

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL – PPGEC



MODELAGEM DE LAJES PLANAS SIMÉTRICAS E ASSIMÉTRICAS EM  
CONCRETO ARMADO – ANÁLISE INTEGRADA LAJE X PILAR

ANDRÉ PUEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC – da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**Área de Concentração:** Estruturas

**Orientador:** Daniel Domingues Loriggio, Dr.

Florianópolis, 29 de Maio de 2009.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**CENTRO TECNOLÓGICO**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL – PPGE**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a dissertação intitulada:

**MODELAGEM DE LAJES PLANAS SIMÉTRICAS E ASSIMÉTRICAS EM  
CONCRETO ARMADO – ANÁLISE INTEGRADA LAJE X PILAR**

**ENGº CIVIL ANDRÉ PUEL**

Como requisito para a obtenção do grau de  
**MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL**

---

Profº. (Dr.) **Glicério Trichês**  
(Coordenador do Curso)

---

Profº. (Dr.) **Daniel Domingues Loriggio** (Orientador)

COMISSÃO EXAMINADORA:

---

Profª. **Henriette Lebre La Rovere** (PhD)

---

Profº. (Dr.) **Narbal Ataliba Marcellino**

---

Profº. (Dr.) **Ricardo Leopoldo e Silva França**

Este trabalho é dedicado com muito amor e carinho a minha esposa, Isabel Christina Raitz Puel. Sua dedicação, amor, e amizade tem me inspirado a buscar ser cada dia melhor e a compartilhar o que nós aprendemos juntos. Nosso filho, José Gabriel Raitz Puel, é uma prova disso, que muito nos alegra e nos orgulha todos os dias, a quem também dedico essa obra.

Dedico também aos meus pais, Eurides Puel (*in memoriam*) e Beatriz Dell'Antônia Puel, responsáveis por minha formação e ao meu irmão, Jeferson Puel, pelo belo exemplo.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me proporcionar à oportunidade de atingir este sonho

Ao professor Daniel Domingues Loriggio, por suas lições, orientações, incentivos e  
companheirismo, que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos professores e funcionários do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil da UFSC,  
pela assessoria, disponibilidade e ensinamentos prestados.

Ao meu sogro Osvaldo Martins Filho e minha sogra, Maria do Carmo da Silveira Raitz, pela  
amizade e ajuda que foi de fundamental importância finalizar esse trabalho.

À minha esposa, pela compreensão durante os momentos difíceis vividos para a realização  
desse trabalho e também pela contribuição na revisão ortográfica realizada nessa dissertação.

Aos meus amigos, pela amizade e sempre presentes nessa caminhada.

Aos meus familiares, que me apoiaram em todas as etapas de minha vida.

À minha Vó, Clara Busnardo Dell'Antônia, pelo imenso amor, carinho e dedicação que  
demonstrou desde o início de minha vida.

*“É melhor tentar e falhar, que preocupar-se e ver a vida passar; é melhor tentar, ainda que em vão, que sentar-se fazendo nada até o final. Eu prefiro na chuva caminhar, que em dias tristes em casa me esconder. Prefiro ser feliz, embora louco, que em conformidade viver.”*

Martin Luther King

# SUMÁRIO

<b>RESUMO</b>	<b><i>i</i></b>
<b>ABSTRACT</b>	<b><i>ii</i></b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Objetivos</b>	<b>1</b>
1.1.1. Objetivo geral	1
1.1.2. Objetivos específicos	2
<b>1.2. Justificativa</b>	<b>2</b>
<b>2. INTRODUÇÃO TEÓRICA</b>	<b>4</b>
<b>2.1. Vantagens e Desvantagens das Lajes Planas</b>	<b>4</b>
2.1.1. Vantagens	4
2.1.2. Desvantagens	5
<b>2.2. Teoria das placas em regime elástico</b>	<b>5</b>
2.2.1. Hipóteses fundamentais	6
2.2.2. Definição da Equação de Lagrange	6
<b>2.3. Introdução ao Método dos Deslocamentos</b>	<b>11</b>
<b>2.4. Grelhas planas</b>	<b>13</b>
<b>2.5. Modelagem de Lajes por Analogia de Grelha</b>	<b>16</b>
<b>2.6. Introdução ao Método dos Elementos Finitos</b>	<b>19</b>
2.6.1. Elemento finito de placa	21
<b>3. MODELOS USADOS NA ANÁLISE DAS LAJES PLANAS</b>	<b>24</b>
<b>3.1. Introdução</b>	<b>24</b>
<b>3.2. Descrição do modelo utilizado no software SAP 2000</b>	<b>24</b>
<b>3.3. Estratégias de modelagem simulando pilar como reação na laje</b>	<b>28</b>
3.3.1. Pilar simétrico em relação à laje	29
3.3.2. Pilar assimétrico em relação à laje	32
3.3.3. Ajustes ao modelar o pilar como reação na laje	38

3.3.4.	Trechos rígidos na região do pilar _____	41
3.3.5.	Seção transversal do pilar projetada no centro da laje _____	43
<b>3.4.</b>	<b>Exemplos numéricos _____</b>	<b>46</b>
3.4.1.	Caso 1 – Simetria _____	48
3.4.2.	Caso 2 – Simetria: Núcleo rígido na região do pilar P5 _____	49
3.4.3.	Caso 3 - Assimetria 1 m _____	49
3.4.4.	Caso 4 - Assimetria 1 m: Núcleo rígido na região do pilar P5 _____	50
3.4.5.	Resumo dos casos _____	50
<b>4.</b>	<b>RESULTADOS OBTIDOS _____</b>	<b>52</b>
<b>4.1.</b>	<b>Análise dos momentos fletores na laje simétrica pelo MEF – Casos 1 e 2 _____</b>	<b>52</b>
4.1.1.	Caso 1.1 – Pilar como apoio pontual _____	52
4.1.2.	Caso 1.2 – Carga distribuída na seção do pilar _____	54
4.1.3.	Caso 1.3 – Carga distribuída na seção média da laje _____	56
4.1.4.	Caso 2.1 – Pilar como apoio pontual _____	58
4.1.5.	Caso 2.2 - Carga distribuída na seção do pilar _____	59
4.1.6.	Caso 2.3 - Carga distribuída na seção média da laje _____	59
4.1.7.	Gráficos 3D _____	60
4.1.8.	Comparativo entre os resultados obtidos pelo MEF – Casos 1 e 2 _____	62
<b>4.2.</b>	<b>Análise dos momentos fletores na laje simétrica por analogia de grelha – Casos 1 e 2</b>	<b>64</b>
4.2.1.	Caso 1.1 – Pilar como apoio pontual _____	64
4.2.2.	Caso 1.2 - Carga distribuída na seção do pilar _____	66
4.2.3.	Caso 1.3 - Carga distribuída na seção média da laje _____	68
4.2.4.	Caso 2.1 – Pilar como apoio pontual _____	69
4.2.5.	Caso 2.2 - Carga distribuída na seção do pilar _____	70
4.2.6.	Caso 2.3 - Carga distribuída na seção média da laje _____	70
4.2.7.	Comparativo entre os resultados obtidos por Analogia de Grelha – Casos 1 e 2 _____	71
<b>4.3.</b>	<b>Comparativo dos momentos fletores na laje simétrica - MEF e Analogia de Grelha – Casos 1 e 2 _____</b>	<b>74</b>
<b>4.4.</b>	<b>Análise dos momentos fletores na laje assimétrica pelo MEF – Casos 3 e 4 _____</b>	<b>80</b>
4.4.1.	Casos 3.1, 3.2 e 3.3 _____	80
4.4.2.	Casos 4.1, 4.2 e 4.3 _____	84

4.4.3.	Gráficos 3D	85
4.4.4.	Comparativo entre os resultados obtidos pelo MEF – Casos 3 e 4	87
<b>4.5.</b>	<b>Análise dos momentos fletores na laje assimétrica por Analogia de Grelha – Casos 3 e 4</b>	<b>90</b>
4.5.1.	Casos 3.1, 3.2 e 3.3	91
4.5.2.	Casos 4.1, 4.2 e 4.3	92
4.5.3.	Comparativo entre os resultados obtidos por Analogia de Grelha – Casos 3 e 4	92
<b>4.6.</b>	<b>Comparativo dos momentos fletores na laje simétrica - MEF e Analogia de Grelha – Casos 3 e 4</b>	<b>95</b>
<b>4.7.</b>	<b>Esforços no pilar P5</b>	<b>102</b>
4.7.1.	Esforço Normal – Casos 1 e 2	103
4.7.2.	Comparativo esforços normais no pilar P5 - MEF e Analogia de Grelha - Casos 1 e 2	105
4.7.3.	Esforço Normal – Casos 3 e 4	107
4.7.4.	Comparativo esforços normais no pilar P5 - MEF e Analogia de Grelha - Casos 3 e 4	109
4.7.5.	Momento fletor pilar P5 – Análise pelo MEF – Casos 3 e 4	110
4.7.6.	Momento fletor pilar P5 – Análise por analogia de grelha – Casos 3 e 4	112
4.7.7.	Comparativo momento fletor no pilar P5 - MEF e Analogia de Grelha – Casos 3 e 4	114
<b>5.</b>	<b>TÓPICO ESPECIAL - SOFTWARE EBERICK</b>	<b>117</b>
<b>5.1.</b>	<b>Momentos fletores na laje</b>	<b>120</b>
<b>5.2.</b>	<b>Esforços no pilar P5</b>	<b>122</b>
5.2.1.	Esforço normal	122
5.2.2.	Momento fletor	123
<b>5.3.</b>	<b>Comparativo com os modelos analisados com o software SAP 2000</b>	<b>124</b>
5.3.1.	Momentos fletores negativos na laje	124
5.3.2.	Momentos fletores positivos na laje	130
5.3.3.	Esforço normal no pilar P5	132
5.3.4.	Momento fletor no pilar P5	135
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>139</b>
<b>6.1.</b>	<b>Conclusões</b>	<b>139</b>
<b>6.2.</b>	<b>Sugestão para trabalhos futuros</b>	<b>142</b>

<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>143</b>
7.1. Bibliografia utilizada	143
7.2. Bibliografia consultada	145
<b>8. APÊNDICES</b>	<b>147</b>
8.1. Lista de figuras	147
8.2. Lista de gráficos	149
8.3. Lista de tabelas	151

## RESUMO

PUEL, André. *Modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas em concreto armado – Análise integrada laje x pilar*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009. 152 páginas.

Este trabalho estuda a modelagem de lajes planas simétricas e assimétricas, apresentando alternativas para o problema da singularidade ocorrido quando se modela a laje considerando os pilares como apoio pontual. Têm-se como objetivos principais a avaliação dos momentos fletores na laje plana e os esforços (esforço normal e momento fletor) no pilar que gera punção na laje, com uma análise linear.

Foi proposto um modelo que distribui a reação do pilar na laje. O procedimento que consiste em analisar, primeiramente, o modelo com apoio pontual e, então, transformar o momento fletor e o esforço normal do pilar em um carregamento distribuído, que será então adicionado na laje como carregamento no sentido contrário à ação das cargas gravitacionais. Esse carregamento foi colocado na área da seção transversal do pilar como também na área da seção transversal do pilar projetada no centro de gravidade da laje.

Estudaram-se então dois casos, sendo o primeiro com simetria do pilar em relação à laje e o outro contendo assimetria em apenas um eixo. Em cada caso foram elaborados seis modelos: o primeiro, contendo o pilar como apoio pontual; o segundo, estando o pilar modelado como reação distribuída na laje, na região da seção transversal; o terceiro, tendo o pilar como reação distribuída na laje na região da seção transversal, projetada no centro de gravidade da laje. Os demais modelos foram iguais aos anteriores, porém, a região do pilar central foi enrijecida, conforme prescrito pela norma brasileira de projeto de estruturas de concreto. Cada modelo foi analisado no programa SAP 2000, utilizando-se dois processos numéricos: Método dos Elementos Finitos e o Processo por Analogia de Grelha. Os resultados foram comparados entre si, obtendo-se as conclusões pertinentes.

Por fim, os modelos gerados no *software* SAP 2000 foram gerados também no *software* AltoQi Eberick V5 Gold, o qual utiliza o processo por Analogia de Grelha para analisar as lajes. Os resultados foram então novamente comparados entre si, obtendo-se outras conclusões, procurando apontar ao meio técnico procedimentos que visam considerar esforços mais realistas na consideração do problema da singularidade em laje planas.

**Palavras-chave:** Lajes Planas, Concreto Armado, MEF, Analogia de Grelha.

## ABSTRACT

PUEL, André. *Molding flat slabs, symmetric and asymmetric, in reinforced concrete. A slab/column integrated analysis*. Dissertation for master degree in the Civil Engineering Postgraduate Program at Santa Catarina Federal University, 2009. 152 pages.

This work studies how to model flat slabs, symmetric and asymmetric, offering alternatives for the singularity problem found when the slab is modeled considering the columns as punctual supports. The main objectives are the evaluation of bending moments on flat slab and the efforts (normal effort and bending moment) on the column that generates punching shear on the slab, with a linear analysis.

It was suggested a model that distributes the column reaction on the slab. The procedure consists of first analyzing the model with punctual support and then transforming the bending moment and normal effort on the column in a distributed load, acting on the slab in the opposite direction of gravitational loads. This load was added on the column transversal section area, as well as the column transversal section area projected at the slab center of gravity.

Two cases were studied, the first one with column symmetry with respect to the slab and the second one containing asymmetry only in one axis. In each case, six models were developed: The first model considering the columns as punctual supports. In the second model, the column was modeled as a reaction distributed on the slab on the transversal section area and in the third model on the transversal section area projected at the slab center of gravity. The other models were the same as above, but the central column area was stiffened, as indicated by the Brazilian code. Each model was analyzed by means of the computer program SAP 2000, using two different numeric procedures: Finite Elements Method and the Grid Analogy Method. Results were compared to each other, leading to some conclusions.

Finally, the slab models analyzed using SAP 2000 were also analyzed with the computer program AltoQi Eberick V5 Gold, which uses the Grid Analogy Method. New conclusions were then extracted from the comparison between the numerical results, in an attempt to suggest other procedures that consider more realistic efforts when dealing with the singularity problem in flat slabs.

**Keywords:** Flat Slabs, reinforced concrete, Finite Elements Method, and Grid Analogy.

## 1. INTRODUÇÃO

As edificações, sejam para quais forem as finalidades, necessitam de uma estrutura ou um conjunto de estruturas que lhes sirvam de suporte, propiciando estabilidade, segurança e condições de utilização satisfatórias durante sua vida útil prevista.

As lajes planas constituem um sistema estrutural interessante em aplicações de projetos, propiciando alterações de *lay-out* em ambientes internos, pois dispensam o uso de vigas. As análises desses tipos de lajes são complexas e muitas vezes realizadas através de um processo numérico. Dentre eles, pode-se destacar o Processo por Analogia de Grelha e o Método dos Elementos Finitos (MEF), largamente utilizados pelos projetistas e também adotados nessa dissertação. Eles podem conter todas as lajes de um pavimento e todas as vigas, analisando o comportamento do painel como um todo.

Processos numéricos necessitam de *softwares* especializados, dada a necessidade de resolução de grandes sistemas de equações. Optou-se nessa dissertação pela utilização de dois *softwares* comerciais: SAP 2000, que utiliza como formulação o Método dos Elementos Finitos e o AltoQi Eberick V5 Gold, que utiliza o Processo por Analogia de Grelha para a resolução de lajes em concreto armado.

Ao se modelar os apoios das lajes planas como pontuais nos *softwares* citados, utilizando um processo numérico, é comum ocorrer concentrações de esforços na região de apoio, conduzindo a valores elevados para os momentos fletores na laje. Resultados desse tipo dificultam a análise em projetos estruturais.

Sabe-se que a ligação entre a laje e o pilar não é pontual, mas sim regiões de comportamento complexo. Torna-se necessário então pesquisar e analisar os esforços solicitantes envolvidos nessas regiões, a fim de trazer contribuições ao tema.

### 1.1. **Objetivos**

#### 1.1.1. **Objetivo geral**

Pretende-se contribuir para o desenvolvimento de modelos para a análise estrutural em projetos de estruturas de concreto armado, estudando, em regime elástico linear, as lajes planas de edificações integradas aos pilares, utilizando o Método dos Elementos Finitos e o processo por Analogia de Grelha.

### 1.1.2. Objetivos específicos

- Estudar os momentos fletores em lajes planas retangulares simétricas e assimétricas, com pilares ora no centro, ora deslocados em um dos eixos da placa;
- Propor alternativas de modelagem para o problema da singularidade, distribuindo os esforços no pilar como reação distribuída na laje, sentido de baixo para cima;
- Estudar os esforços no pilar que gera punção na laje, nesse caso esforço normal e momento fletor;
- Comparar os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos e pelo Processo por Analogia de Grelha, ora modelando o pilar como apoio pontual, ora como reação distribuída na laje;
- Comparar os resultados entre as análises obtidas pelo *software* SAP 2000 e Eberick V5 Gold R15.

## 1.2. Justificativa

A maioria dos *softwares* de análise estrutural disponíveis no mercado utiliza métodos numéricos baseados na Analogia de Grelha ou no Método dos Elementos Finitos para obtenção dos esforços e deslocamentos de um painel de lajes de um pavimento. Esses *softwares* estão em constante evolução e procuram reproduzir, da melhor maneira possível, através dos modelos gerados pelos usuários, o comportamento elástico do conjunto formado pelas lajes, vigas e pilares.

Muitas vezes, ao utilizar um *software* com as características descritas no parágrafo anterior, os projetistas podem se deparar com situações de difícil análise. Dentre elas, pode-se citar as concentrações de esforços em lajes planas. Teoricamente, quando uma carga concentrada é aplicada em uma laje, ela provoca momentos fletores que tendem ao infinito em seu ponto de aplicação, gerando pontos de singularidade. Conseqüentemente, em um método numérico, quando um pilar para apoio de lajes é modelado como um ponto isolado, provoca o efeito de uma carga concentrada de sentido contrário, resultando em momentos fletores muito elevados no ponto de aplicação da carga e no entorno dela. É sabido que esses momentos serão tanto maiores quanto mais refinada for a malha. No entanto, na prática, um pilar não é um ponto, mas sim um elemento com dimensões discretas, suficientes para se considerar uma

superfície de apoio e não apenas um nó, gerando resultados diferentes tanto nos momentos fletores da laje como também nos esforços do próprio pilar.

Os modelos que contemplam os pilares como apoio pontual das lajes planas desprezam o efeito favorável da região de interação com o pilar. Esse efeito deveria ser levado em consideração, propiciando um dimensionamento mais realista para a laje e para o pilar.

Dessa forma, torna-se relevante a pesquisa sobre o assunto, bem como disponibilizar uma forma alternativa de modelagem para os apoios das lajes planas em concreto armado, que conduza a resultados consistentes e aplicáveis em projetos de estruturas.

## 2. INTRODUÇÃO TEÓRICA

### 2.1. *Vantagens e Desvantagens das Lajes Planas*

#### 2.1.1. Vantagens

A solução de lajes planas tem sido utilizada cada vez mais nos projetos estruturais de concreto armado, devido às inúmeras vantagens que o sistema possui ao ser comparado com o sistema convencional composto por lajes, vigas altas e pilares. As principais vantagens são citadas a seguir, conforme Moretto e também Figueiredo (1989):

- a) *Adaptabilidade de diversas formas ambientais*: permite alterações no “lay-out” de uma arquitetura após a conclusão da obra (pois não tem vigas), racionalização de vedações e aberturas, execução de fachadas com grande liberdade;
- b) *Simplificação das formas*: menor consumo de materiais, havendo um plano contínuo, sem recortes na ligação com as vigas. As formas e cimbramentos em uma estrutura com lajes planas são extremamente fáceis de projetar, executar, montar e desformar;
- c) Além disso, as espessuras das lajes podem ser uniformizadas, facilitando a montagem e desmontagem, reaproveitamento do material, padronização dos cimbramentos, etc;
- d) *Simplificação e racionalização das armaduras*: a ausência de vigas diminui as operações de corte, dobra e montagem. Facilita também a conferência das armaduras;
- e) *Simplificação da concretagem*: poucos recortes na laje, facilitando o acesso de vibrações, o que reduz falhas de concretagem (as conhecidas “bicheiras”);
- f) *Redução da quantidade de cimento*: nos sistemas convencionais, nas regiões da laje com a viga, pode haver uma concentração elevada de armaduras, necessitando de um concreto mais fluido;
- g) *Redução da altura total do edifício*: devido a ausência de vigas.
- h) *Simplificação das instalações*: menor incidência de cortes e emendas, melhor qualidade do produto final, menor quantidade de condutos e fios, redução de mão de obra; modificações futuras são facilitadas;

- i) *Melhoria das condições de habitabilidade*: a ausência de vigas facilita a insolação e ventilação dos ambientes, o que diminui a umidade e reduz o acúmulo de sujeira e insetos;
- j) *Redução no tempo de execução*: devido a todas às simplificações comentadas: facilidades na montagem e desmontagem das formas, armaduras, concretagens, instalações.

### 2.1.2. Desvantagens

Mesmo havendo inúmeras vantagens, existem também desvantagens, que devem ser ponderadas para a escolha ou não do sistema estrutural com lajes planas, a citar:

- a) *Punção das lajes*: é um dos principais problemas, que deve ser combatido com cautela, adotando-se espessuras adequadas e/ou armadura de punção;
- b) *Deslocamento transversal das lajes*: para um mesmo vão e mesma rigidez, o deslocamento de lajes sem vigas é maior do que no sistema convencional;
- c) *Estabilidade global do edifício*: em se tratando de edifícios altos, a ausência de vigas não permite a formação de pórticos de contraventamento para resistir a esforços horizontais, diminuindo a estabilidade global da edificação. Pode-se, nesses casos, vincular as lajes em paredes estruturais ou em núcleos rígidos, o que pode aumentar o custo global da edificação.

## 2.2. Teoria das placas em regime elástico

Placa é uma estrutura laminar em que uma das dimensões (espessura) é muito menor que as outras, submetida a ações que provocam flexão transversal ao plano definido por sua superfície média. Define-se como espessura “ $h$ ” da placa a menor das três dimensões e, a superfície média, como sendo aquela que passa pelos pontos médios do segmento que determina a altura em cada ponto da placa (TIMOSHENKO, 1959). As placas podem ser classificadas como finas, em geral para  $h < 0,1.L$ , ou espessas, em geral para  $h > 0,10.L$ , em que “ $h$ ” é a espessura da placa e “ $L$ ” a maior dimensão.

Um carregamento será suportado por uma distribuição bidirecional de esforços, entre eles: forças cortantes, momentos fletores e torsões. Esses esforços são análogos aos que ocorrem em vigas (comportamento unidirecional), porém mais complexos.

As placas podem variar entre si por diversos fatores, a citar: forma (retangulares, circulares, com aberturas); disposição dos apoios (balanços, apoios ao longo do contorno, continuidade entre as placas) ; tipos de apoio (simples ou engastamento), etc.

Existem diversos procedimentos para a análise e dimensionamento de lajes com comportamento linear e não-linear. Destacam-se as teorias elásticas e a teoria da análise limite. O estudo que será realizado nesta dissertação será baseado em análises elásticas.

Os métodos mais tradicionais para a determinação de momentos fletores em uma laje têm sido baseados em modelos elásticos. Lajes mais complexas somente puderam ser resolvidas usando procedimentos numéricos, os quais se tornaram possíveis com a evolução dos computadores. Dentre os procedimentos numéricos existentes, citam-se o Processo por Analogia de grelha e o Método dos Elementos Finitos, que serão utilizados durante essa dissertação para estudar a concentração de esforços nas lajes.

### 2.2.1. Hipóteses fundamentais

Assim como as estruturas reticuladas em geral (vigas) podem ser estudadas através da Resistência dos materiais, as lajes também podem ser adequadamente estudadas pela Teoria das Placas Delgadas, baseadas nas seguintes hipóteses fundamentais (hipóteses de *Kirchoff-Love*):

- O material é homogêneo, isótropo e elástico linear (obedece a lei de Hooke);
- A placa indeformada é plana;
- A espessura “h” da placa é pequena em relação às outras dimensões;
- As tensões normais à superfície média são desprezáveis em relação às demais tensões;
- Os pontos pertencentes, antes da deformação, a retas normais à superfície média encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares à superfície média deformada;
- Os deslocamentos e rotações são muito pequenos em relação à espessura da placa, sendo possível não considerar a influência deles no estudo das condições de equilíbrio da laje.

### 2.2.2. Definição da Equação de Lagrange

A equação diferencial de equilíbrio de momento de uma viga é:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad [EQ. 2.1]$$

A equação [EQ 2.1] pode ser expressa em termos de carregamento externo:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{p(x)}{EI} \quad [EQ. 2.2]$$

A equação diferencial correspondente para um elemento de placa é mais complexa, pois inclui termos relativos a momentos nas direções  $x$  e  $y$ , como também momentos torsores, que existirão em lajes. Inicialmente, deve-se considerar um elemento de placa infinitesimal de dimensões  $dx$ ,  $dy$  (Figura 2-1), sujeito a uma carga vertical  $p(x,y)$ .

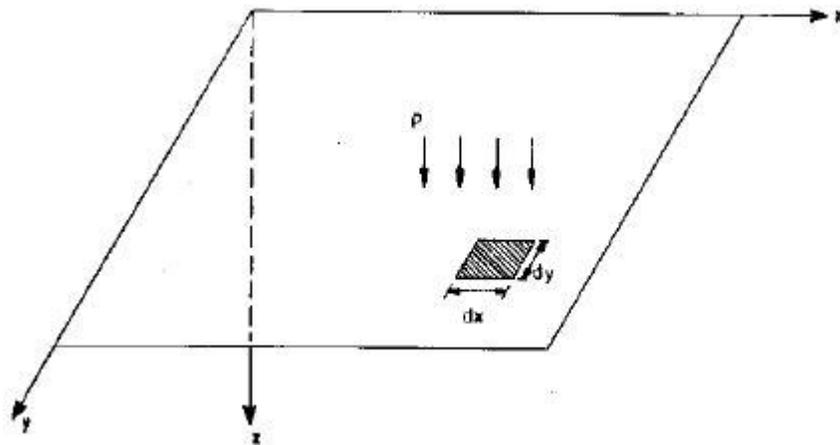


Figura 2-1 – Elementos infinitesimal  $dx$ ,  $dy$ , sujeito a uma carga distribuída “ $p$ ”, JAWAD (1994)

As forças e momentos necessários ao equilíbrio do elemento estão indicados na Figura 2-2 e, considerando o sinal positivo tal qual como o indicado.

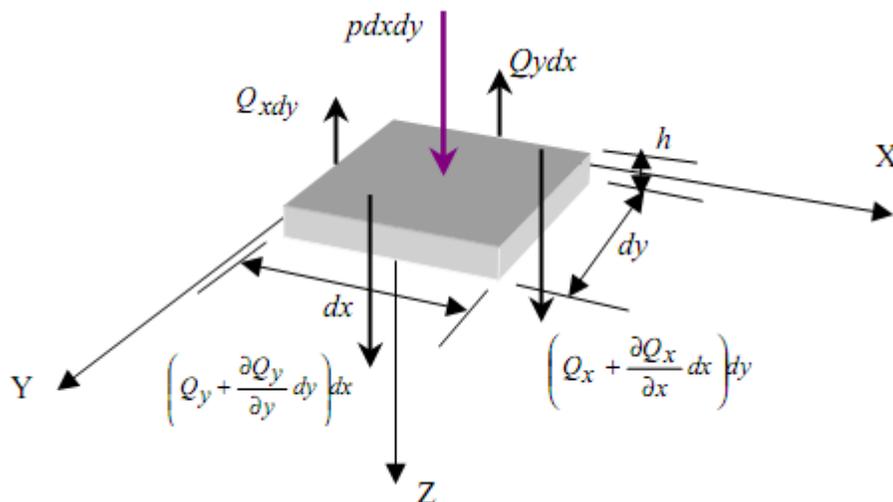


Figura 2-2 – Equilíbrio de um elemento de placa para as forças cortantes (HENNRICHS, 2003)

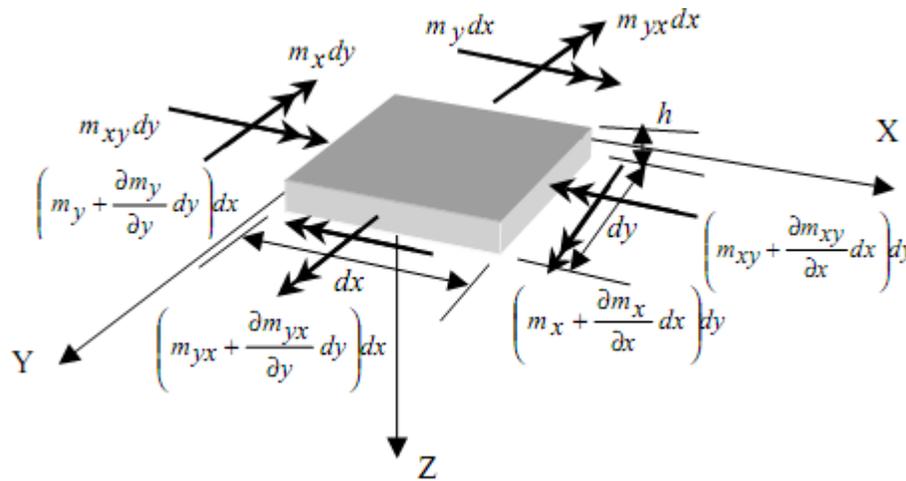


Figura 2-3 – Equilíbrio de um elemento de placa para momentos fletores e torsores (HENNRICHS, 2003)

Da mesma forma como os esforços, os deslocamentos “w” também são considerados positivos para baixo. Vale frisar que, pela Figura 2-2 e Figura 2-3, para o equilíbrio de um elemento de placa são necessários:

- Duas forças cortantes:  $V_x$  e  $V_y$ ;
- Dois momentos fletores:  $M_x$  e  $M_y$ ;
- Dois momentos torsores:  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$ .

Como os valores dos momentos fletores, torsores e esforços cortantes dependem das coordenadas x e y, deve-se levar em consideração a variação que eles irão sofrer ao longo dos comprimentos dx e dy, conforme mostrado na Figura 2-2 e Figura 2-3.

A carga total resultante da carga distribuída “p” aplicada em todo o elemento é dada por:

$$V = p \cdot dx \cdot dy \quad [EQ. 2.3]$$

Fazendo o somatório das forças verticais (direção z), tem-se a primeira equação de equilíbrio:

$$p(x, y)dxdy - Vx \cdot dy + \left( Vx + \frac{\partial Vx}{\partial x} dx \right) dy - Vy \cdot dx + \left( Vy + \frac{\partial Vy}{\partial y} dy \right) dx = 0 \quad [EQ. 2.4]$$

Que se reduz a:

$$p(x, y) + \frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} = 0 \quad [EQ. 2.5]$$

Fazendo o equilíbrio de momentos na direção x:

$$\begin{aligned}
 & Mydx - \left( My + \frac{\partial My}{\partial y} dy \right) dx - Mxy \cdot dy + \left( Mxy + \frac{\partial Mxy}{\partial x} dx \right) dy + \left( Vy + \frac{\partial Vy}{\partial y} dy \right) dx dy \\
 & - Vx \cdot dy \frac{dy}{2} + \left( Vx + \frac{\partial Vx}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + p \cdot dx dy \frac{dy}{2} = 0
 \end{aligned} \quad [EQ. 2.6]$$

Simplificando e desprezando os termos de ordem superior, tem-se:

$$Vy = \frac{\partial My}{\partial y} - \frac{\partial Mxy}{\partial x} \quad [EQ. 2.7]$$

Fazendo o equilíbrio de momentos na direção y:

$$\begin{aligned}
 & Mxdy - \left( Mx + \frac{\partial Mx}{\partial x} dx \right) dy - Myx \cdot dx + \left( Myx + \frac{\partial Myx}{\partial y} dy \right) dx + \left( Vx + \frac{\partial Vx}{\partial x} dx \right) dy dx \\
 & - Vy \cdot dx \frac{dx}{2} + \left( Vy + \frac{\partial Vy}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + p \cdot dy dx \frac{dx}{2} = 0
 \end{aligned} \quad [EQ. 2.8]$$

Simplificando e desprezando os termos de ordem superior, tem-se:

$$Vx = \frac{\partial Mx}{\partial x} - \frac{\partial Myx}{\partial y} \quad [EQ. 2.9]$$

Substituindo a [EQ. 2.7] e [EQ. 2.9] na [EQ. 2.5] tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial Mx}{\partial x} - \frac{\partial Myx}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial My}{\partial y} - \frac{\partial Mxy}{\partial x} \right) = -p \quad [EQ. 2.10]$$

Em qualquer ponto da placa, a tensão de cisalhamento  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , logo  $Mxy = Myx$ , e pode-se chegar na equação [EQ. 2.11], que é a *Equação Diferencial de Equilíbrio das Placas*.

$$\frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 My}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 Mxy}{\partial x \partial y} = -p(x, y) \quad [EQ. 2.11]$$

Vale frisar que a equação [EQ. 2.11] independe da laje estar em regime elástico ou plástico, do coeficiente de Poisson e do fato da placa ser isotropa ou ortótropa. Além disso, pode-se notar que uma parte da equação é resistida por um mecanismo de viga na direção x, outro em y, e uma por momento torsor (x,y). Em todos os casos, o equilíbrio deve ser obrigatoriamente respeitado [LORIGGIO, 2001].

A partir da equação diferencial de equilíbrio das placas, incluindo o comportamento elástico da laje e as Equações de compatibilidade entre deformações e

deslocamentos, baseados nas hipóteses de *Kirchoff-Love*, pode-se chegar à *Equação de Lagrange*, que rege o comportamento das placas finas ou delgadas: em regime elástico-linear:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad [\text{EQ. 2.12}]$$

onde:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$E$  = módulo de deformação do concreto;

$h$  = altura da laje;

$\nu$  = coeficiente de Poisson do concreto;

$p$  = carga por unidade de área, aplicada perpendicularmente ao plano da laje, positiva para baixo;

$x, y$  = coordenadas cartesianas que indicam a posição de um ponto genérico da laje;

$w$  = deslocamento medido perpendicularmente ao plano da laje, positivo para baixo.

Ao comparar a equação [EQ. 2.12] com a equação [EQ. 2.2], observa-se que a *Equação de Lagrange* é mais complexa, haja vista os momentos nas direções  $x$  e  $y$  e também momentos torsores.

Os momentos fletores podem ser determinados a partir das equações abaixo:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad [\text{EQ. 2.13}]$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad [\text{EQ. 2.14}]$$

$$M_{xy} = -D(1 + \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad [\text{EQ. 2.15}]$$

A integração da *Equação de Lagrange* para as lajes retangulares pode ser feita através de vários processos, como a solução por séries simples (*Fourier*), séries duplas trigonométricas (*Navier*), além de existirem várias Tabelas na bibliografia nacional e internacional, como *Czerny*, *Bares*, entre outras, que fornecem os esforços e deslocamentos. As tradicionais Tabelas apresentam soluções para os casos mais comuns de carregamento e geometria da placa, embora existam tabelas com soluções mais complexas. Para as soluções de placas diferentes

das usuais, existem muitos *softwares* que, usando vários métodos numéricos (diferenças finitas, método dos elementos finitos, método dos elementos de contorno, etc), resolvem a *Equação de Lagrange*. Os programas de computadores estão cada vez mais sendo utilizados, especialmente em casos de lajes não retangulares e com condições de contorno não encontradas em tabelas. Ainda, eles levam em consideração a deformação vertical das vigas de bordo, sendo que as tabelas sempre consideram os apoios indeformáveis.

### 2.3. Introdução ao Método dos Deslocamentos

Este método consiste em fazer o equilíbrio de forças em torno dos nós, em cada direção possível de deslocamento do nó (grau de liberdade), sendo os deslocamentos nodais as incógnitas do problema. Determinam inicialmente os deslocamentos e, a partir destes, as reações e os esforços nas barras. O sistema de equações de equilíbrio de forças pode ser escrito matricialmente, conforme mostrado a seguir:

$$[K] \cdot [\delta] = \{F\} \quad [EQ. 2.16]$$

Em que:

F = matriz das ações atuantes na estrutura;

K = matriz de rigidez da estrutura;

$\delta$  = matriz dos deslocamentos.

A análise de uma estrutura pelo método dos deslocamentos pode ser descrita, matricialmente, pelas seguintes etapas (LORIGGIO, 2000):

1. Elaboração do modelo da estrutura: escolha do sistema estrutural resistente, comportamento dos componentes da estrutura, vinculações, propriedades dos materiais, dimensões da estrutura, geometria dos componentes, carregamentos e combinações de carregamentos;
2. Definição e número de nós;
3. Definição da incidência e numeração das barras;
4. Cálculo da matriz de rigidez no sistema local  $[K_L]$  para todas as barras da estrutura;
5. Cálculo da matriz de rigidez no sistema global  $[K] = [T]^t \cdot [K_L] \cdot [T]$  para todas as barras da estrutura.

Em que:

$[T]$  = matriz de transformação do eixo global para o eixo local.

$[T]^t$  = transposta da matriz de rotação.

6. Montagem da matriz de rigidez  $[K]$  da estrutura;

7. Determinação do vetor de esforços de imobilização dos nós em cada barra no sistema local  $\{S_o\}$ ;

8. Determinação do vetor de esforços de imobilização dos nós em cada barra no sistema global  $\{S_o\} = [T]^t \cdot \{S_o\}$ ;

9. Montagem do vetor de esforços de imobilização dos nós da estrutura  $\{F_o\}$ ;

10. Montagem do sistema de equação da estrutura em relação aos graus de liberdade originais  $[K] \cdot \{\delta\} = \{F\} - \{F_o\}$  [EQ. 2.17], onde:

$[K]$  = matriz de rigidez,

$\{\delta\}$  = vetor deslocamentos,

$\{F\}$  = vetor ações nodais,

$\{F_o\}$  = vetor de esforços de imobilização dos nós da estrutura.

11. Reordenação do sistema de equações, deixando as direções restringidas para o final;

12. Resolução do sistema de equações  $[K_{LL}] \cdot \{\delta_L\} = \{F_L\}$ , correspondentes as direções livres;

13. Separar de  $\{\delta_L\}$  os deslocamentos  $\{d\}$  de cada barra da estrutura;

14. Encontrar o vetor de reações de apoio nas direções restringidas;

15. Calcular os esforços solicitantes nas extremidades das barras no sistema global  $\{S\} = [K_G] \cdot \{d\}$ . Em seguida, transformam-se os esforços para o sistema local  $\{S\}$ .

Quando todos os deslocamentos, reações de apoio e esforços nas barras tiverem sido obtidos, a análise pode ser considerada como terminada.

## 2.4. Grelhas planas

Grelha é uma estrutura plana composta de barras contínuas que se interceptam ou se cruzam mutuamente. Todas as barras e nós existem no mesmo plano, sendo que as barras estão rigidamente ligadas entre si.

A estrutura de grelha assemelha-se, em vários aspectos, a um pórtico plano. Entretanto as cargas da grelha atuam normalmente ao plano da mesma e todos os binários têm seus vetores, com seta dupla, no mesmo plano da grelha. Os efeitos de flexão são predominantes nas estruturas usuais de edifícios.

Para a modelagem e obtenção dos resultados, é necessário adotar-se um sistema de coordenadas referenciais para a estrutura como um todo, conhecido como o sistema global da estrutura. Ele está representado na Figura 2-4.

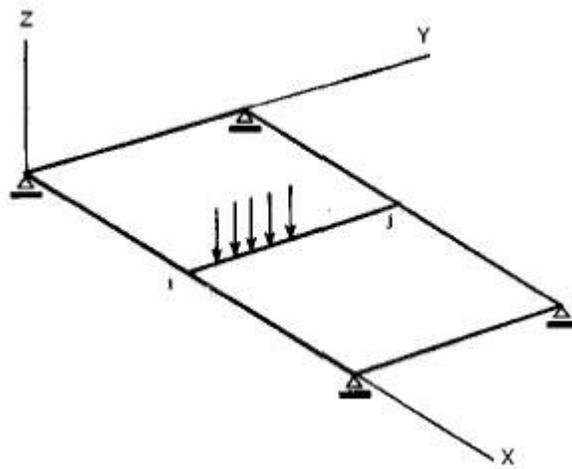


Figura 2-4 – Grelha plana, COELHO (2000)

A partir da Figura 2-4, observa-se que a estrutura está contida no plano X-Y e o carregamento no plano Z. As cargas na forma de binários possuem os vetores (momentos fletores) no plano X-Y.

Em estrutura compostas por muitas barras, que é o caso das grelhas planas, divide-se a estrutura em elementos com coordenadas locais. Para esse sistema local, os eixos chamados de X, Y e Z da Figura 2-4 estão dispostos da seguinte maneira:

- Direção X: coincide com o eixo da barra e com o sentido do inicial “i” para o final “j”;
- Eixo Z: perpendicular ao plano X-Y da grelha, orientado “saindo” da estrutura;

- Eixo Y: perpendicular ao plano formado pelos eixos X e Z. Sentido positivo segue a regra da mão direita;
- Plano X-Z: plano de simetria para cada membro das barras da grelha (plano principal de flexão).

Conceitua-se Grau de Liberdade (GL) como sendo a direção e o sentido de uma translação ou rotação do nó de uma barra. Uma barra de uma grelha possui 3 GL por nó, representados na Figura 2-5, o que totaliza 6 GL por barra.

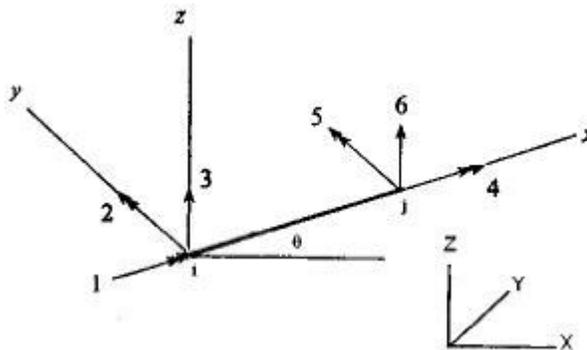


Figura 2-5 –Graus de liberdade de uma barra de grelha, COELHO (2000)

São eles:

- Translação paralela ao eixo Z;
- Rotação em torno de X;
- Rotação em torno de Y.

Portanto, os esforços são:

- Momento fletor em torno do eixo 2;
- Momento torsor em torno do eixo 1;
- Esforço cortante paralelo ao eixo 3.

Conforme já dito, as deformações por flexão são predominantes e as ocorridas devido à torção e ao cisalhamento secundárias. Admite-se que cada barra tem dois eixos de simetria na seção transversal: um no plano X-Y e outro paralelo a direção Z. Dessa maneira, os momentos fletores e torsões atuam independentemente e as barras sofrem deformação por flexão na direção Z.

A matriz de rigidez das barras da grelha, no sistema local, será obtida através da aplicação do Método do Deslocamento ou da Rigidez. Através desse método, cada barra deve ser totalmente restringida. Na seqüência, são aplicados deslocamentos unitários nos seis GLs,

um a um. As reações, que aparecem devido à imposição dos deslocamentos unitários, são os coeficientes de rigidez, expressos para cada barra. A todos esses coeficientes agrupados dá-se o nome de “matriz de rigidez” de uma barra da grelha, representadas no sistema local:

$$K_L = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_y}{L} & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} \end{bmatrix} \quad [EQ. 2.18]$$

Em que:

$K_L$  = Matriz de rigidez local;

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal;

$G$  = módulo de elasticidade transversal;

$J$  = momento de inércia à torção da barra da grelha;

$I_y$  = momento de inércia à flexão da seção da barra em relação ao eixo  $y$ ;

$L$  = comprimento da barra.

O próximo passo é fazer a transformação da matriz de rigidez do sistema local para o sistema global:

$$K_G = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EI_y}{L} C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI_y}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_y \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2 & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI_y}{L}\right) C_x C_y & -\frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{2EI_y}{L} C_x^2 & \frac{6EI_y}{L^2} C_x \\ \frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & -\frac{12EI_y}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{2EI_y}{L} C_y^2 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI_y}{L}\right) C_x C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_y & \frac{GJ}{L} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_y^2 & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L}\right) C_x C_y & -\frac{6EI_y}{L^2} C_y \\ -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI_y}{L}\right) C_x C_y & -\frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{2EI_y}{L} C_x^2 & -\frac{6EI_y}{L^2} C_x & \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI_y}{L}\right) C_x C_y & \frac{GJ}{L} C_y^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2 & \frac{6EI_y}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI_y}{L^2} C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_x & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} C_y & \frac{6EI_y}{L^2} C_x & \frac{12EI_y}{L^3} \end{bmatrix} \quad [EQ. 2.19]$$

Em que:

$K_G$  = Matriz de rigidez global

$$C_x = \cos(\theta) \quad [EQ. 2.20]$$

$$C_y = \text{sen}(\theta) \quad [EQ. 2.21]$$

A próxima etapa é formar os vetores associados às cargas aplicadas sobre a grelha. O vetor  $\{F\}$  constitui-se do carregamento externo aplicado aos nós, como também das reações de apoio. As cargas distribuídas ao longo das barras da grelha serão substituídas por ações nas extremidades da barra restringida da grelha, obtendo-se o vetor de mobilização dos nós de toda estrutura:  $\{F_o\}$ . A superposição dessas duas ações resulta no carregamento total nas extremidades dos elementos:  $\{F\} - \{F_o\}$ .

Finalmente, para a obtenção dos deslocamentos nodais e das reações de apoio, deve-se substituir essas matrizes na [EQ. 2.17].

## **2.5. Modelagem de Lajes por Analogia de Grelha**

Conforme HAMBLY (1976): “Um painel de laje é estruturalmente contínuo nas duas dimensões do plano da laje de tal modo que as cargas aplicadas são equilibradas por uma distribuição bi-dimensional de esforços cortantes, momentos fletores e momentos de torção. (...) Como a solução rigorosa das equações diferenciais raramente é possível, um procedimento aproximado pode ser usado, a Analogia de Grelha, na qual o painel de lajes é representado para fins de análise por uma grelha bi-dimensional de vigas. (...) os avanços significativos feitos nos programas de Analogia de Grelha nos últimos anos tornam esse procedimento mais versátil, mais rápido, e mais simples de compreender do que os demais”.

O método de analogia de grelha consiste em discretizar uma laje em várias faixas, com larguras arbitradas pelos projetistas, segundo as direções principais da placa. Cada faixa é representada por uma barra, com propriedades físicas e geométricas, a citar: rigidez à flexão e rigidez à torção. A Figura 2-6 representa a laje discretizada em barras que se cruzam entre si, formando uma grelha plana.

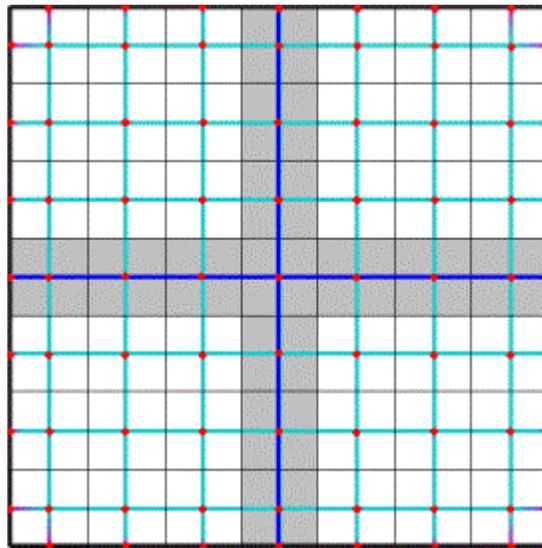


Figura 2-6 – Ilustração de uma laje analisada por Analogia de Grelha (COELHO&LORIGGIO, 2002)

Em uma grelha plana, as cargas atuam perpendicularmente ao plano e os esforços solicitantes podem ser determinados por métodos conhecidos na estática das estruturas, entre eles o método dos esforços e o método dos deslocamentos.

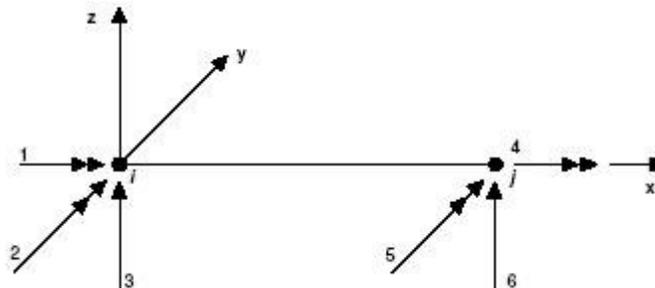


Figura 2-7 – Vetores de esforços atuantes em uma grelha plana

Devido à facilidade de programar, a formulação do Método dos deslocamentos ou Método da rigidez é largamente utilizada para solucionar problemas envolvendo a Analogia de Grelha.

A princípio, o método por Analogia de Grelha parece tratar-se da aplicação da análise de grelhas planas em um painel discretizado. Os esforços obtidos serão utilizados para dimensionamento da laje.

Em razão da substituição das faixas de lajes em barras que se cruzam, ocorrerão esforços de torção que serão representados por momentos de torção nas barras. Em consequência disso, os momentos fletores na placa variam conforme o valor dos momentos de torção, uma vez que o equilíbrio na placa deve ser mantido.

Diante do exposto, é necessário analisar a influência do parâmetro de rigidez à torção das barras.

Os esforços de uma barra de uma Grelha, associados aos graus de liberdade, são proporcionais às rigidezes das barras, que correspondem aos parâmetros de rigidez à torção “ $GJ_p$ ” e de rigidez à flexão “ $EI_y$ ”.

O parâmetro “ $GJ_p$ ” é composto do módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) do material, que pode ser medido ou calculado em função do módulo de elasticidade transversal ( $E_c$ ) ou módulo de Young e do momento de inércia à torção ( $J_p$ ) da seção transversal da barra.

Para materiais isotrópicos e homogêneos, a *Lei de Hooke* generalizada pode ser formulada a partir de apenas três constantes elásticas, a citar:  $E$ ,  $\nu$  e  $G$ . A equação que relaciona “ $G$ ” em função de “ $E$ ” é:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad [EQ. 2.22]$$

Para aplicações em concreto armado a NBR 6118:2003, no item 8.2.9, fixa o valor do coeficiente de Poisson em 0,2, e para “ $G$ ” adota a seguinte relação aproximada:

$$G = 0,4 \cdot E_c \quad [EQ. 2.23]$$

Nesse trabalho usou-se “ $G$ ” conforme expresso na [EQ. 2.23].

Como segundo parâmetro utilizado para calcular à rigidez à torção de uma barra, encontra-se o momento de inércia à torção da seção transversal da barra ( $J_p$ ).

As barras da grelha possuem seção retangular com largura igual à largura das faixas e altura igual à espessura da placa. O momento de inércia à torção dado pela mecânica dos sólidos para um elemento de seção retangular é:

$$J_p = \beta \cdot e^3 \cdot f \quad [EQ. 2.24]$$

Em que:

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{e}{f}\right) \left(1 - \frac{e^4}{12f^4}\right) \quad [EQ. 2.25]$$

$e$  = menor dimensão da seção transversal;

$f$  = maior dimensão da seção transversal.

Conforme já observado na [EQ. 2.25], “ $e$ ” é sempre a menor dimensão. Portanto quando as faixas possuírem largura maior que a altura, o valor “ $e$ ” é igual à espessura da faixa e

“h” igual à largura da faixa. Quando as faixas passam a ter uma largura menor que a espessura da placa esta situação se inverte.

As lajes analisadas por Analogia de grelha têm grande sensibilidade ao parâmetro de rigidez à torção. Na prática, ao invés de se utilizar uma inércia à torção para as barras da grelha igual à apresentada pela mecânica dos sólidos [EQ. 2.24] para uma seção retangular, utiliza-se uma inércia à torção em função da inércia à flexão, dada pela equação a seguir:

$$J_p = \alpha \cdot I \quad [EQ. 2.26]$$

Onde,

$J_p$  = momento de inércia polar da seção transversal;

$\alpha$  = coeficiente de ajuste da relação  $J_p - I$ ;

$I$  = momento de inércia da seção transversal.

Alguns trabalhos em nível de mestrado desenvolvidos no GAP - Grupo de análise e projeto de estruturas, a citar, COELHO (2000) e STRAMANDINOLI (2003), estudaram a influência do coeficiente “ $\alpha$ ” nos esforços e deslocamentos de uma placa. As conclusões obtidas nesses dois trabalhos mostram que não existe um valor único para “ $\alpha$ ” de modo a se obter os melhores resultados em termos de esforços e deslocamentos em uma placa. Determinados valores de “ $\alpha$ ” fornecem resultados melhores para a obtenção dos deslocamentos na placa, outros valores “ $\alpha$ ” são melhores para obtenção dos momentos positivos na placa e ainda há outros valores de “ $\alpha$ ” para a obtenção dos momentos negativos na placa. HAMBLY [1976] demonstrou que o valor teórico a ser usado é  $\alpha = 2$ , o qual será adotado nessa dissertação ao analisar os modelos nos *softwares* SAP 2000 e Eberick.

## **2.6. Introdução ao Método dos Elementos Finitos**

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico e aproximado utilizado para resolver problemas em engenharia, principalmente nos quais não é possível obter soluções satisfatórias por métodos analíticos.

Conforme LA ROVERE (2001), o MEF pode ser definido sob três diferentes enfoques:

- Enfoque matemático: pode-se interpretar o MEF como um método aproximado para solução de equações diferenciais parciais ou Problemas de Valor de Contorno, assim como o Método das Diferenças Finitas.

- Enfoque físico: o MEF pode ser caracterizado como um método de discretização, ou seja, transforma um sistema contínuo, com uma infinidade de pontos, em um sistema discreto com um número finito de pontos.
- Enfoque variacional: o método é uma modificação do Método Variacional de Rayleigh-Ritz, em que o domínio de integração do funcional é subdividido em regiões.

O MEF consiste em dividir o domínio de integração do problema em um número discreto de regiões pequenas de dimensões finitas, denominadas *elementos finitos*. A este conjunto de regiões dá-se o nome de malha de elementos finitos. Os elementos finitos podem ter formas geométricas diversas, de maneira a permitir uma melhor aproximação do problema. Têm-se elementos unidimensionais com barras de eixo reto ou curvo; elementos bidimensionais planos (triangulares, retangulares, quadriláteros com lados retos ou curvos); elementos tridimensionais sólidos (tetraédricos, hexaédricos, com lados retos ou curvos), elementos laminares de placa (superfície plana) e casca (superfície curva) e elementos axi-simétricos.

Os elementos são ligados entre si por pontos nodais, chamados de *nós*, sendo que cada elemento tem um número determinado de nós. No MEF, por considerarem-se cada região ou *elemento isoladamente*, há a possibilidade de se escolher funções mais simples para representar o comportamento da região.

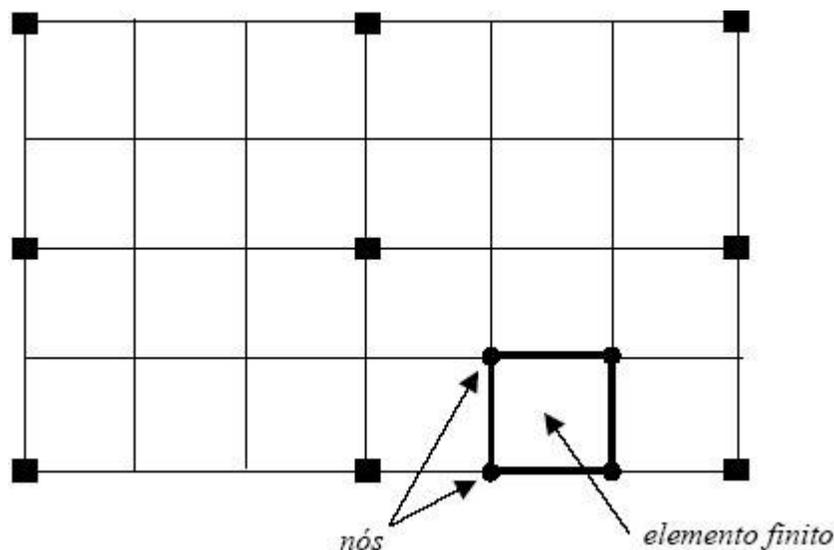


Figura 2-8 - Laje discretizada em elementos finitos (HENNRICHS 2003)

As incógnitas do problema são expressas em função de valores nodais que são relacionadas através de funções de interpolação polinomiais válidas para cada região ou elemento. Os polinômios podem ser do 1º grau ou de ordem superior. Segundo ASSAN (1999), ao invés de se buscar uma função admissível que atenda as condições de contorno para todo o domínio, busca-se funções admissíveis ao domínio de cada elemento finito. Em todos os elementos monta-se um funcional, sendo que todos somados foram o funcional que representa todo o domínio. Para cada elemento, forma-se uma função aproximada gerada por variáveis referidas aos parâmetros nodais e por funções denominadas de funções de forma. A condição de estacionariedade gera um sistema de equações algébricas lineares, sendo que a solução deste sistema fornece os valores dos parâmetros nodais, que podem ser deslocamentos, forças internas, ou ambos, dependendo da formulação do MEF que se utilize.

