

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**MODELAGEM DA EVOLUÇÃO DO DANO ORTOTRÓPICO  
ACOPLADO À ELASTOPLASTICIDADE EM METAIS**

**Dissertação submetida à**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**para a obtenção do grau de**

**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANDRESA FREITAS**

**Florianópolis, março de 2010**

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária da  
Universidade Federal de Santa Catarina

F866m Freitas, Andresa

Modelagem da evolução do dano ortotrópico acoplado à elastoplasticidade em metais [dissertação] / Andresa Freitas ; orientador, Paulo de Tarso Rocha de Mendonça. - Florianópolis, SC, 2010.

118 p.: il., grafs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia mecânica. 2. Dano anisotrópico. 3. Mecânica do dano. 4. Elastoplasticidade. 5. Método dos elementos finitos. I. Mendonça, Paulo de Tarso Rocha de. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU 621

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM DA EVOLUÇÃO DO DANO ORTOTRÓPICO ACOPLADO  
A ELASTOPLASTICIDADE EM METAIS

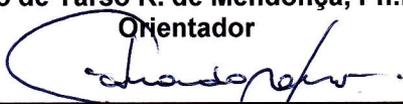
ANDRESA FREITAS

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de  
MESTRE EM ENGENHARIA

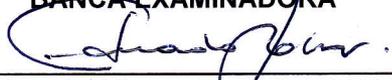
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA  
sendo aprovada em sua forma final.

  
Paulo de Tarso R. de Mendonça, Ph.D.

Orientador

  
Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.  
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

  
Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.  
Presidente da Banca

  
Clovis Spérb de Barcellos, Ph.D.

  
Pablo Andrés Muñoz Rojas, Dr.

# Resumo

Neste trabalho, estuda-se um modelo de dano dúctil tridimensional baseado nos princípios da mecânica do contínuo, na hipótese de equivalência de deformação e no conceito de tensão efetiva, com base numa metodologia fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis. Faz-se o acoplamento das teorias de elastoplasticidade e dano (modelo de Lemaitre) a fim de realizar uma simulação numérica da evolução do dano em estruturas, via Método dos Elementos Finitos (MEF). Postulados da mecânica do dano em meio contínuo foram utilizados buscando-se incorporar o dano como uma variável interna. Primeiramente utiliza-se uma variável de dano escalar isotrópica e posteriormente introduz-se a anisotropia na distribuição das micro-trincas, através do dano ortotrópico, representado por um tensor simétrico de segunda ordem. O código computacional desenvolvido é baseado no MEF e no modelo constitutivo de Lemaitre que é próprio para materiais metálicos, considerando-se um comportamento isotrópico do material, com encruamento isotrópico linear e critério de plastificação de von Mises. O algoritmo numérico correspondente à integração das equações constitutivas é baseado em uma etapa de previsão (estado elástico teste) e uma etapa de correção (estado corretor plástico/dano), sendo que a implementação da simulação numérica é realizada com a utilização do programa MATLAB<sup>®</sup>. Apresentam-se o algoritmo de integração e mapeamento de retorno baseado no modelo constitutivo mencionado acima, bem como os resultados da análise numérica.

Palavras-chave: dano anisotrópico, mecânica do dano, elastoplasticidade, Método dos Elementos Finitos.

# Abstract

In this paper, a three-dimensional ductile damage model based on principles of continuum mechanics is analyzed. The hypothesis of strain equivalence and the concept of effective stress, according to a methodology based on the thermodynamics of irreversible processes govern the model. The theories of elastoplasticity and damage (Lemaitre model) are coupled to perform a numerical simulation of the evolution of damage in structures through the finite element method (FEM). Postulates of damage mechanics in solid medium are used to incorporate the damage as an internal variable of the model. An isotropic scalar damage variable is firstly used and later the anisotropy in the distribution of microcracks is introduced through the orthotropic damage which is represented by a second order symmetric tensor. The program developed is based on FEM and the constitutive model of Lemaitre is suitable for metallic materials, considering an isotropic material behavior with linear isotropic hardening and von Misses yield criteria. The corresponding numerical algorithm integrating the constitutive equations is based on a prediction step (elastic trial state) and a correction step (plastic/damage corrector state), and the implementation of the numerical simulation was performed using the MATLAB<sup>®</sup>. The algorithm for integration and mapping of return based on the constitutive model are presented, as well as the results of numerical analysis.

Key words: orthotropic damage, damage mechanics, elastoplasticity, Finite Element Method.

# Lista de Símbolos

## Alfabeto grego

$\alpha$	Variável interna de encruamento isotrópico
$\gamma$	Parâmetro associado a plastificação
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Deformação efetiva
$\varepsilon_D$	Limiar de dano
$\boldsymbol{\varepsilon}^e, \varepsilon_{ij}^e$	Parcela elástica do tensor de deformações
$\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$	Componente deviatórico da deformação elástica
$\varepsilon_v^e$	Componente volumétrica da deformação elástica
$\boldsymbol{\varepsilon}^p, \varepsilon_{ij}^p$	Parcela plástica do tensor de deformações
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Deformação plástica acumulada
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Deformação plástica absoluta
$\varepsilon_R$	Deformação plástica de ruptura correspondente ao dano crítico
$\eta$	Parâmetro do material referente ao dano
$\kappa$	Módulo volumétrico
$\lambda, \mu$	Constantes de Lamé
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Densidade do material
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tensor de Cauchy
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Tensão efetiva
$\boldsymbol{\sigma}_m$	Tensão média ou hidrostática
$\sigma_R$	Tensão limite de ruptura do material
$\sigma_u$	Tensão última
$\sigma_y$	Tensão de limite de escoamento
$\varsigma$	Tensão equivalente ou tensão de von Misses
$\bar{\varsigma}$	Tensão equivalente efetiva
$\varphi$	Potencial de dissipação

$\varphi^d$	Parcela do potencial de dissipação relativa a danificação
$\varphi^p$	Parcela do potencial de dissipação relativa aos efeitos de plastificação e encruamento
$\Phi$	Matriz de aproximação dos deslocamentos
$\psi$	Potencial termodinâmico
$\psi^{ed}$	Parcela do potencial de dissipação relativa a elasticidade dano
$\psi^p$	Parcela do potencial de dissipação relativa ao encruamento plástico
$\Omega$	Domínio
$(\xi, \varpi, \zeta)$	Sistema de coordenadas naturais
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	Componentes principais do tensor de tensão

## Alfabeto latino

<b>b</b>	Vetor de componentes de força de volume
<b>B</b>	Matriz de aproximação das deformações
<b>C</b> , $\mathbf{C}_{ijkl}$	Tensor de elasticidade linear
$\tilde{\mathbf{C}}$	Tensor de elasticidade linear efetivo
$\mathbf{C}^{ep}$ , $\mathbf{C}_{ijkl}^{ep}$	Operador tensorial tangente elastoplástico de quarta ordem
<i>D</i>	Variável de dano escalar
<b>D</b>	Tensor de dano simétrico de segunda ordem
$D_c$	Dano crítico
$D_I$	Valor principal de dano
<i>E</i>	Módulo de elasticidade longitudinal
$\tilde{E}$	Módulo de elasticidade do meio danificado
$E_\sigma$	Conjunto das tensões admissíveis
<i>f</i>	Função de escoamento
$\mathbf{f}_{ext}$	Vetor de forças nodais externas
$\mathbf{f}_{int}$	Vetor de forças nodais internas

$h$	Função que define a direção de $q$
$\mathbf{H}, H_{ij}$	Tensor operador efetivo de dano
$H'$	Módulo plástico de encruamento isotrópico
$\mathbf{I}$	Tensor identidade de segunda ordem
$\mathbf{II}$	Tensor identidade simétrico de quarta-ordem
$\mathbf{J}$	Matriz jacobiana de transformação de coordenadas
$J_2$	Segundo invariante do tensor deviatórico de tensões
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$K^{ep}$	Módulo tangente elastoplástico
$\mathbf{L}$	Operador diferencial
$\mathbf{M}, M_{ijkl}$	Tensor operador efetivo
$\mathbf{n}$	Tensor de norma unitária que dá a direção do escoamento plástico
$\mathbf{N}$	Tensor de escoamento plástico
$N_j$	Funções interpoladoras ou funções de forma
$p$	Tensão hidrostática
$\bar{p}$	Tensão hidrostática efetiva
$\mathbf{p}$	Vetor de componentes de força de superfície
$q$	Variável associada ao encruamento
$r$	Função que define a direção do escoamento plástico
$r, s$	Parâmetros do material referentes ao dano
$\mathbf{R}$	Resíduo de forças
$R_v$	Função de triaxialidade
$\bar{R}_v$	Função de triaxialidade efetiva
$\mathbf{s}$	Tensor deviatórico de tensões
$\bar{\mathbf{s}}$	Tensor deviatórico de tensões efetivo
$s_f$	Região do contorno do sólido sujeita a forças de superfície
$\mathbf{u}$	Vetor das componentes de deslocamento
$\mathbf{U}$	Vetor de deslocamentos nodais
$U$	Energia de deformação elástica
$\bar{U}$	Energia de deformação elástica efetiva
$W^{ed}$	Energia de deformação elástica do meio danificado
$Y$	Força termodinâmica relacionada a variável interna de dano

$-Y$	Taxa de densidade de energia liberada pelo dano (caso isotrópico)
$-\bar{Y}$	Densidade de energia elástica efetiva
$-\mathbf{Y}, -Y_{ij}$	Tensor taxa de energia liberada pelo dano (caso ortotrópico)
$(x, y, z)$	Sistema de coordenadas cartesianas triortogonal de referência

## Operadores

$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\Delta\chi$	Incremento no tempo $\chi_{n+1} - \chi_n$
$\chi_i$	Componentes de um vetor $\boldsymbol{\chi}$
$\chi_{kk}$	Traço de $\boldsymbol{\chi}$
$\partial(\cdot)$	Contorno de um domínio $(\cdot)$
$\partial_a(\cdot)$	Derivada de $(\cdot)$ com relação a $a$ : $\partial_a(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial a}$
$\det(\cdot)$	Determinante de $(\cdot)$
$\text{dev}(\cdot)$	Deviatórico de $(\cdot)$
$\text{sign}(\cdot)$	Sinal de $(\cdot)$ : $\text{sign}(\cdot) \equiv (\cdot) /  (\cdot) $
$\text{tr}(\cdot)$	Traço de $(\cdot)$
$ \boldsymbol{\chi} _{ij}$	Valor absoluto em termos das componentes principais do tensor $\boldsymbol{\chi}$
$ (\cdot) $	Valor absoluto do escalar $(\cdot)$
$\ (\cdot)\ $	Norma Euclidiana de um vetor ou tensor $(\cdot)$
$\dot{(\cdot)}$	Taxa de $(\cdot)$
$(\cdot)^{-1}$	Inversa de $(\cdot)$
$(\cdot)_n$	Incremento atual de $(\cdot)$
$(\cdot)_{n+1}$	Próximo incremento de $(\cdot)$
$(\cdot)^T$	Transposta de $(\cdot)$
$(\cdot)^{\text{teste}}$	Preditor elástico

# Lista de Figuras

2.1	Discretização de elementos finitos. . . . .	8
3.1	Curva tensão-deformação para o modelo com encruamento linear. . . . .	20
3.2	Curva tensão-deformação para o modelo elastoplástico perfeito. . . . .	20
3.3	Mecanismo unidimensional com elemento de atrito. . . . .	21
3.4	Resposta do elemento de atrito para o mecanismo com $\sigma_\gamma > 0$ . . . . .	22
3.5	Resposta mecânica de um modelo de atrito-elástico unidimensional. . . . .	25
3.6	Resposta de modelo com encruamento isotrópico linear em ciclo fechado. . . . .	26
3.7	Módulo plástico. . . . .	28
3.8	Superfície de escoamento no espaço de tensões principais (Fonte: [13]). . . . .	35
3.9	Superfície de escoamento de von Misses (Fonte: [13]). . . . .	39
4.1	Elemento de volume representativo de um sólido com dano (Fonte: [28]). . . . .	51
4.2	Representação esquemática de dano dútil em metais (Fonte: [5]). . . . .	51
4.3	Deformação plástica por deslizamento devido a movimento de discordância. . . . .	52
4.4	EVR danificado em 1 D. . . . .	53

4.5	Barra cilíndrica sujeita a tração uniaxial: trincas e vazios são removidos simultaneamente (Fonte: [2]). . . . .	55
4.6	Dano físico (Fonte: [4]). . . . .	59
4.7	Diagrama tensão-deformação para material dútil (sem escala). . . . .	66
5.1	Dimensões da chapa. . . . .	81
5.2	Vínculos de simetria. . . . .	81
5.3	Malha utilizada na análise. . . . .	82
5.4	Deslocamento na direção $y$ [mm]. . . . .	83
5.5	Tensão equivalente (MPa). . . . .	84
5.6	Dimensões da chapa e deslocamento controlado (Fonte: [13]). . . . .	85
5.7	Estrutura efetivamente analisada, utilizando-se vínculos de simetria. . . . .	85
5.8	Malha de elementos utilizada em [13] (Fonte: [13]). . . . .	87
5.9	Deformação plástica na direção $y$ . . . . .	88
5.10	Tensão Equivalente (MPa). . . . .	88
5.11	Tensão Equivalente, em MPa (MEFG) (Fonte: [13]). . . . .	89
5.12	Dano, $d = 0,43$ mm. . . . .	91
5.13	Dano (MEFG), $d = 0,43$ mm (Fonte: [13]). . . . .	92
5.14	Tensão Equivalente (MPa), $d = 0,43$ mm. . . . .	92
5.15	Tensão Equivalente em MPa (MEFG), $d = 0,43$ mm (Fonte: [13]). . . . .	93
5.16	Dano, $d = 0,71$ mm. . . . .	94
5.17	Dano, $d = 0,71$ mm (Fonte: [13]). . . . .	95
5.18	Tensão Equivalente (MPa), $d = 0,71$ mm. . . . .	95
5.19	Tensão Equivalente em MPa (MEFG), $d = 0,71$ mm (Fonte: [13]). . . . .	96
5.20	Dano, $d = 0,76$ mm. . . . .	97
5.21	Tensão Equivalente (MPa), $d = 0,76$ mm. . . . .	98
5.22	Curva tensão equivalente - deformação plástica acumulada ( $d = 0,76$ mm). . . . .	99
5.23	Curva dano - tensão equivalente ( $d = 0,76$ mm). . . . .	99
5.24	Curva dano - deformação plástica acumulada ( $d = 0,76$ mm). . . . .	100
5.25	Curva dano - deslocamento em $y$ [mm]. . . . .	101

5.26	Curva deformação plástica acumulada - deslocamento em $y$ [mm]. . . . .	101
5.27	Curvas dano - $x$ [mm]. . . . .	102
5.28	Região analisada na placa em vermelho, linha $\overline{AB}$ . . . . .	103
5.29	Curvas dano - deformação plástica acumulada para alguns valores de limiar de dano. . . . .	103
5.30	Curva tensão equivalente - deformação plástica acumulada até o valor crítico de dano. . . . .	105
5.31	Curva dano - deformação plástica acumulada até o valor crítico de dano. . . . .	106
5.32	Curva dano - deslocamento em $y$ [mm]. . . . .	107
5.33	Concentração do dano próximo ao entalhe no passo de deslocamento referente ao dano crítico. . . . .	108
5.34	Curva dano - deslocamento em $y$ [mm] com variação de $\eta$ . . . . .	108
5.35	Curva dano - deslocamento em $y$ [mm] com variação de $r$ . . . . .	109
5.36	Curva dano - deslocamento em $y$ [mm] com variação de $\varepsilon_D$ . . . . .	109



# Lista de Tabelas

5.1	Valores mínimos e máximos da tensão equivalente, em MPa.	83
5.2	Valores mínimos e máximos da tensão equivalente, em MPa.	87
5.3	Valores mínimos e máximos de dano e tensão equivalente em MPa ( $d = 0,43$ mm).	91
5.4	Valores mínimos e máximos de dano e tensão equivalente em MPa ( $d = 0,71$ mm).	94
5.5	Valores mínimos e máximos de dano e tensão equivalente em MPa ( $d = 0,76$ mm).	97



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Revisão Bibliográfica . . . . .	3
<b>2</b>	<b>O Método dos Elementos Finitos</b>	<b>7</b>
2.1	Análise linear via Método dos Elementos Finitos . . . . .	8
2.1.1	Elementos isoparamétricos . . . . .	12
2.1.2	Quadratura de Gauss . . . . .	14
2.2	Análise elastoplástica não linear via Método dos Elementos Finitos . . . . .	14
2.2.1	Método de Newton-Raphson . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Plasticidade</b>	<b>19</b>
3.1	Plasticidade unidimensional . . . . .	21
3.1.1	Algoritmo implícito de integração e mapeamento de retorno para elastoplasticidade 1D . . . . .	27
3.2	Plasticidade tridimensional . . . . .	32
3.2.1	Modelo elastoplástico perfeito - $J_2$ . . . . .	38
3.2.2	Modelo elastoplástico $J_2$ com encruamento isotrópico linear . . . . .	41
3.2.3	Algoritmo de integração e mapeamento de retorno para elastoplasticidade 3D . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Mecânica do Dano em Meio Contínuo</b>	<b>49</b>
4.1	Dano unidimensional . . . . .	52

4.2	Dano tridimensional . . . . .	58
4.2.1	Termodinâmica do dano . . . . .	60
4.2.2	Dano isotrópico . . . . .	61
4.2.3	Dano ortotrópico . . . . .	67
4.2.4	Algoritmo de integração e mapeamento de retorno para elastoplasticidade acoplada ao dano . . . . .	73
4.2.5	Matriz jacobiana por diferenças finitas . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Exemplos de aplicação numérica</b>	<b>79</b>
5.1	Exemplo 1 - Elasticidade linear tridimensional . . . . .	80
5.2	Exemplo 2 - Elastoplasticidade tridimensional . . . . .	83
5.3	Exemplo 3 - Elastoplasticidade e dano isotrópico tridimen- sional . . . . .	89
5.4	Exemplo 4 - Elastoplasticidade e dano ortotrópico tridimen- sional . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>111</b>
6.1	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	113
	<b>Bibliografia</b>	<b>114</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A relação linear entre tensão e deformação em um material idealizado forma a base da teoria matemática da *elasticidade*, porém, uma estrutura real é um corpo bastante complexo, com estados de tensões complexos que desafiam o cálculo idealizado baseado nesta teoria [1]. Neste contexto, a teoria da *plasticidade* representa uma extensão necessária da teoria da elasticidade e preocupa-se com a análise de tensões e deformações da estrutura, tanto no regime plástico quanto no elástico.

Ambas as teorias são de natureza fenomenológica, ou seja, suas formulações são baseadas em observações experimentais do comportamento macroscópico de um corpo deformável, não se aprofundando nas bases físicas e químicas deste comportamento.

Assim, na teoria da plasticidade a relação entre tensão e deformação pode ser descrita adequadamente com a observação da deformação plástica macroscópica. No entanto, devido à natureza não-linear das regras de deformação plástica, as soluções das equações básicas da mecânica dos sólidos apresentam consideráveis dificuldades que são bem administradas através do desenvolvimento de técnicas numéricas, como o caso dos elementos finitos, implementadas na análise de estruturas.

Com relação a um projeto mecânico, analisar, ou se possível, prever a falha de um componente é uma das principais metas da ciência de engenharia. Para o caso de fratura (dútil ou frágil), esta análise se baseia

na investigação da existência de micro-trincas [4], representando o dano, que é uma deterioração do material e ocorre antes da falha. Desta forma, o enfoque é dado na evolução do dano interno antes que ele seja visível macroscopicamente na forma de trincas ou fraturas.

Neste trabalho é considerada apenas a cinemática de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, sendo que os modelos de dano estão baseados nos princípios da mecânica do contínuo. A Mecânica do Dano em Meio Contínuo (MDC), que representa uma abordagem local de detecção da falha, é uma das ferramentas mais promissoras para prever a iniciação e a propagação da macro-trinca [23] e trata o material danificado como macroscopicamente homogêneo [26] .

O objetivo deste estudo é acoplar as teorias de plasticidade e dano a fim de realizar uma simulação numérica, via Método dos Elementos Finitos (MEF), da evolução do dano em estruturas submetidas à carga uniforme, como por exemplo, a tração. As rotinas aqui desenvolvidas serão adequadas a metais, considerando-se um comportamento isotrópico do material, com encruamento isotrópico linear, sendo que a implementação da simulação numérica será realizada com a utilização do programa MATLAB<sup>®</sup> 7.6.0.

Com relação ao dano, primeiramente faz-se referência ao dano isotrópico e posteriormente introduz-se a anisotropia na distribuição das micro-trincas, através do dano ortotrópico. A importância deste tipo de dano está em situações onde, por exemplo, dois ou mais carregamentos altamente direcionais são aplicados seqüencialmente. Nestes casos, cada carregamento causará o crescimento de micro-trincas em uma direção preferencial, afetando a resposta do material para carregamentos posteriores em direções diferentes. Neste sentido, a hipótese usual de isotropia pode oferecer uma boa primeira aproximação, mas pode apresentar erros substanciais em muitas aplicações práticas [5].

A divisão deste documento é feita da seguinte maneira: O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica que contempla os conceitos e formulações do MEF. O Capítulo 3 trata da Teoria da Plasticidade, que contempla uma revisão bibliográfica onde são apresentados conceitos e formulações

unidimensional e tridimensional. O Capítulo 4 apresenta uma revisão bibliográfica sobre dano em meio contínuo, com análise de dano isotrópico e ortotrópico para materiais dúteis, segundo um modelo de Lemaitre, que é próprio para metais. O Capítulo 5 trata de alguns exemplos que contemplam a análise tridimensional de problemas de elasticidade, plasticidade, dano isotrópico e ortotrópico, com verificação de resultados. O Capítulo 6 apresenta as considerações finais do trabalho.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

O desenvolvimento básico da mecânica do dano ocorreu durante a década de 70. Durante a década de 80 a teoria foi desenvolvida numa base mais rigorosa usando termodinâmica e micro-mecânica [4].

Em 1958, Kachanov propôs o primeiro modelo da MDC para falha por fluência em metais, com carregamento unidimensional, utilizando uma definição de variável de dano escalar [11]. O significado físico do dano isotrópico unidimensional foi proposto mais tarde, por Rabotnov (1963), que considerou a redução da área da seção transversal de um corpo como uma medida satisfatória para o dano [5]. A distribuição de micro-trincas também foi usada para dar um significado físico ao dano no trabalho proposto por Krajcinovic (1983,1985).

Com relação ao dano tridimensional, algumas teorias são citadas a seguir.

Lemaitre (1971) propôs um modelo de dano para metais, em que a variável de dano está diretamente associada ao mecanismo de dissipação. Neste trabalho foi utilizada a hipótese de equivalência de deformação [11].

Gurson (1977) propôs um modelo de dano dúctil para metais porosos, onde a variável de dano escalar é obtida da consideração de vãos esféricos microscópicos incorporados em uma matriz elastoplástica. Neste modelo, a variável de dano não está diretamente associada ao mecanismo de dissipação.

Algumas teorias foram apresentadas para descrever o fenômeno de dano anisotrópico em materiais homogêneos, entre elas estão os trabalhos de

[35] Cordebois e Sidoroff (1979, 1982), Sidoroff (1981), Cordebois (1983), Chow e Wang (1987, 1988), Krajcinovic e Fonseka (1981), Murakami e Ohno (1981), Murakami (1983), Krajcinovic (1983), Chaboche (1984), Simo e Ju (1987), Lemaitre (1996), Lemaitre e Chaboche (1990), Lemaitre et al. (2000).

Chaboche (1978, 1981, 1984) propôs uma teoria fenomenológica para dano creep baseada em rigorosas fundamentações termodinâmicas. Com o uso da hipótese de equivalência de deformação, a variável de dano aparece como um tensor de quarta ordem não simétrico para o caso geral anisotrópico [5]. Os trabalhos de Krajcinovic (1981), Leckie e Onat (1981) e Chow (1987) também apresentam o dano como um tensor de quarta ordem.

Krajcinovic e Fonseka (1981) apresentaram uma teoria de dano em meio contínuo para materiais frágeis, onde usaram variável vetorial como uma medida local de dano [2]. Em 1983, Krajcinovic acrescentou uma estrutura termodinâmica ao modelo e o estendeu para dano dúctil. Outros modelos vetoriais de dano foram propostos por Kachanov (1977) e Mitchell (1990).

No trabalho de Murakami e Ohno (1981), a variável de dano anisotrópico é representada por um tensor simétrico de segunda ordem. Foi realizada a extensão do conceito de tensão efetiva, proposto por Rabotnov (1968) para modelo de dano unidimensional, por meio da existência de uma configuração fictícia sem dano, mecanicamente equivalente. Em 1988, Murakami estendeu o conceito de configuração fictícia sem dano para descrever o estado anisotrópico geral de dano interno em sólidos.

Em 1982, Cordebois e Sidoroff apresentaram um modelo de dano elasto-plástico, onde utilizaram a hipótese de equivalência de energia. Neste trabalho, o dano anisotrópico é representado por um tensor de segunda ordem.

Lemaitre (1983) usou a variável de dano escalar na definição de um modelo puramente fenomenológico para dano dúctil isotrópico em metais. Lemaitre utilizou a hipótese de equivalência de deformação e associou o dano à redução do módulo de Young num caso idealmente isotrópico [5]. Entre os trabalhos propostos para materiais dúcteis estão Lemaitre (1984, 1985, 1986) e Kachanov (1986) [2]. E para o acoplamento entre dano

dútil e plasticidade estão Lemaitre (1985); Benallal, Billardon e Lemaitre (1985) [34].

Em 1984, Ladevèze e Lemaitre propuseram um modelo de fechamento de micro-defeitos, para materiais sob compressão, para dano isotrópico. Este modelo também foi desenvolvido para dano anisotrópico com trabalhos de Ladevèze (1983), Desmorat (1999) e Lemaitre et al. (2000).

Armero e Oller (2000) propuseram um modelo de dano onde o tensor de deformações é decomposto aditivamente em parcelas elástica, plástica e de dano.

Em 2000, Lemaitre, Desmorat e Sauzay apresentaram uma formulação da lei de dano anisotrópico, onde o dano é representado por um tensor de segunda ordem. Em 2001, Desmorat e Besson propuseram um algoritmo implícito para modelo de dano isotrópico (variável escalar) e ortotrópico (variável tensorial) [11].

