

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
AUTOMAÇÃO E SISTEMAS (PG-EAS)

# **Uma Contribuição ao Controle de Sistemas Comutados.**

Tese de doutorado submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

**Martín J. Pomar García**

Florianópolis, Outubro de 2009.



# Uma Contribuição ao Controle de Sistemas Comutados.

Martín J. Pomar García

Esta Tese de Doutorado foi julgada adequada, servindo como requisito parcial para o obtenção do título de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Prof. Julio Elias Normey-Rico, Dr.

Prof. César de Prada Moraga, Dr.

Orientadores

---

Prof. Eugênio de Bona Castelan, Dr.

Coordenador do curso do PG-EAS, UFSC.

## Banca Examinadora

---

Prof. Romeu Reginatto, Dr. - UNIOESTE

---

Prof. Bismark Claude Torrico, Dr. - UFC

---

Prof. Pedro Albertos, Dr. - UPV

---

Prof. Daniel Juan Pagano, Dr. - UFSC



*A Cami y Paty.  
A mi abuela Nayr,  
in memoriam*



## *Agradecimentos*

- *Em primeiro lugar quero agradecer a meus orientadores: Prof Julio E. Normey-Rico e Prof. César de Prada Moraga, pela oportunidade que me deram em realizar o doutorado, por sua orientação e pelo apoio que recebi deles em todo momento,*
- *a minha mulher Patricia pela paciência e compreensão, foi uma jornada de quatro anos inesquecíveis,*
- *a meu pai Jorge e meu irmão Bernardo,*
- *a toda minha família florianopolitana, sem sua companhia não teria feito nada do que fiz,*
- *a minha tia Rayito, por ser como uma mãe para mim,*
- *e a todos meus colegas que de uma forma ou outra compartilharam comigo este trabalho,*
- *a Agência Nacional do Petróleo e Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), Brasil, no marco do projeto aciPG-PRH No 34 ANP/MCT, pelo apoio econômico,*
- *ao projeto ALFA II-0385-FA da UE e o projeto DPI2003-00013 CI-CYT - Espanha pelo apoio econômico.*



Resumo da Tese de Doutorado apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

## Uma Contribuição ao Controle de Sistemas Comutados.

Martín J. Pomar García

Outubro de 2009

Orientadores : Prof. Julio E. Normey-Rico, Dr.  
Prof. Cesar de Prada Moraga, Dr.

Palavras-chave : Sistemas Híbridos, Sistemas Comutados, Conversores de Potência, *Buck-Boost*, Sistemas afins por partes, Sistemas mistos lógicos dinâmicos, Controle Preditivo Misto Inteiro, Controle Preditivo Não-Linear Híbrido, Projeto Integrado.

Número de Páginas : 175

Esta tese apresenta diversos aspectos relacionados com a modelagem, análise e controle de uma classe particular de sistemas híbridos, os sistemas comutados, e em particular a dos conversores de potência.

No capítulo 2 se introduz o conceito de Sistemas Híbridos, sistemas que apresentam dinâmicas discretas e contínuas ao mesmo tempo, e onde podem co-existir variáveis reais e discretas como por exemplo variáveis binárias. Também duas abordagens para realizar a modelagem destes sistemas são apresentadas, os sistemas afins por partes (*Piece Wise Afins Systems* - PWA) e os sistemas mistos lógicos dinâmicos (*Mixed Logical Dynamical Systems* -MLD). Ambas as ferramentas são usadas para modelar um conversor de potência de corrente contínua em corrente contínua (CC-CC), o conversor Buck-Boost (CBB), que é o caso de estudo desta tese.

No capítulo 3 se analisa a estabilidade de sistemas comutados autônomos lineares onde o sinal de comutação é um sinal arbitrário. Primeiro se desenvolvem condições necessárias e suficientes de estabilidade baseadas nos conceitos de Raio Espectral Generalizado (*Generalized Spectral Radius* - GSR) e Raio Espectral Conjunto (*Joint Spectral Radius* - JSR). Mostra-se que o cálculo do JSR é um problema computacionalmente complexo, o que

limita a aplicação desta ferramenta. Neste mesmo capítulo se obtém uma condição suficiente de estabilidade através da função quadrática comum de Lyapunov (*Common Quadratic Lyapunov Function* - CQLF), a qual permite testar a estabilidade do sistema comutado de uma forma simples mas bastante conservadora. Finalmente se estuda uma solução intermediária entre os resultados conservadores da CQLF, e os menos conservadores, como o JSR, mas numericamente complexos. Esta solução é obtida através da função quadrática comutada de Lyapunov (*Switching Quadratic Lyapunov Function* - SQLF).

No capítulo 4 se desenvolvem aspectos teóricos e práticos do controle preditivo aplicado a uma classe particular de sistemas híbridos, os sistemas comutados. Estudam-se duas abordagens diferentes, a primeira é o controle preditivo misto inteiro (CPMI), que se aplica a sistemas MLD e permite realizar o projeto da lei de controle de uma forma sistemática. A segunda abordagem, que pode ser aplicada a sistemas híbridos não-lineares, é o controle preditivo não-linear híbrido (CPBMNL-Híbrido). Ambas as estratégias exemplificam-se através de sua aplicação ao CBB.

Finalmente no capítulo 5 se desenvolvem aspectos teóricos relacionados com o Projeto Integrado de Processos e Controle, e realizam-se dois estudos de caso para mostrar a importância da metodologia no projeto de controle e conversores de potência CC-CC. Em ambos os casos se mostram as vantagens da utilização do método com o fim de obter um sistema em malha fechada com uma performance otimizada, assim como a flexibilidade que mostra esta metodologia quando desejamos projetar um conversor para trabalhar numa certa faixa de operação.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the refinements for the degree of Doctor in Automation and Systems Engineering.

## Una Contribución al Control de Sistemas Conmutados.

Martín J. Pomar García

Octubre de 2009

Orientadores : Prof. Julio E. Normey-Rico, Dr.  
Prof. César de Prada Moraga, Dr.

Keywords: : Hybrid Systems, Switching Systems,  
Power Converters, *Buck-Boost*,  
Piece Wise Affine Systems,  
Mix Logical Dynamical Systems,  
Mixed Integer Predictive Control,  
Non-Linear Hybrid Predictive Control,  
Integrated Design.

Número de Páginas : 175

This thesis presents the modeling, analysis and control of switched systems, which are a particular class of hybrid systems. Particularly, a power converter is used as case study.

Chapter 2 is dedicated to introduce the concept of hybrid system, that are processes that exhibit continuous dynamics and discrete event behavior at the same time and thus, discrete variables and continuous variables have to be treated simultaneously. Two modeling approaches are also presented in this part: Piece Wise Afins Systems - PWA and Mixed Logical Dynamical Systems -MLD. Both tools are used then to model the Buck-Boost Converter (CBB), which is used in this thesis as a case study process.

Chapter 3 studies the stability analysis of linear switched systems that use arbitrary switched control signals. Necessary and sufficient conditions for stability are then presented using Generalized Spectral Radius- GSR and Joint Spectral Radius - JSR ideas. The computational complexity of this tool is analyzed to show its limitations in real applications. A sufficient condition for stability is then obtained by the use of a Common Quadratic Lyapunov Function - CQLF. The simplicity of this approach is highlighted, however also it shown that gives very conservative results.

Finally, a solution based on the Switching Quadratic Lyapunov Function-SQLF is presented, which gives a better compromise between conservatism and complexity.

In Chapter 4 several aspects of the application of Model Predictive Control to switched systems are presented. First, the Mixed Integer MPC is used in the context of MLD models, which provides a systematic approach. The second approach is applied to nonlinear hybrid systems and is called Nonlinear Hybrid MPC. Both techniques are applied to the BBC to show their advantages and draw-backs.

Finally Chapter 5 presents the Integrated Design and Control theory applied to the power converters area. Two important case studies are used in this chapter to show the advantages and flexibility of this approach. The method allows to obtain an optimal performance of the set converter-controller working in several operational conditions.

Resumen de la Tesis de Doctorado presentada ante la UFSC como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Doctor en Ingeniería de Automación y Sistemas.

## Una Contribución al Control de Sistemas Conmutados.

Martín J. Pomar García

Octubre de 2009

Orientadores : Prof. Julio E. Normey-Rico, Dr.  
Prof. Cesar de Prada Moraga, Dr.

Palabras-claves : Sistemas Híbridos, Sistemas Conmutados, Convertidores de Potencia, *Buck-Boost*, Sistemas afines por partes, Sistemas mixtos lógicos dinámicos, Control Predictivo Mixto Entero, Control Predictivo No-Lineal Híbrido, Diseño Integrado.

Número de Páginas : 175

Esta tesis presenta varios aspectos relacionados con el modelado, análisis de estabilidad y el control de una clase particular de sistemas híbridos, los sistemas conmutados, y en particular, los convertidores de potencia.

En el capítulo 2 se introduce el concepto de sistemas híbridos, sistemas que presentan dinámicas discretas y continuas al mismo tiempo, y donde pueden co-existir variables reales y discretas, como por ejemplo las variables binarias. También dos enfoques para realizar el modelado de estos sistemas se presentan, los sistemas afines por partes o a trozos (*Piece Wise Affine Systems* - PWA) y los sistemas mixtos lógicos dinámicos (*Mixed Logical Dynamical Systems* - MLD). Ambas herramientas se utilizan para modelar un convertidor de potencia de corriente directa en corriente directa (CD-CD), el convertidor Buck-Boost (CBB), que es el caso de estudio de esta tesis.

En el capítulo 3 se analiza la estabilidad de los sistemas conmutados autónomos lineales donde la señal de conmutación es una señal arbitraria. En primer lugar se desarrolla las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad basados en los conceptos de radio espectral generalizado (*Generalized spectral Radio* - GSR) y en el radio espectral conjunto (*Joint Spectral*

*Radius* - JSR). Se muestra que el cálculo del JSR es un problema computacionalmente complejo, lo que limita la aplicación de esta herramienta. En este mismo capítulo, se obtiene una condición suficiente de estabilidad mediante la función cuadrática común de Lyapunov (*Common Quadratic Lyapunov Function* - CQLF), la cual permite probar la estabilidad del sistema conmutado de un forma sencilla pero muy conservadora. Por último, se estudia una solución intermedia entre los resultados conservadores de la CQLF, y los menos conservadoras, como JSR, pero numéricamente complejos. Esta solución se obtiene a través de la función cuadrática conmutada de Lyapunov (*Switching Quadratic Lyapunov Function* - SQLF).

En el capítulo 4 se desarrollan aspectos teóricos y prácticos del control predictivo aplicado a una clase particular de sistemas híbridos, los sistemas conmutados. Este estudio examina dos diferentes enfoques, el primero es el control predictivo mixto entero (CPMI), que se aplica a los sistemas MLD y permite el diseño de la ley de control de manera sistemática. El segundo enfoque se puede aplicar a los sistemas híbridos no-lineales, es el control predictivo no-lineal híbrido (CPBMNL-Híbrido). Ambas estrategias se ejemplifican a través de su aplicación al CBB.

Finalmente en el capítulo 5 se desarrollan aspectos teóricos relacionados con el diseño integrado de procesos y control, y se realizan dos estudios de caso para mostrar la importancia de la metodología del diseño de la ley de control y de los convertidores de potencia DC-DC. En ambos casos, se muestra las ventajas de utilizar el método con el fin de obtener un sistema en malla cerrada con un rendimiento optimizado, así como la flexibilidad que muestra esta metodología cuando se quiere diseñar un convertidor para trabajar en un determinado rango de operación.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	6
1.3	Organização do trabalho . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Modelagem de Sistemas Híbridos</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	Caso de estudo: Conversor <i>Buck-Boost</i> . . . . .	10
2.3	Sistemas Afins por Partes . . . . .	12
2.3.1	Exemplo . . . . .	14
2.4	Sistemas Mistos Lógicos Dinâmicos . . . . .	15
2.4.1	Cálculo Proposicional e Programação Linear Inteira . . . . .	20
	Proposições Lógicas . . . . .	20
	Proposições Mistas Lógicas-Contínuas . . . . .	22
2.4.2	Estrutura de Sistemas MLD . . . . .	23
2.4.3	Sistema MLD bem posto e a tolerância $\epsilon$ . . . . .	25
2.4.4	Estado estacionário para sistemas MLD . . . . .	27
2.4.5	Exemplo . . . . .	30
2.5	Equivalência entre sistemas MLD e PWA . . . . .	32
2.6	Conversão de modelos MLD-PWA . . . . .	34
2.7	Sumário . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Análise da Estabilidade de Sistemas Comutados</b>	<b>36</b>
3.1	Introdução . . . . .	36
3.2	Sistemas Lineares comutados e Inclusões Lineares Discretas . . . . .	37
3.3	Raio Espectral e Estabilidade . . . . .	39
3.3.1	Raio Espectral Conjunto e AAS . . . . .	39
3.3.2	Raio Espectral Conjunto e o PAS . . . . .	42
3.3.3	Raio Espectral Generalizado e AAS . . . . .	43

3.3.4	Cálculo do Raio Espectral Conjunto (JSR) . . . . .	43
3.4	Função Quadrática Comum de Lyapunov e Estabilidade . . . . .	45
3.5	Função Quadrática Comutada de Lyapunov e Estabilidade . . . . .	47
3.6	Sumário . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Controle Preditivo de Sistemas Comutados</b>	<b>54</b>
4.1	Introdução . . . . .	54
4.2	Controle Preditivo de Sistemas MLD . . . . .	55
4.2.1	Problema de Regulação . . . . .	56
4.2.2	Problema de seguimento . . . . .	58
4.2.3	Exemplo . . . . .	59
4.2.4	Uma solução ao problema de estabilidade . . . . .	63
4.3	Controle Preditivo Não-Linear para Sistemas Comutados . . . . .	68
4.3.1	Parametrização das Variáveis Binárias . . . . .	69
4.3.2	Horizontes de Controle e Predição . . . . .	70
4.4	Exemplo . . . . .	70
4.5	Sumário . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Projeto Integrado e Síntese</b>	<b>75</b>
5.1	Introdução . . . . .	75
5.2	Projeto Integrado de Processos e Controle . . . . .	79
5.3	Projeto Integrado de Sistemas Comutados . . . . .	82
5.4	Estudos de Caso . . . . .	84
5.4.1	Projeto Integrado de um CBB e um controlador PID. . . . .	84
5.4.2	Projeto Integrado de un CBB e um CMD . . . . .	91
5.5	Sumário . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>108</b>
<b>A</b>	<b>Modelagem Eficiente de Sistemas MLD</b>	<b>111</b>
A.1	Lógica Proposicional . . . . .	111
A.2	Proposições Mistas Lógicas-Contínuas . . . . .	121
A.3	Resumo . . . . .	130
A.4	<i>The HYbrid Systems DEscription Language</i> HYSDEL . . . . .	130
<b>B</b>	<b>Raio Espectral Conjunto</b>	<b>131</b>
B.1	Norma e Raio Espectral de Matrizes . . . . .	131
B.1.1	Norma de Matrizes . . . . .	131

B.1.2	Definição do Raio Espectral . . . . .	133
B.1.3	Propriedades . . . . .	134
	Raio espectral da potência de uma matriz . . . . .	134
	Condição de convergência . . . . .	134
	Desigualdade com a norma . . . . .	134
	Raio espectral como limite da norma . . . . .	134
B.2	Raio Espectral Conjunto de um Conjunto de Matrizes . . . . .	135
B.2.1	Definições . . . . .	135
B.2.2	Propriedades . . . . .	137
	Multiplicação por um escalar . . . . .	137
	Igualdade entre JSR e GSR e continuidade . . . . .	137
	Desigualdade de 4 elementos . . . . .	137
<b>C</b>	<b>Implementação Prática do Controle Preditivo Misto Inteiro</b>	<b>139</b>



<b>Abreviatura</b>	<b>Significado</b>
CP	Conversores de Potência
HVDC	<i>High Voltage Direct Current Converter</i>
SH	Sistemas Híbridos
SC	Sistemas Comutados
CBB	Conversor Buck Boost
MLD	<i>Mixed Logical Dynamical Systems</i>
PWA	<i>Piece Wise Affine Systems</i>
PWL	<i>Piece Wise Linear Systems</i>
MCC	Modo de Condução Contínua
MCD	Modo de Condução Descontínua
DLI	<i>Discrete Linear Inclusion</i>
AAS	<i>Absolute Asymptotic Stability</i>
PAS	<i>Periodic Asymptotic Stability</i>
SR	<i>Spectral Radius</i>
JSR	<i>Joint Spectral Radius</i>
GSR	<i>Generalized Spectral Radius</i>
CQLF	<i>Common Quadratic Lyapunov Function</i>
PDLF	<i>Parameter Dependent Lyapunov Function</i>
SQLF	<i>Switching Quadratic Lyapunov Function</i>
CPBM	Controle Preditivo Baseado no Modelo
MIQP	<i>Mixed Integer Quadratic Programming</i>
MIPC	<i>Mixed Integer Predictive Control</i>
MINLP	<i>Mixed Integer Non-Linear Programming</i>
CPBMNL-Híbrido	Controle Preditivo Baseado no Modelo Não-Linear Híbrido
PWM	<i>Pulse Wide Modulation</i>
CMD	Controle por Modos Deslizantes
HPF	<i>High Pass Filter</i>
CMDT	Controle por Modos Deslizantes Tradicional
CMDO	Controle por Modos Deslizantes Ótimo
PICMD	Projeto Integrado com Controle por Modos Deslizantes
CF	Controlador Fuzzy



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

A Eletrônica de Potência é a área da eletrônica que se ocupa do condicionamento da energia elétrica por meio de circuitos eletrônicos especializado chamados de Conversores de Potência (CP). Além disso a Eletrônica de Potência lida com o acionamento de máquinas elétricas e cargas de grande potência, em corrente contínua ou alternada, através do uso de dispositivos semi-condutores de alta capacidade.

Esta área da engenharia tem alcançado um lugar muito importante na tecnologia moderna nos últimos anos. Ela está presente em uma grande variedade de produtos de nosso cotidiano. É difícil traçar os limites das aplicações da eletrônica de potência em especial com a tendência atual no desenvolvimento de novos dispositivos semi-condutores e microprocessadores; o limite superior ainda é indefinido. A Tabela 1.1 mostra algumas das aplicações da Eletrônica de Potência (Rashid 1995).

Na área da indústria petroquímica são inúmeras as aplicações onde está presente a eletrônica de potência. A mais evidente seja talvez o controle da potência para alimentação de grandes motores elétricos usados em bombas ou em grande compressores; substituindo os rústicos sistemas de variação de velocidades mecânicos, tais como polias e variadores hidráulicos, bem como os custosos motores de corrente contínua pelo conjunto motor assíncrono e inversor, mais barato, de manutenção mais simples e reposição profusa.

Aplicações novas e de muito interesse vem sendo desenvolvidas recentemente. É o caso por exemplo dos *High Voltage Direct Current*, (HVDC), (Bahrman e Johnson 2007), utilizados na alimentação energética de plataformas em alto mar (Exemplo plataforma de extração de gás em alto mar na Noruega - *Troll A*, Figuras 1.1, 1.2). A tecnologia HVDC é uma alternativa ambiental amigável, mais eficiente, e

Acondicionamento de Ar	Alarmes
Amplificadores de Audio	Sistemas de partida para turbinas de Gás
Iluminação	Calderas
Calefação	Cargador de Bateria
Computadores	Controles lineares de motores de indução
HVDC	Eletrodomésticos
Elevadores	Fonte de alimentação para aeronaves
Gravações magnéticas	Gruas e tornos
Ferramentas elétricas	Fornos de cimento
Ignição eletrônica	Locomotivas
Moinhos	Processos Químicos
Veículos elétricos	Mineração
Controle de Motores	Fontes de alimentação
Compensação de potência reativa	Perfuração de poços de petróleo
Bombas e Compressores	Fontes de alimentação de energia solar
Soldadura	Produção de papel
Trens	Sistemas de partida para máquinas síncronas
Regulação de tensão	Acelerador de partículas

Tabela 1.1: Aplicações da Eletrônica de Potência

mais segura, para a alimentação energética de plataformas marítimas do que a geração tradicional usando turbinas de gás. Consegue-se uma eficiência de transmissão de  $\sim 90 - 94\%$  e redução na emissão de  $CO_2$ . Este tipo de soluções demanda muito menos manutenção e pode ser controlado desde o continente, o que faz necessário muito menos pessoal capacitado na plataforma. A vida útil das instalações também é maior (30 anos). Os riscos de acidente de trabalho e o nível de ruído na plataforma são menores. Em muitos casos é possível mostrar os benefícios econômicos de fornecer energia desde o continente do que usando o gás produzido na plataforma (Hyttinen e Bentzen 2006), (Jones e Stendius 2006).

Todos os CP são dispositivos comutados, o que significa que pelo menos um dos

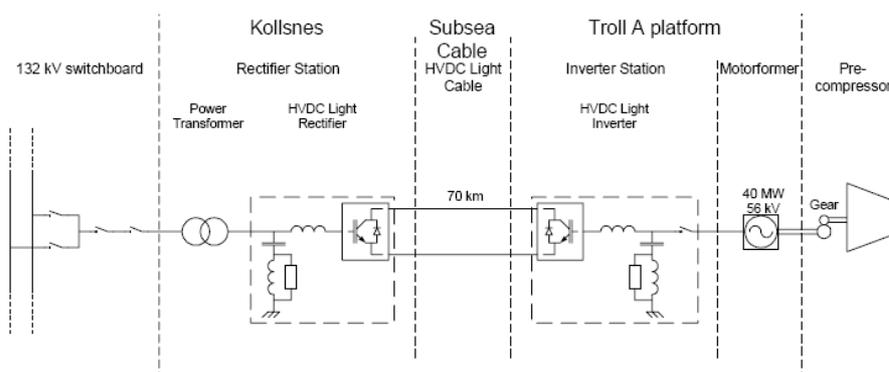


Figura 1.1: Esquema do conversor HVDC do Projeto Troll A



Figura 1.2: Foto da estação inversora na plataforma Troll A.

seus elementos constitutivos é um semi-condutor que vai operar como um interruptor através de um sinal de controle que vai indicar quando ele deverá estar em estado de condução ou em estado de corte, ou não condução. A saída requerida vai se obter variando o tempo de condução e o tempo de corte da chave. Esta peculiaridade faz os CP pertencerem a uma classe de sistemas conhecidos na literatura como sistemas híbridos (SH), sistemas em cujo modelo coexistem variáveis reais ou contínuas (ex., tensão e corrente) e variáveis discretas (sinal de controle do tipo *ON-OFF*).

O conceito de modelo de um sistema é associado tradicionalmente com as equações diferenciais ou a diferença, derivadas das leis físicas que governam a dinâmica do sistema considerado. Conseqüentemente, a maioria das principais teorias de controle e ferramentas foram desenvolvidas para tais sistemas. Por outro lado, em muitas aplicações o sistema a ser controlado é constituído também por regras lógicas, interruptores ou válvulas tipo *ON-OFF*, seletores de velocidade, evoluções dependentes de regras tipo

*if-then else*. Frequentemente na prática, o controle destes sistemas é realizado utilizando esquemas baseados em regras heurísticas deduzidas da operação prática da planta (Bemporad e Morari 1999).

Nos últimos anos o estudo de SH ou sistemas hierárquicos, constituídos por componentes dinâmicos no nível inferior e por componentes lógicos/discretos no nível superior, tem recebido muita atenção e tornou-se uma das principais áreas de investigação no meio acadêmico (Grossmann et al. 1993) e (Branicky et al. 1998). Desde o começo e durante muito tempo a teoria clássica de controle preocupou-se principalmente com os sistemas contínuos e a ciência da computação com os sistemas com dinâmica discreta como ilustrado na Figura 1.3. Hoje em dia os sistemas a controlar estão tornando-se

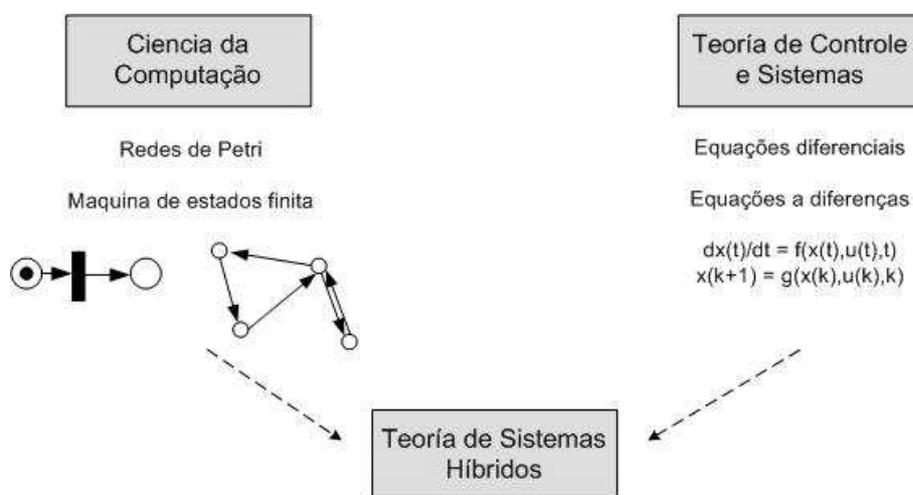


Figura 1.3: Sistemas Híbridos

mais complexos e a interação da dinâmica contínua e discreta está aumentando, o que requer portanto a necessidade de desenvolver ferramentas novas para analisar e projetar controladores para estes tipos de sistemas (Kerrigan 2000).

Não obstante, em todos os casos encontrados na literatura pelo autor, ambos os problemas, o projeto do CP e o projeto do controle, são considerados independentemente. O circuito é projetado primeiramente e então logo após o engenheiro de controle escolhe a estratégia do controle e ajusta o controlador. Isto limita o desempenho atingível do sistema porque nenhum aspecto dinâmico do comportamento do dispositivo é feito durante a fase de projeto do sistema (Pomar et al. 2009). Este método de projeto tradicional ignora a idéia de que as mudanças no projeto do processo podem fazer o sistema mais controlável ou fornecem mais graus de liberdade para aumentar o desempenho (Luyben 1993).

Geralmente falando, o projeto do processo tradicionalmente é centrado em determinar a estrutura, o tamanho e as condições de operação dos componentes em um

ponto de operação estacionário de acordo com especificações dadas da produção ou da operação. Em geral, nos estágios de projeto, embora a otimização seja usada frequentemente para dimensionar o sistema, não há nenhuma consideração explícita do comportamento dinâmico do processo e a função de custo a otimizar inclui somente os termos associados aos componentes ou aos custos de operação.

Uma vez que a planta foi construída, os engenheiros de controle tentam projetar um sistema automático de controle que assegure a operação correta da planta, mesmo na presença de incertezas e de perturbações. Esta tarefa é frequentemente difícil ou mesmo impossível dado que no projeto original não se teve em conta os requerimentos de controle. O funcionamento adequado do processo, junto com seu sistema automático de controle, não depende exclusivamente do tipo de controlador e dos seus parâmetros, mas também do processo em si próprio (Luyben 1993).

O projeto integrado do processo e do controle é uma técnica em que as características do controle são consideradas nos estágios do projeto, permitindo assim considerar especificações dinâmicas para que o sistema assegure uma flexibilidade e facilidade de operação. Pode-se considerar o projeto integrado em malha aberta ou em malha fechada. A solução obtida ao resolver o problema de projeto em malha aberta são os parâmetros físicos da planta associada aos valores mínimos da função de custo que verifica as restrições de projeto do processo e que fornece um comportamento dinâmico desejado do sistema em malha aberta. Neste caso o objetivo é facilitar a tarefa subsequente: o projeto do controle. Por outro lado, a solução do problema em malha fechada, além de fornecer os parâmetros físicos ótimos da planta, fornece também os parâmetros do controlador. Isto é, a síntese do controlador é incluída também no problema do projeto de planta com o objetivo de fornecer a solução de menor custo além de garantir determinadas especificações dinâmicas em malha fechada.

As primeiras idéias para integrar o controle com o projeto de processos foram propostas por Nishida e Ichikawa (1975) e Nishida et al. (1976). Morari (1992) e Perkins (1989) recolheram alguns dos resultados importantes e dos esforços precedentes relativos à interação entre o projeto e o controle. Morari (1983), Skogestad e Morari (1987), Morari e Zafiriou (1989), Skogestad e Wolf (1990), Skogestad et al. (1991) fizeram contribuições significativas na análise de controladores e no estudo da adaptabilidade dinâmica dos sistemas, introduzindo e analisando magnitudes de controle para a interação das variáveis e a rejeição das perturbações. Não obstante, na área dos dispositivos eletrônicos de potência, as contribuições na literatura são muito escassas.

Este trabalho propõe soluções para o projeto de sistemas comutados utilizando técnicas de projeto integrado, controle preditivo e controle não-linear aplicadas a CP para sua utilização em processos da indústria do petróleo e gás natural.

## 1.2 Objetivos

Os objetivos de este trabalho podem agrupar-se nas seguintes áreas temáticas:

**Modelagem de Sistemas Comutados (SC).** Investigar os diferentes contextos de modelagem desenvolvidos na literatura para SH, e desenvolver os contextos, que a nosso critério, permitam realizar de forma mais simples, tarefas clássicas dentro da teoria de controle (por exemplo: estudo de estabilidade, projeto da lei de controle, etc.) para o caso particular de SC.

**Estabilidade e Controle de Sistemas Comutados.** Aprofundar no conhecimento de soluções de controle avançado para SC, analisando o problema da estabilidade. Estabelecer resultados comparativos entre os diferentes controladores estudados, tomando como estudo de caso um CP de corrente contínua em corrente contínua, (CC-CC), o conversor *Buck-Boost* (CBB).

**Projeto Integrado.** Estudar a técnica de projeto integrado na indústria de processos. Estender estas técnicas a SC, utilizando como estudo de caso o projeto integrado de um CBB. Mostrar os benefícios de realizar o projeto integrado realizando uma comparação de desempenho das prestações do CBB obtido no projeto integrado e através de um projeto tradicional.

## 1.3 Organização do trabalho

A tese está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 2 definem-se os SH, e em particular os SC. Apresentam-se diferentes contextos de modelagem para SH em geral, e desenvolvem-se dois contextos de modelagem em particular, o que nos permitirá, no seguinte capítulo, tratar aspectos de estabilidade e controle para SC. Mostra-se também neste capítulo a equivalência entre os dois contextos desenvolvidos, o que vai nos permitir transladar as propriedades estudadas de um contexto de modelagem ao outro.

No Capítulo 3 desenvolvem-se os últimos resultados teóricos achados na literatura para estabilidade de uma classe particular de sistemas comutados, os sistemas lineares por partes perante uma lei de controle arbitrária.

No Capítulo 4 apresentam-se duas estratégias de projetos da lei de controle para SH. Primeiro, desenvolve-se a estratégia de controle preditivo para SH sobre um dos contextos de modelagem apresentado no capítulo 2, o contexto MLD. Mostra-se, através de um estudo de caso, uma série de desafios e questões em aberto que apresenta esta

---

forma de controle. Apresenta-se uma solução ao problema de estabilidade achado no estudo de caso aplicando idéias apresentadas no capítulo 3. Depois apresenta-se uma estratégia de controle mais abrangente, com a qual podemos projetar uma lei de controle para SH não-lineares. Como estudo de caso, ambas as estratégias foram aplicadas ao CBB.

No Capítulo 5, desenvolvem-se aspectos teóricos sobre projeto integrados de processos e controle, e exemplifica-se a metodologia com dois estudos de caso que mostram os benefícios desta abordagem.

No Capítulo 6, apresentam-se as conclusões e perspectivas do trabalho, e comentam-se as publicações geradas durante o mesmo.

Finalmente esta tese inclui os apêndices: A, B e C que complementam os capítulos 2, 3 e 4 respectivamente.

# Capítulo 2

## Modelagem de Sistemas Híbridos

### 2.1 Introdução

Um modelo é uma representação simplificada do mundo real, que tem um grau suficiente de complexidade para permitir a descrição do comportamento que interessa ser estudado. Ao mesmo tempo um modelo deve excluir todas as características que não são relevantes para a pesquisa e possam obstaculizar uma solução eficiente de tarefas especificadas.

Cada área da ciência e da engenharia desenvolveram seus próprios formalismos para obter modelos que permitissem resolver os problemas de interesse nas áreas correspondentes. Na teoria de controle e sistemas a atenção está voltada para a manipulação das variáveis do sistema que permitam alcançar metas como estabilização, rejeição a perturbações e robustez. A idéia chave é o uso de estruturas realimentadas, onde a evolução de algumas variáveis monitoradas determina a ação atual e futura sobre o sistema. Conseqüentemente o conceito de modelo de um sistema é tradicionalmente associado com as equações diferenciais ou a diferenças que descrevem a evolução do sistema. Um modelo é derivado tipicamente das leis físicas que governam a dinâmica do sistema, ou pela estimação de seqüências experimentais de dados coletados com a finalidade de modelar a planta (Mignone 2002).

O computador e programas lógicos estão cada vez mais envolvidos em aplicações de controle numa extensa classe de sistemas por causa de sua confiabilidade e pelo baixo custo de fabricação de dispositivos eletrônicos. Isto trouxe duas conseqüências; primeiro, aumentam-se as capacidades funcionais avançadas de muitos dispositivos de uso comum, como por exemplo os “sistemas eletrônicos embarcados” nos carros modernos para melhorar a habilidade do condutor de dirigir o carro sob circunstâncias adversas (Balluchi et al. 2000); em segundo, apareceram novos desafios nas áreas das

pesquisas teóricas de controle e ciências da computação. Com o fim de abordar estes desafios, novas classes de modelos foram definidos, os sistemas híbridos (SH). Os SH podem capturar o comportamento discreto de programas de computador e o comportamento contínuo de processos físicos (Torrison 2003).

A partir de uma perspectiva histórica, o termo híbrido foi introduzido dado que nenhum único modelo conhecido era capaz de capturar a dinâmica discreta e contínua ao mesmo tempo. Era então necessário combinar as potencialidades de diferentes estruturas de modelagem para descrever o comportamento de fenômenos híbridos.

Muitos fenômenos físicos admitem uma descrição híbrida, por exemplo, circuitos que integram relês ou diodos (Pomar et al. 2007a), redes biomoleculares (Alur et al. 1999), e redes TCP/IP (Hespanha et al. 2001).

Os modelos híbridos são necessários para poder atacar numerosos problemas em diversos processos, como o cálculo das trajetórias do sistema, análise de estabilidade e de alcançabilidade, controle, estimação de estados, etc. (Torrison 2003).

Como ainda não estão disponíveis métodos tratáveis para analisar sistemas híbridos em geral, diversos autores têm focalizado sua atenção em subclasses especiais de sistemas dinâmicos híbridos para os quais técnicas de análise e/ou projeto estão sendo atualmente desenvolvidas.

Alguns exemplos de tais subclasses são: os Autômatos Híbridos (*Hybrid Automata (HA)*) (Schaft e Schumacher 1999), Sistemas Afins por Partes (*Piece Wise Affine (PWA) systems*) (Sontag 1981), Sistemas Mistos Lógicos Dinâmicos (*Mixed Logical Dynamical (MLD) systems*) (Bemporad e Morari 1999), Sistemas Lineares Complementares (*Linear Complementarity (LC) systems*) (Heemels et al. 2000), Sistemas Lineares Complementares Estendidos (*Extended Linear Complementarity (ELC) systems*) (Schutter e Moor 1999), e os *Max-Min-Plus-Scaling (MMPS) systems* (Schutter e Boom 2001).

Em Heemels et al. (2001) a equivalência entre subclasses de sistemas é abordada. É mostrado que sob algumas condições técnicas, as últimas cinco subclasses de modelos mencionadas são equivalentes.

Cada subclasse tem suas vantagens. A equivalência entre as diferentes subclasses permite facilmente transferir as propriedades teóricas (por exemplo: estabilidade, controlabilidade, observabilidade, etc.) e ferramentas de uma subclasse a outra.

A tabela 2.1 sugere o modelo recomendado para algumas das tarefas mais típicas da engenharia de controle. Por causa de sua generalidade não implica que alguns problemas específicos não possam ser resolvidos de uma maneira mais eficiente usando um contexto de modelagem diferente (Torrison 2003).

Nas seguintes seções faremos um desenvolvimento teórico de duas subclasses de SH

Tarefa	Modelo
Controle	MLD, PWA, MMPS
Estabilidade	PWA
Verificação	PWA
Identificação	PWA
Detecção de Falhas	MLD
Estimação	MLD

Tabela 2.1: Modelo sugerido para cada tarefa

bastante estudadas na literatura, os sistemas PWA e MLD, exemplificando cada uma delas com um estudo de caso, o Conversor de Potência *Buck-Boost* (CBB).

O conteúdo teórico desenvolvido neste capítulo é basicamente uma recompilação e resumo dos seguintes trabalhos: Mignone (2002), Borrelli (2002), Torrisi (2003), Bemporad e Morari (1999) e Bemporad (2004). A contribuição desta tese neste capítulo é proporcionar ao leitor alguns dos principais desenvolvimentos teóricos na área de modelagem de SH.

## 2.2 Caso de estudo: Conversor *Buck-Boost*

A Figura 2.1 mostra o circuito de um CBB ideal, onde  $R$  é a resistência,  $L$  o

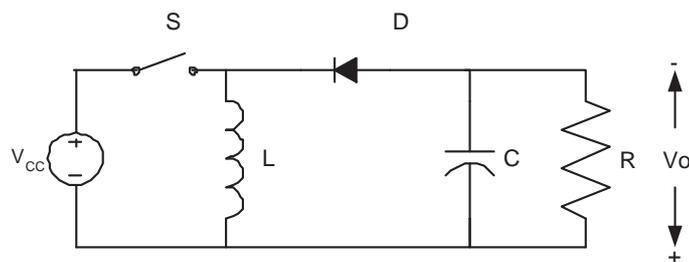


Figura 2.1: Diagrama do CBB.

indutor,  $C$  o capacitor,  $S$  a chave,  $D$  o diodo,  $V_{cc}$  a fonte de alimentação e  $V_O$  a tensão de saída.

O CBB é um conversor DC-DC típico, normalmente usado como fonte de alimentação. A principal propriedade deste conversor é que sua tensão de saída ( $V_O$ ) é ajustável podendo ser maior ou menor que a tensão de alimentação ( $V_{cc}$ ). Do ponto de vista do controle o objetivo deste sistema é fornecer uma tensão de saída que possa seguir uma referência desejada de tensão e rejeitar as perturbações causadas pelas variações de carga representadas na Figura 2.1 pela resistência  $R$ . Para fazê-lo, uma adequada estratégia de controle deve ser definida para atuar no interruptor  $S$ .

O CBB pode operar em dois modos diferentes. Se a corrente no indutor  $L$  não é zero, o CBB opera no modo de condução contínua. Se não, o modo descontínuo de operação é considerado.

Tipicamente, dois modelos de CBB são usados na literatura: o modelo instantâneo, que considera todos os fenômenos dinâmicos relacionados à operação do interruptor, e o modelo médio, que não considera as dinâmicas do interruptor mas só o comportamento dominante causado pelos outros elementos do circuito (Middlebrook e Cúk 1976, Vorpérian 1990, Kassakian et al. 1991).

### Modelo Instantâneo

Para obter o modelo instantâneo do CBB, defina-se  $q$  como um sinal que caracteriza o comportamento dinâmico do interruptor:

$$S : \begin{cases} q = 0, & \text{se a chave está aberta} \\ q = 1, & \text{se a chave está fechada} \end{cases}$$

Assim, três conjuntos de equações diferenciais descrevem o comportamento do CBB.

Se  $q = 0$ , o capacitor  $C$  descarrega a sua energia armazenada sobre  $L$  e  $R$ , e dois casos diferentes podem ser considerados:

se a corrente pelo indutor  $L$  é diferente de zero,  $i_L \neq 0$  - Modo de Condução Contínua (MCC):

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_C \quad (2.1)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}(-i_L - \frac{v_C}{R}) \quad (2.2)$$

$$V_0 = -v_C \quad (2.3)$$

mas se  $i_L = 0$  - Modo de Condução Descontínua (MCD):

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{RC} \quad (2.5)$$

$$V_0 = -v_C. \quad (2.6)$$

Finalmente se  $q = 1$ , o diodo  $D$  isola  $R$  e  $L$  e temos que:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}V_{cc} \quad (2.7)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C}\frac{v_C}{R} \quad (2.8)$$

$$V_0 = -v_C \quad (2.9)$$

Se considerarmos que o CBB trabalha só em MCC podemos combinar os sub-sistemas para  $q = 0$ ,  $i_L \neq 0$  e  $q = 1$ , obtendo assim o modelo instantâneo do CBB:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}(qV_{cc} + (1 - q)v_C) \quad (2.10)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C}\left(\frac{v_C}{R} + (1 - q)i_L\right) \quad (2.11)$$

$$V_0 = -v_C \quad (2.12)$$

que é um modelo com variáveis reais ( $i_L$ ,  $v_C$ ) e inteiras ( $q$ ).

### Modelo Médio

O modelo médio é obtido usando o modelo instantâneo e algumas hipóteses de simplificação. Assumindo que a frequência de comutação do interruptor é muito maior que as frequências associadas à transferência de energia dos elementos passivos do circuito ( $R$ ,  $L$ , e  $C$ ), é possível substituir o sinal instantâneo de controle  $q(t)$  pelo sinal  $d(t)$  que dá, em cada instante de tempo  $t$ , o valor médio de  $q(t)$  num período de comutação. Usando esta aproximação, o modelo pode ser representado pelo seguinte conjunto de equações (Borges 2002):

$$\frac{d\widehat{i}_L}{dt} = \frac{1}{L}(dV_i + (1 - d)\widehat{v}_C) \quad (2.13)$$

$$\frac{d\widehat{v}_C}{dt} = -\frac{1}{C}\left(\frac{\widehat{v}_C}{R} + (1 - d)\widehat{i}_L\right) \quad (2.14)$$

$$V_0 = -\widehat{v}_C \quad (2.15)$$

## 2.3 Sistemas Afins por Partes

Entre as várias estruturas usadas para modelar sistemas híbridos em tempo discreto, uma bastante estudada no meio acadêmico é a estrutura Afim por Partes (*Piece Wise Affine systems*, (PWA)) (Sontag 1981).

Os sistemas PWA são capazes de modelar um grande número de processos

físicos, tais como sistemas com não-linearidades estáticas (por exemplo: saturação do acionador), aproximar dinâmicas não-lineares com exatidão arbitrária via múltiplas linearizações em diferentes pontos de operação (Torrise 2003), sistemas comutados onde o comportamento dinâmico é descrito por um número finito de modelos lineares junto com um conjunto de regras lógicas para trocar entre estes modelos (Borrelli 2002), etc.

Os sistemas PWA são definidos partilhando o espaço de estado e de entrada em regiões poliédricas, e associando a cada região uma equação afim de atualização de estados diferente, isto é:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_i x(k) + B_i u(k) + f_i \\ y(k) &= C_i x(k) + g_i \end{aligned} \quad \text{para} \quad \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_i \quad (2.16)$$

onde:

- $x$  são os estados contínuos e binários:

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ x_l \end{bmatrix}, \quad x_c \in \mathbb{R}^{n_c}, \quad x_l \in \{0, 1\}^{n_l}, \quad n \triangleq n_c + n_l$$

- $y$  são as saídas contínuas e binárias:

$$y = \begin{bmatrix} y_c \\ y_l \end{bmatrix}, \quad y_c \in \mathbb{R}^{p_c}, \quad y_l \in \{0, 1\}^{p_l}, \quad p \triangleq p_c + p_l$$

- $u$  são as entradas contínuas e binárias:

$$u = \begin{bmatrix} u_c \\ u_l \end{bmatrix}, \quad u_c \in \mathbb{R}^{m_c}, \quad u_l \in \{0, 1\}^{m_l}, \quad m \triangleq m_c + m_l$$

- $\{\mathcal{C}_i\}_{i=0}^{s-1}$  é uma partição poliédrica do espaço dos conjuntos de estados e entradas,  $\mathcal{C}_i \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $n \triangleq n_c + n_l$ ,  $m \triangleq m_c + m_l$
- as matrizes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $f_i$ ,  $g_i$  são constantes e tem dimensões adequadas.

**Comentário 2.1** *Os sub-índices  $c$  e  $l$  nas equações anteriores denotam os componentes contínuos e lógicos (ou binários) de cada vetor respectivamente. Assim  $n_c$  é a quantidade de elementos contínuos e  $n_l$  a quantidade de elementos binários que possui o vetor de estados. O mesmo para os demais vetores.*

Cada subsistema definido pelo conjunto  $(A_i, B_i, C_i, f_i, g_i)$ , é denominado de componente do sistema PWA (2.16). Se  $f_i$  e  $g_i$  são nulos, o sistema (2.16) é chamado de linear por partes (*Piece Wise Linear* (PWL) system).

Apesar do fato que modelos PWA são uma composição de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo (componentes), suas propriedades estruturais tais como estabilidade, controlabilidade e observabilidade, são complexas e articuladas como típicas de sistemas não-lineares (Borrelli 2002).

Na seguinte seção mostra-se um exemplo onde é possível comprovar como este contexto de modelagem pode representar uma classe de sistemas, como são os sistemas comutados, onde uma representação clássica como a matriz de evolução de estados única não seria capaz de modelar a dinâmica completa do sistema.

