

Espalhamento $(\vec{e}, e'p)$ na aproximação relativística de Hartree e efeitos de polarização

DOUTORANDO*

CEZAR AUGUSTO ROMANE JACOB

Orientador :

JOSÉ RICARDO MARINELLI

*Tese apresentada à Pós-Graduação em
Física da Universidade Federal de Santa Ca-
tarina, como parte dos requisitos para ob-
tenção do título de Doutor em Física.*

UFSC - Florianópolis

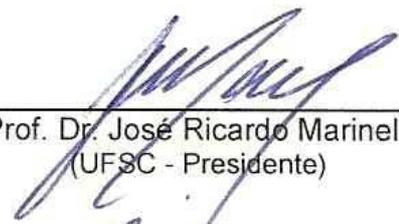
Julho de 2010

*Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES / CNPq.

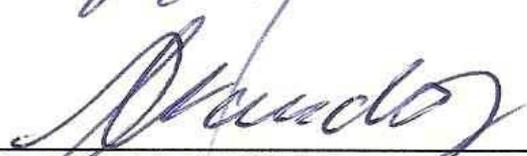
Espalhamento ($\bar{e}, e' p$) na aproximação relativística de Hartree e efeitos de polarização

Cezar Augusto Romane Jacob

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de **DOUTOR EM FÍSICA**, na área de concentração **Física Nuclear e de Hádrons** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.



Prof. Dr. José Ricardo Marinelli
(UFSC - Presidente)



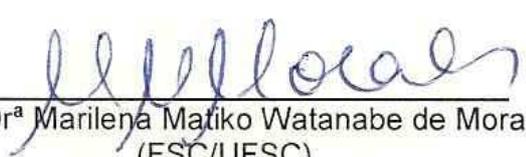
Prof. Dr. Roberto Cid Fernandes Junior
(FSC/UFSC - Coordenador do Programa)



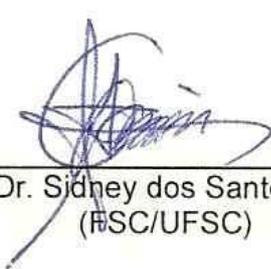
Prof. Dr. Marcelo Chiapparini
(UERJ/F)



Prof. Dr. Valeriy Denyak
(UFTPR)



Profª Drª Marilena Matiko Watanabe de Moraes
(FSC/UFSC)



Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
(FSC/UFSC)

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para que este trabalho se tornasse realidade. Minha família, que sempre me apoiou, meus colegas da pós-graduação, que sempre estavam ali presentes em meu dia-a-dia, meu orientador, que com muita paciência me conduziu neste trabalho, aos professores, que sempre contribuíram para o aprimoramento de meus conhecimentos e a Adriana minha namorada, que sempre esteve presente nos bons e nos maus momentos. Agradeço também a Deus, por ter guiado meus passos até aqui. Agradeço a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho e que eu não citei. A todos o meu muito obrigado.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	8
1 Teoria do Espalhamento	12
1.1 Notação e Cinemática Usada	12
1.1.1 Notação quadri-vetorial	12
1.1.2 A cinemática do espalhamento de elétrons relativísticos	14
1.2 Cálculo da Seção de Choque	17
1.2.1 Espalhamento de elétrons polarizados $(\vec{e}, e'p)$	22
1.2.2 Cálculo do tensor leptônico	24
2 O Modelo Nuclear	27
2.1 Modelo de Walecka e aproximação relativística de Hartree	27
2.2 Densidade de corrente para partículas com uma estrutura interna	34
2.3 Estado final do nucleon no contínuo	35
2.3.1 Potencial óptico complexo na aproximação de impulso	36
2.3.2 Aproximação de onda distorcida	38
2.4 Densidades de Corrente	39
2.5 Projeção nos estados de energia positiva	45
3 Resultados Numéricos e Efeitos de Polarização	48
3.1 Espalhamento elástico	48
3.2 Geometria do espalhamento	52
3.2.1 Seção de choque reduzida e assimetrias	52
3.3 Resultados	53

3.3.1	Resultados para o Oxigênio (^{16}O)	53
3.3.2	Resultados para o Carbono (^{12}C)	83
Apêndice A		104
Apêndice B		113
Referências Bibliográficas		116

Resumo

Neste trabalho, fazemos um estudo do espalhamento quasielástico de elétrons pelo núcleo, quando um próton é detectado em coincidência com o elétron espalhado. Em particular, o caso em que o elétron inicial é polarizado, tomando o limite de massa nula para o mesmo, é analisado. Os fatores de forma são explicitamente obtidos, considerando que o próton no estado final é dado por uma expansão em ondas parciais e que o elétron é descrito por uma onda plana. O núcleo por sua vez é descrito por um modelo relativístico, na aproximação de campo médio de Hartree, onde o potencial é gerado pela troca de mésons escalares, vetoriais, isovetorias e pelo fóton, sendo os parâmetros de acoplamento dependentes da densidade. Para a descrição do próton no estado final, as densidades de campo médio obtidas são utilizadas para a construção de um potencial complexo, através do potencial nucleon-nucleon. Os efeitos do mar de Dirac nas aproximações feitas são também discutidos. Aplicações numéricas são apresentadas para o ^{16}O e para o ^{12}C e comparadas com os dados experimentais disponíveis.

Abstract

Quasielastic electron-nucleus scattering in which the struck proton is measured in coincidence with the electron, is analyzed in the case that the electron initial polarization is also known, in the zero mass limit. The form factors are explicitly obtained taking into account the final state interactions for the proton, using a partial wave phase-shift expansion, while a first order Born approximation for the electron is taken. The nucleus structure is described by a relativistic model including scalar, vector and vector-isovector mesons and the electromagnetic interaction, solved in the Hartree approximation and considering density dependent coupling constants. In order to describe the final state interactions, the mean field densities are then folded with the bare nucleon-nucleon interaction. The Dirac sea effects generated by these approximations are also discussed. Numerical applications for ^{16}O and ^{12}C are presented and compared to available experimental data.

Introdução

Uma das técnicas mais utilizadas na obtenção de informações envolvendo partículas elementares é o espalhamento entre elas, pois esta nos revela várias características tanto da partícula incidente quanto da partícula alvo, assim como dos produtos da reação. A grandeza mais importante neste tipo de processo é a seção de choque de espalhamento (ou de reação). Para que ocorra o espalhamento as partículas interagem entre si, causando um desvio em sua trajetória relativa. Do ponto de vista quântico, a seção de choque deve depender da densidade de corrente de probabilidade das partículas do alvo e das partículas incidentes. Procura-se então formular modelos teóricos que permitam obter estas densidades, cuja validade pode ser testada comparando-se com a seção de choque medida experimentalmente. Outras informações importantes neste tipo de experimento são o ângulo de espalhamento e a energia final das partículas detectadas, bem como seus momentos. Estas quantidades podem ser obtidas por medidas diretas dos produtos do espalhamento e a partir daí podemos inferir os valores de grandezas que não podemos medir diretamente.

Um tipo de espalhamento importante na obtenção de informações sobre o núcleo atômico, ou de forma mais geral, espalhamento por alvos hadrônicos, é o que utiliza léptons carregados. Neste caso, a interação entre as partículas é essencialmente eletromagnética. É o caso do espalhamento de elétrons a energias intermediárias (da ordem de algumas dezenas de MeV até alguns poucos GeV) pelo núcleo. No gráfico da figura 1, é mostrado um esquema da seção de choque diferencial para o espalhamento de elétrons no núcleo.

O chamado espalhamento $(\vec{e}, e'p)$ é a reação na qual a partícula incidente é um elétron polarizado e a partícula alvo é um núcleo, o produto é um elétron espalhado observado em coincidência com um próton arrancado do núcleo por este mesmo elétron. Um elétron na faixa de energia indicada na figura 1 pode interagir diretamente com um próton do núcleo e quando isto acontece, dizemos que o espalhamento está na região quasi-elástica.

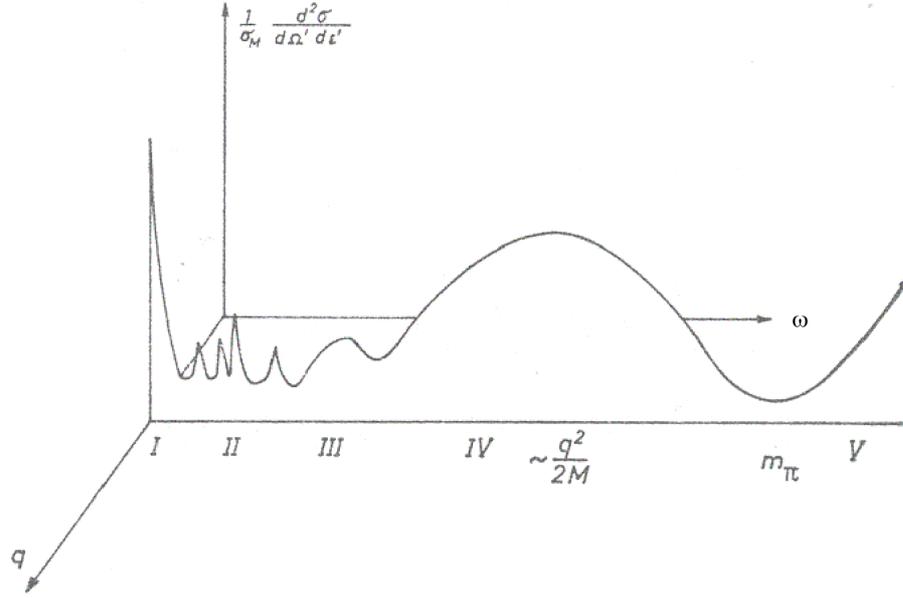


Figura 1: Um esquema da seção de choque diferencial para espalhamento elétron-núcleo como função do momento transferido q e da energia transferida ω . Em suas várias regiões, vemos a seção de choque para (I) espalhamento elástico, (II) excitação de níveis discretos, (III) excitação das ressonâncias gigantes, (IV) o pico quasi-elástico e (V) a contribuição para produção de píons.[1]

Neste trabalho, estamos interessados no espalhamento $(\vec{e}, e'p)$ na região quasi-elástica.

O fato do elétron inicial estar polarizado nos permite obter um fator de forma adicional, além dos quatro fatores de forma usualmente obtidos em medidas em coincidência, o que possibilita termos mais informações a respeito da estrutura do alvo e do mecanismo de reação. O presente trabalho visa explorar as consequências desta polarização inicial do elétron, revendo o formalismo necessário para sua obtenção e obtendo sua contribuição para a seção de choque total a partir de um modelo realista para o alvo.

Como pretendemos deixar claro ao longo deste texto, a seção de choque de espalhamento $(\vec{e}, e'p)$ depende das densidades de corrente de transição do próton arrancado, as quais podem ser obtidas a partir de uma função de onda calculada a partir de um modelo para a estrutura nuclear. Vamos considerar aqui o chamado modelo de Walecka [2] para o núcleo. Este modelo considera efeitos relativísticos explicitamente na dinâmica dos nucleons, o que se justifica em nosso caso devido à crescente faixa de energia dos feixes de elétrons produzidos nos grandes aceleradores e consequente aumento na energia do próton emitido.

Baseando-se na teoria quântica de campos, J. D. Walecka e colaboradores propõem

um modelo para o estudo da dinâmica das interações entre as partículas que compõem o núcleo. Neste modelo, as interações ocorrem através da troca de mésons. Em sua forma usada aqui, podemos considerar um méson escalar σ , um méson vetorial ω , um méson isovetorial ρ e o campo eletromagnético \mathbf{A}_μ . O modelo está baseado em um formalismo lagrangeano onde são descritos todos os graus de liberdade hadrônicos através de campos. A partir desta lagrangeana, podemos obter as equações de movimento e finalmente, os estados das partículas que compõem o sistema. Usaremos aqui uma variação desse modelo, no qual as constantes de acoplamento méson-nucleon dependem da densidade bariônica do sistema e que tem tido bastante sucesso para explicar propriedades médias do núcleo, assim como em aplicações em sistemas astrofísicos. Uma vez que o processo de espalhamento aqui estudado, permite em princípio mapear a função de onda individual de cada nucleon, a dependência dos fatores de forma com essa dependência na densidade pode ser um teste bastante rigoroso para o método.

A aproximação relativística de Hartree consiste em substituir os campos mesônicos por seus valores esperados. O problema pode então ser resolvido obtendo-se as funções de onda de partícula independente para os nucleons. Sabe-se no entanto que essa aproximação embute um ponto delicado do tratamento relativístico de um sistema de muitos corpos, que é a questão dos efeitos do mar de Dirac nos resultados. Conforme apontado anteriormente na literatura [3], o espalhamento quasielástico de elétrons pode ser útil na investigação quantitativa desse ponto. Vamos aqui tentar quantificar os efeitos da aproximação de Hartree na solução do modelo de Walecka, analisando os fatores de forma individuais onde projetamos a solução em seus subestados de energia positiva. A maioria das aplicações do modelo de Walecka a esse problema, encontradas na literatura [4], utilizam parametrizações que incluem termos não-lineares na lagrangeana do modelo. Neste trabalho utilizaremos a versão linear do modelo onde, no entanto, os parâmetros de acoplamento dependem da densidade nuclear.

A fim de descrever o próton ejetado usaremos uma expansão em ondas parciais, cujos *phase-shifts* serão determinados a partir de um potencial ótico complexo construído a partir das densidades autoconsistentes do alvo, obtidas do método de Hartree. Com isso, esperamos obter resultados mais realistas para a seção de choque, levando em conta os efeitos da interação de estados finais de forma mais consistente com o modelo para a estrutura do alvo. Faremos aplicações numéricas de todos os pontos apontados acima para os núcleos de oxigênio (^{16}O) e de carbono (^{12}C), escolhidos em função dos dados experimentais existentes e das aproximações teóricas utilizadas.

No Capítulo 1 apresentamos todo o formalismo necessário para a obtenção da seção de

choque de coincidência, assim como discutimos as aproximações que são aqui utilizadas. No capítulo 2, uma revisão do Modelo Nuclear assim como do método para obtenção do estado final do próton no contínuo, são discutidos, além de algumas das propriedades dos fatores de forma e suas expressões explícitas. Descrevemos ainda a teoria para a obtenção do potencial óptico complexo usado em nossos cálculos, bem como a metodologia aplicada na projeção dos estados iniciais e finais da função de onda do nucleon, nos estados de energia positiva. A seguir, no Capítulo 3, mostramos resultados numéricos para a seção de choque e para os fatores de forma e algumas funções relacionadas aos mesmos e que são de interesse experimental. Finalmente, algumas conclusões e perspectivas são apresentadas.

Capítulo 1

Teoria do Espalhamento

Vamos neste Capítulo apresentar a teoria necessária para o estudo do espalhamento de elétrons inicialmente polarizados, por um núcleo atômico, considerando o regime quasi-elástico. Além da cinemática do espalhamento, discutimos ainda a obtenção da seção de choque na conhecida aproximação de ondas planas para o elétron. Levaremos em consideração que um próton é detectado em coincidência com o elétron espalhado.

1.1 Notação e Cinemática Usada

Nesta seção iremos definir toda a notação que será usada ao longo deste trabalho, bem como a cinemática usada para elaborar nossos resultados.

1.1.1 Notação quadri-vetorial

Antes de mais nada, é preciso deixar claro a notação a ser utilizada em nossos cálculos. Definiremos o quadri-vetor a^μ com $\mu = 0, 1, 2, 3$. Introduziremos a métrica $g_{\mu\nu}$ que pode ser definida pela seguinte matriz:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Agora definiremos o quadri-vetor covariante (índice baixo), como sendo:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \quad (1.2)$$

onde usamos a convenção de soma de Einstein. Por outro lado, chamamos o quadri-vetor com índice alto de contravariante. A quantidade $I = a_\mu a^\mu$ é um invariante. Da mesma forma, dados quaisquer dois quadri-vetores, a quantidade:

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \equiv a \cdot b$$

é um invariante de Lorentz. Ela é definida como o produto escalar entre a e b .

Veremos, a partir de agora, como fica a notação para o momento (p) e energia (E) em termos de quadri-vetores. Se partirmos da relação momento-energia relativística [5]:

$$[(E)^2 - p^2 c^2] - m^2 c^4 = 0 \quad (1.3)$$

obteremos:

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0 \quad (1.4)$$

onde $p_0 = E/c, p_1 = -p_x, p_2 = -p_y, p_3 = -p_z$. Vamos a partir daqui adotar $\hbar = c = 1$. A quantização do sistema nos leva às relações [5]:

$$p_\mu \rightarrow i\partial_\mu \quad , \quad \text{onde} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.5)$$

Em termos das coordenadas, o operador ∂_μ pode ser expresso por:

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Para mais detalhes ver referência [5].

1.1.2 A cinemática do espalhamento de elétrons relativísticos

Vamos abordar a cinemática do espalhamento supondo que o nosso sistema de referência seja o laboratório. O elétron irá interagir com um núcleo em repouso (fixo em relação ao laboratório). Consideraremos um elétron com massa m_e e carga $-e$, quadri-momento inicial $k \equiv k^\mu = (\epsilon_e, \vec{k})$, $k'^\mu = (\epsilon'_e, \vec{k}')$ é o quadri-momento final e q^μ o quadri-momento transferido para o alvo, onde $q^\mu = (k^\mu - k'^\mu) \equiv (\omega, \vec{q})$ com $\omega = \epsilon_e - \epsilon'_e$ e $\vec{q} = (\vec{k} - \vec{k}')$. Temos ainda que:

$$q_\mu^2 \equiv q_\mu q^\mu \equiv q \cdot q = \omega^2 - |\vec{q}|^2 \quad (1.7)$$

Como este espalhamento envolve elétrons relativísticos, as energias envolvidas são muito maiores que a energia de repouso do elétron, que pode, então, ser desprezada. Logo $\epsilon_e \simeq |\vec{k}|$ e $\epsilon'_e \simeq |\vec{k}'|$. Pelo princípio da conservação de energia, temos:

$$\epsilon_e = \epsilon'_e + \Delta E + T_{A-1} \quad (1.8)$$

onde ΔE é a energia de excitação do núcleo e T_{A-1} é a sua energia cinética de recuo. Podemos então escrever:

$$Q_\mu^2 = -q_\mu^2 = 4kk' \sin^2(\theta/2) \quad (1.9)$$

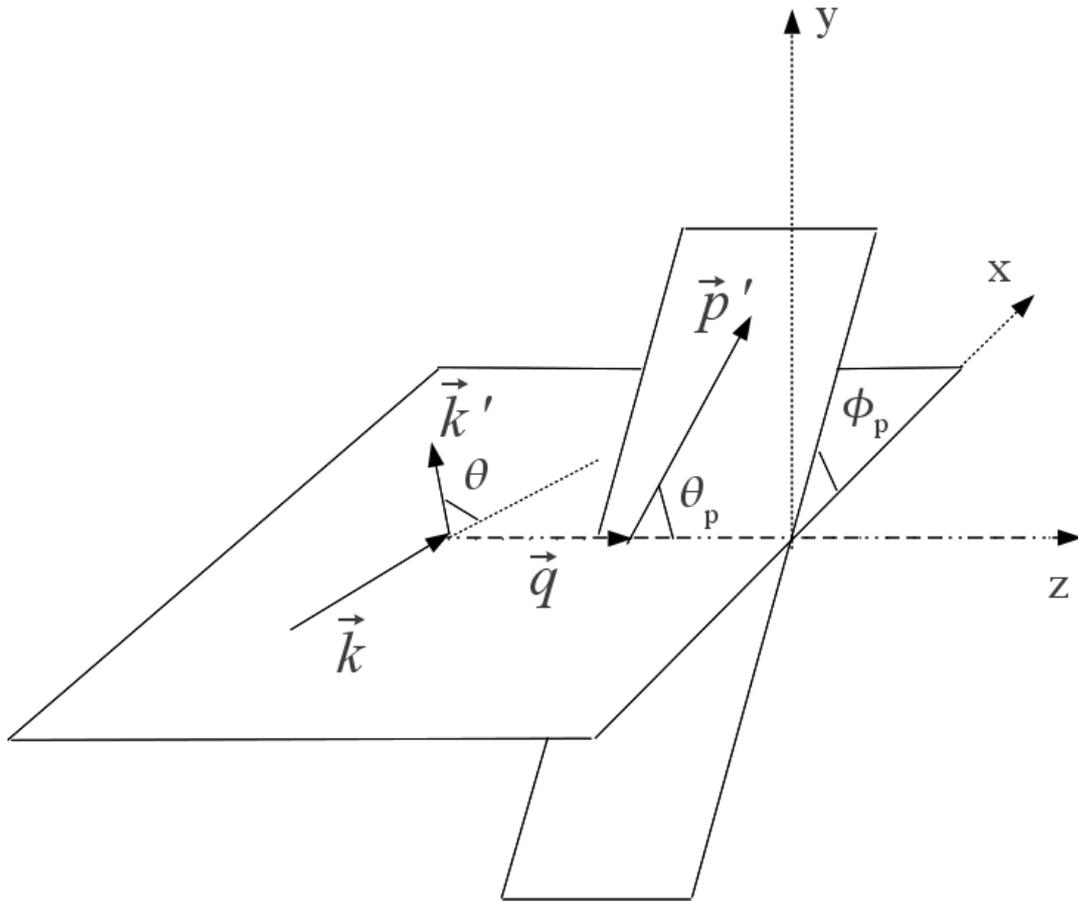


Figura 1.1: Sistema de Referência usado em nossos cálculos. Espalhamento entre um elétron (massa m_e) com energia inicial ϵ_e e momento inicial \vec{k} e um núcleo (massa M) em repouso em relação ao referencial do laboratório. Após a interação é detectada uma partícula em coincidência com o elétron, a qual é arrancada da estrutura nuclear. O elétron possui energia final ϵ'_e e momento final \vec{k}' , o núcleo possui energia de recuo T_{A-1} e momento \vec{P}_{A-1} e a partícula detectada em coincidência possui energia ϵ'_p e momento \vec{p}' .

Pela figura (1.1), vemos que θ é o ângulo de espalhamento do elétron. Espalhamento de elétrons no qual um produto é detectado em coincidência com o elétron espalhado

pode ser expresso por $A(e, e'x)B$, onde x denota este produto (que pode ser um próton, um nêutron, um pión, uma partícula alfa e outras), A e B são os núcleos inicial e final respectivamente. Este tipo de experimento pode ser utilizado para estudar reações em várias regiões cinemáticas e para detectar diferentes tipos de partículas. Neste trabalho discutiremos a reação $A(\vec{e}, e'p)(A-1)$ na região quasi-elástica. Neste caso, o elétron interage basicamente com o próton emitido.

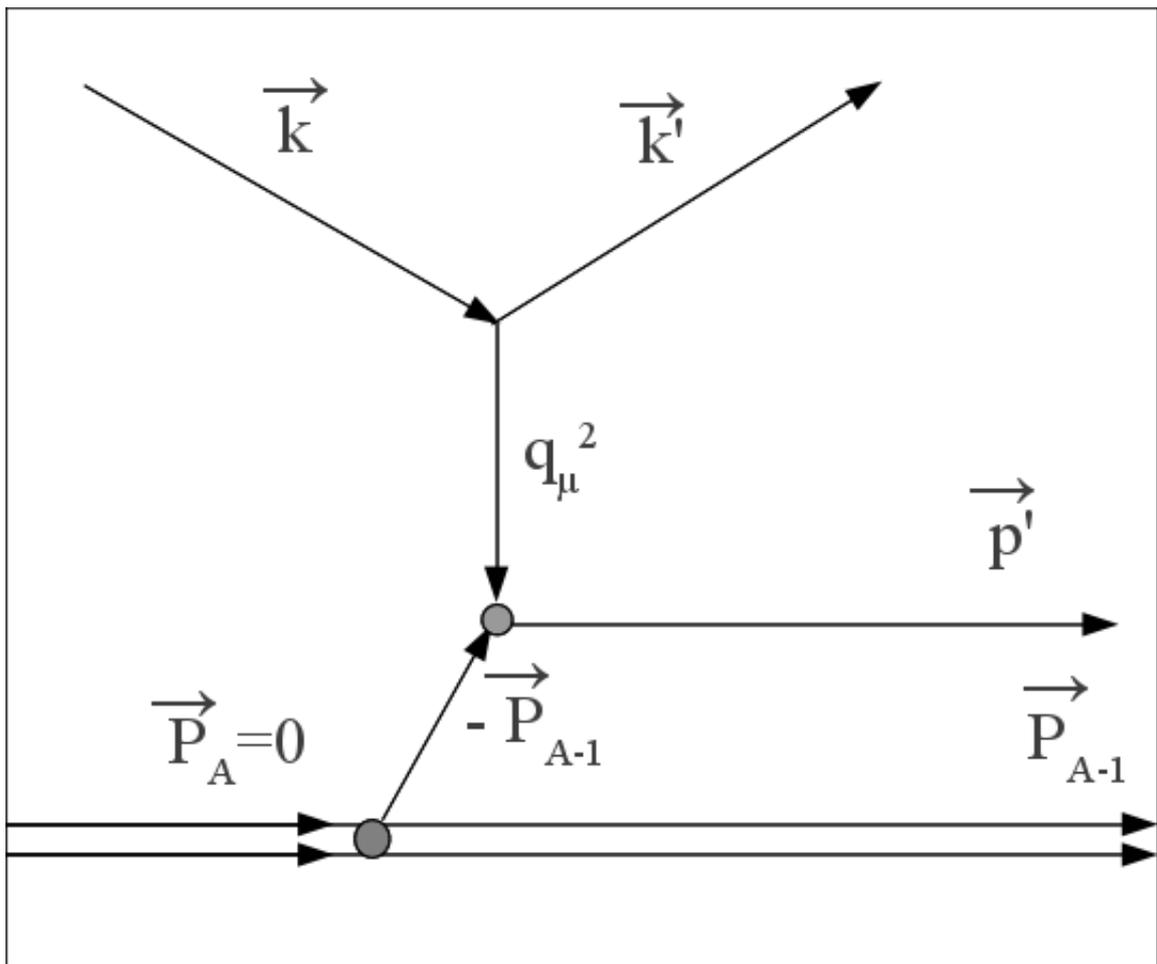


Figura 1.2: Diagrama para troca de um fóton para a reação $(e, e'p)$. Aqui, \vec{P}_A é o momento inicial do núcleo e é igual a zero, \vec{P}_{A-1} é o momento de recuo do mesmo após a interação. O momento do próton arrancado é igual a \vec{p}' (as setas não indicam a direção dos respectivos momentos).

O comportamento da seção de choque seria facilmente obtido se este próton não tivesse movimento dentro do núcleo. Porém, o momento inicial do próton (\vec{p}) está ligado à dinâmica interna do sistema, podendo ser obtido a partir da cinemática da reação. Em nosso trabalho, estamos particularmente interessados nesta dinâmica. Os detalhes das

hipóteses feitas para descrever tal dinâmica, serão discutidos no próximo capítulo. Temos as seguintes relações:

$$\vec{q} = \vec{p}' + \vec{P}_{A-1} \quad (1.10)$$

onde \vec{P}_{A-1} é o momento de recuo do núcleo e:

$$\omega = T_{p'} + T_{A-1} + E_{ex} \quad (1.11)$$

é a energia transferida, onde $T_{p'}$ é a energia cinética do próton arrancado, T_{A-1} é a energia cinética do núcleo residual e E_{ex} é a energia necessária para separar o próton do núcleo, deixando o núcleo residual em um de seus autoestados. Para que o processo seja considerado quasi-elástico, temos que: $\omega \gg \langle B \rangle$ e $|\vec{q}| \gg \frac{1}{R}$, onde R representa a dimensão média do núcleo e $\langle B \rangle$ o valor médio da energia de ligação da partícula no sistema nuclear. Neste processo, é como se o elétron interagisse diretamente com o próton sem sentir a ação do restante do núcleo, ou seja, a interação é equivalente à interação elástica de um elétron com um próton, com a diferença de que este último está no meio nuclear. Temos ainda para o momento do próton inicial $\vec{p} = -\vec{P}_{A-1}$, resultado obtido a partir da conservação de momento e da hipótese de espalhamento quasi-elástico.

1.2 Cálculo da Seção de Choque

Podemos derivar a seção de choque da reação $A + \vec{e} \rightarrow (A-1) + e' + p$ a partir da Regra de Ouro de Fermi, onde a seta (\vec{e}) indica que o elétron está inicialmente polarizado. Esta é uma maneira aproximada de calcular a taxa de transição entre dois auto-estados de um sistema usando a Teoria de Perturbação Dependente do Tempo [1, 5, 6]. Essa taxa de transição é dada por:

$$w = |\langle \Phi_f | \mathcal{H} | \Phi_i \rangle|^2 \rho_f \quad (1.12)$$

onde ρ_f é a densidade de estados finais do sistema e $\langle \Phi_f | \mathcal{H} | \Phi_i \rangle$ é o elemento de matriz da perturbação \mathcal{H} entre os estados inicial $|\Phi_i\rangle$ e final $|\Phi_f\rangle$. A partir da taxa de transição w calculamos a seção de choque de espalhamento [6]:

$$d\sigma = \frac{1}{j_{inc}} \frac{1}{T} \sum_{if} |\langle \Phi_f | \mathcal{H} | \Phi_i \rangle|^2 \rho_f \quad (1.13)$$

onde j_{inc} é o fluxo de partículas incidentes, T é o intervalo de tempo de observação da transição e o somatório corresponde a uma média sobre os estados iniciais do sistema e soma sobre os estados finais. No espalhamento $(\vec{e}, e'p)$ temos duas partículas envolvidas no início da reação, o elétron e o núcleo. Como fixamos o referencial neste último, o fluxo de partículas incidente j_{inc} é dado pelo fluxo de elétrons que incide sobre ele:

$$j_{inc} = \frac{\epsilon_e v_e}{m_e \mathcal{V}} \quad (1.14)$$

onde,

$$v_e = \frac{|\vec{k}|}{\epsilon_e} \quad (1.15)$$

é a velocidade dos elétrons incidentes (medida no referencial do laboratório) e \mathcal{V} é o volume de normalização. O fator ϵ_e/m_e na definição do fluxo surge devido ao fato de estarmos trabalhando em cinemática relativística, porque um elemento de volume $d\mathcal{V}$ observado de seu referencial de repouso sofre uma contração dada pelo fator de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ quando observado de um referencial que se move com velocidade v em relação a ele. Sendo assim, o volume de normalização \mathcal{V} da função de onda do elétron incidente quando observado do referencial do laboratório é contraído de um fator ϵ_e/m .

Para calcular a taxa de transição começamos com a densidade de estados finais para o espalhamento $(e, e'p)$. Essa densidade é dada pela multiplicação das densidades de estado das partículas que compõem o sistema em seu estado final *:

$$\rho_f = \rho_{e'} \rho_{p'} \rho_{A-1} = \frac{m_e \mathcal{V} d^3 k' m_p^2 \mathcal{V} d^3 p' M_{A-1} \mathcal{V} d^3 P_{A-1}}{\epsilon_e' (2\pi)^3 \epsilon_p' (2\pi)^3 \epsilon_{A-1} (2\pi)^3}. \quad (1.16)$$

*Os fatores do tipo m/ϵ aparecem também aqui pelos mesmos motivos que na definição do fluxo.

Daqui em diante iremos supor que $\mathcal{V} = 1$, uma vez que o resultado final para a seção de choque não deve depender do volume de normalização. Precisamos agora determinar o elemento de matriz $\langle \Phi_f | \mathcal{H} | \Phi_i \rangle$ para calcular a seção de choque. Este pode ser obtido a partir de [1]:

$$\langle \Phi_f | \mathcal{H} | \Phi_i \rangle = - \int d^{(4)}x \mathcal{H}(x), \quad (1.17)$$

onde,

$$\mathcal{H}(x) = e \mathcal{A}_\mu(x) J^\mu(x), \quad (1.18)$$

é a densidade Hamiltoniana da interação. Esta é escrita em termos da quadri-corrente de transição hadrônica $J^\mu(x) \equiv (J^0(x), \mathbf{J}(x))$ do alvo e do potencial $\mathcal{A}_\mu(x)$ gerado pela quadri-corrente do elétron. O potencial $\mathcal{A}_\mu(x)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon cuja fonte é a quadri-corrente do elétron $j_\mu(x) \equiv (j_0(x), -\mathbf{j}(x))$, ou seja,

$$\square \mathcal{A}_\mu(x) = -4\pi j_\mu(x) = -4\pi [e \bar{\psi}'_e(x) \gamma_\mu \psi_e(x)], \quad (1.19)$$

onde $\psi_e(x)$ é a função de onda do elétron e a última igualdade foi obtida devido ao fato do elétron ser uma partícula puntual[†]. A solução dessa equação é bastante conhecida e é dada em termos da integral da função de Green apropriada multiplicada pelo termo de fonte [1, 7].

A quadri-corrente de transição do alvo $J_\mu(x)$ é dada pelo elemento de matriz do operador $\widehat{J}_\mu(x)$ aplicado entre o estado inicial $|\Psi_i\rangle$, formado pelo núcleo alvo, e o estado final $|\Psi_f\rangle$, formado pelo núcleo residual com $A - 1$ nucleons e o nucleon espalhado:

$$J_\mu(x) = \langle \Psi_f | \widehat{J}_\mu(x) | \Psi_i \rangle. \quad (1.20)$$

Separando a parte temporal da quadri-corrente teremos:

$$J_\mu(x) = e^{i(\epsilon_f - \epsilon_i)t} \langle \Psi_f | \widehat{J}_\mu(\vec{r}) | \Psi_i \rangle = e^{i(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A)t} J_\mu(\vec{r}). \quad (1.21)$$

Assim, vemos que para determinar a seção de choque precisamos das funções de onda inicial e final do alvo e dos elétrons incidente e espalhado. A obtenção dos estados do

[†]Veremos mais adiante como obter a corrente no caso de uma partícula com estrutura interna.

alvo será discutida em detalhes no próximo capítulo. A função de onda dos elétrons é encontrada resolvendo a equação de Dirac para os mesmos, o que, na aproximação de Born aqui utilizada, corresponde à solução livre dada por

$$\psi_e(x) = u(k, s)e^{-ik \cdot x}. \quad (1.22)$$

Na função de onda acima os spinores $u(k, s)$ dependem do quadri-momentum k , do spin s e satisfazem:

$$(k \cdot \gamma - m_e)u(k, s) = 0. \quad (1.23)$$

Os spinores são normalizados de maneira que,

$$\bar{u}(k, s)u(k, s) = 1 \quad \text{e} \quad u^\dagger(k, s)u(k, s) = \frac{m_e}{\epsilon_e}. \quad (1.24)$$

Teremos então para a quadri-corrente do elétron:

$$\begin{aligned} j_\mu(x) \equiv e\bar{\psi}'_e(x)\gamma_\mu\psi_e(x) &= ee^{i(k'-k) \cdot x}\bar{u}(k', s')\gamma_\mu u(k, s) \\ &= j_\mu(k, s; k', s')e^{i(k'-k) \cdot x} \end{aligned} \quad (1.25)$$

e o potencial $\mathcal{A}_\mu(x)$ gerado pela corrente acima (também conhecido como potencial de Möller) é :

$$\mathcal{A}_\mu(x) = -\frac{4\pi}{q_\nu q^\nu} j_\mu(k, s; k', s')e^{-iq \cdot x}. \quad (1.26)$$

O elemento de matriz de transição (1.17) pode então ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_f | \mathcal{H} | \Phi_i \rangle &= \frac{4\pi e}{q_\nu q^\nu} j_\mu(k, s; k', s') \int d^{(4)}x e^{i(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \omega)t} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} J^\mu(\vec{r}) \\ &= \frac{4\pi e}{q_\nu q^\nu} j_\mu(k, s; k', s') J^\mu(\vec{q}) (2\pi) \delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e), \end{aligned} \quad (1.27)$$

onde,

$$J^\mu(\vec{q}) = \int d\vec{r} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} J^\mu(\vec{r}), \quad (1.28)$$

é a densidade hadrônica no espaço de momento transferido. Substituindo o elemento de matriz acima em (1.12) [‡], onde a densidade de estados finais ρ_f é dada por (1.16) temos que a seção de choque do espalhamento $(\vec{e}, e'p)$ é:

$$\begin{aligned} d\sigma &= (2\pi)\delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e) \left(\frac{4\pi e}{q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{m_e}{|\vec{k}|} \\ &\times \overline{\sum_{if}} |\mathcal{S}_{fi}|^2 \frac{m_e}{\epsilon'_e} \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{m_N}{\epsilon'_p} \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{M_{A-1}}{\epsilon_{A-1}} \frac{d\vec{P}_{A-1}}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

sendo:

$$\overline{\sum_{if}} |\mathcal{S}_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{ss'} j_\mu^*(k, s; k', s') j_\nu(k, s; k', s') \overline{\sum_{if}} J^{\mu*}(\vec{q}) J^\nu(\vec{q}), \quad (1.30)$$

e onde a segunda somatória do lado esquerdo é agora efetuada somente sobre os estados do alvo. Uma vez que estamos interessados em situações onde apenas o elétron e o próton arrancado, são detetados, podemos integrar no momento final do núcleo residual, o que se resume a efetuarmos a integral:

$$\int d\vec{P}_{A-1} = \mathcal{V}_p = (2\pi)^3, \quad (1.31)$$

onde \mathcal{V}_p é o volume no espaço dos momentos. Obtemos então para a seção de choque:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{(2\pi)^5} \left(\frac{4\pi e}{q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{M_{A-1}}{\epsilon_{A-1}} \frac{m_p}{\epsilon'_p} \frac{m_e^2}{\epsilon'_e |\vec{k}|} \\ &\overline{\sum_{if}} |\mathcal{S}_{fi}|^2 |\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'| d\Omega_{e'} |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega_{p'} \delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e). \end{aligned} \quad (1.32)$$

[‡]Aqui usamos que $[(2\pi)\delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e)]^2 = (2\pi)\delta(\epsilon'_p + \epsilon_{A-1} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e)T$ (páginas 101, 111-112 da referência [6])

A função delta restante representa a conservação da energia do sistema. Podemos nos livrar dela integrando em $|\vec{p}'|$. Para tal usamos que:

$$\delta(f(p)) = \sum_i \frac{\delta(p - p_i)}{\left| \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p=p_i}} \quad (1.33)$$

onde $f(p_i) = 0$. Como o momento do nucleon pode assumir um único valor em módulo para que haja conservação da energia, ou seja:

$$\epsilon'_p = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + m_p^2}, \quad (1.34)$$

temos então que

$$f(|\vec{p}'|) = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + m_n^2} + \sqrt{(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{p}')^2 + M_{A-1}^2} - \epsilon_A - \epsilon_e + \epsilon'_e. \quad (1.35)$$

Logo, a seção de choque é:

$$\frac{d^5\sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} = \left(\frac{4\pi e}{q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{m_p M_{A-1} m_e^2 |\vec{p}'| |\vec{k}'|}{(2\pi)^5 \epsilon_A |\vec{k}'|} f_{rec}^{-1} \sum_{if} |\mathcal{S}_{fi}|^2. \quad (1.36)$$

Para chegarmos ao resultado acima, usamos que

$$\frac{d|\vec{k}'|}{d\epsilon'_e} = \frac{\epsilon'_e}{|\vec{k}'|} \quad (1.37)$$

e definimos o fator de recuo do núcleo

$$f_{rec} = \frac{\epsilon_{A-1}}{\epsilon_A} \frac{\epsilon'_p}{|\vec{p}'|} \left| \frac{\partial f(p)}{\partial p} \right|_{p=|\vec{p}'|} = \left| 1 + \frac{\omega|\vec{p}'| - \epsilon'_p |\vec{q}| \cos \theta_p}{\epsilon_A |\vec{p}'|} \right|. \quad (1.38)$$

Desta forma, resta agora calcular as somas sobre a quantidade $|\mathcal{S}_{fi}|^2$.

