

LVA – Laboratório de Vibrações e Acústica  
Universidade Federal de Santa Catarina

**MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO  
DE FORÇAS EM SISTEMAS  
VIBROACÚSTICOS**

**Henrique Gomes de Moura**

**Florianópolis / SC**

**Novembro de 2010**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

**EM ENGENHARIA MECÂNICA**



**MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS EM  
SISTEMAS VIBROACÚSTICOS**

Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte  
dos requisitos básicos para a obtenção do grau de Doutor em  
Engenharia Mecânica

**HENRIQUE GOMES DE MOURA**

Florianópolis, Novembro de 2010.



## AGRADECIMENTOS

Uma edificação necessita antes de qualquer estrutura e tijolos, pedras, areia e ferro, de uma base firme e inabalável para sustentá-la. De maneira análoga, ao longo de nossa jornada pela vida, podemos estruturar nossas realidades sobre bases firmes e inabaláveis, chamadas sonhos. Desta maneira busquei estruturar este momento tão importante da minha vida, desde minha preparação para o vestibular em engenharia mecânica. Por isso agradeço em primeiríssimo lugar a minha mãe, Ana Maria, por ter me ensinado esta máxima.

Quero agradecer pelos ensinamentos e apoio prestado pelo meu orientador, professor Arcanjo Lenzi. O Chefe, assim como prefere ser chamado e como também trata todos os seus orientados, dispensa quaisquer elogios, tamanha a sua simplicidade e sabedoria.

Este trabalho contou com a colaboração do professor Domingos A. Rade, permanente na Universidade Federal de Uberlândia. Agradeço por ter contribuído, com seu profundo conhecimento em mecânica, na estruturação dos trabalhos realizados nesta tese.

São vários os elementos necessários para atravessar com sucesso um período tão extenso de trabalho. Dentre estes elementos destaco a amizade, o conselho, a companhia e o amor. Durante a fase inicial deste trabalho, tive a grande felicidade de encontrar todos estes elementos em uma única pessoa, que hoje é minha esposa, Thaís. Espero agradecê-la durante toda a minha vida pelo apoio, pela espera, pelos longos telefonemas, e pela confiança em mim depositada.

Agradeço aos colegas de trabalho e amigos, Renato S. T. de Carvalho, Érico R. Fulco e Ricardo M. Doi, pela colaboração quanto à realização dos experimentos e modelagens numéricas.

Toda a infra-estrutura, equipamentos de medição e computadores utilizados neste trabalho foram concedidos pela empresa EMBRACO<sup>®</sup>, a quem dirijo um especial e sincero agradecimento.

Não poderia deixar de agradecer aos amigos de trabalho e de banda, Thiago C. de Sousa, Paulo H. Mareze e Leonardo Z. Rocha, com quem dividi momentos inesquecíveis em Florianópolis, tocando rock 'n roll.

Para finalizar, estendo meus agradecimentos a todos os meus colegas de trabalho, professores, amigos e familiares. Desejo-os muita saúde, felicidade e sucesso em suas carreiras profissionais.



Quanto mais difícil é o problema, mais simples é a solução.  
Quanto mais simples é o problema, mais complexa é a solução.  
Quanto mais complexo é o problema, mais difícil é a solução.





# **MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS EM SISTEMAS VIBROACÚSTICOS**

**HENRIQUE GOMES DE MOURA**

Esta tese foi julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na área de Vibrações e Acústica, e aprovada em sua forma final pelo programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Prof. Dr. Arcanjo Lenzi

---

Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Domingos Alves Rade – UFU

---

Prof. Dr. José Roberto de França Arruda – UNICAMP

---

Prof. Dr. Marcelo Krajnc Alves – UFSC

---

Prof. Dr. Roberto Jordan – UFSC

Novembro de 2010.



# MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS EM SISTEMAS VIBROACÚSTICOS

**Henrique Gomes de Moura**

Orientador: Prof. Arcanjo Lenzi, PhD.

Área de concentração: Vibrações e Acústica.

Número de páginas: 252.

O problema inverso da identificação de forças em sistemas mecânicos, utilizando suas respostas vibratórias e características dinâmicas, é uma clássica estratégia de investigação de ruído e manutenção preventiva em equipamentos vibroacústicos. Muitas vezes, a identificação inversa de forças é a única estratégia de acesso às forças aplicadas sobre um sistema, seja devido à falta de transdutores ou à dificuldade de acesso aos pontos requeridos do sistema. Em sua primeira parte, este trabalho apresenta uma revisão detalhada e comentada sobre os diversos métodos de identificação de forças desenvolvidos nas últimas décadas. Os métodos estão organizados de acordo com suas principais características, facilitando o entendimento e a seleção dos mesmos diante de uma requerida aplicação. A segunda parte deste trabalho traz ferramentas matemáticas para regularização de sistemas numericamente instáveis e mal condicionados, bastante encontrados em problemas inversos. Nesta etapa, um método de regularização, que se utiliza de operações realizadas por matrizes aleatórias, é proposto para aplicações em sistemas com elevado mal condicionamento numérico. A terceira parte deste trabalho apresenta o desenvolvimento de um método de decomposição de ruído gerado por sistemas vibroacústicos, denominado análise alternativa de caminhos de transferência. O método proposto possui um custo operacional reduzido em relação às técnicas tradicionais, além de ser mais robusto ao ruído experimental. Uma proposta de identificação de forças em baixas frequências está apresentada no final deste trabalho. A estratégia contempla o método da soma das acelerações ponderadas e está aplicada a um sistema vibratório sustentado por elementos de apoio de baixa transmissibilidade. Os resultados dos processos de identificação deste trabalho foram obtidos e validados a partir de simulações numéricas e testes experimentais.

**Palavras chave:** Identificação, forças, regularização, decomposição.



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>39</b>
1.1	Sobre a natureza da identificação	39
1.2	Sobre o problema inverso da identificação de forças	43
1.3	Objetivos	46
1.4	Experimentos realizados	47
<b>2</b>	<b>Fundamentos teóricos</b>	<b>49</b>
2.1	Sistemas lineares invariantes no tempo	49
2.2	Funções de transferência	51
2.3	Funções de resposta em frequência	54
2.4	Conceitos básicos sobre análise modal	57
2.5	Sobre a qualidade de processos de identificação de forças	63
<b>3</b>	<b>Ferramentas matemáticas aplicadas à resolução de problemas inversos</b>	<b>65</b>
3.1	Conceitos básicos sobre problemas inversos	65
3.2	Problemas mal postos e mal condicionados	70
3.3	Técnicas de otimização para problemas bem postos	72
3.3.1	Método dos mínimos quadrados	73

3.3.2	Decomposição em valores singulares	74
3.3.3	Solução por mínimos quadrados baseada em SVD	76
3.3.4	Análise das componentes principais	77
3.3.5	Aproximações matriciais	78
3.3.6	Método do gradiente conjugado	79
3.3.7	Algoritmos naturais aplicados à identificação de forças	80
3.4	Técnicas de Regularização	81
3.4.1	Decomposição em valores singulares truncada	82
3.4.2	Regularização de Tikhonov	82
3.4.3	Técnica de eliminação de ruído em curvas FRF baseada em SVD	84
3.4.4	Regularização das matrizes aleatórias	86
<b>4</b>	<b>Métodos de identificação de forças</b>	<b>97</b>
4.1	Métodos baseados em modelos analíticos	98
4.1.1	Método da soma das acelerações ponderadas	98
4.1.2	Método de decomposição de forças em séries ortogonais	100
4.1.3	Modelo inverso de diferenças finitas	102
4.1.4	Método de identificação de forças móveis em pontes	105
4.2	Métodos baseados em modelos espaciais	108

4.2.1	Método dos elementos finitos .....	108
4.2.2	Método estrutural inverso .....	109
4.2.3	Métodos naturais aplicados à identificação de forças .....	111
4.2.4	Método das coordenadas modais .....	112
4.3	Métodos baseados em modelos de resposta .....	114
4.3.1	Método de análise dos caminhos de transferência .....	114
4.3.2	Método operacional de análise dos caminhos de transferência .....	118
4.3.3	Método alternativo de análise dos caminhos de transferência .....	120
4.4	Seleção de métodos de identificação de forças .....	120
<b>5</b>	<b>Identificação de forças através de modelos de resposta com regularização .....</b>	<b>131</b>
5.1	Identificação de forças através da inversão de matrizes de FRF .....	133
5.2	Simulação de uma viga engastada com extremidade livre .....	134
5.3	Resultados numéricos .....	137
5.4	Resultados experimentais .....	146
<b>6</b>	<b>Uma metodologia alternativa para a análise de caminhos de transferência de ruído .....</b>	<b>171</b>
6.1	Método alternativo de análise dos caminhos de transferência .....	172

6.2	Aplicação em uma placa de alumínio com bordas livres	175
6.3	Resultados experimentais	177
<b>7</b>	<b>Identificação de forças através de modelos espaciais no domínio do tempo</b>	<b>197</b>
7.1	Simulação de uma viga engastada com extremidade livre	198
7.2	Detalhamento matemático do procedimento de identificação de força	198
7.3	Processos de identificação de forças	201
7.4	Procedimento de integração numérica para obtenção dos sinais de velocidade e deslocamentos da viga	202
7.5	Resultados numéricos	203
<b>8</b>	<b>Identificação de forças através de modelos analíticos no domínio do tempo</b>	<b>221</b>
8.1	Aplicação em um bloco de aço apoiado em quatro molas helicoidais	222
8.2	Identificação das forças efetivas sobre um corpo rígido	223
8.3	Reconstrução dos movimentos de corpo rígido: cálculo das coordenadas generalizadas	228
8.4	Resultados experimentais	231
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>243</b>
9.1	Sugestões para trabalhos futuros	245
<b>10</b>	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>247</b>



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Ensaio de tensão-deformação para corpos metálicos. (1) Regime elástico, $\sigma_c$ – tensão de escoamento, $\sigma_u$ – tensão máxima, $\sigma_r$ – tensão de ruptura, $\varepsilon$ – deformação correspondente. A constante $E$ representa o módulo Young do material, $\sigma$ representa a tensão normal e $\varepsilon$ a extensão do material, ambas na direção da carga aplicada.	39
1.2	Determinação do módulo Young de uma barra submetida a um carregamento transversal aplicado no ponto de máxima deflexão.	40
1.3	Técnicas de modelagem empregadas em sistemas físicos.	41
2.1	Representação de um sistema.	49
2.2	Sistema massa-mola com amortecimento viscoso.	50
2.3	Receptância de um sistema massa-mola amortecido.	55
2.4	Sistema massa-mola amortecido com 2 GDL.	59
3.1	Esquema padrão para análise de caminhos de transferência em sistemas mecânicos.	67
3.2	Reconstrução de forças aplicadas sobre uma placa excitada por um ventilador.	67
3.3	Densidade de probabilidade para as coordenadas epicentrais do evento sísmico analisado.	70
3.4	Representação gráfica da Equação 3.52, testada para um conjunto $\{\delta x_i\}_{i=1,3}$ .	92
4.1	Componentes do sistema de ar condicionado.	104
4.2	Posições as fontes de vibração na placa inferior.	104

4.3	Reconstrução das forças distribuídas em linhas de contornos, criadas sobre a placa inferior do ar condicionado, a uma frequência de 100 Hz	105
4.4	Força móvel sobre uma viga em balanço.	108
4.5	Representação esquemática de um sistema com $N$ entradas, $S$ saídas, e um receptor (microfone).	115
5.1	Conhecimento agregado versus aplicabilidade de modelos.	131
5.2	Representação esquemática do modelo espacial, com dez graus de liberdade (10 GDL), utilizado para os procedimentos de identificação de forças. Duas forças concentradas foram alvo da identificação.	134
5.3	Sinais das forças $f_1(\omega)$ e $f_2(\omega)$ , aplicados nas posições nodais da viga #5 e #9, respectivamente.	138
5.4	Curva de receptância $\{R(\omega)\}_{2,4}$ obtida com ruído.	139
5.5	Forças identificadas na posição nodal #3. Os gráficos (a), (b) e (c) representam as identificações de força sem regularização e com regularização RMA com as funções $cond()$ e $det()$ .	140
5.6	Forças identificadas na posição nodal #7. Representação semelhante à Figura 5.4.	140
5.7	Forças identificadas na posição nodal #5. Representação semelhante à Figura 5.4. Curvas exatas com maior espessura de linha.	141
5.8	Forças identificadas na posição nodal #9. Representação semelhante à Figura 5.6. Curvas exatas com maior espessura de linha.	141
5.9	Resultado do procedimento de regularização RMA DET para as simulações de identificação de forças. A regularização obteve 100% de eficiência.	144

5.10	Resultado do procedimento de regularização RMA COND para as simulações de identificação de forças. A regularização obteve 100% de eficiência.	144
5.11	Definição do parâmetro de regularização $[e_{2 \times 4}]$ a partir da análise da curva de receptância $\{R(\omega)\}_{2,4}$ . O módulo da diferença entre as ordenadas dos pontos $p_1(x,y)$ e $p_2(x,y)$ definem o valor do parâmetro em questão.	146
5.12	Viga engastada com extremidade livre utilizada no experimento de identificação de forças. Quatro transdutores de carga idênticos (22,6 gr) e uma massa equivalente foram utilizados sobre o modelo experimental.	147
5.13	Foto retirada dos instrumentos utilizados no experimento de identificação de forças na viga.	148
5.14	Foto retirada do sistema de aquisição de sinais (LMS SCADAS III), amplificadores de potência (B&K mod. 2671), e microcomputador. No canto inferior direito, é possível visualizar os suportes para fixação dos excitadores eletrodinâmicos, utilizados para aplicar esforços transversais na viga.	149
5.15	Resultado do procedimento de regularização RMA DET para a identificação de forças no modelo físico da viga. A regularização obteve 76,8% de eficiência.	150
5.16	Resultado do procedimento de regularização RMA COND para a identificação de forças no modelo físico da viga. A regularização obteve 75,7% de eficiência.	151
5.17	Curva de aceleração $\{A(\omega)\}_{1 \times 5}$ com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares.	152
5.18	Procedimento de filtragem do trecho #1 da curva de aceleração $\{A(\omega)\}_{1 \times 5}$ . Todos os 101 valores singulares estão considerados.	152

5.19	Procedimento de filtragem do trecho #1 da curva de aceleração $\{A(\omega)\}_{1 \times 5}$ , com apenas 25 valores singulares.	153
5.20	Procedimento de filtragem do trecho #1 da curva de aceleração $\{A(\omega)\}_{1 \times 5}$ , com apenas 20 valores singulares.	153
5.21	Forças identificadas na posição nodal #3. Faixa de frequência de 0 a 4686 Hz. Curvas medidas com maior espessura de linha.	158
5.22	Forças identificadas na posição nodal #5. Faixa de frequência de 0 a 4686 Hz. Curvas medidas com maior espessura de linha.	159
5.23	Forças identificadas na posição nodal #3. Faixa de frequência de 0 a 500 Hz. Curvas exatas com maior espessura de linha.	160
5.24	Forças identificadas na posição nodal #5. Faixa de frequência de 0 a 500 Hz. Curvas exatas com maior espessura de linha.	161
5.25	Curvas de aceleração $\{A(\omega)\}_{1 \times 1}$ (a), $\{A(\omega)\}_{1 \times 2}$ (b) e $\{A(\omega)\}_{1 \times 3}$ (c), com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares.	162
5.26	Curvas de aceleração $\{A(\omega)\}_{1 \times 4}$ (a), $\{A(\omega)\}_{1 \times 5}$ (b) e $\{A(\omega)\}_{2 \times 1}$ (c), com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares..	163
5.27	Curvas de aceleração $\{A(\omega)\}_{2 \times 2}$ (a), $\{A(\omega)\}_{2 \times 3}$ (b) e $\{A(\omega)\}_{2 \times 4}$ (c), com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares.	164
5.28	Curvas de aceleração $\{A(\omega)\}_{2 \times 5}$ (a), $\{A(\omega)\}_{3 \times 1}$ (b) e $\{A(\omega)\}_{3 \times 2}$ (c), com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares.	165
5.29	Curvas de aceleração $\{A(\omega)\}_{3 \times 3}$ (a), $\{A(\omega)\}_{3 \times 4}$ (b) e $\{A(\omega)\}_{3 \times 5}$ (c), com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares.	166

5.30	Curvas de aceleração $\{A(\omega)\}_{4 \times 1}$ (a), $\{A(\omega)\}_{4 \times 2}$ (b) e $\{A(\omega)\}_{4 \times 3}$ (c), com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares.	167
5.31	Curvas de aceleração $\{A(\omega)\}_{4 \times 4}$ (a), $\{A(\omega)\}_{4 \times 5}$ (b) e $\{A(\omega)\}_{5 \times 1}$ (c), com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares.	168
5.32	Curvas de aceleração $\{A(\omega)\}_{5 \times 2}$ (a), $\{A(\omega)\}_{5 \times 3}$ (b) e $\{A(\omega)\}_{5 \times 4}$ (c), com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares.	169
5.33	Curva de aceleração $\{A(\omega)\}_{5 \times 1}$ com ruído e filtrada pela técnica de eliminação de valores singulares.	170
6.1	Placa de alumínio livremente apoiada. (a) Excitadores eletrodinâmicos e transdutores de carga (b) acelerômetros.	176
6.2	Curva identificada de FRF vibro-acústica $B_1(\omega) = f_1(\omega)/p(\omega)$ . Erro cometido sobre a energia espectral de 0,48%. Resultados referentes ao primeiro procedimento de identificação.	179
6.3	Curva identificada de FRF vibro-acústica $B_2(\omega) = f_2(\omega)/p(\omega)$ . Erro cometido sobre a energia espectral de 1,05%. Resultados referentes ao primeiro procedimento de identificação.	180
6.4	Força identificada na posição do excitador eletrodinâmico #1. Resultados referentes ao primeiro procedimento de identificação.	180
6.5	Força identificada na posição do excitador eletrodinâmico #2. Resultados referentes ao primeiro procedimento de identificação.	181
6.6	Soma das pressões parciais identificadas no receptor (microfone). Resultados referentes ao primeiro procedimento de identificação.	181