Vários trabalhos foram desenvolvidos para tratamento de dano em materiais não-homogêneos, entre eles estão os trabalhos onde a MDC foi aplicada à plasticidade e materiais compostos [2], tais como Voyiadjis e Kattan (1990, 1993, 1999), Kattan e Voyiadjis (1990, 1993, 1996), Voyiadjis e Venson (1995), Voyiadjis e Thiagarajan (1996), Voyiadjis e Park (1997). Além destes, Simo e Ju (1987) propuseram um modelo de dano elastoplástico em espaços de tensão (hipótese de equivalência de deformação) e deformação (hipótese de equivalência de tensão) com análise de dano frágil em concreto.



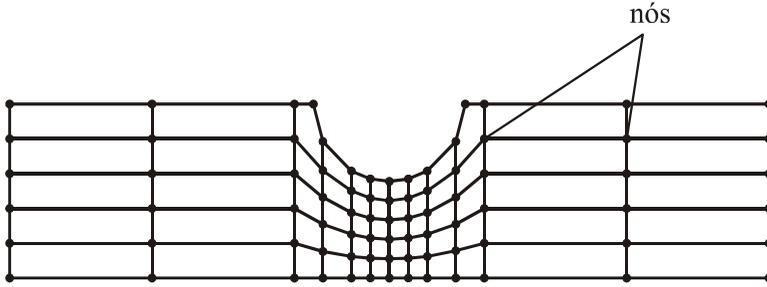
## Capítulo 2

# O Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica para a solução numérica de uma variedade de problemas de meio contínuo encontrados na engenharia. Ele é um método numérico geral para a solução de sistemas de equações diferenciais parciais, sujeitas a conhecidas condições iniciais e de contorno.

O MEF é um método de análise em que um campo de variáveis é aproximado pela combinação linear de *funções de interpolação*, definidas em uma pequena região chamada *elemento finito*, que é um dos subdomínios no qual o domínio do problema é dividido [3]. O MEF propõe uma aproximação da solução do problema de valor de contorno, que pode ser melhorada usando-se mais elementos para representar a estrutura. Neste método, os elementos são conectados por pontos chamados *nós* e uma união particular de elementos é denominada *malha* (Figura 2.1).

Numericamente, uma malha é representada por um sistema de equações algébricas em termos das aproximações dos valores nodais, que são deslocamentos desconhecidos. Assim, após a introdução das condições de vinculação ao meio exterior, a solução do sistema global determina os deslocamentos nodais.



**Figura 2.1:** Discretização de elementos finitos.

## 2.1 Análise linear via Método dos Elementos Finitos

O desenvolvimento descrito nesta seção é totalmente padrão e pode ser encontrado com detalhes em várias fontes como [29, 9, 1, 30].

O modelo do MEF para análise estática pode ser formulado na forma fraca a partir do *princípio dos trabalhos virtuais* (PTV), representado pela soma de integrais sobre o domínio e contorno dos elementos. Este método proporciona um sistema de equações lineares tendo os valores dos deslocamentos nodais como incógnitas, onde a matriz dos coeficientes deste sistema é chamada *matriz de rigidez* e o vetor independente é dito *vetor de forças nodais equivalentes*.

O processo para a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais é apresentado a seguir para o caso tridimensional, na qual o sistema de referência é o cartesiano triortogonal com eixos  $x, y$  e  $z$ .

Seja o equilíbrio de um corpo, sujeito às forças de corpo por unidade de volume  $f_v$ , definido pela equação diferencial de equilíbrio abaixo e válida em todos os pontos do domínio  $\Omega$  :

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0. \quad (2.1)$$

$\mathbf{L}^1$  é uma matriz operador diferencial, que em termos matriciais, é definida

<sup>1</sup>O sobrescrito “T” indica transposto de um vetor ou matriz.

por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor das componentes de tensão de Cauchy, dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right\}, \quad (2.3)$$

e define-se  $\mathbf{b}$  pelo vetor que contém as componentes de força de corpo por unidade de volume:

$$\mathbf{b}^T = \left\{ f_{vx} \quad f_{vy} \quad f_{vz} \right\}. \quad (2.4)$$

Pelo Princípio dos trabalhos virtuais (PTV) a equação (2.1) assume a forma:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta \varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \left( - \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta \mathbf{u}}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{s_f} \boldsymbol{\delta \mathbf{u}}^T \mathbf{p} \, dS \right) = 0, \quad (2.5)$$

onde o primeiro termo é o *trabalho virtual interno*, e o termo entre parênteses é o *trabalho virtual externo*. Na equação (2.5),  $\mathbf{p}$  são as forças aplicadas à superfície,  $\Omega$  é o domínio,  $s_f$  é a região do contorno do corpo sob efeito de forças de superfície e  $\boldsymbol{\delta \mathbf{u}}$  e  $\boldsymbol{\delta \varepsilon}$  são, respectivamente, um vetor de deslocamentos virtuais e um vetor de deformações virtuais associadas a esses deslocamentos. O vetor  $\mathbf{u}$  contém as componentes do campo de deslocamentos:

$$\mathbf{u}^T = \left\{ u_x \quad u_y \quad u_z \right\} \quad (2.6)$$

e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor que agrupa as componentes do tensor de deformações, dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}. \quad (2.7)$$

O vetor das componentes de deformação representa a *relação deformação-deslocamento*, que para a análise de pequenas deformações, no caso tridimensional é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos dos pontos nodais, que está relacionado ao deslocamento distribuído  $u$ , através da aproximação de Galerkin, da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \Phi\mathbf{U}. \quad (2.9)$$

sendo  $\Phi$  a *matriz de aproximação dos deslocamentos*, que contém as funções interpoladoras  $N_j$  ou funções de forma. Para um dos elementos,

$$\Phi = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde  $i$  é o número de nós de cada elemento e  $\mathbf{B}$  é a *matriz de aproximação das deformações*, escrita como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\Phi. \quad (2.11)$$

Substituindo-se as equações (2.8) e (2.9) em (2.5), obtém-se a seguinte equação de governo para a análise de pequenas deformações:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \mathbf{U} + \left( - \int_{\Omega} \Phi^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{s_f} \Phi^T \mathbf{p} \, dS \right) = 0. \quad (2.12)$$

Além disso, se for utilizada a relação constitutiva linear:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.13)$$

onde a matriz constitutiva elástica  $\mathbf{C}$ , para o caso de condições elásticas, lineares e isotrópicas, é dada por:

$$\mathbf{C} = c \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

sendo  $c = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ ,  $E$  o *módulo de elasticidade longitudinal* e  $\nu$  o *coeficiente de Poisson* do material; obtém-se a seguinte equação que governa a análise linear:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega + \left( - \int_{\Omega} \Phi^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{s_f} \Phi^T \mathbf{p} \, dS \right) = 0. \quad (2.15)$$

Assim, a equação (2.15), que é usada para o cálculo da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais, assume a forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{f}_{ext}, \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a *matriz de rigidez* da estrutura, dada por:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\Omega, \quad (2.17)$$

e  $\mathbf{f}_{ext}$  é o *vetor de forças externas* agindo nos pontos nodais, dado por:

$$\mathbf{f}_{ext} = \int_{\Omega} \Phi^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{s_f} \Phi^T \mathbf{p} \, dS. \quad (2.18)$$

No sistema linear global da equação (2.16) são impostas as condições

de contorno estáticas, que são os valores prescritos nas posições correspondentes do vetor de deslocamentos globais  $u$ .

Conhecidos os deslocamentos nodais de cada elemento, pode-se obter o campo de deformações e de tensões usando-se as equações (2.8) e (2.13).

Para situações de não linearidade, o MEF apresenta uma aceitação similar ao do caso linear, quando é tratado como uma ferramenta de projeto. Porém, esta similaridade depende de dois fatores importantes: o custo das operações numéricas associadas a problemas não lineares e a comprovação da precisão da técnica de solução proposta [6].

### 2.1.1 Elementos isoparamétricos

Com relação à formulação do MEF, na prática é difícil calcular analiticamente as integrais das equações (2.17) e (2.18), pois os elementos podem estar distorcidos ou inclinados em relação aos eixos de coordenadas  $xyz$ . Por isso, o uso de *elementos isoparamétricos* tornou-se padrão, pois ele mapeia a geometria em um *sistema local de coordenadas naturais*  $\xi\varpi\zeta$ , onde as integrais podem ser facilmente efetuadas numericamente, sendo que  $\xi$ ,  $\varpi$  e  $\zeta$  assumem valores entre -1 e 1. Neste contexto, o domínio do problema encontra-se no *sistema de coordenadas físico* denotado por  $xyz$  e as funções de forma são definidas em termos do sistema de coordenadas naturais.

O termo isoparamétrico vem do fato de que o mapeamento da geometria é feito através do uso das mesmas funções de forma para interpolar os deslocamentos e as coordenadas globais do elemento.

No caso de um problema tridimensional, onde usam-se elementos isoparamétricos hexaédricos, por exemplo, as coordenadas de referência  $\xi$ ,  $\varpi$  e  $\zeta$  precisam ser ortogonais e não necessitam ser paralelas às coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As faces do hexaedro correspondem a  $\xi = \pm 1$ ,  $\varpi = \pm 1$ ,  $\zeta = \pm 1$ , sendo que o ponto  $(0, 0, 0)$  é o centro do elemento.

Para que as integrais possam ser calculadas no domínio de coordenadas naturais, é necessário mudar os limites de integração e o domínio, que é feito através da *matriz jacobiana* de transformação de coordenadas. Neste caso, a matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  relaciona um elemento infinitesimal do domínio

real a um do domínio de coordenadas naturais da seguinte forma:

$$d\Omega = \det(\mathbf{J}) d\xi d\varpi d\zeta, \quad (2.19)$$

onde  $\det(\mathbf{J})$  é o determinante da matriz jacobiana ou *jacobiano*.

Para determinar as derivadas de  $x$ ,  $y$  e  $z$  com relação a função  $N = N_i(\xi, \varpi, \zeta)$ , inicia-se com as derivadas relacionadas a  $\xi$ ,  $\varpi$  e  $\zeta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \varpi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varpi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varpi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varpi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \varpi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

em que o índice  $i$  é levado até o número de nós do elemento e  $\mathbf{J}$  é a matriz jacobiana, dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \varpi} & \frac{\partial y}{\partial \varpi} & \frac{\partial z}{\partial \varpi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}. \quad (2.21)$$

Logo, as derivadas com relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$  são obtidas da equação (2.20):

$$\begin{Bmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \\ N_{,z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\varpi} \\ N_{,\zeta} \end{Bmatrix}. \quad (2.22)$$

Assim, no caso da integral da equação (2.17), a matriz  $\mathbf{B}$  pode ser determinada e a matriz tangente para o elemento é dada por:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) d\xi d\varpi d\zeta. \quad (2.23)$$

## 2.1.2 Quadratura de Gauss

Na prática, a integração da equação (2.23) é executada pela *quadratura de Gauss*, que é um procedimento de integração numérica que consiste em aproximar a integral de uma função através de um somatório. Este método localiza pontos de integração e designa pesos apropriados afim de minimizar o erro da integração quando o integrando é um polinômio geral.

No caso unidimensional de um elemento de dois nós, usa-se a seguinte transformação

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_i^n w_i f(\xi_i) = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_n f_n, \quad (2.24)$$

em que  $n$  é o número de pontos de integração e  $w_n$  são os fatores de peso.

Em três dimensões, a quadratura de Gauss tem a forma:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \varpi, \zeta) d\xi d\varpi d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k f(\xi_i, \varpi_j, \zeta_k) w_i w_j w_k \quad (2.25)$$

e a matriz tangente para o elemento passa a ser escrita como:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \sum_i \sum_j \sum_k \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} w_i w_j w_k \det(\mathbf{J}). \quad (2.26)$$

## 2.2 Análise elastoplástica não linear via Método dos Elementos Finitos

No caso de análise não linear, deve-se optar entre controle de deslocamento aplicado ou de carga aplicada, sendo que para ilustração, neste trabalho será apresentado apenas o esquema com controle de força aplicada. Para o desenvolvimento descrito nesta seção são consideradas as referências [1, 9, 29].

Em análise elastoplástica, por causa da relação não linear entre a tensão  $\sigma$  e a deformação  $\varepsilon$ , a equação (2.12) é uma equação não linear das

deformações e, conseqüentemente, dos deslocamentos nodais  $U$ . Sendo assim, faz-se necessário adotar um esquema iterativo para resolver a equação (2.12) com relação a  $U$ , correspondendo ao conjunto de forças externas dadas. Além disso, como a relação elastoplástica depende da história da deformação, pode ser utilizada uma análise incremental das forças externas para traçar a variação do deslocamento, da deformação e da tensão.

Em uma análise incremental, o carregamento total  $\mathbf{f}_{ext}$  agindo na estrutura é adicionado em incrementos passo por passo. No  $(n + 1)$ -ésimo passo, o carregamento pode ser expresso por:

$$\mathbf{f}_{ext(n+1)} = \mathbf{f}_{ext(n)} + \Delta\mathbf{f}_{ext(n+1)}. \quad (2.27)$$

Assim, correspondendo ao incremento de carga  $\Delta\mathbf{f}_{ext}$ , tem-se os incrementos nos deslocamentos

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta\mathbf{U}_{n+1}. \quad (2.28)$$

Logo, a equação (2.12) passa a ser escrita como:

$$\mathbf{f}_{int(n+1)} = \mathbf{f}_{ext(n+1)}. \quad (2.29)$$

que representa o equilíbrio da força externa  $\mathbf{f}_{ext}$ , com a força interna  $\mathbf{f}_{int}$ .

### 2.2.1 Método de Newton-Raphson

Neste trabalho, o esquema iterativo adotado para a resolução das equações simultâneas não lineares (2.29) é o *método de Newton-Raphson*.

Considerando que a tensão  $\sigma$  é uma função não linear do deslocamento  $\mathbf{U}$ , a equação (2.29) pode ser escrita como o seguinte sistema de forças residuais:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_{n+1}) = \mathbf{f}_{int(n+1)} - \mathbf{f}_{ext(n+1)}, \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{R}(\mathbf{U}_{n+1})$  é o resíduo de forças.

Assim, tendo obtido a  $(i - 1)$ -ésima aproximação,  ${}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1}$ , para o deslocamento  $\mathbf{U}_{n+1}$ , expandindo  $\mathbf{R}(\mathbf{U}_{n+1})$  usando a expansão das séries

de Taylor e negligenciando os termos de alta ordem, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \left( {}^{(i)}\mathbf{U}_{n+1} \right) &= \mathbf{R} \left( {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1} \right) \\ &+ \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{{}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1}} \left( {}^{(i)}\mathbf{U}_{n+1} - {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1} \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

ou, considerando que a força externa não depende do deslocamento:

$$\left[ {}^{(i-1)}\mathbf{f}_{int(n+1)} - \mathbf{f}_{ext(n+1)} \right] + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{{}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1}} {}^{(i)}\Delta \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (2.32)$$

onde

$${}^{(i-1)}\mathbf{f}_{int(n+1)} = \mathbf{f}_{int(n+1)} \left( {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1} \right) \quad (2.33)$$

$${}^{(i)}\Delta \mathbf{U}_{n+1} = {}^{(i)}\mathbf{U}_{n+1} - {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1}. \quad (2.34)$$

E, reconhecendo que

$${}^{(i-1)}\mathbf{K}_{(n+1)} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{{}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{ep} \Big|_{{}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1}} \mathbf{B} d\Omega, \quad (2.35)$$

onde  $\mathbf{C}^{ep} \Big|_{{}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1}}$  é o *operador tangente elastoplástico* e  ${}^{(i-1)}\mathbf{K}_{(n+1)}$  é a *matriz tangente de rigidez*, obtém-se o esquema de iteração do algoritmo de Newton-Raphson como:

$${}^{(i-1)}\mathbf{K}_{n+1} {}^{(i)}\Delta \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{R} \left( {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1} \right) \quad (2.36)$$

$${}^{(i)}\mathbf{U}_{n+1} = {}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1} + {}^{(i)}\Delta \mathbf{U}_{n+1} \quad (2.37)$$

$${}^{(i=0)}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n, \quad {}^{(i=0)}\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{K}_n, \quad {}^{(i=0)}\mathbf{f}_{int(n+1)} = \mathbf{f}_{int(n)}. \quad (2.38)$$

Esta forma permite que a correção do vetor desconhecido  $\mathbf{U}$  seja obtida

através do vetor de forças residuais  $\mathbf{R}$  em alguma iteração. Este processo continua até que ocorra a convergência, ou seja, até que a força residual  $\mathbf{R}^{(i-1)}\mathbf{U}_{n+1}$  seja suficientemente pequena.

A solução iterativa resultante deste esquema preserva a convergência quadrática numa vizinhança suficientemente próxima à solução, que é característica do método de Newton-Raphson. Isto ocorre desde que o operador tangente elastoplástico seja *consistente* com o algoritmo de integração empregado na solução do problema incremental [20].



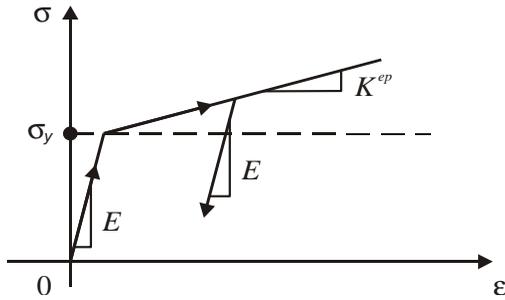
## Capítulo 3

# Plasticidade

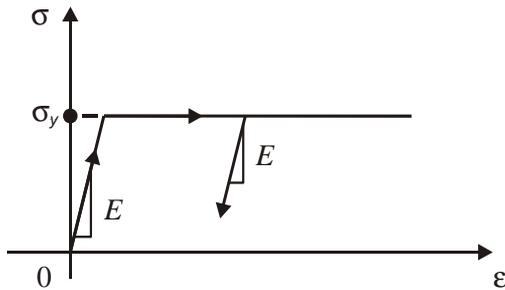
Certos materiais, como os metais, quando solicitados em um estado uniaxial de tensões, até certo nível de tensão apresentam um comportamento elástico linear, deformando-se de acordo com o *módulo elástico*  $E$ . Esta tensão limitante está representada na curva tensão-deformação por  $\sigma_y$  (Figura 3.1) e é chamada de *tensão limite de escoamento*. Após ultrapassar  $\sigma_y$ , o material passa a apresentar uma resposta tanto elástica quanto plástica, ou seja, um comportamento elastoplástico, caracterizado pelo módulo tangente elastoplástico  $K^{ep}$ . As alterações na estrutura do material devido à deformação plástica são irreversíveis [6], ocorrendo a evolução de deformações residuais.

A Figura 3.2 ilustra o comportamento uniaxial idealizado para o modelo elastoplástico perfeito, supondo que a tensão jamais excede  $\sigma_y$  e que toda a deformação que passa a ocorrer é apenas plástica. E a Figura 3.1 ilustra o modelo com encruamento linear.

A resposta inelástica do material, como no caso da plasticidade, é um processo incremental que às vezes é caracterizado pelas equações constitutivas expressas em taxas. Assim, o algoritmo de integração conhecido como *algoritmo de mapeamento de retorno* fornece um robusto e efetivo esquema de integração numérica das taxas das equações constitutivas, durante uma sequência *discreta* de incrementos de tempo [20].



**Figura 3.1:** Curva tensão-deformação para o modelo com encruamento linear.



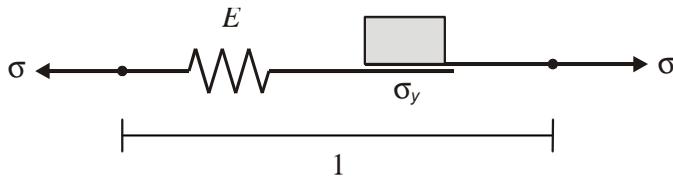
**Figura 3.2:** Curva tensão-deformação para o modelo elastoplástico perfeito.

### 3.1 Plasticidade unidimensional

A seguir apresenta-se a teoria da plasticidade, em um contexto mais simples que é o caso unidimensional, onde é discutido um modelo particular cujas equações de governo básicas ilustram os aspectos matemáticos essenciais da teoria. Este estudo será realizado com base nas referências [6, 7, 5].

O problema será discutido de um ponto de vista fenomenológico, considerando o escoamento plástico como um processo irreversível em um corpo material, tipicamente um metal.

Esta formulação para a mecânica unidimensional pode ser ilustrada por um mecanismo de comprimento unitário, constituído por uma mola de constante elástica  $E$  e um *elemento de atrito de Coloumb*, com constante  $\sigma_y$  (Figura 3.3).



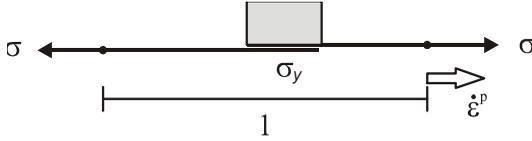
**Figura 3.3:** Mecanismo unidimensional com elemento de atrito.

Sendo  $\sigma$  a tensão aplicada e  $\varepsilon$  a deformação total no modelo da Figura 3.3, observa-se o seguinte:

- Quanto à deformação: decomposição aditiva em que a deformação total  $\varepsilon$  divide-se em uma parcela elástica  $\varepsilon^e$ , devido à mola com constante  $E$  e uma parcela plástica  $\varepsilon^p$ , relacionada ao elemento de atrito.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (3.1)$$

- Quanto à tensão: devido às condições de equilíbrio, a tensão  $\sigma$  na mola com constante  $E$  é dada pela seguinte relação tensão-deformação elástica:



**Figura 3.4:** Resposta do elemento de atrito para o mecanismo com  $\sigma_y > 0$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon}^e \equiv E(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.2)$$

O modelo matemático usa as *condições de complementaridade de Kuhn-Tucker*, para impor a condição de *irreversibilidade* do processo plástico.

Para a análise de resposta de atrito irreversível, o elemento de atrito será isolado (ver Figura 3.4), caracterizando melhor a mudança em sua configuração, que ocorre somente se  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq 0$ . Desta forma, supõe-se que  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  são funções do tempo num intervalo  $[0, T] \subset \mathfrak{R}$ . Em particular, temos:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p : [0, T] \subset \mathfrak{R}, \quad (3.3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.4)$$

Três hipóteses físicas são feitas:

1) Tensões admissíveis: em um elemento de atrito, são admissíveis apenas as tensões contidas no intervalo fechado  $[-\sigma_y, \sigma_y]$ . Logo, o conjunto das tensões admissíveis  $E_{\boldsymbol{\sigma}}$  é dado por:

$$E_{\boldsymbol{\sigma}} = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{R} / f(\boldsymbol{\sigma}) := |\boldsymbol{\sigma}| - \sigma_y \leq 0\}, \quad (3.5)$$

onde  $f(\tau) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  é a *condição de escoamento*. Como  $E_{\boldsymbol{\sigma}}$  é um intervalo fechado, ele é um conjunto convexo fechado.

2) Extensão elástica: se o valor absoluto da tensão aplicada  $\boldsymbol{\sigma}$  for menor do que a tensão limite de escoamento  $\sigma_y$ , então não há mudança na deformação plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  e conseqüentemente  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$ . Logo,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0 \quad \text{se} \quad f(\boldsymbol{\sigma}) := |\boldsymbol{\sigma}| - \sigma_y < 0. \quad (3.6)$$

De (3.2) e (3.6), tem-se que:

$$\text{se } f(\boldsymbol{\sigma}) < 0, \text{ então } \dot{\boldsymbol{\sigma}} = E\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (3.7)$$

e como a resposta instantânea do modelo é elástica, a região elástica é dada pelo conjunto aberto:

$$\text{int}(E_{\boldsymbol{\sigma}}) = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathfrak{R} / f(\boldsymbol{\sigma}) := |\boldsymbol{\sigma}| - \sigma_y < 0\}. \quad (3.8)$$

3) Taxa de deslize: se pelas hipóteses anteriores, o estado de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  é inadmissível quando  $f(\boldsymbol{\sigma}) > 0$  e  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$  quando  $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$ , então a mudança em  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  somente ocorre quando  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ , fazendo com que o elemento de atrito sofra um deslize, ou seja, uma deformação plástica na direção da tensão aplicada  $\boldsymbol{\sigma}$ , com taxa de deslize constante, onde  $\gamma \geq 0$  é o valor absoluto da *taxa de deslize*. Logo, tem-se a forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \geq 0 \text{ se } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_y > 0 \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = -\gamma \leq 0 \text{ se } \boldsymbol{\sigma} = -\sigma_y < 0 \quad (3.9)$$

De (3.9) pode-se obter uma única equação para a evolução de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , para qualquer estado de tensões admissíveis  $\boldsymbol{\sigma} \in E_{\boldsymbol{\sigma}}$ , chamada de *regra do escoamento* ou *equação de evolução*:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \text{ sign}(\boldsymbol{\sigma}) \iff f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (3.10)$$

onde  $\gamma \geq 0$  e  $\text{sign}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$  é a função definida como:

$$\text{sign}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} +1, & \text{se } \boldsymbol{\sigma} > 0 \\ -1, & \text{se } \boldsymbol{\sigma} < 0 \end{cases}, \quad (3.11)$$

sendo que  $\gamma$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  são limitados por certas *restrições unilaterais* (citadas ao longo do texto).

O contorno do conjunto convexo  $E_{\boldsymbol{\sigma}}$ , definido por:

$$\partial E_{\sigma} = \{\tau \in \mathfrak{R} \text{ tal que } f(\tau) = |\tau| - \sigma_y = 0\}, \quad (3.12)$$

é chamado de *superfície de escoamento*, que para o modelo unidimensional reduz-se a dois pontos,  $\partial E_{\sigma} = \{-\sigma_y, \sigma_y\}$ . Nota-se que:

$$E_{\sigma} = \partial E_{\sigma} \cup \text{int}(E_{\sigma}), \quad (3.13)$$

onde  $E_{\sigma}$  é o fechamento da região elástica  $\text{int}(E_{\sigma})$ .

As restrições unilaterais para  $\gamma$  e  $\sigma$  ou *condições de carga/descarga* são:

1) Pela primeira e terceira hipóteses,

$$\gamma \geq 0 \text{ e } f(\sigma) \leq 0. \quad (3.14)$$

2) Segundo as hipóteses 2 e 3, tem-se as condições:

$$\left. \begin{array}{l} f(\sigma) < 0 \Rightarrow \gamma = 0, \\ \gamma > 0 \Rightarrow f(\sigma) = 0. \end{array} \right\}$$

Logo,

$$\gamma f(\sigma) = 0. \quad (3.15)$$

Desta forma, a taxa de deformação de atrito (taxa de deslize) será diferente de zero somente na superfície de escoamento.

Estas duas primeiras condições são clássicas da literatura na programação matemática convexa [7] e recebem o nome de *condições de complementaridade de Kuhn-Tucker*.