1.2.1 Espalhamento de elétrons polarizados ($\vec{e}, e'p$)

Até agora em nenhum momento o fato do elétron incidente ser ou não polarizado foi utilizado. Consideremos agora o cálculo do elemento de matriz S_{if} acima para o caso em

que os elétrons estão inicialmente polarizados. Temos então:

$$\overline{\sum_{if} |S_{if}|^2} = L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (1.39)$$

onde, para elétrons inicialmente polarizados:

$$L^{\mu\nu} = \overline{\sum_{spin}} [\bar{u}(k's')\gamma^\mu(1 \pm h\gamma^5)u(ks)]^* [\bar{u}(k's')\gamma^\nu(1 \pm h\gamma^5)u(ks)], \quad (1.40)$$

onde h indica a polarização do elétron. Uma vez que estamos considerando elétrons com energia bem acima de sua massa de repouso, h é a helicidade do elétron, que só pode, então, ter polarização longitudinal, ou seja, na direção de seu movimento. Desta forma podemos ter $h = \pm 1$ e para espalhamento sem polarização basta fazer $h = 0$. O tensor hadrônico, por sua vez, pode ser escrito como:

$$W_{\mu\nu} = \overline{\sum_{if}} J^{\mu*}(\vec{q}) J^\nu(\vec{q}). \quad (1.41)$$

Da equação de conservação da corrente, tanto para o alvo como para o elétron, temos ([8]):

$$q_\mu J^\mu(q) = 0 \quad q_\mu j^\mu(q) = 0. \quad (1.42)$$

Este resultado permite eliminar uma das componentes da corrente, em geral a componente 3 (ou \hat{z}), em favor da componente temporal. No sistema do laboratório, conforme a figura (1.1) nós temos (onde \hat{z} está na mesma direção de \vec{q}):

$$q_\mu = (w, 0, 0, |\vec{q}|). \quad (1.43)$$

A seguir definimos os versores:

$$\epsilon_{\pm 1}^\mu = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0) \quad (1.44)$$

$$\epsilon_0^\mu = \left(\frac{|\vec{q}|}{|q_\mu|}, 0, 0, \frac{w}{|q_\mu|} \right), \quad (1.45)$$

em termos dos quais podemos expandir as correntes do elétron e do alvo. Podemos então reescrever o tensor leptônico, que é dado agora por:

$$L_{\lambda\lambda'} \equiv \overline{\sum_{spin}} j_{\lambda} j_{\lambda'}^* \quad (1.46)$$

e para o tensor hadrônico:

$$W_{\lambda\lambda'} = \overline{\sum_{if}} J_{\lambda}(q) J_{\lambda'}^*(q), \quad (1.47)$$

onde $\lambda, \lambda' = 0, \pm 1$. Na próxima seção, iremos obter as expressões explícitas para o tensor leptônico.

1.2.2 Cálculo do tensor leptônico

Utilizando o desenvolvimento de Casimir [5] envolvendo as matrizes de Dirac, encontramos para o tensor leptônico:

$$L_{\lambda\lambda'} = 2[k' \cdot \epsilon_{\lambda}^* k \cdot \epsilon_{\lambda'} + k \cdot \epsilon_{\lambda}^* k' \cdot \epsilon_{\lambda'} - k \cdot k' \epsilon_{\lambda}^* \cdot \epsilon_{\lambda'} + 2ih \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\lambda}^{\mu*} \epsilon_{\lambda'}^{\nu} k^{\alpha} k'^{\beta}] \quad (1.48)$$

Na expressão acima $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor totalmente antissimétrico, também conhecido como tensor de Levi-Civita. O último termo da equação (1.48) é o termo devido à polarização do elétron. Para continuar nossos cálculos, temos que usar as relações

$$\epsilon_{\lambda}^{\mu*} = (-1)^{\lambda} \epsilon_{-\lambda}^{\mu}$$

e

$$g_{\mu\nu} \epsilon_{\lambda}^{\mu*} \epsilon_{\lambda'}^{\nu} = (-1)^{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Temos:

$$wj_0 - |q|j_z = 0 \quad \Rightarrow \quad j_z = \frac{w}{|q|}j_0 \quad (1.49)$$

e

$$k \cdot \epsilon_0 = k_0 \quad k \cdot \epsilon_+ = k_+ \quad k \cdot \epsilon_- = k_- \quad k \cdot \epsilon_3 = \frac{w}{|q|}k_0. \quad (1.50)$$

Utilizando esses resultados podemos fazer a contração do tensor leptônico com o tensor hadrônico (mais detalhes no apêndice A). Assim sendo, a seção de choque pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \frac{d^5\sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} &= \left(\frac{4\pi e}{q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{m_p M_{A-1} m_e^2 |\vec{p}'| |\vec{k}'|}{(2\pi)^5 \epsilon_A |\vec{k}|} f_{rec}^{-1} 2\beta \left\{ \right. \\ &\quad \left. v_l w_l + v_t w_t + v_{tt} w_{tt} + v_{tl} w_{tl} + h [v_{tt}^h w_{tt}^h + v_{tl}^h w_{tl}^h] \right\}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

onde $\beta = 2k_0 k'_0 \cos^2(\theta/2)$.

Os dois últimos termos entre colchetes se anulam, caso o elétron não esteja inicialmente polarizado. Ainda, se o próton arrancado não for detetado, apenas os dois primeiros termos sobrevivem (uma vez que integramos nos ângulos de detecção do próton) e reobtemos o resultado bem conhecido para o espalhamento (e, e') em termos dos chamados fatores de forma longitudinal (w_l) e transverso (w_t). Sintetizamos abaixo, os diferentes fatores que ocorrem na seção de choque:

$$\begin{aligned} v_l &= \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2, \\ v_t &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} + tg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{tt} &= -\frac{1}{2} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}, \\
v_{tl} &= \frac{-Q_\mu^2}{\sqrt{2}|\vec{q}|^2} \sqrt{tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}, \\
v_{tt}^h &= tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}, \\
v_{tl}^h &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} tg\left(\frac{\theta}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_l &= \overline{\sum_{if} J_0 J_0^*}, \\
w_t &= \overline{\sum_{if} [J_+ J_+^* + J_- J_-^*]}, \\
w_{tt} &= 2 \overline{\sum_{if} Re[J_+^* J_-]}, \\
w_{tl} &= 2 \overline{\sum_{if} Re[J_0^* (J_- - J_+)]}, \\
w_{tt}^h &= \overline{\sum_{if} [J_+ J_+^* - J_- J_-^*]}, \\
w_{tl}^h &= 2 \overline{\sum_{if} Re\{J_0^* (J_+ + J_-)\}}.
\end{aligned}$$

Capítulo 2

O Modelo Nuclear

Abordaremos a seguir todo o desenvolvimento para a obtenção da corrente do alvo nuclear. Primeiramente iremos apresentar, o modelo utilizado para descrever a estrutura nuclear, ou seja, os possíveis estados ligados do próton assim como o estado final do mesmo no contínuo. Posteriormente, definimos o operador densidade de corrente hadrônico e apresentamos a forma explícita da corrente de transição assim como algumas de suas propriedades e simetrias. Finalmente, discutimos algumas das consequências da aproximação usada, na obtenção dessas correntes.

2.1 Modelo de Walecka e aproximação relativística de Hartree

Neste trabalho, adotamos o enfoque geral de que o sistema nuclear é formado por prótons, neutrons e partículas mediadoras. Os mésons exercem o papel de mediadores da interação entre os nucleons, de forma análoga aos fótons, mediadores da interação eletromagnética entre partículas eletricamente carregadas. Atualmente, a teoria que nos permite descrever um sistema de muitos corpos composto por hádrons é a teoria quântica de campos, que se baseia em uma densidade lagrangeana apropriada.

Por analogia à eletrodinâmica quântica (QED), a teoria que descreve hádrons interagindo entre si, é chamada de hadrodinâmica quântica (QHD). Com base na teoria de campos, foi proposto um modelo, o qual é descrito em detalhes na referência [2] e que é

conhecido como modelo de Walecka . Nesse modelo, a lagrangeana correspondente contém os termos livres de nucleons e dos mediadores (mesons), bem como os termos de interação.

A partir desta lagrangeana, podemos encontrar as equações de movimento para os campos e a hamiltoniana do sistema. Com a hamiltoniana, podemos encontrar as funções de onda das partículas e outras grandezas de interesse. Neste estudo, estamos utilizando o modelo de Walecka, incluindo mésons escalares (σ), vetoriais (ω), isovetoriais(ρ) e também a interação eletromagnética.

A função densidade lagrangeana pode ser escrita como segue:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N^{liv} + \mathcal{L}_\sigma^{liv} + \mathcal{L}_\omega^{liv} + \mathcal{L}_\rho^{liv} + \mathcal{L}_\gamma^{liv} + \mathcal{L}_{NN\sigma}^{int} + \mathcal{L}_{NN\omega}^{int} + \mathcal{L}_{NN\rho}^{int} + \mathcal{L}_{NN\gamma}^{int} \quad (2.1)$$

onde \mathcal{L}_N^{liv} é a lagrangeana livre do nucleon, \mathcal{L}_σ^{liv} é a lagrangeana livre do méson σ , \mathcal{L}_ω^{liv} é a lagrangeana livre do méson ω , \mathcal{L}_ρ^{liv} é a lagrangeana livre do méson ρ , \mathcal{L}_γ^{liv} é a lagrangeana livre do campo eletromagnético, $\mathcal{L}_{NN\sigma}^{int}$ é a lagrangeana de interação nucleon-nucleon pela troca do méson σ , $\mathcal{L}_{NN\omega}^{int}$ é a lagrangeana de interação nucleon-nucleon pela troca do méson ω , $\mathcal{L}_{NN\rho}^{int}$ é a lagrangeana de interação pela troca do méson ρ e $\mathcal{L}_{NN\gamma}^{int}$ é a lagrangeana de interação pela troca de fótons.

A seguir, mostraremos as densidades lagrangeanas para os campos livres [2]:

$$\mathcal{L}_N^{liv} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\Psi(x) \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_\sigma^{liv} = -\frac{1}{2} [(m_\sigma)^2 \sigma^2(x) - \partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x)] \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_\omega^{liv} = -\frac{1}{4} [F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - 2(m_\omega)^2 \omega_\nu(x)\omega^\nu(x)] \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_\rho^{liv} = -\frac{1}{4} [\mathbf{B}_{\mu\nu}(x) \cdot \mathbf{B}^{\mu\nu}(x) - 2(m_\rho)^2 \mathbf{b}_\mu(x) \cdot \mathbf{b}^\mu(x)] \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_\gamma^{liv} = -\frac{e^2}{4}\mathcal{A}_{\mu\nu}(x)\mathcal{A}^{\mu\nu}(x) \quad (2.6)$$

onde M , m_σ , m_ω e m_ρ são as massas de repouso do nucleon e dos respectivos mésons. Temos também que $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\omega_\nu(x) - \partial_\nu\omega_\mu(x)$, $\mathcal{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ e $\mathbf{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{b}_\nu(x) - \partial_\nu\mathbf{b}_\mu(x)$. Nas equações acima, os campos do nucleon, do méson σ , do méson ω , do méson ρ e do fóton são, respectivamente, $\Psi(x)$, $\sigma(x)$, $\omega(x)$, $\mathbf{b}_\mu(x)$ e $A_\mu(x)$. Observemos que o campo $\mathbf{b}_\mu(x)$ é um vetor no espaço de isospin.

Para as densidades lagrangeanas de interação, temos [2]:

$$\mathcal{L}_{NN\sigma}^{int} = g_\sigma\bar{\Psi}(x)\sigma(x)\Psi(x) \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_{NN\omega}^{int} = -g_\omega\bar{\Psi}(x)\omega^\nu(x)\gamma_\nu\Psi(x) \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_{NN\rho}^{int} = -\frac{1}{2}g_\rho\bar{\Psi}(x)\vec{\tau} \cdot \mathbf{b}^\nu(x)\gamma_\nu\Psi(x) \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}_{NN\gamma}^{int} = -e\bar{\Psi}(x)A^\nu(x)\left(\frac{\tau_3 + 1}{2}\right)\gamma_\nu\Psi(x) \quad (2.10)$$

o termo $\vec{\tau}$ é a matriz de isospin do nucleon e $\tau_3 = (-1)^m$, onde $m = 0$ se o nucleon for o próton e $m = 1$ se o nucleon for o neutron. Aqui g_σ , g_ω e g_ρ são as constantes de acoplamento dos mésons σ , ω e ρ , respectivamente. Em busca de aperfeiçoar o modelo original, no qual estes valores são constantes, vamos considerar que eles agora dependem da densidade bariônica ϱ_B do núcleo. Essa forma de parametrizar as constantes de acoplamento foi desenvolvida com a finalidade de reproduzir a energia de ligação de núcleos finitos e, ao mesmo tempo, propriedades da matéria nuclear [9], tendo se mostrado bastante eficiente. Faremos, então, as substituições $g_\sigma \rightarrow \Gamma_\sigma(\varrho_B)$, $g_\omega \rightarrow \Gamma_\omega(\varrho_B)$ e $g_\rho \rightarrow \Gamma_\rho(\varrho_B)$, em busca de resultados mais realistas para a seção de choque e para os fatores de forma do núcleo. Utilizaremos para as constantes de acoplamento a mesma forma funcional, assim como os parâmetros listados em [9]:

Todo o desenvolvimento para a obtenção das funções $\Gamma_i(\varrho_B)$ pode ser encontrado na referência [9], sendo que aqui colocaremos diretamente os principais resultados:

$$\Gamma_i(\varrho_B) = \Gamma_i(\varrho_B^{sat}) f_i(\varrho_B/\varrho_B^{sat}) \quad \text{para } i = \sigma, \omega \quad (2.11)$$

onde:

$$f_i(\varrho_B/\varrho_B^{sat}) = a_i \frac{1 + b_i(\varrho_B/\varrho_B^{sat} + d_i)^2}{1 + c_i(\varrho_B/\varrho_B^{sat} + d_i)^2} \quad (2.12)$$

aqui as quantidades a_i , b_i , c_i e d_i são quantidades reais e positivas, ϱ_B^{sat} é a densidade de saturação para a matéria nuclear. O termo Γ_ρ só necessita de um parâmetro a_ρ e sua expressão é:

$$\Gamma_\rho(\varrho_B) = \Gamma_\rho(\rho_B^{sat}) e^{-a_\rho(\varrho_B/\varrho_B^{sat}-1)}. \quad (2.13)$$

A partir de agora, por questão de compactação das expressões, podemos omitir a dependência em x nos campos, ficando esta implícita. Outras dependências serão colocadas de forma explícita em casos onde sejam necessárias.

Utilizando a equação de Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \chi]} = 0$, onde χ representa qualquer um dos graus de liberdade do sistema e levando ainda em conta a equação da continuidade para o nucleon, ou seja, $\partial_\mu [\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi] = 0$, podemos obter as equações de movimento do sistema:

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + M)\Psi = \left[\Gamma_\sigma \sigma - \Gamma_\omega \omega^\nu \gamma_\nu - \frac{\Gamma_\rho}{2} \vec{\tau} \cdot \mathbf{b}^\nu \gamma_\nu - eA^\nu \frac{(\tau_3 + 1)}{2} \gamma_\nu + \mathcal{T} \right] \Psi \quad (2.14)$$

$$(\square + m_\sigma^2) \sigma(x) = \Gamma_\sigma \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \quad (2.15)$$

$$(\square + m_\omega^2) \omega_\nu(x) = \Gamma_\omega \bar{\Psi}(x) \gamma_\nu \Psi(x) \quad (2.16)$$

$$(\partial^\mu \mathbf{B}_{\mu\nu} + m_\rho^2 \mathbf{b}_\nu(x)) = \Gamma_\rho \bar{\Psi}(x) \vec{\tau} \gamma_\nu \Psi(x) \quad (2.17)$$

$$e^2 \square A_\nu(x) = e \bar{\Psi}(x) \left(\frac{\tau_3 + 1}{2} \right) \gamma_\nu \Psi(x) \quad (2.18)$$

onde \square é a representação para o operador laplaceano em quatro dimensões, também conhecido como *d'alembertiano* e \mathcal{T} é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial \varrho_B} \frac{\partial \varrho_B}{\partial \bar{\Psi}} \bar{\Psi}(x) \sigma(x) \Psi(x) - \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial \varrho_B} \frac{\partial \varrho_B}{\partial \bar{\Psi}} \bar{\Psi}(x) \omega^\nu(x) \gamma_\nu \Psi(x) \\ &- \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial \varrho_B} \frac{\partial \varrho_B}{\partial \bar{\Psi}} \frac{1}{2} \bar{\Psi}(x) \vec{\tau} \cdot \mathbf{b}^\nu(x) \gamma_\nu \Psi(x) \end{aligned} \quad (2.19)$$

é o termo que aparece quando consideramos a teoria de Walecka com os acoplamentos dependendo da densidade bariônica do núcleo [9]. Vamos escrever $\varrho_B = \sqrt{j^\mu j_\mu}$, onde $j_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$ e com isso, temos :

$$\mathcal{T} = \frac{j_\mu}{\varrho_B} \left(\frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial \varrho_B} \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \omega_\nu + \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial \varrho_B} \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\vec{\tau}}{2} \Psi \cdot \mathbf{b}_\nu - \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial \varrho_B} \bar{\Psi} \Psi \sigma \right) \quad (2.20)$$

A equação (2.14) é uma equação de Dirac, (2.15) é uma equação de Klein-Gordon não homogênea, (2.16) e (2.17) são equações de Proca com termo de fonte, (2.18) é a forma compacta das equações de Maxwell.

Uma forma de solução para este problema, usualmente adotada, é a chamada aproximação de Hartree [2]. Nela, os campos mesônicos são substituídos por valores médios, ou campos clássicos, os quais não dependem do tempo. Estes campos são então obtidos de forma autoconsistente, resolvendo-se simultaneamente as equações. Ainda, impondo invariância rotacional, apenas as componentes temporais dos campos não se anulam. A função de onda do núcleo passa então a ser dada pelo determinante de Slater dos A estados de partícula independente de menor energia (onde apenas os estados de energia positiva são considerados), os quais são obtidos da condição de autoconsistência. Em nosso caso, supomos ainda que os campos, ou simplesmente potenciais dos mésons têm simetria esférica. Por outro lado, o número de prótons e nêutrons do sistema permanece constante, o que elimina as componentes de isospin que mudam esse número. Com todas

estas hipóteses implementadas, o conjunto de equações acima para os mésons se reduz ao sistema de equações:

$$\frac{d^2}{dr^2}\sigma_0(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\sigma_0(r) - m_\sigma^2\sigma_0(r) = -\Gamma_\sigma\rho_s(r) \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\omega_0(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\omega_0(r) - m_\omega^2\omega_0(r) = -\Gamma_\omega\rho_B(r) \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}b_0(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}b_0(r) - m_\rho^2b_0(r) = -\Gamma_\rho\rho_3(r) \quad (2.23)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}A_0(r) + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}A_0(r) = -e\rho_P(r) \quad (2.24)$$

Dada a condição de simetria esférica, podemos assumir que a função de onda do nucleon pode ser escrita de forma geral como:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} G(r) & \mathcal{Y}_{j_i l_i}^{m_i} \\ iF(r) & \mathcal{Y}_{j_i' l_i'}^{m_i} \end{pmatrix} \zeta_\tau e^{-iE_i t/\hbar} . \quad (2.25)$$

onde $G(r)$ e $F(r)$ são funções radiais da função de onda de partícula para o nucleon , ζ_τ é a função de onda de isospin com $\tau = \tau_3/2$, sendo:

$$\zeta_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \zeta_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para o próton e o nêutron respectivamente e $\mathcal{Y}_{j l}^m$ são harmônicos esféricos spinoriais que são dados por:

$$\mathcal{Y}_{j l}^m = \sum_{m_l m_s} \langle l m_l 1/2 m_s | j m \rangle Y_{l m_l}(\hat{r}) \chi_{m_s} , \quad (2.26)$$

os quais reúnem toda a dependência angular e de spin da função de onda, sendo $Y_{lm_l}(\hat{r})$ os harmônicos esféricos, $\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_3 m_3 \rangle$ o símbolo usado aqui para expressar os coeficientes de Clebsh-Gordan, χ_{m_s} expressa a função de spin e $l' = l \pm 1$ para $j = l \pm 1/2$.

Para a equação de Dirac obtemos então duas equações acopladas para $F(r)$ e $G(r)$ que completam o sistema de equações acima, o qual é resolvido de forma auto-consistente. A partir da equação (2.14) obtem-se:

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right] G_\alpha(r) = \left[E_\alpha - \Gamma_\omega \omega_0(r) - t_\alpha \Gamma_\rho b_0(r) - \left(t_\alpha + \frac{1}{2} \right) e A_0(r) + M - \Gamma_\sigma \sigma_0(r) - \mathcal{I} \right] F_\alpha(r) \quad (2.27)$$

$$\left[\frac{\kappa}{r} - \frac{d}{dr} \right] F_\alpha(r) = \left[E_\alpha - \Gamma_\omega \omega_0(r) - t_\alpha \Gamma_\rho b_0(r) - \left(t_\alpha + \frac{1}{2} \right) e A_0(r) - M + \Gamma_\sigma \sigma_0(r) - \mathcal{I} \right] G_\alpha(r) \quad (2.28)$$

O termo \mathcal{I} é dado agora na aproximação de Hartree por:

$$\mathcal{I} = \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial \varrho_B} \varrho_B \omega_0(r) + \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial \varrho_B} \varrho_3 b_0(r) - \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial \varrho_B} \varrho_s \phi$$

Podemos ainda escrever as soluções para os potenciais mesônicos em termos de funções de Green:

$$\sigma_0(r) = \int \Gamma_\sigma D_\sigma(r, r') \varrho_s(r') r'^2 dr' \quad (2.29)$$

$$\omega_0(r) = \int \Gamma_\omega D_\omega(r, r') \varrho_B(r') r'^2 dr' , \quad (2.30)$$

$$b_0(r) = \int \Gamma_\rho D_\rho(r, r') \varrho_3(r') r'^2 dr' , \quad (2.31)$$

$$A_0(r) = e \int D_\gamma(r, r') \varrho_P(r') r'^2 dr' , \quad (2.32)$$

onde os $D_i(r, r')$'s são as funções de Green [2] e

$$\varrho_s(r) = \sum_{\alpha}^{occ} \left(\frac{2j_{\alpha} + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_{\alpha}(r)|^2 - |F_{\alpha}(r)|^2] \quad , \quad (2.33)$$

$$\varrho_B(r) = \sum_{\alpha}^{occ} \left(\frac{2j_{\alpha} + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_{\alpha}(r)|^2 + |F_{\alpha}(r)|^2] \quad , \quad (2.34)$$

$$\varrho_3(r) = \sum_{\alpha}^{occ} \left(\frac{2j_{\alpha} + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_{\alpha}(r)|^2 + |F_{\alpha}(r)|^2] (-1)^{t_{\alpha}-1/2} \quad (2.35)$$

e

$$\varrho_P(r) = \sum_{\alpha}^{occ} \left(\frac{2j_{\alpha} + 1}{4\pi r^2} \right) [|G_{\alpha}(r)|^2 + |F_{\alpha}(r)|^2] (t_{\alpha} + 1/2) \quad , \quad (2.36)$$

onde j_{α} é o momento angular total de cada estado e a somatória inclui todos os A estados de energia mais baixa. O esquema apresentado acima foi implementado em nosso caso, utilizando uma versão modificada do código computacional TIMORA [10] com a inclusão da dependência na densidade. O conjunto de parâmetros utilizados será apresentado no Capítulo 3.

2.2 Densidade de corrente para partículas com uma estrutura interna

Ao contrário do elétron, o próton assim como o nêutron, que compõem a estrutura nuclear não são partículas fundamentais e possuem uma estrutura interna. Escreveremos o operador densidade de corrente para o próton como [17]:

$$\hat{J}^{\mu}(q^2) = \left[\gamma^{\mu} F_1(q^2) + i\sigma^{\mu\nu} \hat{q}_{\nu} \frac{\kappa}{2m_p} F_2(q^2) \right] \quad . \quad (2.37)$$

O parâmetro κ [11] é dado experimentalmente, no caso do próton, por $\kappa \approx 1,79$, estando associado ao momento de dipolo magnético anômalo do nucleon. A expressão (2.37) será utilizada em nossos cálculos a partir de agora.

Os fatores de forma do nucleon $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ são dados em termos dos fatores de forma eletromagnéticos $G_E(Q^2)$ e $G_M(Q^2)$ diretamente relacionados às densidades de carga e corrente intrínsecas dos nucleons, onde $Q^2 = -(q)^2$. Estes fatores são conhecidos como fatores de forma de *Sachs* e estão relacionados a $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ por [12]:

$$F_1(q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{4m_p^2}\right)^{-1} \left[G_E(Q^2) + \frac{Q^2}{4m_p^2} G_M(Q^2) \right] \quad (2.38)$$

e

$$\kappa F_2(q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{4m_p^2}\right)^{-1} [G_M(Q^2) - G_E(Q^2)] . \quad (2.39)$$

Esses fatores de forma podem ser obtidos, por exemplo, a partir de um modelo de quarks para o nucleon. Este não é o enfoque deste trabalho, logo usaremos uma parametrização de dados experimentais válida para a região de $Q^2 \lesssim 1(\text{GeV}/c)^2$. Nestas condições o comportamento de $G_E(Q^2)$ e $G_M(Q^2)$ é dado pelas relações:

$$\begin{aligned} G_E^p(Q^2) &= (1 + Q^2/0.71)^{-2} \\ G_M^p(Q^2) &= \mu_p G_E^p(Q^2) \\ G_M^n(Q^2) &= \mu_n G_E^p(Q^2) \\ G_E^n(Q^2) &= (Q^2/4m_n^2 c^4)(1 + 5.6Q^2/4m_n^2 c^4)^{-1} |G_M^n(Q^2)| \end{aligned}$$

onde aqui os superscritos indicam se o nucleon é um próton(p) ou um nêutron(n), sendo $\mu_p = 1 + \kappa_p = 2.793$ e $\mu_n = \kappa_n = -1.913$ os respectivos momentos magnéticos, em unidades de magneton nuclear.

Assumiremos então que o operador corrente para o núcleo, no espaço de coordenadas, tem a forma:

$$\hat{J}_\mu(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \hat{J}_\mu(q^2) \quad (2.40)$$

O que é consistente com a aproximação de Hartree.

2.3 Estado final do nucleon no contínuo

Nesta seção, iremos explicar em linhas gerais a metodologia para a obtenção do potencial óptico usado para descrever o estado final do próton no espalhamento.

2.3.1 Potencial óptico complexo na aproximação de impulso

O espalhamento ($\vec{e}, e'p$) nos fornece informações sobre a estrutura nuclear e também da interação nucleon-núcleo. Assumiremos aqui que, para descrever esses fenômenos, podemos usar a aproximação de impulso, a qual assume que o potencial de interação entre o projétil e os nucleons do alvo têm essencialmente a mesma forma que a interação entre estes no espaço livre. Esta aproximação também implica que o espalhamento é dominado por um único processo de colisão. Essa aproximação é conhecida como aproximação relativística de impulso e, em nosso caso, tem como ingredientes básicos a aproximação de Hartree relativística para descrever o núcleo alvo e a interação nucleon-nucleon *livre*, ou seja, a interação entre dois nucleons como se os demais não estivessem presentes. O potencial proton-núcleo é então construído a partir desses dois ingredientes e usado para obtermos o estado final do proton ejetado. Essa aproximação é utilizada com sucesso para descrever o espalhamento elástico proton-núcleo para a faixa de energia em que estamos interessados, em que o próton possui energia cinética da ordem de algumas centenas de MeV.

O primeiro desses ingredientes entra através da obtenção das densidades autoconsistentes, como descrito anteriormente. O segundo corresponde a escrever a interação entre dois nucleons impondo leis de conservação (paridade, covariância de Lorentz, isospin) e cujas amplitudes são na prática obtidas da análise do espalhamento nucleon-nucleon. Todo o procedimento de obtenção do potencial óptico é encontrado nas referências [10, 13], e aqui colocaremos somente os principais resultados. Inicialmente escrevemos o potencial na forma:

$$U_{opt} = U^S + \gamma^0 U^V - 2i\alpha \cdot \hat{r} U^T \quad (2.41)$$

Aqui, U^S é o potencial escalar, U^V é o potencial vetor e U^T corresponde ao potencial tensorial. A contribuição de U^T será pequena comparada às outras e nós a desprezaremos no contexto deste trabalho. O potencial óptico, então, terá apenas contribuição escalar e vetorial. A equação de Dirac (2.14) para o próton espalhado tem agora U^V substituindo $\left[\Gamma_\omega \omega^\nu \gamma_\nu + \frac{\Gamma_\rho}{2} \vec{\tau} \cdot \mathbf{b}^\nu \gamma_\nu + eA^\nu \frac{(\tau_3+1)}{2} \gamma_\nu - \mathcal{I} \right]$ e U^S substituindo $[-\Gamma_\sigma \sigma]$. Seguindo essas premissas, nós temos [10]:

$$\{-i\alpha \cdot \nabla + U^V + \beta[M + U^S]\}\Psi = E\Psi . \quad (2.42)$$

Aqui adotamos o modelo conhecido como RLF (Relativistic Love-Franey) para o cálculo dos potenciais ópticos. Esta escolha se deu devido à faixa de energia em que estamos trabalhando. Este modelo nos fornece:

$$U^L(r, E) = -\frac{8\pi^2 ip}{M} \left[\int_0^\infty dr' t_D^L(r', E) \int_{-1}^1 d\omega \varrho^L(|\mathbf{x}' + \mathbf{x}|) + \int_0^\infty dr' t_X^L(r', E) j_0(pr') \int_{-1}^1 d\omega \varrho^L(\mathbf{x}' + \mathbf{x}, \mathbf{x}) \right] \quad (2.43)$$

onde L pode ser S ou V , ϱ^L é a densidade correspondente, j_0 é a função de Bessel de ordem zero, $\omega = \cos(\theta')$, $|\mathbf{x}' + \mathbf{x}| = r'^2 + r^2 + 2\omega r r'$. As quantidades t_D^L e t_X^L são dadas por:

$$t_D^L \equiv \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{iM^2}{2E_c k_c} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \sum_i \delta_{L,L(i)} (\vec{\tau}_0 \cdot \vec{\tau}_1)^{I_i} \left[\frac{g_i^2}{\vec{q}^2 + m_i^2} \left(\frac{\Lambda_i^2}{\Lambda_i^2 + \vec{q}^2} \right)^2 - i \frac{\bar{g}_i^2}{\vec{q}^2 + \bar{m}_i^2} \left(\frac{\bar{\Lambda}_i^2}{\bar{\Lambda}_i^2 + \vec{q}^2} \right)^2 \right] \quad (2.44)$$

e

$$t_X^L \equiv \int \frac{d^3 \vec{Q}}{(2\pi)^3} \frac{iM^2}{2E_c k_c} e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{x}} (-1)^T \sum_i B_{L(i),L} (\vec{\tau}_0 \cdot \vec{\tau}_1)^{I_i} \left[\frac{g_i^2}{\vec{Q}^2 + m_i^2} \left(\frac{\Lambda_i^2}{\Lambda_i^2 + \vec{Q}^2} \right)^2 - i \frac{\bar{g}_i^2}{\vec{Q}^2 + \bar{m}_i^2} \left(\frac{\bar{\Lambda}_i^2}{\bar{\Lambda}_i^2 + \vec{Q}^2} \right)^2 \right] \quad (2.45)$$

Nas expressões acima, $\vec{q} = \vec{k}'_0 - \vec{k}_0$ e $\vec{Q} = \vec{k}'_1 - \vec{k}_0$, sendo o subscrito 0 referente a um dos nucleons e o subscrito 1 referente ao outro. $L(i)$ denota o spin e paridade dos mésons escalar e vetorial, T é o isospin do par dos nucleons interagentes, I_i é o isospin do méson trocado, $B_{L(i),L}$ é uma matriz de transformação dada explicitamente em [10], Λ_i^2 são parâmetros associados aos fatores de forma do nucleon, g_i^2 e \bar{g}_i^2 são, respectivamente, a parte real e imaginária da constante de acoplamento méson-nucleon e m_i as massas desses mésons. As quantidades E_c e k_c estão relacionadas à energia e ao momento do próton em relação ao núcleo. Observa-se que tanto o potencial escalar quanto o vetorial possuem agora uma parte real e uma parte imaginária. A interação de Coulomb entre o próton arrancado e o núcleo residual é então incluída na parte real do potencial vetorial (U^V).

2.3.2 Aproximação de onda distorcida

Para o estado final supomos que o próton é descrito por uma função de onda distorcida, ou o que na literatura é conhecido como *Relativistic Distorted Wave Impulse Approximation* (RDWIA). Como o próton, ao ser arrancado do núcleo, continua a interagir com o mesmo, nós iremos aqui tratar estes efeitos como se o próton obedecesse a equação abaixo com condições de contorno no contínuo:

$$H\psi_f(\vec{r}) = \epsilon'_p \psi_f(\vec{r}), \quad (2.46)$$

onde $\psi_f(x) = e^{-i\epsilon'_p t/\hbar} \psi_f(r)$ é a função de onda do nucleon espalhado, sendo ϵ'_p a energia do mesmo. Esta equação é resolvida expandindo a função de onda $\psi_f(\vec{r})$ em ondas parciais e resolvendo as equações para cada onda separadamente. Para uma partícula de spin m_s , a expansão na RDWIA tem a forma [14]:

$$\psi_{m_s}(\vec{r}) = 4\pi \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_p}{2\epsilon'_p}} \sum_{\kappa, m} i^l e^{-i\delta_\kappa^*} \langle l \ m_l \ 1/2 \ m_s | j \ m \rangle Y_{l \ m_l}^*(\theta_p, \phi_p) \psi_{\kappa \ m}(\vec{r}) \quad (2.47)$$

com $m_l = m - m_s$ e

$$\psi_{\kappa, m}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_\kappa(r)/r \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}) \\ i f_\kappa(r)/r \mathcal{Y}_{-\kappa m}(\hat{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Então, para determinar a função de onda do nucleon espalhado, basta determinar as funções $f_\kappa(r)$, $g_\kappa(r)$ e os *phase-shifts* δ_κ . Substituindo a expansão acima na equação de Dirac, obtemos as seguintes equações diferenciais acopladas para $f_\kappa(r)$ e $g_\kappa(r)$:

$$\frac{d}{dr} f_\kappa(r) = - [\epsilon_p - M^*(r) - U^V(r)] g_\kappa(r) + \frac{\kappa}{r} f_\kappa(r), \quad (2.49)$$

$$\frac{d}{dr} g_\kappa(r) = [\epsilon_p + M^*(r) - U^V(r)] f_\kappa(r) + \frac{\kappa}{r} g_\kappa(r). \quad (2.50)$$

Na expressão acima, $M^*(r) = m_p + U^S$, sendo U^S e U^V como definido na subseção anterior. Para obter os *phase-shifts* δ_κ , resolvemos numericamente o sistema de equações

acima e comparamos $f_\kappa(r)$ e $g_\kappa(r)$ com as formas assintóticas das soluções para o espalhamento de um nucleon por uma carga puntual [14]. Fazemos isso porque para valores de r suficientemente maiores que o raio do núcleo, o potencial escalar é praticamente nulo (tem alcance finito) e o potencial vetorial pode ser aproximado pelo potencial de uma carga puntual eZ . Como existem soluções regulares (finitas na origem) e irregulares (que divergem na origem) para o espalhamento por uma carga puntual, escrevemos $f_\kappa(r)$ e $g_\kappa(r)$ como uma combinação linear dessas soluções [15]. Se $f_\kappa^R(r)$ e $g_\kappa^R(r)$ são as soluções regulares e $f_\kappa^I(r)$ e $g_\kappa^I(r)$ as irregulares, a combinação terá a forma:

$$f_\kappa(r) = A_\kappa f_\kappa^R(r) + B_\kappa f_\kappa^I(r) \quad (2.51)$$

$$g_\kappa(r) = A_\kappa g_\kappa^R(r) + B_\kappa g_\kappa^I(r), \quad (2.52)$$

de onde os coeficientes A_κ e B_κ devem ser determinados. A partir destes coeficientes e dos *phase-shifts* δ_κ^R e δ_κ^I (cuja forma analítica é bem conhecida) para as soluções regulares e irregulares, respectivamente, encontramos os *phase-shifts* δ_κ para cada onda parcial. Eles são dados por:

$$\delta_\kappa = \delta_\kappa^R + \text{arctg} \left(\frac{\text{sen}\theta_\kappa}{A_\kappa/B_\kappa + \text{cos}\theta_\kappa} \right) \quad (2.53)$$

onde $\theta_\kappa = \delta_\kappa^I - \delta_\kappa^R$.