6.7	Curva identificada de FRF vibro-acústica $B_1(\omega) = f_1(\omega)/p(\omega)$ . Erro sobre a densidade espectral de 5,62%. Resultados referentes ao segundo procedimento de identificação.	183
6.8	Curva identificada de FRF vibro-acústica $B_2(\omega) = f_2(\omega)/p(\omega)$ . Erro sobre a densidade espectral de 10,71%. Resultados referentes ao segundo procedimento de identificação.	183
6.9	Soma das pressões parciais identificadas no receptor (microfone). Resultados referentes ao segundo procedimento de identificação.	184
6.10	Curva identificada de FRF vibro-acústica $B_1(\omega) = f_1(\omega)/p(\omega)$ . Erro sobre a densidade espectral de 4,84%. Resultados referentes ao terceiro procedimento de identificação.	185
6.11	Curva identificada de FRF vibro-acústica $B_2(\omega) = f_2(\omega)/p(\omega)$ . Erro sobre a densidade espectral de 9,62%. Resultados referentes ao terceiro procedimento de identificação.	185
6.12	Soma das pressões parciais identificadas no receptor (microfone). Resultados referentes ao terceiro procedimento de identificação.	186
6.13	Força identificada na posição do excitador eletrodinâmico #1. Resultados referentes ao quarto procedimento de identificação.	187
6.14	Força identificada na posição do excitador eletrodinâmico #2. Resultados referentes ao quarto procedimento de identificação.	188
6.15	Soma das pressões parciais identificadas no receptor (microfone). Resultados referentes ao quarto procedimento de identificação.	188
6.16	Soma das pressões parciais identificadas no receptor, com e sem regularização. Resultados referentes ao quinto procedimento de identificação.	191
6.17	Curvas de aceleração $\{A_{11}(\omega)\}$ , com ruído e filtrada.	191

6.18	Curvas de aceleração $\{A_{12}(\omega)\}$ , com ruído e filtrada.	192
6.19	Curvas de aceleração $\{A_{21}(\omega)\}$ , com ruído e filtrada.	192
6.20	Curvas de aceleração $\{A_{22}(\omega)\}$ , com ruído e filtrada.	193
6.21	Resultados do processo de identificação de forças realizado para o excitador #1, com e sem regularização.	193
6.22	Resultados do processo de identificação de forças realizado para o excitador #2, com e sem regularização.	194
6.23	Resultado do procedimento de regularização RMA COND para a identificação das curvas de FRF vibro-acústicas $\{h(\omega)\}_{2 \times 1}$ . A regularização obteve 42,4% de eficiência.	195
7.1	Resultados temporais do processo de integração dos sinais de velocidade e deslocamento na posição #3.	205
7.2	Resultados espectrais do processo de integração dos sinais de velocidade $V(f)$ e deslocamento $X(f)$ na posição #3.	203
7.3	Erro cometido no processo de identificação dos valores generalizados de massa, amortecimento e rigidez.	205
7.4	Forças inerciais referentes ao 1° (a) e 2° (b) modo. Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 1,4% e 3,8%, respectivamente.	206
7.5	Forças inerciais referentes ao 3° (a) 4° (b) modo. Identificação com... [idem acima]. Os erros RMS são 1,9% e 0,9%, respectivamente.	207
7.6	Forças inerciais referentes ao 5° (a) e 6° (b) modo. Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 4,6% e 17,6%, respectivamente.	207

7.7	Forças inerciais referentes ao 7° (a) e 8° (b) modo. Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 37,9% e 32,4%, respectivamente.	207
7.8	Forças inerciais referentes ao 9° (a) e 10° (b) modo. Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 53,6% e 71,2%, respectivamente.	208
7.9	Forças dissipativas referentes ao 1° (a) e 2° (b) modo. Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 37,0% e 9,8%, respectivamente.	208
7.10	Forças dissipativas referentes ao 3° (a) e 4° (b) modo. Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 33,2% e 5,1%, respectivamente.	208
7.11	Forças dissipativas referentes ao 5° (a) e 6° (b) modo. Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 52,0% e 43,1%, respectivamente.	209
7.12	Forças dissipativas referentes ao 7° (a) e 8° (b) modo. Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 93,5% e 84,3%, respectivamente.	209
7.13	Forças dissipativas referentes ao 9° (a) e 10° (b) modo. Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 76,1% e 90,1%, respectivamente.	209
7.14	Forças externas identificadas pelo acelerômetro #3 (a) e #7 (b). Identificação com ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 64,7% e 96,6%, respectivamente.	210
7.15	Forças inerciais referentes ao 1° (a) e 2° (b) modo. Identificação... [idem acima]. Os erros RMS são 1,8% e 11,9%, respectivamente.	211
7.16	Forças inerciais referentes ao 3° (a) e 4° (b) modo. Identificação sem ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 14,6% e 5,5%, respectivamente.	211



7.17	Forças dissipativas referentes ao 1° (a) e 2° (b) modo. Identificação sem ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 0,6% e 0,5%, respectivamente.	212
7.18	Forças dissipativas referentes ao 3° (a) e 4° (b) modo. Identificação sem ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 5,9% e 5,4%, respectivamente.	212
7.19	Forças elásticas referentes ao 1° (a) e 2° (b) modo. Identificação sem ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 0,1% e 0,3%, respectivamente.	212
7.20	Forças elásticas referentes ao 3° (a) e 4° (b) modo. Identificação sem ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 0,4% e 9,9%, respectivamente.	213
7.21	Forças externas identificadas pelos acelerômetros #3 (a) e #7 (b). Identificação sem ruído nos dados de entrada. Os erros RMS são 26,9% e 28,9%, respectivamente.	214
7.22	Forças externas identificadas pelos acelerômetros #3 (a) e #7 (b). Configuração [1,3,7,10]. Os erros RMS são 2,3% e 0,7%, respectivamente.	216
7.23	Forças externas identificadas pelos acelerômetros #3 (a) e #7 (b). Configuração [2,3,7,10]. Os erros RMS são 6,2% e 3,0% respectivamente.	216
7.24	Forças externas identificadas pelos acelerômetros #3 (a) e #7 (b). Configuração [3,4,7,8]. Os erros RMS são 3,4% e 0,2%, respectivamente.	217
7.25	Forças... [idem acima]. Configuração [3,4,7,10]. Os erros RMS são 5,2% e 3,1%, respectivamente.	217

8.1	Bloco de aço apoiado em quatro molas helicoidais. Sobre o sistema estão posicionados 6 transdutores de aceleração, nos pontos A, B e C. Outros 5 transdutores de força (D) foram posicionados no centro das faces visíveis do sistema.	222
8.2	Modelo analítico do sistema bloco sobre molas, utilizado na identificação de forças. O bloco está apoiado em quatro molas, posicionadas nos quatro vértices inferiores (A, B C e D). Em seu modelo mais simplificado, as molas podem ser representadas, cada uma, por três parâmetros de rigidez, definidos ao longo dos eixos cartesianos.	224
8.3	Coeficientes angulares utilizados nas equações de movimento descritas para o sistema bloco sobre molas. Demais coeficientes podem ser obtidos por relações trigonométricas semelhantes.	225
8.4	Faixa de operação do método SWAT. Sistema composto por uma massa acoplada a elementos de apoio.	226
8.5	Coordenada generalizada de translação X (a), Y (b) e Z (c), identificadas. O erro RMS, em todas as coordenadas, é inferior a 1%.	231
8.6	Funções de transferência referente às coordenadas generalizadas X (a), Y (b) e Z (c).	233
8.7	Curva resultante da soma das funções de transferência das coordenadas generalizada X, Y e Z.	233
8.8	Foto retirada do sistema instrumentada para a configuração #2. O excitador eletrodinâmico foi posicionado ao longo do eixo Y.	234
8.9	Forças efetivas identificadas em 100 Hz (a) e 250 Hz (b), ao longo do eixo X. Os erros RMS são 0,41% e 1,05%.	235

8.10	Forças efetivas identificadas em 525 Hz (a) e 710 Hz (b), ao longo do eixo X. Os erros RMS são 1,12% e 1,87%.	236
8.11	Forças efetivas identificadas em 880 Hz (a) e 1160 Hz (b), ao longo do eixo X. Os erros RMS são 16,57% e 11,67%.	236
8.12	Forças efetivas identificadas em 1700 Hz (a) e 2000 Hz (b), ao longo do eixo X. Os erros RMS são 7,49% e 8,96%.	236
8.13	Forças efetivas identificadas em 2380 Hz (a) e 2630 Hz (b), ao longo do eixo X. Os erros RMS são 146,35% e 30,46%.	237
8.14	Forças efetivas identificadas em 2720 Hz (a) e 3125 Hz (b), ao longo do eixo X. Os erros RMS são 932,60% e 142,83%.	237
8.15	Forças efetivas identificadas em 100 Hz (a) e 250 Hz (b), ao longo do eixo Y. Os erros RMS são 0,97% e 0,11%.	237
8.16	Forças efetivas identificadas em 525 Hz (a) e 710 Hz (b), ao longo do eixo Y. Os erros RMS são 0,08% e 1,77%.	238
8.17	Forças efetivas identificadas em 880 Hz (a) e 1160 Hz (b), ao longo do eixo Y. Os erros RMS são 2,50% e 76,79%.	238
8.18	Forças efetivas identificadas em 1700 Hz (a) e 5,09 Hz (b), ao longo do eixo Y. Os erros RMS são 3,73% e 5,09%.	238
8.19	Forças efetivas identificadas em 2380 Hz (a) e 2630 Hz (b), ao longo do eixo Y. Os erros RMS são 6,79% e 32,54%.	239
8.20	Forças efetivas identificadas em 2720 Hz e 3050 Hz (b), ao longo do eixo Y. Os erros RMS são 10,75% e 40,34%.	239
8.21	Forças efetivas identificadas em 100 Hz (a) e 250 Hz (b), ao longo do eixo Z. Os erros RMS são 4,78% e 5,04%.	239

8.22	Força efetiva identificada em 525 Hz (a) e 710 Hz (b), ao longo do eixo Z. Os erros RMS são 8,49% e 6,82%.	240
8.23	Forças efetivas identificadas em 850 Hz (a) e 970 Hz (b), ao longo do eixo Z. Os erros RMS são 2,68% e 28,05%.	240
8.24	Forças efetivas identificadas em 1300 Hz (a) e 1700 Hz (b), ao longo do eixo Z. Os erros RMS são 2,60% e 4,15%.	240
8.25	Forças efetivas identificadas em 2000 Hz (a) e 2400 Hz (b), ao longo do eixo Z. Os erros RMS são 9,25% e 71,54%.	241
8.26	Forças efetivas identificadas em 2710 Hz (a) e 3030 Hz (b), ao longo do eixo Z. Os erros RMS são 413,64% e 1099,42%.	241

## LISTA DE TABELAS

4.1	Domínio de análise para os métodos de identificação de forças.	122
4.2	Variáveis de entrada necessárias para os métodos de identificação de forças. Legenda – R: respostas em situ, L: respostas medidas em laboratório, F: forças medidas em laboratório, P: pressões sonoras medidas em laboratório, A: parâmetros físicos do modelo analítico, FDTD: modelo em diferenças finitas, FEM: modelo em elementos finitos, CR: corpos rígidos, MD: modos flexíveis.	123
4.3	Procedimentos internos aos métodos de identificação de forças.	124
4.4	Técnicas matemáticas para os processos de identificação de forças. (*) Pode ser substituída por modelos analíticos.	126
4.5	Mal condicionamento numérico dos métodos de identificação de forças.	128
4.6	Possibilidade de medição de forças em posições do sistema não instrumentadas.	130
5.1	Parâmetros físicos utilizados no modelo analítico da viga.	137
5.2	Erros nas simulações de identificação de forças.	143
5.3	Resultados dos procedimentos de filtragem de ruído realizados nas curvas de aceleração do modelo experimental da viga. Cada trecho foi decomposto em 101 valores singulares.	154
5.4	Erros na identificação de forças sobre o modelo físico da viga. Faixa de frequência de 0 a 4686 Hz.	155
5.5	Erros na identificação de forças sobre o modelo físico da viga. Faixa de frequência de 0 a 500 Hz.	156

6.1	Níveis de ruído adicional nos dados experimentais.	177
6.2	Erros em decibéis [ <i>dBA</i> ] no processo de identificação da soma das pressões parciais no receptor (microfone). Resultados referentes ao primeiro procedimento de identificação.	182
6.3	Erros em decibéis [ <i>dBA</i> ] no processo de identificação da soma das pressões parciais no microfone. Resultados referentes ao segundo procedimento de identificação.	184
6.4	Erros em decibéis [ <i>dBA</i> ] no processo de identificação da soma das pressões parciais no receptor (microfone). Resultados referentes ao terceiro procedimento de identificação.	186
6.5	Erros em decibéis [ <i>dBA</i> ] no processo de identificação da soma das pressões parciais no receptor (microfone). Resultados referentes ao quarto procedimento de identificação, sem regularização (LS).	189
6.6	Erros em decibéis [ <i>dBA</i> ] no processo de identificação da soma das pressões parciais no receptor (microfone). Resultados referentes ao quarto procedimento de identificação, com regularização de Tikhonov.	189
6.7	Erros em decibéis [ <i>dBA</i> ] no processo de identificação da soma das pressões parciais no receptor, com regularização. Resultados referentes ao quinto procedimento de identificação.	190
6.8	Resultados dos procedimentos de filtragem de ruído realizados nas curvas de aceleração utilizadas nos processo de identificação de forças. Cada trecho foi decomposto em 41 valores singulares.	194
6.9	Erros na identificação de forças sobre a placa. Faixa de frequência de 0 a 1250 Hz.	195

7.1	Erros nos processos de integração dos sinais de velocidade e deslocamentos. As acelerações utilizadas foram contaminadas com ruído.	204
8.1	Valores de frequência das forças aplicadas sobre o bloco. Doze (12) testes de identificação foram realizados em cada eixo.	234
8.2	Erro RMS nas identificações das forças efetivas, em cada configuração. Doze (12) testes de identificação foram realizados em cada eixo. Células em cinza indicam resultados não satisfatórios.	235





## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

RMS – *Root Mean Value.*

LTi – *Linear Time Invariant.*

GDL – *Grau de liberdade.*

IRF – *Impulsive Response Functions;*

FRF – *Frequency Response Function.*

CN – *Condition Number.*

EVD – *Eigenvalue Value Decomposition.*

SVD – *Singular Value Decomposition.*

TSVD – *Truncated Singular Value Decomposition.*

PCA – *Principal Component Analysis.*

RMA – *Random Matrices.*

TPA – *Transfer Path Analysis.*

OTA – *Operational Transfer Path Analysis.*

ATPA – *Alternative Transfer Path Analysis.*

SWAT – *Sum of Weighted Accelerations Technique.*

FAT – *Force Analysis Technique.*

FEM – *Finite Elements Method.*

ISF – *Inverse Structural Filter.*

GA – *Genetic Algorithm.*

PSO – *Particle Swarm Optimization.*

MCM – *Método das Coordenadas Modais;*

COND – *Condicionamento matricial;*

DET – *Determinante.*

dBA – *Valor em decibéis obtidos com ponderação do tipo A.*

CR – *Corpo Rígido;*



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Sistemas de coordenadas adotados:

Sistema Cartesiano –  $x, y, z$  [ $m$ ];

### Sistema de unidades adotado: SI

$m$  – metro;

$kg$  – kilograma;

$s$  – segundo;

$N$  – Newton [ $kg \cdot m/s^2$ ];

$Pa$  – Pascal [ $kg/m \cdot s^2$ ];

$rad$  – radiano;

$Hz$  – Hertz [ $1/s$ ];

### Parâmetros Físicos:

$E$  – módulo de elasticidade ou módulo *Young* [ $N/m$ ];

$I$  – momentos de inércia de área [ $m^4$ ];

$\rho$  – densidade linear de massa [ $kg/m$ ];

$A$  – área transversal [ $m^2$ ];

$m$  – massa concentrada [ $kg$ ];

$c$  – amortecimento concentrado [ $N \cdot s/m$ ];

$k$  – rigidez concentrada [ $N/m$ ];

$\xi$  – fator de amortecimento;

$\nu$  – coeficiente de Poisson;

### Variáveis geométricas:

$L, d, l$  – comprimentos lineares [ $m$ ];

$a, b, h, t$  – espessuras [ $m$ ]

$\lambda$  – deflexão vertical;

$\phi, r$  – coeficientes angulares;

## Variáveis cinemáticas:

$\omega$  – velocidade angular [ $rad/s$ ];  
 $T, t, \tau$  – tempos [ $s$ ];  
 $X, x, Y, y, Z, z$  – respostas vibratórias;  
 $p$  – resposta acústica;  
 $z$  – variável de estado;  
 $f$  – frequência [ $Hz$ ];  
 $q$  – coordenada modal;  
 $v$  – velocidade [ $m/s$ ];  
 $w$  – deslocamento transversal [ $m$ ];  
 $s$  – soma de acelerações ponderadas;  
 $c$  – velocidade de propagação de ondas sonoras [ $m/s$ ];

## Matrizes:

$M$  – matriz global de massa;  
 $K$  – matriz global de rigidez;  
 $E$  – matriz complexa arbitrária;  
 $C$  – matriz global de amortecimento de saída (espaço de estados);  
 $C$  – matriz de posicionamento de transdutores (espaço de estados);  
 $C$  – matriz de Tikhonov;  
 $H$  – função de transferência no domínio da frequência;  
 $A$  – matriz de acelerância e matriz global de espaço de estados;  
 $A$  – operador matricial integro-diferencial;  
 $A$  – matriz de funções de transferência estruturais;  
 $B$  – matriz global de entrada (espaço de estados);  
 $B$  – matriz de funções de transferência vibro-acústicas;  
 $R$  – matriz de receptância;  
 $D$  – matriz de reação (espaço de estados);  
 $T$  – Jacobiano;  
 $I$  – matriz identidade;  
 $\Psi, \psi, \Phi, \phi$  – autovetores;  
 $k_{g_i}$  – matriz de valores generalizados de rigidez;  
 $m_{g_i}$  – matriz de valores generalizados de massa;  
 $c_{g_i}$  – matriz de valores generalizados de amortecimento;  
 $S, D, \Sigma$  – matrizes de valores singulares;

