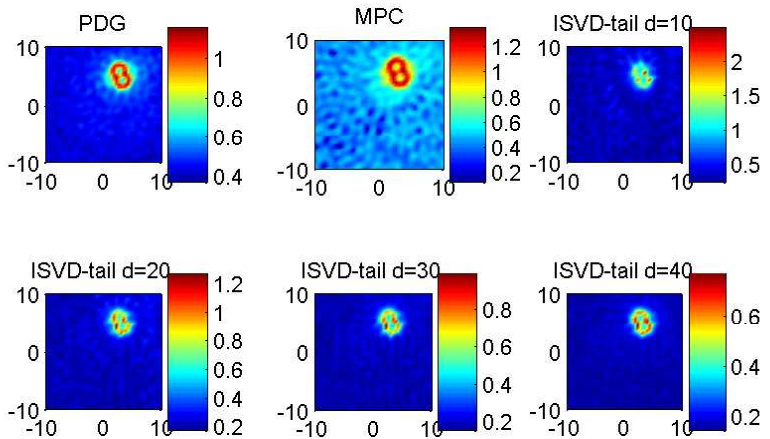


Figura 4.7: Comparação entre métodos, matriz 64x64, ruído de 30%

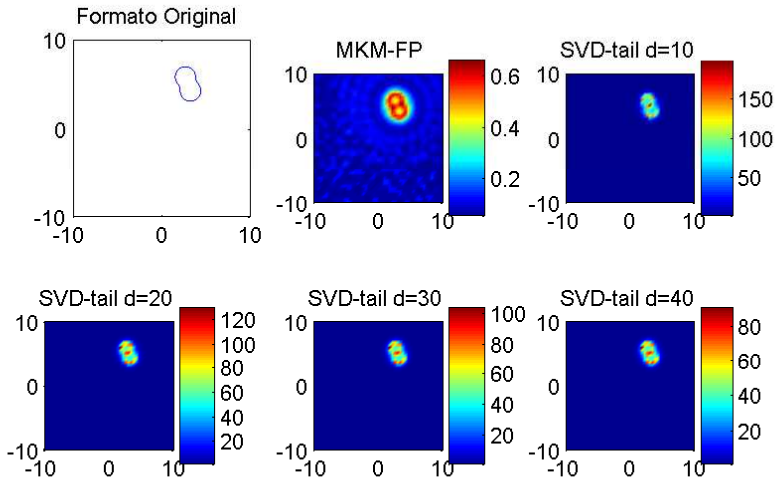


Figura 4.8: Comparação entre métodos, matriz 128x128

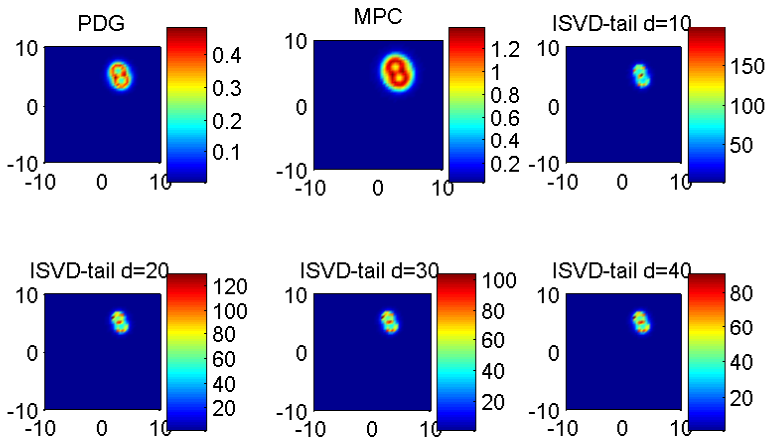


Figura 4.9: Comparação entre métodos, matriz 128x128

método utilizado	SVD-tail	ISVD-tail	MKM-FP	MPC	PDG
tempo gasto	8.127	2.714	12.996	9.656	8.595