2.4 Densidades de Corrente

A partir da equação (2.25), o estado inicial (ligado) do próton pode ser escrito como:

$$\psi_\alpha(\vec{r}) \equiv \psi_{\kappa m}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} G_\kappa(r)/r \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}) \\ iF_{n\kappa t}(r)/r \mathcal{Y}_{-\kappa m}(\hat{r}) \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

onde,

$$j = |\kappa| - \frac{1}{2} \quad l = \begin{cases} \kappa, & \kappa > 0 \\ -(\kappa + 1), & \kappa < 0 \end{cases}.$$

O estado final deste mesmo próton é dado pela equação (2.47). Uma vez que os estados, inicial e final do núcleo, estão sendo aproximados por determinantes de Slater e que o operador corrente é um operador de um corpo, as correntes de transição, ou mais propriamente suas transformadas de Fourier para o espaço de momento transferido, serão dadas por:

$$J_{0,\pm}(q) = \langle \psi_{m_s} | \hat{J}_{0,\pm}(q) | \psi_\alpha \rangle, \quad (2.55)$$

onde:

$$\hat{J}_{0,\pm}(q) = \int d\vec{r} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \hat{J}_{0,\pm}(\vec{r}), \quad (2.56)$$

e:

$$\hat{J}_{\pm}(\vec{r}) = \mathbf{e}_{\pm} \cdot \hat{\mathbf{J}}(\vec{r}), \quad (2.57)$$

com

$$\mathbf{e}_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \quad (2.58)$$

e lembrando novamente que escolhemos o eixo z na direção de \vec{q} . Faremos então agora uso das expansões:

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sqrt{4\pi} \sum_L i^L \sqrt{(2L+1)} j_L(qr) Y_{L0}(\hat{r}) \quad (2.59)$$

e:

$$\mathbf{e}_{\pm} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -\sqrt{2\pi} \sum_{L \geq 1} i^L \sqrt{2L+1} \left\{ \pm j_L(qr) \mathbf{Y}_{LL}^{\pm}(\hat{r}) + \frac{1}{q} \nabla \times [j_L(qr) \mathbf{Y}_{LL}^{\pm}(\hat{r})] \right\}, \quad (2.60)$$

onde $\mathbf{Y}_{LL'}^M$ são harmônicos esféricos vetoriais e j_L são funções de Bessel esféricas. Desta forma é possível escrever o operador corrente na forma

$$\hat{J}_\eta(q) = \sum_L \hat{J}_{L,\eta}(q),$$

onde $\hat{J}_{L,\eta}$ é um operador tensorial de ordem L e projeção η . Definimos agora:

$$\mathcal{A}_{m_s}(l', m', j'; \hat{p}') = 4\pi \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_p}{2\epsilon'_p}} i^{l'} e^{-i\delta_{\kappa'}^*} \langle l' m' - m_s \frac{1}{2} m_s | j' m' \rangle Y_{l'(m'-m_s)}^*(\hat{p}'). \quad (2.61)$$

As correntes de transição podem então ser escritas como:

$$J_\eta(q) = \sum_{L, \kappa', m'} \mathcal{A}_{m_s}(l', m', j'; \hat{p}') \langle j m L \eta | j' m' \rangle \langle \psi_{\kappa'} | | \hat{J}_L | | \psi_{\kappa} \rangle, \quad (2.62)$$

onde o teorema de Wigner-Eckart foi utilizado. Os diferentes fatores de forma que aparecem na seção de choque, têm sempre a forma:

$$\begin{aligned} \sum_{m_s, m} J_{\eta'}^*(q) J_\eta(q) &= \sum_{m_s, m} \sum_{L, \kappa', m'} \sum_{L', \kappa'', m''} \mathcal{A}_{m_s}^*(l', m', j'; \hat{p}') \langle j m L' \eta' | j' m' \rangle \\ &\langle \psi_{\kappa'} | | \hat{J}_{L'} | | \psi_{\kappa} \rangle^* \mathcal{A}_{m_s}(l'', m'', j''; \hat{p}') \langle j m L \eta | j'' m'' \rangle \langle \psi_{\kappa''} | | \hat{J}_L | | \psi_{\kappa} \rangle. \end{aligned} \quad (2.63)$$

As somatórias sobre m e m_s na expressão acima, implicam que temos que efetuar a soma:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_j(\kappa', \kappa'', L, L', \eta, \eta') &= \sum_{m_s, m} \left\{ Y_{l'(m+\eta'-m_s)}^*(\hat{p}') Y_{l''(m+\eta-m_s)}(\hat{p}') \right. \\ &\quad \langle l'(m+\eta'-m_s) 1/2 m_s | j'(m+\eta') \rangle \\ &\quad \left. \langle l''(m+\eta-m_s) 1/2 m_s | j''(m+\eta) \rangle \langle j m L' \eta' | j' m + \eta' \rangle \langle j m L \eta | j'' m + \eta \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Consideremos agora a expressão acima quando fazemos as trocas $\eta \rightarrow -\eta$ e $\eta' \rightarrow -\eta'$. Neste caso, como estamos somando em m e m_s , podemos fazer as trocas $m \rightarrow -m$ e $m_s \rightarrow -m_s$ e escrever:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_j(\kappa', \kappa'', L, L', -\eta, -\eta') &= \sum_{m_s, m} \left\{ Y_{l'(-m-\eta'+m_s)}^*(\hat{p}') Y_{l''(-m-\eta+m_s)}(\hat{p}') \right. \\
 &\langle l'(-m-\eta'+m_s)1/2 - m_s | j'(-m-\eta') \rangle \langle l''(-m-\eta+m_s)1/2 - m_s | j''(-m-\eta) \rangle \\
 &\left. \langle j - mL' - \eta' | j' - m - \eta' \rangle \langle j - mL - \eta | j'' - m - \eta \rangle \right\}, \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

e usando propriedades de simetria dos coeficientes de acoplamento e dos harmônicos esféricos:

$$\mathcal{S}_j(\kappa', \kappa'', L, L', -\eta, -\eta') = (-)^{(\eta+\eta')} (-1)^{(l'+l''+L+L')} \mathcal{S}_j(\kappa', \kappa'', L, L', \eta, \eta')^*. \quad (2.66)$$

Ocorre que, por conservação de paridade, $(-)^{(l'+L)} = (-)^l$ e $(-)^{(l''+L')} = (-)^l$, e assim:

$$\mathcal{S}_j(\kappa', \kappa'', L, L', -\eta, -\eta') = (-)^{(\eta+\eta')} \mathcal{S}_j(\kappa', \kappa'', L, L', \eta, \eta')^*. \quad (2.67)$$

Observe-se que, para $\eta = \eta'$, \mathcal{S}_j não depende do ângulo azimutal $\varphi_{p'}$ e portanto é uma função real. Desta forma conclue-se que:

$$\sum_{m_s, m} J_+^*(q) J_+(q) = \sum_{m_s, m} J_-^*(q) J_-(q), \quad (2.68)$$

resultado válido somente se tanto o alvo como o próton emitido não tiverem suas polarizações observadas. Por outro lado, para $\eta \neq \eta'$, \mathcal{S}_j será uma função real somente se $\varphi_p = 0$ ou π . Neste caso, obtemos para a situação em que a polarização dos estados hadrônicos não é observada:

$$\sum_{m_s, m} J_+^*(q) J_-(q) = \sum_{m_s, m} J_-^*(q) J_+(q), \quad (2.69)$$

e:

$$\sum_{m_s, m} J_0^*(q) J_+(q) = - \sum_{m_s, m} J_0^*(q) J_-(q). \quad (2.70)$$

Estes resultados são importantes pois mostram que o termo w_{tt}^h na seção de choque, equação (1.51), não contribui nos casos em que a polarização dos estados hadrônicos não é observada (ver também equação (50) do Apêndice A). Por outro lado, o termo w_{tt}^h deve contribuir se o próton for detetado fora do plano de espalhamento, ou seja, $\phi_p \neq 0, \pi$ (ver equação (52) do Apêndice A).

A seguir apresentamos as expressões explícitas para J_0 e J_{\pm} , as quais são obtidas em detalhes na referência [15].

$$\begin{aligned} J_0(q) &= (4\pi)^2 \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_p}{2\epsilon'_p}} \sum_{\kappa m L} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} i^{L-l} e^{i\delta_\kappa^*} \langle l m_l 1/2 m_s | j m \rangle Y_{l m_l}^*(\hat{p}') \\ &+ \langle \kappa m | Y_{L0} | \kappa' m' \rangle \left\{ F_1(q^2) [\langle g_\kappa | L | G_{\kappa'} \rangle + \langle f_\kappa | L | F_{\kappa'} \rangle] + F_2(q^2) \frac{\mu_T}{2M} |\vec{q}| \frac{1}{2L+1} \right. \\ &\left[(\kappa - \kappa' + L + 1) \langle g_\kappa | L + 1 | F_{\kappa'} \rangle + (-\kappa + \kappa' + L + 1) \langle f_\kappa | L + 1 | G_{\kappa'} \rangle \right. \\ &\left. \left. + (\kappa - \kappa' - L) \langle g_\kappa | L - 1 | F_{\kappa'} \rangle + (-\kappa + \kappa' - L) \langle f_\kappa | L - 1 | G_{\kappa'} \rangle \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} J_\lambda(q) &= -4\pi \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon'_p + m_p}{2\epsilon'_p}} \sum_{\kappa, m, L \geq 1} \sqrt{\frac{2L+1}{L(L+1)}} i^{L-l} e^{i\delta_\kappa^*} Y_{l m_l}^*(\hat{p}') \langle l m_l 1/2 m_s | j m \rangle \\ &\left\{ -i\lambda \langle \kappa m | Y_{L\lambda} | -\kappa' m' \rangle \left[k_1(\kappa + \kappa') \langle g_\kappa | L | F_{\kappa'} \rangle + k_2(\kappa + \kappa') \langle f_\kappa | L | G_{\kappa'} \rangle \right] \right. \\ &+ k_3 q \frac{L}{2L+1} \left((\kappa + \kappa' + L + 1) \langle g_\kappa | L + 1 | G_{\kappa'} \rangle - (-\kappa - \kappa' + L + 1) \langle f_\kappa | L + 1 | F_{\kappa'} \rangle \right) \\ &+ k_3 q \frac{L+1}{2L+1} \left(-(\kappa + \kappa' - L) \langle g_\kappa | L - 1 | G_{\kappa'} \rangle + (-\kappa - \kappa' - L) \langle f_\kappa | L - 1 | F_{\kappa'} \rangle \right) \left. \right] \\ &+ \langle \kappa m | Y_{L\lambda} | \kappa' m' \rangle \left[-k_3 q \left((\kappa - \kappa') \langle g_\kappa | L | G_{\kappa'} \rangle + (\kappa - \kappa') \langle f_\kappa | L | F_{\kappa'} \rangle \right) \right. \\ &+ \frac{L}{2L+1} \left(k_1(\kappa - \kappa' + L + 1) \langle g_\kappa | L + 1 | F_{\kappa'} \rangle - k_2(-\kappa + \kappa' + L + 1) \langle f_\kappa | L + 1 | G_{\kappa'} \rangle \right) \\ &\left. \left. + \frac{L+1}{2L+1} \left(-k_1(\kappa - \kappa' - L) \langle g_\kappa | L - 1 | F_{\kappa'} \rangle + k_2(-\kappa + \kappa' - L) \langle f_\kappa | L - 1 | G_{\kappa'} \rangle \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde, na expressão acima, temos que $\lambda = \pm 1$ e

$$k_1 = F_1(q^2) + F_2(q^2) \frac{\mu_p q_0}{2m_p},$$

$$k_2 = F_1(q^2) - F_2(q^2) \frac{\mu_p q_0}{2m_p}$$

e

$$k_3 = F_2(q^2) \frac{\mu_p}{2m_p}.$$

Consideramos ainda as definições:

$$\langle \kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' \rangle \equiv \int d\Omega_r \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) Y_{LM}(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}), \quad (2.73)$$

$$\langle \phi_\kappa | L | \chi_{\kappa'} \rangle \equiv \int dr j_L(qr) \phi_\kappa(r) \chi_{\kappa'}(r), \quad (2.74)$$

onde L representa a função de Bessel esférica $j_L(qr)$. Seguem abaixo as relações usadas na obtenção das expressões (2.71) e (2.72) [16]:

$$\mathbf{L} \cdot \vec{\sigma} \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}) = -(1 + \kappa) \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}), \quad (2.75)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa m}(\hat{r}) = -\mathcal{Y}_{-\kappa m}(\hat{r}), \quad (2.76)$$

$$\int \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) \vec{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{L, L-1}^M(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}) d\Omega = \frac{\kappa + \kappa' - L}{\sqrt{L(2L+1)}} \langle \kappa m | Y_{LM} | -\kappa' m' \rangle, \quad (2.77)$$

$$\int \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) \vec{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{L, L}^M(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}) d\Omega = \frac{\kappa' - \kappa}{\sqrt{L(L+1)}} \langle \kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' \rangle, \quad (2.78)$$

$$\int \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) \vec{\sigma} \cdot \mathbf{Y}_{L, L+1}^M(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}) d\Omega = \frac{\kappa + \kappa' + L + 1}{\sqrt{(L+1)(2L+1)}} \langle \kappa m | Y_{LM} | -\kappa' m' \rangle. \quad (2.79)$$

Ainda, precisamos do resultado:

$$\begin{aligned}
 & \int \mathcal{Y}_{\kappa m}^\dagger(\hat{r}) Y_{LM}(\hat{r}) \mathcal{Y}_{\kappa' m'}(\hat{r}) d\Omega \equiv \langle \kappa m | Y_{LM} | \kappa' m' \rangle = \\
 & = (-1)^{m'+m-1} \frac{1 + (-1)^{L+l'+l}}{2} \\
 & \times \sqrt{\frac{(2j+1)(2L+1)}{4\pi(2j'+1)}} \langle j-mLM | j'-m' \rangle \langle j 1/2 L 0 | j' 1/2 \rangle . \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

Neste ponto é importante dizer que, se aproximarmos a função de onda do próton final por uma onda plana (o que equivale a fazer os phase-shifts tenderem a zero e as funções de onda g_κ e f_κ se tornarem funções esféricas de Bessel), as correntes de transição acima podem ser reescritas em termos de transformadas de Fourier das componentes (G_κ e F_κ) da função de onda do próton ligado, com relação ao momento inicial p [17]. Isso mostra que o espalhamento ($e, e'p$) permite mapear a função de onda individual do proton em seu estado ligado.

2.5 Projção nos estados de energia positiva

É um fato bem conhecido que a aproximação de Hartree para a solução do modelo de Wallecka, e suas variações, contêm efeitos do mar de Dirac, ou seja, soluções cujo overlap com os estados de energia negativa é diferente de zero. Esse efeito pode ser explicitado, escrevendo novamente a equação de Dirac na forma:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + V + \beta M^*] \Psi = E \Psi \quad (2.81)$$

onde $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ e $\Psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathcal{X} \end{pmatrix}$.

Ou, na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathcal{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V\Phi \\ V\mathcal{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M^* & 0 \\ 0 & -M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathcal{X} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathcal{X} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Isso nos deixa com duas equações:

$$\begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\mathcal{X} + V\Phi + M^*\Phi = E\Phi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\Phi + V\mathcal{X} - M^*\mathcal{X} = E\mathcal{X} \end{cases} \quad (2.83)$$

Seja agora o operador de projeção sobre os estados de energia positiva:

$$\Lambda^+ = \frac{1}{2} + \frac{\gamma^\nu p_\nu}{2m}. \quad (2.84)$$

Aplicando esse operador sobre a solução:

$$\Lambda^+|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2m}\right) & \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} & \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{2m}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathcal{X} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

$$\Lambda^+|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\Phi}{2} + \frac{E\Phi}{2m} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\mathcal{X}}{2m} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\Phi}{2m} + \frac{\mathcal{X}}{2} - \frac{E\mathcal{X}}{2m} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Fazendo uso agora das equações (2.83):

$$\frac{E\Phi}{2m} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\mathcal{X}}{2m} + \frac{V\Phi}{2m} + \frac{M^*\Phi}{2m} \quad (2.87)$$

$$\frac{E\mathcal{X}}{2m} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\Phi}{2m} + \frac{V\mathcal{X}}{2m} - \frac{M^*\mathcal{X}}{2m} \quad (2.88)$$

Isso nos leva a:

$$\Lambda^+|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Phi + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m}\mathcal{X} + \frac{V}{2m}\Phi + \frac{1}{2}\Phi - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m}\mathcal{X} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m}\Phi + \frac{1}{2}\mathcal{X} - \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{2m}\Phi - \frac{V}{2m}\mathcal{X} + \frac{1}{2}\mathcal{X} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(\frac{1}{2}(1 + \frac{m^*}{m}) + \frac{V}{2m}) \\ \mathcal{X}(\frac{1}{2}(1 + \frac{m^*}{m}) - \frac{V}{2m}) \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Vemos assim que os potenciais, escalar e vetorial, misturam os estados de energia positiva e negativa. Uma vez que os parâmetros do modelo usado para definir os potenciais sejam ajustados para descrever as propriedades médias do núcleo, como a energia e o raio, espera-se que os efeitos dessa mistura afete muito pouco as mesmas. Além disso, espera-se que o estado fundamental seja menos afetado. Esse pode não ser o caso na obtenção dos fatores de forma de transição. Assim, definiremos a densidade de corrente de transição projetada:

$$J_P^\mu = \langle \Psi_f | (\Lambda^+)^\dagger \hat{J}^\mu \Lambda^+ | \Psi_i \rangle. \quad (2.90)$$

Os efeitos que essa projeção sobre estados de energia positiva têm sobre a seção de choque e fatores de forma, serão discutidos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Resultados Numéricos e Efeitos de Polarização

Apresentaremos neste capítulo alguns resultados numéricos baseados nas expressões obtidas nos capítulos anteriores. Começaremos discutindo a precisão de nosso modelo, mostrando resultados para a seção de choque elástica para o ^{16}O e para o ^{12}C comparados com dados experimentais disponíveis. Em seguida, mostraremos a geometria utilizada em nossos cálculos para o espalhamento $(e, e'p)$. E por fim, valores numéricos para a seção de choque, fatores de forma e assimetrias são apresentados na forma de gráficos, para uma determinada geometria de detecção do próton.

3.1 Espalhamento elástico

Antes de apresentarmos os resultados, precisamos fixar os parâmetros que definem a estrutura do núcleo no modelo aqui usado. O conjunto de parâmetros é dado na tabela 3.1. Os resultados obtidos para a energia e raio de carga são mostrados na Tabela 3.2. Para esses últimos, a correção do tamanho finito para o próton foi incluída, enquanto que para a energia de ligação, uma correção aproximada para o movimento do centro de massa foi levada em consideração [9] nos resultados apresentados.

	méson σ	méson ω	méson ρ	nucleon
massa(MeV)	550	783	763	939
$\Gamma_i(\varrho_{sat})$	10,72854	13,29015	7,32196	-
a_i	1,365469	1,402488	0,515	-
b_i	0,226061	0,172577	-	-
c_i	0,409704	0,344293	-	-
d_i	0,901995	0,983955	-	-

Tabela 3.1: Conjunto de parâmetros de Typel-Wolter [9] para o modelo.

Além dos parâmetros mostrados acima, usamos o valor $\varrho_{sat} = 0.153 fm^{-3}$ para a densidade de saturação. Os gráficos 3.1 e 3.2 foram feitos aplicando o modelo detalhado no capítulo anterior para o espalhamento elástico elétron-núcleo juntamente com dados experimentais (referências [18, 19] e [20]) para o ^{16}O e para o ^{12}C , com a finalidade de testar a função de onda do estado ligado. Como podemos ver, os resultados para altos valores do momento transferido são piores para o carbono, o que poderíamos esperar já que se trata de um núcleo de camada aberta e o modelo aqui usado é construído a partir da hipótese de núcleo com camada fechada. Para valores de q baixo, a seção de choque elástica depende essencialmente do raio de carga, o qual foi bem ajustado para os dois núcleos.

	E_n (MeV)	E_n (Exp) (MeV)	R_c (fm)	R_c (Exp.) (fm)
Carbono ^{12}C	-7.025	$-(7,68 \pm 0,01)$	2,417	$(2,471 \pm 0,001)$
Oxigênio ^{16}O	-7.700	$-(7,98 \pm 0,01)$	2,642	$(2,730 \pm 0,001)$

 Tabela 3.2: Resultados para E_n (Energia de ligação/nucleon) e raio de carga R_c calculados no modelo relativístico de Hartree e comparados com valores experimentais [21].

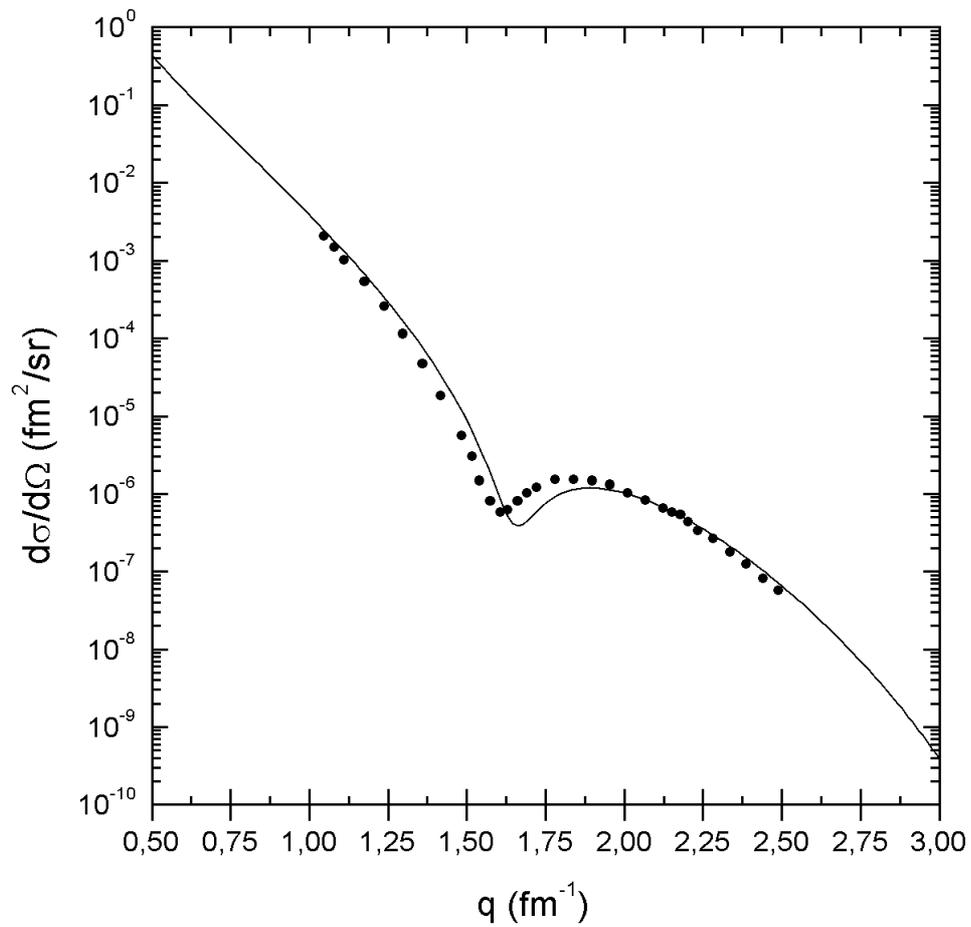


Figura 3.1: Seção de choque para espalhamento elástico de elétrons em função do momento transferido para o núcleo do ^{16}O ([18, 19] e [20]) com energia do elétron $\epsilon_e = 374 \text{ MeV}$.

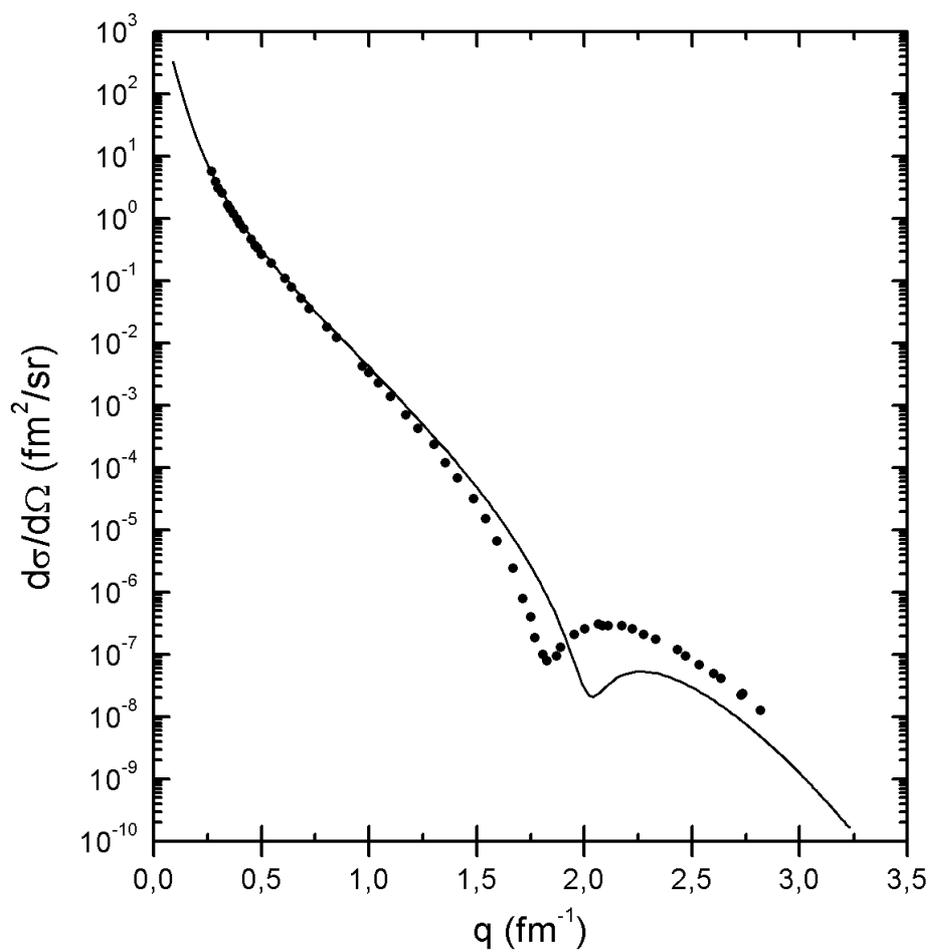


Figura 3.2: Seção de choque para espalhamento elástico de elétrons em função do momento transferido para o núcleo do ¹²C ([18, 19] e [20]) com energia do elétron $\epsilon_e = 400$ MeV.

3.2 Geometria do espalhamento

Quando falamos em geometria do espalhamento, estamos nos referindo a uma disposição espacial do aparato montado para a medição. Este é montado de diferentes formas, dependendo do interesse e possibilidades do experimentador. Duas das geometrias mais utilizadas em processos do tipo $(e, e'p)$ são as geometrias paralela e perpendicular [22]. Em ambos os casos, tanto a energia inicial do elétron como a magnitude do momento final do próton emitido (ou mais propriamente, sua energia cinética) são fixados pelo observador. Vamos discutir um pouco essas duas geometrias.

Na geometria paralela o momento transferido está na mesma direção do momento final do próton, o que implica que $\theta_p = 0$. Uma inspeção dos resultados obtidos anteriormente, especialmente das equações (2.64) e (1.51), nos leva à conclusão de que apenas os fatores de forma w_l e w_t serão não nulos nesta cinemática. Na geometria perpendicular o valor do momento transferido \vec{q} é mantido fixo e a densidade de corrente varia com o ângulo θ_p para valores fixos do ângulo azimutal ϕ_p (ver figura 1.1). Isso acarreta uma dependência indireta da densidade de corrente com o momento inicial do próton. Neste caso, nenhum dos fatores de forma será necessariamente nulo e assim esta foi a cinemática escolhida aqui para uma análise numérica dos resultados. Por outro lado, vimos no capítulo anterior que o termo proveniente da polarização do elétron incidente só contribuirá se $\phi_p \neq 0$ e π .

3.2.1 Seção de choque reduzida e assimetrias

Vamos agora definir duas quantidades que aparecem bastante na análise dos dados experimentais que faremos a seguir. A primeira delas é a seção de choque reduzida, dada por:

$$\frac{d\sigma_{red}}{d\Omega} = \frac{1}{\sigma_{ep}} \frac{1}{|\vec{p}'| \epsilon'_p} \frac{d^5\sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} \equiv \frac{d\sigma}{\sigma_{ep}} \quad (3.1)$$

onde σ_{ep} é a seção de choque diferencial elétron-próton [23].

Em seguida definimos uma grandeza chamada assimetria (no plano), a qual mede a diferença entre as seções de choque medidas para $\phi_p = 0$ e para $\phi_p = \pi$:

$$A_{tl} = \frac{d\sigma(\phi_p = 0) - d\sigma(\phi_p = \pi)}{d\sigma(\phi_p = 0) + d\sigma(\phi_p = \pi)}. \quad (3.2)$$

Uma análise das equações (2.63), (2.64) e (1.51), mostra que apenas o fator de forma w_{tl} é responsável por esta assimetria na seção de choque total. Isto permite que o mesmo possa ser extraído diretamente da assimetria. Note-se por outro lado, que se fizermos $\phi_p = \pi/2$, o fator de forma w_{tl} se anulará.

Definiremos ainda a assimetria associada à polarização inicial do elétron como:

$$A_{tl}^h = \frac{d\sigma(h = +1) - d\sigma(h = -1)}{d\sigma(h = +1) + d\sigma(h = -1)}, \quad (3.3)$$

a qual corresponde a uma forma de obtermos diretamente o fator de forma w_{tl}^h experimentalmente.

3.3 Resultados

Dividiremos os resultados para os núcleos de oxigênio (^{16}O) e para o carbono (^{12}C). Apresentaremos os resultados numéricos supondo que o próton arrancado no processo seja proveniente dos estados $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$ ou $1p_{1/2}$ no caso do oxigênio e dos estados $1s_{1/2}$ e $1p_{3/2}$ para o caso do carbono.

3.3.1 Resultados para o Oxigênio (^{16}O)

Apresentaremos a seguir nossos resultados para a seção de choque $\frac{d\sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_e d\Omega_p}$ na cinemática quasi-perpendicular, seguido da representação das contribuições de cada fator de forma, bem como do fator de forma w_{tl}^h e por fim as assimetrias A_{tl} e A_{tl}^h . Para isto escolhemos até três valores para p' (dois dos quais foram anteriormente fixados em experimentos realizados com o núcleo de ^{16}O).

Em todos os casos, tanto a seção de choque quanto os fatores de forma são aqui dados como função do momento inicial do próton p . Note-se que, valores de p negativos correspondem a valores de ϕ_p entre π e 2π , enquanto que valores positivos correspondem a valores de ϕ_p entre 0 e π , seguindo a convenção da referência [24].

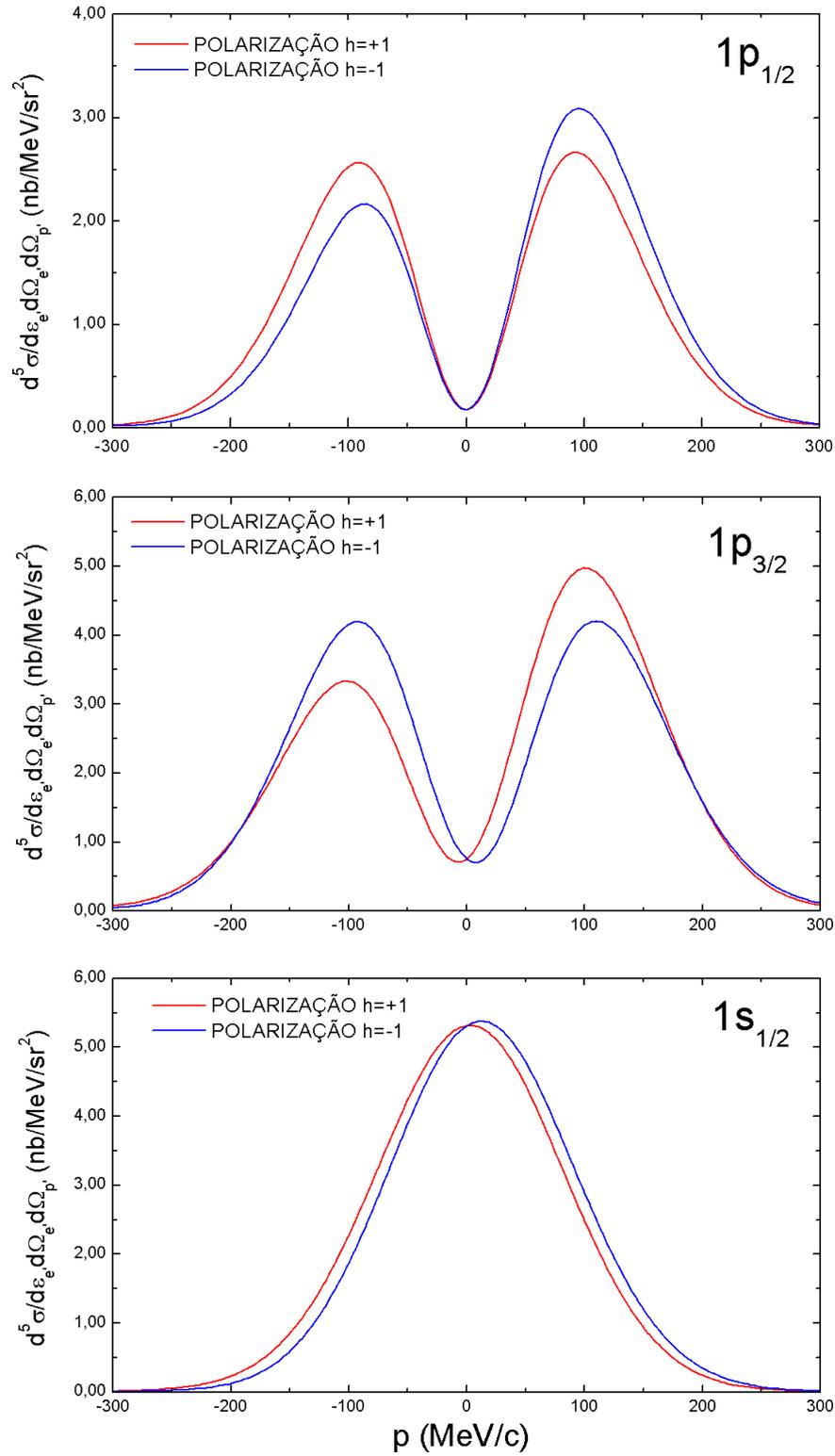


Figura 3.3: Seção de choque com polarização inicial do elétron em função do momento inicial do próton para o ^{16}O com $\epsilon_e = 456 \text{ MeV}$, $p' = 442 \text{ MeV}/c$ e $\phi_p = \pi/3$.

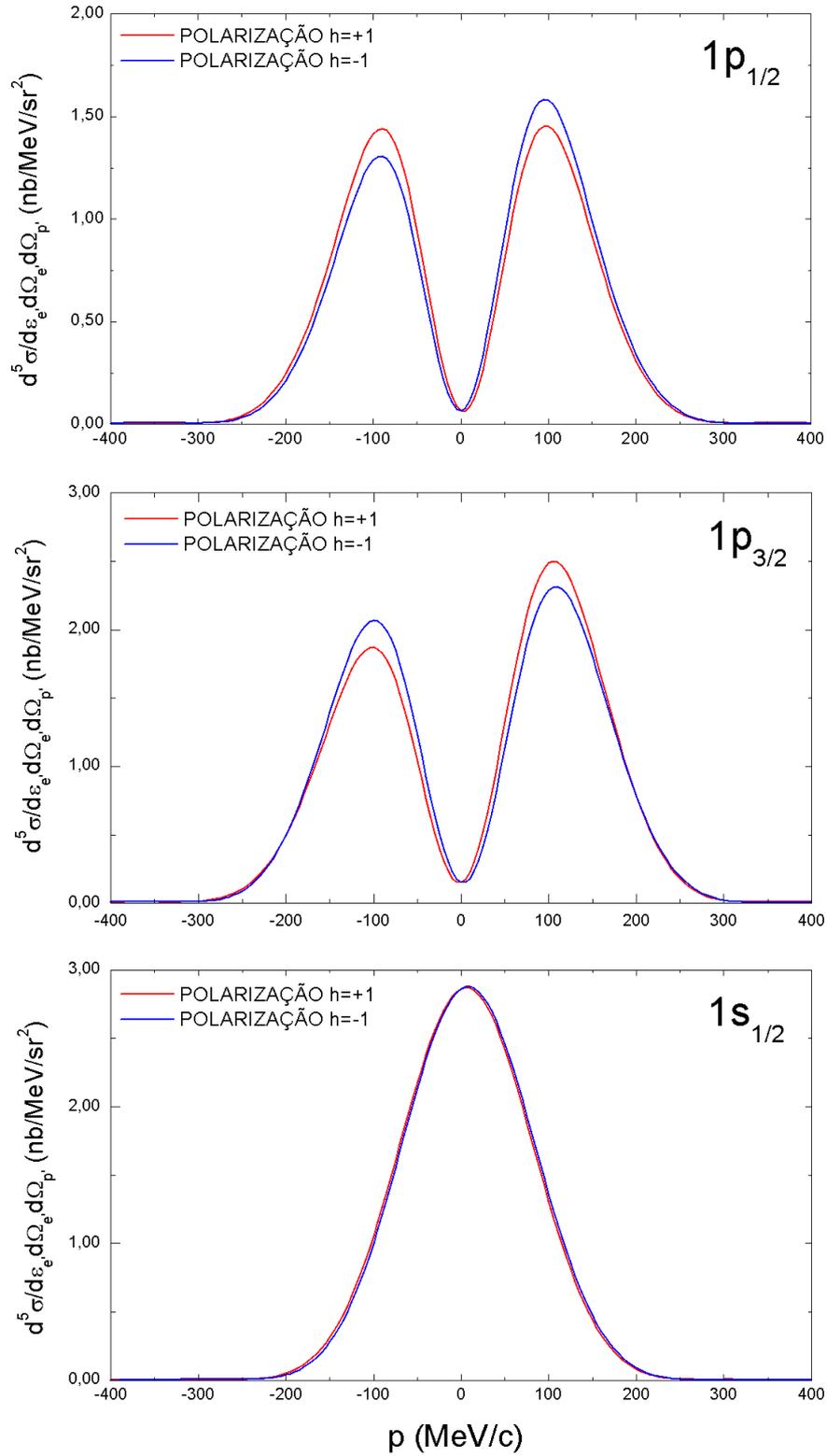


Figura 3.4: Seção de choque com polarização inicial do elétron em função do momento inicial do próton para o ^{16}O com $\epsilon_e = 1643 \text{ MeV}$, $p' = 894 \text{ MeV}/c$ e $\phi_p = \pi/3$.