Todos os contextos de modelagem serão desenvolvidos em tempo discreto. A motivação principal para concentrar-nos em modelos em tempo-discreto é poder utilizar estes modelos depois, no projeto de uma lei de controle preditiva, a qual se obtém resolvendo um problema de otimização e portanto requer necessariamente de um modelo em tempo discreto como será visto no capítulo seguinte.

### 2.3.1 Exemplo

#### Exemplo 2.1 Modelo PWA do Conversor Buck-Boost (CBB)

Como foi visto na seção 2.2, o CBB pode operar em dois modos diferentes: o modo de condução contínua (MCC) ou o modo de condução descontínuo (MCD).

O sinal de controle do sistema é  $q \in \{0, 1\}$ , (sinal sobre o interruptor  $S$ ), e os estados do sistema são a corrente pelo indutor  $i_L \in \mathbb{R}$  e a tensão sobre o capacitor  $v_C \in \mathbb{R}$ , como observa-se o sistema mistura sinais contínuos e discretos (binários) portanto é claramente um sistema híbrido.

Se o interruptor estiver fechado ( $q = 1$ ), então o conjunto de equações que descreve o comportamento do sistema é (2.7- 2.9).

Se o interruptor estiver aberto ( $q = 0$ ), então o conjunto de equações que descrevem o comportamento do sistema depende da corrente pelo indutor  $L$ . Se  $i_L > 0$ , (MCC), e valem as equações (2.1-2.3), mas se  $i_L = 0$ , (MCD), o conjunto de equações que descreve o comportamento do sistema são (2.4-2.6).

Discretizando a dinâmica contínua, usando por exemplo a transformação de Euler<sup>1</sup>, com um tempo de amostragem igual a  $T_s$ , usando  $t = k$  e omitindo a dependência com

<sup>1</sup> Transformação de Euler:  $\frac{d\xi}{dt} \approx \frac{\xi((k+1)T_s) - \xi(kT_s)}{T_s}$

o período de amostragem, tem-se:

$$(q = 1) \Rightarrow \begin{cases} i_L(k+1) = i_L(k) + \frac{T_s}{L} V_{cc} \\ v_C(k+1) = \left(1 - \frac{T_s}{RC}\right) v_C(k) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$(q = 0) \Rightarrow \begin{cases} (i_L > 0) \Rightarrow \begin{cases} i_L(k+1) = i_L(k) + \frac{T_s}{L} v_C(k) \\ v_C(k+1) = -\frac{T_s}{C} i_L(k) + \\ \left(1 - \frac{T_s}{RC}\right) v_C(k) \end{cases} \\ (i_L = 0) \Rightarrow \begin{cases} i_L(k+1) = i_L(k) \\ v_C(k+1) = \left(1 - \frac{T_s}{RC}\right) v_C(k) \end{cases} \end{cases} \quad (2.18)$$

$$(i_L = 0) \Rightarrow \begin{cases} i_L(k+1) = i_L(k) \\ v_C(k+1) = \left(1 - \frac{T_s}{RC}\right) v_C(k) \end{cases} \quad (2.19)$$

O conjunto de equações (2.17, 2.18 e 2.19) representam a descrição PWA do CBB em tempo discreto.

Como já foi dito, o objetivo é obter um modelo do SH que possa ser utilizado para projetar uma lei de controle preditiva, e portanto que possa ser utilizado em um problema de otimização. Por esta razão necessitamos um meio para descrever sistemas PWA em tempo-discreto numa forma mais conveniente. A estrutura MLD descrita na seguinte seção foi desenvolvida para tal propósito. Em particular, será provado que modelos MLD são bem sucedidos para transformar problemas de otimização com dinâmica híbrida em programas misto inteiros lineares e quadráticos, solucionáveis via por exemplo técnicas *Branch and Bound* (Nemhauser e Wolsey 1988), (Borrelli 2002).

## 2.4 Sistemas Mistos Lógicos Dinâmicos

Os Sistemas Mistos Lógicos Dinâmicos (*Mixed Logical Dynamical systems*, (MLD)) são um marco para modelar e controlar sistemas descritos por leis físicas, regras lógicas, e restrições de operação, interdependentes. São sistemas descritos por equações dinâmicas lineares sujeitas a inequações lineares, mistas inteiras, isto, é equações e inequações envolvendo variáveis contínuas e binárias (ou lógicas, ou  $\{0, 1\}$ ).

Sua característica fundamental é permitir uma formulação e resolução sistemática de vários problemas de análise e síntese usando técnicas matemáticas de otimização.

De acordo com as técnicas descritas por exemplo em Williams (1993), Cavalier et al. (1990) e Raman e Grossmann (1992), a lógica proposicional é transformada em desigualdades lineares que envolvem variáveis inteiras e variáveis contínuas, o que permite chegar no sistema MLD.

Os sistemas MLD generalizam um amplo conjunto de modelos entre os quais estão os sistemas híbridos lineares, a máquina de estados finita, alguma classe de sistemas

a eventos discretos, sistemas lineares com restrições, e sistemas não-lineares cujas não linearidades podem ser representadas por funções lineares por partes.

Vejamos o seguinte exemplo ilustrativo, que permitirá entender melhor o que é a representação no contexto MLD de um SH.

### Exemplo 2.2 Sistema de Controle de Temperatura

O exemplo que vamos desenvolver é reportado em Bemporad, Ferrari-Trecate e Morari (2000). A temperatura  $x_c$  de uma sala é controlada por um termostato, que liga ou desliga um aquecedor de acordo com a temperatura medida. Quando o aquecedor está desligado,  $x_c$  diminui de acordo com a dinâmica de primeiro-ordem  $\dot{x}_c = -Kx_c$ ; quando o aquecedor está ligado,  $\dot{x}_c = -K(u - x_c)$ , onde  $u$  é proporcional a potência do aquecedor,  $m_u \leq u \leq M_u$ . O autômato híbrido que modela o sistema de controle de temperatura é mostrado na Figura 2.2.

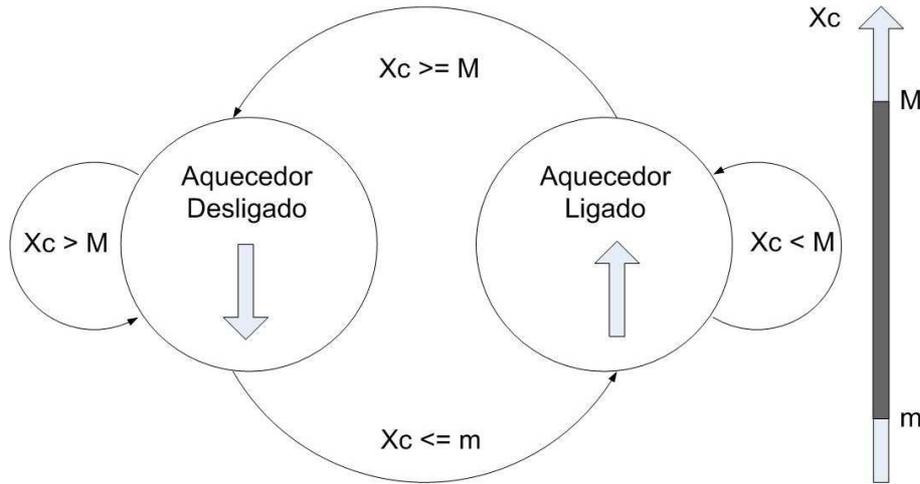


Figura 2.2: Sistema de controle de temperatura

Para traduzir o autômato na forma MLD, vamos primeiro discretizar a dinâmica contínua com tempo de amostragem igual a  $T_s$ . Tem-se então que:

$$x_c(k+1) = \begin{cases} \lambda x_c(k), & \text{se aquecedor desligado} \\ \lambda x_c(k) + (1-\lambda)u(k), & \text{se aquecedor ligado} \end{cases} \quad (2.20)$$

onde  $\lambda \triangleq e^{-KT_s}$ .

Agora introduzimos as variáveis binárias auxiliares:

$$[\delta_1(k) = 1] \leftrightarrow [x_c(k) \geq M] \quad (2.21)$$

$$[\delta_2(k) = 1] \leftrightarrow [x_c(k) \geq m] \quad (2.22)$$

para tomar em conta o cruzamento das linhas de guarda (obviamente,  $m < M$ ), o estado lógico  $x_l(k+1)$  necessário para armazenar o estado do aquecedor, e a variável binária  $\delta_3(k)$ .

$x_l(k+1)$  evolui de acordo com a equação:

$$x_l(k+1) = \delta_3(k) \quad (2.23)$$

onde

$$[\delta_1(k) = 1] \rightarrow [\delta_3(k) = 0] \quad (2.24)$$

$$[\delta_2(k) = 1] \rightarrow [\delta_3(k) = 1] \quad (2.25)$$

$$[\delta_1(k) = 0] \wedge [\delta_2(k) = 0] \rightarrow [\delta_3(k) = \delta_4(k)] \quad (2.26)$$

e

$$\delta_4(k) = x_l(k) \quad (2.27)$$

Supondo que os limites inferior  $m_x$  e superior  $M_x$  de  $x_c$  são conhecidos, as equações (2.21,2.22) podem ser transformadas em desigualdades lineares mistas inteiras utilizando a seguinte equivalência:

$$[\delta_i(k) = 1] \leftrightarrow [x_c(k) \geq \Lambda]$$

é equivalente a:

$$\begin{aligned} \Lambda - x_c(k) &\leq M_x(1 - \delta_i(k)) \\ \Lambda - x_c(k) &\leq \epsilon + (m_x - \epsilon)\delta_i(k), \end{aligned}$$

onde  $\epsilon$  é uma pequena tolerância (tipicamente a precisão da máquina). Além disso, como  $\delta_1$  e  $\delta_2$  não podem ser 1 ao mesmo tempo, devemos incluir a restrição:

$$\delta_1(k) + \delta_2(k) \leq 1. \quad (2.28)$$

As equações (2.24) e (2.25) são traduzidas em desigualdades de acordo com a equivalência:

$$[\delta_i(k) = 1] \rightarrow [\delta_j(k) = 1],$$

é equivalente a:

$$[\delta_i(k) - \delta_j(k) \leq 1].$$

A equação (2.26) é equivalente a

$$\delta_1(k) + \delta_2(k) \leq \delta_3(k) - \delta_4(k) \leq \delta_1(k) + \delta_2(k) \quad (2.29)$$

o qual pode ser imediatamente verificada por inspeção.

A dinâmica (2.20) pode ser reescrita equivalentemente como

$$x_c(k+1) = \lambda x_c(k) + x_l(k)(1-\lambda)u(k) \quad (2.30)$$

Por causa do produto envolvendo  $x_l$  e  $u(k)$ , introduzimos a variável contínua auxiliar  $z(k) = x_l u(k) = \delta_4(k)u(k)$ , que pode ser transformada em desigualdades lineares mistas inteiras, da seguinte forma:

$$z(k) = \delta(k)f(x(k))$$

é equivalente a:

$$\begin{aligned} z(k) &\leq M_x \delta(k) \\ -z(k) &\leq m_x \delta(k) \\ z(k) &\leq f(x(k)) - m_x(1 - \delta(k)) \\ -z(k) &\leq f(x(k)) - m_x(1 - \delta(k)) \end{aligned}$$

As transformações acima podem resumir-se na seguinte representação MLD do sistema de controle de temperatura:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \delta(k) + \begin{bmatrix} 1 - \lambda \\ 0 \end{bmatrix} z(k) \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & M_x - m & 0 & 0 \\ 0 & m_x - m - \epsilon & 0 & 0 \\ M - m_x & 0 & 0 & 0 \\ M - M_x - \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -M_u \\ 0 & 0 & 0 & m_u \\ 0 & 0 & 0 & -m_u \\ 0 & 0 & 0 & M_u \end{bmatrix} \delta(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} z(k) \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) \\
& + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} M_x \\ -m - \epsilon \\ -m_x \\ M - \epsilon \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_u \\ M_u \end{bmatrix} \quad (2.32)
\end{aligned}$$

onde  $\delta \triangleq [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4]^T$  e  $x \triangleq [x_c \ x_l]^T$ .

Na seguinte seção, desenvolvem-se os conceitos teóricos e a metodologia para transformar as proposições lógicas e mistas (lógicas e contínuas) em desigualdades lineares envolvendo as variáveis do próprio sistema e variáveis auxiliares criadas para tal fim.

## 2.4.1 Cálculo Proposicional e Programação Linear Inteira

### Proposições Lógicas

Seguindo a notação padrão (Williams 1977, Cavalier et al. 1990, Williams 1993), vamos adotar as letras maiúsculas  $X_i$  para representar proposições, por exemplo “ $x \geq 0$ ” ou “a temperatura está quente”. O literal  $X_i$  pode ser verdadeiro (V) ou falso (F). A Álgebra Booleana permite-nos combinar proposições simples em proposições compostas por meios de operadores. Estes são:

$\wedge$	operador	<i>AND</i>
$\vee$	operador	<i>OR</i>
$\bar{\cdot}$	operador	<i>NOT</i> (complemento)
$\rightarrow$		implicação
$\leftrightarrow$		se e somente se
$\oplus$		<i>OR</i> exclusivo

Um tratamento mais detalhado da álgebra booleana pode ser encontrado em textos de projeto de circuitos digitais, como por exemplo Christiansen (1997) e Hayes (1993). Para uma exposição rigorosa veja por exemplo Mendelson (1964).

Os operadores lógicos satisfazem diversas propriedades (Christiansen 1997) que podem ser usadas para transformar proposições compostas em proposições compostas equivalentes envolvendo operadores diferentes, simplificando proposições complexas. É sabido que todos os operadores lógicos podem ser definidos nos termos de um subconjunto deles o qual é dito ser um conjunto completo dos operadores.

**Exemplo 2.3** *O conjunto de operadores  $\{\vee, \bar{\cdot}\}$  é um conjunto completo de operadores, pois os outros operadores podem ser expressos em termos destes aplicando equivalências lógicas, por exemplo:*

$$X_1 \rightarrow X_2 \text{ equivale a } \bar{X}_1 \vee X_2 \quad (2.33)$$

$$X_1 \rightarrow X_2 \text{ equivale a } \bar{X}_2 \rightarrow \bar{X}_1 \quad (2.34)$$

$$X_1 \leftrightarrow X_2 \text{ equivale a } (X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_2 \rightarrow X_1) \quad (2.35)$$

$$X_1 \wedge X_2 \text{ equivale a } \overline{\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2} \quad (2.36)$$

A uma proposição  $X_i$  pode associar-se uma variável lógica  $\delta_i \in \{0, 1\}$  a qual terá um valor igual a um 1 se  $X_i = V$ , ou 0 se  $X_i = F$ .

Um problema de lógica proposicional onde a proposição  $X_1$  deve ser provada verdadeira dado um conjunto de proposições (compostas) envolvendo proposições

relação	proposição lógica	(des)igualdade mista inteira
<i>AND</i> ( $\wedge$ ) $X_1 \wedge X_2$	$[\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 = 1$ $\delta_2 = 1$
$X_3 \leftrightarrow (X_1 \wedge X_2)$	$[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [\delta_1 = 1] \wedge [\delta_2 = 1]$	$-\delta_1 + \delta_3 \leq 0$ $-\delta_2 + \delta_3 \leq 0$ $\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 1$
<i>OR</i> ( $\vee$ ) $X_1 \vee X_2$	$[\delta_1 = 1] \vee [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 + \delta_2 \geq 1$
$X_3 \leftrightarrow (X_1 \vee X_2)$	$[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [\delta_1 = 1] \vee [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 - \delta_3 \leq 0$ $\delta_2 - \delta_3 \leq 0$ $-\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 \leq 0$
<i>NOT</i> ( $\neg$ ) $\overline{X_1}$	$\overline{[\delta_1 = 1]}$	$\delta_1 = 0$
<i>XOR</i> ( $\oplus$ ) $X_1 \oplus X_2$	$[\delta_1 = 1] \oplus [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 + \delta_2 = 1$
$X_3 \leftrightarrow (X_1 \oplus X_2)$	$[\delta_3 = 1] \leftrightarrow [\delta_1 = 1] \oplus [\delta_2 = 1]$	$-\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 \leq 0$ $-\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \leq 0$ $\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 \leq 0$ $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2$
<i>IMPLY</i> ( $\rightarrow$ ) $X_1 \rightarrow X_2$	$[\delta_1 = 1] \rightarrow [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 - \delta_2 \leq 1$
<i>IFF</i> ( $\leftrightarrow$ ) $X_1 \leftrightarrow X_2$	$[\delta_1 = 1] \leftrightarrow [\delta_2 = 1]$	$\delta_1 - \delta_2 = 0$

Tabela 2.2: Conversão de relações lógicas básicas em desigualdades inteiras

$X_2, \dots, X_n$ , podem de fato ser resolvidos apropriadamente por meio de programação linear inteira traduzindo as proposições compostas originais em desigualdades lineares que envolvem as variáveis binárias  $\delta_i$ . Estas desigualdades são denominados desigualdades lineares inteiras.

De fato, é fácil ver que as proposições e restrições lineares mostradas na tabela 2.2 são equivalentes.

Existem métodos e formulações alternativas para transformar problemas de lógica proposicional em problemas de programação matemática inteira equivalentes, e nenhum método é uniformemente melhor do que o outro. Em Cavalier et al. (1990) conclui-se que a escolha de uma abordagem de modelagem eficiente depende da forma das proposições lógicas. Está claro que um pré-processo procurando uma redução no problema de lógica proposicional traz grandes benefícios na solução numérica quando resolvermos o problema de programação mista inteira. O problema de encontrar a forma mínima é bem conhecido no âmbito de projeto de redes digitais. Existe uma variedade de métodos para executar esta tarefa. Para uma exposição detalhada o leitor pode

relação	proposição lógica	(des)igualdade mista inteira
<i>IMPLY</i> ( $\rightarrow$ ) $[f(x) \leq 0] \rightarrow X$	$[f(x) \leq 0] \rightarrow [\delta = 1]$	$f(x) \geq \epsilon + (m - \epsilon)\delta$
$X \rightarrow [f(x) \leq 0]$	$[\delta = 1] \rightarrow [f(x) \leq 0]$	$f(x) \leq M - M\delta$
<i>IFF</i> ( $\leftrightarrow$ ) $[f(x) \leq 0] \leftrightarrow X$	$[f(x) \leq 0] \leftrightarrow [\delta = 1]$	$f(x) \leq M(1 - \delta)$ $f(x) \geq \epsilon + (m - \epsilon)\delta$
<i>Product</i> <i>IF</i> $X$ <i>THEN</i> $z = f(x)$ <i>ELSE</i> $z = 0$	$z = \delta \cdot f(x)$	$z \leq M\delta$ $-z \leq -m\delta$ $z \leq f(x) - m(1 - \delta)$ $-z \leq -f(x) + M(1 - \delta)$

Tabela 2.3: Conversão de relações mistas lógicas contínuas básicas em desigualdades mistas inteiras.  $M, m$  em  $\mathbb{R}$  são as cotas superior e inferior da função linear  $f(x)$  para  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\epsilon > 0$  é uma tolerância pequena, geralmente a precisão da máquina.

consultar Hayes (1993).

### Proposições Mistas Lógicas-Contínuas

Com a técnica mostrada na seção anterior, podemos então modelar a parte lógica do processo (chaves ON/OFF, mecanismos discretos, redes combinatórias e seqüenciais) e o conhecimento heurístico de operação da planta através de desigualdades lineares inteiras. Mas como estamos interessados em sistemas que não só tenham parte lógica mas também dinâmica contínua, devemos estabelecer um laço entre estes dois mundos. Em particular necessitamos estabelecer uma metodologia para construir proposições de eventos operacionais em relação à dinâmica contínua. A idéia-chave é usar desigualdades lineares mistas inteiras, isto é, desigualdades envolvendo variáveis contínuas,  $x \in \mathbb{R}^n$ , e variáveis lógicas,  $\delta \in \{0, 1\}$ . Na tabela 2.3 mostra-se uma lista de equivalências, que permite realizar a tradução de algumas proposições mistas lógicas-contínuas num conjunto de desigualdades a ser usado como restrições nos problemas de otimização matemática. Uma lista extensiva de tais transformações é dada em Mignone (2001). Notar que as relações que envolvem a forma  $[\delta = 0]$  em vez de  $[\delta = 1]$  nas tabelas 2.2 e 2.3 podem ser obtidas substituindo  $\delta$  por  $(1 - \delta)$  nas desigualdades correspondentes.

De um ponto de vista semântico, notar que o intervalo de  $\delta$  na coluna direita da tabela 2.3 é entendida como um subconjunto dos números reais. Mesmo que frequentemente nos referirmos a  $\delta$  como uma variável lógica ou discreta, quando fazemos a transformação para as desigualdades, a suposição inerente é que:

$$\delta \in \{0, 1\} \subset \mathbb{R} \quad (2.37)$$

A tradução de proposições lógicas ou declarações mistas lógicas-contínuas em desigualdades, vistas na seção 2.4.1, é um passo que determina criticamente o tamanho do modelo MLD resultante em termos do número de variáveis. É importante achar modelos que tenham um número pequeno de variáveis binárias, pois isto permite melhorar a velocidade de resolução dos problemas matemáticos de otimização, necessários para análise, síntese e supervisão de sistemas híbridos. No apêndice A são propostos métodos eficientes para a tradução de proposições lógicas em desigualdades diminuindo o número de variáveis auxiliares necessárias. Os métodos são aplicáveis quando as proposições lógicas são mais complexas que as mostradas na Tabela 2.2, envolvendo combinações arbitrárias de operadores.

## 2.4.2 Estrutura de Sistemas MLD

Os modelos MLD para sistemas híbridos se baseiam na combinação de três idéias e observações apresentadas isoladamente na literatura. Estas idéias são:

1. Representação de proposições lógicas como desigualdades lineares que envolvem variáveis binárias.
2. Representação de proposições que acoplam relações lógicas às variáveis contínuas como desigualdades lineares que envolvem variáveis contínuas e binárias.
3. A inclusão de variáveis binárias e restrições lineares na descrição do sistema.

Os primeiros dois pontos foram considerados na seção 2.4.1. O último ponto combina todas as desigualdades que são construídas a partir dos métodos da seção 2.4.1 num conjunto de restrições. Para permitir uma formulação computacionalmente tratável dos problemas de análise e síntese do sistema, um modelo linear em tempo discreto é escolhido para descrever a evolução dos estados. Como os componentes lógicos influenciam na dinâmica contínua, é necessário introduzir variáveis binárias na descrição do sistema. Um dos primeiros trabalhos usando esta idéia é publicado em Witsenhausen (1966), onde um modelo linear é escolhido, permitindo-se haver estados e entradas tanto contínuas como discretas.

A forma geral de um sistema MLD é dado pelas seguintes expressões:

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + B_2\delta(k) + B_3z(k) \quad (2.38)$$

$$y(k) = Cx(k) + D_1u(k) + D_2\delta(k) + D_3z(k) \quad (2.39)$$

$$E_2\delta(k) + E_3z(k) \leq E_1u(k) + E_4x(k) + E_5 \quad (2.40)$$

A equação (2.38) é a função de atualização dos estados. (2.39) é a função de saída e o conjunto de desigualdades em (2.40) coleta as restrições inerentes do sistema assim como as traduções das proposições lógicas como indicado nas tabelas 2.2 e 2.3. O significado das variáveis é o mesmo que para a equação (2.16):

- $x$  são os estados contínuos e binários:

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ x_l \end{bmatrix}, \quad x_c \in \mathbb{R}^{n_c}, \quad x_l \in \{0, 1\}^{n_l}, \quad n \triangleq n_c + n_l$$

- $y$  são as saídas contínuas e binárias:

$$y = \begin{bmatrix} y_c \\ y_l \end{bmatrix}, \quad y_c \in \mathbb{R}^{p_c}, \quad y_l \in \{0, 1\}^{p_l}, \quad p \triangleq p_c + p_l$$

- $u$  são as entradas contínuas e binárias:

$$u = \begin{bmatrix} u_c \\ u_l \end{bmatrix}, \quad u_c \in \mathbb{R}^{m_c}, \quad u_l \in \{0, 1\}^{m_l}, \quad m \triangleq m_c + m_l$$

- $\delta \in \{0, 1\}^{r_l}$  são as variáveis auxiliares binárias
- $z \in \mathbb{R}^{r_c}$  são as variáveis auxiliares contínuas

Observe que removendo a equação (2.40) e fazendo  $\delta$  e  $z$  iguais a 0, as equações (2.38) e (2.39) reduzem-se a um sistema linear sem restrições em tempo discreto no espaço de estados. As variáveis  $\delta$  e  $z$  são introduzidas quando traduzimos as proposições lógicas em desigualdades lineares. Todas as restrições estão contidas na desigualdade (2.40). A descrição (2.38, 2.39, 2.40) só aparenta ser linear dado que as variáveis  $\delta$ ,  $x_l$ ,  $y_l$  e  $u_l$  são binárias. Veremos o procedimento de modelagem na forma MLD na seção 2.4.5.

O sistema (2.38, 2.39, 2.40) é suposto ser “completamente bem posto” (Bemporad e Morari 1999). Isto significa que, dado o estado  $x(k)$  e a entrada  $u(k)$ , a desigualdade (2.40) tem uma única solução para  $\delta(k)$  e  $z(k)$ . Em outras palavras, em cada instante de tempo, os mapeamentos  $(x(k), u(k)) \mapsto \delta(k)$  e  $(x(k), u(k)) \mapsto z(k)$  resultam em um único valor. Conseqüentemente,  $x(k+1)$  é unicamente definido, permitindo encontrar uma trajetória única do estado  $x(\cdot)$  dado um estado inicial  $x(0)$  e uma seqüência de entrada  $u(0) \dots u(N)$ . É condição para realizar uma correta simulação de um sistema MLD que este seja “bem posto”.

**Algoritmo 2.1** *Simulação de um sistema MLD:*

1. Faça  $k = k_0$  e escolha  $x(k)$ .
2. Dado  $x(k)$  e  $u(k)$ , obtenha  $\delta(k)$  e  $z(k)$  que verifiquem (2.40).
3. Determine  $x(k+1)$  de (2.38)
4. Faça  $k = k + 1$  e vá ao passo 2.

É possível determinar  $\delta(k)$  e  $z(k)$  no passo 2 através de um Teste de Factibilidade Misto Inteiro (*Mixed Integer Feasibility Test* (MIFT)), (Mignone 2002). A hipótese que o sistema seja bem posto é usualmente não restritiva na prática. Mesmo que seja fácil definir sistemas MLD que não sejam bem postos, estes casos são freqüentemente de interesse somente no âmbito acadêmico, e surgem se o sistema não for precisamente modelagem. Para a simulação de grandes sistemas, algoritmos computacionais mais eficientes do que o algoritmo 2.1 podem ser realizados (Torrise 2003).

As matrizes  $A, B_1, B_2, B_3, C, D_1, D_2, D_3, E_1, \dots, E_5$  são reais e de dimensões apropriadas. Embora as matrizes  $A, B_1, B_3$  sejam matrizes genéricas, algumas entradas têm que ser excluídas, se estados binários estão presentes em  $x$ . Mais precisamente, o componente lógico  $x_l$  do estado não pode depender diretamente das variáveis contínuas  $x_c, u_c, z$  através de 2.38. As correspondentes entradas em  $A, B_1, B_3$  devem ser zero para um modelo MLD válido (Torrise 2003, Ferrari-Trecate et al. 2002a). Por exemplo, a matriz  $A$  deverá ter a forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{cc} & A_{cd} \\ 0_{n_l \times n_c} & A_{dd} \end{bmatrix}$$

### 2.4.3 Sistema MLD bem posto e a tolerância $\epsilon$

Para a tradução de algumas proposições lógicas em desigualdades, é necessário introduzir pequenas tolerâncias ( $\epsilon > 0$ ), como pode ser visto na Tabela 2.3. A justificativa principal para estas variáveis é a capacidade de expressar as desigualdades como não-estritas, antes que como desigualdades estritas. Isto permite sua inclusão como restrições em problemas de otimização.

Esta seção descreve um par de conseqüências desta aproximação para as restrições assim obtidas e mostra como depende da escolha de  $\epsilon$  que o sistema seja bem posto.

**Exemplo 2.4** *Considere por exemplo a proposição:*

$$[\delta = 1] \leftrightarrow [f(x) \leq 0], \quad (2.41)$$

e sua tradução a desigualdades mistas inteiras:

$$f(x) \leq M - M\delta \quad (2.42)$$

$$f(x) \geq \epsilon + (m - \epsilon)\delta. \quad (2.43)$$

É fácil verificar que as desigualdades (2.42) e (2.43) definem as seguintes relações:

$$[\delta = 1] \leftrightarrow [m \leq f(x) \leq 0] \quad (2.44)$$

$$[\delta = 0] \leftrightarrow [\epsilon \leq f(x) \leq M]. \quad (2.45)$$

Se  $f(x)$  toma valores entre

$$0 < f(x) < \epsilon, \quad (2.46)$$

a variável  $\delta$  permanece indefinida e as desigualdades (2.42) e (2.43) são ineficazes para qualquer par  $(\delta, f(x)) \in \{0, 1\} \times (0, \epsilon)$ . De fato, se por exemplo  $f(x) = \frac{\epsilon}{2}$ , então (2.42) e (2.43) tornam-se

$$\frac{\epsilon}{2} \leq M - M\delta \quad (2.47)$$

$$-\frac{\epsilon}{2} \geq (m - \epsilon)\delta \quad (2.48)$$

Aqui, (2.47) somente é factível para  $\delta = 0$ ; no entanto, (2.48) só pode ser satisfeita com  $\delta = 1$ . Note que se (2.46) nunca ocorrer, nenhum problema de factibilidade é esperado. Neste caso então  $\epsilon$  pode ser escolhido como a precisão representável da máquina.

Com uma interpretação geométrica podemos visualizar se há alternativas para representar (2.41), além de (2.42) e (2.43). Graficando o conjunto de pontos válidos no plano  $(\delta, y)$ , onde  $y = f(x)$ , obtemos a Figura 2.3.

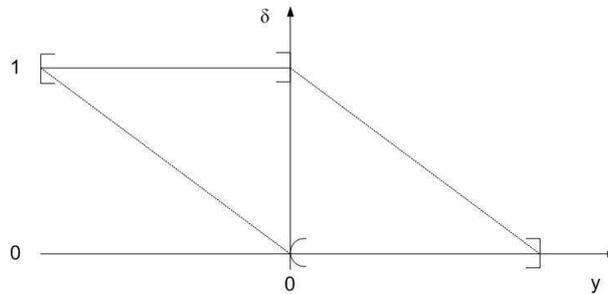


Figura 2.3: Conjunto de pontos válidos de 2.41 no plano  $(\delta, y)$  representado como as linhas marcadas

Da Figura 2.3, vemos que o ponto  $(\delta, y) = (0, 0)$  é um elemento do fecho convexo de pontos válidos, mesmo que ele mesmo seja inválido. Note que estendendo o espaço com

variáveis binárias adicionais não ajuda neste caso, já que o conjunto de pontos válidos é um conjunto aberto e portanto não se satisfaz a suposição de conjunto compacto do Teorema 2.1. Para qualquer extensão do domínio do espaço  $(\delta, y)$  com variáveis auxiliares, o conjunto de pontos válidos é um conjunto não-convexo.

**Teorema 2.1** *Seja  $\mathcal{P}$  uma proposição lógica envolvendo  $n_c$  variáveis contínuas e  $n_b$  variáveis binárias. Seja  $V \subset X_V = \mathbb{R}^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_b}$  o conjunto de pontos válidos de  $\mathcal{P}$  e suponha que  $V$  é um conjunto compacto. Então, introduzindo  $n_a$  variáveis binárias,  $V$  pode sempre ser delimitada por desigualdades no espaço  $\tilde{X} = \mathbb{R}^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_a+n_b}$  de dimensão  $n_a + n_b + n_c$  tal que no espaço dimensional mais alto o fecho convexo de pontos válidos não contém qualquer ponto inválido. Além do mais, se  $n_c = 0$ , então  $n_a = 0$*

Um meio de representar esta relação como desigualdades é sacrificar a propriedade que o modelo seja bem posto. A solução (2.42) e (2.43) modifica o conjunto de pontos válidos, tal que há uma lacuna, em que  $\delta$  é indefinido, como mostra-se na Figura 2.4.

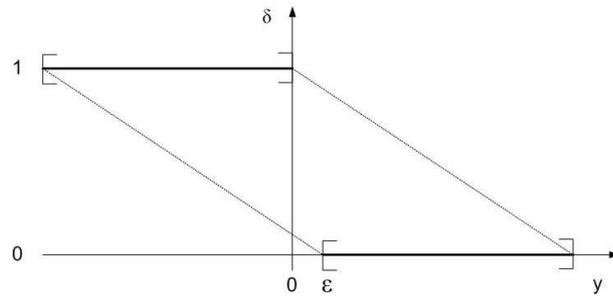


Figura 2.4: Conjunto de pontos válidos de 2.41 no plano  $(\delta, y)$  usando a abordagem  $\epsilon$ . Os pontos válidos são representado como as linhas marcadas

Isto significa que, estritamente falando, o sistema não é completamente bem posto, já que para  $y \in (0, \epsilon)$  nenhum  $\delta$  é definido. Se estamos dispostos a sacrificar que o modelo seja bem posto, podemos propor uma tradução alternativa, como se mostra na Figura 2.5.

Aqui nós não temos zonas da variável contínua  $y$ , onde a variável binária  $\delta$  é indefinida, mas temos ambos possíveis valores de  $\delta$ , se  $y = 0$ . As desigualdades neste caso são obtidas colocando  $\epsilon \leq 0$  em (2.42) e (2.43).

#### 2.4.4 Estado estacionário para sistemas MLD

Os sistemas MLD podem exibir várias propriedades que são típicas de sistemas não-lineares, como múltiplos pontos de equilíbrios isolados ou ciclos limites. Propriedades

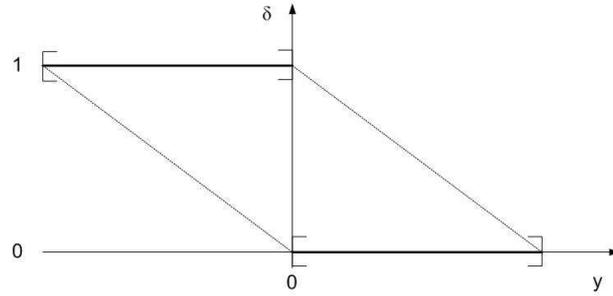


Figura 2.5: Conjunto de pontos válidos de 2.41 no plano  $(\delta, y)$  sem ser o sistema bem posto. Os pontos válidos são representado como as linhas marcadas

como *deadlocks* ou *livelocks*, tipicamente encontradas em sistemas a eventos discretos, também podem ser achadas em modelos MLD.

Só que para sistemas não-lineares, invariantes no tempo, a forma de achar os pontos de equilíbrio é impor que  $x_f(k+1) = x_f(k)$  na equação de evolução de estados  $x(k+1) = f(x(k))$ , e logo em seguida procurar pelos zeros da função resultante. Mas para sistemas MLD, achar os pontos de equilíbrio (se existirem) é um pouco mais complexo dado que esta representação, além da equação de evolução de estados, apresenta as desigualdades contendo as variáveis auxiliares criadas no processo de modelagem. Além disso ambas as equações, tanto a de evolução de estados como as desigualdades, estão formadas tanto por variáveis reais como variáveis binárias, o que não permite utilizar a mesma metodologia para achar os pontos de equilíbrio que a usada para sistemas não-lineares.

O valor de estado estacionário  $x_f$  de um sistema MLD pode ser determinado resolvendo o seguinte problema de programação mista inteira

$$\min_{x_f, u_f, \delta_f, z_f} (\|y_f - r\|_{\rho_y} + \|x_f\|_{\rho_4} + \|u_f\|_{\rho_1} + \|z_f\|_{\rho_3} + \|\delta_f\|_{\rho_2}) \quad (2.49)$$

Sujeito a:

$$x_f = Ax_f + B_1 u_f + B_2 \delta_f + B_3 z_f \quad (2.50)$$

$$y_f = Cx_f + D_1 u_f + D_2 \delta_f + D_3 z_f \quad (2.51)$$

$$E_2 \delta_f + E_3 z_f \leq E_1 u_f + E_4 x_f + E_5 \quad (2.52)$$

Aqui  $\|\cdot\|$  é uma norma arbitrária, o vetor  $r$  é a referência constante,  $\rho_i = \rho_i^T$   $i = 1, \dots, 4, y$ , são matrizes de ponderação não-negativas. Em general, o conjunto completo de todos os estados estacionários é definido pelos pontos factíveis que satisfazem (2.50-2.52). No entanto, como a solução  $x_f, u_f, \delta_f, z_f$  tipicamente é usada para propósitos de controle, estamos interessados numa solução de (2.49-2.52), onde  $\rho_y \gg \rho_j$ , ( $j = 1..4$ )

isto é um estado estacionário que produz uma saída perto da referência.

Devido à grande variedade de comportamentos que podem apresentar sistemas MLD, o resultado  $(x_f, u_f, \delta_f, z_f)$  de (2.49-2.52) deve ser melhor analisado antes de seu uso num esquema de controle. Algumas dificuldades que podem surgir são listadas a seguir:

**Estado estacionário inatingível.** O estado constante obtido com (2.49-2.52) pode ser inatingível. Chamamos um estado  $x_e$  inatingível, se existe um estado inicial  $x_0$ , para o qual nenhuma entrada factível  $[u(0), u(1), \dots, u(N)]$  de tamanho  $N$  ( $N \geq 1$ ) existe, tal que  $x(N) = x_e$ .

**Multiplicidade de estados estacionários.** Mesmo que todas as ponderações  $\rho_i$  em (2.49) sejam escolhidas diferentes de zero, os estados estacionários obtidos com (2.49 -2.52) podem ser não-únicos por causa da presença das variáveis binárias. Um exemplo simples deste fenômeno é um sistema PWA, onde o estado estacionário correspondente à dinâmica afim da região  $X_i$  permanece em  $X_i$  para todo  $i$ . Sistemas podem ser achados, com estados estacionários que dão o mesmo valor de (2.49) para todos os estados estacionários dos subsistemas.

**Ciclos Limites** Considere o problema de estabilizar um sistema MLD a uma referência constante  $r$ . Ao procurar por um estado que forneça uma saída  $y$  que permaneça perto de  $r$ , (2.49-2.52) pode fornecer uma solução única e alcançável. No entanto, em alguns casos o equilíbrio assim obtido é distante da referência. Deve-se observar que o erro acumulado sobre um horizonte finito de comprimento  $M$

$$\sum_{k=1}^M \|y_f(k) - r\|$$

pode ser menor, por exemplo, quando  $y$  segue um ciclo de estados em vez de se manter num valor constante. O tal ciclo é gerado pelo chaveamento periódico dos componentes discretos do sistema. Em outras palavras, o sistema vai por meio de um ciclo de estados permanecer perto da referência, em vez de convergir a um estado constante.

Para sistemas que exibam ciclos limite, em vez de achar um único estado estacionário, podem-se procurar por seqüências inteiras de estados. A otimização então é dada por:

$$\min_{\underline{x}_f, \underline{u}_f, \underline{\delta}_f, \underline{z}_f} (\|\underline{y}_f - r\|_{\rho_y} + \|\underline{x}_f\|_{\rho_4} + \|\underline{u}_f\|_{\rho_1} + \|\underline{z}_f\|_{\rho_3} + \|\underline{\delta}_f\|_{\rho_2}) \quad (2.53)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
x_f(1) &= Ax_f(0) + B_1u_f(0) + B_2\delta_f(0) + B_3z_f(0) \\
x_f(2) &= Ax_f(1) + B_1u_f(1) + B_2\delta_f(1) + B_3z_f(1) \\
&\vdots \\
x_f(N) &= Ax_f(N-1) + B_1u_f(N-1) + B_2\delta_f(N-1) + B_3z_f(N-1) \\
x_f(0) &= Ax_f(N) + B_1u_f(N) + B_2\delta_f(N) + B_3z_f(N) \\
E_2\delta_f(0) + E_3z_f(0) &\leq E_1u_f(0) + E_4x_f(0) + E_5 \\
&\vdots \\
E_2\delta_f(N) + E_3z_f(N) &\leq E_1u_f(N) + E_4x_f(N) + E_5
\end{aligned}$$

As variáveis  $\underline{x}_f$ ,  $\underline{u}_f$ ,  $\underline{\delta}_f$ ,  $\underline{z}_f$  em (2.53) são seqüências das variáveis correspondentes  $x_f$ ,  $u_f$ ,  $\delta_f$ ,  $z_f$  de comprimento  $N$ , isto é

$$\underline{x}_f = \begin{bmatrix} x_f(0) \\ \vdots \\ x_f(N) \end{bmatrix} \quad \underline{u}_f = \begin{bmatrix} u_f(0) \\ \vdots \\ u_f(N) \end{bmatrix} \quad \underline{\delta}_f = \begin{bmatrix} \delta_f(0) \\ \vdots \\ \delta_f(N) \end{bmatrix} \quad \underline{z}_f = \begin{bmatrix} z_f(0) \\ \vdots \\ z_f(N) \end{bmatrix} \quad \underline{r} = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix}$$

$\underline{r}$  é o vetor constante de referência. Em general o comprimento  $N$  da seqüência não é sabido previamente e deve ser achado iterativamente. Se um ciclo curto é requerido, resolvemos o problema de otimização

$$\min_{N \in \mathbb{N}} \left\{ \min_{y_f(0), \dots, y_f(N)} \|\underline{y}_f - \underline{r}\|_{\tilde{\rho}} + \gamma(N) \right\}$$

Onde  $\gamma(\cdot) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é uma função monótona crescente estrita, não-negativa que penaliza o uso de ciclos longos de comprimento  $N$ .

## 2.4.5 Exemplo

### Exemplo 2.5 *Conversor Buck-Boost (CBB)*

Suponha um dado CBB que foi projetado para trabalhar somente em MCC na sua faixa de operação.

Para obter o modelo MLD (2.38-2.40) a partir das equações dinâmicas do CBB ((2.1-2.3) e (2.7-2.9)), em primeiro lugar é necessário associar a proposição “chave fechada” uma variável auxiliar, portanto:

$$[q = 1] \leftrightarrow [\text{chave fechada}]$$

Então temos que:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}V_{cc}q + \frac{1}{L}v_C \quad (2.54)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{RC}v_C - \frac{1}{C}i_L(1-q) \quad (2.55)$$

$$V_0 = -v_C \quad (2.56)$$

Discretizando as equações anteriores pelo método de Euler com um período de amostragem  $T_s$  temos que:

$$i_L(k+1) = \frac{T_s V_{cc}}{L}q(k) + \frac{T_s}{L}v_C(k)(1-q(k)) + i_L(k) \quad (2.57)$$

$$v_C(k+1) = -\frac{T_s}{RC}v_C(k) - \frac{T_s}{C}i_L(k)(1-q(k)) + v_C(k) \quad (2.58)$$

$$V_0 = -v_C \quad (2.59)$$

onde  $k$  denota o tempo discreto. Fazendo abuso da notação vamos omitir daqui para frente a dependência de cada variável com  $k$  e vamos utilizar a seguinte notação:  $x(k+1) = x^+$ .

Como se observa nas equações anteriores a corrente pelo indutor  $i_L$  e a tensão sobre o capacitor aparecem multiplicadas pela variável binária auxiliar  $q$ . É necessário introduzir portanto duas variáveis auxiliares como indica a tabela 2.3:

$$\begin{array}{ll} z_1 = i_L q & z_2 = v_C q \\ z_1 \leq M_I q & z_2 \leq M_V q \\ z_1 \geq m_I q & z_2 \geq m_V q \\ z_1 \leq i_L - m_I(1-q) & z_2 \leq v_C - m_V(1-q) \\ z_1 \geq i_L - M_I(1-q) & z_2 \geq v_C - M_V(1-q) \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{l} M_I \triangleq \max i_L \\ m_I \triangleq \min i_L \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{l} M_V \triangleq \max v_C \\ m_V \triangleq \min v_C \end{array}$$

As transformações acima podem resumir-se na seguinte representação MLD do CBB:

$$\begin{bmatrix} i_L^+ \\ v_C^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{T_s}{L} \\ -\frac{T_s}{C} & 1 - \frac{T_s}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T_s V_{CC}}{L} \\ 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{T_s}{L} \\ \frac{T_s}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\begin{bmatrix} -M_I \\ m_I \\ -m_I \\ M_I \\ -M_V \\ m_V \\ -m_V \\ M_V \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_I \\ M_I \\ 0 \\ 0 \\ -m_V \\ M_V \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

onde:  $i_L^+ = i_L(k+1)$  e  $v_C^+ = v_C(k+1)$ .

Embora técnicas de controle e estimação de estados baseadas em otimização mista inteira *online* ou programação mista inteira multiparamétrica *offline* foram propostas para modelos MLD (Bemporad e Morari 1999, Bemporad, Ferrari-Trecate e Morari 2000), a maioria das outras técnicas híbridas exigem uma formulação PWA, tal como: critérios de estabilidade (Carlo et al. 2000, Johansson e Rantzer 1998, Ferrari-Trecate et al. 2002b), síntese do controlador ótimo afim por partes (Bemporad et al. 2002, Kerrigan e Mayne 2002, Mayne e Rakovic 2002), e verificação de propriedades de segurança via análise de alcançabilidade (Asarin et al. 2000, Chutinan e Krogh 1999, Bemporad, Ferrari-Trecate e Morari 2000). Além do mais, as simulações de sistemas híbridos são muito mais fáceis para sistemas PWA (avaliação de um função PWA por cada passo de tempo), que para sistema MLD (teste de factibilidade mista inteira por cada passo de tempo (Bemporad e Morari 1999)).