$V, U, v, u$  – matrizes ortogonais unitárias;  
 $W$  – matriz de ponderações;  
 $\Theta$  – matriz operacional de integração;  
 $P$  – matriz de respostas acústicas;  
 $h$  – matriz de funções de transferência vibro-acústicas;  
 $H$  – matriz operacional de respostas vibratórias;  
 $L$  – fator de amplificação dinâmica de massa;  
 $G$  – função de transferência inversa no domínio de Laplace;  
 $G$  – funções de respostas impulsivas;  
 $G$  – fator de amplificação dinâmica de isoladores (rigidez e amortecimento);

### **Operadores matemáticos:**

$\partial$  – derivada parcial;  
 $d$  – derivada total e variação infinitesimal;  
 $\dot{x}$  – derivada total da variável  $x$  em relação ao tempo;  
 $\ddot{x}$  – derivada dupla da variável  $x$  em relação ao tempo;  
 $\mathcal{L}$  – transformada de Laplace;  
 $\mathfrak{F}$  – transformada de Fourier;  
 $G$  – função de transferência no domínio de Laplace;  
 $\Delta$  – variação linear;  
 $\Sigma$  – somatório;  
 $\delta$  – perturbação numérica;

### **Forças e Tensões e deformações:**

$\tau, \sigma$  – tensões [ $Pa$ ];  
 $\varepsilon$  – deformação longitudinal [ $m/m$ ];  
 $d$  – deformação elástica [ $m$ ];  
 $F, f, u$  – forças aplicadas [ $N$ ];  
 $F_{g_i}, f_{g_i}$  – forças generalizadas;

### **Índices matriciais:**

$n$  – número de forças aplicadas e índice modal;  
 $m$  – número de respostas vibratórias e posto matricial;

$k$  – número de respostas acústicas e posto matricial;  
 $q$  – número de linhas espectrais;  
 $s$  – número de medições;  
 $N$  – número de grau de liberdade;  
 $i, j, k$  – índices para vetores, matrizes ou somatório;

### **Constantes, coeficientes e fatores:**

$M, N, a, b, d, const$  – constantes reais;  
 $\alpha, \beta$  – fatores de proporcionalidade;  
 $\beta$  – taxa de amortecimento;  
 $\lambda, \omega, \theta, \Lambda$  – autovalores;  
 $\lambda, p, q$  – parâmetros de regularização;  
 $\sigma$  – valor singular;  
 $h$  – função de transferência no domínio da frequência;  
 $g$  – função de resposta impulsiva;

### **Funções, resíduos, probabilidades e desvios:**

$I, \Phi, J$  – funcionais genéricos;  
 $\Theta, T, \rho, g$  – funções de densidade de probabilidade gaussiana;  
 $\sigma$  – desvio padrão;  
 $\varepsilon, \eta, r$  – incerteza numérica;  
 $R$  – resíduo numérico;  
 $P$  – gradiente conjugado;  
 $\xi$  – desvio sobre forças aplicadas  $[N]$ ;  
 $\phi$  – funções ortogonais;

## 1 Introdução

Este capítulo introduz o problema da modelagem e identificação de sistemas em engenharia mecânica, com comentários pertinentes sobre as limitações e vantagens ligadas à aplicação de cada metodologia. Os objetivos deste trabalho, dirigidos ao problema de identificação de forças, estão apresentados no final deste Capítulo.

### 1.1 Sobre a natureza da identificação

Na matemática, a palavra identificação se refere a um processo de determinação ou, melhor dizendo, de ajuste de uma ou mais variáveis pertencentes a um modelo matemático que representem os aspectos essenciais de um sistema físico em observação. O ajuste de variáveis é geralmente feito através do emprego de métodos de otimização, iterativos ou não, aplicados aos dados experimentais do sistema.

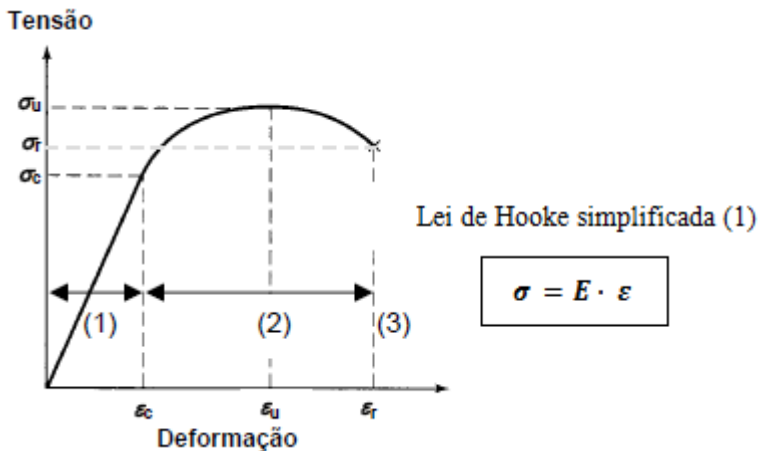


Fig. 1.1 – Ensaio de tensão-deformação para corpos metálicos. (1) regime elástico,  $\sigma_c$  – tensão de escoamento,  $\sigma_u$  – tensão máxima,  $\sigma_r$  – tensão de ruptura,  $\epsilon$  – deformação correspondente. A constante  $E$  representa o módulo *Young* do material,  $\sigma$  representa a tensão normal e  $\epsilon$  a deformação do material, ambas na direção da carga aplicada.

Na mecânica dos materiais, por exemplo, é comum se caracterizar experimentalmente o regime elástico de barras metálicas sob flexão. Para um caso específico onde o material possa ser considerado elástico homogêneo e isotrópico, sujeito a apenas uma carga transversal aplicada, a modelagem do sistema pode ser feita a partir da forma simplificada da Lei de Hooke, apresentada na Figura 1.1.

O valor do módulo *Young* pode ser determinado através do método dos mínimos quadrados (*Least Squares – LS*), utilizando leituras de deflexão e dos carregamentos aplicados no ponto de máxima deflexão da viga, segundo o esquema mostrado na Figura 1.2 [Flexão circular de um aço, 2007].

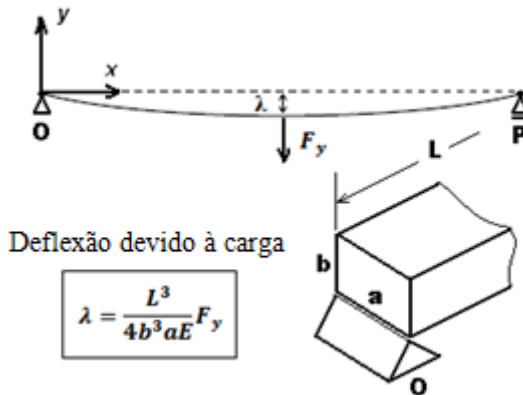


Fig. 1.2 – Determinação do módulo *Young* de uma barra submetida a um carregamento transversal aplicado no ponto de máxima deflexão.

Como pode ser visto neste exemplo, a modelagem do sistema é o ponto de partida para a identificação, pois ela define e relaciona as variáveis do problema matemático, buscando a representação do estado dinâmico ou estático do sistema físico em questão. Em situações mais realísticas, modelos matemáticos mais complexos podem ser empregados, fato que pode levar a processos de identificação mais laboriosos.



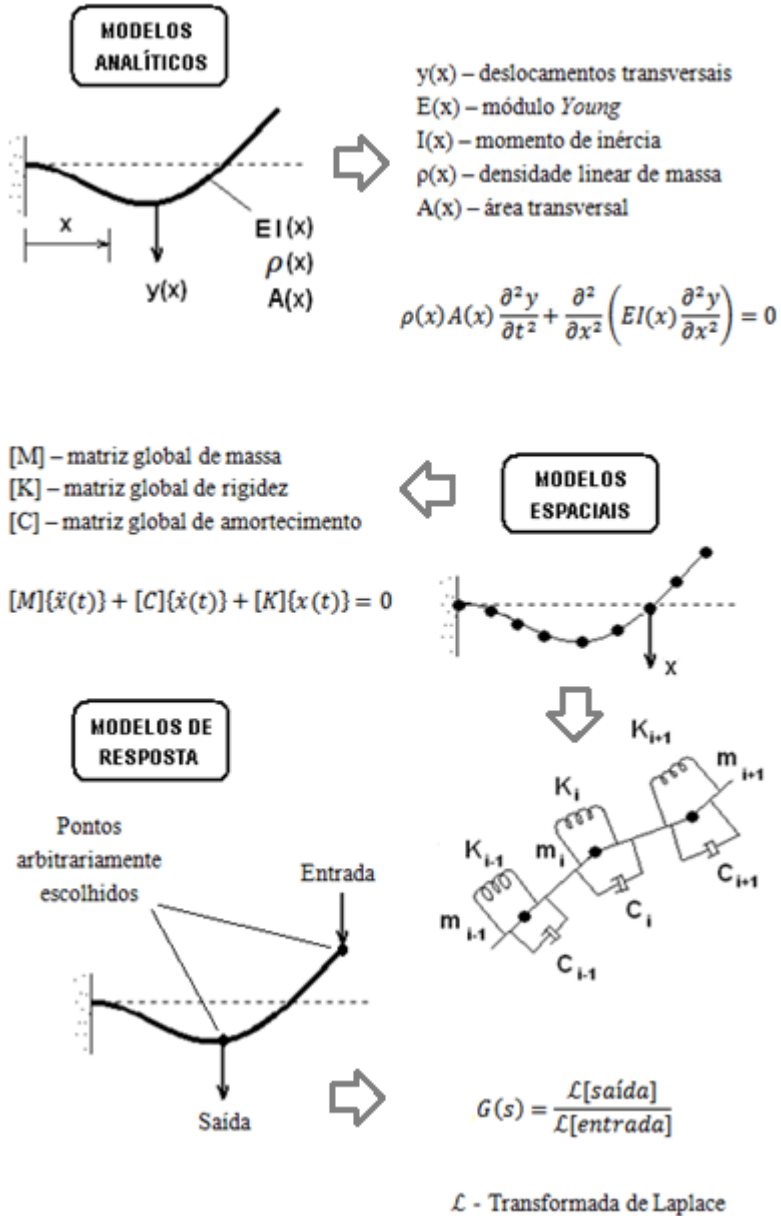


Fig. 1.3 – Técnicas de modelagem empregadas em sistemas físicos.

Em se tratando de sistemas mecânicos submetidos a esforços externos e/ou internos, constantes ou transientes, concentrados ou distribuídos ao longo da estrutura, as diversas técnicas de modelagem podem ser convenientemente divididas nos grupos apresentados na Figura 1.3.

Os modelos analíticos são compostos por soluções desenvolvidas especialmente para os sistemas em análise, com precisão e abrangência determinadas de acordo com as necessidades estabelecidas, e respeitando as limitações matemáticas impostas.

Tais limitações se referem às dimensões, às formas geométricas, às condições de contorno, e à própria compreensão dos fenômenos estudados. O movimento de um projétil rígido, por exemplo, pode ser estudado a partir da cinemática e da dinâmica, através de uma ou mais funções que interpoem sua trajetória desde seu lançamento até a colisão. Quaisquer prováveis mudanças em sua trajetória, em decorrência da força resultante sobre o projétil, devem ser consideradas para que o alvo seja atingido com a precisão buscada.

Assim, os modelos analíticos ficam restritos a um conjunto de funções matemáticas previamente conhecidas, dificultando as suas aplicações em situações práticas que requeiram soluções com elevada flexibilidade e robustez.

Os modelos espaciais visam à representação discreta do sistema real, construída a partir da combinação de elementos mecânicos simplificados, capazes de aproximar os efeitos de inércia, as deformações e as perdas energéticas internas do sistema. Acoplados a partir de um conjunto de equações de movimento, tais elementos constituem as conhecidas matrizes globais de massa, rigidez e amortecimento.

Este modelo é bastante conhecida desde os primórdios da mecânica clássica [Zienkiewicz, 2000; Cook et al., 2002]. Mas foi só depois do advento da computação moderna, que esta técnica passou a ser amplamente utilizada na engenharia.

Vários pacotes comerciais trabalham atualmente com soluções baseadas no método dos elementos finitos, e em outras metodologias espaciais tais como volumes finitos, elementos de contorno, etc. [Fahy e

---

---

Walker, 1998]. Todas estas ferramentas têm como objetivo a discretização e a simulação do sistema real, de acordo com as condições de contorno e carregamento impostas para o problema.

Por apresentar elevada flexibilidade e robustez, os modelos espaciais são, sem sombra de dúvidas, os mais utilizados em aplicações que exijam conhecimento sobre o comportamento mecânico e dinâmico de sistemas complexos.

Por último, resta comentar sobre os modelos de respostas, que inferem de uma maneira mais simplista sobre o comportamento de um sistema. Os modelos de resposta são construídos a partir de equações diferenciais que relacionam as entradas (estímulos) com as saídas (respostas) do sistema em observação.

Os modelos de respostas independem da magnitude e natureza das variáveis consideradas, e podem ser facilmente estabelecidos experimentando as saídas do sistema com entradas conhecidas, sem qualquer conhecimento sobre a estrutura física interna do mesmo. Os sistemas lineares e invariantes com o tempo (LTI) são bastante utilizados em modelos de resposta na engenharia [Chen, 1999].

Os modelos de resposta são largamente utilizados na indústria, devido aos prazos extremamente reduzidos, à facilidade de implementação, e aos benefícios da sua análise. Também chamados de técnicas de análise de caminhos de transferência, podem ser aplicados para identificar faixas de operação com maior sensibilidade (maiores relações entre as entradas e as saídas), bem como partes do sistema com maiores contribuições sobre as saídas observadas [Padilha, 2006].

O Capítulo 2 traz alguns aspectos teóricos importantes para a compreensão das modelagens apresentadas ao longo deste trabalho. Também serão analisadas algumas questões importantes sobre a quantidade e o tipo de transdutores de vibração e acústica necessários para o problema de identificação de forças.

## 1.2 Sobre o problema inverso da identificação de forças

O problema inverso da identificação de forças nada mais é do que a tentativa de estimar, a partir de um modelo matemático e de

respostas observadas, as forças aplicadas sobre um sistema. O modelo matemático inverso é determinado invertendo as equações matemáticas resultantes da modelagem do sistema físico.

Por exemplo, se um modelo de resposta é utilizado considerando as forças aplicadas como as entradas, e as acelerações medidas como as saídas do sistema, um modelo matemático inverso pode ser escrito na forma seguinte.

$$\{f\}_{m \times 1} = [A]_{m \times n}^+ \{\ddot{x}\}_{n \times 1} \quad 1.1$$

As forças são obtidas a partir do produto da matriz pseudo-inversa da matriz de aceleração  $[A]^+$  pelo vetor das acelerações medidas. O problema inverso de identificação de forças é essencial em muitas situações práticas da engenharia, nas quais o processo de medição direta das forças aplicadas é difícil, se não impossível.

A dificuldade ou impossibilidade de medição direta de forças ocorre devido à dificuldade de acesso aos pontos de aplicação das forças e/ou à falta de transdutores de força em aplicações específicas.

A dificuldade de acesso aos pontos de aplicação das forças pode, por exemplo, ser facilmente entendida através de uma aplicação naval realizada por Otsuka et al. (2007). Neste trabalho, as forças aplicadas pelo pistão sobre a estrutura do motor foram identificadas através de funções de resposta em frequência, e respostas medidas ao longo da haste de apoio para a hélice do motor. A medição direta de tais esforços, gerados dentro da cavidade do pistão, é praticamente impossível, devido às dificuldades de instrumentação e resistência dos transdutores.

Para um melhor entendimento da importância dos processos de identificação de força na engenharia, algumas situações foram listadas a seguir.

- Modelos preditivos: estimativa de tempo de vida de componentes, devido aos seus comportamentos dinâmicos e aos carregamentos externos aplicados.

- Problemas de otimização: informação sobre as forças aplicadas para tomadas de decisão em projetos mecânicos.
- Controle de qualidade: estimativa das forças aplicadas sobre um determinado equipamento durante testes iniciais, para verificação da qualidade dos processos de fabricação.
- Controle ativo de vibrações: controle dinâmico de sistemas mecânicos sujeitos a carregamentos externos variáveis.
- Identificação de fontes: caracterização de fontes de ruído e vibração em equipamentos industriais, a partir das respostas medidas sobre suas superfícies e estruturas.

Durante processos de identificação de forças, é bastante comum se deparar com sistemas lineares mal condicionados, fato que dificulta, quando não impossibilita, a execução das técnicas convencionais de inversão matricial.

Ao se trabalhar com matrizes mal condicionadas, baixos níveis de incertezas experimentais, presentes nas respostas medidas e nas funções de transferência estimadas, podem invalidar totalmente o processo de identificação de forças [Starkey e Merrill, 1989; Sharkar et al., 1981].

Devido à grande importância desta classe de problemas sobre os diversos métodos de identificação de forças, o Capítulo 3 traz algumas técnicas aplicadas à resolução de sistemas de equações lineares, e algumas técnicas e desenvolvimentos matemáticos capazes de reduzir os efeitos indesejados das incertezas experimentais sobre as forças obtidas. Tais técnicas são conhecidas na matemática por técnicas de regularização.

O Capítulo 4 traz uma revisão bibliográfica sobre métodos de identificação de forças, com o detalhamento matemático necessário para o entendimento dos mesmos [Stevens, 1987]. Este Capítulo traz ainda uma seqüência de tabelas, criadas para auxiliar o leitor na escolha de métodos de identificação de força em uma eventual aplicação, de acordo com algumas características importantes tais como domínios de análises, procedimentos matemáticos internos, mal condicionamento numérico, entre outras.

Os Capítulos 5 e 6 trazem exemplos numéricos e experimentais de processos de identificação de força, realizados a partir do uso de técnicas de modelagem de resposta com regularização. Dentre as aplicações deste Capítulo se destacam duas contribuições deste trabalho:

- Análise alternativa de caminhos de transferência (ATPA);
- Aplicação de uma técnica de regularização baseado em uma simulação de Monte Carlo, denominada Regularização das Matrizes Aleatórias (RMA).