Caso o campo de deslocamentos for descrito por funções aproximadoras e o princípio da energia potencial mínima for empregado, as incógnitas são as componentes dos deslocamentos nodais. Esta forma corresponde ao Método dos Deslocamentos ou da Rigidez. Porém, se o campo de tensões ou esforços internos for representado por funções aproximadoras, as incógnitas são tensões ou esforços internos nodais, sendo que esta forma corresponde ao Método da Flexibilidade ou das Forças.

Vale ressaltar que o MEF é um método numérico no qual a solução obtida para o problema é uma solução aproximada. As condições de convergência do método dependem da formulação dos elementos como também da escolha da malha e do tipo de elemento utilizado na discretização. Ou seja, é necessário que a *modelagem* seja adequada. Por isso, é de fundamental importância que o projetista tenha pleno conhecimento dos elementos, configurações de condições a serem aplicadas no MEF, senão os resultados obtidos podem estar muito distantes dos que seriam corretos, aumentando os custos do projeto ou então pondo em risco a segurança dos usuários da edificação. Conforme COOK, MALKUS & PLESHA (1989), “Embora o método dos elementos finitos possa tornar um bom engenheiro ainda melhor, ele pode tornar um mau engenheiro muito perigoso”.

### 2.6.1. Elemento finito de placa

As placas podem ser classificadas como finas, em geral para  $b < 0,1L$ , ou espessas, em geral para  $b > 0,10L$ , em que “h” é a espessura da placa e “L” a maior dimensão. Uma placa fina fletirá segundo uma superfície de revolução, admitindo-se pequenos deslocamentos em

relação a espessura  $b$ . Dessa forma, a teoria de placas finas fica simplificada, podendo-se utilizar modelos matemáticos bidimensionais.

As diversas teorias apresentadas para um elemento de placa se diferenciam quanto ao esforço cortante. Na teoria clássica de Gustave Robert Kirchhoff (1824-1887) a espessura é inextensível e desprezam-se as deformações por esforço cortante. No entanto, Eric Reissner (entre 1945 e 1947) e R. D. Mindilin (1951) consideraram em suas teorias as deformações por esforço cortante. Vale frisar que a teoria de Kirchhoff se aplica a placas finas e de Reissner-Mindilin a placas espessas.

A cada ano, diversas pesquisas estão sendo desenvolvidas para os elementos finitos de placa, sendo a maioria baseada nas teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindilin. Dentre elas, destaca-se a pesquisa desenvolvida por Batoz e Tahar (1982), baseada na Teoria Discreta de Kirchhoff (*DKT – Discrete Kirchhoff Theory*). Trata-se de um elemento conforme, proposto inicialmente para elemento triangular (Batoz *et al* 1980) e, posteriormente, quadrilátero (*DKQ – discrete Kirchhoff quadrilateral*), sendo esse último utilizado no *software* comercial SAP 2000 (*Computer and Structures*), conforme apresentado por PIERIN (2005).

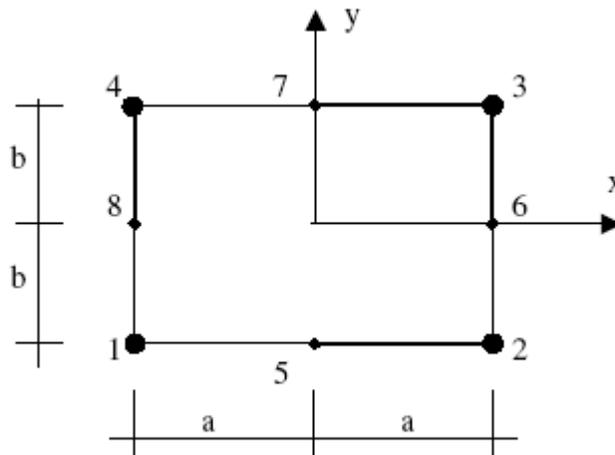


Figura 2-9 – Geometria do elemento DKQ

A formulação do elemento DKQ despreza a deformação devido ao cisalhamento em pontos discretos do elemento. A energia de deformação é:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int \underline{\underline{\chi}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\chi}} dV \quad [\text{EQ. 2.27}] \quad \text{em que,}$$

- $\underline{\underline{D}}$  é a matriz constitutiva generalizada de flexão dada por:

$$\underline{D} = \frac{t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & G(1-\nu^2) \end{bmatrix}, \text{ [EQ. 2.28]}$$

Sendo: E = Módulo de elasticidade ou Módulo de Young e G=Módulo de cisalhamento.

- $\underline{\chi}$  representa as curvaturas generalizadas, dadas por:

$$\underline{\chi} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{array} \right\} \text{ [EQ.2.29]}$$

sendo que  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são as rotações do vetor normal aos planos indeformados da placa.

Derivando a energia de deformação interna em relação ao vetor de deslocamentos nodais  $\underline{U}$ , obtém-se a matriz de rigidez do elemento, uma vez que  $\underline{U} = \frac{1}{2} \cdot \underline{U}^T \underline{K} \underline{U}$ .

### 3. MODELOS USADOS NA ANÁLISE DAS LAJES PLANAS

#### 3.1. *Introdução*

Teoricamente, quando uma carga concentrada é aplicada à laje, ela provoca momentos fletores que tendem ao infinito em seu ponto de aplicação, gerando pontos de singularidade. Conseqüentemente, em um método numérico, quando um pilar para apoio de lajes é modelado como um ponto isolado, provoca o efeito de uma carga concentrada de sentido contrário, resultando em momentos fletores muito elevados no ponto de aplicação da carga e no entorno dela. Sabe-se que esses momentos não representam o comportamento real da placa e não podem ser utilizados para projetos. Na prática, um pilar não é um ponto, mas sim um elemento com dimensões discretas, suficientes para se considerar uma superfície de apoio e não apenas um nó, gerando resultados diferentes.

HENNRICHS (2003) estudou a influencia de se considerar o pilar central como apoio pontual utilizando o Método dos Elementos Finitos e no Processo por Analogia de Grelha. Em ambos os casos variou-se a malha e, foi constatado que o momento fletor negativo máximo sobre o pilar central aumentava na medida em que se refinava a malha (tendendo ao infinito), mas que os momentos fletores positivos, deslocamentos e reação no pilar central praticamente não se alteravam, assim como observado nos resultados obtidos pela Teoria das placas em regime elástico. Por fim, compararam-se os resultados obtidos pelos métodos numéricos (MEF e Analogia de grelha) com a Teoria das placas. Os valores foram parecidos para malhas finas, havendo diferenças significativas para malhas grosseiras.

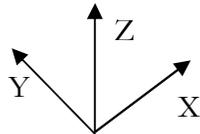
Diante dessa problemática, serão propostas alternativas em termos de modelagem para solucionar o problema da singularidade, que consistem em representar o pilar com suas dimensões reais e não somente como uma barra. Com isso, será necessário tomar alguns cuidados na forma como se modela os exemplos no *software* SAP 2000, de modo a se obter os resultados esperados, conforme explicado a seguir.

#### 3.2. *Descrição do modelo utilizado no software SAP 2000*

Nos modelos analisados no *software* SAP 2000, os elementos lineares (pilares e vigas) são representados por barras lançadas no eixo de cada elemento, com seções transversais

e comprimentos determinados de acordo com o exemplo a ser estudado. O lançamento foi realizado da seguinte forma:

1) Inicialmente definiram-se os planos para o lançamento da estrutura, representados pelos eixos X, Y e Z indicados a seguir:



O plano XY representa o plano da laje.

- Na seqüência, foram inseridos os nós de apoio para o lançamento das vigas e pilares;

2) No lançamento dos pilares, idealizou-se o modelo análogo ao de viga contínua prescrito na NBR 6118:2003, sendo que a continuidade do pilar com a laje se dá modelando o pilar com metade do comprimento acima do pavimento e metade abaixo, conforme Figura 3-1.

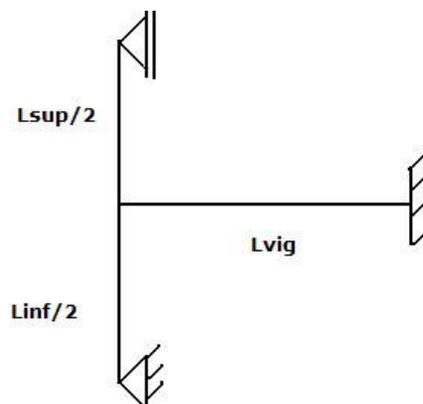


Figura 3-1 - Esquema simplificado adotado pela NBR 6118:2003 para o cálculo do momento de solidariedade

A Figura 3-2 apresenta o esquema do modelo utilizado nessa dissertação, com a inserção das vigas de bordo e dos pilares.

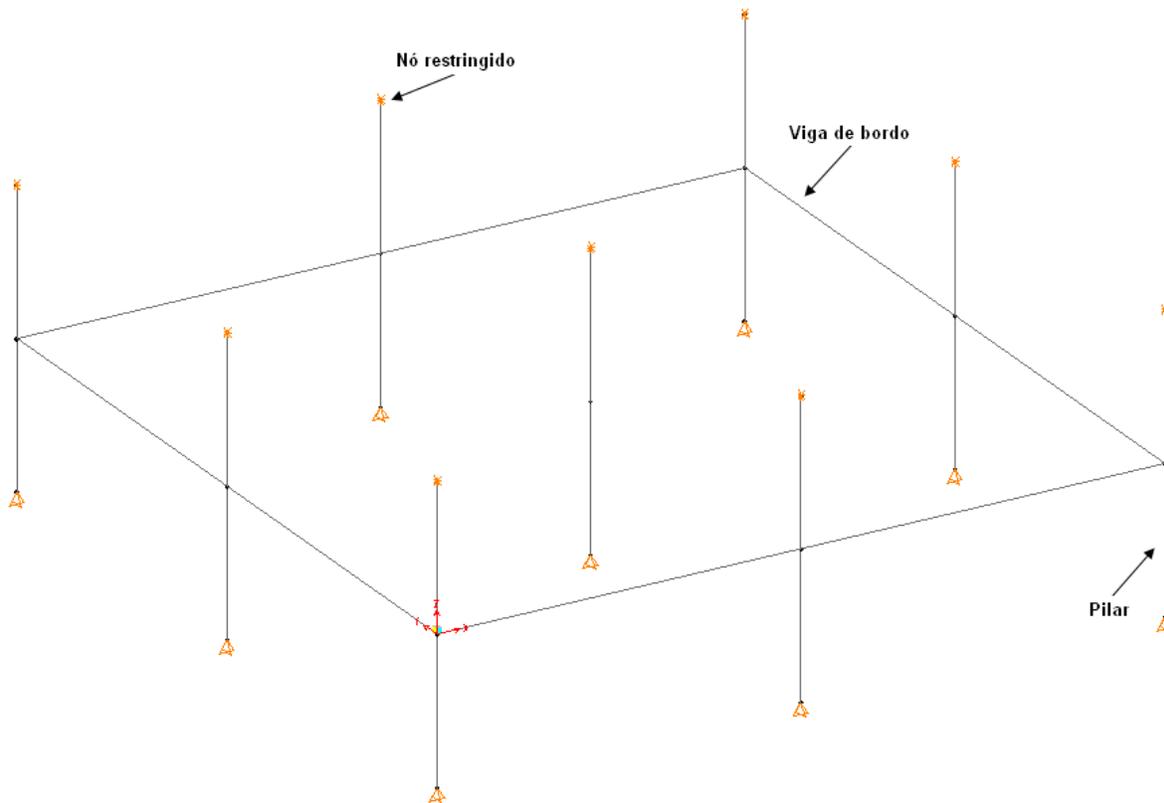


Figura 3-2 – Lançamento dos pilares análogo ao modelo de viga contínua

3) A condição de contorno foi feita restringindo os nós das extremidades superior e inferior dos pilares com apoios do primeiro e segundo gênero, respectivamente, conforme Figura 3-2. Os apoios do primeiro gênero foram obtidos impedindo-se as translações nas direções dos eixos X e Y, deixando livres as rotações nos eixos X, Y e Z. Já para os apoios do segundo gênero, impediu-se as translações nos eixos X, Y e Z, mantendo livres as rotações nos eixos X, Y e Z.

As lajes foram representadas por elementos de placa do tipo “PLATE THIN” quando analisadas pelo MEF (Figura 3-3). Na análise por Analogia de grelha, a representação da laje se deu por barras cruzando-se entre si, com seção transversal de acordo com a espessura da laje e do espaçamento da malha (Figura 3-4). A inércia à torção das barras foi definida em função da inércia à flexão, dada pela equação a seguir:

$$J_p = \alpha \cdot I \quad [EQ. 3.1]$$

Conforme já mencionado, o valor de  $\alpha$  utilizado nessa dissertação foi igual a dois.

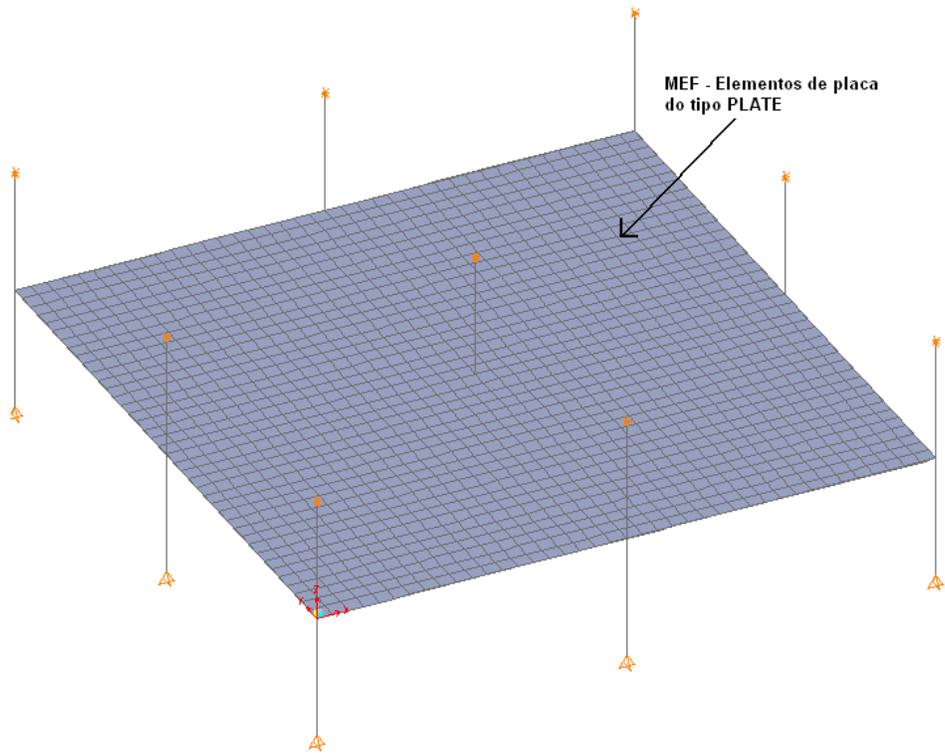


Figura 3-3 – Laje modelada com elementos de placa do tipo PLATE THIN - MEF

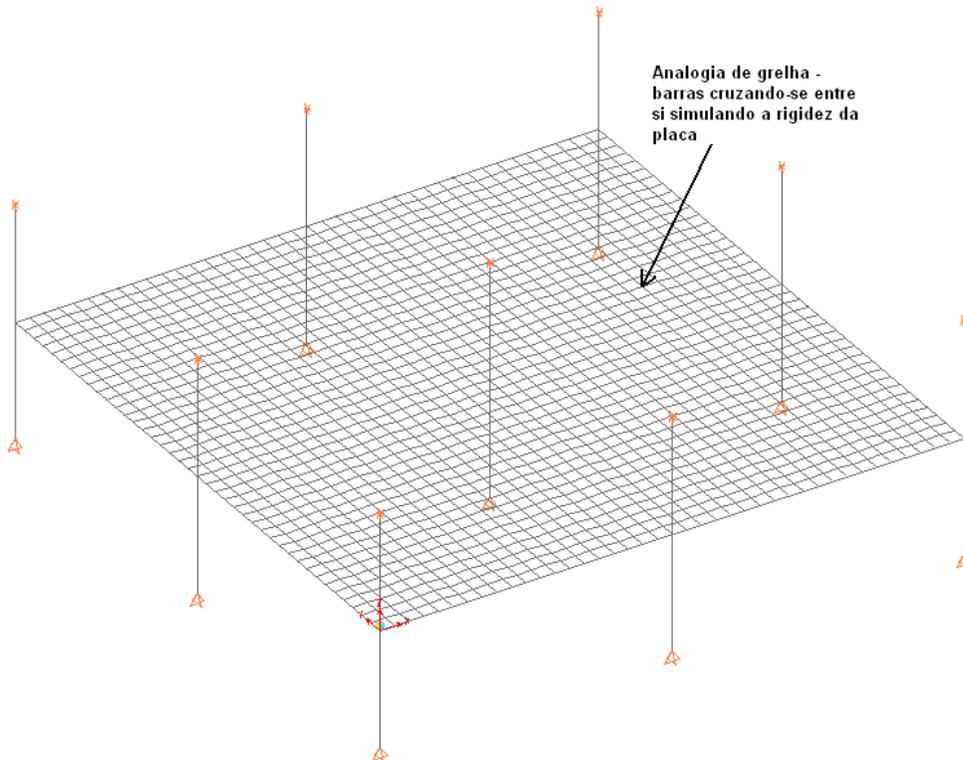


Figura 3-4 – Laje modelada por Analogia de Grelha

### 3.3. Estratégias de modelagem simulando pilar como reação na laje

Para evitar o problema da singularidade que ocorre ao analisar uma laje apoiada diretamente sobre um pilar modelado como barra, foi usada nessa dissertação uma solução alternativa. A idéia central do processo consiste em distribuir a reação do pilar, em uma determinada área, como sendo um carregamento de baixo para cima aplicado na laje, visto que na prática o pilar não é um ponto, mas sim um elemento com dimensões discretas.

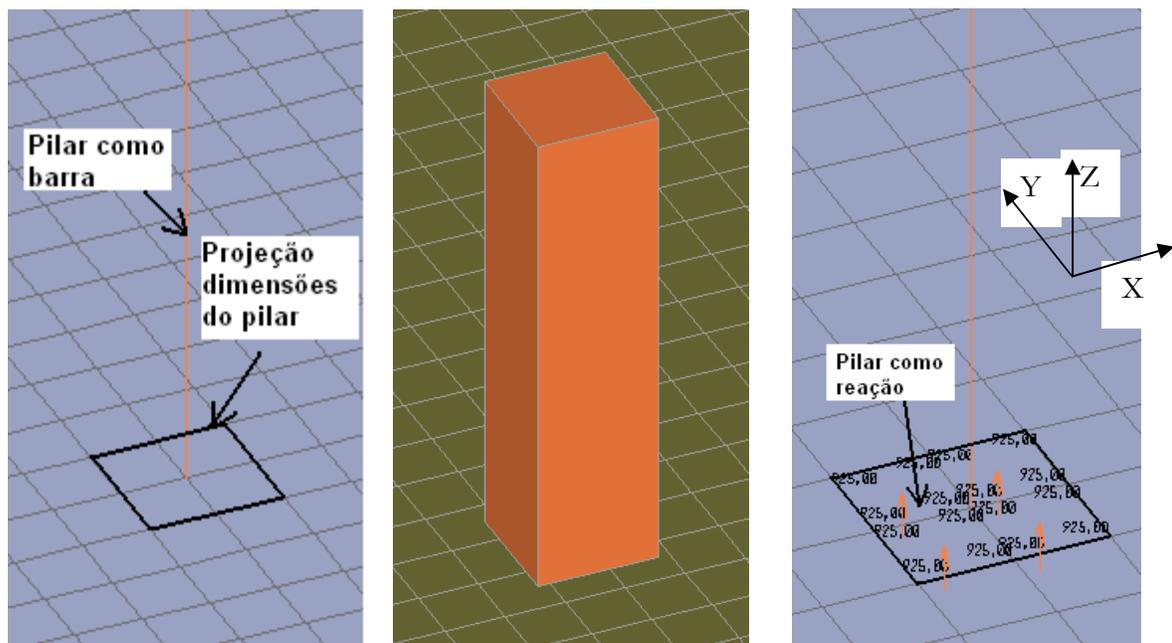


Figura 3-5 – Representação do pilar como barra, pilar com dimensão real e pilar como reação

HENNRICH (2003), estudou, a partir de uma laje de referencia, com dimensões de 10x10 metros e um pilar central, os deslocamentos, momentos fletores positivos e negativos e a reação no pilar central utilizando a Teoria das placas em regime elástico. Para tanto, foram desenvolvidas equações através de séries de Fourier para a resolução de placas, considerando o pilar como um apoio com dimensões discretas (e não pontual), utilizando a área da sua seção transversal, transformando-o em um carregamento externo aplicado na laje no sentido de baixo para cima. Os resultados mostraram que, ao considerar o pilar central como apoio pontual ou como carregamento distribuído, pouca diferença ocorreu nos momentos positivos, deslocamentos e reação no pilar central. Porém, o momento negativo máximo diminui, sendo que o diagrama de momentos sofreu um arredondamento na região do pilar central. Outro estudo foi realizado no *software* AltoQi Eberick, também simulando o pilar central como

carregamento distribuído. Pelos resultados obtidos pode-se constatar que os momentos negativos foram pouco sensíveis à malha, como também os momentos positivos, deslocamentos e reação no pilar central.

PEDROZO (2008), estudou critérios de projeto de lajes lisas protendidas, sendo realizados exemplos de dimensionamento de pavimentos com e sem balanços, comparando os resultados pelo processo do pórtico equivalente e pelo MEF, utilizando o *software* SAP 2000. Na análise feita pelo MEF, foram estudados exemplos modelando o pilar como apoio pontual e como reação distribuída na laje na área da seção transversal do pilar, com sentido contrário a aplicação do carregamento na laje. Como conclusão desses modelos, houve um arredondamento do diagrama de momentos fletores sobre os pilares ao comparar o primeiro caso (pilar modelado como apoio pontual) com o segundo (pilar modelado como reação distribuída na laje).

Outra solução para o problema da singularidade causado em modelar o pilar como apoio pontual foi proposta por SZILARD (1974). Procedimento análogo é apresentado na NBR 6118:2003, item 14.6.3, a qual permite arredondar, em vigas, o diagrama de momentos fletores sobre os apoios e pontos de aplicação de forças consideradas como concentradas. De uma maneira geral, o procedimento considera a dimensão do pilar, utilizando sua reação de apoio para corrigir o pico de momento fletor máximo causado pela aplicação de pilares como apoios pontuais.

### **3.3.1. Pilar simétrico em relação à laje**

Quando o pilar é posicionado simetricamente na laje e o carregamento também é simétrico e não existem cargas horizontais (cargas de vento), os efeitos de flexão no elemento são nulos, ocorrendo somente esforço axial. Partindo-se da condição de contorno adotada, em que se tem apoio do primeiro gênero no nó do pilar superior e apoio do segundo gênero no nó do pilar inferior, surgirá esforço axial somente no pilar de baixo, conforme mostrado na Figura 3-6.

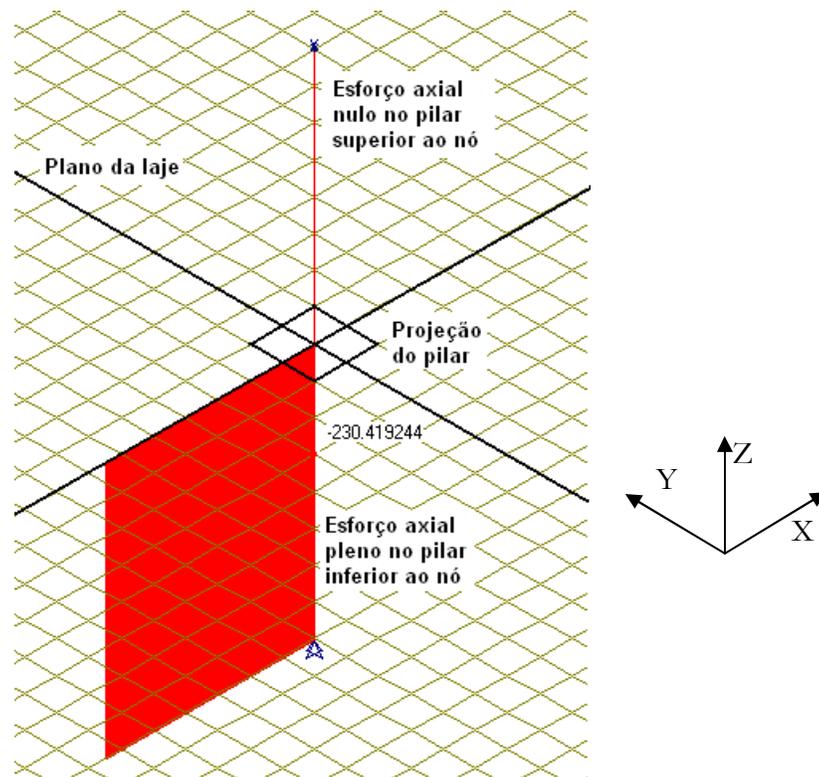


Figura 3-6 – Caracterização do esforço axial do pilar como reação na laje

A partir do esforço axial do pilar, é possível determinar o valor do carregamento uniformemente distribuído ( $q$ ) a ser aplicado como reação na laje, conforme Figura 3-7.

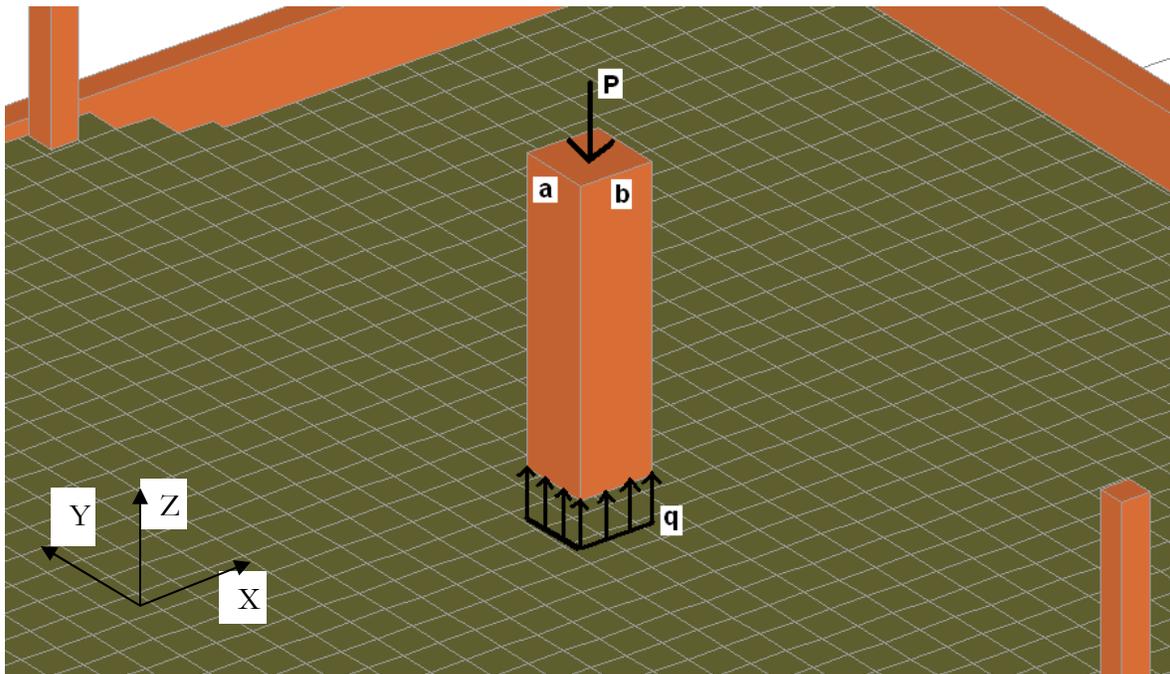


Figura 3-7 – Carregamento uniformemente distribuído na laje representando a reação do pilar na projeção da área da seção transversal

Nesse caso, tem-se:

$$q = \frac{P}{a \cdot b} \quad \text{EQ. 3-1}$$

Onde:

q = Carregamento uniformemente distribuído aplicado como reação de baixo para cima na laje;

P = Esforço axial no pilar;

a = menor dimensão do pilar;

b = maior dimensão do pilar.

A Figura 3-8 apresenta uma visualização do *software* SAP 2000 com o carregamento “q” aplicado na laje.

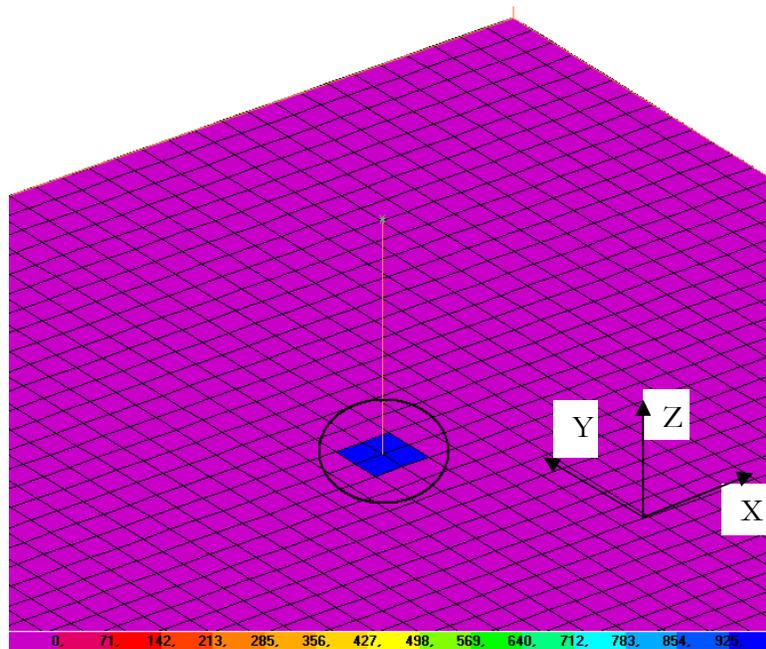


Figura 3-8 – Visualização do *software* SAP 2000 com o esforço normal como carregamento uniformemente distribuída na laje

Nota-se que a escala de cores é constante, o que indica um carregamento uniformemente distribuído na laje.

Para realizar o procedimento que consiste em adicionar os esforços axiais do pilar como carregamento distribuído na laje de baixo para cima, é necessário analisar inicialmente a estrutura modelando o pilar como apoio pontual, obtendo-se com isso o esforço axial no pilar. Na seqüência, encontra-se “q” através da [EQ.3-1] e adiciona-se esse carregamento na laje no sentido de baixo para cima. Analisa-se novamente a estrutura e verifica-se se o esforço axial no

pilar resultou nulo. Caso o esforço axial no pilar não for nulo (ou praticamente nulo, pois é necessário estabelecer uma precisão mínima para convergência do método), faz-se uma nova análise, corrigindo o valor de “q” a partir do esforço axial obtido no pilar da análise anterior, adicionando esse novo carregamento na laje. Dessa forma, o processo é iterativo e converge quando o esforço axial no pilar for nulo ou dentro de um limite estipulado pelo projetista como sendo a precisão mínima de convergência do método.

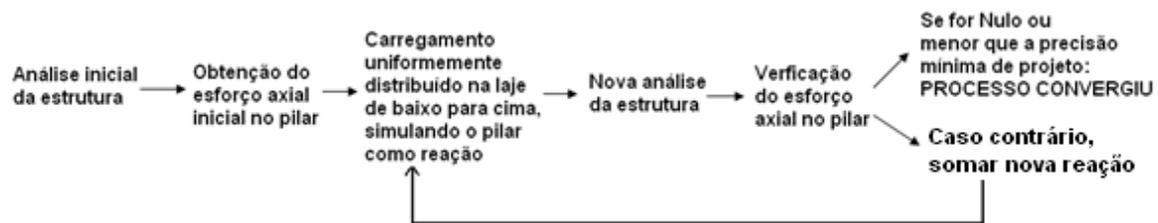


Figura 3-9 – Esquema do método simulando pilar como reação na laje – casos em que há simetria do pilar na laje

### 3.3.2. Pilar assimétrico em relação à laje

Quando o pilar é posicionado assimétrico em relação à laje, ou o carregamento é assimétrico ou existem cargas horizontais, além do esforço axial surgem também esforços de flexão no pilar que deverão ser levados em consideração no cálculo do carregamento a ser aplicado na laje. A assimetria poderá ocorrer somente em uma direção ou então nas duas direções. Nessa dissertação será avaliada somente a assimetria em uma direção.

A solidariedade do pilar com a laje é obtida através do modelo análogo ao de viga contínua, em que se modela metade do pilar para cima e metade do pilar para baixo. Com isso, quando existe uma assimetria no carregamento e/ou na geometria entre a laje e o pilar causador da punção, tem-se uma rotação do nó na junção do pilar com a laje, o que causa flexão no elemento, conforme mostrado na Figura 3-10.

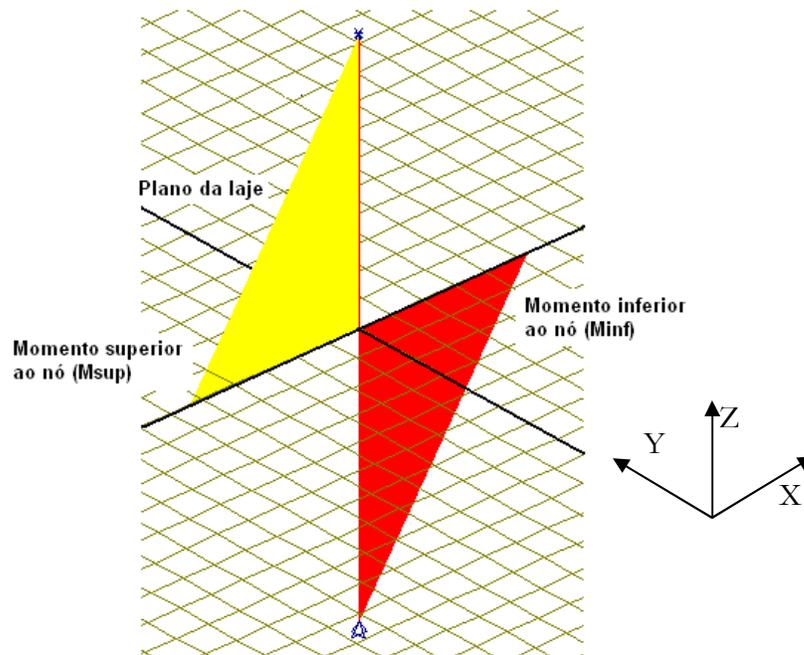


Figura 3-10 – Caracterização do momento fletor do pilar como reação na laje

Essa flexão no pilar pode ser substituída por um binário de forças, calculado a partir da soma do momento superior ao nó e do momento inferior ao nó que, quando aplicado como reação na laje, resulta em um diagrama prismático triangular de carregamentos, conforme mostrado na Figura 3-12 (b).

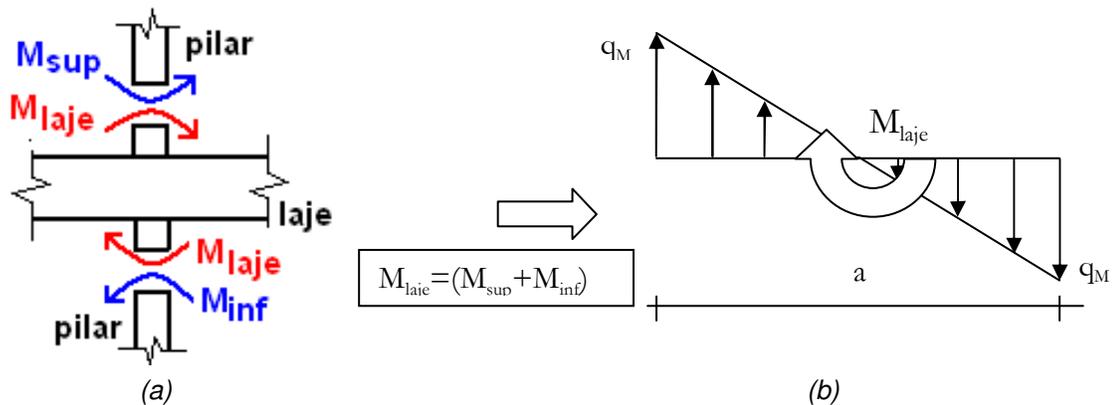


Figura 3-11 – Binário de forças resultante do momento fletor do pilar aplicado como reação na laje

O valor de “ $q_M$ ” é constante ao longo da outra dimensão do pilar, resultando em um carregamento prismático triangular. O valor de “ $q_M$ ” é dado pela [EQ. 3-2].

$$q_M = \frac{6 \cdot M_{laje}}{a^2 \cdot b} \quad [\text{kN/m}^2] \quad [\text{EQ. 3-2}]$$

Onde:

$q_M$  = Valor da extremidade do carregamento aplicado como reação na laje;

$M_{laje}$  = Momento fletor atuante na laje obtido através do somatório do momento do pilar superior e do momento do pilar inferior;

a = dimensão do pilar no plano de atuação do momento;

b = outra dimensão do pilar.

A Figura 3-12 apresenta a visualização do *software* SAP 2000 para o momento fletor do pilar distribuído na laje como carregamento prismático triangular.

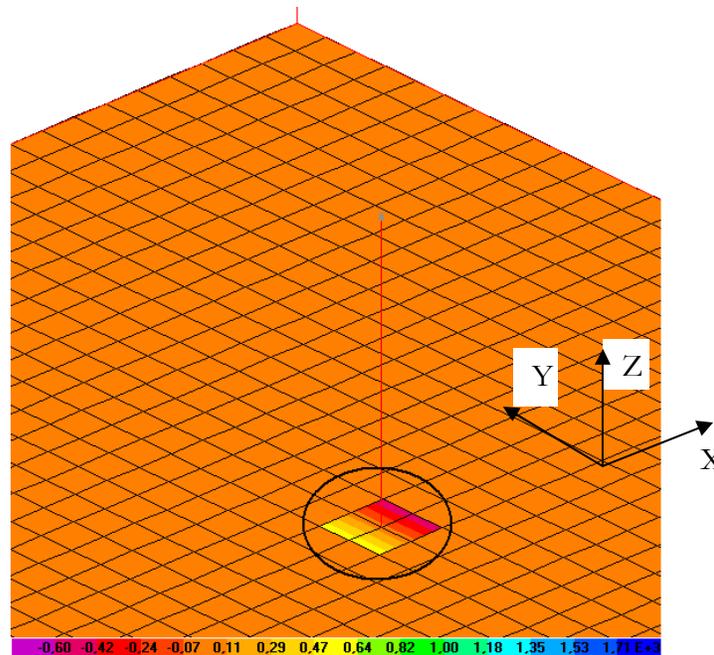


Figura 3-12 - Visualização do *software* SAP 2000 com o momento fletor como carregamento prismático triangular distribuída na laje

Pode-se notar que nesse caso existe uma escala de cores na área da seção transversal do pilar, que varia de um valor máximo para um valor mínimo, evidenciando se tratar de um carregamento prismático triangular na laje e não uniforme.

A metodologia para simular os esforços axiais e de flexão do pilar como reação aplicada na laje consiste em um processo também iterativo, descrito a seguir:

- 1) Analisa-se inicialmente a estrutura modelando o pilar como apoio pontual (Figura 3-1), obtendo-se os diagramas de esforço normal e momentos fletores do pilar;
- 2) Encontra-se o valor de “q” através da [EQ.3-1] e de “ $q_M$ ” através da [EQ. 3-3]. Faz-se a sobreposição dos efeitos normais (q) e de flexão ( $q_M$ ) do pilar, obtendo-se um diagrama de carregamento final com valores  $q_E$  e  $q_D$ , adicionando-o na laje, conforme mostrado na Figura 3-13;

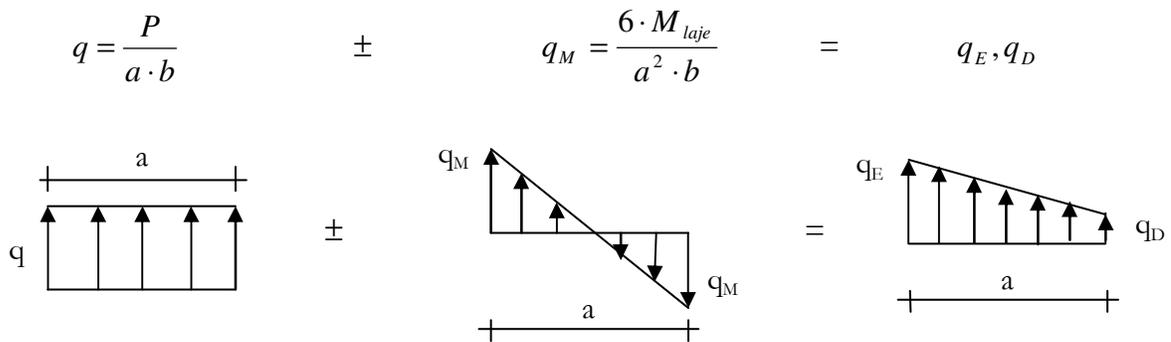


Figura 3-13 – Carregamento final com  $q_E$  e  $q_D$  aplicado como reação na laje

Onde:  $q_E$  = carregamento na face esquerda do pilar ;  $q_D$  = carregamento na face direita do pilar.

O diagrama final da composição do esforço normal e de flexão nem sempre tem a configuração apresentada acima. Dependendo do valor do esforço normal e de flexão, pode haver um bordo tracionado e com isso o sentido de “ $q_D$ ” será de cima para baixo.

- 3) Substituem-se as barras dos pilares (modelado metade para cima e metade para baixo), por um apoio do segundo gênero, conforme mostrado na Figura 3-14;

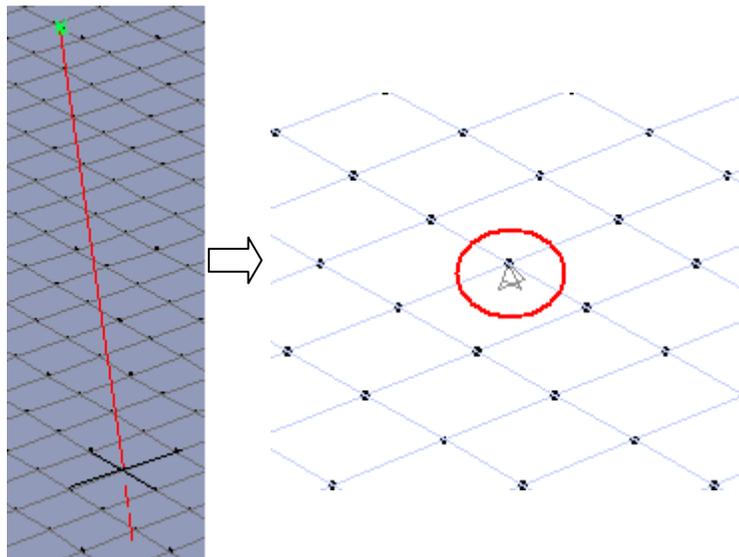


Figura 3-14 – Pilar modelado como barra substituído por um apoio do segundo gênero

- 4) Analisa-se novamente a estrutura, obtendo-se no nó do vínculo do pilar (circulado em vermelho na Figura 3-14), a reação no apoio e a rotação do nó;
- 5) A reação de apoio deve ser nula ou praticamente nula (dentro de um limite estabelecido pelo projetista). Caso não for, deve-se corrigir o esforço axial inicial a partir da diferença encontrada nessa iteração;

- 6) Através da rotação do nó, verifica-se qual é o novo momento atuante, multiplicando-se a rotação do nó pela rigidez de uma mola que simula a rigidez da barra do pilar, modelado metade para cima e metade para baixo da laje, conforme mostrado na Figura 3-15.

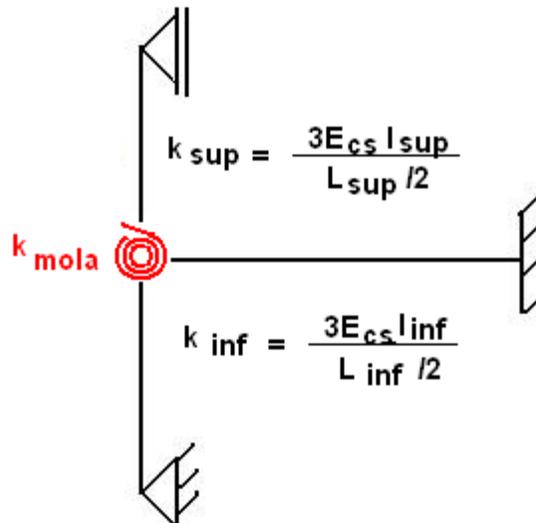


Figura 3-15 – Rigidez da mola: metade do pilar para cima e metade do pilar para baixo

A rigidez da mola ( $k_{mola}$ ) é calculada da seguinte forma:

$$k_{mola} = k_{sup} + k_{inf}$$

$$k_{mola} = \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{sup}}{L_{sup} / 2} + \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{inf}}{L_{inf} / 2} \quad [kN.m] \quad [EQ. 3-3]$$

Onde:

$k_{mola}$  = rigidez da mola;

$E_{cs}$  = Módulo de elasticidade secante do concreto;

$I_{sup}$  = Inércia do pilar superior;

$I_{inf}$  = Inércia do pilar inferior;

$L_{sup}$  = Comprimento do pilar superior;

$L_{inf}$  = Comprimento do pilar inferior.

Por fim, o momento será calculado da seguinte forma:

$$M_{laje} = k_{mola} \cdot \varphi \quad [EQ. 3-4]$$

Onde:

$M_{laje}$  = Momento fletor atuante na laje;

$k_{mola}$  = rigidez da mola;

$\phi$  = rotação no nó do vínculo do pilar (circulado em vermelho na Figura 3-14), oriundo do diagrama de carregamento obtido por  $q_E$  e  $q_D$ , aplicado como reação na laje, conforme mostrado na Figura 3-16.

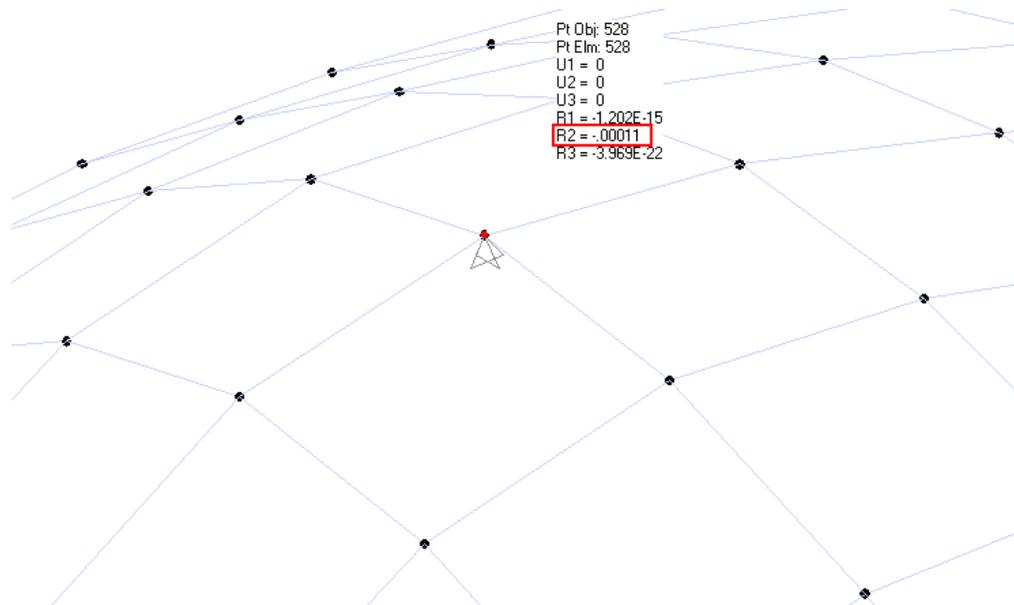


Figura 3-16 – Rotação do nó do vínculo do pilar

Nota-se que o vínculo correspondente para  $\phi$  é apresentado pelo SAP 2000 como sendo a rotação R2, estando o valor em radianos.

Caso o momento fletor atuante no nó do vínculo do pilar nessa iteração não seja igual ao momento anterior, utilizado para encontrar  $q_E$  e  $q_D$ , torna-se necessário repetir o processo. A convergência se dá quando o momento obtido na iteração atual é igual ou praticamente igual ao utilizado na iteração anterior. É necessário que se estipule um limite mínimo de convergência dos momentos na mola.

- 7) Dessa forma, quando o processo não converge, é necessário ajustar os valores de “q” e “ $q_M$ ” a partir dos novos valores de esforço normal e momento fletor, compondo um novo diagrama de carregamentos a partir dos valores de  $q_E$  e  $q_D$ . Esse novo diagrama será novamente aplicado na laje até que se tenha a convergência do esforço normal e momento fletor comentada nos itens 5 e 6.

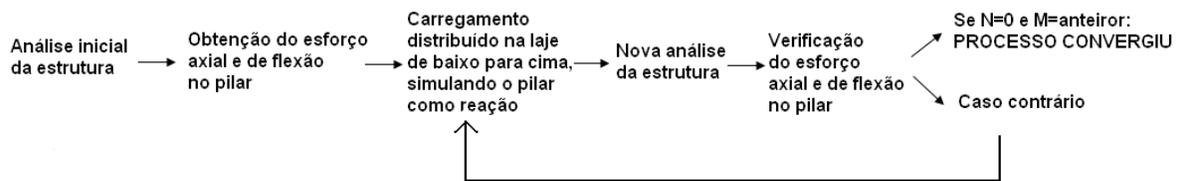


Figura 3-17 - Esquema do método simulando pilar como reação na laje – casos em que não há simetria do pilar na laje

Após muitas interações, percebeu-se que a convergência do método ocorre com mais rapidez quando se utiliza o momento na próxima iteração como sendo a média entre o momento anterior e o obtido na iteração atual.

### 3.3.3. Ajustes ao modelar o pilar como reação na laje

Quando se modela no *software* SAP 2000 o pilar como reação na laje, seja pelo MEF ou por Analogia de Grelha, as dimensões do pilar em relação ao espaçamento adotado para a malha tornam-se importantes. Na maioria dos casos, é necessário fazer ajustes e até mesmo transições na malha para conseguir com que pontos da malha coincidam com as coordenadas do pilar. Somente assim é possível distribuir a reação do pilar na laje na projeção de sua área.

Um exemplo prático é tentar modelar um pilar com dimensões 50x50cm em uma malha de 50x50cm. É necessário realizar uma transição, conforme mostrado na Figura 3-18.

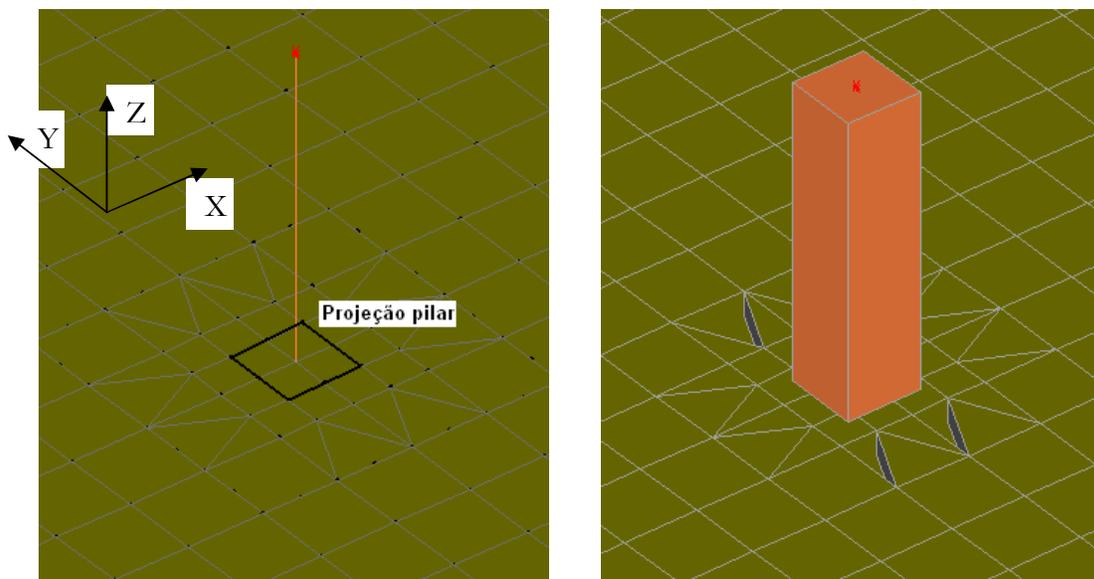


Figura 3-18 – Transição na malha para coincidir com as coordenadas do pilar

Tomando como base o exemplo anterior, caso se queira distribuir a reação do pilar na área correspondente a área de sua seção transversal projetada no centro geométrico na laje, além da transição, em muitos casos é necessário mover os nós para que os pontos da malha coincidam com a nova área do pilar, conforme mostrado na Figura 3-19.

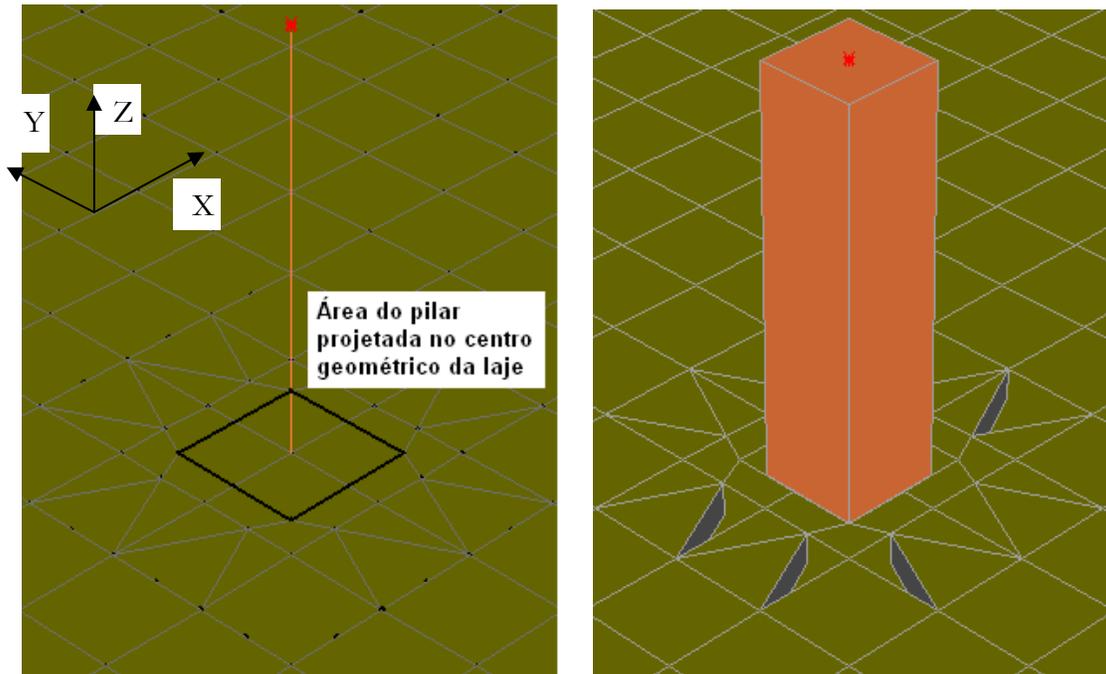


Figura 3-19 - Transição na malha e alteração nas coordenadas dos nós para coincidir com as coordenadas do pilar

Nas análises pelo MEF as transições na laje foram feitas com a utilização de elementos triangulares, diminuindo o espaçamento da malha na área de interesse, conforme Figura 3-18 e Figura 3-19. No Processo por Analogia de Grelha as transições não são feitas da mesma forma. É necessário refinar a malha na região do pilar com a utilização de barras com o novo espaçamento, atravessando toda a extensão da laje, conforme apresentado na Figura 3-20.