Devido então a esta peculiaridade, e no intuito de poder utilizar o contexto MLD para projetar a lei de controle e estudar a estabilidade do sistema no âmbito PWA, é que na próxima seção serão desenvolvidos resultados teóricos que tratam sobre a equivalência dos sistemas MLD e PWA e como converter um no outro.

## 2.5 Equivalência entre sistemas MLD e PWA

**Definição 2.1** (Bemporad 2004) *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  sistemas híbridos no espaço de estados, com iguais dimensões nos estados, entradas, e saídas.  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são ditos equivalentes se para todo  $x_1(k) = x_2(k)$  e  $u_1(k) = u_2(k)$ , o estado sucessor  $x_1(k+1) = x_2(k+1)$  e a saída  $y_1(k) = y_2(k)$ , onde  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  e  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  é o conjunto de números inteiros não-negativos.*

Note que se as trajetórias são persistentes, isto é, definidas para todo  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  então a Definição 2.1 implica que começando no mesmo estado inicial e aplicando a mesma

seqüência de entrada, a trajetória do estado e a saída dos dois sistemas equivalentes são idênticas.

O seguinte resultado é proposto em Bemporad, Ferrari-Trecate e Morari (2000) e é uma extensão do resultado correspondente proposto em Bemporad e Morari (1999) para sistemas lineares por partes (PWL) (isto é, sistemas PWA com  $f_i = g_i = 0$ ).

**Proposição 2.1** (Bemporad 2004) *Considere o sistema bem posto PWA (2.16) e seja o conjunto  $\Omega$  de estados e entradas factíveis limitado. Então, existe um sistema MLD (2.38-2.40) tal que (2.16) e (2.38-2.40) são equivalentes.*

**Comentário 2.2** *Como os modelos MLD só permitem que desigualdades não-estritas sejam incluídas em (2.40), ao reescrever um sistema PWA descontínuo<sup>2</sup> como um modelo MLD, desigualdades estritas como  $x(k) < 0$  devem ser aproximadas por  $x(k) \leq -\epsilon$  para algum  $\epsilon > 0$  (tipicamente a precisão de máquina), com a suposição que  $-\epsilon < x(k) < 0$  não pode ocorrer devido ao número finito de bits usado para representar números reais (nenhum problema existe quando o PWA é contínuo, onde a desigualdade estrita pode ser reescrita equivalentemente como não-estrita, ou  $\epsilon = 0$ ); veja (Heemels et al. 2001) e (Bemporad e Morari 1999) para mais detalhes. De um ponto de vista estritamente teórico, a proposição feita na proposição 2.1 é, portanto, não exata para sistemas PWA descontínuos. Como discutido previamente, um meio de iludir tal inexatidão é permitir que parte das desigualdades em (2.40) sejam estritas, ou evitar desigualdades estritas na definição das dinâmicas PWA. Por outro lado, de um ponto de vista numérico, esta questão não é relevante.*

A proposição inversa de 2.1 foi estabelecida em Bemporad, Ferrari-Trecate e Morari (2000) sob a condição que o sistema MLD seja completamente bem posto. Uma prova mais geral e levemente diferente é mostrada a seguir.

**Definição 2.2** (Bemporad 2004) *O conjunto de estado+entradas factíveis  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_u} \times \mathbb{R}^{m_c} \times \{0, 1\}^{m_u}$  é o conjunto de pares estados+entradas  $(x(k), u(k))$  para o qual (2.40) tem uma solução para algum  $\delta(k) \in \mathbb{R}^{r_1}$ ,  $z(k) \in \mathbb{R}^{r_c}$ .*

**Proposição 2.2** (Bemporad 2004) *Para cada sistema completamente bem posto MLD (2.38-2.40) existe um sistema bem posto PWA (2.16), isto é, o conjunto factível  $\Omega$  de estados+entradas de (2.38-2.40) pode ser particionado numa coleção de poliedros convexos  $\{\Omega_i\}_{i=1}^s$ ,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^s \Omega_i$ , e existem 5 tuplas  $(A_i, B_i, C_i, f_i, g_i)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , tal que todas as trajetórias  $x(k), u(k), y(k)$  do sistema MLD (2.38-2.40) também satisfazem (2.16).*

<sup>2</sup>Sistema PWA descontínuos, são aqueles sistemas que podem apresentar descontinuidades nas trajetórias dos estados.

*Prova* (Bemporad 2004)

## 2.6 Conversão de modelos MLD-PWA

Os sistemas PWA podem ser representados na forma MLD (2.38–2.40). A tradução consiste em definir variáveis lógicas  $\delta_i$  [ $\delta_i = 1$ ]  $\leftrightarrow$  [ $\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_i$ ] e impondo a condição OR-exclusivo  $\bigoplus_{i=1}^s [\delta_i = 1]$ . Em Bemporad e Morari (1999) é mostrado como um sistema PWA geral pode ser escrito como um sistema MLD.

A transformação inversa de MLD a PWA descrita em Bemporad, Ferrari-Trecate e Morari (2000) exige a enumeração de todas as possíveis combinações das variáveis binárias contida no modelo MLD. Em Bemporad (2004) se fornece um algoritmo eficiente que evita tal enumeração e calcula mais eficientemente a forma equivalente PWA de um sistema dado MLD.

A tradução eficiente de um modelo MLD a PWA permite estender o uso de ferramentas desenvolvidas para sistemas PWA a muitos problemas híbridos não-triviais da vida real, como os que podem ser descritos na linguagem de modelagem HYSDEL por exemplo, (Bemporad 2004). Uma implementação no Matlab deste algoritmo está disponível em <http://www.dii.unisi.it/~bemporad/tools.html> e está incluída no *Hybrid Toolbox for Matlab* (Bemporad 2003).

## 2.7 Sumário

Neste capítulo foi introduzido o conceito de Sistema Híbrido, o qual surge desde uma perspectiva histórica dado que nenhum único modelo conhecido era capaz de capturar a dinâmica discreta e contínua ao mesmo tempo.

Ainda não existem métodos para analisar sistemas híbridos em geral, portanto diversos autores têm focalizado sua atenção em subclasses especiais de sistemas dinâmicos híbridos. Muitas destas subclasses são equivalentes fazendo certas hipóteses e, portanto, propriedades e ferramentas de um contexto podem ser trasladadas a outro contexto. Neste capítulo foram desenvolvidos aspectos teóricos relacionados com duas destas subclasses ou contextos de modelagem.

A primeira subclasse vista foi a PWA. Este contexto de modelagem tem recebido muita atenção no meio acadêmico, pois é nesse contexto que é possível analisar propriedades importantes tais como controlabilidade, observabilidade e estabilidade mais facilmente. O uso desta ferramenta de modelagem foi ilustrada com um Conversor Buck Boost, processo foco de estudo deste trabalho.

Em segundo lugar foi apresentada a classe MLD, que é bastante importante, pois permite de forma sistemática modelar uma grande quantidade de diferentes tipos de SH. A metodologia de modelagem neste contexto foi mostrada através de dois estudos de caso: (i) o sistema de controle de temperatura e (ii) o CBB.

# Capítulo 3

## Análise da Estabilidade de Sistemas Comutados

### 3.1 Introdução

As questões ligadas à estabilidade de sistemas comutados têm sido bastante estudadas nos últimos dez anos (Brockett 1983, Carlo et al. 2000, Liberzon 1999). Alguns trabalhos analisam a estabilidade no domínio do tempo contínuo (Goebel et al. 2009, Cortés 2008, Bernardo et al. 2008) e outros no domínio do tempo discreto. Nesta tese somente nos ocuparemos da análise da estabilidade de sistemas comutados no domínio do tempo discreto.

Podemos dividir o estudo da estabilidade de sistemas comutados em duas grandes classes de problemas: um deles é a análise de estabilidade de sistemas comutados quando o sinal de comutação é conhecido a priori, por exemplo arbitrário ou definido por algum critério de projeto; o outro é a síntese de sinais de comutação estabilizantes para uma determinada coleção de sistemas dinâmicos, geralmente aplicando a teoria de Lyapunov.

Neste trabalho a síntese do sinal de comutação será realizada através de uma lei de controle preditiva, como se mostrará no próximo capítulo. Assim, para verificar a estabilidade em malha fechada do sistema resultante interessa conhecer os conceitos teóricos desenvolvidos para a primeira classe de problemas.

O conteúdo teórico desenvolvido neste capítulo é basicamente uma recompilação e resumo destes conceitos, os quais foram obtidos fundamentalmente dos seguintes trabalhos: Lin e Antsaklis (2005), Theys (2005), Blondel et al. (2005), Daafouz et al. (2002) e Mason et al. (2007).

No entanto os principais resultados que existem na literatura para análise de estabilidade de sistemas comutados tratam o caso de sistemas comutados lineares (PWL) sob um sinal de comutação arbitrário, e não o caso dos sistemas afins por partes (PWA), sendo esta uma lacuna teórica existente.

## 3.2 Sistemas Lineares comutados e Inclusões Lineares Discretas

Considere um conjunto  $\mathcal{M}$  de matrizes  $A_i$ , que também pode ser visto como um conjunto de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  operadores. Tomemos um ponto arbitrário  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  como ponto inicial. Então, definamos a seguinte recorrência:

$$x(k+1) \in \{A_{i_k}x(k) : A_{i_k} \in \mathcal{M}\}. \quad (3.1)$$

Esta notação significa que, a cada passo de tempo  $k$ , qualquer matriz  $A_i$  pode ser utilizada para determinar o seguinte valor de  $x(k+1)$ . A seqüência  $(i_k)$  é o sinal de chaveamento. Seus valores dependem de  $k$ , mas também podem depender de  $x(k)$ . A série  $(x(0), x(1), \dots, x(k), \dots)$  que satisfaz a inclusão (3.1),

$$x(k+1) = A_{i_k}x(k),$$

para alguma seqüência  $i_k$ , é uma trajetória no espaço  $\mathbb{R}^n$ . Note que o conjunto de todos os possíveis sinais de comutação define o conjunto de possíveis trajetórias.

Vamos chamar inclusão linear discreta ao conjunto  $(x(k)) : k \geq 0$  de todas as possíveis seqüências de vetores em  $\mathbb{R}^n$  geradas utilizando a relação (3.1). Este conjunto será denotado por  $DLI(\mathcal{M})$ .

A interpretação de uma  $DLI$  é bastante simples. Estamos perante um sistema dinâmico em tempo discreto, onde, a cada passo, temos de escolher uma lei de evolução linear de um determinado conjunto de operadores. Algumas das primeiras perguntas que surgem, em tal caso, é: “será que estas diferentes trajetórias convergem? caso afirmativo, a que ponto? e em que circunstâncias? ”. A fim de tratar estas questões, primeiro temos que introduzir formalmente a noção de estabilidade.

Em alguns casos, o estudo da estabilidade de um sistema deste tipo é definido como a convergência para a origem de uma determinada seqüência de chaveamento. O objetivo também poderia ser o de encontrar uma classe de funções  $i_t$  que estabilizem o sistema associado a um determinado conjunto  $\mathcal{M}$  de matrizes. No nosso caso, a estabilidade significará essencialmente que todas as trajetórias convergem para a origem,

para qualquer sinal de comutação.

## Diferentes Noções de Estabilidade

### Estabilidade Assintótica Absoluta (AAS)

A estabilidade assintótica absoluta (*Absolute Asymptotic Stability* - AAS) é a primeira noção de estabilidade e pode ser considerada como uma das mais simples, porque é a mais intuitiva. Esta é a forma mais estrita de estabilidade. A AAS significa que qualquer trajetória  $(x(k))$  extraída da  $DLI(\mathcal{M})$  converge para a origem ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0, \forall(i_k)$$

Como a equação anterior deve ser válida para qualquer vetor inicial  $x_0$ , isto é equivalente a dizer que todos os produtos matriciais convergem para a matriz zero:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{i_k} A_{i_{k-1}} \dots A_{i_1} = 0, \forall(i_k)$$

### Estabilidade Assintótica Periódica (PAS)

A estabilidade assintótica periódica (*Periodic Asymptotic Stability* - PAS) significa que todos os produtos matriciais periódicos convergem para a matriz zero. Formalmente, a  $DLI$  é PAS se qualquer produto finito de matrizes do tipo:

$$A_w = A_{i_m} A_{i_{m-1}} \dots A_{i_1},$$

satisfaz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A_w)^k = 0,$$

para qualquer escolha do padrão  $w$  de qualquer período finito de comprimento  $m$ .

Não é trivial saber se PAS implica AAS ou não, enquanto AAS claramente implica PAS.

### Estabilidade Exponencial

O sistema:

$$x(k+1) \in \{A_{i_k} x(k) : i_k \in \{1, \dots, m\}\}$$

é absolutamente estável com relação a classe de matrizes  $\mathcal{U} = \{A_1, \dots, A_m\}$  se, para  $c = c(\mathcal{U})$ , a seguinte desigualdade vale para qualquer seqüência  $(i_k)$ :

$$\forall n, \|A_{i_n} A_{i_{n-1}} \dots A_{i_1} x\| \leq c \|x\|.$$

O sistema é dito ser absolutamente exponencialmente estável com relação a classe de matrizes  $\mathcal{U}$  se, para  $c = c(\mathcal{U})$  e  $q = q(\mathcal{U}) < 1$ , a seguinte desigualdade vale para qualquer seqüência  $(i_k)$ :

$$\forall n, \|A_{i_n} A_{i_{n-1}} \dots A_{i_1} x\| \leq cq^n \|x\|.$$

A primeira estabilidade descreve trajetórias que só têm de permanecer delimitadas no tempo, enquanto a segunda exige uma convergência para zero de todas as trajetórias (porque  $q < 1$ ). Conseqüentemente, podemos considerar a estabilidade exponencial absoluta como equivalente à estabilidade assintótica absoluta definida anteriormente.

### 3.3 Raio Espectral e Estabilidade

A seguir são desenvolvidas as condições necessárias e suficientes de estabilidade para sistemas comutados lineares sob sinais de comutação arbitrário. Estas condições são baseadas nos conceitos de Raio Espectral Generalizado e Raio Espectral Conjunto, desenvolvidos no Apêndice B

#### 3.3.1 Raio Espectral Conjunto e AAS

**Proposição 3.1** (*Theys 2005*) Para qualquer conjunto limitado  $\mathcal{M}^1$ , de matrizes,

$$\hat{\rho}(\mathcal{M}) < 1 \Leftrightarrow DLI(\mathcal{M}) \text{ é AAS.}$$

**Prova.** Esta proposição é provada pelos seguinte lema.  $\square$

**Lema 3.1** (*Theys 2005*) Para qualquer conjunto  $\mathcal{M}$  de matrizes,

$$\hat{\rho}(\mathcal{M}) < 1 \Rightarrow DLI(\mathcal{M}) \text{ é AAS.} \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>Um conjunto de matrizes  $\mathcal{M}$  é dito ser finito, se ele consiste em um número finito de matrizes, enquanto um conjunto é dito limitado, se existe um limite superior  $K$  sobre as normas das matrizes de  $\mathcal{M}$ .

**Prova.**  $\hat{\rho}(\mathcal{M}) < 1$  significa, por definição, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\rho}_k(\mathcal{M}))^{1/k} < 1.$$

O que é equivalente a dizer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\rho}_k(\mathcal{M}))^{1/k} = \gamma, \quad \text{com } \gamma < 1.$$

Então, pela definição de limite, e notando que  $\gamma < \frac{\gamma+1}{2} < 1$ , podemos afirmar que

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N, \hat{\rho}_k(\mathcal{M})^{1/k} < \frac{\gamma+1}{2} < 1,$$

que pode ser reescrito como

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N, \hat{\rho}_k(\mathcal{M}) < \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^k < 1.$$

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^k = 0$ , e usando o fato que  $\hat{\rho}_k(\mathcal{M})$  não pode ser negativa, deduzimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\rho}_k(\mathcal{M}) = 0.$$

Então, retomando a definição (B.9), que era

$$\hat{\rho}_k(\mathcal{M}) := \sup \left\{ \left\| \prod_{i=1}^k M_i \right\| : M_i \in \mathcal{M} \text{ para } 1 \leq i \leq k \right\},$$

temos, para qualquer produto de matrizes  $M_i \in \mathcal{M}$ ,  $0 \leq \left\| \prod_{i=1}^k M_i \right\| \leq \hat{\rho}_k(\mathcal{M})$ , com  $\hat{\rho}_k(\mathcal{M}) \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty$ . Então, para qualquer produto de matrizes,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \prod_{i=1}^k M_i \right\| = 0.$$

E, por definição de norma de uma matriz, recordando que  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k M_i = 0,$$

que é a definição de AAS.  $\square$

Até agora, temos provado que

$$\hat{\rho}(\mathcal{M}) < 1 \Rightarrow DLI(\mathcal{M}) \text{ é AAS.}$$

Vamos agora provar a implicação inversa limitando-nos aos conjuntos irredutíveis <sup>2</sup>. Conjuntos irredutíveis de matrizes podem ser decompostos em vários conjuntos irredutíveis e estes podem ser estudados de modo independente (Theys 2005).

**Lema 3.2** (Theys 2005) *Para o conjunto irredutível e limitado  $\mathcal{M}$  de matrizes,*

$$\hat{\rho}(\mathcal{M}) \geq 1 \Rightarrow DLI(\mathcal{M}) \text{ não é AAS.} \quad (3.3)$$

**Prova.** Se o conjunto  $\mathcal{M}$  é compacto <sup>3</sup>, podemos utilizar diretamente o resultado de Barabanov, que mostra que existe uma norma  $\|\cdot\|_*$  tal que

$$\forall x, \exists A \in \mathcal{M} : \|Ax\|_* \geq \|x\|_*.$$

Então,  $\|x_0\|_* = 1$ , existe um  $A(0) \in \mathcal{M}$  tal que, para  $x(1) = A(0)x_0$ , temos  $\|x_1\|_* \geq 1$ . Usando o mesmo resultado novamente, sabemos que há um  $A(1) \in \mathcal{M}$  tal que, para  $x(2) = A(1)x(1)$ , temos  $\|x(2)\|_* \geq 1$ . Repetindo este procedimento, podemos construir uma seqüência de pontos que claramente não convergem para a origem.

Vamos agora considerar o caso em que  $\mathcal{M}$  é limitado, mas não compacto. Neste caso, vamos primeiro a definir uma seqüência de  $\delta_k$  tal que  $0 < \delta_k < 1$  e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \delta_k = \frac{1}{2}.$$

Agora escolhamos  $x_0$  tal que  $\|x_0\|_* = 1$ . Como acima, fazendo uso do resultado de Barabanov, desta vez aplicada a  $cl\mathcal{M}$ , para provar a existência da matriz  $A(0)$  tal que  $\|x(1)\|_* \geq 1$  para  $x(1) = A(0)x_0$ . Mas  $A(0)$  agora só é garantido existir no fechamento de  $\mathcal{M}$ ,  $cl\mathcal{M}$ . Mas, por continuidade, para qualquer  $0 < \delta_k < 1$ , podemos escolher uma matriz  $\tilde{A}(0) \in \mathcal{M}$  tal que

$$\left\| (\tilde{A}(0) - A(0))x_0 \right\|_* \leq 1 - \delta_1.$$

<sup>2</sup>Um conjunto de matrizes  $\mathcal{M}$  é dito irredutível, se o conjunto formado por qualquer produto de matrizes do conjunto  $\mathcal{M}$  é limitado.

<sup>3</sup>Um conjunto é dito compacto se ele é fechado e limitado. Um conjunto fechado é aquele cujo complemento é aberto.

A partir disso, definimos  $x(1) = \tilde{A}(0)x_0$ , que produz

$$\begin{aligned} \|x(1)\|_* &= \left\| A(0)x_0 - (\tilde{A}(0) - A(0))x_0 \right\|_* \\ &\geq \|A(0)x_0\|_* - \left\| (\tilde{A}(0) - A(0))x_0 \right\|_* = 1 - (1 - \delta_1) = \delta_1. \end{aligned}$$

O próximo passo é repetir o mesmo procedimento. Usamos a existência de  $A(1) \in cl\mathcal{M}$  tal que, para  $x(2) = A(1)x(1)$ , temos  $\|x(2)\|_* \geq \|x(1)\|_*$  e então, escolhendo  $\tilde{A}(1) \in \mathcal{M}$  tal que  $\left\| (\tilde{A}(1) - A(1))x(1) \right\|_* \leq 1 - \delta_2$ . Utilizando esta construção iterativamente, podemos construir uma seqüência  $(x(i))$ , de modo que

$$\|x(N)\|_* \geq \prod_{k=1}^N \delta_k.$$

Pela escolha do  $\delta_k$ , sabemos que  $\|x(N)\|_*$  não tende a zero, quando  $N \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|x_N\|_* \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \delta_k = \frac{1}{2}.$$

Conseqüentemente,  $DLI(\mathcal{M})$  não é AAS, o que conclui a prova.  $\square$

É importante notar que a equação (3.3) não vale, em geral, para conjuntos de matrizes não limitados.

### 3.3.2 Raio Espectral Conjunto e o PAS

Considere um conjunto  $\mathcal{M}$  de matrizes  $M_i$ , onde  $i \in \mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}$  é o conjunto de índices.

**Lema 3.3** (*Theys 2005*)

$$\rho(A_w) < 1, \forall w \text{ finito} \Leftrightarrow DLI(\mathcal{M}) \text{ é PAS.}$$

**Prova.** A prova é simples, considerando-se a relação B.3: se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1. \quad (3.4)$$

Então, dizendo que  $\forall w$  finito,  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_w^k = 0$  (isto é a definição do PAS) é equivalente a dizer que  $\forall w$  finito,  $\rho(A_w) < 1$ .  $\square$

Para resumir, para conjuntos limitados, temos as seguintes implicações e correspondências:

$$\begin{array}{ccc} \text{AAS} & \Rightarrow & \text{PAS} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \hat{\rho}(\mathcal{M}) < 1 & \Rightarrow & \rho(A_w) < 1, \forall w \end{array}$$

### 3.3.3 Raio Espectral Generalizado e AAS

Quando o conjunto  $\mathcal{M}$  é finito, o raio espectral conjunto e generalizado são iguais, ou seja,  $\rho(\mathcal{M}) = \hat{\rho}(\mathcal{M})$ . Neste caso, temos o análogo da relação (3.2):

**Lema 3.4** (*Theys 2005*) *Para o conjunto limitado  $\mathcal{M}$  de matrizes,*

$$\rho(\mathcal{M}) < 1 \Leftrightarrow DLI(\mathcal{M}) \text{ é AAS.}$$

No caso mais geral  $\rho(\mathcal{M}) \neq \hat{\rho}(\mathcal{M})$  é possível. Como sabemos a partir da equação (B.11),  $\rho(\mathcal{M}) \leq \hat{\rho}(\mathcal{M})$ , para qualquer conjunto  $\mathcal{M}$  de operadores lineares. É claro então que  $\hat{\rho}(\mathcal{M}) < 1 \Rightarrow \rho(\mathcal{M}) < 1$  e temos

$$DLI(\mathcal{M}) \text{ é AAS} \Rightarrow \rho(\mathcal{M}) < 1.$$

Mas a implicação  $\rho(\mathcal{M}) < 1 \Rightarrow DLI(\mathcal{M}) \text{ é AAS}$ , não é verdade, em geral, para conjuntos  $\mathcal{M}$  não limitados.

### 3.3.4 Cálculo do Raio Espectral Conjunto (JSR)

Questões relacionadas com o cálculo do raio espectral de conjuntos de matrizes foram colocadas em Tsitsiklis (1987) e Lagarias e Wang (1995). O raio espectral conjunto pode facilmente ser aproximado do seu valor real, à precisão desejada. Em efeito, as seguintes cotas, provadas em Lagarias e Wang (1995),

$$\rho'_k(\mathcal{M}) \leq \rho(\mathcal{M}) \leq \rho_k(\mathcal{M})$$

podem ser avaliadas para valores crescentes de  $k$  e conduzem a valores arbitrariamente próximos de  $\rho$ . Mas estes cálculos têm um custo computacional muito caro. Foi provado em Tsitsiklis e Blondel (1997a) que não existe um algoritmo em tempo polinomial que permita realizar o cálculo do raio espectral conjunto simplesmente de um conjunto de duas matrizes.

A seguir veremos uma forma de calcular uma aproximação,  $\hat{\rho}^*$ , do JSR de conjuntos finitos de matrizes. É baseada no cálculo de uma função quadrática comum de Lya-

punov, ou, de forma equivalente, no cálculo da norma elipsoidal. Esta aproximação tem a vantagem que pode ser expressa como um problema de otimização convexa, para a qual existem algoritmos eficientes de resolução.

A aproximação do JSR é obtida achando, entre todas as normas elipsoidais  $\|\cdot\|_P$ , uma que minimiza  $\max_i \|A_i\|_P$ .

Relembrando a definição de norma elipsoidal (ou quadrática), seja  $P$  uma matriz positiva definida; a norma- $P$  vetorial é definida como  $\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}$ . Associado a esta norma vetorial, existe uma norma matricial induzida:

$$\|A_i\|_P = \max_x \frac{\|A_i x\|_P}{\|x\|_P} = \max_x \frac{\sqrt{x^T A_i^T P A_i x}}{\sqrt{x^T P x}} \quad (3.5)$$

A aproximação do JSR pela norma elipsoidal é definida como:

$$\hat{\rho}^*(\mathcal{M}) = \inf_{P \succ 0} \max_{A_i \in \mathcal{M}} \|A_i\|_P.$$

O mínimo de todas as normas elipsoidais não pode ser inferior ao mínimo de todas as possíveis normas e, por isso,  $\rho(\mathcal{M}) \leq \hat{\rho}^*(\mathcal{M})$ . A aproximação do JSR pela norma elipsoidal pode ser calculada como segue. Observe primeiro que a definição de estabilidade exponencial implica que

$$\begin{aligned} \forall x, \sqrt{x^T A_i^T P A_i x} &\leq \|A_i\|_P \sqrt{x^T P x} \\ \forall x, x^T A_i^T P A_i x &\leq \|A_i\|_P^2 x^T P x \\ \forall x, x^T (A_i^T P A_i - \|A_i\|_P^2 P) x &\leq 0 \\ A_i^T P A_i - \|A_i\|_P^2 P &\preceq 0. \end{aligned}$$

Podemos, portanto, pensar em  $\|A_i\|_P$  como o menor valor escalar  $\gamma$  para as quais  $A_i^T P A_i \preceq \gamma^2 P$  para algum  $P \succ 0$ . A aproximação pela norma elipsoidal de um conjunto  $\mathcal{M} = (A_1, \dots, A_m)$  é, portanto, igual ao menor escalar  $\gamma$  para a qual existe uma solução  $P \succ 0$  para  $A_i^T P A_i \preceq \gamma^2 P, \forall i$ . Este problema pode ser resolvido de forma eficiente por otimização convexa aplicada a desigualdades matriciais lineares (LMI) (Nesterov e Nemirovsky 1994).

Mas o quão boa é esta aproximação? Pois bem, as seguintes cotas, provadas em (Blondel et al. 2005),

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\rho}^* \leq \rho \leq \hat{\rho}^*$$

onde  $n$  é a dimensão das matrizes, indicam a qualidade da aproximação do JSR calculada.

Para o caso específico de matrizes simétricas, matrizes triangulares, ou para conjuntos de matrizes que têm álgebra de Lie resolúveis, pode provar-se ((Blondel et al. 2005))

a igualdade entre o JSR e sua aproximação,  $\rho = \hat{\rho}^*$ .

Em conclusão, através do JSR foi possível formular uma condição necessária e suficiente de estabilidade para os sistemas lineares comutados. Mas o problema é que o cálculo do JSR é um problema NP-completo e por tanto não adequado para efeitos práticos ou de projeto. É por isso que se tem investigado bastante outros caminhos para analisar a estabilidade destes sistemas, mas estes são em geral menos conclusivos pois só fornecem condições suficientes de estabilidade, como por exemplo a função quadrática comum de Lyapunov, tema que veremos a seguir.

### 3.4 Função Quadrática Comum de Lyapunov e Estabilidade

No contexto dos sistemas dinâmicos, e mais precisamente no estudo da sua estabilidade, um conceito amplamente utilizado é o da análise de estabilidade de Lyapunov. Existem dois métodos de análise de estabilidade de Lyapunov, chamados de primeiro e segundo método, ambos se aplicam para determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ou a diferenças ordinárias. O primeiro método é formado por procedimentos nos quais utilizam-se a forma explícita das soluções das equações diferenciais ou as diferenças para análise. No entanto o segundo método não requer de tais soluções, pelo que resulta mais útil na prática.

O segundo método de Lyapunov pode ser aplicado tanto a sistemas lineares como não-lineares e variantes como invariantes no tempo. Ele se baseia na seguinte idéia, se o sistema tem um estado de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada nele vai decrementando-se no decorrer do tempo até chegar no seu valor mínimo no estado de equilíbrio. No entanto, para sistemas puramente matemáticos, não existe uma forma simples de definir a “função de energia”. Para salvar esta dificuldade, Lyapunov introduz a função de Lyapunov, uma função fictícia de energia. Esta idéia é mais geral e mais utilizada que a da energia. Em efeito, qualquer função escalar que satisfaça as hipóteses do seguinte teorema de estabilidade de Lyapunov pode servir como função de Lyapunov.

**Teorema 3.1** *Considere o seguinte sistema não-linear em tempo discreto:*

$$x(k+1) = f(x(k))$$

*onde:  $x(k)$  são os estados do sistema,  $f(x(k))$  é uma função vetor de dimensões adequadas com a propriedade que  $f(0) = 0$ .*

Suponha que existe uma função escalar  $V(x)$  contínua em  $x$  tal que:

1.  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$ ,
2.  $\Delta V(x) < 0$  para  $x \neq 0$ , onde

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = V(f(x(k))) - V(x(k)),$$

3.  $V(0) = 0$ ,

então o estado de equilíbrio  $x = 0$  é assintoticamente estável, e  $V(x)$  é uma função de Lyapunov.

Se além das hipóteses anteriores vale que:

- $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,

então o estado de equilíbrio  $x = 0$  é assintoticamente estável global.

Observe que a condição 2 do teorema anterior pode ser mudada pela condição:

- $\Delta V(x) \leq 0, \forall x$  e  $\Delta V(x) = 0$ , somente quando  $x(0) = 0$ .

O que significa que não é necessário que  $\Delta V(x)$  seja definida negativa.

A existência de uma função de Lyapunov é uma condição suficiente para a estabilidade de um sistema.

A questão principal sobre as funções de Lyapunov é como achar uma, dado que nada nos diz qual a forma que esta função tem. Quando uma função de Lyapunov candidata é conhecida, só precisamos verificar se satisfaz as condições exigidas. No entanto, para sistemas lineares invariantes no tempo, pode ser útil limitar-nos a um tipo específico de funções de Lyapunov, que possam ser mais fáceis de calcular. Este aspecto computacional leva a considerar o caso das funções quadráticas de Lyapunov.

Considere uma função do tipo  $V(x) = x^T P x$ , onde  $P \succ 0$ . Como  $V$  deve diminuir ao longo de qualquer trajetória  $x(k)$ , temos que:

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) &< V(x(k)) \forall x(k) \neq 0 \\ x(k+1)^T P x(k+1) &< x(k)^T P x(k) \forall x(k) \neq 0 \\ x(k)^T A^T P A x(k) &< x(k)^T P x(k) \forall x(k) \neq 0 \\ x(k)^T (A^T P A - P) x(k) &< 0 \forall x(k) \neq 0 \\ A^T P A - P &\prec 0. \end{aligned}$$

Estas condições quadráticas de Lyapunov são equivalentes ao critério de estabilidade,  $|\lambda(A) < 1|$  para sistemas em tempo discreto, equação (B.3), bem conhecida na literatura. Conseqüentemente, para qualquer matriz estável podemos associar uma função quadrática de Lyapunov.

A fim de generalizar este resultado para sistemas comutados em tempo discreto (isto é, DLI), basta impor que a última relação seja válida simultaneamente para todas as matrizes  $A_i$  do conjunto:

$$A_i^T P A_i - P \prec 0, \forall A_i.$$

Juntamente com  $P \succ 0$ , estas são as condições para que  $x^T P x$  seja uma função quadrática comum de Lyapunov (*Common Quadratic Lyapunov Function* - CQLF) de uma DLI gerada pelo conjunto de matrizes  $(A_1, \dots, A_i, \dots)$ .

A CQLF é uma condição suficiente de estabilidade mas não necessária.

A seguir vamos a desenvolver alguns resultados teóricos sobre a análise da estabilidade que podem ser considerados como uma solução intermediária entre os resultados altamente conservadores, como o caso da CQLF, e os menos conservadores, como o JSR, mas numericamente difíceis de serem verificados.

### 3.5 Função Quadrática Comutada de Lyapunov e Estabilidade

Nesta seção, investigaremos a estabilidade da origem de um sistema chaveado autônomo dado por

$$x(k+1) = A_\alpha x(k) \tag{3.6}$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema e  $\alpha$  é a regra de chaveamento que toma seus valores do conjunto finito  $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ .

Define-se ainda a função indicadora

$$\xi(k) = [\xi_1(k), \dots, \xi_N(k)]^T$$

onde  $\forall i = 1, \dots, N$  vale que

$$\xi_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{quando o sistema chaveado é descrito pelo } i\text{-ésimo modo } A_i \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Por tanto, o sistema chaveado (3.6) também pode ser escrito como

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) A_i x(k) \quad (3.7)$$

Sistemas comutados podem ser vistos como sistemas politópicos com a particularidade de que os valores admissíveis para a matriz dinâmica são os correspondentes vértices do politopo, diferentemente dos sistemas politópicos variáveis no tempo onde a matriz dinâmica evolui dentro de um politopo definido pelo seu vértices (ou seja a matriz dinâmica pode ser qualquer matriz interior do politopo). No caso de sistemas chaveados então, em cada período de amostragem, a matriz dinâmica do sistema  $A_\alpha = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) A_i$  tomará um valor dentro do conjunto de vértices do politopo.

Os resultados sobre análise de estabilidade propostos em Daafouz e Bernussou (2001) para sistemas politópicos variáveis no tempo, quando adaptados a sistemas comutados, permitem fornecer resultados interessantes do ponto de vista do conservadorismo. Os resultados em Daafouz e Bernussou (2001) utilizam funções de Lyapunov dependentes dos parâmetro (*Parameter Depended Lyapunov Function* - PDLF) para verificar a estabilidade dos sistemas politópicos variáveis no tempo. No caso de sistemas comutados como o (3.7), isto corresponde à função comutada de Lyapunov definida como

$$V(k, x(k)) = x(k)^T P(\xi(k)) x(k) = x(k)^T \left( \sum_{i=1}^N \xi_i(k) P_i \right) x(k) \quad (3.8)$$

com  $P_1, \dots, P_N$  matrices simétricas positivas definidas. Se tal função de Lyapunov positiva definida existe e  $\Delta V(k, x(k)) = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k))$  é negativa definida<sup>4</sup> ao longo das soluções de (3.7), então, a origem do sistema dado por (3.6) é globalmente assintoticamente estável conforme demonstrado pelo seguinte teorema geral.

**Teorema 3.2** (*(Vidyasagar 1993), cap. 5*). *O ponto de equilíbrio 0 do sistema*

$$x(k+1) = f_k(x(k)) \quad (3.9)$$

*é globalmente uniformemente assintoticamente estável se existe uma função  $V : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

<sup>4</sup>isto é,  $\Delta V(k, 0) = 0 \forall k \geq 0$  e  $\Delta V(k, x(k)) \leq -\gamma(\|x(k)\|), \forall k \geq 0, \forall x(k) \in \mathbb{R}^n$  onde  $\gamma$  é de classe  $K$ . A função  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  é de classe  $K$  se ela é contínua, estritamente crescente, zero a zero e não acotada ( $\gamma(s) \rightarrow \infty$  quando  $s \rightarrow \infty$ ).

- $V$  é uma função positiva definida, decrescente, e radialmente não limitada;
- $\Delta V(k, x(k)) = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k))$  é negativa definida ao longo das soluções de (3.9)

A função de Lyapunov (3.8) é uma função positiva definida, decrescente, e radialmente não limitada desde que  $V(k, 0) = 0, \forall k \geq 0$  e

$$\beta_1 \|x(k)\|^2 \leq V(k, x(k)) = x(k)^T \left( \sum_{i=1}^N \xi_i(k) P_i \right) x(k) \leq \beta_2 \|x(k)\|^2$$

para todo  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  e  $k \geq 0$  com  $\beta_1 = \min_{i \in \mathcal{I}} \lambda_{\min}(P_i)$  e  $\beta_2 = \max_{i \in \mathcal{I}} \lambda_{\max}(P_i)$  escalares positivos.

O seguinte teorema dá duas condições necessárias e suficientes equivalentes para a existência de uma função de Lyapunov da forma (3.8), cuja diferença é negativa definida, demonstrando a estabilidade assintótica de (3.6).

**Teorema 3.3** ((Daafouz et al. 2002)). *As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. Existe uma função de Lyapunov da forma (3.8) cuja diferença é negativa definida, que prova a estabilidade assintótica do sistema (3.6).
2. Existem  $N$  matrizes simétricas  $P_1, \dots, P_N$ , satisfazendo

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \quad (3.10)$$

A função de Lyapunov é então dado por:

$$V(k, x(k)) = x(k)^T \left( \sum_{i=1}^N \xi_i(k) P_i \right) x(k)$$

3. Existem  $N$  matrizes simétricas e definidas positivas  $S_1, \dots, S_N$  e  $N$  matrizes  $G_1, \dots, G_N$ , satisfazendo

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i^T \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \quad (3.11)$$

A função de Lyapunov é então dado por:

$$V(k, x(k)) = x(k)^T \left( \sum_{i=1}^N \xi_i(k) S_i^{-1} \right) x(k)$$

**Prova:**

- Para provar (1)  $\Rightarrow$  (2), assumamos que existe uma função de Lyapunov da forma (3.8), cuja diferença é negativa definida. Por isso

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) \\
&= x(k+1)^T P(\xi(k+1))x(k+1) - x(k)^T P(\xi(k))x(k) \\
&= x(k)^T (A^T(\xi(k))P(\xi(k+1))A(\xi(k))P(\xi(k)))x(k) \\
&< 0
\end{aligned}$$

Como esta equação tem de ser satisfeita sob uma lei de chaveamento arbitrária, portanto tem de ser satisfeita para a configuração especial  $\xi_i(k) = 1$ ,  $\xi_{l \neq i}(k) = 0$ ,  $\xi_j(k+1) = 1$ ,  $\xi_{l \neq i}(k+1) = 0$  e para todos os  $x(k) \in \mathbb{R}^2$ . Então

$$P_i - A_i^T P_j A_i > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$$

aplicando a fórmula do complemento de Schur obtemos a condição (2).

- Para provar (2)  $\Rightarrow$  (1), assumamos que (3.10) é satisfeita para todos os  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, N$ . Para cada  $i$ , multiplicar as  $j = 1, \dots, N$  desigualdades por  $\xi_j(k+1)$  e some. Multiplique as resultantes  $i = 1, \dots, N$  desigualdades por  $\xi_i(k)$  e some. Como  $\sum_{i=1}^N \xi_i(k) = \sum_{j=1}^N \xi_j(k+1) = 1$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} P(\xi(k)) & A^T(\xi(k))P(\xi(k+1)) \\ P(\xi(k+1))A(\xi(k)) & P(\xi(k+1)) \end{bmatrix} > 0$$

que é equivalente pelo complemento de Schur a  $\forall x(k) \in \mathbb{R}^n$

$$x(k)^T (P(\xi(k)) - A^T(\xi(k))P(\xi(k+1))A(\xi(k)))x(k) > 0$$

Como

$$\Delta V = -x(k)^T (P(\xi(k)) - A^T(\xi(k))P(\xi(k+1))A(\xi(k)))x(k)$$

temos que  $\Delta V \leq -\gamma(\|x(k)\|)$  com

$$\gamma(\|x(k)\|) = \min_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \lambda_{\min}(P_i - A_i^T P_j A_i) \|x(k)\|^2$$

e (1) segue pelo Teorema 3.2.

- Para provar (3)  $\Rightarrow$  (2), assumamos que (3.11) é factível. Então

$$G_i + G_i^T - S_i > 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

Isto significa que  $G_i$  é de rank completo. Além disso, como  $S_i$  é estritamente positiva definida, temos também que

$$(S_i - G_i)^T S_i^{-1} (S_i - G_i) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

o que é equivalente a

$$G_i^T S_i^{-1} G_i \geq G_i^T + G_i - S_i \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Então, se resulta válido (3.11), temos que

$$\begin{bmatrix} G_i^T S_i^{-1} G_i & G_i^T A_i^T \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$$

que é equivalente a:  $\forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$

$$\begin{bmatrix} G_i^T & 0 \\ 0 & S_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i^{-1} & A_i^T S_j^{-1} \\ S_j^{-1} A_i & S_j^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i & 0 \\ 0 & S_j \end{bmatrix} > 0. \quad (3.12)$$

Fazendo  $P_i = S_i^{-1}$  e  $P_j = S_j^{-1}$ , (3.12) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}. \quad (3.13)$$

- Para provar (2)  $\Rightarrow$  (3), assumamos que (3.10) é satisfeita, então, pelo complemento de Schur, temos

$$P_i - A_i^T P_j A_i > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}.$$

Fazendo  $S_i = P_i^{-1}$  e  $S_j = P_j^{-1}$ , e usando o complemento de Schur, temos que

$$S_j - A_i S_i A_i^T = T_{ij} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}.$$

Seja  $G_i = S_i + g_i \mathbf{I}$  com  $g_i$  um escalar positivo. Existe um  $g_i$  suficientemente

pequeno tal que

$$g_i^{-2}(S_i + 2g_i\mathbf{I}) > A_i^T T_{ij}^{-1} A_i \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}.$$

que é equivalente, pelo complemento de Schur, a

$$\begin{bmatrix} S_i + 2g_i\mathbf{I} & -g_i A_i^T \\ -A_i g_i & T_{ij} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}.$$

que é nada mais do que

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & S_i A_i^T - G_i A_i^T \\ A_i S_i - A_i G_i & S_j - A_i S_i A_i^T \end{bmatrix} > 0 \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}.$$

Para terminar a prova do Teorema 3.3, pode-se notar que as últimas desigualdades matriciais lineares (LMI) são equivalentes a:  $\forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ A_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i^T \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -A_i^T \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0.$$

□

Uma questão de interesse é a seguinte: pode-se esperar uma melhoria dos resultados mostrados nessa seção, considerando outras PDLF (não necessariamente politópica no que diz respeito aos parâmetros e não necessariamente independente do tempo)? Para responder a esta questão considere os seguintes três critérios de estabilidade:

1. O primeiro é chamado estabilidade quadrática dependente dos parâmetros (PD-estabilidade quadrática). Ele refere-se à verificação da estabilidade por meio da função quadrática de Lyapunov no estado e dependente dos parâmetros, sem qualquer estrutura especificada.
2. O segundo chamado estabilidade quadrática dependente dos parâmetros e do tempo (PTD-estabilidade quadrática). Refere-se às funções de Lyapunov quadráticas nos estados e dependem explicitamente, tanto do tempo como dos parâmetros.
3. A última e, a priori, a menos onerosa para verificar, é a chamada estabilidade poli-quadrática, desenvolvida nesta seção, e refere-se as funções de Lyapunov quadráticas no estado e politópicas nos parâmetros (PDLF).

Em Mason et al. (2007) prova-se que todos estes critérios são equivalentes, em outras palavras: a estabilidade quadrática apenas precisa ser testada sobre funções quadráticas politópicas de Lyapunov (PDLF).

Além do mais, se (3.6) é um sistema politópico convexo, então

$$\rho(\text{conv}\{A_1, \dots, A_M\}) = \rho(\{A_1, \dots, A_M\}).$$

### 3.6 Sumário

Dentre as duas grandes classes de problemas sobre estabilidade estudadas na literatura foi desenvolvida neste capítulo a primeira classe de problemas, a análise de estabilidade de sistemas comutados autônomos lineares onde o sinal de comutação é um sinal arbitrário.

Primeiro foram desenvolvidas condições necessárias e suficientes de estabilidade baseadas nos conceitos de Raio Espectral Generalizado e Raio Espectral Conjunto, desenvolvidos no Apêndice B. Mostrou-se que, embora estes conceitos matemáticos permitam obter uma condição necessária e suficiente de estabilidade, existe dificuldade em relação a seu cálculo. Não existe nenhum algoritmo em tempo polinomial que permita calcular o raio espectral de um conjunto de apenas duas matrizes.

Depois foi obtida uma condição suficiente de estabilidade através da generalização da teoria de Lyapunov a sistemas comutados. Foi definida a função quadrática comum de Lyapunov (CQLF), a qual permite testar a estabilidade do sistema comutados mas de uma forma bastante conservadora.

Finalmente foram desenvolvidos resultados teóricos considerados como uma solução intermediária entre os resultados conservadores da CQLF, e os menos conservadores, como o JSR, mas numericamente complexos. Ainda assim a função quadrática comutada de Lyapunov é um resultado conservador pois ela fornece condições necessárias e suficientes de estabilidade para sistemas politópicos onde a matriz dinâmica pode ser qualquer matriz do politopo, mas os sistemas chaveados são uma classe particular de sistemas politópicos dado que os valores admissíveis para a matriz dinâmica só podem ser os correspondentes vértices do politopo.