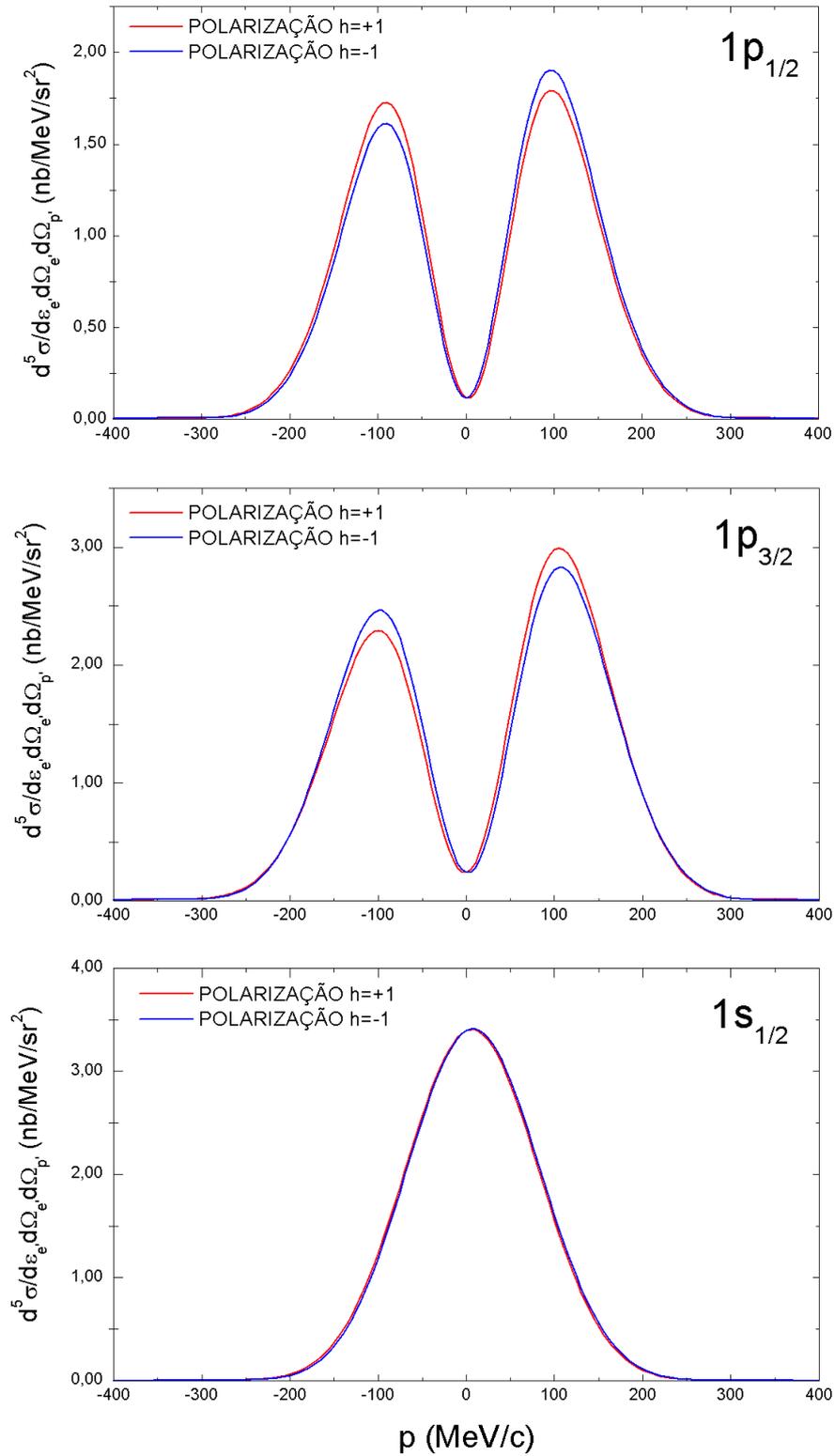


Figura 3.5: Seção de choque com polarização inicial do elétron em função do momento inicial do próton para o ^{16}O com $\epsilon_e = 2440 \text{ MeV}$, $p' = 1000 \text{ MeV}/c$ e $\phi_p = \pi/3$.

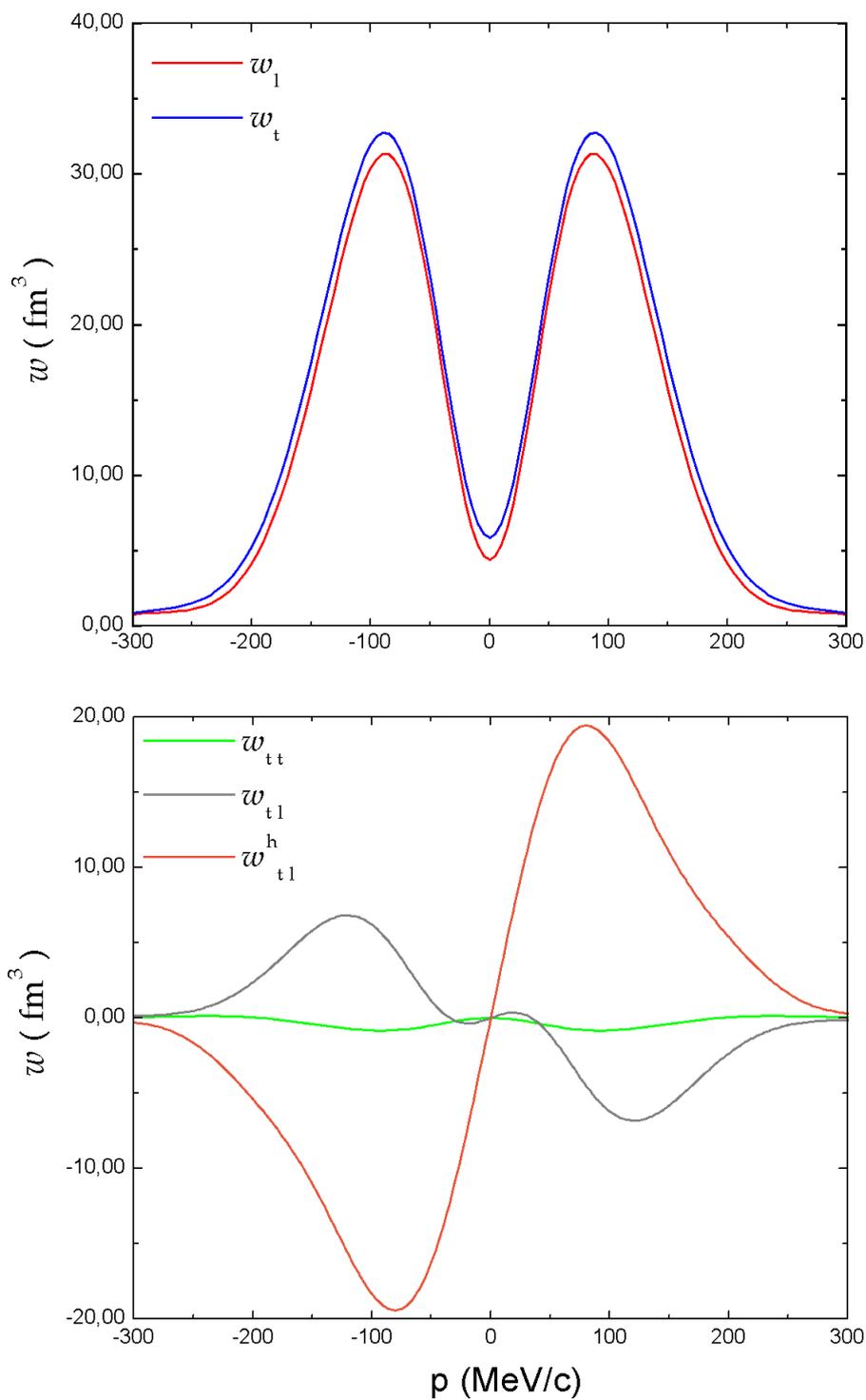


Figura 3.6: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{1/2}$ do ^{16}O , com $\epsilon_e = 456 \text{ MeV}$, $p' = 442 \text{ MeV}/c$ e $\phi_p = \pi/3$.

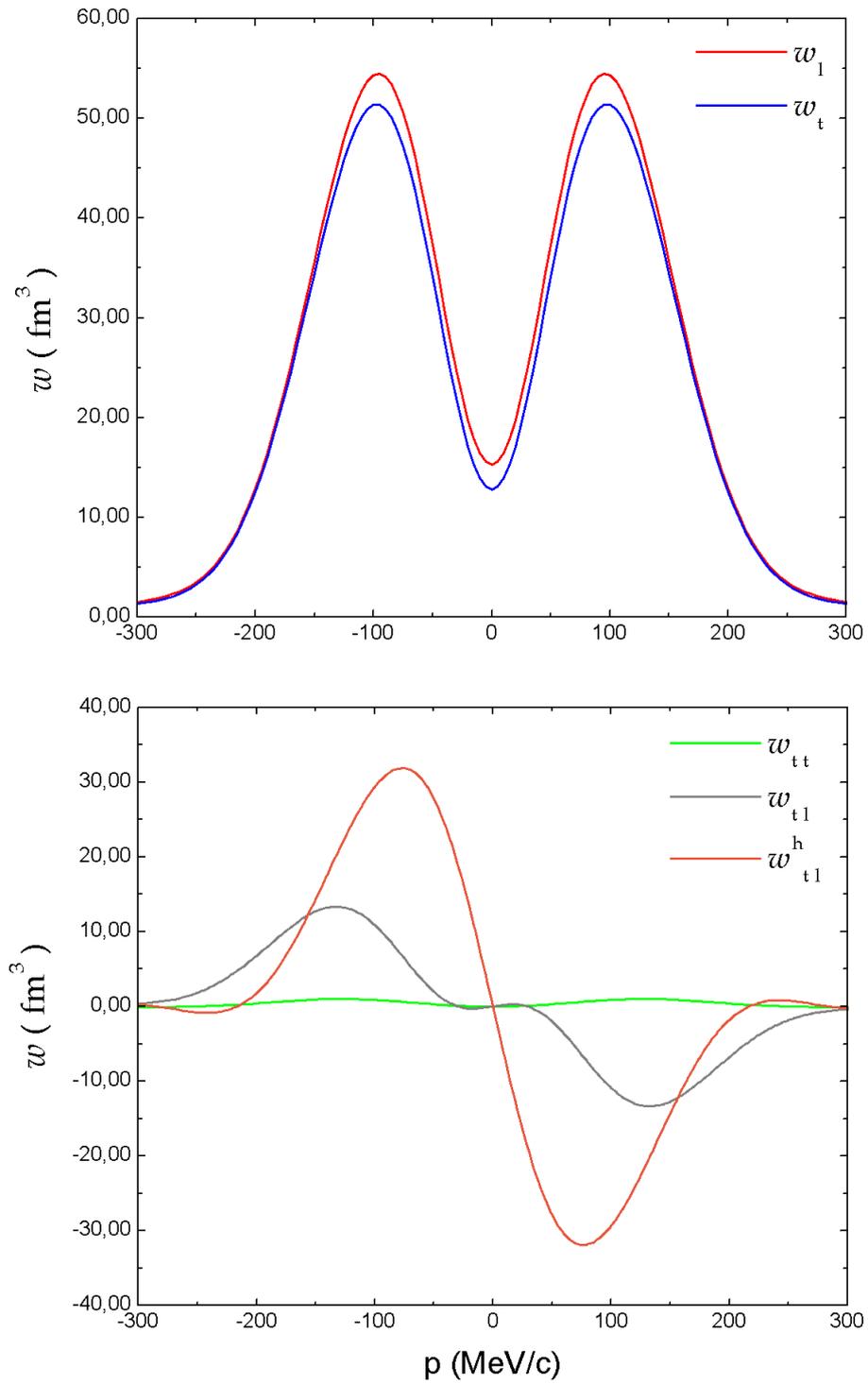


Figura 3.7: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{16}O , com $\epsilon_e = 456 \text{ MeV}$, $p' = 442 \text{ MeV}/c$ e $\phi_p = \pi/3$.

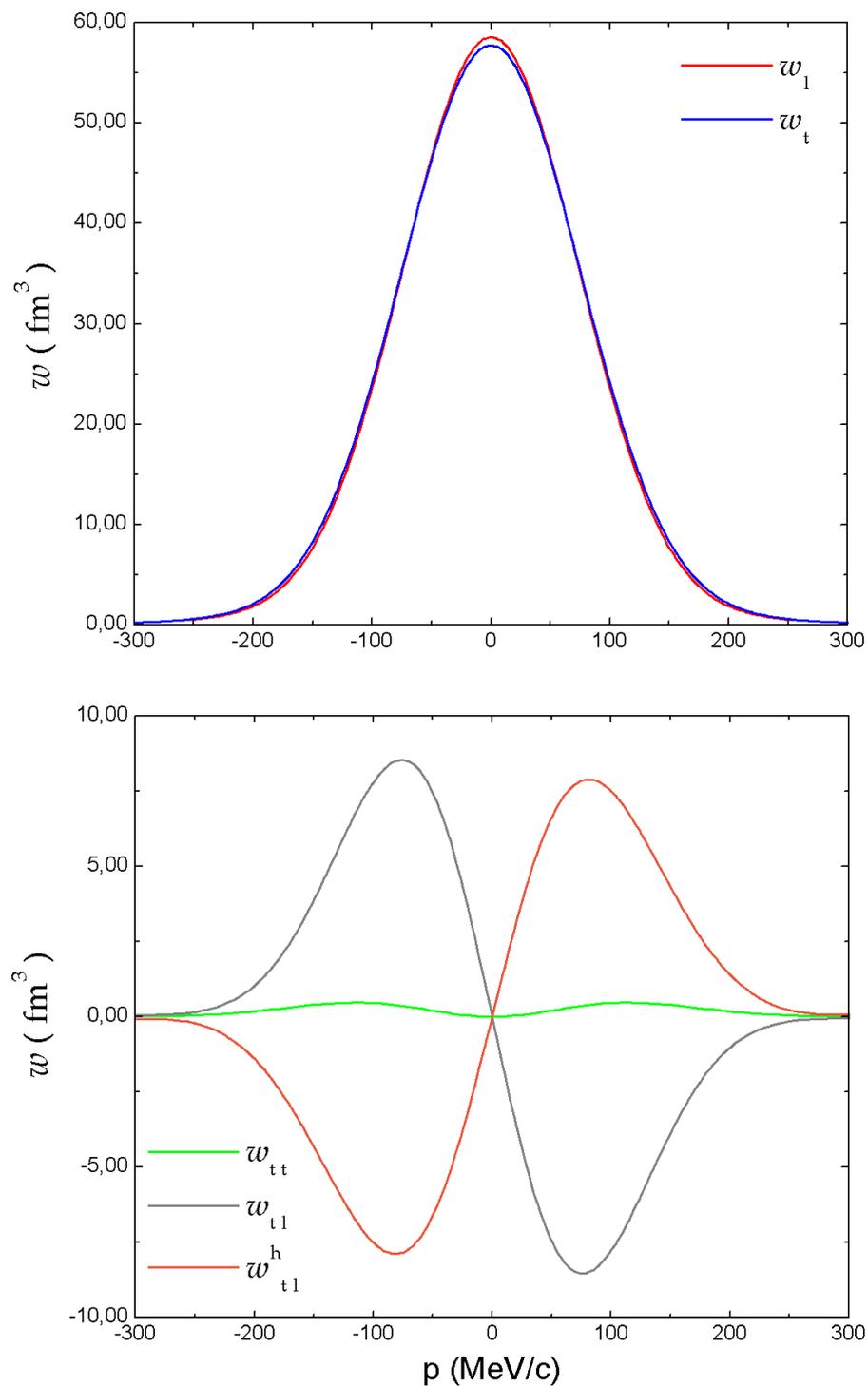


Figura 3.8: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{16}O , com $\epsilon_e = 456 \text{ MeV}$, $p' = 442 \text{ MeV}/c$ e $\phi_p = \pi/3$.

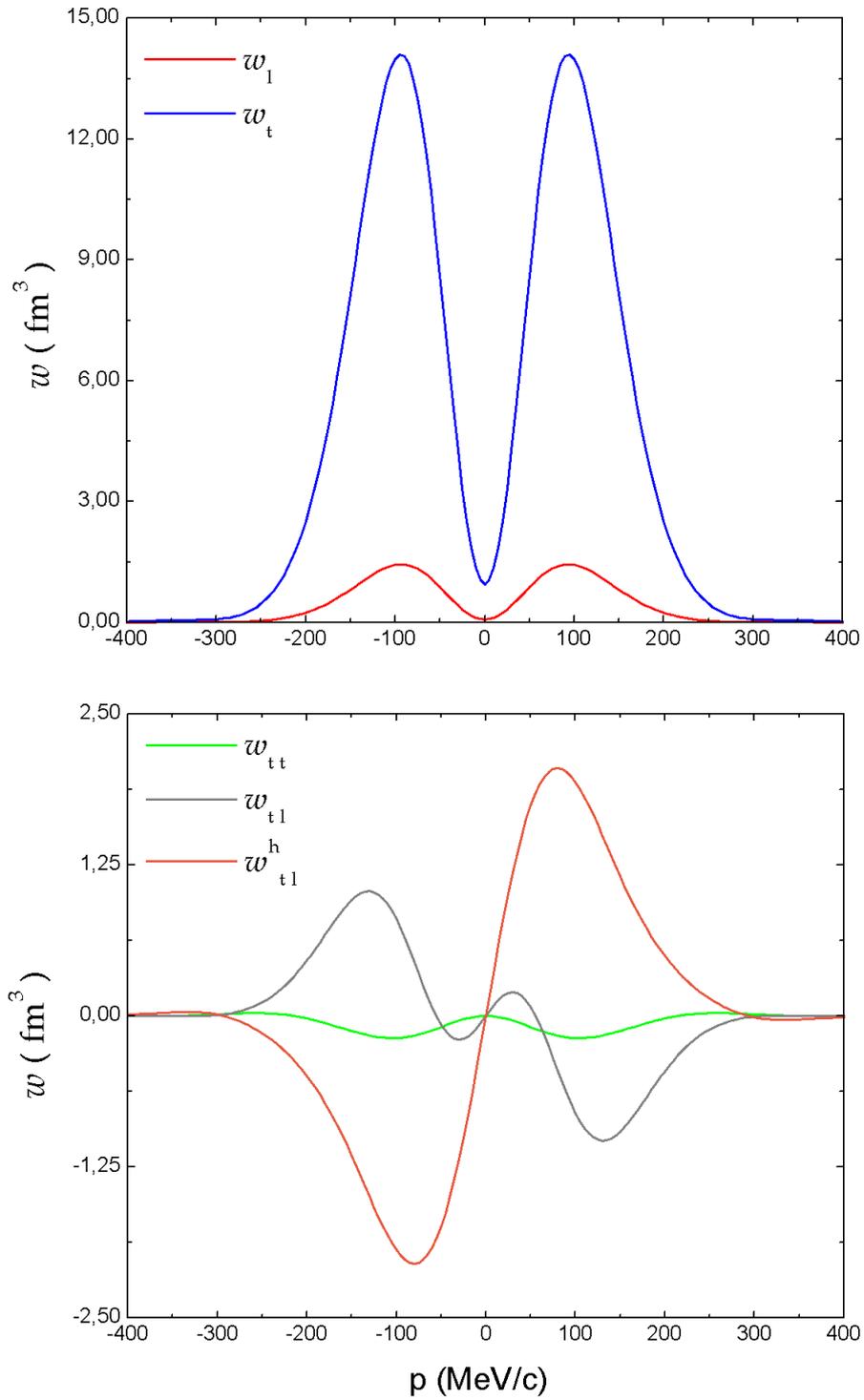


Figura 3.9: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{1/2}$ do ^{16}O , com $\epsilon_e = 2440 \text{ MeV}$, $p' = 1000 \text{ MeV}/c$ e $\phi_p = \pi/3$.

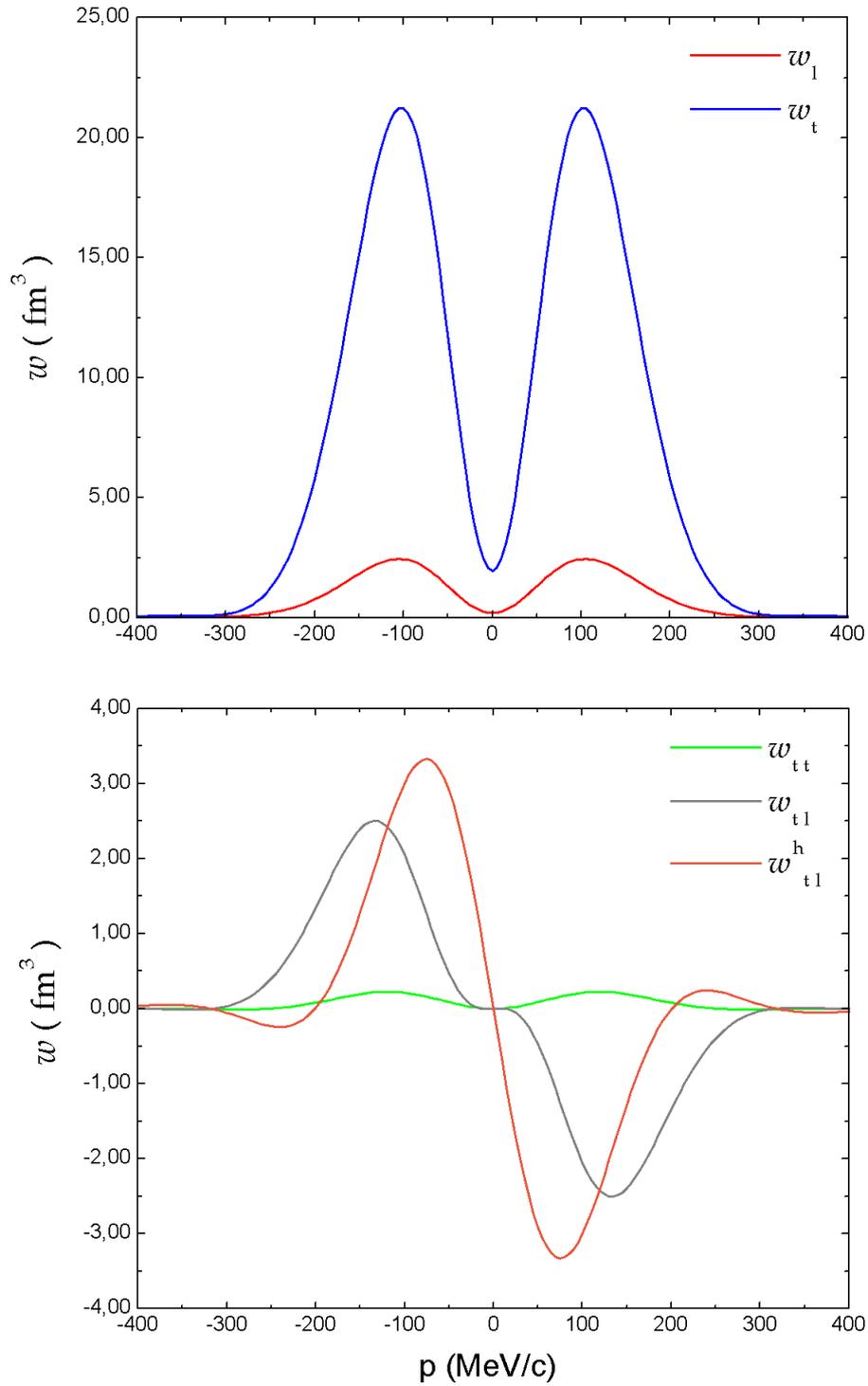


Figura 3.10: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{16}O , com $\epsilon_e = 2440 \text{ MeV}$, $p' = 1000 \text{ MeV}/c$ e $\phi_p = \pi/3$.

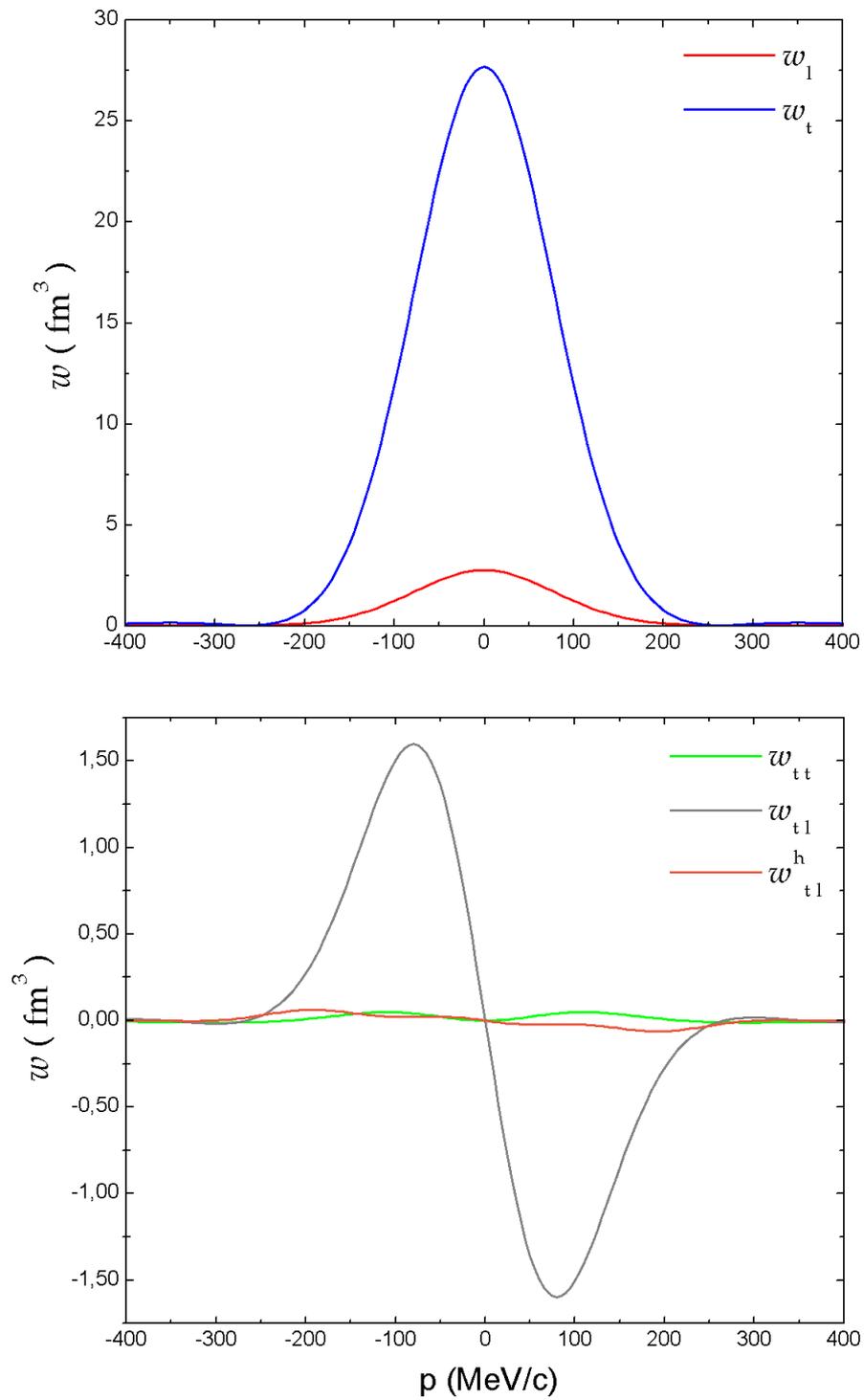


Figura 3.11: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{16}O , com $\epsilon_e = 2440 \text{ MeV}$, $p' = 1000 \text{ MeV}/c$ e $\phi_p = \pi/3$.

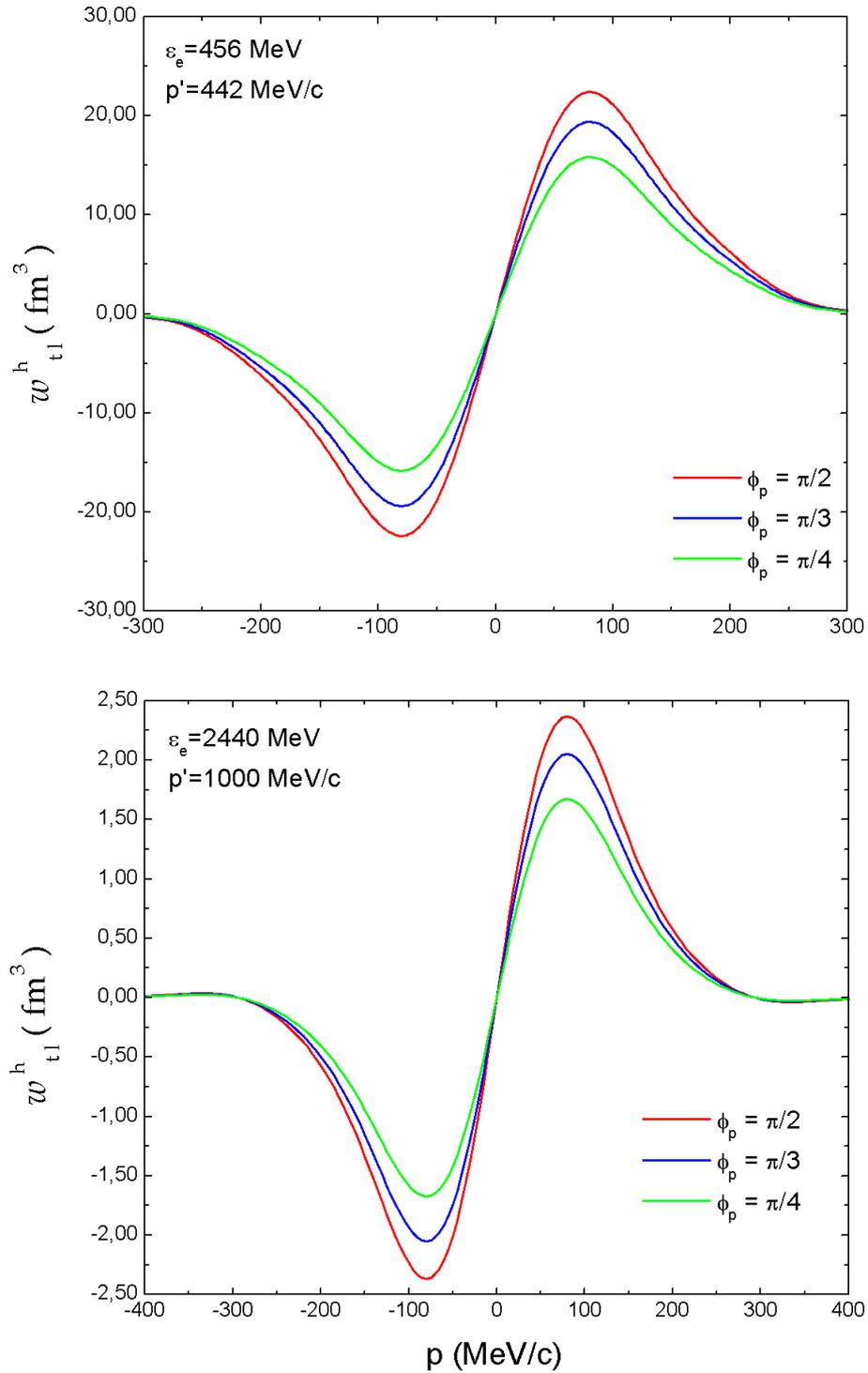


Figura 3.12: Fator de forma w_{t1}^h em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{1/2}$ do ^{16}O .

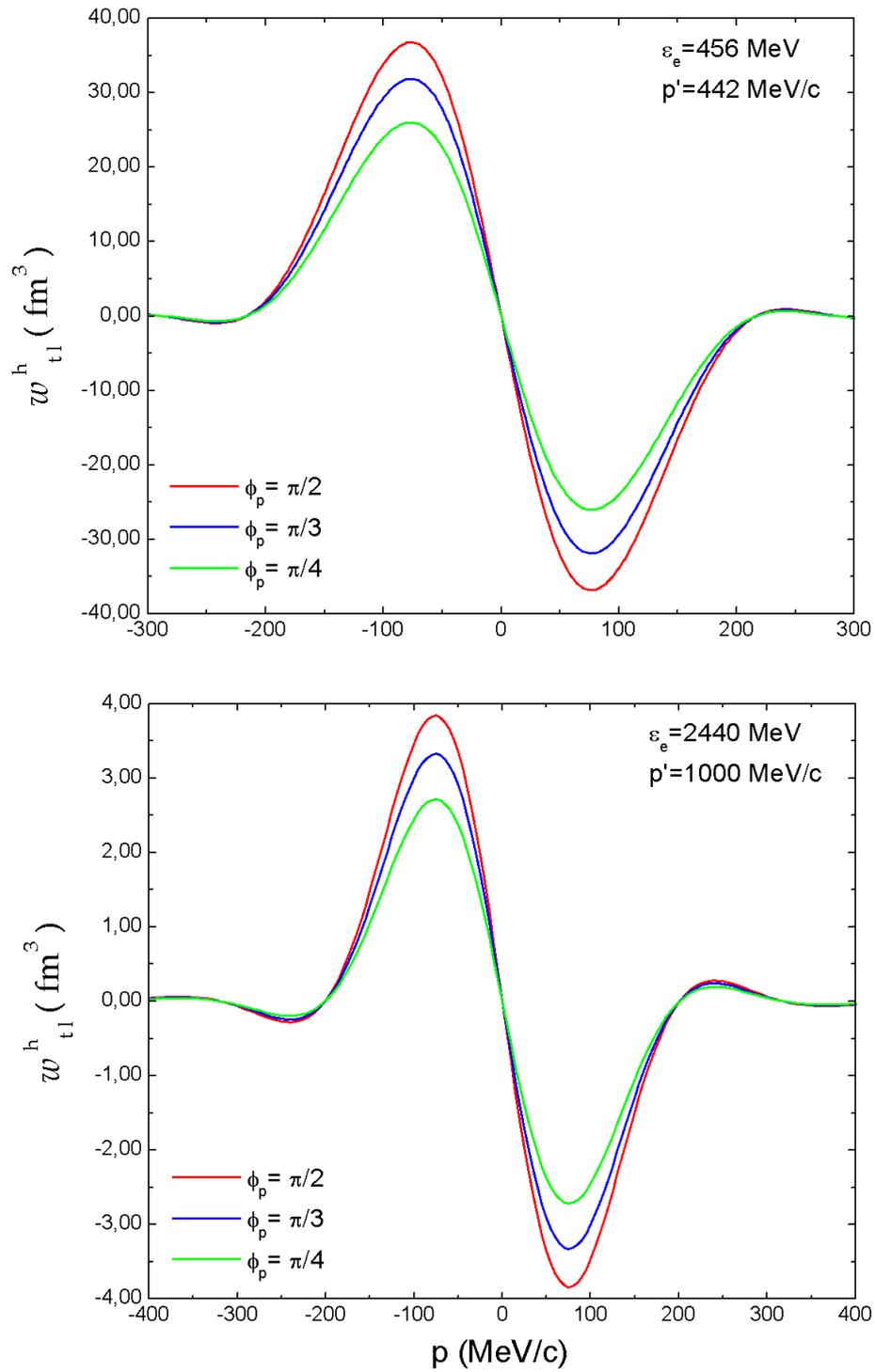


Figura 3.13: Fator de forma w_{t1}^h em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{16}O .