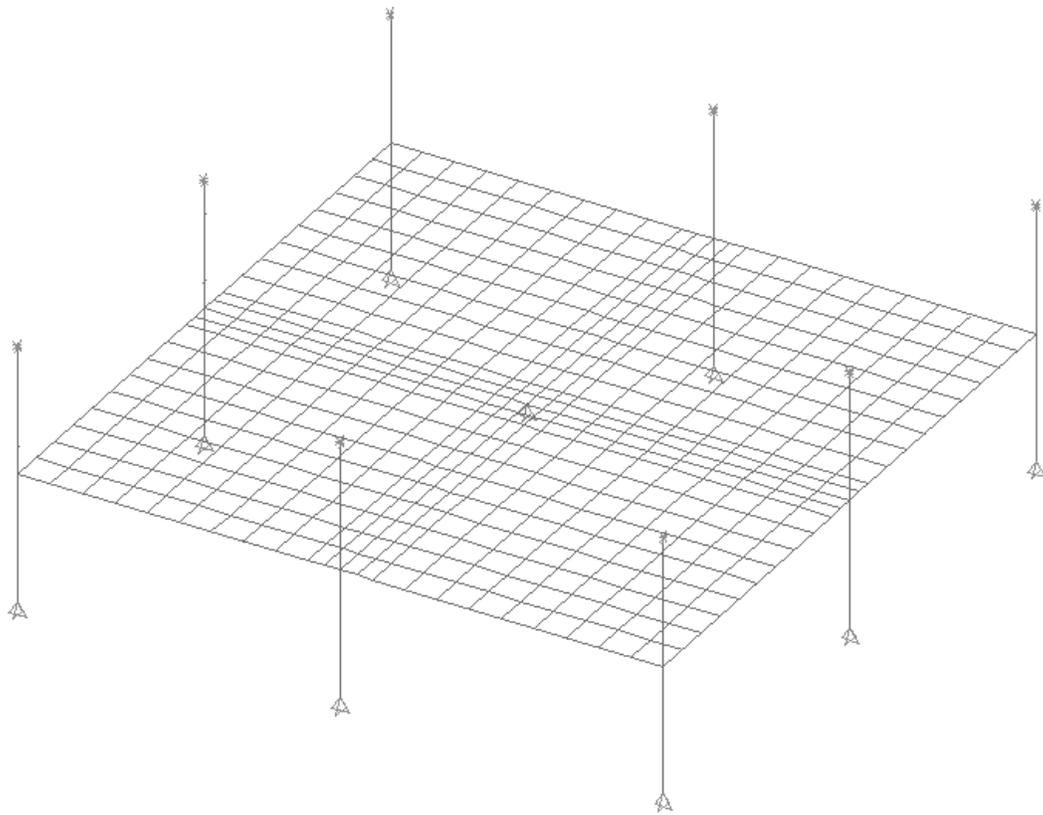


Figura 3-20 – Transição em toda extensão da laje analisada por Analogia de Grelha

Estudos realizados nessa dissertação demonstraram que transições feitas somente no núcleo do pilar (Figura 3-21) não conduzem a bons resultados nas análises por Analogia de grelha e, portanto, devem ser evitadas. Estudos adicionais podem ser feitos para propor um refinamento somente na região do pilar utilizando o Processo por Analogia de Grelha.

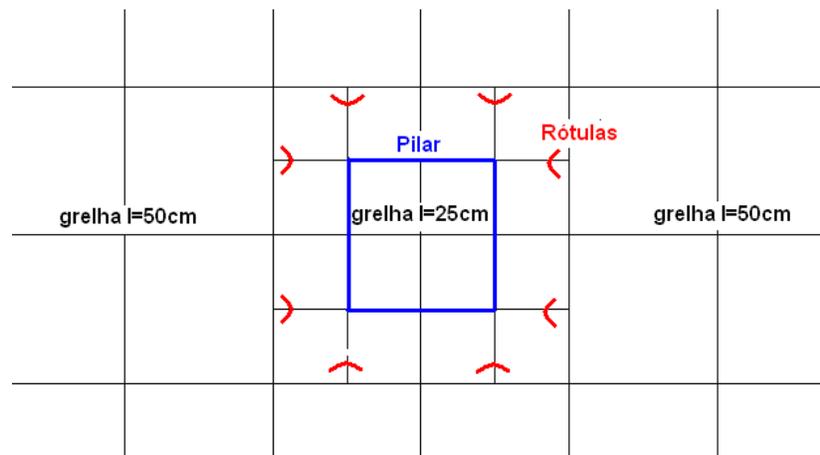


Figura 3-21 – Transição somente na região do pilar na análise por Analogia de Grelha

Por outro lado, os mesmos estudos mostraram que no MEF os resultados foram praticamente iguais ao realizar a transição na malha somente na região do pilar (com elementos

triangulares) ou em toda a extensão da laje. Dessa forma, nessa dissertação, na análise pelo MEF as transições foram realizadas somente na região do pilar.

### 3.3.4. Trechos rígidos na região do pilar

Na ligação da laje com o pilar, especificamente na região compreendida pela área da seção transversal do pilar, existe uma região diferente em relação aos demais pontos da placa. Devido à interação laje x pilar, percebe-se que essa região tem uma rigidez superior. A Norma Brasileira NBR 6118:2003, no item 14.6.2.1, prescreve que: “Os trechos de elementos lineares pertencentes à região comum ao cruzamento de dois ou mais elementos podem ser considerados como rígidos (nos de dimensões finitas)”, conforme mostrado na Figura 3-22.

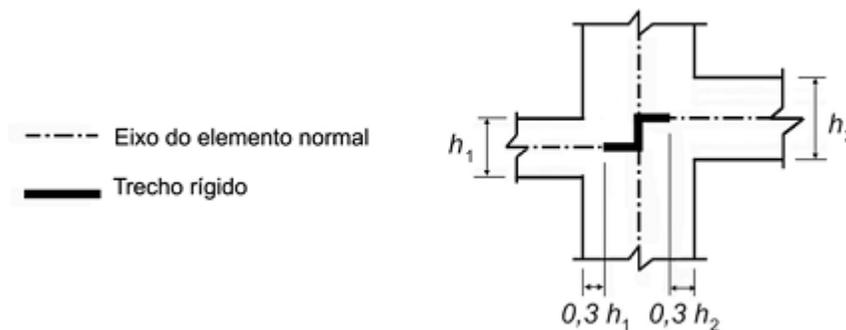


Figura 3-22 – Trechos rígidos, NBR 6118:2003

Alguns exemplos utilizados nessa dissertação tiveram a região do pilar que gera punção na laje modelada com elementos rígidos. No caso dos exemplos analisados pelo MEF, foram lançados elementos do tipo PLATE THIN na região correspondente ao trecho rígido com rigidez tanto na flexão como ao cisalhamento igual a 100 vezes em relação aos demais elementos da laje. A Figura 3-23 ilustra essa situação.

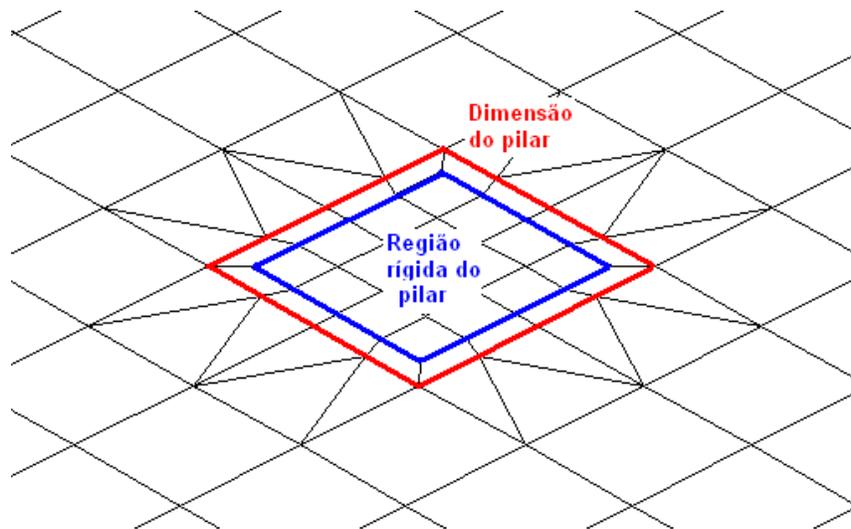


Figura 3-23 – Região rígida do pilar na análise pelo MEF

No caso dos exemplos analisados por Analogia de grelha, as barras lançadas na região do pilar tiveram a então a rigidez axial, ao cisalhamento, à flexão e à torção multiplicadas em 100 vezes em relação as demais barras da laje. A Figura 3-24 ilustra essa situação.

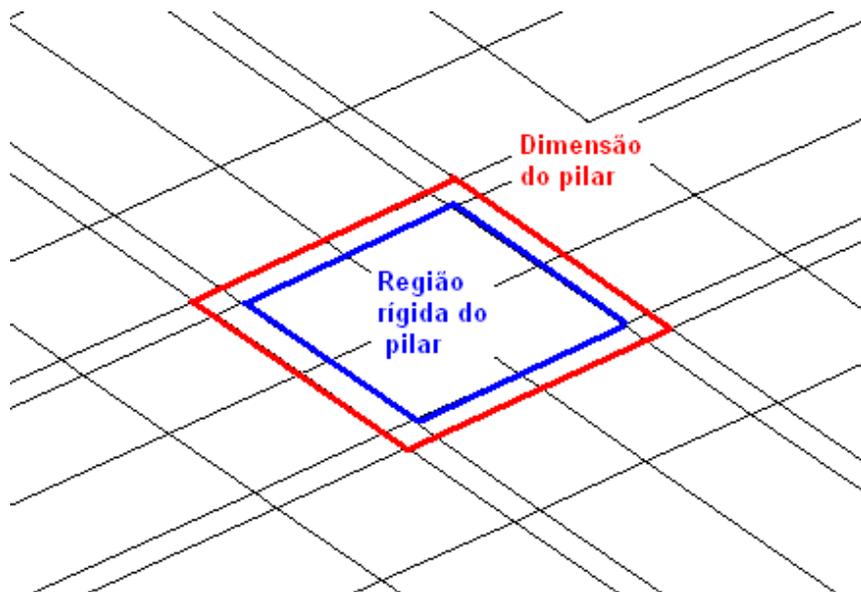


Figura 3-24 - Região rígida do pilar na análise por Analogia de Grelha

Também foram analisados modelos em que se considerou o núcleo rígido com rigidez igual a 1000, 10000 e até 10000000. Os resultados obtidos foram praticamente os mesmos quando se utilizou o fator 100. Por isso, optou-se por utilizar o fator 100, pois valores muito superiores a esse conduzem a avisos durante o processamento da estrutura no programa SAP 2000.

Um modelo que teve resultados parecidos ao utilizado nessa dissertação, o qual considerada a região do pilar rígida, foi estudado por HENNRICHS (2003). Foi utilizado um modelo analisado pelo MEF que considera o pilar central com elementos Sólidos, procurando simular as dimensões reais do elemento (Figura 3-25)

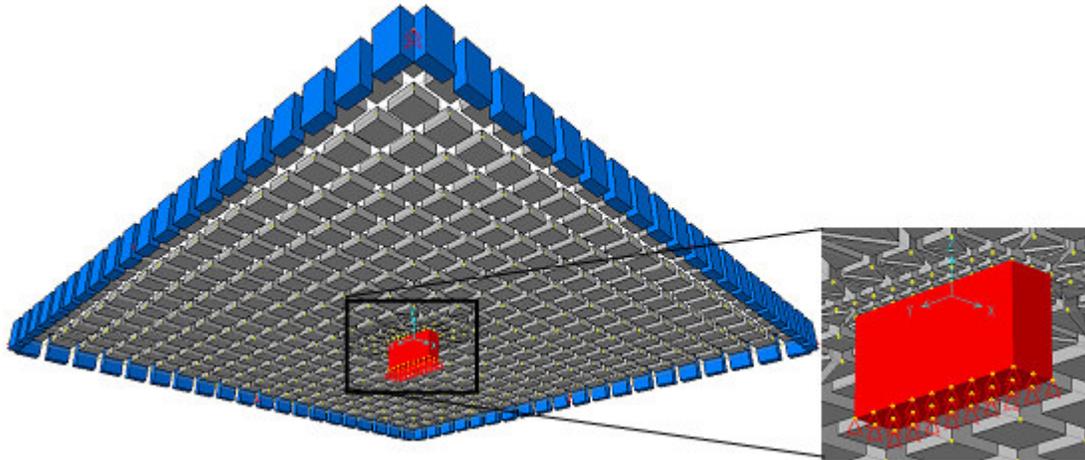


Figura 3-25 – Modelo com pilar definido como elemento sólido (Henrichs, 2003)

Nesse modelo apresentado por HENNRICHS (2003), os resultados em termos de momento fletor positivo, carga no pilar e deslocamentos máximos apresentaram bastante semelhança com os obtidos pela Teoria das Placas em Regime Elástico, com diferenças aumentando na medida em que se aumenta a dimensão do pilar central. Porém, com relação aos momentos negativos na região do pilar central, houve picos de valores nas bordas do pilar. Tais picos foram maiores em pilares com uma dimensão bem inferior a outra (pilares alongados).

### 3.3.5. Seção transversal do pilar projetada no centro da laje

Uma alternativa em termos de modelagem que se adota nessa dissertação é distribuir a reação do pilar em uma área correspondente à área da seção transversal projetada no centro de gravidade da laje. Esse efeito é análogo ao efeito de uma roda sobre o tabuleiro de uma ponte, em que se adota o mesmo critério aqui apresentado.

Ao distribuir a reação do pilar em uma área maior do que a área da seção transversal tem-se uma suavização no diagrama de momento fletor da laje, pois a rotação no nó do elemento diminui. O ângulo de projeção do pilar na laje ( $\theta$ ) utilizado nessa dissertação é de 45°, análogo ao critério utilizado em pontes para a consideração dos efeitos da roda dos carros sobre o tabuleiro.

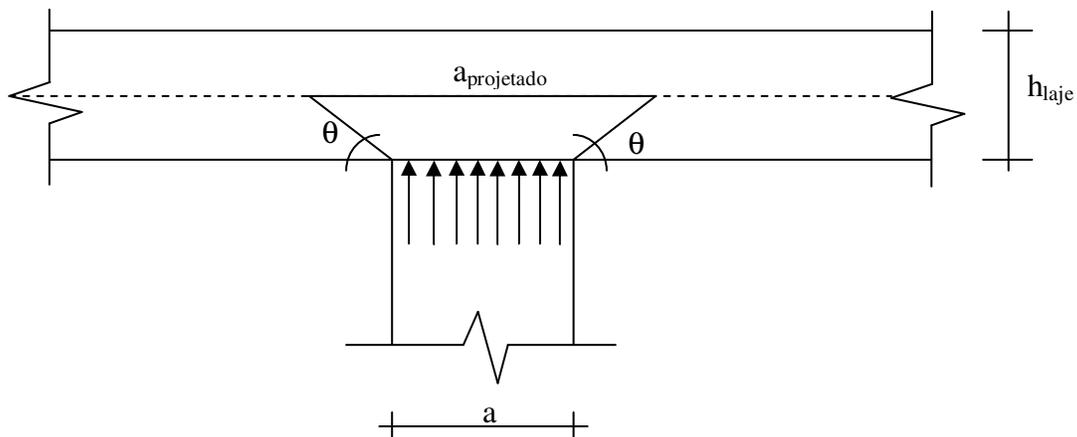


Figura 3-26 – Seção do pilar projetada no centro geométrico da laje

PEDROZO (2008), estudou um exemplo parecido a esse, analisado pelo MEF, em que distribuía a reação do pilar na área da seção transversal projetada em um ângulo de 45 graus. Foram feitas comparações com um exemplo em que distribuía a reação do pilar na área da seção transversal. Em termos de momentos fletores positivos, os valores foram praticamente os mesmos. Porém, o arredondamento do diagrama de momento fletor sobre o pilar central foi ainda maior se comparado com o segundo caso.

Conforme mostrado no item 3.3.4, também se faz necessário modelar adequadamente a região do pilar, de maneira que se tenham nós da malha na dimensão do pilar e na dimensão do pilar projetada a 45° no centro de gravidade da laje. Nos casos com o trecho rígido na região do pilar, além dos nós nas posições mencionadas, é necessário também prever um nó na face da região rígida, conforme mostrado na Figura 3-27 e Figura 3-28.

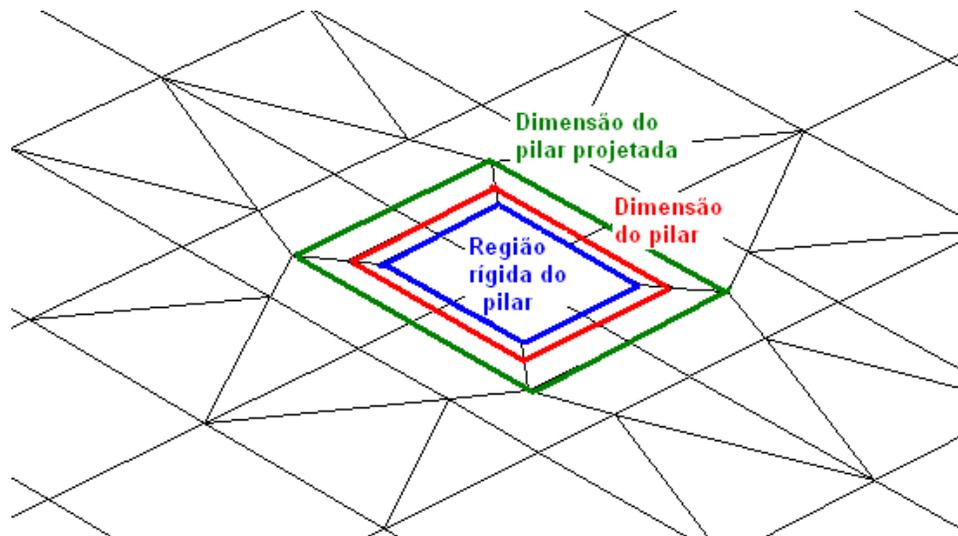


Figura 3-27 - Região do pilar mostrando o trecho rígido, a dimensão do elemento e a dimensão projetada no centro de gravidade da laje – MEF

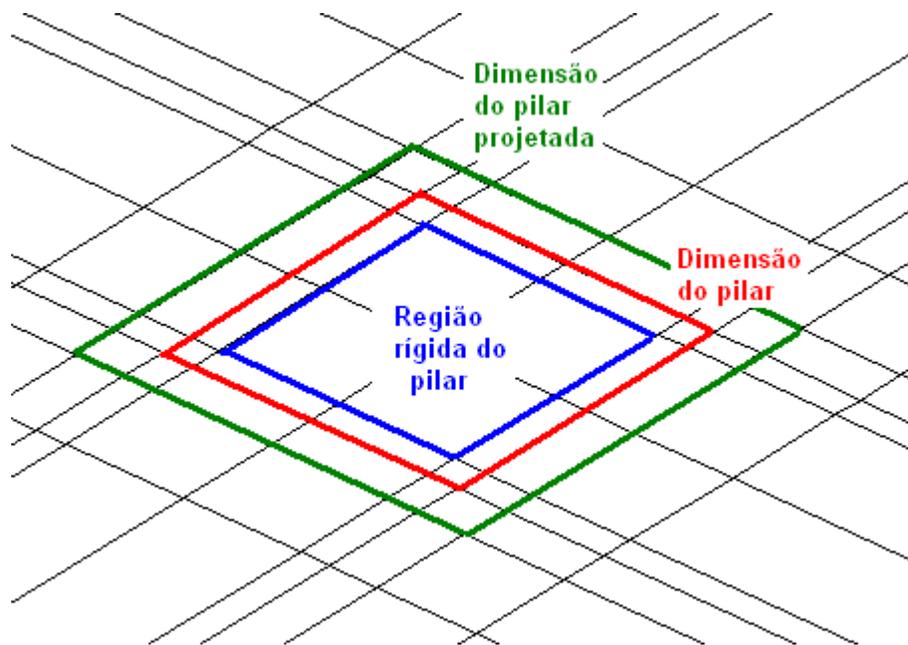


Figura 3-28 – Região do pilar mostrando o trecho rígido, a dimensão do elemento e a dimensão projetada no centro de gravidade da laje – Analogia de Grelha

Vale frisar que a modelagem por Analogia de Grelha é mais difícil de ser realizada do que pelo MEF. No MEF (Figura 3-27), as transições com elementos triangulares já solucionam o problema. No entanto, na Analogia de Grelha (Figura 3-28), cada barra possui seção transversal de acordo com o espaçamento da malha. Dessa forma, é necessário adotar esses valores para a largura das barras sempre que se altera o espaçamento entre elas. Ou seja, para que se tenha a região rígida dentro do pilar, sua dimensão e sua dimensão projetada no

centro de gravidade da laje, é necessário lançar barras “quebrando” o espaçamento padrão da malha, estando cada elemento com larguras diferentes.

### 3.4. Exemplos numéricos

Para alcançar os objetivos deste trabalho e adequá-lo para aplicação prática, é necessário escolher de forma criteriosa os exemplos a serem estudados. Por isso, foram idealizados quatro casos, sendo todos contendo uma laje plana maciça retangular com dimensões 10x10 m (contados pelo eixo das vigas de bordo), com as seguintes características:

- $F_{ck} = 25 \text{ MPa}$ ;
- $E_{cs} = 2,38 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ;
- Sobrecarga =  $2,0 \text{ kN/m}^2$ ;
- Revestimento =  $1,0 \text{ kN/m}^2$ ;
- Peso próprio =  $0,16 \times 25 = 4,0 \text{ kN/m}^2$ ;
- Carregamento total aplicado na laje =  $7,0 \text{ kN/m}^2$ ;
- Vigas de bordo seção  $20 \times 50 \text{ cm}$ ;
- Pilares periféricos seção  $20 \times 20 \text{ cm}$ ;
- Pilar central seção  $50 \times 50 \text{ cm}$ .

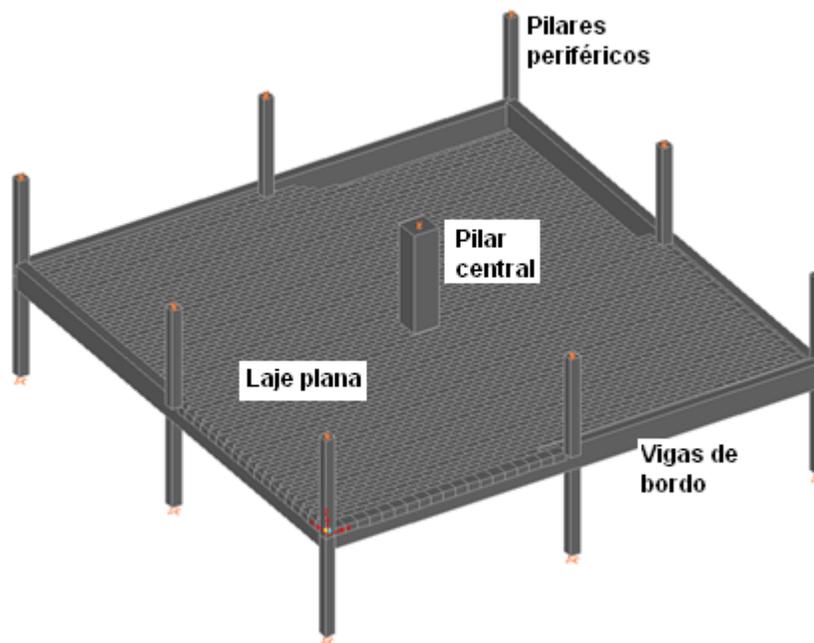


Figura 3-29 – Vista 3D do modelo com as dimensões dos elementos

A espessura adotada foi de 16,0 cm, de acordo com o valor mínimo prescrito na NBR 6118:2003, item 13.2.4.1.

Por razões didáticas, o peso próprio dos elementos lineares (vigas e pilares) foi adotado igual a zero e a rigidez axial dos pilares (central e periféricos) infinita. A altura entre os pavimentos foi arbitrada como sendo 4,0 (quatro) metros. Dessa forma, no modelo análogo ao de viga contínua, o comprimento do pilar modelado metade para cima e metade para baixo apresenta 2,0 (dois) metros.

A rigidez da mola para todos os casos para o pilar central (P5) é calculada a partir da [EQ. 3-4], da seguinte forma:

$$k_{mola} = \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{sup}}{L_{sup} / 2} + \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{inf}}{L_{inf} / 2}$$
$$k_{mola} = \frac{3 \cdot 2,38 \cdot 10^7 \cdot \frac{(0,5 \cdot 0,5^3)}{12}}{2} + \frac{3 \cdot 2,38 \cdot 10^7 \cdot \frac{(0,5 \cdot 0,5^3)}{12}}{2}$$
$$k_{mola} = 185937,5 + 185937,5 = 371875 \text{ kNm}$$
$$k_{mola} = 371875 \text{ kNm}$$

Com relação à dimensão do trecho rígido e a dimensão do pilar projetada no centro de gravidade da laje, tem-se:

$$\text{Dimensão pilar} = 50,0 \text{ cm}$$

$$\text{Dimensão trecho rígido} = 50 - 2 \cdot (0,3 \cdot h_{laje}) = 50 - 2 \cdot 0,3 \cdot 16 = 40,4 \text{ cm}$$

$$\text{Dimensão pilar projetada} = 50 + 2 \cdot (8 \cdot \text{tg}45^\circ) = 50 + 2 \cdot 8 = 66,0 \text{ cm}$$

Ainda, em todos os casos, foi adotada a rigidez a torção para as vigas como sendo 15% da rigidez elástica, conforme definido no item 14.6.7.2 da NBR 6118:2003.

Por convenção, em todos os casos analisados, os momentos na direção X fornecem a armadura nessa mesma direção, assim como os momentos na direção Y fornecem armadura direção Y. Vale frisar que esses momentos não necessariamente coincidem com os momentos principais. Quando além de  $m_x$  e  $m_y$  existir um momento torsor, no ponto em estudo, aparecem momentos principais em direções diferentes de  $x$  e  $y$ .



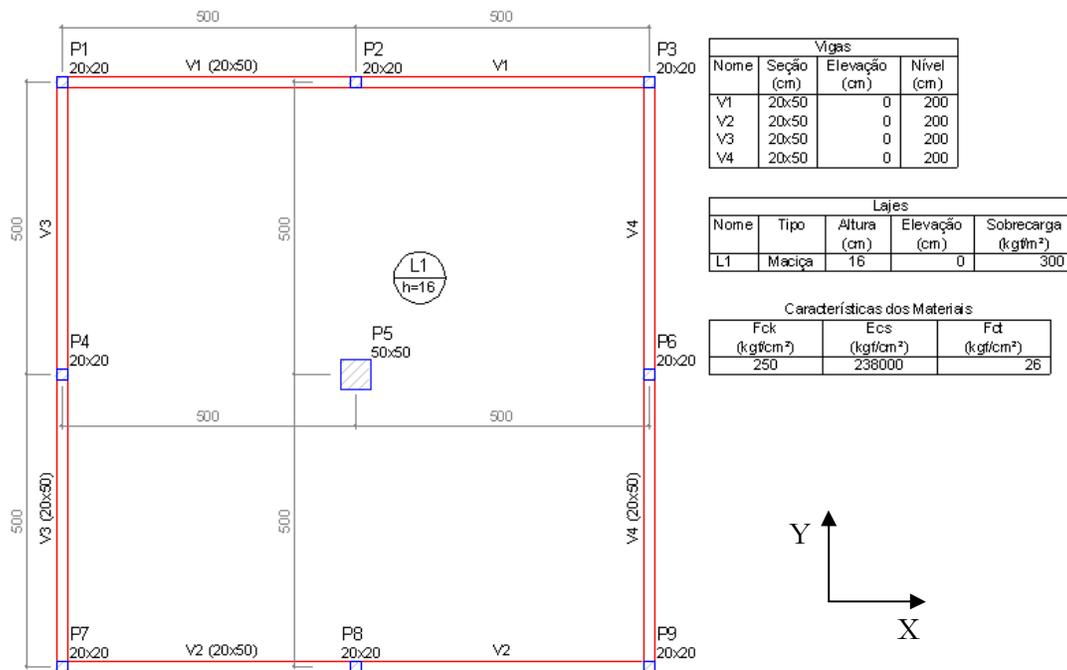


Figura 3-31 – Casos 1 e 2 — Pilar P5 posicionado simétrico em relação à laje

### 3.4.2. Caso 2 – Simetria: Núcleo rígido na região do pilar P5

O segundo caso também contempla a simetria do pilar em relação à laje, da mesma forma como apresentado na Figura 3-31. Porém, a região do pilar foi modelada com elementos rígidos, conforme definido no item 14.6.2.1 da NBR 6118:2003 e explicado no item 3.3.4 dessa dissertação.

### 3.4.3. Caso 3 - Assimetria 1 m

Nesse caso, foi alterada a posição do pilar P5, deixando-o assimétrico em um metro no eixo X (Figura 3-32). Igual ao caso 1, os elementos na região do pilar permanecem com a mesma rigidez dos demais elementos da laje.

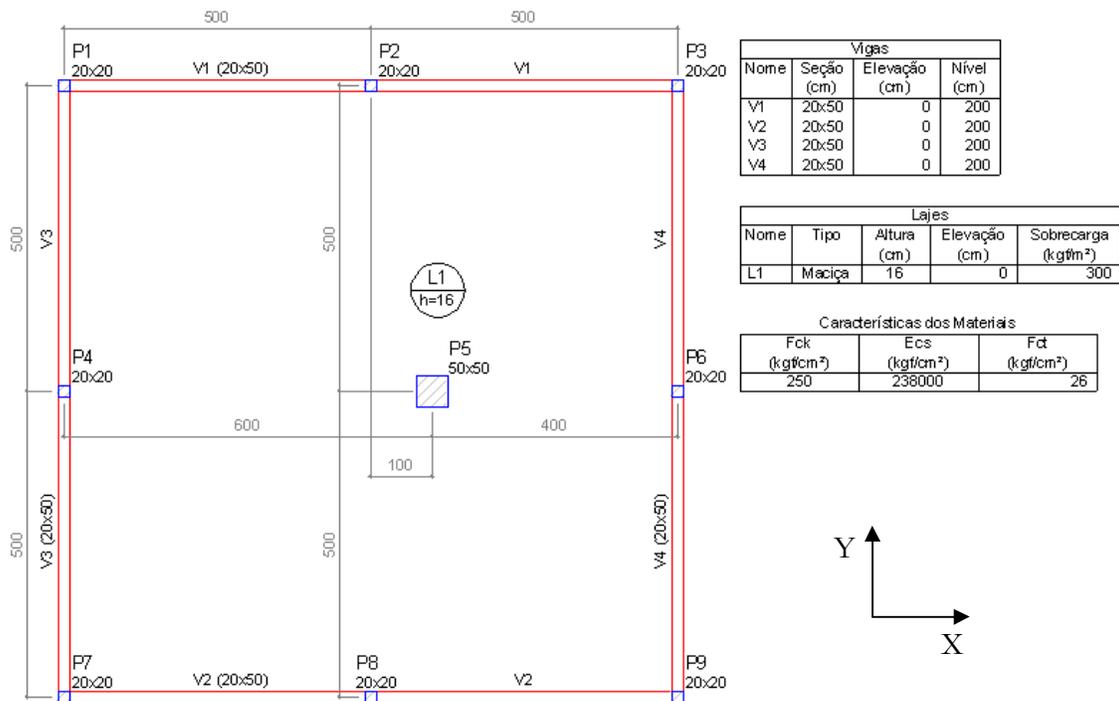


Figura 3-32 - Casos 3 e 4 — Pilar P5 assimétrico em relação à laje em 1 metro na direção X

#### 3.4.4. Caso 4 - Assimetria 1 m: Núcleo rígido na região do pilar P5

O quarto caso também contempla a assimetria do pilar em relação à laje, da mesma forma como apresentado na Figura 3-32. Porém, a região do pilar foi modelada com elementos rígidos, conforme definido no item 14.6.2.1 da NBR 6118:2003 e explicado no item 3.3.4 dessa dissertação.

#### 3.4.5. Resumo dos casos

Em todos os casos explicados anteriormente, tem-se três subcasos: o primeiro contempla a análise do pilar modelado como apoio pontual, em que se tem o problema da singularidade; o segundo contempla a análise do pilar modelado como reação distribuída na laje na área da seção transversal e o terceiro contempla a análise do pilar modelado como reação distribuída na laje na área da seção transversal projetada no centro de gravidade da laje.

A Tabela 3-1 apresenta resumidamente os casos utilizados nessa dissertação.

<i>Caso</i>	<i>Assimetria P5 Direção X</i>	<i>Núcleo rígido no pilar P5</i>	<i>Subcasos</i>
<i>1</i>	0 m	Não	1.1 – Pilar como apoio pontual 1.2 – Pilar como reação distribuída 1.3 – Pilar como reação distribuída no centro de gravidade da laje
<i>2</i>	0 m	Sim	2.1 – Pilar como apoio pontual 2.2 – Pilar como reação distribuída 2.3 – Pilar como reação distribuída no centro de gravidade da laje
<i>3</i>	1 m	Não	3.1 – Pilar como apoio pontual 3.2 – Pilar como reação distribuída 3.3 – Pilar como reação distribuída no centro de gravidade da laje
<i>4</i>	1 m	Sim	4.1 – Pilar como apoio pontual 4.2 – Pilar como reação distribuída 4.3 – Pilar como reação distribuída no centro de gravidade da laje

*Tabela 3-1 – Resumo dos casos utilizados na dissertação*

## 4. RESULTADOS OBTIDOS

Nesse capítulo foram estudados os esforços solicitantes obtidos na laje e no pilar pelo MEF e por Analogia de grelha a partir de modelos gerados no *software* SAP 2000. Para cada caso, fez-se um estudo variando a malha, analisando inicialmente o pilar central como apoio pontual (casos 1.1, 2.1, 3.1 e 4.1), posteriormente como reação distribuída na laje na área equivalente a seção transversal do pilar (casos 1.2, 2.2, 3.2 e 4.2) e por fim como reação distribuída na laje na área do pilar projetada no centro de gravidade da laje (casos 1.3, 2.3, 3.3 e 4.3). Ao final, compararam-se os resultados obtidos pelo MEF e por Analogia de grelha. Vale frisar que o processo em distribuir a reação do pilar em uma determinada área para determinar o momento fletor na laje e no pilar é iterativo, conforme descrito nos itens 3.3.1 e 3.3.2.

### **4.1. Análise dos momentos fletores na laje simétrica pelo MEF – Casos 1 e 2**

Neste item, fez-se um estudo dos momentos fletores obtidos na laje ora simulando o pilar como barra ora como reação distribuída na laje. Nesse caso, estudaram-se as malhas 12,5x12,5cm, 25x25cm, 50x50cm e 100x100cm, que correspondem a L/80, L/40, L/20 e L/10, respectivamente, sendo “L” o vão da laje na direção X.

#### **4.1.1. Caso 1.1 – Pilar como apoio pontual**

A Figura 4-1 apresenta os momentos fletores na laje na direção X para as malhas 12,5x12,5cm, 25x25cm, 50x50cm e 100x100cm.

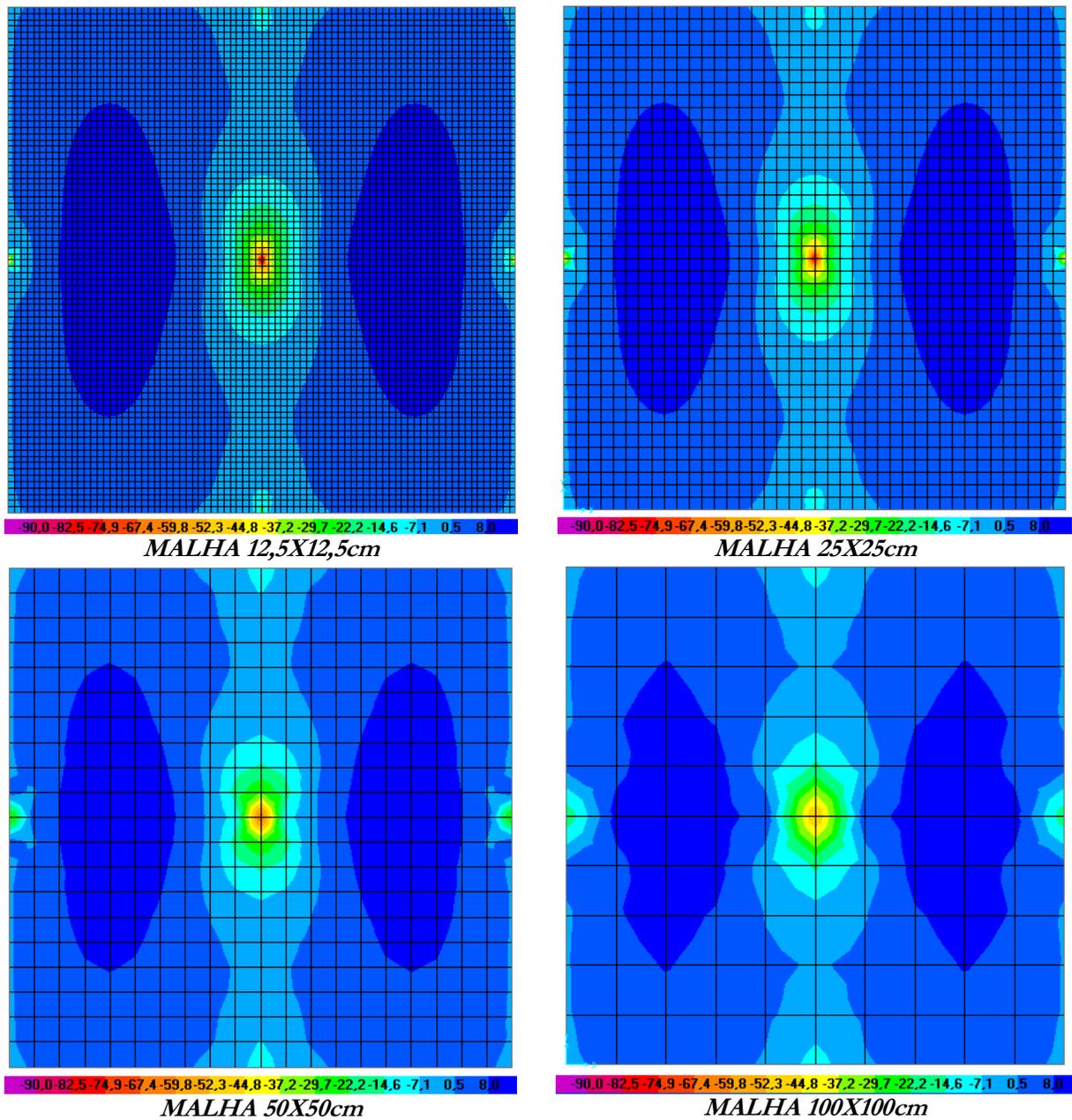


Figura 4-1 – Caso 1.1 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF

O Gráfico 4-1 apresenta o diagrama de momentos fletores da laje na direção X para cada malha, considerando o corte 1-1.

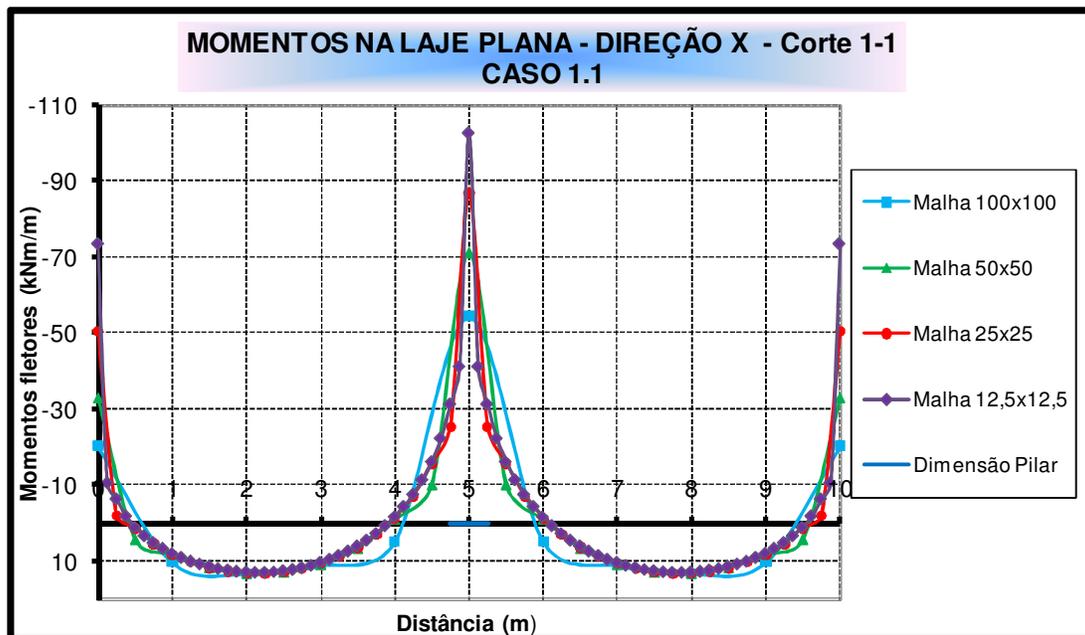


Gráfico 4-1 - Caso 1.1 - Momentos fletores da laje – MEF

Da análise do gráfico acima, tem-se que os momentos negativos da laje no ponto de aplicação do pilar tendem ao infinito e são tanto maiores quanto mais refinada for a malha. Os momentos positivos máximos são praticamente os mesmos para a malha 50x50cm, 25x25cm e 12,5x12,5cm. A malha 100x100cm apresentou um diagrama um pouco diferente dos anteriores, apesar do momento máximo positivo ser parecido. Trata-se de uma malha pouco refinada, que deve ser evitada nas aplicações em projetos. Os modelos propostos por HENNRICHS (2003) que consideram os pilares como apoio pontual forneceram diagramas de momentos fletores com comportamentos análogos aos apresentados no Gráfico 4-1.

#### 4.1.2. Caso 1.2 – Carga distribuída na seção do pilar

A Figura 4-2 apresenta os momentos fletores da laje plana na direção X para o corte 1-1. Para as malhas 100x100cm e 50x50cm, na região do pilar, foi necessário fazer transições para ajustar os pontos da malha com as coordenadas do pilar.

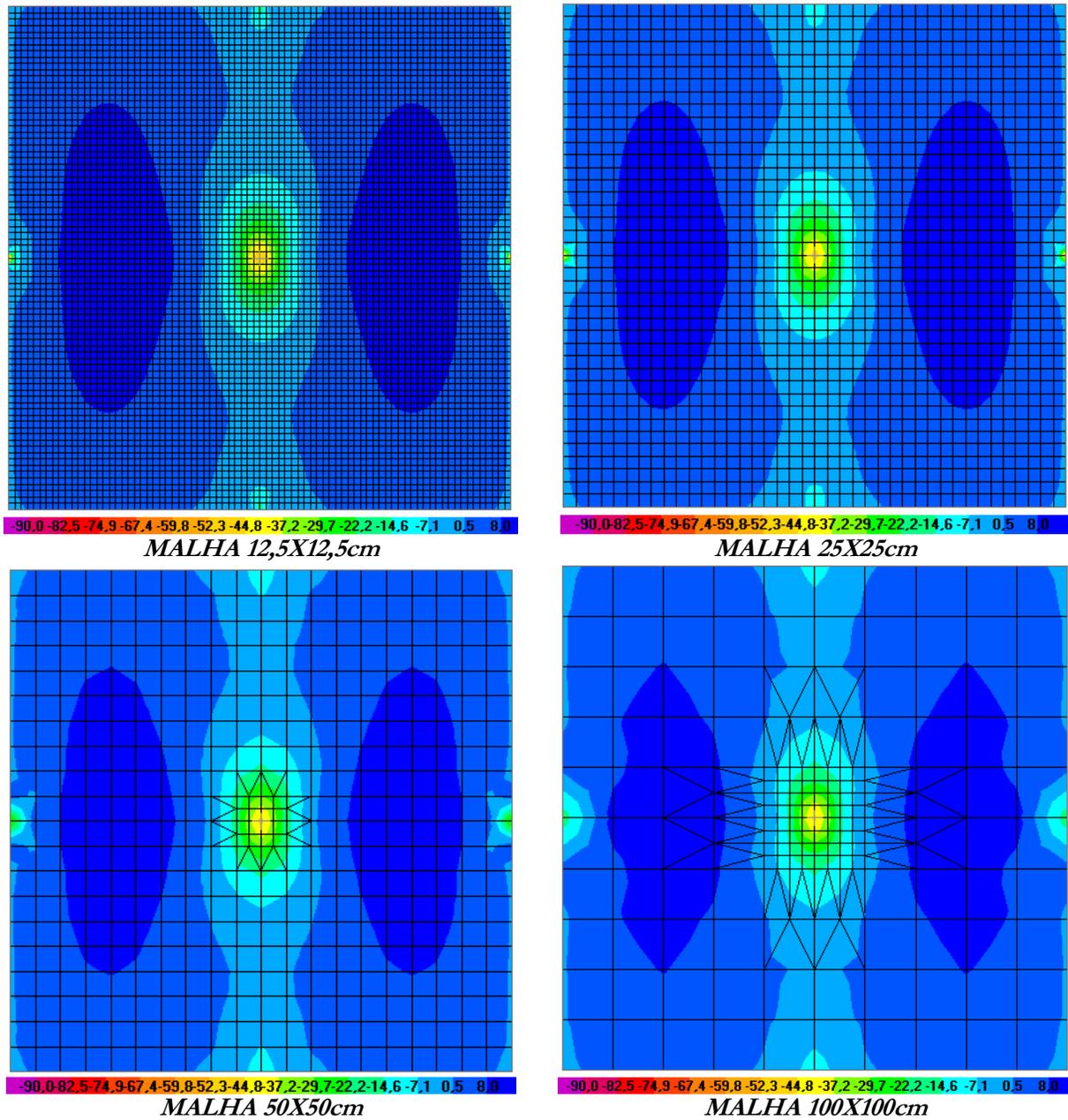


Figura 4-2 - Caso 1.2 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF

O Gráfico 4-2 apresenta o diagrama de momentos fletores da laje para cada malha, considerando o corte 1-1.

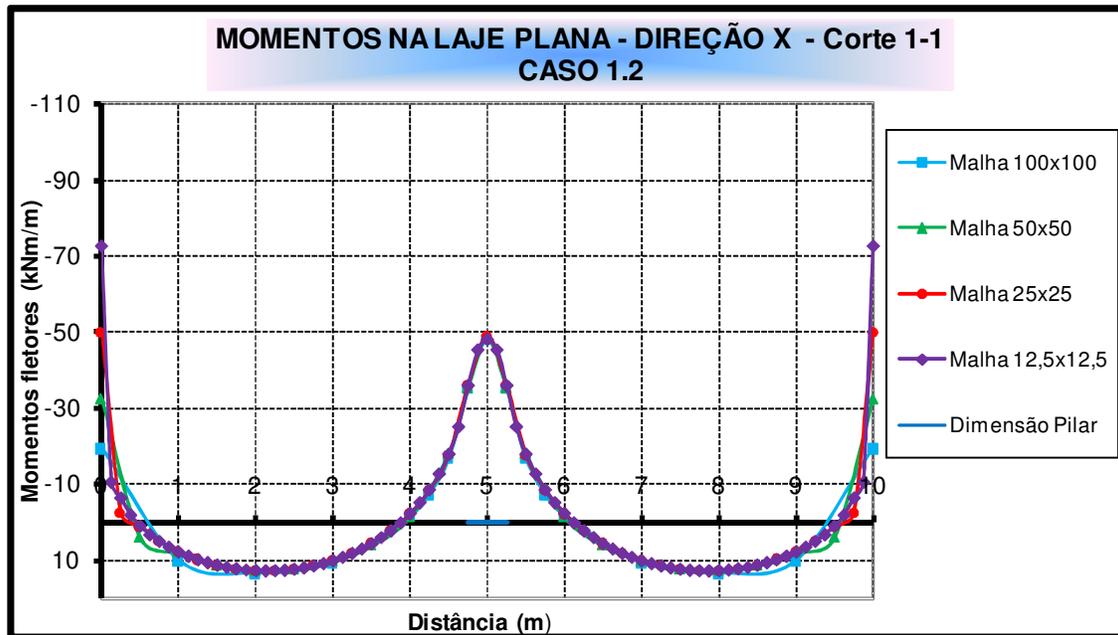


Gráfico 4-2 - Caso 1.2 - Momentos fletores da laje – MEF

Pode-se notar um comportamento similar na região do pilar P5, sendo que os momentos negativos praticamente convergiram, independente da malha utilizada. Os momentos positivos também convergiram, havendo uma pequena diferença no gráfico da malha 100x100cm, conforme já constatado anteriormente.

#### 4.1.3. Caso 1.3 – Carga distribuída na seção média da laje

A Figura 4-3 apresenta os momentos fletores da laje plana na direção X para o corte 1-1. Em todas as malhas, na região do pilar, foi necessário mover os nós para ajustá-los com a dimensão fictícia do pilar, agora com 66 cm.

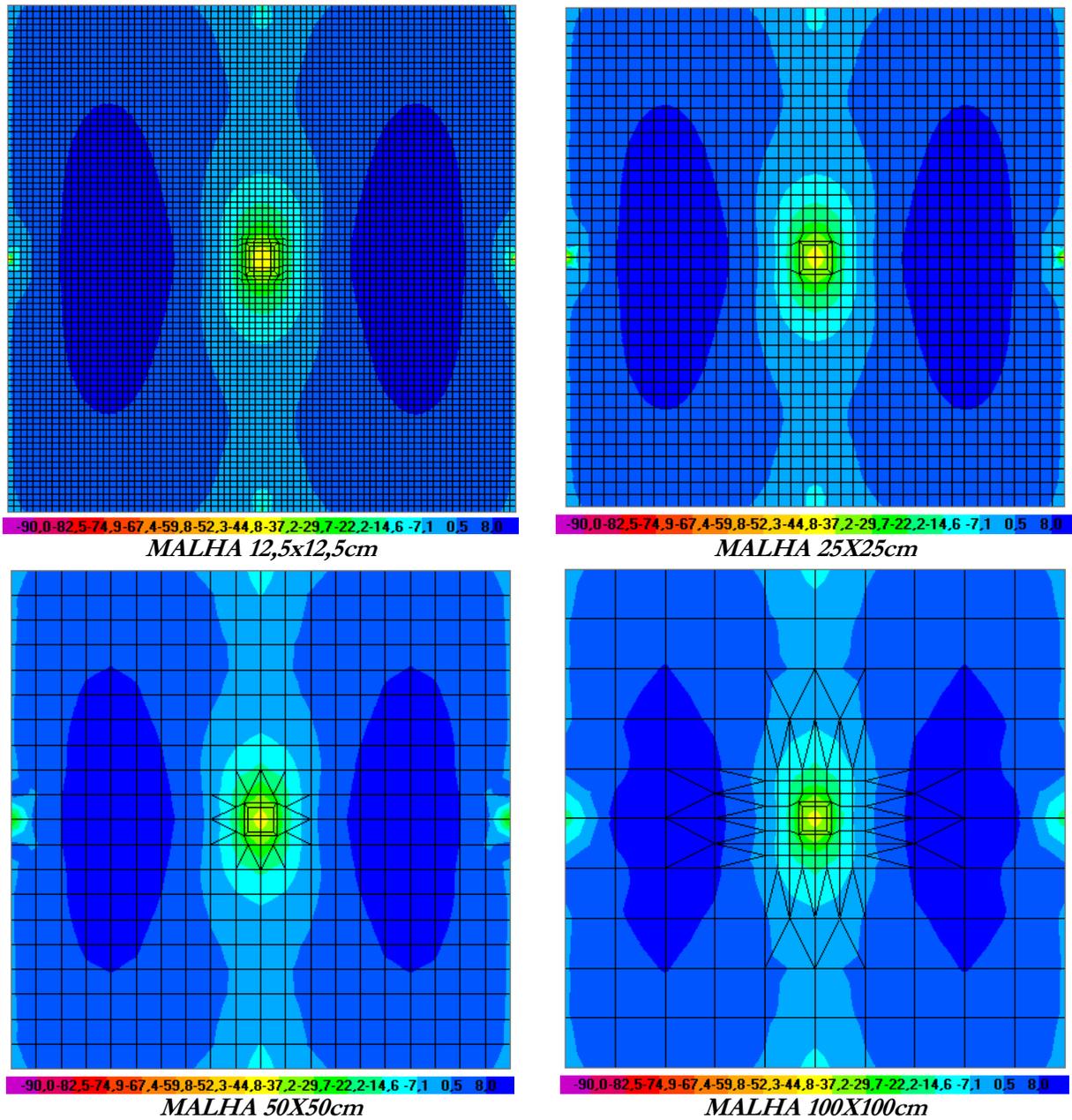


Figura 4-3 - Caso 1.3 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF

O Gráfico 4-3 apresenta o diagrama de momentos fletores da laje para cada malha, considerando o corte 1-1.

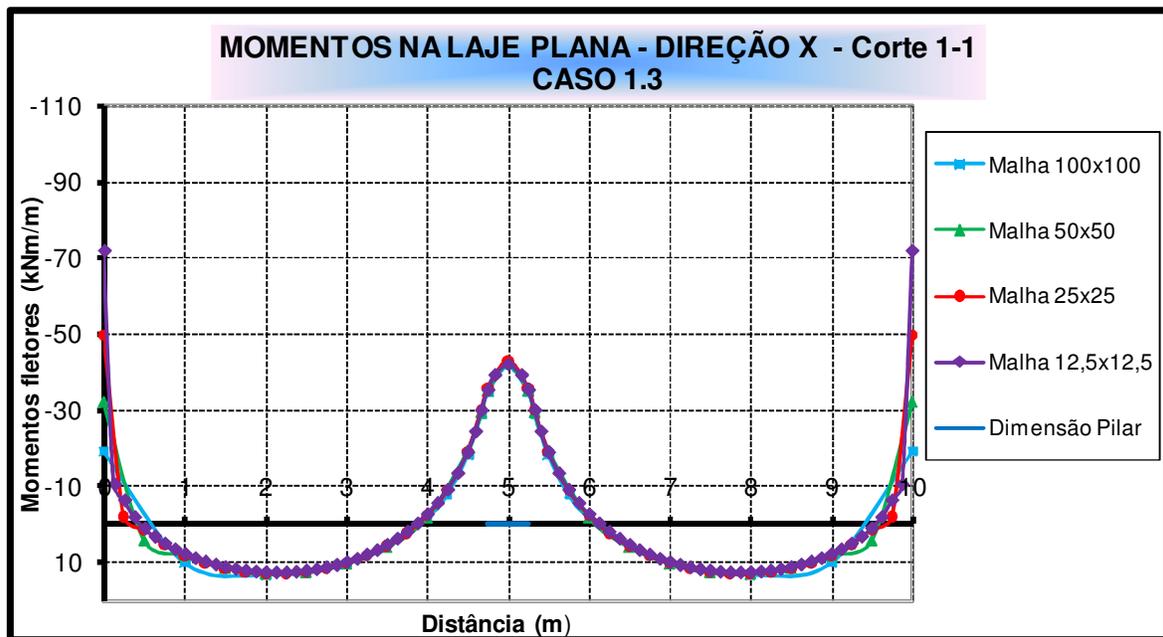


Gráfico 4-3 - Caso 1.3 - Momentos fletores da laje – MEF

Houve um comportamento parecido com o apresentado no Caso 1.2, sendo que os valores dos momentos negativos sobre o centro do pilar P5 são um pouco inferiores.

#### 4.1.4. Caso 2.1 – Pilar como apoio pontual

O Gráfico 4-4 apresenta o diagrama de momentos fletores da laje para cada malha, considerando o corte 1-1.