# Capítulo 4

## Controle Preditivo de Sistemas Comutados

### 4.1 Introdução

O enfoque tradicional para projetar controladores embarcados é baseado no desenvolvimento de regras apoiadas na heurística, ou no conhecimento da planta pelos operários. Tais regras frequentemente são baseadas no “sentido comum” e tomam em conta cenários específicos da planta. Contudo, uma análise total da planta controlada para todos os possíveis cenários é normalmente uma tarefa dura, que tipicamente é resolvida na indústria executando um grande número de simulações ou experimentos sobre o próprio controlador.

Esforços recentes de pesquisa têm produzido técnicas que permitem a síntese direta de controladores para sistemas híbridos. O objetivo deste capítulo é expor alguma destas técnicas de controle.

Alguns enfoques ou técnicas de controle disponíveis hoje em dia são:

- Controle preditivo de sistemas MLD usando otimização mista inteira *on-line* (Bemporad e Morari 1999).
- Realimentação de estados linear por partes, para o sistema equivalente PWA (Mignone et al. 2000, Mayne e Rakovic 2003, Peña et al. 2005).
- Obter a forma explícita do controlador preditivo através de técnicas de otimização multiparamétrica (Bemporad, Borrelli e Morari 2000).
- Controle preditivo não-linear obtido a partir de uma parametrização das variáveis inteiras em variáveis reais e usando otimização não-linear *on-line* (Sarabia, de Prada, Cristea, Mazaeda e Colmenares 2007).

O primeiro método é aplicado diretamente a sistemas híbridos no contexto MLD e será objeto de estudo deste trabalho. O segundo e o terceiro métodos se aplicam ao modelo equivalente PWA; no segundo método a lei de controle é achada *on-line* enquanto que no terceiro método a lei explícita de controle é achada *off-line*. Na quarta técnica, que pode ser aplicada a sistemas híbridos mais gerais como os Sistemas Híbridos Não-Lineares, a ação de controle em cada passo de tempo é achada *on-line*. Esta metodologia também será objeto de estudo deste trabalho.

## 4.2 Controle Preditivo de Sistemas MLD

Como já foi dito no capítulo 2, uma grande quantidade de processos híbridos podem ser modelados pela estrutura MLD. Então, é interessante do ponto de vista prático e teórico saber se um sistema MLD pode ser estabilizado em um estado de equilíbrio ou pode seguir uma trajetória desejada de referência, via controle por realimentação. A seguir veremos como o Controle Preditivo Baseado no Modelo (CPBM) fornece ferramentas bem sucedidas para executar estas tarefas.

O CPBM é uma forma de controle por realimentação, onde o valor atual das variáveis manipuladas é determinado *on-line* como a solução de um problema de controle ótimo sobre um horizonte de comprimento dado. O comportamento do sistema sobre o horizonte é predito com um modelo onde o estado atual da planta é o estado inicial para esta predição. Mesmo que um conjunto talvez grande de ações de controle seja calculado, só o primeiro é aplicado à planta. Quando uma informação atualizada sobre o estado da planta está disponível no seguinte instante de amostragem, a otimização é repetida sobre o horizonte deslocado. A capacidade de incluir sistematicamente restrições e a possibilidade de manipular plantas com múltiplas entradas e saídas fizeram do CPBM uma técnica atraente na indústria de processos (Lee e Cooley 1997, Mayne 1997, Qin e Badgwell 1997, Mayne et al. 2000). Para uma apresentação ampla de CPBM clássico o leitor pode consultar: Maciejowski (2002) e Camacho e Bordons (2005).

No presente contexto, devido à presença de variáveis inteiras, o procedimento de otimização é um problema de Programação Matemática Mista Inteira. Uma primeira tentativa em usar Programação Mista Inteira *on-line* para controlar sistemas dinâmicos submetidos a restrições lógicas apareceu em Tyler e Morari (1995). Outros trabalhos apontando em combinar CPBM a controle híbrido apareceram em Slupphaug e Foss (1997) e Slupphaugand et al. (1997).

### 4.2.1 Problema de Regulação

O problema de regulação consiste no projeto de uma ação de controle que leve os estados da planta a um ponto de operação desejado, apesar das possíveis perturbações que possam aparecer.

A aplicação dos conceitos de CPBM a sistemas MLD foi proposta em Bemporad e Morari (1999). Supondo uma função de custo quadrática e dado o estado inicial  $x_0$ , a otimização no tempo  $t = 0$ , para um sistema MLD, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{v_0^{T-1}} J(v_0^{T-1}, x_0) \triangleq & \sum_{k=0}^{T-1} \|v(k) - u_e\|_{Q_1}^2 + \|\delta(k|t) - \delta_e\|_{Q_2}^2 \\ & + \|z(k|t) - z_e\|_{Q_3}^2 + \|x(k|t) - x_e\|_{Q_4}^2 \\ & + \|y(k|t) - y_e\|_{Q_5}^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

*sujeito a :*

$$\begin{aligned} x(T|t) &= x_e \\ x(k+1|t) &= Ax(k|t) + B_1v(k) + B_2\delta(k|t) + B_3z(k|t) \\ y(k|t) &= Cx(k|t) + D_1v(k) + D_2\delta(k|t) + D_3z(k|t) \\ E_2\delta(k|t) + E_3z(k|t) &\leq E_1v(k) + E_4x(k|t) + E_5 \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $\|\diamond\|_Q = \diamond^T Q \diamond$ ;  $Q_1 = Q_1^T > 0$  e  $Q_i = Q_i^T \geq 0$ ,  $i = 2, \dots, 5$ , são matrizes de ponderação dadas;  $(x_e, u_e, \delta_e, z_e, y_e)$  é um ponto de equilíbrio dado que satisfaz as equações (2.39, 2.40)<sup>1</sup>.  $v_0^{T-1} = [v(0|0), v(1|0), \dots, v(T-1|0)] \in \mathbb{R}^{n_v \times T}$  é a seqüência de variáveis manipuladas sobre um horizonte de  $T$  passos de tempo calculada no tempo  $t = 0$ ;  $v_0^{k-1}$  é a seqüência  $v_0^{T-1}$  truncada nos primeiros  $k$  valores.  $x(k|t)$  é o estado do sistema no tempo  $t+k$  calculado a partir do estado inicial  $x_0$  com a seqüência de entrada  $v_0^{k-1}$  ou seja  $x(k|t) \triangleq x(t+k, x_0, v_0^{k-1})$ ;  $\delta(k)$ ,  $z(k)$ ,  $y(k)$  são similarmente definidas. As matrizes de ponderação nas variáveis auxiliares  $\delta$  e  $z$  permitem formular o problema de otimização com uma função de custo definida positiva. Para uma aplicação prática no entanto, os pesos  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_5$  são mais importantes, dado que determinam a compensação entre o esforço da ação de controle e a exatidão do seguimento a referência.

Assumamos momentaneamente que a solução ótima  $\{v_t^*(k)\}_{k=0, \dots, T-1}$  exista. De acordo com a filosofia de horizonte deslizante mencionada acima, estabelecemos que a ação de controle sobre a planta será:

$$u(t) = v_t^*(0) \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>para as quais lembramos podem aparecer as possíveis dificuldades mostradas na seção 2.4.4

e descartamos as subseqüentes entradas ótimas  $v_t^*(1), \dots, v_t^*(T-1)$ . Em seguida repete-se todo o procedimento de otimização no tempo  $k+1$ . A lei de controle (4.1,4.2) é chamada na literatura como lei de Controle Preditivo Mista Inteira (CPMI).

Várias formulações de controladores preditivos para sistemas MLD poderiam ser propostas. Por exemplo, o número de graus de liberdade do controle pode ser reduzido a  $N_u < T$  impondo que  $u(k) \equiv u(N_u - 1), \forall k = N_u, \dots, T$ . No entanto, enquanto em outros contextos isto reduz enormemente o tamanho do problema de otimização ao custo geralmente de uma menor performance, aqui o ganho computacional é somente parcial dado que durante todo  $T$  as variáveis  $\delta(k)$  e  $z(k)$  permanecem na otimização. Formulações de horizonte infinito são impróprias por razões tanto práticas como teóricas. De fato, aproximar o horizonte infinito com um  $T$  grande é computacionalmente proibitivo, dado que o número de variáveis  $\{0, 1\}$  envolvidas no problema de programação mista inteira quadrática (MIQP) depende linearmente de  $T$ .

Um resultado importante do ponto de vista teórico no que tem a ver com a estabilidade do sistema resultante em malha fechada (sistema MLD + lei de controle CPBM) mostra-se no seguinte teorema:

**Teorema 4.1** *Seja  $(x_e, u_e, \delta_e, z_e)$  um ponto de equilíbrio. Suponha que o estado inicial  $x(0)$  é tal que existe uma solução factível do problema (4.1, 4.2) em  $t = 0$ . Então  $\forall Q_1 = Q_1^T > 0, Q_2 = Q_2^T \geq 0, Q_3 = Q_3^T \geq 0, Q_4 = Q_4^T \geq 0, e, Q_5 = Q_5^T \geq 0$ , a lei MIPC (4.1, 4.2) estabiliza o sistema, que equivale a:*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= x_e \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) &= u_e \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta(t) - \delta_e\|_{Q_2} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t) - z_e\|_{Q_3} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y_e\|_{Q_5} &= 0 \\ &\text{Verificando as restrições (2.40).} \end{aligned}$$

*Prova* (Bemporad e Morari 1999)

**Comentário 4.1** *O teorema anterior tem pouca aplicação prática, pois ele se baseia sobre a hipótese da existência da solução, coisa que é impossível conhecer a priori. A restrição imposta ao problema de otimização:  $x(T|t) = x_e$ , pode fazer o problema infactível e portanto sem solução.*

*Este é justamente o caso dos sistemas comutados, objeto de estudo desta tese. Os sistemas comutados ou chaveados são uma classe de sistemas dinâmicos híbridos constituídos por uma família de subsistemas em tempo contínuo (ou discretos), e uma regra que orquestra a comutação entre eles, que é a lei de controle. Esta natureza chaveada*

da lei de controle faz com que o sistema não possa chegar a um ponto de equilíbrio, mas sim, talvez no melhor dos casos, a convergir a um ciclo limite e, portanto a imposição  $x(T|t) = x_e$  faz com que o problema de otimização (4.1,4.2) seja infactível.

**Comentário 4.2** Apesar do fato que existem métodos muito eficientes para calcular a solução ótima (global) do problema MIQP (C.27-C.28), no pior caso o tempo de solução depende exponencialmente do número de variáveis inteiras. Em princípio, isto talvez limite o alcance de aplicação deste método somente a sistemas muito lentos, desde que para a implementação em tempo-real o período de amostragem deve ser suficientemente grande para permitir o cálculo do pior caso. No entanto, a prova do teorema anterior não exige que as seqüências de controle avaliadas  $\{\mathcal{U}_t^*\}_{t=0}^\infty$ , ( $\{\mathcal{U}_t^*\}$  denota a seqüência ótima de controle ou seja:  $\{v_t^*(0), \dots, v_t^*(T-1)\}$ ), sejam o ótimo global. De fato, somente se requer que:

$$J(\mathcal{U}_{t+1}^*, x(t+1)) \leq J(\mathcal{U}_t^*, x(t+1)) \quad (4.4)$$

A seqüência  $\mathcal{U}_1$  está disponível do cálculo prévio (realizado no tempo  $t$ ), e pode ser usada para iniciar o algoritmo MIQP em  $t+1$ . A otimização então pode ser interrompida em qualquer passo intermediário para obter a solução sub-ótima  $\mathcal{U}_{t+1}^*$  que satisfaz (4.4). Por exemplo, quando é usado o método Branch and Bound para resolver o problema MIQP, a nova seqüência de controle  $\mathcal{U}_t^*$  pode ser selecionada como a solução do sub-problema QP que é factível inteiro e tem o valor mais baixo. Obviamente neste caso o desempenho de seguimento se vê deteriorado, pois não estamos aplicando na planta a solução ótima do problema MIQP.

A metodologia para a implementação prática do controle preditivo misto inteiro encontra-se no Apêndice C.

## 4.2.2 Problema de seguimento

Para problemas de seguimento, o objetivo é que a saída  $y(t)$  siga uma trajetória de referência  $r(t)$ . Para cada período de amostragem, os valores de  $y_e$ ,  $x_e$ ,  $u_e$ ,  $\delta_e$ , e  $z_e$ , da equação (4.1) correspondendo a  $r(t)$  podem ser calculados resolvendo o seguinte

problema MIQP:

$$\min_{x_e, u_e, \delta_e, z_e} \|y_e - r(t)\|_{Q_5}^2 + \rho(\|x_e\|^2 + \|u_e\|^2 + \|\delta_e\|^2 + \|z_e\|_2) \quad (4.5)$$

*s.a.*

$$\begin{aligned} x_e &= Ax_e + B_1 u_e + B_2 \delta_e + B_3 z_e \\ y_e &= Cx_e + D_1 u_e + D_2 \delta_e + D_3 z_e \\ E_2 \delta_e + E_3 z_e &\leq E_1 u_e + E_4 x_e + E_5 \end{aligned} \quad (4.6)$$

O parâmetro  $\rho > 0$  é qualquer número positivo (pequeno) e é necessário para assegurar a convexidade estrita do valor da função (4.5). Este procedimento permite definir um ponto estacionário  $y_e$  o mais próximo possível a  $r(t)$  compatível com as restrições.

Apesar da problemática do CPBM de sistemas MLD estar bem colocada, existem diversos aspectos que devem ser analisados. Assim na próxima seção se estuda a aplicação do CPMI para o CBB analisado nos capítulos anteriores. O objetivo deste exemplo é apresentar diversos problemas relacionados com a definição da estratégia, o projeto do controlador, a otimização, a estabilidade e as limitações relacionadas com a própria estrutura do problema. Mostraremos que, embora o CBB seja um sistema de baixa ordem, o projeto do CPMI apresenta vários desafios, vários destes considerados temas em aberto na pesquisa do controle preditivo híbrido.

### 4.2.3 Exemplo

#### Exemplo 4.1 *Controle Preditivo Misto Inteiro do CBB*

*O primeiro passo para projetar um CPMI é formular um modelo do processo para poder realizar o cálculo das predições. Neste estudo de caso este primeiro passo já foi dado no capítulo 2 onde o modelo MLD do CBB foi obtido:*

$$\begin{bmatrix} i_L^+ \\ v_C^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{T_s}{L} \\ -\frac{T_s}{C} & 1 - \frac{T_s}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T_s V_{CC}}{L} \\ 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{T_s}{L} \\ \frac{T_s}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} -M_I \\ m_I \\ -m_I \\ M_I \\ -M_V \\ m_V \\ -m_V \\ M_V \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_I \\ M_I \\ 0 \\ 0 \\ -m_V \\ M_V \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

O segundo passo no projeto do CPMI é a escolha da função custo a ser minimizada. Como o objetivo de controle é que o CBB siga referências de tensão constantes num intervalo entre  $[12V, 100V]$ , poderíamos considerar, em princípio, a seguinte função de custo:

$$J(\nu_0^{T-1}, x_0) \triangleq \sum_{k=0}^{T-1} \|y(k|t) - y_e\|_{Q_5}^2 \quad (4.9)$$

onde  $y$  e  $y_e$  são a saída do sistema e a referência respectivamente, e onde foi excluído o termo  $\|\nu(k|t) - \nu_e\|_{Q_\nu}^2$ , pois, como o sinal de controle é do tipo binário  $\{0, 1\}$ , não tem sentido falar sobre a ponderação do sinal de controle.

Definida a função custo, surge o primeiro problema de aplicação direta da metodologia tradicional de CPMI visto nas seções anteriores. Como definir  $y_e$  quando o sistema possui um sinal de controle puramente binário? Se escolhermos  $y_e$  em cada período de amostragem como mostrado na seção 4.2.2, então em estado estacionário o sinal de controle poderia tomar o valor 0, e portanto a corrente no indutor assim como a tensão no capacitor iriam para 0, ou o valor 1 e então a corrente pelo indutor iria para infinito (caso ideal) e a tensão no capacitor para 0. Em regime permanente, o valor do sinal de controle achado se repetiria indefinidamente de acordo com a filosofia do CPBM. Assim, qualquer que seja o valor de referência que colocarmos no problema (4.5), a tensão de saída do CBB em estado estacionário iria para 0.

A solução achada foi colocar diretamente o valor da referência que se deseja alcançar em vez de  $y_e$  na função custo:

$$J(\nu_0^{T-1}, x_0) \triangleq \sum_{k=0}^{T-1} \|y(k|t) - r(k)\|_{Q_5}^2 \quad (4.10)$$

onde  $r(k)$  é o valor da referência conhecida no instante de tempo  $t+k$ . Isto faz, como veremos nos resultados de simulação a seguir, que em estado estacionário se repita uma seqüência de 0 e 1 no sinal de controle e não mais um único valor (0 ou 1). Portanto o sinal de controle será periódico e de período desconhecido. Como o sinal de controle

é periódico, também o sinal de saída será um sinal periódico com valor médio o valor da referência, pelo menos isso é o que se esperaria.

O termo  $\|x(k|t) - x_e\|_{Q_4}^2$  também foi omitido, dado que o único objetivo de controle que interessa em princípio é que a saída  $y(t)$  do CBB siga uma referência constante  $r(t)$ .

Escolhendo um horizonte de predição  $T = 3$ , frequência de amostragem  $f_s = 150\text{kHz}$  e o valor da referência  $r(t) = 12\text{V}$ , obtemos a resposta em malha fechada mostrada na Figura 4.1.

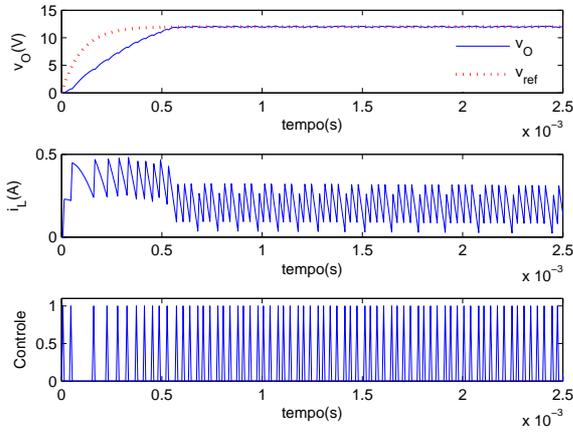


Figura 4.1: Resposta do sistema em malha fechada: CBB + CPMI.

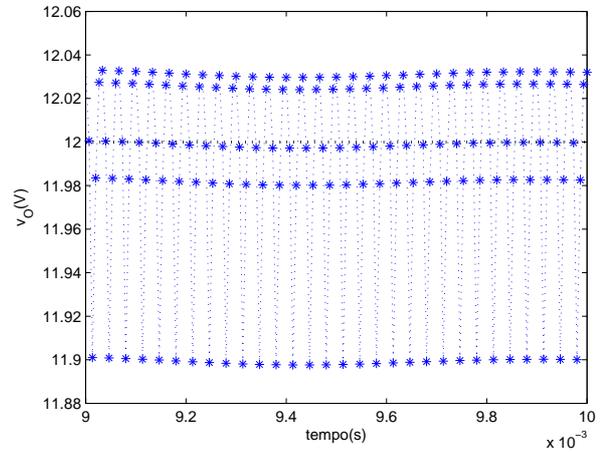


Figura 4.2: Resposta do sistema em estado estacionário.

Ampliando a Figura na região do estado estacionário, (Figura 4.2), é possível observar o comportamento periódico do sinal de saída causado pela natureza binária do sinal de controle.

Se aumentarmos a frequência de amostragem para  $f_s = 200\text{kHz}$ , podemos observar na Figura 4.3 que o sistema em malha fechada perde a estabilidade. Esta é outra peculiaridade que apresenta o sistema por ter um controle do tipo binário.

Em Pomar (2005) foi projetada uma lei de controle preditivo para o mesmo CBB deste exemplo com a mesma função de custo (equação (4.10)), mas usou-se o modelo médio do CBB, portanto a lei obtida era contínua. O sinal de controle  $u(t)$  era um número real pertencente ao intervalo  $[0, 1]$ . Apesar do sistema possuir um modo instável (quando a posição da chave estiver fechada,  $q = 1$ ), a lei de controle contínua permitia estabilizar o sistema qualquer que fosse o período de amostragem escolhido adequadamente. Isto não acontece no caso do CPMI, devido novamente à natureza binária da lei de controle.

Para resolver o problema de estabilidade se analisou o comportamento das distintas

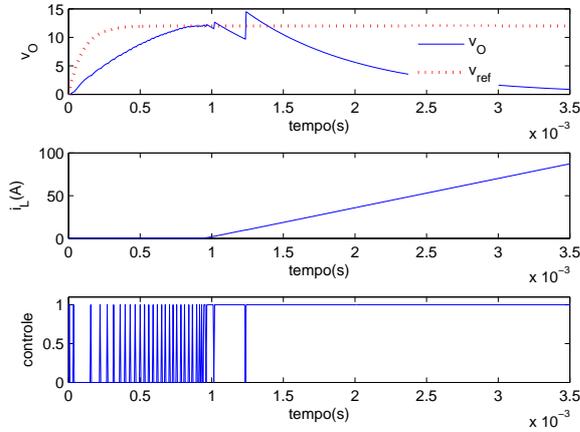


Figura 4.3: Resposta do sistema para  $f_s = 200\text{kHz}$ ,  $N = 3$  e função de custo (4.11).

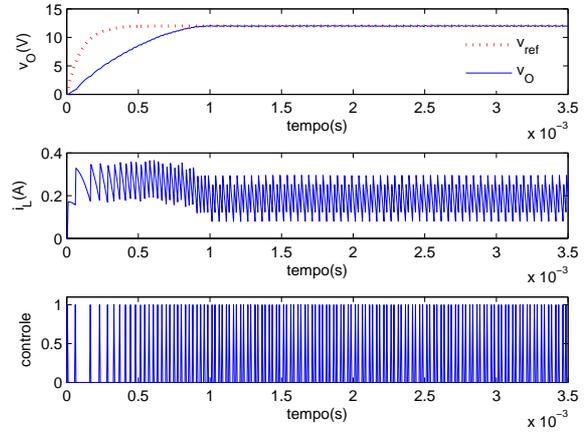


Figura 4.4: Resposta do sistema para  $f_s = 200\text{kHz}$ ,  $N = 3$  e função de custo (4.10).

variáveis. Quando fecha-se a chave,  $q = 1$ , o indutor armazena energia, e o capacitor descarrega-se através da carga  $R$ , a tensão de saída diminui; ao abrir-se a chave,  $q = 0$ , então o indutor entrega parte da energia armazenada, carregando o capacitor  $C$ , a tensão de saída aumenta. Ocorre, se não considerarmos a corrente na estratégia de controle, que dado um certo conjunto de valores dos parâmetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  e  $T_s$ , que o indutor pode carregar-se tanto (não há controle de corrente), que o controlador pode preferir ou manter a chave fechada diminuindo a tensão de saída, ou abrir a chave e carregar o capacitor com uma tensão muito alta, (a tensão de saída aumentaria mais colocando  $q = 1$  do que diminuiria colocando  $q = 0$ ). Mas isto provoca que o indutor siga carregando-se e assim sucessivamente. O sistema torna-se instável.

Utilizando a seguinte função de custo, podemos resolver o problema da estabilidade:

$$\min_{\nu_0^{T-1}} J(\nu_0^{T-1}, x_0) \triangleq \sum_{k=0}^{T-1} \|x(k|t) - r_x(k)\|_{Q_4}^2 \quad (4.11)$$

onde  $r_x(k)$  é o valor da referência conhecida para os estados do sistema no instante de tempo  $t + k$ . A Figura 4.4 mostra a resposta do sistema em malha fechada para uma frequência de amostragem  $f_s = 200\text{kHz}$ ,  $T = 3$  e com a função custo (4.11).

Esta nova estratégia considera na otimização tanto a corrente como a tensão e por isso evita que o controle da corrente seja perdido por causa da natureza híbrida do sinal de controle.

Se observa que o problema de estabilidade foi resolvido para o ponto analisado, mas esta solução depende do conhecimento a priori do valor de referência da corrente pelo

indutor, que por sua vez, depende da carga, que é um parâmetro desconhecido a priori e é considerado como uma perturbação do sistema. Veremos na seguinte seção uma solução prática desenvolvida neste trabalho a partir das idéias do capítulo 3.

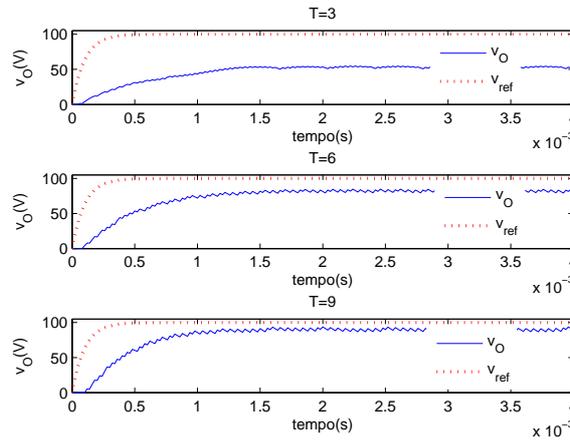


Figura 4.5: Resposta do sistema para  $f_s = 50\text{kHz}$ ,  $T = 3$ ,  $T = 6$  e  $T = 9$ .

Outro problema importante que apresenta o controlador MIPC para sistema comutados, como é o caso do CBB, é o problema da atingibilidade. Se tratarmos de seguir uma referência constante de 100V na saída, com um horizonte de previsão  $T = 3$ , frequência de amostragem  $f_s = 50\text{kHz}$ , e usando a função custo (4.11), observamos que o sistema não consegue alcançar em regime permanente o valor de referência, Figura 4.5; aumentando-se o horizonte de previsão  $T$  o valor do erro em regime permanente diminui, mas como já foi colocado nas seções anteriores isto aumenta significativamente a complexidade computacional do problema. A Figura 4.5 mostra diferentes respostas do sistema em malha fechada para diferentes valores do horizonte de previsão.

#### 4.2.4 Uma solução ao problema de estabilidade

Nesta seção vamos desenvolver uma solução prática utilizando as idéias vistas no capítulo 3 para o problema de estabilidade apresentado no exemplo anterior, quando a função custo é do tipo 4.10, e, portanto, não é necessário conhecer a referência da corrente pelo indutor. Este desenvolvimento é uma contribuição deste trabalho.

A idéia fundamental é achar uma restrição adicional dentro do contexto MLD, que garanta a estabilidade do sistema comutado em malha fechada com uma lei de controle MIPC. Note que para manter a representação do sistema no contexto MLD esta restrição deverá ser linear.

A função objetivo da nova lei de controle MIPC estável terá a seguinte forma:

$$\min_{\nu_0^{T_C-1}} J(\nu_0^{T-1}, x_0) \triangleq \sum_{k=0}^{T_C-1} \|y(k|t) - r(k)\|_{Q_5}^2 + \sum_{k=1}^T \|y(kT_C|t) - r(kT_C)\|_{Q_5}^2 \quad (4.12)$$

onde  $\nu_0^{T_C-1}$  é a seqüência de controle a ser calculada,  $T_C$  é o horizonte de controle,  $T$  o horizonte de predição e  $r(k)$  é o valor da referência conhecida no instante de tempo  $t+k$ . Para resolver o problema de otimização, assume-se que a partir de  $T_C$  repete-se  $T$  vezes a seqüência calculada entre 0 e  $T_C - 1$ , e não somente o controle calculado em  $T_C - 1$  como é o caso do CPBM tradicional. Com isto teríamos em conta a natureza periódica dos sistemas comutados, onde somente no caso que a referência seja o ponto de equilíbrio de um dos componentes do sistema, em qualquer outro caso, o sistema vai sempre convergir, no caso estável, a um ciclo limite. A Figura 4.6 ilustra a idéia da nova estratégia de controle.

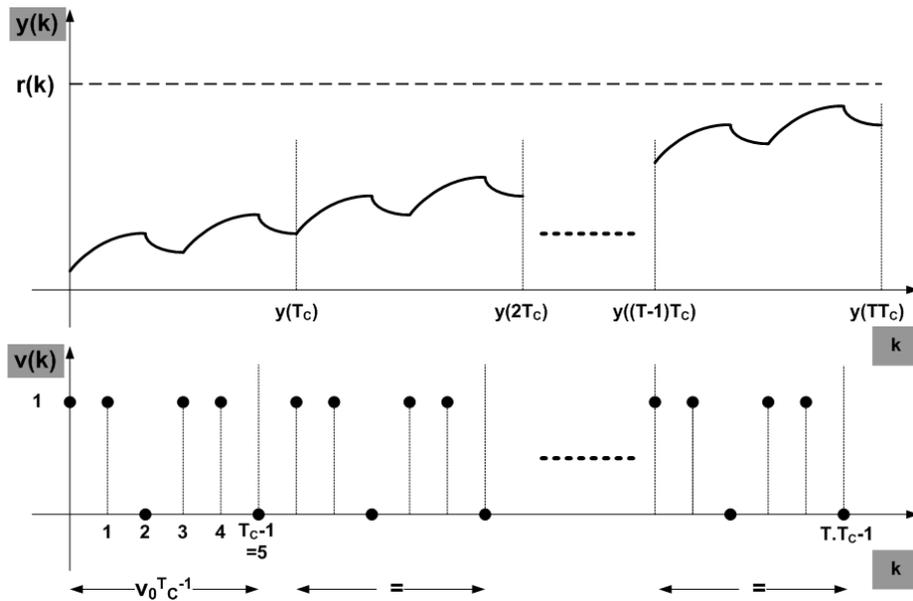


Figura 4.6: Representação gráfica da estratégia de controle MIPC, com uma função objetivo do tipo 4.12

Para garantir a estabilidade, vamos impor que:

1. a seqüência  $\nu_0^{T_C-1}$  seja tal que a matriz  $\hat{A}$ , combinação convexa das matrizes  $A_i$ , tenha seus autovalores com módulo menor que 1:

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{T_C} \sum_{k=0}^{T_C-1} \xi_i(k) \right) A_i, \quad (4.13)$$

$M$  é o número de componentes do sistema e  $\xi_i(k)$  é a função indicadora vista

na seção 3.5;  $\xi_i(k)$  se relaciona com  $\nu_0^{T_C-1}$  da seguinte forma: se  $\nu(k) = i$  com  $k \in [0, T_C - 1]$  então  $\xi_i(k) = 1$  e se  $\nu(k) = j \neq i$  então  $\xi_i(k) = 0$  e  $\xi_j(k)$  será igual a 1, além disso deve verificar-se em todo instante de tempo que:

$$\sum_{i=1}^M \xi_i(k) = 1 \forall k, \quad (4.14)$$

ou seja somente um componente do sistema comutado deve estar ativo em cada instante de tempo.

2. Para todas as matrizes do conjunto de matrizes combinações convexas de  $A_i$  factíveis <sup>2</sup>  $\hat{\mathcal{A}}$ , existe uma matriz  $P$  tal que:

$$\hat{A}_j^T P \hat{A}_j - P \prec 0, \forall j \in \mathfrak{J},$$

onde  $\mathfrak{J}$  é o conjunto de índices dos elementos do conjunto  $\hat{\mathcal{A}}$ .

Isto significa que existe uma função quadrática comum de Lyapunov e portanto para qualquer lei de chaveamento, em particular a lei de controle MIPC, o sistema em malha fechada é estável.

Utilizando esta nova parametrização do sinal de controle, a função objetivo do problema MIPC pode ser colocada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{\xi_{0,0}^{T_C-1}, \dots, \xi_{M,0}^{T_C-1}} J(\xi_{0,0}^{T_C-1}, \dots, \xi_{M,0}^{T_C-1}, x_0) &\triangleq \sum_{k=0}^{T_C-1} \|y(k|t) - r(k)\|_{Q_5}^2 \\ &+ \sum_{k=1}^T \|y(kT_C|t) - r(kT_C)\|_{Q_5}^2 \quad (4.15) \end{aligned}$$

onde além do mais deveremos adicionar a restrição 4.14 na nova representação MLD do sistema e as restrições de estabilidade.

Note que o desenvolvimento anterior é válido para o caso de sistemas PWL como visto no capítulo 3, mas nada podemos afirmar para o caso de sistemas PWA. No entanto, aplicando esta mesma idéia ao CBB que é um sistema PWA, foram obtidos bons resultados.

**Exemplo 4.2** *Neste exemplo vamos a desenvolver a lei de controle MIPC estável para o mesmo CBB do exemplo anterior, com o fim de mostrar como construir as restrições de estabilidade.*

<sup>2</sup>ou seja deve verificar-se a equação 4.14

Como o CBB está composto por dois componentes:  $(A_0, a_0)$  e  $(A_1, a_1)$ , o problema de otimização a resolver para achar a lei de controle é:

$$\min_{\xi_{0,0}^{T_C-1}, \xi_{1,0}^{T_C-1}} J \triangleq \sum_{k=0}^{T_C-1} \|y(k|t) - r(k)\|_{Q_5}^2 + \sum_{k=1}^T \|y(kT_C|t) - r(kT_C)\|_{Q_5}^2 \quad (4.16)$$

onde além da restrição do modelo MLD do CBB vamos impor que:  $T_C = 5$ ,  $T = 1$ ,  $\sum_{i=0}^1 \xi_i(k) = 1$ , e as restrições de estabilidade que desenvolveremos a seguir.

Os valores de  $\xi_i$  definem as possíveis matrizes  $\hat{A}$  combinações convexas das matrizes dinâmicas do CBB como:

$$\hat{A} = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 \xi_0(k) A_0 + \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 \xi_1(k) A_1 \quad (4.17)$$

como  $T_C = 5$  temos então 6 possíveis  $\hat{A}_j$  como mostra-se na tabela 4.1

$j$	$\frac{1}{T_C} \sum_{k=0}^{T_C-1} \xi_0(k)$	$\frac{1}{T_C} \sum_{k=0}^{T_C-1} \xi_1(k)$	$f_S = 100KHz$
1	1	0	$\hat{A}_1$ estável
2	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\hat{A}_2$ estável
3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\hat{A}_3$ estável
4	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\hat{A}_4$ estável
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\hat{A}_5$ estável
6	0	1	$\hat{A}_6$ instável

Tabela 4.1: Possíveis  $\hat{A}$ .

O conjunto  $\hat{\mathcal{A}}$  será então:

$$\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4, \hat{A}_5\}.$$

Resolvendo a LMI:

$$\hat{A}_j^T P \hat{A}_j - P \prec 0, \forall j \in \mathcal{J} = \{1, \dots, 5\}$$

encontramos a matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 62179 & 411 \\ 411 & 449 \end{bmatrix}$$

portanto devemos impor as restrições adicionais de estabilidade:

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 \xi_0(k) \leq 1 \quad (4.18)$$

$$0 \leq \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 \xi_1(k) \leq \frac{4}{5} \quad (4.19)$$

As Figuras 4.7 e 4.8 mostram as respostas do CBB com e sem restrições de estabilidade. Como se observa, a imposição das restrições de estabilidade permitiram

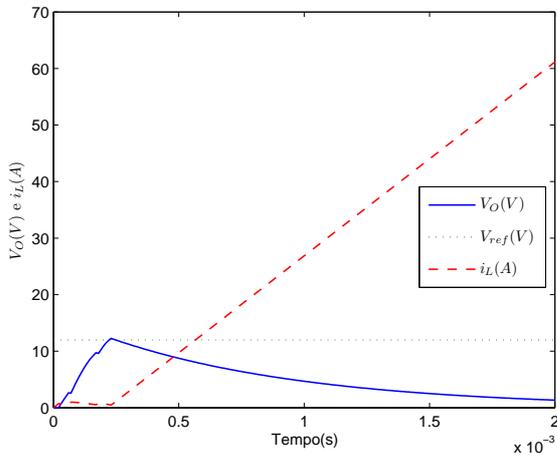


Figura 4.7: Resposta do sistema para  $f_s = 100\text{kHz}$ ,  $T = 5$  e sem restrições de estabilidade.

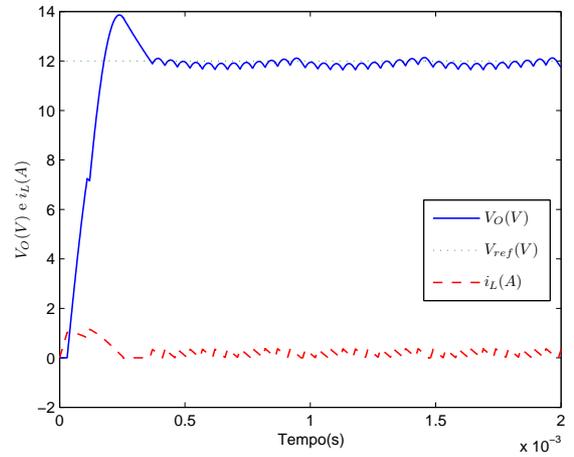


Figura 4.8: Resposta do sistema para  $f_s = 100\text{kHz}$ ,  $T_C = 5$ ,  $T = 1$  e com restrições de estabilidade.

estabilizar o sistema.

Vimos nesta seção que o CPBM no contexto MLD conduz a um problema de otimização mista inteira o qual deve ser resolvido a cada tempo de amostragem (de Prada et al. 2005). Para modelos lineares, este tipo de formulação no domínio em tempo discreto permite realizar de forma sistemática o projeto do controlador. No entanto, modelos lineares podem não proporcionar uma representação adequada do processo, que, em vários casos, pode exibir dinâmicas não-lineares acentuadas. Assim, uma abordagem diferente deve ser utilizada para formular o problema do controle e otimização.

Na próxima seção apresenta-se um novo algoritmo de CPBM. O CPBM é obtido utilizando a abordagem de Controle Preditivo Híbrida e uma parametrização das variáveis binárias (Sarabia 2007). Além disso, a formulação proposta permite também realizar de forma sistemática o projeto do controlador que pode ser também aplicado a sistemas

não-lineares híbridos. A análise desta técnica aplicada a sistemas de potência é uma contribuição deste tese (Sarabia, Pomar, Normey-Rico e de Prada 2007).

### 4.3 Controle Preditivo Não-Linear para Sistemas Comutados

O proposto Controle Preditivo Não-Linear para Sistemas Comutados (CPBMNL-Híbrido) deve resolver o seguinte problema de otimização não-linear genérico:

$$\min_{\{u_i\}} J = \int_0^{T_p} F(y, u_i, t) dt \quad (4.20)$$

sujeito a:

$$\dot{x} = f(x, u_i, t)$$

$$y = g(x, u_i, t)$$

$$u_i(t) \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n_{bv},$$

onde  $x, y \in \mathbb{R}^n$  são os estados e saídas, respectivamente,  $u_i$  são as variáveis binárias manipuladas e  $n_{bv}$  o número total de variáveis manipuladas.  $T_p$  é o tempo total de predição,  $F(\cdot)$  é uma função genérica de custo cuja integral deverá ser minimizada,  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  são as equações algébricas diferenciais do modelo dinâmico interno não-linear. Restrições sobre os estados e saídas podem ser incluídas na função custo como funções de penalização e também é possível adicionar variáveis manipuladas contínuas em uma formulação estendida.

O problema resultante de otimização (4.20) é resolvido periodicamente (a cada período de amostragem) e a função custo  $J$  é calculada através da integração do modelo dinâmico interno do processo. Um pacote de simulação integra as equações do modelo interno ao longo do tempo de predição  $T_p$  tendo como condição inicial o estado atual do processo e avaliando a função custo  $J$  no final da integração. Os sinais de controle ótimo obtidos são aplicados ao processo e o procedimento é repetido no próximo período de amostragem.

Assim, a otimização de uma determinada função custo  $J$  em termos das variáveis binárias  $u_i$  implica na resolução de um problema de otimização misto inteiro não-linear (*Mixed Integer No Linear Problem* - MINLP) em cada período de amostragem, se um modelo não-linear contínuo do processo é utilizado. Ou então é necessário resolver um problema de otimização misto inteiro quadrático (*Mixed Integer Quadratic Problem* - MIQP) se um modelo linear-discreto é usado (isso implica na discretização e linearização

do modelo não-linear inicial). Ambas as abordagens são muito difíceis de executar em tempo real. Primeiro devido ao uso de variáveis inteiras, o tempo de cálculo depende exponencialmente da quantidade destas variáveis. Em segundo lugar, há a possibilidade de perda de qualidade do nosso modelo dinâmico se tentarmos uma linearização de processos quando o processo apresenta não-linearidades acentuadas.

No entanto, podemos evitar a utilização dessas variáveis binárias associadas a cada instante de amostragem no horizonte de predição por meio de uma nova parametrização, convertendo as variáveis de decisão binárias em variáveis de decisão reais que correspondem ao instantes de tempo quando o atuador binário muda seu estado. Esta abordagem permite: (i) reduzir o número de variáveis de decisão, (ii) a utilização de técnicas convencionais de otimização não-linear (em termos apenas de variáveis reais) em vez de programação mista inteira não-linear, diminuindo a complexidade do processo de otimização e poupando tempo de computação.

### 4.3.1 Parametrização das Variáveis Binárias

A parametrização proposta define duas novas variáveis reais  $T_{on,i}^k(t)$  e  $T_{off,i}^k(t)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) para cada variável manipulada binária  $u_i$  ( $i = 1, \dots, n_{bv}$ ).  $T_{on,i}^k$  e  $T_{off,i}^k$  denotam respectivamente o período de tempo durante cada pulso  $k$  no qual a variável binária  $u_i$  é um e zero, como é mostrado na Figura 4.9.

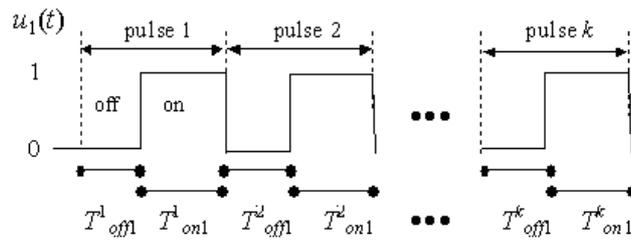


Figura 4.9: Parametrização da variável manipulada binária  $u_1(t)$ . Definição do pulso e a nova variável real de decisão  $T_{on,1}^k$  e  $T_{off,1}^k$  ao longo do tempo.

Os tempos  $T_{on,i}^k$  e  $T_{off,i}^k$  são as variáveis desconhecidas que devem ser calculadas ao longo do horizonte de predição. Esta parametrização baseia-se no pressuposto que, no final do horizonte de predição, se seguirá um comportamento periódico ao longo do tempo. Observe que, nestes tipos de sistemas, um padrão “estável” de funcionamento não pode ser alcançado com um valor constante das variáveis manipuladas, como já foi analisado na seção anterior.

### 4.3.2 Horizontes de Controle e Predição

O conceito de horizonte de controle  $N_u$  no CPBM contínuo corresponde ao intervalo de tempo em que futuras ações de controle são calculadas. Após  $N_u$  períodos de amostragem, o controlador mantém o último valor do sinal de controle calculado em  $N_u$  até o final do horizonte de predição  $N$ , a fim de calcular as saídas preditas. No contexto híbrido, e referindo-se as variáveis binárias manipuladas, é mais conveniente formular o horizonte de controle  $N_{b,i}$  como o número de pulsos de cada variável manipulada  $u_i$  para os quais o controlador calcula as variáveis de decisão  $T_{on,i}^k$  e  $T_{off,i}^k$ , (*on* e *off* períodos de cada pulso  $k = 1, 2, 3, \dots$ ). A partir do pulso número  $N_{b,i}$  até o final do tempo de predição  $T_p$ , os valores das variáveis de decisão  $T_{on,i}^k$  e  $T_{off,i}^k$  serão tomadas iguais as mesmas do pulso  $N_{b,i}$ , por isso, o arranjo dos  $u_i$  vai ser forçado a seguir o padrão do pulso  $N_{b,i}$ , assumindo que o sistema deverá alcançar um arranjo estacionário final. O horizonte de predição  $N$  no CPBM corresponde ao número de períodos de amostragem futuros, de duração  $T_s$ , utilizado para calcular as predições com o modelo interno. No CPBM padrão, o tempo desse horizonte é escolhido mais longo do que o tempo de estabelecimento do sistema. Repare que, como mencionado anteriormente, em nosso contexto de variáveis manipuladas *on/off*, o processo nunca vai convergir a um ponto de equilíbrio em estado estacionário, mas vai oscilar, eventualmente atingindo um padrão operacional estável. Então, novamente, em vez de especificar o intervalo onde as predições serão feitas, é mais conveniente falar em termos de  $N_p$ , número de pulsos da variável  $u_i$  que varia mais lentamente, assumindo que sejam necessários para a obtenção de um padrão operacional estável. Isto significa que, para calcular uma certa função de custo  $J$ , o modelo interno será integrado até que o trem mais lento de pulsos complete  $N_p$  pulsos. Note que cada variável binária manipulada pode ter um número diferente de pulsos no mesmo período de tempo  $T_p$ .

Finalmente, é importante notar que esta abordagem envolve  $\sum_{i=1}^{n_{bv}} (2 \times N_{b,i})$  número de variáveis reais de decisão, lembrando que  $n_{bv}$  é o número inicial de variáveis binárias manipuladas presentes no processo.