Tabela 4.2: Custo computacional para o caso com a matriz 128x128

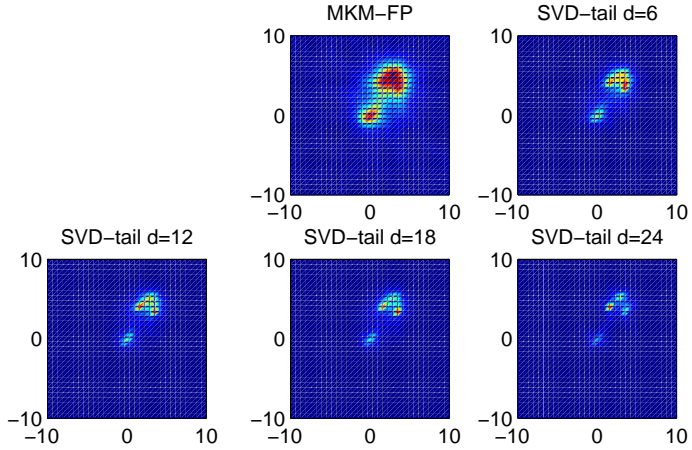


Figura 4.10: Comparação entre métodos, matriz 32x32, ruído de 0.1%

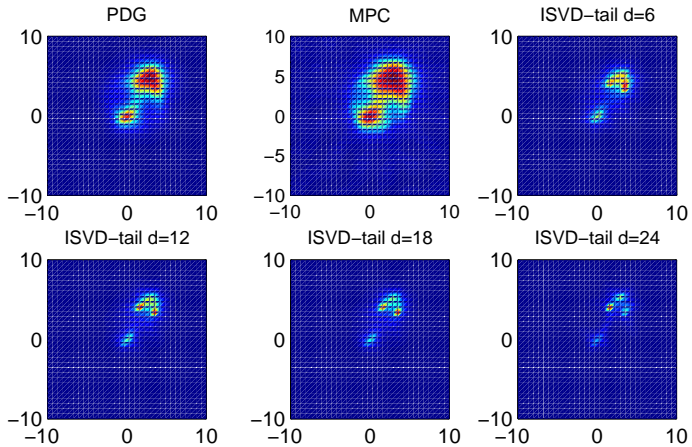


Figura 4.11: Comparação entre métodos, matriz 32x32, ruído de 0.1%

favorável à identificação. A escolha de d muito grande nos dá perda de informação sobre o problema e o d que forneceu o melhor resultado

é aquele em que os coeficientes de Fourier para pontos pertencentes ao objeto e pontos fora do mesmo, apresentam-se conforme visto na seção da condição de Picard. Abaixo, segue o comparativo do custo computacional dos métodos analisados.

método utilizado	SVD-tail	ISVD-tail	MKM-FP	MPC	PDG
tempo gasto	0.078	0.031	3.822	1.841	1.684

Tabela 4.3: Custo computacional para 2 objetos e matriz 32x32

Agora, vamos exemplificar o fato de garantirmos bons resultados para o princípio da discrepância generalizada apenas quando temos conhecimento de $\|E\|$. Na situação mostrada a seguir, $\|E\|$ real vale 0.01, mas simularemos uma situação prática, ou seja, sem ter esse valor correto como informação inicial. Tomaremos como chute para essa norma o valor 0.0015 e então analisaremos o comportamento do método em tal situação.

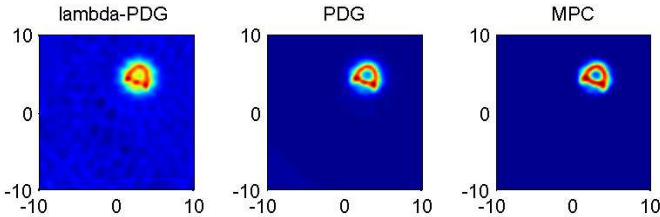


Figura 4.12: PDG com $\|E\|$ exata, que vale 1%

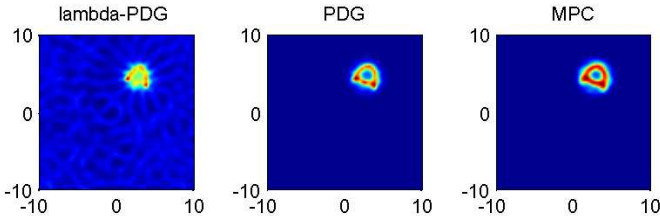


Figura 4.13: PDG com 0.15 vezes $\|E\|$, que vale 1%

Pelo fato do MPC não depender de $\|E\|$, o resultado mantém-se o mesmo para o método. Mas note que, se multiplicarmos $\|E\|$ por 0,00000015, obtemos uma norma $\|E\|$ muito menor, o que seria ideal,

mas que não condiz com a situação real, aumentando o índice de erros.

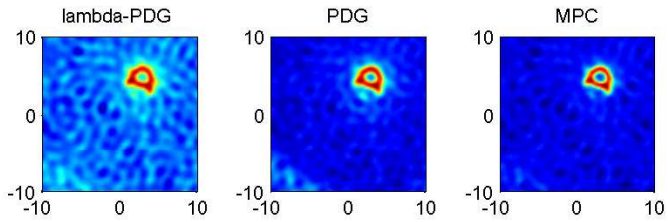


Figura 4.14: PDG com $\|E\|$ exata, que vale 25%

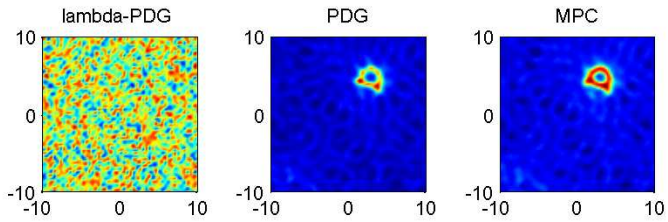


Figura 4.15: PDG com 0.00000015 vezes $\|E\|$ exata, que vale 25%

Considerações Finais

Neste trabalho, tivemos a oportunidade de estudar teorias recentes e aplicar métodos numéricos de interesse contemporâneo. Apresentamos técnicas cujo enfoque é a redução de custos para problemas grandes e outras voltadas para a qualidade de reconstrução do perfil desejado.

Considerando os métodos testados:

- O MPC apresentou os melhores resultados visualmente e não modifica sua qualidade devido ao conhecimento ou não do nível de ruído;
- Se a prioridade é o baixo custo, o melhor método é a ISVD-tail que consegue fazer a identificação num tempo muito inferior aos outros métodos, apesar de não gerar uma imagem com tanta qualidade como o MPC;
- A qualidade é limitada pelo nível de ruído no problema, mas como o habitual é ter um ruído de até 5%, o problema não é afetado por esse fator.