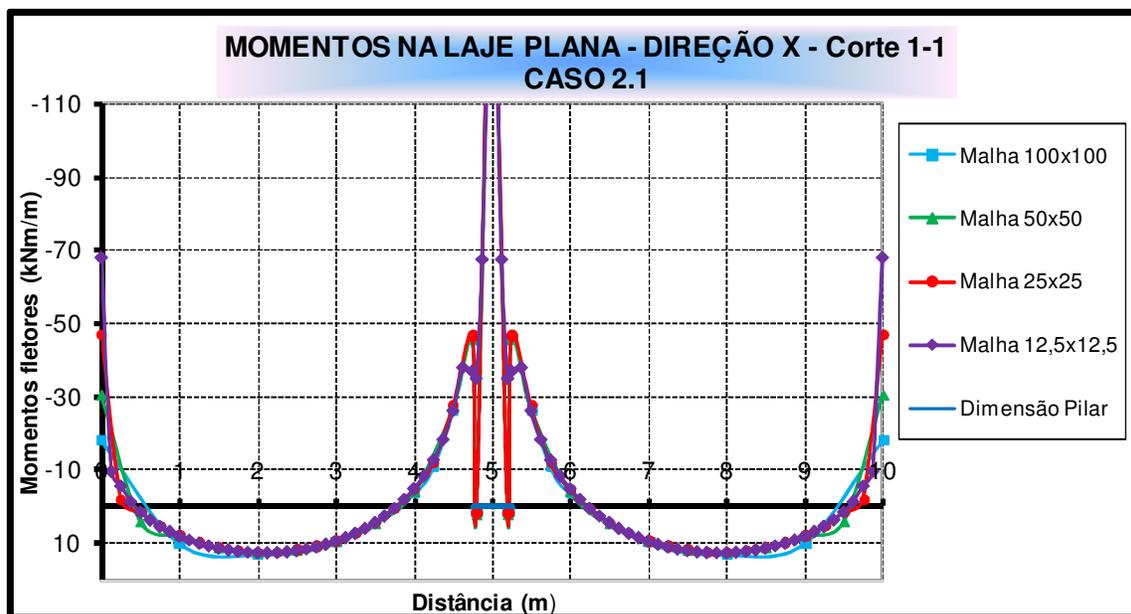


Gráfico 4-4 - Caso 2.1 - Momentos fletores da laje – MEF

Ao se considerar a região do pilar rígida, há um aumento significativo nos momentos fletores sobre o P5. Com relação aos momentos positivos, o comportamento é o mesmo do apresentado para os casos anteriores.

#### 4.1.5. Caso 2.2 - Carga distribuída na seção do pilar

O Gráfico 4-5 apresenta o diagrama de momentos fletores da laje para cada malha para o caso 2.2, considerando o corte 1-1.

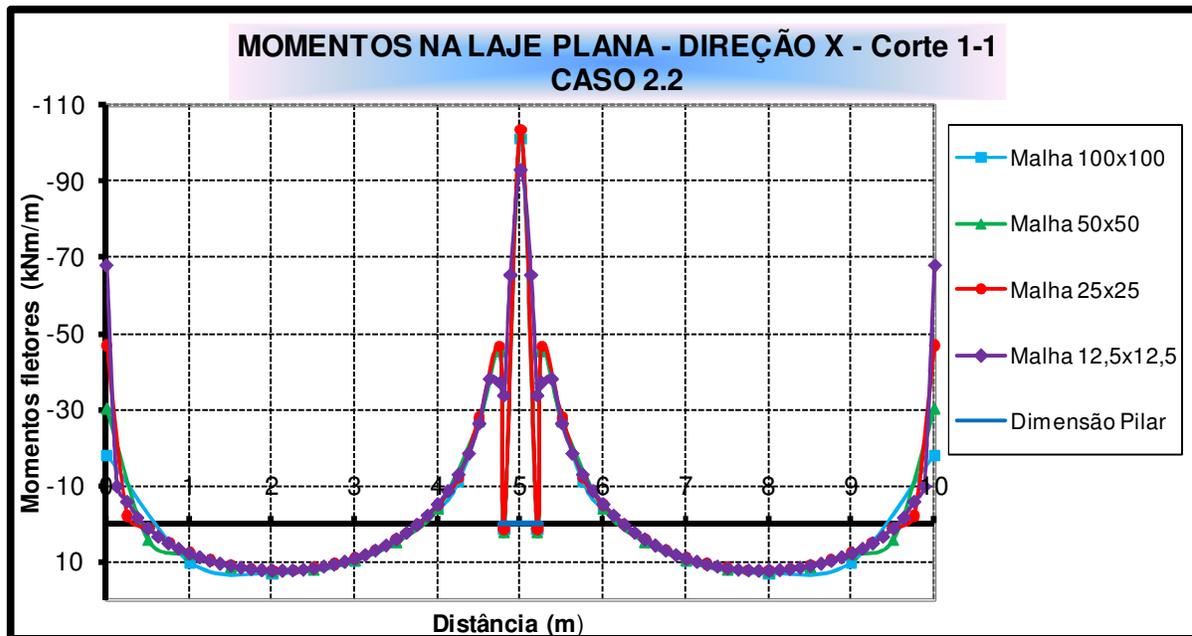


Gráfico 4-5 - Caso 2.2 - Momentos fletores da laje - MEF

Mesmo no modelo com a reação do pilar distribuída na área da seção transversal, os momentos negativos sobre o P5 permaneceram elevados, porém praticamente convergiram para um mesmo valor com o refinamento da malha.

#### 4.1.6. Caso 2.3 - Carga distribuída na seção média da laje

Nesse caso, o comportamento foi análogo ao apresentado no Caso 2.2. Porém, os momentos negativos sobre o pilar P5 são menores, devido a distribuição da reação do pilar se dar em uma área maior.

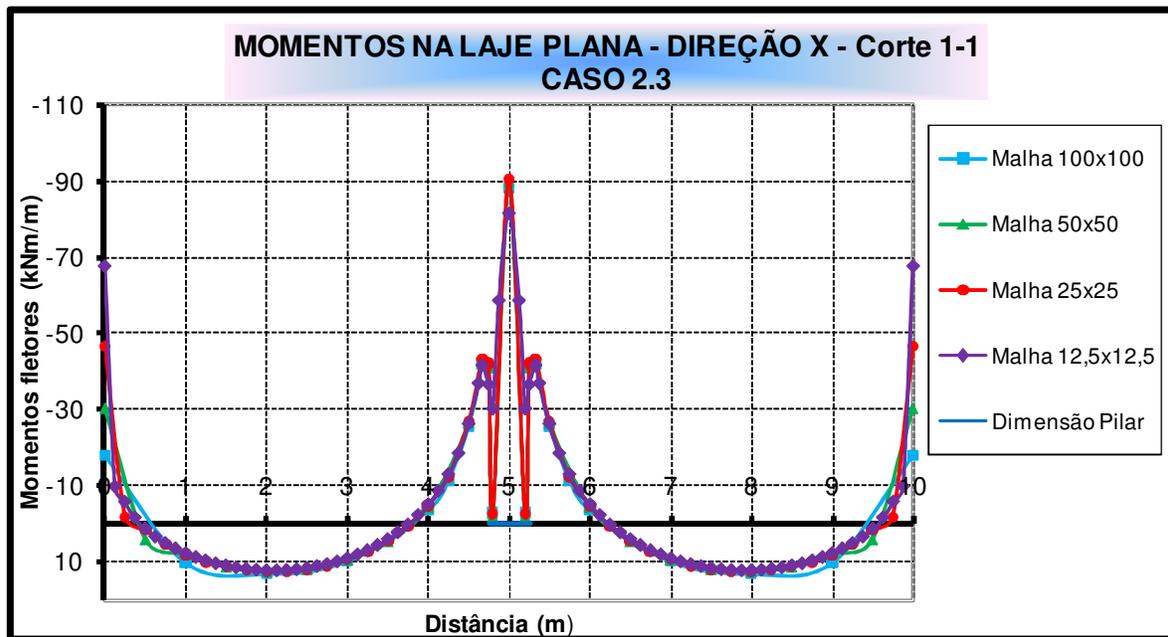


Gráfico 4-6 - Caso 2.3 - Momentos fletores da laje – MEF

Em resumo, nota-se claramente uma concentração de esforços na região do pilar P5 nos modelos em que se considera a região do pilar P5 rígida, dificultando a análise dos momentos fletores da laje nessa região. Essa situação é um pouco diferente dos casos 1.2 e 1.3, em que os momentos fletores sobre o pilar P5 convergiram para praticamente o mesmo valor, independente da malha utilizada, apresentando um traçado bem definido, sem concentrações de esforços. Os momentos positivos tiveram um bom comportamento para todos os casos analisados, exceto para a malha 100x100cm. Os valores máximos foram praticamente os mesmos, independente da região do pilar ser ou não rígida.

#### 4.1.7. Gráficos 3D

Além dos gráficos apresentados anteriormente, que traçam o diagrama de momentos fletores da laje plana considerando o corte 1-1 que passa pelo centro do pilar P5, apresenta-se a seguir alguns dos os momentos fletores da laje plana em formato 3D. Esses diagramas foram construídos com o auxílio do *software* SURFER32, que é um programa largamente utilizado em topografia, destinado ao traçado de curvas de níveis. A partir de uma entrada de dados feita no *software* Excel, o programa reconhece a coordenada X,Y,Z e traça o diagrama, sendo Z o valor do momento fletor para a coordenada X,Y.

A Figura 4-4 e Figura 4-5 apresentam os momentos fletores em formato 3D na laje plana para os casos 1.1 e 1.2 para a malha 25x25cm.

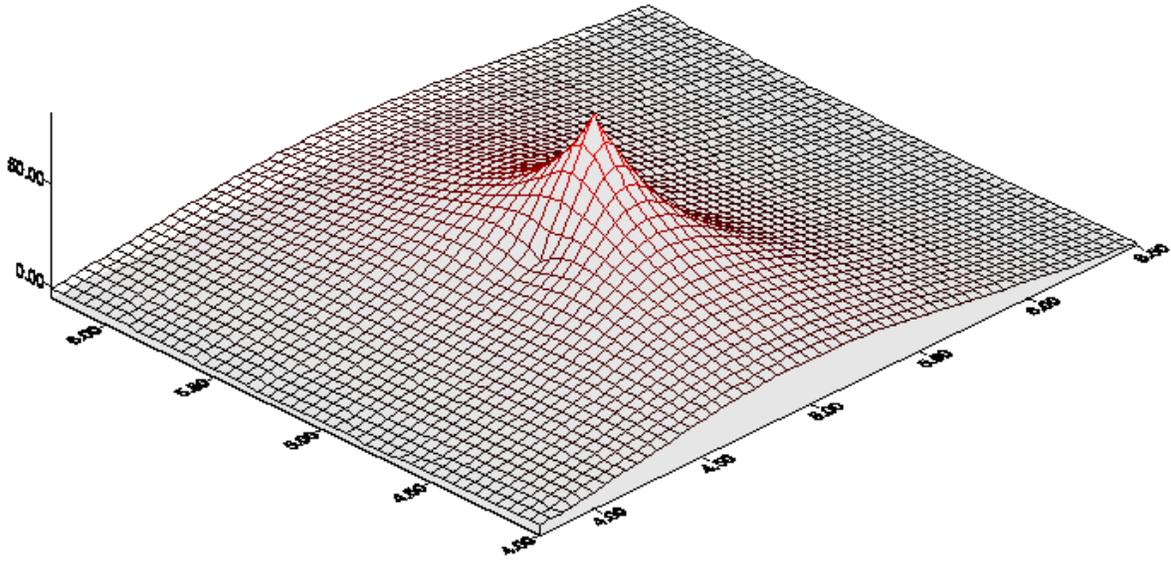


Figura 4-4 - Gráfico 3D dos momentos atuantes na laje plana – Caso 1.1

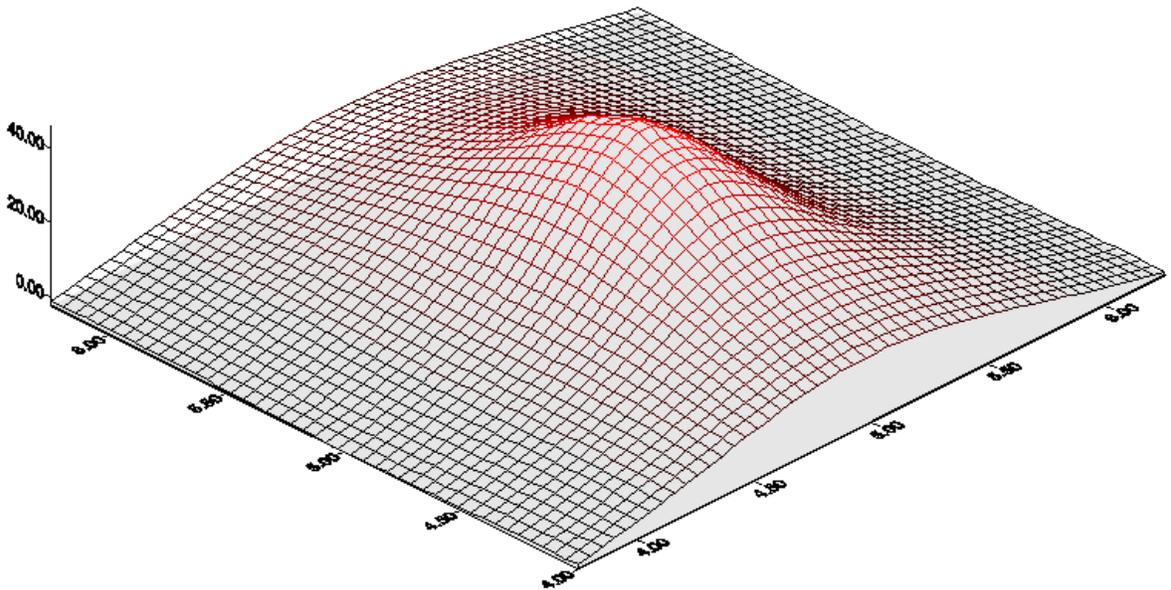


Figura 4-5 – Gráfico 3D dos momentos atuantes na laje plana – Caso 1.2

Pode-se notar o arredondamento da região sobre o pilar P5 que ocorre ao distribuir a reação do pilar como carregamento uniformemente distribuído na laje. Além disso, percebe-se que ao modelar o pilar como apoio pontual (Figura 4-4), ocorre uma perturbação no modelo, havendo um “afundamento” no diagrama 3D. Com relação a Figura 4-5, pode-se notar que o momento máximo negativo ocorre sobre o centro do pilar P5, diminuindo na medida em que se afasta dele. Dessa forma, esse diagrama 3D mostra claramente que é

possível estabelecer faixas para distribuir a armadura superior na laje, em intervalos estipulados pelo projetista estrutural.

O caso 1.3 apresentou um comportamento similar ao caso 1.2, apenas com valores diferentes, e por isso não se apresentou o diagrama 3D. Para os casos 2.1, 2.2 e 2.3, o fato de haver o trecho rígido na região do pilar P5 fez com que houvesse concentrações de esforços nessa região, dificultando a visualização 3D dos momentos fletores.

#### 4.1.8. Comparativo entre os resultados obtidos pelo MEF – Casos 1 e 2

Apresenta-se a seguir um comparativo entre os resultados obtidos pelo MEF, para os casos 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2 e 2.3, mostrando os momentos fletores na região do pilar P5 para a malha 12,5x12,5cm. A dimensão do pilar está destacada na linha de eixo das abscissas.

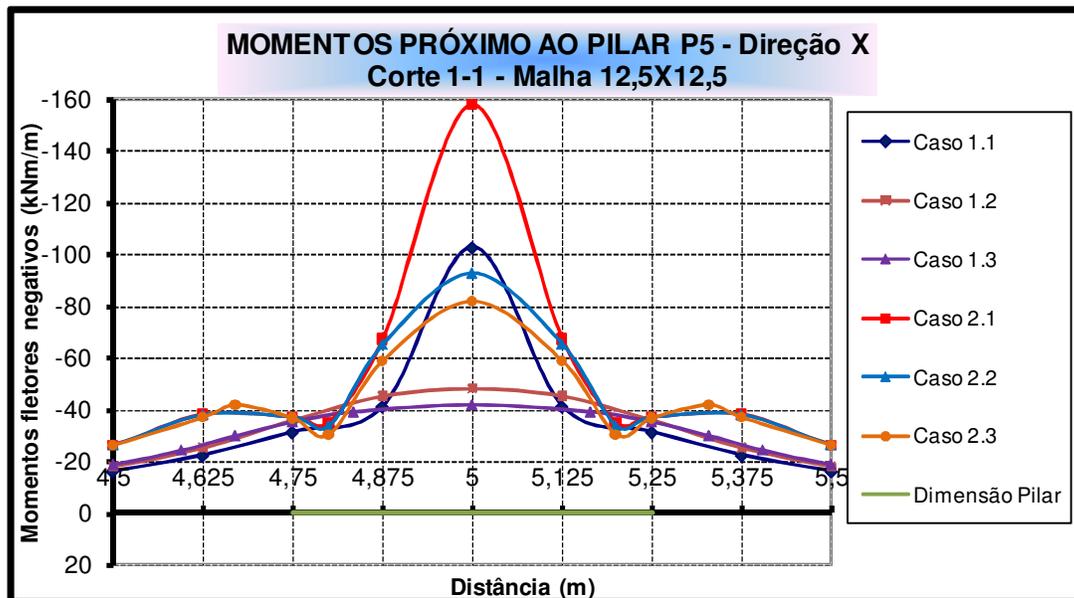


Gráfico 4-7 - Caso 1 e 2 - Comparativo momentos fletores na laje – Malha 12,5x12,5cm – MEF

Os diagramas de momentos fletores fornecidos pelos casos 1.1, 1.2 e 1.3 do Gráfico 4-7 apresentaram um comportamento análogo aos exemplos estudados por PEDROZO (2008). Os casos 1.2 e 1.3 apresentaram um arredondamento no diagrama de momento fletor sobre o pilar P5 em relação ao caso 1.1, em que o apoio é considerado pontual, pois consideram a reação do pilar como reação distribuída na laje. Já para os casos 2.2 e 2.3 o arredondamento do diagrama não é tão evidente, devido a uma concentração de esforços provocada pelo trecho rígido na região do pilar. Com isso, o momento fletor sobre o centro do pilar P5 foi bem maior que os casos 1.2 e 1.3 e parecido com o caso 1.1. No entanto,

ao analisar a face do pilar P5, nota-se que os valores são próximos, conforme mostrado no Gráfico 4-8.

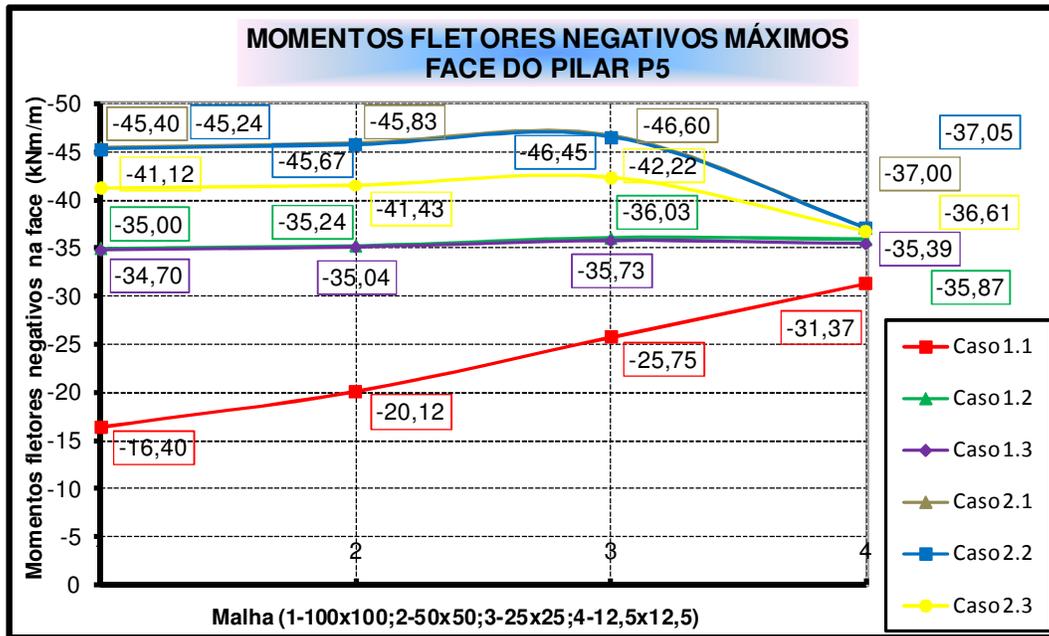


Gráfico 4-8 - Caso 1 e 2 - Comparativo momentos fletores máximos face do pilar P5 - MEF

Pode-se notar que os valores são praticamente os mesmos para os casos 1.2 e 1.3, independente da malha utilizada. No entanto, os valores apresentados nos casos 2.2 e 2.3 tiveram uma sensível diferença para a malha 12,5x12,5cm, estando bem próximos dos momentos apresentados nos casos 1.2 e 1.3. No caso 2.1, apesar de haver o problema da singularidade, os momentos na face para a malha 12,5x12,5cm foram praticamente os mesmos dos casos 1.2, 1.3, 2.2 e 2.3. Isso não ocorreu no caso 1.1, em que também se tem o problema da singularidade, porém sem núcleo rígido na região do pilar. Atenta-se para a importância de se utilizar malhas finas em análises dessa natureza, pois podem influenciar muito os resultados em alguns casos.

O Gráfico 4-9 compara os momentos fletores negativos máximos sobre o centro do pilar P5, para os casos 1.1, 1.2 e 1.3, considerando as malhas de 12,5x12,5cm, 25x25cm, 50x50cm e 100x100cm.

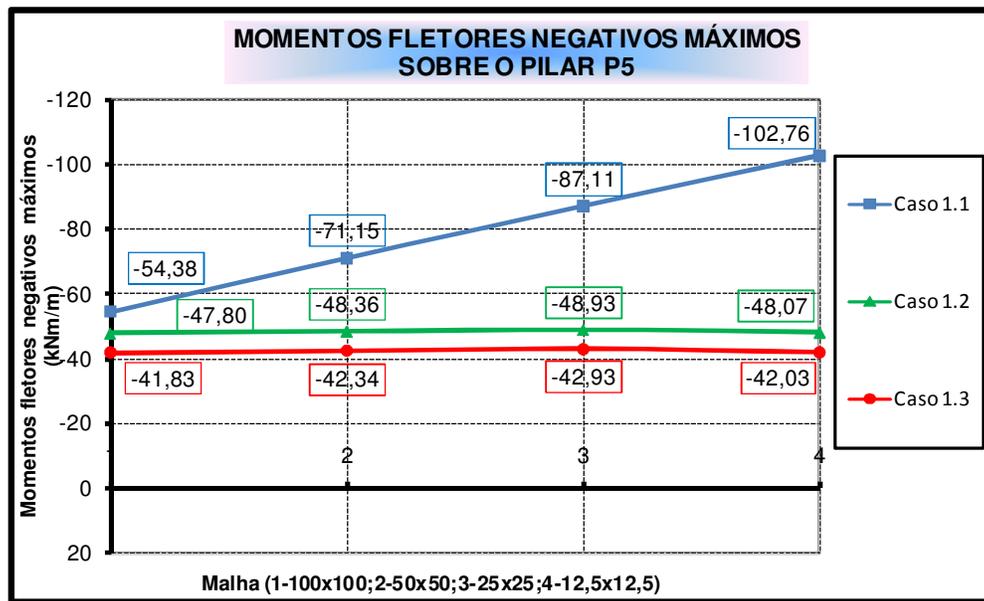


Gráfico 4-9 - Caso 1 - Comparativo momentos fletores máximos no centro do pilar P5 - MEF

O caso 1.1 evidencia claramente o problema da singularidade: os momentos negativos sobre o pilar tendem ao infinito e aumentam na medida em que se utilizam malhas mais refinadas. Nos outros dois casos, os momentos negativos permaneceram praticamente constantes, independente da malha utilizada. O momento fletor máximo no centro do pilar P5 do caso 1.3 em relação ao caso 1.2 é cerca de 12% menor, pois a área de distribuição da reação do pilar é maior. A diferença para a malha 12,5x12,5cm do caso 1.3 em relação ao caso 1.1 é de 59,10%. Vale frisar que na face os valores são praticamente iguais.

## 4.2. Análise dos momentos fletores na laje simétrica por analogia de grelha – Casos 1 e 2

Neste item, fez-se um estudo dos momentos fletores obtidos na laje ora simulando o pilar como barra ora como reação distribuída na laje. Nesse caso, estudaram-se as malhas 12,5x12,5cm, 25x25cm, 50x50cm e 100x100cm, que correspondem a  $L/80$ ,  $L/40$ ,  $L/20$  e  $L/10$ , respectivamente, sendo “L” o vão da laje na direção X.

### 4.2.1. Caso 1.1 – Pilar como apoio pontual

São apresentados os momentos fletores na laje na direção X para o corte 1-1, considerando as malhas 12,5x12,5cm, 25x25cm, 50x50cm e 100x100cm.

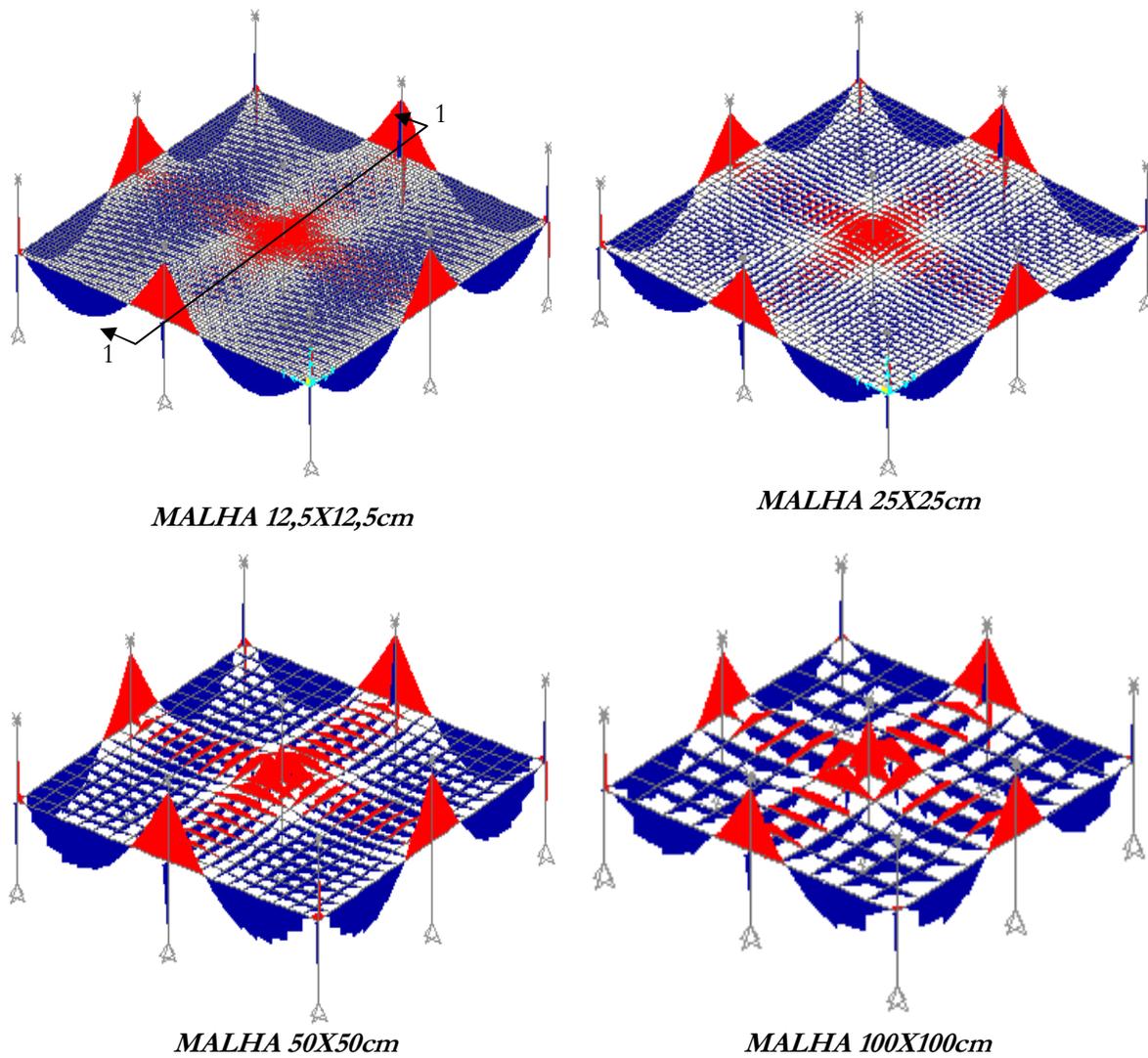


Figura 4-6 - Caso 1.1 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - AG

O Gráfico 4-10 apresenta o diagrama de momentos fletores da laje para cada malha, considerando o corte 1-1.

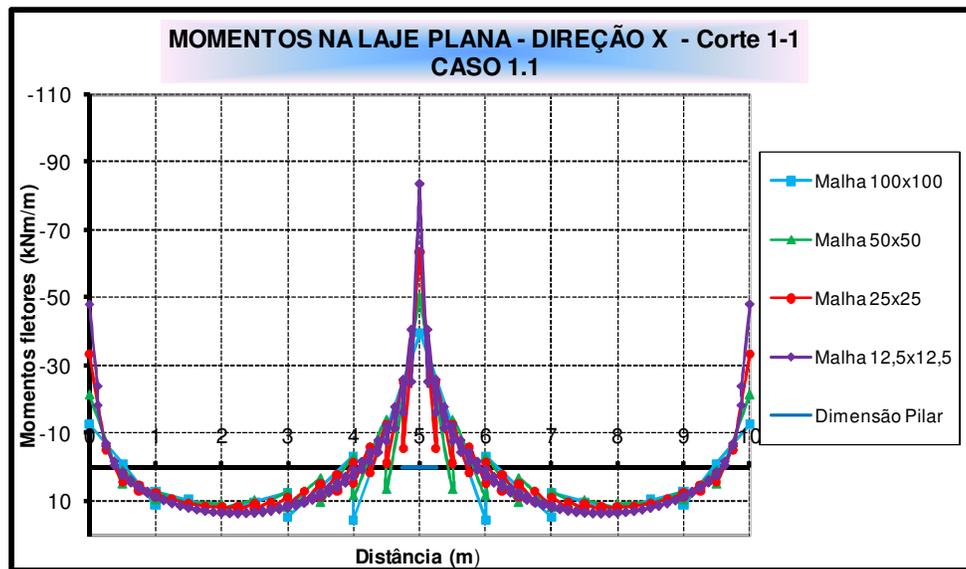
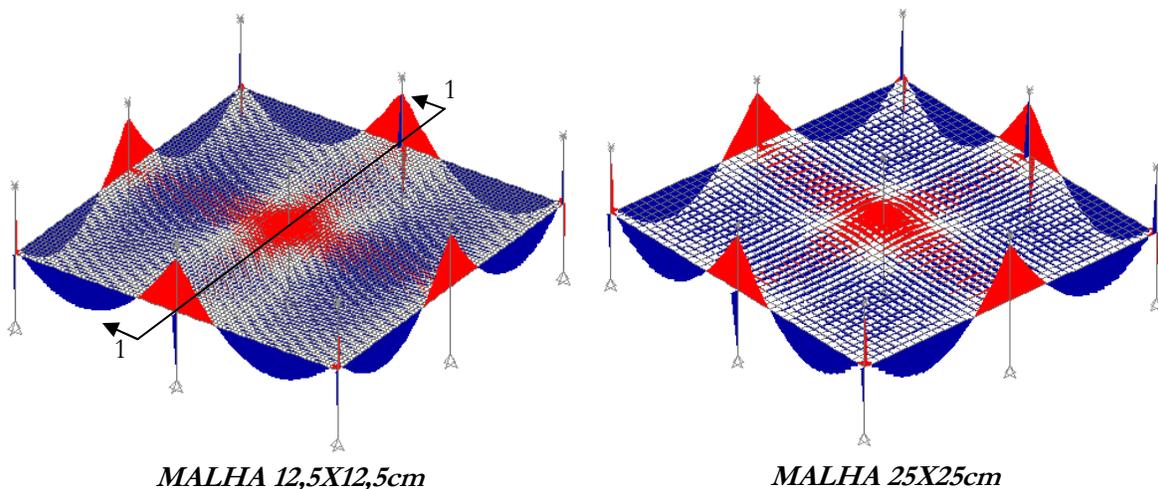


Gráfico 4-10 - Caso 1.1 - Momentos fletores da laje – AG

Da análise do gráfico, tem-se que os momentos negativos da laje no ponto de aplicação do pilar tendem ao infinito e são tanto maiores quanto mais refinada for a malha. Os momentos positivos máximos são praticamente os mesmos para as malhas 25x25cm e 12,5x12,5cm. As malhas 100x100cm e 50x50cm apresentaram diagramas um pouco diferente dos anteriores, com descontinuidades acentuadas próximas ao pilar P5. Essas descontinuidades que ocorrem no cruzamento entre barras representam a torção que um elemento ocasiona no outro, e é inerente ao Processo por Analogia de Grelha.

#### 4.2.2. Caso 1.2 - Carga distribuída na seção do pilar

São apresentados os momentos fletores na laje na direção X para as malhas 12,5x12,5cm, 25x25cm, 50x50cm e 100x100cm.



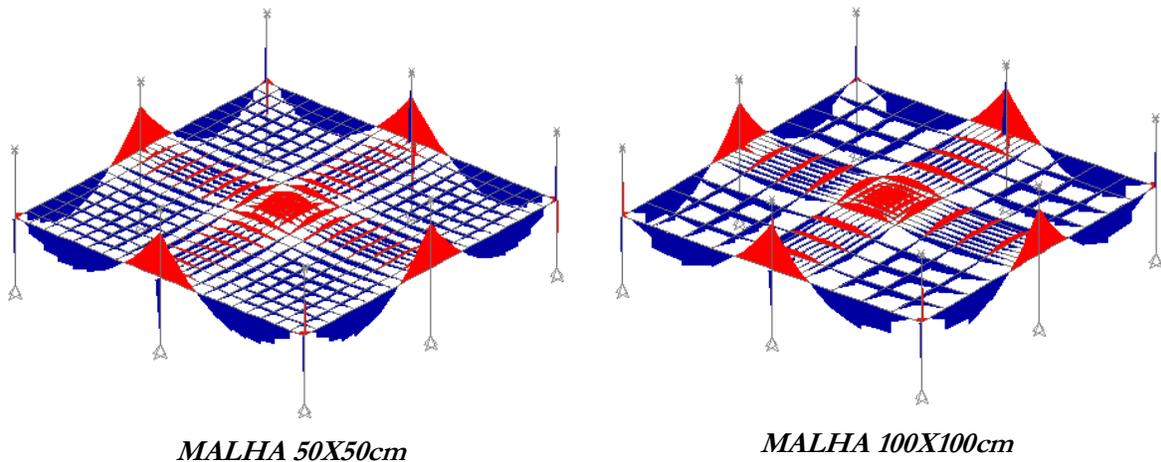


Figura 4-7 - Caso 1.2 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte 1-1 - AG

O Gráfico 4-11 apresenta o diagrama de momentos fletores da laje para cada malha para o caso 1.2, considerando o corte 1-1.

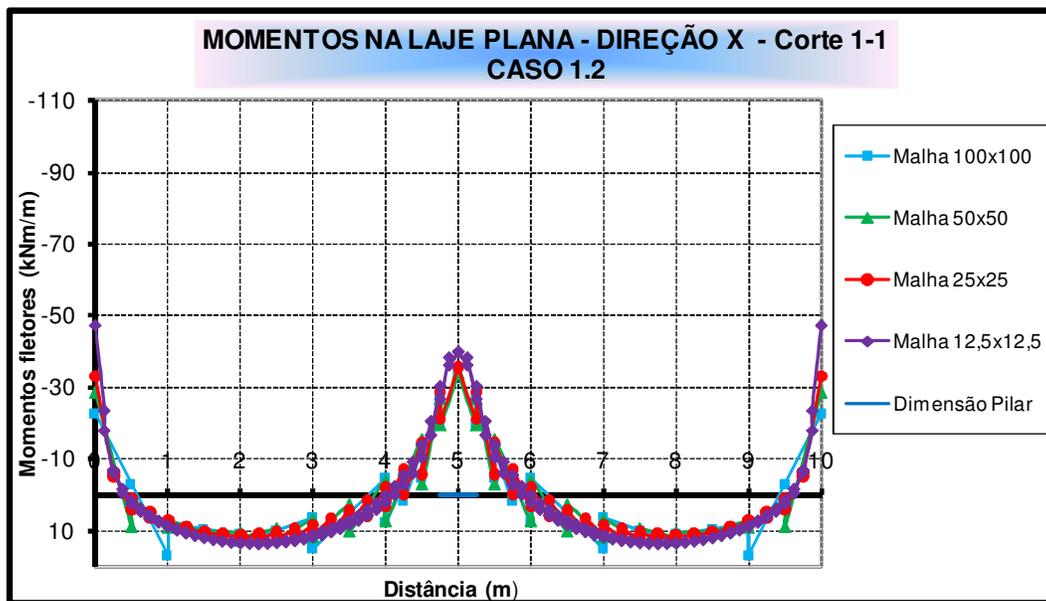


Gráfico 4-11 - Caso 1.2 - Momentos fletores da laje – AG

Pode-se notar que os momentos fletores negativos máximos sobre o pilar central convergiram para um mesmo valor, com exceção da malha 12,5x12,5cm, que apresentou um valor ligeiramente superior aos demais. Os momentos positivos também convergiram para um mesmo valor com o refinamento da malha, com exceção das malhas 50x50cm e 100x100cm, havendo descontinuidades acentuadas, agora não mais na região do pilar central.

#### 4.2.3. Caso 1.3 - Carga distribuída na seção média da laje

São apresentados os momentos fletores na laje na direção X para as malhas 12,5x12,5cm, 25x25cm, 50x50cm e 100x100cm.

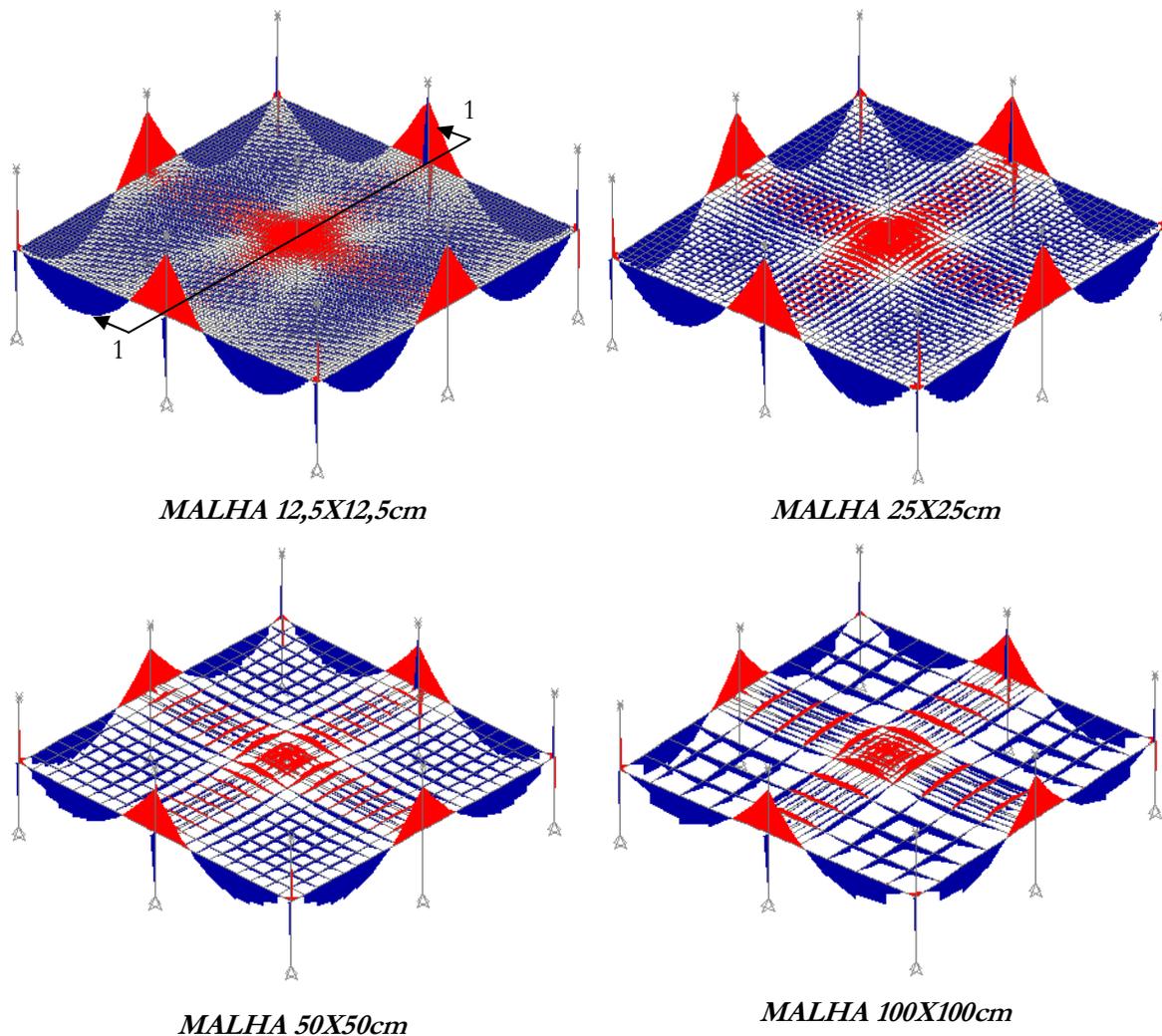


Figura 4-8 - Caso 1.3 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 – AG

O gráfico a seguir apresenta o diagrama de momentos fletores da laje para cada malha, considerando o corte 1-1.

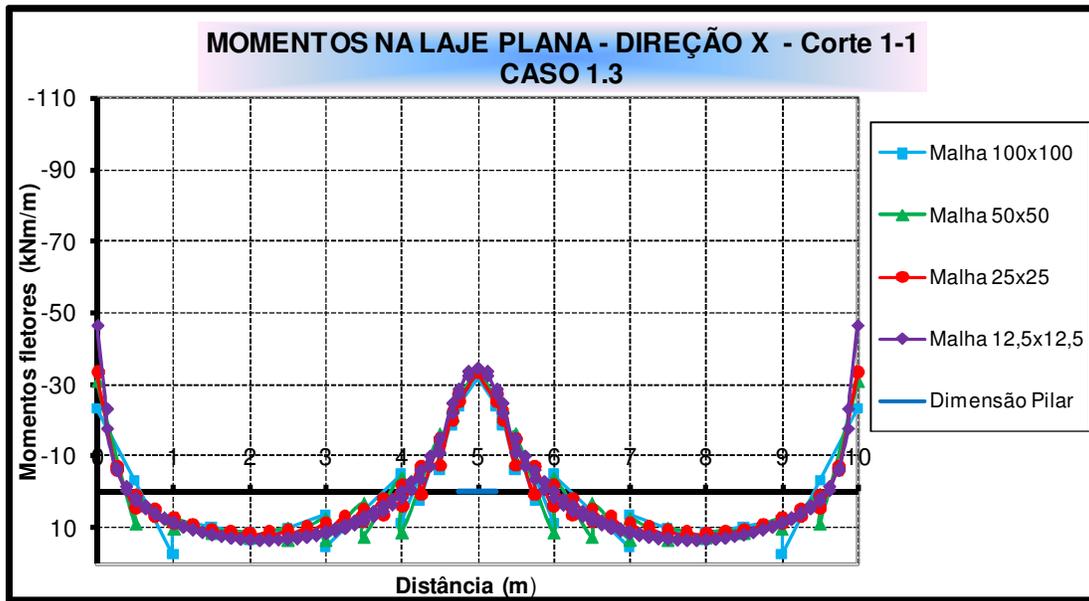


Gráfico 4-12 - Caso 1.3 - Momentos fletores da laje – AG

Nesse caso, os momentos negativos sobre o pilar central ficaram bem próximos para todas as malhas. Com relação aos momentos positivos, as diferenças ocorreram novamente para as malhas 50x50cm e 100x100cm.

#### 4.2.4. Caso 2.1 – Pilar como apoio pontual

O Gráfico 4-13 apresenta o diagrama de momentos fletores da laje para cada malha para o caso 2.1, considerando o corte 1-1.

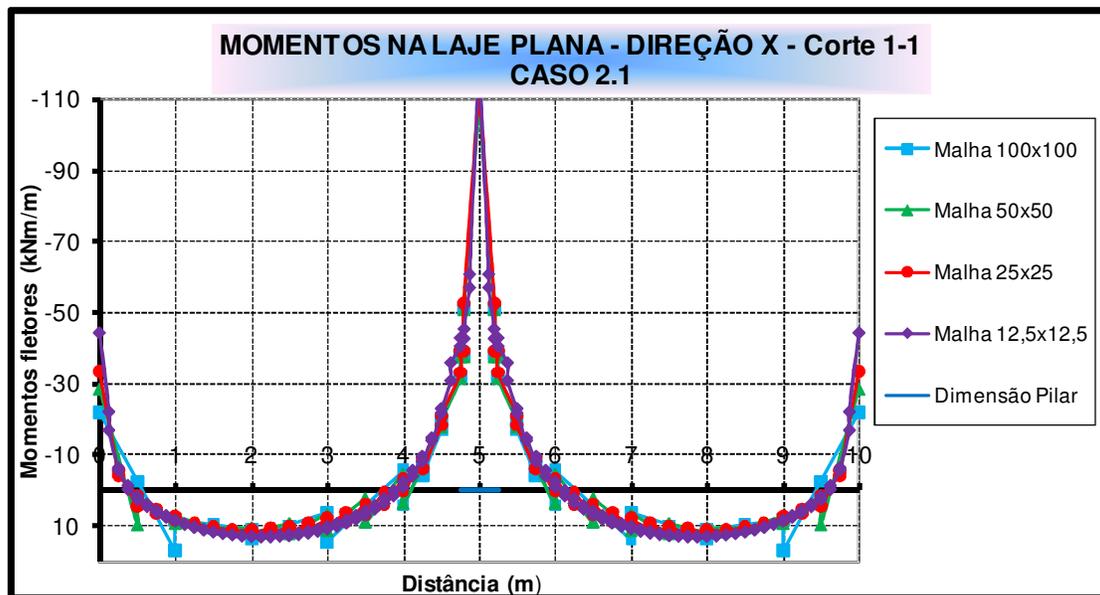


Gráfico 4-13 - Caso 2.1 - Momentos fletores da laje – AG

Ao se considerar a região do pilar rígida, há um aumento significativo nos momentos fletores sobre o P5. Com relação aos momentos positivos, o comportamento é o mesmo do apresentado para os casos anteriores.

#### 4.2.5. Caso 2.2 - Carga distribuída na seção do pilar

O Gráfico 4-14 apresenta o diagrama de momentos fletores da laje para cada malha para o caso 2.2, considerando o corte 1-1.

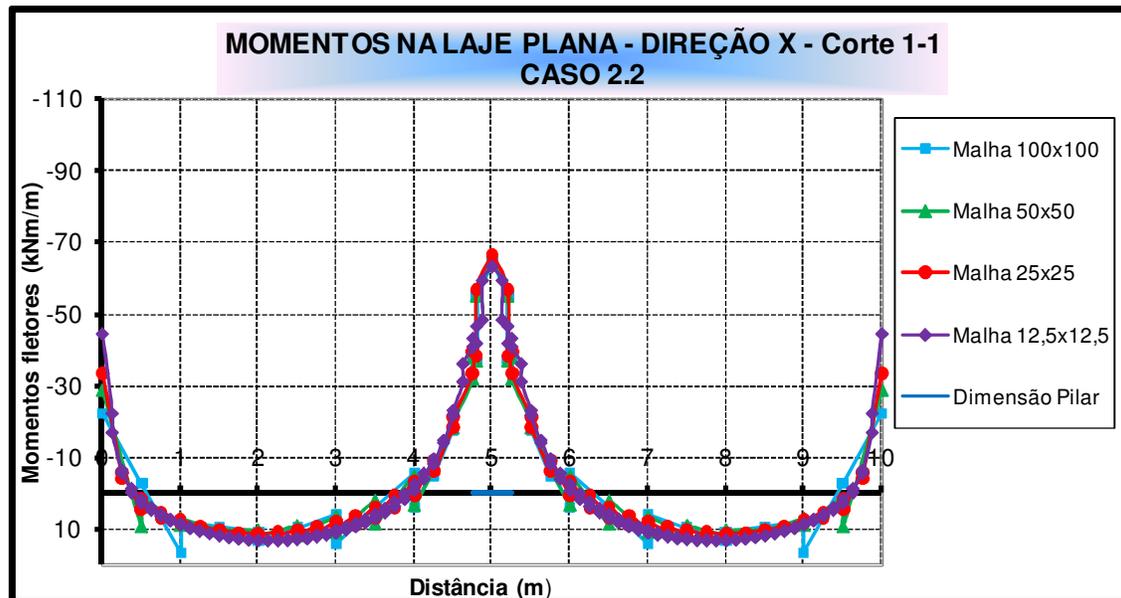


Gráfico 4-14 - Caso 2.2 - Momentos fletores da laje – AG

Mesmo no modelo com a reação do pilar distribuída na área da seção transversal, os momentos negativos sobre o P5 permaneceram elevados, porém praticamente convergiram para um mesmo valor com o refinamento da malha. Os momentos positivos tiveram comportamento similar aos casos anteriores.

#### 4.2.6. Caso 2.3 - Carga distribuída na seção média da laje

Nesse caso, o comportamento foi análogo ao apresentado no caso 2.2. Porém, os momentos negativos sobre o centro do pilar P5 são menores, devido a distribuição da reação do pilar se dar em uma área maior. Esse fato também ocorreu ao comparar os casos 1.3 em relação ao 1.2.

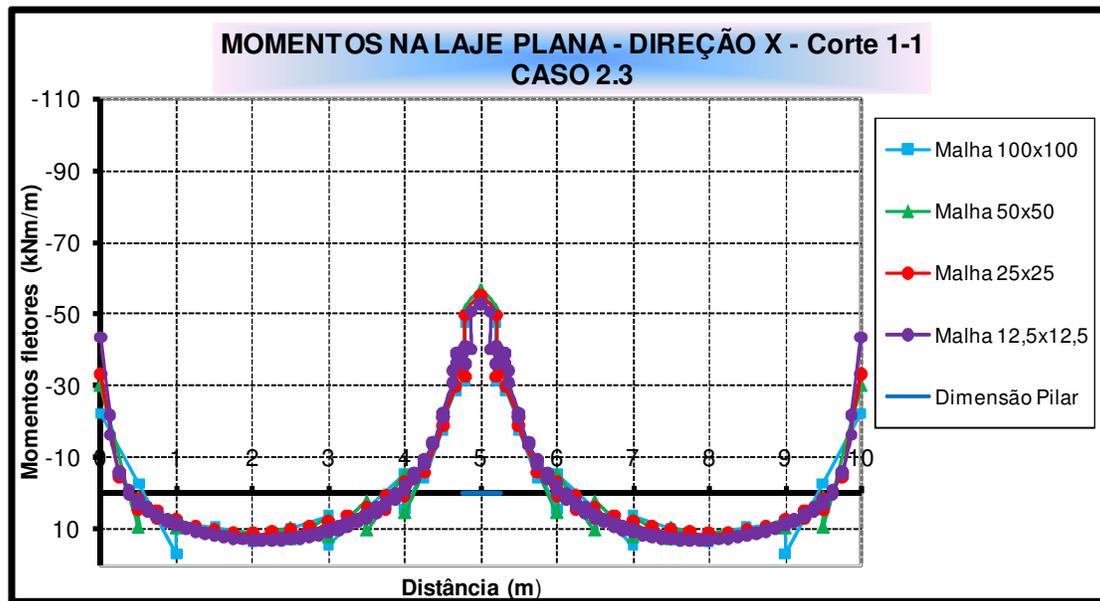


Gráfico 4-15 - Caso 2.3 - Momentos fletores da laje – AG

Assim como ocorrido na análise pelo MEF, nota-se aqui também uma concentração de esforços na região do pilar P5 nos modelos em que se considera a região do pilar P5 rígida. Nos casos 1.2 e 1.3, os momentos fletores sobre o pilar P5 convergiram para praticamente o mesmo valor, apresentando um traçado bem definido, sem concentrações de esforços. Os momentos positivos tiveram um bom comportamento para todos os casos analisados, exceto para as malhas 50x50cm e 100x100cm, que apresentaram descontinuidades elevadas no diagrama. Os valores máximos foram praticamente os mesmos, independente da região do pilar ser ou não rígida.

#### 4.2.7. Comparativo entre os resultados obtidos por Analogia de Grelha – Casos 1 e 2

Apresenta-se a seguir um comparativo entre os resultados obtidos pelo MEF, para os casos 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2 e 2.3, mostrando os momentos fletores na região do pilar P5 para a malha 12,5x12,5cm. A dimensão do pilar está destacada na linha de eixo das abscissas.

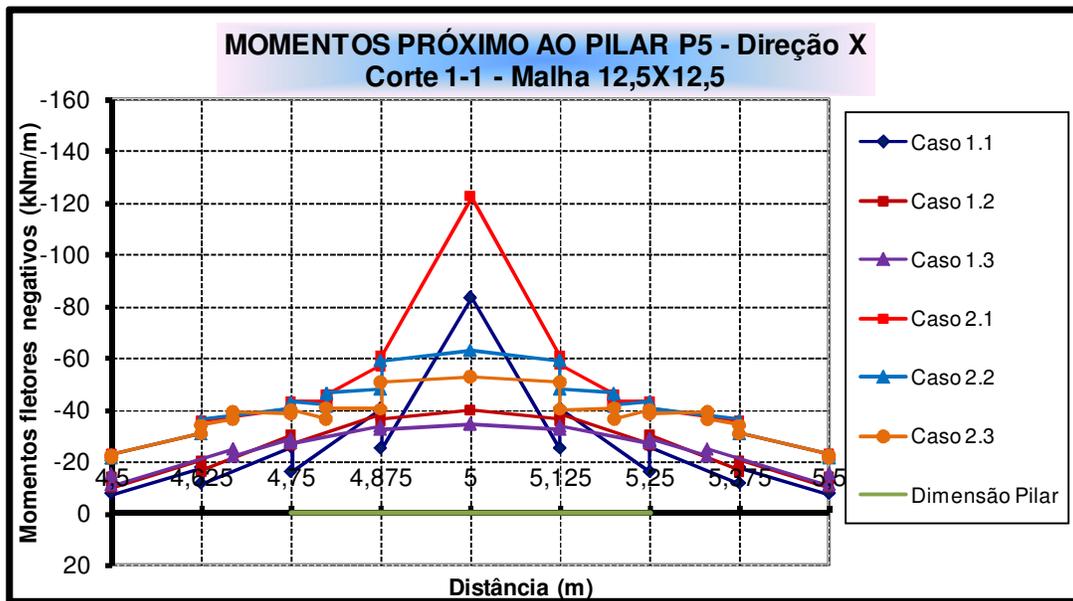


Gráfico 4-16 - Casos 1 e 2 - Comparativo momentos fletores na laje – Malha 12,5x12,5cm – AG

Os casos 1.2 e 1.3 apresentaram um diagrama de momento fletor sobre o pilar P5 bem interessante, não havendo um “pico” como ocorrido no caso 1.1, em que o apoio é considerado pontual, pois consideram a reação do pilar como reação distribuída na laje. Para os casos 2.2 e 2.3 os valores, apesar de menores que o caso 2.1, continuam grandes se comparados com os casos 1.2 e 1.3 e parecido com o caso 1.1. Os momentos na face do pilar também são diferentes ao se comparar esses casos. Porém, há similaridade dos momentos na face do pilar para os casos 2.2 e 2.3 em relação aos momentos sobre o centro do pilar P5 do caso 1.2. Para as demais malhas analisadas, o comportamento é análogo ao da malha 12,5x12,5cm.

O Gráfico 4-17 mostra as diferenças encontradas em todas as malhas nos momentos fletores máximos na face do pilar P5 dos casos 1.1, 1.2 e 1.3 comparados com os casos 2.1, 2.2 e 2.3. O percentual médio de diferença gira em torno de 25%, sendo os valores do caso 2 superiores.