## 4.4 Exemplo

### Exemplo 4.3 CPBM Não-Linear Híbrido do CBB

*O modelo interno utilizado no controlador híbrido é o modelo não-linear contínuo, equações (2.10-2.12), e a variável manipulada binária  $q(t)$ , correspondente ao interruptor on/off, foi parametrizada de acordo com a abordagem descrita na seção 4.3.1. O objetivo do CPBMNL-Híbrido é minimizar (4.21), sob a dinâmica (2.10-2.12) em*

relação as variáveis reais de decisão  $T_{on,1}^k$  e  $T_{off,1}^k$  ( $k = 1, \dots, N_{b,i}$ ) e satisfazendo as restrições estáticas sobre essas variáveis de decisão. Então, o problema de otimização pode ser descrito como:

$$\min_{\{T_{on,1}^k, T_{off,1}^k\}} J = \int_0^{T_p} (V_o(t) - V_o^{ref})^2 dt \quad (4.21)$$

sujeito a:

modelo dinâmico (2.10-2.12)

$$T_{on,1}^k, T_{off,1}^k \in \mathbb{R} \quad \forall k = 1, \dots, N_{b,1}$$

$$T_{on,1}^{min} \leq T_{on,1}^k \leq T_{on,1}^{max}$$

$$T_{off,1}^{min} \leq T_{off,1}^k \leq T_{off,1}^{max}$$

onde  $V_o^{ref}$  é a referência da tensão de saída e  $T_p$  é o tempo total da predição (equivalente a  $N_p$  pulsos, veja seção 4.3.2).

O problema de otimização envolve  $2 \times N_{b,1}$  número de variáveis de decisão e é resolvido periodicamente, com um dado período de amostragem  $T_s$  usando um algoritmo SQP (Lawrence C. T. 2001) (implementado em uma biblioteca comercial: NAG for C (The Numerical Algorithms Group Ltd 1996)) e seguindo o esquema mostrado na Figura 4.10.

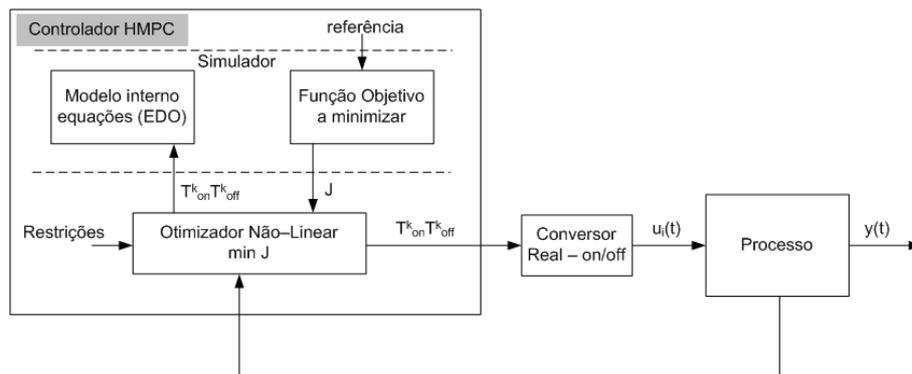


Figura 4.10: Implementação do controlador CPBMNL- Híbrido

O modelo interno é simulado/integrado usando a linguagem de simulação Ecosim-Pro (EA 1999), que gera automaticamente código C++ correspondente à simulação. Este código do modelo interno é embutido no controlador, que foi também programado em C++.

O modelo do CBB descrito no capítulo 2 foi simulado e testado utilizando também o ambiente de simulação EcosimPro. Para ilustrar o comportamento e o desempenho

do CPBMNL-Híbrido proposto em 4.3, vários experimentos foram realizados alterando  $R$  e  $V_o^{ref}$ .

O controlador CPBMNL-Híbrido foi sintonizado utilizando um período de amostragem  $T_s = 10^{-4}$  segundos, o horizonte de predição foi fixado em  $N_p = 30$ , que corresponde a um tempo de cerca de 0,02 segundos, e o horizonte de controle para a chave  $q(t)$  foi  $N_{b,1} = 6$ . Assim, o problema de otimização tem 12 variáveis de decisão contínuas ( $2 \times N_{b,1}$ ), seus valores mínimos e máximos permitidos são  $T_{on,1}^{min} = T_{off,1}^{min} = 0.05 \times 10^{-4}$  e  $T_{on,1}^{max} = T_{off,1}^{max} = 3 \times 10^{-4}$  segundos respectivamente.

**Simulação 1:** Sem perturbações.  $R = 40\Omega$  tanto no processo como no modelo interno.  $V_o^{ref}$  muda de 12V a 100V no tempo  $5 \times 10^{-3}s$ . e de 100V a 12V em  $10 \times 10^{-3}s$ .

**Simulação 2:** Idem simulação 1 com  $R = 120\Omega$ .

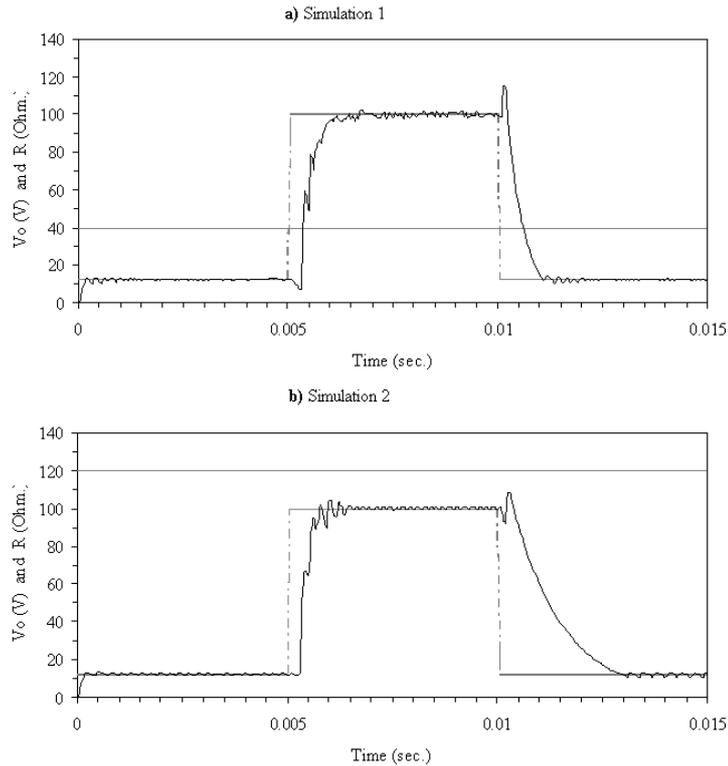


Figura 4.11: Seguimento a referência:  $V_o$ (sólido),  $V_o^{ref}$  (tracejada),  $R$ (pontilhada)

**Simulação 3:** Perturbação não mensurável,  $R$  varia de  $40\Omega$  a  $120\Omega$  em  $5 \times 10^{-3}s$  e de  $120\Omega$  a  $40\Omega$  em  $10 \times 10^{-3}s$ ,  $V_o^{ref} = 12V$ .

**Simulação 3:** Idem simulação 3 com  $V_o^{ref} = 100V$ .

O bom desempenho do controlador pode ser observado nas figuras 4.11 e 4.12. A resposta em malha fechada obtida é rápida se comparada com as respostas obtidas para

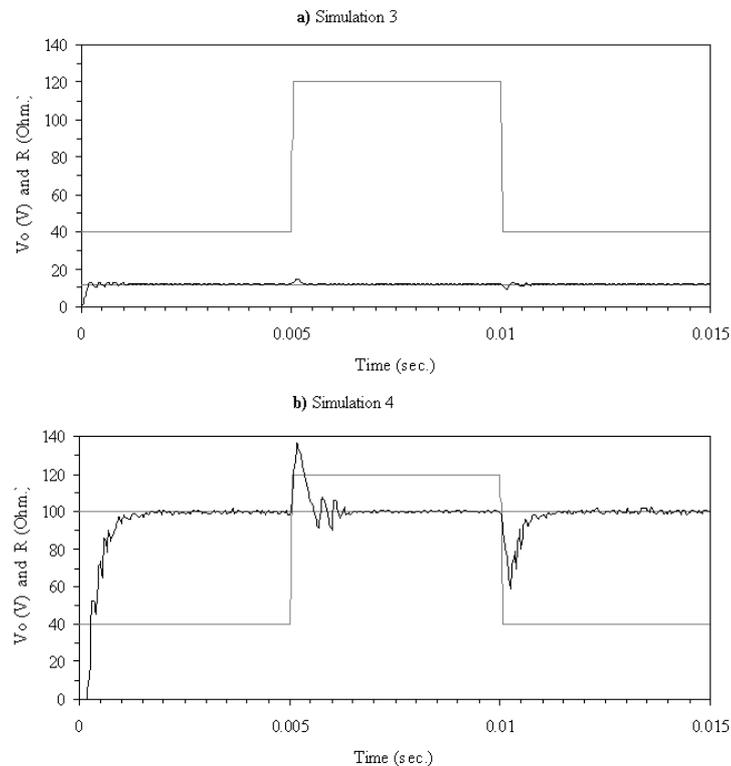


Figura 4.12: Rejeição a perturbação:  $V_o$  (sólido),  $V_o^{ref}$  (tracejada),  $R$  (pontilhada)

estes tipos de sistemas, utilizando controladores tradicionais como por exemplo um controlador PID ou mesmo um controlador não-linear do tipo modos deslizantes, os quais serão objeto de estudo no seguinte capítulo. Também é importante notar que além de rápida a saída não apresenta picos, coisa muito importante em sistemas de potência.

## 4.5 Sumário

Neste capítulo foram desenvolvidos aspectos teóricos e práticos do CPMI e CPBMNL-Híbrido.

Como o contexto MLD permite a modelagem de uma grande quantidade de processos híbridos é interessante do ponto de vista prático e teórico ter uma metodologia para projetar uma lei de controle CPMI nesse contexto.

Do ponto de vista conceitual o CPMI é similar ao já conhecido CPBM clássico, mas devido à presença de variáveis inteiras, o procedimento de otimização é um problema de Programação Mista Inteira. Quando o sistema tem dimensões elevadas, ou o hor-

izonte de predição é grande, isto redundando num modelo MLD com um grande número de variáveis inteiras o que aumenta de forma exponencial a complexidade de cálculo do CPMI. Além do mais, quando tratamos com sistemas com não-linearidades muito acentuadas, o CPMI não oferece uma solução com boa performance e, nesse caso, o melhor é usar o CPBMNL-Híbrido.

A abordagem CPBMNL-Híbrida apresentou bons resultados em simulação para o CBB. Claro que, devido à rápida dinâmica dos circuitos eletrônicos de potência, como o CBB, o problema foi resolvido de um ponto de vista teórico, sendo difícil a sua aplicação a um verdadeiro CBB. Mas este tipo de problemas chaveados são muito comuns em outras áreas, como processos químicos, problemas hidráulicos, etc, com dinâmicas mais lentas e onde este novo controlador pode ser utilizado *on-line*, pois as principais idéias do controlador são totalmente genéricas.

Embora o controlador CPBMNL-Híbrido transforme o problema de otimização misto inteiro em um problema de otimização não-linear, ainda assim o custo computacional no cálculo da lei de controle é consideravelmente grande devido à necessidade de integração do modelo interno por simulação.

# Capítulo 5

## Projeto Integrado e Síntese

### 5.1 Introdução

Historicamente, o projeto de um processo e seu controle tem sido realizado de forma seqüencial pelos engenheiros de processo e de controle respectivamente. É bem sabido que a primeira etapa, o projeto do processo, determina a controlabilidade<sup>1</sup> inerente do próprio processo e, por conseguinte, as propriedades de interação entre as variáveis, a capacidade de rejeitar perturbações e a qualidade no seguimento a referências, tudo isso com independência ao regulador colocado na etapa de controle. Assim, freqüentemente o engenheiro de controle precisa lidar com plantas pouco controláveis e o projeto e a sintonia do sistema de controle tornam-se uma tarefa difícil (Luyben 1993, Luyben e Floudas 1994a, Luyben e Floudas 1994b, Gutierrez 2000).

No projeto de uma planta são envolvidas duas áreas fundamentalmente: a **síntese do processo** e o **projeto do processo**.

Na **síntese do processo** se determina a interconexão ótima entre as unidades do processo como também o tipo de desenho das unidades dentro do sistema, para assim alcançar objetivos de produção especificados.

O **projeto do processo** é focado na determinação das condições de operação de cada uma das unidades do processo e do dimensionamento, que são requeridos para a produção de um produto específico.

Finalmente, o **controle de processos** estabelece pautas de operação que asseguram um comportamento estável do processo satisfazendo um conjunto de especificações transitórias e de regime permanente mesmo considerando a ação de perturbações e

---

<sup>1</sup>O termo controlabilidade será utilizado nesta tese com um significado diferente ao habitual dentro do âmbito da teoria de controle. A controlabilidade será uma “propriedade” que mede a capacidade que possui um processo de ser operado numa “região” de operação desejada. Esta “propriedade” estará relacionada com uma série de índices de desempenho como veremos neste capítulo.

incertezas nos modelos usados no projeto do sistema de controle.

A síntese de processos tem sido levada a cabo tradicionalmente de maneira manual e intuitiva, uma vez que se propõem diferentes esquemas de diagramas de fluxos (material, energia, etc). Os engenheiros se centram então em escolher o esquema da planta economicamente ótima do ponto de vista de custos de construção, mas sem ter em conta a seqüência e interconexão ótima entre as unidades que a compõem, e sem considerar as características de controlabilidade em malha aberta ou em malha fechada que teria a planta uma vez projetada.

O modo tradicional de abordar o projeto de processos mostra-se na Figura 5.1. Inicialmente o engenheiro de processos determina a estrutura do diagrama de fluxo, as condições de operação em estado estacionário que se requerem para alcançar os objetivos de produção e o cálculo dos parâmetros físicos da planta (tamanho das unidades do processo). O objetivo principal procurado nesta tarefa tem sido o de otimizar um índice econômico (minimizar o custo anual de manutenção, maximizar os benefícios, minimizar o custo de construção, etc.), considerando unicamente a operação da planta em estado estacionário, avaliando um grande número de estruturas alternativas de condições de projeto e parâmetros que satisfaçam os requerimentos de operação estabelecidos, selecionando finalmente a mais econômica tanto em custos de manutenção como de construção das mesmas. Nesta etapa se dá pouca atenção à controlabilidade dinâmica do processo.

Uma vez projetada a planta, o engenheiro de controle se encarrega de estabelecer uma estratégia de controle que assegure um comportamento dinâmico estável e que satisfaça os requerimentos de qualidade do produto. Estes objetivos devem alcançar-se mesmo na presença de grandes perturbações, de falhas nos equipamentos, variações de carga, etc. Frequentemente esta é uma tarefa difícil dado que a controlabilidade do processo, que deveria ser considerada nas etapas do projeto, não é tida em conta previamente. Nas últimas três décadas a pressão exercida pelos avanços tecnológicos e a competitividade têm feito que a segurança, os custos da energia e as regulações governamentais em geral, incrementem a complexidade e sensibilidade do processo no intuito de conseguir maior produtividade e qualidade dos produtos. As plantas têm passado a ser mais complexas em relação ao fluxo de materiais (configurações complexas, re-circulação de fluxos, etc.) e ao fluxo de energia (integração do calor). Estas novas condições do processo fazem que a tarefa de controle seja frequentemente muito difícil e que se aposte pelo uso de técnicas de controle avançado, como por exemplo o controle preditivo.

A interação entre estas duas disciplinas (engenharia de processos e de controle) surge devido ao fato de que o projeto de processos determina de um modo inerente

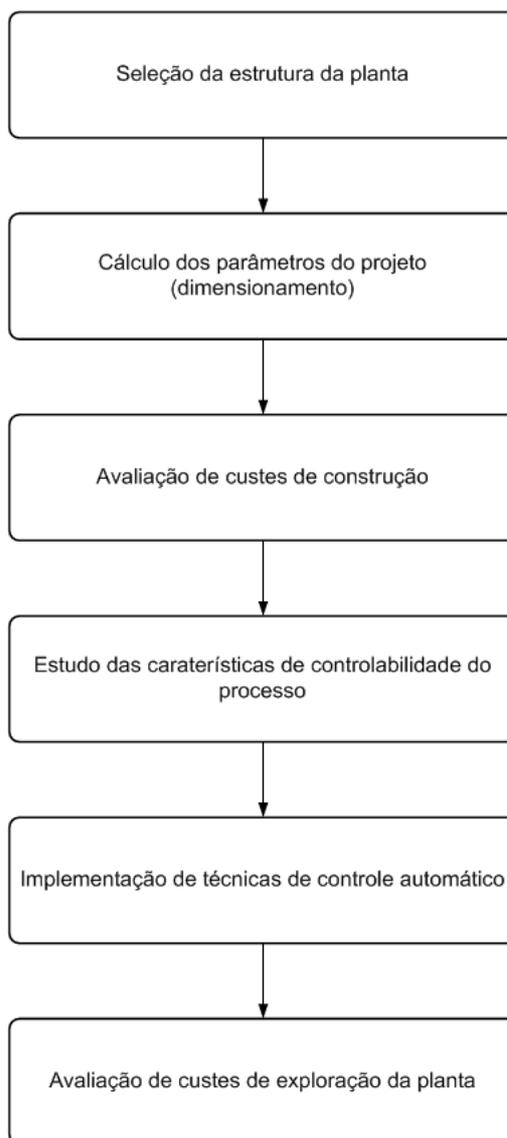


Figura 5.1: Projeto tradicional de processos.

sua controlabilidade, o que qualitativamente significa o quão bem um processo é capaz de rejeitar perturbações, quão severamente interagem as múltiplas variáveis e quão facilmente o sistema move-se de um ponto de operação a outro. Um procedimento mais otimizado consistiria em integrar na tarefa do projeto de processos restrições sobre a controlabilidade do sistema.

Existem duas razões fundamentais que têm condicionado o uso majoritário das técnicas de projeto de processos tradicionais, uma é a falta de ferramentas de projeto assistidas por computador que permitam o estudo dinâmico das plantas (somente nos últimos anos tem-se evidenciado um desenvolvimento pronunciado nesta área) e a segunda razão são as barreiras históricas e tecnológicas, existentes entre o engenheiro de

processos e o engenheiro de controle (Gutierrez 2000).

Atualmente, a situação do ponto de vista tecnológico permite realizar o projeto simultâneo do processo e do sistema de controle, levando em conta restrições de operação, restrições do tipo físico e considerando a controlabilidade do conjunto.

A definição de controlabilidade não é única, como demonstram as diversas definições dadas por Ziegler e Nichols (1943), Kalman et al. (1962), etc. Mais especificamente, Skogestad et al. (1991) definiu o conceito de controlabilidade como “a melhor qualidade de resposta que possa se obter através de um controlador *feedback*”. Esta definição geral proporciona um marco de trabalho conceitual com o qual pode tratar-se o problema de projeto integrado. Alguns investigadores têm apontado essa idéia como fundamental, no que refere a incorporar a controlabilidade como uma magnitude nas etapas de projeto do processo.

Conceitualmente podem distinguir-se quatro tipo de requerimentos:

**Flexibilidade**, habilidade que possui um sistema para trabalhar em diferentes pontos de estado estacionário não consideradas no projeto.

**Permutabilidade**, habilidade que possui um sistema para se mover de um ponto de estado estacionário a outro.

**Controlabilidade**, capacidade que possui o processo para alcançar e manter um valor de equilíbrio desejado.

**Controlabilidade em malha fechada**, se define como o “melhor” comportamento dinâmico do sistema (seguimento de referencias e rejeição de perturbações), que pode alcançar o sistema em malha fechada. Por definição esta característica não depende só do controlador, mas também da própria planta, já que a controlabilidade depende em grande medida da flexibilidade e permutabilidade que são proporcionados pelo próprio projeto do processo.

**Projeto Integrado** seria a técnica de projeto através da qual se obtém os parâmetros físicos da planta que minimizam os custos de operação e construção, ao mesmo tempo que satisfaçam características de controlabilidade impostas ao processo, como mostra a Figura 5.2. Este problema se traduz matematicamente num problema de otimização não-linear multi-objetivo com restrições, onde os objetivos que se consideram são do tipo econômico e de controle, e as restrições são os requerimentos físico e de controlabilidade do processo, que podem incluir: segurança, flexibilidade, operabilidade, etc.

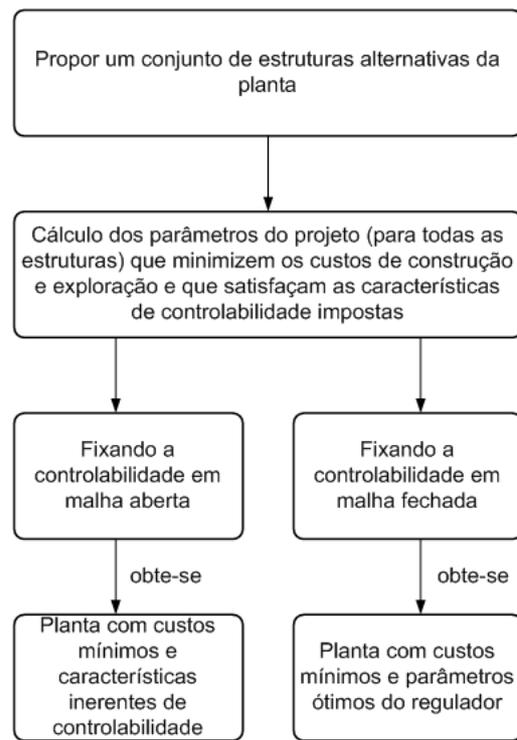


Figura 5.2: Projeto integrado de processos.

A integração da **síntese do processo e do controle** seria a técnica que permitiria selecionar automaticamente a estrutura ótima da planta junto com a estrutura do controlador, isto é, obter uma planta cujas unidades estejam conectadas de uma maneira ótima, seu dimensionamento represente o custo mínimo de construção e permita satisfazer os requerimentos para um funcionamento adequado do processo, e paralelamente a isto, se obtenham os parâmetros ótimos do regulador que proporcionem um comportamento dinâmico do sistema fixado na etapa de projeto.

Nesta tese focalizaremos nossa atenção unicamente na área de **projeto do processo**. A **síntese do processo** deverá ser tema de estudos futuros.

## 5.2 Projeto Integrado de Processos e Controle

Na tarefa de **Projeto Integrado** se consideram simultaneamente objetivos de controle e objetivos econômicos, que podem traduzir-se em encontrar os parâmetros físicos da planta e um ponto em estado estacionário que minimize o custo de construção e operação ao mesmo tempo que satisfaça certas características de controlabilidade. O problema pode formular-se da seguinte maneira, (Luyben 1993):

“Dadas várias configurações da planta concebida para a realização de um conjunto de tarefas (reações, separação, aquecimento, etc) e dado um conjunto de variáveis

controladas, manipuladas e de perturbação, que estão relacionadas através de um modelo matemático, o objetivo fundamental é determinar a configuração ótima ou de melhor compromisso do processo entre os objetivos econômicos e de controle.”

Esta formulação não especifica qual é o objetivo particular do controle ou como pode obter-se a melhor solução de compromisso. O problema de projeto integrado pode formular-se como um problema de otimização multi-objetivo que facilita a liberdade de estabelecer um certo número ou tipo de objetivos, que não só tem que ter em conta a controlabilidade, mas pode também envolver outros tipos de objetivos como por exemplo de segurança ou meio ambientais.

A determinação da melhor solução de compromisso recai no usuário, quem deve escolher de acordo com as suas prioridades qual é a que ele considera a melhor solução.

Se as características de controlabilidade que se estabelecem na etapa de projeto consideram o comportamento do sistema em malha aberta, o problema é dirigido a encontrar a configuração ótima, tendo em conta aquela estrutura que resulte mais econômica. Se o que se persegue fixar é o comportamento do sistema em malha fechada, o problema conduz a determinar a estrutura de menor custo e os parâmetros ótimos do regulador que cumpram com os requerimentos estabelecidos.

## Procedimento Geral de Projeto Integrado

O procedimento de Projeto Integrado é executado seguindo os passos que se apresentam a seguir:

### 1. Proposta de diferentes estruturas alternativas

Se propõem diferentes estruturas do processo e se determinam os objetivos econômicos e de controle que sejam de interesse.

### 2. Modelagem das estruturas

Formula-se um modelo matemático de conhecimento de todas as estruturas propostas e expressam-se as magnitudes de controlabilidade (em malha aberta ou malha fechada) em função das variáveis de projeto desconhecidas a partir dos modelos linearizados de cada planta.

### 3. Obtenção dos parâmetros físicos da planta e do controlador <sup>2</sup>

A solução do problema que se apresenta conduz a solução de um problema de otimização multi-objetivo não-linear com restrições que se formula da seguinte

---

<sup>2</sup>Somente no caso do projeto integrado em malha fechada

maneira:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & U[f_1(x), f_2(x), \dots] \\ \text{sujeito a :} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

Onde:

$U$ : representa o índice a minimizar e que relaciona os diferentes objetivos.

$f_1(x), f_2(x), \dots$ : representam os objetivos de controle, econômicos e outros.

$h(x) = 0$ : representa as equações de balanços e equilíbrios do processo.

$g(x) \leq 0$ : representa as restrições do processo, físicas e de controle.

$x$ : representa os parâmetros do modelo a serem determinados.

#### 4. Obtenção da melhor solução de compromisso

A melhor solução de um problema com múltiplos objetivos consiste de aquelas soluções onde um objetivo pode ser melhorado unicamente a custa dos outros objetivos. Existem algoritmos de otimização multi objetivos (MOP) que acham de maneira automática a melhor solução de compromisso.

Por exemplo, no caso de projeto integrado em malha aberta, os objetivos de controle e econômicos que podem se impor são:

- minimizar o custo de construção da planta,
- impor índices de performance no domínio do tempo:
  - tempo de subida ( $t_r$ ),
  - tempo de 5% ou tempo de assentamento ( $t_s$ ),
  - sobre-sinal ( $M_p$ ),
  - fator de redução (quociente entre o segundo e o primeiro pico do sinal de saída),
  - erro em estado estacionário ( $e_{s \rightarrow \infty}$ ),
- Índices de performance no domínio da frequência:
  - Margem de Fase (PM) e Margem de Ganho (GM),
  - Máximo Pico,
  - Largura de Banda e Frequência de Corte.

- incluir dentro das restrições outras magnitudes de interesse relacionadas com a operabilidade e flexibilidade das plantas.

No caso de projeto integrado onde se considera o sistema em malha fechada, os objetivos que podem se impor:

- minimizar o custo de construção da planta,
- minimizar o ganho da matriz de transferência em malha fechada com respeito à matriz de transferência em malha aberta,
- minimizar alguma norma do sinal de erro:  $e(t) = y(t) - r(t)$ , por exemplo podemos usar a integral do quadrado do erro (*Integral Squared Error* - ISE), ou a raiz quadrada, que é a norma-2 do sinal de erro,  $\|e(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty |e(\tau)|^2 d\tau}$ , (neste caso vários objetivos relacionados com a velocidade e a qualidade da resposta são combinados em um único número),
- incluir nas restrições localização dos pólos da matriz de transferência em malha fechada.

### 5.3 Projeto Integrado de Sistemas Comutados

A aplicação direta do procedimento geral de Projeto Integrado a Sistemas Comutados não é possível pois: (1) o procedimento baseia-se na obtenção de um modelo linearizado do sistema em função de um ponto de operação genérico e dos parâmetros do sistema; (2) na escolha de uma série de índices que, com base nesse modelo linear, determinam a controlabilidade do sistema. Mas dado que um Sistema Comutado é composto por uma série de sistemas não-lineares que estarão ativos dependendo da função de chaveamento e do valor dos estados do sistema, é impossível obter um modelo linear único para este tipo de sistema. Se não podemos formular um modelo linear do sistema, então também não poderemos expressar de forma analítica índices de controlabilidade para tais sistemas.

Uma possível solução para este problema consiste em obter alguns dos índices vistos na seção anterior de forma numérica para certas situações que representam as principais características de funcionamento do sistema. A obtenção em forma numérica dos índices de comportamento se faz através da integração do modelo do Sistema Comutado utilizando ferramentas de simulação como ilustra a Figura 5.3.

Na Figura 5.3,  $x$  representa o vetor de parâmetros e  $z$  o vetor de estados do SC respectivamente. O procedimento é o seguinte: dado um valor inicial dos parâmetros ( $x_0$ ) o algoritmo de otimização multi-objetivo dá início à procura do ótimo; para isso

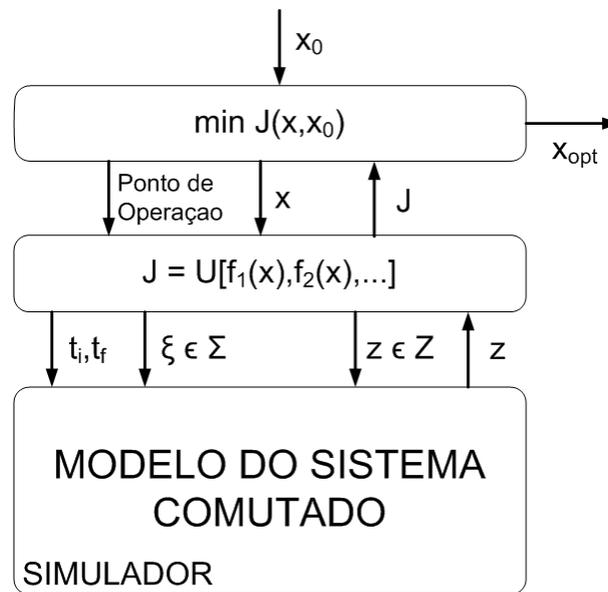


Figura 5.3: Diagrama de blocos do procedimento de PI para SC.

ele precisa calcular o valor da função custo  $U[f_1(x), f_2(x), \dots]$ . Essa função custo depende obviamente dos parâmetros ( $x$ ) a serem calculados e também dos estados do sistema ( $z$ ) durante um certo intervalo de tempo  $[t_i, t_f]$  pois o valor dos estados nos permitirá calcular vários dos índices vistos na seção anterior ( $t_r, t_s, M_p, PM, GM, etc$ ) os quais podem ser escolhidos para fazer parte da função objetivo ( $f_1(x), f_2(x), \dots$ ). Para calcular os estados do SC no intervalo  $(t_i, t_f)$ , integramos o modelo do SC através de alguma ferramenta de simulação. Para isso, além de passar ao simulador os tempos de início e fim da simulação, também passamos outros parâmetros para poder realizar o “experimento”, como por exemplo valores máximos e mínimos dos estados do sistema  $z \in Z$  e das perturbações  $\xi \in \Sigma$ . A ferramenta de simulação devolve o valor dos estados no intervalo de tempo  $(t_i, t_f)$ , com os quais a função  $U[f_1(x), f_2(x), \dots]$  calcula o valor de  $J$  que é passado para o algoritmo de otimização, que decide se esse ponto é o ótimo ou se realiza uma nova iteração, assim sucessivamente até achar os parâmetros ótimos da planta com essa função objetivo e sob essas condições de operação (experimento utilizado para calcular  $z$ ).

Na seguinte seção mostram-se dois estudos de caso de projeto integrado que permitem ilustrar as vantagens que podem se obter com esta metodologia. Os dois exemplos são uma contribuição deste trabalho, trata-se do projeto integrado do conversor de potência Buck-Boost. O primeiro exemplo resultou na publicação do artigo (Pomar et al. 2007a) e o segundo nos artigos: (Pomar et al. 2007b) e (Pomar et al. 2009).

## 5.4 Estudos de Caso

### 5.4.1 Projeto Integrado de um CBB e um controlador PID.

Neste estudo de caso se realizará o projeto de um CBB e um controlador PID utilizando dois procedimentos. No primeiro procedimento vamos projetar o conversor e sintonizar o PID pelo método seqüencial tradicional. Ou seja, vamos projetar o CBB e depois sintonizar o PID para o CBB projetado. No segundo procedimento será aplicada a metodologia de projeto integrado. Em ambas as tarefas será utilizado o modelo médio do CBB correspondente com as equações (2.13,2.14, 2.15).

#### Projeto Inicial.

O projeto tradicional de um CBB como o da Figura 5.4 começa com um conjunto

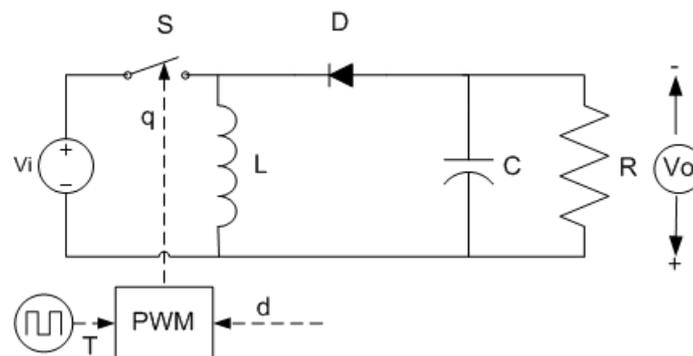


Figura 5.4: Diagrama do CBB.

dados de especificações tal como:

- fonte de tensão  $V_{cc} = V_i$ ,
- intervalo da tensão de saída em que deve operar o CBB,  $V_0 \in [V_{0min}, V_{0max}]$ , e
- intervalo de carga a qual será submetido o CBB,  $R \in [R_{min}, R_{max}]$ .

e finaliza na determinação dos valores dos componentes do circuito, isto é: indutância ( $L$ ), capacitância ( $C$ ) e o período ( $T$ ) do modulador por largura de pulso (PWM) conectado entre o controle e o interruptor ( $S$ ), tal que os seguintes requisitos de estado estacionário sejam totalmente cumpridos:

- O CBB deve trabalhar em modo de condução contínua, isto é,  $i_L(t) \geq 0$  em estado estacionário. Então, no caso ideal (que o caso de estudo), igualando a

energia entregue pela fonte primária à energia consumida pela carga  $R$ , podemos achar  $\widehat{i}_S$ , corrente média pela chave  $S$ :

$$\begin{aligned} E(\text{fonte}) &= E(\text{carga}), \\ V_i \widehat{i}_S &= \frac{V_0^2}{R}, \\ \widehat{i}_S &= \frac{V_0^2}{V_i} \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Mas no limite do modo da condução contínua, o valor de  $\widehat{i}_S$  pode ser calculado como:

$$\widehat{i}_{S,\text{lim}} = \frac{V_i d^2 T}{2L},$$

sendo  $d$  a fração de  $T$  que corresponde a posição  $ON$  do interruptor  $S$ . Portanto, para que o CBB trabalhe no MCC em estado estacionário, devemos impor que:

$$\widehat{i}_S \geq \widehat{i}_{S,\text{lim}},$$

desse modo, deve verificar-se a seguinte equação:

$$V_0^2 - \frac{1}{2} \frac{V_i^2 R}{L} T d^2 \geq 0. \quad (5.1)$$

- A ondulação da corrente pelo indutor deve ser menor que 5%, isto é,  $\Delta i_L \leq 5\%$ , então:

$$\frac{V_i}{L} T d \leq 0.05 \widehat{i}_L \quad (5.2)$$

Porque,  $\Delta i_L = \frac{V_i}{L} T d$ , pode ser obtida integrando a equação (2.7).

- A ondulação de tensão no capacitor deve ser menor que 5%,  $\Delta v_C \leq 5\%$ , então:

$$\frac{(1-d)T}{C} \left[ \widehat{i}_L - \frac{V_i}{R} \right] \leq 0.05 \widehat{v}_C \quad (5.3)$$

Para calcular (5.3) consideramos que, se  $q = 0$ , então a corrente do capacitor é a diferença entre a corrente pelo indutor  $L$  e a corrente na carga  $R$ :

$$\frac{i_L - I_R}{C},$$

sendo esta corrente responsável pelas ondulação de tensão. Uma aproximação de primeira ordem leva a:

$$\Delta v_C = \frac{(1-d)T}{C} \left[ \widehat{i}_L - \frac{V_i}{R} \right],$$

e portanto a (5.3)

Todos estes requisitos devem ser cumpridos  $\forall V_0 \in [V_{0min}, V_{0max}]$  e  $\forall R \in [R_{min}, R_{max}]$ .

Um estudo do pior caso permite escolher um conjunto de valores que satisfazem as especificações acima citadas. Um exemplo de tal conjunto é dado na Tabela 5.1. Opcionalmente, um procedimento de otimização sob o modelo e restrições de especificação pode ser usado para escolher tal conjunto com um critério econômico.

Elemento	Valor
Tensão da fonte ( $V_i$ )	48V
Resistência (valor min) ( $R_{min}$ )	40 $\Omega$
Resistência (valor max) ( $R_{max}$ )	120 $\Omega$
Tensão de saída (valor min) ( $V_{oMin}$ )	12V
Tensão de saída (valor max) ( $V_{oMax}$ )	100V
Indutância ( $H$ )	$5.2 * 10^{-3}Hy$
Capacitância ( $C$ )	$2.6355 * 10^{-6}F$
Período de chaveamento ( $T$ )	$3.3823 * 10^{-6}s$

Tabela 5.1: Parâmetros do CBB.

Uma vez que o CBB foi projetado, um controlador de baixo de custo, como por exemplo um PID com uma lei de controle da forma:

$$d = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D}{\frac{1}{N}s + 1}, \quad (5.4)$$

pode ser sintonizado para manter a tensão de saída num valor desejado apesar das mudanças na carga, Figura 5.5. Dado que o CBB é um dispositivo não-linear com um

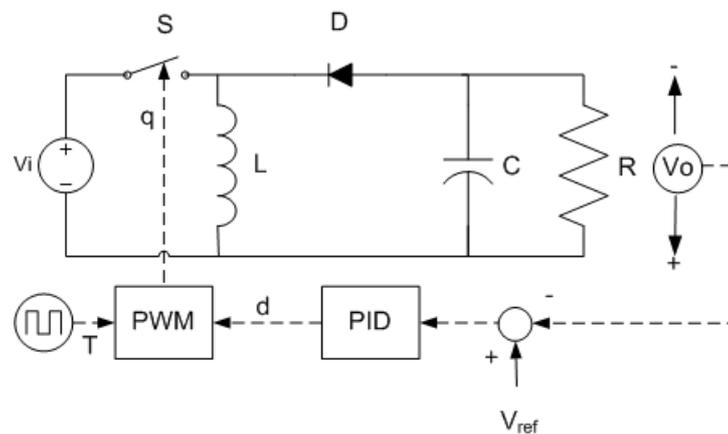


Figura 5.5: Diagrama do CBB+PID.

vasto leque de condições operativas e que pode ser submetido a mudanças significativas na carga, o procedimento de sintonização do controlador PID realizado foi o seguinte: linearizou-se o modelo do CBB no meio do intervalo de operação e com este modelo sintonizou-se o PID através da metodologia tradicional do lugar das raízes. Em seguida comprovou-se o desempenho do CBB operando em malha fechada para todo o intervalo de operação desejado. O conjunto de parâmetros do PID obtido para o ponto de operação  $V_0 = 56V$  e  $R = 80\Omega$ , correspondente ao CBB com os parâmetros da tabela 5.1, é dado na tabela 5.2. Onde  $N$  é a constante de tempo do filtro da ação derivativa.

Element	Value
$K_P$	$-6.8688 * 10^{-4}$
$K_I$	0.7004
$K_D$	$1.3188 * 10^{-6}$
$N$	446.0379

Tabela 5.2: Parâmetros do PID.

### Projeto Integrado.

No projeto da planta analisada na seção anterior, a dinâmica e as características de controle não são levadas em conta. Só uma vez que a planta foi projetada, inicia-se a tarefa de achar os melhores parâmetros para o controlador, projeto que ficará condicionado pelos limites impostos pelo projeto do CBB.

Um alternativa é integrar ambas as fases, calculando simultaneamente o valor dos componentes do CBB e a sintonia do controlador PID satisfazendo as restrições operacionais e de controle. Além do mais, para garantir um desempenho adequado em todo o intervalo de operação, uma metodologia de projeto chamada projeto multi-ponto, será introduzida.

Os elementos-chave da metodologia proposta de projeto integrado são:

1. Uma estrutura do processo do sistema a ser projetado primeiramente é proposto. Pode ser uma já fixada, tal como a estrutura mostrada na Figura 5.4, ou a mesma sujeita a modificações. Por simplicidade, não consideraremos a última possibilidade.
2. Um modelo matemático do processo é formulado. Em nosso caso corresponde ao conjunto de equações ( 2.13,2.14,2.15).
3. A estrutura de controle é definida, Figura 5.5, e o modelo matemático é aumentado com as equações do controlador, em nosso caso (5.4). O modelo resultante

em malha fechada é uma função dos ainda desconhecidos parâmetros do processo e do controle.

4. As especificações e restrições de operação, tanto em estado estacionário como as relativas à dinâmica do sistema são adicionadas. Exemplos das restrições em estado estacionário são (5.1,5.2,5.3).
5. Se define o vetor  $x$  que tem por elementos os parâmetros de projeto. A função custo  $F(x)$  é então proposta considerando os objetivos econômicos e de desempenho. Além disso, escrevem-se todas as restrições nas variáveis do sistema na forma:

$$g(x) \leq 0,$$

$$h(x) = 0,$$

onde  $h(x) = 0$  representa as equações de equilíbrio do sistema e  $g(x) \leq 0$  representa as restrições do sistema, físicas e de controle. Logo, o problema a ser resolvido é:

$$P : \quad \text{Minimize } F(x)$$

$$x$$

Sujeito a:

$$g(x) \leq 0$$

$$h(x) = 0$$

$$x \in R$$

Em nosso caso, por simplicidade, a função custo  $F(x)$  inclui somente termos de desempenho que correspondem aos erros quadráticos acumulados em quatro experimentos representativos cobrindo as situações extremas de operação:

$$F(x) = \int_{t_i}^{t_f} e_1^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_2^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_3^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_4^2 dt \quad (5.5)$$

Os erros  $e_i$  são definidos como as diferenças entre o *set-point* (tensão de saída desejada) e a tensão de saída real calculada através da simulação do modelo em malha fechada.  $t_i$  e  $t_f$  são o tempo inicial e final considerados na simulação para calcular os valores do erro.

Desta forma  $F(x)$  inclui uma medida de respostas dinâmicas relevantes. Como a característica principal de um conversor de potência é dada por sua capacidade de rejeitar perturbações, isto é, mudanças na carga, e em nosso caso tem que operar com tensões de saída entre 12V e 100V, os quatro experimentos selecionadas foram:

- com uma tensão de referência de  $12V$ , o carga  $R$  foi mudada de  $40\Omega$  a  $120\Omega$ .
- com uma tensão de referência de  $12V$ , o carga  $R$  foi mudada de  $120\Omega$  a  $40\Omega$ .
- com uma tensão de referência de  $100V$ , o carga  $R$  foi mudada de  $40\Omega$  a  $120\Omega$ .
- com uma tensão de referência de  $100V$ , o carga  $R$  foi mudada de  $120\Omega$  a  $40\Omega$ .

O  $F(x)$  foi calculado simulando quatro vezes o sistema em malha fechada. Cada simulação corresponde a um valor dado da variável de decisão  $x = [L \ C \ T \ K_P \ K_I \ K_D \ N]^T$ . As restrições (5.1, 5.2, 5.3) também são avaliadas em cada um dos quatro estados estacionários dados na tabela 5.3, correspondentes com as quatro experiências.

$i$	$V_0$	$R$
1	12	120
2	12	40
3	100	120
4	100	40

Tabela 5.3: Pontos de Operação.

Finalmente, um conjunto de restrições dinâmicas adicionais são impostas para garantir estabilidade e o tipo de resposta em malha fechada. Estas restrições correspondem aos pólos em malha fechada do sistema, que deverão estar contidos na região mostrada na Figura 5.6. A função de transferência em malha fechada é calculada us-

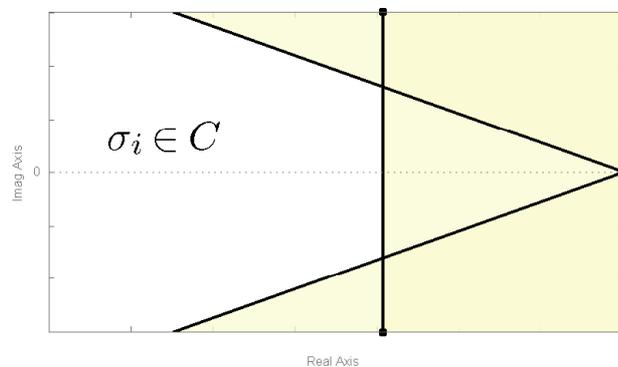


Figura 5.6: Região permitida para os autovalores em malha fechada.

ando o modelo do PID (5.4) e os modelos linearizados em cada um dos quatro pontos de operação selecionados.

Note que, neste caso, o ponto de operação será escolhido pelo operador dentro do intervalo especificado. Portanto, a tensão de saída não é dada pelo projeto. Em outros casos de projeto integrado, o objetivo pode ser especificado em termos de custos dos componentes e especificações tal como consumo de energia. Então o melhor ponto de operação pode ser selecionado pela otimização, cumprindo as restrições.