O Capítulo 7 traz um exemplo numérico de um processo de identificação de força, realizado a partir de uma técnica de modelagem espacial conhecida como Método das Coordenadas Modais, apresentado por Genaro e Rade (1998).

O Capítulo 8 traz um exemplo de um processo de identificação de força realizado a partir de uma técnica de modelagem analítica, desenvolvida especificamente para a faixa de operação do sistema nas baixas frequências. O método é baseado na conhecida Técnica da Soma Ponderada das Acelerações (*Sum of Weighted Acceleration Technique – SWAT*) [Allen e Carne, 1994].

O Capítulo 9 traz um resumo das principais conclusões retiradas do uso das técnicas de regularização e os métodos de identificação de forças empregados no trabalho.

### 1.3 Objetivos

Os trabalhos desenvolvidos nesta tese de doutorado foram conduzidos pelos seguintes objetivos específicos:

- 1) Revisão detalhada dos principais métodos de identificação de forças encontrados na bibliografia, ressaltando suas necessidades experimentais, suas vantagens e desvantagens, o custo operacional, e as características das forças identificadas;

- 2) Estudo e análise de técnicas de regularização que possam ser aplicadas com êxito em problemas de identificação de forças, em presença de ruído experimental (incertezas) nos dados de entrada submetidos ao problema;
- 3) Proposição de alguns algoritmos de identificação de forças, com tratamento de incertezas nos dados de entrada, utilizando-se de simulações numéricas e experimentos laboratoriais.

O objetivo global é o estudo e desenvolvimento de métodos lineares de identificação de força com potencial de aplicação em situações práticas de engenharia, onde se observa a presença de incertezas nos dados experimentais ou nos modelos matemáticos aplicados ao problema.

#### 1.4 Experimentos realizados

Os experimentos numéricos apresentados nos Capítulos 5 e 7 foram realizados sobre um modelo de viga de Euler-Bernoulli. As análises visaram à identificação dos esforços transversais aplicados sobre a viga, a partir de respostas de deslocamentos e acelerações transversais.

Os experimentos laboratoriais apresentados no Capítulo 6 foram realizados sobre uma placa de alumínio com bordas livres. Os experimentos objetivaram a decomposição do ruído sonoro emitido pela placa, quando excitada por duas forças transversais aplicadas em pontos distintos da mesma. A decomposição foi realizada a partir de respostas vibroacústicas da placa – acelerações transversais e campo acústico. Como resultado final, a decomposição possibilitou a análise da contribuição de cada uma das forças sobre o ruído total gerado pela placa.

Os experimentos laboratoriais apresentados no Capítulo 8 foram conduzidos sobre um bloco metálico, acoplado a uma massa inercial por quatro molas helicoidais. Os testes visaram à identificação de esforços resultantes aplicados sobre o bloco ao longo dos três eixos Cartesianos,

em uma faixa de operação em baixa frequência (corpo rígido), utilizando respostas de aceleração do bloco.

Vale lembrar que os métodos de identificação de forças operam não somente com respostas vibroacústicas, mas também com um conjunto específico de informações previamente estabelecidas sobre os sistemas. Tais informações são necessárias para a alimentação dos modelos matemáticos utilizados na formulação de cada método (ver Tabela 4.2).



## 2 Fundamentos teóricos

Este capítulo traz os principais fundamentos teóricos necessários à compreensão dos métodos de identificação de forças explorados neste trabalho. Entretanto, para um entendimento mais aprofundado das metodologias, visando aplicações específicas dentro da engenharia, recomenda-se fazer algumas leituras complementares sobre análise modal, processos estocásticos, análise matricial e processos de otimização.

### 2.1 Sistemas lineares invariantes no tempo

Os sistemas lineares constituem uma das principais classes de problemas voltados para a análise de sistemas mecânicos. Na verdade, os sistemas lineares não existem na prática da engenharia, mas podem ser considerados, com as devidas justificativas, para representarem uma grande diversidade problemas com boa aproximação [Chen, 1999].

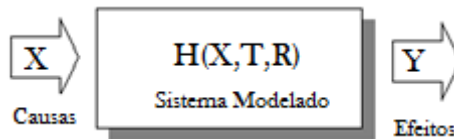


Fig. 2.1 – Representação de um sistema.

Um sistema é chamado linear quando, para um determinado par de entradas e saídas (estímulos e respostas), apresenta as seguintes propriedades,

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) : \text{propriedade da adição;} \quad 2.1$$

$$\alpha x_1(t) \rightarrow \alpha y_1(t) : \text{propriedade de homogeneidade;} \quad 2.2$$

sendo  $\alpha$  uma constante real.

Estas propriedades podem ser combinadas para estabelecerem o conhecido princípio da superposição,

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \quad 2.3$$

Um sistema é considerado não linear se não satisfaz ao princípio da superposição. Outra característica importante verificada em grande parte dos sistemas mecânicos é a invariabilidade temporal.

Um sistema é considerado linear e invariante no tempo (*Linear Time-Invariant* – LTI) quando satisfaz, além do princípio da superposição, a seguinte regra,

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t + T) \rightarrow y(t + T) \quad 2.4$$

A propriedade diz que se uma mesma entrada  $x(t)$  for aplicada em um sistema linear invariante no tempo em um instante  $t + T$ , esta produzirá a mesma saída  $y(t)$ , deslocada para o instante  $t + T$ .

Sistemas mecânicos que não sofrem variações consideráveis em suas características dinâmicas, em um longo período de operação, podem ser considerados invariantes no tempo. Isto é o que acontece com as estruturas mecânicas e com as máquinas em geral.

Sob determinadas condições, sistemas não lineares podem ser aproximados de maneira a responderem a um conjunto de equações lineares. A este processo dá-se o nome de linearização [Meirovitch, 1997; Beranek, 1992]. Considere um sistema massa-mola com amortecimento viscoso, com um 1 GDL, mostrado na Figura 2.

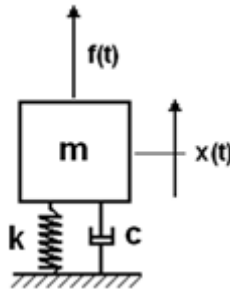


Fig. 2.2 – Sistema massa-mola com amortecimento viscoso.

A Segunda Lei de Newton pode ser escrita como segue,

$$\Sigma f = f_{\text{elásticas}} + f_{\text{amortecimento}} + f_{\text{inércia}} \quad 2.5$$

$$f(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) \quad 2.6$$

O amortecimento viscoso é um modelo de amortecimento simplificado que opera linearmente com a velocidade. A equação de movimento pode, então, ser tratada como uma equação diferencial de segunda ordem, não homogênea e com coeficientes constantes. Neste caso, uma substituição de variáveis pode ser utilizada para reduzir a ordem da equação diferencial de movimento, para a forma  $\dot{y} = Ay + B$ .

Arranjando a Equação 2.6 em uma forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\dot{x}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c/m & -k/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ f(t) \end{Bmatrix} \quad 2.7$$

Através de algumas simples mudanças de variáveis,

$$\{z(t)\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \quad 2.8$$

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f(t) \end{Bmatrix}, \quad 2.9$$

a Equação 2.7 pode então ser simplificada para,

$$\{\dot{z}(t)\} = [A]\{z(t)\} + [B]\{u(t)\}. \quad 2.10$$

Trata-se da conhecida equação linear de espaços de estados, bastante utilizada em processos de identificação e controle de sistemas dinâmicos.

## 2.2 Funções de transferência

As funções de transferência constituem uma das principais ferramentas de análise de sistemas LTI. Na engenharia, as funções de transferência são comumente utilizadas para caracterizar relações de

entrada-saída em sistemas ou subsistemas, descritos por equações diferenciais.

A função de transferência de um sistema LTI é definida pela relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada do sistema. Considerando o sistema mostrado na Figura 2.1, escreve-se,

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(x(t))} = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad 2.11$$

Desta maneira, o sistema passa a ser descrito pelas equações algébricas em  $s$ .

É importante mencionar que a aplicabilidade das funções de transferência é limitada aos sistemas LTI.

As funções de transferência representam a parte essencial de um modelo de resposta escrito para um sistema físico. No capítulo anterior, algumas importantes características dos modelos de resposta foram mencionadas. Tais características se devem à utilização dos conceitos de função de transferência.

Considerando que uma excitação impulsiva seja realizada no sistema apresentado na Figura 2.2, é possível relacionar sua saída,  $x(t)$ , com sua entrada,  $f(\tau)$ , a partir da seguinte expressão,

$$x(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad 2.12$$

na qual  $G(t, \tau)$  é dita função resposta impulsiva do sistema (*Impulsive Response Functions* – IRF). Generalizando para um sistema com  $p$  entradas e  $q$  saídas,

$$[G(t, \tau)] = \begin{bmatrix} g_{11}(t, \tau) & g_{12}(t, \tau) & \dots & g_{1p}(t, \tau) \\ g_{21}(t, \tau) & g_{22}(t, \tau) & \dots & g_{2p}(t, \tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{q1}(t, \tau) & g_{q2}(t, \tau) & \dots & g_{qp}(t, \tau) \end{bmatrix} \quad 2.13$$

O elemento interno  $g_{ij}(t, \tau)$  representa a resposta impulsiva no tempo  $t$ , na saída  $x_j$ , devido à entrada impulsiva  $f_i(\tau)$  realizada no tempo  $\tau$ .

A Equação 2.13 é válida somente para sistemas lineares causais. Um sistema é dito causal se  $g(t, \tau) = 0$  para todo  $t < \tau$ , o que significa dizer que nenhuma saída é observada em um instante de tempo inferior a aplicação da entrada.

Nota-se que se o sistema é LTI é possível escrever,

$$g(t, \tau) = g(t + T, \tau + T) = g(t - \tau, 0) = g(t - \tau) \quad 2.14$$

para qualquer  $T$ . Portanto, a Equação 2.12 se reduz para,

$$x(t) = \int_0^t G(t - \tau)f(\tau)d\tau \quad 2.15$$

Esta equação é conhecida como a integral de convolução. Para caso dos sistemas LTI, os dois argumentos temporais da função  $G(t, \tau)$  perdem o sentido prático, e esta passa a ter apenas um argumento temporal,  $G(t - \tau)$ .

Tomando a transformada de Laplace da saída  $x(t)$  e combinando com a Equação 2.15 tem-se,

$$X(s) = \int_0^\infty \left[ \int_0^t G(t - \tau)f(\tau)d\tau \right] e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau}dt \quad 2.16$$

Através de uma mudança de variável,  $v = t - \tau$ , e uma manipulação matemática,

$$X(s) = \int_0^\infty \left[ \int_{v=-\tau}^t G(v)e^{-sv}dv \right] f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad 2.17$$

Assumindo a causalidade do sistema, é possível ajustar os limites de integração do termo entre colchetes para  $v = 0$  e  $t = \infty$ . Assim, a equação se simplifica para,

$$X(s) = \int_0^{\infty} G(v)e^{-sv} dv \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = G(s)F(s) \quad 2.18$$

Estes cálculos exemplificam um processo de obtenção da função de transferência de um sistema.

### 2.3 Funções de resposta em frequência

As funções de resposta em frequência (*Frequency Response Functions* – FRF) são funções de transferência definidas pela relação entre a transformada de Fourier da saída e a transformada de Fourier da entrada do sistema.

A transformação de Fourier pode ser entendida como um caso particular da transformada de Laplace, bastando para tal substituir o valor da variável  $s$  pelo complexo  $j\omega$ , como segue,

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad 2.19$$

A Equação 2.11 se reescreve como,

$$H(\omega) = \frac{\mathfrak{F}(y(t))}{\mathfrak{F}(x(t))} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad 2.20$$

A função de transferência  $H(j\omega)$  passa então a representar os efeitos de uma excitação harmônica, de frequência  $\omega$ , aplicada sobre o sistema.

Seja uma excitação senoidal de frequência  $\omega$  aplicada sobre o sistema mostrado na Figura 2.2. A entrada  $f(t)$  do sistema pode ser convenientemente escrita através da seguinte relação complexa,

$$f(t) = f_0 e^{j\omega t} \quad 2.21$$

Substituindo na Equação 2.6 uma solução do tipo  $x(t) = x_0 e^{j\omega t}$ , encontra-se a relação,

$$\left| \frac{f_0}{x_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{(-m\omega^2 + k)^2 + (\omega c)^2}} \quad 2.22$$

A relação apresentada nada mais é do que o módulo da função de resposta em frequência do sistema. Esta forma de representação da função de transferência é conhecida como fator de amplificação dinâmica.

Quando o fator de amplificação dinâmica está escrito através de um sinal de deslocamento, este recebe o nome de receptância. Quando sinais de velocidade e aceleração são utilizados, estes recebem os nomes de mobilidade e acelerância, respectivamente.

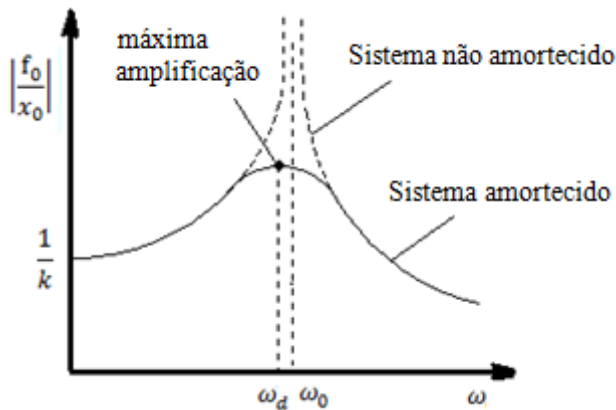


Fig. 2.3 – Receptância de um sistema massa-mola amortecido.

O valor de máxima amplificação dinâmica pode ser determinado analisando o denominador da Equação 2.22. A este valor de frequência é dado o nome de frequência natural.

Dois valores de frequência natural podem ser identificados no gráfico da Figura 2.3. Se o sistema é não amortecido a amplificação dinâmica tende ao infinito à medida que se aproxima da frequência natural  $\omega_0$ . Se o sistema é amortecido a amplificação dinâmica tende a seu ponto de máximo valor na frequência natural estabelecida por  $\omega_d$ .

Os valores mencionados de frequência natural podem ser obtidos das seguintes relações,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2.23$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi_0^2} \quad 2.24$$

na qual  $\omega_0$  é frequência natural não amortecida e  $\omega_d$  a frequência natural amortecida. O fator de amortecimento  $\xi_0$  é definido por,

$$\xi_0 = \frac{c}{2m\omega_0} \quad 2.25$$

É importante mencionar que estes valores de frequência natural foram obtidos sob uma condição de movimento forçado. Caso o sistema se movimente livremente e sem amortecimento, o valor da frequência natural  $\omega_0$  se mantém. Entretanto, se o sistema se movimentar livremente e com amortecimento, a solução da Equação 2.6, para  $f(t) = 0$ , retorna um valor diferente para  $\omega_d$ , conforme mostrado a seguir.

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi_0^2} \quad 2.26$$

Este fato mostra que a é preciso especificar com cuidado que valores de frequências naturais devem ser utilizados para processos de modelagem e identificação de forças.

Outro detalhe importante pode ser colocado sobre modelos matemáticos alimentados com dados experimentais. É preciso se atentar



---

---

para as condições operacionais nas quais o sistema está inserido, e sempre que possível, conservá-las em laboratório, para que os processos de modelagem e identificação de forças sejam corretamente conduzidos.

Algumas verificações importantes ainda podem ser feitas sobre os efeitos dos parâmetros físicos do sistema sobre o fator de amplificação dinâmica. Analisando novamente a Equação 2.22, para baixos valores de frequência, observa-se que este fator sofre mais influência da rigidez do sistema,  $k$ .

Para valores próximos da frequência natural o termo,  $-m\omega^2 + k$ , tende a zero, e o fator de amplificação dinâmica sofre uma forte influência do amortecimento,  $c$ . Nas altas frequências, o termo quadrático de frequência sobressai na expressão, e o fator de amplificação dinâmica sofre mais influência da massa.

Os mencionados parâmetros representam os efeitos de inércia, amortecimento e rigidez do sistema. Se um destes efeitos, sob determinadas condições de operação um sistema, sobressai aos demais, pode-se deduzir que um determinado conjunto de forças internas do sistema possui maior importância do que os demais, nas mesmas proporções.

Nestas condições, algumas simplificações nos modelos matemáticos do sistema podem facilitar o processo de identificação de forças. As forças assim identificadas poderão sofrer pequenos erros de aproximação e truncamento, mas sem grandes prejuízos sobre os resultados finais da identificação.

De maneira geral, elevados valores de amplificação dinâmica representam regiões de alta sensibilidade no sistema. Nestas regiões, o sistema pode responder de maneira mais expressiva à presença de ruídos em suas entradas, fato que dificulta o processo de identificação de forças.

## 2.4 Conceitos básicos sobre análise modal

A análise modal se define através de um conjunto de técnicas de modelagem e identificação capazes de encontrar as frequências naturais, os fatores de amortecimento e as formas peculiares de vibração de uma

estrutura mecânica, excitada por forças internas ou externas [Ewins, 1984; McConnel, 1995; Bies e Hansen, 1998].

É fundamental em projetos mecânicos e estruturais submetidos a carregamentos variáveis, que se previnam comportamentos indesejáveis da estrutura quando solicitada. Pode também ser útil em problemas de investigação, onde se pretendem conhecer as causas de eventuais falhas críticas durante o funcionamento de máquinas rotativas.

A análise modal viabiliza a construção de modelos matemáticos simplificados de sistemas mecânicos, pois permite descrever as equações de movimento através dos chamados parâmetros modais, que são as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os modos de vibração do sistema.

Os parâmetros modais de um sistema podem ser estimados a partir de procedimentos experimentais, utilizando-se dos sinais medidos de força e resposta de um sistema, dentro de sua faixa de operação.

A determinação dos parâmetros modais parte da construção de um modelo de resposta para o sistema. Assim, as curvas de resposta impulsiva ou de resposta em frequência são interpoladas por expressões matemáticas, cujos coeficientes possam ser utilizados diretamente ou indiretamente para a determinação dos parâmetros modais.