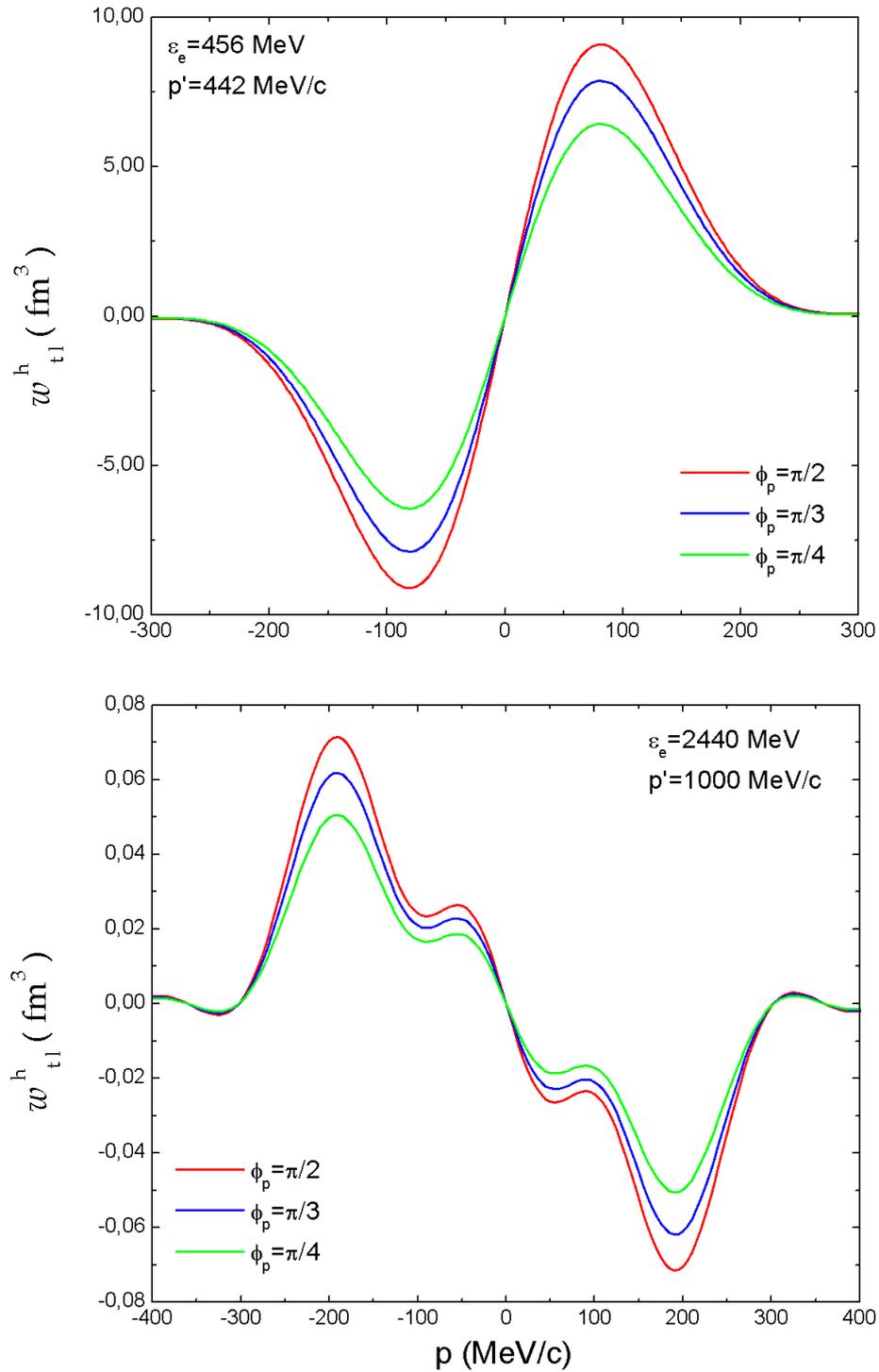


Figura 3.14: Fator de forma w_{t1}^h em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{16}O .

O gráfico da figura 3.3 mostra o comportamento da seção de choque com polarização para um ângulo de detecção $\phi_p = \pi/3$. Nele incluímos as duas polarizações $h = \pm 1$. Como podemos observar, existe uma diferença significativa entre as mesmas, especialmente na região dos picos. Já em 3.4 e 3.5 que foram feitos para energias maiores, podemos perceber que a diferença entre as curvas correspondentes às duas polarizações são menores e chega a ser quasi inexistente para o nível $1s_{1/2}$. Outra coisa que podemos notar é que quando $\epsilon_e = 456 \text{ MeV}$ e $p' = 442 \text{ MeV}/c$ as posições dos picos ficam ligeiramente deslocadas para diferentes polarizações em relação à situação em que a energia transferida pelo elétron é mais alta, além de uma inversão dos picos para uma dada polarização com relação ao sinal do momento p .

Nas figuras 3.6 a 3.11 mostramos o comportamento de cada fator de forma individualmente, nos dando um detalhamento da seção de choque. Os fatores de forma w_l e w_t são dominantes para energia $\epsilon_e = 456 \text{ MeV}$ e momento final $p' = 442 \text{ MeV}/c$. O fator de forma w_t domina para energias maiores ($\epsilon_e = 2440 \text{ MeV}$ e $p' = 1000 \text{ MeV}/c$). O fator de forma w_{tt} é sempre muito pequeno em relação aos demais. Já o fator de forma w_{ll}^h exerce forte influência na configuração $\epsilon_e = 456 \text{ MeV}$ e $p' = 442 \text{ MeV}/c$, porém sua contribuição diminui quando aumentamos a energia, como para $\epsilon_e = 2440 \text{ MeV}$ e $p' = 1000 \text{ MeV}/c$, o que explica a diminuição nas diferenças entre as seções de choque para polarizações opostas com o aumento da energia. Finalmente, a contribuição do fator de forma w_{ll} é sempre modesta comparada aos termos dominantes, porém pode ser extraído diretamente da assimetria A_{ll} , como será mostrado adiante.

Finalmente, nas figuras 3.12, 3.13 e 3.14 mostramos o comportamento do fator de forma w_{ll}^h , para diferentes ângulos de detecção ϕ_p , que é o termo que contribui para a parte de polarização da seção de choque. É importante dizer que o fator de forma w_{ll}^h é nulo se usarmos uma aproximação de ondas planas para o próton em seu estado final. Isto significa que uma medida deste fator de forma é na verdade uma medida direta das chamadas interações de estados finais (FSI) no processo $(e, e'p)$. Os demais fatores de forma, embora também dependam das FSI, não se anulam na aproximação de ondas planas. A medida experimental de w_{ll}^h é assim uma oportunidade única de testar as diferentes aproximações de tratamento para as FSI. Podemos inferir assim que a diminuição do efeito da polarização do elétron com o aumento da energia seja consequência de que as FSI são menos importantes com o aumento da energia final do próton.

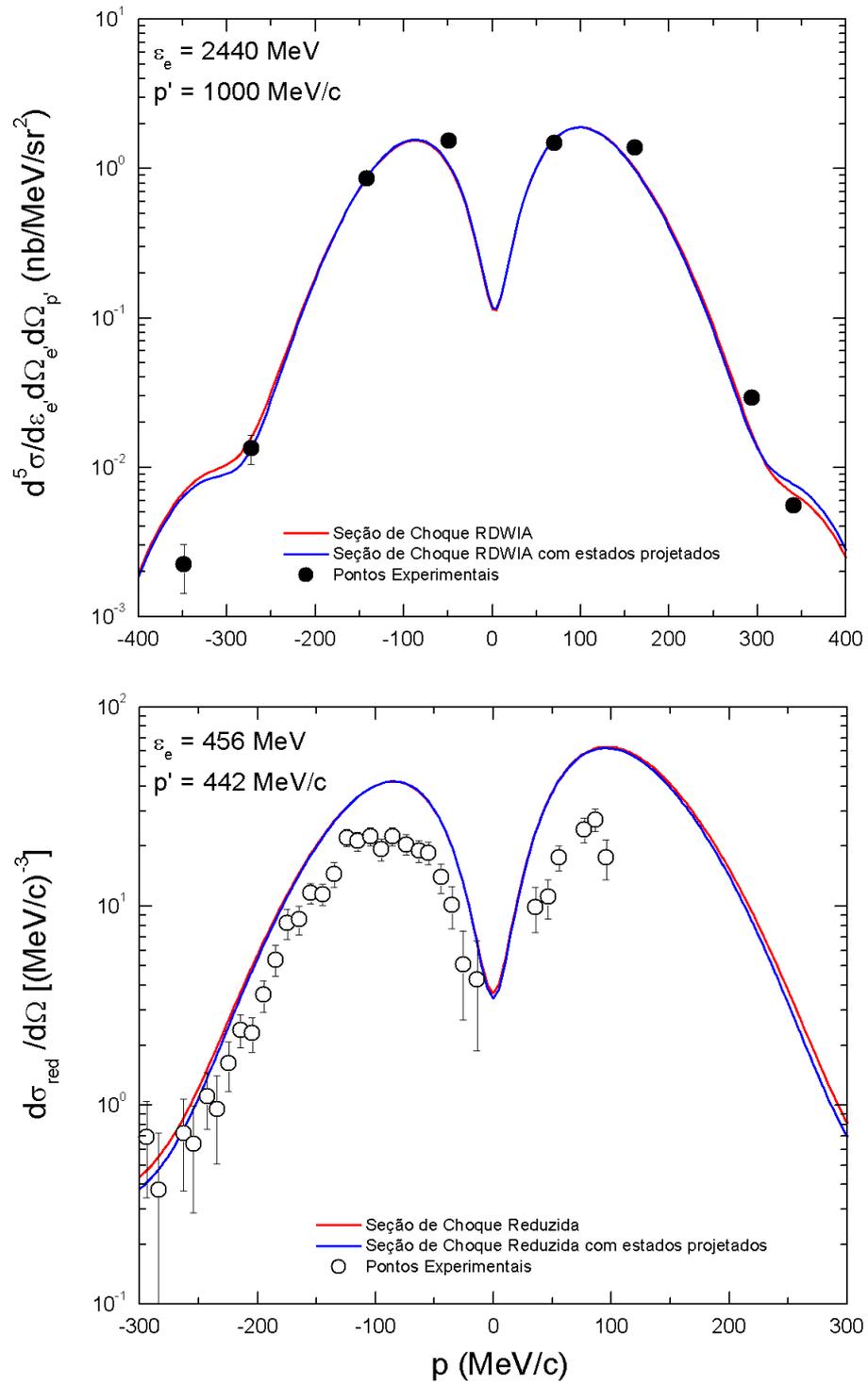


Figura 3.15: Seção de choque em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{1/2}$ do ^{16}O .

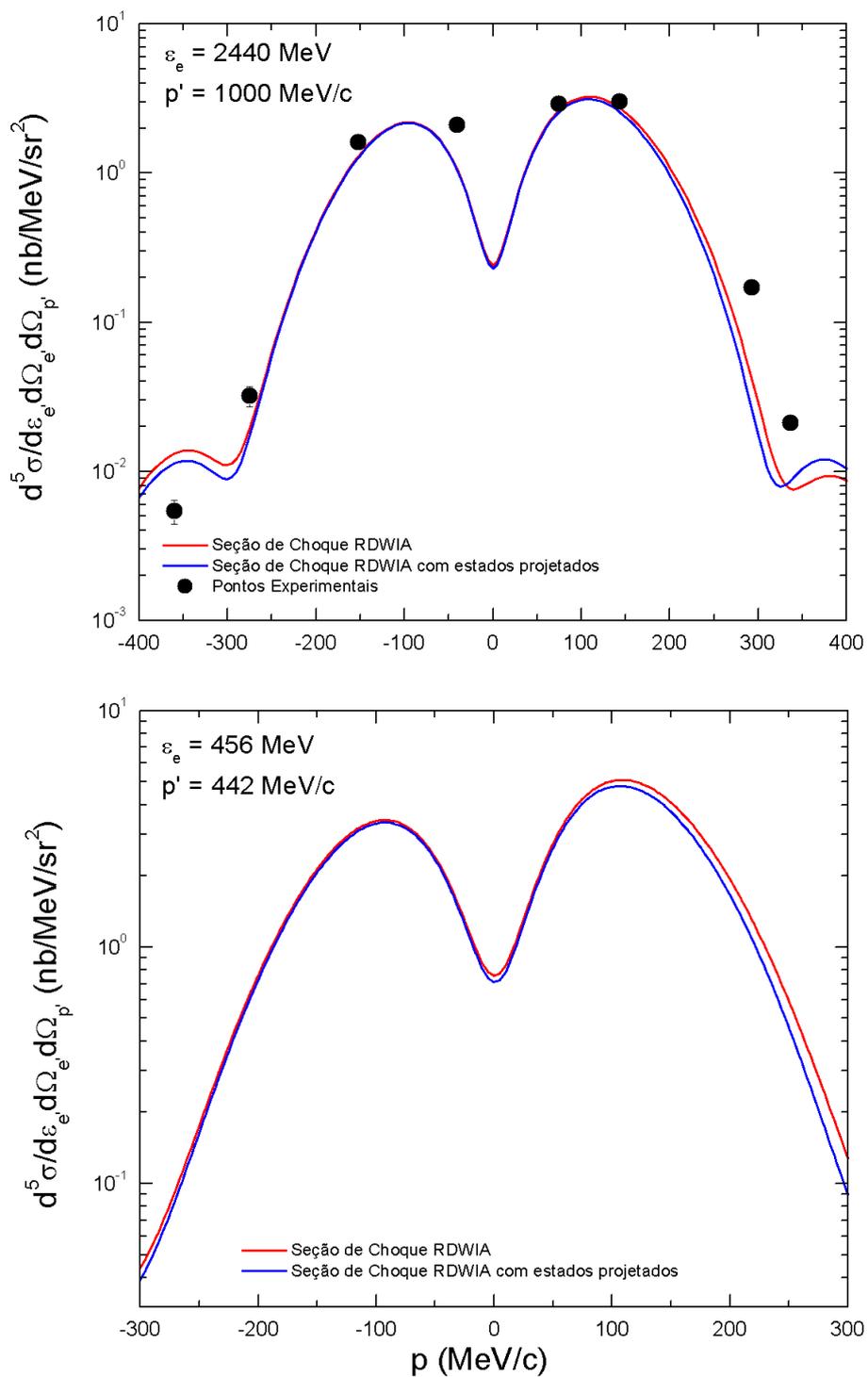


Figura 3.16: Seção de choque em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{16}O .

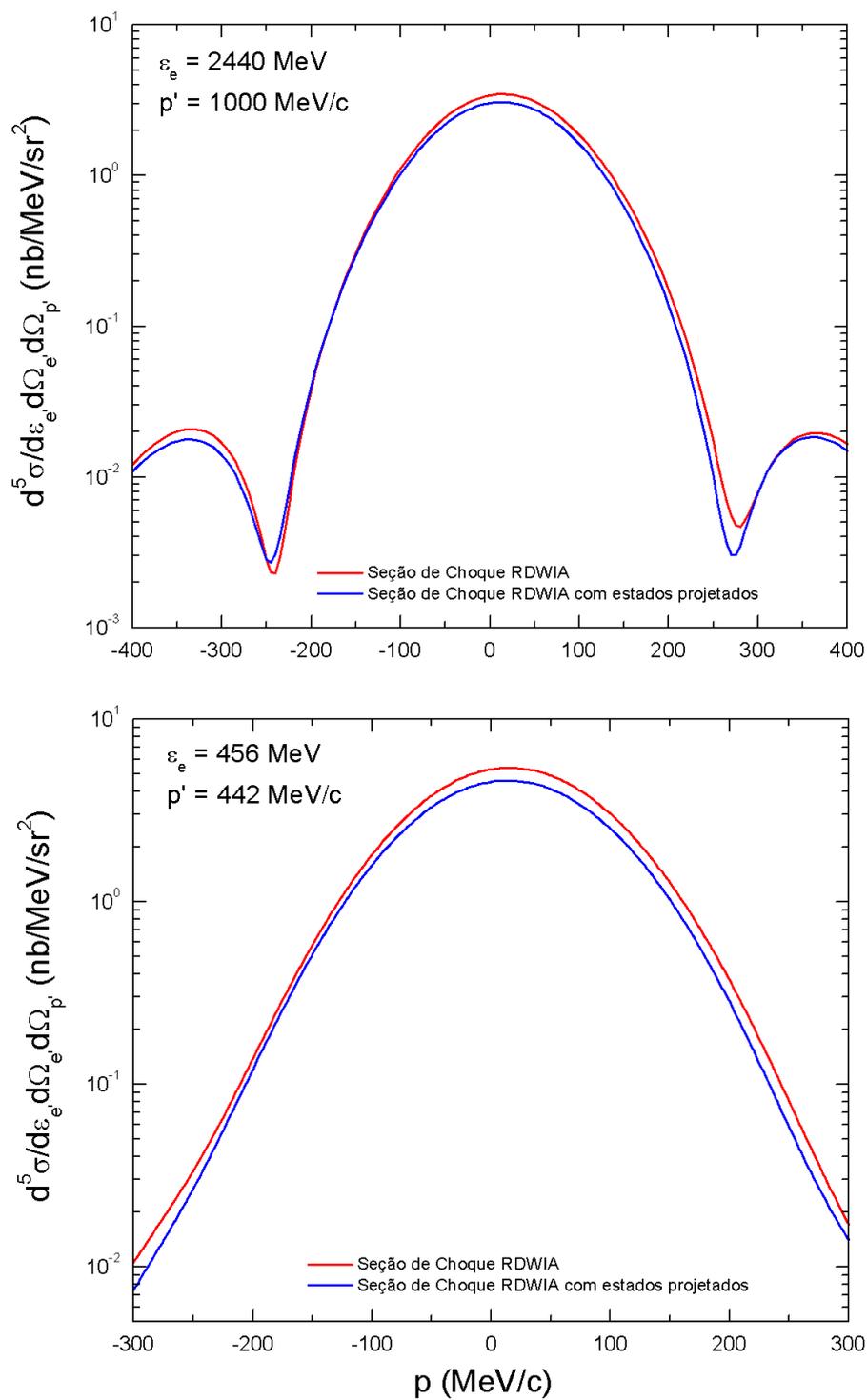


Figura 3.17: Seção de choque em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{16}O .

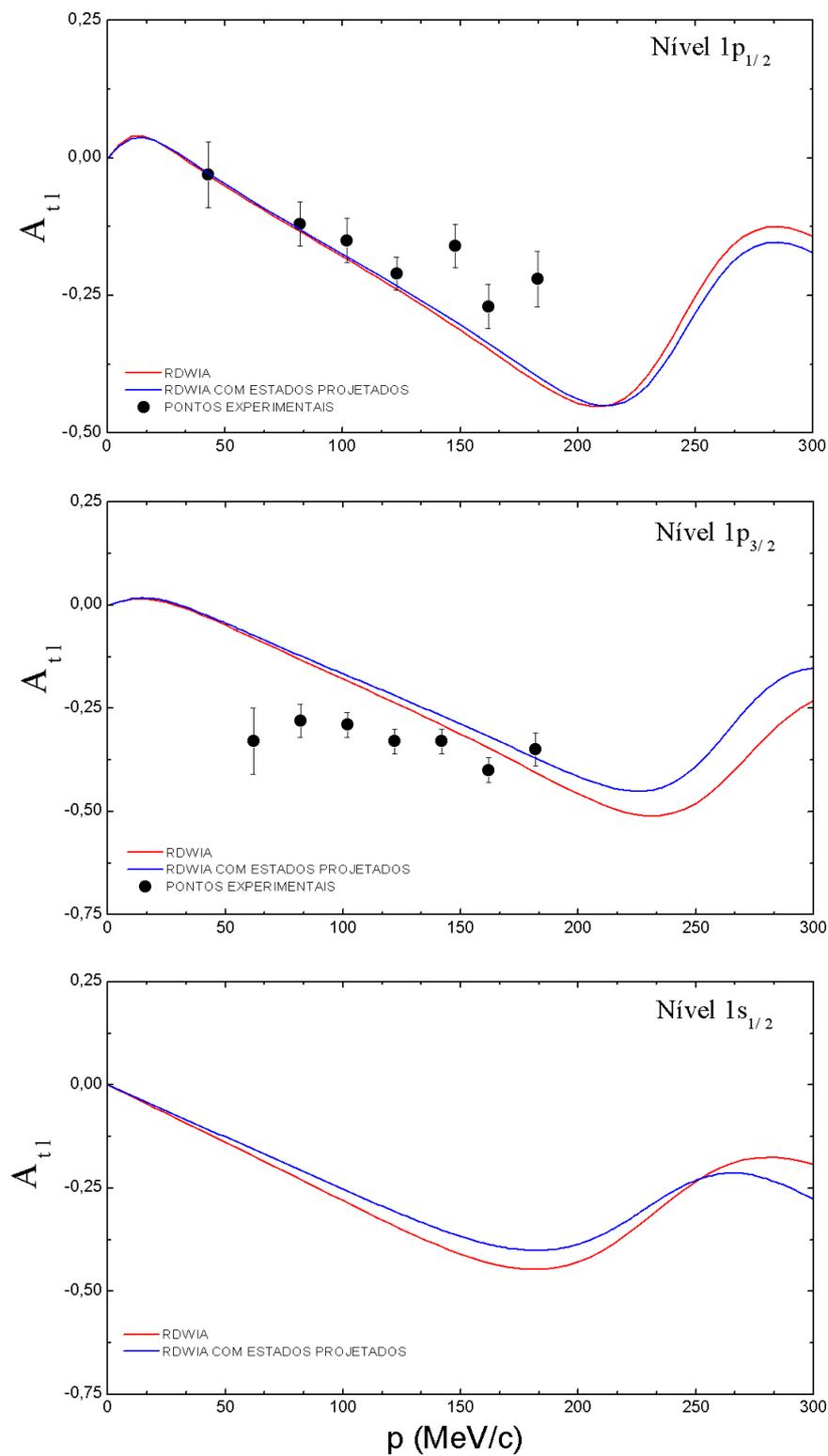


Figura 3.18: Assimetria A_{tl} em função do momento inicial do próton para o ^{16}O , com $\epsilon_e = 456 \text{ MeV}$ e $p' = 447 \text{ MeV}/c$.

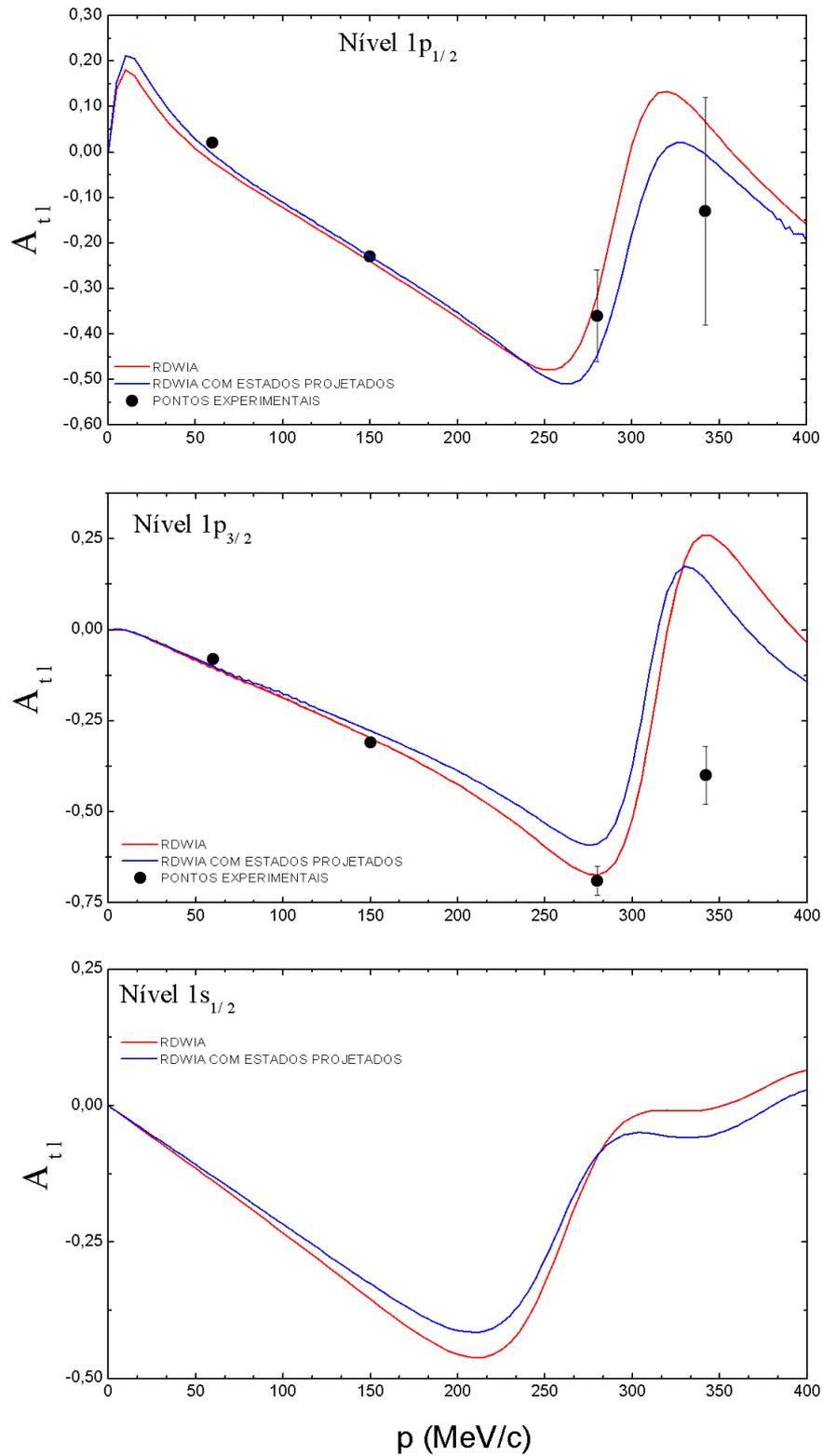


Figura 3.19: Assimetria A_{tl} em função do momento inicial do próton para o ^{16}O , com $\epsilon_e = 1643 \text{ MeV}$ e $p' = 894 \text{ MeV}/c$.

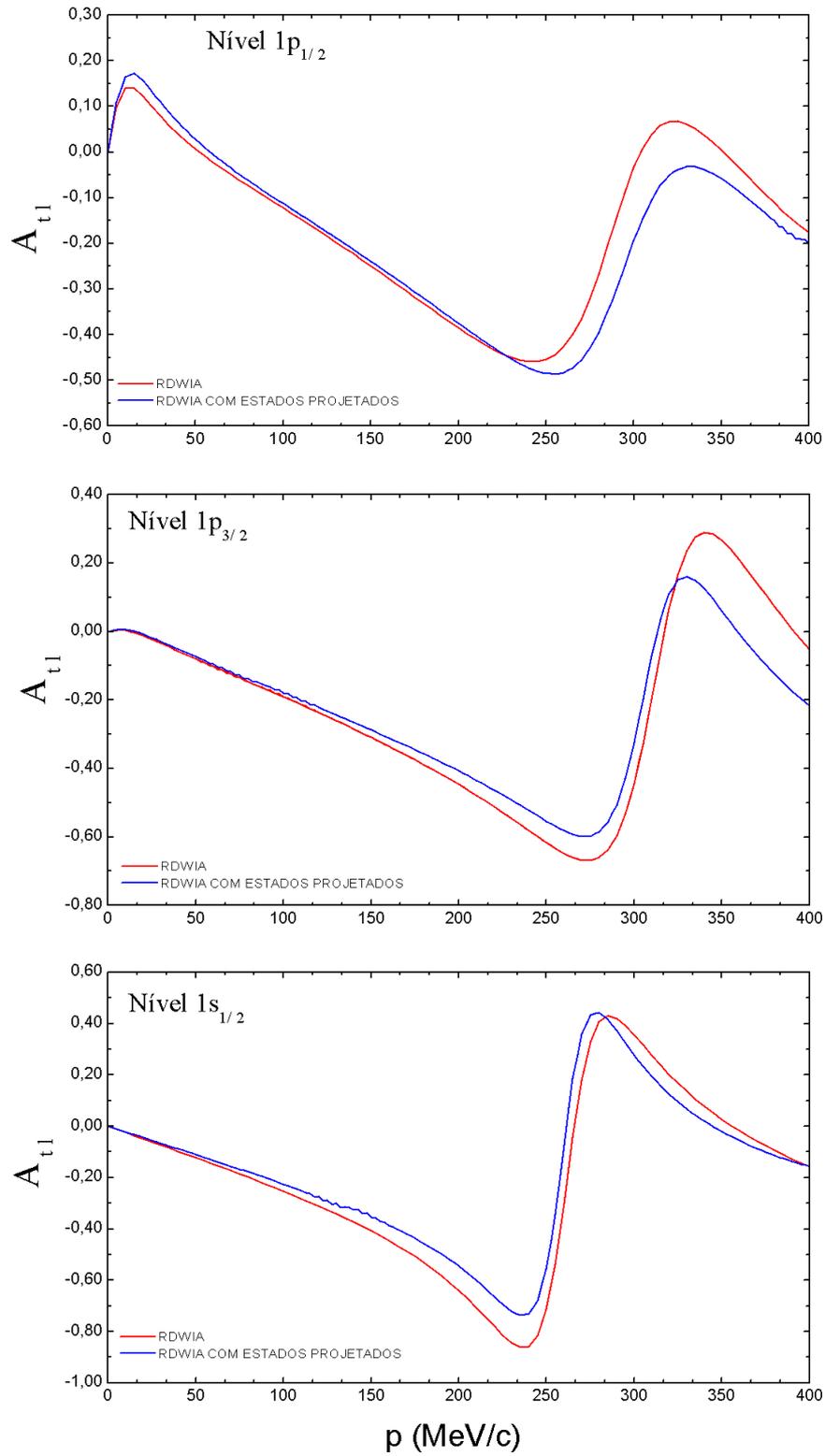


Figura 3.20: Assimetria A_{tl} em função do momento inicial do próton para o ^{16}O , com $\epsilon_e = 2440 \text{ MeV}$ e $p' = 1000 \text{ MeV}/c$.

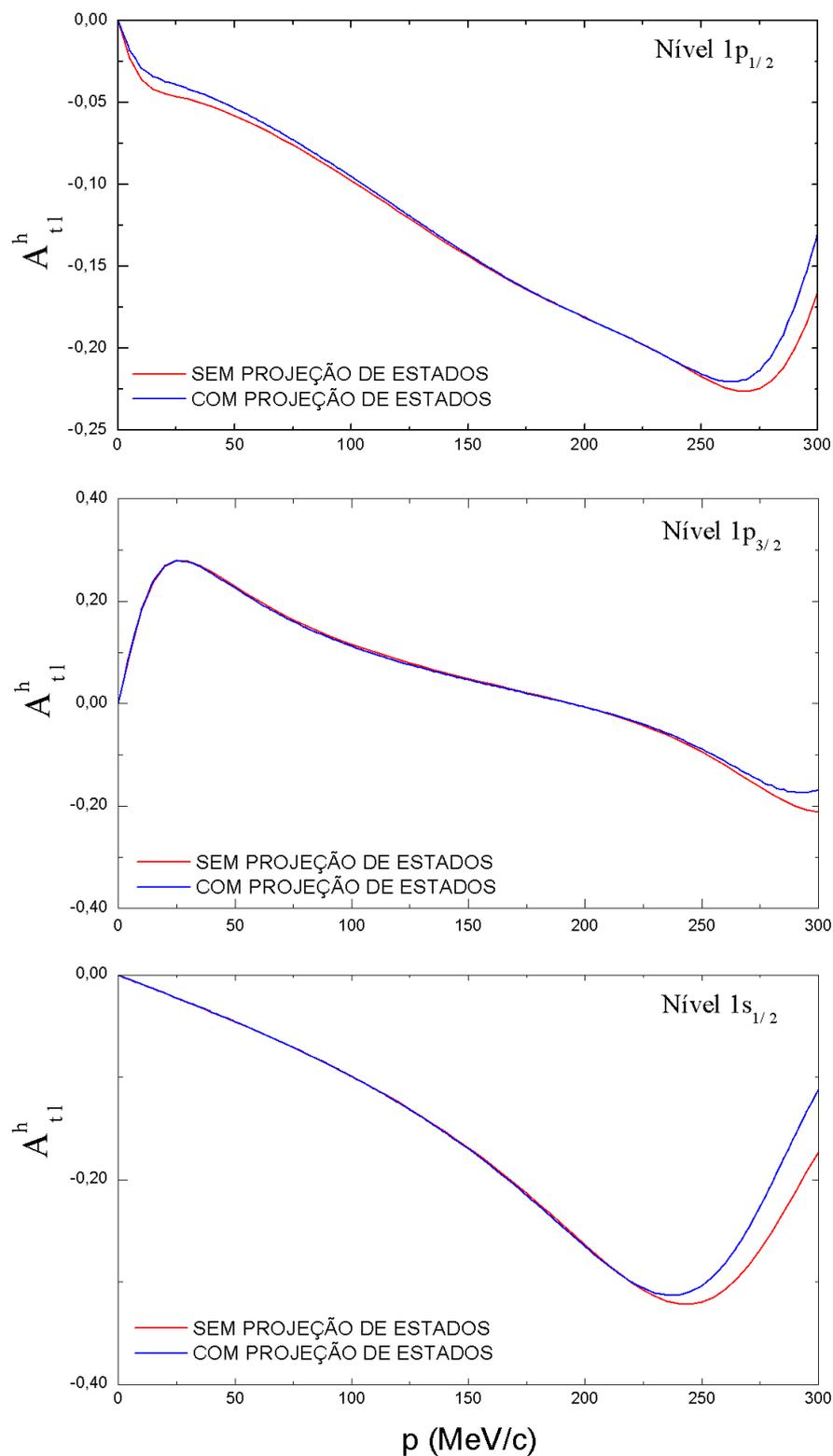


Figura 3.21: Assimetria A_{t1}^h em função do momento inicial do próton para o ^{16}O , com $\epsilon_e = 456 \text{ MeV}$ e $p' = 447 \text{ MeV}/c$.

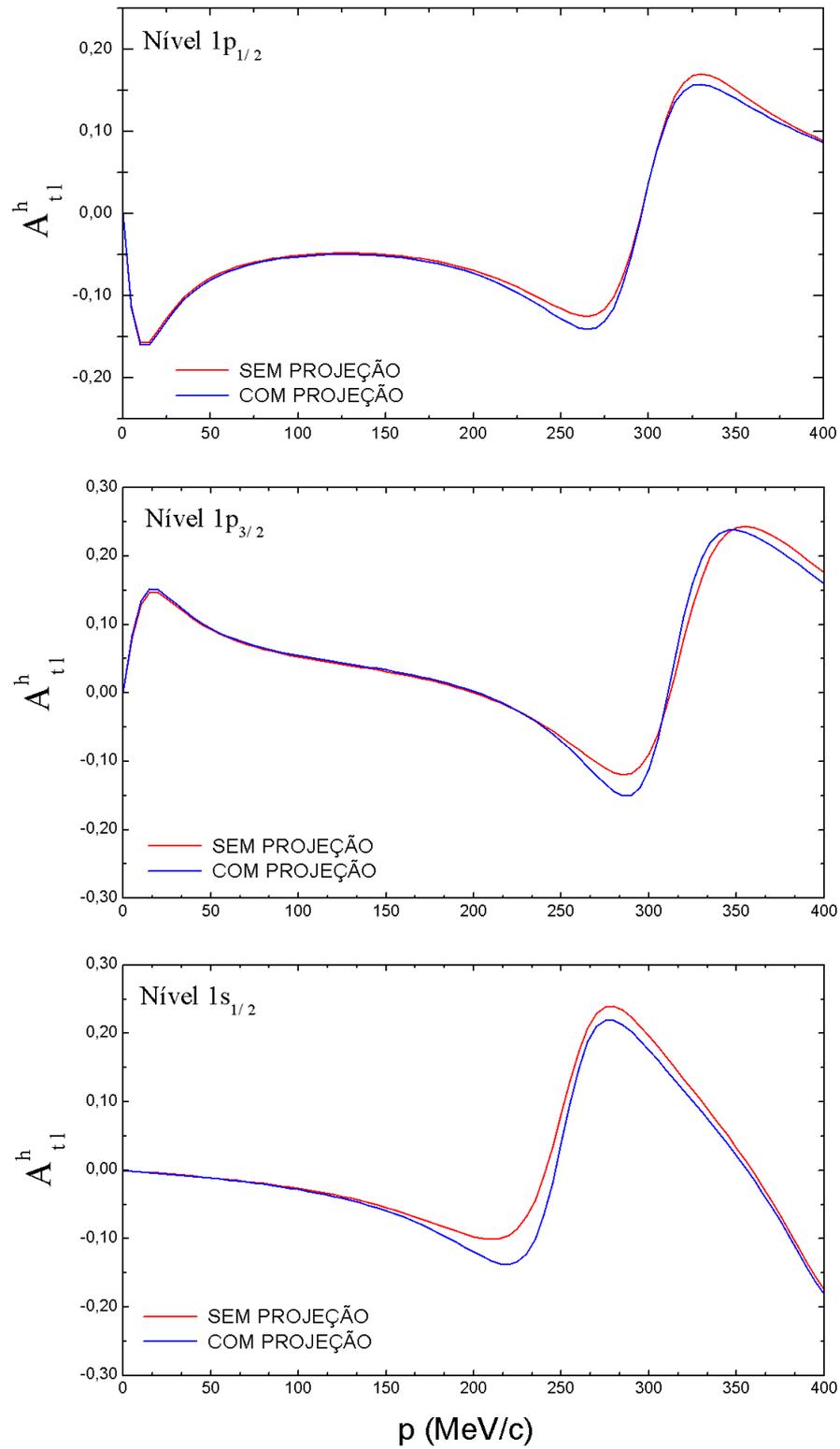


Figura 3.22: Assimetria A_{tl}^h em função do momento inicial do próton para o ^{16}O , com $\epsilon_e = 1643 \text{ MeV}$ e $p' = 894 \text{ MeV}/c$.