## Resultado

O projeto integrado então é formulado como a solução do problema de otimização não-linear:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && F(x) = \int_{t_i}^{t_f} e_1^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_2^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_3^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_4^2 dt \\ & x = [L, C, T, K_P, K_I, K_D, N]^T \\ & \text{Sujeito a:} && \begin{aligned} & [2.10] [2.11] [2.12] \forall t \\ & [2.13] [2.14] [2.15] \forall t \\ & [5.1], \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ & [5.2], \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ & [5.3], \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ & \text{pólos}(A_i, B_i, C_i) \in \sigma, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ & x \in \mathbb{R}^7 \end{aligned} \end{aligned}$$

As matrizes  $A_i(x)$ ,  $B_i(x)$ ,  $C_i(x)$ , correspondem à representação em variáveis de estados dos modelos linearizados em cada um dos quatro pontos selecionados.

O algoritmo de programação quadrática seqüencial (SQP) implementado em MATLAB<sup>®</sup> foi usado para resolver o problema. Os parâmetros ótimos de projeto obtidos são mostrados na tabela 5.4.

Parâmetros	Valor
$L$	$5.2 * 10^{-3} H$
$C$	$3.2220 * 10^{-4} F$
$T$	$3.3334 * 10^{-6}$
$K_P$	$4.7158 * 10^{-4}$
$K_I$	1.0158
$K_D$	$1.8806 * 10^{-5}$
$N$	824.7588

Tabela 5.4: Solução

Respostas comparativas das soluções com e sem projeto integrado são mostrados na Figuras 5.7 e 5.8 para as quatro experiências.

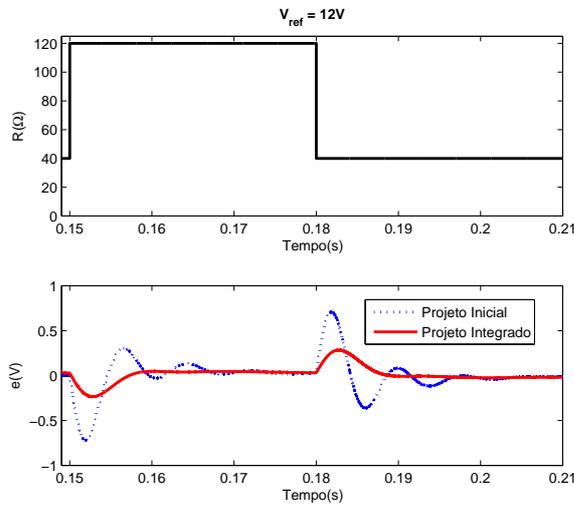


Figura 5.7: Resposta comparativa nas experiências 1 e 2.

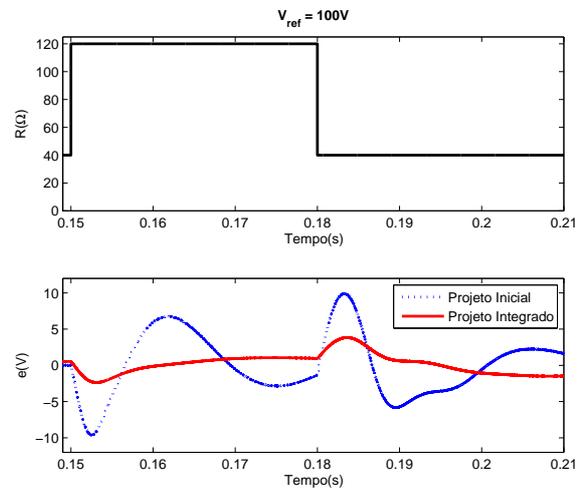


Figura 5.8: Resposta comparativa nas experiências 3 e 4.

Como podemos ver, o CBB projetado levando em conta a dinâmica em malha fechada mostra desempenho superior que o CBB projetado pelo método tradicional. Embora o  $L$  e  $T$  calculados sejam similares aos do projeto inicial, o novo  $C$  é da ordem de 100 vezes superior ao capacitor inicial, e portanto é claro que o sistema deverá apresentar melhor desempenho. Mas isso tem também outras implicações como por exemplo o tamanho e custo do conversor, que não foram considerados neste estudo de caso.

O estudo de caso anterior tem uma grande importância prática dado que os controladores PID ainda são usados no controle de conversores de baixo custo e as técnicas clássicas de projeto são usadas para o seu ajuste. Porém, deve ser destacado que as características não-lineares do CBB não permitem que se atinjam respostas muito rápidas e uniformes em toda a faixa de operação do CBB. Para conseguir melhorar a performance do PID, sistemas de controle mais avançados devem ser usados. No próximo estudo de caso, o projeto integrado se aplica novamente a um conversor BB, mas utilizando uma técnica de controle comutada e um modelo híbrido do CBB para o projeto da mesma.

### 5.4.2 Projeto Integrado de um CBB e um CMD

Neste exemplo vamos usar o CBB apresentado em (Mattavelli et al. 1997), cujos parâmetros são apresentados na Tabela 5.5. Este CBB em particular foi escolhido a fim de comparar o desempenho da proposta de projeto integrado do CBB com um controlador por modos deslizantes (CMD) e o projeto seqüencial apresentado em (Mattavelli

Elemento	Valor
Tensão da fonte ( $V_{cc}$ )	12V
Resistência (valor min) ( $R_{min}$ )	20 $\Omega$
Resistência (valor max) ( $R_{max}$ )	150 $\Omega$
Tensão da saída ( $V_o$ )	20V
Indutância ( $H$ )	360 $\mu H$
Capacitância ( $C$ )	100 $\mu F$
Max. frequência chaveamento ( $f_{S_{max}}$ )	50kHz

Tabela 5.5: Parâmetros do CBB.

et al. 1997) usando um controlador geral tipo *fuzzy*, que foi uma das melhores soluções que achamos na literatura.

A seguir vamos realizar o projeto do CBB, mas agora considerando o mesmo como um sistema híbrido, ou seja, um sistema que mistura variáveis contínuas (tensão e corrente) e variáveis discretas (sinal de controle sobre a chave  $\{0, 1\}$ ), e portanto vamos realizar o projeto com base em seu modelo instantâneo.

Neste estudo se utilizará um controlador por modos deslizantes que permite levar em conta a característica híbrida do sistema, e atua diretamente sobre a chave e não mais sobre o PWM.

### Controle por Modos Deslizantes (CMD)

O controle por modos deslizantes (CMD) é uma técnica de controle não-linear amplamente estudada na literatura e tem sido aplicada com bons resultados nos sistemas de estrutura variável, (Borges 2002), sistemas que apresentam descontinuidades nas equações que o modelam. Devido a essas descontinuidades a maioria das ferramentas matemáticas desenvolvidas para equações diferenciais e sistemas dinâmicos não são aplicáveis, pois pressupõem a continuidade do lado direito das equações, (Itkis 1976) (Utkin 1974 (English Translation 1978)).

Essencialmente a lei de controle para sistemas de estrutura variável atua direcionando as trajetórias do sistema a uma variedade do plano de fase chamada superfície de deslizamento ou de comutação e, uma vez nela, mantém-se confinada a essa variedade, dando origem a que se conhece como modo deslizante.

A trajetória de um modo deslizante não verifica a equação diferencial ordinária (EDO) de nenhuma das estruturas, mas ela existe como solução global do problema.

As superfícies de comutação são projetadas de tal maneira que o movimento dos estados do sistema confinados à mesma exibam o comportamento desejado de regulação ou *tracking*.

Consideremos o seguinte sistema ao qual devemos projetar um controlador por modos deslizantes, (Mattavelli et al. 1993):

$$\dot{x} = f(x, t, u) \quad (5.6)$$

onde:  $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $f : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função vectorial, e  $u$  é a entrada de controle.

Seja  $\sigma(x, t) : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua com gradiente não nulo em  $D$ , a partir da qual definimos a seguinte superfície:

$$S = \{(x, t) \in D \times \mathbb{R}, \sigma(x, t) = 0\} \quad (5.7)$$

que chamamos de superfície de comutação e será projetada de forma tal que a lei de controle:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{se } \sigma(x, t) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{se } \sigma(x, t) < 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

direcione as trajetórias do sistema em direção à mesma e que contenha o ponto de equilíbrio que desejamos alcançar em estado estacionário. A função  $f$  vai apresentar, então, uma descontinuidade em  $S$  devido a essa ação de controle:

$$f(x, t, u) = \begin{cases} f^+(x, t, u^+) & \text{se } \sigma(x, t) \rightarrow 0^+ \\ f^-(x, t, u^-) & \text{se } \sigma(x, t) \rightarrow 0^- \end{cases} \quad (5.9)$$

Para que um modo deslizante exista as trajetórias do sistema das duas sub-estruturas, correspondentes aos dois diferentes valores do vetor função  $f$ , devem estar direcionados à superfície de deslizamento ou de comutação. Então:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} f_i^+ < 0 \Rightarrow \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \nabla \sigma \cdot f^+ < 0 \quad (5.10)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^-} f_i^- > 0 \Rightarrow \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \nabla \sigma \cdot f^- > 0$$

onde  $i$  representa os componentes do vetor  $\dot{x}$ , e  $\nabla \sigma$  é o gradiente de função  $\sigma$ .

Como:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \nabla \sigma \cdot f \quad (5.11)$$

então a condição de existência dos modos deslizantes pode formular-se nos seguintes

termos:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{d\sigma}{dt} < 0 \\ \Rightarrow \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \frac{d\sigma}{dt} < 0 \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \frac{d\sigma}{dt} > 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

A região do espaço de estados:

$$\Omega = \{(x, t) \in D \times \mathbb{R}, \sigma(x, t) \dot{\sigma}(x, t) < 0\} \quad (5.13)$$

define a região de existência dos modos deslizantes.

portanto o domínio dos modos deslizantes fica definido em:

$$\psi = S \cap \Omega \quad (5.14)$$

Modos deslizantes puros aparecem apenas quando  $x \in S, \forall t > 0$  na região  $\Omega$ , o que demanda uma frequência de comutação infinitamente alta, não alcançável em sistemas reais. A limitação em frequência resulta em um movimento dentro da vizinhança da superfície de comutação, chamado de fenômeno de *chattering*. Em sistemas reais o controle apresenta um comportamento de histerese.

### Projeto do CMD para o CBB

Na figura 5.9 mostra-se o esquema básico de controle por modos deslizantes.

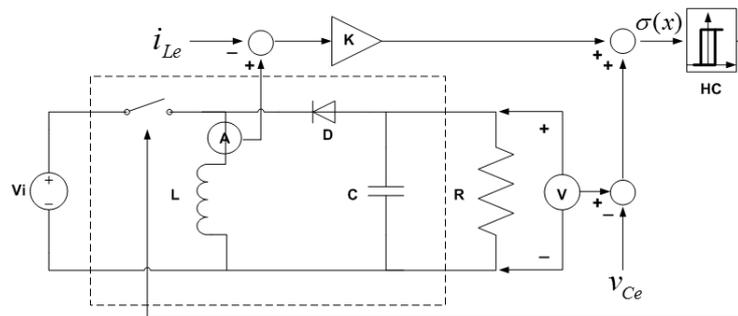


Figura 5.9: Esquema básico de controle.

A curva de comutação  $\sigma(x, t)$  é calculada como uma combinação linear das variáveis de estado, isto resulta numa implementação muito simples do controle real:

$$S = \{(x, t) \in D \times \mathbb{R}, \sigma(x, t) = k(i_L - i_{Le}) + (v_C - v_{Ce}) = 0\} \quad (5.15)$$

onde:  $(i_{Le}, v_{Ce})$  é o ponto de equilíbrio que desejamos alcançar em estado estacionário, e  $k$  é um parâmetro de projeto que pode ser calculado impondo a condição de existência (5.13).

Esta estrutura de controle necessita do valor de referência da corrente pelo indutor, o que na prática é difícil de avaliar dado que em geral este valor depende da demanda de carga (ou seja da resistência  $R$ ) que a priori é desconhecida (e vai ser considerado como uma perturbação do nosso sistema). Para salvar este problema, em uma implementação real a corrente do indutor,  $i_L$ , passa através de um filtro passa alto (HPF), forçando a que o valor médio deste erro vá a zero em estado estacionário e, portanto, impondo 5.15, também forçamos que a tensão de saída vá a seu valor de referência em estado estacionário. Neste caso o valor final da corrente pelo indutor em estado estacionário é definido pelas condições de carga mas sem afetar o valor da superfície de deslizamento  $S$ . A estrutura do CMD com o filtro HPF é mostrada na Figura 5.10.

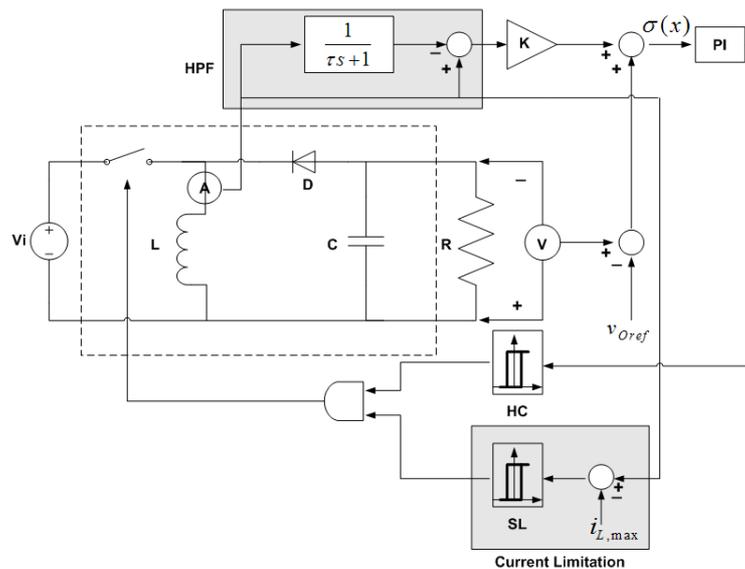


Figura 5.10: Esquema de simulação.

Este filtro adiciona um novo parâmetro para sintonização: a constante de tempo do filtro  $\tau$ , a qual afeta diretamente o comportamento do filtro (Mattavelli et al. 1993). Note que este filtro deve permitir uma resposta rápida e, ao mesmo tempo,  $\tau$  deve ser superior ao período de comutação. Uma regra prática para calcular  $\tau$  é escolher um valor na proximidade da frequência natural do sistema (Mattavelli et al. 1997).

No entanto, devido à histerese (5.16), pode acontecer que o valor médio de  $S$  seja diferente de zero, e portanto pode aparecer um erro na saída de tensão em estado estacionário. O problema pode ser resolvido colocando um controlador PI sobre o sinal

representado por  $\sigma(x, t)$ , agindo apenas quando os estados estão sobre  $S$ , tal que a dinâmica do sistemas durante o transiente não seja modificada. No entanto, neste estudo de caso será utilizado o esquema da Figura 5.10, onde o PI atuará durante todo o tempo e não só no estado estacionário. Vamos a sintonizar o PI para que tenha a menor influência possível no transiente e cumpra sua função no estado estacionário.

A fim de limitar o fenômeno do *chattering*, a lei de controle (5.8) é formulada com uma pequena histerese, conforme pode ser visto na Figura 5.10, sendo  $2\beta$  a correspondente largura:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma(x, t) > +\beta \\ 1 & \text{se } \sigma(x, t) < -\beta \end{cases} \quad (5.16)$$

onde, no nosso caso para a simulação:  $\beta = 0.1$ .

Finalmente, como mostrado no esquema CMD, o circuito inclui um limitador de corrente máxima pelo indutor. A estrutura completa é utilizada para as simulações nas seguintes seções.

A sintonização completa do CMD consistindo na sintonização do controlador PI, o filtro e o ganho de  $S$  podem ser feitos utilizando metodologias tradicionais (Spiazzi et al. 1997, Borges e Pagano 2002, Tan et al. 2006) ou um processo de otimização, como será mostrado mais adiante.

### Sintonização Tradicional do CMD

A fim de comparar o desempenho dos diferentes controladores, no presente trabalho é usado o procedimento de sintonização do CMD apresentado em Spiazzi et al. (1997).

Primeiro  $k$  e  $\tau$  são escolhidos, a fim de ter um adequado desempenho em malha fechada no ponto de operação definido por  $V_o$  e  $R$  usando (Spiazzi et al. 1997):

$$k < -\frac{L}{RC} \frac{D}{D'}$$

$$\tau > \frac{RC}{\frac{D'^2}{D}R + (2 - D')\frac{L}{RC}} \frac{D'}{D}$$

onde:  $D = \frac{V_o}{V_o + V_{cc}}$  e  $D' = 1 - D$ .

No nosso caso, como o CBB opera em  $V_o = 20V$  e para  $R = 20\Omega$  e  $R = 150\Omega$ , duas diferentes sintonizações são obtidas, uma para cada carga.  $k$  e  $\tau$  que cumpram as condições em ambos os casos foram selecionados como os parâmetros finais de sintonização. Na segunda etapa o controlador PI foi sintonizado usando a teoria clássica de projeto de controladores lineares. Os valores obtidos são apresentados na tabela 5.6.

Parâmetro	Valor
$k$	-0.45
$\tau$	$3.6 * 10^{-4}$
$K_p$	500
$K_i$	3000

Tabela 5.6: Sintonização Tradicional do CMD

### Projeto Integrado

O projeto integrado se realiza da mesma forma que no caso anterior. Neste caso a função objetivo será escolhida diferente e o vetor de variáveis de decisão é  $z = [L, C, k, \tau, K_p, K_i]^T$ . As restrições impostas pelo processo e controle são dadas pelo modelo de simulação da Figura 5.10.

### Função Objetivo

Da mesma forma que para o caso de estudo anterior, a função objetivo  $F(z)$  é definida igual ao erro quadrático integral (EQI) calculada em uma situação particular de simulação. Neste caso, duas experiências em simulação representativas são escolhidas abrangendo as situações extremas de funcionamento do CBB quando o mesmo trabalha com  $V_O = 20V$ .

As simulações consideram uma mudança tipo degrau na carga entre 20 e 150 $\Omega$ , o que é considerado a pior perturbação dinâmica para o controlador, isto é, a mais rápida mudança na carga com a máxima amplitude possível. Assim, dois casos são considerados:

1. com uma referência de 20V, a resistência  $R$  varia de 20 $\Omega$  a 150 $\Omega$  em  $t = 10$ ms.
2. com uma referência de 20V, a resistência  $R$  varia de 150 $\Omega$  a 20 $\Omega$  em  $t = 20$ ms.

A função custo  $F(z)$  será o erro quadrático acumulado destes dois experimentos:

$$F(z) = \lambda \int_{t_i}^{t_f} e_{i1}^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_{v1}^2 dt + \lambda \int_{t_i}^{t_f} e_{i2}^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_{v2}^2 dt \quad (5.17)$$

onde  $t_i = 10$ ms,  $t_f = 30$ ms,  $e_{ij}$  ( $j = 1, 2$ ) é a corrente pelo indutor ( $i_L$ ) depois de passar pelo HPF, e  $e_{vj} = v_{Ce_j} - v_C$  ( $j = 1, 2$ ) é a diferença entre a referência de saída desejada ( $v_{Ce_j}$ ) e o valor atual de essa tensão calculada com o modelo em malha fechada. O experimento começa no ponto inicial  $i_L = 0$ ,  $v_C = 0$  em  $t = 0$ . Note que  $F(z)$  inclui uma medida relevante da resposta dinâmica. Embora o principal objetivo do controlador

consiste em obter a mais rápida rejeição da perturbação na carga sob a tensão de saída, também é importante manter a ondulação de  $i_L$  em um valor desejado. Este objetivo é conseguido incluindo o erro na corrente em  $F(z)$ . Para fins de sintonização um coeficiente de ponderação  $\lambda$  é incluído em  $F(z)$ , permitindo alcançar um compromisso entre a rapidez do transiente da tensão e a ondulação da corrente pelo indutor.

Finalmente, note-se que o projeto multi-ponto tem por objetivo lidar com a incerteza em relação ao ponto de operação e a perturbação. No caso do CBB isto permite ter em conta as diferentes condições de funcionamento, garantindo o desempenho desejado em todos eles. Este objetivo é muito difícil de conseguir utilizando os métodos tradicionais de projeto do CMD.

Simulações exaustivas foram realizadas para testar a solução obtida sob diferentes condições de carga. Os resultados de simulação corroboraram que as piores situações dinâmicas foram obtidas para os casos extremos em relação a carga, aqueles escolhidos para a definição da função custo. Assim, é possível garantir que a solução obtida dá o desempenho desejado para todas as possíveis condições de carga.

Para concluir com o procedimento de otimização o conjunto de restrições de funcionamento devem ser definidas.

### Restrições do Problema de Otimização Não-Linear

O desempenho dinâmico é calculado apenas em termos da função custo  $F(z)$ , (5.17).

No caso analisado apenas restrições de desigualdade são consideradas para a obtenção de valor positivo de  $L, C, \tau, K_p, K_i$  e valores negativos de  $k$  no intervalo desejado para cada parâmetro.

Para achar a solução ao problema de otimização a função *fminsearch.m* é usada. *fminsearch.m* é uma das funções disponíveis no *toolbox* de otimização do MATLAB®.

O diagrama de blocos apresentado na Figura 5.11 ilustra o procedimento utilizado para obter o melhor valor dos parâmetros. Note que a estratégia combina simulações do sistema em malha fechada e a avaliação da função custo de forma recursiva.

A função *fminsearch* resolve um problema de otimização não-linear sem restrições considerando uma determinada função custo e uma condição inicial ( $z_0$ ) dada. Neste caso, a função custo  $J = obj(z)$  é calculada utilizando o índice EQI e a tensão e corrente do CBB obtidos na simulação. As restrições de operação neste caso de estudo estão incluídas no modelo de simulação em malha fechada, como por exemplo, o valor máximo da corrente. O bloco  $J = obj(z)$  necessita, a cada passo, o vetor com os valores dos parâmetros do processo e controle ( $z$ ) calculados pela *fminsearch* e os valores da corrente e tensão obtidos da simulação do experimento.

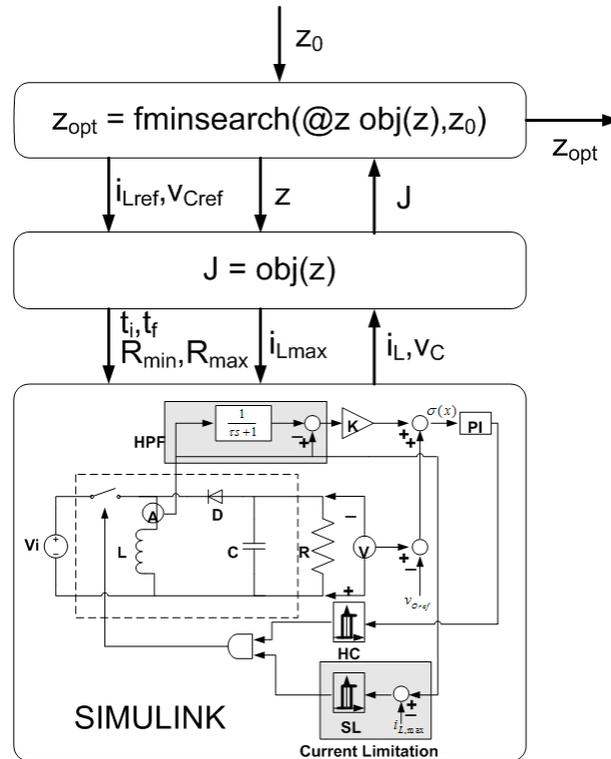


Figura 5.11: Diagrama de blocos do procedimento usado para obter os valores ótimos dos parâmetros.

Os parâmetros ótimos de projeto, obtidos com o método proposto, são apresentados na tabela 5.7 para três diferentes valores de  $\lambda$ . Como pode ser visto, quando  $\lambda$  aumenta,

Parâmetro	$\lambda = 0.001$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 0.1$
$L$	$123.84\mu H$	$186.23\mu H$	$234.29\mu H$
$C$	$306.11\mu F$	$289.86\mu F$	$257.80\mu F$
$k$	$-0.0773$	$-0.0983$	$-0.2133$
$\tau$	$6.3019 * 10^{-5}$	$1.1623 * 10^{-4}$	$1.0330 * 10^{-4}$
$K_p$	$1.1020 * 10^{+3}$	$1.8827 * 10^3$	$714.4854$
$K_i$	$104.5357$	$-704.6957$	$302.0579$

Tabela 5.7: Solução do Projeto Integrado para o CMD e o CBB.

$L$  aumenta e  $C$  diminui, o que significa que, como esperado, uma menor ondulação é obtida em  $i_L$ . Como será mostrado nas simulações o preço a pagar por isto é um transiente de tensão mais lento.

Previamente à comparação dos resultados de desempenho do CMD tradicional (CMDT) com o do projeto integrado (PICMD), resulta interessante analisar o ajuste do CMD utilizado no projeto tradicional. Como o objetivo deste trabalho é mostrar as vantagens do projeto integrado, é importante certificar-se que o CMD ajustado para

um dado BBC é o que obtém o melhor desempenho. Assim, se o PICMD apresenta alguma vantagem frente ao CMDT, esta será atribuída ao conceito de integração do projeto do controle e o conversor. Para isto, no que segue, se realiza a sintonia ótima do CMD para o BBC e se compara com a sintonia tradicional.

### Sintonização Ótima do CMD para o Procedimento Tradicional de Projeto

A fim de obter então o melhor desempenho do CMD, no procedimento de projeto tradicional, a sintonia de  $k, \tau, K_p, K_i$  pode ser realizada utilizando o mesmo problema de otimização apresentado anteriormente, mas mantendo  $L$  e  $C$  com os valores do projeto original, e usando a nova função custo:

$$F(z) = \int_{t_i}^{t_f} e_{v1}^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_{v2}^2 dt \quad (5.18)$$

com as mesmas restrições, modelo e controlador do caso anterior. Note que  $i_L$  não é utilizada na  $F(z)$ , porque neste caso, como  $L$  e  $C$  são dadas, a ondulação na corrente também é dada. Assim, neste caso, apenas vamos procurar pelo melhor conjunto de parâmetros sintonizáveis  $k, \tau, K_p, K_i$  para um determinado BBC. No problema de otimização a variável de decisão  $z$  agora é  $z = [k, \tau, K_p, K_i]^T$ . Portanto, na análise comparativa apresentada a seguir, podemos ter a certeza que a melhora no desempenho se deve à abordagem do projeto integrado e não apenas devido à correta sintonização dos parâmetros do controlador.

Os valores obtidos neste caso são mostrados na tabela 5.8. Esta solução ótima

Parâmetro	Valor
$k$	-0.3887
$\tau$	$3.7285 * 10^{-4}$
$K_p$	538.9976
$K_i$	$3.0869 * 10^{+3}$

Tabela 5.8: Solução do problema de projeto tradicional ótimo com o CMD.

do CMD (CMDO) pode ser comparada à sintonização tradicional do CMD (CMDT) apresentado anteriormente (Spiazzi et al. 1997) e o controlador *fuzzy* (CF) apresentado em (Mattavelli et al. 1997).

A tabela 5.9 mostra alguns índices comparativos, quando estes três controladores são utilizados na mesma simulação teste: com um *set point* de 20V, a carga  $R$  foi alterada de 20Ω a 150Ω em  $t = 10ms$  e de 150Ω a 20Ω em  $t = 20ms$ .

Esta análise comparativa mostra que a abordagem CMDT pode atingir quase um

Controlador	Pico (V)	Tempo de estabelecimento (ms)
CMDT	0.8	1.5
CMDO	0.8	1.5
CF	1.3	2.5

Tabela 5.9: Análise comparativa entre CMDT, CMDO e CF

desempenho ideal quando um único ponto de operação é considerado (neste caso  $V_{ref} = 20V$ ).

Note que o desempenho em malha fechada do CMDO é melhor do que o obtido utilizando o CF. Observe também que outra vantagem da abordagem CMD é que é um controlador mais simples e pode ser implementado em dispositivos analógicos baratos.

Para finalizar o estudo se realiza a seguir um conjunto de simulações com o PICMD para mostrar sua flexibilidade no projeto (variando o parâmetro  $\lambda$ ) e também se comparam os resultados obtidos com o CMDO/CMDT anteriormente descritos.

### Resultados de Simulação

Respostas comparativas da solução do projeto integrado do CMD (PICMD) com a função custo definida anteriormente para diferentes parâmetros de sintonização são apresentados a seguir.

A Figura 5.12 mostra alguns experimentos, com mudanças na carga entre 20 e 150 $\Omega$  e vice-versa. Como podemos ver, o melhor desempenho em termos do transiente da tensão é obtido, como esperado, para o caso  $\lambda = 0.001$ . Neste caso, a ondulação na corrente tem maior amplitude, o que também é esperado porque permitimos que valores mais elevados do erro na corrente.

Por outro lado, um transiente de tensão mais lento e ondulação de corrente menor são obtidos para o caso  $\lambda = 0.1$ . As Figuras 5.13 e 5.14 mostram em detalhe as respostas transientes e o estado estacionário nos dois experimentos para o caso com  $\lambda = 0.001$  e  $\lambda = 0.1$ , que são os casos extremos em termos de ondulação na corrente.

Note que o valor em estado estacionário da frequência de chaveamento ( $f_s$ ) tem valores semelhantes em todos os casos simulados e é sempre menor a 50kHz.

Observe que a performance obtidas nestas simulações são melhores do que no CMDO apresentados anteriormente. O melhor desempenho obtido no PICMD tem uma interpretação física: os resultados obtidos para  $L$  e  $C$  no PICMD são diferentes dos utilizados no CMDO, que são escolhidos usando apenas especificações em estado estacionário. É claro então que o melhor projeto é obtido quando um certo compromisso entre a operação em estado estacionário e o desempenho em malha fechada é alcançado.

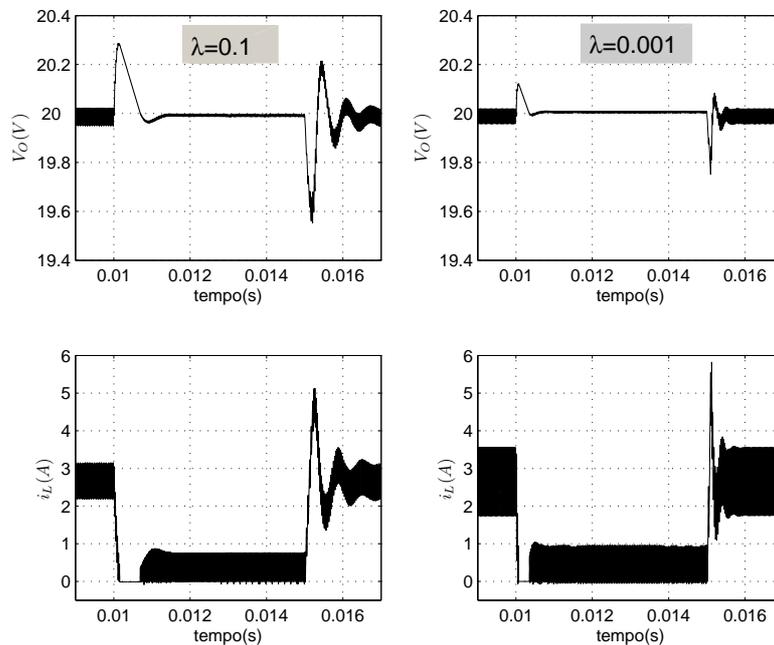


Figura 5.12: Resultados comparativos, da corrente pelo indutor e tensão de saída.

Controlador	Pico (V)	Tempo de estabelecimento (ms)
CMDT/CMDO	0.8	1.5
PICMD $\lambda = 0.1$	0.45	1.0
PICMD $\lambda = 0.001$	0.22	< 1.0

Tabela 5.10: Análise comparativa entre CMDT/CMDO e PICMD

Esta é uma das principais vantagens da abordagem proposta, que pode incluir várias especificações de projeto no problema de otimização.

Além disso, este exemplo demonstra a flexibilidade da abordagem proposta a qual permite ao projeto do CMD considerar especificações sobre a resposta no tempo sem ter que realizar uma sintonização dos parâmetros do CMD por tentativa e erro.

### Melhorando o Projeto

A abordagem proposta baseada no projeto multi-ponto e um índice de desempenho baseado no tempo podem melhorar o projeto do controlador e do CBB em várias diferentes situações. Considere, por exemplo, que o CBB também possa operar com uma tensão de saída diferente, por exemplo:  $V = 30V$ , e com os mesmos valores de carga. O projeto integrado pode então ser modificado para introduzir o teste de simulação quando há mudança na carga, mas agora com tensão de saída igual a  $30V$ .

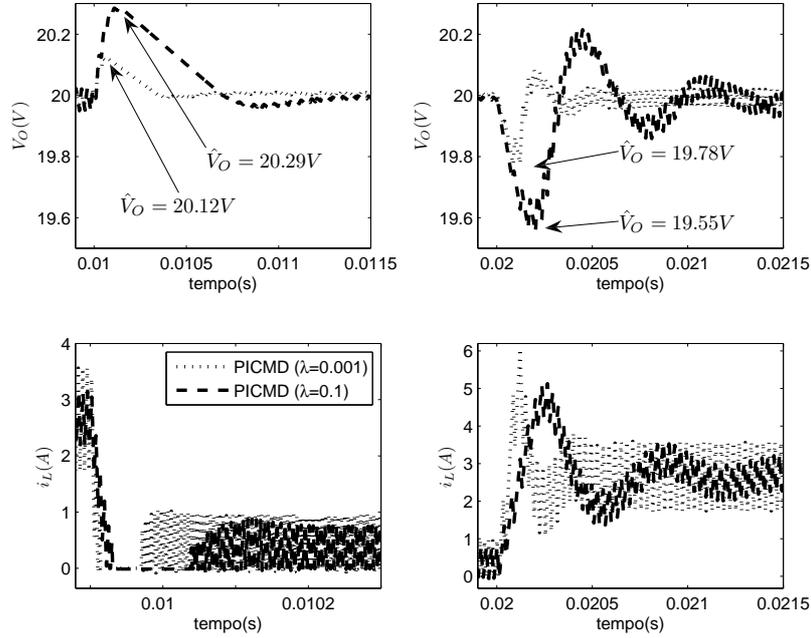


Figura 5.13: Detalhe do transiente.

Isto implica a definição de uma nova função de custo:

$$\begin{aligned}
 F(z, x, u) = & \lambda \int_{t_i}^{t_f} e_{i1}^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_{v1}^2 dt \\
 & + \lambda \int_{t_i}^{t_f} e_{i2}^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_{v2}^2 dt \\
 & + \lambda \int_{t_i}^{t_f} e_{i3}^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_{v3}^2 dt \\
 & + \lambda \int_{t_i}^{t_f} e_{i4}^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} e_{v4}^2 dt
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

que considera os erros na tensão e corrente nos quatro experimentos. Isto é,  $e_{i1}$ ,  $e_{v1}$ ,  $e_{i2}$ ,  $e_{v2}$  são os mesmos erros que em (5.5) e  $e_{i3}$ ,  $e_{v3}$ ,  $e_{i4}$ ,  $e_{v4}$  são os erros no teste da perturbação de carga com tensão de saída 30V. Os tempos iniciais e finais são respectivamente,  $t_i = 5\text{ms}$  e  $t_f = 30\text{ms}$ . A Figura 5.15 mostra o desempenho do novo projeto (PICMD2) e do projeto integrado anterior (PICMD1), obtido com uma tensão de saída igual a 20V. Como se pode ver, o PICMD2 (linha pontilhada) tem melhor desempenho que o PICMD1 (linha sólida). Observe também que o PICMD1 não pode manter a tensão de saída no valor de referência de 30V, quando a carga é 20Ω. No teste de simulação a carga varia de 150Ω para 20Ω em  $t = 10\text{ms}$  e de 20Ω para 150Ω

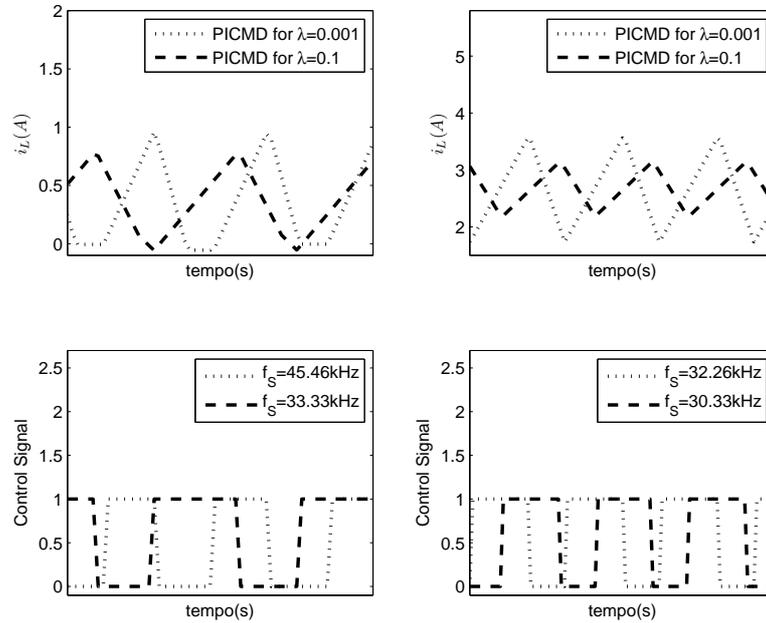


Figura 5.14: Detalhe do estado estacionário.

em  $t = 20\text{ms}$ . Por simplicidade, neste caso apenas um valor de  $\lambda$  é usado ( $\lambda = 0.1$ ) como mostra-se nas simulações.

Note que, como o PICMD1 foi projetado apenas para o caso  $V = 20\text{V}$ , ele mostra um comportamento instável e indesejável na corrente pelo indutor quando o CBB opera em  $V = 30\text{V}$ . Como pode ser visto na figura 5.15, quando a corrente no indutor atinge  $10\text{A}$ , aciona o limitador de corrente e isso causa uma nova comutação neste ponto. Esse comportamento indesejável é evitado quando um novo ponto de operação é considerado no projeto do controlador, como pode ser observado nas linhas pontilhadas da figura 5.15 (caso PICMD2).

Os parâmetros ótimos de projeto do PICMD2 são apresentados na tabela 5.11 para  $\lambda = 0.1$ .

Parâmetro	$\lambda = 0.1$
$L$	$234.29\mu\text{H}$
$C$	$257.80\mu\text{F}$
$k$	$-0.2133$
$\tau$	$1.0330 * 10^{-4}$
$K_p$	$714.4854$
$K_i$	$302.0579$

Tabela 5.11: Parâmetros ótimo do PICMD2

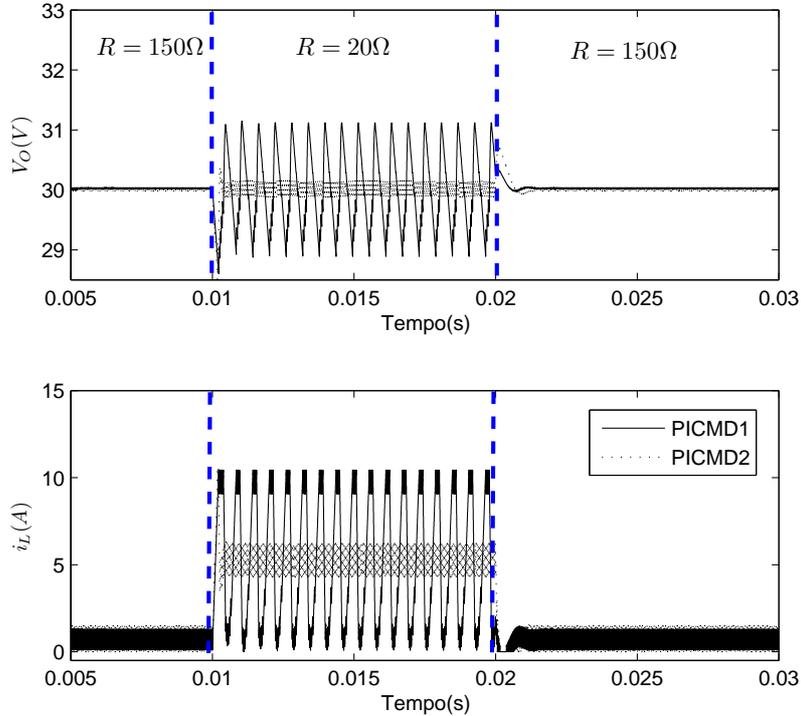


Figura 5.15: Saída de tensão e corrente para os dois PICMD.

Alternativamente, um procedimento de otimização com o modelo e restrições de especificação pode ser usado para escolher tal conjunto de parâmetros utilizando um critério econômico. O problema poderia ser formulado como nos casos anteriores, mas com uma nova função de custo  $F_n(x, z, u) = F(x, z, u) + F_c(z)$  onde  $F_c(z)$  pode representar, por exemplo, o preço dos componentes.

O PICMD2 com o ajuste apresentado na tabela 5.11 também pode ser usado para analisar o desempenho do sistema em malha fechada perante uma mudança na referência de tensão de saída. Este é em particular um ponto importante, pois pode mostrar como a estratégia de controle proposta pode compensar o chamado “comportamento de fase não-mínima” do CBB. Este comportamento dinâmico é normalmente modelado através de um zero no semi-plano direito no modelo linearizado do CBB, relacionando o ciclo de trabalho (ação de controle) com a tensão de saída (Pomar 2005). No caso do PICMD não é necessário considerar explicitamente este efeito porque o modelo linear não é utilizado no projeto. Por outro lado, a minimização da função objetivo, que mede o erro  $(V_{ref} - V_O)$  durante o transiente, minimiza esse efeito. A Figura 5.16 mostra uma simulação onde duas mudanças na referência de tensão (de 20V a 30V e de 30V a 20V) são realizadas.

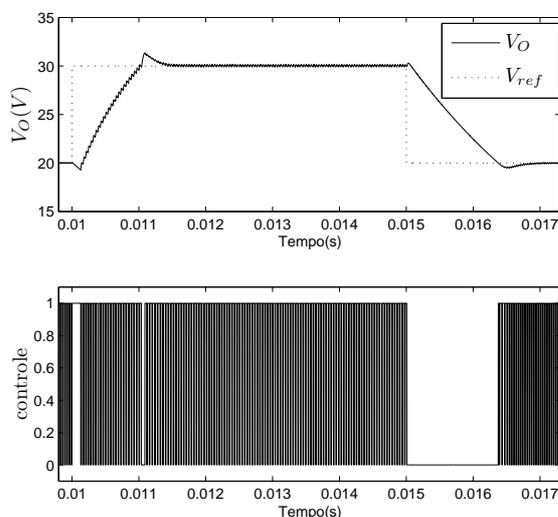


Figura 5.16: Tensão de saída e controle perante uma mudança na tensão de referência.

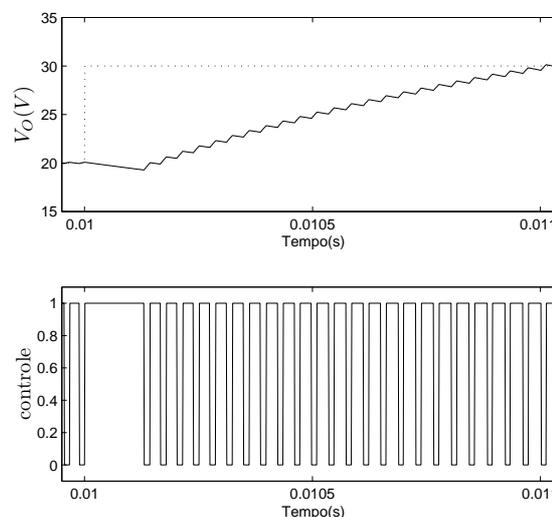


Figura 5.17: Detalhe da tensão de saída e controle perante uma mudança na tensão de referência.

Como se pode ver, “comportamento de fase não-mínima” é atenuado. Note que o “pico inverso” mantém-se menor do que  $1V$  e seu efeito desaparece perto dos  $0.2ms$ . A Figura 5.17 mostra um detalhe desta simulação. Note-se que logo após a mudança na tensão de referência a chave mantém-se em estado de condução ( $ON$ ) e isso causa uma diminuição da tensão durante um curto período de tempo necessário para armazenar a energia no indutor.

## 5.5 Sumário

Neste capítulo foram desenvolvidos aspectos teóricos relacionados com o Projeto Integrado de Processos e Controle.

Realizaram-se dois estudos de caso para mostrar a importância da metodologia no projeto de controle e conversores de potência CC-CC. No primeiro caso, projetou-se um conversor buck-boost com um controle tipo PID. No segundo caso, considerou-se o modelo híbrido do CBB e projetou-se o conversor com um controlador por modos deslizantes. Em ambos os casos mostraram-se as vantagens da utilização do método com o fim de obter um sistema em malha fechada com uma performance otimizada.

A aplicação da metodologia de projeto integrado a sistemas eletrônicos de potência é uma contribuição deste trabalho.

O passo seguinte nesta pesquisa consistiria em aplicar a metodologia de projeto integrado ao CBB usando o MIPC.

Trabalhos futuros poderiam também tratar de generalizar os resultados obtidos para sistemas comutados em geral, assim como estudar índices de controlabilidade que permitam caracterizar aspectos relacionados à controlabilidade desta classe de sistemas.

# Capítulo 6

## Conclusões

Esta tese apresentou diversos aspectos relacionados com a modelagem, análise e controle de sistemas comutados, particularmente os conversores de potência. Para o estudo destes sistemas foi necessário recorrer ao conceito de sistema híbrido dado que pelas suas características dinâmicas os sistemas tratados nesta tese não podem ser considerados nem sistemas contínuos nem discretos.