Seja um sistema massa-mola com amortecimento viscoso proporcional, com 2GDL, apresentado na Figura 2.4 a seguir.

O modelo de amortecimento viscoso proporcional permite escrever a matriz global de amortecimento como uma combinação linear das matrizes globais de massa e rigidez.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad 2.27$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton a cada uma das massas, e agrupando as equações de movimento,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \quad 2.28$$

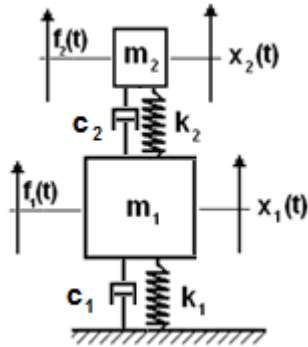


Fig. 2.4 – Sistema massa-mola amortecido com 2 GDL.

Primeiramente, vamos à análise do movimento livre da estrutura. Anulando o lado direito da equação e utilizando a notação matricial,

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad 2.29$$

Adotando uma solução harmônica do tipo  $\{x(t)\} = \{x_0\}e^{j\omega t}$ , pode-se escrever a Equação 2.28 na seguinte forma compacta,

$$[T]\{\psi\} = \lambda\{\psi\} \quad 2.30$$

na qual  $[T] = [M]^{-1}[K]$ ,  $\lambda = \omega^2 - j\omega[M]^{-1}[C]$ , e  $\{\psi\} = \{x_0\}$ . Se a matriz  $[T]$  é simétrica, é possível encontrar uma solução  $\{\psi\}$  tal que a mesma seja diagonalizada em função de  $\lambda$ , ou seja,

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad 2.31$$

Os valores de  $\lambda$  podem então ser calculados pela Equação 2.30, conhecida com problema de autovalor e autovetor.

$$([T] - \lambda[I])\{\psi\} = \{0\} \quad 2.32$$

Sempre que o Jacobiano for escrito a partir das matrizes de massa e rigidez de um sistema,  $\lambda$  e  $\{\psi\}$  representarão, respectivamente, as frequências naturais e os modos de vibração deste sistema.

Se a matriz de amortecimento é nula, os autovalores e autovetores são reais. Se a matriz de amortecimento é não nula, os autovalores são complexos e os autovetores continuam reais. Autovalores complexos representam frequências naturais amortecidas, de acordo com as discussões apresentadas no Item 1.3.

Os modos de vibração do sistema são normalmente apresentados ao longo das colunas de uma matriz, chamada de matriz de formas modais. Devido ao fato das matrizes de formas modais  $[\Psi]$  serem ortogonais, as seguintes equações podem ser demonstradas.

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = [m_{g_i}] \quad 2.33$$

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = [k_{g_i}] \quad 2.34$$

$$[\Psi]^T [C] [\Psi] = [c_{g_i}] \quad 2.35$$

As matrizes  $[m_{g_i}]$ ,  $[k_{g_i}]$  e  $[c_{g_i}]$  são diagonais e representam respectivamente os valores generalizados de massa, os valores generalizados de rigidez e os valores generalizados de amortecimento.

Se a matriz modal  $[\Psi]$  for normalizada em relação à matriz de massa  $[M]$ ,

$$[\Phi] = [\Psi] [1/\sqrt{m_{g_i}}] \quad 2.36$$

as relações de ortogonalidade se reescrevem para,

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad 2.37$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = [\omega_{0_i}^2] \quad 2.38$$

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = [2\xi_{0_i}\omega_{0_i}] \quad 2.39$$

Pré-multiplicando a equação de movimento, Equação 2.29, pela matriz de formas modais, tem-se

$$[\Psi]^T[M]\{\ddot{x}(t)\} + [\Psi]^T[C]\{\dot{x}(t)\} + [\Psi]^T[K]\{x(t)\} = [\Psi]^T\{f(t)\} \quad 2.40$$

A variável espacial  $\{x(t)\}$  pode ser convenientemente substituída por  $\{x(t)\} = [\Psi]\{q(t)\}$ , para que as relações de ortogonalidade sejam montadas. As novas variáveis,  $\{q(t)\}$ , são chamadas coordenadas modais, pois relaciona as variáveis espaciais com a matriz de formas modais do sistema.

$$[m_{g_i}]\{\ddot{q}(t)\} + [c_{g_i}]\{\dot{q}(t)\} + [k_{g_i}]\{q(t)\} = \{f_{g_i}\} \quad 2.41$$

A pré-multiplicação do vetor de forças aplicadas matriz de formas modais resulta nas forças generalizadas. Note que as coordenadas modais descrevem o movimento do sistema no espaço modal.

A vantagem da utilização das coordenadas modais sobre as coordenadas espaciais é o desacoplamento das equações de movimento. Substituindo uma solução harmônica do tipo  $\{q(t)\} = \{q_0\}e^{j\omega t}$  na Equação 2.40, e adotando a matriz normalizada  $[\Phi]$ , encontra-se

$$[-\omega^2 + \omega_{0_i}^2 + 2j\omega\xi_{0_i}\omega_{0_i}]\{q_0\} = \{f_{0_{g_i}}\} \quad 2.42$$

Retornando a variável espacial  $\{x(t)\}$  na equação, e escrevendo  $h(\omega) = -\omega^2 + \omega_{0_i}^2 + 2j\omega\xi_{0_i}\omega_{0_i}$ , tem-se

$$\{x_0\} = [\Phi][h(\omega)]^{-1}[\Phi]^T\{f_0\} = [R(\omega)]\{f_0\} \quad 2.43$$

Está demonstrada, para um sistema massa-mola com amortecimento viscoso e com dois graus de liberdade, a obtenção da função de resposta em frequência  $R(\omega)$ , denominada receptância.

As equações anteriores mostram que a receptância pode ser descrita por um produto matricial, que representa um somatório de termos, conforme a equação seguinte.

$$[R_{ij}(\omega)] = \sum_{r=1}^{N=2} \frac{\Phi_i \Phi_j^T}{-\omega^2 + \omega_{0_r}^2 + 2j\omega \xi_{0_r} \omega_{0_r}} \quad 2.44$$

O vetor  $\Phi_i$  representa a forma modal  $i$ . A receptância  $R_{ij}(\omega)$  representa a função de resposta em frequência entre a força aplicada na massa  $i$  e a resposta medida na massa  $j$ .

Esta forma de representação das funções de resposta em frequência é chamada de frações parciais, e informa que as funções de transferência são construídas a partir da superposição de  $N$  parcelas modais independentes, sintonizadas em cada uma das frequências naturais do sistema. Esta formulação pode ser utilizada para sistemas com múltiplos graus de liberdade.

Uma passagem importante desta formulação é a diagonalização da matriz de amortecimento. Se o modelo de amortecimento for definido como sendo não proporcional, atendendo às necessidades dinâmicas de um sistema, este processo de diagonalização não é possível.

Entretanto, a partir de um processo de substituição de variáveis, exemplificado no Item 2.1, é possível desacoplar as equações de movimento utilizando a formulação de espaço de estados.

Arranjando a Equação 2.29 na forma de um sistema de equações lineares,

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{\ddot{x}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [-M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad 2.45$$

Admitindo a variável  $\{z(t)\} = [\{x(t)\}; \{\dot{x}(t)\}]$ , simplifica-se a equação anterior para

$$[A]\{\dot{z}(t)\} + [B]\{z(t)\} = \{0\} \quad 2.46$$

Considerando uma solução harmônica do tipo  $\{z(t)\} = \{z_0\}e^{st}$ , pode-se escrever a Equação 2.46 na seguinte forma compacta

$$[Q]\{\phi\} = \theta\{\phi\} \quad 2.47$$

na qual  $Q = [A]^{-1}[B]$ ,  $\theta = s$ , e  $\{\phi\} = \{z_0\}$ . A matriz  $Q$  é simétrica e representa o Jacobiano.

Neste caso, se a matriz de amortecimento é nula, os autovalores e autovetores são reais. Se a matriz de amortecimento é não nula, os autovalores e autovetores são complexos.

O amortecimento não proporcional indica que o sistema mecânico sofre perdas localizadas, com diferentes intensidades. Assim, os modos de vibração terão diferenças de fase entre as variáveis espaciais que os definem. Este fato não ocorre quando o amortecimento é proporcional, pois as perdas estão igualmente distribuídas ao longo do sistema.

Outros modelos de amortecimento, bem como os procedimentos para desacoplamento das equações de movimento, podem ser encontrados em bibliografias dedicadas à análise modal ou às vibrações de sistemas mecânicos.

## 2.5 Sobre a qualidade de processos de identificação de forças

Um processo de identificação de forças deve ser conduzido através de um modelo matemático que relacione as respostas medidas de um sistema mecânico com as possíveis forças aplicadas sobre o mesmo.

Este trabalho lida apenas com problemas de identificação lineares e invariantes no tempo. Grande parte dos problemas em engenharia é tratada, com boa aproximação, por técnicas de modelagem lineares, devido aos benefícios matemáticos proporcionados por tal simplificação.

Um aspecto importante da identificação de forças está vinculado ao número de transdutores necessários para a obtenção de resultados razoáveis. As respostas medidas do sistema, pelos transdutores de vibração, alimentam as equações do modelo matemático necessárias para a representação do conjunto escolhido de forças aplicadas.

Como os sistemas lineares precisam ser determinados ou superdeterminados, o número de transdutores de vibração deve naturalmente ser igual ou maior do que o número de forças que se pretende identificar. A subdeterminação do sistema de equações pode levar o problema para uma condição de indeterminação, com infinitas soluções.

É importante citar que a resolução do sistema de equações lineares e a obtenção das forças consideradas pelo modelo matemático, não são garantias para a qualidade do processo de identificação.

Na prática, os carregamentos estão geralmente distribuídos sobre as estruturas, e não concentrados, como são considerados nos modelos espaciais e de resposta, chamados discretos. Apenas modelos analíticos podem representar carregamentos distribuídos, mas com suas devidas limitações práticas.

Em geral, quanto maior o número de transdutores de vibração, maior será o número de forças concentradas consideradas no modelo. Maior será também a probabilidade deste conjunto selecionado representar o carregamento real sobre a estrutura.

Entretanto, quanto maior o número de transdutores de vibração considerados, maior será também o custo do processo de identificação, pois maior e mais complexa serão a instrumentação e as análises dos sistemas matemáticos.

A qualidade de uma identificação é de fato uma marca da experiência do analista sobre o sistema que se pretende identificar, pois este terá uma melhor capacidade de “prever” um conjunto de forças aplicadas, que seja adequado para representar as condições reais do carregamento que atua sobre a estrutura.



### 3 Ferramentas matemáticas aplicadas à resolução de problemas inversos

Este capítulo introduz conceitos básicos para a caracterização, análise e resolução de problemas inversos. Os problemas inversos constituem uma importante área da matemática voltada para a análise de problemas de identificação, tal como é tratada a identificação de forças em sistemas mecânicos.

#### 3.1 Conceitos básicos sobre problemas inversos

Os problemas inversos podem ser encontrados em diversos ramos de tecnologia, com as mais diversas classes de descrições e soluções. Entretanto, a tradução de uma famosa frase do Prof. Oleg Mikailivitch Alifanov define de maneira bem abrangente um problema inverso como sendo – entende-se como a solução de um problema inverso a determinação de causas desconhecidas baseada nos seus efeitos observados [Woodbury, 2008]. Em contraste com os problemas inversos estão os problemas diretos, onde se objetiva encontrar efeitos baseando-se em descrições completas de suas causas.

O problema de identificação de força é, portanto, um exemplo de problema inverso. Os problemas inversos podem ser eficientemente classificados pelo tipo da solução procurada e pelo contexto do problema matemático, conforme os tópicos seguintes.

- Problemas inversos retrospectivos: as condições iniciais de um processo são buscadas baseando-se nos movimentos ou efeitos observados.
- Problemas inversos de reconstrução: este é o clássico problema de modelagem matemática, e consiste na determinação de constantes matemáticas pertencentes a equações de equilíbrio governantes de sistemas físicos.
- Problemas inversos de fronteira: quando são buscadas informações nas fronteiras dos sistemas analisados. Esta classe também pode ser tratada como um problema de

estimativa de funções de contorno em sistemas, principalmente quando tais condições variam com o tempo.

Problemas de identificação de forças podem ser encontrados em qualquer uma das classes mencionadas. O movimento de um projétil rígido, já mencionado no Capítulo 1, é um exemplo simples de um problema inverso retrospectivo.

A partir das leituras de trajetória e da posse das informações que descrevem completamente as geometrias e o material do corpo lançado, é possível formular modelos cinemáticos capazes de descrever o movimento observado. A determinação deste modelo se completa com a estimativa das condições iniciais do movimento, deslocamento (posição inicial) e velocidade inicial (força aplicada).

Em se tratando, por exemplo, de problemas de reconstrução, é possível citar a utilização de modelos matemáticos de resposta, para os quais sejam definidas relações de entrada e saída em sistemas mecânicos.

Assim as características dinâmicas do sistema em análise podem ser representadas através de funções de transferência, obtidas experimentalmente ou numericamente. Este é o caso dos métodos de análise de caminhos de transferência em sistemas mecânicos (*Transfer Path Analysis* – TPA) [Padilha, 2006]. A Figura 3.1, a seguir, traz uma ilustração da técnica de análise de caminhos de transferência. O método em questão está descrito em detalhes no Capítulo 4, Item 4.3.1.

Os carregamentos aplicados sobre uma estrutura que se movimenta podem ser tratados, pela matemática, como condições de contorno, pois agem sobre as fronteiras do sistema. Os problemas inversos de fronteira podem ser expressos em termos da obtenção de funções de estimação, na figura de um modelo analítico ou numérico que represente o comportamento realístico de um sistema, em cada instante de tempo.

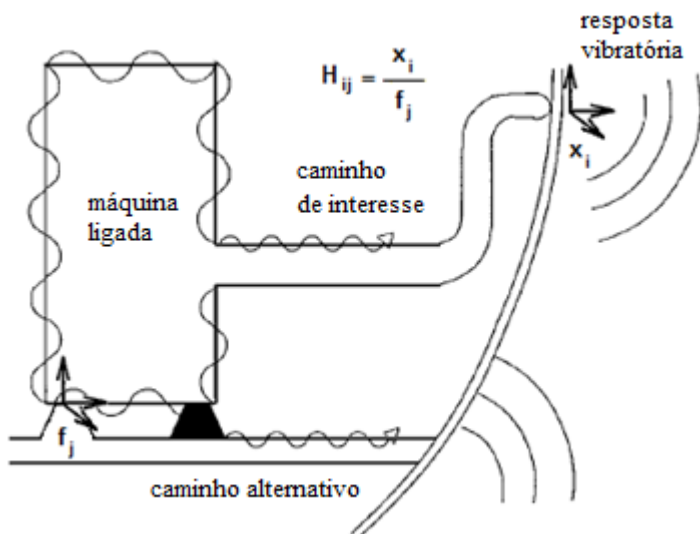


Fig 3.1 – Esquema padrão para análise de caminhos de transferência em sistemas mecânicos.

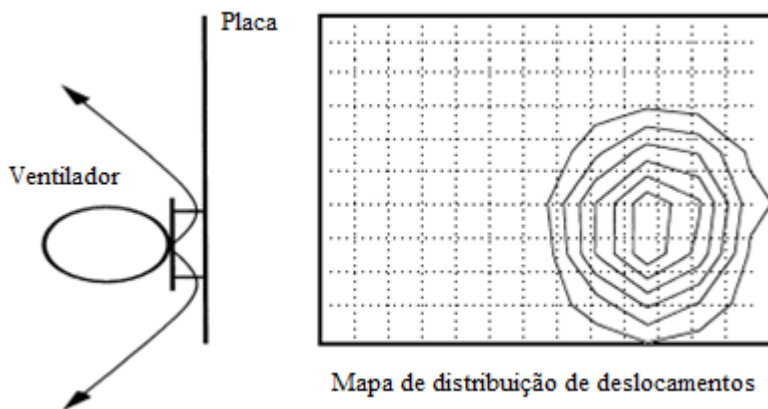


Fig. 3.2 – Reconstrução de forças aplicadas sobre uma placa excitada por um ventilador.

Temos, por exemplo, o caso de um carregamento distribuído aplicado sobre uma placa, pertencente a um sistema de ventilação. Alguns estudos recentes mostram a possibilidade de se estimar, através da resolução temporal de um modelo numérico inverso, a posição e a intensidade das fontes vibratórias existentes sobre uma placa. A Figura 3.2 traz uma ilustração da técnica. O método em questão está explicado em detalhes no Capítulo 4, Item 4.1.3.

Muitos outros tipos de problemas inversos podem também ser encontrados fora da engenharia, como é o caso da estimativa das coordenadas do epicentro de um evento sísmico (a parte da superfície terrestre diretamente abaixo do foco de um terremoto), apresentada por Tarantola (2005). As ondas sísmicas, produzidas pela explosão, foram coletadas por uma rede de seis estações sísmicas. As localizações das estações e os tempos de chegada das ondas medidas estão mostrados abaixo.

$$\begin{array}{ll} (x_1, y_1) = (3km, 15km) & t_1 = 3.12 \text{ seg} \pm \sigma \\ (x_2, y_2) = (3km, 16km) & t_2 = 3.26 \text{ seg} \pm \sigma \\ (x_3, y_3) = (4km, 15km) & t_3 = 2.98 \text{ seg} \pm \sigma \\ (x_4, y_4) = (4km, 15km) & t_4 = 3.12 \text{ seg} \pm \sigma \\ (x_5, y_5) = (5km, 15km) & t_5 = 2.84 \text{ seg} \pm \sigma \\ (x_6, y_6) = (5km, 15km) & t_6 = 2.98 \text{ seg} \pm \sigma \end{array}$$

O sistema Cartesiano de unidades foi adotado. Neste caso, as incertezas experimentais são independentes e podem ser modeladas por uma distribuição Gaussiana, com desvio padrão  $\sigma$ .