Também podemos enfatizar que o método ser independente de algumas informações como o nível de ruído, faz com que as técnicas se comportem melhor em situações práticas, visto que, nesses casos, temos poucos dados acessíveis. A própria dependência de parâmetros do método, por exemplo, a *SVD-tail* em relação ao parâmetro d , traz impecilhos à resolução do problema.

Para estudos futuros, sugerimos a aplicação das técnicas para objetos tridimensionais e realizar a construção numérica da solução exata como em [43] para fazer comparações mais numéricas e robustas. Outra sugestão é o estudo mais aprofundado do critério do produto máximo, para fornecer mais suporte teórico a um método que apresenta resultados muitos bons quanto à detecção de objetos.

Apêndice A

Resultados de Análise Funcional

A.1 Operadores Compactos

Como o problema tratado nesse trabalho provém de uma equação integral, é preciso apresentar alguns resultados sobre operadores compactos. Basicamente, nessa seção, mostraremos ideias básicas de análise funcional que auxiliam na fundamentação teórica do trabalho.

Definição A.1. *Sejam X e Y espaços normados. Uma transformação linear $T \in L(X, Y)$ é compacta se, para qualquer sequência limitada $\{x_n\}$ em X , a sequência $\{Tx_n\}$ em Y contém uma subsequência convergente. O conjunto de transformações compactas em $L(X, Y)$ será denotado por $K(X, Y)$.*

Teorema A.2. *Sejam X e Y espaços normados e seja $T \in K(X, Y)$. Então T é limitado. Além disso, $K(X, Y) \subset B(X, Y)$, em que $B(X, Y)$ é o conjunto das transformações limitadas de X para Y .*

Demonstração: Suponha que T seja não limitado. Então, para cada inteiro $n \geq 1$, existe um vetor unitário x_n tal que $\|Tx_n\| \geq n$. Como a sequência $\{x_n\}$ é limitada, pela compacidade de T , existe uma subsequência $\{Tx_{n(r)}\}$ que converge. Mas isso contradiz $\|Tx_{n(r)}\| \geq n(r)$, assim T é limitado.

Teorema A.3. *Sejam X, Y, Z espaços normados e sejam $A : X \rightarrow Y$ e $B : Y \rightarrow Z$ operadores lineares limitados. Então o produto $BA : X \rightarrow Z$ é compacto se um dos dois operadores A ou B é compacto.*

Demonstração: Seja (φ_n) uma seqüência limitada em X . Se A é compacto, então existe uma subseqüência $(\varphi_{n(k)})$ tal que $A\varphi_{n(k)} \rightarrow \psi \in Y, k \rightarrow \infty$. Já que B é limitado e, então, contínuo, temos $B(A\varphi_{n(k)}) \rightarrow B\psi \in Z, k \rightarrow \infty$. Então BA é compacto. Se A é limitado e B é compacto, a seqüência $(A\varphi_n)$ é limitada em Y , já que operadores limitados levam conjuntos limitados em conjuntos limitados. Dessa forma, existe uma subseqüência $(\varphi_{n(k)})$ tal que $(BA)\varphi_{n(k)} = B(A\varphi_{n(k)}) \rightarrow \chi \in Z, k \rightarrow \infty$. Assim, novamente BA é compacto.

Teorema A.4. *O operador identidade $I : X \rightarrow X$ é compacto se e somente se X tem dimensão finita.*

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que I seja compacto e X não tenha dimensão finita. Escolha $\varphi_1 \in X$ com $\|\varphi_1\| = 1$ arbitrariamente. Então $U_1 := \text{span}\{\varphi_1\}$ tem dimensão finita e, conseqüentemente, é um subespaço fechado de X . Pelo lema de Riesz, existe $\varphi_2 \in X$ com $\|\varphi_2\| = 1$ e $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \geq \frac{1}{2}$. Agora, considere $U_2 := \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Novamente, pelo lema de Riesz, existe $\varphi_3 \in X$ com $\|\varphi_3\| = 1$ e $\|\varphi_3 - \varphi_1\| \geq \frac{1}{2}$, $\|\varphi_3 - \varphi_2\| \geq \frac{1}{2}$. Repetindo o processo, obtemos uma seqüência (φ_n) com as propriedades $\|\varphi_n\| = 1$ e $\|\varphi_n - \varphi_m\| \geq \frac{1}{2}, n \neq m$. Isso implica que a seqüência limitada (φ_n) não contém uma subseqüência convergente que contradiz a compacidade de I . Dessa forma, se o operador identidade é compacto, X tem dimensão finita.

(\Leftarrow) Vide [33].

Observe que, pelos dois teoremas recém mostrados, o operador compacto A não pode ter uma inversa limitada, a não ser que sua imagem tenha dimensão finita.