3) Sejam dados no tempo  $\varepsilon(t)$  e  $\varepsilon^p(t)$ , tal que  $\sigma$  também é conhecido no tempo  $t$  pela relação elástica (3.2) e considerando o caso onde:

$$\sigma(t) \in \partial E_{\sigma} \iff f[\sigma(t)] = 0 \quad (3.16)$$

conclui-se que  $\dot{f}[\sigma(t)] \leq 0$  [7]. Assim, temos que:

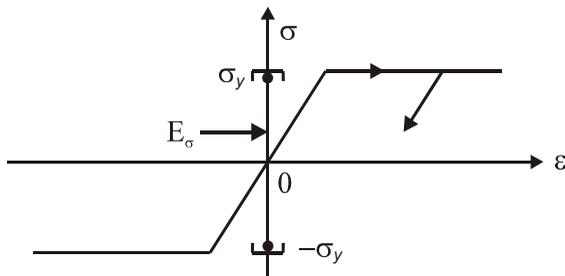
$$\left. \begin{array}{l} \gamma > 0 \Rightarrow \dot{f}(\sigma) = 0, \\ \dot{f}(\sigma) < 0 \Rightarrow \gamma = 0. \end{array} \right\}$$

Logo, obtém-se uma condição adicional conhecida como *condição de consistência* ou *condição de persistência*:

$$\gamma \dot{f} = 0 \quad (\text{se } f(\boldsymbol{\sigma}) = 0), \quad (3.17)$$

a qual indica que a tensão pontual  $\boldsymbol{\sigma}$  precisa “persistir” em  $\partial E_{\boldsymbol{\sigma}}$  para que  $\dot{f}[\boldsymbol{\sigma}(t)] = 0$ .

A Figura 3.5 representa o esquema da resposta mecânica do modelo mostrado na Figura 3.3 (plasticidade perfeita).



**Figura 3.5:** Resposta mecânica de um modelo de atrito-elástico unidimensional.

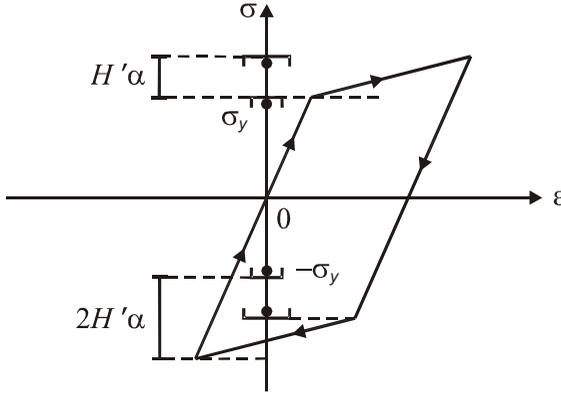
Um efeito experimentalmente observado em muitos metais é o *encruamento*. Neste trabalho será considerado apenas um dos casos de encruamento clássico fenomenológico, conhecido como *encruamento isotrópico*.

A diferença essencial entre a plasticidade perfeita e a plasticidade com encruamento é que na primeira o fechamento da extensão elástica  $E_{\boldsymbol{\sigma}}$  permanece inalterado, ou seja, o deslize ( $\dot{\epsilon}^p \neq 0$ ) ocorre a um valor constante de tensão aplicada tal que  $|\boldsymbol{\sigma}| = \sigma_y$ . No entanto, para o modelo com encruamento,  $E_{\boldsymbol{\sigma}}$  expande-se com a quantidade de deslize no sistema, isto é, com a quantidade do escoamento plástico.

A Figura 3.6 ilustra a curva tensão-deformação idealizada para um modelo com encruamento isotrópico linear em um ciclo fechado, que obedece a duas condições:

- 1) No encruamento isotrópico, para algum estado de carregamento, o centro de  $E_{\boldsymbol{\sigma}}$  permanece na origem.

2) O encruamento é linear em relação a quantidade de escoamento plástico, isto é, linear em relação a  $|\dot{\varepsilon}^p|$  e também independe de  $\text{sign}(\dot{\varepsilon}^p)$ .



**Figura 3.6:** Resposta de modelo com encruamento isotrópico linear em ciclo fechado.

De acordo com a primeira condição, o critério de escoamento assume a forma:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = |\boldsymbol{\sigma}| - [\sigma_y + H'\alpha] \leq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad (3.18)$$

onde  $\sigma_y$  e  $H'$  são constantes dadas;  $\sigma_y$  é a tensão limite de escoamento e  $H'$  é o *módulo plástico de encruamento isotrópico* (sendo que para  $H' < 0$  a resposta é um *amolecimento*). A variável  $\alpha : [0, T] \rightarrow \Re$  é uma função não-negativa da quantidade de escoamento plástico (deslize), chamada de *variável interna de encruamento isotrópico*.

A partir da condição 2, considera-se a seguinte equação de evolução para  $\alpha$ , que é a *lei do encruamento isotrópico*:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| = \gamma, \quad (3.19)$$

chamada de *deformação plástica equivalente*.

As condições de complementaridade de Kuhn-Tucker assumem a forma:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0, \quad (3.20)$$

onde  $\gamma \geq 0$  é determinado pela condição de consistência:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0 \quad (\text{se } f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0). \quad (3.21)$$

Tomando-se a derivada no tempo da função de escoamento (equação (3.18)), obtém-se:

$$\dot{f} = \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H' \dot{\alpha} \quad (3.22)$$

e assim, é possível determinar uma expressão única para  $\gamma > 0$ , utilizando-se a condição de consistência com  $\dot{f} = 0$ , as equações (3.10) e (3.19), combinadas com a relação constitutiva elástica em termos de taxas:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = E \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \equiv E (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (3.23)$$

Desta forma, obtém-se:

$$\gamma = \frac{E}{E + H'} \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{E}{E + H'} |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|. \quad (3.24)$$

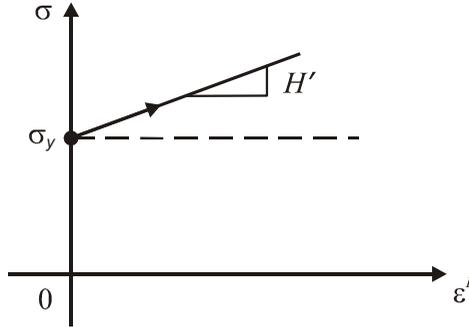
A regra do escoamento permanece inalterada (3.10) e a relação da equação (3.23) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{cases} E \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, & \text{se } \gamma = 0 \\ \frac{EH'}{E + H'} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, & \text{se } \gamma > 0 \end{cases}. \quad (3.25)$$

A expressão  $\frac{EH'}{E + H'}$  é denominada *módulo tangente elastoplástico* e denotado por  $K^{ep}$ . As Figuras 3.1 e 3.7 ilustram a interpretação do módulo tangente elastoplástico e do módulo plástico, respectivamente.

### 3.1.1 Algoritmo implícito de integração e mapeamento de retorno para elastoplasticidade 1D

O algoritmo de integração para elastoplasticidade estudado neste trabalho descreve a solução numérica para o problema não-linear de valor de contorno pelo MEF, baseada na *solução iterativa* da versão discretizada das equações de equilíbrio. O processo de integração é puramente local no



**Figura 3.7:** Módulo plástico.

espaço, ou seja, considera pontos específicos no corpo estudado (tipicamente os correspondentes aos pontos de integração de um elemento finito) e obedece ao modelo constitutivo detalhado anteriormente.

### Discretização pelo método de Euler implícito

Seja  $x \in \bar{\beta} = [0, L]$  os pontos de interesse do corpo dado, onde  $\beta = ]0, L[$ . Considera-se que o tempo corrente  $t_n$  e o estado local do corpo no ponto  $x \in \beta$  estão completamente definidos, assim como são conhecidos os valores de [7]

$$\{\varepsilon_n(x); \varepsilon_n^p(x); \alpha_n(x)\} \quad (3.26)$$

e o estado de tensões dado por:

$$\sigma_n(x) = E(\varepsilon_n(x) - \varepsilon_n^p(x)). \quad (3.27)$$

A partir daí é dado um “incremento”  $\Delta\varepsilon(x)$  na deformação total em  $x \in \beta$ , que estimará o estado no tempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . O problema agora é atualizar as variáveis básicas de (3.26) e (3.27) no tempo  $t_{n+1}$ . Neste caso “incremental” a deformação total  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$  é a variável independente básica.

Para o processo de integração do problema de valor inicial elastoplástico, inicialmente considera-se uma função suave  $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , associada ao

problema de valor inicial:

$$\dot{y}(t) = g(y(t)) \quad (3.28)$$

$$y(0) = y_n, \text{ em } [0, T]. \quad (3.29)$$

Uma solução aproximada é obtida pela seguinte classe de algoritmos:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t g(y_{n+\vartheta}) \quad (3.30)$$

$$y_{n+\vartheta} = \vartheta y_{n+1} + (1 - \vartheta) y_n; \quad \vartheta \in [0, 1]. \quad (3.31)$$

Aqui,  $y_{n+1} \cong y(t_{n+1})$  denota a aproximação para o valor exato  $y(t_{n+1})$  no tempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . Em particular será usado  $\vartheta = 1$ , correspondente ao *método de Euler implícito* (backward) e que conduz ao algoritmo de retorno clássico.

Desta forma, apresenta-se as expressões em forma de passo finito adequadas a uma análise não linear incremental iterativa, utilizando-se o modelo constitutivo para elastoplasticidade com encruamento isotrópico linear:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \gamma \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}), \quad (3.32)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta t \dot{\alpha}_{n+1} = \alpha_n + \Delta \gamma, \quad (3.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e), \quad (3.34)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} := \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad (3.35)$$

onde  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n$  é dado e  $\Delta \gamma = \gamma_{n+1} \Delta t \geq 0$  é um *multiplicador de Lagrange* equivalente ao parâmetro de consistência  $\gamma \geq 0$ , que dá a evolução das variáveis associadas a plastificação.

As variáveis  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  e  $\alpha_{n+1}$ , junto com  $\Delta \gamma$  são restringidas pela *versão*

*discreta* das condições de Kuhn-Tucker:

$$f_{n+1} := |\boldsymbol{\sigma}_{n+1}| - (\sigma_y + H' \alpha_{n+1}) \leq 0, \quad \Delta\gamma \geq 0, \quad \Delta\gamma f_{n+1} = 0. \quad (3.36)$$

### Preditor elástico e corretor plástico

Para o desenvolvimento do algoritmo, é considerado um estado auxiliar, chamado *estado elástico teste* (etapa de previsão), que não precisa corresponder ao estado atual, a menos que o processo incremental seja elástico [7, 5]. Ou seja, conhecidas as variáveis que definem o modelo constitutivo no passo  $n$ , primeiramente é considerado um passo (teste) puramente elástico, definido pelas fórmulas:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (3.37)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{teste}} := E \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}}, \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p \text{ teste}} := \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad (3.39)$$

$$\alpha_{n+1}^{\text{teste}} := \alpha_n \quad (3.40)$$

$$f_{n+1}^{\text{teste}} := |\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{teste}}| - (\sigma_y + H' \alpha_n) \quad (3.41)$$

Observa-se que o estado teste é determinado apenas em termos das condições iniciais  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \alpha_n\}$  e da deformação incremental dada  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ . Caso seja verificada a evolução da plastificação, é preciso corrigir as variáveis correspondentes ao passo  $n + 1$  (etapa de correção). As expressões que definem a etapa de correção, chamada de *estado corretor plástico*, estão listadas na etapa 3 do algoritmo descrito abaixo.

Inicialmente faz-se necessário obter uma relação entre as tensões  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{teste}}$ , a partir da relação constitutiva  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} := E(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$ , da

seguinte forma: sejam as equações (3.32) e (3.38) obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste} - E \Delta\gamma \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}), \quad (3.42)$$

$$|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}| \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = |\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste}| \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste}) - E \Delta\gamma \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \quad (3.43)$$

como  $\text{sign}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste})$ , logo,

$$|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}| = |\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste}| - E \Delta\gamma. \quad (3.44)$$

### Algoritmo implícito para integração numérica das equações constitutivas elastoplásticas 1D

Desta forma, tem-se o seguinte algoritmo para elastoplasticidade unidimensional com encruamento isotrópico linear [7]:

1) Calcula estado teste (preditor elástico):

Dado  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  e as variáveis de estado em  $t_n$ , calcula o estado elástico teste

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste} = E \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ teste}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ teste} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n$$

2) Testa consistência plástica:

$$\text{se } f_{n+1}^{teste} := |\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste}| - (\sigma_y + H' \alpha_n) \leq 0, \quad (\text{então passo elástico})$$

o conjunto  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}$  e  $K^{ep} = E$ ,

finaliza.

Senão (passo plástico, vá para (3)).

3) Mapeamento de retorno (etapa de correção):

Impondo-se a condição:

$$\begin{aligned}
 f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - (\sigma_y + H' \alpha_{n+1}) \\
 &= |\sigma_{n+1}^{teste}| - E \Delta\gamma - [\sigma_y + H' (\alpha_n + \Delta\gamma)] \\
 &= f_{n+1}^{teste} - \Delta\gamma (E + H') = 0,
 \end{aligned}$$

obtém-se:

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{teste}}{E + H'} > 0$$

$$\sigma_{n+1} = E (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) = \sigma_{n+1}^{teste} - E \Delta\gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1})$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma \operatorname{sign}(\sigma_{n+1})$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$$

4) Calcula módulo tangente elastoplástico:

$$K^{ep} = \frac{EH'}{E + H'}$$

Finaliza.

## 3.2 Plasticidade tridimensional

A seguir serão apresentadas as equações que governam a plasticidade clássica no contexto tridimensional, considerando-se as referências [1, 7, 5].

Este estudo é motivado pelo modelo unidimensional, considerando-se o escoamento plástico como um processo irreversível e caracterizado em termos da história das seguintes variáveis independentes: o tensor de deformação  $\varepsilon$ , o tensor de deformação plástica  $\varepsilon^p$  e a variável interna de encruamento  $\alpha$ . Aqui também será enfatizado o modelo com encruamento isotrópico linear. Logo, generalizou-se o modelo unidimensional para o caso tridimensional como segue:

1) A decomposição aditiva do tensor deformação total assume a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \text{ isto é } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (3.45)$$

que pode representar o tensor deformação elástica como  $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$ .

2) O tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  está relacionado com a deformação elástica da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p], \text{ isto é } \sigma_{ij} = C_{ijkl} : \varepsilon_{kl} \quad (3.46)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor de *módulo elástico*, um tensor constitutivo linear de quarta ordem constante:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{II} = 2\mu \left( \mathbf{II} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) + \kappa \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (3.47)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda-ordem:

$$\mathbf{I} = \delta_{ij} e_i \otimes e_j, \quad (3.48)$$

$\mathbf{II}$  é o tensor identidade simétrico de quarta-ordem, dado por:

$$\mathbf{II} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l, \quad (3.49)$$

sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker,  $\kappa$  o módulo volumétrico e  $\lambda$  e  $\mu$  as constantes de Lamé, relacionadas ao módulo de elasticidade longitudinal  $E$ , dadas por:

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3.50)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.51)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.52)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente elástico de Poisson.

3) A *condição de escoamento* é definida como uma função  $f : S \times$

$\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$  e os estados admissíveis  $\{\boldsymbol{\sigma}, q\} \in S \times \mathfrak{R}$  são restringidos ao espaço de tensões sobre o conjunto  $E_{\boldsymbol{\sigma}}$ , definido como:

$$E_{\boldsymbol{\sigma}} := \{(\boldsymbol{\sigma}, q) \in S \times \mathfrak{R} \text{ tal que } f(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0\}, \quad (3.53)$$

onde  $q$  é uma variável dada por:

$$q = H' \alpha \quad (3.54)$$

e  $S := \left\{ \xi : \mathfrak{R}^{n_{\text{dim}}} \longrightarrow \mathfrak{R}^{n_{\text{dim}}} \text{ tal que } \xi \text{ é linear e } \xi = \xi^T \right\}$  é o espaço vetorial com produto interno:

$$\xi : \xi = \text{tr} \left[ \xi^T \xi \right] \equiv \xi_{ij} \xi_{ij}. \quad (3.55)$$

Na equação (3.54),  $H'$  é o módulo plástico de encruamento isotrópico associado a variável de estado  $\alpha$ , que é a variável interna de encruamento isotrópico relacionado à evolução da deformação plástica.

4) O *domínio elástico* é definido pelo interior de  $E_{\boldsymbol{\sigma}}$  e denotado por  $\text{int}(E_{\boldsymbol{\sigma}})$ ; e a *superfície de escoamento no espaço de tensões* é formada pelo contorno de  $E_{\boldsymbol{\sigma}}$ , denotada por  $\partial E_{\boldsymbol{\sigma}}$ . Como no caso unidimensional,  $E_{\boldsymbol{\sigma}} = \text{int}(E_{\boldsymbol{\sigma}}) \cup \partial E_{\boldsymbol{\sigma}}$ .

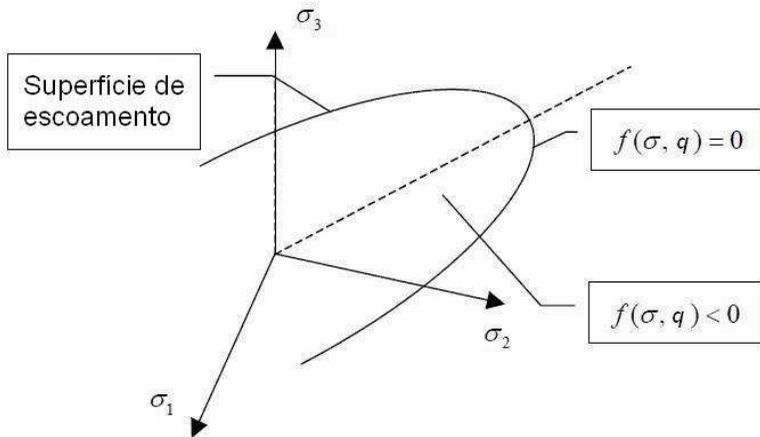
Para a visualização geométrica da condição de escoamento isotrópica, é comum escrevê-la em termos das componentes principais  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  do tensor de tensões. Tomando-se como referência os eixos associados as tensões principais, a superfície de escoamento, ou seja, a superfície formada pelos pontos na qual  $f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$ , é representada pela Figura 3.8.

5) Para o modelo geral não-associativo, as equações de evolução para  $\dot{\epsilon}^p$  e  $q$ , chamadas de *regra do escoamento* e *lei do encruamento*, respectivamente, são:

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma r(\boldsymbol{\sigma}, q) \quad (3.56)$$

$$\dot{q} = -\gamma h(\boldsymbol{\sigma}, q), \quad (3.57)$$

onde  $r : S \times \mathfrak{R} \longrightarrow S$  e  $h : S \times \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$  são *funções prescritas* que



**Figura 3.8:** Superfície de escoamento no espaço de tensões principais (Fonte: [13]).

definem a direção do escoamento plástico e de  $q$ . O parâmetro  $\gamma \geq 0$  é uma função não-negativa, chamada de *parâmetro de consistência*, que dá a “velocidade” da plastificação e obedece às condições de complementaridade de Kuhn-Tucker (condições de carga-descarga):

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, q) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, q) = 0, \quad (3.58)$$

além disso, satisfaz a condição de consistência:

$$\gamma \dot{f}(\sigma, q) = 0 \quad (3.59)$$

onde  $\dot{f}$  é a taxa da função de escoamento.

Das condições de complementaridade de Kuhn-Tucker, têm-se duas situações:

1) Para o caso em que  $\{\sigma, q\} \in \text{int}(E_\sigma)$ , tem-se  $f(\sigma, q) < 0$  e conclui-se que  $\gamma = 0$ . Logo não há evolução de deformação plástica nem de encruamento, ou seja,  $\dot{\epsilon}^p = 0$  e  $\dot{q} = 0$ . Assim, como o ponto em questão

está no domínio elástico, tem-se  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$  e uma *resposta instantaneamente elástica*, onde a taxa para  $\boldsymbol{\sigma}$  é:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e. \quad (3.60)$$

2) Para o caso em que  $\{\boldsymbol{\sigma}, q\} \in \partial E_{\boldsymbol{\sigma}}$ , tem-se  $f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$  e conclui-se que  $\gamma \geq 0$ , ou seja, a plastificação pode estar ocorrendo ou não. De acordo com a condição de consistência, tem-se os seguintes casos:

2.1)  $\dot{f} < 0$ , conclui-se que  $\gamma = 0$ , ou seja, está ocorrendo um descarregamento elástico, onde novamente  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$  e  $\dot{q} = 0$ . Este tipo de resposta é chamado de descarregamento de um estado plástico.

2.2)  $\dot{f} = 0$ , pode-se obter duas situações:  $\gamma > 0$  ou  $\gamma = 0$ .

a) Se  $\gamma > 0$ , então há evolução da plastificação e do encruamento, ou seja,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq 0$  e  $\dot{q} \neq 0$ . Esta situação é chamada de *carregamento plástico*.

b) Se  $\gamma = 0$ , então não há variação da plastificação e do encruamento, constituindo-se um estado de *carregamento neutro*.

Ainda explorando a condição de consistência, pode-se obter uma expressão para  $\gamma > 0$ . Usando a regra da cadeia, para derivar no tempo a função  $f(\boldsymbol{\sigma}, q) \in E_{\boldsymbol{\sigma}}$ , e as equações (3.56), (3.57), juntamente com a equação constitutiva em taxa, no regime elástico:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] \equiv \mathbf{C} : [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma r], \quad (3.61)$$

obtem-se:

$$\dot{f} = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \partial_q f \cdot \dot{q} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} &= \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbf{C} : [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] + \partial_q f \cdot \dot{q} \\ &= \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma [\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbf{C} : r + \partial_q f \cdot h] \leq 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde  $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f$  e  $\partial_q f$  indicam  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  e  $\frac{\partial f}{\partial q}$ , respectivamente.

Com a hipótese de que a regra do escoamento, a lei do encruamento e a condição de escoamento são tais que ocorre a seguinte desigualdade:

$$[\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : r + \partial_q f \cdot h] > 0, \quad (3.64)$$

usando-se a *teoria da associatividade*:

$$r = \partial_{\sigma} f, \quad (3.65)$$

$$h = \partial_q f, \quad (3.66)$$

e sabendo que o tensor  $\mathbf{C}$  é positivo definido, obtém-se que:

$$\text{se } \dot{f} = 0, \text{ então } \gamma = \frac{\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : \dot{\epsilon}}{\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : r + \partial_q f \cdot h}. \quad (3.67)$$

A *plasticidade perfeita* ocorre quando  $h = 0$ . E de (3.59) e (3.62) pode-se concluir também que:

$$\gamma \geq 0 \iff \partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} > 0 \quad (3.68)$$

Após o escoamento plástico, substituindo (3.67) em (3.61):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \mathbf{C} : \left[ \dot{\epsilon} - \frac{\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : \dot{\epsilon}}{\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : r + \partial_q f \cdot h} r \right] \\ &= \mathbf{C} : \dot{\epsilon} - \left[ \frac{\mathbf{C} : r \otimes \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f}{\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : r + \partial_q f \cdot h} \dot{\epsilon} \right], \quad (3.69) \\ &= \left[ \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : r \otimes \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f}{\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : r + \partial_q f \cdot h} \right] \dot{\epsilon} \end{aligned}$$

obtém-se a relação:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\epsilon}, \quad (3.70)$$

onde  $\mathbf{C}^{ep}$  é o *módulo tangente elastoplástico*, dado por:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C}, & \text{se } \gamma = 0 \\ \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : r \otimes \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f}{\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : r + \partial_q f \cdot h}, & \text{se } \gamma > 0 \end{cases}. \quad (3.71)$$

$\mathbf{C}^{ep}$  é um tensor de quarta ordem freqüentemente chamado de *operador*

*tangente elastoplástico contínuo* [20]. Geralmente,  $\mathbf{C}^{ep}$  não é simétrico para qualquer valor de  $r(\boldsymbol{\sigma}, q)$ , exceto no caso de regra da associatividade da equação (3.65).

As equações vistas acima fazem parte do conjunto de equações que governam a plasticidade geral, podendo ser aplicadas a diferentes modelos constitutivos elastoplásticos, já que não foi feita alguma particularização com relação a função  $f(\boldsymbol{\sigma}, q)$ .

A seguir serão apresentados dois modelos clássicos para plasticidade tridimensional em metais, o elastoplástico perfeito e o modelo com encruamento isotrópico linear.

### 3.2.1 Modelo elastoplástico perfeito - $J_2$

Para o *modelo elastoplástico perfeito*, que não considera o encruamento ( $h = 0$ ), adota-se a seguinte função que equivale a *condição de escoamento de von Mises*:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \varsigma - \sigma_y \leq 0, \quad (3.72)$$

onde

$$\varsigma = \sqrt{3J_2} \quad (3.73)$$

é denominada *tensão equivalente* ou *tensão de von Mises*.  $J_2$  é o segundo invariante do tensor deviatórico de tensões  $\mathbf{s}$ , dado por:

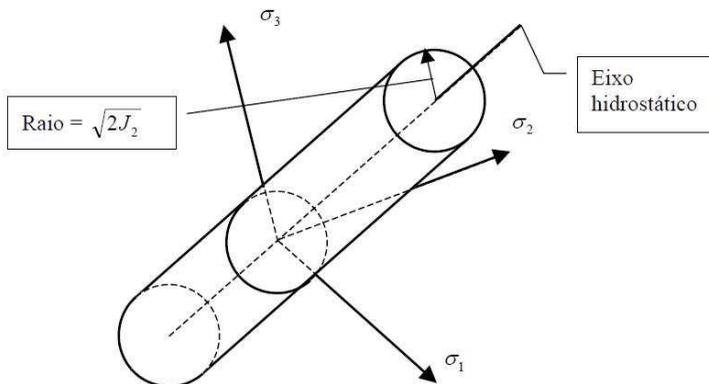
$$J_2 = \frac{\|\mathbf{s}\|^2}{2} = \frac{\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{1}{3}(\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}])^2}{2}, \quad (3.74)$$

na qual  $\mathbf{s}$ , que possui seu traço nulo, é definido por:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - (\sigma_m \mathbf{I}), \quad (3.75)$$

sendo  $\mathbf{I}$  o tensor identidade de segunda ordem e  $(\sigma_m \mathbf{I})$  a parcela hidrostática do tensor tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ , com  $\sigma_m$  definido por:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]}{3}. \quad (3.76)$$



**Figura 3.9:** Superfície de escoamento de von Misses (Fonte: [13]).

O invariante  $J_2$  também pode ser escrito em termos de componentes genéricas do tensor de tensões, da seguinte forma:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2. \quad (3.77)$$

No espaço de tensões principais, a superfície de escoamento definida pelo critério de von Mises é um cilindro de raio  $\sqrt{2J_2}$ , cujo eixo corresponde ao hidrostático ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m$ ), como mostra a Figura 3.9.