Uma maneira de resolver o problema é encontrar funções de densidade de probabilidade associadas às variáveis estocásticas, e combiná-las de maneira a construir um modelo global de probabilidade que forneça soluções para o evento analisado. Assim, o maior valor de probabilidade indicará a solução do problema.

As variáveis estocásticas  $(\bar{x}, \bar{y})$  estão relacionadas com o epicentro do abalo sísmico. Nenhuma informação prévia existe sobre as coordenadas do epicentro (é o que o sistema Cartesiano nos diz), logo é

preciso definir uma função de densidade de probabilidade uniforme para as coordenadas estocásticas.

$$\rho_M = \text{const} \quad 3.1$$

Como as incertezas são Gaussianas e independentes, a função de densidade de probabilidade que representa os valores verdadeiros de tempo de chegada das ondas sísmicas é,

$$\rho_t(t_i) = g_i(x, y) = \text{const.} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^6 (t_i - t_i^{\text{obs}})^2\right) \quad 3.2$$

Para um dado par de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , o tempo de chegada das ondas sísmicas nas estações pode ser calculado, de maneira simplificada, pela seguinte relação geométrica.

$$t_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{v} \sqrt{(\bar{x} - x_i)^2 + (\bar{y} - y_i)^2}, \quad (i = 1, \dots, 6) \quad 3.3$$

Note que a simplificação feita considera a superfície terrestre perfeitamente plana. Combinando as Equações 3.1, 3.2 e 3.3, é possível encontrar o modelo global de probabilidade para a solução do evento sísmico,

$$\begin{aligned} \sigma_M(x, y) &= \text{const}' \cdot \rho_M(x, y) \cdot g_i(x, y) = \\ &= \text{const.} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^6 (t_i - t_i^{\text{obs}})^2\right) \end{aligned} \quad 3.4$$

Esta solução descreve todas as possíveis coordenadas epicentrais para o evento sísmico analisado. Está mostrado na Figura 3.3 a seguir um gráfico das densidades de probabilidades obtidas através de uma simulação de Monte Carlo. A escala de cores é linear, variando entre zero e o valor máximo encontrado.

O valor de máxima densidade de probabilidade, 0,9855, foi encontrado na localização (14,4 km, 4,4 km). A velocidade da onda foi definida para 5,0 km/h.

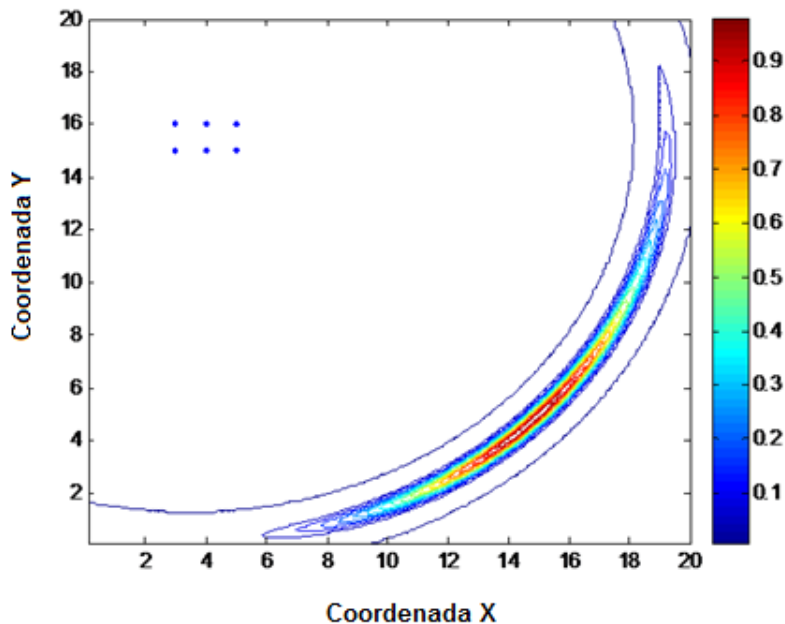


Fig. 3.3 – Densidade de probabilidade para as coordenadas epicentrais do evento sísmico analisado.

### 3.2 Problemas mal condicionados e mal postos

Em termos matemáticos, muitos problemas inversos podem ser classificados como problemas mal postos e/ou mal condicionados. Um problema é dito bem posto quando satisfaz às duas condições listadas a seguir:

- Existe uma única solução para o problema;

- A solução é fornecida por uma função contínua dos dados de entrada;

São as chamadas condições de Hadamard [Hansen, 1998]. Para qualquer negativa, o problema é dito mal posto. A primeira sentença garante a existência e a unicidade da solução.

A segunda sentença garante a continuidade da solução, em função dos dados de entrada. Em outras palavras, um problema bem posto é todo problema que, baseado em sua formulação, tenha uma resolução consistente capaz de descrever com suavidade o comportamento de um sistema físico qualquer.

De fato, a solução de um problema inverso não poderia ser garantida sem qualquer uma das condições mencionadas. Felizmente, é possível transformar alguns problemas mal postos em problemas bem postos, através do uso de soluções generalizadas que satisfaçam as condições de existência, unicidade e continuidade.

Em muitas situações práticas, a busca de uma solução para um problema de aproximação, estabelecido para um conjunto de dados medidos com incertezas experimentais, pode encontrar instabilidades numéricas.

Tais instabilidades decorrem da alta sensibilidade do modelo matemático às incertezas presentes nos dados de entrada. A resolução do problema torna-se difícil em presença de quaisquer ruídos na entrada, e o problema é dito mal condicionado.

Seja um operador matricial  $A$ , singular. Isto significa que pelo menos um valor singular de  $A$  é nulo. Quando valores singulares são calculados por algoritmos numéricos, os zeros passam a ser representados por valores bastante pequenos. Esta é a condição matemática necessária para caracterizar um problema mal condicionado, e sua solução é bastante sensível a quaisquer variações nos dados de entrada.

O nível de mal condicionamento de uma matriz  $[A]$  pode ser estimado a partir do chamado número de condicionamento ( $CN$ ), definido a seguir [Fregolent, 1998].

---

---

$$CN(A) := \|A\|_2 \|A^+\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_{min}} \geq 1 \quad 3.5$$

na qual as variáveis  $\sigma$  representam os valores singulares da matriz.

Note que  $\sigma_{min}$  precisa ser não nulo. O mal condicionamento de uma matriz é diretamente proporcional ao valor de seu  $CN$ . O símbolo ‘+’ indica a matriz inversa generalizada, ou seja, qualquer matriz pode ser classificada em termos do seu  $CN$ .

Thite e Thompson (2006) apresentaram um procedimento para a seleção de pontos de medição em problemas de identificação de força, baseando-se no número de condicionamento da matriz de acelerações. Seus resultados revelam que a escolha adequada da distribuição espacial das respostas medidas, ponderada pelo número de condicionamento da matriz de acelerações, reduz significativamente os erros da identificação, aumentando a precisão das forças reconstruídas.

### 3.3 Técnicas de otimização para problemas bem postos

A completa e suficiente condição matemática para um problema de otimização ser considerado bem posto é a seguinte: existe exatamente um  $x_0 \in X$  tal que  $I(x_0) \leq I(x)$  para  $\forall x \in X$ , e

$$I(x_n) \rightarrow I(x_0) \text{ implica em } x_n \rightarrow x_0 \quad 3.6$$

Diz-se que o problema é uma otimização de Tikhonov bem posta se, e somente se, existe um único mínimo global em  $X$  em torno do qual qualquer seqüência de minimização convergiria.

Mais precisamente, o problema  $(X, I)$  é chamado bem posto em sentido generalizado se, e somente se,

$$\arg \min(X, I) \neq \emptyset \quad 3.7$$



para toda seqüência  $u_n \in X$  tal que

$$I(u_n) \rightarrow \inf I(X) : \{ u_n \rightarrow u \in \arg \min(X, I) \} \quad 3.8$$

O funcional  $I(x)$  poderia expressar uma condição de equilíbrio para o sistema em análise. Neste caso, esta condição de equilíbrio estaria normalmente relacionada a um sistema linear de equações.

Obviamente, uma grande parcela das ferramentas de otimização pode ser empregada para resolver problemas de otimização bem postos [Dontchev e Zolezzi, 1992]. Os tópicos seguintes trazem algumas das principais técnicas de otimização, aplicadas a problemas bem postos, e especialmente apontadas por estudiosos interessados em problemas de identificação de forças.

### 3.3.1 Método dos mínimos quadrados

De acordo com o formalismo histórico dos mínimos quadrados, Karl Friedrich Gauss foi o primeiro matemático a formular aquele que viria a ser conhecido com o Princípio dos Mínimos Quadrados, aproximadamente ao final do século dezoito. Gauss pretendia estimar trajetórias de planetas e cometas através de observações [Coelho 2004, apud Ljung, 1983].

Deste modo, Gauss estabeleceu que o conjunto de parâmetros desconhecidos de seu modelo matemático deveria ser selecionado de maneira a minimizar a soma dos quadrados dos erros residuais. Matematicamente,

$$\{x\} = [A]\{f\} + \{\eta\} \quad 3.9$$

$$J_{LS} = \arg \min \|\{\eta\}\|_2 \quad 3.10$$

Combinando estas duas expressões e analisando as derivadas parciais (igualando-as a zero),

---

---

$$\{f\} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T\{x\} \quad 3.11$$

encontra-se a melhor seqüência  $f$  que minimiza a diferença  $\{x\} - [A]\{f\}$ . Note que este procedimento de inversão pode ser aplicado em matrizes retangulares, pois o produto  $[A]^T[A]$  é sempre quadrado. Alguns comentários se fazem importantes:

- Este procedimento é chamado *Moore-Penrose pseudo-inverse*, e é simbolizado por  $[A]^+$ ;
- Se  $[A]$  é quadrada e não singular, então  $[A]^+ = [A]^{-1}$ ;
- $f_{LS}$  representa a solução exata do problema se  $\{x\} = [A]\{f\}$  possui uma solução exata;

O método dos mínimos quadrados (*Least Square – LS*) é mais indicado para resolução de problemas superdeterminados, onde o número de respostas medidas é bem maior que o número de forças que se pretende identificar.

Liu e Shepard (2004) mostram, através de resultados numéricos, que a redundância do sistema LS, superdeterminados, pode reduzir os efeitos dos erros experimentais e aumentar a precisão das forças identificadas.

### 3.3.2 Decomposição em valores singulares

A decomposição em valores singulares (*Singular Value Decomposition – SVD*) é reconhecida como o principal resultado dos estudos, teóricos e computacionais, realizados sobre a álgebra linear [Nascimento, 2004; Moler, 2004]. Esta técnica é a base de muitos métodos aplicados à resolução de sistemas lineares subdeterminados e superdeterminados.

O resultado de uma decomposição em valores singulares feita sobre uma matriz  $[A] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , está exposto a seguir.

$$[A] = [U][S][V]^H \quad 3.12$$

As matrizes  $[U] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $[V] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são ortogonais unitárias, e  $[S]$  é uma matriz diagonal de elementos  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$  com  $p = \min(m, n)$ . O sobre-escrito  ${}^H$  indica uma operação transposta Hermitiana, em outras palavras, a operação transposta complexa conjugada de uma matriz.

Se  $m > n$ , isto é, se o algoritmo é aplicado sobre sistemas superdeterminados, a matriz  $A$  assume a forma,

$$S = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ [0] \end{bmatrix} \quad 3.13$$

A técnica SVD é bastante utilizada na engenharia na manipulação e transformação de sistemas tensoriais de segunda ordem. Um tensor surge da necessidade de se associar um vetor a uma orientação definida no espaço. No sistema Cartesiano, um tensor de segunda ordem é uma entidade com nove componentes escalares, organizadas em uma matriz  $T \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ .

Na mecânica dos materiais, por exemplo, os tensores de segunda ordem são utilizados para definir o estado geral de tensão em um ponto interno do material que compõem um corpo solicitado por forças externas, em compressão ou extensão. O resultado da técnica SVD aplicada sobre um tensor desta natureza, indica a direção das tensões normais principais que atuam neste ponto, que são primordiais para o dimensionamento de estruturas mecânicas.

Maia (1991) escreveu algumas notas sobre a relação entre o problema e autovalor e autovetor e a técnica de SVD, visando a um melhor entendimento sobre os resultados físicos das matrizes envolvidas em uma decomposição em valores singulares.

Se uma matriz  $R$  é semi-definida positiva, ou seja,  $X^T R X \geq 0$  para  $\forall X$  não nulo, então os resultados dos problemas de autovalor e autovetor (*Eigenvalue Decomposition – EVD*), e SVD são idênticos - este fato pode ser verificado através das relações 2.38 e 3.12.

Na mecânica, uma matriz semidefinida positiva pode ser corriqueiramente encontrada em sistemas elastodinâmicos, na forma de uma matriz de rigidez.

Neste caso, os valores singulares da decomposição representam as frequências naturais do sistema, e os vetores ortogonais da decomposição representam os respectivos modos de vibração.

$$SVD(R) = [U][\Sigma][U]^H \quad 3.14$$

Para qualquer matriz, valem as seguintes regras:

- EVD:  $[R] = [U][D][U]^{-1}$ .  $[U]$  não é necessariamente unitária, e  $D$  não é necessariamente semi-definida positiva.
- SVD:  $[R] = [U][\Sigma][V]^H$ .  $[U]$ ,  $[V]$  são matrizes unitárias, e  $[\Sigma]$  é uma matriz semi-definida positiva.

As frequências naturais de um sistema mecânico indicam regiões de alta amplificação dinâmica, ou seja, elevada concentração de energia mecânica, proveniente de excitações de natureza oscilatória.

### 3.3.3 Solução por mínimos quadrados baseada em SVD

Freqüentemente, um sistema de equações lineares pode ter o seu posto incompleto devido à falta de informações sobre o sistema. Nestas situações, o algoritmo padrão de mínimos ou a matriz pseudo-inversa não garantirá a unicidade da solução.

Nestes casos, uma maneira alternativa e mais robusta de se calcular a pseudo-inversa pode ser realizada através da SVD. Se a decomposição SVD de uma matriz  $A$  é conhecida, a sua pseudo-inversa pode ser simplesmente obtida por,

$$[A]^+ = [V][S]^+[U]^H \quad 3.15$$

A Equação 1.1, utilizada para identificar forças aplicadas sobre uma estrutura utilizando-se de um modelo de resposta, pode então ser reescrita na forma,

$$\{f\} = [V][S]^+[U]^H\{\tilde{x}\} \quad 3.16$$

### 3.3.4 Análise das componentes principais

A análise dos resultados da SVD sobre um sistema de equações lineares é mais complexa, e de difícil visualização, do que as análises realizadas sobre um processo de análise modal.

Cada equação que compõe um sistema linear traz uma parcela da informação necessária para a resolução do problema, que para efeito sobre este trabalho, representa as forças que se pretende identificar.

Quando um sistema superdeterminado é decomposto pela SVD, a matriz de valores singulares assume a forma expressa na Equação 3.13, com um número de linhas nulas, igual ou maior ao número de medições extras.

Ocorre que a decomposição SVD elimina a redundância das informações contidas no sistema linear original, através do corte dos valores singulares nulos ou insignificantes.

$$[A] = [U][S][V]^H = [\{u_1\} \dots \{u_r\}] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & 0 & \\ & & \vdots & \\ & & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_1\}^H \\ \vdots \\ \{v_r\}^H \end{bmatrix} \quad 3.17$$

$$[A_r] = [E_1] + [E_2] + \dots + [E_r] = \sum_{i=1}^r \sigma_i \{u_i\} \{v_i\}^H \quad 3.18$$

$$[E_r] = \sigma_r \{u_r\} \{v_r\}^H \quad 3.19$$

O sistema reduzido,  $[A_r]$ , contém as informações necessárias e suficientes para a sua resolução, desde que o problema seja bem posto, evidentemente.

A Equação 3.18 revela que a matriz  $A$  representa uma combinação de várias matrizes, resultantes dos produtos matriciais internos gerados pela decomposição.

As matrizes  $E_r$  são chamadas de componentes. A esta técnica de solução de sistemas superdeterminados foi dado o nome de análise das componentes principais (*Principal Component Analysis* – PCA).

O PCA é bastante útil para reduzir o número excedente de equações linear em um sistema, que pode ou não estar contaminado com ruído experimental. Alguns resultados da aplicação desta técnica podem ser encontrados em detalhes nas bibliografias [Anderson, 2003; PCA, 2010].

### 3.3.5 Aproximações matriciais

A técnica SVD pode ser utilizada para encontrar a melhor aproximação  $[A_k]$ , de posto  $k \leq m$ , para uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . A matriz resultante  $[A_k]$  representa a melhor aproximação, com o posto reduzido  $k$ , para a matriz original  $[A]$ , de acordo com o comprimento Euclidiano  $\|\cdot\|_2$ ,

$$[A_k] = \sum_{i=1}^k \sigma_i \{u_i\} \{v_i\}^H \quad 3.20$$

Esta técnica pode ser útil em problemas de identificação contaminados com ruído. Pelo fato de representar um truncamento na matriz original, recebe o nome de SVD truncado (*Truncated SVD* – TSVD).

A técnica TSVD pode ser utilizada como uma ferramenta simples de regularização de sistemas mal condicionados e mal postos. No entanto o truncamento pode retirar informações importantes para o sistema, ocasionando em uma descaracterização parcial ou completa do mesmo.

Hansen (1998) menciona em seus estudos que a técnica TSVD é eficiente no tratamento de problemas de identificação, nos quais uma ou mais colunas do sistema são exatas – isto é, com baixo ruído.

A solução LS para o TSVD é facilmente encontrada pelo truncamento da Equação 3.16,

$$\{f\} = [V_r S_r^+ U_r^H] \{\hat{x}\} \quad 3.21$$

### 3.3.6 Método do gradiente conjugado

O método do gradiente conjugado é um algoritmo iterativo simples e eficiente utilizado em problemas de otimização bem postos [Faires, 2002].

Shakar et al. (1985) apresenta em seus estudos alguns critérios racionais que defendem o uso do gradiente conjugado em problemas de identificação de força.