A.1.1 Operadores Auto-Adjuntos

Teorema A.5. *Sejam H e K espaços de Hilbert complexos e seja $T \in B(H, K)$. Então existe um único operador $T^* \in B(K, H)$ tal que $(Tx, y) = (x, T^*y), \forall x \in H$ e $\forall y \in K$.*

Demonstração: Seja $y \in K$ e seja $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $f(x) = (Tx, y)$. Então f é uma transformação linear e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pelo fato de T ser limitado,

$$|f(x)| = |(Tx, y)| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|.$$

Então f é limitado e, pelo teorema de Riesz, existe um único $z \in H$ tal que $f(x) = (x, z) \forall x \in H$. Definimos $T^*(y) = z$, assim T^* é uma função de K para H tal que

$$(T(x), y) = (x, T^*(y)) \tag{A.1}$$

$\forall x \in H$ e $\forall y \in K$. Dessa forma, T^* é uma função que satisfaz a equação do enunciado do teorema, temos ainda que mostrar que pertence a $B(K, H)$. Primeiramente, vamos esclarecer o fato de T^* ser uma transformação linear.

Sejam $y_1, y_2 \in K$, sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e seja $x \in H$. Então, por (A.1),

$$\begin{aligned} (x, T^*(\lambda y_1 + \mu y_2)) &= (T(x), \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \overline{\lambda}(T(x), y_1) + \overline{\mu}(T(x), y_2) \\ &= \overline{\lambda}(x, T^*(y_1)) + \overline{\mu}(x, T^*(y_2)) \\ &= (x, \lambda T^*(y_1) + \mu T^*(y_2)). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Da mesma forma, $T^*(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda T^*(y_1) + \mu T^*(y_2)$ e, conseqüentemente, T^* é uma transformação linear.

Vamos mostrar que T^* é limitado. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|T^*(y)\|^2 = (T^*(y), T^*(y)) = (TT^*(y), y) \leq \|TT^*(y)\| \|y\| \leq \|T\| \|T^*(y)\| \|y\|.$$

Se $\|T^*(y)\| > 0$, então podemos dividir a desigualdade acima por $\|T^*(y)\|$ para gerar $\|T^*(y)\| \leq \|T\| \|y\|$, enquanto se $\|T^*(y)\| = 0$, então, trivialmente, $\|T^*(y)\| \leq \|T\| \|y\|$. Dessa forma, $\forall y \in K$,

$$\|T^*(y)\| \leq \|T\| \|y\|$$

e, então, T^* é limitado e $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Finalmente, temos que T^* é único. Suponha que B_1 e B_2 pertençam a $B(K, H)$ e que $\forall x \in H$ e $\forall y \in K$,

$$(Tx, y) = (x, B_1 y) = (x, B_2 y).$$

Portanto, $B_1 y = B_2 y \forall y \in K$, então $B_1 = B_2$ e, assim, T^* é único.

Definição A.6. Se H e K são espaços de Hilbert complexos e $T \in B(H, K)$, o operador T^* construído no teorema anterior, é chamado de operador adjunto de T .

Definição A.7. Se $A = [a_{i,j}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$, então a matriz $[\overline{a_{j,i}}]$ é chamado de adjunto de A e é denotado por A^* .

Lema A.8. Sejam H e K espaços de Hilbert complexos e seja $T \in B(H, K)$.

a) $\text{Ker} T = (\text{Im} T^*)^\perp$;

b) $\text{Ker} T^* = (\text{Im} T)^\perp$;

Definição A.9. a) Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T \in B(H)$, então T é auto-adjunto se $T = T^*$.

b) Se A é uma matriz quadrada, então A é auto-adjunto, se $A = A^*$.

Teorema A.10. Seja H um espaço de Hilbert complexo e seja $T \in B(H)$. Então T^*T e TT^* são auto-adjuntos.

Teorema A.11. Todo operador compacto possui no máximo uma quantidade enumerável de autovalores que formam uma sequência cujos valores absolutos convergem para zero.

Teorema A.12. Todos autovalores de operadores autoadjuntos são reais e autovetores relacionados a autovalores distintos são ortogonais.

Demonstração: $A\varphi = \lambda\varphi$ e $\varphi \neq 0$ implica $\lambda(\varphi, \varphi) = (A\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Sejam $A\varphi = \lambda\varphi$ e $A\psi = \mu\psi$ com $\lambda \neq \mu$. Então $(\varphi, \psi) = 0$ segue de

$$(\lambda - \mu)(\varphi, \psi) = (A\varphi, \psi) - (\varphi, A\psi) = 0.$$

Definição A.13. Sejam X e Y espaços de Hilbert e $K : X \rightarrow Y$ um operador compacto com operador adjunto $K^* : Y \rightarrow X$. As raízes quadradas $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$, $j \in J$, dos autovalores λ_j do operador auto-adjunto $K^*K : X \rightarrow X$ são chamadas de valores singulares de K . Aqui, $J \subset \mathbb{N}$ pode ser finito ou $J = \mathbb{N}$.

Observe que todo autovalor λ de K^*K é não negativo, visto que $K^*Kx = \lambda x$ implica que $\lambda(x, x) = (K^*Kx, x) = (Kx, Kx) \geq 0$, ou seja, $\lambda \geq 0$.

Apêndice B

Resultados de Álgebra Linear Computacional

Neste apêndice, apresentamos os resultados auxiliares referentes aos métodos computacionais presentes no trabalho.