Também é usual que a condição de escoamento de von Mises seja dada pela função:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) := \sqrt{2J_2} - A \leq 0, \quad (3.78)$$

onde

$$A := \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \quad (3.79)$$

é o raio da superfície de escoamento e  $\sigma_y$  é a tensão limite de escoamento.

A taxa de deformação plástica fica expressa na forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr} [\boldsymbol{\sigma}]) \mathbf{I}}{\sqrt{\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{1}{3} (\text{tr} [\boldsymbol{\sigma}])^2}} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} = \gamma \mathbf{N}, \quad (3.80)$$

onde  $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f$  indica  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  e  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}$  é um tensor de norma unitária que dá a direção do escoamento plástico e  $\mathbf{N}$  é denominado *tensor de escoamento*, dado por:

$$\mathbf{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \quad (3.81)$$

Considerando o fato de que para o modelo de von Mises  $\mathbf{N}$  é um tensor deviatórico, tem-se [5]:

$$\mathbf{C} : \mathbf{N} = 2\mu \mathbf{N} \quad (3.82)$$

e usando a equação (3.81), segue que:

$$\mathbf{N} : \mathbf{C} : \mathbf{N} = 3\mu. \quad (3.83)$$

Uma vez que  $\text{tr} [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] \equiv 0$ , o que implica que a deformação plástica ocorre sem provocar variação de volume (processo isocórico), partindo da equação (3.67) e adotando-se  $r = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f = \mathbf{N}$  (normalidade) e  $h = 0$ , obtém-se a seguinte expressão para o parâmetro de consistência:

$$\gamma = \frac{\mathbf{N} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{N} : \mathbf{C} : \mathbf{N}} = \frac{2}{3} \mathbf{N} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.84)$$

onde fez-se o uso do fato que  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \|\mathbf{n}\|^2 = 1$  e  $\text{tr}[\mathbf{n}] = 0$ .

Assim, substituindo (3.84) em (3.80), obtém-se:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \mathbf{N} = \left( \frac{2}{3} \mathbf{N} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \mathbf{N} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.85)$$

e a taxa do tensor de tensões pode ser reescrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] = \mathbf{C} : [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \mathbf{C} : [\mathbf{II} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Finalmente, o operador tangente elastoplástico para este caso particular é expresso por:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C}, & \text{se } \gamma = 0 \\ \mathbf{C} : [\mathbf{II} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})] = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu [\mathbf{II} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})], & \text{se } \gamma > 0 \end{cases} . \quad (3.86)$$

Outra maneira de se obter este mesmo resultado é partir da equação (3.71) e novamente adotar  $r = \partial_{\sigma} f = \mathbf{N}$  (normalidade) e  $h = 0$ . Assim, obtém-se a seguinte expressão para o operador tangente elastoplástico:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C}, & \text{se } \gamma = 0 \\ \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \mathbf{N} \otimes \mathbf{C} : \mathbf{N}}{\mathbf{N} : \mathbf{C} : \mathbf{N}}, & \text{se } \gamma > 0 \end{cases} . \quad (3.87)$$

Fazendo-se uso das equações (3.82) e (3.83) em (3.87), o operador tangente elastoplástico fica também expresso por:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C}, & \text{se } \gamma = 0 \\ \mathbf{C} - 2\mu (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu [\mathbf{II} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})], & \text{se } \gamma > 0 \end{cases} . \quad (3.88)$$

### 3.2.2 Modelo elastoplástico $\mathbf{J}_2$ com encruamento isotrópico linear

Para o caso do modelo elastoplástico com encruamento isotrópico linear a condição de escoamento de von Mises passa a ser dada por:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \varsigma - (\sigma_y + q) \leq 0, \quad (3.89)$$

onde  $q = H' \alpha$ .

Adotando-se a *associatividade no encruamento*, onde  $h = G \partial_q f$ , e sendo  $G = H'$ , pode-se reescrever a equação (3.57) como:

$$\dot{q} = -\gamma H' \partial_q f = -\gamma H' (-1) = \gamma H'. \quad (3.90)$$

A lei de evolução para  $\alpha$  é dada por:

$$\dot{\alpha} = -\gamma \partial_q f = \gamma, \quad (3.91)$$

sendo que a lei de evolução do tensor de deformações plásticas é a mesma dada pela equação (3.80).

Em termos da descrição termodinâmica, o modelo de von Mises com encruamento isotrópico é obtido postulando-se que:

$$\alpha \equiv \check{\xi}^P, \quad (3.92)$$

onde  $\check{\xi}^P$  é a *deformação plástica acumulada*, com taxa dada por:

$$\dot{\check{\xi}}^P = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\check{\xi}}^P : \dot{\check{\xi}}^P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\check{\xi}}^P\|,$$

que em vista da equação (3.80), possui a seguinte forma:

$$\dot{\check{\xi}}^P = \gamma. \quad (3.93)$$

Para o caso unidimensional, a taxa da deformação plástica acumulada  $\dot{\check{\xi}}^P$  é dada por  $|\dot{\check{\xi}}^P|$ .

O cálculo do parâmetro de consistência  $\gamma > 0$  também é acrescido de termos referentes ao encruamento, que partindo da equação (3.67), usando-se a equação (3.89) e adotando-se  $r = \partial_{\sigma} f = \mathbf{N}$  (normalidade), juntamente com a associatividade no encruamento ( $h = G \partial_q f$ ), chega-se a forma:

$$\gamma = \frac{\mathbf{N} : \mathbf{C} : \dot{\check{\xi}}}{\mathbf{N} : \mathbf{C} : \mathbf{N} + H'}. \quad (3.94)$$

Sendo válidas as relações  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \|\mathbf{n}\|^2 = 1$  e  $\text{tr}[\mathbf{n}] = 0$ , com  $C$  dado pela equação (3.47) e usando-se as equações (3.82) e (3.83) tem-se:

$$\gamma = \frac{\frac{2}{3} \mathbf{N} : \dot{\check{\xi}}}{1 + \frac{H'}{3\mu}}. \quad (3.95)$$

Com a aplicação de (3.95) em (3.80), obtém-se:

$$\dot{\check{\xi}}^P = \gamma \mathbf{N} = \frac{\frac{2}{3} \mathbf{N} : \dot{\check{\xi}}}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \mathbf{N} = \frac{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \dot{\check{\xi}}}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \quad (3.96)$$

e a taxa para  $\boldsymbol{\sigma}$  passa a ser:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \left[ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \right] = \mathbf{C} : \left[ \mathbf{\Pi} - \frac{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.97)$$

Finalmente, para  $\gamma > 0$ , o operador tangente elastoplástico é:

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C} : \left[ \mathbf{\Pi} - \frac{(n \otimes n)}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \right] = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left[ \mathbf{\Pi} - \frac{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \right]. \quad (3.98)$$

Outra maneira de se obter este mesmo resultado é partir da equação (3.71) e novamente adotar  $r = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f = \mathbf{N}$  (normalidade) e  $h = G \partial_{qf}$  (associatividade), com  $G = H'$ . Assim, obtém-se a seguinte expressão para o operador tangente elastoplástico:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C}, & \text{se } \gamma = 0 \\ \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \mathbf{N} \otimes \mathbf{C} : \mathbf{N}}{\mathbf{N} : \mathbf{C} : \mathbf{N} + \partial_{qf} H' \partial_{qf}}, & \text{se } \gamma > 0 \end{cases}. \quad (3.99)$$

Fazendo-se uso das equações (3.82) e (3.83) em (3.99), o operador tangente elastoplástico fica novamente expresso por:

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C} - \frac{6\mu^2}{3\mu + H'} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left[ \mathbf{\Pi} - \frac{(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}{1 + \frac{H'}{3\mu}} \right], \text{ se } \gamma > 0. \quad (3.100)$$

### 3.2.3 Algoritmo de integração e mapeamento de retorno para elastoplasticidade 3D

O algoritmo para o caso tridimensional é similar ao do caso unidimensional, onde as expressões são apresentadas em forma de passo finito utilizando-se o modelo constitutivo na sua fórmula incremental implícita que conduz ao algoritmo de retorno [5].

## Relação entre os tensores deviatóricos

Para o desenvolvimento deste algoritmo, deve-se obter uma relação entre os tensores deviatóricos  $\mathbf{s}_{n+1}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{teste}$ . Para o passo  $(n+1)$ , a tensão teste é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ teste}) = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \quad (3.101)$$

ou equivalentemente, dada por sua decomposição volumétrica/deviatórica:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste} = \mathbf{s}_{n+1}^{teste} + p_{n+1}^{teste} \mathbf{I}, \quad (3.102)$$

onde  $\mathbf{s}$  e  $p$  denotam, respectivamente, as tensões deviatórica e volumétrica, sendo escritas como:

$$\mathbf{s}_{n+1}^{teste} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ teste} \quad (3.103)$$

$$p_{n+1}^{teste} = \kappa \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ teste}, \quad (3.104)$$

onde  $\mu$  e  $\kappa$  são, respectivamente, os módulos de cisalhamento e volumétrico e os subscritos  $v$  e  $d$  na deformação elástica teste denotam as componentes volumétrica e deviatórica, dadas respectivamente por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ teste} = \text{tr} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ teste}) \quad (3.105)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ teste} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ teste} - \frac{1}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ teste} \mathbf{I}. \quad (3.106)$$

Assim, sendo  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}$  e usando a equação (3.81), a tensão deviatórica  $\mathbf{s}_{n+1}$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{s}_{n+1} = 2\mu \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}_{n+1} \right) = \mathbf{s}_{n+1}^{teste} - 2\mu \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}_{n+1}. \quad (3.107)$$

Seja  $\mathbf{n}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{\|\mathbf{s}_{n+1}\|}$ , pode-se reescrever a equação (3.107) da seguinte forma:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| \mathbf{n}_{n+1} = \|\mathbf{s}_{n+1}^{teste}\| \mathbf{n}_{n+1}^{teste} - 2\mu\Delta\gamma\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{n}_{n+1}$$

e como  $\mathbf{n}_{n+1}^{teste} = \mathbf{n}_{n+1}$ , logo

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| = \|\mathbf{s}_{n+1}^{teste}\| - 2\mu\Delta\gamma\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

### Algoritmo implícito para integração numérica das equações constitutivas elastoplásticas 3D

Assim, tem-se o seguinte algoritmo para elastoplasticidade tridimensional com encruamento isotrópico linear

1) Calcula estado teste (preditor elástico):

Dado  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  e as variáveis de estado em  $t_n$ , calcula o estado elástico teste

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ teste} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ teste} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$$

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \alpha_n$$

$$p_{n+1}^{teste} = \kappa \varepsilon_{v\ n+1}^{e\ teste}$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{teste} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ teste}$$

$$\zeta_{n+1}^{teste} = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{teste})}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{teste} = \mathbf{s}_{n+1}^{teste} + p_{n+1}^{teste} \mathbf{I}$$

2) Testa consistência plástica:

$$\begin{aligned} \text{se } f_{n+1}^{teste} &:= \sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{teste})} - (\sigma_y + H'\alpha_{n+1}^{teste}) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}\|\mathbf{s}_{n+1}^{teste}\|^2} - (\sigma_y + H'\alpha_{n+1}^{teste}) \leq 0, \quad (\text{então passo elástico}) \end{aligned}$$

o conjunto  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}$  e  $C_{n+1}^{ep} = C$ ,

finaliza.

Senão (passo plástico, vá para (3)).

3) Mapeamento de retorno (estado de correção):

Impondo-se a condição

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\|\mathbf{s}_{n+1}\| - (\sigma_y + H'\alpha_{n+1}) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\|\mathbf{s}_{n+1}^{teste}\| - 2\mu\Delta\gamma\sqrt{\frac{3}{2}}\right) - [\sigma_y + H'(\alpha_n + \Delta\gamma)] \\ &= f_{n+1}^{teste} - \Delta\gamma(3\mu + H') = 0, \end{aligned}$$

obtém-se:

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{teste}}{3\mu + H'} > 0$$

$$\mathbf{n}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{teste}}{\|\mathbf{s}_{n+1}^{teste}\|}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1}, \quad \left(\mathbf{N}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{n}_{n+1}\right)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$$

$$p_{n+1} := p_{n+1}^{teste}$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3\mu}{\zeta_{n+1}^{teste}}\right) \mathbf{s}_{n+1}^{teste}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \frac{1}{2\mu} \mathbf{s}_{n+1} + \frac{1}{3} \varepsilon_{v, n+1}^e \mathbf{I}$$

$$\varsigma_{n+1} = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}_{n+1})}$$

4) Calcula o operador tangente elastoplástico algoritmico:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{ep} &= 2\mu \left( \mathbf{1} - \frac{3\mu \Delta\gamma}{\varsigma_{n+1}^{teste}} \right) \left( \boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \\ &\quad + 6\mu^2 \left( \frac{\Delta\gamma}{\varsigma_{n+1}^{teste}} - \frac{1}{3\mu + H'} \right) \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1} + \kappa \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \end{aligned}$$

onde  $\kappa := \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$  é o módulo volumétrico.

Finaliza.

Observação:

$\|\cdot\|$  é a norma euclidiana.



## Capítulo 4

# Mecânica do Dano em Meio Contínuo

A *Mecânica do Dano em Meio Contínuo* (MDC) é um ramo da mecânica dos sólidos em meio contínuo, onde é possível formular modelos constitutivos capazes de descrever a degradação interna de sólidos.

Nas últimas duas décadas, as abordagens da mecânica do dano têm aparecido como um caminho viável para a descrição de dano material distribuído, incluindo degradação da rigidez do material, iniciação, crescimento e coalescência de micro-trincas, bem como a anisotropia do dano [19]. Algumas teorias inelásticas comumente empregadas acoplam, por exemplo, elastoplasticidade e mecânica do dano, em que as equações básicas para o modelo são escritas com base na termodinâmica de processos irreversíveis.

Muitos modelos para estimativas de acúmulo de micro-dano em materiais dúteis têm sido estudados, alguns baseados na micro-mecânica do dano (*modelo de dano micro-mecânico*), enquanto outros estão baseados na teoria de dano contínuo (*modelo de dano fenomenológico*) que é o modelo estudado neste trabalho.

No modelo de dano micro-mecânico, a variável de dano precisa representar algumas médias de defeitos microscópicos que caracterizam o estado de deterioração interna, como por exemplo, a geometria ou a distribuição

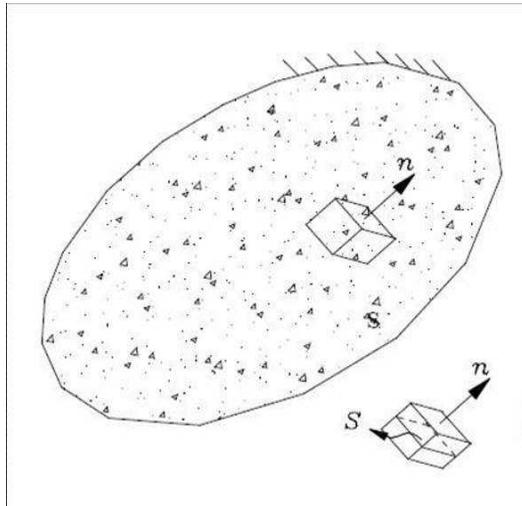
de micro-defeitos. Já no modelo fenomenológico, a variável de dano pode ser definida com base na influência que a degradação interna exerce nas propriedades macroscópicas do material, como por exemplo, o módulo elástico, a tensão limite de escoamento, a densidade de resistência elétrica. No presente estado da MDC tem-se verificado que, em geral, a perda de informação microscópica resultante de aproximações fenomenológicas é compensada pelo ganho no tratamento computacional, experimental e analítico do modelo.

A formulação de dano aqui apresentada está baseada nos princípios da mecânica em meio contínuo, *no princípio de equivalência de deformação* e no conceito de *tensão efetiva*  $\bar{\sigma}$ , tendo L.M. Kachanov como pioneiro neste estudo, no contexto de modelo de dano isotrópico [2, 24, 25].

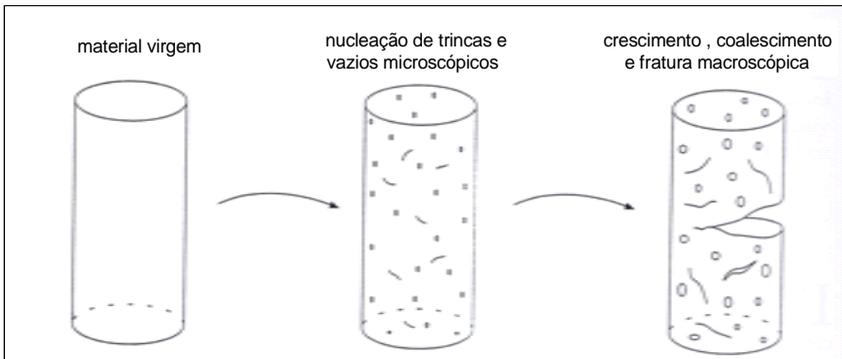
Em engenharia, a mecânica em meio contínuo trata com quantidades definidas em um ponto matemático, que do ponto de vista físico representam médias em um certo volume chamado Elemento de Volume Representativo (EVR), ver Figura 4.1, orientado por uma normal de direção  $\mathbf{n}$ . Para propósito experimental ou análise numérica é comum considerá-lo na ordem de magnitude de  $(0,1 \text{ mm})^3$  para metais [4, 11]. As discontinuidades do dano são "pequenas" com relação ao tamanho do EVR, mas são "grandes" quando comparadas ao espaçamento atômico.

Assim, o dano em materiais sólidos, no contexto mecânico, é a criação, crescimento e coalescência de micro-vãos ou micro-trincas que são discontinuidades em um meio considerado contínuo [11], presentes numa escala menor do que a escala do EVR [12], e podem eventualmente conduzir para a falha macroscópica (Figura 4.2). A evolução do dano pode ser ativada por diferentes mecanismos físicos que dependem fundamentalmente da natureza do material, do tipo de carregamento, da temperatura e de fatores ambientais, tais como exposição a substâncias corrosivas ou radiação.

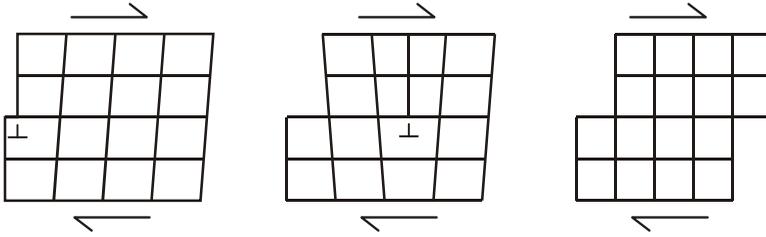
Do ponto de vista físico, as deformações irreversíveis ou plásticas influenciam no dano, porque fazem com que o número de uniões atômicas (micro-escala) decresça, diminuindo a área elementar de resistência, já que a plasticidade está diretamente relacionada a escorregamentos em nível de cristais ou moléculas, que em metais podem ocorrer pelo movimento de



**Figura 4.1:** Elemento de volume representativo de um sólido com dano (Fonte: [28]).



**Figura 4.2:** Representação esquemática de dano dútil em metais (Fonte: [5]).



**Figura 4.3:** Deformação plástica por deslizamento devido a movimento de discordância.

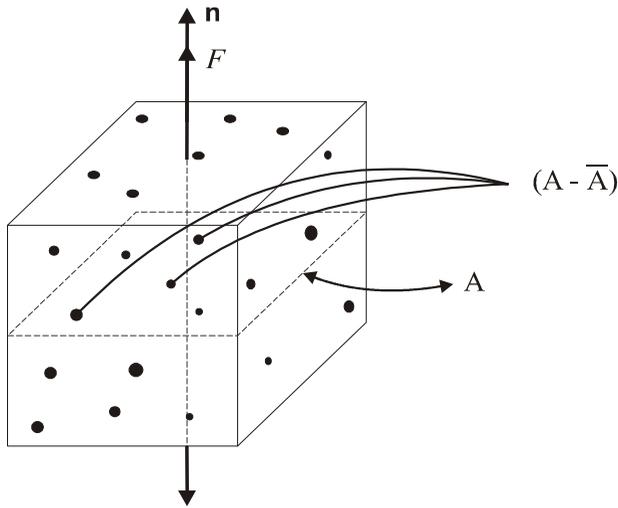
discordâncias (Figura 4.3). Daí inicia-se a trinca em nível de mesoescala, na qual são escritas as equações constitutivas para análise mecânica, formuladas no contexto da termodinâmica.

Segundo [8], o dano introduz dois efeitos nas relações constitutivas do material: a degradação do módulo de Young e a redução da superfície de escoamento.

Muitos pesquisadores tendem a adotar uma variável de dano escalar isotrópica, que é tradicional e mais simples. No entanto, para uma aplicação mais realista dos princípios da mecânica do dano, é necessário considerar a anisotropia do dano, onde o fenômeno anisotrópico da distribuição de micro-danos num material é interpretado usando um tensor simétrico de segunda ordem. Neste caso, diferentes níveis de dano são relacionados a direções principais, e um simples parâmetro de dano escalar não é mais suficiente para quantificar o dano em todas as direções [14].

## 4.1 Dano unidimensional

O primeiro modelo de dano unidimensional baseado nos princípios da MDC e conceitos de tensão efetiva foi proposto por Kachanov (1958) para falha por fluência em metais, com carregamento unidimensional. Este modelo não apresentava um claro significado físico para o dano, que foi dado mais tarde por Rabotnov (1963), propondo a redução da área de um plano da seção transversal que corta um EVR, devido a micro-trincas, como uma medida satisfatória do estado de dano interno [10, 5].



**Figura 4.4:** EVR danificado em 1 D.

Neste sentido, para casos gerais onde micro-vãos e micro-trincas podem existir, a variável de dano é fisicamente definida pela densidade da superfície de micro-trincas e intersecções de micro-vãos sobre um plano de seção transversal  $A$  cortando o EVR (Figura 4.4). Para um plano com normal  $\mathbf{n}$ , onde esta densidade é máxima [11], tem-se:

$$D_{(\mathbf{n})} = \frac{A - \bar{A}}{A}, \quad (4.1)$$

onde  $\bar{A}$  é a área efetiva de resistência da seção transversal do EVR, correspondente a área  $A$ .

Para a hipótese de dano isotrópico, a variável escalar de dano  $D_{(\mathbf{n})}$  não depende da normal, como proposto por Kachanov. Logo, considerando-se o EVR de um corpo danificado, sujeito a uma força trativa  $F$ , a variável de dano  $D$  é definida como um escalar da seguinte maneira:

$$D = \frac{A - \bar{A}}{A} = \frac{A_D}{A}, \quad (4.2)$$

onde  $A_D$  é a área danificada e  $\bar{A}$  é a área que efetivamente resiste ao

carregamento. Daí, segue desta definição que o valor da variável escalar  $D$  é limitada por 0 e 1:

$$0 \leq D \leq 1; \quad (4.3)$$

onde  $D = 0$  corresponde ao material do elemento sem dano e  $D = 1$  é um valor crítico que implica na ruptura do elemento em duas partes.

A tensão uniaxial da barra  $\sigma$  é facilmente encontrada pela fórmula  $F = \sigma A$ :

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (4.4)$$

A Figura 4.5 mostra uma barra cilíndrica sujeita a tração uniaxial nas suas configurações danificada e efetiva sem dano (íntegra). Como nas duas configurações a barra é sujeita a mesma força de tração, considerando-se a configuração sem dano, obtém-se a seguinte equação para a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$ , relacionada a superfície que resiste efetivamente ao carregamento:

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}}. \quad (4.5)$$

Introduzindo-se a variável de dano  $D$ , tem-se:

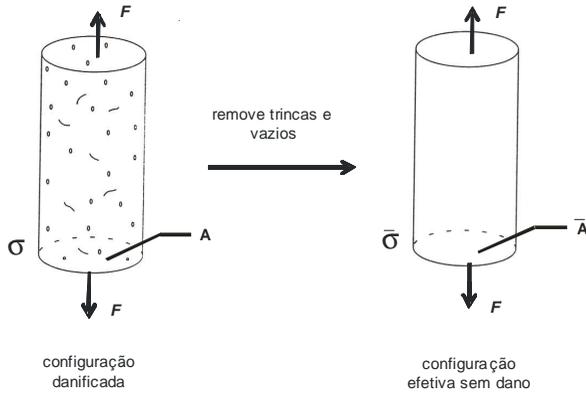
$$\bar{\sigma} = \frac{F}{A(1-D)} = \frac{\sigma}{1-D}. \quad (4.6)$$

Como a área íntegra é menor do que a nominal, para a mesma força aplicada a tensão efetiva num meio danificado resulta comparativamente maior que a tensão nominal.

Em estudos mais recentes, a MDC foi formalizada por Lemaitre e Chaboche (1985), com base numa metodologia fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis, usando a degradação do módulo elástico como a medida macroscópica de dano (modelo fenomenológico).

Para a formulação das relações constitutivas em meios contínuos com dano, baseia-se em alguns princípios descritos a seguir [13, 10, 4].

a) Princípio geral de equivalência de resposta constitutiva: é postulado na mesoescala afim de evitar a análise micro-mecânica. Este princípio esta-



**Figura 4.5:** Barra cilíndrica sujeita a tração uniaxial: trincas e vazios são removidos simultaneamente (Fonte: [2]).

belece que a lei constitutiva do meio danificado é obtida da lei constitutiva da parte íntegra do meio danificado, onde o tensor de tensões é substituído pelo tensor de tensão efetiva e o tensor linear de deformação pelo tensor de deformação efetiva.

Para o caso de tração uniaxial, a relação constitutiva do meio danificado é a lei de Hooke da elasticidade linear:

$$\sigma = \tilde{E} \varepsilon \tag{4.7}$$

onde  $\varepsilon$  é a deformação e  $\tilde{E}$  é o módulo de elasticidade do meio danificado (módulo de Young). E considerando o princípio geral de equivalência de resposta constitutiva, a mesma relação constitutiva elástica é aplicada à parte íntegra do meio danificado (estado efetivo):

$$\bar{\sigma} = E \bar{\varepsilon}, \tag{4.8}$$

onde  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  são os equivalentes efetivos de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  respectivamente e  $E$  é o

módulo de elasticidade da parte íntegra do meio danificado.