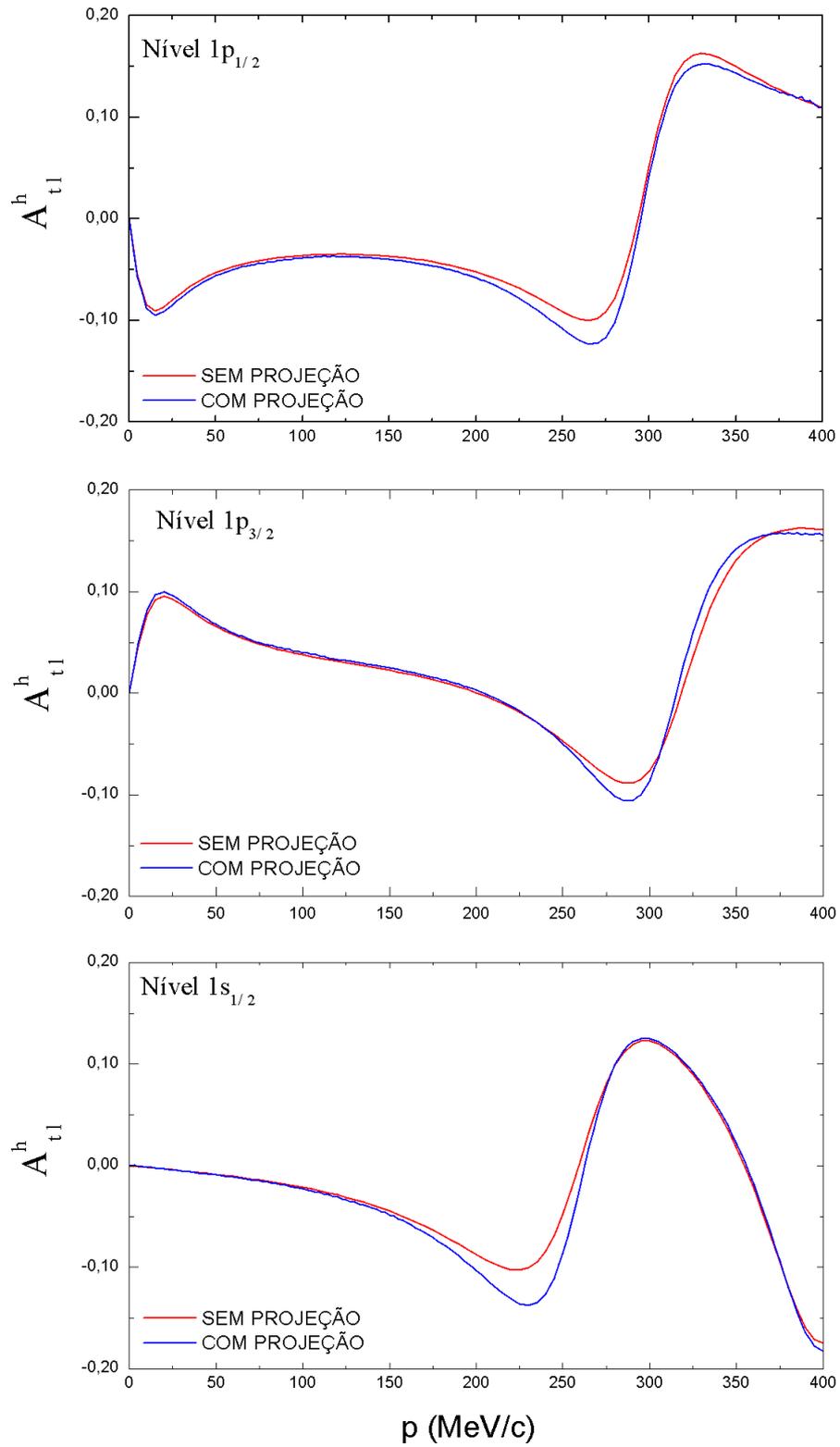


Figura 3.23: Assimetria A_{tl}^h em função do momento inicial do próton para o ^{16}O , com $\epsilon_e = 2440 \text{ MeV}$ e $p' = 1000 \text{ MeV}/c$.

Mostramos nas figuras 3.15 e 3.16 a seção de choque com dados experimentais de [24] para o núcleo de ^{16}O com $\epsilon_e = 2440\text{MeV}$ e $p' = 1000\text{MeV}/c$. Na figura 3.15, apresentamos os resultados para a seção de choque reduzida comparados aos dados experimentais de [23] para $\epsilon_e = 456\text{MeV}$ e $p' = 442\text{MeV}/c$. Em todos os casos comparamos as seções de choque obtidas com e sem projeção nos estados de energia positiva, usando a expressão para a corrente de transição conforme discutido ao final do capítulo 2. Conclui-se que os efeitos dos estados de energia negativa na seção de choque é desprezível, frente à precisão dos dados experimentais. Além disso, vemos que para a energia do elétron incidente igual a 2440 MeV a concordância com a experiência é muito boa, porém o mesmo não ocorre com a energia de 456 MeV. Essa discrepância pode ter sua origem na parametrização usada para a descrição das FSI ou nas limitações do próprio modelo de estrutura usado, restrito à aproximação de campo médio. Pelo que pudemos observar na literatura, usando outros modelos de campo médio, os dados experimentais para essa energia ficam sistematicamente abaixo da seção de choque calculada. Procura-se então por um fator de correção constante para ajustar os dados, o qual é então associado a um fator espectroscópico comum. Tal fator espectroscópico depende essencialmente do overlap entre o estado inicial do alvo e o estado final do núcleo residual [8].

As figuras 3.18 a 3.20 mostram a assimetria A_{ll} comparada com os dados experimentais existentes [25],[26],[27]. Esta última não depende do fator espectroscópico, já que se trata de uma razão entre seções de choque e pode ser um bom teste para investigarmos os efeitos do mar de Dirac. Assim, também aqui apresentamos os resultados com e sem projeção nos estados de energia positiva. Com exceção da assimetria para o nível $1p_{3/2}$, energia do elétron de 1643 MeV e momento final do próton $p' = 894\text{MeV}/c$, fica difícil traçar alguma conclusão dada a precisão atual dos dados experimentais, mas sem dúvida a medida de A_{ll} pode ser um excelente teste para a observação de efeitos relativísticos na estrutura nuclear.

Escolhendo agora $\phi_p = \pi/2$, fizemos ainda algumas previsões teóricas para a assimetria A_{ll}^h , conforme as figuras 3.21, 3.22 e 3.23. Concluimos que a observação da assimetria devida à polarização inicial do elétron não é tão sensível aos efeitos do mar de Dirac.

A fim de testar a sensibilidade do modelo usado para descrever o núcleo alvo, fizemos uma comparação entre nossos resultados para o ^{16}O com e sem dependência na densidade nos parâmetros de acoplamento méson-nucleon. Como podemos ver nas figuras 3.24 e 3.25, os resultados mudam bastante para a seção de choque e vão na direção correta dos dados experimentais quando incluímos a dependência na densidade. Uma análise dos fatores de forma individuais mostra também que todos eles são bastante sensíveis à mudança e

que essa conclusão não muda substancialmente com a energia. Cálculos relativísticos da seção de choque $(e, e'p)$ encontrados na literatura, usam versões não-lineares do Modelo de Wallecka e obtêm resultados semelhantes aos encontrados aqui (ver por exemplo [28] e referências lá citadas).

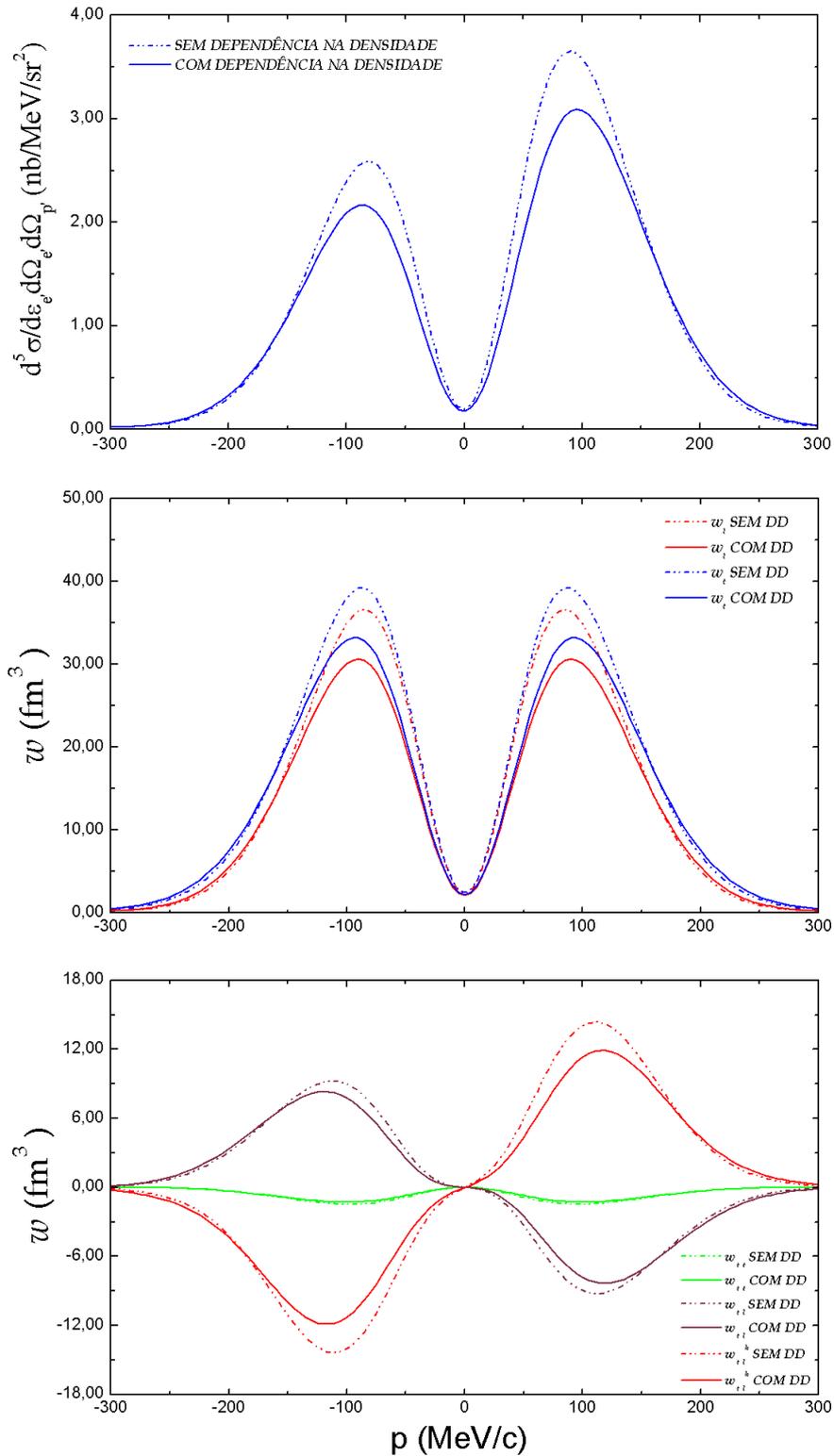


Figura 3.24: Gráficos feitos para o nível $1p_{1/2}$ do ^{16}O com $\epsilon_e = 456\text{MeV}$, $p' = 442\text{MeV}/c$, polarização do elétron $h = -1$ e $\phi_p = \pi/3$. O primeiro de cima para baixo representa a seção de choque com e sem dependência na densidade (DD) em função do momento inicial do próton. O segundo mostra os fatores de forma w_l e w_t . O último apresenta os fatores de forma w_{tt} , w_{tl} e w_{tl}^h .

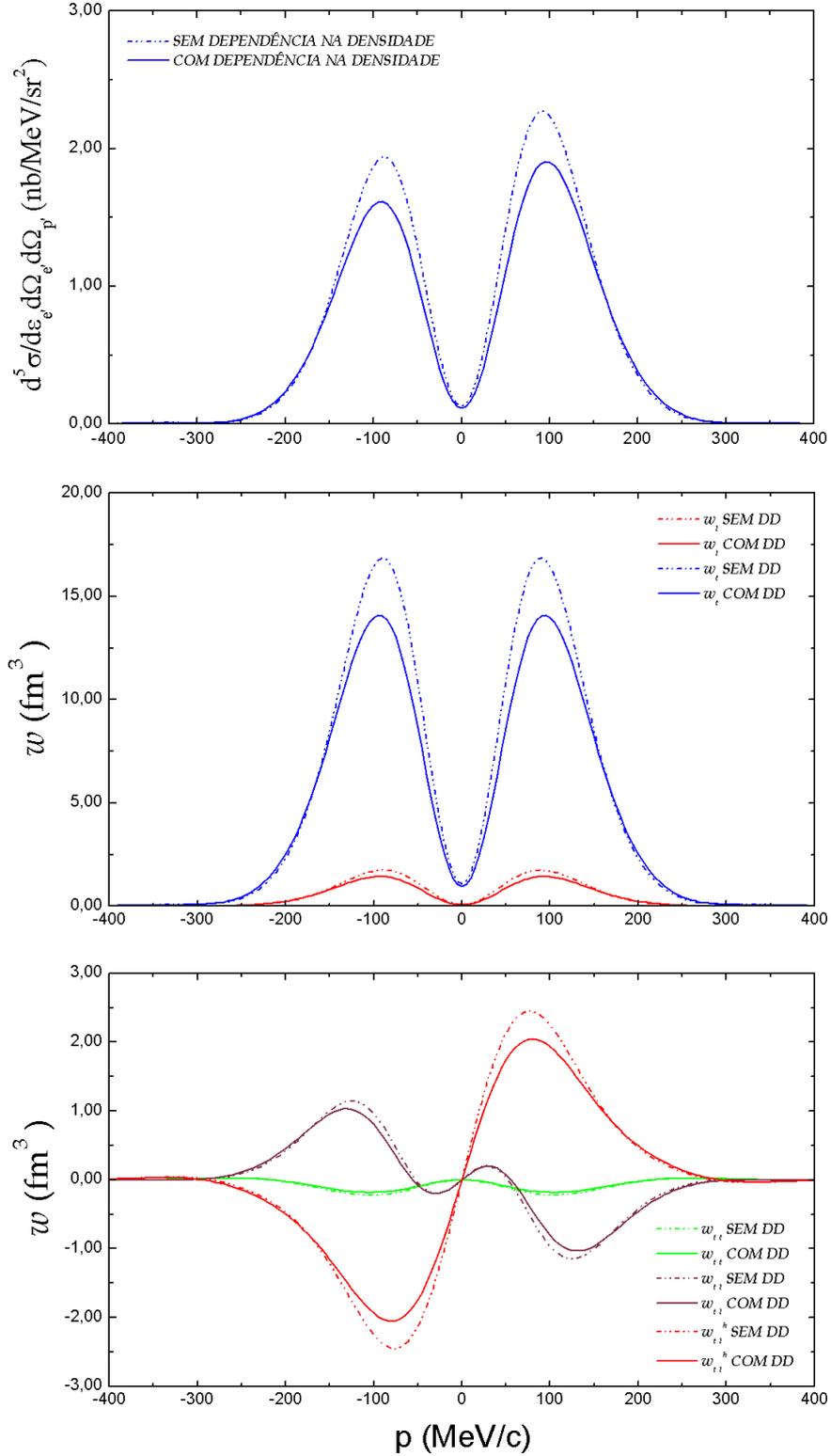


Figura 3.25: Gráficos feitos para o nível $1p_{1/2}$ do ^{16}O com $\epsilon_e = 2440\text{MeV}$ e $p' = 1000\text{MeV}/c$, polarização do elétron $h = -1$ e $\phi_p = \pi/3$. O primeiro de cima para baixo representa a seção de choque com e sem dependência na densidade (DD) em função do momento inicial do próton. O segundo mostra os fatores de forma w_l e w_t . O último apresenta os fatores de forma w_{tt} , w_{tl} e w_{tl}^h .

Por último comparamos os resultados para as seções de choque e fatores de forma individuais usando uma aproximação de ondas planas para o próton ejetado (RPWIA), como mostrado nas figuras 3.26 e 3.27. Como esperado, as diferenças diminuem na seção de choque quando aumentamos a energia do proton embora continuem a ser significativas para as energias aqui testadas. Quanto aos fatores de forma, além do w_{ll}^h , que vai a zero na RPWIA, os fatores de forma w_l e w_{ll} são os mais sensíveis a essa aproximação.

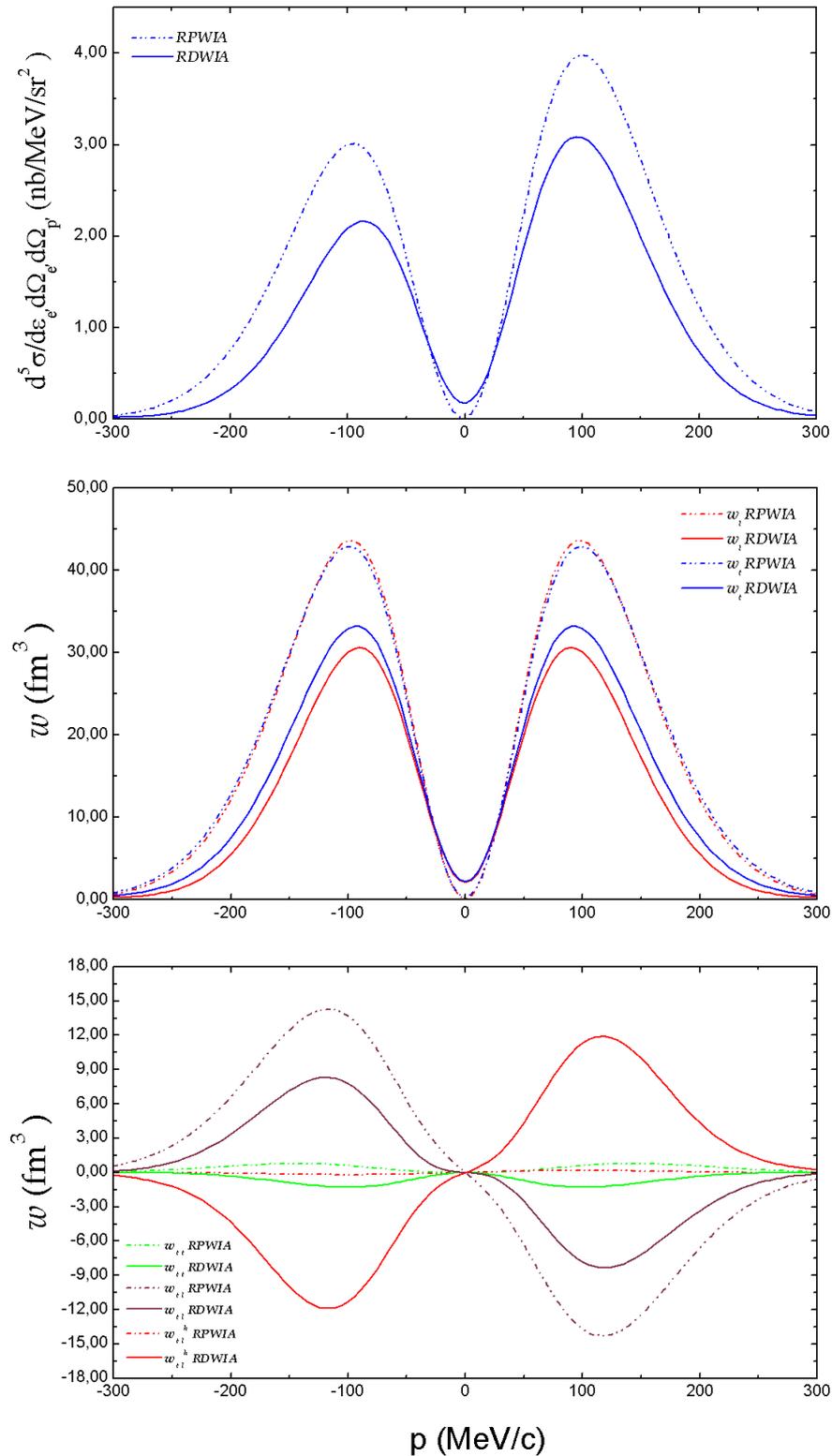


Figura 3.26: Nível $1p_{1/2}$ do ^{16}O com $\epsilon_e = 456\text{MeV}$, $p' = 442\text{MeV}/c$, polarização do elétron $h = -1$ e $\phi_p = \pi/3$. O primeiro de cima para baixo apresenta as curvas para a seção de choque nas aproximações RPWIA e RDWIA em função do momento inicial do próton. O segundo e o terceiro mostram os diversos fatores de forma.

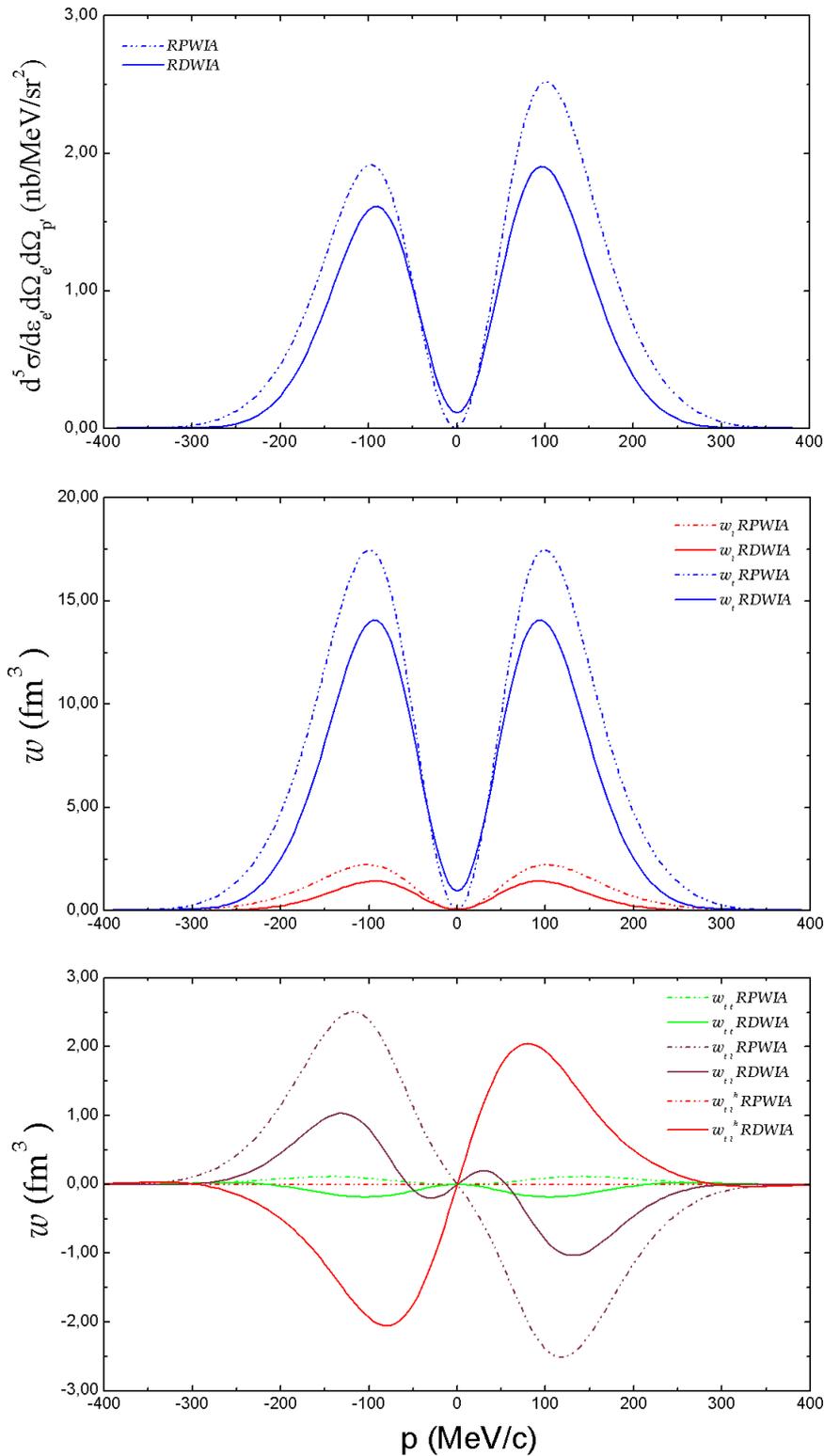


Figura 3.27: Nível $1p_{1/2}$ do ^{16}O com $\epsilon_e = 2440\text{MeV}$ e $p' = 1000\text{MeV}/c$, polarização do elétron $h = -1$ e $\phi_p = \pi/3$. O primeiro de cima para baixo apresenta as curvas para a seção de choque nas aproximações RPWIA e RDWIA em função do momento inicial do próton. O segundo e o terceiro mostram os diversos fatores de forma.

3.3.2 Resultados para o Carbono (^{12}C)

Os gráficos para o carbono foram obtidos usando [28]: $Q^2 = 0,6 \text{ (GeV/c)}^2$ [$\epsilon_e = 2445\text{MeV}$ e $p' = 774,6\text{MeV/c}$], $Q^2 = 1,2 \text{ (GeV/c)}^2$ [$\epsilon_e = 2445\text{MeV}$ e $p' = 1095\text{MeV/c}$] e $Q^2 = 1,8 \text{ (GeV/c)}^2$ [$\epsilon_e = 3245\text{MeV}$ e $p' = 1342\text{MeV/c}$].

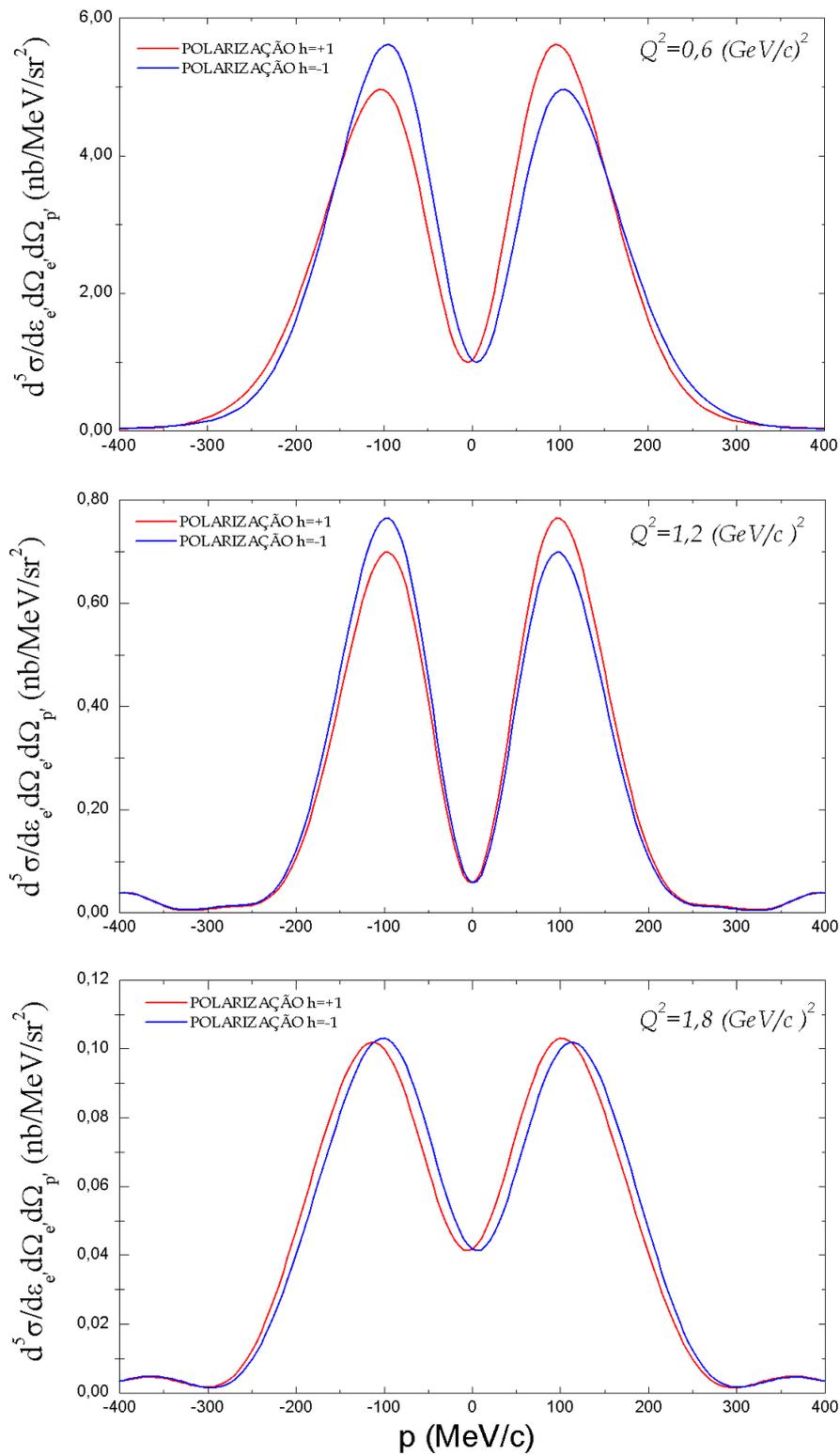


Figura 3.28: Seção de choque com polarização inicial do elétron em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{12}C com $\phi_p = \pi/2$.

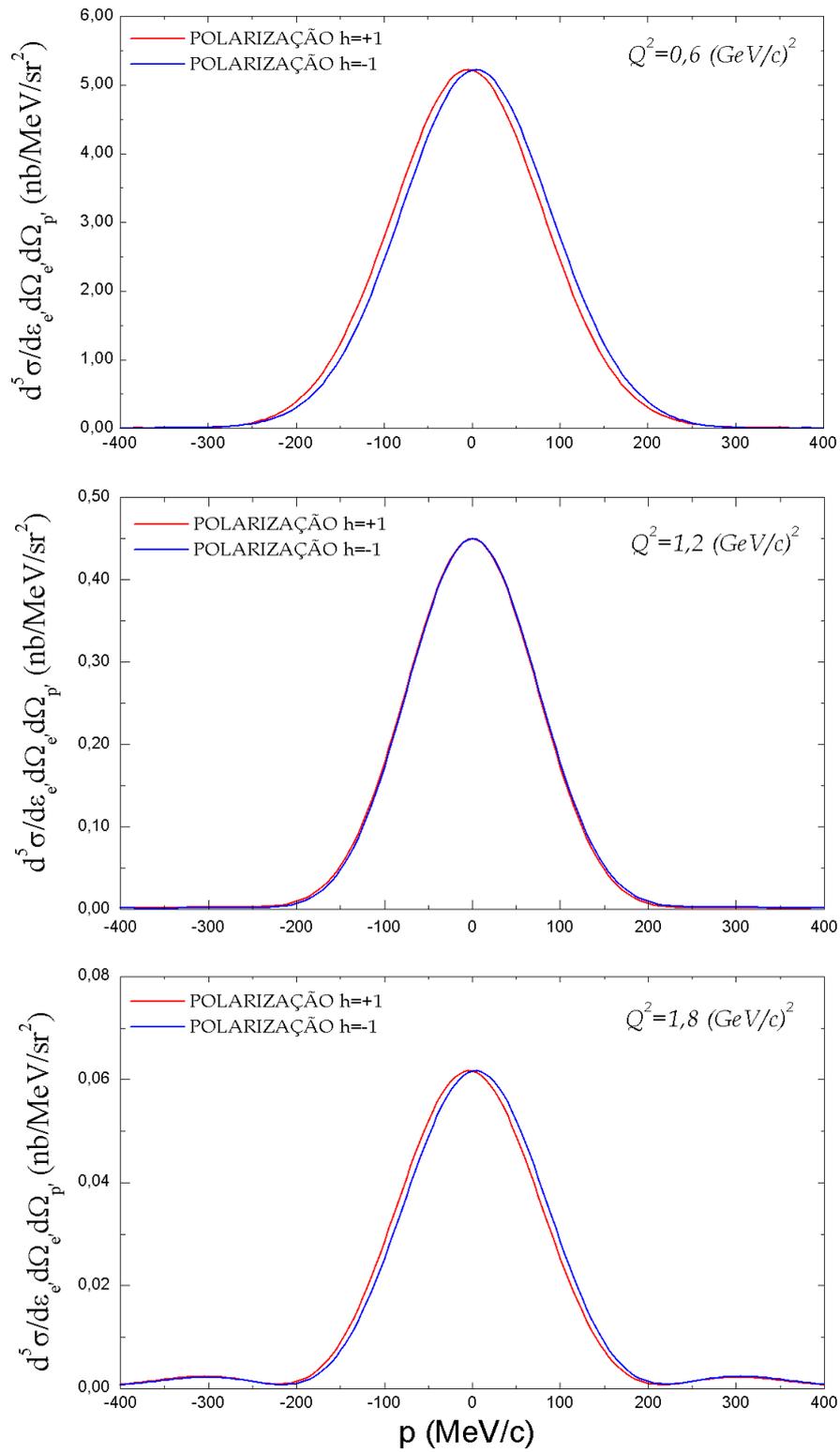


Figura 3.29: Seção de choque com polarização inicial do elétron em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{12}C com $\phi_p = \pi/2$.

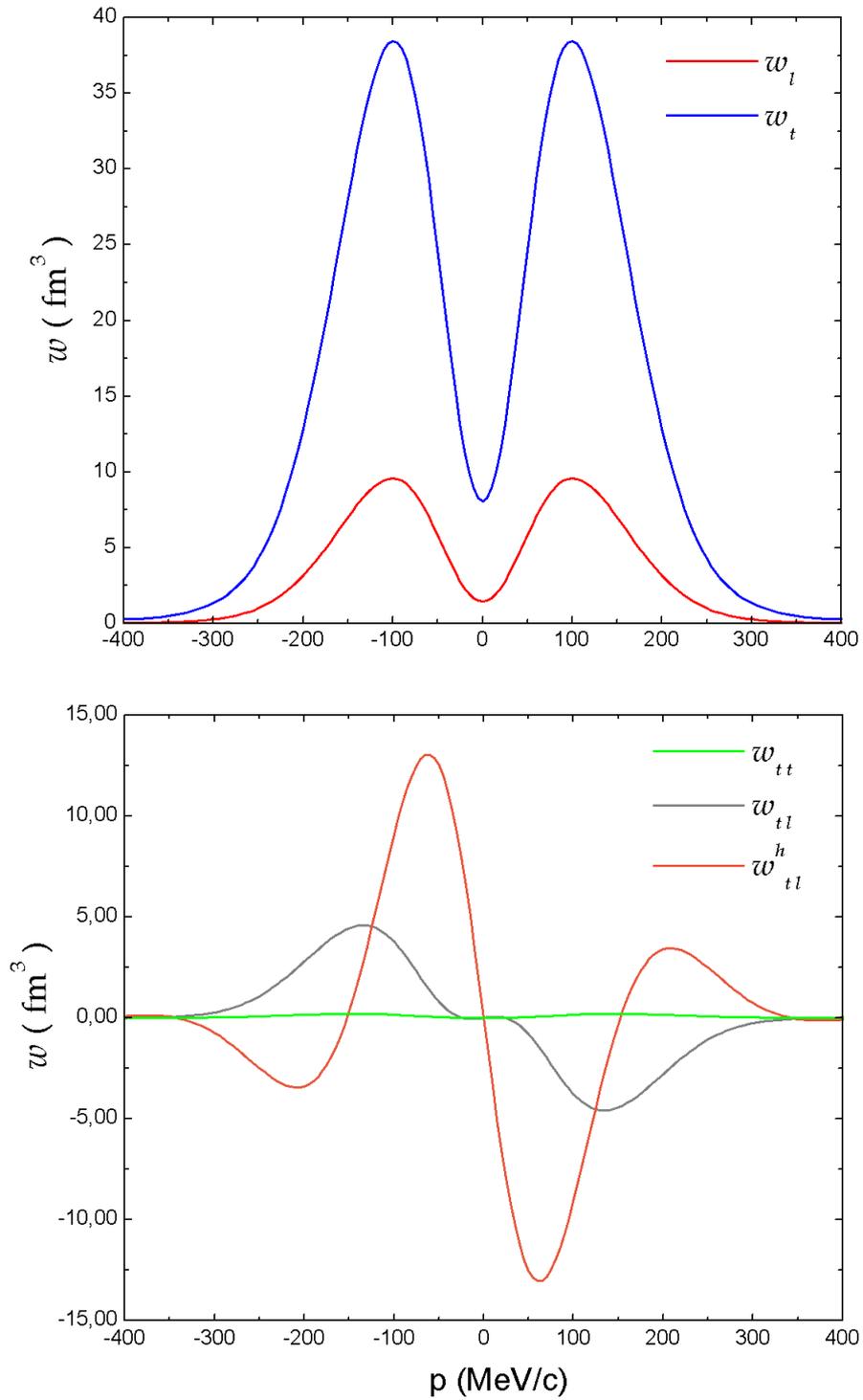


Figura 3.30: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{12}C , com $Q^2 = 0,6 (\text{GeV}/c)^2$ e $\phi_p = \pi/3$.