O primeiro contexto de modelagem visto foi os Sistemas Afins por Partes (PWA), desenvolvido nesta tese devido à facilidade que apresenta este contexto para estudar a estabilidade dos Sistemas Comutados (SC). O uso desta ferramenta de modelagem foi ilustrada com um Conversor Buck Boost (CBB), processo foco de estudo desta tese.

Em segundo lugar foi apresentado o contexto dos Sistemas Mistos Lógicos Dinâmicos (MLD) que é bastante importante, pois permite de forma sistemática modelar uma grande quantidade de diferentes tipos de Sistemas Híbridos (SH). A metodologia de modelagem neste contexto também foi mostrada aplicando-a a um CBB.

Tanto o contexto PWA como o contexto MLD permitem modelar o CBB em todos seus modos de funcionamento, ou seja tanto em modo de condução contínua como no modo de condução descontínua, este justamente é um dos aspectos relevantes e mais importantes que motivam o estudo deste tipo de modelos.

Uma recompilação e resumo dos principais resultados da literatura relacionados à análise da estabilidade de sistemas comutados autônomos lineares onde o sinal de comutação é um sinal arbitrário foi realizado. Para o caso dos sistemas afins por partes, que é o caso de muitos Conversores de Potência (CP), existe uma lacuna teórica. A generalização dos resultados teóricos estudados neste trabalho para sistemas PWA poderiam ser objeto de estudos futuros. Estudaram-se condições necessárias e suficientes de estabilidade baseadas nos conceitos de Raio Espectral Generalizado (GSR) e Raio Espectral Conjunto (JSR). Mostrou-se que o cálculo do JSR é um problema computa-

cionalmente complexo, o que limita a aplicação desta ferramenta para a maioria das aplicações.

Estudaram-se condições suficientes de estabilidade através da função quadrática comum de Lyapunov (CQLF), a qual permite testar a estabilidade do sistema comutado de uma forma simples, mas de uma forma bastante conservadora. Finalmente se mostrou uma solução intermediária entre os resultados conservadores da CQLF, e os menos conservadores, como o JSR, mas ainda numericamente complexos. Esta solução baseia-se na definição de uma função quadrática comutada de Lyapunov. Ainda assim foi visto que o resultado apresentado é um resultado conservador. Resultados menos conservadores ainda são um objetivo de pesquisa atual.

Foi visto que o Controle Preditivo Misto Inteiro (CPMI) é similar ao já conhecido Controle Preditivo Baseado no Modelo (CPBM) clássico, mas devido à presença de variáveis inteiras, o procedimento de otimização é um problema de Programação Mista Inteira e quando o sistema tem dimensões elevadas, ou o horizonte de predição é grande, o modelo MLD obtido tem um grande número de variáveis inteiras, o que aumenta de forma exponencial a complexidade de cálculo do CPMI. Além do mais, foi visto que quando se aplica o CPMI a SC aparecem uma série de problemas tanto de estabilidade como de atingibilidade que ainda não foram resolvidos do ponto de vista teórico. Para o caso de sistemas com não-linearidades muito acentuadas, mostrou-se que o Controle Preditivo Baseado no Modelo Não-Linear Híbrido (CPBMNL-Híbrido) é uma solução mais interessante. O controlador CPBMNL-Híbrido não apresenta o problema da relação exponencial do cálculo com o horizonte de predição como no caso do CPMI, mas ainda assim o custo computacional no cálculo da lei de controle é consideravelmente grande devido à necessidade de integração do modelo interno por simulação. Ambas as estratégias de controle mostraram ser bastante complexas do ponto de vista computacional, o que torna sua aplicação aos CP bastante difícil por enquanto; portanto, deveriam ser tema de estudos estratégias de controle que permitam ser aplicadas aos CP, como por exemplo as baseadas em programação multi-paramétrica.

Finalmente, desenvolveram-se aspectos teóricos relacionados com o Projeto Integrado de Processos e Controle, e realizaram dois estudos de caso. Em ambos os casos se mostraram as vantagens da utilização do método com o fim de obter um sistema em malha fechada com uma performance otimizada. Uma generalização da metodologia sistemática de projeto integrado a SC ainda não foi realizada na literatura. Isso se deve fundamentalmente a que ainda não foram definidos ou generalizados índices de controlabilidade habitualmente utilizados nesta metodologia. Estes tópicos deveriam ser objeto de estudos futuros.

A seguir se detalham os artigos publicados durante o período em que foi realizada

esta tese de doutorado:

- Pomar, M., Gutierrez, G., de Prada, C. e Normey-Rico, J. E. (2007). Integrated design & control applied to a buck boost converter, European Conference Control. Kos, Greece.
- Pomar, M., Gutierrez, G., de Prada, C. e Normey-Rico, J. E. (2007). A methodology for the integrated circuit and control design of a buck boost converter, 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control. Foz do Iguaçu, Brazil.
- Sarabia, D., Pomar, M., Normey-Rico, J. E. e de Prada, C. (2007). Mixed integer predictive control of a buck boost converter, 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. Pretoria, South Africa.
- Pomar, M., Gutierrez, G., de Prada, C. e Normey-Rico, J. E. (2009). Integrated design & control of a buck boost converter, Controle & Automação: Revista da Sociedade Brasileira de Automática .

# Apêndice A

## Modelagem Eficiente de Sistemas MLD

A tradução de proposições lógicas ou declarações mistas lógicas/contínuas em desigualdades, vistas na seção 2.4.1, é um passo que determina criticamente o tamanho do modelo MLD resultante em termos do número de variáveis. É importante achar modelos que tenham um número pequeno de variáveis binárias, pois isto permite melhorar a velocidade de resolução dos problemas matemáticos de otimização, necessários para análise, síntese e supervisão de sistemas híbridos. Neste apêndice se analisam métodos eficientes para a tradução de proposições lógicas em desigualdades diminuindo o número de variáveis auxiliares necessárias. Os métodos são aplicáveis inclusive quando as proposições lógicas são complexas e envolvendo combinações arbitrárias de operadores.

### A.1 Lógica Proposicional

#### Observações Gerais

Suponha que  $X_i$  e uma variável booleana. A fórmula booleana  $F$

$$F(X_1, \dots, X_n) \tag{A.1}$$

é uma combinação arbitrária de variáveis  $X_i$  por meio de operadores lógicos ( $\neg, \vee, \wedge, \oplus, \leftarrow, \rightarrow, \leftrightarrow$ ). A fórmula booleana  $F$  é uma Forma Normal Conjuntiva (FNC)

ou Produto de Somas, se é escrita na seguinte forma:

$$F = \bigwedge_{i=1}^n \psi_i \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\psi_i = \bigvee_{j=1}^n X_{ij} \quad (\text{A.3})$$

A fórmula booleana  $\psi_i$  é chamada termos do produto ou *maxterms*, e  $X_{ij}$  termos da soma. É bem sabido que qualquer fórmula booleana pode ser transformada numa FNC, usando as leis distributivas, negação e De Morgan. A FNC é mínima se ela possui o mínimo número de *maxterms* e cada *maxterms* tem o número mínimo de termos da soma. Esta definição de minimalidade vem do campo de desenho de circuitos lógicos onde cada operador lógico da FNC é implementado usando uma porta lógica ou tendo entradas adicionais em portas com multi-entradas. Toda fórmula booleana pode ser reescrita como uma FNC mínima (Kohavi 1978)

A fórmula booleana  $f$  é chamada de função booleana se, após renomear os literais, esta é usada para definir o literal  $X_n$  como função de  $(X_1, \dots, X_{n-1})$ :

$$X_n \leftrightarrow f(X_1, \dots, X_{n-1}) \quad (\text{A.4})$$

que também pode ser escrita como  $X_n = f(X_1, \dots, X_{n-1})$ , onde  $f$  é uma função booleana arbitrária. De forma mais geral, podemos definir relações entre variáveis booleanas  $X_1, \dots, X_n$  com uma relação booleana:

$$F(X_1, \dots, X_n) = T \quad (\text{A.5})$$

onde  $F$  é uma fórmula booleana. Observar que cada função booleana é também uma relação booleana, mas o oposto não é verdade. O problema de satisfazer uma relação booleana é o problema de determinar se existe uma designação de  $\{F, T\}$  a seus literais tal que a correspondente fórmula booleana seja avaliada como verdadeira. Uma designação verdadeira de uma fórmula booleana é chamada de ponto válido. A idéia de resolver estes problemas de inferências lógicas com métodos de otimização conta com ferramentas da área da programação inteira (Chandru e Hooker 1999, Nemhauser e Wolsey 1988, Schrijver 1986). Observar que:

- Cada função booleana tem exatamente  $2^{n-1}$  pontos válidos
- A fórmula booleana com exatamente  $2^{n-1}$  pontos válidos não precisa ser uma

função booleana.

Associando variáveis binárias  $\delta_i \in \{0, 1\}$  com cada variável booleana  $X_i \in \{F, T\}$ , um ponto válido da fórmula booleana pode ser descrito equivalentemente como um elemento do conjunto  $\{0, 1\}^n \subset [0, 1]^n$ . Portanto, o conjunto de todos os pontos válidos de uma fórmula booleana pode ser representado como o conjunto de vértices de um hipercubo  $[0, 1]^n$ , isto é, como os vértices de um politopo em  $[0, 1]^n$ . Vamos chamar  $P_{CH}$  o politopo determinado por todos os pontos válidos da fórmula booleana  $F$ :

$$P_{CH}(F) \triangleq \{x \in [0, 1]^n : x \in \text{conv}(\text{todos os pontos válidos de } F)\} \quad (\text{A.6})$$

Aqui,  $\text{conv}(Y)$  denota o fecho convexo do conjunto de pontos  $Y$ .

Um politopo tem duas representações padrões: a representação-V que especifica o politopo por seus vértices e a representação-H que especifica o politopo como a intersecção de semi-espacos dados por desigualdades lineares (Zieger 1995). Um vértice, em que todos os componentes são inteiros, é chamado de vértice integral.

Os seguintes métodos são uma generalização das regras mostradas na Tabela 2.2. A meta é achar desigualdades lineares equivalentes para as relações booleanas arbitrárias A.5. Vamos mostrar três métodos com este fim: o método de substituição, o método analítico, e o método geométrico.

## Método de substituição

Dada a relação booleana A.5, este método consiste em reconhecer termos elementares listados na tabela 2.2 e substituí-los com variáveis booleanas adicionais. A idéia é facilmente aplicável já que é baseada na aplicação recursiva das regras básicas da tabela 2.2. No entanto, a introdução de variáveis adicionais é uma desvantagem severa e é desnecessária como vamos mostrar com os próximos métodos.

## Método analítico ou método da FNC

O método analítico consiste primeiro em converter A.4 ou A.5 na FNC, o que pode ser realizado automaticamente usando uma de várias técnicas disponíveis, veja por exemplo Miller (1965) e Sasao (1999). Consideremos a FNC da forma:

$$\bigwedge_{j=1}^m \left( \bigvee_{i \in P_j} X_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \bar{X}_i \right) \quad (\text{A.7})$$

Onde  $P_j$  denota o conjunto de índices do literal que aparece em forma positiva no  $j$ -

$j$ -th *maxterm*, e  $N_j$  denota o conjunto de índices do literal que aparece em forma negada no  $j$ -th *maxterm*. A FNC indica que todos os *maxterms* devem ser verdadeiros para que a fórmula booleana seja verdadeira. Quando impomos um conjunto de restrições num problema de otimização, exigimos também que os pontos válidos satisfaçam todas as desigualdades simultaneamente. Para cada *maxterm* podemos portanto deduzir uma desigualdade inteira. Observe ainda mais que um *maxterm* é verdadeiro, se e somente se, ao menos um de seus termos da soma é verdadeiro. Com esta observação, o conjunto de desigualdades lineares inteiras correspondendo a A.7 é:

$$\begin{cases} 1 \leq \sum_{i \in P_1} \delta_i + \sum_{i \in N_1} (1 - \delta_i) \\ \vdots \\ 1 \leq \sum_{i \in P_m} \delta_i + \sum_{i \in N_m} (1 - \delta_i) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

As desigualdades A.8 podem ser incluídas como restrições no modelo MLD em 2.40. Com estas desigualdades podemos definir o conjunto  $P_{FNC}$  para qualquer fórmula booleana  $F$  como:

$$P_{FNC} \triangleq \{x \in [0, 1]^n : (\text{A.8}) \text{ é satisfeita com } x = [\delta_1, \dots, \delta_n] \in [0, 1]^n\} \quad (\text{A.9})$$

$P_{FNC}(F)$  é o politopo no hipercubo da unidade de dimensão  $n$  que inclui todos os pontos inteiros  $x \in \{0, 1\}^n$  para a qual  $F(x) = T$ . É o conjunto de pontos definido por A.8 relaxando a restrição de integralidade em  $\delta_i$  de  $\delta_i \in \{0, 1\}$  a  $\delta_i \in [0, 1]$ .

Nenhuma das variáveis auxiliares necessitam ser introduzidas com esta técnica. Outra vantagem é sua simplicidade uma vez conhecida a FNC da fórmula booleana desejada. Uma desvantagem é o esforço que se deve fazer no cálculo simbólico da FNC de uma fórmula booleana arbitrária. Isto pode exigir técnicas como os mapas de Karnaugh, veja por exemplo Kohavi (1978), se a fórmula booleana é dada implicitamente por seu pontos válidos. Outra desvantagem deste método tem a ver com o conjunto  $P_{FNC}$ . Como será visto depois,  $P_{FNC}$  pode ser um conjunto que é maior do que realmente necessário para definir os pontos factíveis inteiros. De fato,  $P_{FNC}$  pode ter vértices não-integrais.

**Algoritmo A.1** *Então, usando as equivalências da Tabela 2.2 é possível converter qualquer expressão lógica em outra expressão envolvendo variáveis inteiras se a expressão lógica inicial se escreve na sua FNC.*

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$$

Onde as  $Q$  são expressões de  $P$  escritas como disjunções. O algoritmo para obtenção da FNC é:

1. Substituir implicações por sua expressão equivalente:

$$P_1 \rightarrow P_2 \leftrightarrow \bar{P}_1 \vee P_2$$

2. Aplicar a lei de De Morgan para deslocar para dentro as negações:

$$\overline{(P_1 \wedge P_2)} \leftrightarrow \bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \quad \overline{(P_1 \vee P_2)} \leftrightarrow \bar{P}_1 \wedge \bar{P}_2$$

3. Utilizar a propriedade distributiva para chegar na FNC.

$$(P_1 \wedge P_2) \vee P_3 \leftrightarrow (P_1 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_3)$$

### Exemplo A.1

$$(P_1 \wedge P_2) \vee P_3 \rightarrow (P_4 \vee P_5)$$

1. Passo 1

$$\overline{[(P_1 \wedge P_2) \vee P_3]} \vee (P_4 \vee P_5)$$

2. Passo 2

$$[(\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2) \wedge \bar{P}_3] \vee (P_4 \vee P_5)$$

3. Passo 3

$$\begin{aligned} & [(\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2) \vee (P_4 \vee P_5)] \wedge [\bar{P}_3 \vee (P_4 \vee P_5)] \\ & [\bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee P_4 \vee P_5] \wedge [\bar{P}_3 \vee P_4 \vee P_5] \end{aligned}$$

Por tanto colocamos  $[(P_1 \wedge P_2) \vee P_3 \rightarrow (P_4 \vee P_5)]$  na FNC:  $[Q_1 \wedge Q_2]$ , onde:

$$Q_1 = \bar{P}_1 \vee \bar{P}_2 \vee P_4 \vee P_5$$

e

$$Q_2 = \bar{P}_3 \vee P_4 \vee P_5$$

Associando as variáveis inteiras  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  e  $\delta_5$  a  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$  respectivamente

obtemos a seguinte representação em desigualdades lineares inteiras:

$$\begin{aligned}(1 - \delta_1) + (1 - \delta_2) + \delta_4 + \delta_5 &\geq 1 \\ (1 - \delta_3) + \delta_4 + \delta_5 &\geq 1\end{aligned}$$

## Método geométrico, ou método da tabela de verdade

O terceiro método é baseado numa interpretação geométrica. Mostraremos que este método supera a desvantagem concernente com  $P_{FNC}(F)$  do método analítico descrito previamente. Ele permite uma tradução automática de tabelas de verdade que representam fórmulas booleanas, em desigualdades lineares inteiras.

Uma tabela verdade para a fórmula booleana  $F(X_1, \dots, X_n)$  é uma lista completa dos pontos válidos de  $F(\cdot)$ , isto é, todos os vetores  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \{F, T\}^n$  tal que  $F(\underline{X}) = T$ . A tabela verdade pode ser montada para qualquer fórmula booleana, por exemplo por enumeração. As linhas da tabela verdade formam uma lista completa dos pontos válidos, isto é, todos esses pontos em  $\{0, 1\}^n$  que fazem  $F(\underline{X})$  verdadeiro, ou satisfazem  $X_n = f(X_1, \dots, X_{n-1})$ .

Quando modelamos sistemas na forma MLD freqüentemente encontramos com os seguintes problemas:

- P1** Impor que a fórmula booleana  $F(X_1, \dots, X_n)$  seja verdadeira, isto é, adicionar a restrição dada pela relação booleana  $F(X_1, \dots, X_n) = T$
- P2** Definir a função booleana  $X_n = f(X_1, \dots, X_{n-1})$

Assume-se que ambos  $f$  e  $F$  são definidos com os operadores básicos  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus$ . O problema **P1** especifica uma restrição ou uma característica do sistema.

**Exemplo A.2** Um exemplo de **P1** é a proposição que duas entradas binárias  $u_1$  e  $u_2$  não podem tomar o valor “1” ao mesmo tempo, se uma terceira entrada  $u_3$  for zero. A correspondente fórmula booleana  $F_1$  fica assim:

$$F_1(u_1, u_2, u_3) = \bar{u}_3 \rightarrow \overline{(u_1 \wedge u_2)}$$

Enquanto **P1** tem o caráter de uma restrição, **P2** define uma quantidade auxiliar a ser adicionada no modelo MLD e tem o caráter de uma equação algébrica.

**Exemplo A.3** Um caso típico onde aparece **P2** é a definição de uma transição de estado num automata finito.  $X_1, \dots, X_{n-1}$  codifica o estado presente e as entradas e  $X_n$  é o estado subsequente. Então, a função  $f$  representa a função de transição de estados.

Como é imediato transformar relações booleanas em tabelas de verdade, sem perda de generalidade vamos supor que  $F, f$  são definidos via uma tabela de verdade. Observe que a tabela de verdade em **P2** tem sempre  $2^{n-1}$  linhas e  $n$  colunas. Por outro lado a tabela verdade de **P1** pode ter qualquer número de linhas de 1 a  $2^{n-1}$ .

**Exemplo A.4** Para ilustrar melhor a diferença entre **P1** e **P2**, considere o exemplo da fórmula booleana  $X_1 \wedge X_2$  e da função booleana  $X_3 = X_1 \wedge X_2$ . As tabelas verdade são dadas na tabela A.1.

$X_1$	$X_2$
V	V

 $\Rightarrow$ 

$\delta_1$	$\delta_2$
1	1

$X_1$	$X_2$	$X_3$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

 $\Rightarrow$ 

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabela A.1: Tabelas verdade para a fórmula  $X_1 \wedge X_2$  (esquerda) e para a função booleana  $X_3 = X_1 \wedge X_2$  (direita)

Note que no primeiro caso há só um ponto válido e a tabela de verdade consiste portanto de uma só linha.

Considere o hipercubo  $\mathcal{H} \triangleq [0, 1]^n$ , e permita que  $H$  denote o conjunto de seus vértices. Seja  $\text{conv}(S)$  o fecho convexo do conjunto  $S \subseteq H$ , e  $C_H(S)$  o conjunto complemento de  $S$  em  $H$ , isto é

$$C_H(S) \cup S = H$$

$$C_H(S) \cap S = \emptyset$$

O lema A.1 diz que o subconjunto  $S$  de  $H$  pode estar “envolvido” dentro de um politopo que não contém qualquer vetor do conjunto complemento  $C_H(S)$ .

**Lema A.1** *Seja  $S \subseteq H$ . Então  $\text{conv}(S) \cap C_H(S) = \emptyset$*

Para ver a demonstração veja Mignone (2002).

Considere agora a tabela de verdade  $\mathcal{T}$  expressando os pontos válidos associados com os problemas **P1** ou **P2**. Seja  $m$  o número de filas em  $\mathcal{T}$ , e seja  $\mathcal{T} = \{R_1, \dots, R_m\}$  o conjunto de filas  $R_i$  de  $\mathcal{T}$  considerado como um vetor em  $\mathbb{R}^m$ , isto é, a coleção de todos os pontos válidos. Cada componente da fila  $R_i$  é 0 ou 1 e portanto  $R_i \in H$ , isto é,  $R_i$  é um vértice do hipercubo  $\mathcal{H}$ .

**Teorema A.1** *Seja  $\mathcal{T}$  a tabela de verdade com  $T$  filas, associada à fórmula booleana  $F$  nos literais  $X_1, \dots, X_n$ . Então  $F(X_1, \dots, X_n)$  é verdadeiro se e somente se o vetor associado  $\delta \triangleq [\delta_1, \dots, \delta_n] \in \{0, 1\}^n$  satisfaz as desigualdades*

$$A\delta \leq B$$

onde  $A$  e  $B$  definem o politopo

$$P_{CH} \triangleq \{\delta \in [0, 1]^n : A\delta \leq B\} = \text{conv}(T) \quad (\text{A.10})$$

Além do mais, cada tradução inteira  $\bar{P} = \{\delta \in [0, 1]^n : \bar{A}\delta \leq \bar{B}\}$  de  $F$  é tal que  $P_{CH} \subseteq \bar{P}$ , isto é,  $P_{CH}$  é mínimo.

Para ver a demonstração veja Mignone (2002).

O enfoque proposto não introduz qualquer variável booleana adicional. Esta característica e a minimalidade do conjunto relaxado são particularmente atraentes quando o modelo é usado num problema de otimização. Embora seja verdade que não há nenhuma necessidade em fazer manipulações simbólicas para achar a FNC, este método sofre de pesados requerimentos computacionais para achar o fecho convexo dos pontos válidos e grandes requisitos de memória para armazenar a tabela de verdade. Algumas ferramentas de software para calcular os pontos do fecho convexo são listados no próximo parágrafo.

## Cálculo do fecho convexo

Existem vários pacotes para transformar um poliedro  $P$  da forma

$$P = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^p \mu_i r_i \right\}$$

onde  $x_i, r_i$  são os pontos extremos e direções extremas de  $P$  respectivamente, e

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad \mu_i \geq 0$$

à forma

$$P = \{x : Ax \leq B\}$$

Para um exame detalhado destes pacotes, o leitor pode consultar a página <http://www.geom.umn.edu/software/cglist/ch.html>.

**Exemplo A.5** Considere a função booleana  $X_3 = X_1 \wedge X_2$ , cuja tabela de verdade é dada em Tabela A.1. As filas da tabela de verdade são representadas como pontos em  $\mathbb{R}^3$  na Figura A.1. Seu fecho convexo coincide com as desigualdades lineares mencionadas na segunda regra da Tabela 2.2.

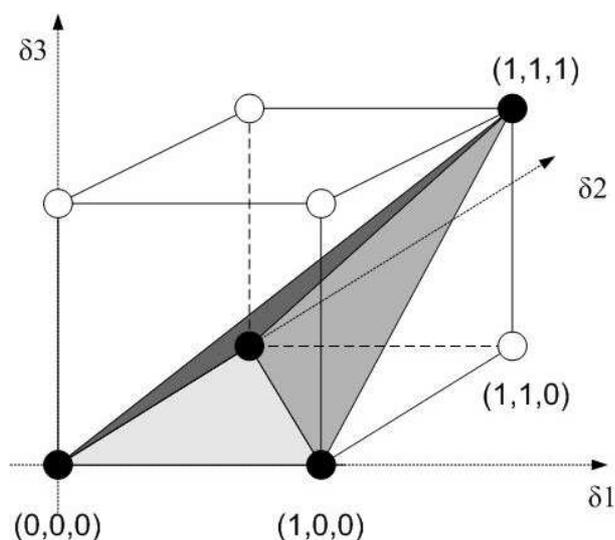


Figura A.1: Fecho convexo das filas da tabela de verdade de  $X_3 = X_1 \wedge X_2$

## Comparação dos métodos

Há casos onde o método de substituição dá um número menor de desigualdades que os outros métodos (Cavalier et al. 1990). No entanto, a complexidade de introduzir variáveis binárias adicionais deve ser evitada. Os outros dois métodos não exigem a introdução de qualquer variável adicional. No entanto, eles exigem pré-processamento, seja para construir a tabela de verdade ou para derivar a FNC. Especialmente, construir a tabela de verdade completa e derivar o fecho convexo de suas filas pode ser uma tarefa computacionalmente cara, mesmo que programas de computador eficientes estejam disponíveis para este propósito. Notar, no entanto, que é uma tarefa que pode ser feita *offline*. Em alguns casos a tabela de verdade talvez contenha só um número pequeno de filas, porque algumas combinações das variáveis independentes podem ser excluídas a priori.

Usando o método de tabela verdade ou a transformação a FNC para achar as desigualdades que representam uma fórmula booleana não tem por que dar os mesmos resultados num método como em outro. O Teorema A.1 afirma que  $P_{CH} \subseteq P_{CNF}$ . Em outras palavras, todos os vértices inteiros de  $P_{CNF}$  são pontos válidos da fórmula booleana correspondente, contudo  $P_{CNF}$  pode ter vértices de não-inteiros. Existem

fórmulas booleanas, para as quais  $P_{CH} \neq P_{CNF}$ , ainda que  $P_{CNF}$  seja derivado de uma FNC mínima.

**Exemplo A.6** Considere a fórmula booleana descrita por:

$$(X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_3) \quad (\text{A.11})$$

Dado que A.11 está na FNC, podemos usar A.8 para obter as correspondentes desigualdades como

$$P_{CNF} = \{x \in [0, 1]^3 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\} \quad (\text{A.12})$$

A tabela de verdade de A.11 contém as filas  $[1, 1, 0]$ ,  $[1, 0, 1]$ ,  $[0, 1, 1]$ ,  $[1, 1, 1]$ . A fórmula booleana A.11 é caracterizada pelo fato que ao menos duas variáveis booleanas são verdadeiras. Portanto pode ser mostrado que

$$P_{CH} = \{x \in [0, 1]^3 : x_1 + x_2 + x_3 \geq 2\} \quad (\text{A.13})$$

Enquanto em  $P_{CH}$  todos vértices são inteiros por construção,  $P_{CNF}$  inclui um vértice em  $(0.5, 0.5, 0.5)$  que não é inteiro. Este exemplo ilustra que as desigualdades originadas da FNC podem descrever uma representação não mínima da relaxação de uma proposição lógica, por causa da presença de vértices não inteiros. Por enumeração direta, pode ser mostrado que além de A.11 há só uma fórmula booleana envolvendo três variáveis booleanas, para qual  $P_{CH} \neq P_{CNF}$ , a saber

$$(X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_3) \wedge (\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3) \quad (\text{A.14})$$

Para todas as outras fórmulas booleanas em  $\{0, 1\}^3$  é possível assegurar que  $P_{CH} = P_{CNF}$ .

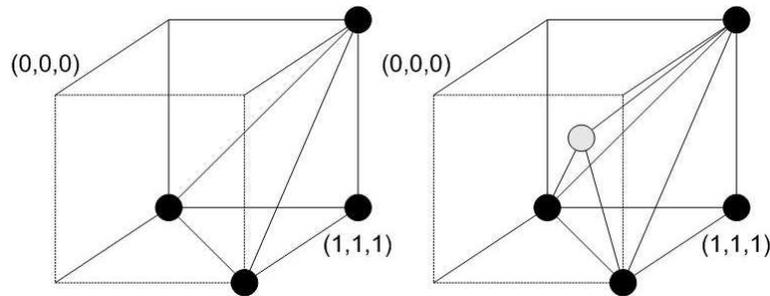


Figura A.2: Esquerda:  $P_{CH}$  das filas da tabela de verdade de (A.11), Direita:  $P_{FNC}$  de (A.11), o vértice claro e não inteiro

## Desigualdades de Clausal

O conjunto de desigualdades  $Ax \leq b$  é clausal, se cada elemento de  $A$  é 0, 1 ou  $-1$ , e cada  $b_i$  satisfaz

$$b_i = 1 - \#\{\alpha : \alpha = A_{ij} = -1, j = 1 \dots n\} \quad (\text{A.15})$$

Onde  $A_{ij}$  é o elemento  $j$ -th da fila  $i$  em  $A$  e  $\#$  denota a cardinalidade de conjunto (Chandru e Hooker 1999). O conjunto de desigualdades A.8 associadas com a FNC é clausal por construção.

**Teorema A.2** *Seja  $F$  uma fórmula booleana. Se  $P_{CH}(F)$  é dado por desigualdades clausales, então existe uma FNC, tal que  $P_{CH}(F) = P_{CNF}(F)$ .*

Para ver a demonstração veja Mignone (2002).

## A.2 Proposições Mistas Lógicas-Contínuas

Nesta seção os resultados da seção A.1 são estendidos a proposições mistas lógicas-contínuas. Vamos considerar os mesmos três enfoques que foram desenvolvidos para as fórmulas booleanas e mostrar sua aplicação a proposições envolvendo variáveis tanto contínuas como binárias.

A Fórmula Booleana Generalizada (FBG) é a extensão da fórmula booleana obtida permitindo que desigualdades lineares  $\tilde{X}_i = [f_i(x) \leq 0]$  sejam agregadas como termos adicionais na fórmula booleana. A Forma Normal Conjuntiva Generalizada (FNCG) é definida assim, como a expressão:

$$\bigwedge_{j=1}^p \left( \bigvee_{i=1}^{m_j} [f_{ij}(x) \leq 0] \vee \bigvee_{k=1}^{n_j} [\delta_{kj} = 1] \right) \quad (\text{A.16})$$

Cada FBG admite uma representação FNCG equivalente. Vamos mostrar que cada FNCG pode ser traduzida em desigualdades mistas inteiras, contanto que um número suficiente de variáveis auxiliares seja introduzido. Vamos desenvolver um meio sistemático para traduzir proposições lógicas complexas em desigualdades mistas inteiras. Uma designação  $(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \{0, 1\}^{n_2}$  que faz A.16 verdadeira é chamada de ponto válido.

## Motivação

No que segue, vamos supor que as cotas inferior e superior da função real afim  $f_i(x) = a'_i x - b_i$ ,  $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  são conhecidas. Considere a disjunção lógica

$$\bigvee_{i=1}^m [f_i(x) \leq 0] \quad (\text{A.17})$$

que em general define um conjunto não-convexo em  $\mathbb{R}^n$ , por exemplo o conjunto da Figura A.3 correspondente a disjunção

$$[x_1 \leq 0] \vee [x_2 \leq 0] \quad (\text{A.18})$$

onde  $m_1 \leq x_1 \leq M_1$ ,  $m_2 \leq x_2 \leq M_2$ . O conjunto na Figura A.3 é não-convexo, e portanto não pode ser escrito como um sistema linear de restrições  $\{x \in \mathbb{R}^n : Cx \leq d\}$ . De fato, o menor conjunto convexo contido na região factível de A.18 contém pontos no primeiro quadrante excluídos por A.18.

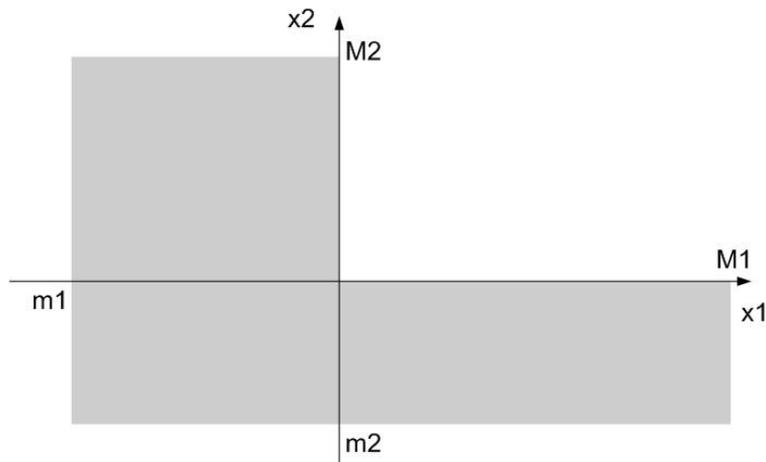


Figura A.3: Conjunto factível definido por A.18

No entanto, introduzindo variáveis binárias adicionais  $\delta \in \{0, 1\}$ , torna-se possível representar a disjunção como um conjunto de restrições mistas inteiras. Usando as Tabelas 2.2 e 2.3, podemos introduzir  $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$  como

$$\delta_1 \triangleq [x_1 \leq 0] \quad (\text{A.19})$$

$$\delta_2 \triangleq [x_2 \leq 0] \quad (\text{A.20})$$

A proposição na Equação A.18 torna-se

$$\delta_1 \vee \delta_2 \tag{A.21}$$

Cada uma das três proposições A.19, A.20, A.21 podem ser traduzidas em desigualdades usando as Tabelas 2.2 e 2.3. Isto mostra que no espaço  $(x_1, x_2, \delta_1, \delta_2)$ , isto é, num subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ , o conjunto factível de A.18 pode ser representado como  $\{x \in \mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}^2 : Cx \leq d\}$ . Isto implica que depois da relaxação das restrições de integralidade a  $0 \leq \delta_i \leq 1$ , o conjunto factível de A.18 torna-se um conjunto convexo poliédrico em  $\{x \in \mathbb{R}^4 : Cx \leq d\}$ . Aumentar a dimensão do espaço através de variáveis binárias permite uma representação convexa do conjunto que nas coordenadas originais de interesse não é convexo.

## Método de substituição

Semelhante ao caso das relações lógicas, o método de substituição consiste em aplicar iterativamente as regras das Tabelas 2.2 e 2.3 substituindo proposições lógicas elementares com variáveis auxiliares binárias adicionais. Com as Equações A.19, A.20, A.21 ilustramos o método. Ao contrário da substituição para função puramente lógica na Seção A.1, mostramos através da proposição lógica A.18 que a introdução de variáveis auxiliares pode ser necessária para traduções mistas lógico-contínuas. O método de substituição, contudo, pode introduzir mais variáveis que necessário, como será mostrado logo.

## Forma Normal Conjuntiva Generalizada

Nesta seção vamos a fornecer um procedimento geral para traduzir FBG num conjunto de desigualdades lineares mistas inteiras. A prova do Teorema A.4 contém algumas sugestões construtivas para esta tradução.

**Teorema A.3** *O FNCG com funções reais afins  $f_{ij}(x)$*

$$\bigwedge_{j=1}^p \left( \bigvee_{i=1}^{m_j} [f_{ij}(x) \leq 0] \vee \bigvee_{k=1}^{n_j} [\delta_{kj} = 1] \right) \tag{A.22}$$

*pode ser traduzida num conjunto de desigualdades mistas inteiras adicionando  $\sum_{j=1}^p \lceil \log_2(m'_j + 1) \rceil$  variáveis binárias, onde  $m'_j \leq m_j$  é o número de restrições não-redundantes no conjunto  $\{x : f_{ij}(x) > 0, i = 1, \dots, m_j\}$*

A restrição  $[f_j(x) \leq 0]$  é redundante para a proposição A.17, se

$$\left\{ x : \bigvee_{i=1}^m [f_i(x) \leq 0] \right\} = \left\{ x : \bigvee_{i=1, i \neq j}^m [f_i(x) \leq 0] \right\} \quad (\text{A.23})$$

**Teorema A.4** *A proposição lógica com  $m$  funções afins  $f_i(x)$*

$$\bigvee_{i=1}^m [f_i(x) \leq 0] \quad (\text{A.24})$$

*pode ser traduzida num conjunto de desigualdades mistas inteiras adicionando  $l = \lceil \log_2(m') \rceil$  variáveis binárias, onde  $m' \leq m$  é o número de restrições não-redundante*

*Prova.*

A prova é construtiva e envolve os seguintes passos:

1. Defina o fechamento do conjunto não factível  $B$  como

$$B = \{x : \bigwedge_{i=1}^m [f_i(x) \geq 0]\} \quad (\text{A.25})$$

Como todos os  $f_i$  são afins,  $B$  é convexo.

2. Elimine as restrições redundantes. Isto pode ser feito resolvendo para cada  $i = 1, \dots, m$  um programa linear da forma

$$\begin{aligned} J_c(i) &= \min_x f_i(x) \\ \text{s.a.} & \bigwedge_{j=1, j \neq i}^m [f_j(x) \geq 0] \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Se  $J_c \geq 0$ , a  $i$ -th restrição é redundante. Isto dá o número de  $m'$  restrições não-redundantes. Note que a disjunção A.24 pode ser escrita equivalentemente só usando as restrições não-redundantes. Este passo aponta em ter uma representação mínima de A.24. Além do mais,  $m'$  é o número de facetas do politopo  $B$ .

3. De acordo com Bemporad et al. (1999), o conjunto  $X \setminus B$  pode ser partilhado em  $m'$  conjuntos disjuntos convexos  $C_j$ . Cada conjunto pode ser descrito pelas desigualdades

$$C_j = \{x : A_j x \leq b_j\}$$

Onde através de uma numeração apropriada, nós temos  $A_j \in \mathbb{R}^{j \times s}$  e  $b_j \in \mathbb{R}^j$  ( $j = 1, \dots, m'$ ).

4. Temporariamente introduza  $m'$  variáveis binárias  $\delta_j$  com a propriedade que

$$[\delta_j = 1] \leftrightarrow [x \in C_j]$$

De acordo com as regras da Seção 2.4.1, as últimas relações podem ser traduzidas em desigualdades mistas inteiras como:

$$A_j x - b_j \leq M_j(1 - \delta_j) \quad (j = 1, \dots, m') \quad (\text{A.27})$$

$$\sum_{i=1}^{m'} \delta_i = 1 \quad (\text{A.28})$$

5. Codifique as regiões  $C_i$  como segue: Introduza  $l = \lceil \log_2(m') \rceil$  variáveis binárias  $\mu_1, \dots, \mu_l$  tal que

$$[\delta_j = 1] \leftrightarrow [j = 1 + \sum_{i=0}^{l-1} 2^i \mu_{i+1}] \quad (\text{A.29})$$

Use-as em A.27 para obter:

$$\begin{aligned} A_1 x - b_1 &\leq M_1(l - (1 - \mu_1) - \dots - (1 - \mu_l)) \\ A_2 x - b_2 &\leq M_2(l - \mu_1 - \dots - (1 - \mu_l)) \\ &\vdots \leq \vdots \\ A_{m'} x - b_{m'} &\leq M_{m'}(l - \mu_1 - \dots - \mu_l) \end{aligned}$$

Se  $m' < 2^l$ , adicionar restrições para excluir as combinações de  $\mu_1, \dots, \mu_l$  que não são usados para codificar qualquer região. Para a representação com  $\delta_j$ , A.28 expressa o fato de que exatamente um  $\delta_j$  é um para cada ponto de dados  $x$ . Isto não é exigido quando trabalhamos com  $\mu_1, \dots, \mu_l$ , desde que cada código  $\mu_1, \dots, \mu_l$  que for identifique uma região, ou a exclua.

□

O número de desigualdades resultantes do algoritmo descrito acima é dado por

- (i) os limites em  $x$  ou em cada função  $f_i(x)$
- (ii)  $\sum_{i=1}^{m'} i = \frac{m'(m'+1)}{2}$  restrições definindo  $\mu_1, \dots, \mu_l$ , e

- (iii) as restrições excluindo as combinações não utilizadas de  $\mu_1, \dots, \mu_l$

Observe que negligenciando o passo 2 do procedimento de remoção de redundância aumentamos o número de variáveis auxiliares binárias a  $\lceil \log_2(m) \rceil$ , mas não se muda o algoritmo.

**Corolário A.1** *A proposição lógica com  $m$  funções afins  $f_i(x)$*

$$\bigvee_{i=1}^m [f_i(x) \leq 0] \vee \bigvee_{k=1}^n [\delta_k = 1] \quad (\text{A.30})$$

*pode ser traduzida num conjunto de desigualdades mistas inteiras adicionando  $l' = \lceil \log_2(m' + 1) \rceil$  variáveis binárias, onde  $m' \leq m$  é o número de restrições não-redundantes na disjunção  $\bigvee_{i=1}^m [f_i(x) \leq 0]$ .*

Finalmente, o último passo consiste em traduzir qualquer FBG a desigualdades sobre variáveis binárias e contínuas. Isto pode ser feito considerando as desigualdades  $[f_i(x) \leq 0]$  como variáveis booleanas simbólicas e manipulando todas as funções de acordo com a Seção A.1.

1. Substitua cada desigualdade  $[f_i(x) \leq 0]$  sobre variáveis contínuas com variáveis booleanas  $y_i$ .
2. Ache a FNC da expressão usando os métodos descritos na Seção A.1.
3. Faça a substituição inversa, substitua as variáveis booleanas  $y_i$  com  $[f_i(x) \leq 0]$ .
4. Aplique o teorema acima.

Note que a eficiência da abordagem apresentada aqui pode crescer, se o esquema dá a possibilidade de reconhecer partes comuns nas relações lógicas, como a múltipla ocorrência de uma desigualdade  $[f_{ij}(x) \leq 0]$  em A.22.

**Exemplo A.7** *Considere a seguinte FBG*

$$\bigvee_{i=1}^4 [f_i(x) \leq 0] \quad (\text{A.31})$$

onde  $x = [x_1, x_2]^T \in [-10, 10]^2 \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f_i : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  e

$$f_1(x) = x_1 + x_2 \quad (\text{A.32})$$

$$f_2(x) = 2x_1 + x_2 + 2 \quad (\text{A.33})$$

$$f_3(x) = x_2 - 1 \quad (\text{A.34})$$

$$f_4(x) = 1.5x_1 + x_2 + 4.5 \quad (\text{A.35})$$

$$(\text{A.36})$$

O conjunto de pontos factíveis é não-convexo (área pintada na Figura A.4).

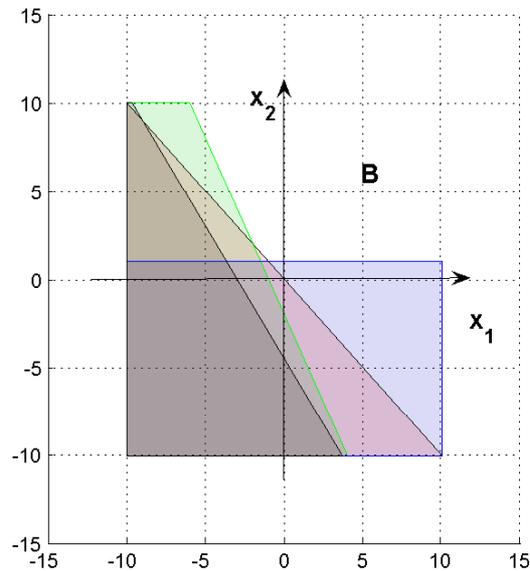


Figura A.4: Conjunto factível definido por A.31

Vamos aplicar o procedimento descrito na demonstração do Teorema A.4 para achar as desigualdades que descrevem A.31, seguindo os mesmos passos e a terminologia introduzida no teorema.

1. O conjunto  $B$  é dado por  $\bigwedge_{i=1}^4 [f_i(x) \geq 0]$  e é mostrado na Figura A.4 como a área não sombreada.
2. Resolvendo A.26 chegamos no resultado mostrado na Tabela A.2. Portanto  $i = 4$  denota uma restrição redundante e  $m' = 3$ .

$i$	1	2	3	4
$J_C(i)$	-0.5	-7.33	-11	3.5

Tabela A.2: Solução de A.26 para o exemplo A.31

3. O conjunto  $C_j$  é:

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : [1 \ 1]x \leq 0\} \quad (\text{A.37})$$

$$C_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \quad (\text{A.38})$$

$$C_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad (\text{A.39})$$

4. Usando as cotas de  $x$ , as expressões A.27 tornam-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \leq 20(1 - \delta_1) \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 20 \\ 32 \end{bmatrix} (1 - \delta_2) \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 20 \\ 28 \\ 9 \end{bmatrix} (1 - \delta_3) \quad (\text{A.42})$$

5. Aqui se mantém que  $l = 2$  e codificamos as regiões como:

$$[\delta_1] \Leftrightarrow [\mu_1 \ \mu_2] = [0 \ 0] \quad (\text{A.43})$$

$$[\delta_2] \Leftrightarrow [\mu_1 \ \mu_2] = [1 \ 0] \quad (\text{A.44})$$

$$[\delta_3] \Leftrightarrow [\mu_1 \ \mu_2] = [0 \ 1] \quad (\text{A.45})$$

Finalmente, definindo  $X = [x_1 x_2 \mu_1 \mu_2]^T$  e usando as expressões acima, obtemos as desigualdades desejadas como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -20 & -20 \\ -1 & -1 & 20 & -20 \\ 2 & 1 & 30 & -30 \\ -1 & -1 & -20 & 20 \\ -2 & -1 & -30 & 30 \\ 0 & 1 & -10 & 10 \end{bmatrix} X \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 30 \\ 20 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

## Método geométrico

Estamos motivados a crer que a interpretação geométrica de introduzir variáveis binárias adicionais é uma ampliação da dimensão do espaço considerado. No espaço dimensional mais alto, a região especificada é um conjunto convexo. A projeção sobre o espaço de variáveis originais é ainda não-convexo. Enquanto isto é uma interpretação atraente, não é imediato generalizá-la ao procedimento para achar as desigualdades, além do espaço de dimensões baixas. De fato, não está claro a priori como aumentar o espaço com variáveis binárias adicionais. Para o FBG A.18 esboçamos na Figurar A.5 o efeito de aplicar a idéia do seguinte algoritmo:

1. Introduza  $n_{aux} = 1$  variável binária auxiliar.
2. Divida o conjunto não-convexo em conjuntos disjuntos convexos, a união deles deverá ser o conjunto original.
3. Designe a cada subconjunto obtido uma combinação diferente das variáveis binárias auxiliares.
4. Calcule no espaço dimensional mais alto o fecho convexo dos vértices.
5. Se o fecho convexo contém pontos excluídos pela proposição lógica,
  - aumente o número  $n_{aux}$  de variáveis binárias auxiliares em 1. Ou
  - escolha uma divisão diferente em 2. Ou
  - Escolha um código diferente em 3.