O cálculo do módulo de elasticidade  $\tilde{E}$  depende da escolha dos princípios de equivalência mostrados a seguir.

b) Princípio de equivalência de energia: Este princípio considera que a energia de deformação é a mesma tanto no meio danificado, quanto na parte íntegra do meio danificado. Assim, sendo a função escalar de *energia de deformação elástica*  $U$ , no estado uniaxial, definida por:

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.9)$$

pela hipótese de *equivalência de energia elástica*, proposta por Sidoroff [10],  $U$  é igualada a energia de deformação elástica efetiva, como segue:

$$U = \bar{U} \longrightarrow \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.10)$$

A partir da equação (4.10) e usando a equação (4.6), obtém-se as seguintes equações para  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  e  $\tilde{E}$ , relacionadas a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $E$ , respectivamente:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - D) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.11)$$

$$\tilde{E} = (1 - D)^2 E. \quad (4.12)$$

Rearranjando a equação (4.12), obtém-se:

$$D = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{E}}{E}},$$

onde  $E$  é constante para o material efetivo e  $\tilde{E}$  varia com o dano.

c) *Princípio de equivalência de deformação*: Este princípio estabelece que o estado de deformação do meio danificado é o mesmo da parte íntegra do meio danificado, cada qual com seu módulo de elasticidade:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\tilde{E}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E(1 - D)}, \quad (4.13)$$

com

$$\tilde{E} = (1 - D) E \quad (4.14)$$

$$D = \frac{E - \tilde{E}}{E} = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}. \quad (4.15)$$

d) *Princípio de equivalência de tensão*: Este princípio estabelece que o estado de tensão do meio danificado é o mesmo da parte íntegra do meio danificado, cada qual com seu módulo de elasticidade:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{E} \boldsymbol{\varepsilon} = E \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = E (1 - D) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.16)$$

com  $\tilde{E}$  e  $D$  idênticos aos das equações (4.14) e (4.15), respectivamente.

Pode-se verificar pela equação (4.15) que a variável de dano é definida baseando-se na influência que a degradação interna exerce nas propriedades macroscópicas do material, já que o modelo de dano estudado é o fenomenológico. Em condições isotrópicas, a classe de modelos de dano apresentada por Lemaitre e Chaboche [5] também usa esta mesma equação para o dano.

Na mesoescala, a ruptura do material ocorre quando as trincas ocupam toda a superfície do EVR, ou seja, quando  $D = 1$ . O início da mesotrinca é definido pelo valor crítico de dano  $D_c$ , que é um parâmetro determinado experimentalmente e sendo assim, depende do material e das condições de carregamento [4].

O final da decoesão dos átomos é caracterizado por um valor crítico de tensão efetiva  $\sigma_\infty$ , sendo a máxima tensão que poderá ser aplicada no material:

$$\sigma_\infty = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - D_c)}. \quad (4.17)$$

Praticamente  $\sigma_\infty$  pode ser aproximada pelo maior valor de tensão  $\sigma_u$  (tensão última) do diagrama tensão-deformação, que é mais fácil de encontrar, mas é sempre menor que  $\sigma_\infty$ . Logo, o valor crítico do dano, ocorrendo para uma tensão unidimensional  $\boldsymbol{\sigma}$ , pode ser escrito como:

$$D_c \simeq 1 - \frac{\sigma}{\sigma_u}. \quad (4.18)$$

Usualmente o  $D_c$  varia entre 0,2 e 0,5. Esta relação, aplicada a um teste de tração pura monotônica, que é tomada como uma referência, define o correspondente valor crítico de dano  $D_{1c}$  considerado uma característica do material:

$$D_{1c} = 1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_u}, \quad (4.19)$$

onde  $\sigma_R$  é a tensão de ruptura.

Para o caso de tração pura, a ocorrência de micro-trincas, pela qual se inicia o dano, só ocorre quando a deformação plástica atinge um certo valor  $\varepsilon_D$ , chamado de do *limiar de dano*, ou seja:

$$\varepsilon^P < \varepsilon_D \longrightarrow D = 0. \quad (4.20)$$

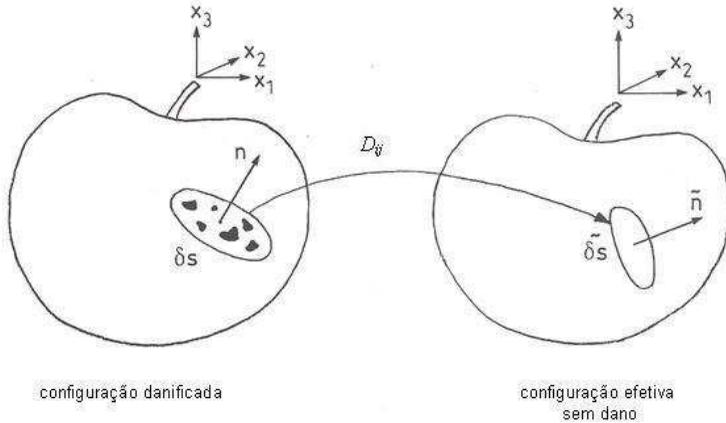
Com relação ao dano acoplado à plasticidade, Lemaitre (1983) propôs um modelo puramente fenomenológico para o dano dútil isotrópico em metais com variável de dano escalar. Neste modelo, o conceito de tensão efetiva é usado para a união entre plasticidade e dano, isto é, a tensão real é substituída pela tensão efetiva no critério de escoamento de von Mises. Desta forma, a função de escoamento para o caso de encruamento isotrópico linear é escrita como:

$$f = |\bar{\varsigma}| - (\sigma_y + H'\alpha), \quad (4.21)$$

onde  $\bar{\varsigma} = \frac{\varsigma}{1-D}$  é a *tensão equivalente efetiva*, com  $\varsigma$  dada pela equação (3.73),  $\sigma_y$  é a tensão limite de escoamento,  $H'$  é o módulo plástico de encruamento isotrópico e  $\alpha$  a variável interna de encruamento isotrópico.

## 4.2 Dano tridimensional

Desde o desenvolvimento original de Kachanov e Rabotnov, não levou muito tempo para que o conceito de variável de dano interno fosse generalizado para situações tridimensionais [5]. Fisicamente, a variável de dano



**Figura 4.6:** Dano físico (Fonte: [4]).

é definida como a densidade da superfície de micro-trincas sobre um plano do EVR de seção transversal  $\delta S$  (Figura 4.6). Para um plano de normal  $\mathbf{n}$ , tem-se:

$$D_{(\mathbf{n})} = \frac{\delta S - \delta \tilde{S}}{\delta S} = \frac{\delta S_D}{\delta S},$$

onde  $\delta \tilde{S}$  representa a área íntegra num meio danificado e  $\delta S_D$  é a superfície danificada.

Para o estudo de dano tridimensional em metais dúteis acoplado com plasticidade, será considerado o modelo de Lemeitre para dano isotrópico e ortotrópico [11, 5], baseado no conceito de tensão efetiva e na hipótese de equivalência de deformação.

Neste caso, a forma generalizada da relação constitutiva estabelece uma relação entre tensores de segunda ordem de tensão e de deformação por meio de um tensor constitutivo de rigidez elástica de quarta ordem.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} : \varepsilon_{kl}. \tag{4.22}$$

### 4.2.1 Termodinâmica do dano

O ponto de partida dessa teoria é a hipótese de que a *energia livre*, tomada como *potencial termodinâmico*, é uma função do conjunto de *variáveis de estado internas*  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha, D\}$  [5], isto é:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha, D), \quad (4.23)$$

onde  $D$  e  $\alpha$  são variáveis escalares internas associadas ao dano isotrópico e ao encruamento isotrópico, respectivamente.

### Potencial de dissipação e leis de evolução

A dissipação, que precisa ser positiva para satisfazer a segunda lei da termodinâmica, é escrita através da desigualdade de Clausius-Duhem, da seguinte forma [13]:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - q\dot{\alpha} - Y\dot{D} \geq 0.$$

Considera-se um *potencial de dissipação*  $\varphi$ , que é função das *variáveis associadas*  $\{\boldsymbol{\sigma}, q, Y\}$  das quais derivam as leis de evolução para  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha, D\}$  [21]. Admite-se sua decomposição em uma parcela relativa aos efeitos de plastificação e encruamento  $\varphi^p$  e outra relativa a danificação  $\varphi^d$ ,

$$\varphi = \varphi^p(\boldsymbol{\sigma}, q; D) + \varphi^d(Y; D). \quad (4.24)$$

Do potencial de dissipação são derivadas as leis que governam a evolução das *variáveis internas*  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^p, \alpha, D\}$ , que para o caso de dano acoplado com plasticidade, são escritas como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.25)$$

$$\dot{\alpha} = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial q}, \quad (4.26)$$

$$\dot{D} = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial Y}. \quad (4.27)$$

## 4.2.2 Dano isotrópico

Se o dano é isotrópico, então a variável de dano  $D_{(\mathbf{n})}$  é um escalar e apresenta o mesmo valor em todas as direções [27], não dependendo da normal  $\mathbf{n}$ .

Segundo a hipótese de decomposição entre elasticidade-dano e encruamento plástico, a energia livre pode ser escrita como a seguinte soma [5]:

$$\psi = \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \psi^p(\alpha), \quad (4.28)$$

onde  $\psi^{ed}$  e  $\psi^p$  são, respectivamente, a contribuição de elasticidade-dano e a contribuição plástica para a energia livre. De acordo com o princípio de equivalência de deformação, o potencial de elasticidade-dano é dado por [5, 11]:

$$\rho\psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : (1 - D)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1 + \nu}{2E} \frac{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}}{1 - D} - \frac{\nu}{2E} \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})^2}{1 - D}, \quad (4.29)$$

ou em termos das tensões deviatória e volumétrica:

$$\rho\psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) = \frac{1 + \nu}{2E} \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{1 - D} + \frac{3(1 - 2\nu)}{2E} \frac{p^2}{1 - D} = \frac{\varsigma^2 R_v}{2E(1 - D)}, \quad (4.30)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor de módulo elástico isotrópico do meio íntegro,  $\rho$  é a densidade do material,  $p = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  é a tensão volumétrica,  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}$  a tensão deviatória,  $\varsigma = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}}$  a tensão equivalente de von Mises,  $\mu$  e  $\kappa$  são o segundo coeficiente de Lamé e o módulo volumétrico, respectivamente,  $\nu$  é o coeficiente de poisson,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $R_v$  é a *função de triaxialidade*, dada por:

$$R_v = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{p}{\varsigma}\right)^2. \quad (4.31)$$

Na equação acima,  $\frac{p}{\varsigma}$  é a razão de triaxialidade, que tem um papel importante na ruptura dos materiais, já que quanto maior esta razão,

menor a ductilidade do material [4].

Para este potencial particular, a lei da elasticidade é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (1 - D) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = (1 - D) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (4.32)$$

e, inversamente,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \rho \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (1 - D)^{-1} \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} && \text{ou} \\ \varepsilon_{ij}^e &= (1 - D)^{-1} C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} = \frac{1+\nu}{(1-D)E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1-D)E} \sigma_{kk} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

O tensor tensão efetivo  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  pode ser escrito como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - D)} \quad \text{ou} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(1 - D)} \quad (4.34)$$

e pelo princípio geral de equivalência da resposta constitutiva, tem-se [13]:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e. \quad (4.35)$$

A relação constitutiva do meio danificado contínuo é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (4.36)$$

ou inversamente,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.37)$$

onde  $\tilde{\mathbf{C}}$  é o *tensor de módulo elástico efetivo*, que considera o efeito da danificação. Com a hipótese de equivalência de deformação, igualando-se as equações (4.33) e (4.37), obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{C}} = (1 - D) \mathbf{C}, \quad (4.38)$$

com a variável de dano tomando valores no intervalo  $[0, 1]$ .

Assim como visto no caso de dano unidimensional, além do princípio

de equivalência de deformação, também podem ser usados outros dois princípios básicos para o cálculo do tensor  $\tilde{\mathbf{C}}$ , citados abaixo:

1) Princípio de equivalência de tensão, na qual obtém-se o mesmo resultado da equação (4.38).

2) Princípio de equivalência de energia de deformação, com

$$\tilde{\mathbf{C}} = (1 - D)^2 \mathbf{C}. \quad (4.39)$$

Entre os três tipos de equivalência mencionados, o de equivalência de deformação é usado com mais frequência.

A *força termodinâmica* relacionada à variável interna de dano também é definida pelo potencial termodinâmico e é dada por [5, 11]:

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (4.40)$$

correspondente a:

$$Y = -\frac{1}{2} \left. \frac{dW^{ed}}{dD} \right|_{\boldsymbol{\sigma} = \text{const.}}, \quad (4.41)$$

onde  $W^{ed}$  é a energia de deformação elástica do meio danificado. Desta forma, usando a inversa da lei tensão-deformação (eq. (4.33)), tem-se:

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{1}{2(1-D)^2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \\ &= -\left( \frac{\varsigma^2}{6\mu(1-D)^2} + \frac{p^2}{2\kappa(1-D)^2} \right) = -\frac{\varsigma^2 R_v}{2E(1-D)^2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Comumente conhecido como a *taxa de densidade de energia liberada pelo dano*,  $(-Y)$  corresponde a variação da densidade de energia interna devido ao crescimento do dano sob tensão constante.

Quanto ao potencial de dissipação, suas parcelas relativas aos efeitos de plastificação e encruamento  $\varphi^p$  e danificação  $\varphi^d$ , são dadas por:

$$\varphi^p(\boldsymbol{\sigma}, q, D) = f(\boldsymbol{\sigma}, q, D) \quad (4.43)$$

$$\varphi^d(Y, D) = \frac{r}{(1-D)(s+1)} \left( \frac{-Y}{r} \right)^{s+1}, \quad (4.44)$$

sendo que  $r$  e  $s$  são parâmetros do material, definidas mediante ensaios experimentais. Aqui é adotada a hipótese de plasticidade associada, onde o critério de escoamento é usado como potencial plástico.

Para a função de escoamento  $f$ , é adotada a seguinte forma de von Mises:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q, D) = \bar{\zeta} - (\sigma_y + q), \quad (4.45)$$

onde  $\bar{\zeta} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\mathbf{s}} : \bar{\mathbf{s}}} = \sqrt{3 J_2(\bar{\mathbf{s}})}$ ,  $q = H' \alpha$  e  $\sigma_y$  é a tensão limite de escoamento inicial do material.

A regra da normalidade (hipótese clássica de materiais padrão generalizados) com relação a  $\varphi$  pode ser considerada válida, e obtêm-se as seguintes equações de evolução:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \frac{\partial \varphi^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \mathbf{N}, \quad (\text{regra do escoamento}) \quad (4.46)$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro de consistência,  $\mathbf{N}$  é o tensor de escoamento plástico [5]:

$$\mathbf{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{(1-D) \|\mathbf{s}\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{(1-D) \sqrt{2 J_2(\mathbf{s})}} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{(1-D) \sqrt{3 J_2(\mathbf{s})}}, \quad (4.47)$$

e  $J_2$  é o segundo invariante do tensor deviatórico de tensões  $\mathbf{s}$ .

$$\dot{\alpha} = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial q} = -\gamma \frac{\partial \varphi^p}{\partial q} = \gamma. \quad (4.48)$$

Fazendo-se uso da regra do escoamento, dada pela equação (4.46), a lei de evolução da deformação plástica acumulada é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\gamma}{1-D} \quad (4.49)$$

e a lei de evolução do dano é escrita como:

$$\dot{D} = -\gamma \frac{\partial \varphi^d}{\partial Y} = \frac{\gamma}{(1-D)} \left( \frac{-Y}{r} \right)^s = \left( \frac{-Y}{r} \right)^s \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (4.50)$$

Substituindo (4.42) em (4.50),

$$\dot{D} = \left( \frac{\zeta^2 R_v}{2E_r (1-D)^2} \right)^s \dot{\zeta}^{\cdot P}. \quad (4.51)$$

Este modelo admite que o dano evolua somente após ser atingido certo valor para a deformação plástica acumulada  $\tilde{\varepsilon}^P$ , sendo que este valor crítico é chamado *limiar de dano* e é denotado por  $\varepsilon_D$ . Para carregamento monotônico, o limiar de dano  $\varepsilon_D$  é obtido através de teste de tração pura. Assim, a lei de evolução do dano (4.51) pode ser modificada para:

$$\dot{D} = H(\tilde{\varepsilon}^P - \varepsilon_D) \left( \frac{-Y}{r} \right)^s \dot{\zeta}^{\cdot P}, \quad \tilde{\varepsilon}^P > \varepsilon_D, \quad (4.52)$$

sendo que  $\tilde{\varepsilon}^P = \alpha$  enquanto não houver dano e a função de Heaviside  $H$  é definida como:

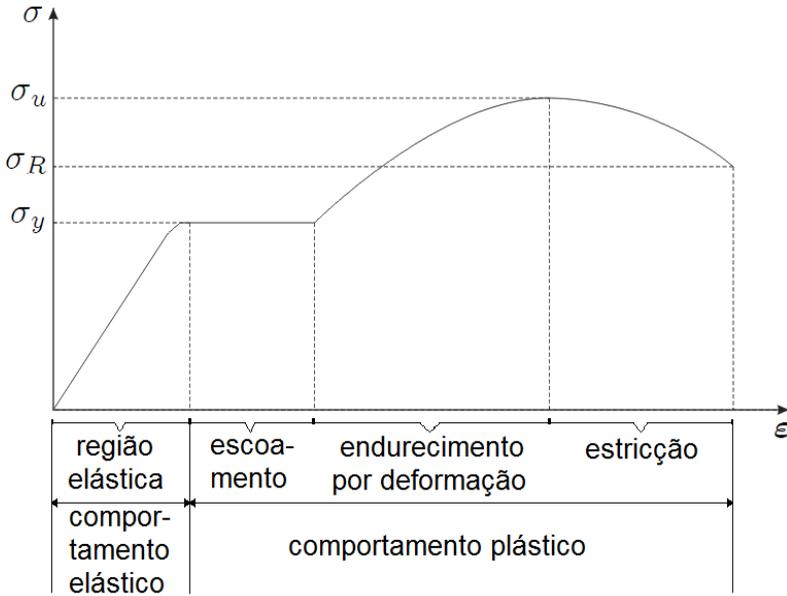
$$H(a) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } a \geq 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases}, \quad \text{para algum escalar } a. \quad (4.53)$$

A condição de iniciação de uma meso-trinca é alcançada quando a variável escalar de dano atinge o valor crítico  $D_c$ , que no caso unidimensional corresponde a um valor crítico de deformação plástica acumulada, chamada de deformação plástica de ruptura  $\varepsilon_R$ . O termo  $D_c$  é considerado uma constante do material que não é fácil de medir. Em um teste de tração pura, quando o dano se desenvolve no encruamento saturado, a tensão decresce da tensão última  $\sigma_u$  até a tensão de ruptura  $\sigma_R$ , de tal forma que para o caso de dano isotrópico tem-se [11]

$$D_c = 1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_u}, \quad (4.54)$$

onde  $\sigma_R$  é a tensão de ruptura do material e  $\sigma_u$  é a tensão última (ver Figura 4.7). Para muitos materiais a equação (4.54) conduz a valores de dano crítico entre 0,2 e 0,5.

Usualmente considera-se que o dano dútil ocorra quando as deformações são grandes o suficiente para considerar o material como perfeitamente plástico (encruamento saturado). Então, em (4.51) pode-se consid-



**Figura 4.7:** Diagrama tensão-deformação para material dútil (sem escala).

erar [21]

$$\frac{s}{(1-D)} = \text{const.} = \sigma_u. \quad (4.55)$$

Para casos multi-dimensionais, experimentos mostram que  $s = 1$  e assim, o único coeficiente dependente do material na equação (4.51) é  $\sigma_u^2/2Er$ , que pode ser identificado de experimentos monotônicos uniaxiais. Por simplificação, para o caso multiaxial, os valores do limiar de dano  $\epsilon_D$  e da deformação plástica de ruptura  $\epsilon_R$ , são considerados os mesmos do caso unidimensional e podem ser determinados em ensaios uniaxiais. Neste caso, a função de triaxialidade é unitária ( $R_v = 1$ ) o modelo (4.51) reduz-se a

$$\dot{D} = \left( \frac{\sigma_u^2}{2Er} \right) \dot{\epsilon}. \quad (4.56)$$

Integrando (4.56), com uma condição inicial definida pelo limiar de dano  $\varepsilon_D$ , tem-se:

$$D = \left( \frac{\sigma_u^2}{2E_r} \right) (\varepsilon^p - \varepsilon_D), \quad (4.57)$$

com  $D = 0$  se  $\varepsilon^p \leq \varepsilon_D$ .

Supondo  $\varepsilon^p = \varepsilon_R$  se  $D = D_c$ , tem-se [22]:

$$D_c = \left( \frac{\sigma_u^2}{2E_r} \right) (\varepsilon_R - \varepsilon_D). \quad (4.58)$$

A equação (4.58) pode ser posta como

$$\frac{\sigma_u^2}{2E_r} = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \quad (4.59)$$

e substituindo (4.59) em (4.51), tomando  $s = 1$ , obtém-se:

$$\dot{D} = \left( \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \right) R_v \dot{\varepsilon}^p, \quad (4.60)$$

onde o dano evolui linearmente com a deformação plástica acumulada.

O módulo tangente algoritmico, ou seja, o operador tangente consistente com o algoritmo de integração relativo ao dano isotrópico é apresentado na subseção 4.2.4.

### 4.2.3 Dano ortotrópico

O dano é freqüentemente não isotrópico, devido a micro-trincas mais ou menos perpendiculares à maior tensão principal positiva. Assim, a densidade da superfície de micro-defeitos em um plano com normal  $\mathbf{n}$  age através de um operador que transforma a superfície  $\delta S$  em uma área menor, mas contínua  $\delta \tilde{S} = \delta S - \delta S_D$  e  $\mathbf{n}$  em outra normal  $\tilde{\mathbf{n}}$  (Figura 4.6). Esta nova configuração é definida pela Mecânica do Dano em Meio Contínuo (MDC) como *configuração contínua efetiva* [11].

Para manter o mesmo significado físico citado no início do capítulo, o dano age através do operador  $(\mathbf{I} - \mathbf{D})$  e

$$(\delta_{ij} - D_{ij}) n_j \delta S = \tilde{n}_i \delta \tilde{S},$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\mathbf{D}$  é um tensor de dano simétrico de segunda ordem.

Como não é considerada a distorção da superfície  $\delta S$ , induz-se a propriedade de ortotropia, consistente com o fato de que o dano é governado pela deformação plástica representada pelo tensor de segunda ordem  $\varepsilon^p$ . Para considerar a ortotropia do dano, será usada uma extensão do modelo de dano dútil isotrópico descrito anteriormente.

O dano geral anisotrópico é representado por um tensor de quarta ordem, mas para aplicações práticas é frequentemente usado um tensor de segunda ordem simétrico [12], assim como os tensores de tensões e deformações. Como mostrado por observações microscópicas, o tensor de dano é principalmente dirigido pela deformação plástica, que o faz ortotrópico [18]. Para este caso de dano é bem mais complicado assegurar uma boa representação física e ainda sua compatibilidade com a termodinâmica. De fato, a tensão efetiva com a representação de um tensor de dano de segunda ordem é uma aproximação da tensão efetiva exata deduzida da representação geral do dano por um tensor de quarta ordem.

Sendo que o dano modifica as propriedades elásticas dos materiais, um tensor de elasticidade efetivo de quarta ordem é comumente introduzido como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (4.61)$$

e utilizando o princípio de equivalência de deformação, obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1} : \mathbf{C} \quad (4.62)$$

que é representado no caso isotrópico por  $\tilde{\mathbf{C}} = (1 - D) \mathbf{C}$ .

$\mathbf{M}$  é um tensor de quarta ordem, que também define o tensor tensão efetivo:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} \text{ ou } \bar{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (4.63)$$

que generaliza a definição isotrópica  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D}$ . Para um estado genérico de deformação e dano, também seguindo o modelo de equivalência de defor-

mação, o tensor efetivo de tensões é usualmente não-simétrico, e embora hajam diferentes métodos para simetrizar  $\bar{\sigma}$ , neste trabalho será utilizado um método representado pela seguinte equação [11]:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \text{dev}(H_{ik}s_{kl}H_{lj}) + \frac{p}{1-d_H}\delta_{ij}, \quad (4.64)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,

$$d_H = \eta D_H, \quad (4.65)$$

na qual  $\eta$  é um parâmetro do material introduzido por Lemaitre [15] associado com a variação do coeficiente de Poisson devido ao dano. O parâmetro  $\eta$  depende do material e frequentemente para metais  $\eta \approx 3$ .  $D_H$  é dado por:

$$D_H \equiv \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) = \frac{1}{3} D_{kk}. \quad (4.66)$$

O tensor de segunda ordem  $\mathbf{H}$  é chamado de *tensor de dano efetivo*, dado por:

$$H_{ij} \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{D})_{ij}^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.67)$$

Logo, a isotropia representa o caso limite onde  $\mathbf{D} = D\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{I}/\sqrt{1-D}$  e  $\eta = 1$ .

O tensor  $\mathbf{M}$  pode ser escrito como:

$$M_{ijkl} = H_{ik}H_{lj} - \frac{1}{3} [H_{kl}^2\delta_{ij} + H_{ij}^2\delta_{kl}] + \frac{1}{9} H_{pp}^2 \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{3(1-d_H)} \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (4.68)$$

e da inversa de (4.63), o tensor de tensões  $\sigma$  também pode ser escrito como:

$$\sigma = \mathbf{M}^{-1} : \bar{\sigma} \text{ ou } \sigma_{ij} = M_{ijkl}^{-1} \bar{\sigma}_{kl},$$

onde

$$M_{ijkl}^{-1} = H_{ik}^{-1} H_{lj}^{-1} - \frac{(\delta_{ij} - D_{ij})(\delta_{kl} - D_{kl})}{3(1 - \frac{1}{3}D_{kk})} + \frac{1}{3} \left( 1 - \eta \frac{1}{3} D_{pp} \right) \delta_{ij} \delta_{kl},$$

com  $\mathbf{H}^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{\frac{1}{2}}$ .