Shakar notou que a técnica procura uma solução ao longo da direção do autovetor correspondente ao maior autovalor remanescente. Embora não tão robusta quanto à SVD, o método do gradiente conjugado produz efeitos similares sobre a solução buscada.

A partir de uma estimativa inicial  $x_0$ , o método gera uma primeira direção de busca,

$$P_0 = -b_0 \hat{A} * R_0 = -b_0 \hat{A} * (\hat{A}x_0 - y) \quad 3.22$$

A parcela  $b_0$  é dada por  $1/\|\hat{A} * R_0\|$ , onde  $R_0$  é o resíduo inicial. O operador  $\hat{A} * (\cdot)$  representa a operação de convolução, definida como,

$$\hat{A} * z = \int_0^\infty x(t - \tau)z(\tau) dt \quad 3.23$$

O método então desenvolve os seguintes passos:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k P_k \quad 3.24$$

$$R_{k+1} = R_k + \alpha_k \hat{A} P_k \quad 3.25$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\|\hat{A} P_k\|^2} \quad 3.26$$

$$P_{k+1} = P_k - b_{k+1} \hat{A} * R_{k+1} \quad 3.27$$

$$b_k = \frac{1}{\|\hat{A} * R_k\|^2} \quad 3.28$$

O método do gradiente conjugado possui convergência garantida, para qualquer valor inicial  $x_0$ , em problemas de otimização que envolvam sistemas semi-definidos positivos ou definidos positivos.

Entretanto, o método pode produzir soluções com pouco ou nenhum significado físico se tomar como referência de busca autovalores ruidosos. Antes de atingir este estágio o algoritmo deve ser interrompido, tão logo tenha atingido ser critério de parada, arbitrariamente escolhido.

$$\|R_k\| \leq const \quad 3.29$$

### 3.3.7 Algoritmos naturais aplicados à identificação de forças

Os algoritmos naturais, também conhecidos como métodos de otimização de ordem zero, realizam a busca da solução sem o conhecimento do gradiente das funções objetivo consideradas, utilizando-se de regras matemáticas similares às regras evolucionistas evidenciadas na natureza.

Tais métodos são preferencialmente selecionados para o tratamento de funções objetivo com múltiplos mínimos locais, e cujos gradientes são de difícil, se não de impossível, obtenção. Os algoritmos naturais fornecem resultados robustos e estáveis, por não sofrerem com



os problemas de mal condicionamento numérico, causados pelas inversões matriciais. As linhas a seguir trazem uma sucinta explicação sobre os conceitos básicos de um dos métodos naturais, geralmente aplicados em problemas de identificação de forças.

O algoritmo genético (*Genetic Algorithm* – GA) é baseado nas teorias de Darwin sobre a sobrevivência e evolução das espécies. O algoritmo começa com uma população inicial de indivíduos aleatórios, vistos como candidatos em potencial à solução do problema [Flores et. al., 2007].

Durante o processo evolucionário, cada indivíduo é valorizado de acordo com sua capacidade de adaptação e sobrevivência em seu ambiente. Alguns indivíduos são mantidos enquanto outros são retirados da população. Após etapas sucessivas de cruzamento e mutação, os indivíduos selecionados terão seus cromossomos alterados de forma que, ao final do processo, uma solução satisfatória seja alcançada para o problema.

A técnica GA possui a vantagem de procurar sempre pelo mínimo global do problema. Este feito não é garantido quando se utiliza técnicas baseadas em gradientes, pois estes podem ‘estacionar’ em mínimos locais, finalizando o processo.

Por outro lado, a técnica GA possui uma convergência demorada, e por este motivo é recomendada especialmente para problemas que possuam um número reduzido de variáveis.

### 3.4 Técnicas de regularização

Na matemática, regularização é o termo utilizado para definir um processo no qual a solução de um problema é buscada através de um sistema ligeiramente modificado, bem próximo do sistema original sob análise, porém, menos sensível à incertezas numéricas [Neto, 2005].

A regularização é altamente recomendada para a resolução de problemas de identificação mal condicionados e mal postos [Hansen, 1998; Vogel, 2002]. Os tópicos seguintes trazem algumas das principais técnicas de regularização aplicadas em problemas de identificação de forças.

### 3.4.1 Decomposição em valores singulares truncada

Como mencionado no tópico 3.3.2.3, a técnica TSVD é útil em problemas de identificação contaminados com ruído [Vogel, 2002].

Liu e Shepard (2004) mostraram em seus estudos sobre regularização, que a técnica TSVD não é segura para problema de identificação de força, pois ocasiona a filtragem de informações com grande relevância sobre o comportamento dinâmico do sistema.

Em contraste com esta técnica, a regularização de Tikhonov, discutida a seguir, procura manter mais informações sobre o sistema, principalmente quando este é superdeterminado.

### 3.4.2 Regularização de Tikhonov

A regularização de Tikhonov é uma das mais antigas técnicas de resolução de problemas de identificação mal condicionados e mal postos [Annalisa, 1998].

A técnica foi primeiramente desenvolvida pelo matemático russo Andrey N. Tychonoff (*Tikhonov*, em inglês). Trata-se de um processo de otimização que aplica a técnica LS com restrição. O objetivo é minimizar o resíduo,

$$\{R\} = \|[A]\{f\} - \{x\}\|^2 \quad 3.30$$

O resíduo é obtido utilizando a norma Euclidiana  $\|\cdot\|$ . Se a matriz  $A$  é mal condicionada ou o sistema é indeterminado, o sistema pode possuir um elevado número de soluções. A regularização de Tikhonov possibilita a procura de um tipo específico de solução, aplicando uma restrição sobre a formulação LS,

$$\{R_\lambda\} = \|[A]\{f\} - \{x\}\|^2 + \lambda\|[C]\{f\}\| \quad 3.31$$

A matriz  $C$  é chamada matriz de Tikhonov. O valor mais comum de  $[C]$  é a matriz identidade,  $[C] = [I]$ . Assim, é possível procurar soluções com normas pequenas, evitando eventuais

divergências oriundas do processo de otimização. A pseudo-inversa regularizada pela técnica Tikhonov é expressa por,

$$[R_\lambda] = ([A]^H[A] + \lambda[C]^H[C])^{-1}[A]^H \quad 3.32$$

Resta agora obter um valor adequado para o parâmetro de regularização  $\lambda$ . Utilizando a técnica SVD, os dois termos da Equação 3.31 se escrevem,

$$\{\varepsilon^2\} = \{R\} = \sum_{i=1}^n |\sigma_i(\{v_i\}, \{f\}) - (\{u_i\}, \{x\})|^2 + \sum_{i=n+1}^m |(\{u_i\}, \{x\})|^2 \quad 3.33$$

$$\{\eta^2\} = \|\{f\}\|^2 = \sum_{i=1}^n |(\{v_i\}, \{f\})|^2 \quad 3.34$$

Substituindo as Equações 3.33 e 3.34 na Equação 3.31, obtêm-se,

$$\{f_\lambda\} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + \lambda)} \sigma_i^{-1} (\{u_i\}, \{x\}) \{v_i\} \quad 3.35$$

É fácil observar que o parâmetro de regularização  $\lambda$  afeta a solução. Este parâmetro reduz, especificamente, a influência dos valores singulares baixos,  $\sigma_i^2 < \lambda$ , propiciando uma solução mais robusta. Evidentemente, o parâmetro de regularização  $\lambda$  precisa ser otimizado.

Considerando o caso particular  $[C] = [I]$ , um bom critério de escolha do parâmetro de regularização é desenvolvido substituindo a Equação 3.35 nas Equações 3.33 e 3.34. Tem-se,

$$\{\varepsilon^2\} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + \lambda)^2} |(\{u_i\}, \{x\})|^2 + \sum_{i=n+1}^m |(\{u_i\}, \{x\})|^2 \quad 3.36$$

$$\{\eta^2\} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + \lambda)^2} |(\{u_i\}, \{x\})|^2 \quad 3.37$$

Estas duas equações representam um balanço entre duas fontes de erro: o erro de perturbação, causado pelo mal condicionamento numérico; o erro de regularização, causado pela modificação imposta pelo parâmetro de regularização sobre a pseudo-inversa,  $\{R_\lambda\}$ .

Logo, o melhor parâmetro de regularização, para esta estratégia, é aquele que produz a menor soma das parcelas de erro. O parâmetro otimizado pode ser encontrado otimizando o seguinte funcional,

$$\{\Phi\} = \{\eta^2\} - \{\varepsilon^2\} \quad 3.38$$

Esta expressão sempre possui uma solução única, pois o termo  $\varepsilon^2$  é uma função estritamente crescente em  $\lambda$ , enquanto  $\{\eta^2\}$  é uma função estritamente decrescente em  $\lambda$ . Se  $\lambda$  é nulo,  $\{\varepsilon^2\}$  é nulo e  $\{R_\lambda\} = \{R\}$ .

É importante verificar que o parâmetro de regularização indica a menor soma das parcelas de erro, regularização e perturbação, mas não garante a redução das mesmas. Sendo assim, as duas parcelas de erro podem permanecer compatíveis e elevadas, resultando em parâmetro otimizado de regularização, porém não satisfatório para a solução do problema.

### 3.4.3 Técnica de eliminação de ruído em curvas FRF baseada em SVD

Esta técnica foi recentemente apresentada por Sanliturk e Cakar (2005) para eliminar ruídos em curvas FRF. A idéia básica é a decomposição das curvas FRF em uma soma de componentes matriciais, definidas através de um conjunto de valores singulares. O

ruído é eliminado das curvas através do truncamento dos valores singulares, e as curvas são reconstruídas e tomadas como descontaminadas.

Primeiramente, as FRFs  $R_{ij} = \{R(\omega)\} = \{R_1, R_2, R_3, \dots, R_L\}$  são acondicionadas à forma de uma matriz complexa de Hankel, como mostrado a seguir.

$$[A]_{m \times n} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_N \\ R_2 & R_3 & \dots & R_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_M & R_{M+1} & \dots & R_L \end{bmatrix} \quad 3.39$$

na qual  $M + N - 1 = L$  e  $[A_{ij}] = \{R(i + j - 1)\}$ . Considerando que o processo de obtenção das curvas é estocástico, a matriz de Hankel representará uma soma das informações que relatam o sistema e o ruído experimental. Em termos estatísticos, esta matriz pode ser escrita como a soma de sua esperança e de suas incertezas. Utilizando a técnica SVD, escreve-se

$$[A] = [\hat{A}] + [\tilde{A}] = [\{U_r\} \quad \{U_\phi\}] \begin{bmatrix} [\Sigma_r] & 0 \\ 0 & [\Sigma_\phi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{V_r\}^H \\ \{V_\phi\}^H \end{bmatrix} \quad 3.40$$

A decomposição da matriz relata uma matriz de valores singulares significantes,  $[\Sigma_r]$ , que representam a parcela não contaminada da curva, e valores singulares insignificantes,  $[\Sigma_\phi]$ , que representam o ruído experimental.

Os valores singulares são classificados em relação a um valor mínimo pré-estabelecido. As componentes matriciais ruidosas são eliminadas da matriz de Hankel tomando  $\sigma_i = 0$  para  $i > r$ . A matriz de Hankel resultante do truncamento é dita descontaminada.

$$[\hat{A}] = [U_r][\Sigma_r][V_r]^H \quad 3.41$$

A FRF é diretamente reconstruída através da seguinte operação.

$$\{\widehat{R}(\omega)\} = \frac{1}{k-l+1} \sum_{j=1}^k \bar{R}_{i-j+1,j} \quad 3.42$$

na qual  $l = \max(1, i - M + 1)$  e  $k = \min(N, i)$ . É importante mencionar que o método é sensível às dimensões escolhidas da matriz de Hankel e ao valor limitante adotado.

#### 3.4.4 Regularização por matrizes aleatórias

O Item 3.2 apresenta uma discussão sobre o mal condicionamento matricial, e seus efeitos indesejáveis sobre a solução dos problemas propostos. Uma operação matricial mal condicionada pode gerar uma amplificação do ruído que se propaga ao longo do sistema, impossibilitando a resolução do problema.

Através de um exemplo simplificado de identificação de força, é possível entender melhor como a parcela de erro experimental se propaga, das repostas medidas para as forças identificadas. Seja a matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2^{10} \end{pmatrix}, \quad 3.43$$

um operador integro-diferencial que relaciona as respostas medidas de um sistema com as forças nele aplicadas. Os vetores  $x = [0 \ 1]^T$  e  $f = [1 \ 0]^T$  representam as respostas medidas e as forças aplicadas, ambos exatos, respectivamente. Se uma pequena perturbação,  $p = [0 \ 2^{-10}]^T$ , é somada ao vetor de respostas,  $\tilde{x} = [0 \ 2^{-10}]^T$ , as forças perturbadas  $\tilde{f}$  se diferenciarão das forças exatas por  $r = [0 \ 1]^T$ .

$$\tilde{f} = A^{-1}\tilde{x} = f + r = [1 \ 0]^T + [0 \ 1]^T \quad 3.44$$

Como resultado, o fator de amplificação do erro é  $|r|/|p| = 1024$ . O desvio insignificante ocasionada nas respostas medidas, da

ordem de  $2^{-8}\%$ , foi capaz de gerar um erro de exatamente 100% nas forças identificadas (taxa calculada em relação às distâncias Euclidianas). A regularização propõe a resolução de um sistema ligeiramente modificado,

$$\bar{A} \bar{f} = x \quad 3.45$$

capaz de fornecer uma solução aproximada do sistema original. Tomando, por exemplo, o sistema regularizado  $\bar{A}$ ,

$$\bar{A} = A + \delta A = \begin{pmatrix} 1,01 & 0 \\ 0 & 1/2^{10} + 0,01 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,011 \end{pmatrix} \quad 3.46$$

encontra-se a solução regularizada  $\bar{f} = [1 \ 0,089]^T$ . O fator de amplificação do erro no sistema regularizado é aproximadamente 91. O erro gerado sobre as forças identificadas caiu para 8,9%.

O número de condicionamento pode ser utilizado para visualizar o impacto da regularização sobre o sistema. Com a regularização, o  $CN$  do sistema reduziu-se de  $5 \times 10^9$  para 100. Quanto mais próximo da unidade estiver o  $CN$ , melhor será o condicionamento matricial.

É importante mencionar que a redução do  $CN$  não garante a resolução de um problema, apenas indica uma redução da sensibilidade do sistema às incertezas contidas nos dados utilizados. Apenas problemas bem postos possuem soluções garantidas, ou seja, problemas que satisfaçam às condições de unicidade e continuidade em suas soluções.

Este exemplo mostra um caso comum de identificação de forças, no qual o sistema é altamente mal condicionado. A grande maioria dos processos tradicionais de regularização faz uso da filtragem de informação no sistema, e devido a este motivo, podem acarretar na perda de informações preciosas dos sistemas.

Este trabalho propõe uma técnica de regularização, denominada regularização pelas matrizes aleatórias (RMA), que infere diretamente

sobre o  $CN$  dos sistemas. Espera-se que a melhora do condicionamento matricial possa reduzir os fatores de amplificação do erro nos sistemas, proporcionando a identificação de forças com menores níveis de ruído.

Seja um problema de identificação de forças definido através de um sistema LTI, conforme a Equação 3.47, a seguir. Esta equação contempla incertezas contidas nas respostas medidas,  $\tilde{x} = x + \delta x$ , oriundas de um processo estocástico.

$$A(f + \xi_0) = \tilde{x} \quad 3.47$$

O vetor  $\xi_0 = \delta f_x$  representa o desvio causado nas forças identificadas, necessário para compensar a solução  $f$ . Se operador matricial  $A$  é mal condicionado, o vetor  $\xi_0$  será elevado em relação à incerteza  $\delta x$ . O subscrito  $x$  em  $\delta f_x$  representa um desvio devido à resposta ruidosa.

Se um sistema regularizado  $\bar{A}$  (melhor condicionado do que  $A$ ) fosse aplicado à resposta não contaminada  $x$ , a solução do sistema deveria ser balanceada por um desvio  $\delta f_a$ .

$$\bar{A}(f + \delta f_a) = x \quad 3.48$$

Nesta equação, o subscrito  $a$  representa um desvio devido à regularização. Como não é possível obter as respostas não ruidosas  $x$ , a Equação 3.48 deve ser modificada para contemplar as respostas ruidosas  $\tilde{x}$ . A modificação está apresentada a seguir.

$$\bar{A}(\bar{f} + \delta f_a) = \tilde{x} \quad 3.49$$

As incertezas adicionadas ao lado direito da igualdade devem ser compensadas por um desvio cometido sobre a solução do sistema, ou seja, sobre as forças identificadas. Ao substituírmos a solução  $\bar{f}$  pela soma  $\bar{f} = f + \bar{\delta f}_x$ , a Equação 3.49 se manipula para



$$\bar{A}(f + \xi_1) = \tilde{x} \quad 3.50$$

A solução do sistema regularizado, submetido às respostas ruidosas, deve então ser compensada pelo vetor de erro  $\xi_1 = \delta f_a + \delta \bar{f}_x$ , que representa a soma de duas fontes de erro: o erro de regularização, definido pelo subscrito  $a$ , e o erro das incertezas nas respostas, definido pelo subscrito  $x$ .

Os vetores  $\xi_0$  e  $\xi_1$  mostram os erros cometidos na identificação das forças, antes e depois da regularização. Neste momento, uma simples regra pode ser utilizada, para qualquer resposta ruidosa  $\tilde{x}$ , para checar a eficiência da regularização.

$$\|\xi_1\|_2 < \|\xi_0\|_2 \quad 3.51$$

Se o erro cometido na identificação com regularização for menor do que o erro cometido na identificação sem regularização, em relação às distâncias Euclidianas, esta regularização pode ser considerada eficiente.

A regularização proposta objetiva encontrar uma matriz aleatória  $\delta A$  que, somada à matriz original  $A$  ( $\bar{A} = A + \delta A$ ), seja capaz de melhorar o condicionamento matricial do sistema, reduzindo o fator de amplificação do erro  $e$ , como consequência, reduzindo os desvios encontrados nas forças identificadas.