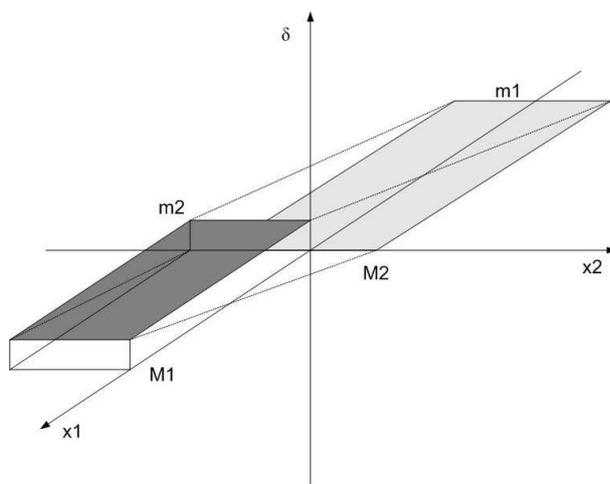


Figura A.5: Conjunto factível definido por A.31

Em general, não recomendamos confiar nestas interpretações geométricas para traduzir FBG em desigualdades, devido às ações pouco metódicas a serem tomadas no ponto 5.

### A.3 Resumo

Nas Seções A.1 e A.2 vimos uma diferença fundamental entre a tradução de relações puramente lógicas e relações mistas lógica-contínuas em desigualdades: a primeira pode ser traduzida sem adicionar variáveis, enquanto a segunda pode exigir a introdução de variáveis booleanas.

### A.4 *The HYbrid Systems DEscription Language* HYSDEL

A derivação de modelos MLD “a mão” é uma tarefa tediosa e envolve a aplicação repetida das regras apresentadas nas seções prévias. Este procedimento ainda é mais complicado se o objetivo é achar o modelo com o menor número de variáveis ou desigualdades envolvidas. Com o fim de simplificar a modelagem para o usuário, um compilador foi desenvolvido para realizar a tradução automatizada de uma descrição do modelo de alto nível na forma MLD. O objetivo do compilador é gerar as matrizes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C$ ,  $D_i$  e  $E_i$  em (2.38, 2.39, 2.40). Estas matrizes são geradas na sintaxe do Matlab (.mat).

A linguagem de especificação do problema ao compilador é HYSDEL (*HYbrid System DEscription Language*) (Torrise et al. 2000). HYSDEL é confeccionado para modelar sistemas MLD e PWA, mas é de modo algum a única linguagem de modelagem para sistemas híbridos.

Outras linguagens e ferramentas são descritas por exemplo em (Benveniste et al. 1993, Fabian 1999). A ferramenta LPL, descrita em (Huerlimann 2001), permite a modelagem de sistemas contendo componentes lógicos e traduz o modelo no formato MPS (Murtagh 1981), um formalismo comum para a especificação de problemas matemáticos de otimização.

# Apêndice B

## Raio Espectral Conjunto

Este apêndice é dedicado à definição formal do raio espectral conjunto (*Joint Spectral Radius* - JSR). Primeiro, vamos definir o conceito amplamente utilizado do raio espectral de uma matriz, juntamente com algumas das suas propriedades. Em seguida, vamos mostrar como este conceito pode ser naturalmente estendido ao raio espectral conjunto de um conjunto de matrizes. Vamos também mostrar a relação entre as propriedades do raio espectral e as propriedades análogas do JSR.

### B.1 Norma e Raio Espectral de Matrizes

Nesta seção, apresentamos definições das noções básicas relacionadas a uma única matriz. Primeiro iremos introduzir a noção de norma de uma matriz, depois disso, apresentamos o raio espectral e diversas relações envolvendo normas e o raio espectral.

Embora algumas das noções que iremos mostrar não requerem que as matrizes sejam quadradas, sempre consideraremos matrizes quadradas no presente trabalho. Em efeito, uma vez que iremos estudar produtos de matrizes escolhidas em um conjunto de forma arbitrária, estas têm de ser quadradas para que isso faça sentido. Além disso, iremos considerar somente matrizes reais porque elas representarão modelos de sistemas reais.

#### B.1.1 Norma de Matrizes

Seja a matriz quadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . A norma da matriz  $\|A\|$  é uma função que associa a essa matriz um número real não negativo, satisfazendo as seguintes propriedades:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \|A\| > 0$  se  $A \neq 0$  e  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ,
- $\|kA\| = |k|\|A\|, \forall k \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Além disso somente serão utilizadas as normas que tenham a propriedade:

- de sub-multiplicatividade ou:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Define-se a norma induzida de uma matriz  $\|\cdot\|_{ind}$  a partir da norma de um vetor  $\|\cdot\|_{vec}$ , como:

$$\|A\|_{ind} = \max_{\|x\|_{vec} \neq 0} \frac{\|Ax\|_{vec}}{\|x\|_{vec}},$$

que, por linearidade, pode ser reduzido sem perda de generalidade a:

$$\|A\|_{ind} = \max_{\|x\|_{vec}=1} \|Ax\|_{vec}.$$

Qualquer norma induzida de uma matriz verifica a propriedade de sub-multiplicatividade. Em efeito,

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \max_{\|y\| \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|\|B\|. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, todas as normas induzidas de matrizes são consistentes. Isto significa que qualquer norma de vetor  $\|\cdot\|_{vec}$  e seu operador norma induzida  $\|\cdot\|_{ind}$  satisfazem, para qualquer matriz  $A$  e qualquer vetor  $x$ ,

$$\|Ax\|_{vec} \leq \|A\|_{ind}\|x\|_{vec}$$

Antes de concluir esta seção vale a pena relembrar a definição de norma vetorial e alguns casos específicos. Seja o vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  e o escalar  $p \in \mathbb{R}$ ,  $\|x\|_p$  é definida como:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_i |x_i|^p},$$

a norma  $\|x\|_1$  é a soma dos módulos dos componentes do vetor:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|,$$

a norma  $\|x\|_\infty$  é o máximo módulo dos componentes do vetor:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|,$$

a norma standard  $\|x\|_2$ , chamada de norma Euclidiana:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}.$$

As correspondentes normas induzidas de matrizes são as seguintes:

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}|,$$

$\|A\|_2$  é conhecida como a norma espectral de  $A$ . Esta denominação ficará clara depois que for definido o raio espectral e os valores singular de uma matriz, na subseção seguinte.

Outra norma que será usada é a norma elipsoidal. Dada uma matriz  $P$  simétrica positiva definida ( $P \succ 0$ ), definimos a norma elipsoidal de  $x$  como:

$$\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}.$$

### B.1.2 Definição do Raio Espectral

O raio espectral de uma matriz é definido como o maior módulo de seus autovalores<sup>1</sup>:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : Av = \lambda v\}. \quad (\text{B.1})$$

---

<sup>1</sup>O autovalor de uma matriz  $A$  é um escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que:

$$\exists v \neq 0 : Av = \lambda v,$$

$v$  é o autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ .

### B.1.3 Propriedades

#### Raio espectral da potência de uma matriz

Os autovalores da  $k^{\text{th}}$  potência  $A^k$  de uma matriz  $A$  são a  $k^{\text{th}}$  potência  $\lambda^k$  desses  $\lambda$  de  $A$ . De fato, podemos ver que:

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^k v = \lambda^k v.$$

Conseqüentemente, a partir da definição (B.1)

$$\rho(A^k) = \rho(A)^k. \quad (\text{B.2})$$

Remetemos o leitor a (Gantmacher 1960) para uma prova formal deste resultado.

#### Condição de convergência

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1. \quad (\text{B.3})$$

Remetemos o leitor a (Theys 2005) para uma prova formal deste resultado.

#### Desigualdade com a norma

Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e  $\rho(A) = \lambda^*$ , com o correspondente autovetor  $v^* \in \mathbb{C}^n$ , tal que  $Av^* = \lambda^* v^*$ . Definamos a matriz  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , onde as colunas de  $V$  são os vetores coluna  $v^*$  duplicado  $n$  vezes. Usando esta construção, temos

$$AV = \lambda^* V \Rightarrow |\lambda^*| \|V\| = \|\lambda^* V\| = \|AV\| \leq \|A\| \|V\|$$

Portanto, se  $\|\cdot\|$  é qualquer norma de matriz sub-multiplicativa, e se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , então

$$\rho(A) \leq \|A\|. \quad (\text{B.4})$$

#### Raio espectral como limite da norma

Da desigualdade (B.4), podemos derivar, usando a propriedade (B.2),  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \rho(A^k) &\leq \|A^k\| \\ \rho(A)^k &\leq \|A^k\| \\ \rho(A) &\leq \|A^k\|^{1/k} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Agora, para qualquer matriz  $A$ , e para qualquer constante  $\epsilon > 0$ , podemos definir a matriz  $\tilde{A} = [\rho(A) + \epsilon]^{-1}A$ . Por construção, o raio espectral de  $\tilde{A}$ ,  $\rho(\tilde{A})$ , é inferior a 1 e as sucessivas potências de  $\tilde{A}$  convergem à matriz zero, isto é:

$$\rho(\tilde{A}) < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{A}^k\| = 0.$$

A partir disso, temos que:

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall \epsilon > 0, \exists N(A, \epsilon) : \forall k \geq N, \|\tilde{A}^k\| &< 1 \\ \|A^k\| &< (\rho(A) + \epsilon)^k \\ \|A^k\|^{1/k} &< \rho(A) + \epsilon \end{aligned}$$

Considerando a equação (B.5), podemos então escrever  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall \epsilon > 0, \exists N(A, \epsilon)$ :

$$\forall k \geq N, \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} < \rho(A) + \epsilon.$$

Isto significa que

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}. \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Raio Espectral Conjunto de um Conjunto de Matrizes

Esta seção apresenta uma generalização do conceito de raio espectral a um conjunto de matrizes. Embora esta extensão pareça bastante natural, ela dá origem a algumas questões.

A noção de raio espectral conjunto de um conjunto de matrizes aparece em uma ampla variedade de contextos e levou a uma série de recentes contribuições (Blondel e Tsitsiklis 2000, Theys e Blondel 2003, Daubechies e Lagarias 2001, Gurvits 1995, Tsitsiklis e Blondel 1997b). Um levantamento apresentando uma lista de mais de cem contribuições relacionadas foi realizada por Gilbert Strang em (Strang 2001).

### B.2.1 Definições

Existem duas generalizações naturais da noção de raio espectral de um conjunto de matrizes. A primeira é baseada no raio espectral e a segunda em norma de matrizes.

Vamos considerar um conjunto  $\mathcal{M}$  de matrizes  $A_i$   $n \times n$ , (não necessariamente

limitados):

$$\mathcal{M} = \{A_i : i \in \mathcal{I}\},$$

onde  $\mathcal{I}$  é o conjunto de índices.

## Raio Espectral Generalizado (*Generalized Spectral Radius - GSR*)

Primeiramente definamos

$$\rho_k(\mathcal{M}) := \sup \left\{ \rho \left( \prod_{i=1}^k M_i \right) : M_i \in \mathcal{M} \text{ para } 1 \leq i \leq k \right\}. \quad (\text{B.7})$$

Para um dado  $k$ ,  $\rho_k(\mathcal{M})$  representa o maior raio espectral possível de todos os produtos de  $k$  matrizes escolhidos livremente no conjunto  $\mathcal{M}$ . Isto serve como base para a definição do raio espectral generalizado, que é

$$\rho(\mathcal{M}) := \limsup_{k \rightarrow \infty} (\rho_k(\mathcal{M}))^{1/k}. \quad (\text{B.8})$$

O raio espectral generalizado é, portanto, o máximo raio espectral assintótico dos produtos de matrizes que podem ser construídos utilizando o conjunto  $\mathcal{M}$ . O expoente  $1/k$  serve como uma normalização e permite que o GSR possa ser interpretado como uma taxa de crescimento (do raio espectral). Note que esta definição só depende da noção de raio espectral, e toma o supremo de todos os possíveis produtos no conjunto considerado.

## Raio Espectral Conjunto (*Joint Spectral Radius - JSR*)

Vamos definir o raio espectral conjunto de uma forma semelhante como fizemos com o raio espectral generalizado, mas desta vez usando a propriedade (B.6),

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}.$$

Considerando-se o raio espectral como um limite de normas, isto leva a

$$\hat{\rho}_k(\mathcal{M}, \|\cdot\|) := \sup \left\{ \left\| \prod_{i=1}^k M_i \right\| : M_i \in \mathcal{M} \text{ para } 1 \leq i \leq k \right\}, \quad (\text{B.9})$$

que é muito semelhante a (B.7): aqui,  $\hat{\rho}_k(\mathcal{M})$  representa a maior norma possível de todos os produtos de  $k$  matrizes escolhidas no conjunto  $\mathcal{M}$ . Isto é tudo que precisamos,

para definir o raio espectral conjunto:

$$\hat{\rho}(\mathcal{M}) := \limsup_{k \rightarrow \infty} (\hat{\rho}_k(\mathcal{M}, \|\cdot\|))^{1/k}. \quad (\text{B.10})$$

O raio espectral conjunto é, portanto, a máxima norma assintótica dos produtos de matrizes que podem ser construídos utilizando o conjunto  $\mathcal{M}$ . Como antes, o expoente  $1/k$  é para normalização e permite que o JSR possa ser interpretado como uma taxa de crescimento (da norma). Vemos que, graças à equivalência entre normas de matrizes, a definição (B.10) não depende da norma que usamos.

## B.2.2 Propriedades

### Multiplicação por um escalar

$$\begin{aligned} \forall \mu \in R, \hat{\rho}(\mu\mathcal{M}) &= \mu\hat{\rho}(\mathcal{M}) \\ \rho(\mu\mathcal{M}) &= \mu\rho(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

### Igualdade entre JSR e GSR e continuidade

Para qualquer conjunto limitado  $\mathcal{M}$  de matrizes

$$\rho(\mathcal{M}) = \hat{\rho}(\mathcal{M}).$$

Remetemos o leitor a (Theys 2005) para uma prova formal deste resultado.

### Desigualdade de 4 elementos

Para qualquer conjunto de matrizes  $\mathcal{M}$  e qualquer  $k \geq 1$

$$\rho_k(\mathcal{M})^{1/k} \leq \rho(\mathcal{M}) \leq \hat{\rho}(\mathcal{M}) \leq \hat{\rho}_k(\mathcal{M})^{1/k}, \quad (\text{B.11})$$

independentemente da norma induzida (sub-multiplicativa) utilizada para definir  $\hat{\rho}_k(\mathcal{M})$ . Remetemos o leitor a (Daubechies e Lagarias 2001) para uma prova formal deste resultado.

Podemos observar que esta última desigualdade pode ser usada para simplificar a definição (B.10), que foi

$$\hat{\rho}(\mathcal{M}) := \limsup_{k \rightarrow \infty} (\hat{\rho}_k(\mathcal{M}, \|\cdot\|))^{1/k},$$

a fim de livrar-nos do  $\limsup$  e substituí-lo por um mais conveniente  $\lim$ :

$$\hat{\rho}(\mathcal{M}) := \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{\rho}_k(\mathcal{M}, \|\cdot\|))^{1/k},$$

# Apêndice C

## Implementação Prática do Controle Preditivo Misto Inteiro

A seguir, mostra-se a metodologia para implementação prática do Controle Preditivo Misto Inteiro (CPMI).

O problema de programação matemática a resolver é um problema Misto Inteiro Quadrático dado pelas equações (4.1,4.2):

$$\begin{aligned} \min_{v_0^{T-1}} J(v_0^{T-1}, x_0) \triangleq & \sum_{k=0}^{T-1} \|v(k) - u_e\|_{Q_1}^2 + \|\delta(k|t) - \delta_e\|_{Q_2}^2 \\ & + \|z(k|t) - z_e\|_{Q_3}^2 + \|x(k|t) - x_e\|_{Q_4}^2 \\ & + \|y(k|t) - y_e\|_{Q_5}^2 \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

*sujeito a :*

$$\begin{aligned} x(T|t) &= x_e \\ x(k+1|t) &= Ax(k|t) + B_1v(k) + B_2\delta(k|t) + B_3z(k|t) \\ y(k|t) &= Cx(k|t) + D_1v(k) + D_2\delta(k|t) + D_3z(k|t) \\ E_2\delta(k|t) + E_3z(k|t) &\leq E_1v(k) + E_4x(k|t) + E_5 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Então definamos o vetor  $\nu(k)$  como:

$$\nu(k|t) = \begin{bmatrix} v(k) \\ \delta(k|t) \\ z(k|t) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Usando a definição (C.3), a função custo (C.1) pode ser expressa como:

$$\min_{\nu_0^{T-1}} J(\nu_0^{T-1}, x_0) \triangleq \sum_{k=0}^{T-1} \|\nu(k|t) - \nu_e\|_{Q_\nu}^2 + \|x(k|t) - x_e\|_{Q_4}^2 + \|y(k|t) - y_e\|_{Q_5}^2, \quad (\text{C.4})$$

onde:

$$Q_\nu = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Expressando a equação (C.4) na forma matricial, temos que:

$$\min_V J(V) \triangleq \|V - V_e\|_{Q_\nu}^2 + \|X - X_e\|_{Q_4}^2 + \|Y - Y_e\|_{Q_5}^2, \quad (\text{C.6})$$

onde:

$$V = \begin{bmatrix} \nu(0) \\ \vdots \\ \nu(T-1) \end{bmatrix}, \text{ é o vetor a ser calculado pelo algoritmo de otimização.}$$

$X = \begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(T) \end{bmatrix}$ , é o vetor composto pelos vetores de estado preditos nos instantes de tempo:  $k = 1 \dots T-1$ .

$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(T) \end{bmatrix}$ , é o vetor composto pelos vetores saída preditos nos instantes de tempo:  $k = 1 \dots T-1$ .

$V_e$ ,  $X_e$  e  $Y_e$ , são similarmente definidos a partir de:  $\nu_e = [\nu_e, \delta_e, z_e]^T$ ,  $x_e$  e  $y_e$  respectivamente.

A relação entre  $V$  e  $X$  pode obter-se desenvolvendo a equação (2.38) tendo em conta a definição (C.3):

$$x(k+1) = Ax(k) + B\nu(k), \quad (\text{C.7})$$

onde:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 x(1) &= Ax(0) + B\nu(0) \\
 x(2) &= Ax(1) + B\nu(1) = A^2x(0) + AB\nu(0) + B\nu(1) \\
 &\vdots = \vdots \\
 x(T) &= A^T x(0) + A^{T-1}B\nu(0) + \dots + B\nu(T-1).
 \end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^T \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ AB & B & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{T-1} & \dots & AB & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(0) \\ \nu(1) \\ \vdots \\ \nu(T-1) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Definindo:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^T \end{bmatrix} \quad e \quad \Phi = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ AB & B & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{T-1} & \dots & AB & B \end{bmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

temos então que:

$$X = \Lambda x(0) + \Phi V. \quad (\text{C.11})$$

Fazendo o mesmo para achar a relação entre  $V$  e  $Y$ :

$$y(k) = Cx(k). \quad (\text{C.12})$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 y(1) &= Cx(1) = C(Ax(0) + B\nu(0)) = CAx(0) + CB\nu(0) \\
 y(2) &= CA^2x(0) + CAB\nu(0) + CB\nu(1) \\
 &\vdots = \vdots \\
 y(T) &= CA^T x(0) + CA^{T-1}B\nu(0) + \dots + CB\nu(T-1).
 \end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^T \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{T-1}B & \dots & CAB & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(0) \\ \nu(1) \\ \vdots \\ \nu(T-1) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

Definindo:

$$\Omega = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^T \end{bmatrix} \quad e \quad \Psi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{T-1}B & \dots & CAB & CB \end{bmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

temos então que:

$$Y = \Omega x(0) + \Psi V. \quad (\text{C.15})$$

Desenvolvendo a equação (C.6) tendo em conta as equações (C.11) e (C.15), chegamos à seguinte expressão:

$$\min_V J(V) \triangleq \frac{1}{2} V^T H V + c^T V + f, \quad (\text{C.16})$$

que é a forma clássica como se apresenta a função custo em problemas quadráticos mistos inteiros (*Mixed Integer Quadratic Program* - MIQP), onde:

$$H = 2 [\Psi^T Q_5 \Psi + \Phi^T Q_4 \Phi + Q_\nu] \quad (\text{C.17})$$

$$c^T = 2 [(\Omega x(0) - Y_e)^T Q_5 \Psi + (\Lambda x(0) - X_e)^T Q_4 \Phi - V_e^T Q_\nu] \quad (\text{C.18})$$

$$f = (\Omega x(0) - Y_e)^T Q_5 (\Omega x(0) - Y_e) + (\Lambda x(0) - X_e)^T Q_4 (\Lambda x(0) - X_e) \quad (\text{C.19})$$

$$+ V_e^T Q_\nu V_e. \quad (\text{C.20})$$

O mesmo desenvolvimento podemos fazer com as restrições do problema MIQP (4.1, 4.2). Como já foi dito, por questões práticas a primeira restrição de (4.2):  $x(T|t) = x_e$  será suprimida pois pode fazer o problema infactível; a segunda e terceira restrições são de igualdade, e já foram tidas em conta na solução do problema através do desenvolvimento anterior, onde são introduzidas na função custo (4.1). Portanto fica só o desenvolvimento da desigualdade:

$$E_2 \delta(k|t) + E_3 z(k|t) \leq E_1 v(k) + E_4 x(k|t) + E_5, \quad (\text{C.21})$$

a qual podemos pôr na seguinte forma:

$$-E_4x(k|t) + E_\nu\nu(k) \leq E_5, \quad (\text{C.22})$$

onde:

$$E_\nu = \begin{bmatrix} -E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} -E_4x(0) + E_\nu\nu(0) &\leq E_5 \\ -E_4x(1) + E_\nu\nu(1) &= -E_4Ax(0) - E_4B\nu(0) + E_\nu\nu(1) \leq E_5 \\ &\vdots \leq \vdots \\ -E_4A^{T-1}x(0) - E_4A^{T-2}B\nu(0) - \dots - E_4B\nu(T-2) + E_\nu\nu(T-1) &\leq E_5 \end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$-\begin{bmatrix} E_4 \\ E_4A \\ \vdots \\ E_4A^{T-1} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} E_\nu & 0 & 0 & 0 \\ -E_4B & E_\nu & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E_4A^{T-2}B & \dots & -E_4B & E_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(0) \\ \nu(1) \\ \vdots \\ \nu(T-1) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

Definindo:

$$\Xi = -\begin{bmatrix} E_4 \\ E_4A \\ \vdots \\ E_4A^{T-1} \end{bmatrix} \quad e \quad \Gamma = \begin{bmatrix} E_\nu & 0 & 0 & 0 \\ -E_4B & E_\nu & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -E_4A^{T-2}B & \dots & -E_4B & E_\nu \end{bmatrix}, \quad (\text{C.25})$$

temos então que:

$$\Xi x(0) + \Gamma V \leq U, \quad (\text{C.26})$$

onde:  $U$  é uma matriz composta por  $T$  matrizes  $E_5$  na forma:  $U = [E_5 \dots E_5]^T$ .

Com todo o desenvolvimento anterior obtemos a seguinte expressão do problema MIQP (4.1-4.2):

$$\min_V J(V) \triangleq \frac{1}{2}V^T H V + c^T V + f \quad (\text{C.27})$$

*sujeito a :*

$$\Xi x(0) + \Gamma V \leq U \quad (\text{C.28})$$

---

Usando as matrizes e vetores:  $H$ ,  $c^T$ ,  $f$ ,  $\Xi$ ,  $\Gamma$  e  $U$  como dados de entrada para algum algoritmo de otimização MIQP, se existir a solução o algoritmo resolverá o problema dando como resultado um certo  $V^*$ , do qual tomaremos somente o primeiro elemento para aplicar na planta de acordo com a filosofia do CPBM.

# Referências Bibliográficas

- Alur, R., Belta, C., Ivancic, F., Kumar, V., Mintz, M., Pappas, G. J., Rubin, H. e Schug, J. (1999). Hybrid modeling and simulation of biomolecular networks, *In: M. D. Benedetto e A. S. Vincentelli (ed.), Hybrid Systems: Computation and Control*, V. 2034 *In: Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, p. 19–33.
- Asarin, E., Bournez, O., Dang, T. e O.Maler (2000). Reachability analysis of piecewise-linear dynamical systems, *In: B. Krogh e N. Lynch (ed.), Hybrid Systems: Computation and Control*, V. 1790 *In: Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, New York, p. 20–31.
- Bahrman, M. P. e Johnson, B. K. (2007). The abcs of hvdc transmission technologies, *Power and Energy Magazine, IEEE* 5(2): 32–44.
- Balluchi, A., Benvenuti, L., Benedetto, M. D., Pinello, C. e Vincentelli, A. S. (2000). Automotive engine control and hybrid systems: Challenges and opportunities, *Proceedings IEEE* 88(7): 888–912.
- Bemporad, A. (2003). *Hybrid Toolbox-User's Guide*.
- Bemporad, A. (2004). Efficient conversion of mixed logical dynamical systems into an equivalent piecewise affine form, *IEEE Transactions on Automatic Control* 49(5): 832–838.
- Bemporad, A., Borrelli, F. e Morari, M. (2000). Piecewise linear optimal controllers for hybrid systems, *Proceedings of the American Control Conference* .
- Bemporad, A., Borrelli, F. e Morari, M. (2002). On the optimal control law for linear discrete time hybrid systems, *In: M. Greenstreet e C. Tomlin (ed.), Hybrid Systems: Computation and Control*, V. 2289 *In: Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, New York, p. 105–119.

- Bemporad, A., Ferrari-Trecate, G. e Morari, M. (2000). Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **45**(10): 1864–1876.
- Bemporad, A. e Morari, M. (1999). Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints, *Automatica* **35**(3): 407–427.
- Bemporad, A., Morari, M., Dua, V. e Pistikopoulos, E. N. (1999). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems, *Relatório Técnico AUT99-16*, Automatic Control Lab, ETH, Zürich, Switzerland.
- Benveniste, A., Borgne, M. L. e Guernic, P. L. (1993). Hybrid systems: the signal approach, In: R. Grossmann, A. Nerode, A. Ravn e H. Rischel (ed.), *Hybrid Systems*, n. 736 In: *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag.
- Bernardo, M. D., Pagano, D. J. e Ponce, E. (2008). Nonhyperbolic boundary equilibrium bifurcations in planar filippov systems: A case study approach, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **18**(5): 1377–1392.
- Blondel, V. D., Nesterov, Y. e Theys, J. (2005). On the accuracy of the ellipsoid norm approximation of the joint spectral radius, *Linear Algebra and its Applications* **394**: 91–107.
- Blondel, V. D. e Tsitsiklis, J. N. (2000). The boundedness of all products of a pair of matrices is undecidable, *Systems and Control Letters* **41**(2): 135–140.
- Borges, F. (2002). *Análise e controle de sistemas de estrutura variável*, Master’s thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Borges, F. e Pagano, D. J. (2002). Sliding Mode Control of a Boost Converter with a Washout Filter. (In Portuguese), *XV Congresso Brasileiro de Automática*. p. 1638–1643.
- Borrelli, F. (2002). *Discrete Time Constrained Optimal Control*, PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Swiss.
- Branicky, M. S., Borkar, V. S. e Mitter, S. K. (1998). A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory, *IEEE Trans. Automat. Control* **43**(1): 31–45.
- Brockett, R. W. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization, In: Boston (ed.), *“Differential Geometric Control Theory”*, R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussmann, Birkhuser, p. 181–191.

- Camacho, E. e Bordons, C. (2005). *Model Predictive Control*, Springer-Verlag.
- Carlo, R. D., Branicky, M., Pettersson, S. e Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proc. IEEE* **88**: 1069–1082.
- Cavalier, T. M., Pardalos, P. e Soyster, A. L. (1990). Modeling and integer programming techniques applied to propositional calculus, *Comput. Oper. Res.* **17**(6): 561–570.
- Chandru, V. e Hooker, J. (1999). *Optimization Methods for Logical Inference*, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.
- Christiansen, D. (1997). *Electronics Engineers Handbook*, 4th ed., New York: IEEE Press/McGraw Hill, Inc.
- Chutinan, A. e Krogh, B. H. (1999). Verification of polyhedral invariant hybrid automata using polygonal flow pipe approximations, *In: F. Vaandrager e J. van Schuppen (ed.), Hybrid Systems: Computation and Control*, V. 1569 *In: Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, New York, p. 76–90.
- Cortés, J. (2008). Discontinuous dynamical systems: A tutorial on solutions, nonsmooth analysis, and stability, *IEEE Control System Magazine* **28**(3): 36–107.
- Daafouz, J. e Bernussou, J. (2001). Parameter dependent lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties, *Syst. Control Lett.* **43**: 355–359.
- Daafouz, J., Riedinger, P. e Iung, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched lyapunov function approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(11): 1883–1887.
- Daubechies, I. e Lagarias, J. C. (2001). Corrigendum addendum to: Sets of matrices all infinite products of which converge, *Linear Algebra Appl.* **327**(1-3): 69–83.
- de Prada, C., Sarabia, D. e S.Cristea (2005). Modelling and control of four tanks mixed logical dynamical (mld) system, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms*, V. 12, Watam Press, p. 243–263.
- EA (1999). *EcosimPro User Manual*.
- Fabian, G. (1999). *A Language and Simulator for Hybrid Systems*, PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.

- Ferrari-Trecate, G., Cuzzola, F. A. e Morari, M. (2002a). Analysis of discrete-time pwa systems with boolean inputs, outputs and states, *Hybrid Systems: computation and control (HSCC), Proceedings of the 5th international workshop on Hybrid Systems*.
- Ferrari-Trecate, G., Cuzzola, F. e Morari, M. (2002b). Analysis of piecewise affine systems with logic states, *In: C. J. Tomlin e M. R. Greenstreet (ed.), Proc. 5th International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control*, V. 2289 *In: Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, p. 194–208.
- Gantmacher, J. (1960). *Matrix Theory, Vol. I and II*, Chelsea Publishing Co.
- Goebel, R., Sanfelice, R. G. e Teel, A. R. (2009). Hybrid Dynamical Systems: Robust Stability and Control for Systems that Combine Continuous Time and Discrete Time Dynamics, *IEEE Control System Magazine* **29**(2): 28–93.
- Grossmann, R. L., Nerode, A., Ravn, A. P. e Rischel, H. (1993). *Hybrid systems*, V. 736, Lecture Notes in Computer Science. New York: Springer Verlag.
- Gurvits, L. (1995). Stability of discrete linear inclusion, *Linear Algebra and its Applications* (231): 47–85.
- Gutierrez, G. (2000). *Diseño Integrado y Síntesis de Procesos Aplicado al Proceso de Fangos Activados*, PhD thesis, Universidad de Valladolid.
- Hayes, J. P. (1993). *Introduction to digital logic design*, Reading: Addison-Wesley.
- Heemels, W. P. M. H., Schumacher, J. M. e Weiland, S. (2000). Linear complementarity systems, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **60**(4): 1234–1269.
- Heemels, W., Schutter, B. D. e Bemporad, A. (2001). Equivalence of hybrid dynamical models, *Automatica* **37**: 1085–1091.
- Hespanha, J., Bohacek, S., Obraczka, K. e Lee, J. (2001). Hybrid modeling of tcp congestion control, *In: M. D. Benedetto e A. S. Vincentelli (ed.), Hybrid Systems: Computation and Control*, V. 2034 *In: Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, p. 291–304.
- Huerlimann, T. (2001). *Reference Manual for the LPL Modeling Language*, version 4.42 ed., Departement for Informatics, Université de Fribourg, Switzerland, <http://www2-iiuf.unifr.ch/tcs/lpl/TonyHome.htm>.

- Hyttinen, M. e Bentzen, K. (2006). Operating experiences with a voltage source converter (hvdc light) on the gas platform troll a, Energex, Stavanger, Norway.
- Itkis, U. (1976). *Control Systems of Variable Structure*, John Wiley & Sons, New York.
- Johannson, M. e Rantzer, A. (1998). Computation of piece-wise quadratic lyapunov functions for hybrid systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **43**(4): 555–559.
- Jones, P. e Stendius, L. (2006). The Challenges of Offshore Power System Construction. Troll A, Electrical Power Delivered Successfully to an Oil and Gas Platform in the North Sea, European Wind Energy Conference & Exhibition, Athen, Greece.
- Kalman, R. E., Ho, Y. C. e Narendra, K. S. (1962). Controllability of linear dynamic systems, *Contributions to Differential Equations*, V. 1, New York: Wiley-Interscience.
- Kassakian, J., Schlecht, M. e Verghese, G. (1991). *Principles of Power Electronics*, Addison-Wesley.
- Kerrigan, E. C. (2000). *Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control*, PhD thesis, Control Group Department of Engineering, University of Cambridge.
- Kerrigan, E. C. e Mayne, D. Q. (2002). Optimal control of constrained, piecewise affine systems with bounded disturbances, *Proc. 42th IEEE Conf. Decision Control*, Las Vegas, p. 1552–1557.
- Kohavi, Z. (1978). *Switching and Finite Automata Theory*, McGraw-Hill.
- Lagarias, J. e Wang, Y. (1995). The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices, *Linear Algebra Appl*, V. 214, p. 17–42.
- Lawrence C. T., T. A. L. (2001). A computationally efficient feasible sequential quadratic programming algorithm., *SIAM J. Optimization* **11**(4): 1092–1118.
- Lee, J. e Cooley, B. (1997). Recent advances in model predictive control, *Chemical Process Control - V*, V. 93, AIChE Symposium Series - American Institute of Chemical Engineers, p. 201–216b.
- Liberzon, D. (1999). *Switching in Systems and Control*, Birkhauser.
- Lin, H. e Antsaklis, P. J. (2005). Stability and stabilizability of switched linear systems: A short survey of recent results, *International Symposium on Intelligent Control*, Limassol, Cyprus, p. 24–29.

- Luyben, M. L. (1993). *Analyzing the Interaction Between Design and Control In Chemical Reactor Systems*, PhD thesis, Princeton University.
- Luyben, M. L. e Floudas, C. A. (1994a). Analyzing the interaction of design and control -1. a multiobjective framework and application to binary distillation synthesis, *Comp. Chem. Eng.* (10): 933–969.
- Luyben, M. L. e Floudas, C. A. (1994b). Analyzing the interaction of design and control -1.a multiobjective framework and application to binary distillation synthesis, *Comp. Chem. Eng.* **18**(10): 933–969.
- Maciejowski, J. (2002). *Predictive Control*, Prentice Hall.
- Mason, P., Sigalotti, M. e Daafouz, J. (2007). On stability analysis of linear discrete-time switched systems using quadratic lyapunov functions, *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, p. 5629–5633.
- Mattavelli, P., Rossetto, L., Spiazzi, G. e Tenti, P. (1993). General-purpose sliding-mode controller for dc-dc converter applications, *PESC Conf.* p. 609–615.
- Mattavelli, P., Rossetto, L., Spiazzi, G. e Tenti, P. (1997). General-Purpose Fuzzy Controller for DC-DC Converters, *IEEE Transactions On Power Electronics* **12**(1): 79–86.
- Mayne, D. (1997). Nonlinear model predictive control: an assessment, *Chemical Process Control - V*, V. 93, AIChE Symposium Series - American Institute of Chemical Engineers, p. 217–231.
- Mayne, D. Q. e Rakovic, S. (2002). Optimal control of constrained piecewise affine discrete time systems using reverse transformation, *Proc. 42th IEEE Conf. Decision Control*, Las Vegas, p. 1546–1551.
- Mayne, D. Q. e Rakovic, S. (2003). Model predictive control of constrained piecewise affine discrete-time systems, *International Journal Of Robust And Nonlinear Control* **13**: 261–279.
- Mayne, D., Rawlings, J., Rao, C. e Sokaert, P. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality, *Automatica* **36**(6): 789–814.
- Mendelson, E. (1964). *Introduction to Mathematical Logic*, New York: Van Nostrand.

- Middlebrook, R. e Cúk, S. (1976). A general unified approach to modelling switching-converter power stages, *IEEE Power Electronics Specialists Conference - PESC* p. 18–34.
- Mignone, D. (2001). The really big collection of logic propositions and linear inequalities, *Relatório Técnico AUT01-11*, Automatic Control Laboratory, ETH, Zürich, Switzerland.
- Mignone, D. (2002). *Control and Estimation of Hybrid Systems with Mathematical Optimization*, PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Swiss.
- Mignone, D., Ferrari-Trecate, G. e Morari, M. (2000). Stability and stabilization of piecewise affine and hybrid systems: An LMI approach, *Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control*.
- Miller, R. E. (1965). Switching theory, *Combinational Circuits*, V. 1, John Wiley.
- Morari, M. (1983). Design of resilient processing plants-iii. a general framework for the assesment of dynamic resilience, *Chem. Eng. Sci.* **38**: 1881–1891.
- Morari, M. (1992). Effect of design on the controllability of chemical plants, IFAC Workshop on Interactions Between Process Design and Process Control, J. D. Perkins, De., Pergamon Press, p. 3–16.
- Morari, M. e Zafiriou, E. (1989). *Robust Process Control*, Englewood Cliffs : Prentice-Hall, Inc.
- Murtagh, B. (1981). *Advanced linear programming : computation and practice*, McGraw-Hill.
- Nemhauser, G. e Wolsey, L. (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley.
- Nesterov, Y. e Nemirovsky, A. (1994). Interior point polynomial algorithms in convex programming, *Society for Industrial and Applied Mathematics* . (SIAM Studies in Applied Mathematics).
- Nishida, N. e Ichikawa, A. (1975). Synthesis of optimal dynamic process systems by a gradient method, *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.* **14**: 236–242.
- Nishida, N., Liu, Y. A. e Ichikawa, A. (1976). Studies in chemical process design and synthesis ii. optimal synthesis of dynamic process systems with uncertainty, *AIChE J.* **22**: 539–549.

- Peña, M., Camacho, E. F., Piñón, S. e Carelli, R. (2005). Model predictive controller for piecewise affine system, *IFAC* .
- Perkins, J. D. (1989). Interactions between process design and process control, International Federation of Automatic Control Symposium, Maastricht, The Netherlands.
- Pomar, M., Gutierrez, G., de Prada, C. e Normey-Rico, J. E. (2007a). Integrated design & control applied to a buck boost converter, *European Conference Control* .
- Pomar, M., Gutierrez, G., de Prada, C. e Normey-Rico, J. E. (2007b). A methodology for the integrated circuit and control design of a buck boost converter, *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control* .
- Pomar, M., Gutierrez, G., de Prada, C. e Normey-Rico, J. E. (2009). Integrated design & control of a buck boost converter, *Controle & Automação: Revista da Sociedade Brasileira de Automática* **20**(3).
- Pomar, M. J. (2005). *Controle preditivo não linear com aplicação à eletrônica de potência*, Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Qin, S. e Badgewell, T. (1997). An overview of industrial model predictive control technology, *Chemical Process Control - V*, V. 93, AIChE Symposium Series - American Institute of Chemical Engineers, p. 232–256.
- Raman, R. e Grossmann, I. (1992). Integration of logic and heuristic knowledge in minlp optimization for process synthesis, *Computers Chem. Engng.* **16**(3): 155–171.
- Rashid, M. H. (1995). *Electronica de Potencia: Circuitos, Dispositivos y Aplicaciones*, 2nd ed., Prentice Hall Hispanoamericana.
- Sarabia, D. (2007). *Modelado, Simulación y Control Predictivo de Sistemas Híbridos*, PhD thesis, Universidad de Valladolid, Valladolid-Espanha.
- Sarabia, D., de Prada, C., Cristea, S., Mazaeda, R. e Colmenares, W. (2007). Hybrid NMPC Control of a Sugar House, *In: F. B. L. Findeisen, Rolf; Allgöwer (ed.), Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, V. 358 *In: Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, p. 495–502.

- Sarabia, D., Pomar, M., Normey-Rico, J. E. e de Prada, C. (2007). Mixed integer predictive control of a buck boost converter, *7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*.
- Sasao, T. (1999). *Switching Theory for Logic Synthesis*, Kluwer Academic.
- Schaft, A. V. D. e Schumacher, H. (1999). An introduction to hybrid dynamical systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, V. 251, Springer-Verlag.
- Schrijver, A. (1986). *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley-Interscience.
- Schutter, B. D. e Boom, T. V. D. (2001). On model predictive control for max-min-plus-scaling discrete event systems, *Automatica* **37**(7): 104–1056.
- Schutter, B. D. e Moor, B. D. (1999). The extended linear complementarity problem and the modeling and analysis of hybrid systems, *In: P. Antsaklis, W. Kohn, M. Lemmon, A. Nerode e S. Sastry (ed.), Hybrid systems V*, V. 1567 *In: Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, Berlin, p. 70–85.
- Skogestad, S., Hovd, M. e Lundström, P. (1991). Towards integrating design and control : Use of frequency-dependent tools for controllability analysis, In PSE '91 4th International Symposium on Process Systems Engineering, Montbello, Quebec, p. III.3.1–III.3.5.
- Skogestad, S. e Morari, M. (1987). The dominant time constant for distillation columns, *Comput. Chem. Engr.* **26**: 2029–2035.
- Skogestad, S. e Wolf, E. (1990). Controllability measures for disturbance rejection, IFAC Workshop on Interactions Between Process Design and Process Control, J. D. Perkins, Ed., Pergamon Press, p. 23–29.
- Slupphaug, O. e Foss, B. (1997). Model predictive control for a class of hybrid systems, *Proceedings of the European Control Conference*, Brussels, Belgium.
- Slupphaugand, O., Vada, J. e Foss, B. (1997). Mpc in systems with continuous and discrete control inputs, *Proceedings of the American Control Conference*, Albuquerque, NM, USA.
- Sontag, E. D. (1981). Nonlinear regulation: the piecewise linear approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**(2): 346–357.
- Spiazzi, G., Mattavelli, P. e Rossetto, L. (1997). Sliding Mode Control of DC-DC Converters.

- Strang, G. (2001). The joint spectral radius. commentary by gilbert strang on paper number 5, *Collected works of Gian-Carlo Rota* .
- Tan, S. C., Lai, Y. M. e Tse, C. K. (2006). An Evaluation of the Practicality of Sliding Mode Controllers in DC-DC Converters and Their General Design Issues, *37th IEEE Power Electronics Specialists Conference* p. 187–193.
- The Numerical Algorithms Group Ltd* (1996). Oxford UK.
- Theys, J. (2005). *Joint Spectral Radius: theory and approximations*, PhD thesis, Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences Appliquées.
- Theys, J. e Blondel, V. (2003). Discrete and continuous stability of switched linear systems, *In 22nd Benelux Meeting on Systems and Control* .
- Torrise, F., Bemporad, A., Bertini, G., Hertach, P., Jost, D. e Mignone, D. (2000). Hysdel 2.0.5 - user manual, *Relatório Técnico AUT02-10*, Automatic Control Laboratory, ETH Zurich, <http://control.ee.ethz.ch/>.
- Torrise, F. D. (2003). *Modeling and Reach-Set Computation for Analysis and Optimal Control of Discrete Hybrid Automata*, PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Swiss.
- Tsitsiklis, J. (1987). The stability of the products of a finite set of matrices open problems in communication and computation, Springer-Verlag, New York, p. 161–163.
- Tsitsiklis, J. e Blondel, V. (1997a). The lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard-when not impossible-to compute and to approximate, *Math. Control Signals Systems*, V. 10, p. 31–40. (Correction in 10 (1997) 381).
- Tsitsiklis, J. N. e Blondel, V. D. (1997b). The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard when not impossible to compute and to approximate, *Math. Control Signals Syst.* **10**(1): 31–40.
- Tyler, M. e Morari, M. (1995). Stability of constrained moving horizon estimation schemes, *Relatório Técnico AUT95-05*, Automatic Control Laboratory, ETH Zürich.
- Utkin, V. I. (1974 (English Translation 1978)). *Sliding Mode and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR, Moscow.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd ed., Prentice Hall.

- Vorpérian, V. (1990). Simplified analysis of PWM converters using the model of the PWM switch: Parts i and ii, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **26**: 409–505.
- Williams, H. P. (1977). Logical problems and integer programming, *Bull. Institute Math. Appli.* **13**: 18–20.
- Williams, H. P. (1993). *Model building in mathematical programming*, 3rd ed., New York: Wiley.
- Witsenhausen, H. (1966). A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-11**(2): 161–167.
- Zieger, G. (1995). *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag.
- Ziegler, J. G. e Nichols, N. B. (1943). Process lags in automatic-control circuits, *Transactions of the ASME* **65**: 433–444.