O potencial  $\rho\psi^{ed}$  (equação (4.30) para o caso isotrópico) representado pelo tensor  $\mathbf{D}$  é [11]:

$$\rho\psi^{ed} = \frac{1 + \nu}{2E} H_{ij} s_{jk} H_{kl} s_{li} + \frac{3(1 - 2\nu)}{2E} \frac{p^2}{1 - d_H}. \quad (4.69)$$

Com relação às parcelas deviatórica e volumétrica, o tensor de tensões efetivo pode ser escrito como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{s}} + \bar{p}\mathbf{I}, \quad (4.70)$$

na qual  $\bar{\mathbf{s}}$  e  $\bar{p}$  são, respectivamente, a tensão efetiva deviatórica e volumétrica, definidas como:

$$\bar{\mathbf{s}} \equiv \text{dev} [\mathbf{H}\mathbf{s}\mathbf{H}], \quad (4.71)$$

$$\bar{p} \equiv \frac{p}{1 - d_H}. \quad (4.72)$$

O tensor taxa de densidade de energia liberada pelo dano  $-\mathbf{Y}$  é dado por  $-Y_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D_{ij}}$ , mas é substituído na lei de evolução do dano pelo escalar  $-\bar{Y}$  chamado de *densidade de energia elástica efetiva*, que pode ser escrito como uma função da tensão efetiva:

$$-\bar{Y} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^e = \frac{\bar{\zeta}^2}{6\mu} + \frac{\bar{p}^2}{2\kappa} = \frac{\bar{\zeta}^2 \bar{R}_v}{2E}. \quad (4.73)$$

onde  $C_{ijkl}$  são as componentes do tensor de elasticidade  $\mathbf{C}$ ,  $E$  é o módulo elástico e  $\bar{R}_v$  é a *função de triaxialidade efetiva*:

$$\bar{R}_v = \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\zeta}} \right)^2. \quad (4.74)$$

com

$$\bar{\zeta} = (\mathbf{HsH})_{eq} = \left[ \frac{3}{2} \text{dev}(\mathbf{HsH}) : \text{dev}(\mathbf{HsH}) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.75)$$

onde  $(\cdot)_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{dev}(\cdot) : \text{dev}(\cdot)}$ .

Segundo [15], a lei de evolução do dano anisotrópico é uma simples extensão do caso isotrópico, se for considerado o seguinte potencial de dissipação:

$$\varphi = f + \varphi^d = f + \left( -\frac{\bar{Y}}{r} \right)^s (-Y_{ij}) \left| \frac{d\varepsilon^p}{d\alpha} \right|_{ij}, \quad (4.76)$$

onde  $|\cdot|$  aplicado a um tensor significa o valor absoluto em termos das componentes principais,  $\alpha$  é a variável interna associada ao encruamento isotrópico,  $f$  é a função de escoamento de von Mises dada por:

$$f = \bar{\zeta} - (\sigma_y + q), \quad (4.77)$$

A lei de evolução da deformação plástica é:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \mathbf{N}^x, \quad (4.78)$$

onde são definidas as normais [11]:

$$\mathbf{N}^x = \text{dev}(\mathbf{Hn}^x \mathbf{H}) \quad (4.79)$$

$$\mathbf{n}^x = \frac{3 \bar{\mathbf{s}}}{2 \bar{\zeta}} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\mathbf{s}}}{\sqrt{3J_2(\bar{\mathbf{s}})}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\mathbf{s}}}{\|\bar{\mathbf{s}}\|}. \quad (4.80)$$

Para o caso de dano isotrópico, a normal  $\mathbf{N}^x$  é igual à normal de escoamento  $\mathbf{N}$  (equação (4.47)).

A evolução da variável de escoamento continua com sua forma usual:

$$\dot{\alpha} = \gamma$$

e a taxa da deformação plástica acumulada é:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{N}^x : \mathbf{N}^x} \gamma. \quad (4.81)$$

De acordo com o contexto da termodinâmica, a lei de evolução para o tensor dano deriva do potencial de dissipação, onde segue a mesma direção da deformação plástica:

$$\dot{\mathbf{D}} = -\gamma \frac{\partial \varphi^d}{\partial \mathbf{Y}} = \dot{\alpha} \left( -\frac{\bar{\mathbf{Y}}}{r} \right)^s \left| \frac{d\varepsilon^p}{d\alpha} \right|, \text{ com } \gamma = \dot{\alpha}. \quad (4.82)$$

Ou finalmente,

$$\dot{\mathbf{D}} = \left( -\frac{\bar{\mathbf{Y}}}{r} \right)^s \dot{\tilde{\varepsilon}}^p, \dot{\tilde{\varepsilon}}^p > \varepsilon_D. \quad (4.83)$$

sendo que  $\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \alpha$  enquanto não houver dano e  $\dot{\tilde{\varepsilon}}^p$  é a taxa da deformação plástica absoluta definida como:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \sum_{i=1}^3 |\dot{\varepsilon}_i^p| e_i^p \otimes e_i^p, \quad (4.84)$$

onde  $\dot{\varepsilon}_i^p$  são os autovalores do tensor taxa de deformação plástica  $\dot{\varepsilon}^p$  e  $\{e_i^p\}$  é a base ortonormal de autovetores da  $\dot{\varepsilon}^p$ . Se o material não estava danificado antes do carregamento, as direções principais da taxa do dano coincidem com as da taxa de deformação plástica. Observa-se que utilizando-se a lei de evolução do dano apresentada na equação (4.83), no sistema de eixos Cartesiano global, as componentes do tensor de dano  $D_{ij}$  serão positivas quando  $i = j$  e podem assumir valores positivos ou negativos se  $i \neq j$ . Já nas direções de ortotropia (direções principais de dano), as componentes de dano serão todas positivas.

Além disso, o dano existe somente após ser atingido um limiar escrito em termos da deformação plástica acumulada, ou seja:

$$\dot{\mathbf{D}} = 0, \text{ se } \dot{\tilde{\varepsilon}}^p < \varepsilon_D. \quad (4.85)$$

De acordo com a definição física de dano, a condição de iniciação de uma meso-trinca é alcançada quando a intensidade do dano em um certo

plano atinge o valor crítico  $D_c$  e isto ocorre quando o maior valor principal de dano  $D_I$  atinge  $D_c$  [18]:

$$\max D_I = D_c \longrightarrow \text{início da meso-trinca.} \quad (4.86)$$

Para o caso de dano anisotrópico, um valor aproximado para o dano crítico é  $D_c = 0,5$ .

#### 4.2.4 Algoritmo de integração e mapeamento de retorno para elastoplasticidade acoplada ao dano

Abaixo, apresenta-se o modelo constitutivo, na sua fórmula incremental implícita que conduz ao algoritmo de retorno, para o caso de elastoplasticidade tridimensional com encruamento isotrópico, acoplado ao dano isotrópico e ortotrópico, proposto em [11].

1) Calcula estado teste (preditor elástico):

Dado  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  e as variáveis de estado em  $t_n$ , calcular o estado elástico teste

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\alpha_{n+1}^{\text{teste}} = \alpha_n$$

$$\zeta_{n+1}^{p \text{ teste}} = \zeta_n^p$$

$$\mathbf{D}_{n+1}^{\text{teste}} = \mathbf{D}_n$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{\text{teste}} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}}$$

2) Testa consistência plástica:

$$\text{se } f_{n+1}^{\text{teste}} := \bar{\zeta}_{n+1}^{\text{teste}} - (\sigma_y + H' \alpha_{n+1}^{\text{teste}}) = \sqrt{3J_2(\bar{\mathbf{s}}_{n+1}^{\text{teste}})} - (\sigma_y + H' \alpha_{n+1}^{\text{teste}}) \leq 0, \quad (\text{então passo elástico})$$

o conjunto  $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}$  e  $\mathbf{C}_{n+1}^{ep} = \mathbf{C}$ ,

finaliza.

Senão (passo plástico, vá para (3)).

3) Mapeamento de retorno (estado de correção):

Seja o residual local definido por  $\{R_{loc}\} = \{R_{\varepsilon^e}, R_{\Delta\gamma}, R_{\mathbf{D}}\}^T$ , resolve o sistema abaixo para as variáveis independentes  $W = \{\varepsilon^e, \Delta\gamma, \mathbf{D}\}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\varepsilon^e} = \Delta\varepsilon^e - \Delta\varepsilon + \Delta\varepsilon^p = \varepsilon_{n+1}^{e(i)} - \varepsilon_n^e - \Delta\varepsilon + \Delta\gamma_{n+1}^{(i)} \mathbf{N}_{n+1}^x \\ R_{\Delta\gamma} = f_{n+1} = \bar{\zeta}_{n+1}^{(i)} - \left[ \sigma_y + H' \left( \alpha_n + \Delta\gamma_{n+1}^{(i)} \right) \right] \\ R_{\mathbf{D}} = \begin{cases} \mathbf{D}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{D}_n - \left( \frac{-Y}{r} \right)^s \frac{\Delta\gamma_{n+1}^{(i)}}{1 - \mathbf{D}_{n+1}^{(i)}}, & \text{(isotrópico)} \\ \mathbf{D}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{D}_n - \left( \frac{-\bar{Y}}{r} \right)^s \bar{\varepsilon}^p, & \text{(ortotrópico)} \end{cases} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\},$$

onde  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$  e  $\mathbf{N}^x$  é dado pela equação (4.80).

Para solucionar o sistema acima pode-se usar novamente o esquema iterativo de Newton-Raphson. Logo, resolve-se o problema iterativo local:

$$\left\{ R_{loc}^{(i)} \right\}_{n+1} + \left[ \frac{\partial \{R_{loc}\}}{\partial \Delta W} \right]_{n+1}^{(i)} \left( W_{n+1}^{(i+1)} - W_{n+1}^{(i)} \right) = 0$$

com  $\Delta W = \{\Delta\Delta\gamma, \Delta\varepsilon^e, \Delta\mathbf{D}\}$ , onde a expressão para a matriz jacobiana  $[\mathbf{Jac}] = \left[ \frac{\partial \{R_{loc}\}}{\partial \Delta W} \right]_{n+1}^{(i)}$  (ou alguma boa aproximação dela) se faz necessária por razões de convergência. Neste trabalho será usado o método de diferenças finitas para calcular a matriz jacobiana (ver na próxima subseção).

4) Atualização:

Uma vez que as variáveis  $\varepsilon_{n+1}^e$ ,  $\Delta\gamma_{n+1}$  e  $\mathbf{D}_{n+1}$  tenham sido determinadas na resolução do sistema do passo (3), as variáveis remanescentes são atualizadas explicitamente:

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : \varepsilon_{n+1}^e$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma_{n+1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$$

$$\check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{n+1} : \mathbf{n}_{n+1}} \Delta\gamma_{n+1}, \text{ para dano ortotrópico}$$

$$\check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{1 - D_{n+1}}, \text{ para dano isotrópico}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{M}_{n+1}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \text{ para dano ortotrópico}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \text{ para dano isotrópico}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varsigma}}_{n+1} = \left[ \frac{3}{2} \text{dev}(\mathbf{H}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}) : \text{dev}(\mathbf{H}_{n+1} \mathbf{s}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}) \right]^{\frac{1}{2}},$$

para dano ortotrópico

$$\bar{\boldsymbol{\varsigma}}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} : \frac{\mathbf{s}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})}}, \text{ para dano isotrópico}$$

5) Calcula o operador tangente elastoplástico:

Seja a primeira coluna da inversa da matriz jacobiana [Jac], na convergência, dada por:

$$\begin{bmatrix} [\text{Jac}]_{\Delta\gamma, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} \\ [\text{Jac}]_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} \\ [\text{Jac}]_{\mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} \end{bmatrix},$$

a expressão para o operador tangente elastoplástico consistente com o algoritmo de integração implícito desenvolvido acima é [11]:

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{M}^{-1} : \mathbf{C} : [\text{Jac}]_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial \mathbf{D}} : [\text{Jac}]_{\mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^e}^{-1} .$$

#### 4.2.5 Matriz jacobiana por diferenças finitas

O método de diferenças finitas usado para calcular a matriz jacobiana da subsecção anterior (passo 3) será descrito a seguir.

Primeiramente, seja o método de Newton-Raphson, com uma função  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ , onde

$$\mathbf{X} = \left\{ X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \cdots \quad X_m \right\}^T .$$

O índice  $m$  refere-se ao número de variáveis do sistema. Neste trabalho, para o caso onde não há presença de dano, tem-se sete variáveis:  $\Delta\gamma$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_1^e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_2^e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_3^e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_4^e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_5^e$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_6^e$ . E quando há presença de dano, além das sete anteriores, possui-se mais seis variáveis:  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$ ,  $D_6$ .

Seja

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) = \left\{ F(X_1^{(k)}) \quad F(X_2^{(k)}) \quad F(X_3^{(k)}) \quad \cdots \quad F(X_m^{(k)}) \right\}^T = 0,$$

a aproximação de primeira ordem da função  $\mathbf{F}$  em torno de  $\mathbf{X}^{(k)}$  é dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k+1)}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) + \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial (\mathbf{X}^{(k)})} \right] \Delta \mathbf{X}^{(k)}. \quad (4.87)$$

$$\text{Fazendo } \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})}{\partial (\mathbf{X}^{(k)})} \right] \text{ e } \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)}) \Delta \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{0},$$

obtém-se

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)}) \Delta \mathbf{X}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (4.88)$$

e finalmente

$$\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k)} + \Delta \mathbf{X}^{(k)}. \quad (4.89)$$

A convergência é testada fazendo-se

$$\left| \Delta \mathbf{X}^{(k+1)} \right| / \left| \mathbf{X}^{(k+1)} \right| < 10^{-8}.$$

Para calcular a matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})$  usa-se o método das diferenças finitas. Sejam

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k)} &= \left\{ X_1^{(k)} \quad X_2^{(k)} \quad X_3^{(k)} \quad \dots \quad X_m^{(k)} \right\}^T \\ \mathbf{F}^{(k)} &= \left\{ F\left(X_1^{(k)}\right) \quad F\left(X_2^{(k)}\right) \quad F\left(X_3^{(k)}\right) \quad \dots \quad F\left(X_m^{(k)}\right) \right\}^T \\ \Delta \mathbf{Y} &= (0, 00001) \mathbf{X}^{(k)}. \end{aligned}$$

A  $j$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)})$  de ordem  $(m \times m)$  é escrita como

$$\frac{\mathbf{F}(\mathbf{Y}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}_2)}{2\Delta X_j},$$

onde

$$\mathbf{Y}_1 = \left\{ X_1^{(k)} \quad X_2^{(k)} \quad \dots \quad X_j^{(k)} + \Delta Y_j \quad \dots \quad X_m^{(k)} \right\}^T$$

e

$$\mathbf{Y}_2 = \left\{ X_1^{(k)} \quad X_2^{(k)} \quad \dots \quad X_j^{(k)} - \Delta Y_j \quad \dots \quad X_m^{(k)} \right\}^T.$$

Logo, a matriz jacobiana é aproximada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{Y}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}_2)}{2\Delta X_1} & \frac{\mathbf{F}(\mathbf{Y}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}_2)}{2\Delta X_2} & \dots \\ \dots & \frac{\mathbf{F}(\mathbf{Y}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}_2)}{2\Delta X_m} & \dots \end{bmatrix}.$$

O Primeiro  $\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(0)}$  usado nesta iteração local de Newton-Raphson é o  $\mathbf{X}_{(n)}$ , que convergiu no passo de carga  $n$  da iteração de Newton-Raphson global. Desta forma,  $\mathbf{X}^{(0)}$  pode possuir coordenadas nulas. Neste caso,

aplicou-se um valor padrão de perturbação igual a  $10^{-10}$ . Por exemplo, se a componente  $X_1^{(k)}$  for nula, tem-se

$$\mathbf{Y}_1 = \left\{ X_1^{(k)} + (10^{-10}) \quad X_2^{(k)} \quad \dots \quad X_m^{(k)} \right\}^T$$

e

$$\mathbf{Y}_2 = \left\{ X_1^{(k)} \quad X_2^{(k)} \quad \dots \quad X_m^{(k)} \right\}^T.$$

Logo, a matriz jacobiana é aproximada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{Y}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}_2)}{(10^{-10})} & \frac{\mathbf{F}(\mathbf{Y}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}_2)}{2\Delta X_2} & \dots \\ \dots & \frac{\mathbf{F}(\mathbf{Y}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}_2)}{2\Delta X_m} & \dots \end{bmatrix}.$$

O tamanho do fator de perturbação é importante, pois quando o valor adotado é pequeno, pode ocorrer erro de truncamento e arredondamento, por exemplo. E se o valor adotado para a perturbação for grande, pode ocorrer erro na precisão da resposta.

## Capítulo 5

# Exemplos de aplicação numérica

Neste capítulo será feita uma análise dos resultados encontrados na implementação numérica de alguns problemas. O Exemplo 1 é um problema de elasticidade linear tridimensional e a sua principal finalidade é verificar o programa de Elementos Finitos implementado, através da comparação com software de simulação numérica.

Os demais casos são problemas de elastoplasticidade tridimensional, sendo que a análise da convergência numérica dos mesmos será feita através da comparação com dados da literatura e software comercial de Elementos Finitos.

O Exemplo 2 tem como objetivo mostrar a convergência numérica do algoritmo implementado em um problema de elastoplasticidade tridimensional via MEF. Nos Exemplos 3 e 4 é feito o acoplamento de plasticidade com os danos isotrópico e ortotrópico, respectivamente, através da aplicação do modelo detalhado no algoritmo da Seção 4.2.4.

Toda a implementação computacional foi realizada via código próprio implementado em MATLAB<sup>®</sup> 7.6.0, sendo que a visualização dos resultados das análises foram realizadas através do software GID<sup>®</sup> 9.0.2, que é um sistema de pré e pós-processamento de resultados de Elementos Finitos. Os resultados extraídos do MATLAB são valores nos pontos de integração,

sendo que o GID faz as médias nos nós, para a plotagem dos resultados.

Para estes problemas, utilizaram-se elementos sólidos isoparamétricos (hexaedros) de vinte nós e funções de forma quadráticas.

## **5.1 Exemplo 1 - Elasticidade linear tridimensional**

Este problema consiste na análise tridimensional de uma chapa de espessura unitária com dois recortes cilíndricos (Figura 5.1), sujeita a uma força uniformemente distribuída sobre suas faces superior e inferior, na direção do eixo  $y$ . Neste problema foi utilizada a relação constitutiva elástica linear. Os dados do problema são:

$$E = 210 \text{ GPa (módulo de elasticidade);}$$

$$\nu = 0,3 \text{ (coeficiente de poisson);}$$

$$F_1 = 16800 \text{ N (força aplicada na face superior);}$$

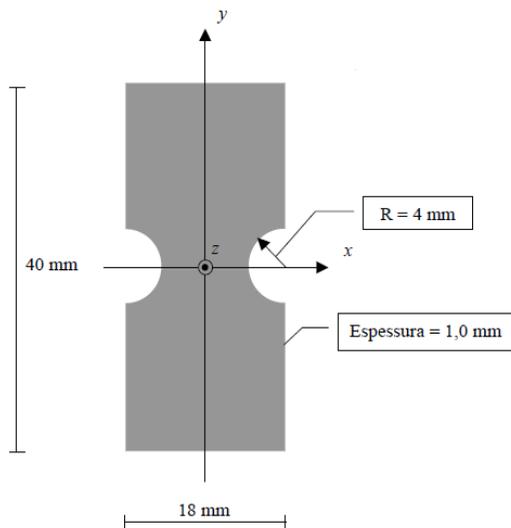
$$F_2 = -16800 \text{ N (força aplicada na face inferior).}$$

A análise estrutural é realizada apenas sobre um oitavo da estrutura. A Figura 5.2 mostra a estrutura efetivamente analisada utilizando-se os seguintes vínculos de simetria:

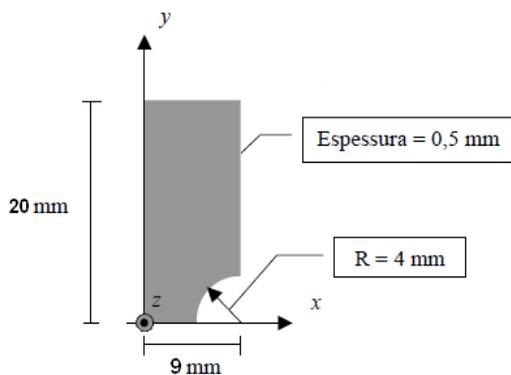
1) Impõe-se deslocamento nulo num plano normal ao eixo  $x$ , passando por  $x = 0$ , na direção do eixo  $x$ .

2) Impõe-se deslocamento nulo num plano normal ao eixo  $y$ , passando por  $y = 0$ , na direção do eixo  $y$ .

3) Impõe-se deslocamento nulo num plano normal ao eixo  $z$ , passando por  $z = 0$ , na direção do eixo  $z$ .



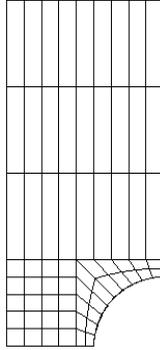
**Figura 5.1:** Dimensões da chapa.



**Figura 5.2:** Vínculos de simetria.

A força aplicada nesta análise foi de 4200 N, na face superior da placa. Utilizou-se uma malha constituída de 67 elementos hexaédricos,

como mostra a Figura 5.3, sendo que na espessura há apenas uma camada de elementos. A malha utilizada é grosseira, no entanto a comparação dos resultados não será feita com a solução analítica, mas com soluções numéricas que usam malhas similares.



**Figura 5.3:** Malha utilizada na análise.

Os resultados obtidos pela simulação realizada via código próprio implementado no programa Matlab foram comparados com as respostas obtidas pelo ANSYS<sup>®</sup> 11.0. Na Figura 5.4, que apresenta a comparação entre os deslocamentos na direção  $y$ , pode-se perceber que os resultados concordam. Deve-se observar que embora as figuras apresentem o mesmo número de cores, elas não são as mesmas para cada faixa de resposta. Esta diferença também ocorrerá nas demais figuras comparativas ao longo do trabalho. Na Figura 5.5 observa-se que as tensões equivalentes de von Mises obtidas são bem próximas entre si.

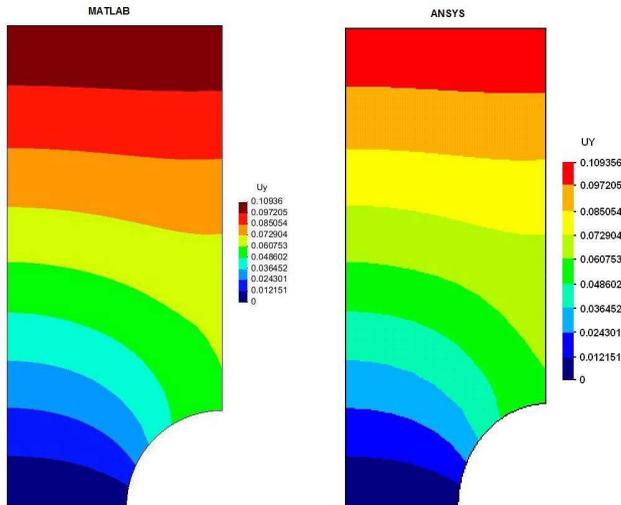
No entanto, nos resultados extraídos do GID, o valor mínimo da tensão equivalente de von Mises foi negativo, isto provavelmente devido ao seu processo de pós-processamento. Desta forma, optou-se por apresentar na Figura 5.5, um valor mínimo de tensão equivalente igual a 15,01 MPa, que foi o valor obtido no Ansys. As regiões da figura na cor branca representam valores entre  $-22,127$  MPa e 15,01 MPa.

A Tabela 5.1 mostra os valores mínimos e máximos da tensão equivalente extraídos do Matlab (nos pontos de integração), do GID (nos pontos

**Tabela 5.1:** Valores mínimos e máximos da tensão equivalente, em MPa.

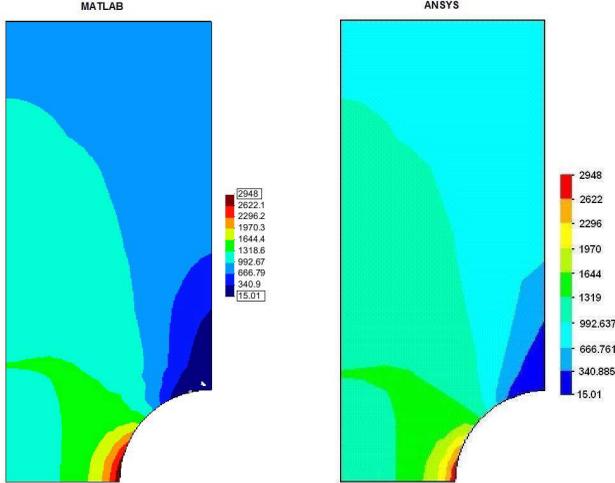
Tensão Equivalente	Valor Mínimo	Valor Máximo
MATLAB	6,755	2846,6
GID	-22,127	2941,7
ANSYS	15,01	2948

nodais) e do ANSYS (nos pontos nodais).

**Figura 5.4:** Deslocamento na direção  $y$  [mm].

## 5.2 Exemplo 2 - Elastoplasticidade tridimensional

Este exemplo consiste num problema de elastoplasticidade tridimensional, onde é analisada a mesma estrutura do Exemplo 1, utilizando-se os mesmos vínculos de simetria, a mesma malha (Figura 5.3), com deslocamento



**Figura 5.5:** Tensão equivalente (MPa).

controlado na direção do eixo  $y$ , ao longo de 100 passos. O modelo constitutivo do material da chapa é o elastoplástico, com critério de plastificação de von Mises e encruamento isotrópico linear. A Figura 5.6 indica as faces em que são aplicados os deslocamentos controlados na direção do eixo  $y$  e seus respectivos valores. A estrutura efetivamente analisada, onde são utilizados vínculos de simetria, é indicada pela Figura 5.7. Os dados do problema são:

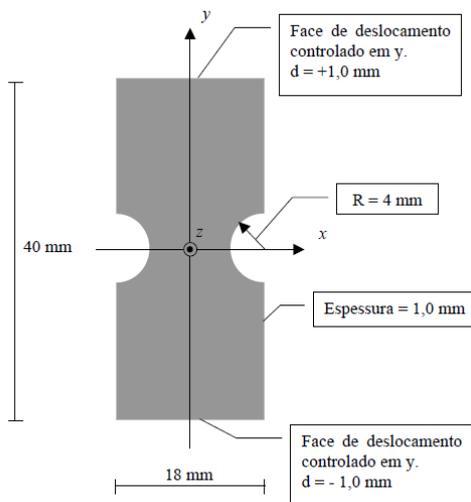
$E = 210$  GPa (módulo de elasticidade);

$\nu = 0,3$  (coeficiente de poisson);

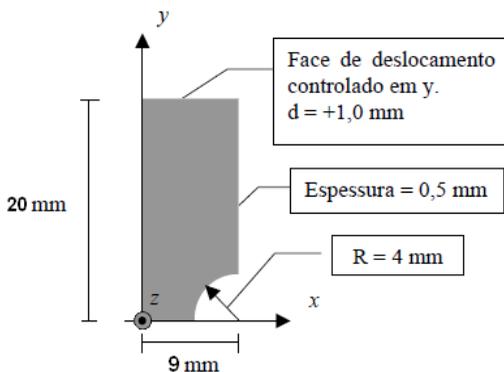
$H' = 10,5$  GPa (módulo de encruamento plástico isotrópico);

$\sigma_y = 620$  MPa (tensão limite de escoamento);

$d = 1,0$  mm (deslocamento prescrito total).