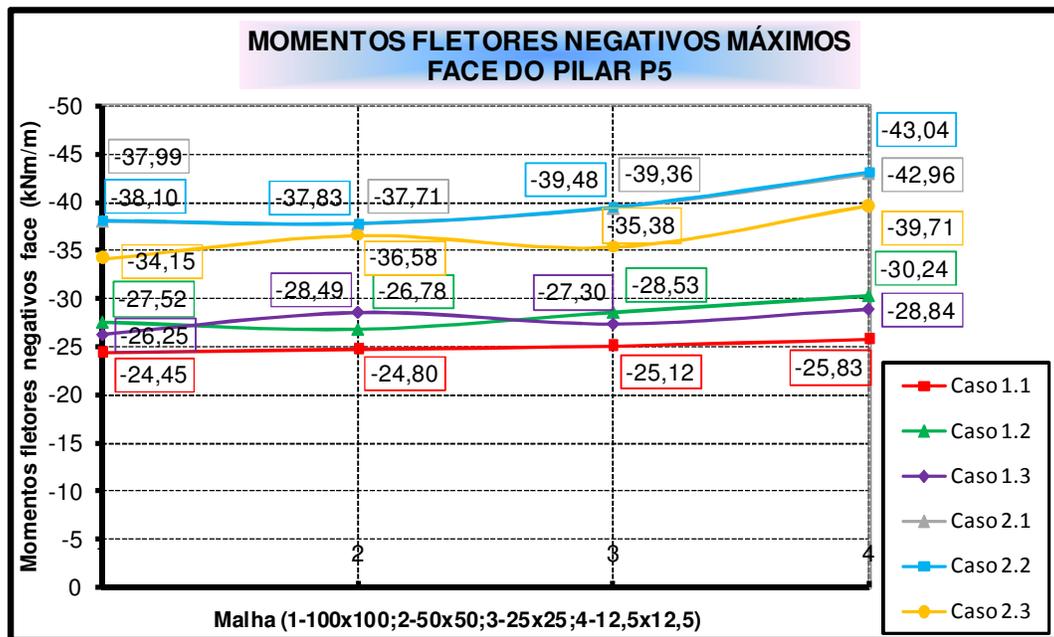


Gráfico 4-17 - Casos 1 e 2 - Comparativo momentos fletores máximos face do pilar P5 - AG

Devido ao fato do diagrama de momento fletor na análise por Analogia de Grelha ser descontínuo no cruzamento das barras, adotou-se o momento da face como sendo o valor superior, conforme mostrado na Figura 4-9.

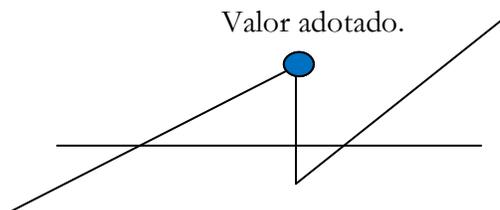


Figura 4-9 – Valor adotado para o momento na face do pilar P5 na análise por Analogia de Grelha

O Gráfico 4-18 apresenta os momentos fletores negativos máximos sobre o centro do pilar P5. Além do problema da singularidade apresentado no caso 1.1, nota-se que a maior diferença entre os casos 1.2 e 1.3 ocorre para a malha 12,5x12,5cm, apesar de serem pouco sensíveis a malha.

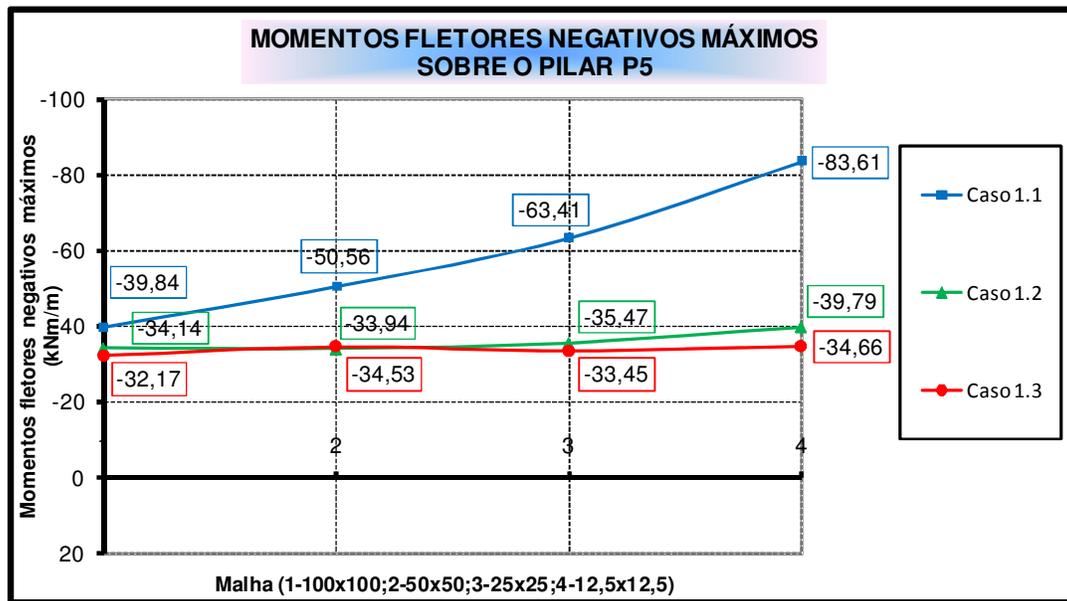


Gráfico 4-18 - Caso 1 - Comparativo momentos fletores máximos no centro do pilar P5 - AG

### 4.3. Comparativo dos momentos fletores na laje simétrica - MEF e Analogia de Grelha – Casos 1 e 2

Apresenta-se a seguir um comparativo entre os momentos fletores obtidos na laje na região do pilar P5 pela análise do MEF e Analogia de Grelha, considerando a malha 12,5x12,5cm.

O Gráfico 4-19 apresenta os valores do comparativo explicados no parágrafo anterior para o Caso 1.

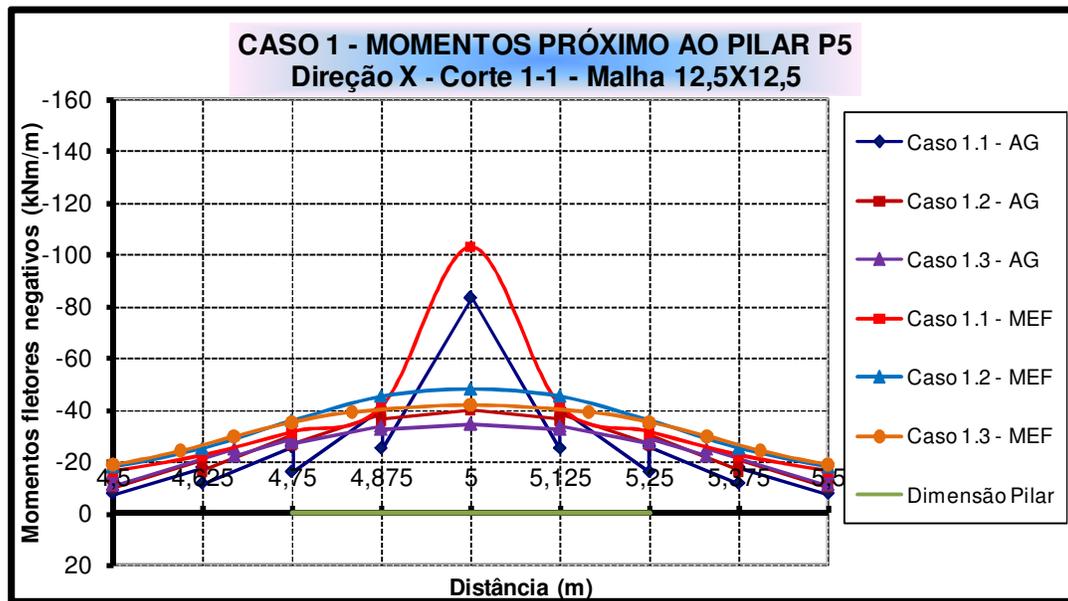


Gráfico 4-19 - Caso 1: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores próximos ao pilar P5 - Malha 12,5x12,5cm

Nas tabelas que são apresentadas a seguir, a diferença, expressa em porcentagem, significa o percentual de redução do menor valor em relação ao maior.

A Tabela 4-1 apresenta as diferenças encontradas entre as análises pelo MEF e Analogia de Grelha para os momentos fletores negativos máximos para o centro do pilar P5, considerando os casos 1.1, 1.2 e 1.3.

<b>CASO 1 - Momentos Fletores Negativos Máximos - Centro do pilar P5</b>			
<b>MALHA 12,5X12,5cm</b>			
<b>Caso</b>	<b>MEF (kNm/m)</b>	<b>AG (kNm/m)</b>	<b>Diferença (%)</b>
<b>Caso 1.1</b>	-102,76	-83,61	18,63
<b>Caso 1.2</b>	-48,07	-39,78	17,24
<b>Caso 1.3</b>	-42,03	-34,66	17,53
<b>Diferença (%)</b>			
<b>Caso 1.1x1.2/1.2x1.3</b>	53,22 / 12,56	52,42 / 12,87	

Tabela 4-1 – Caso 1: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos no centro do pilar P5 - Malha 12,5x12,5cm

Pode-se notar que a análise por Analogia de Grelha apresentou valores inferiores aos obtidos pelo MEF, da ordem de 17%. Para as demais malhas as reduções também se mantiveram, porém com percentuais um pouco maiores. Fazendo um comparativo entre o

caso 1, pode-se perceber a sensível redução ocorrida entre os casos 1.1 e 1.2, tanto na análise pelo MEF com por Analogia de Grelha. O fato de eliminar a singularidade fez com que se reduzisse em mais de 50% o momento fletor negativo na laje no centro do pilar P5. Entre os casos 1.2 e 1.3, a redução foi de aproximadamente 12%.

A Tabela 4-2 apresenta as diferenças encontradas entre as análises pelo MEF e Analogia de Grelha para os momentos fletores negativos máximos na face do pilar P5, considerando os casos 1.1, 1.2 e 1.3.

<i>CASO 1 - Momentos Fletores Negativos Máximos – Face pilar P5</i>			
<i>MALHA 12,5X12,5cm</i>			
<i>Caso</i>	<i>MEF</i> <i>(kNm/m)</i>	<i>Analogia de Grelha</i> <i>(kNm/m)</i>	<i>Diferença</i> <i>(%)</i>
<i>Caso 1.1</i>	-31,37	-25,83	17,66
<i>Caso 1.2</i>	-35,87	-30,24	15,69
<i>Caso 1.3</i>	-35,39	-28,84	18,51
<i>Diferença (%)</i>			
<i>Caso 1.1x1.2/1.2x1.3</i>	12,54 / 1,34	14,58 / 4,63	

*Tabela 4-2 - Caso 2: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos no centro do pilar P5 - Malha 12,5x12,5cm*

Os momentos na face do pilar P5 também foram inferiores aos obtidos por Analogia de Grelha em relação ao MEF, da ordem de 17%. Para as demais malhas as reduções também se mantiveram e com percentuais praticamente iguais. Fazendo um comparativo entre o caso 1, há uma diferença de aproximadamente 12% entre os casos 1.1 e 1.2 para ambas as análises. Ao comparar os casos 1.2 e 1.3, a análise pelo MEF apresentou valores praticamente iguais. Porém na análise por Analogia de Grelha a diferença foi maior, igual a 4,63%, porém continua pequena. Ou seja, o momento na face do pilar P5 praticamente não se altera ao distribuir a reação do pilar na área da seção transversal ou na área da seção transversal projetada no centro de gravidade da laje.

O Gráfico 4-20 apresenta o comparativo dos momentos fletores entre as análises pelo MEF e Analogia de Grelha para o Caso 2.

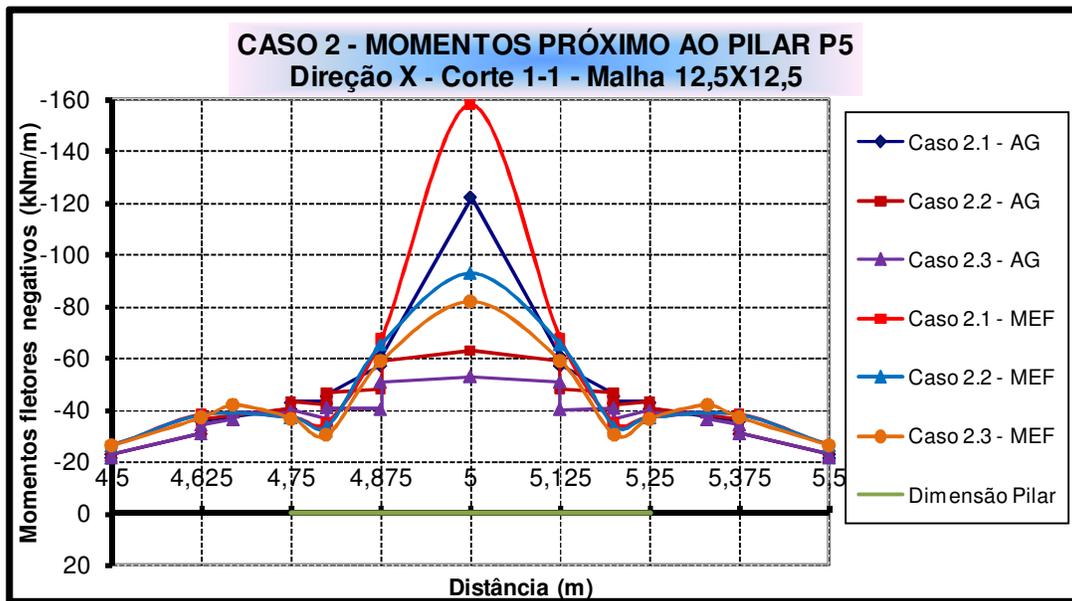


Gráfico 4-20 - Caso 2: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores próximos ao pilar P5 Malha 12,5x12,5cm

Conforme já informado, a adição do trecho rígido na região do pilar P5 resulta em concentração de esforços na região central do pilar. Por isso, serão analisados somente os momentos na face do pilar P5, sendo os valores apresentados na Tabela 4-3.

<b>CASO 2 - Momentos Fletores Negativos Máximos – Face pilar P5</b>			
<b>MALHA 12,5X12,5cm</b>			
<b>Caso</b>	<b>MEF</b>	<b>Analogia de Grelha</b>	<b>Diferença</b>
	<b>(kNm/m)</b>	<b>(kNm/m)</b>	<b>(%)</b>
<b>Caso 2.1</b>	-37,00	-42,96	13,87
<b>Caso 2.2</b>	-37,05	-43,04	13,92
<b>Caso 2.3</b>	-36,61	-39,71	7,80
<b>Diferença (%)</b>			
<b>Caso 2.1x2.2/2.2x2.3</b>	0,13 / 1,19	0,18 / 7,73	

Tabela 4-3 - Caso 2: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face do pilar P5 - Malha 12,5x12,5cm

De um modo geral, as diferenças são menores das obtidas no caso 1. Nos casos 2.1, 2.2 e 2.3, nota-se que os valores dos momentos fletores na face do pilar P5 são maiores quando obtidos por Analogia de Grelha, fato inverso do ocorrido no caso 1. A menor redução em relação ao MEF ocorreu para o Caso 2.3, da ordem de 8%. Fazendo um comparativo entre o caso 2, percebe-se que praticamente não há diferença entre os casos 2.1 e 2.2 em ambas as

análises. Em relação aos casos 2.2 e 2.3, a diferença foi muito pequena na análise pelo MEF (1,19%) enquanto que na análise por Analogia de Grelha o valor foi para 7,73%. Mesmo sendo pequena a diferença, quando se analisa o momento na face do pilar P5, distribuir a reação do pilar em uma área projetada no centro de gravidade da laje não oferece vantagens quando se adiciona trechos rígidos na região do pilar P5.

O comparativo mostrado a seguir tem por objetivo apresentar as diferenças ocorridas entre os casos 1 e 2 para os momentos fletores negativos na face do pilar P5, considerando a análise pelo MEF e por Analogia de Grelha. A Tabela 4-4 apresenta os valores desse comparativo.

<b>COMPARATIVO CASOS 1 E 2 - Momentos Fletores Negativos</b>		
<b>Máximos Face pilar P5 MALHA 12,5X12,5cm</b>		
<b>Casos</b>	<b>MEF (kNm/m)</b>	<b>Analogia de Grelha (kNm/m)</b>
<b>Caso 1.1</b>	-31,37	-25,83
<b>Caso 2.1</b>	-37,00	-42,96
<b>Diferença (%)</b>	15,21	39,87
<b>Caso 1.2</b>	-35,87	-30,24
<b>Caso 2.2</b>	-37,05	-43,04
<b>Diferença (%)</b>	3,18	29,74
<b>Caso 1.3</b>	-35,39	-28,84
<b>Caso 2.3</b>	-36,61	-39,71
<b>Diferença (%)</b>	3,33	27,37

Tabela 4-4 – Comparativo entre os casos 1 e 2: Momentos fletores máximos na face do pilar P5 – MEF e AG - Malha 12,5x12,5cm

Com exceção do caso 1, pode-se notar que, na análise pelo MEF, o fato de se adicionar o trecho rígido não altera significativamente o momento fletor na face do pilar P5 como ocorre na análise por Analogia de Grelha. As diferenças para o primeiro caso são aproximadamente 3,0% e para o segundo caso são aproximadamente 30,0%.

O Gráfico 4-21 apresenta os momentos fletores positivos máximos da laje para a malha 12,5x12,5cm, comparando os casos 1 e 2 da análise pelo MEF com a análise por Analogia de Grelha.

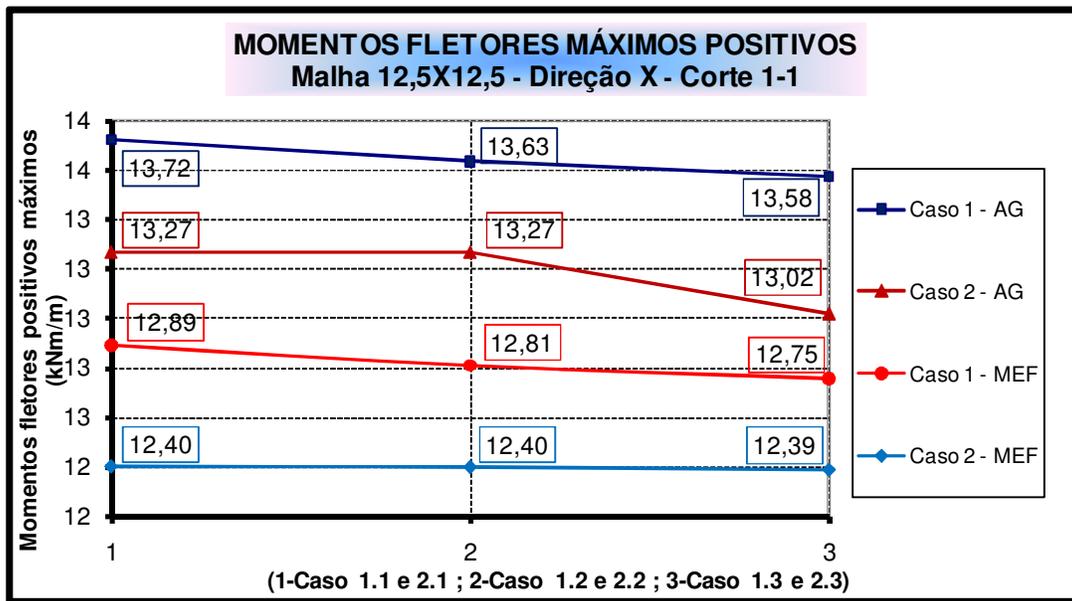


Gráfico 4-21 - Casos 1 e 2 - Comparativo MEF e AG - Momentos fletores positivos máximos  
Grelha

Pode-se notar que as diferenças são pequenas. Os menores valores ocorreram para os modelos em que se considera a região do pilar rígida. Para as malhas 25x25cm e 50x50cm as diferenças também foram pequenas. No entanto, a malha 100x100 cm apresentou diferenças maiores.

De acordo com os resultados apresentados até o momento, podem-se tirar algumas conclusões parciais acerca dos casos 1 e 2:

- Os momentos fletores positivos para as malhas 100x100cm e 50x50cm apresentaram resultados diferentes se comparados com os resultados apresentados para as malhas 25x25cm e 12,5x12,5 cm. As diferenças são maiores na análise por Analogia de grelha;

- Analisando a região do pilar P5, ao se adicionar os trechos rígidos (casos 2.1, 2.2 e 2.3), ocorreram concentrações de esforços na região do pilar e, portanto, não puderam ser comparados com os casos 1.1, 1.2 e 1.3. Nesses últimos casos, o diagrama de momento fletor dentro da região do pilar teve um bom comportamento para ambas as análises, estando o máximo valor no centro do pilar;

- Na análise pelo MEF, os momentos fletores na face do pilar P5 obtidos para os casos 2.1, 2.2 e 2.3 foram praticamente iguais. Ou seja, ao se modelar o pilar com trecho rígido, mesmo havendo singularidade, pode-se utilizar o momento fletor na face do pilar. Caso não se

modele a região do pilar com trechos rígidos, o valor obtido para os casos 1.2 ou 1.3 foram satisfatórios;

- Na análise por Analogia de Grelha, os momentos fletores na face do pilar P5 foram praticamente iguais entre os casos 2.1 e 2.2. Ou seja, modelando o pilar com trechos rígidos, mesmo havendo singularidade, também se obtêm momentos fletores na face do pilar consistentes. No entanto, ao se distribuir a reação do pilar na área projetada no centro de gravidade da laje o valor difere um pouco (7,73%);

- Os momentos nas faces do pilar fornecidos na análise por Analogia de Grelha obtidos em qualquer um dos subcasos do caso 1 foram muito inferiores aos obtidos nos subcasos do caso 2.

#### **4.4. Análise dos momentos fletores na laje assimétrica pelo MEF – Casos 3 e 4**

Os momentos fletores na laje obtidos para os casos 3 e 4 consideram o pilar assimétrico na laje, em 1 metro, na direção X. Além do esforço normal, existirão também esforços de flexão no pilar que deverão ser levados em consideração na obtenção dos momentos fletores na laje como também no próprio pilar.

Os estudos realizados com o pilar simétrico mostraram que, em algumas situações, malhas pouco refinadas resultaram em valores pouco confiáveis, principalmente na análise pelo Processo por Analogia de Grelha. Por conveniência, os modelos gerados com pilar assimétrico foram realizados para a malha 25x25cm, realizando-se refinamentos na região do pilar, passando-se para as malhas 12,5x12,5cm, 6,25x6,25cm e 3,125x3,125cm, que correspondem a L/40, L/80, L/160 e L/320, respectivamente, sendo “L” o vão da laje na direção X.

##### **4.4.1. Casos 3.1, 3.2 e 3.3**

A Figura 4-10 apresenta-se os momentos fletores da laje na direção X para o corte 1-1, considerando o caso 3.1.

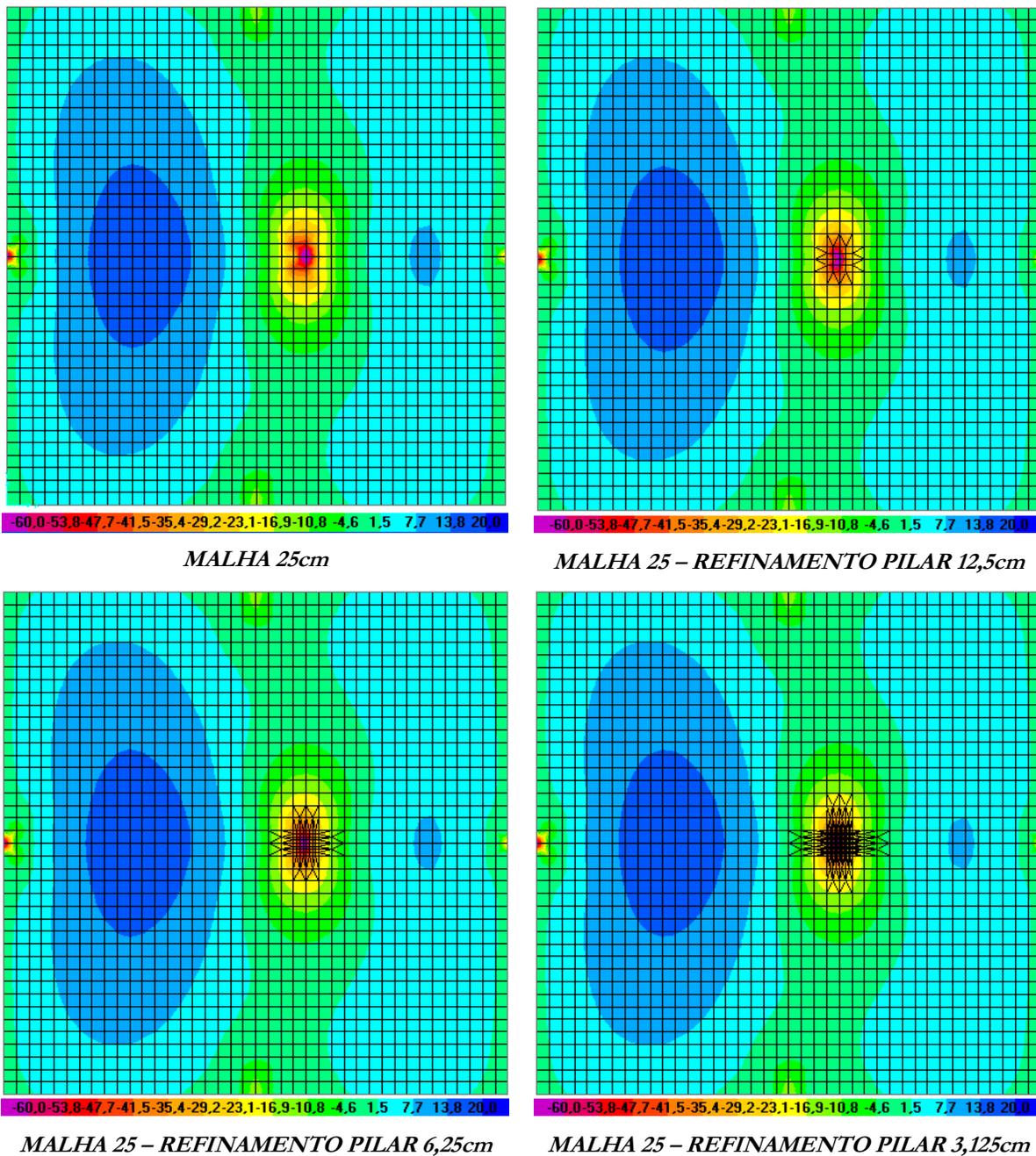


Figura 4-10 - Caso 3.1 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF

A Figura 4-11 apresenta os momentos fletores na direção X para o caso 3.2, considerando o corte 1-1. Pode-se notar as transições realizadas na malha para se obter os refinamentos na região do pilar.

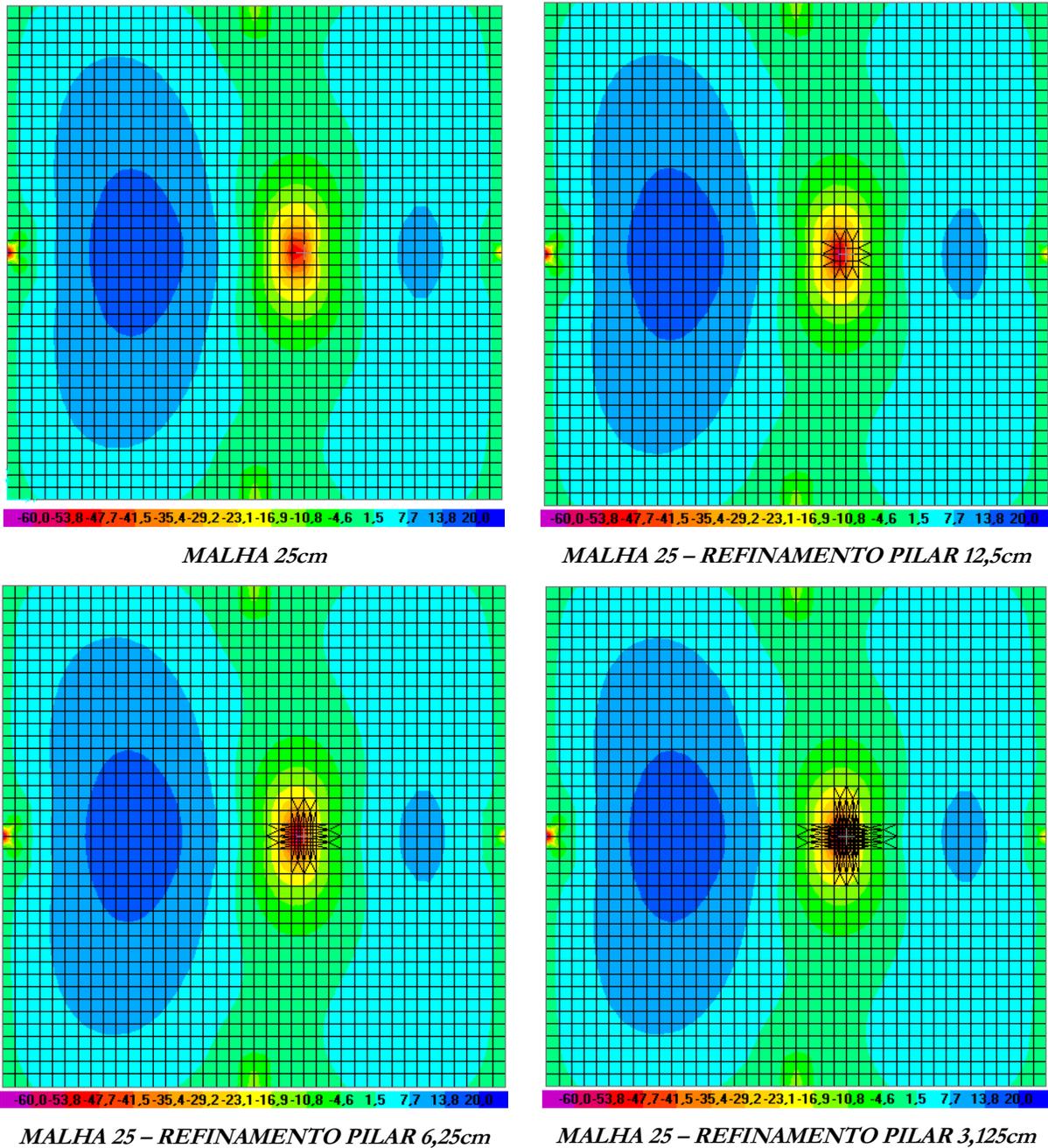
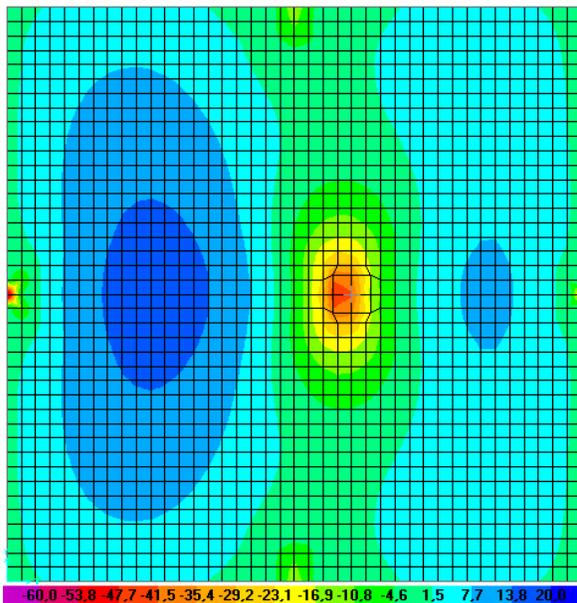
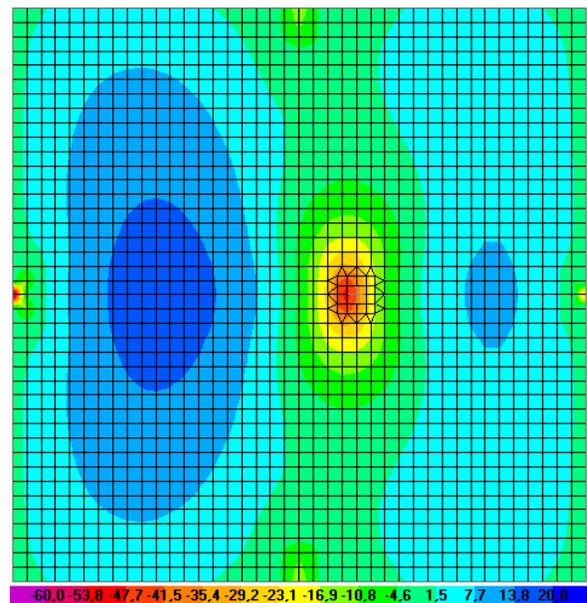


Figura 4-11 - Caso 3.2 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF

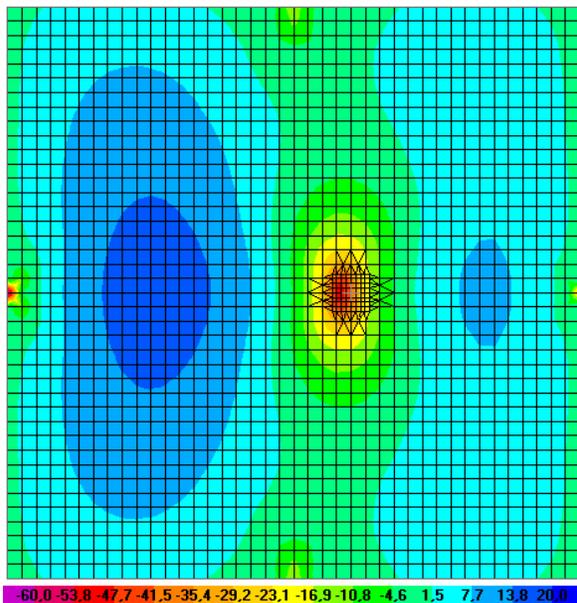
A Figura 4-12 apresenta os momentos fletores na direção X para o caso 3.3, considerando o corte 1-1. Além das transições realizadas na malha foi necessário mover alguns nós para ajustar a malha com a nova dimensão fictícia do pilar, agora com 66 cm de lado.



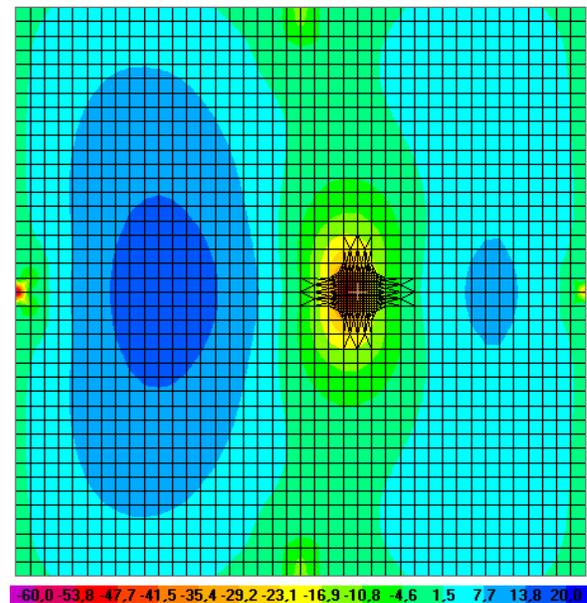
*MALHA 25X25cm*



*MALHA 25 – REFINAMENTO PILAR 12,5cm*



*MALHA 25 – REFINAMENTO PILAR 6,25cm*



*MALHA 25 – REFINAMENTO PILAR 3,125cm*

*Figura 4-12 - Caso 3.3 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF*

O Gráfico 4-22 apresenta os momentos fletores na laje plana na direção X, considerando o corte 1-1, para os casos 3.1, 3.2 e 3.3.

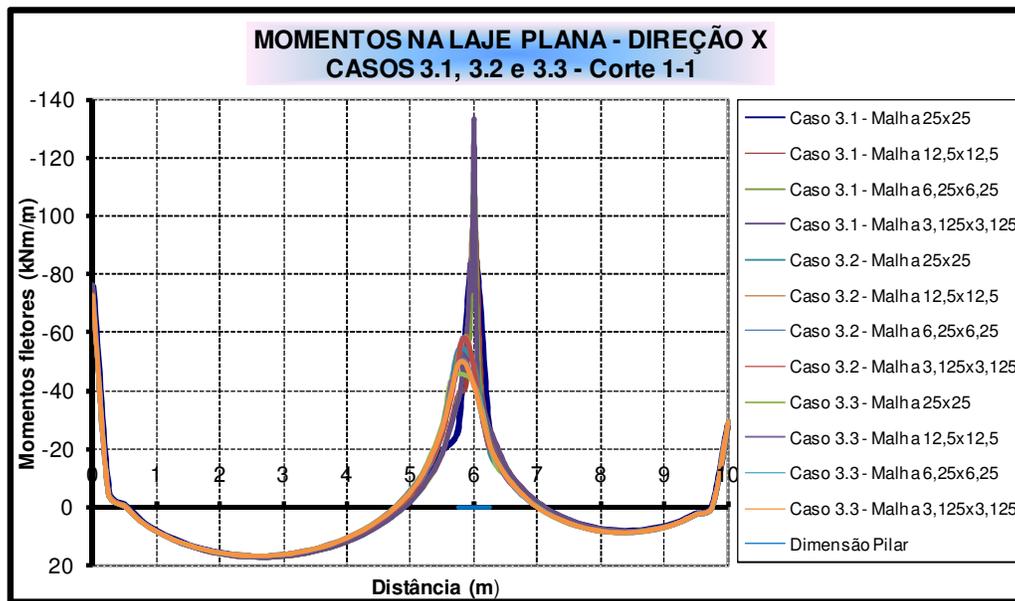


Gráfico 4-22 - Caso 3 - Momentos fletores da laje – MEF

Pode-se notar que os momentos positivos são praticamente os mesmos para os modelos do caso 3, independente de haver ou não refinamento na região do pilar. Por outro lado, há certa diferença com relação aos momentos negativos sobre o pilar P5. Por isso será apresentado mais adiante um comparativo desses diagramas, destacando somente a região do pilar P5.

#### 4.4.2. Casos 4.1, 4.2 e 4.3

O Gráfico 4-23 apresenta os momentos fletores na laje plana na direção X, considerando o corte 1-1, para os casos 4.1, 4.2 e 4.3. Nesse item não foram adicionadas as figuras com a visualização dos diagramas de momentos na laje na direção X, pois praticamente não diferem das figuras apresentadas no item 4.4.1.

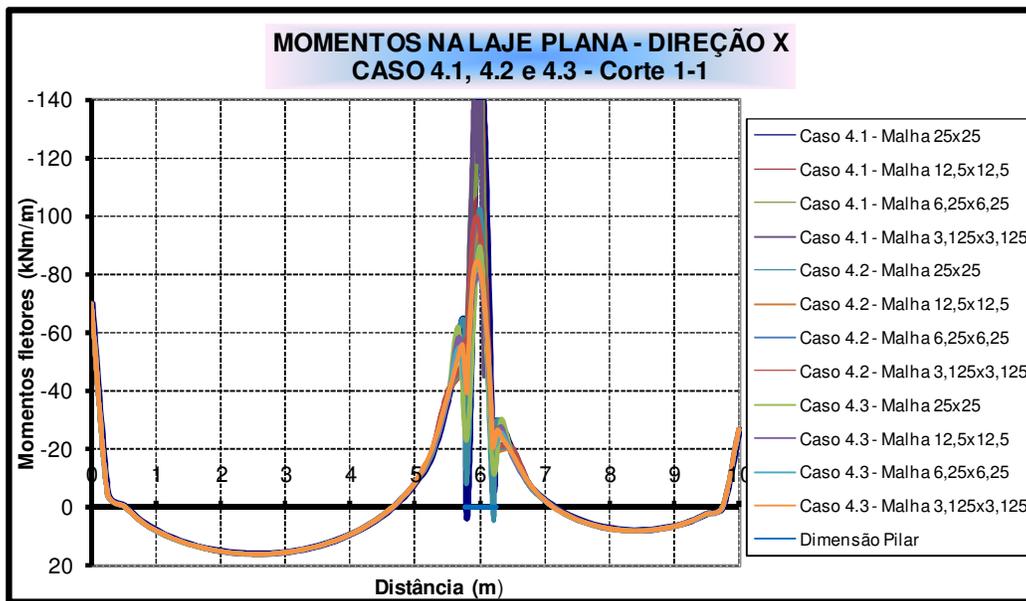


Gráfico 4-23 - Caso 4 - Momentos fletores da laje – MEF

Assim como no caso 3, os momentos positivos também foram praticamente os mesmos, independente de haver ou não refinamento na região do pilar. No entanto, os momentos negativos sobre o pilar P5 mostraram-se bem diferentes, havendo uma concentração de esforços devido à inclusão do trecho rígido na região do pilar P5. Essa situação também será analisada com mais detalhes no estudo comparativo dos diagramas somente sobre o pilar P5.

#### 4.4.3. Gráficos 3D

A Figura 4-13 e Figura 4-14e apresentam os momentos fletores em formato 3D na laje plana para os casos 3.1 e 3.2 considerando a malha 25x25cm.

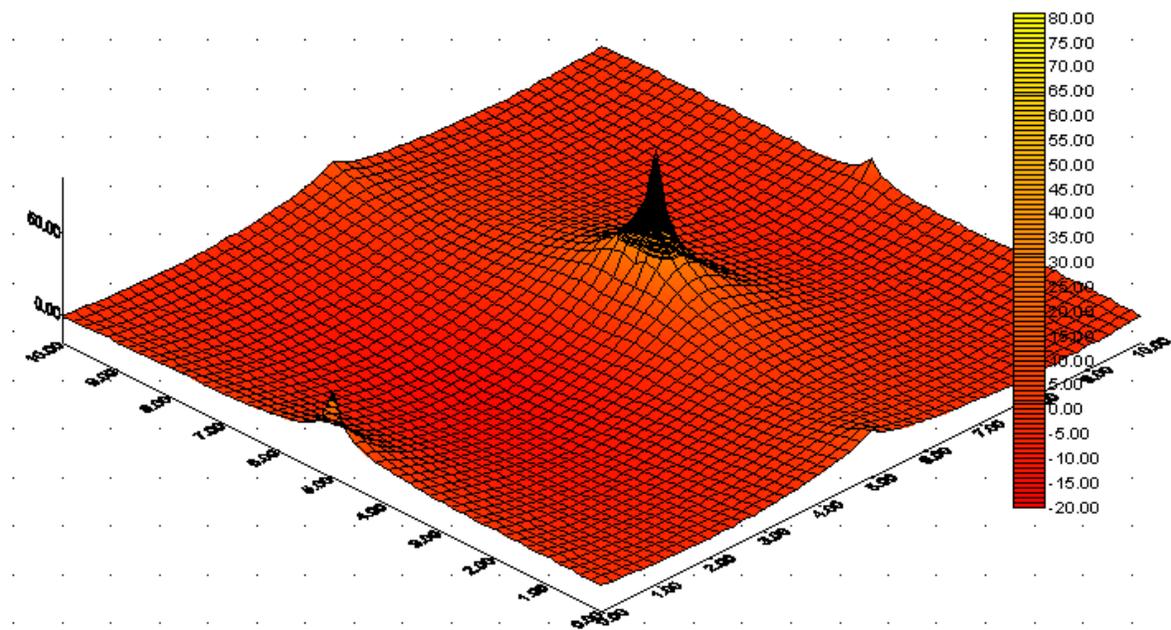


Figura 4-13 - Gráfico 3D dos momentos atuantes na laje plana – Caso 3.1

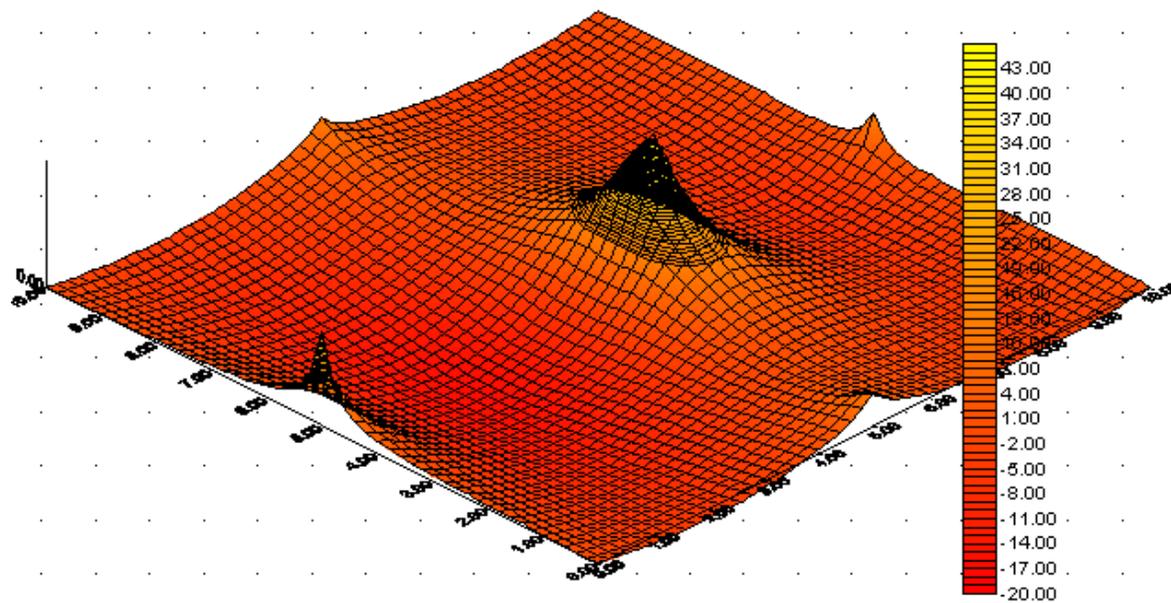


Figura 4-14 - Gráfico 3D dos momentos atuantes na laje plana – Caso 3.2

A Figura 4-15 apresenta os momentos fletores da laje plana na região do pilar P5, considerando os casos 3.1 e 3.2 e a malha 25x25cm.

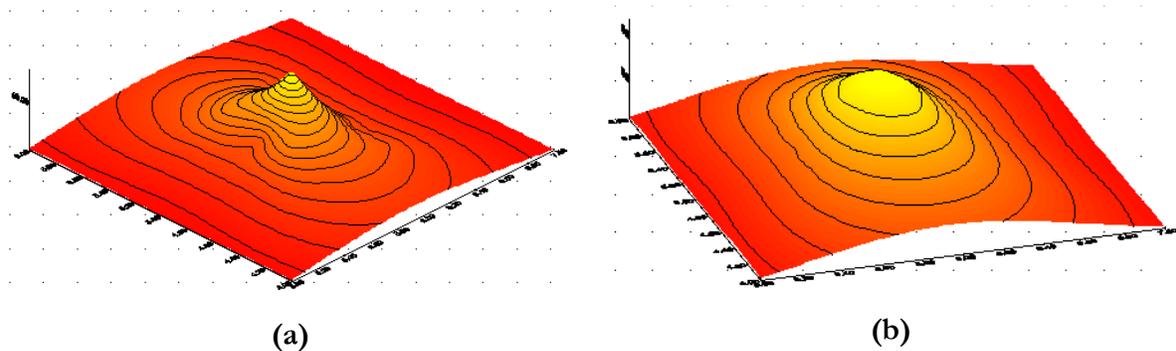


Figura 4-15 – Região do pilar P5 – (a) Caso 3.1 ; (b) Caso 3.2

Pode-se notar o arredondamento da região do pilar P5 que ocorre ao distribuir a reação do pilar como carregamento uniformemente distribuído na laje, diminuindo sensivelmente o valor de momento negativo. Esse arredondamento é mais evidente na Figura 4-15. Além disso, com um gráfico 3D fica mais evidente estabelecer faixas para distribuir a armadura superior na laje, em intervalos estipulados pelo projetista estrutural.

O caso 3.3 apresentou um comportamento similar ao caso 3.2, apenas com valores diferentes, e por isso não se apresentou o diagrama 3D. Para os casos 4.1, 4.2 e 4.3, o fato de haver o trecho rígido na região do pilar P5 fez com que houvesse concentrações de esforços nessa região, dificultando a visualização 3D dos momentos fletores. Por isso, não se apresentou esses gráficos.

#### 4.4.4. Comparativo entre os resultados obtidos pelo MEF – Casos 3 e 4

Apresenta-se a seguir um comparativo entre os resultados obtidos pelo MEF, para os casos 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 4.2 e 4.3, mostrando os momentos fletores na região do pilar P5 para a malha 25x25cm com refinamento na região do pilar para a malha de 3,125x3,125cm. A dimensão do pilar está destacada na linha de eixo das abscissas.

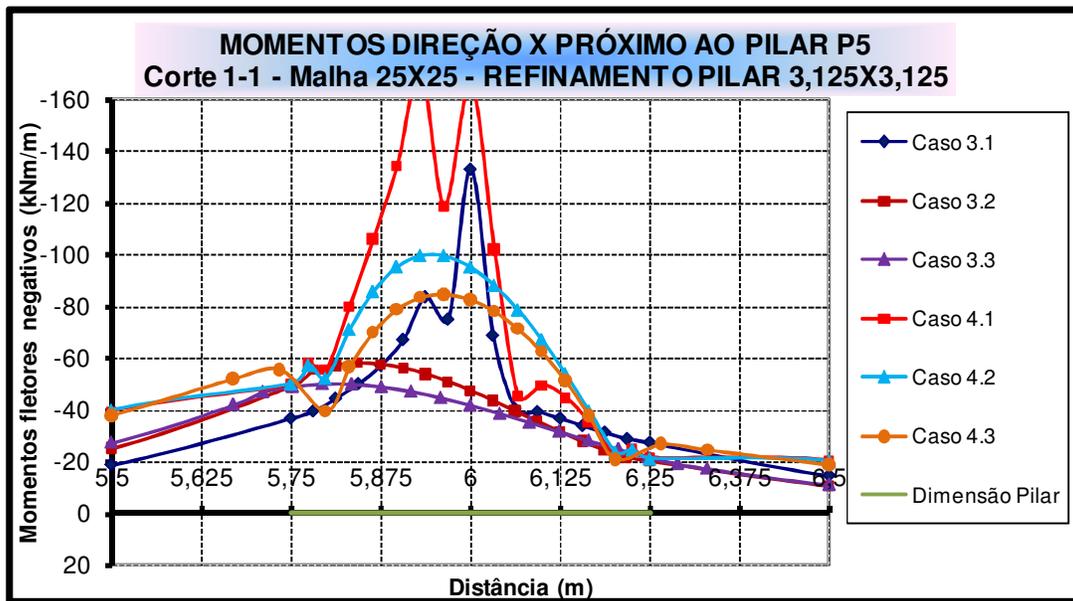


Gráfico 4-24 - Caso 3 e 4 - Comparativo momentos fletores na laje – Malha 25x25cm refinada no pilar para 3,125x3,125cm – MEF

Quando se tem assimetria do pilar em relação à laje, o diagrama de carregamentos do pilar como reação na laje não é uniforme, e por isso o momento máximo negativo da laje não ocorre no centro do pilar, como pode ser observado nos casos 3.2, 3.3, 4.2 e 4.3. Tem-se um diagrama de momentos deslocado na direção contrária à rotação do nó do pilar.

Nos casos 3.2 e 3.3 é possível notar com clareza o arredondamento no diagrama de momento fletor sobre o pilar P5 em relação ao caso 1.1, em que o apoio é considerado pontual. Já para os casos 4.2 e 4.3 o arredondamento do diagrama não é tão evidente, devido a uma concentração de esforços provocada pelo trecho rígido na região do pilar, dificultando a análise dos resultados.

Da mesma forma como ocorrido nos casos 1 e 2, ao analisar as faces do pilar P5 nota-se que os diagramas tem uma tendência a ficarem praticamente constantes com o refinamento da malha, conforme apresentado no Gráfico 4-25 e Gráfico 4-26.

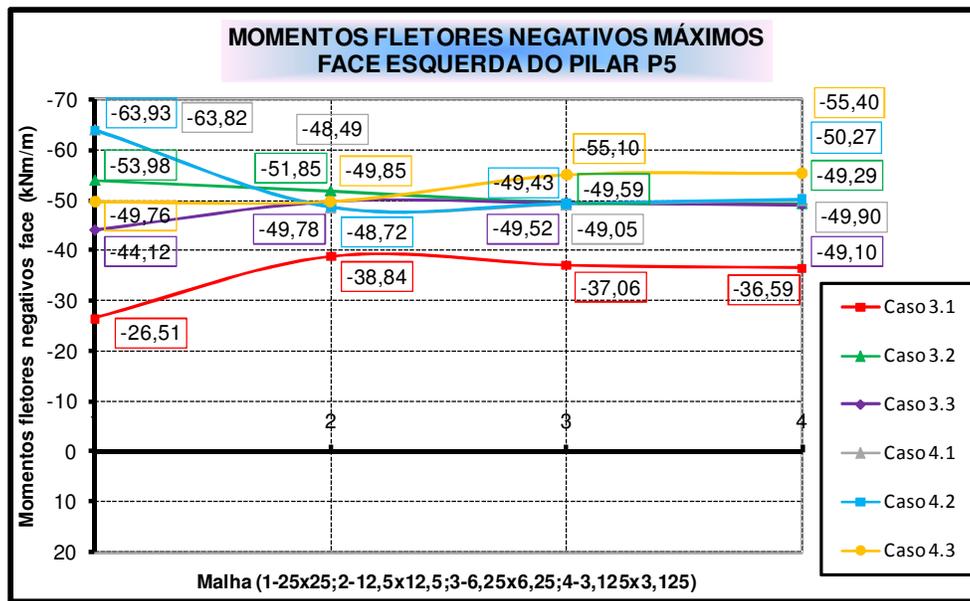


Gráfico 4-25 - Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos face esquerda pilar P5 - MEF

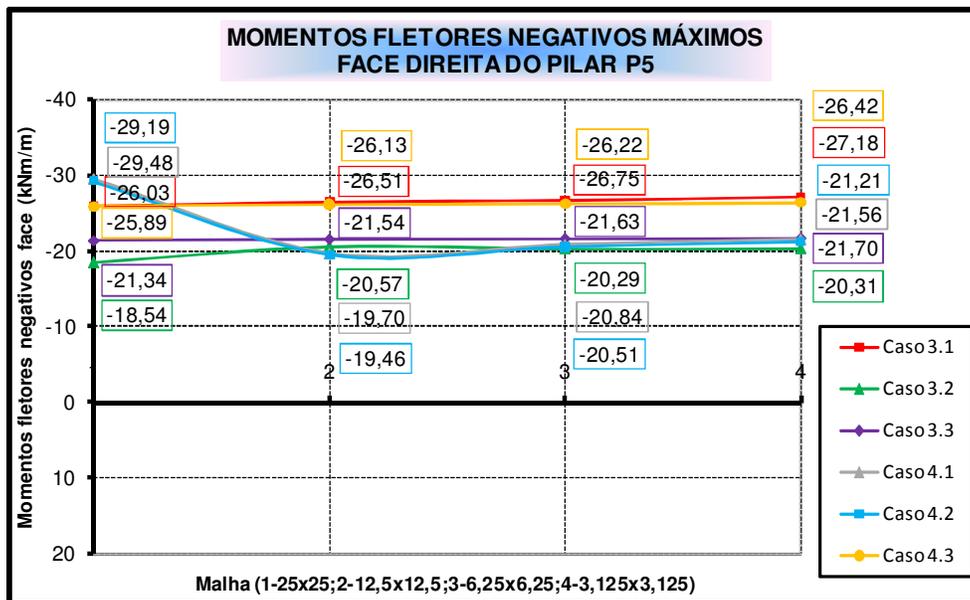


Gráfico 4-26 - Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos face direita pilar P5 - MEF

Com exceção da malha 25x25cm, pode-se notar que os momentos em ambas as faces do pilar P5 são praticamente os mesmos para os casos 3.2 e 3.3, 4.1 e 4.2. O caso 4.3 apresentou resultados sensivelmente maiores aos casos citados anteriormente. Atenta-se para o caso 4.1 que, apesar de haver o problema da singularidade, os momentos em ambas as faces se mostraram bem consistentes. Isso não ocorreu no caso 1.1, em que também se tem o problema da singularidade, porém sem núcleo rígido na região do pilar. Assim como ocorrido

nos demais casos, destaca-se a importância de se utilizar malhas finas em análises dessa natureza, pois podem influenciar muito os resultados em alguns casos.

O Gráfico 4-27 compara os momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5, para os casos 3.1, 3.2 e 3.3, considerando a malha 25x25cm e seus refinamentos na região do pilar P5.