B.1 Método *Regula Falsi*

Um dos problemas que ocorrem mais freqüentemente em trabalhos científicos é calcular as raízes de equações da forma: $f(x) = 0$. Em raros casos é possível obter as raízes exatas de $f(x) = 0$, como ocorre, por exemplo, supondo-se $f(x)$ um polinômio fatorável. Em geral, queremos obter somente soluções aproximadas, confiando a aproximação em alguma técnica computacional.

Assim, nem sempre ou quase que em geral não conseguimos obter o zero (ou raiz) de uma função de forma direta. Nestes casos, uma alternativa para se obter o zero (ou raiz) é de forma indireta através de métodos iterativos.

O processo de determinar a raiz ou as raízes de f é feito em duas fases:

1ª Fase: deve-se isolar ou confinar a raiz da f , ou seja, determinar um intervalo $I = [a, b]$ que contenha a raiz \bar{x} ;

2ª Fase: a partir de uma solução inicial $x_0 \in [a, b]$, definir e utilizar um processo iterativo que calcule a seqüência de pontos

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1},$$

tal que $x_{k+1} \rightarrow \bar{x}$ para $k \rightarrow \infty$, em que x_{k+1} é a raiz aproximada da f e \bar{x} é a raiz exata.

Primeiramente, dados dois valores em que a função tenha sinais opostos quando neles avaliados, por exemplo, se a e b são tais números de modo que $f(a).f(b) < 0$, então uma raiz de $f(x)$ existe no intervalo $(\min(a, b), \max(a, b))$.

O processo iterativo do regula falsi usa duas estimativas para calcular a próxima, em que a substituída é a que nela avaliada, a função tem mesmo sinal que quando avaliada na nova estimativa. O método tem convergência garantida, mas essa convergência pode ser lenta.

Como requer estimativas iniciais nas quais a função é avaliada com sinais opostos, não é possível utilizar o *regula falsi* para determinar as raízes de funções estritamente positivas ou negativas.

Quando o método termina, é garantido que o intervalo final contenha uma raiz da função. Todavia pode conter mais de um zero da função.

B.2 Teoria da Perturbação de Valor Singular

A perturbação de valor singular, neste trabalho, é utilizada na fundamentação teórica do critério do produto máximo. Essa teoria, a grosso modo, nos diz que sendo A uma matriz e \tilde{A} a mesma matriz agora com uma perturbação, podemos definir um ε tal que

$$|\sqrt{\sigma_i} - \sqrt{\sigma_i^{(e)}}| \leq \varepsilon,$$

sendo σ_i e $\sigma_i^{(e)}$ valores singulares de A e \tilde{A} , respectivamente.

Lema B.1. Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\|A\|_p < 1$, então $I - A$ é não singular e

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

com

$$\|(I - A)^{-1}\|_p \leq \frac{1}{1 - \|A\|_p}.$$

Demonstração: Suponha que $I - A$ seja singular. Então, segue que $(I - A)x = 0$ para algum $x \neq 0$. Logo, $\|x\|_p = \|Ax\|_p$ implica que

$\|A\|_p \geq 1$, o que é uma contradição. Dessa forma, $I - A$ é não singular. Para obter uma expressão para sua inversa, considere a identidade

$$\left(\sum_{k=0}^N A^k \right) (I - A) = I - A^{N+1}.$$

Como $\|A\|_p < 1$, segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, pois $\|A^k\|_p \leq \|A\|_p^k$. Assim,

$$\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N A^k \right) (I - A) = I.$$

Então, temos que $(I - A)^{-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N A^k$. A partir desses fatos, segue que

$$\|(I - A)^{-1}\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|_p^k = \frac{1}{1 - \|A\|_p}.$$

Teorema B.2. (Bauer-Fike) *Se μ é um autovalor de $A + E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $X^{-1}AX = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, então*

$$\min_{\lambda \in \lambda(A)} |\lambda - \mu| \leq \kappa_p(X) \|E\|_p$$

em que $\|\cdot\|_p$ denota qualquer norma-p.

Demonstração: Precisamos considerar apenas o caso em que μ não pertence a $\lambda(A)$. Se a matriz $X^{-1}(A + E - \mu I)X$ é singular, então $I + (D - \mu I)^{-1}(X^{-1}EX)$ também o é. Ainda, do lema B.1, obtemos

$$1 \leq \|(D - \mu I)^{-1}(X^{-1}EX)\|_p \leq \|(D - \mu I)^{-1}\|_p \|X\|_p \|E\|_p \|X^{-1}\|_p.$$

Já que $(D - \mu I)^{-1}$ é diagonal e a norma-p de uma matriz diagonal é o valor absoluto da maior entrada da diagonal, segue que

$$\|(D - \mu I)^{-1}\|_p = \min_{\lambda \in \lambda(A)} \frac{1}{|\lambda - \mu|}.$$

A partir disso, temos o teorema demonstrado.

B.3 Fatoração QR

Nessa seção, relembremos a ideia por trás da fatoração QR , visto que essa decomposição faz parte do processo de iteração simultânea presente no estudo de um dos métodos de identificação de objetos, a SVD-tail.

Dada uma matriz A $m \times n$, com $m \geq n$, a fatoração QR é um método de decomposição da matriz em questão que fornece uma matriz ortogonal $m \times m$ tal que

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que R é uma matriz triangular superior $n \times n$. Tal decomposição pode ser realizada utilizando métodos como:

- transformações de Householder;
- transformações de Givens;
- ortogonalização de Gram-Schmidt.