**Figura 5.6:** Dimensões da chapa e deslocamento controlado (Fonte: [13]).



**Figura 5.7:** Estrutura efetivamente analisada, utilizando-se vínculos de simetria.

A simulação foi realizada via código próprio implementado no programa Matlab e os resultados foram comparados com as respostas obtidas pelo ANSYS e com dados obtidos em [13] via Método dos Elementos Finitos

Generalizados (MEFG).

O MEFG é uma combinação de MEF com conceitos e técnicas típicas dos métodos sem malha. No MEFG são utilizadas as funções de forma dos elementos finitos, enriquecidas com funções polinomiais (adicionando-se novos parâmetros aos nós) que são atreladas a pontos nodais do domínio, visando melhorar a qualidade da aproximação no entorno desses pontos. Assim, tem-se a possibilidade de enriquecer a aproximação apenas numa região do domínio do problema, sem refinamento de malha [13, 32, 33].

No trabalho de [13] utilizaram-se elementos hexaédricos de oito nós, com três tipos de aproximação do campo de deslocamentos:

- 1) Aproximação linear, indicada como não enriquecida (NE).
- 2) Aproximação linear com enriquecimento polinomial de primeiro grau em todos os nós (P1).
- 3) Aproximação linear com enriquecimento polinomial de segundo grau nos nós centrais da chapa analisada (ver nós marcados em vermelho na Figura 5.8) e de primeiro grau nos outros nós (P2).

O autor conclui que obtém-se uma resposta muito ruim na utilização de NE, quando comparada à obtida com o uso de P1 e P2, sendo que, como esperado, a resposta obtida com P2 é melhor do que a obtida com P1.

Na Figura 5.9, que apresenta a comparação entre as deformações plásticas na direção  $y$  obtidas do Matlab e do ANSYS, pode-se perceber que os resultados estão próximos. Como o valor mínimo da deformação plástica obtido no GID também apresentou-se negativo, a figura apresenta regiões brancas que representam valores entre  $-0,0017$  e  $0$ .

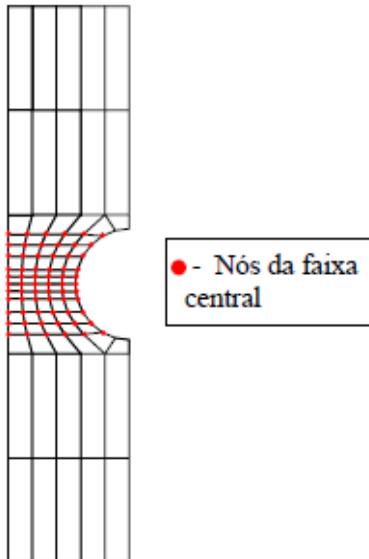
Para comparar a tensão equivalente de von Mises, utiliza-se a Figura 5.10, com os resultados do Matlab e do ANSYS e a Figura 5.11, com os resultados da análise de [13].

Logo, comparando as Figuras 5.10 e 5.11, pode-se observar que as respostas são próximas. Como o valor mínimo da tensão equivalente extraído do GID foi negativo, optou-se por apresentar na Figura 5.10 um valor mínimo de tensão equivalente igual a  $30,048$  MPa, que foi o valor obtido no Ansys.

**Tabela 5.2:** Valores mínimos e máximos da tensão equivalente, em MPa.

Tensão equivalente	Valor Mínimo	Valor Máximo
MATLAB	52,7026	2370,1
GID	-92,131	2425,2
ANSYS	30,048	2366
MEFG	~ 200	~ 2500

A Tabela 5.2<sup>1</sup> mostra os valores mínimos e máximos da tensão equivalente extraídos do Matlab (nos pontos de integração), do GID (nos pontos nodais), do ANSYS (nos pontos nodais) e do MEFG [13]. Em [13] não é mencionado o esquema de pós-processamento utilizado.

**Figura 5.8:** Malha de elementos utilizada em [13] (Fonte: [13]).

<sup>1</sup>O símbolo "~", apresentado na tabela, significa que os valores máximos e mínimos são aproximados, pois os gráficos extraídos de [13] não mostram os valores exatos.

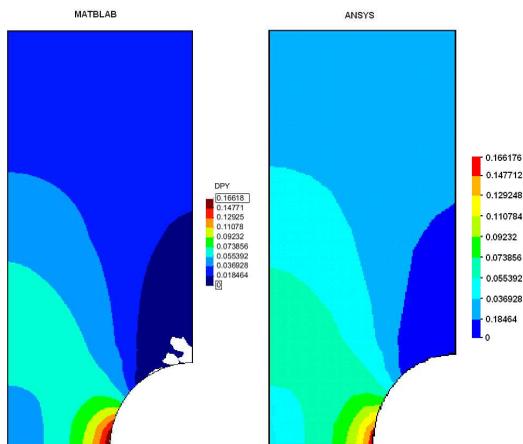


Figura 5.9: Deformação plástica na direção  $y$ .

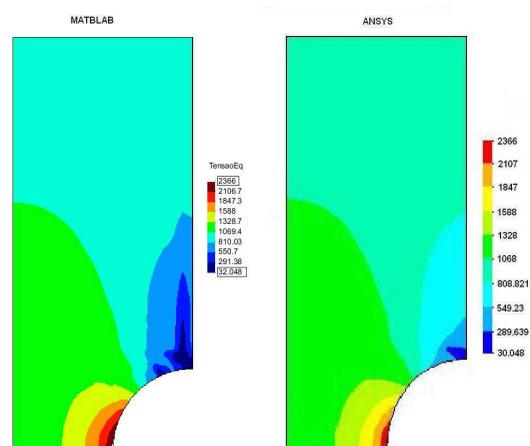


Figura 5.10: Tensão Equivalente (MPa).

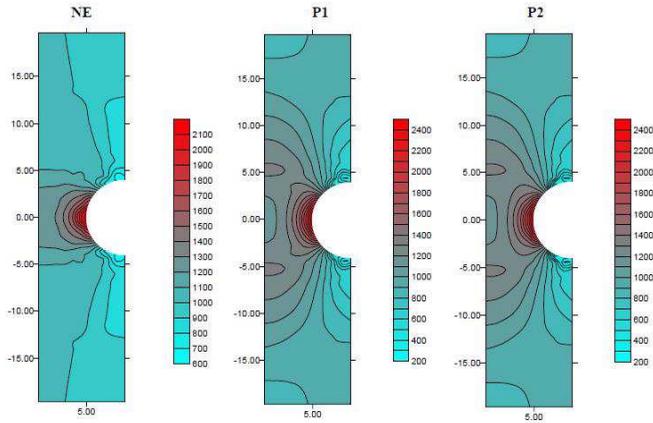


Figura 5.11: Tensão Equivalente, em MPa (MEFG) (Fonte: [13]).

### 5.3 Exemplo 3 - Elastoplasticidade e dano isotrópico tridimensional

Este exemplo consiste num problema de elastoplasticidade tridimensional acoplada ao dano isotrópico, onde é analisada a mesma estrutura do Exemplo 1, utilizando-se os mesmos vínculos de simetria, a mesma malha (Figura 5.3), com deslocamento controlado na direção do eixo  $y$ , ao longo de 100 passos. O modelo constitutivo do material da chapa é o elastoplástico, com critério de plastificação de von Mises, encruamento isotrópico linear e dano isotrópico, conforme apresentado na seção 4.2.2. A estrutura efetivamente analisada, onde são utilizados vínculos de simetria, é indicada pela Figura 5.7. Os dados do problema são:

$E = 210$  GPa (módulo de elasticidade);

$\nu = 0,3$  (coeficiente de poisson);

$H' = 10,5$  GPa (módulo de encruamento plástico isotrópico);

$\sigma_y = 620$  MPa (tensão limite de escoamento);

$D_c = 0,40$  (dano crítico);

$\varepsilon_D = 0,0$  (limiar de dano);

- $\varepsilon_R = 0,2$  (deformação plástica correspondente ao dano crítico);  
 $\eta = 1,0$  (parâmetro do material referente ao dano);  
 $d = 1,0$  mm (deslocamento prescrito).

A simulação foi realizada via código próprio implementado no programa Matlab e os resultados foram comparados com as respostas da análise de [13], via MEEG, que utilizou elementos hexaédricos de oito nós e três tipos de aproximação do campo de deslocamentos: a linear, indicada como não enriquecida (NE), a linear com enriquecimento polinomial de primeiro grau em todos os nós (P1) e a linear com enriquecimento polinomial de segundo grau nos nós centrais da chapa (Figura 5.8) e de primeiro grau nos outros nós (P2). Neste caso, o autor conclui que obtém-se uma resposta muito ruim na utilização de NE, quando comparada à obtida com o uso de P1 e P2, sendo que a resposta obtida com P2 é melhor do que a obtida com P1. O autor usa o modelo constitutivo de Lemaitre para o material que forma a chapa, sendo que o algoritmo de integração é um pouco distinto do utilizado no presente trabalho, já que é obtida uma expressão incremental explícita para o multiplicador  $\Delta\gamma$  e optou-se por introduzir uma forma não-associativa para o modelo de Lemaitre. Neste exemplo utiliza-se a lei de evolução do dano da equação (4.60), que é a mesma utilizada por [13]. Com relação à visualização dos resultados, o trabalho de [13] não menciona o esquema de pós-processamento utilizado.

Quanto à comparação de resultados, utilizou-se os valores de dano e de tensão equivalente de von Mises obtidos nos passos 43 e 71, já que no trabalho de [13] o valor máximo de dano foi atingido nos passos 43 (NE), 72 (P1) e 71 (P2). Como o deslocamento prescrito é aplicado num total de 100 passos, tem-se que os passos 43 e 71 correspondem a um deslocamento de 0,43 mm e 0,71 mm, respectivamente.

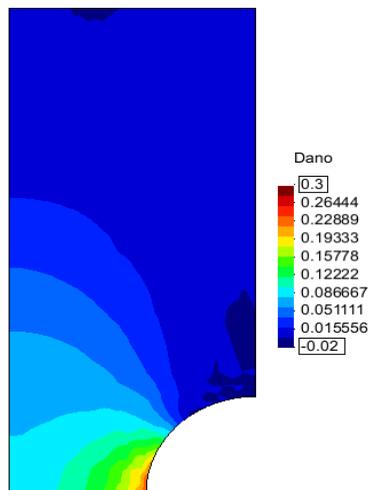
Com relação ao passo 43, as Figuras 5.12 e 5.13, apresentam os mapas de dano obtidos do Matlab e da análise de [13], respectivamente. E as Figuras 5.14 e 5.15, apresentam os mapas de tensão equivalente obtidos do Matlab e da análise de [13], respectivamente. Pode-se observar que os resultados ficaram próximos.

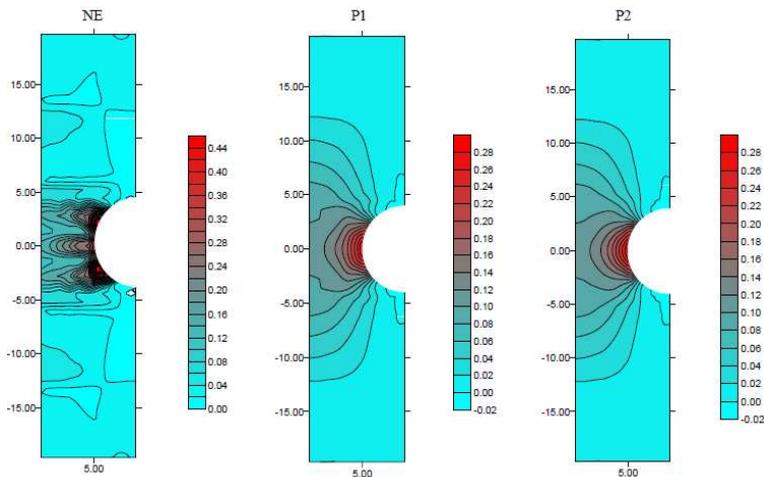
Novamente, os resultados vistos no software GID, mostram os mínimos

**Tabela 5.3:** Valores mínimos e máximos de dano e tensão equivalente em MPa ( $d = 0,43$  mm).

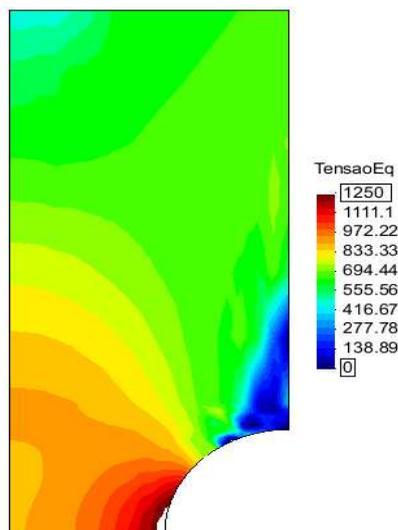
	Valor Mínimo	Valor Mínimo	Valor Máximo
Dano	MATLAB	0	0,2337
	GID	-0.0059779	0,24505
	MEFG	$\sim -0.02$	$\sim 0.29$
Tensão Equivalente	MATLAB	13,0813	1291,1
	GID	-237,83	1301,1
	MEFG	$\sim 0$	$\sim 1250$

de dano e da tensão equivalente negativos. Desta forma, optou-se por apresentar nas Figuras 5.12 e 5.14 os mesmos valores mínimos de dano e tensão equivalente apresentados nas Figuras 5.13 e 5.15, respectivamente. A Tabela 5.3 mostra os valores mínimos e máximos de dano e da tensão equivalente extraídos do Matlab (nos pontos de integração), do GID (nos pontos nodais) e do MEFG [13], referentes ao passo 43.

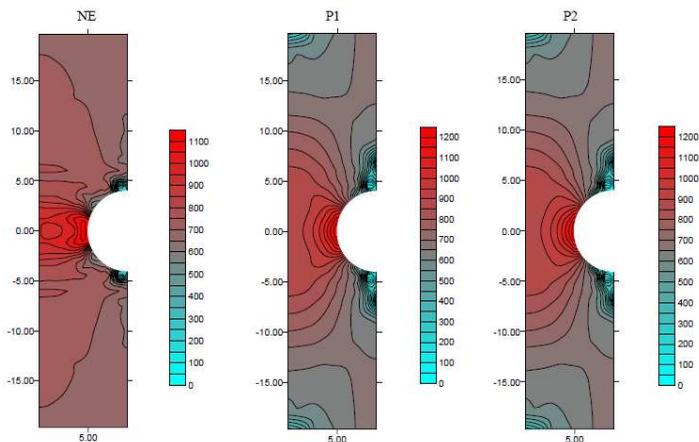
**Figura 5.12:** Dano,  $d = 0,43$  mm.



**Figura 5.13:** Dano (MEFG),  $d = 0,43$  mm (Fonte: [13]).



**Figura 5.14:** Tensão Equivalente (MPa),  $d = 0,43$  mm.



**Figura 5.15:** Tensão Equivalente em MPa (MEFG),  $d = 0,43$  mm (Fonte: [13]).

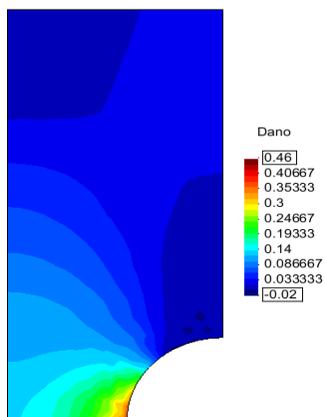
Com relação ao passo 71, as Figuras 5.16 e 5.17, apresentam os mapas de dano obtidos do Matlab e da análise de [13], respectivamente; e as Figuras 5.18 e 5.19, apresentam os mapas de tensão equivalente de von Mises obtidos do Matlab e da análise de [13], respectivamente. Pode-se observar que os resultados ficaram próximos.

A Tabela 5.4 mostra os valores mínimos e máximos de dano e da tensão equivalente extraídos do Matlab (nos pontos de integração), do GID (no pós-processamento dos resultados extraídos do Matlab) e do MEFG [13], referentes ao passo 71. Observa-se que a Figura 5.18 apresenta duas regiões na cor branca. A região branca limitada pela cor azul originou-se após ser trocado o valor mínimo da tensão equivalente e corresponde a um valor negativo. A região branca limitada pela cor vermelha já se encontrava na figura original e corresponde a um valor maior do que o valor máximo apresentado.

Na simulação realizada via código próprio implementado no programa Matlab, o dano atingiu o valor crítico no passo 77. Assim, as Figuras 5.20

**Tabela 5.4:** Valores mínimos e máximos de dano e tensão equivalente em MPa ( $d = 0,71$  mm).

	Valor Mínimo	Valor Mínimo	Valor Máximo
Dano	MATLAB	0	0,369
	GID	-0.0065693	0,38822
	MEFG	$\sim -0.02$	$\sim 0.46$
Tensão Equivalente	MATLAB	23,6418	1384,7
	GID	-370,76	1384,6
	MEFG	$\sim 100$	$\sim 1350$



**Figura 5.16:** Dano,  $d = 0,71$  mm.

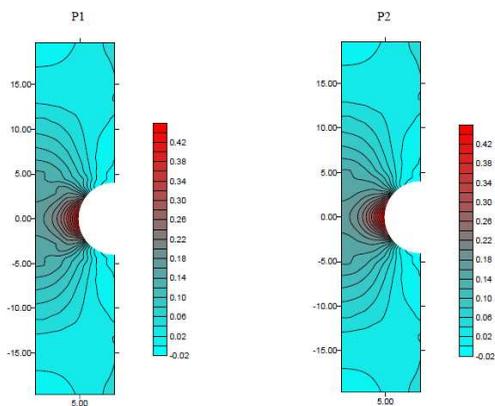


Figura 5.17: Dano,  $d = 0,71$  mm (Fonte: [13]).

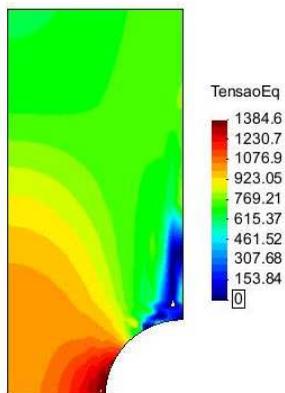
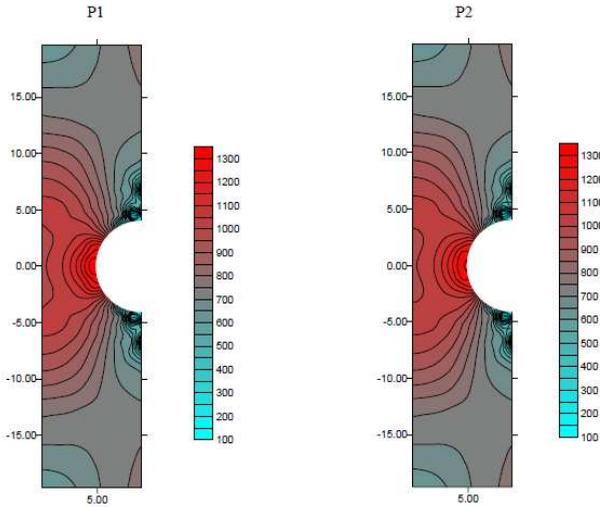


Figura 5.18: Tensão Equivalente (MPa),  $d = 0,71$  mm.



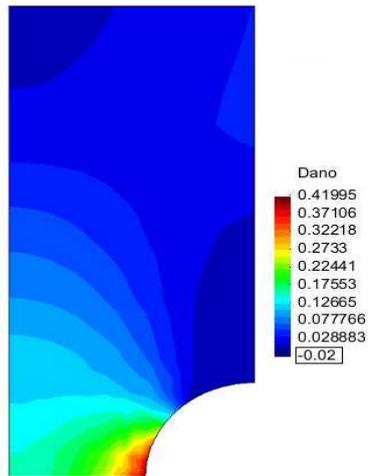
**Figura 5.19:** Tensão Equivalente em MPa (MEFG),  $d = 0,71$  mm (Fonte: [13]).

e 5.21 apresentam os mapas de dano e de tensão equivalente, respectivamente, para o passo 76. A Tabela 5.5 mostra os valores mínimos e máximos de dano e da tensão equivalente extraídos do Matlab (nos pontos de integração) e do GID (nos pontos nodais), referentes ao passo 77. Observa-se que a Figura 5.21 apresenta três regiões na cor branca. As regiões brancas limitadas pela cor azul originaram-se após ser trocado o valor mínimo da tensão equivalente e correspondem a um valor negativo. A região branca limitada pela cor vermelha já se encontrava na figura original e corresponde a um valor maior que o valor máximo apresentado.

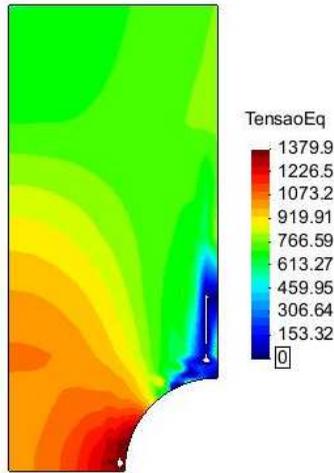
A Figura 5.22 apresenta a curva tensão equivalente - deformação plástica acumulada (seus valores máximos no fundo do entalhe), até o dano atingir seu valor crítico. Observa-se que a curva de tensão equivalente efetiva é praticamente linear a partir do crescimento da deformação plástica acumulada, sendo maior do que a tensão equivalente verdadeira. Isto

**Tabela 5.5:** Valores mínimos e máximos de dano e tensão equivalente em MPa ( $d = 0,76$  mm).

	Valor Mínimo	Valor Mínimo	Valor Máximo
Dano	MATLAB	0	0,3988
	GID	-0.0075111	0,41995
Tensão Equivalente	MATLAB	25,6677	1382,5
	GID	-338,61	1379,9



**Figura 5.20:** Dano,  $d = 0,76$  mm.

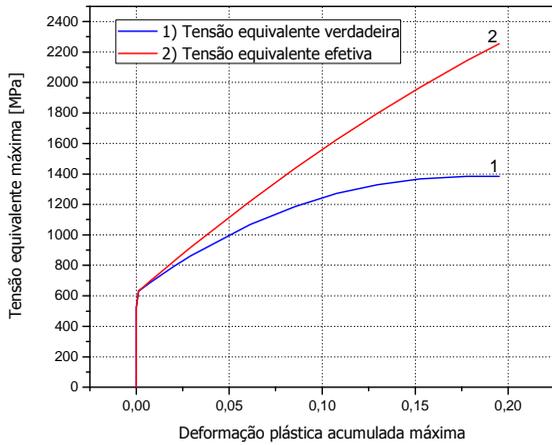


**Figura 5.21:** Tensão Equivalente (MPa),  $d = 0,76$  mm.

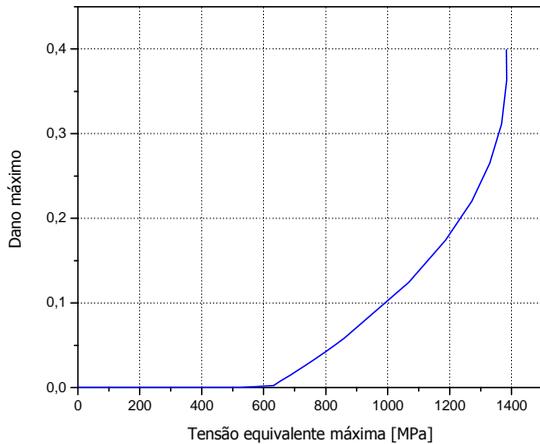
se deve ao fato de que com o crescimento do dano, a área de resistência decresce e a tensão efetiva cresce.

As Figuras 5.23 e 5.24 mostram, respectivamente, o comportamento da evolução do dano com a tensão equivalente e com a deformação plástica acumulada (seus valores máximos). Observa-se que a evolução do dano ocorre após um valor de tensão equivalente próximo de 600 MPa, que é quando inicia-se a deformação plástica, já que o limiar de dano para este caso é zero. Também pode-se verificar que o dano e a deformação plástica acumulada evoluem de forma linear, de acordo com a lei de evolução do dano dada por (4.60), até atingirem seus valores máximos.

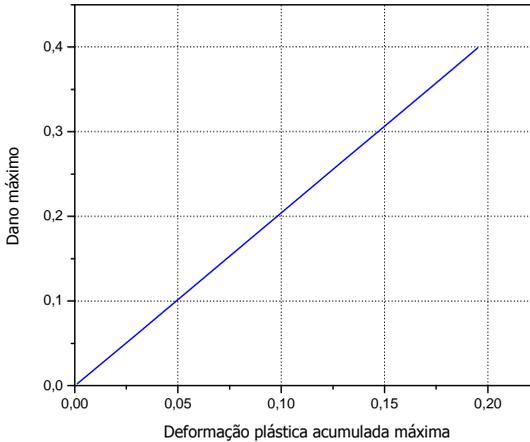
As Figuras 5.25 e 5.26 apresentam a influência do limiar de dano  $\varepsilon_D$  na evolução do dano e da deformação plástica acumulada  $\tilde{\varepsilon}^p$ . Para esta análise foram utilizados os seguintes valores de limiar de dano: 0; 0,05; 0,10 e 0,15; obtendo-se, respectivamente, os seguintes deslocamentos finais: 0,76 mm; 0,85 mm; 0,96 mm e 1 mm. Pode-se perceber que quanto menor o limiar de dano, menor o deslocamento da peça até que sejam atingidos o dano crítico ou o deslocamento prescrito.