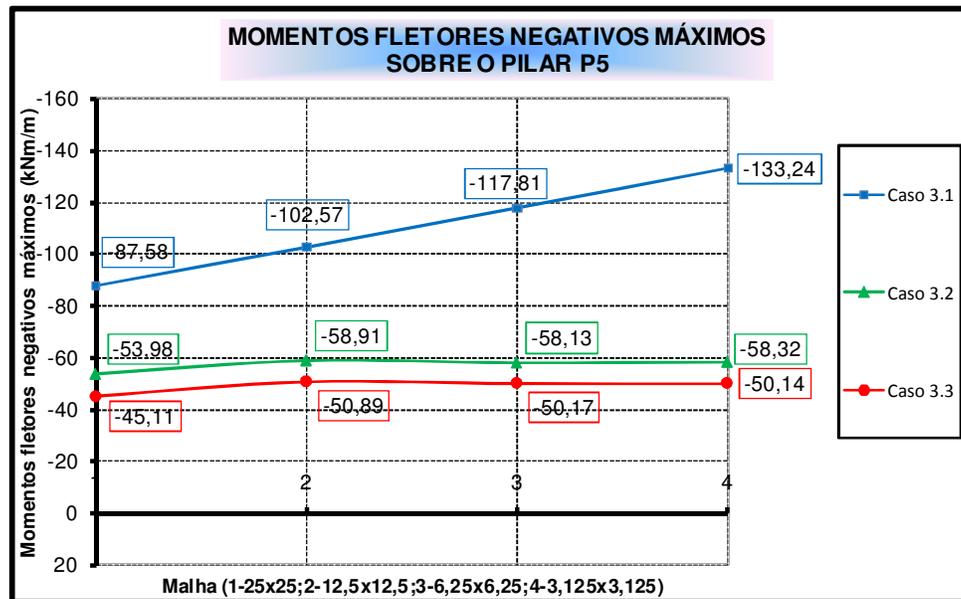


Gráfico 4-27 - Caso 3 - Comparativo momentos fletores máximos sobre pilar P5 - MEF

O caso 3.1 evidencia claramente o problema da singularidade. Nos outros dois casos, os momentos negativos permaneceram praticamente constantes, independente da malha utilizada. O momento fletor máximo negativo no centro do pilar P5 do caso 3.3 em relação ao caso 3.2 é cerca de 14% menor, pois a área de distribuição da reação do pilar é maior. A diferença para a malha 3,125x3,125cm do caso 3.3 em relação ao caso 3.1 é de 62,37%.

#### 4.5. Análise dos momentos fletores na laje assimétrica por Analogia de Grelha – Casos 3 e 4

Assim como no MEF, na análise por Analogia de grelha a malha 25x25cm foi refinada na região do pilar, passando a valores 12,5x12,5cm, 6,25x6,25cm e 3,125x3,125cm, que correspondem a L/40, L/80, L/160 e L/320, respectivamente, sendo “L” o vão da laje na direção X. As transições na malha foram feitas conforme explicado no item 3.3.3.

#### 4.5.1. Casos 3.1, 3.2 e 3.3

A Figura 4-16 apresenta os momentos fletores da laje plana na direção X para a malha 25x25cm, considerando o corte 1-1.

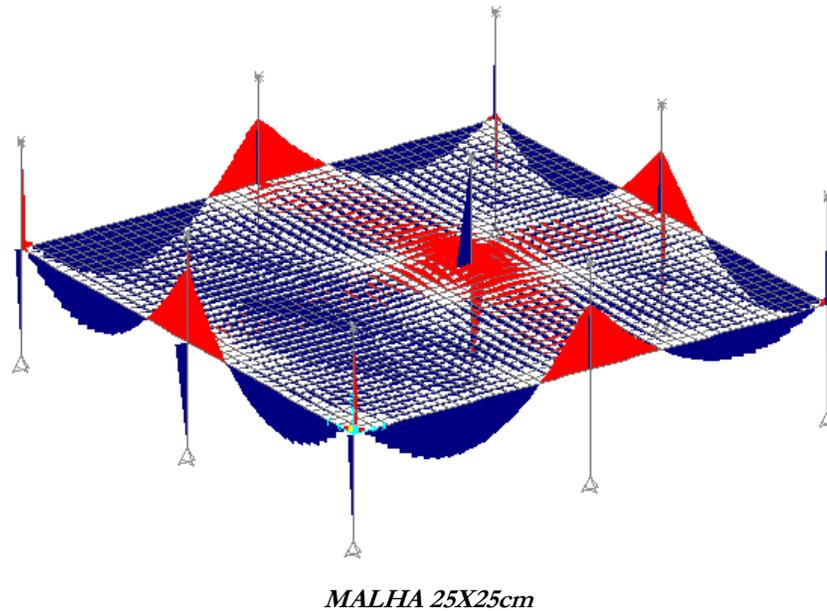


Figura 4-16 - Caso 3.1 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte 1-1 - AG

O Gráfico 4-28 apresenta os momentos fletores na laje plana na direção X, considerando o corte 1-1, para os casos 3.1, 3.2 e 3.3.

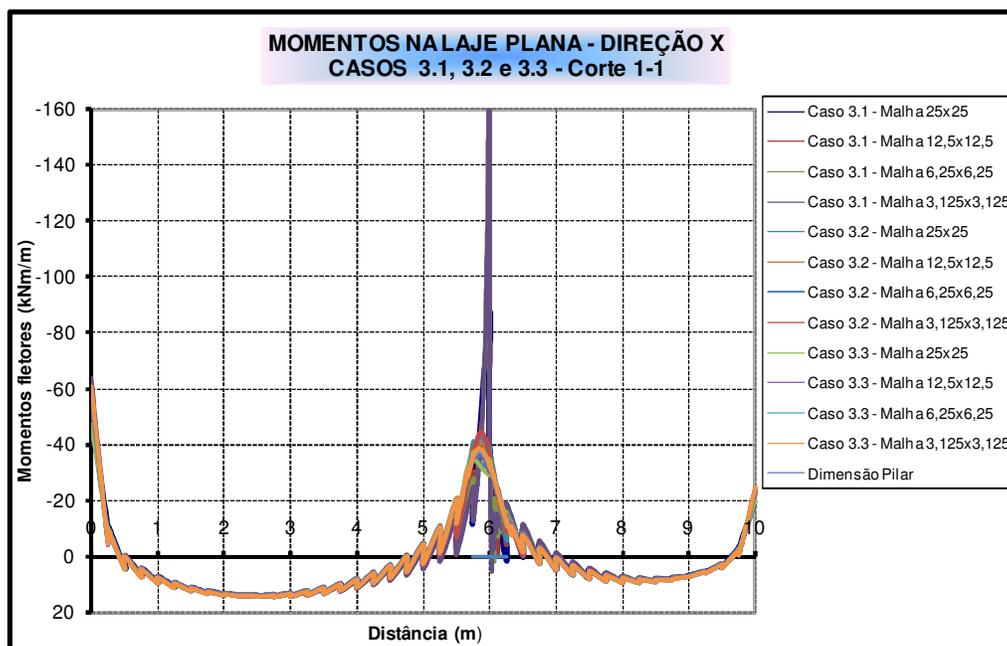


Gráfico 4-28 - Caso 3 - Momentos fletores da laje – AG

Assim como na análise pelo MEF, os momentos positivos são bem parecidos para todos os casos, estando as diferenças no momento negativo sobre o pilar P5. Por isso será apresentado a seguir um comparativo desses diagramas, destacando somente a região do pilar P5.

#### 4.5.2. Casos 4.1, 4.2 e 4.3

O Gráfico 4-29 apresenta os momentos fletores na laje plana na direção X, considerando o corte 1-1, para os casos 4.1, 4.2 e 4.3.

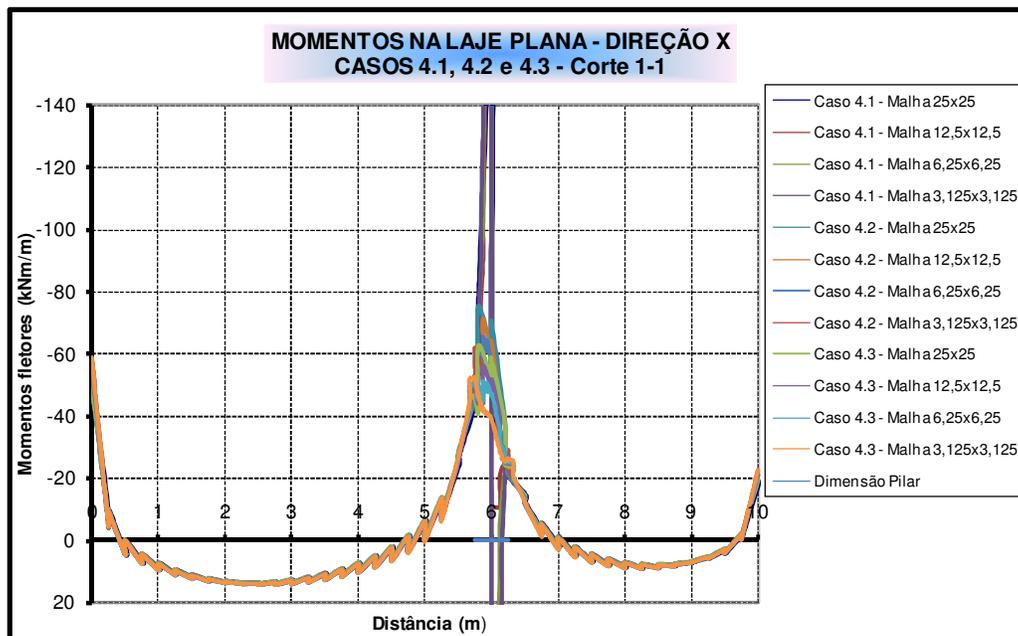


Gráfico 4-29 - Caso 4 - Momentos fletores da laje – AG

Novamente, tem-se a convergência dos momentos positivos independente da malha utilizada, havendo uma concentração de esforços na região do pilar P5 devido à inclusão do trecho rígido. Essa situação também será analisada com mais detalhes no estudo comparativo dos diagramas somente sobre o pilar P5.

#### 4.5.3. Comparativo entre os resultados obtidos por Analogia de Grelha – Casos 3 e 4

Apresenta-se a seguir um comparativo entre os resultados obtidos por Analogia de Grelha, para os casos 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 4.2 e 4.3, mostrando os momentos fletores na região do pilar P5 para a malha 25x25cm com refinamento na região do pilar para a malha de 3,125x3,125cm. A dimensão do pilar está destacada na linha de eixo das abscissas.

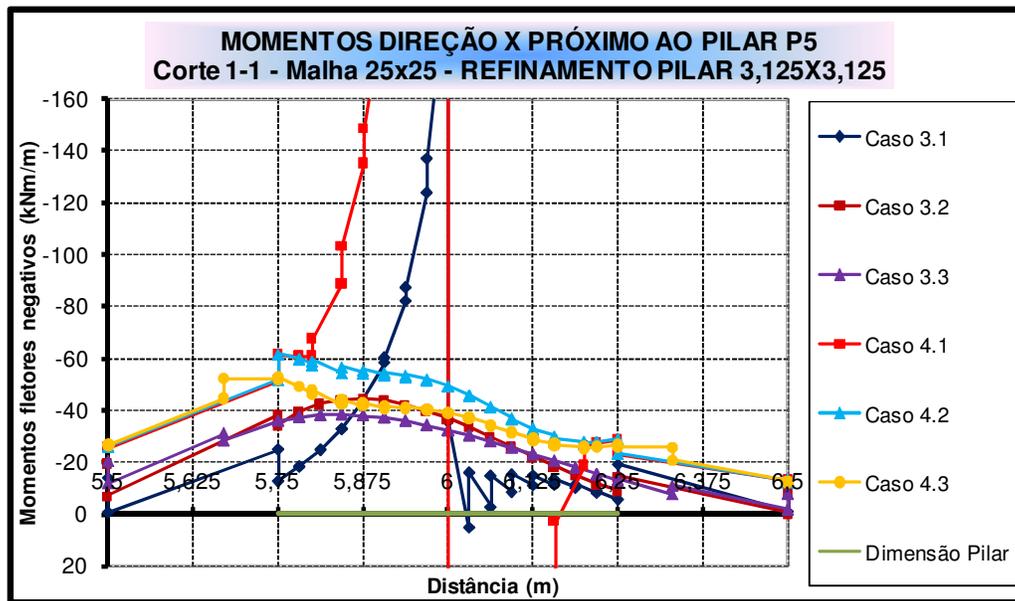


Gráfico 4-30 - Caso 3 e 4 - Comparativo momentos fletores na laje – Malha 25x25cm refinada no pilar para 3,125x3,125cm – AG

Da análise do Gráfico 4-30 pode-se notar que os momentos negativos sobre o pilar P5 têm um bom comportamento para os casos 3.2, 3.3, 4.2 e 4.3. Apesar de existir o trecho rígido na região do pilar dos casos 4.2 e 4.3, não houve um “pico” dos momentos, apesar de serem superiores aos casos 3.2 e 3.3. As demais malhas apresentaram o mesmo comportamento, porém as diferenças entre os casos 3.2, 3.3 e 4.2, 4.4 foram maiores. Vale frisar que os momentos fletores máximos não ocorrem sobre o centro do pilar P5, devido a assimetria do pilar em relação à laje.

Os momentos em ambas as faces não apresentaram similaridade entre os casos 3 e 4, sendo os valores do caso 4 superiores, conforme mostrado no Gráfico 4-31 e Gráfico 4-32.

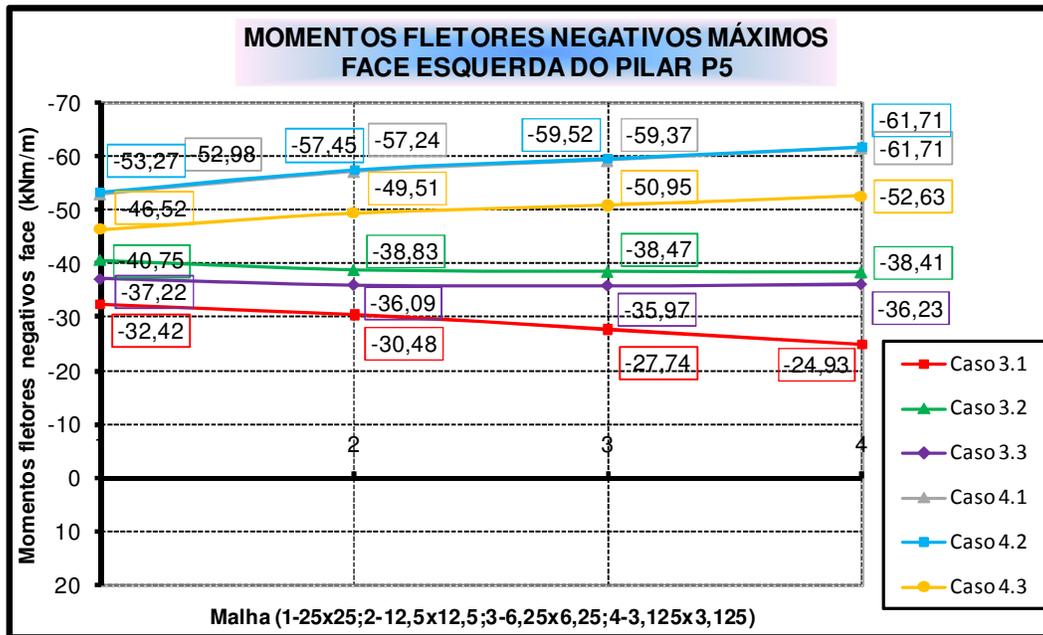


Gráfico 4-31 - Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos face esquerda pilar P5 - AG

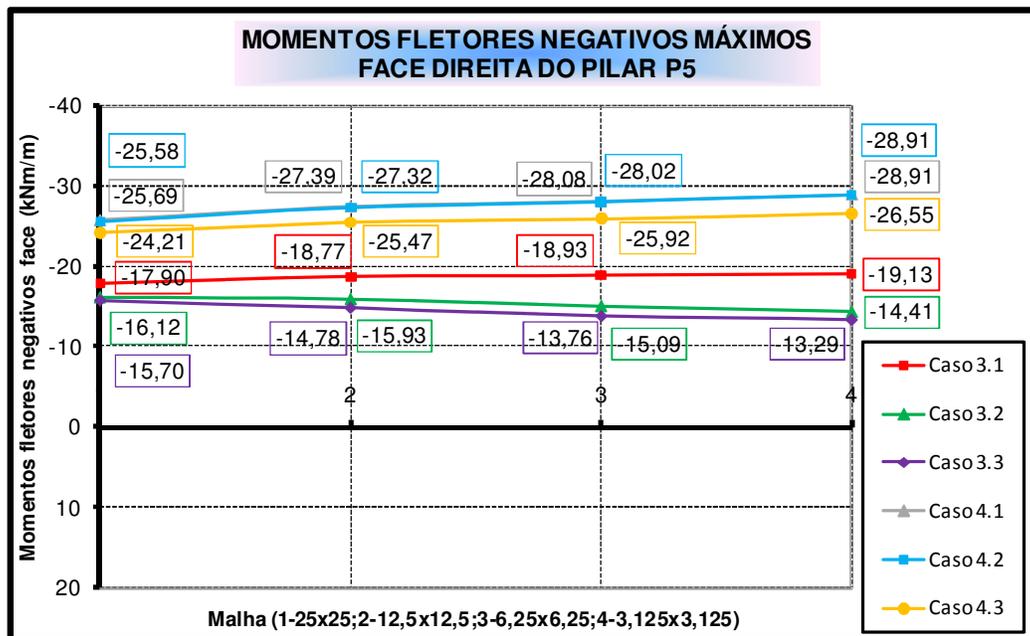


Gráfico 4-32 - Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos face direita pilar P5 - AG

O Gráfico 4-33 apresenta os momentos negativos máximos sobre o pilar P5 para os casos 3 e 4.

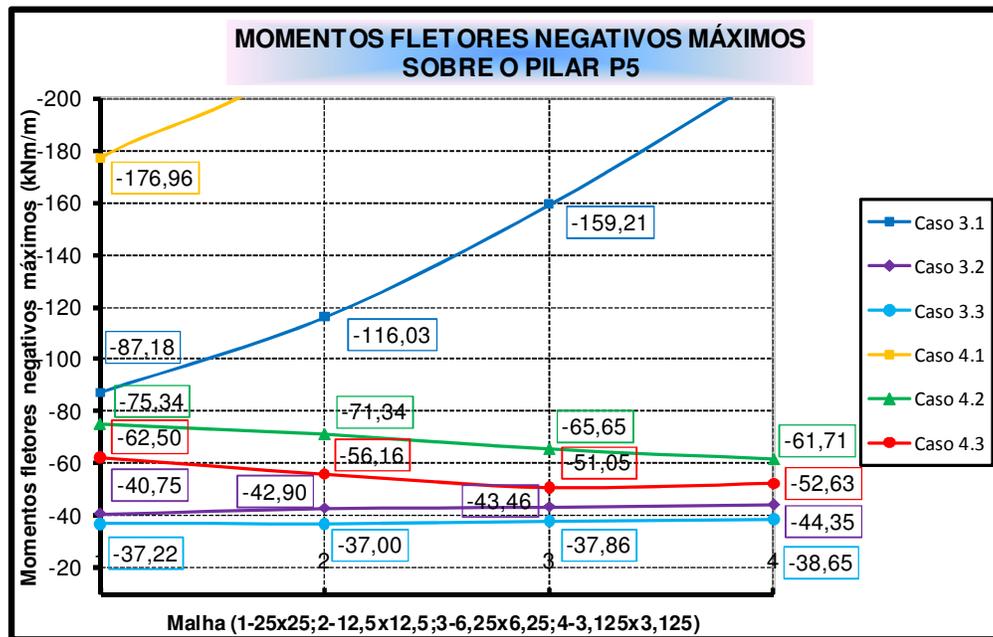


Gráfico 4-33 – Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos sobre o pilar P5 - AG

Pode-se notar que os valores máximos não são tão diferentes, apesar da adição do trecho rígido dos modelos do caso 4. As diferenças são menores para as malhas mais refinadas, chegando a percentuais de aproximadamente 26%, estando os momentos do caso 4 superiores ao caso 3. Outra situação recai na malha: os momentos do caso 3 são pouco sensíveis à malha enquanto que os momentos do caso 4 não o são.

#### 4.6. Comparativo dos momentos fletores na laje simétrica - MEF e Analogia de Grelha – Casos 3 e 4

Apresenta-se a seguir um comparativo entre os momentos fletores obtidos na laje na região do pilar P5 pela análise do MEF e Analogia de Grelha, considerando a malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm.

O Gráfico 4-34 apresenta os valores do comparativo explicados no parágrafo anterior para o Caso 3.

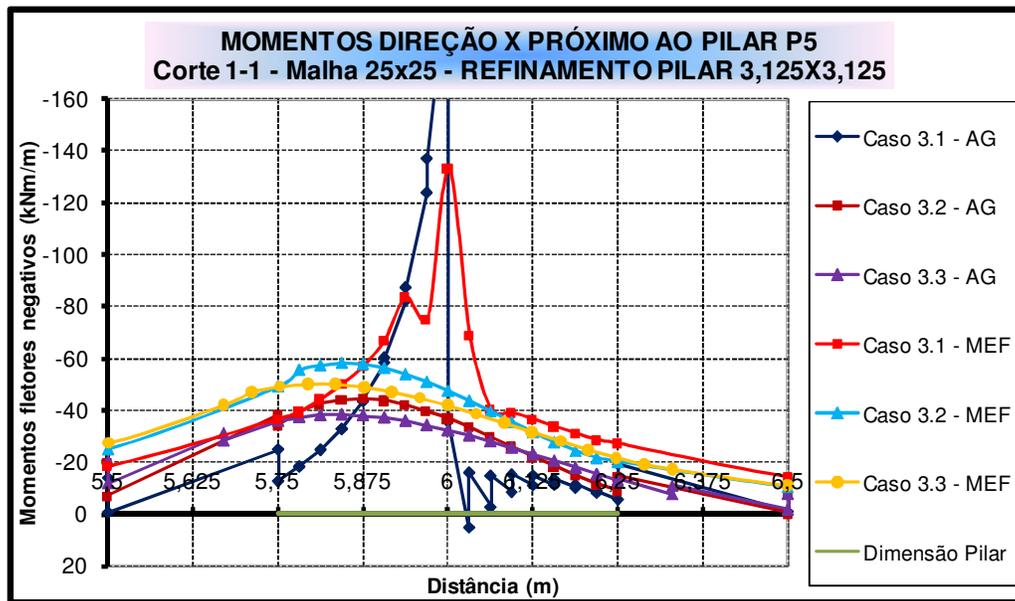


Gráfico 4-34 - Caso 3: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores próximos ao pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm

A Tabela 4-5 apresenta as diferenças encontradas entre as análises pelo MEF e Analogia de Grelha para os momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5, considerando os casos 3.1, 3.2 e 3.3.

<b>CASO 3 - Momentos Fletores Negativos Máximos sobre o pilar P5</b>			
<b>MALHA 25x25cm – REFINAMENTO 3,125x3,125cm</b>			
<b>Caso</b>	<b>MEF</b>	<b>AG</b>	<b>Diferença</b>
	<b>(kNm/m)</b>	<b>(kNm/m)</b>	<b>(%)</b>
<b>CASO 3.1</b>	-133,34	-210,78	36,74
<b>CASO 3.2</b>	-58,32	-44,35	23,95
<b>CASO 3.3</b>	-50,14	-38,65	22,91
<b>Diferença (%)</b>			
<b>Caso 3.1x3.2/3.2x3.3</b>	56,26 / 14,02	78,96 / 12,85	

Tabela 4-5 - Caso 3: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos sobre o pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm

Pode-se notar que a análise por Analogia de Grelha apresentou valores inferiores aos obtidos pelo MEF para os momentos máximos sobre o pilar P5, da ordem de 23%. Para as demais malhas as reduções também se mantiveram, porém com percentuais um pouco maiores. Fazendo um comparativo entre o caso 3, pode-se perceber a sensível redução ocorrida entre os casos 3.1 e 3.2, tanto na análise pelo MEF com por Analogia de Grelha: o

fato de eliminar a singularidade fez com que se reduzisse em mais de 58% (MEF) e 78% (AG) o momento fletor negativo na laje no centro do pilar P5. Entre os casos 3.2 e 3.3, a redução foi em média 13%

A Tabela 4-6 apresenta as diferenças encontradas entre as análises pelo MEF e Analogia de Grelha para os momentos fletores negativos máximos na face esquerda do pilar P5, considerando os casos 3.1, 3.2 e 3.3.

<b>CASO 3 - Momentos Fletores Negativos Máximos – Face esquerda pilar P5</b>			
<b>MALHA 25x25cm – REFINAMENTO 3,125x3,125cm</b>			
<i>Caso</i>	<i>MEF</i> (kNm/m)	<i>AG</i> (kNm/m)	<i>Diferença</i> (%)
<b>CASO 3.1</b>	-36,59	-24,93	31,87
<b>CASO 3.2</b>	-49,29	-38,41	22,07
<b>CASO 3.3</b>	-49,10	-36,23	26,22
<b>Diferença (%)</b>			
<b>Caso 3.1x3.2/3.2x3.3</b>	25,76 / 0,38	35,09 / 5,67	

Tabela 4-6 - Caso 3: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face esquerda do pilar P5 - Malha 25x25 com refinamento para 3,125cm

A Tabela 4-7 apresenta as diferenças encontradas entre as análises pelo MEF e Analogia de Grelha para os momentos fletores negativos máximos na face direita do pilar P5, considerando os casos 3.1, 3.2 e 3.3.

<b>CASO 3 - Momentos Fletores Negativos Máximos – Face direita pilar P5</b>			
<b>MALHA 25 x25cm – REFINAMENTO 3,125x3,125cm</b>			
<i>Caso</i>	<i>MEF</i> (kNm/m)	<i>AG</i> (kNm/m)	<i>Diferença</i> (%)
<b>CASO 3.1</b>	-27,18	-19,13	29,62
<b>CASO 3.2</b>	-20,31	-14,41	29,05
<b>CASO 3.3</b>	-21,70	-13,29	38,75
<b>Diferença (%)</b>			
<b>Caso 3.1x3.2/3.2x3.3</b>	25,27 / 6,40	24,67 / 7,77	

Tabela 4-7 - Caso 3: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face direita do pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm

Novamente, a análise por Analogia de Grelha apresentou valores inferiores aos obtidos pelo MEF para ambas as faces do pilar P5. As diferenças chegaram a

aproximadamente **38%** para a face direita para o caso 3.3. Fazendo um comparativo entre o caso 3, o momento fletor teve uma diferença significativa entre os casos 3.1 e 3.2: na face esquerda aumentou (**25,76%** - MEF ; **35,09%** - AG) e na face direita diminui (em média **25%** em ambas as análises). Entre os casos 3.2 e 3.3, a diferença foi pequena em ambas as análises, sendo praticamente zero para a face esquerda na análise pelo MEF. Ou seja, o momento na face do pilar P5 praticamente não se altera ao distribuir a reação do pilar na área da seção transversal ou na área da seção transversal projetada no centro de gravidade da laje.

O Gráfico 4-35 apresenta o comparativo dos momentos fletores entre as análises pelo MEF e Analogia de Grelha para o Caso 4.

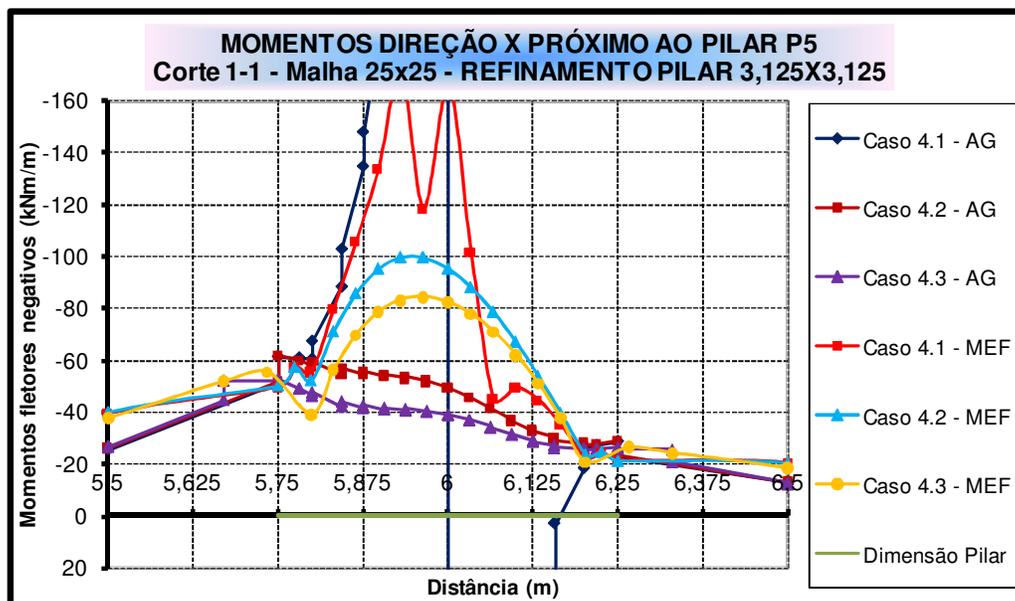


Gráfico 4-35 - Caso 4: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores próximos ao pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm

Devido as concentrações de tensões ocorridas nos modelos analisados pelo MEF, serão comparados somente os momentos fletores na face do pilar P5. A Tabela 4-8 apresenta as diferenças encontradas entre as análises pelo MEF e Analogia de Grelha para os momentos fletores negativos máximos na face esquerda do pilar P5, considerando os casos 4.1, 4.2 e 4.3.

<b>CASO 4 - Momentos Fletores Negativos Máximos – Face esquerda pilar P5</b>			
<b>MALHA 25x25cm – REFINAMENTO 3,1253,125cm</b>			
<b>Caso</b>	<b>MEF</b> (kNm/m)	<b>AG</b> (kNm/m)	<b>Diferença</b> (%)
<b>CASO 4.1</b>	-49,90	-61,71	19,14
<b>CASO 4.2</b>	-50,27	-61,71	18,54
<b>CASO 4.3</b>	-55,40	-52,63	5,00
<b>Diferença (%)</b>			
<b>Caso 4.1x4.2/4.2x4.3</b>	0,73 / 9,26	0 / 14,71	

Tabela 4-8 - Caso 4: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face esquerda do pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm

A Tabela 4-9 apresenta as diferenças encontradas entre as análises pelo MEF e Analogia de Grelha para os momentos fletores negativos máximos na face direita do pilar P5, considerando os casos 4.1, 4.2 e 4.3.

<b>CASO 4 - Momentos Fletores Negativos Máximos – Face direita pilar P5</b>			
<b>MALHA 25x25cm – REFINAMENTO 3,125x3,125cm</b>			
<b>Caso</b>	<b>MEF</b> (kNm/m)	<b>AG</b> (kNm/m)	<b>Diferença</b> (%)
<b>CASO 4.1</b>	-21,56	-28,91	25,42
<b>CASO 4.2</b>	-21,21	-28,91	26,63
<b>CASO 4.3</b>	-26,42	-26,55	0,49
<b>Diferença (%)</b>			
<b>Caso 4.1x4.2/4.2x4.3</b>	1,62 / 19,72	0 / 8,16	

Tabela 4-9 - Caso 4: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face esquerda do pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm

As diferenças dos momentos fletores em ambas as face do pilar P5 diminuíram em relação ao caso 3. Em quase todas as situações, os valores obtidos pela Analogia de Grelha foram superiores, com exceção da face esquerda do pilar P5 do caso 4.3. O caso 4.3 resultou nas menores diferenças encontradas, chegando a meio por cento no momento fletor da face direita do pilar P5. Fazendo um comparativo entre o caso 4, percebe-se que praticamente não há diferença entre os casos 4.1 e 4.2 em ambas as análises. Na análise pelo MEF, o momento aumentou do caso 4.2 para o caso 4.3, ao passo que na análise por Analogia de Grelha, para o mesmo comparativo, o valor diminuiu. Em ambos os casos, as diferenças aumentaram em

relação ao comparativo dos casos 4.1 e 4.2, mostrando que distribuir a reação do pilar em uma área projetada no centro de gravidade da laje não oferece vantagens quando se adiciona trechos rígidos na região do pilar P5.

O comparativo mostrado a seguir tem por objetivo apresentar as diferenças ocorridas entre os casos 3 e 4 para os momentos fletores negativos em ambas as face do pilar P5, considerando a análise pelo MEF e por Analogia de Grelha. A Tabela 4-10 e Tabela 4-11 apresentam os valores desse comparativo.

<b>COMPARATIVO CASOS 3 E 4 - Momentos Fletores Negativos</b>		
<b>Máximos Face esquerda pilar P5 MALHA 12,5X12,5cm</b>		
<b>Casos</b>	<b>MEF (kNm/m)</b>	<b>Analogia de Grelha (kNm/m)</b>
<i>Caso 3.1</i>	-36,59	-24,93
<i>Caso 4.1</i>	-49,90	-61,71
<b>Diferença (%)</b>	26,67	59,60
<i>Caso 3.2</i>	-49,29	-38,41
<i>Caso 4.2</i>	-50,27	-61,71
<b>Diferença (%)</b>	1,94	37,75
<i>Caso 3.3</i>	-49,10	-36,23
<i>Caso 4.3</i>	-55,40	-52,63
<b>Diferença (%)</b>	11,37	31,16

Tabela 4-10 – Comparativo entre os casos 3 e 4: Momentos fletores máximos na face esquerda do pilar P5 – MEF e AG - Malha 12,5x12,5cm

<b>COMPARATIVO CASOS 3 E 4 - Momentos Fletores Negativos</b>		
<b>Máximos Face direita pilar P5 MALHA 12,5X12,5cm</b>		
<b>Casos</b>	<b>MEF (kNm/m)</b>	<b>Analogia de Grelha (kNm/m)</b>
<i>Caso 3.1</i>	-27,18	-19,13
<i>Caso 4.1</i>	-21,56	-28,91
<b>Diferença (%)</b>	20,67	33,82
<i>Caso 3.2</i>	-20,31	-14,41
<i>Caso 4.2</i>	-21,21	-28,91
<b>Diferença (%)</b>	4,24	50,15

<b>Caso 3.3</b>	-21,70	-13,29
<b>Caso 4.3</b>	-26,42	-26,55
<b>Diferença (%)</b>	17,86	49,94

Tabela 4-11 – Comparativo entre os casos 3 e 4: Momentos fletores máximos na face direita do pilar P5 – MEF e AG - Malha 12,5x12,5cm

Na análise pelo MEF, as menores diferenças entre os casos 3 e 4 ocorreram para os casos 3.2 e 4.2. Ou seja, distribuir a reação do pilar na área da seção transversal fornece bons resultados para os momentos na face do pilar, havendo ou não trechos rígidos na região do pilar. No entanto, na análise por Analogia de Grelha, as diferenças entre os casos 3 e 4 foram expressivas, estando os maiores valores obtidos no caso 4. Dessa forma, a favor da segurança, recomenda-se utilizar o momento para as faces do pilar P5 obtidos do modelo que considera a região do pilar rígida.

O Gráfico 4-36 apresenta os momentos fletores positivos máximos para o maior vão da laje para a malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm, comparando os casos 3 e 4 da análise pelo MEF com a análise por Analogia de Grelha.

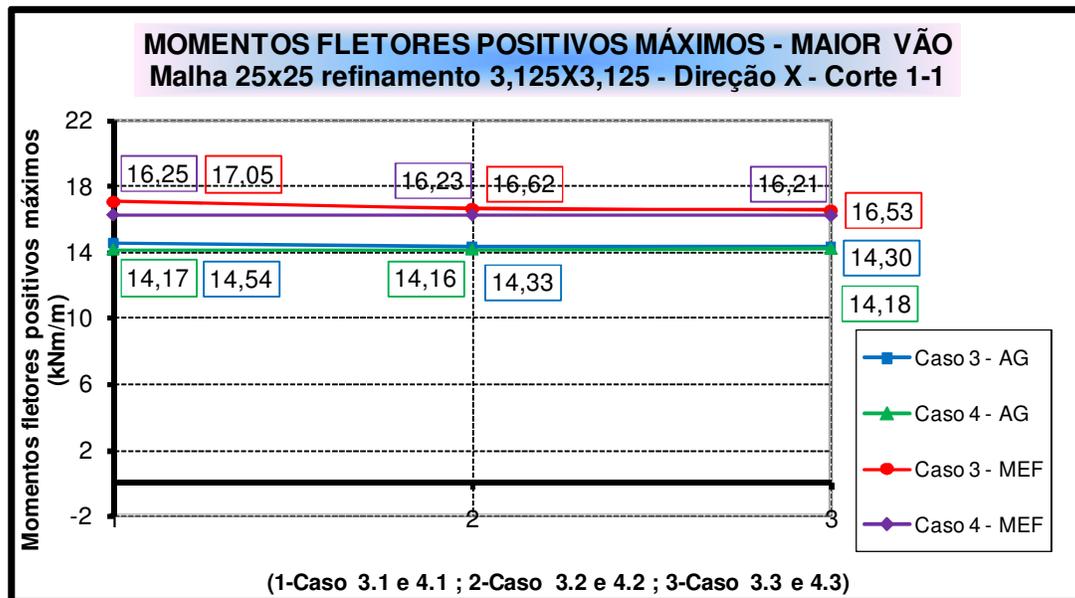


Gráfico 4-36 - Casos 3 e 4 - Comparativo MEF e AG - Momentos fletores positivos máximos

Pode-se notar que as diferenças entre a análise pelo MEF e AG independem do trecho rígido adicionado na região do pilar P5. A maior diferença percentual é de aproximadamente 12%, sendo os valores obtidos pelo MEF maiores. Para as demais malhas, as diferenças também foram praticamente as mesmas.

De acordo com os resultados apresentados até momento, podem-se tirar algumas conclusões parciais acerca dos casos 3 e 4, a citar:

- Os momentos fletores positivos para a malha 25x25cm e os refinamentos na região do pilar foram praticamente iguais em ambas as análises, com ou sem trecho rígido na região do pilar;

- Em relação ao momento na região do pilar P5, ao se adicionar os trechos rígidos (casos 4.1, 4.2 e 4.3), ocorreram concentrações de esforços na região do pilar e, portanto, não puderam ser comparados com os casos 3.1, 3.2 e 3.3. Nesses últimos casos, o diagrama de momento fletor dentro da região do pilar teve um bom comportamento para ambas as análises, estando o máximo valor deslocado do centro do pilar;

- Com relação aos momentos nas faces do pilar P5, o caso 4.1 apresentou bons resultados para ambas as análises, mesmo havendo o problema da singularidade;

- Ainda em relação aos momentos nas faces do pilar P5, caso não se modele a região do pilar com trechos rígidos, o valor obtido para o caso 3.2 da análise pelo MEF se mostrou o mais indicado. Os momentos da laje obtidos nas faces do pilar fornecidos pela análise por Analogia de Grelha em qualquer um dos subcasos do caso 3 foram muito inferiores aos obtidos nos subcasos do caso 4.

#### **4.7. Esforços no pilar P5**

O foco dessa dissertação está em apontar alternativas para solucionar o problema da singularidade que ocorre ao se modelar o apoio de uma laje plana como um nó. Viu-se até então que os momentos fletores na laje tendem ao infinito quanto mais refinada for a malha. Algumas propostas foram apresentadas até o momento para resolver esse problema, em que consiste modelar o pilar como reação distribuída na área da seção transversal.

Analisando o modelo clássico de viga contínua proposto nos exemplos dessa dissertação, em que se tem a continuidade do pilar com a laje modelado com metade do comprimento para cima e metade para baixo (Figura 4-17), quando há o problema da singularidade, além dos momentos da laje tenderem ao infinito, os esforços no pilar causador da punção também são inconsistentes.

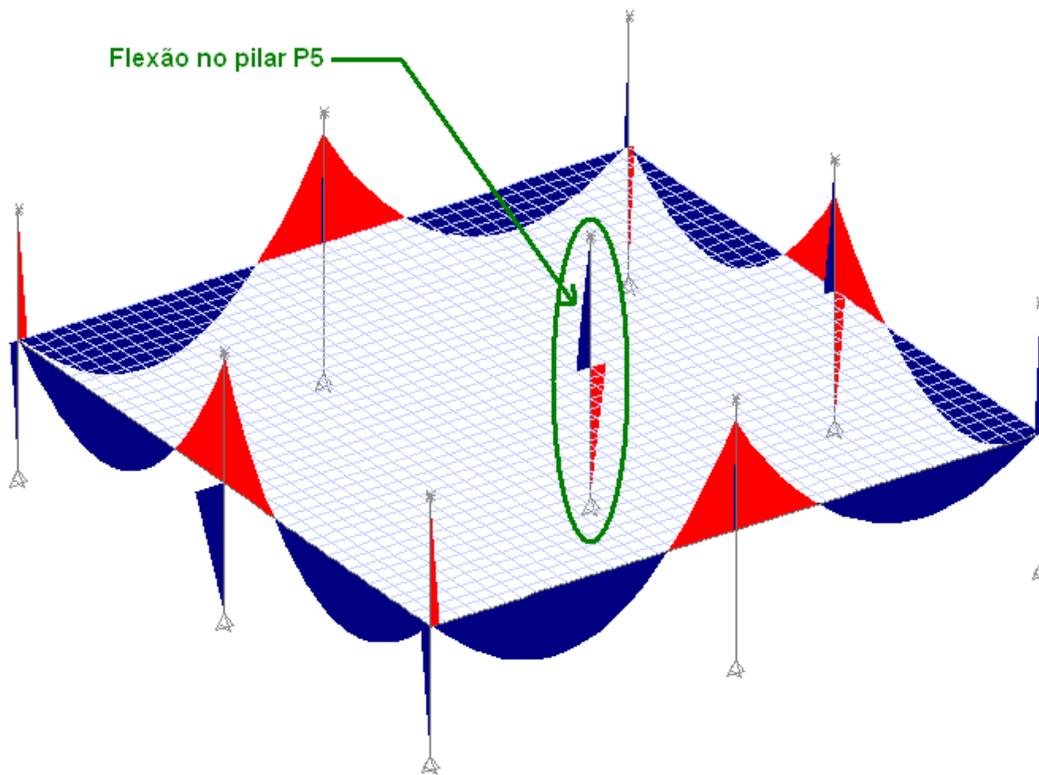


Figura 4-17 – Momentos fletores no pilar P5 para a laje plana com assimetria

Por isso, fez-se um estudo acerca dos esforços normais e momentos fletores do pilar P5. O procedimento proposto nessa dissertação consiste basicamente em distribuir os esforços de flexão combinados com os efeitos normais do pilar P5 como reação na laje, iterando-os de tal forma que o momento fletor no pilar convirja para um valor e que o esforço normal seja nulo (vide itens 3.3.1 e 3.3.2)

Os resultados estão apresentados a seguir, no qual se faz uma análise para cada caso, com e sem simetria, mostrando as diferenças encontradas nas análises pelo MEF e Analogia de Grelha.

#### 4.7.1. Esforço Normal – Casos 1 e 2

Apresenta-se a seguir um estudo relativo ao esforço normal no pilar P5 para os casos 1 e 2. Foram estudadas as malhas 100x100cm, 50x50cm, 25x25cm e 12,5x12,5cm, que correspondem a  $L/10$ ,  $L/20$ ,  $L/40$  e  $L/80$ , respectivamente, sendo “L” o vão da laje na direção X. Os estudos contemplam as análises pelo MEF e por Analogia de Grelha, comparando o modelo em que há singularidade (pilar modelado como apoio pontual) com os modelos em que se distribui a reação do pilar na laje.

O Gráfico 4-37 mostra o esforço normal no pilar P5 para os Casos 1 e 2, considerando a análise pelo MEF.

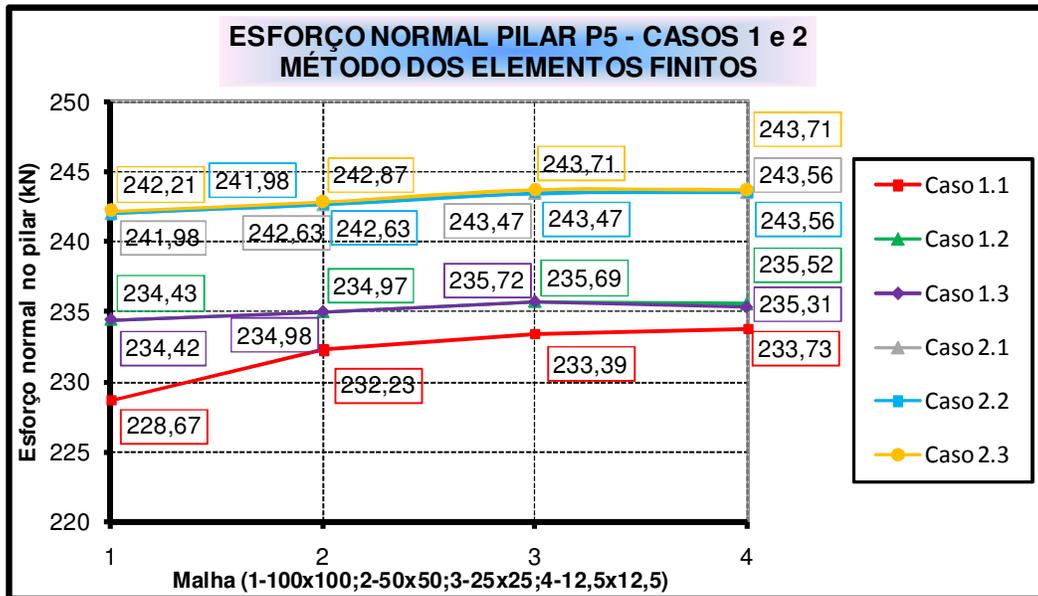


Gráfico 4-37 – Casos 1 e 2 – Esforço normal no pilar P5 - MEF

Pode-se notar que o esforço normal no pilar P5 varia muito pouco com a malha adotada, tanto para o caso 1 como para o caso 2. Diferenças maiores ocorrem ao se comparar o caso 1.1 com 1.2 e 1.3 do que entre o caso 2.1 comparado com 2.2 e 2.3. A adição do trecho rígido faz com o modelo em que o pilar é representado por um ponto fique praticamente igual aos modelos em que se distribui a reação do pilar na área da seção transversal. O esforço normal obtido no caso 2 foi maior que o obtido no caso 1: aproximadamente 3,30% para a malha 12,5x12,5cm.

O Gráfico 4-38 mostra o esforço normal no pilar P5 para os Casos 1 e 2, considerando a análise pelo Processo por Analogia de Grelha.

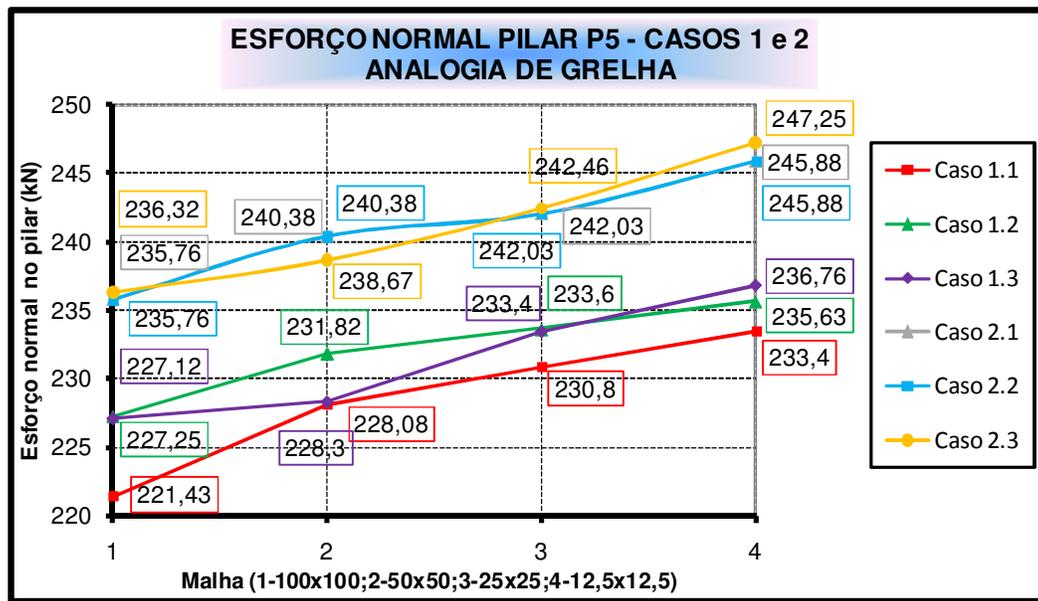


Gráfico 4-38 - Casos 1 e 2 – Esforço normal no pilar P5 - AG

Na análise pelo Processo por Analogia de Grelha, o esforço normal no pilar P5 foi sensível a malha adotada, tanto no caso 1 como no caso 2, sendo os maiores valores obtidos para a malha 12,5x12,5cm. As diferenças entre a malha mais e menos refinada é da ordem de 5,0%. Assim como na análise pelo MEF, o caso 2.1 quando comparado com os casos 2.2 e 2.3 apresentou menores diferenças em relação ao caso 1.1 comparado com os casos 1.2 e 1.3. Ou seja, a adição do trecho rígido faz com que os modelos em que há singularidade resultem em esforços normais no pilar praticamente iguais aos modelos em que se distribui a reação do pilar como carregamento na laje. O esforço normal obtido no caso 2 foi maior que o obtido no caso 1, aproximadamente 4,30% para a malha 12,5x12,5cm.

#### 4.7.2. Comparativo esforços normais no pilar P5 - MEF e Analogia de Grelha - Casos 1 e 2

O Gráfico 4-39 apresenta o comparativo entre o esforço normal no pilar P5 obtido nas análises pelo MEF e Analogia de Grelha para o Caso 1.

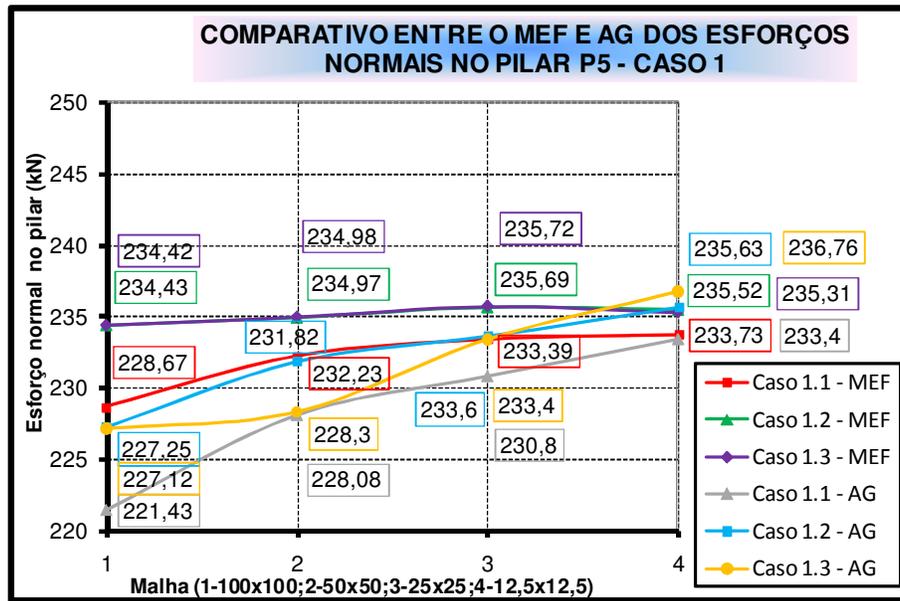


Gráfico 4-39 - Caso 1 – Comparativo esforço normal no pilar P5 – MEF e AG

Pode-se notar que o esforço normal no pilar P5 para os casos 1.2 e 1.3 é menos sensível à malha na análise pelo MEF. O caso 1.1 se mostrou sensível à malha tanto no MEF como na Analogia de Grelha. Atenta-se para a malha 12,5x12,5cm, em que o esforço normal foi praticamente o mesmo em ambas as análises para os casos 1.2 e 1.3. Para as demais malhas, o valor obtido pelo MEF foi superior.

O Gráfico 4-40 apresenta o comparativo entre o esforço normal no pilar P5 obtido nas análises pelo MEF e Analogia de Grelha para o Caso 2.

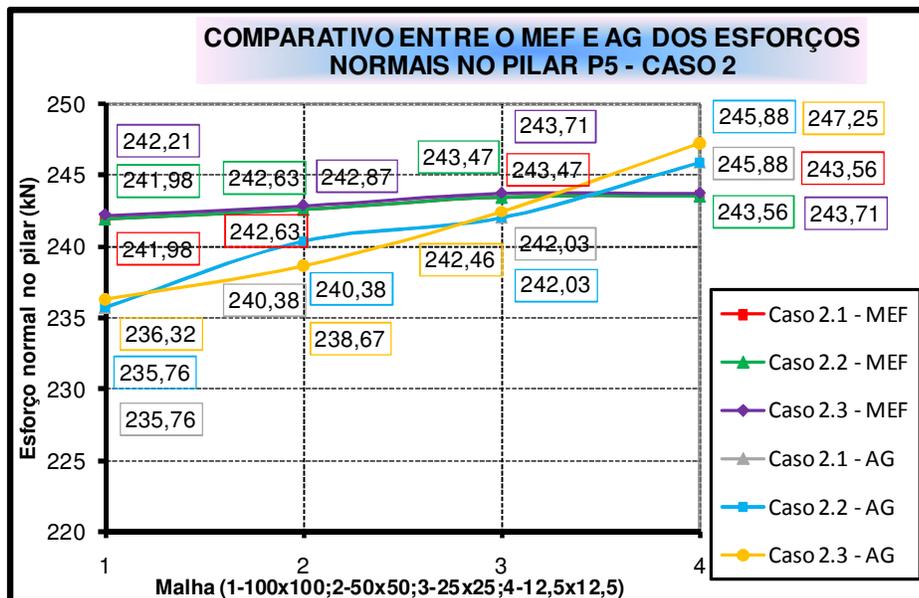


Gráfico 4-40 - Caso 2 – Comparativo esforço normal no pilar P5 – MEF e AG

Assim como no caso 1, o esforço normal no pilar P5 é menos sensível à malha na análise pelo MEF, inclusive para o caso 2.1. Nota-se que o valor obtido pelo MEF é inferior ao obtido por Analogia de Grelha para a malha 12,5x12,5cm. No entanto, isso não acontece para as demais malhas analisadas. As menores diferenças foram encontradas para a malha 25x25cm.

De um modo geral, o esforço normal no pilar P5 dos modelos em que não se tem a região do pilar rígida não apresentaram grandes diferenças (menores que 5,0%) em relação aos modelos em que há essa rigidez. Nas análises pelo Processo por Analogia de Grelha, a sensibilidade em relação à malha foi maior que na análise pelo MEF, no entanto não acarreta em grandes diferenças nos resultados obtidos. Ou seja, em termos de esforço normal no pilar, os resultados apresentados para as malhas analisadas com ou sem trechos rígidos apresentaram resultados semelhantes. Mesmo assim, ressalta-se a importância de se utilizar malhas finas, pois as diferenças entre a análise pelo MEF e por Analogia de Grelha são menores.

#### **4.7.3. Esforço Normal – Casos 3 e 4**

Apresenta-se a seguir um estudo relativo ao esforço normal no pilar P5 para os casos 3 e 4. Foram estudadas as malhas 25x25cm e os refinamentos na região do pilar P5, passando para malhas 12,5x12,5cm, 6,25x6,25cm e 3,125x3,125cm. Os estudos contemplam as análises pelo MEF e por Analogia de Grelha, comparando o modelo em que há singularidade (pilar modelado como apoio pontual) com os modelos em que se distribui a reação do pilar na laje.

O Gráfico 4-41 mostra o esforço normal no pilar P5 para os Casos 3 e 4, considerando a análise pelo MEF.

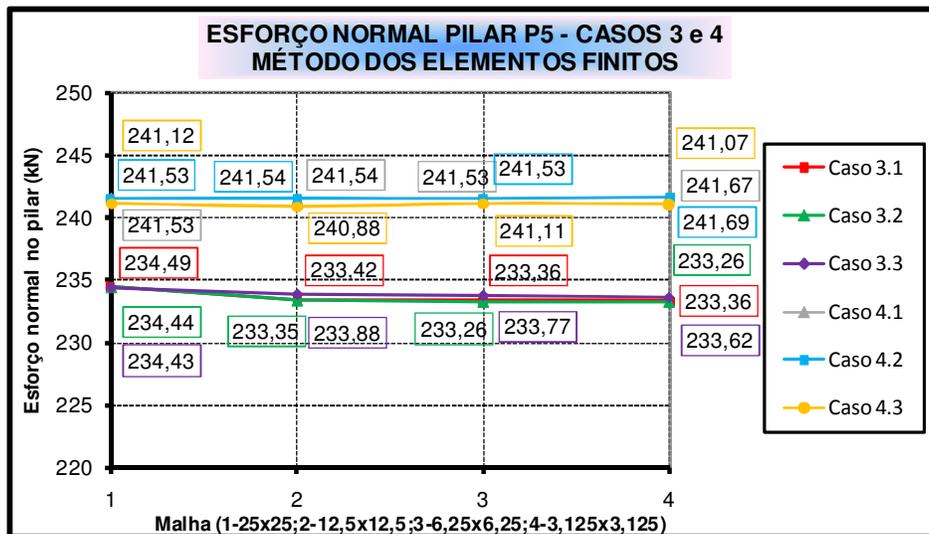


Gráfico 4-41 - Casos 3 e 4 – Esforço normal no pilar P5 - MEF

Pode-se notar que o esforço normal no pilar P5 varia muito pouco com a malha adotada para ambos os casos. O esforço normal obtido no caso 4 foi maior que o obtido no caso 3, aproximadamente 3,0%.