Além disso, se particionarmos Q em Q_1 , contendo as n primeiras colunas de Q , e em Q_2 , contendo as $m-n$ colunas remanescentes, então temos

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R.$$

Também, se A tem posto completo, então R é não singular e, logo, as colunas de Q_1 formam uma base ortonormal para o espaço coluna de A ; e as colunas de Q_2 formam uma base ortonormal para seu complemento ortogonal, que é o mesmo que o núcleo de A^T . Tais bases ortonormais são úteis no cálculo de autovalores, otimização, entre outros problemas.

B.4 Método da Potência

O método da potência é o mais simples para o cálculo da aproximação de um único par de autovalor e autovetor de uma matriz. Esse processo envolve o produto sucessivo de grandes potências da matriz com um vetor inicial dado.

Suponha que a matriz tenha um único autovalor λ_1 de módulo máximo, com autovetor correspondente u_1 , ou seja, $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ para

$2 \leq i \leq n$. Então, começando com um vetor não nulo x_0 dado, o esquema de iteração

$$x_k = Ax_{k-1}$$

converge para um múltiplo de u_1 , o autovetor correspondente ao autovalor λ_1 dominante.

De fato, primeiramente, representamos o vetor inicial x_0 como uma combinação linear $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, em que u_i são autovetores de A . Logo,

$$\begin{aligned} Ax_0 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i u_i \\ A^2 x_0 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^2 u_i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ A^k x_0 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k u_i = \lambda_1^k \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k x_n \right] \end{aligned}$$

Como $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$ para $2 \leq i \leq n$, temos que $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \rightarrow 0$, conforme $k \rightarrow \infty$. Dessa forma, $A^k x_0 \rightarrow \alpha_1 \lambda_1^k x_1$ com $k \rightarrow \infty$.

Vale notar que o crescimento geométrico das componentes em cada iteração pode eventualmente criar um “overflow”, assim, é recomendado normalizar o autovetor aproximado em cada iteração. Esse passo nos leva ao seguinte esquema de iteração.

ALGORITMO:

Dados de entrada:

- Matriz A , vetor de chute inicial $V^{(0)} = [q_1]$, número máximo de iterações n_{max} .

1. Passo 1:

Para k de 1 a n_{max} :

$$Z^{(k)} = AV^{(k-1)}$$

$$V^{(k)} = \frac{Z^{(k)}}{\|Z^{(k)}\|}$$

Fim

Para realizar a aproximação dos p maiores autovalores de A em módulo e seus autovetores correspondentes, é preciso utilizar outro processo conhecido como método da iteração simultânea, uma generalização do método da potência.

B.4.1 Método da Potência Inversa

É usado para determinar o autovalor de menor valor absoluto e seu correspondente autovetor de uma matriz A dada. É semelhante ao método da potência, porém, desta vez, desejamos calcular λ_n e supomos

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|.$$

Sabemos que se λ é autovalor de A , então λ^{-1} é autovalor de A^{-1} (se A é matriz não singular). Além disso, se $|\lambda_n|$ é o menor autovalor de A , então $|\lambda_n|$ é o maior autovalor de A^{-1} .

Assim, o método da potência inversa consiste em calcular, pelo método das potências, o autovalor de maior valor absoluto de A^{-1} , pois assim teremos o menor autovalor, em módulo, de A .

ALGORITMO:

Dados de entrada:

• Matriz A , vetor de chute inicial $V^{(0)} = [q_1]$, número máximo de iterações n_{max} .

1. **Passo 1:**

Decompor a matriz A fazendo uso da fatoração LU .

2. **Passo 2:**

Para k de 1 a n_{max} :

$$LUZ^{(k)} = V^{(k-1)}$$

Resolver o sistema por substituições direta e inversa.

$$V^{(k)} = \frac{Z^{(k)}}{\|Z^{(k)}\|}$$

Fim

Note que, no algoritmo, não for necessário calcular A^{-1} , pois resolvemos o sistema linear utilizando a fatoração LU seguida da resolução de sistemas triangulares gerados pela mesma fatoração.

B.4.2 Método da Iteração Simultânea

A ideia inicial desse procedimento é aplicar o método da potência a um conjunto de vetores simultaneamente.

Seja A matriz real e simétrica e suponha que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq |\lambda_{r+2}| \geq \dots \geq |\lambda_n|,$$

em que os r vetores iniciais, dados por $q_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, r$, são linearmente independentes.

ALGORITMO:

Dados de entrada:

• Matriz A , matriz de chute inicial $V^{(0)} = [q_1, \dots, q_p]$, número máximo de iterações n_{max} , valor máximo aceitável no critério de parada ϵ .

1. Passo 1:

Checar se $V^{(0)}$ é ortonormal. Se não for, aplicar uma fatoração QR .

2. Passo 2:

Para k de 1 a n_{max} :

$$Z^{(k)} = AV^{(k-1)}$$

$$H = V^{(k-1)*} Z^{(k)}$$

3. Passo 3:

Se $\|Z^{(k)} - V^{(k-1)}H\|_2 < \epsilon$

Parar

Senão $V^{(k)}R = Z^{(k)}$

Fim

Note que, no algoritmo acima, calculamos a matriz H , pois $H = V^{(k-1)*}AV^{(k-1)}$ que é projeção de A no espaço gerado pelas colunas de $V^{(k-1)}$ e tal matriz é utilizada no critério de parada.