A busca pelas matrizes aleatórias  $\delta A$  é feita através de uma simulação de Monte Carlo, até que o sistema seja regularizado de maneira satisfatória. Para tal, é preciso estabelecer expressões analíticas capazes de estimar os vetores  $\xi_0$  e  $\xi_1$ , necessários para checar a eficiência da regularização. Um bom critério de seleção para as matrizes aleatórias  $\delta A$  pode ser estabelecido pela regra,

$$CN(A + \delta A) < CN(A) \quad 3.52$$

Sabe-se que se uma matriz  $A$  é mal condicionada, seu determinante é próximo de zero, e esta matriz pode ser considerada, para efeitos práticos, singular. Assim, o determinante da matriz também pode ser utilizado como regra para escolha das matrizes aleatórias. O critério de seleção desta vez é o nível de singularidade da matriz  $\bar{A}$ .

$$DET(A + \delta A) > DET(A) \quad 3.53$$

O processo de geração das matrizes aleatórias deve ser adequadamente escolhido para cada variável estocástica. As matrizes aleatórias podem ser geradas por função de densidade de probabilidade complexa  $\Theta = \alpha P(m, n)$ , onde  $m$  e  $n$  definem a dimensão do operador matricial  $A$ , ponderada por uma constante  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Outros modelos probabilísticos mais sofisticados podem ser empregados neste problema [Papoulis, 2001].

Antes de entrar nos méritos do erro cometido pela regularização, vamos à determinação do vetor de erro inicial  $\xi_0$ . Através da manipulação da Equação 3.47, é possível escrever a seguinte expressão.

$$\xi_0 = \delta f_x = -(A)^{-1} \delta x \quad 3.54$$

A incerteza  $\delta x$  é desconhecida, portanto, precisa ser gerada por uma função de densidade de probabilidade apropriada. Esta etapa é de fundamental importância para o sucesso da regularização, por razões que serão apresentadas ao final dos desenvolvimentos matemáticos seguintes.

O vetor de erro cometido pela identificação após a regularização,  $\xi_1$ , representa uma soma dois desvios  $\delta f_a$  e  $\bar{\delta} f_x$ , que relatam as parcelas de erro cometidas pela regularização e pelas incertezas contidas nas respostas ruidosas, respectivamente. Os desvios  $\delta f_a$  e  $\bar{\delta} f_x$  podem ser estimados através da manipulação da Equação 3.49, escrita na forma do sistema seguinte.

$$\begin{cases} A\bar{f} = \tilde{x} & (1) \\ \delta A\bar{f} + \bar{A}\delta f_a = 0 & (2) \end{cases} \quad 3.55$$

O desvio  $\delta f_a$  pode ser diretamente obtido da Equação 3.55 (2),

$$\delta f_a = -(\bar{A})^{-1}\delta A(A)^{-1}\tilde{x} \quad 3.56$$

O desvio  $\bar{\delta}f_x$  surge da manipulação da Equação 3.55 (1). O resultado final é semelhante ao expresso pela Equação 3.54, porém com a diferença de representar um desvio sobre o sistema regularizado,  $\bar{A}$ .

$$\bar{\delta}f_x = -(\bar{A})^{-1}\delta x \quad 3.57$$

Agora, retomaremos a discussão sobre o processo de determinação da incerteza desconhecida  $\delta x$ . Como pode ser visto nas Equações 3.54 e 3.57, a incerteza  $\delta x$  é uma parcela importante para a determinação dos desvios  $\delta f_x$  e  $\bar{\delta}f_x$ , necessários para a determinação dos vetores de erro  $\xi_0$  e  $\xi_1$ .

Para que a Equação 3.51 pudesse representar fielmente o efeito das modificações matriciais sobre a solução do problema, as incertezas utilizadas nas Equações 3.54 e 3.57 deveriam coincidir com as incertezas contidas nas respostas medidas,  $\tilde{x}$ . Isto significa que a regularização proposta pelas matrizes aleatórias só possui sentido para as incertezas adotadas, podendo não ser satisfatória para  $\tilde{x}$ .

O problema da determinação das incertezas  $\delta x$  – que também podem ser entendidas como direções para análise de sensibilidade – sugere a implementação de uma simulação de Monte Carlo [Tarantola, 2005], conduzida a partir de uma função de densidade de probabilidade apropriada para a variável estocástica  $\tilde{x}$ .

Deste modo, um conjunto  $\{\delta x\}$  pode ser gerado para checar o efeito da regularização estabelecida por  $\delta A$ , no maior número de direções possíveis de erro.

Na Figura 3.4, a seguir, está exemplificado um processo de verificação de uma regularização estabelecida por  $\delta A$ , considerando um conjunto de incertezas  $\{\delta x_i\}_{i=1,3}$ . Neste exemplo, os vetores  $\xi_{0_1}$  e  $\xi_{1_1}$  representam os vetores do erro cometido pela regularização, em relação à incerteza  $\delta x_1$ . O subscrito  $i$  indica os resultados para as demais incertezas.

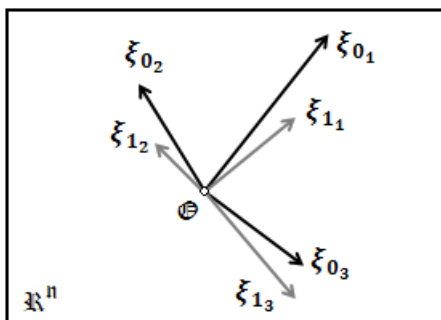


Fig. 3.4 – Representação gráfica da Equação 3.52, testada para um conjunto  $\{\delta x_i\}_{i=1,3}$ .

É fácil perceber que a regularização seria eficiente apenas para  $\delta x_1$  e  $\delta x_2$ . A modificação proposta por  $\delta A$  poderia ser aceita por maioria de acertos.

Supondo agora que um conjunto de modificações  $\{\delta A\}$  fosse gerado, sendo cada uma testada por um conjunto de incertezas  $\{\delta x\}$ . Assim, aquela modificação  $\delta A$  que atingisse o maior número de acertos poderia ser eleita para regularizar o sistema. Como os vetores de erros são variáveis contínuas, a modificação matricial  $\delta A$  que minimizar as distâncias Euclidianas em relação ao conjunto  $\{\xi_0\}$ , deve ser eleita para a regularização.

O procedimento computacional para regularização pelo método das matrizes aleatórias está apresentado abaixo.

1. Gerar um conjunto de incertezas  $\{\delta x_i\}_{i=1,p}$ , tal que  $\|\delta x_i\|_2 < \delta x_{m\acute{a}x}$ .
2. Calcular o conjunto  $\{\xi_{0_i}\}_{i=1,p}$ , usando a Equação 3.55.
3. Gerar um conjunto  $\{\delta A_i\}_{i=1,q}$ , tal que satisfaça completamente a uma das regras definidas pelas Equações 3.52 e 3.53.
4. Calcular um conjunto  $\{\xi_{1_i}\}_{i=1,p}$  para cada matriz contida no conjunto  $\{\delta A_i\}_{i=1,q}$ , usando as Equações 3.57 e 3.58.
5. Selecionar o conjunto  $\{\xi_{1_i}\}_{i=1,p}$  que minimize as distâncias Euclidianas em relação ao conjunto  $\{\xi_{0_i}\}_{i=1,p}$ , conforme a Equação 3.51.
6. Adotar para a regularização a modificação matricial  $\delta A_i$ , referente ao conjunto  $\{\xi_{1_i}\}$  selecionado no passo anterior.
7. Repetir todo o procedimento caso nenhum conjunto  $\{\xi_{1_i}\}$  seja selecionado no passo 5; os parâmetros de regularização  $\delta x_{m\acute{a}x}$  e  $\alpha$  podem não estar adequados para as dimensões consideradas no problema.

Os comentários seguintes são importantes para a correta implementação do método.

- a. Em referência ao teorema do limite central, e considerando um número  $p$  suficientemente grande em relação ao número de respostas medidas, é possível utilizar uma função de densidade de probabilidade gaussiana para gerar as incertezas contidas nos conjuntos  $\{\delta x_i\}_{i=1,p}$ . Outras funções de densidade de probabilidade podem ser empregadas desde que se tenha um conhecimento específico sobre os processos estocásticos que envolvem a obtenção das respostas do sistema.
- b. A priori, quaisquer elementos pertencentes ao operador matricial  $A$  podem ser responsáveis pelo mal

condicionamento observado nos sistemas. Se o operador em questão é determinado experimentalmente, e existirem condições para a determinação de distribuições estatísticas para cada FRF coletada, tais distribuições devem ser consideradas para a construção da função de densidade de probabilidade  $\Theta(\alpha, m, n)$ . Outros tipos de funções podem ser empregadas para geração das matrizes aleatórias, desde que sejam tomados os cuidados necessários para que a regularização seja satisfatória.

- c. Os parâmetros de regularização  $\delta x_{m\acute{a}x}$  e  $\alpha$  servem para controlar a severidade da regularização. A regularização ideal é aquela que fornece um sistema ligeiramente modificado, capaz de reduzir o mal condicionamento e aproximar a solução do problema. Isto significa que os desvios  $\delta f_a$ , devidos à regularização, devem ser pequenos. Para isso, o parâmetro  $\alpha$  deve ser utilizado para controlar as amplitudes das matrizes aleatórias. O parâmetro  $\delta x_{m\acute{a}x}$  deve ser suficientemente pequeno para privilegiar os desvios  $\delta f_x$  – devidos ao mal condicionamento – observados nas FRFs dos sistemas.
- d. A regra definida pela Equação 3.53 só se aplica a matrizes quadradas. Em quaisquer outros casos, deve se utilizar a regra definida pela Equação 3.52. Outros algoritmos, pertencentes a pacotes comerciais ou estudos acadêmicos, e capazes de medir o mal condicionamento numérico de uma matriz, podem ser empregados em substituição às regras mencionadas.

Alguns resultados da aplicação da técnica RMA estão apresentados nos Capítulos 5 e 6. O Capítulo 5 traz exemplos, numéricos e experimentais, de processos de identificação de forças em uma viga de Euler-Bernoulli, através da inversão de matrizes de FRF estruturais contaminadas com ruído.

O Capítulo 6 traz os resultados de um procedimento de identificação de forças em placas, através do método alternativo de análise de caminhos de transferência ATPA. Este método é uma das propostas de identificação deste trabalho, e está descrito em detalhes no Capítulo 6. Os resultados de regularização da técnica RMA foram confrontados com os resultados obtidos pelas técnicas de Tikhonov, e da eliminação de ruído em curvas FRF através da filtragem de valores singulares.





---

---

ALLEN, M. S., CARNE, T. G., *Comparison of inverse structural filter (ISF) and sum of weighted accelerations technique (SWAT) time domain force identification methods. The 47<sup>th</sup> Structural Dynamics, and Materials Conference, Newport/RI, 2006.*

ANDERSON, T.W., *Principal Components: an introduction to multivariate statistical analysis*, John Wiley & Sons, 2003.

ARORA, S. J., *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, 1989.

BATEMAN, V. I., CARNE, T. G., Sandia National Laboratory, McCall, D. M., Halliburton Geophysical Services, *Force reconstruction for impact tests of an energy-absorbing nose*, *Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, vol. 7 (1), pp. 41-50, 1991.

BENDAT, J., PIERSOL, A. G., *Random Data: analysis and measurement procedures*, John Wiley and Sons, 3 ed., 2000.

BERANEK, L. L., *Noise and Vibration Control Engineering Principles and Applications*, John Wiley & Sons, 1992.

BIES, D., Hansen, C., *Engineering Noise Control – Theory and Practice*, E&FN Spon, 2 ed., 1998.

CHAN, H. T., LAW, S. S., YUNG, T. H., *Moving force identification using an existing pre-stressed concrete bridge*, *Engineering Structures*, vol. 22, pp. 1261-1270, 2000.

CHEN, C., *Linear System Theory And Design, The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering*, 3 ed., 1999.

COELHO, A. R., **Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares**, Editora da UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil. 2004.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., WITT, R. J., *Concepts And Applications Of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, 4 ed., 2002.

DOBSON, B. J., RIDER, E., *A Review of the indirect calculation of excitation forces from measured structural response data*, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 204 (2), pp. 69-75, 1990.

DONTCHEV, A. L., ZOLEZZI, T., *Well-Posed Optimization Problems*, Springer-Verlag, 1992.

EWINS, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 1984.

FAHY, F. J., WALKER, J., *Fundamentals of Noise and Vibration*, Spons Architecture Price Book, 1998.

FAIRES, J. D., *Numerical Methods*, Brooks Cole, 3 ed., 2002.

**Flexão circular de um aço**. Instituto Superior de Engenharia do Porto – Departamento de Física, Laboratórios de física, DEFI-NRM-0007, Porto, Portugal, 2007, Disponível em: <http://www.defi.isep.ipp.pt>, Acesso em 29 de janeiro de 2010.

FLORES, J. H. R., VIANA, F. A. C. V., RADE, D. A., STEFFEN, V., *Identification of external forces in mechanical systems by using lifecycle model and stress-stiffening effect*, *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, pp. 2900-2917, 2007.

---

---

FREGOLENT, A., *Mathematical Conditioning, An international course on new applications and techniques of experimental modal testing updating, optimization, and damage detection – CADIS*, 1998.

GENARO, G., Rade, D. A., *Input force identification in the time domain, Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC)*, California/USA, 1998.

HANSEN, C., *Rank-Deficient And Discrete Ill-Posed Problems – Numerical Aspects of Linear Inversion*, SIAM, 1998.

JANSSENS, M. A., VERHEIJ J. W., *The use of an equivalent forces method for the experimental quantification of structural sound transmission in ships, Journal of Sound and Vibration*, vol. 226 (2), pp. 305-328, 1999.

LIU, Y., SHEPARD, W. S., *Dynamic force identification based on enhance least squares and total least squares schemes in the frequency domain, Journal of Sound and Vibration*, vol. 282, pp. 37-60, 2004.

MAIA, N. M., *Fundamentals of singular value decomposition, Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Florence/IT, 1991.

MCCONNEL, K., *Vibration Testing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 1995.

MEIROVITCH, L., *Principles and Techniques of Vibrations*, Prentice-Hall, 1997.

MOLER, C., *Numerical Computing with MATLAB, Eigenvalues and Singular Values*, Capítulo 10, SIAM, 2004.

MOURA, H., CARVALHO, R. S. T., LENZI, A., *An alternative formulation of transfer path analysis*, Anais do 20<sup>th</sup> Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), Gramado, Brasil, 2009.

NASCIMENTO, V., **Notas sobre singular value decomposition (SVD)**, PEE-5794 – Ferramentas de Análise Matricial para Aplicações em Engenharia Elétrica, Escola Politécnica – Universidade de São Paulo, LPS – Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos, São Paulo, Brasil, 2004.

NETO, S., **Problemas Inversos: Conceitos Fundamentais e Aplicações**, EDUERJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2005.

NOUMURA, K., YOSHIDA, J., *Method of transfer path analysis for vehicle interior sound with no excitation experiment*, FISITA, F2006D183, 2006.

OTSUKA, T., OKADA, T., IKENO, T., SHIOMI, K., OKUMA, M., *Force identification of an outboard engine by experimental means of linear structure modeling and equivalent force transformation*, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 308, pp. 541-547, 2007.

PADILHA, P., **Comparação de técnicas de análise de caminhos de transferência vibro-acústicos**, Dissertação de mestrado, 82 páginas, UNICAMP – Universidade Federal de Campinas. Campinas, Brasil, 2006.

PAPOULIS, A., *Probability, Random Variables And Stochastic Processes*, McGraw-Hill Book Company, 4 ed., 2001.

PCA, <http://www.tau.ac.il/~rubi/PCA.pdf>, acesso em 21 de setembro de 2010.

---

---

PEZERAT, C., GUYADER, J. L., *Identification of vibration sources*, *Journal of Applied Acoustics*, vol. 61, pp. 309-324, 2000.

SANLITURK, K. Y., CAKAR, O., *Noise elimination from measured frequency response functions*, *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 19, pp. 615-631, 2005.

SHARKAR, T. K., WEINER, D. D., JAIN, V. K., *Some mathematical considerations with the inverse problem*, *IEEE – Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-29 (2), 1981.

SHARKAR, T. K. WEINER, D. D., JAIN, V. K, DIANAT, S. A., *Impulsive response determination in the time domain – theory*, *IEEE – Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-30 (4), 1985.

SILVA, L A., **Técnicas de identificação de forças no domínio da frequência**, Tese de doutorado, 221 páginas, Universidade Federal de Uberlândia, Departamento de Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG, Brasil, 2000.

STARKEY, J. M., MERRILL, G. L., *On the ill-conditioned nature of indirect force-measurement techniques*, *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, vol. 4, pp. 103-108, 1989.

STEFFEN, V. Jr., RADE, D. A., *An identification method of multi-degree-of-freedom systems based on Fourier series*, *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, vol. 6 (4), pp. 271-278, 1991.

STELZNER, A. D., KAMMER, D. C., *Input force estimation using an inverse structural filter*, *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC)*, vol. 3727 (2), pp. 954-960, 1999.

---

---

STEVENS, K., *Force identification problems – an overview, Proceedings of the SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, Houston, EUA, 1987.

TARANTOLA, A., *Inverse problems and methods for parameter estimation*, SIAM, 2005.

THITE, A. N., TOMPSON, D. J., *The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods – part 2: use of regularization techniques*, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 264, pp. 433-451, 2003.

THITE, A. N., TOMPSON, D. J., *Selection of response measurement locations to improve inverse force determination*, *Journal of Applied Acoustics*, vol. 67 (8), pp. 797-818, 2006.

VOGEL, C. R., *Computational Methods for Inverse Problems*, SIAM, 2002.

WOODBURY, K., *WHAT ARE INVERSE PROBLEMS: Brief discussion about Inverse Problems*, Universidade de Alabama, Alabama, EUA, disponível em: [www.me.ua.edu/inverse/whatis.html](http://www.me.ua.edu/inverse/whatis.html), acesso em 21 de setembro de 2010.

WYLIE, R., BARRET, L., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill Professional, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., *The Finite Element Method: Vol. I – II*, Butterworth-Heinemann, 5 ed., 2000.