O Gráfico 4-42 mostra o esforço normal no pilar P5 para os Casos 3 e 4, considerando a análise pelo Processo por Analogia de Grelha.

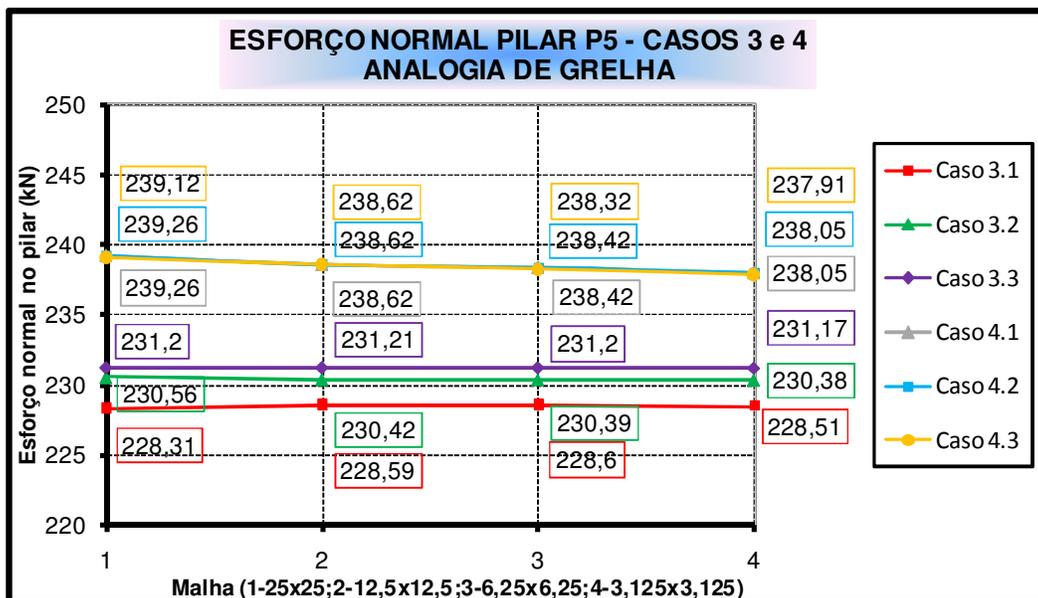


Gráfico 4-42 - Casos 3 e 4 – Esforço normal no pilar P5 – AG

Assim como na análise pelo MEF, o esforço normal no pilar P5 varia muito pouco com a malha adotada para ambos os casos. O esforço normal obtido no caso 4 também foi maior que o obtido no caso 3, mantendo os mesmos 3,0% da análise pelo MEF.

#### 4.7.4. Comparativo esforços normais no pilar P5 - MEF e Analogia de Grelha - Casos 3 e 4

O Gráfico 4-43 apresenta o comparativo entre o esforço normal no pilar P5 obtido nas análises pelo MEF e Analogia de Grelha para o Caso 3.

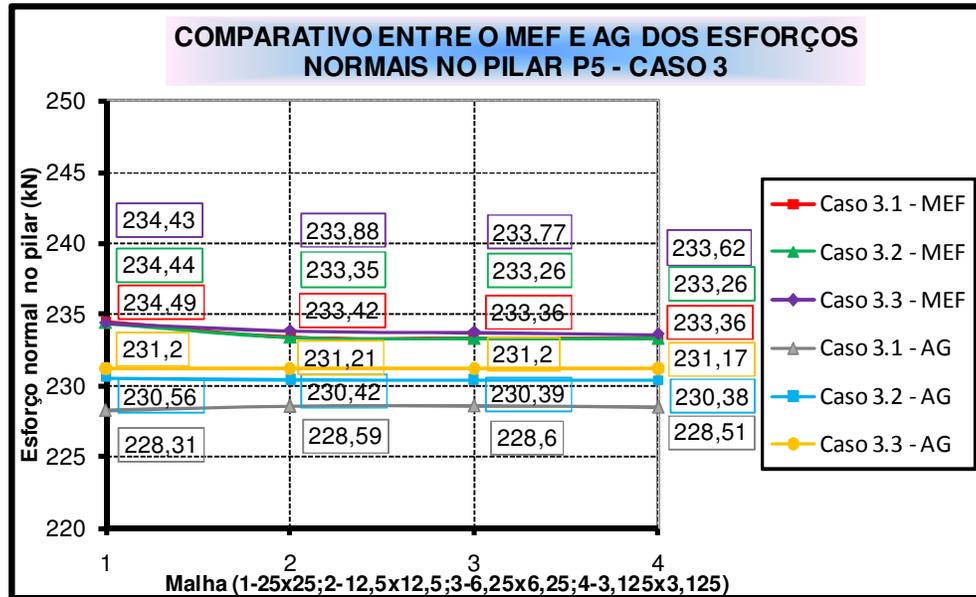


Gráfico 4-43 – Caso 3 - Comparativo esforço normal no pilar P5 – MEF e AG

Nota-se que o esforço normal no pilar P5 obtido pelo MEF foi superior ao obtido por Analogia de Grelha. As diferenças são da ordem de 1,0%.

O Gráfico 4-44 apresenta o comparativo entre o esforço normal no pilar P5 obtido nas análises pelo MEF e Analogia de Grelha para o Caso 4.

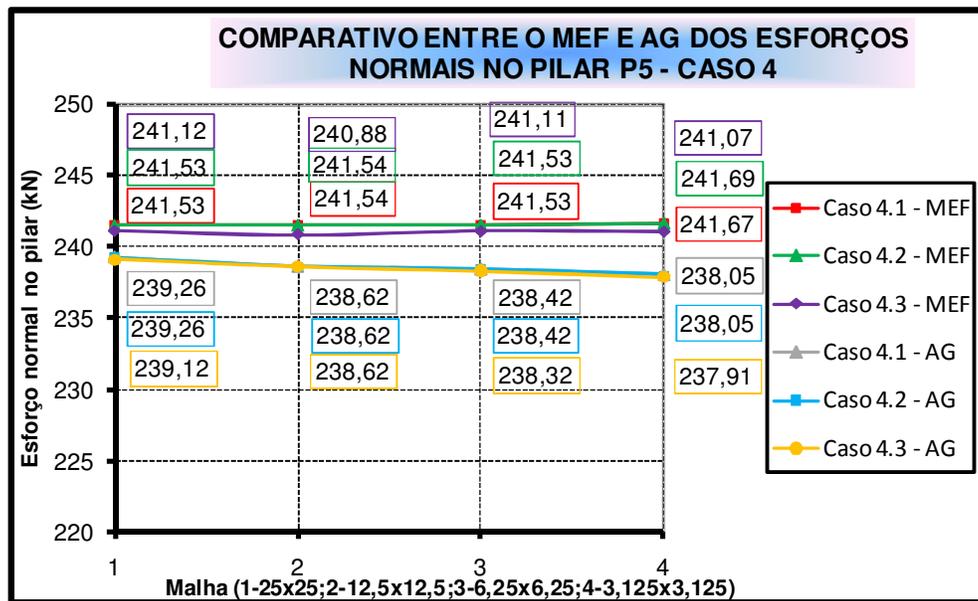


Gráfico 4-44 - Caso 4 - Comparativo esforço normal no pilar P5 – MEF e AG

Assim como no caso 3, o esforço normal obtido pelo MEF foi superior ao obtido por Analogia de Grelha. As diferenças também giram em torno de 1,0%.

O comportamento do esforço normal no pilar P5 quando há assimetria do pilar em relação à laje é praticamente o mesmo entre as malhas analisadas como também entre o MEF e Analogia de Grelha. A adição do trecho rígido na região do pilar P5 também não acarretou diferenças sensíveis, da ordem de 3,0%. Ou seja, os resultados apresentados para as malhas analisadas com ou sem trechos rígidos são satisfatórios.

#### 4.7.5. Momento fletor pilar P5 – Análise pelo MEF – Casos 3 e 4

Apresenta-se a seguir um estudo relativo ao momento fletor no pilar P5 para os Casos 3 e 4. Estudaram-se as malhas 25x25cm e os refinamentos na região do pilar P5, passando para malhas 12,5x12,5cm, 6,25x6,25cm e 3,125x3,125cm, que correspondem a L/40, L/80, L/160 e L/320, respectivamente, sendo “L” o vão da laje na direção X. Há um comparativo entre o modelo em que há singularidade (pilar modelado como apoio pontual) com os modelos em que se distribui a reação do pilar na laje. Vale frisar que nos casos 1 e 2 o pilar P5 é simétrico em relação a laje e, portanto, não há flexão no elemento devido a compatibilidade das deformações no centro da laje plana.

O Gráfico 4-45 apresenta os momentos fletores no pilar P5 considerando a análise pelo MEF.

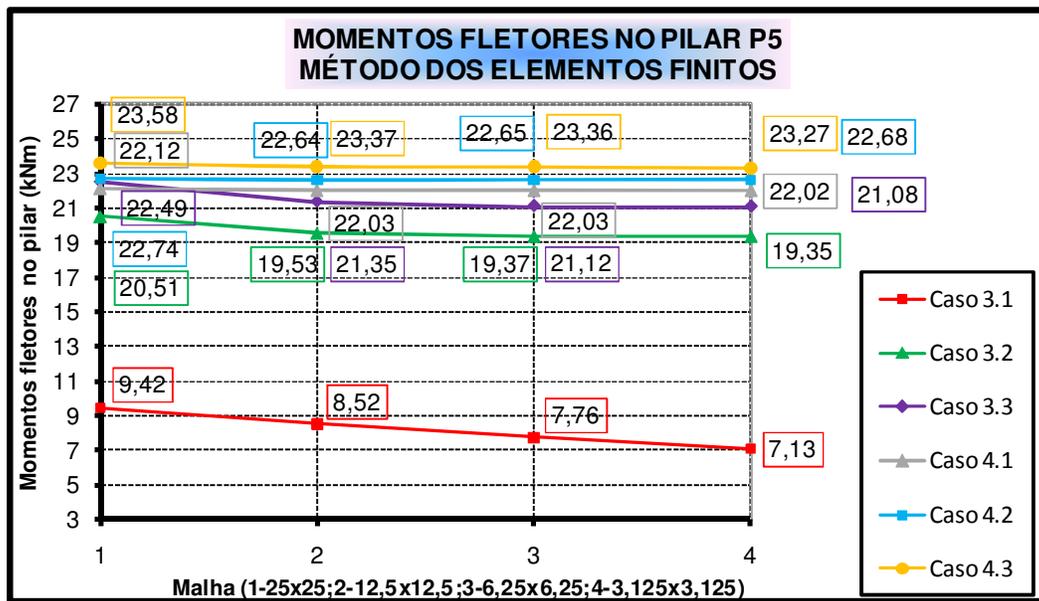


Gráfico 4-45 - Casos 3 e 4 - Momentos fletores no pilar P5 – MEF

De um modo geral, os momentos fletores no pilar P5 para o caso 4 foram superiores aos obtidos pelo caso 3, em média 10% maiores. Ademais, os casos 3.3 e 4.3 resultaram em momentos maiores quando comparados com os casos 3.2 e 4.2, respectivamente. A diferença para a malha 3,125x3,125cm foi de 8,0% do caso 3.3 em relação ao caso 3.2 e de 3,0% do caso 4.3 em relação ao caso 4.2. Portanto, os modelos em que o trecho do pilar P5 é rígido conduzem a diferenças menores ao se distribuir a reação do pilar na área da seção transversal em relação à distribuição da reação do pilar na área da seção transversal projetada no centro de gravidade da laje.

Outra situação está ao comparar os casos 3.2 e 3.3 com 3.1 e os casos 4.2 e 4.3 com 4.1. Percebe-se que no caso 4.1, apesar de haver o problema da singularidade, os momentos no pilar P5 não são muito diferentes dos casos 4.2 e 4.3, fato esse que não acontece no caso 3, conforme apresentado no Gráfico 4-46.

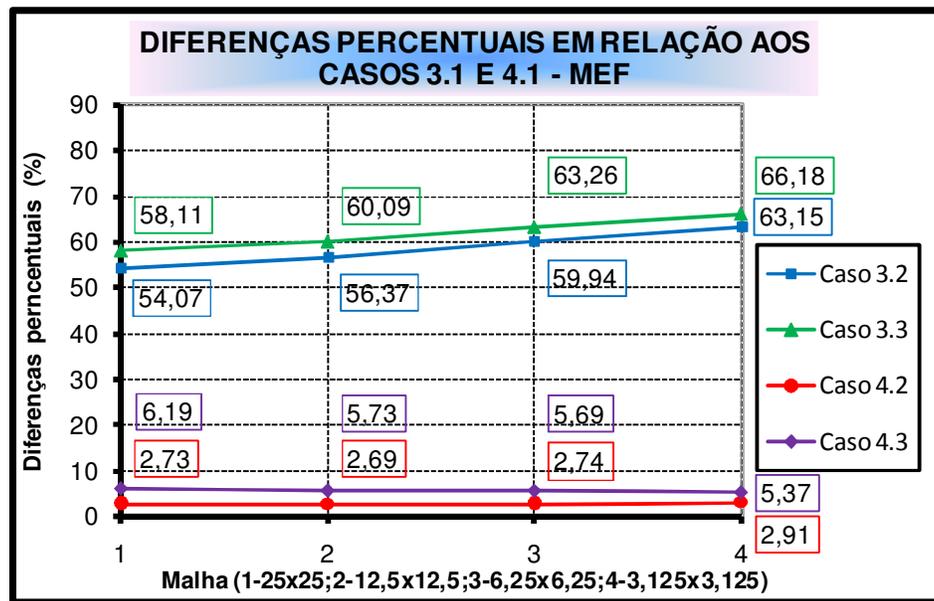


Gráfico 4-46 - Diferenças percentuais momento fletor P5 em relação aos casos 3.1 e 4.1 – MEF

Pode-se notar que para o caso 3 as diferenças aumentam na medida em que se refina a malha na região do pilar P5, ao passo que no caso 4 as diferenças são praticamente constantes e bem menores. O valor chega a quase 70% ao comparar o caso 3.3 com o caso 3.1. No entanto, a mesma comparação no caso 4 é de 5,37%.

#### 4.7.6. Momento fletor pilar P5 – Análise por analogia de grelha – Casos 3 e 4

Assim como na análise por MEF, fez-se aqui o mesmo comparativo e para a mesma malha inicial com seus refinamentos sucessivos.

O Gráfico 4-47 apresenta os momentos fletores no pilar P5 considerando a análise por Analogia de Grelha.

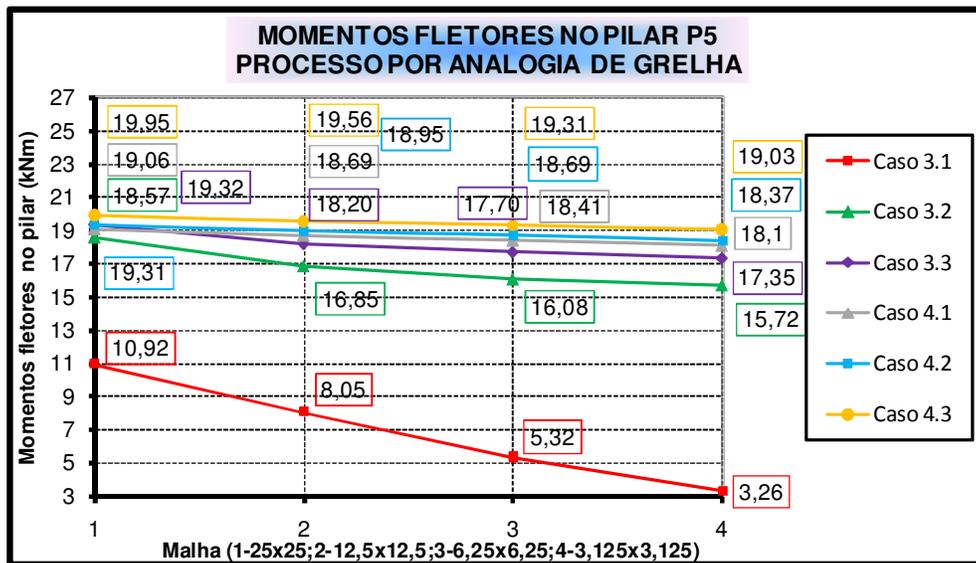


Gráfico 4-47 - Casos 3 e 4 - Momentos fletores no pilar P5 – AG

As conclusões obtidas da análise pelo Processo por Analogia de Grelha para o momento fletor no pilar P5 são as mesmas obtidas na análise pelo MEF. Houve um comportamento parecido, apenas com valores diferentes. Vale destacar as diferenças encontradas no comparativo entre os casos 3.2 e 3.3 com 3.1 e os casos 4.2 e 4.3 com 4.1 estão apresentadas no Gráfico 4-48.

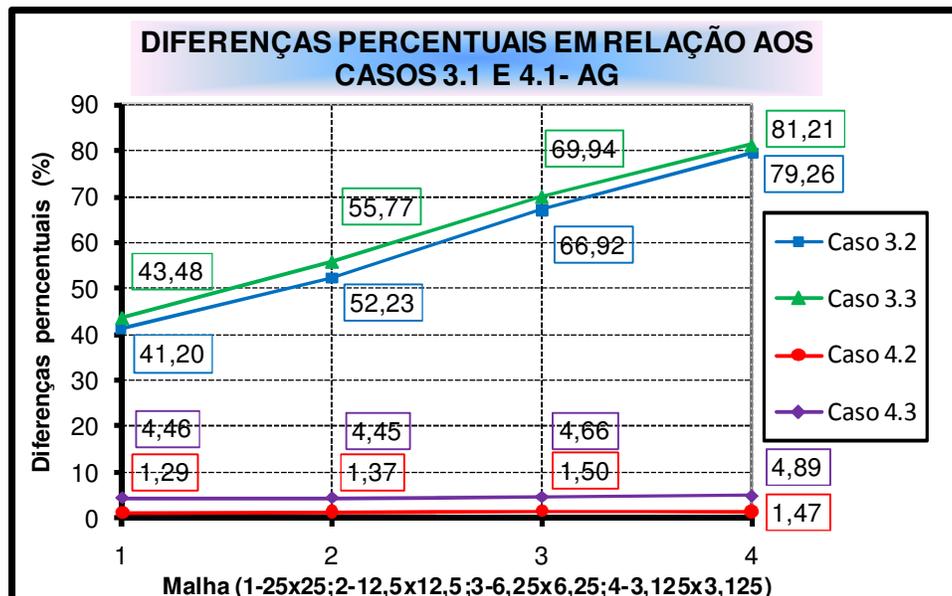


Gráfico 4-48 - Diferenças percentuais momento fletor P5 em relação aos casos 3.1 e 4.1 – AG

Assim como na análise pelo MEF, as diferenças para o caso 3 aumentam na medida em que se refina a malha na região do pilar P5, ao passo que no caso 4 as diferenças

são praticamente constantes e bem menores. O valor chega a quase **82%** ao comparar o caso 3.3 com o caso 3.1. No entanto, a mesma comparação no caso 4 é de **4,89%**.

#### 4.7.7. Comparativo momento fletor no pilar P5 - MEF e Analogia de Grelha – Casos 3 e 4

O Gráfico 4-43 apresenta o comparativo entre o momento fletor no pilar P5 obtido nas análises pelo MEF e Analogia de Grelha para o Caso 3.

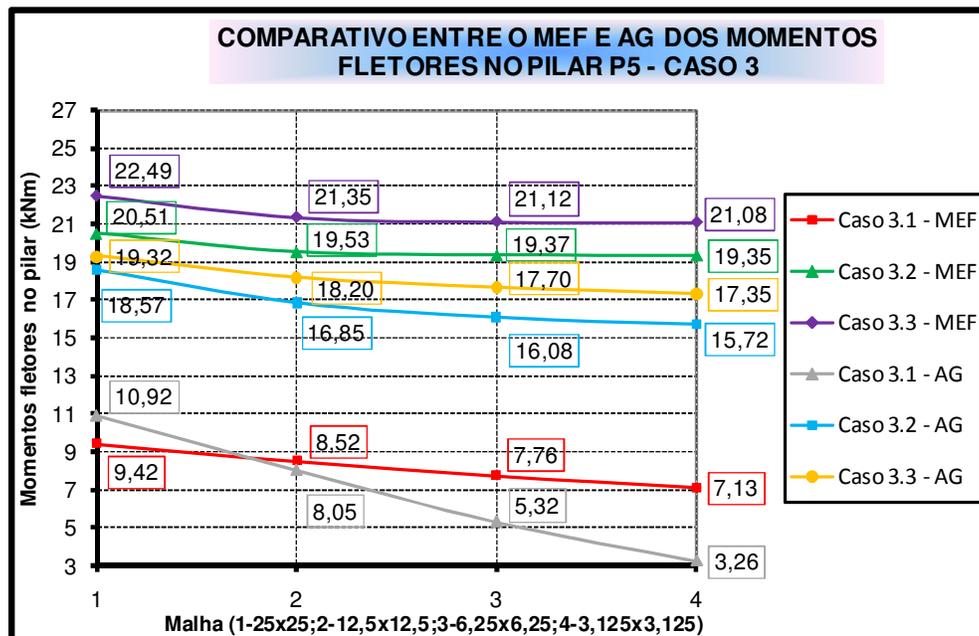


Gráfico 4-49 – Caso 3 - Comparativo momento fletor no pilar P5 – MEF e AG

Pode-se notar que os momentos fletores do pilar P5 são maiores na análise pelo MEF para todas as malhas, com exceção do caso 3.1. As diferenças são em média **18%**. A sensibilidade dos resultados em relação à malha é parecida tanto na análise pelo MEF como por Analogia de Grelha, com exceção novamente do caso 3.1.

O Gráfico 4-50 apresenta o comparativo entre o momento fletor no pilar P5 obtido nas análises pelo MEF e Analogia de Grelha para o Caso 4.

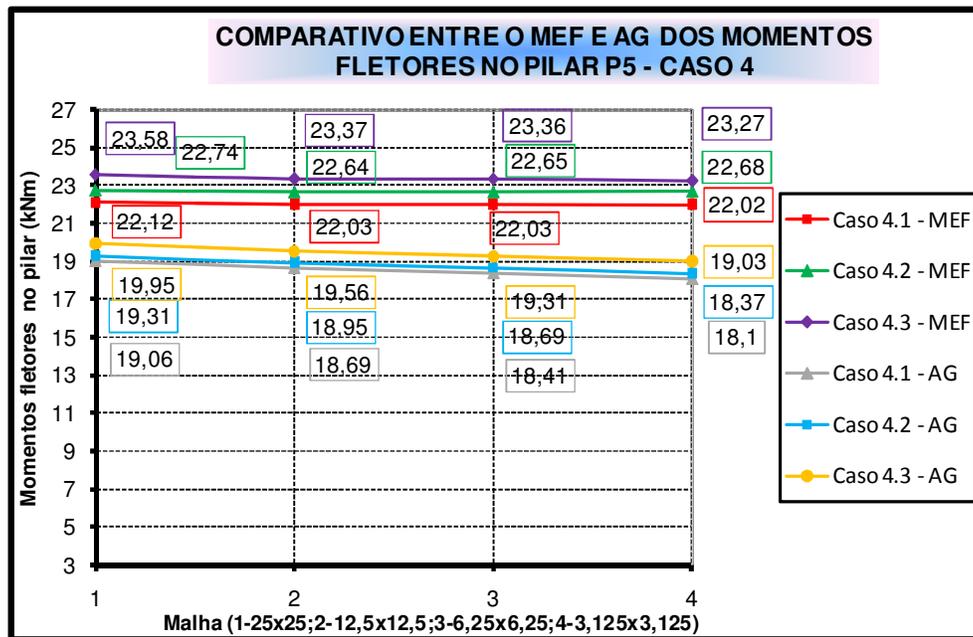


Gráfico 4-50 – Caso 4 - Comparativo momento fleter no pilar P5 – MEF e AG

Assim como no caso 3, os momentos fletores do pilar P5 são maiores na análise pelo MEF para todas as malhas. As diferenças são em média **18%**, assim como no caso 3. Ou seja, a adição do núcleo rígido na região do pilar P5 aponta as mesmas diferenças encontradas no caso 3, porém com valores maiores. A sensibilidade dos resultados em relação à malha é parecida tanto na análise pelo MEF como por Analogia de Grelha.

O comparativo mostrado a seguir tem por objetivo apresentar as diferenças ocorridas entre os casos 3 e 4 para os momentos fletores no pilar P5 para a malha 3,125x3,125cm, considerando a análise pelo MEF e por Analogia de Grelha. A Tabela 4-12 apresenta os valores desse comparativo.

<i>COMPARATIVO CASOS 3 E 4 - Momentos Fletores Pilar P5</i>		
<i>MALHA 3,125X3,125cm</i>		
<i>Casos</i>	<i>MEF</i> <i>(kNm/m)</i>	<i>Analogia de Grelha</i> <i>(kNm/m)</i>
<i>Caso 3.1</i>	7,13	3,26
<i>Caso 4.1</i>	22,02	18,10
<i>Diferença (%)</i>	67,62	81,99

<i>Caso 3.2</i>	19,35	15,72
<i>Caso 4.2</i>	22,68	18,37
<i>Diferença (%)</i>	14,68	14,42
<i>Caso 3.3</i>	21,08	17,35
<i>Caso 4.3</i>	23,37	19,03
<i>Diferença (%)</i>	9,80	8,83

Tabela 4-12 – Comparativo entre os casos 3 e 4: Momentos fletores Pilar P5 – MEF e AG - Malha 3,125x3,125cm

As diferenças entre os casos 3.2 e 4.2 e 3.3 e 4.3 em ambas as análises são parecidas, sendo na primeira comparação em média **14,50%** e na segunda comparação em média **9,00%**, sendo os valores obtidos nos modelos em que se tem o trecho rígido na região do pilar maiores. No entanto, as diferenças entre os casos 3.1 e 4.1 são enormes em ambas as análises, sendo os momentos obtidos no caso em que não se tem a região do pilar rígida bem menores, e não recomendados para serem utilizados em projetos.

De acordo com os resultados apresentados até momento, podem-se tirar algumas conclusões parciais acerca dos momentos no pilar P5 obtidos nos casos 3 e 4, a citar:

- Em ambas as análises, o caso 3.1 não forneceu bons resultados. O fato de modelar a região do pilar sem o trecho rígido fez com que o momento fletor no pilar P5 diminuísse abruptamente ao refinar a malha na região do pilar. Quanto mais elementos dentro do pilar com rigidezes pequenas, pior fica o modelo, fato ocorrido para o refinamento de 3,125cm;

- Em ambas as análises, o caso 4.1, apesar de haver o problema da singularidade, apresentou resultados satisfatórios para o momento fletor no pilar P5;

- Em ambas as análises, se a opção for distribuir a reação do pilar como carregamento na laje, o caso 3.3 e o caso 4.2 são os mais indicados.

Cabe comentar que o procedimento proposto nessa dissertação de iterar a reação do pilar P5 distribuída na laje convergiu com mais rapidez para os esforços normais do que para os momentos fletores.

## 5. TÓPICO ESPECIAL - SOFTWARE EBERICK

O *software* AltoQiEberick V5 Gold é destinado ao projeto estrutural de edificações em concreto armado. As vigas e os pilares da edificação constituem um sistema reticular de Pórtico Espacial, do qual se obtém os esforços internos resultantes que são utilizados para o dimensionamento dos elementos estruturais. As lajes são analisadas pelo Processo por Analogia de grelha, levando em consideração a rigidez real das vigas.

A versão Gold cria os modelos de grelha dos pavimentos e do pórtico espacial levando em conta a seção dos pilares e criando automaticamente trechos rígidos nas vigas, considerando as excentricidades de forma no modelo.

Utilizou-se nessa dissertação o Eberick V5 Gold na revisão R15, que é a revisão mais atual desta versão até o presente momento. Procurou-se reproduzir no programa o mesmo exemplo analisado no *software* SAP 2000, em que se tem a continuidade do pilar com a laje plana através do modelo clássico de viga contínua, modelando metade do pilar para cima da laje e metade para baixo.

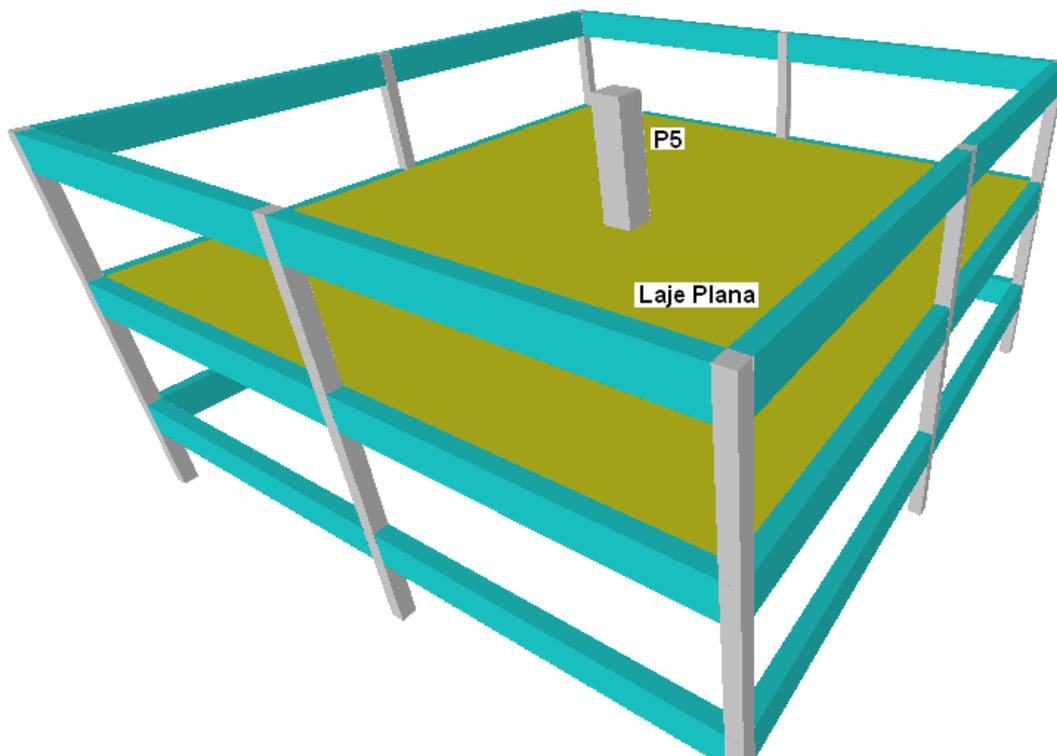


Figura 5-1 – Vista 3D do modelo gerado no software Eberick V5 Gold

No modelo adotado pelo Eberick, a conexão das barras da grelha ao pilar é feita pela inclusão de uma barra rígida, sendo este um elemento de grande rigidez. As barras da grelha têm um prolongamento dentro do pilar, a partir da face deste, de 30% da altura da laje, conforme definido no item 14.6.2.1 da NBR 6118:2003. A rigidez à flexão do pilar considerada pelo programa é a de uma barra bi-engastada de comprimento igual à altura do pavimento. Dessa forma, o programa substituiu o pilar por uma mola de igual rigidez.

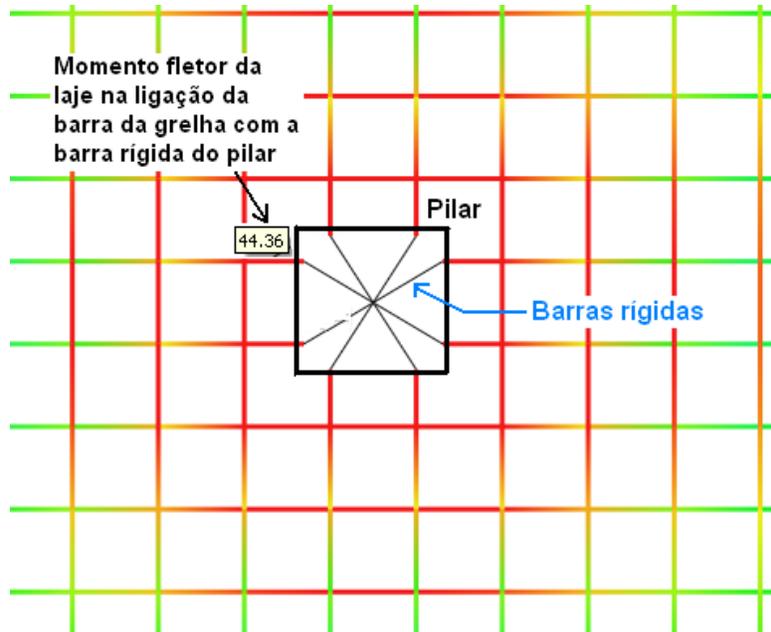


Figura 5-2 – Ligação das barras da grelha da laje com as barras rígidas do pilar

Nos modelos analisados no SAP 2000, modelou-se metade do pilar para cima e metade do pilar para baixo, nesse caso, 200cm. Para manter essa equivalência no Eberick de forma a conseguir o mesmo coeficiente “k” da mola adotado no SAP 2000, lançou-se uma estrutura com altura entre pavimentos igual a 133,33 cm, conforme mostrado a seguir:

$$k_{mola\ SAP} = \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{sup}}{L_{sup} / 2} + \frac{3 \cdot E_{cs} \cdot I_{inf}}{L_{inf} / 2} = \frac{12 \cdot E_{cs} \cdot I}{L_{SAP}}$$

$$k_{mola\ Eberick} = \frac{4 \cdot E_{cs} \cdot I}{L_{Eberick}}$$

$$\frac{k_{mola\ Eberick}}{k_{mola\ SAP}} = \frac{\frac{4 \cdot E_{cs} \cdot I}{L_{Eberick}}}{\frac{12 \cdot E_{cs} \cdot I}{L_{SAP}}} = \frac{4}{12} \cdot \frac{L_{SAP}}{L_{Eberick}} = 0,333 \cdot \frac{L_{SAP}}{L_{Eberick}}$$

$$L_{Eberick} = 0,333 \cdot L_{SAP} = 0,333 \cdot 400 = 133,33 \text{ cm} \quad [EQ. 5-1]$$

O momento fletor da laje adotado nessa dissertação para comparar com os modelos do SAP 2000 foram obtidos através do máximo valor da barra da grelha que se conecta ao trecho rígido do pilar. Geralmente esse valor máximo ocorre na quina do pilar e no centro da aresta. Por consequência, os esforços no pilar que gera punção na laje (P5) são obtidos a partir dessa ligação. A quantidade de barras da grelha que se conecta ao pilar é função da discretização da malha. Quanto mais refinada for a malha maior será o número de conexões. Por fim, utilizou-se o valor para o parâmetro “ $\alpha$ ” da relação  $Jp = \alpha \cdot I$  como sendo igual a dois, igual o valor adotado nos modelos analisados no SAP 2000.

O Eberick gera a malha automaticamente, da seguinte forma: a primeira barra dista do centro da viga metade do espaçamento configurado pelo usuário. A partir daí, segue-se a discretização imposta, fazendo-se as compensações necessárias para ajustar com as dimensões da laje, mantendo espaçamentos equidistantes. No caso do *software* SAP 2000, o lançamento da malha é realizado pelo usuário.

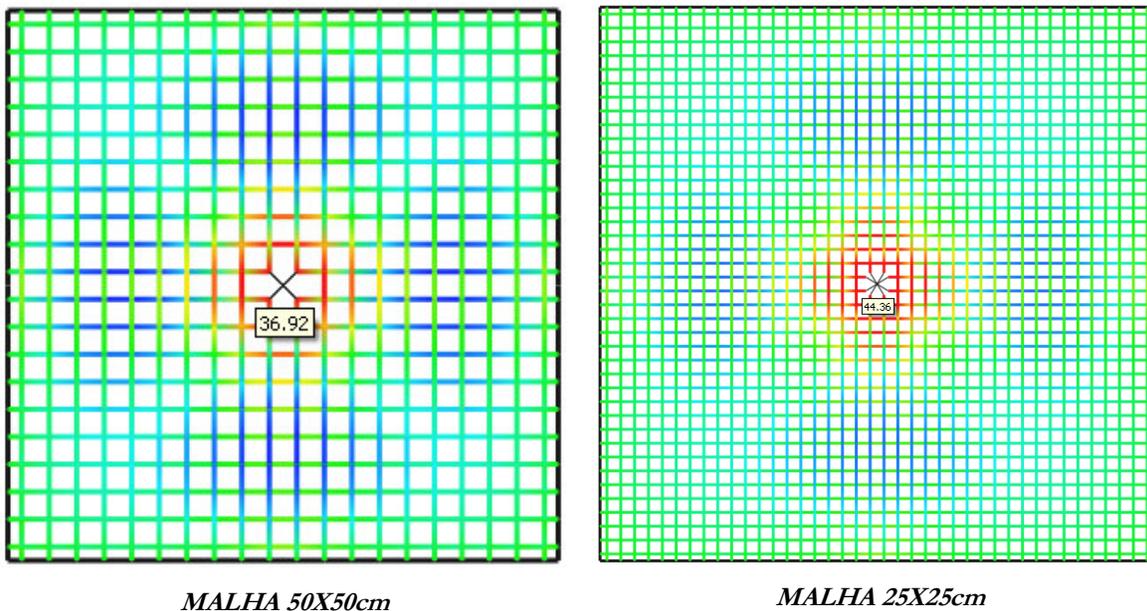
Os exemplos estudados nos Casos 1, 2, 3 e 4 foram analisados também no Eberick V5 Gold R15, com as mesmas considerações de carregamentos, espaçamento das malhas, dimensões e espessura da laje, seção transversal e comprimento do pilar, entre outras. No entanto, o lançamento da malha no SAP 2000 foi um pouco diferente do realizado pelo Eberick: a partir do eixo da viga a primeira barra já inicia com o espaçamento da malha. Com isso sempre existe um barra que passa pelo centro do pilar, uma vez que a laje tem 10x10m e as malhas possuem espaçamentos proporcionais a essa dimensão, sem a necessidade de ajustes na discretização. Os resultados são apresentados a seguir, analisados somente para o Eberick V5 Gold R15 como também comparados com os modelos gerados no SAP 2000.

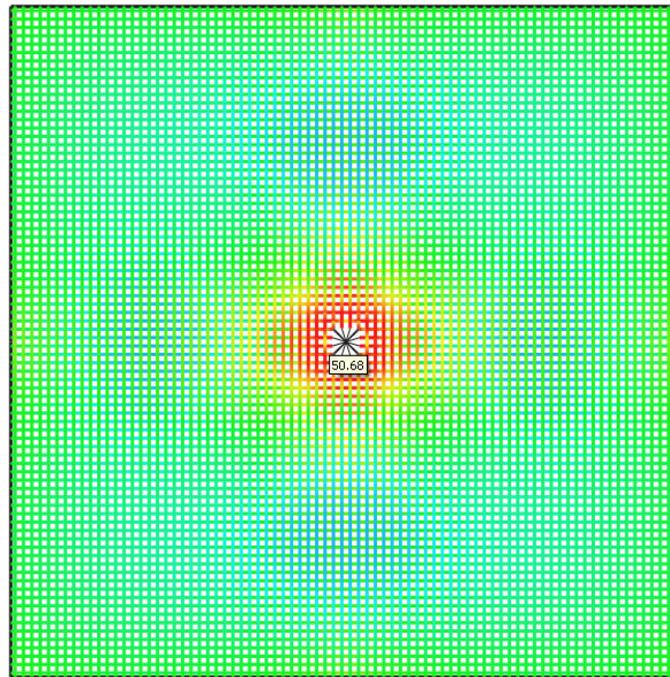
Os casos nos modelos gerados no Eberick foram chamados de Caso 1 e 2 e Caso 3 e 4. Ou seja, aglutinou-se os casos 1 e 2 e 3 e 4, pois o modelo do Eberick considera obrigatoriamente o trecho rígido na região do pilar P5, não sendo possível deixar essa região com a mesma rigidez do restante da placa. Outro fato relevante está nos momentos fornecidos pelo Eberick para a laje: eles estão situados próximos da face do pilar P5, distante desta e em direção ao centro do pilar, 30% da altura da laje, conforme mostrado na Figura 3-23 e Figura 3-24. Considerando que o pilar tem dimensões 50x50cm, o trecho rígido fica com dimensões 40,4x40,4cm, ou seja, distante aproximadamente 5,0 cm de cada face do pilar P5. Os valores adotados no SAP 2000 foram exatamente na face do pilar P5.

Vale uma ressalva: a malha 100x100cm, utilizada nos Casos 1 e 2 e a malha 3,125x3,125cm utilizada nos Casos 3 e 4 não foram analisadas no Eberick. No caso da malha 100x100cm, por se tratar de uma discretização muito grande, nenhuma barra da grelha se conecta ao pilar, não havendo ligação da laje com o pilar. Para a malha 3,125x3,125cm, a discretização mínima permitida no programa é de 5 cm. Ainda, as malhas 50x50cm, 25x25cm, 12,5x12,5cm e 6,25x6,25cm correspondem a  $L/20$ ,  $L/40$  e  $L/80$  e  $L/160$ , respectivamente, sendo “L” o vão da laje na direção X.

### 5.1. Momentos fletores na laje

A Figura 5-3 apresenta os momentos fletores da laje plana para os casos 1 e 2.





MALHA 12,5X12,5cm

Figura 5-3 – Casos 1 e 2 - Momentos fletores na laje plana analisada pelo Eberick

Nos próximos gráficos, para o Caso 1 e 2 a malha utilizada foi, da esquerda para a direita, 1-50x50cm, 2-25x25cm e 3-12,5x12,5cm. No Caso 3 e 4, as malhas foram 1-25x25cm, 2-12,5x12,5cm e 3-6,25x6,25cm.

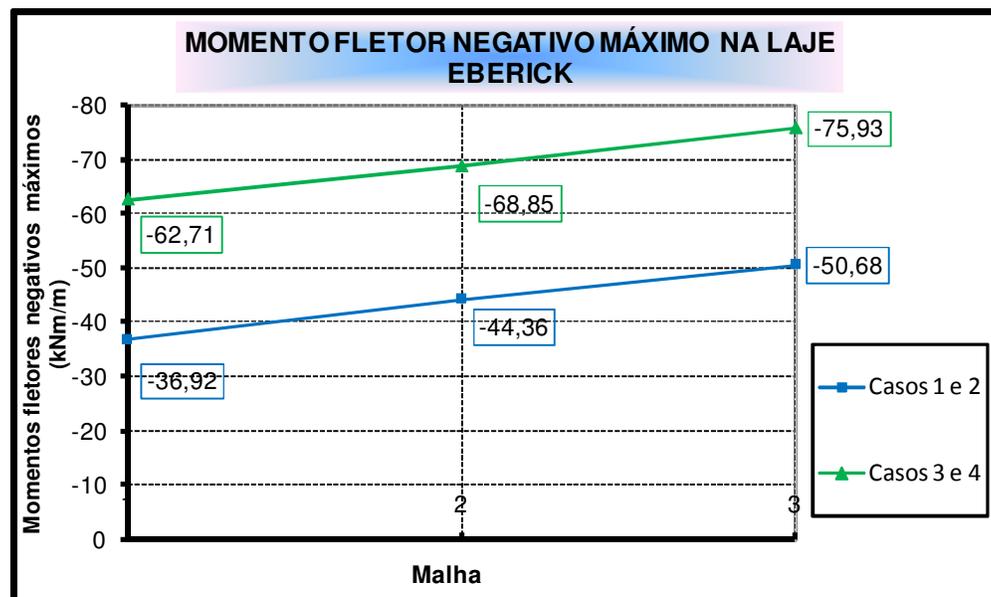


Gráfico 5-1 – Momento fletor negativo máximo sobre o pilar P5 – Casos 1 e 2, 3 e 4 – EB

Pode-se notar que os valores mostraram-se sensíveis à malha, aumentando na medida em que se refinou a malha. Para o Caso 1 e 2 houve um aumento da ordem de 27% e para o Caso 3 e 4 o aumento foi da ordem de 17%.

O Gráfico 5-2 apresenta os momentos fletores positivos máximos da laje plana para o maior. No Caso 1 e 2, como há simetria, o vão à esquerda do P5 é igual ao da direita e, por isso, os valores são os mesmos.

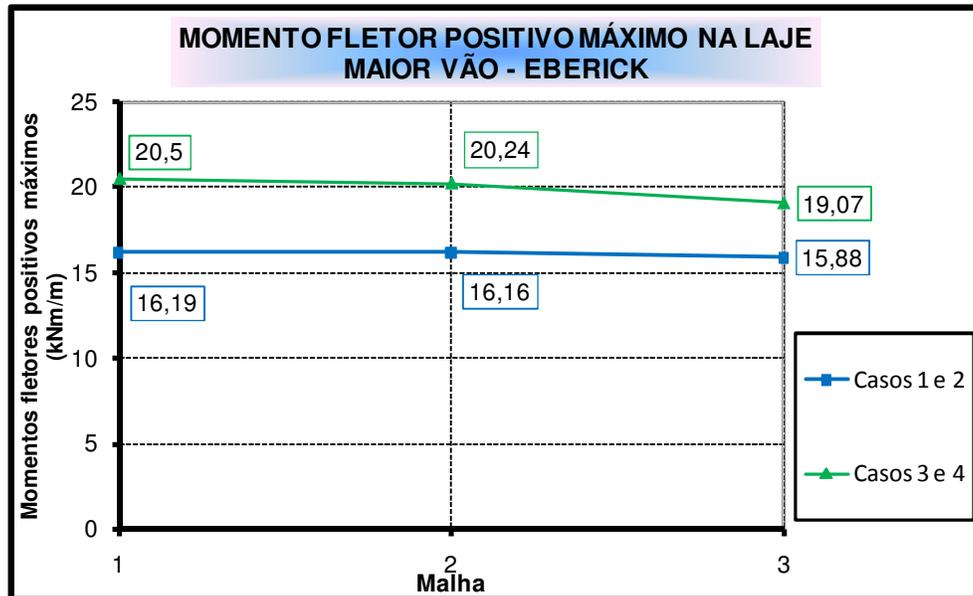


Gráfico 5-2 - Momento fletor positivo máximo no maior vão da laje – Casos 1 e 2, 3 e 4 - EB

Os momentos são praticamente os mesmos, independente da malha utilizada. As maiores diferenças ocorreram para os Caso 3 e 4, da ordem de 6,5%. Para o Caso 1 e 2, a diferença foi de apenas 2,0%.

## 5.2. Esforços no pilar P5

Apresentam-se a seguir os esforços no pilar P5, causador da punção na laje. Conforme já informado, para o Caso 1 e 2 a malha utilizada foi, da esquerda para a direita, 1-50x50cm, 2-25x25cm e 3-12,5x12,5cm. No Caso 3 e 4, as malhas foram 1-25x25cm, 2-12,5x12,5cm e 3-6,25x6,25cm.

### 5.2.1. Esforço normal

Os esforços normais mostraram-se pouco sensíveis a malha utilizada, independente de haver ou não simetria do pilar em relação a laje, conforme Gráfico 5-3. A maior diferença foi de 1,30% para o Caso 1 e 2.

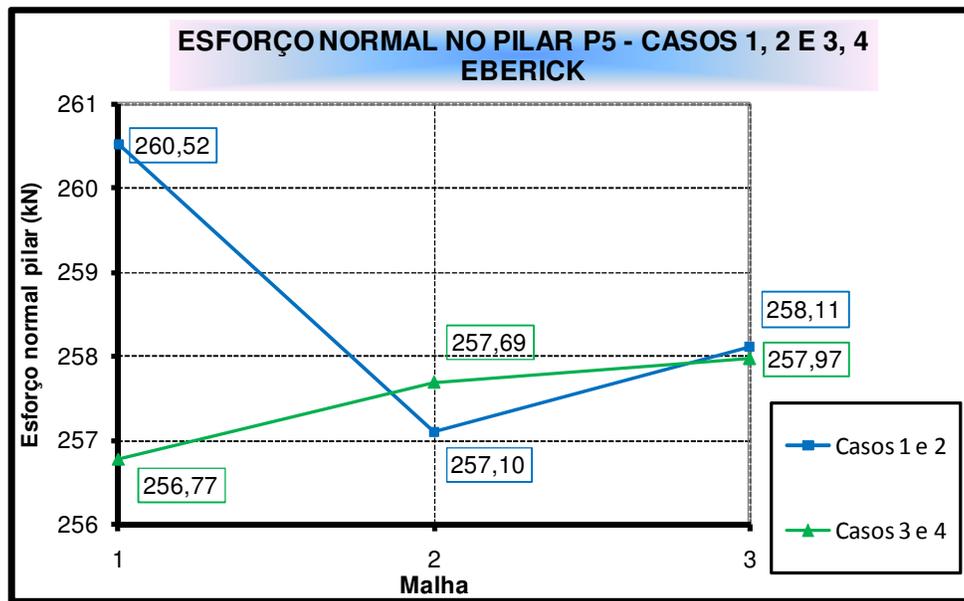


Gráfico 5-3 – Esforço normal no pilar P5 – Casos 1 e 2, 3 e 4 – EB

### 5.2.2. Momento fletor

Os momentos fletores no pilar P5 ocorreram somente no Caso 3 e 4, em que há assimetria. Pode-se notar que os valores foram sensíveis à malha, aumentando na medida em que se diminui a discretização, conforme Gráfico 5-4. A diferença entre a malha 25x25cm e 6,25x6,25cm foi de 29,95%.

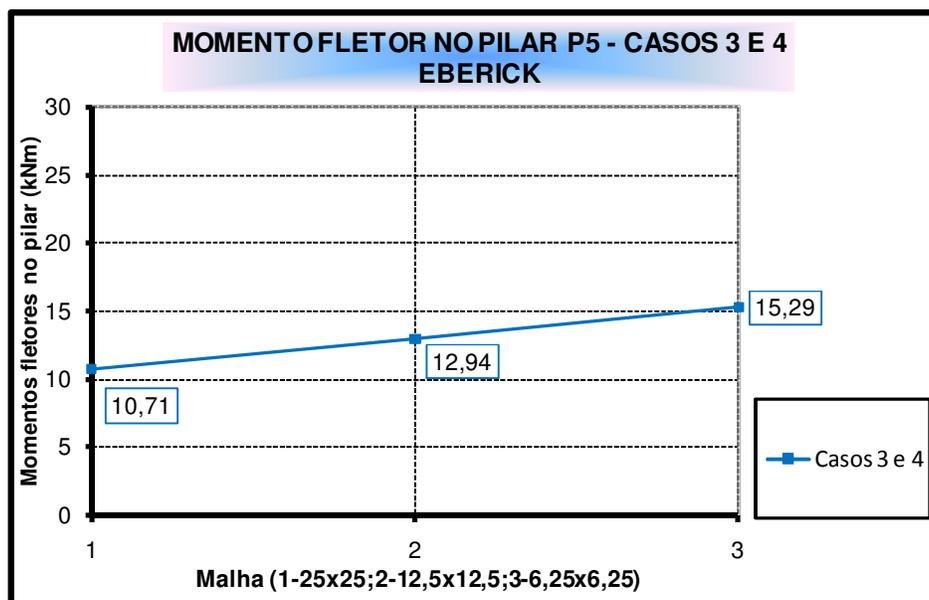


Gráfico 5-4 – Momento fletor no pilar P5 – Caso 3 e 4 – EB

### 5.3. Comparativo com os modelos analisados com o software SAP 2000

Conforme já informado, o Eberick analisa as lajes através do Processo por Analogia de Grelha. Dessa forma, os valores obtidos no programa serão comparados com os modelos gerados no SAP 2000. Cada caso será analisado isoladamente, comparando os momentos fletores na laje e os esforços no pilar P5. Os resultados serão apresentados na forma de gráficos. Abaixo de cada gráfico haverá uma tabela apontando as diferenças encontradas entre os modelos gerados no SAP 2000 em relação ao Eberick nas análises pelo MEF e por Analogia de Grelha, considerando os casos 1, 2, 3 e 4. Diferenças positivas indicam que os valores do Eberick são superiores e diferenças negativas indicam o contrário.

#### 5.3.1. Momentos fletores negativos na laje

Conforme já informado, os momentos fletores fornecidos pelo Eberick para a laje plana se encontram próximos das faces do pilar P5, distante desta e em relação ao centro do pilar 30% da espessura da laje. Portanto, os valores obtidos nos modelos gerados no SAP 2000 e apresentados nos gráficos a seguir representam a face esquerda do pilar P5.

O Gráfico 5-5 apresenta o comparativo dos momentos fletores negativos máximos na face do pilar P5, considerando o caso 1.

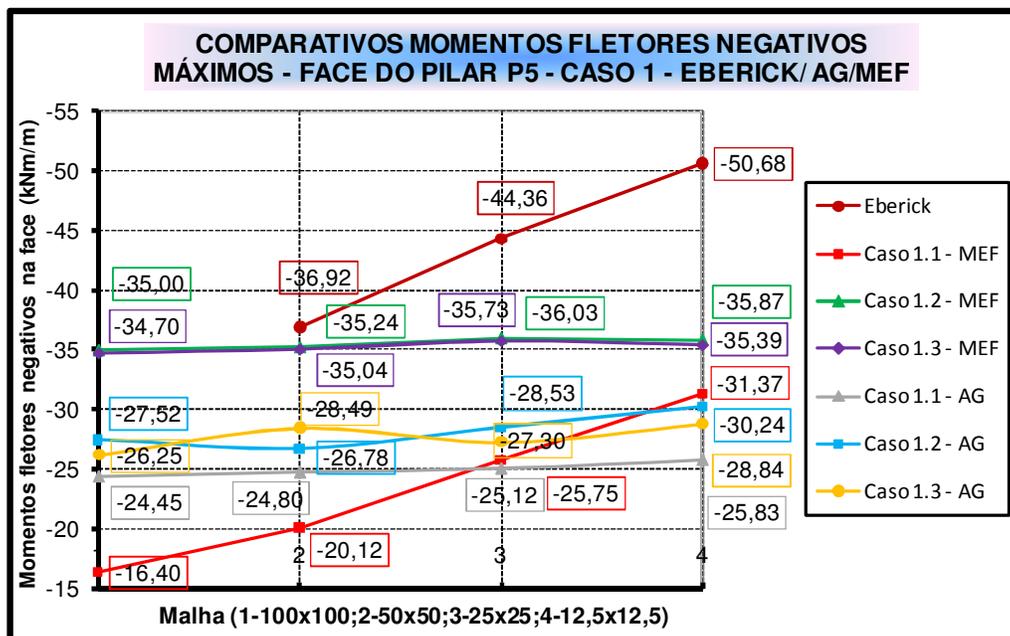


Gráfico 5-5 – Caso 1: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores negativos máximos na face do pilar P5

Pode-se notar que os valores fornecidos pelo Eberick são mais sensíveis a malha dos momentos obtidos pelos casos 1.2 e 1.3 gerados no SAP 2000, considerando ambas as análises, e aumentam na medida em que se refina a malha. As diferenças são apresentadas na Tabela 5-1, sendo que o valor apresentado na tabela significa a diferença em relação ao valor obtido pelo Eberick. (Obs.: nas tabelas apresentadas a seguir são expressas as diferenças, em porcentagem, dos valores fornecidos pelo SAP 2000 em relação aos valores obtidos pelo Eberick.)