Como critério de parada, calculamos a distância entre dois subespaços,

$$\|AV^{(k-1)} - V^{(k-1)}V^{(k-1)*}AV^{(k-1)}\|.$$

Utilizamos $V^{(k-1)}V^{(k-1)*}AV^{(k-1)}$, pois esta é a projeção de $AV^{(k-1)}$ no espaço gerado por $V^{(k-1)}$. Assim, medimos quão próximos os espaços gerados por $V^{(k-1)}$ e $V^{(k)}$ estão. A partir do momento em que essa distância for menor que ϵ , temos subespaços invariantes de A , ou seja, o processo está completo.

Como alternativa para o critério de parada, podemos utilizar o cálculo de

$$1 - \sigma_{max}(V^{(k)*}V^{(k-1)})^2$$

que é a fórmula para a distância entre dois subespaços $V^{(k-1)}$ e $V^{(k)}$, em que temos $\sigma_{max}(V^{(k)*}V^{(k-1)})$ como o maior valor singular de $V^{(k)*}V^{(k-1)}$. Sob o ponto de vista do custo computacional, essa alternativa torna-se mais interessante, já que o σ_{max}^2 é a própria norma-2 de $V^{(k)*}V^{(k-1)}$, enquanto, no outro caso, ainda é preciso calcular os produtos presentes na norma em questão [18].

Outro fator que merece comentários é a utilização da fatoração QR . Fazemos uso desse processo, pois a matriz A pode não ter posto completo, gerando uma matriz Z sem p colunas linearmente independentes. A fatoração QR evita o overflow. Além disso, é conhecido que $V^{(k)}$ e $Z^{(k)}$ geram o mesmo subespaço.

B.4.3 Método da Iteração Simultânea Inversa

Já a iteração simultânea inversa é o método da iteração simultânea aplicado à matriz A^{-1} , e para evitar o cálculo da mesma, assim como no método da potência inversa, decompos a matriz A através da fatoração LU e, em seguida, resolvemos os sistemas triangulares. Nesse caso, o algoritmo fica da seguinte forma:

ALGORITMO:

Dados de entrada:

• Matriz A , matriz de chute inicial $V^{(0)} = [q_1, \dots, q_p]$, número máximo de iterações n_{max} , valor máximo aceitável no critério de parada ϵ .

1. **Passo 1:**

Checar se $V^{(0)}$ é ortonormal. Se não for, aplicar uma fatoração QR .

2. **Passo 2:**

Realizar a fatoração LU da matriz A .

3. **Passo 3:**

Para k de 1 a n_{max} :

$$LUZ^{(k)} = V^{(k-1)}$$

Resolver os sistemas triangulares gerados pela fatoração.

$$H = V^{(k-1)*} Z^{(k)}$$

4. **Passo 4:**

Se $\|Z^{(k)} - V^{(k-1)}H\|_2 < \epsilon$

Parar

$$\text{Senão } V^{(k)}R = Z^{(k)}$$

Fim

Quando implementamos o métodos, é possível que ao final obtenhamos vetores que sejam múltiplos dos autovetores que buscamos. Todavia, isso não altera o processo, visto que os vetores continuam linearmente independentes gerando o mesmo espaço.

Um problema que pode ocorrer nessa etapa, é o algoritmo não fornecer aproximações dos p maiores (ou menores) autovetores, podem aparecer apenas alguns dos outros autovetores. Então, para garantir o bom funcionamento do método, fornecemos uma dimensão maior, digamos $n > p$ e desconsideramos as últimas $n - p$ aproximações geradas.

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] T. Arens, *Why Linear Sampling Works*. Inverse Problems 20: 163-173. Institute of Physics Publishing, 2004.
- [3] F. S. V. Bazán, *Fixed-point iterations in determining the Tikhonov regularization parameter*, Inverse Problems, 24, 2008.
- [4] F. S. V. Bazán and J. B. Francisco, *Improved Fixed-point algorithm for determining a Tikhonov regularization parameter*, Inverse Problems, 25, 2009.
- [5] F. S. V. Bazán, J. B. Francisco, K. H. Leem and G. Pelekanos, *Maximum Product Criterion as Tikhonov Parameter Choice-rule for Kirsch's Modified Linear Sampling Method*. Submetido em 2010.
- [6] F. S. V. Bazán and L. S. Borges, *Métodos para Problemas Inversos de Grande Porte*. Notas em Matemática Aplicada, Vol. 39. SBMAC, 2009.
- [7] A. De Cezaro, F. T. de Cezaro, *Problemas Inversos e a Matemática da Tomografia Computadorizada*. Sociedade Brasileira de Matemática. V Bienal da SBM, 2010.
- [8] H. S. Chaim, *A Integral de Lebesgue e suas Aplicações*. Colóquio Brasileiro de Matemática; 11th, 1977.
- [9] F. Cakoni and D. Colton, *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory*. Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer-Verlag. Berlin, 2006.
- [10] D. Colton, J. Coyle and P. Monk, *Recent Developments in Inverse Acoustic Scattering Theory*. SIAM Review, 42: 369-414, 2000.