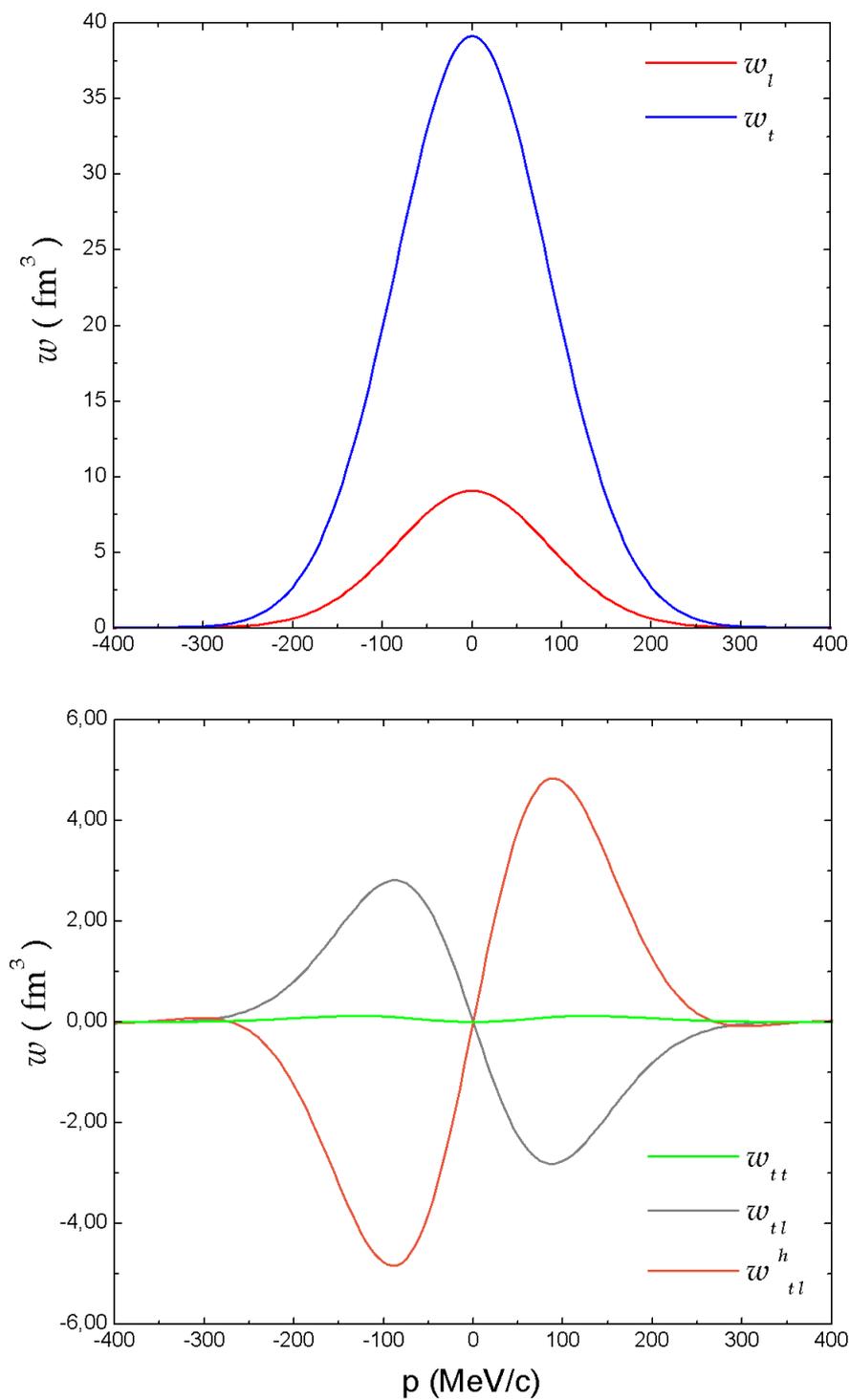


Figura 3.31: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{12}C , com $Q^2 = 0,6 (\text{GeV}/c)^2$ e $\phi_p = \pi/3$.

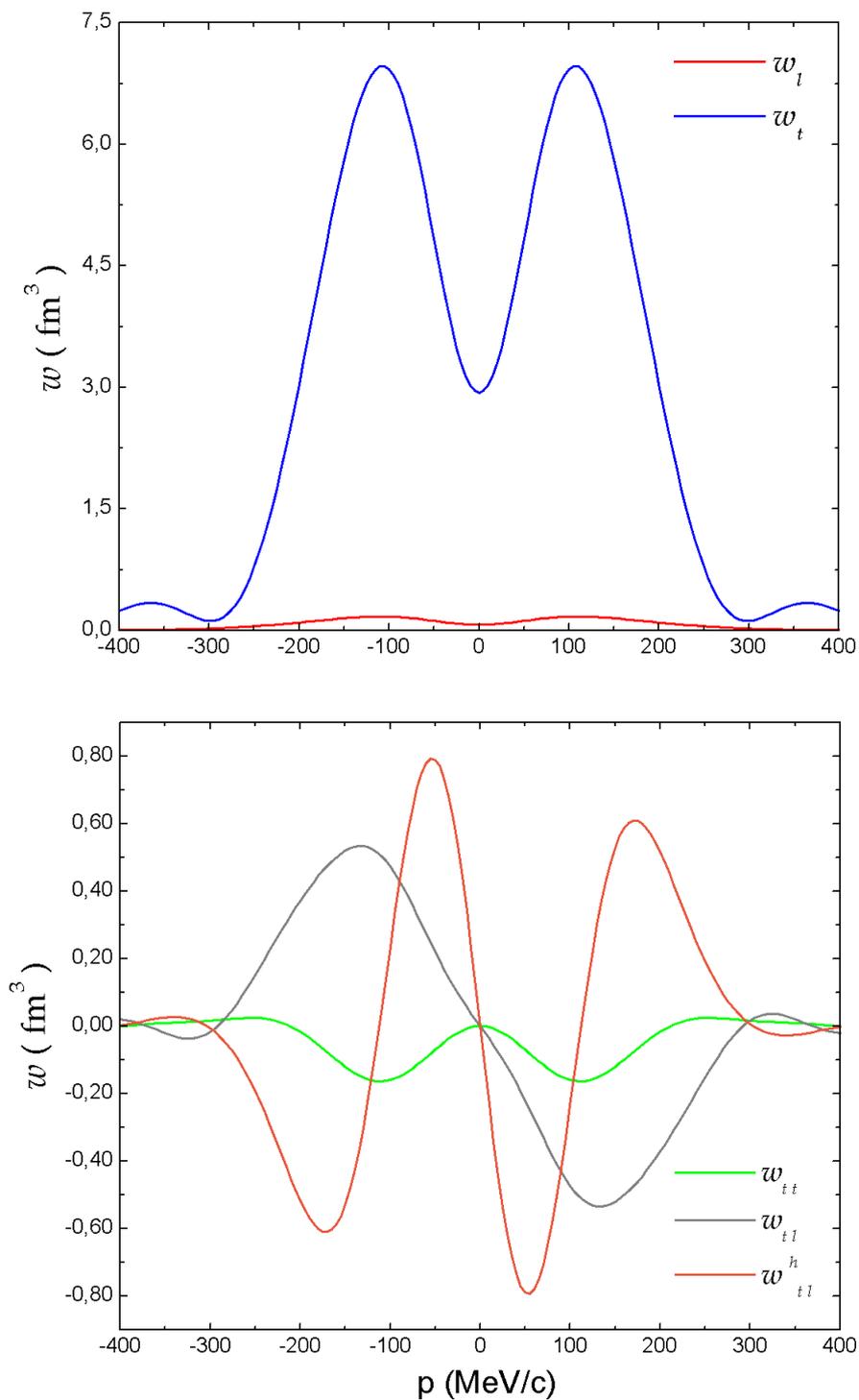


Figura 3.32: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{12}C , com $Q^2 = 1,8 (\text{GeV}/c)^2$ e $\phi_p = \pi/3$.

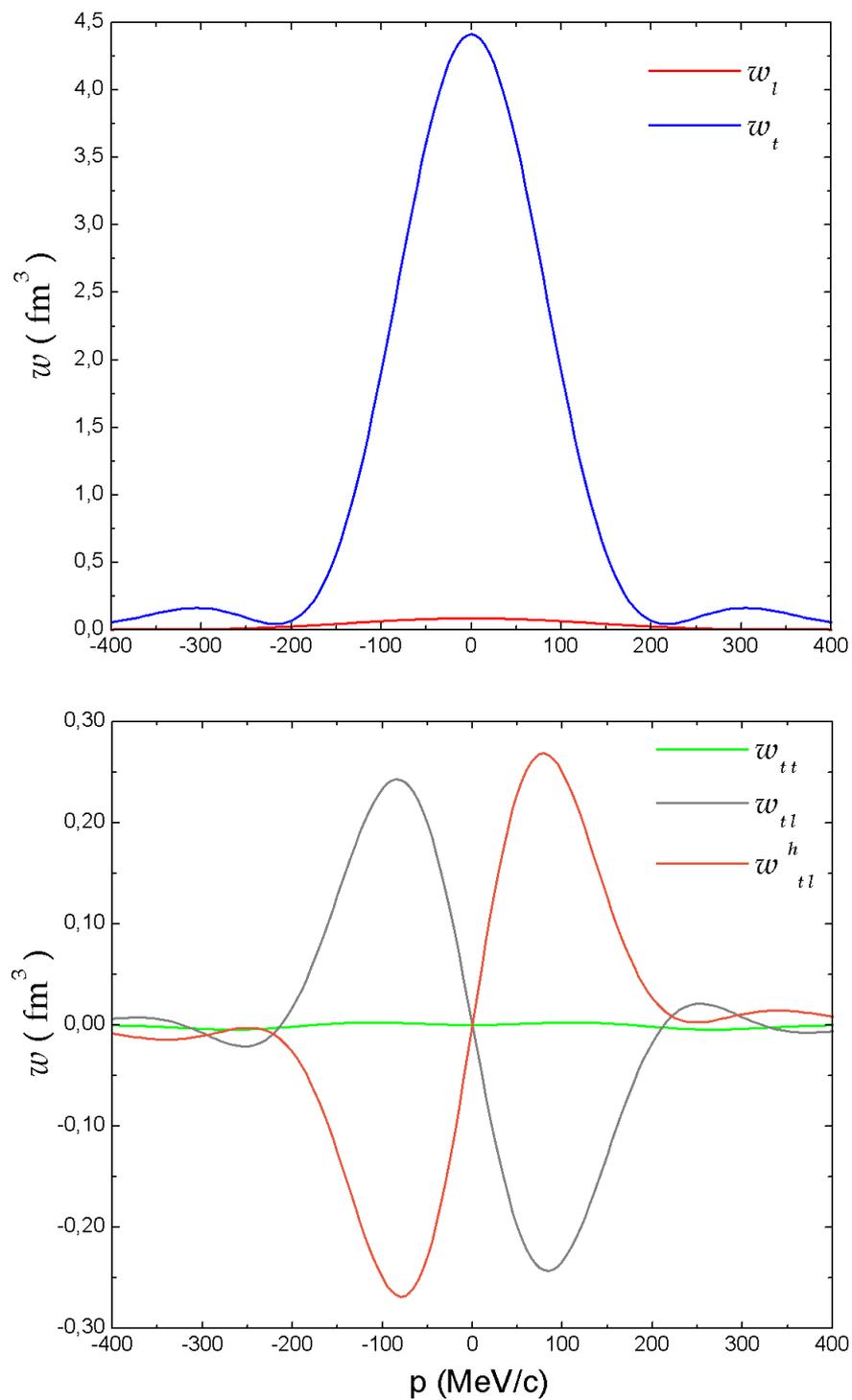


Figura 3.33: Fatores de forma em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{12}C , com $Q^2 = 1,8 (\text{GeV}/c)^2$ e $\phi_p = \pi/3$.

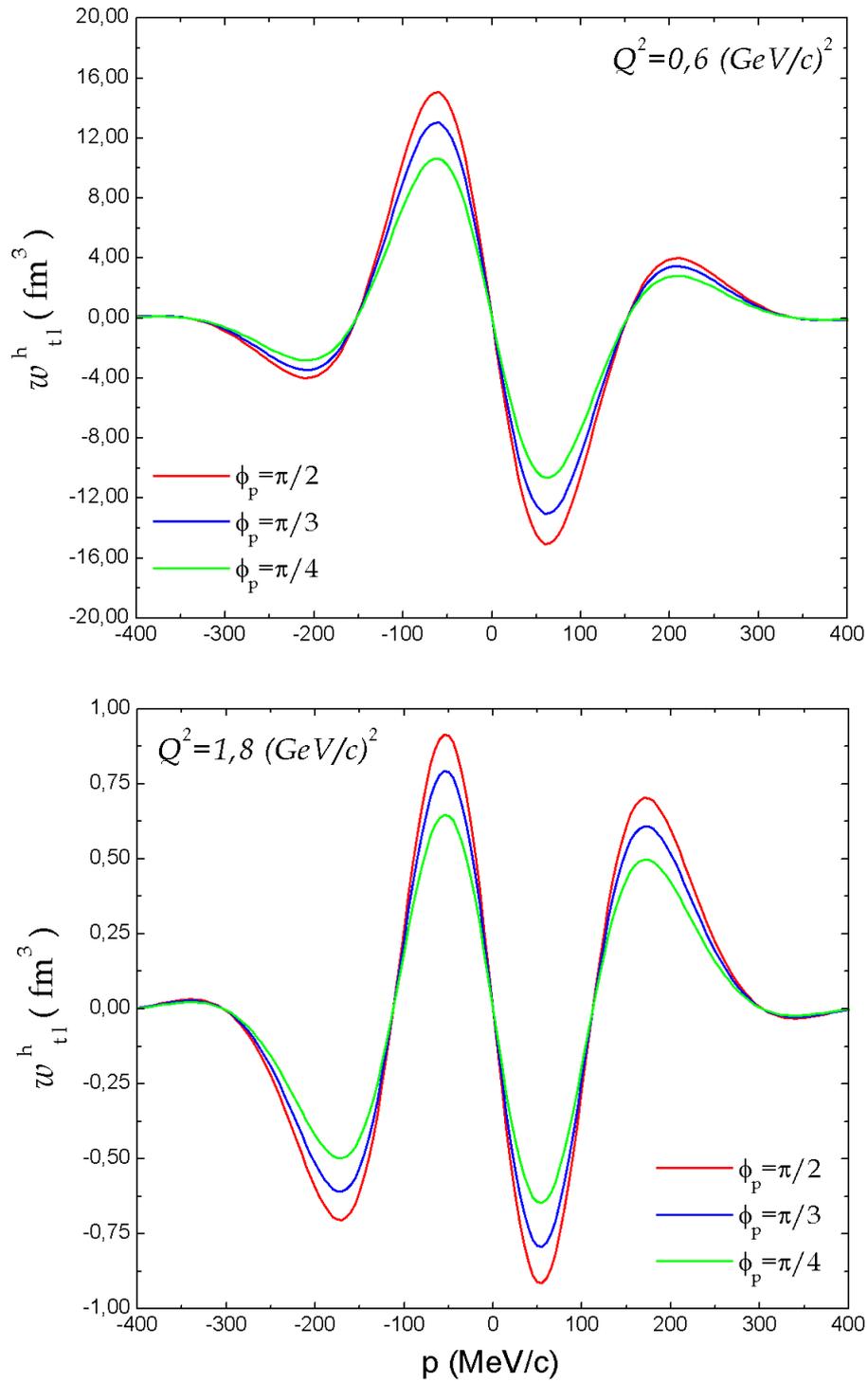


Figura 3.34: Fator de forma w_{t1}^h em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{12}C .

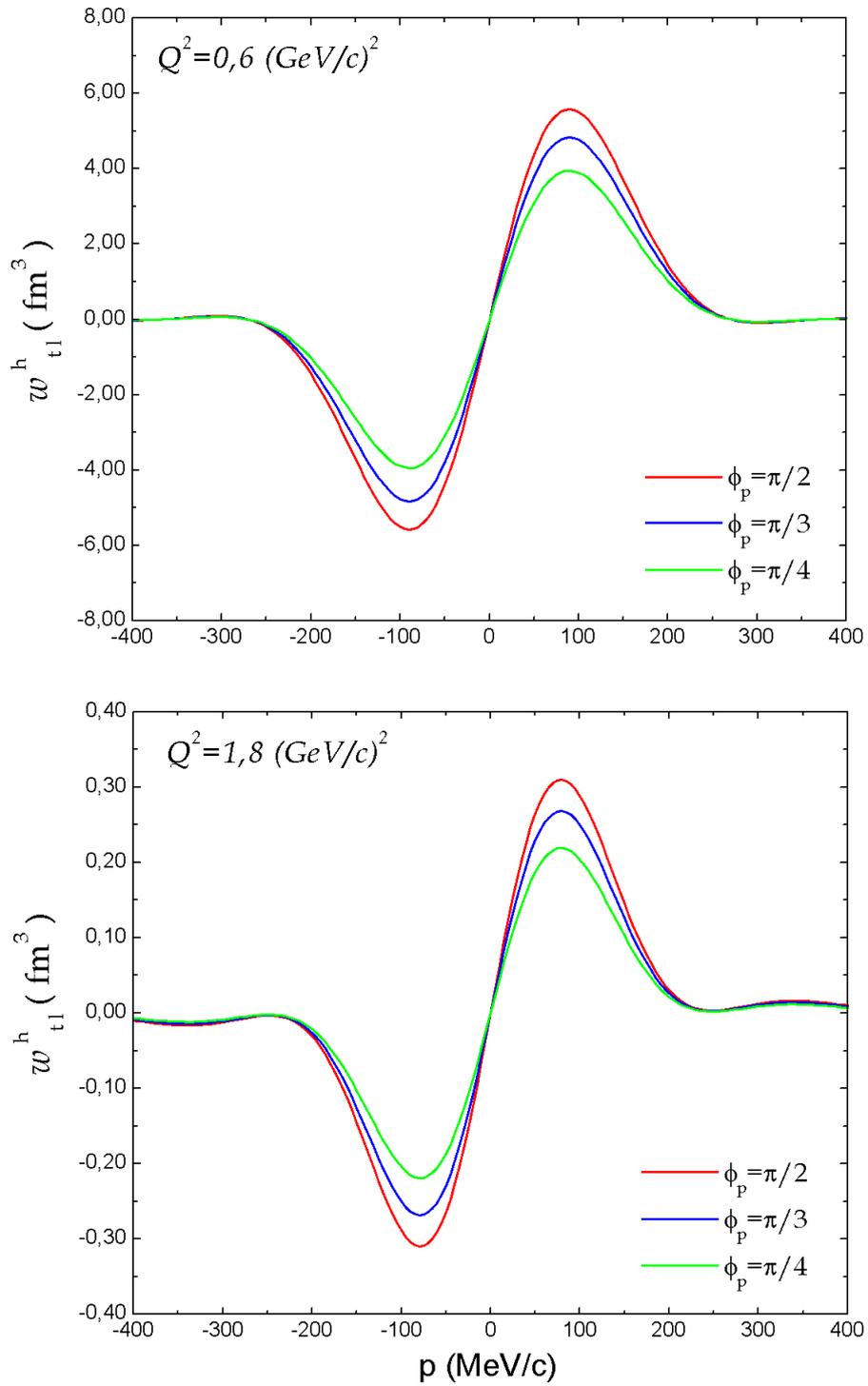


Figura 3.35: Fator de forma w_{t1}^h em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{12}C .

Assim como para o ^{16}O escolhemos os parâmetros cinemáticos para a análise dos resultados do ^{12}C com base nos dados experimentais disponíveis na literatura. Iniciamos observando a seção de choque total incluindo a polarização do elétron incidente, como mostrado nas figuras 3.28 e 3.29. Novamente, observamos que os efeitos da polarização diminuem com a energia e, assim como para o ^{16}O , são bem menores para prótons ejetados a partir do nível $1s_{1/2}$. Olhando para os fatores de forma individuais, figuras 3.30 até 3.33 novamente concluimos que existe dominância do fator de forma w_t e os fatores de forma w_{tl} e w_{tl}^h podem ser extraídos a partir das assimetrias correspondentes. Este último é mostrado nas figuras 3.34 e 3.35 para diferentes posições do plano de detecção em relação ao plano de reação. Os comentários feitos para o oxigênio valem aqui também.

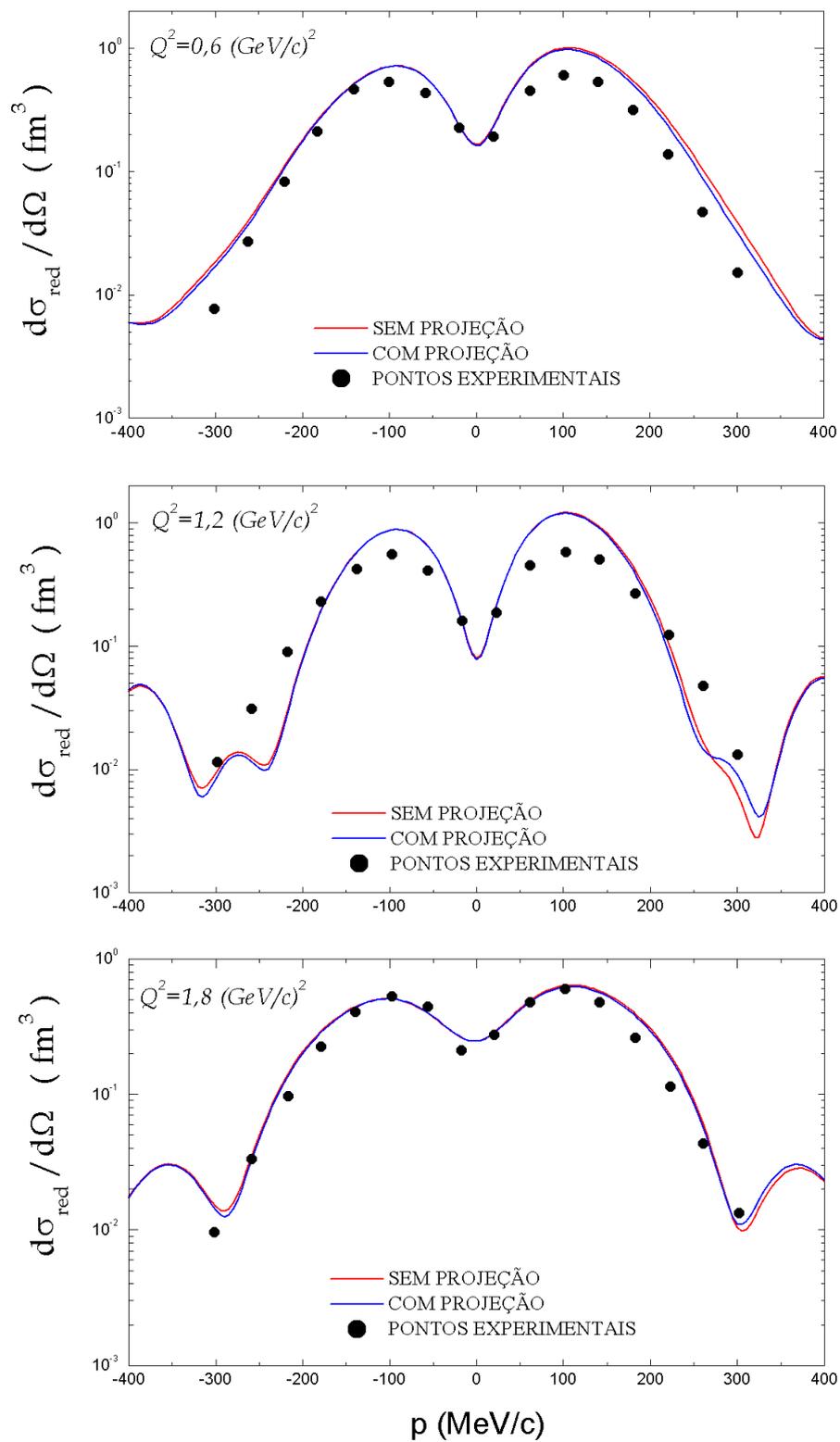


Figura 3.36: Seção de choque em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{12}C .

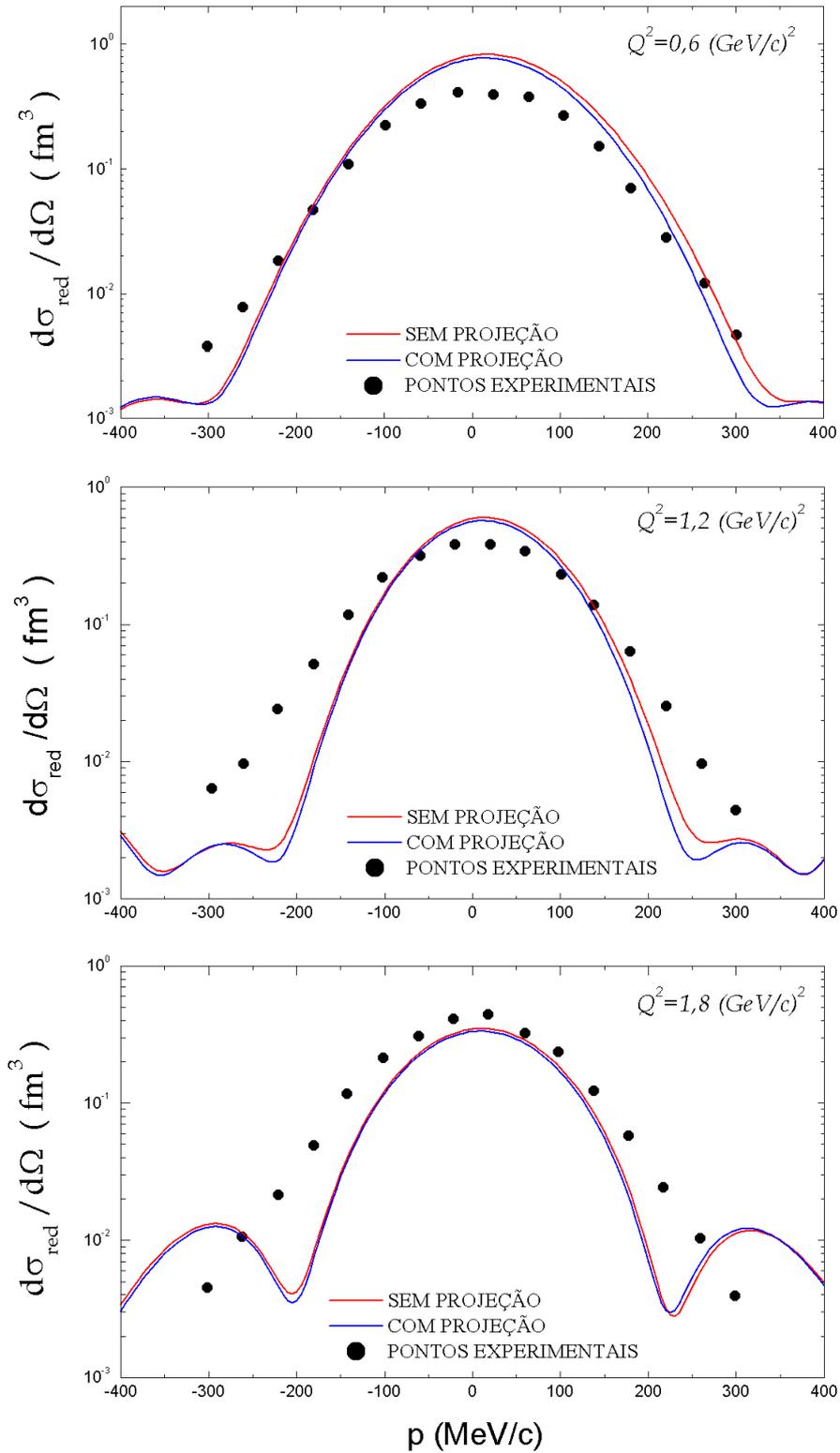


Figura 3.37: Seção de choque em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{12}C .

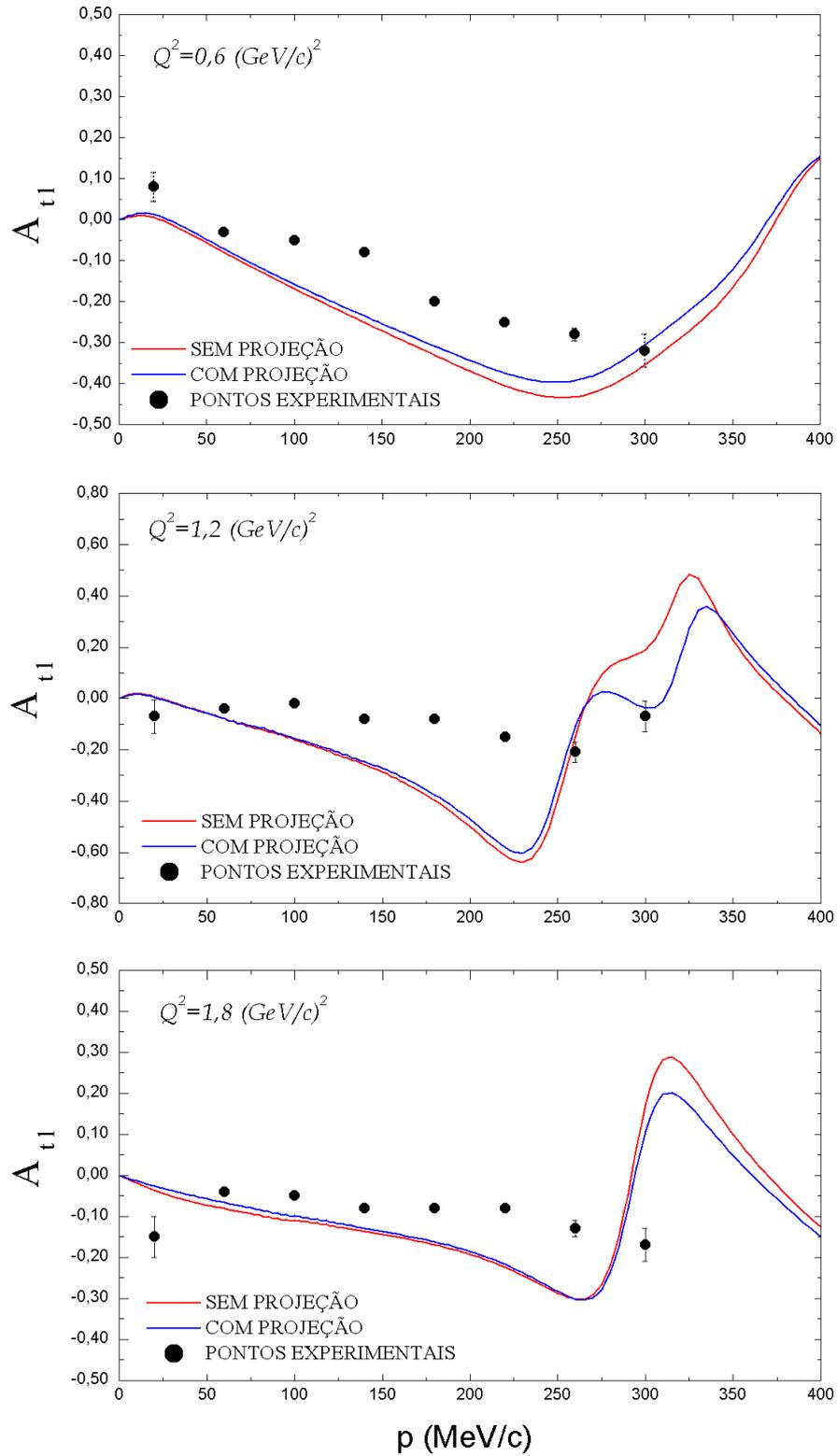


Figura 3.38: Assimetria A_{tl} em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{12}C .

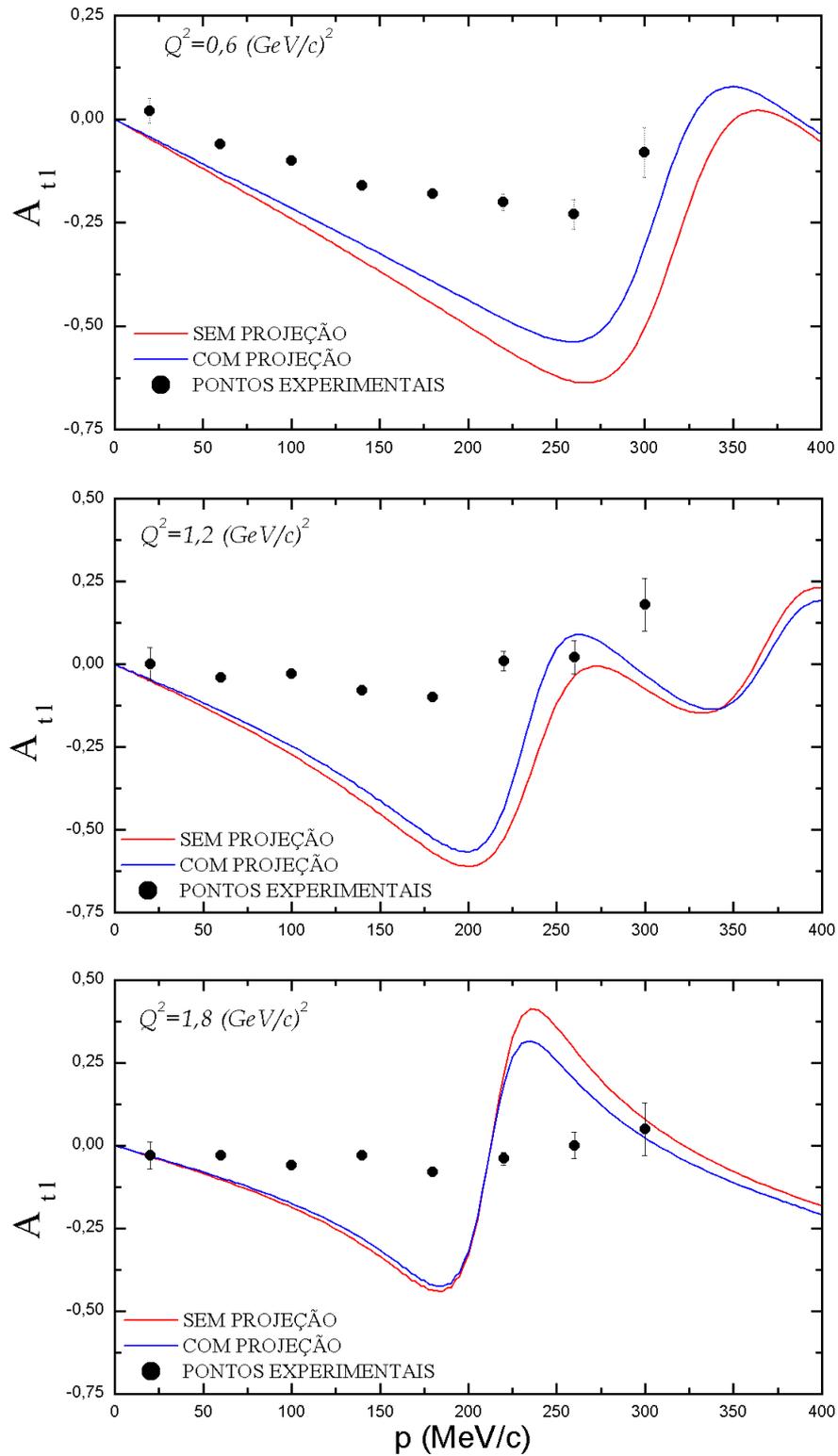


Figura 3.39: Assimetria A_{tl} em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{12}C .

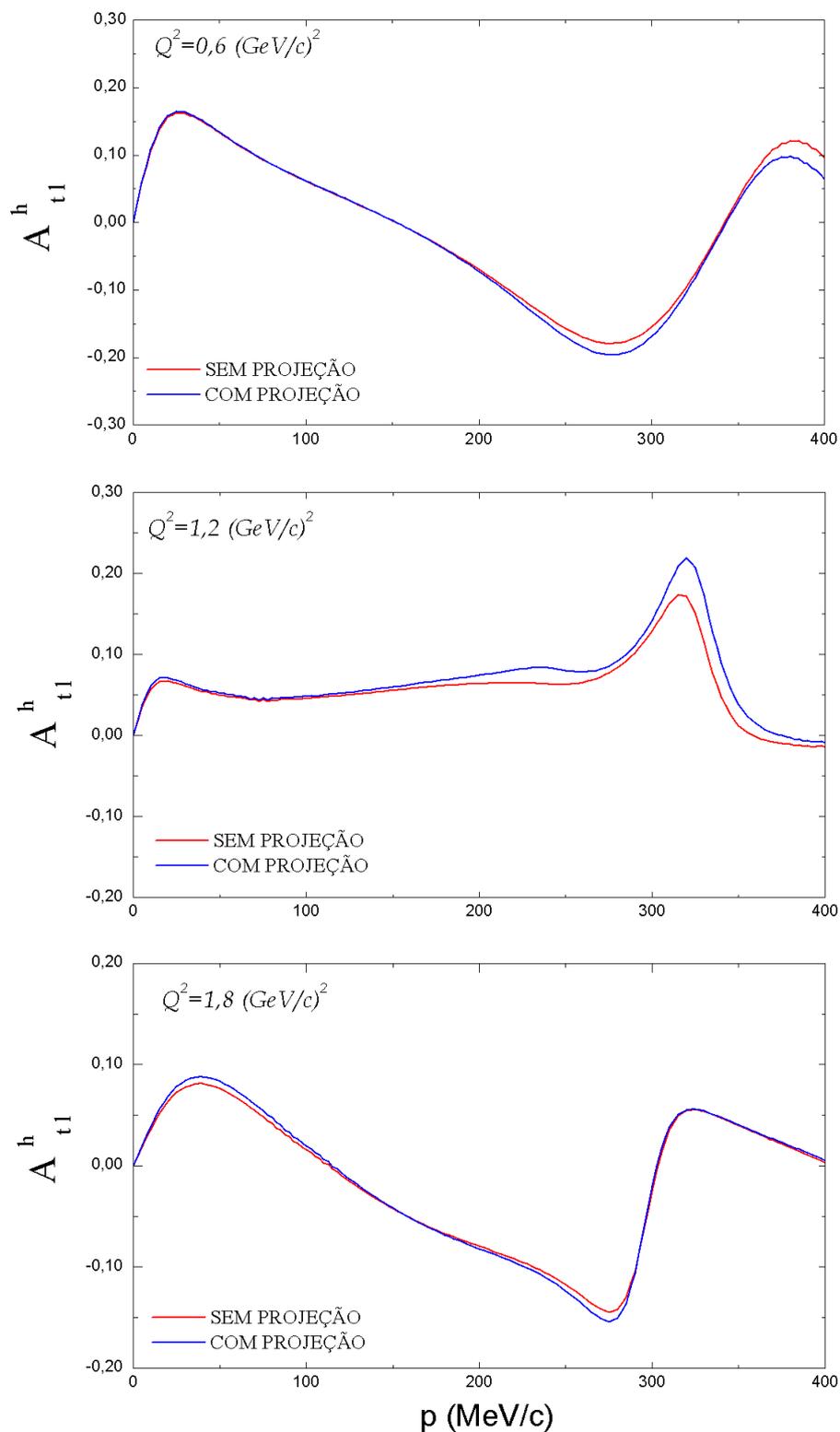


Figura 3.40: Assimetria A_{t1}^h em função do momento inicial do próton para o nível $1p_{3/2}$ do ^{12}C .