**Figura 5.22:** Curva tensão equivalente - deformação plástica acumulada ( $d = 0,76$  mm).



**Figura 5.23:** Curva dano - tensão equivalente ( $d = 0,76$  mm).

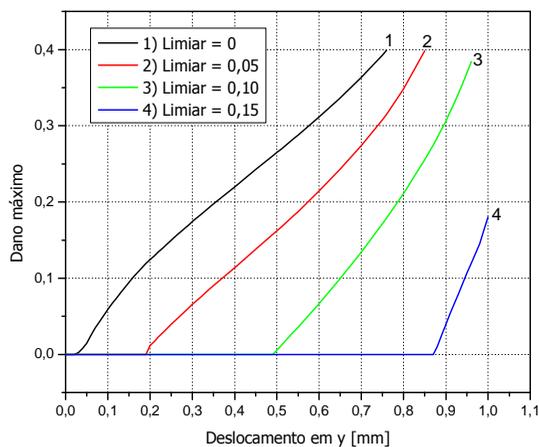


**Figura 5.24:** Curva dano - deformação plástica acumulada ( $d = 0,76$  mm).

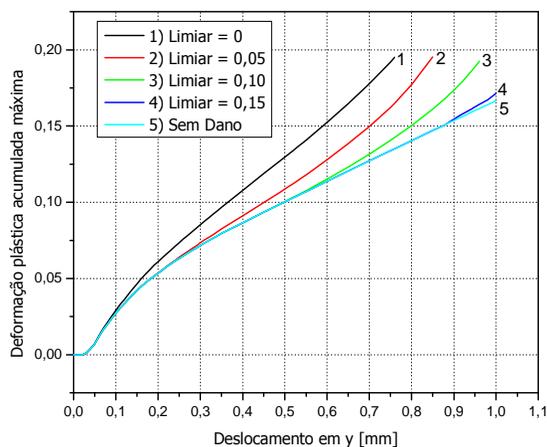
A Figura 5.25 apresenta a evolução do dano com relação ao deslocamento. Observa-se que quanto menor o limiar de dano, mais rápido o dano se inicia e chega ao seu valor crítico e, conseqüentemente, o deslocamento final é menor. Neste caso, para  $\varepsilon_D = 0,15$ , o dano não atinge seu valor crítico ao final de todos os incrementos de deslocamento.

A Figura 5.26 apresenta a evolução da deformação plástica acumulada com relação ao deslocamento, para os mesmos valores de limiar de dano citados acima. Da mesma forma que acontece com o dano para  $\varepsilon_D = 0,15$ , a deformação plástica acumulada não atinge seu valor crítico ao final de todos os incrementos de deslocamento. Além disso, verifica-se que para o caso onde não há dano, a deformação plástica atinge seu menor valor.

A Figura 5.27 apresenta os valores de dano numa certa região da placa analisada (linha  $\overline{AB}$  em vermelho da Figura 5.28). Os valores apresentados são referentes ao último incremento de deslocamento, até que se chegasse ao dano crítico ou ao deslocamento total prescrito. Tais valores foram retirados dos pontos de integração onde  $y = 0,1127$ ;  $z = 0,1127$  e  $x =$



**Figura 5.25:** Curva dano - deslocamento em  $y$  [mm].



**Figura 5.26:** Curva deformação plástica acumulada - deslocamento em  $y$  [mm].

0,1127; 0,5; 0,8873; 1,1127; 1,5; 1,8873; 2,1127; 2,5; 2,8873; 3,1127; 3,5; 3,8873; 4,05635; 4,25; 4,44365; 4,55635; 4,75; 4,94365. Os valores de limiar de dano são os mesmos utilizados anteriormente. Observa-se que quando o dano atinge seu valor crítico, a diferença entre os valores extremos de dano apresentou-se menor para os menores valores do limiar de dano  $\varepsilon_D$ . Para o limiar de dano igual a 0,15, o deslocamento prescrito foi alcançado sem que o dano chegasse ao seu valor crítico. Além disso, para este mesmo limiar, a maior parte da região analisada não foi danificada, sendo que a danificação concentrou-se bem próximo ao entalhe, pois quando ela iniciou a deformação plástica já encontrava-se bem acentuada (ver Figura 5.29).

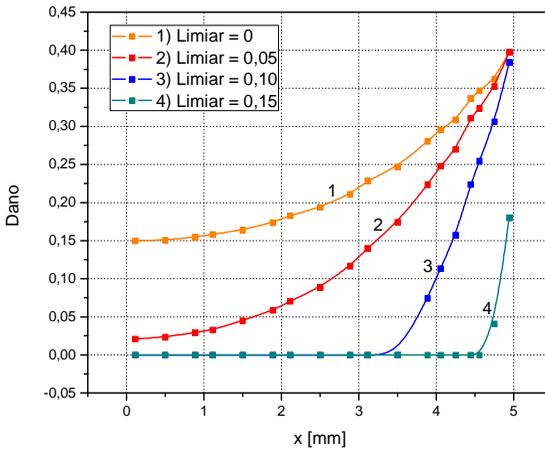
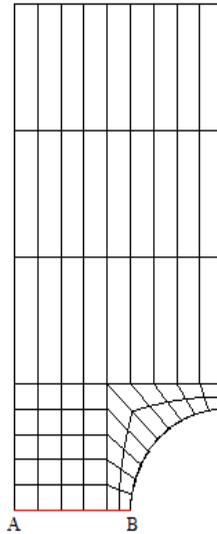


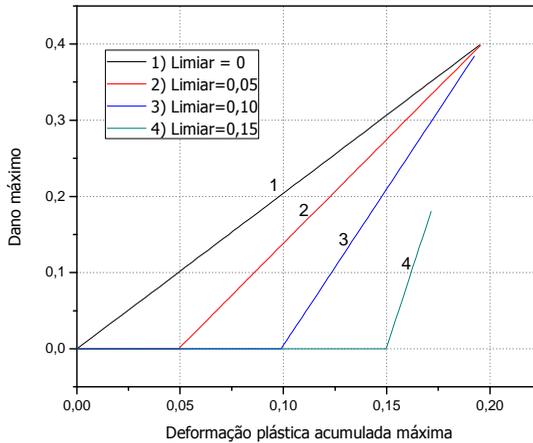
Figura 5.27: Curvas dano -  $x$  [mm].

## 5.4 Exemplo 4 - Elastoplasticidade e dano ortotrópico tridimensional

Este exemplo consiste num problema de elastoplasticidade tridimensional acoplada ao dano ortotrópico, onde é analisada a mesma estrutura do Ex-



**Figura 5.28:** Região analisada na placa em vermelho, linha  $\overline{AB}$ .



**Figura 5.29:** Curvas dano - deformação plástica acumulada para alguns valores de limiar de dano.

emplo 1, utilizando-se os mesmos vínculos de simetria, a mesma malha (Figura 5.3), com deslocamento controlado na direção do eixo  $y$ , ao longo de 100 passos. O modelo constitutivo do material da chapa é o elastoplástico, com critério de plastificação de von Mises, encruamento isotrópico linear e dano ortotrópico, conforme apresentado na seção 4.2.3. A estrutura efetivamente analisada, onde são utilizados vínculos de simetria, é indicada na Figura 5.7. Os dados do problema são:

$E = 210$  GPa (módulo de elasticidade);

$\nu = 0,3$  (coeficiente de poisson);

$H' = 10,5$  GPa (módulo de encruamento plástico isotrópico);

$\sigma_y = 620$  MPa (tensão limite de escoamento);

$D_c = 0,40$  (dano crítico);

$\eta = 3,0$  (parâmetro do material referente ao dano);

$r = 3,5$  (parâmetro do material referente ao dano);

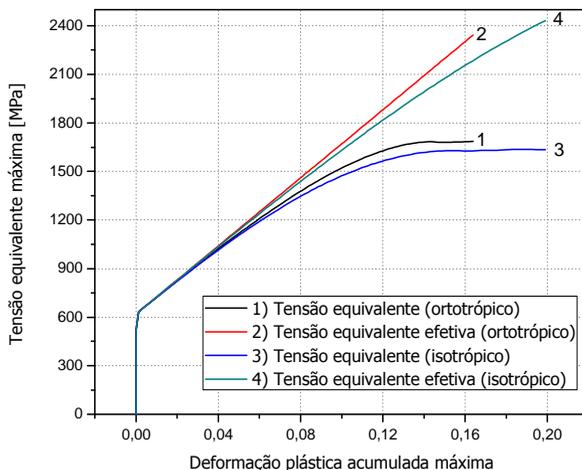
$s = 1,0$  (parâmetro do material referente ao dano);

$d = 1,0$  mm (deslocamento prescrito).

A simulação foi realizada via código próprio implementado no programa Matlab. Alguns resultados foram comparados com respostas obtidas do caso isotrópico, onde utilizou-se a lei de evolução do dano da equação (4.51) e as mesmas constantes listadas acima, com  $\eta = 1,0$ .

A Figura 5.30 apresenta a curva tensão equivalente - deformação plástica acumulada (seus valores máximos no fundo do entalhe), para os modelos de dano isotrópico e ortotrópico, até que o dano atinja seu valor crítico, com deslocamento de 0,93 mm e 0,90 mm, respectivamente. Pode-se perceber que para o caso isotrópico a tensão atinge seu valor máximo quando o valor da deformação plástica acumulada é igual a 0,2 (como no Exemplo 3). Para o caso ortotrópico, a deformação plástica acumulada não atinge 0,2. Após certo ponto, a tensão equivalente efetiva torna-se maior do que a verdadeira, como se esperava.

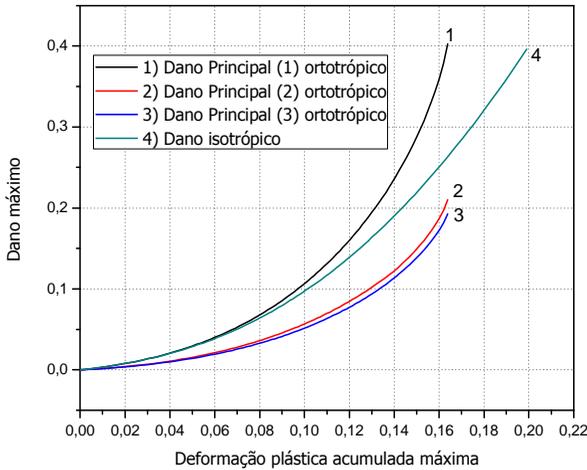
A Figura 5.31 mostra a curva dano - deformação plástica acumulada (seus valores máximos), para dano isotrópico e ortotrópico, até o dano



**Figura 5.30:** Curva tensão equivalente - deformação plástica acumulada até o valor crítico de dano.

atingir seu valor crítico. No caso ortotrópico são apresentados os valores principais de dano, correspondentes às direções de ortotropia. Percebe-se que as curvas deste gráfico não são lineares, diferentemente do caso isotrópico apresentado no Exemplo 3, onde foi utilizada a lei de evolução do dano da equação (4.60). Assim como acontece com a tensão equivalente, os valores de dano máximo são bem próximos nos casos isotrópico e ortotrópico, mas ocorrem em deformações plásticas inferiores no caso ortotrópico.

A Figura 5.32 apresenta a curva dano - deslocamento em  $y$  para dano isotrópico e ortotrópico (seus valores máximos) até que o dano atinja seu valor crítico. Para o dano ortotrópico é apresentado o valor de dano principal 1. Pode-se perceber que no caso ortotrópico o dano crítico ocorre num valor de deslocamento menor do que para o caso isotrópico e de acordo com a Figura 5.33, o dano fica mais concentrado próximo ao entalhe no caso ortotrópico.

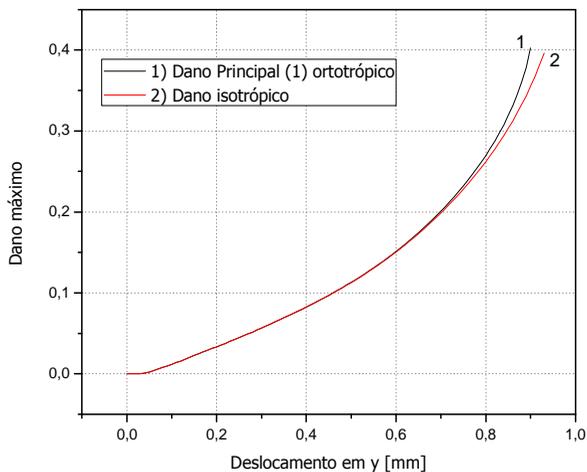


**Figura 5.31:** Curva dano - deformação plástica acumulada até o valor crítico de dano.

Em seguida, apresentam-se curvas que mostram a influência dos parâmetros  $\eta$ ,  $r$  e  $\varepsilon_D$  na evolução do dano ortotrópico, com relação ao deslocamento em  $y$ . A Figura 5.34 apresenta a influência de  $\eta$  com relação ao valor de dano principal 1. Percebe-se que com o aumento de  $\eta$ , o dano crítico é atingido com mais rapidez e assim o deslocamento é menor. Observa-se que a variável  $\eta$  apresenta influência moderada com relação ao deslocamento final.

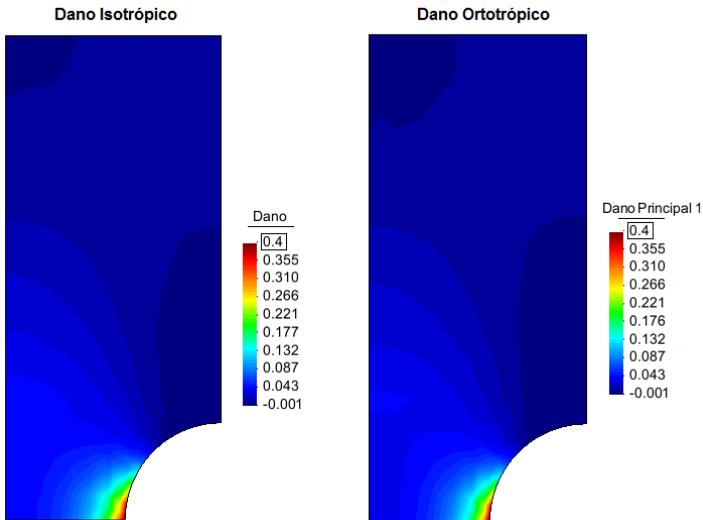
A Figura 5.35 apresenta a influência de  $r$  com relação ao valor de dano principal 1. Percebe-se que com o aumento de  $r$ , o dano crítico demora mais para ser atingido e assim o deslocamento é maior. Observa-se que a variável  $r$  tem grande influência com relação ao deslocamento final.

A Figura 5.36 apresenta a influência do limiar de dano  $\varepsilon_D$  com relação ao valor de dano principal 1. Observa-se que, assim como no caso da variação de  $r$ , com o aumento de  $\varepsilon_D$ , o dano crítico demora mais para ser

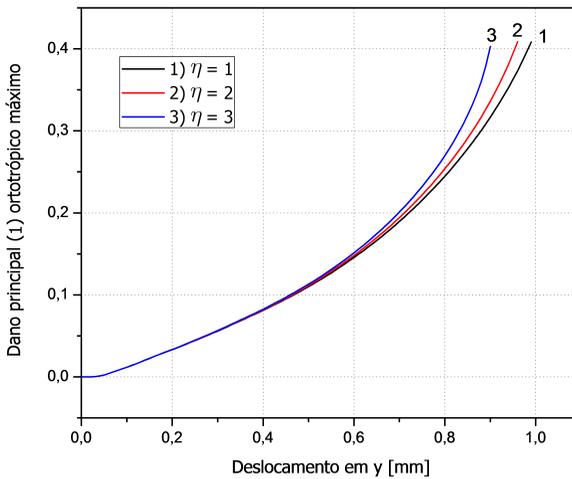


**Figura 5.32:** Curva dano - deslocamento em  $y$  [mm].

atingido e assim o deslocamento é maior. Além disso, para  $\varepsilon_D = 0,10$  o dano não atinge seu valor crítico.



**Figura 5.33:** Concentração do dano próximo ao entalhe no passo de deslocamento referente ao dano crítico.



**Figura 5.34:** Curva dano - deslocamento em  $y$  [mm] com variação de  $\eta$ .

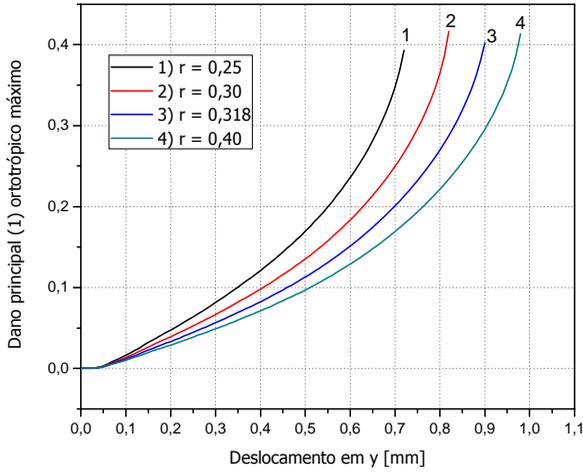


Figura 5.35: Curva dano - deslocamento em  $y$  [mm] com variação de  $r$ .

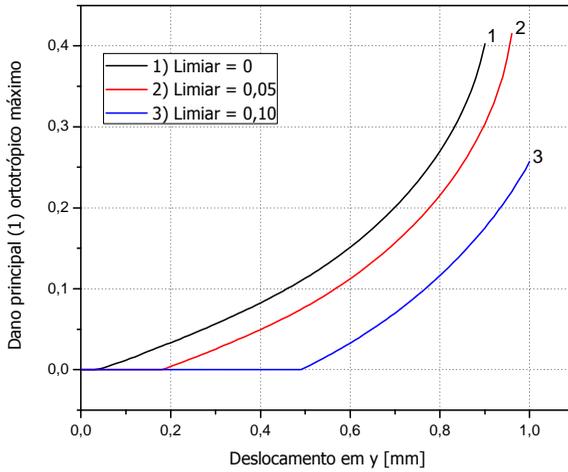


Figura 5.36: Curva dano - deslocamento em  $y$  [mm] com variação de  $\varepsilon_D$ .



# Capítulo 6

## Conclusão

O objetivo desse trabalho foi, através da simulação numérica, verificar a evolução do dano ortotrópico em metais acoplando-se as teorias de plasticidade e dano.

Foi realizada uma breve revisão do MEF, onde apresentou-se o modelo para análise linear e não linear. Discorreu-se sobre a teoria da plasticidade, no contexto unidimensional e tridimensional. Foram apresentados conceitos da Mecânica do Dano em Meio Contínuo (MDC), via abordagem de Lemaitre, onde estudaram-se os modelos de dano dútil unidimensional e tridimensional baseados nos princípios da mecânica do contínuo, na hipótese de equivalência de deformação e no conceito de tensão efetiva, com base numa metodologia fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis.

A implementação computacional realizada, adaptada a análises tridimensionais, foi baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF) e num modelo constitutivo de Lemaitre que é próprio para materiais metálicos. Este modelo serve tanto para análise de dano isotrópico como para dano ortotrópico, além da análise sem danificação (apenas plastificação). Quanto ao processo incremental iterativo do algoritmo numérico, foram utilizados controles de força e deslocamento, adotando-se o Método de Newton-Raphson.

Neste estudo considerou-se um comportamento isotrópico do material,

com encruamento isotrópico linear e critério de encruamento de von Mises.

A partir das simulações numéricas apresentadas no Capítulo 5, puderam-se extrair algumas conclusões, apresentadas a seguir.

Quanto ao dano isotrópico, foram realizadas simulações utilizando-se duas leis de evolução de dano distintas. A lei de evolução apresentada na equação (4.51) foi utilizada para que os resultados da simulação fossem comparados com os da literatura [13], que utilizou esta mesma lei (Exemplo 3). A segunda lei de evolução de dano utilizada é apresentada na equação (4.60), e usa os parâmetros de dano que também são usados na lei de evolução de dano ortotrópico (Exemplo 4). Com relação a estas duas leis de evolução, percebe-se algumas diferenças nos resultados das simulações. Em ambas as simulações o dano crítico ocorre para um valor de deformação plástica acumulada igual a 0,20, mas o deslocamento final e a tensão equivalente de von Mises são maiores para a segunda lei de evolução de dano. Além disso, como era de se esperar, para o primeiro caso a curva dano - deformação plástica acumulada é linear e não linear para o segundo caso.

Quanto ao dano ortotrópico, de acordo com a lei de evolução de dano apresentada pela equação (4.83), as componentes do tensor de dano  $D_{ij}$  que não pertençam a diagonal principal podem assumir valores negativos, no sistema de eixos Cartesiano global. Já nas direções de ortotropia (direções principais de dano), as componentes de dano são todas positivas por construção. O motivo para este comportamento pode estar relacionado ao fato de este modelo ser uma simplificação de um modelo de dano geral anisotrópico, onde o dano é representado por um tensor de quarta ordem [11, 12].

Alguns resultados obtidos com a simulação de dano ortotrópico foram comparados com os resultados da simulação de dano isotrópico. Observou-se que o dano crítico ocorre para valores de tensão equivalente de von Mises bem próximos nos casos isotrópico e ortotrópico, mas ocorrem com deformação plástica acumulada e deslocamento final inferiores no caso ortotrópico.

Além disso, foram realizadas simulações que mostraram a influência de

alguns parâmetros de dano na evolução do dano ortotrópico e assim, foram comparados os deslocamentos na direção axial da peça, ao ser atingido o dano crítico ou o deslocamento imposto. Com relação ao parâmetro  $\eta$ , observou-se que com o seu aumento, o deslocamento final diminuiu de forma moderada. Este resultado assemelha-se ao resultado encontrado quando comparou-se o caso isotrópico ( $\eta = 1$ ) com o caso ortotrópico ( $\eta = 3$ ), onde obteve-se deslocamento maior no primeiro caso.

Com relação ao parâmetro  $r$ , percebeu-se que com o seu aumento, o deslocamento final aumentou de forma bastante significativa. E com relação ao parâmetro limiar de dano  $\varepsilon_D$ , observou-se que, assim como no caso da variação de  $r$ , o deslocamento final aumentou com o aumento  $\varepsilon_D$ .

De forma geral, verificou-se que o dano ficou concentrado na parte da peça onde havia maior concentração de tensão, sendo que o dano ortotrópico (valor principal 1) ficou mais concentrado do que o isotrópico e, obviamente, que o dano evoluiu crescentemente com esforços aplicados à peça.

As simulações apresentadas neste trabalho foram realizadas apenas com um tipo de material, pelo fato da dificuldade em encontrar dados de materiais para todos os parâmetros necessários à implementação do modelo.

## 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Abaixo são propostas algumas sugestões de trabalhos a partir do modelo de dano apresentado:

- Aplicação do modelo para análise de grandes deformações, com inclusão de encruamento não-linear.
- Implementação do critério de escoamento de Drucker-Prager no modelo, que consiste na modificação da superfície de escoamento de von Mises incluindo-se um termo extra para introdução de variação de volume. Desta forma, o modelo torna-se viável para análises em materiais poliméricos.
- Acoplamento da análise termo-mecânica ao modelo.

- Inclusão de um tratamento para o fechamento de micro-defeitos em materiais sob compressão.

# Bibliografia

- [1] CHEN, W. F.; HAN, D.J. Plasticity for structural engineers. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] KATTAN, P.I.;VOYIADJIS, G.Z. Damage mechanics with finite elements: practical applications with computer tools. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2002.
- [3] KWON, Young w.; BANG, Hyochoong. The finite element method using MATLAB. CRC Press LLC, New York, 1997.
- [4] LEMAITRE, J. A course on damage mechanics. 2. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1996.
- [5] SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. 1. ed. John Wiley & Sons, 2008.
- [6] OWEN, D. R. J.; HINTON, E. Finite elements in plasticity. 2. ed. Pineridge Press Limited, Swansea, 1986.
- [7] SIMO, J. C.; HUGHES T. J. R. Computacional Inelásticity. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [8] TENG, X. Numerical prediction of slant fracture whit continuum damage mechanics. Engineering Fracture Mechanics, v. 75, n. 8, p. 2020-2041, 2008.
- [9] SORIANO, H. L. Método dos elementos finitos em análise de estruturas. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

- [10] VOYIADJIS, G.Z.; KATTAN, P.I. *Advances in damage mechanics: metals and metal matrix composites*. 1999.
- [11] LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. *Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2005.
- [12] DESMORAT, R.; CANTOURNET, S. Modeling microdefects closure effect with isotropic/anisotropic damage. *Damage Mechanics*, v. 00, 2007.
- [13] TORRES, I. F. R. *Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- [14] AL-RUB, R. K. A.; VOYIADJIS, G. Z. On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials. *Solids and Structures*, v. 40, p. 2611-2643, 2003.
- [15] LEMAITRE, J.; DESMORAT, R.; SAUZAY, M. Anisotropic damage law of evolution. *European J. Mechanics A/Solids*, v. 19, p. 187-208, 2000.
- [16] CHABOCHE, J. L. Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. *International Journal of Damage Mechanics*, v. 2, p. 311-329, 1993.
- [17] CHOW, C.L.; WANG, J. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. *International Journal of Fracture*, v. 33, n.1, p. 3-16, 1987.
- [18] LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. Isotropic and anisotropic damage law of evolution. *Handbook of materials behavior models*, v. 2, p. 513-524, 2001. Academic Press, San Diego, 2001.
- [19] JU, J. W. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *Int. J. Solids Struct*, v. 25, n. 7, p. 803-833, 1988.

- [20] SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 48, p. 101-118, 1985.
- [21] LEMAITRE, J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 51, p. 31-49, 1985.
- [22] LEMAITRE, J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, v. 107, p. 83-89, 1985.
- [23] ISSAN DOGHRI. Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, p. 3403-3431, 1995.
- [24] LADEVÈZE, P. On an anisotropic damage theory. In: Boehler J.P. (Ed.), *Proc. CNRS Int. Coll. 351 Villars-de-Lans, Failure criteria of structured media*, p.355-363, 1983.
- [25] ARMERO, F.; OLLER, S. A general framework for continuum damage models. I. Infinitesimal plastic damage models in stress space. *International Journal of Solids and Structures*, v. 37, p. 7409-7436, 2000.
- [26] CHABOCHE, J. L. Continuous damage mechanics - A tool to describe phenomena before crack initiation. *Nuclear Engineering and Design*, v. 64, p. 233-247, 1981.
- [27] OMERSPAHIC, E.; MATTIASSON, K. Oriented damage in ductile sheets: Constitutive modeling and numerical integration. *International Journal of Damage Mechanics*, v. 16, p. 35-56, 2007.
- [28] PROENÇA, S. P. B. *Elementos da Mecânica do dano em meios contínuos*. Apostila: aula 4, São Carlos, 2001.

- [29] SZABÓ ,B.; BABUSKA, I. Finite element analysis. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [30] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. 6 ed.Elsevier, Oxford, 2005.
- [31] HUGHES, T. J. R. The finite element method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [32] DUARTE, C. A.; BABUSKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems. Computer Structures, v. 77, p. 215-235, 2000.
- [33] STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 190, p. 4081-4193, 2001.
- [34] WOHUA, Z.; VALLIAPPAN, S. Continuum damage mechanics theory and application - Part I: Theory. International Journal of Damage Mechanics, v.7, p. 250-273, 1998.
- [35] VOYIADJIS, G.Z.; PARK, T. Anisotropic damage for the characterization of onset of macro-crack initiation in metals. International Journal of Damage Mechanics, v.5, p. 68-92, 1996.