- [11] D. Colton and A. Kirsch, *A Simple Method for Solving Inverse Scattering Problems in the Resonance Region*. Inverse Problems 12, 383-393. IOP Publishing Ltd, 1996.
- [12] D. Colton and R. Kress *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, New York:Springer-Verlag, 1992.
- [13] D. Colton and P. Monk, *A Linear Sampling Method for the Detection of Leukemia using Microwaves*. SIAM J. Appl. Math, 58: 926-941, 1998.
- [14] D. Colton, M. Piana and R. Potthast, *A Simple Method Using Morozov's Discrepancy Principle for Solving Inverse Scattering Problems*. Inverse Problems 13, 1477-1493. UK, 1997.
- [15] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer, *Regularization of inverse problems, volume 375 of Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [16] M. Fares, S. Gratton and P. Toint, *SVD-tail: a new linear-sampling reconstruction method for inverse scattering problems*, Inverse Problems 25, 2009.
- [17] M. B. Fares, S. Gratton and P. L. Toint, *Fast Regularized Linear Sampling for Inverse Scattering Problems*. Numerical Linear Algebra with Applications. John Wiley and Sons Ltd, 2010.
- [18] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*. 3rd ed. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [19] C. W. Groetsch, *Inverse problems in the mathematical sciences. Vieweg Mathematics for Scientists and Engineers*. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1993.
- [20] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Dover Publications. New York, 1953.
- [21] P. C. Hansen, *Regularization tool version 4.0 for Matlab 7.3*. Numerical Algorithms, 2007, pp. 189-194.
- [22] T. Hohage, *Convergence Rates of a Regularized Newton Method in Sound-hard Inverse Scattering*. SIAM J. Numer. Anal., 36: 125-142, 1998.

- [23] T. Johansson and B. D. Sleeman, *Reconstruction of an Acoustically Sound-soft Obstacle from one Incident Field and the Far Field Pattern*. IMA Journal of Applied Mathematics 72, 96-112. Oxford University Press, 2007.
- [24] J. B. Keller, *Inverse problems*. Amer. Math. Monthly, 83, 1976.
- [25] K. Kim, K. H. Leem and G. Pelekanos, *An Alternative to Tikhonov Regularization for Linear Sampling Methods*. Acta Appl Math. Springer, 2009.
- [26] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, New York: Springer-Verlag, 1996.
- [27] A. Kirsch, *Characterization of the Shape of a Scattering Obstacle Using the Spectral Data of the Far Field Operator*. Inverse Problems 14 p.1489-1512, UK, 1998.
- [28] A. Kirsch, *The Domain Derivative and Two Applications in Inverse Scattering Theory*. Inverse Problems, 9: 81-96, 1993.
- [29] A. Kirsch and N. Grinberg, *The Factorization Method for Inverse Problems*, Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [30] R. Kress, *Linear Integral Equations*. Springer-Verlag. Berlin, 1989.
- [31] R. Kress, *Numerical Methods in Inverse Obstacle Scattering*. Austral. Mathematical Soc, 2000.
- [32] R. Kress, *A Newton Method in Inverse Obstacle Scattering*. In Bui et al, editors, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, 425-432. Balkema, Rotterdam, 1994.
- [33] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley. 1989.
- [34] K. H. Leem, G. Pelekanos and F. S. V. Bazán, *Fixed-point iterations in determining a Tikhonov regularization parameter in Kirsch's factorization method*. Appl. Math. And Computation, Vol. 216, Issue 12, pp. 3747-3753, 2010.
- [35] A. J. S. Neto, F. D. M. Neto, *Problemas Inversos, Conceitos Fundamentais e Aplicações*. Rio de Janeiro, EdUERJ, 2005.
- [36] C. J. Nolan and M. Cheney, *Synthetic Aperture Inversion*. Inverse Problems, 18: 221-235, 2002.

- [37] M. Piana, *A Simple Regularization Method for Solving Acoustical Inverse Scattering Problems*. Journal of Computational Acoustics, Vol. 9, No. 2, 565-573. IMACS, 2001.
- [38] Platão, *A República: Coleção A Obra - Prima de cada Autor*. Martin Claret, São Paulo SP, 2002.
- [39] T. A. Regińska, *A Regularization Parameter in Discrete Ill-posed Problems*. SIAM, vol 17, pp. 740-749, 1996.
- [40] B. P. Rynne and M. A. Youngson, *Linear Functional Analysis*. Second Edition. London. Springer-Verlag, 2008.
- [41] G. W. Stewart, *Matrix Algorithms. Volume I: Basic Decompositions*. SIAM. Philadelphia, 1998.
- [42] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations - Basic Theory*. Springer-Verlag. New York, 1996.
- [43] Z. Wang and J. Liu, *New Model Function Methods for Determining Regularization Parameters in Linear Inverse Problems*. Applied Numerical Mathematics 59, 2489-2506. Elsevier B. V., 2009.
- [44] Y. Zou and Z. Gou, *A Review of Electrical Impedance Techniques for Breast Cancer Detection*. Medical Engineering and Physics, 25: 79-90, 2003.