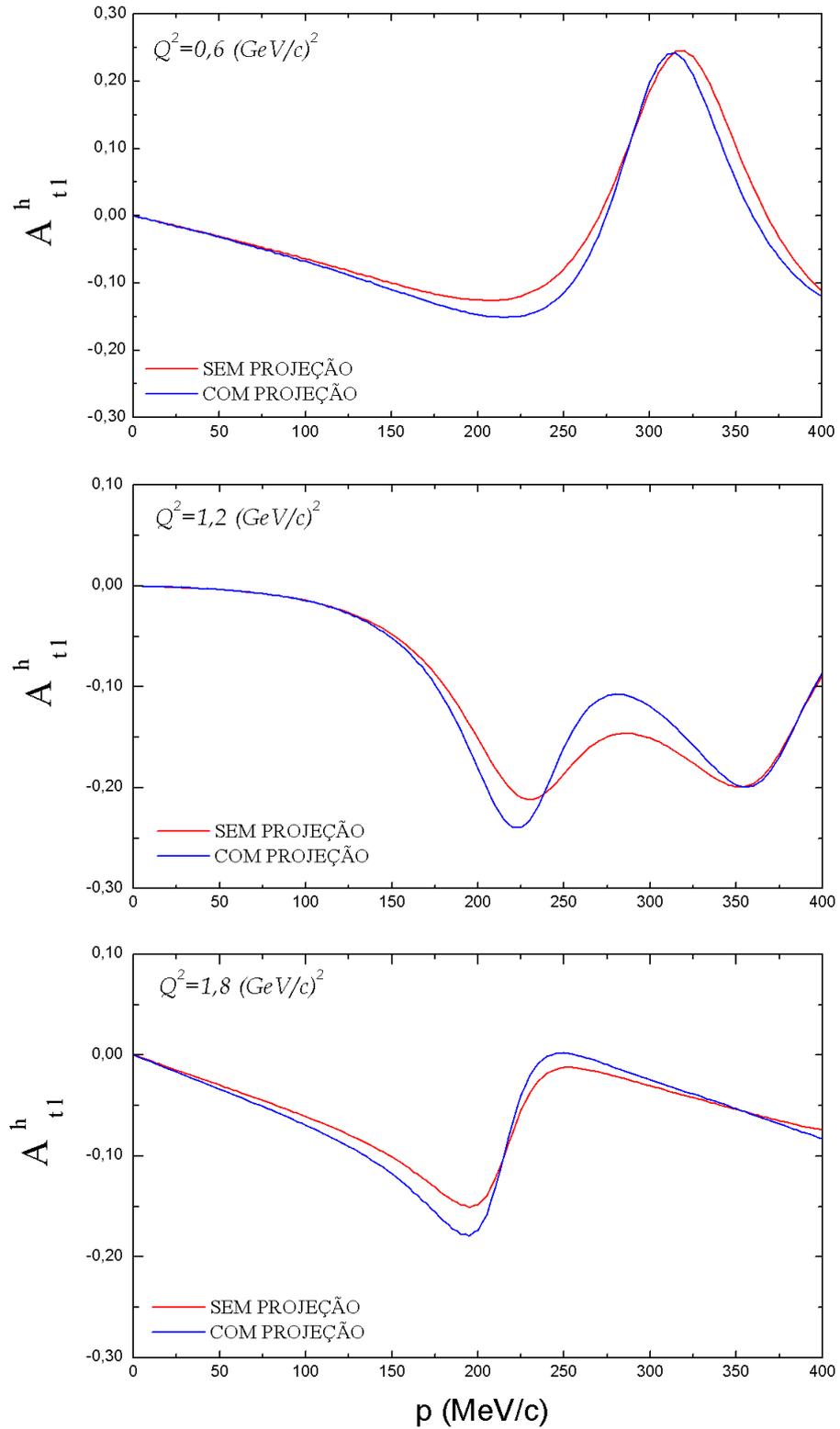


Figura 3.41: Assimetria A_{t1}^h em função do momento inicial do próton para o nível $1s_{1/2}$ do ^{12}C .

A quantidade de dados experimentais para o ^{12}C é relativamente maior e estão mostrados nas figuras 3.36 e 3.37, para a seção de choque reduzida, sem polarização. Nas mesmas figuras mostramos o resultado do nosso cálculo, com e sem a projeção nos estados de energia positiva. Da mesma forma que para o oxigênio, os efeitos do mar de Dirac sobre a seção de choque total é muito pequeno.

O gráfico das figuras 3.38 e 3.39 mostra-nos a assimetria A_{tl} referente às mesmas configurações de energia. Aqui os dados experimentais foram obtidos da referência [28]. Como esta assimetria depende exclusivamente do fator de forma w_{tl} , fica claro que o ajuste com os dados experimentais nesse caso é pobre quando comparado ao oxigênio. Além disso, podemos ver agora o comportamento desse fator de forma para prótons ejetados do nível $1s_{1/2}$ e novamente concluímos que nosso cálculo teórico está em média bem abaixo dos pontos experimentais.

Como já feito no caso do ^{16}O , se fizermos $\phi_p = \pi/2$, o fator de forma w_{tl}^h é maximizado e a assimetria A_{tl}^h será uma forma de obtermos diretamente o mesmo experimentalmente. Fizemos algumas projeções teóricas segundo nosso modelo para essa assimetria, vistas nas figuras 3.40 e 3.41. Os únicos dados experimentais encontrados para A_{tl}^h estão disponíveis em [29]. No entanto a energia do próton emitido nesse caso é de aproximadamente 50MeV , bem abaixo dos valores por nós utilizados anteriormente, sendo que nessa faixa de energia o modelo usado na obtenção do potencial ótico deve perder sua validade, já que se trata de uma aproximação de alta energia. Na figura 3.42, fizemos uma comparação destes dados com nosso modelo para $\epsilon_e = 560\text{MeV}$ e $p' = 315,3\text{ (MeV/c)}$. Dado o pequeno número de pontos experimentais e a baixa precisão dos mesmos, fica difícil traçar qualquer conclusão, embora nossos resultados estejam dentro do desejável, dadas as limitações do modelo.

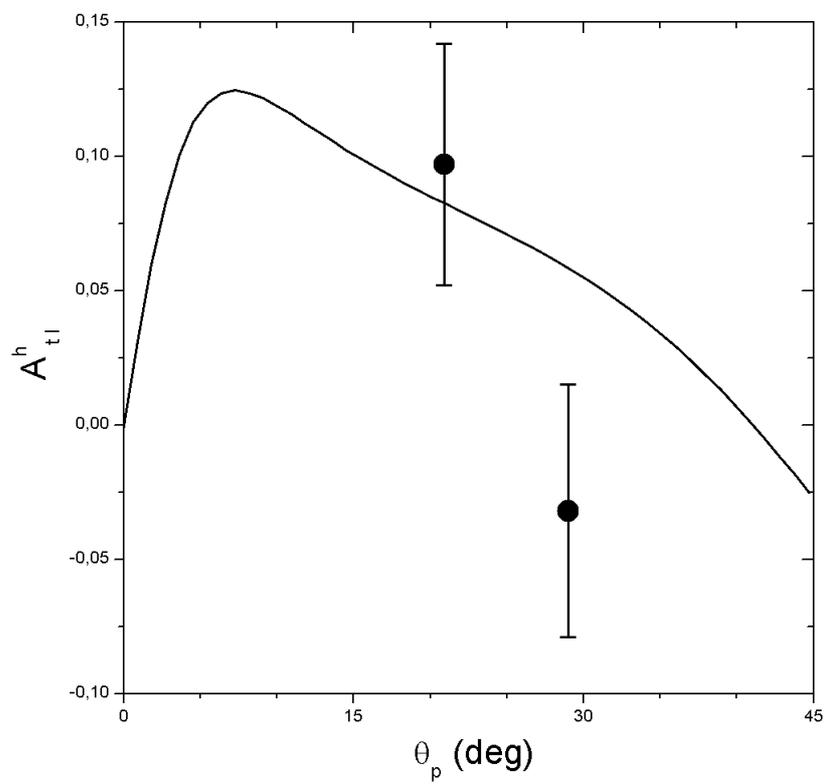


Figura 3.42: Assimetria $A_{t,l}^h$ em função do ângulo θ_p para o nível $1p_{3/2}$ do ^{12}C com pontos experimentais encontrados em [29].

Conclusões

Neste trabalho, estudamos a reação em que um elétron, inicialmente polarizado, é espalhado por um núcleo, o qual emite um próton que é detetado em coincidência com o elétron espalhado. Vimos que neste processo, além dos fatores de forma longitudinal e transverso, característicos do espalhamento (e, e') de elétrons não-polarizados, surgem outros quatro fatores de forma. Dois deles aparecem independentemente de nosso feixe inicial ser ou não polarizado, enquanto outros dois surgem apenas se prepararmos o feixe com uma polarização definida. Todos os seis fatores de forma no entanto, podem ser escritos como combinações diferentes de três quantidades básicas, as quais, na aproximação de ondas planas para o elétron, nada mais são que as componentes da corrente do alvo no espaço de momentos transferidos. Uma delas, $J_0(q)$, corresponde à densidade de carga de transição do núcleo e pode ser diretamente relacionada à componente longitudinal da corrente de transição pela equação da continuidade. As outras duas, $J_+(q)$ e $J_-(q)$, são as componentes transversais da corrente nuclear de transição. Tais correntes estão diretamente relacionadas à distribuição de momentos do próton no núcleo.

A fim de efetuarmos uma análise quantitativa da seção de choque da reação, adotamos a hipótese de que o núcleo é descrito por um modelo de partícula independente, baseado em uma descrição relativística, também conhecido como Modelo de Wallecka. Além disso, nossa descrição se baseia no chamado regime quasielástico, em que o elétron interage diretamente com o próton detetado em coincidência, sem alterar significativamente a estrutura do restante do alvo. Para o próton arrancado, utilizamos um potencial óptico apropriado. Fazendo isso, não temos mais a equação da continuidade satisfeita (pois estamos usando potenciais diferentes para descrever o próton ligado e o próton arrancado). Ainda assim, obtivemos bons resultados para a seção de choque e assimetria para os núcleos estudados.

Uma análise cuidadosa da seção de choque mostra que um dos dois fatores de forma devidos à polarização, w_{tt}^h , se anula quando a polarização do próton emitido não é dete-

tada. Por outro lado, o fator de forma restante, w_{tl}^h , será não-nulo apenas se detetarmos o próton fora do plano de espalhamento, o qual é definido pelos momentos inicial e final do elétron. Os resultados numéricos obtidos, considerando como alvo os núcleos de ^{16}O e de ^{12}C , deixam claro que a seção de choque total é sensível aos efeitos da polarização do elétron e assim do fator de forma w_{tl}^h .

Cada um dos fatores de forma pode ser extraído a partir da seção de choque experimental, variando-se adequadamente as condições cinemáticas de detecção do próton e do elétron espalhado. Por exemplo, considerando apenas prótons detetados no plano de espalhamento ($\phi_p = 0$ e/ou π), é possível separarmos as contribuições w_{tl} , w_t e $w_l - \frac{q^2}{2q_l^2} w_{tl}$, sendo que para reações no plano não é possível separar w_l de w_{tl} (para mais detalhes ver [25]). Por outro lado, dos resultados aqui apresentados, fica claro que o fator de forma w_{tl}^h pode ser obtido em medidas fora do plano através da obtenção da assimetria, ou seja, da medida das seções de choque para as duas polarizações longitudinais do elétron incidente. Um importante resultado observado a este respeito é que o fator de forma w_{tl}^h se anula se usarmos a aproximação de ondas planas para o próton arrancado, independentemente da cinemática escolhida. Isto mostra que este fator de forma dá uma dependência direta da dinâmica entre o núcleo residual e o próton final de maneira única, uma vez que isto não ocorre com os demais fatores de forma, que não sofrem de uma dependência tão drástica.

A fim de descrevermos a estrutura do alvo nuclear, implementamos o Modelo de Wallecka linear, porém com constantes de acoplamento dependentes da densidade [9]. Assim feito e com uso de um potencial óptico construído a partir das densidades auto-consistentes do alvo para descrever o próton arrancado, obtivemos bons resultados para a seção de choque. É importante notar que não fizemos uso de nenhum fator multiplicativo de ajuste com os dados experimentais, ou fator espectroscópico [15] e que a dependência na densidade aproxima consideravelmente os resultados dos pontos experimentais. De qualquer forma, é de se esperar que nosso modelo funcione melhor para o caso do núcleo de ^{16}O do que para o ^{12}C , que possui camada aberta. Isso parece ficar mais evidente na comparação entre a seção de choque elástica e a assimetria A_{tl} . Conforme discutido em [28], as diferenças neste último caso poderiam ser explicadas por impurezas nos dados experimentais, com mistura de contribuições de níveis diferentes e/ou do contínuo. No entanto, acreditamos que uma investigação mais detalhada dos efeitos de estrutura do núcleo alvo, as quais se refletem no potencial de interação próton-núcleo, deva ser realizada.

Fizemos ainda projeções nos estados de energia positiva, tanto para o estado final quanto para o estado inicial, pois a teoria de Hartree não prevê interferências do mar de Dirac neste processo, muito embora esta esteja sempre presente. O efeito desta projeção é

bastante pequeno se olharmos para a seção de choque total, porém é bastante perceptível se olharmos para o fator de forma w_{tl} , o qual pode ser extraído da assimetria (A_{tl}).

Com relação ao potencial óptico utilizado, existe a possibilidade de utilização de potenciais fenomenológicos que ajustam bem a seção de choque elástica próton-núcleo [30], porém isso não foi feito neste trabalho. Neste sentido, vimos que o fator de forma w_{tl}^h , ou seja, a assimetria A_{tl}^h deve ser a ferramenta ideal para a escolha destes potenciais.

Finalmente deve-se lembrar que, conforme mostrado no capítulo 2, o fator de forma w_{tt}^h se anula uma vez que somamos sobre o spin final do próton. Se medirmos a polarização deste próton obteremos, em geral, valores não-nulos para tal fator de forma [3]. Assim, um estudo sistemático da sensibilidade do mesmo ao mecanismo de reação e ao modelo de estrutura escolhido pode ser de interesse futuro, uma vez que medidas experimentais nesse sentido se tornem possíveis.

Apêndice A

Cálculo do tensor leptônico

Utilizando o desenvolvimento de Casimir [5] envolvendo as matrizes de Dirac, encontramos para o tensor leptônico:

$$L_{\lambda\lambda'} = 2[k' \cdot \epsilon_{\lambda}^* k \cdot \epsilon_{\lambda'} + k \cdot \epsilon_{\lambda}^* k' \cdot \epsilon_{\lambda'} - k \cdot k' \epsilon_{\lambda}^* \cdot \epsilon_{\lambda'} + 2ih\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\lambda}^{\mu*} \epsilon_{\lambda'}^{\nu} k^{\alpha} k'^{\beta}] \quad (4)$$

Na expressão acima $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor antissimétrico, também conhecido como tensor de Levi-Civita. O último termo da equação (4) é o termo devido à polarização do elétron. Para continuar nossos cálculos, temos que usar as relações resumidas na tabela 3. Ainda,

$\epsilon_0 \cdot \epsilon_0 = 1$	$\epsilon_+ \cdot \epsilon_0 = \epsilon_- \cdot \epsilon_0 = 0$	$\epsilon_+ \cdot \epsilon_- = \epsilon_- \cdot \epsilon_+ = -1$
$\epsilon_+^* = -\epsilon_-$	$\epsilon_-^* = -\epsilon_+$	$\epsilon_+ \cdot \epsilon_+ = \epsilon_- \cdot \epsilon_- = 0$

Tabela 3: Relações entre os versores ϵ_0 , ϵ_+ e ϵ_- .

$$wj_0 - |q|j_z = 0 \quad \Rightarrow \quad j_z = \frac{w}{|q|}j_0 \quad (5)$$

e

$$k \cdot \epsilon_0 = k_0 \quad k \cdot \epsilon_+ = k_+ \quad k \cdot \epsilon_- = k_- \quad k \cdot \epsilon_3 = \frac{w}{|q|}k_0. \quad (6)$$

Utilizando esses resultados podemos fazer a contração do tensor leptônico com o tensor

hadrônico (por enquanto somente a parte não-polarizada, ou seja, a parte que não depende de h), como se segue:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda\lambda'} L_{\lambda\lambda'}^{h=0} W_{\lambda\lambda'} &= 2 \overline{\sum_{if}} \left\{ \right. \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2 J_0 J_0^* [k'_0 k_0 + k_0^* k'_0 - k \cdot k'] + \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) J_+ J_0^* [k'_+ k_0 + k_+^* k'_0] + \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) J_0 J_+^* [k'_0 k_+ + k_0^* k'_+] + \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) J_- J_0^* [k'_- k_0 + k_-^* k'_0] + \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) J_0 J_-^* [k'_0 k_- + k_0^* k'_-] + \\
 &\quad J_+ J_-^* [k'_+ k_- + k_+^* k'_-] + \\
 &\quad J_- J_+^* [k'_- k_+ + k_-^* k'_+] + \\
 &\quad J_+ J_+^* [k'_+ k_+ + k_+^* k'_+ - k \cdot k'] + \\
 &\quad \left. J_- J_-^* [k'_- k_- + k_-^* k'_- - k \cdot k'] \right\}. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Para facilitar, vamos dividir esta expressão em nove termos:

$$A1 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2 \overline{\sum_{if}} J_0 J_0^* [k'_0 k_0 + k_0^* k'_0 - k \cdot k'] \tag{8}$$

$$A2 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) \overline{\sum_{if}} J_+ J_0^* [k'_+ k_0 + k_+^* k'_0] \tag{9}$$

$$A3 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) \overline{\sum_{if}} J_0 J_+^* [k'_0 k_+ + k_0^* k'_+] \tag{10}$$

$$A4 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) \overline{\sum_{if}} J_- J_0^* [k'_- k_0 + k_-^* k'_0] \tag{11}$$

$$A5 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) \overline{\sum_{if}} J_0 J_-^* [k'_0 k_- + k_0^* k'_-] \quad (12)$$

$$A6 = \overline{\sum_{if}} J_+ J_-^* [k'_+ k_- + k_+^* k'_-] \quad (13)$$

$$A7 = \overline{\sum_{if}} J_- J_+^* [k'_- k_+ + k_-^* k'_+] \quad (14)$$

$$A8 = \overline{\sum_{if}} J_+ J_+^* [k'_+ k_+ + k_+^* k'_+ - k \cdot k'] \quad (15)$$

$$A9 = \overline{\sum_{if}} J_- J_-^* [k'_- k_- + k_-^* k'_- - k \cdot k'] \quad (16)$$

Calcularemos inicialmente o termo:

$$A1 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2 \overline{\sum_{if}} J_0 J_0^* [k'_0 k_0 + k_0^* k'_0 - k \cdot k'], \quad (17)$$

lembrando que $k \cdot k' = k_0 k'_0 - \vec{k} \cdot \vec{k}'$, $k_0^* = k_0$ e $k'_0^* = k'_0$. Temos assim:

$$\left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2 [k'_0 k_0 + \vec{k} \cdot \vec{k}'] = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2 [k'_0 k_0 + |\vec{k}| |\vec{k}'| \cos(\theta)]. \quad (18)$$

Mas $|\vec{k}| |\vec{k}'| \approx k_0 k'_0$, logo:

$$k_0 k'_0 + k_0 k'_0 \cos(\theta) = k_0 k'_0 (1 + \cos(\theta)) = 2k_0 k'_0 \cos^2(\theta/2) = \beta. \quad (19)$$

Teremos então para o termo A1:

$$A1 = \beta v_l \overline{\sum_{if}} J_0 J_0^* = \beta \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2 \overline{\sum_{if}} J_0 J_0^*. \quad (20)$$

Aqui definimos

$$w_l = \overline{\sum_{if}} J_0 J_0^*.$$

Para obter os demais termos, temos que lembrar que $[k'_+ k_+ + k_+^* k'_+ - k \cdot k'] = [k'_- k_- + k_-^* k'_- - k \cdot k']$. Podemos ainda reescrever a componente k_x como:

$$\vec{k} \cdot \hat{e}_x = \vec{k} \cdot [\hat{e}_z \times \hat{e}_y] = \vec{k} \cdot \left[\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} \times \frac{\vec{k} \times \vec{k}'}{|\vec{k} \times \vec{k}'|} \right]. \quad (21)$$

Este último resultado permite-nos escrever:

$$k_x = k'_x = -2 \frac{k_0 k'_0}{|\vec{q}|} \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (22)$$

e o mesmo tipo de análise para a direção y nos leva ao resultado:

$$k_y = k'_y = 0. \quad (23)$$

Notando ainda que $A2 = A3^*$ e $A4 = A5^*$, teremos, respectivamente: $A2 + A3 = 2\text{Re}[A3]$ e $A4 + A5 = 2\text{Re}[A5]$, ou seja:

$$\begin{aligned} & \sum_{if} \overline{\{ J_+ J_0^* [k'_+ k_0 + k_+ k'_0] + J_0 J_+^* [k'_0 k_+ + k_0^* k'_+] \}} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \\ &= 2 \sum_{if} \overline{\text{Re} \{ J_+ J_0^* [k'_+ k_0 + k_+ k'_0] \}} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \end{aligned} \quad (24)$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{if} \overline{\{ J_- J_0^* [k'_- k_0 + k_- k'_0] + J_0 J_-^* [k'_0 k_- + k_0^* k'_-] \}} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \\ &= 2 \sum_{if} \overline{\text{Re} \{ J_- J_0^* [k'_- k_0 + k_- k'_0] \}} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Logo, efetuando-se a soma, temos:

$$\sum_{n=2}^5 A_n = \beta v_{tl} w_{tl} = (k'_x k_0 + k_x k'_0) \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) 2 \sum_{if} \overline{\text{Re} [J_0^* (J_- - J_+)]}. \quad (26)$$

Acima, usamos ainda as definições:

$$w_{tl} = 2 \overline{\sum_{if}} Re [J_0^* (J_- - J_+)] \quad (27)$$

e:

$$\beta v_{tl} = (k'_x k_0 + k_x k'_0) \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) = \beta \frac{-Q_\mu^2}{\sqrt{2} |\vec{q}|^2} \sqrt{tg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}. \quad (28)$$

Os próximos termos são A6 e A7, para os quais temos a relação $A6 = A7^*$. Logo, $A6 + A7 = 2Re[A7]$, ou seja:

$$\overline{\sum_{if}} J_+ J_-^* [k'_+ k_- + k_+^* k'_-] + J_- J_+^* [k'_- k_+ + k_-^* k'_+] = 2 \overline{\sum_{if}} Re [J_+^* J_- (k'_- k_+ + k_-^* k'_+)]. \quad (29)$$

Definindo agora:

$$\beta v_{tt} = k'_- k_+ + k_-^* k'_+ \quad (30)$$

e reescrevendo em coordenadas cartesianas retangulares, temos:

$$\beta v_{tt} = -k_x k'_x = -4(k_0 k'_0)^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \text{cos}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (31)$$

Usando a equação (1.9), obtemos:

$$\beta v_{tt} = -\beta \frac{1}{2} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}. \quad (32)$$

Definindo então,

$$w_{tt} = 2 \overline{\sum_{if}} Re [J_+^* J_-], \quad (33)$$

obtemos finalmente:

$$A6 + A7 = \beta v_{tt} w_{tt}. \quad (34)$$

Para o termo A8, teremos:

$$A8 = \overline{\sum_{if}} J_+ J_+^* [k_+^* k_+ + k_+^* k'_+ - k \cdot k' \epsilon_+^* \cdot \epsilon_+]. \quad (35)$$

Abrindo nas coordenadas cartesianas, temos:

$$\begin{aligned} A8 = & \overline{\sum_{if}} J_+ J_+^* \left\{ \left[\frac{-1}{\sqrt{2}} (k'_x - ik'_y) \right] \left[\frac{-1}{\sqrt{2}} (k_x + ik_y) \right] \right. \\ & + \left[\frac{-1}{\sqrt{2}} (k_x - ik_y) \right] \left[\frac{-1}{\sqrt{2}} (k'_x + ik'_y) \right] \\ & \left. - \left[k_0 k'_0 - \vec{k} \cdot \vec{k}' \right] \epsilon_+^* \cdot \epsilon_+ \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

ou ainda:

$$A8 = \overline{\sum_{if}} J_+ J_+^* \left\{ k_x k'_x + k_0 k'_0 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\}. \quad (37)$$

Substituindo o valor de k_x e k'_x , chegamos à forma final para o termo A8:

$$A8 = \overline{\sum_{if}} J_+ J_+^* \beta v_t = \overline{\sum_{if}} J_+ J_+^* \beta \left\{ \frac{1}{2} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} + tg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} \quad (38)$$

O termo A9 pode ser calculado utilizando a mesma estratégia usada para o termo A8 e seu valor será assim igual a:

$$A9 = \overline{\sum_{if}} J_- J_-^* \beta v_t. \quad (39)$$

Somando os termos A8 e A9, ficamos então com:

$$A8 + A9 = \beta v_t \overline{\sum_{if}} [J_+ J_+^* + J_- J_-^*] = \beta v_t w_t.$$

Agora, utilizaremos procedimentos semelhantes para encontrar a parte polarizada. Começamos definindo:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda\lambda'} L_{\lambda\lambda'}^h W_{\lambda\lambda'} &= 2ih \overline{\sum_{if}} \left\{ \right. \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2 J_0 J_0^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_0^{\mu*} \epsilon_0^\nu k^\alpha k'^\beta \right] + \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) J_+ J_0^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_+^{\mu*} \epsilon_0^\nu k^\alpha k'^\beta \right] + \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) J_0 J_+^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_0^{\mu*} \epsilon_+^\nu k^\alpha k'^\beta \right] + \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) J_- J_0^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_-^{\mu*} \epsilon_0^\nu k^\alpha k'^\beta \right] + \\
 &\quad \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) J_0 J_-^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_0^{\mu*} \epsilon_-^\nu k^\alpha k'^\beta \right] + \\
 &\quad J_+ J_-^* \left[\varepsilon \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_+^{\mu*} \epsilon_-^\nu k^\alpha k'^\beta \right] + \\
 &\quad J_- J_+^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_-^{\mu*} \epsilon_+^\nu k^\alpha k'^\beta \right] + \\
 &\quad J_+ J_+^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_+^{\mu*} \epsilon_+^\nu k^\alpha k'^\beta \right] + \\
 &\quad \left. J_- J_-^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_-^{\mu*} \epsilon_-^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \right\} \tag{40}
 \end{aligned}$$

Vamos dividir a expressão (40), a exemplo do que fizemos com a parte não-polarizada. Definimos então :

$$B1 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2 \overline{\sum_{if}} J_0 J_0^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_0^{\mu*} \epsilon_0^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \tag{41}$$

$$B2 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) \overline{\sum_{if}} J_+ J_0^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_+^{\mu*} \epsilon_0^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \tag{42}$$

$$B3 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) \overline{\sum_{if}} J_0 J_+^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_0^{\mu*} \epsilon_+^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \tag{43}$$

$$B4 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) \overline{\sum_{if}} J_- J_0^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_-^{\mu*} \epsilon_0^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \tag{44}$$

$$B5 = \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right) \overline{\sum_{if}} J_0 J_-^* \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_0^{\mu*} \epsilon_-^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \tag{45}$$

$$B6 = \overline{\sum_{if} J_+ J_-^*} \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_+^{\mu*} \epsilon_-^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \quad (46)$$

$$B7 = \overline{\sum_{if} J_- J_+^*} \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_-^{\mu*} \epsilon_+^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \quad (47)$$

$$B8 = \overline{\sum_{if} J_+ J_+^*} \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_+^{\mu*} \epsilon_+^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \quad (48)$$

$$B9 = \overline{\sum_{if} J_- J_-^*} \left[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_-^{\mu*} \epsilon_-^\nu k^\alpha k'^\beta \right] \quad (49)$$

Ao realizarmos a soma dos termos entre colchetes em B1, B6 e B7, concluímos que estes são nulos. A soma dos termos B2, B3, B4 e B5 produz o seguinte resultado:

$$\sum_{n=2}^5 Bn = \beta v_{tt}^h w_{tt}^h = \beta v_{tt}^h \overline{\sum_{if} \{ J_+ J_+^* - J_- J_-^* \}} \quad (50)$$

onde :

$$v_{tt}^h = tg \left(\frac{\theta}{2} \right) \sqrt{tg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}} . \quad (51)$$

Finalmente a soma dos termos B8 e B9 nos dá:

$$B8 + B9 = \beta v_{tt}^h w_{tt}^h = \beta v_{tt}^h \overline{\sum_{if} 2Re \{ J_0^* (J_+ + J_-) \}} , \quad (52)$$

onde:

$$v_{tt}^h = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} tg \left(\frac{\theta}{2} \right) . \quad (53)$$

Assim sendo, a seção de choque pode ser expressa como:

$$\frac{d^5\sigma}{d\epsilon'_e d\Omega_{e'} d\Omega_{p'}} = \left(\frac{4\pi e}{\hbar^2 q_\nu q^\nu} \right)^2 \frac{m_p c^2 M_{A-1} c^2 m_e^2 c^4}{(2\pi)^5 \hbar^3 c^9 \epsilon_A} \frac{|\mathbf{p}'|c|\mathbf{k}'|c}{|\mathbf{k}|c} f_{rec}^{-1} 2\beta \left\{ v_l w_l + v_t w_t + v_{tt} w_{tt} + v_{tl} w_{tl} + h(v_{tt}^h w_{tt}^h + v_{tl}^h w_{tl}^h) \right\} . \quad (54)$$

Os dois últimos termos entre colchetes se anulam, caso o elétron não esteja inicialmente polarizado. Ainda, se o próton arrancado não for detetado, apenas os dois primeiros termos sobrevivem e reobtemos o resultado bem conhecido para o espalhamento (e, e') em termos dos chamados fatores de forma longitudinal (w_l) e transverso (w_t). Sintetizamos abaixo, os diferentes fatores que ocorrem na seção de choque:

$$\begin{aligned}
 v_l &= \left(\frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} \right)^2, \\
 v_t &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} + tg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\}, \\
 v_{tt} &= -\frac{1}{2} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}, \\
 v_{tl} &= \frac{-Q_\mu^2}{\sqrt{2} |\vec{q}|^2} \sqrt{tg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}, \\
 v_{tt}^h &= tg \left(\frac{\theta}{2} \right) \sqrt{tg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2}}, \\
 v_{tl}^h &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Q_\mu^2}{|\vec{q}|^2} tg \left(\frac{\theta}{2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_l &= \overline{\sum_{if} J_0 J_0^*}, \\
 w_t &= \overline{\sum_{if} [J_+ J_+^* + J_- J_-^*]}, \\
 w_{tt} &= 2 \overline{\sum_{if} Re [J_+^* J_-]}, \\
 w_{tl} &= 2 \overline{\sum_{if} Re [J_0^* (J_- - J_+)]}, \\
 w_{tt}^h &= \overline{\sum_{if} [J_+ J_+^* - J_- J_-^*]}, \\
 w_{tl}^h &= 2 \overline{\sum_{if} Re \{ J_0^* (J_+ + J_-) \}}.
 \end{aligned}$$

Apêndice B

Algumas definições usadas

Apresentamos, neste apêndice, algumas relações usadas para deduzir as expressões de J^μ apresentadas no capítulo 2. Uma delas é a que fornece o gradiente de uma função radial multiplicada pelo harmônico esférico:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\varphi(r)Y_{l,m}(\hat{r}) = & -\left(\frac{l+1}{2l+1}\right)^{1/2}\left(\frac{d}{dr}-\frac{l}{r}\right)\varphi(r)\mathbf{Y}_{l,l+1}^m(\hat{r}) + \\ & +\left(\frac{l}{2l+1}\right)^{1/2}\left(\frac{d}{dr}+\frac{l+1}{r}\right)\varphi(r)\mathbf{Y}_{l,l-1}^m(\hat{r})\end{aligned}$$

onde $\varphi(r)$ é uma função arbitrária de r . Os harmônicos esféricos vetoriais são dados por:

$$\mathbf{Y}_{L,l}^M(\hat{r}) = \sum_{m,m'} \langle l m 1 m' | L M \rangle Y_{l,m}(\hat{r}) \hat{e}_{m'}$$

com $m' = 0, \pm 1$.

Em nossos cálculos utilizamos ainda as seguintes relações envolvendo as funções de Bessel esféricas:

$$\frac{2l+1}{x} j_l(x) = j_{l-1}(x) + j_{l+1}(x)$$

e:

$$\frac{d}{dx} j_l(x) = \frac{1}{2l+1} [l j_{l-1}(x) - (l+1) j_{l+1}(x)] .$$

Para deixar claro a notação e convenções usadas, definimos as matrizes de Pauli utilizadas no desenvolvimento das expressões. Podemos escrever as componentes de $\vec{\sigma}$ como:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

com

$$\sigma_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x \pm i\sigma_y) .$$

Aplicando σ_+ , σ_- e σ_z à função de spin, temos:

$$\sigma_+ \chi_{m_s} = -\sqrt{2} \chi_{1/2} \delta_{m_s, -1/2} ,$$

$$\sigma_- \chi_{m_s} = \sqrt{2} \chi_{-1/2} \delta_{m_s, 1/2}$$

e

$$\sigma_z \chi_{m_s} = \frac{m_s}{|m_s|} \chi_{m_s} .$$

Para finalizar, apresentamos o produto vetorial:

$$\vec{\sigma} \times \vec{p}_f = -i(\sigma_- p_z - \sigma_z p_-)e_+ + i(\sigma_+ p_z - \sigma_z p_+)e_- - i(\sigma_+ p_- - \sigma_- p_+)e_z$$

onde p_{\pm} é definido de forma similar às matrizes de Pauli.

Propriedades dos coeficientes de Clebsch-Gordan assim como dos harmônicos esféricos, bem como valores especiais destes últimos, foram obtidos de [16].

Referências Bibliográficas

- [1] J.M. Eisenberg & W. Greiner, *Excitation Mechanisms of the Nucleus* , North-Holland (1970)
- [2] B.D. Serot & J.D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics*, Plenum Press, New York (1968)
- [3] A. S. Raskin, T. W. Donnelly, *Ann. Phys.* **191** 78 (1989)
- [4] J. M. Udías, P. Sarriguren, E. Moya de Guerra, E. Garrido, J. A. Caballero, *Phys. Rev.* **C48**, 2731 (1993)
- [5] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, New York (1987)
- [6] J. D. Bjorken & S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*,(McGraw-Hill, New York, 1964)
- [7] E. Butkov, *Mathematical Physics*, (Addison-Wesley Publishing Company, 1968)
- [8] S. Boffi, C. Giusti, F.D. Pacati & M. Radici, *Electromagnetic Response of Atomic Nuclei*, Clarendon Press, Oxford (1996)
- [9] S. Typel & H.H. Wolter, *Nucl. Phys.* **A656** 331 (1999)
- [10] C. J. Horowitz, D. P. Murdock, B. D. Serot, *Computational Nuclear Physics*, Springer Berlin (1991)
- [11] D.C. Cheng & G.K. O'Neill, *Elementary Particle Physics, An Introduction*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts (1979)
- [12] S. Boffi, C. Giusti e F. D. Pacati, *Physics Reports*, **226**, 1 (1993)
- [13] J.A. MacNeil, J.R. Shepard & S.J. Wallace, *Phys. Rev. Letters* **50** 1439 (1983)

- [14] H. Uberal, *Electron Scattering from Complex Nuclei*, Academic Press. New York And London (1971)
- [15] A. da Silva Schneider, *Uma Aproximação Relativística para as Densidades de Corrente de Transição Nuclear no Espalhamento Quasielástico de Elétrons por Núcleos*, Dissertação de Mestrado apresentada à Pós-Graduação em Física da UFSC, Florianópolis (2006)
- [16] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev & V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific (1988)
- [17] Cezar A. R. Jacob, *Aproximação Relativística para as Densidades de Corrente Nuclear no Espalhamento ($e, e'p$)*, Dissertação de Mestrado apresentada à Pós-Graduação em Física da UFSC, Florianópolis(2005)
- [18] R. F. Frosh et al, *Phys. Rev.* **174** 1380 (1968)
- [19] Phan Xuan Ho et al, *Nucl. Phys.* **A179** 529 (1972)
- [20] I. Sick, J. S. McCarthy, *Nucl. Phys.* **A150** 631-654 (1970)
- [21] G. Fricke et al, *At. Data Nuclear Data Tables* **60** 177 (1995)
- [22] S.R.Mokhtar, M. Anguiano, G. Co' & A.M. Lallena, *Ann. Phys.* **293** 67 (2001)
- [23] M. Bernhein et al, *Nucl. Phys.* **A375**, 381 (1982)
- [24] J. Gao et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 3265 (2000)
- [25] C.M. Spaltro et al, *Phys. Rev.* **C48** 2385 (1993)
- [26] L. Chinitz et al, *Phys. Rev. Letters* **67** 568 (1991)
- [27] K.G. Fissum et al, *Phys. Rev.* **C70** 034606 (2004)
- [28] J. J. Kelly *Phys. Rev.* **C71** 064610 (2005)
- [29] S. M. Dolfini et al, *Phys. Rev.* **C60** 064622 (1999)
- [30] E.D. Cooper, S. Hama, B.C. Clark & R.L. Mercer, *Phys. Rev.* **C47** 297 (1993)