<i>Momentos Fletores Negativos Máximos (kNm/m)</i>			
<i>Diferenças em relação ao valores do Eberick</i>			
<i>Modelo</i>	<i>50x50</i>	<i>25x25</i>	<i>12,5x12,5</i>
<i>Caso 1.1 - AG</i>	32,83	43,37	49,02
<i>Caso 1.2 - AG</i>	27,46	35,68	40,33
<i>Caso 1.3 - AG</i>	22,83	38,45	43,10
<i>Caso 1.1 - MEF</i>	45,50	41,95	38,11
<i>Caso 1.2 - MEF</i>	4,54	18,77	29,22
<i>Caso 1.3 - MEF</i>	5,10	19,46	30,16

Tabela 5-1 – Caso 1: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores negativos máximos na face do pilar P5

Em todos os casos, o Eberick forneceu momentos superiores. Com exceção do caso 1.1 – MEF, as diferenças aumentam na medida em que se refina a malha. As menores diferenças são encontradas nos casos 1.2 e 1.3 analisados pelo MEF para a malha de 50x50cm. O mesmo comparativo, porém para a análise por Analogia de Grelha apresentou diferenças um pouco maiores, da ordem de **25%**.

O Gráfico 5-6 apresenta o comparativo dos momentos fletores negativos na face do pilar P5 para o Caso 2.

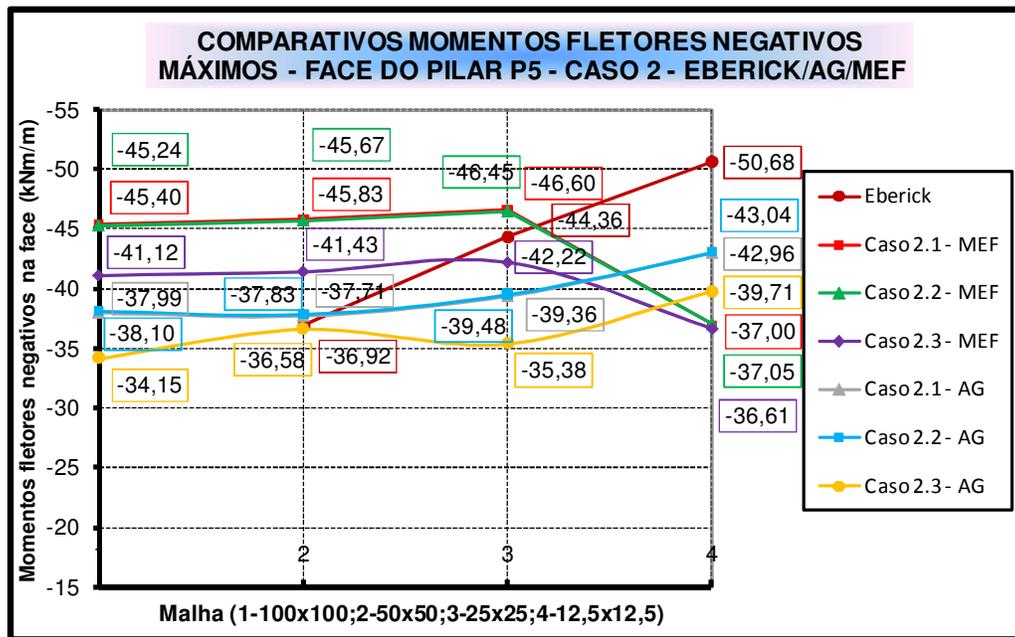


Gráfico 5-6 - Caso 2: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5

Os momentos obtidos pela análise do SAP 2000 são mais sensíveis a malha se comparados com o Caso 1. De um modo geral, as diferenças em relação ao modelo do Eberick diminuíram em relação ao caso 1, estando apresentadas na Tabela 5-2.

<i>Momentos Fletores Negativos Máximos (kNm/m)</i>			
<i>Diferenças em relação ao valores do Eberick</i>			
<i>Modelo</i>	<i>50x50</i>	<i>25x25</i>	<i>12,5x12,5</i>
<i>Caso 2.1 - AG</i>	-2,10	11,28	15,23
<i>Caso 2.2 - AG</i>	-2,40	11,01	15,08
<i>Caso 2.3 - AG</i>	0,91	20,25	21,65
<i>Caso 2.1 - MEF</i>	-19,44	-4,81	27,00
<i>Caso 2.2 - MEF</i>	-19,16	-4,50	26,90
<i>Caso 2.3 - MEF</i>	-10,89	4,82	27,77

Tabela 5-2 - Caso 2: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores negativos máximos na face do pilar P5

Na análise do SAP 2000 para o MEF, os casos 2.2 e 2.3 convergiram para a malha 12,5x12,5cm, estando próximos dos valores obtidos nos casos 1.2 e 1.3. No entanto, para essa malha, verifica-se a maior diferença em relação ao Eberick, quase 30% superior. Para a malha 50x50cm, o Eberick apresentou valores bem abaixo dos obtidos no SAP 2000, quase 20%

inferior para os casos 2.1 e 2.2. Em geral, as menores diferenças ocorreram para a malha 25x25cm.

Na análise por Analogia de Grelha, os valores fornecidos pelo Eberick foram quase sempre superiores, com exceção dos casos 2.1 e 2.2 da malha 50x50cm. As menores diferenças ocorreram para a malha 50x50cm e aumentaram na medida em que se refinou a malha, chegando a quase 22% para o caso 2.3.

O Gráfico 5-7 apresenta o comparativo dos momentos fletores negativos na face esquerda do pilar P5 para o Caso 3.

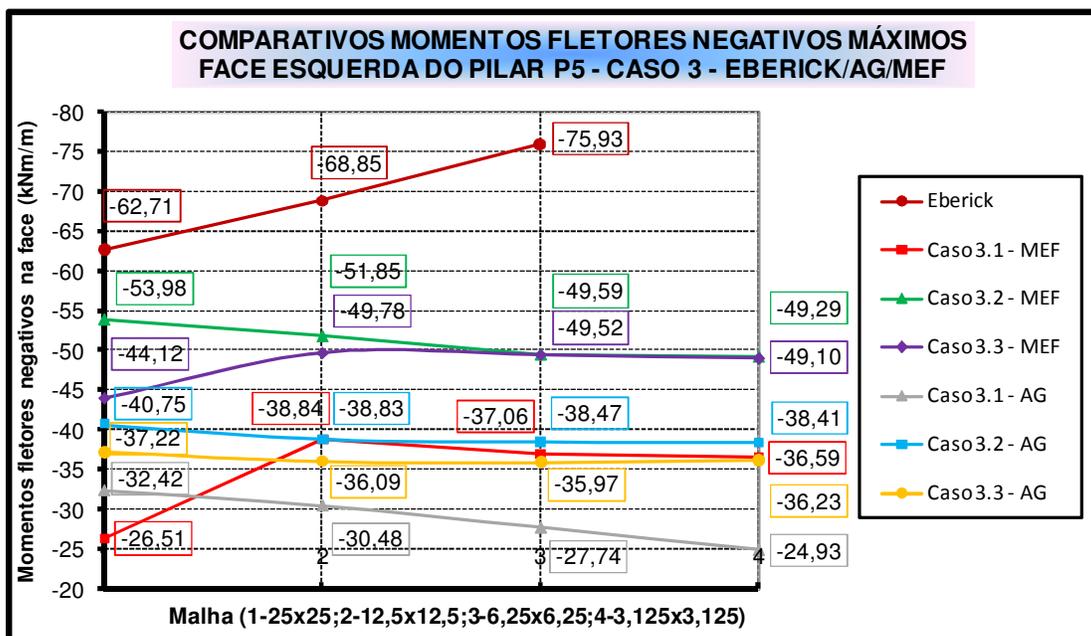


Gráfico 5-7 - Caso 3: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5

Os momentos fornecidos pelo Eberick são superiores aos obtidos pelos modelos gerados no SAP 2000. Além disso, são mais sensíveis a malha e aumentam na medida em que se refina a malha. As diferenças são apresentadas na Tabela 5-3.

<i>Momentos Fletores Negativos Máximos (kNm/m)</i>			
<i>Diferenças em relação ao valores do Eberick</i>			
<i>Modelo</i>	<i>25x25</i>	<i>12,5x12,5</i>	<i>6,25x6,25</i>
<i>Caso 3.1 - AG</i>	48,30	55,73	63,46
<i>Caso 3.2 - AG</i>	35,02	43,60	49,33
<i>Caso 3.3 - AG</i>	40,65	47,58	52,63

<i>Caso 3.1 - MEF</i>	57,72	43,59	51,19
<i>Caso 3.2 - MEF</i>	13,92	24,69	34,70
<i>Caso 3.3 - MEF</i>	29,64	27,70	34,78

Tabela 5-3 - Caso 3: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores negativos máximos na face esquerda do pilar P5

Nos modelos gerados no SAP 2000, obteve-se valores praticamente iguais para a malha 6,25x6,25cm entre os casos 2.2 e 2.3, principalmente na análise pelo MEF. No entanto, ao comparar esses resultados com os fornecidos pelo Eberick, verifica-se que para essa mesma malha ocorrem as maiores diferenças: cerca de 35% para o MEF e cerca de 52% para a Analogia de Grelha.

O Gráfico 5-8 apresenta o comparativo dos momentos fletores negativos na face esquerda do pilar P5 para o Caso 4.

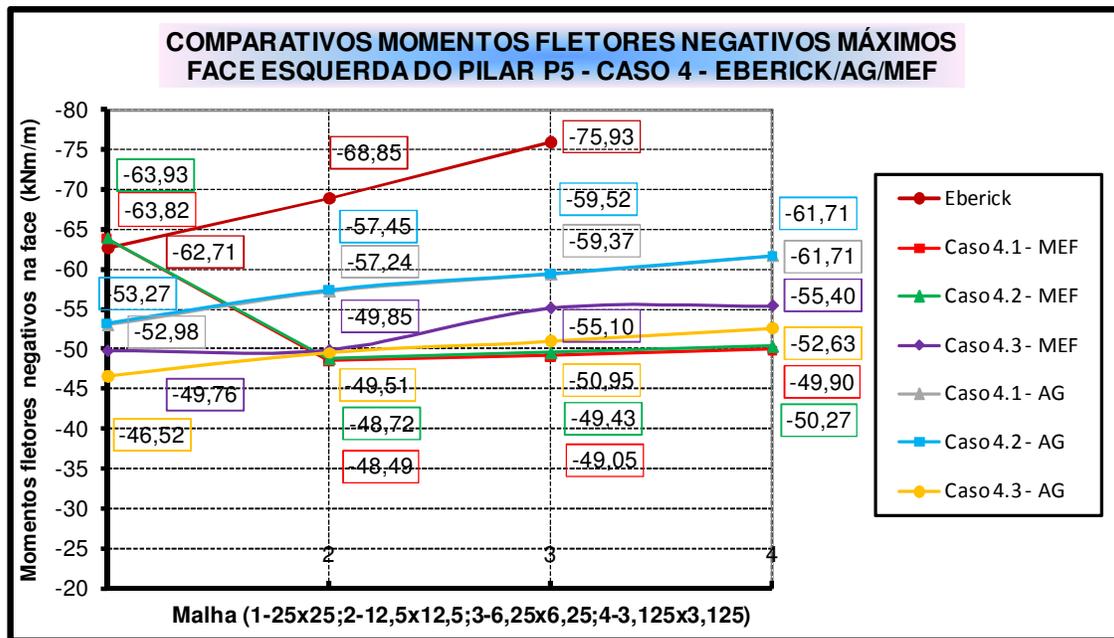


Gráfico 5-8 - Caso 4: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5

De um modo geral, as diferenças entre o caso 4 e o Eberick diminuíram em relação ao caso 3, estando os valores do Eberick superiores aos obtidos pelos modelos do SAP 2000. Os casos 4.1 e 4.2 tiveram uma melhor aproximação dos momentos em relação ao caso 4.3 entre as malhas analisadas. A Tabela 5-4 apresenta essas diferenças.

<i>Momentos Fletores Negativos Máximos (kNm/m)</i>			
<i>Diferenças em relação ao valores do Eberick</i>			
<i>Modelo</i>	<i>25x25</i>	<i>12,5x12,5</i>	<i>6,25x6,25</i>
<i>Caso 4.1 - AG</i>	15,51	16,86	21,81
<i>Caso 4.2 - AG</i>	15,05	16,56	21,62
<i>Caso 4.3 - AG</i>	25,82	28,10	32,89
<i>Caso 4.1 - MEF</i>	1,74	29,58	35,40
<i>Caso 4.2 - MEF</i>	1,91	29,24	34,89
<i>Caso 4.3 - MEF</i>	20,65	27,60	27,43

Tabela 5-4 - Caso 4: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores negativos máximos na face esquerda do pilar P5

Os casos 4.1 e 4.2 analisados por Analogia de Grelha apresentaram diferenças menores em relação aos valores fornecidos pelo Eberick se comparados com os casos 4.1 e 4.2 analisados pelo MEF. A malha 25x25cm, apesar de fornecer a menor diferença (casos 4.1 e 4.2 – MEF) não se mostrou confiável pois os valores obtidos pelo SAP 2000 não são representativos.

Além dos casos 1, 2, 3 e 4, foi idealizado no SAP 2000 um modelo exatamente igual ao utilizado pelo Eberick, também analisado por Analogia de grelha, mantendo o mesmo espaçamento da grelha (ou seja: a primeira barra dista do centro da viga metade do espaçamento configurado pelo usuário e, a partir daí, segue-se com a discretização imposta) e com as mesmas considerações acerca das barras rígidas na ligação das barras da grelha com o pilar (análogo ao apresentado na Figura 5-3). Esse modelo foi chamado de Caso 5. Ao comparar os momentos máximos negativos da laje do Caso 5 com os valores fornecidos pelo Eberick, constatou-se que os valores foram praticamente os mesmos, com diferença da ordem de 3,0%. Portanto as diferenças existentes nos momentos negativos entre o Eberick e os casos 1 a 4 deve-se ao fato da malha do Eberick não passar exatamente sobre centro do pilar. As malhas dos modelos 1 a 4, com uma linha de barras passando exatamente sobre o centro do pilar, tiveram, portanto, um comportamento mais adequado em relação à obtenção do momento fletor negativo na laje, sendo inclusive pouco sensível ao tamanho da malha.

### 5.3.2. Momentos fletores positivos na laje

O Gráfico 5-9 apresenta o comparativo dos momentos fletores positivos máximos da laje, considerando os casos 1 e 2.

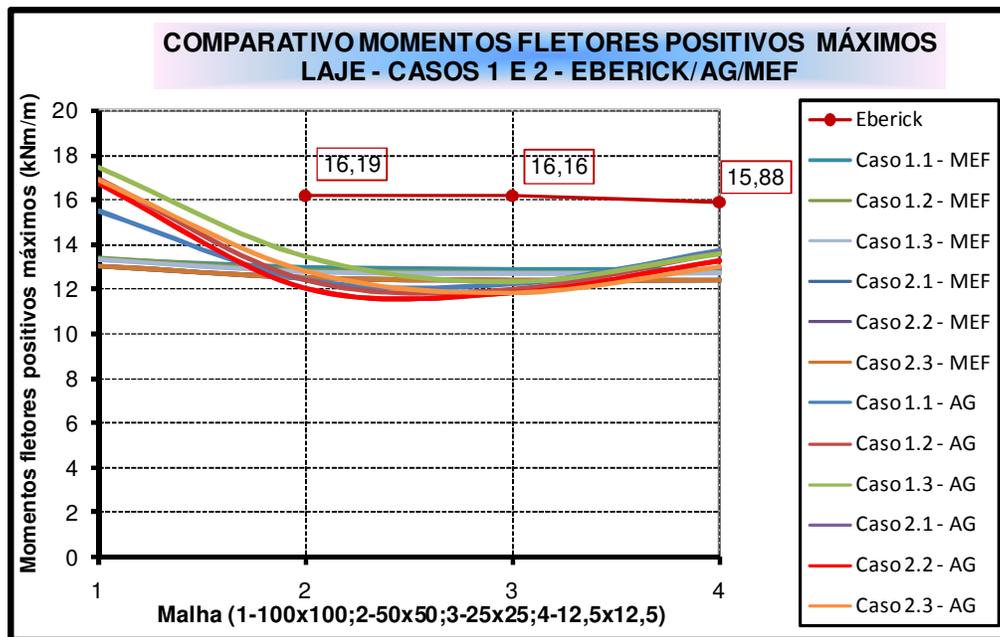


Gráfico 5-9 - Casos 1 e 2: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores positivos máximos da laje plana

Os momentos fletores positivos máximos foram praticamente constantes em quase todas as malhas analisadas, com exceção da malha 100x100cm. Os valores fornecidos pelo Eberick foram sempre superiores aos modelos do SAP 2000. Excluindo os valores fornecidos pela malha 100x100cm, as menores diferenças em relação ao Eberick são encontradas para a malha 12,5x12,5cm: em média **18,5%** na análise pelo MEF e **13,5%** na análise por Analogia de Grelha.

O Gráfico 5-10 apresenta o comparativo dos momentos fletores positivos máximos para o maior da laje, considerando os casos 3 e 4.

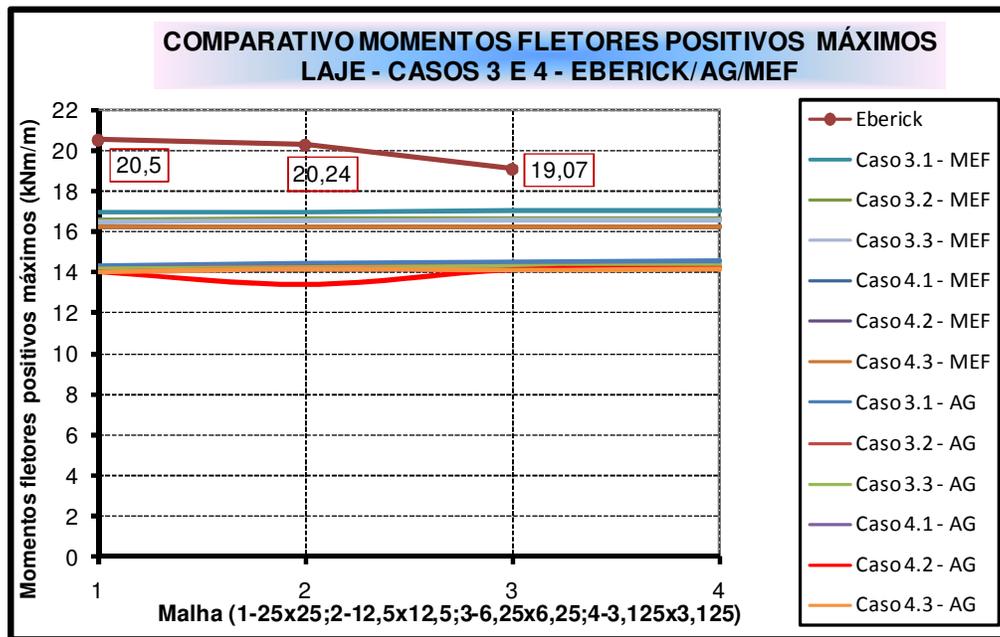


Gráfico 5-10 - Casos 3 e 4: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores positivos máximos  
Maior vão da laje

Assim como nos casos 1 e 2, os momentos fletores positivos máximos foram praticamente constantes em todas as malhas analisadas. Nota-se que os valores fornecidos pelo Eberick são superiores aos valores obtidos pelos modelos do SAP 2000. As menores diferenças ocorrem para a malha 6,25x6,25cm: em média 10,5% na análise pelo MEF e 24% na análise por Analogia de Grelha.

De acordo com os resultados apresentados até momento, podem-se tirar algumas conclusões parciais acerca dos momentos fletores na laje obtidos nos casos 1, 2, 3 e 4 analisados no SAP 2000 e no Eberick.

- De um modo geral, os modelos analisados no SAP 2000 quando se adicionou o trecho rígido na região do pilar P5 tiveram uma melhor aproximação em relação aos momentos fornecidos pelo Eberick;

- Os momentos fletores na laje obtidos pelo Eberick foram sensíveis a malha utilizada, aumentando sensivelmente o valor ao refinar a malha. No entanto, os modelos do SAP 2000 em que se distribui a reação do pilar como carregamento na laje, os valores foram pouco sensíveis a malha utilizada, especialmente em malhas finas. As maiores diferenças em relação ao Eberick estão nas malhas mais finas, estando os valores obtidos pelo Eberick sempre superiores, em média, 35%.

- Tanto no caso 1 como no caso 3, em que não se tem a região do pilar rígida, os modelos gerados no SAP 2000 na análise por Analogia de grelha não forneceram bons resultados, estando muito distante dos valores fornecidos pelo Eberick como também da análise pelo MEF;

- Os casos 1.2 e 1.3 e 3.2 e 3.3 analisados no SAP 2000 pelo MEF apresentaram valores satisfatórios, com diferenças em relação ao Eberick parecidas com os casos 2.2 e 4.2, em que se considera a região do pilar rígida;

- Os momentos fletores positivos na laje fornecidos pelo Eberick foram superiores aos modelos analisados no SAP 2000 pelo MEF e Analogia de Grelha, sendo as menores diferenças ocorridas em relação ao modelo que considera a região do pilar rígida.

### 5.3.3. Esforço normal no pilar P5

O Gráfico 5-11 apresenta o esforço normal no pilar P5 para o caso 1.

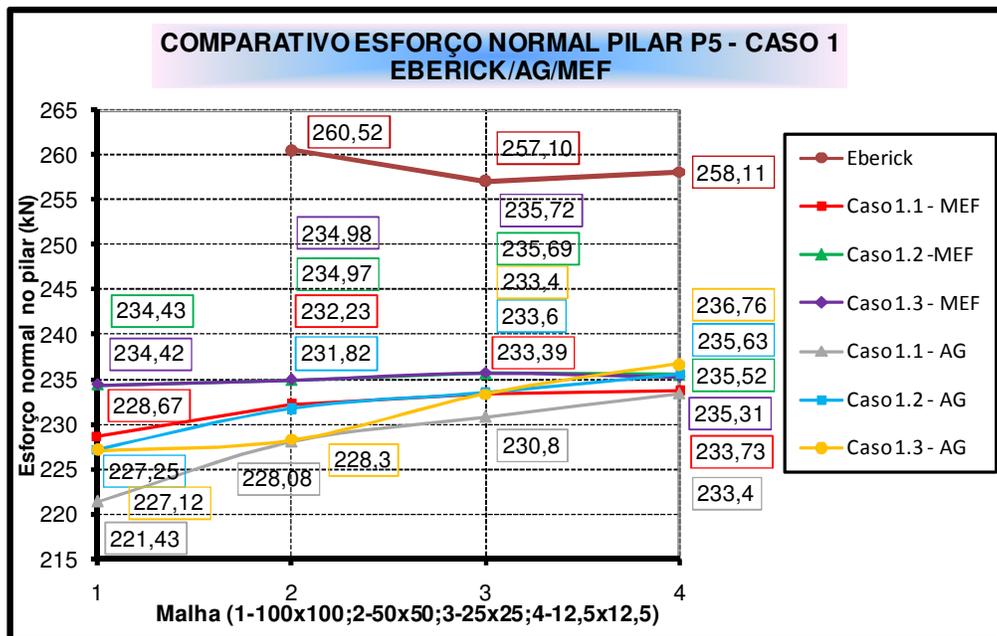


Gráfico 5-11 - Caso 1: Comparativo Eberick/MEF/AG – Esforço normal Pilar P5

Os valores fornecidos pelo Eberick foram maiores que os valores obtidos pelos modelos do SAP 2000. Em geral, cerca de 8% maior para a malha 12,5x12,5cm. A sensibilidade em relação a malha foi pequena em quase todos casos, com exceção do caso 1.1 – AG.

O Gráfico 5-12 apresenta o esforço normal no pilar P5 para o caso 2.

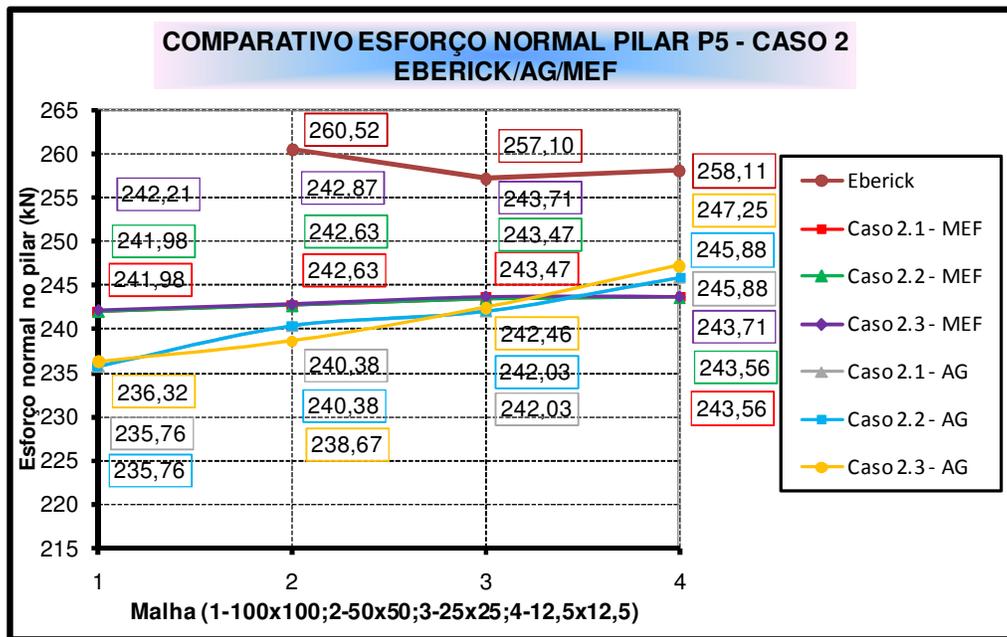


Gráfico 5-12 - Caso 2: Comparativo Eberick/MEF/AG – Esforço normal Pilar P5

De um modo geral, as diferenças diminuíram em relação ao caso 1. Em geral, cerca de 5% para a malha 12,5x12,5cm. Os valores fornecidos pelo Eberick também foram superiores aos obtidos pelos modelos do SAP 2000. A sensibilidade em relação a malha foi pequena.

O Gráfico 5-13 apresenta o esforço normal no pilar P5 para o caso 3.

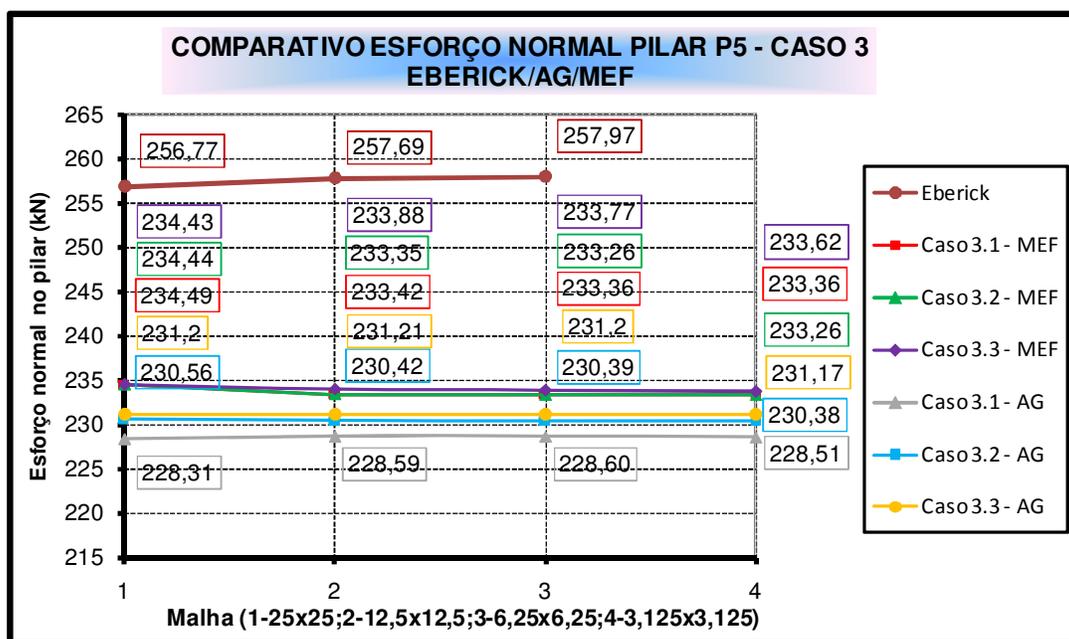


Gráfico 5-13 - Caso 3: Comparativo Eberick/MEF/AG – Esforço normal Pilar P5

Em todas as análises o esforço normal praticamente não se alterou em relação a malha utilizada. Os valores fornecidos pelo Eberick foram superiores aos obtidos pelos modelos do SAP 2000. As diferenças dos modelos do SAP 2000 em relação ao Eberick foram de aproximadamente 10% para a análise pelo MEF e de 11% para a análise por Analogia de Grelha.

O Gráfico 5-14 apresenta o esforço normal no pilar P5 para o caso 4.

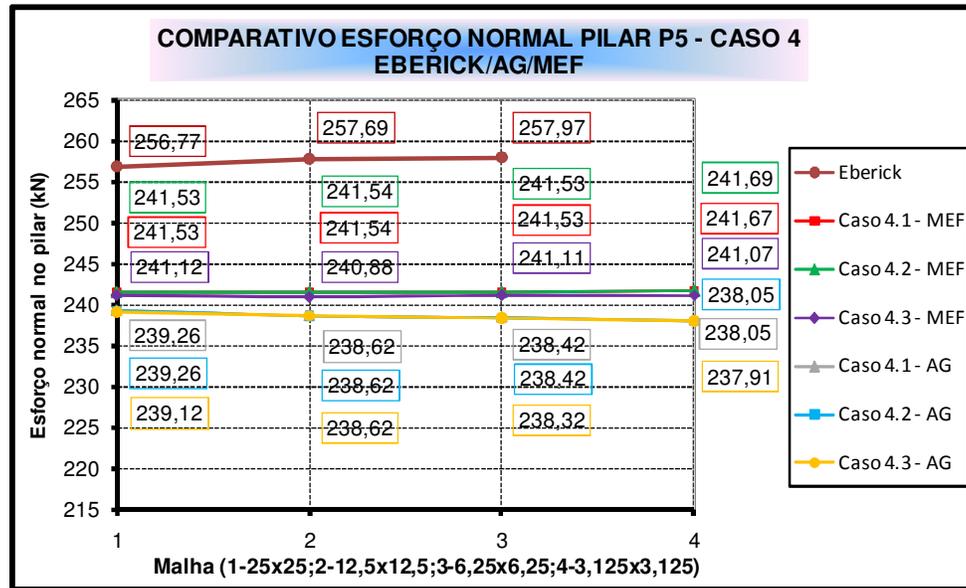


Gráfico 5-14 - Caso 4: Comparativo Eberick/MEF/AG – Esforço normal Pilar P5

Assim como no caso 3, o esforço normal praticamente não se alterou em relação a malha utilizada. Os valores fornecidos pelo Eberick também foram superiores aos obtidos pelos modelos do SAP 2000. De um modo geral, as diferenças entre os modelos do SAP 2000 e do Eberick diminuiram em relação ao caso 3 e foram de aproximadamente 7% para a análise pelo MEF e de 8% para a análise por Analogia de Grelha.

De um modo geral, as comparações dos modelos gerados no SAP 2000 em relação aos modelos do Eberick foram boas, com resultados relativamente próximos, além de serem pouco sensíveis a malha utilizada. Assim como ocorrido com os momentos fletores na laje, as diferenças dos modelos do SAP 2000 em relação aos modelos do Eberick diminuem com a adição dos trechos rígidos na região do pilar.

### 5.3.4. Momento fletor no pilar P5

Os momentos fletores no pilar P5 existem somente nos Casos 3 e 4, em que há assimetria do pilar em relação à laje. O Gráfico 5-15 apresenta o momento fletor no pilar P5 para o caso 3.

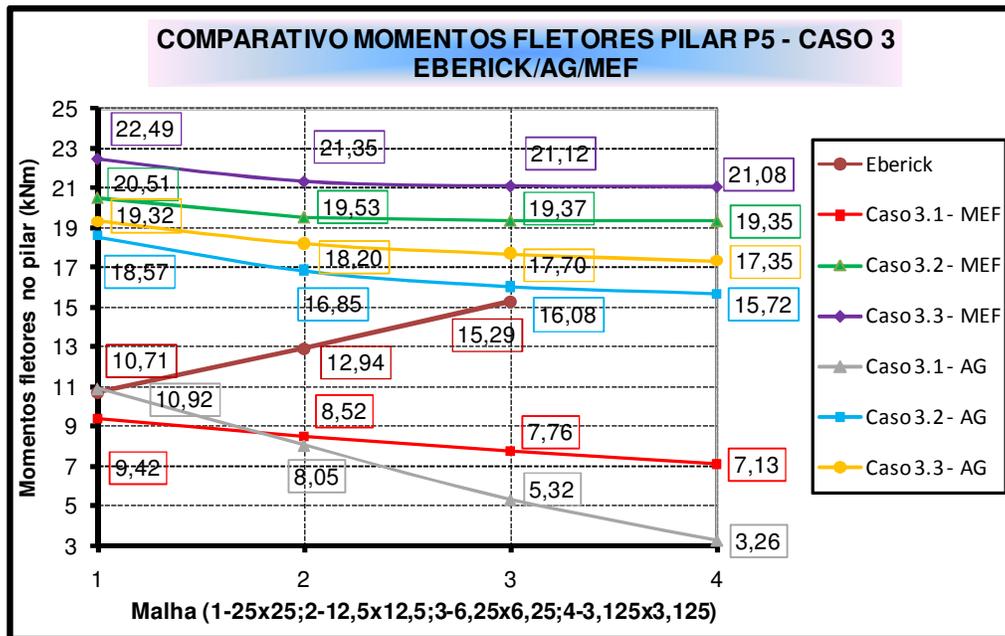


Gráfico 5-15 - Caso 3: Comparativo Eberick/MEF/AG – Momento Fletor Pilar P5

Nota-se pelo gráfico acima que nos modelos analisados no SAP 2000 em que há singularidade (caso 3.1), os momentos no pilar são bem abaixo dos obtidos pelo Eberick, principalmente para malhas mais finas, conforme já constatado. No entanto, ao se distribuir os esforços normais e de flexão do pilar P5 como reação na laje (casos 2.2 e 2.3) o comportamento dos momentos no pilar P5 foi completamente diferente, apresentando valores superiores aos fornecidos pelo Eberick e menos sensíveis a diminuição da malha na região do pilar.

A Tabela 5-5 apresentada as diferenças encontradas entre os modelos do Eberick e do SAP 2000.

<i>Momentos Fletores no pilar P5 (kNm)</i>			
<i>Diferenças em relação ao valores do Eberick</i>			
<i>Modelo</i>	<i>25x25</i>	<i>12,5x12,5</i>	<i>6,25x6,25</i>
<i>Caso 3.1 - AG</i>	-1,96	62,21	65,20
<i>Caso 3.2 - AG</i>	-42,33	-23,20	-4,91

<i>Caso 3.3 - AG</i>	-44,57	-28,90	-13,62
<i>Caso 3.1 - MEF</i>	12,04	65,84	49,24
<i>Caso 3.2 - MEF</i>	-47,78	-33,74	-21,06
<i>Caso 3.3 - MEF</i>	-52,38	-39,39	-27,60

Tabela 5-5 - Caso 3: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores no pilar P5

As diferenças diminuem na medida em que se refina a malha. As análises do SAP 2000 para o MEF apresentaram maiores diferenças em relação as análise por Analogia de Grelha. Além disso, o fato de distribuir a reação do pilar na área da seção transversal projetada no centro de gravidade da laje (caso 3.3) fez aumentar o momento no pilar nos modelos do SAP 2000, o que também aumentou as diferenças em relação aos modelos do Eberick. Nota-se que o valor fornecido pelo Eberick chega a ser 52,38% menor na análise pelo MEF caso 3.3 para a malha 25x25cm e de 27,60% para a malha 6,25x6,25cm.

A menor diferença no resultado do Eberick em relação ao SAP 2000 está no caso 3.2 para a análise por Analogia de Grelha. O valor fornecido pelo Eberick é 4,91% menor, evidenciando mais uma vez a importância de se utilizar malha finas em projetos de engenharia. Vale frisar a mesma comparação para o MEF apresentou diferença de 21,06%.

O Gráfico 5-16 apresenta o momento fletor no pilar P5 para o caso 4.

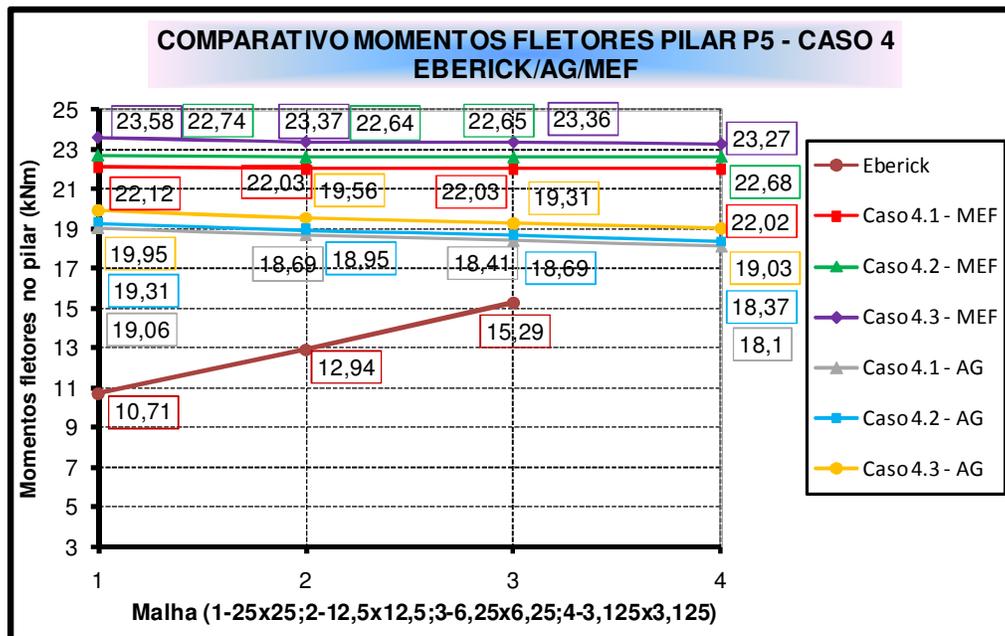


Gráfico 5-16 - Caso 4: Comparativo Eberick/MEF/AG – Momento Fletor Pilar P5

Em todos os casos os resultados fornecidos pelo Eberick foram inferiores aos modelos gerados no SAP 2000, inclusive para o caso 4.1. Além disso, os momentos obtidos no

SAP 2000 foram praticamente constantes em todas as malhas analisadas, fato que não ocorreu nos modelos do Eberick. De um modo geral, as diferenças aumentaram em relação ao caso 3. A inclusão do núcleo rígido na região do pilar fez com que se aumentasse a rotação do nó na ligação laje/pilar, aumentando dessa forma o momento no pilar. A Tabela 5-6 apresentada essas diferenças.

<i>Momentos Fletores no pilar P5 (kNm)</i>			
<i>Diferenças em relação ao valores do Eberick</i>			
<i>Modelo</i>	<i>25x25</i>	<i>12,5x12,5</i>	<i>6,25x6,25</i>
<i>Caso 4.1 - AG</i>	-43,81	-30,77	-16,95
<i>Caso 4.2 - AG</i>	-44,54	-31,72	-18,19
<i>Caso 4.3 - AG</i>	-46,32	-33,84	-20,82
<i>Caso 4.1 - MEF</i>	-51,58	-41,26	-30,59
<i>Caso 4.2 - MEF</i>	-52,90	-42,84	-32,49
<i>Caso 4.3 - MEF</i>	-54,58	-44,63	-34,55

Tabela 5-6 - Caso 4: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores no pilar P5

Assim como no caso 3, as diferenças diminuem com o refinamento da malha. A análise por Analogia de Grelha continua fornecendo as menores diferenças em relação aos resultados obtidos pelo Eberick, sendo que o caso 4.1 malha 6,25x6,25cm foi o que apresentou o menor valor, aproximadamente 17%. A mesma comparação para a análise pelo MEF resultou em uma diferença de 30,59%.

De acordo com os resultados apresentados até momento, podem-se tirar algumas conclusões parciais acerca dos esforços no pilar P5 obtidos nos casos 1, 2, 3 e 4 analisados no SAP 2000 e no Eberick.

- De um modo geral, o esforço normal no pilar P5 analisado no SAP 2000 quando se adicionou o trecho rígido na região do pilar P5 teve uma melhor aproximação em relação aos valores fornecidos pelo Eberick. No entanto, a mesma afirmativa não pode ser aplicada para o momento fletor no pilar P5. Mesmo assim, os modelos em se considera a região do pilar rígida analisados no SAP 2000 apresentaram resultados melhores, tanto para o esforço normal como para o momento fletor no pilar P5;

- Para a malha 25x25cm, o momento fletor no pilar fornecido pelo Eberick chegou a ser em média **50%** menor que o obtido pelo SAP 2000, enquanto que para a malha 6,25x6,25cm essa diferença caiu pela metade. Ou seja, utilizar malhas finas na análise dos

modelos do Eberick diminuem as diferenças em relação aos modelos do SAP 2000. Em contrapartida, mantendo essa mesma comparação, para malhas finas as diferenças entre os momentos fletores na laje aumentam significativamente, sendo os valores fornecidos pelo Eberick superiores (vide Gráfico 5-7 e Gráfico 5-8);

- Por fim, caso não se queira distribuir a reação do pilar como carregamento na laje nos modelos gerados no SAP 2000, pode-se adotar os esforços no pilar (esforço normal e momento fletor) obtido pelo caso 4.1. Apesar de haver o problema da singularidade, a adição do trecho rígido na região do pilar P5 fez com se obtivessem bons resultados, maiores que os obtidos nos casos 4.2 e 4.3, estando, portanto, a favor da segurança.

O momento fletor no pilar central fornecido pelo Eberick apresentado no Gráfico 5-15 e Gráfico 5-16 foram obtidos a partir do modelo de Pórtico Espacial, que estuda as vigas e pilares, preocupado com carregamentos verticais e vento; e não a partir do modelo da Grelha, que se preocupa com a análise das lajes. Esse modelo de Pórtico Espacial não considera a laje junto com o pilar, representando a laje como um diafragma rígido. O Eberick não fornece o momento no pilar diretamente pela grelha mas, ao exportar os dados da Grelha do Eberick para o SAP 2000, verificou-se que o momento no pilar obtido pela grelha do Eberick forneceu praticamente o mesmo resultado do modelo criado no SAP 2000 que mantém as mesmas características da grelha do Eberick, chamado de Caso 5. Além disso, os momentos no pilar obtidos no caso 5 foram praticamente os mesmos obtidos nos casos 3 e 4 analisados por Analogia de Grelha.

Ou seja, as diferenças apresentadas no Gráfico 5-15 e Gráfico 5-16 acerca do momento no pilar central entre os modelos analisados no Eberick e SAP 2000, são decorrentes da transição que o Eberick faz ao transpor as reações da Grelha para o modelo de Pórtico Espacial. Caso o programa fornecesse o momento no pilar diretamente pelo modelo da Grelha e não pelo modelo do Pórtico Espacial, os valores seriam praticamente os mesmos em todas as malhas estudadas e bem próximos dos valores obtidos nos casos 3 e 4, sendo que representam melhor a interação entre a laje e o pilar.

## 6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 6.1. Conclusões

Nesse trabalho estudou-se a modelagem de lajes planas com pilares posicionadas simetricamente e assimetricamente (em uma direção somente), propondo modelos alternativos para solucionar o problema da singularidade que ocorre ao representar o pilar como apoio pontual diretamente na laje. Foram analisados quatro casos, que resultaram em doze análises. Nesses casos, procurou-se simular várias situações possíveis de ocorrer durante a elaboração de um projeto estrutural, a fim de conferir a devida abrangência aos estudos. As análises foram realizadas em regime elástico linear, com o auxílio de duas ferramentas computacionais, a citar: o *software* de análise estrutural SAP 2000 e o também *software* de análise estrutural Eberick.

Com relação aos casos que tratam o pilar simétrico em relação à laje, nos modelos analisados no *software* SAP 2000 tanto pelo MEF como por Analogia de Grelha, os momentos fletores da laje na face ou no centro do pilar P5 são pouco sensíveis à malha quando se distribui a reação do pilar em uma determinada área. Além disso, as malhas 100x100cm e 50x50cm apresentaram resultados diferentes quando comparados com as malhas 25x25cm e 12,5x12,5cm. Nos casos em que não se tem a região do pilar P5 rígida e, considerando a reação do pilar distribuída na laje (casos 1.2 e 1.3), os momentos fletores tiveram um bom comportamento na região do pilar em ambas as análises, apresentando um traçado arredondado, eliminando o “pico” ocorrido no caso 1.1 (problema da singularidade), caso esse que deve ser evitado. Ao enrijecer a região do pilar com a adição de elementos rígidos, ocorreram concentrações de esforços na região do pilar, havendo uma perturbação nos valores dos momentos fletores da laje. No entanto, ao analisar a face do pilar P5 os momentos, quando comparados com os casos 1.2 e 1.3, mostraram-se próximos e numericamente maiores. Essa afirmativa também é válida para o caso 2.1 que, apesar de haver o problema da singularidade, apresentou resultados interessantes, mostrando ser também uma solução possível. Vale ressaltar que os momentos obtidos na face do pilar P5 para os casos 1.2 e 1.3 analisados por Analogia de Grelha foram bem inferiores aos valores obtidos nos casos 2.2 e 2.3. Nesse tipo de análise, o fato de enrijecer a região do pilar acarretou em diferenças significativas, não apresentadas na análise pelo MEF. Além disso, em todos os subcasos do

caso 2, os momentos na face do pilar P5 foram maiores quando analisados por Analogia de Grelha.

Com relação aos casos que tratam o pilar assimétrico em relação à laje, nos modelos analisados no *software* SAP 2000 tanto pelo MEF como por Analogia de Grelha os momentos fletores da laje na face ou na região do pilar P5 foram pouco sensíveis à malha quando se distribui a reação do pilar em uma determinada área. A malha 25x25cm, apesar de possuir um espaçamento relativamente pequeno, foi a que apresentou a maior sensibilidade. Assim como ocorrido nos casos 1.2 e 1.3, quando não se considera a região do pilar rígida (casos 3.2 e 3.3), os momentos fletores apresentaram um bom comportamento na região do pilar em ambas as análises, eliminando o “pico” ocorrido no caso em que se modela o pilar como apoio pontual (caso 3.1) que, aliás, deve ser evitado. Ao enrijecer a região do pilar com a adição de elementos rígidos, também ocorreram concentrações de esforços na região do pilar, havendo uma perturbação nos valores dos momentos fletores da laje. Por isso, analisaram-se os momentos na face do pilar P5 que, quando comparados com os casos 3.2 e 3.3, mostraram-se próximos e numericamente maiores. O caso 4.1 também se enquadra nesse comparativo, apresentando resultados satisfatórios, solucionando o problema da singularidade. Os momentos obtidos na face do pilar P5 para os casos 3.2 e 3.3 analisados por Analogia de Grelha foram bem inferiores aos valores obtidos nos casos 4.2 e 4.3, fato esse não ocorrido na análise pelo MEF. Além disso, com exceção do caso 4.3, os momentos fletores obtidos na face do pilar P5 para o caso 4 foram maiores quando analisados por Analogia de Grelha.

Quanto aos esforços no pilar P5 nos modelos analisados no *software* SAP 2000, em termos de esforço normal, os resultados apresentados para as malhas analisadas com ou sem trechos rígidos distribuindo ou não a reação do pilar como carregamento na laje apresentaram resultados satisfatórios. Mesmo assim, ressalta-se a importância de se utilizar malhas finas, pois houve uma pequena sensibilidade em relação à malha utilizada nos casos 1 e 2 analisados por Analogia de Grelha. Em termos de momento fletor no pilar, tanto na análise pelo MEF como por Analogia de Grelha, quando se modela o pilar como apoio pontual e, não se considera a região do pilar rígida (caso 3.1), os resultados obtidos foram tanto menores quanto mais refinada for a malha na região do pilar P5. Isso ocorre devido a uma grande quantidade de elementos dentro do pilar com rigidezes pequenas, prejudicando a ligação lajexpilar. Deve, portanto, evitar esses modelos. No entanto, ao distribuir a reação do pilar P5 em uma determinada área como carregamento na laje e, mantendo a região do pilar sem elementos

rígidos, o momento fletor no pilar P5 foi pouco sensível à malha em ambas as análises e, numericamente, muito superior ao valor obtido no caso 3.1. Ao se enrijecer a região do pilar P5, em todos os subcasos do caso 4 o momento fletor no pilar foram próximos uns dos outros e, numericamente superiores aos obtidos nos casos 3.2 e 3.3. Ao adicionar elementos rígidos no pilar P5 fez com que a ligação laje x pilar apresentasse um comportamento que leva em conta o aumento da rigidez na região de ligação, fato esse comprovado no caso 4.1: mesmo havendo o problema da singularidade, o momento fletor no pilar P5 apresentou bons resultados, mostrando-se também ser uma solução possível. Além disso, tanto no caso 3 como no caso 4, o momento fletor no pilar P5 foi menor quando analisado por Analogia de Grelha.

Em relação ao comparativo dos modelos gerados no SAP 2000 com os modelos lançados no Eberick, em termos de momentos fletores negativos na laje, os modelos com trecho rígido, tanto por Elementos Finitos quanto por Analogia de Grelha, foram os que mais se aproximaram do modelo do Eberick. Os momentos fornecidos pelo Eberick foram sensíveis à malha adotada, aumentando na medida em que se diminui o espaçamento da grelha, em decorrência da discretização automática realizada pelo programa, onde o alinhamento das barras da grelha não coincide com o centro de gravidade do pilar central. Recomenda-se, portanto, a utilização de malhas iguais às dos modelos 1 a 4, com uma linha de barras passando exatamente sobre o centro do pilar, que tiveram um comportamento mais adequado em relação à obtenção do momento fletor negativo na laje e que foram pouco sensíveis à malha.

Em termos de esforço normal no pilar P5, os trechos rígidos na região do pilar P5 também fizeram com se diminuíssem as diferenças no comparativo do SAP 2000 com o Eberick. O espaçamento da malha teve pouca influência nos resultados. No entanto, a mesma afirmativa não pode ser aplicada para o momento fletor no pilar P5. Para a malha 25x25cm, o momento fletor no pilar fornecido pelo Eberick chegou a ser em média 50% menor que o obtido pelo SAP 2000, enquanto que para a malha 6,25x6,25cm essa diferença caiu pela metade. Vale frisar que momento fletor no pilar P5 fornecido pelo Eberick foi obtido a partir do modelo de Pórtico Espacial (que considera a laje como diafragma rígido) e não a partir do modelo da Grelha. Caso o Eberick fornecesse o momento no pilar diretamente pelo modelo da Grelha, os valores seriam praticamente os mesmos em todas as malhas estudadas e bem próximos dos valores obtidos nos casos 3 e 4, sendo que representariam melhor a interação entre a laje e o pilar.

## **6.2. Sugestão para trabalhos futuros**

Por fim, com o objetivo de dar prosseguimento e ampliar o tema abordado, sugere-se realizar os estudos relacionados a seguir:

- Posicionar o pilar assimetricamente na laje tanto na direção X como na direção Y, analisando os momentos fletores na laje e no próprio pilar.
- Variar a seção transversal do pilar, adotando pilares “alongados” com uma dimensão da seção transversal até 5 vezes menor que a outra dimensão;
- Comparar os casos dessa dissertação com modelos no SAP 2000 modelando, inicialmente, o pilar com elementos sólidos e posteriormente a laje e o pilar com elementos sólidos;
- Analisar o comportamento dos momentos fletores na laje plana no entorno do pilar que gera punção na laje, propondo faixas de dimensionamento para a laje;
- Explorar com mais ênfase os gráficos 3D de uma laje, pois fornecem dados visuais importantes para definir faixas de dimensionamento;
- Incluir o efeito da plastificação para obtenção dos momentos fletores na laje plana;
- Comparar os modelos estudados nessa dissertação com exemplos experimentais;
- Estudar a transição das reações das barras da Grelha para o modelo de Pórtico Espacial realizado pelo Eberick.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### 7.1. *Bibliografia utilizada*

AltoQi Tecnologia em Informática, *AltoQi Eberick*. Versão V5 Gold, Revisão 15, Brasil, 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento*. NBR 6118. Rio de Janeiro, RJ: 2003.

BANKI, André Luiz; COELHO, Jano d'Araújo. *Modelos de análise de lajes de concreto armado*. Artigos técnicos do site [www.altoqi.com.br](http://www.altoqi.com.br), 2002.

COELHO, Jano d' Araújo. *Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha*. Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2000.

COELHO, Jano d'Araújo; LORIGGIO, Daniel D., *Modelagem de lajes de concreto armado por Analogia de Grelha – Conceitos iniciais*. Artigos técnicos do site [www.altoqi.com.br](http://www.altoqi.com.br), 2002.

COELHO, Jano d'Araújo. *Modelagem de lajes de concreto armado por Analogia de Grelha – Influência do parâmetro de rigidez*. Artigos técnicos do site [www.altoqi.com.br](http://www.altoqi.com.br), 2002.

COELHO, Jano d'Araújo. *Modelagem de lajes de concreto armado por Analogia de Grelha – Influência da flexibilidade dos apoios*. Artigos técnicos do site [www.altoqi.com.br](http://www.altoqi.com.br), 2002.

Computers and Structures, Inc. *SAP 2000 – Integrated Software for Structural Analysis and Design*. Version 11. USA, 2008.

COOK, Robert D; MALKUS, David S.; PLESHA, Michael E. *Concepts and applications of finite elements analysis*. Hamilton Printing Company. Third Edition. United States of America, 1989.

GERE, J.M.; WEAVER JR., W. *Análise de Estruturas Reticuladas*. Editora Guanabara Dois S.A. Rio de Janeiro – RJ, 1981.

HAMBLY, E. C. *Bridge deck behavior*. London, Chapman and Hall, 1976.

HENNRICHS, Carlos A., *Estudo sobre a modelagem de lajes planas de concreto armado*, Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2003.

JAWAD, H.H. *Theory and design of plate and shell structures*. Chapman & Hall, Inc. London, 1994.

LA ROVERE, Henriette Lebre. *Notas de Aula “Elementos finitos” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil*. UFSC. Florianópolis, 2001.

LA ROVERE, Henriette Lebre. *Notas de Aula “Análise Matricial de Estruturas” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil*. UFSC. Florianópolis, 2001.

LORRIGIO, Daniel D., *Dimensionamento elástico e plástico de lajes*. Artigos técnicos do site [www.altoqi.com.br](http://www.altoqi.com.br), 2002.

LORRIGIO, Daniel D. *Notas de aula “Estruturas em regime elasto-plástico” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil*. UFSC. Florianópolis, 2001.

LORRIGIO, Daniel D. *Notas de aula “Placas e lajes em concreto armado” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil*. UFSC. Florianópolis, 2001.

LORRIGIO, Daniel D. *Notas de aula “Análise Matricial e Modelagem de Estruturas” do curso de Pós Graduação em Engenharia Civil*. UFSC. Florianópolis, 2000.

PARK, R. e GAMBLE, W.L. *Reinforced concrete slabs* – Editora John Wiley & Sons – New York, 1980.

PEDROZO, David Guillermo Esteche. *Análise Crítica dos Critérios de Projeto de Lajes Protendidas*. Dissertação de mestrado. UFSC. Florianópolis, 2008.

PIERIN, Igor. *Estudo de estabilidade de perfis pultrudados de materiais PRFV*. Dissertação de mestrado. UFSC. Florianópolis, 2005.

SILVA, André da. *Modelagem de pisos de edifícios*. Dissertação de mestrado. UFSC. Florianópolis, 2002.

STRAMANDINOLI, Juliana S. B. *Contribuição à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha*. Dissertação de Mestrado. UFSC. Florianópolis, 2003.

TIMOSHENKO, S.P. e Woinowsky-Krieger, S. *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill Kogakusha Ltda, 1959.

## **7.2. Bibliografia consultada**

BARBIRATO, Carlos Braz Cordeiro. *Contribuições a análise de pavimentos de edifícios em laje nervurada*. Dissertação de mestrado. São Carlos, 1997.

DUARTE, Heraldo. *Aspectos da análise estrutural das lajes de edifícios de concreto armado*. Dissertação de mestrado. São Carlos, 1998.

GRANADEIRO, Vasco Manoel Ferreira Tameirão Montenegro. *Estudo de pavimento de edifício de betão armado*. Tese de conclusão de curso. Florianópolis, 2005.

LEONHARDT, F. *Construções de concreto*. Volume 3. Interciência, Rio de Janeiro, 1978.

MAGALHAES, Fábio Lopes. *Estudo dos momentos fletores negativos nos apoios de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo nervuras com armação treliçada*. Dissertação de mestrado. São Carlos, 2001.

MENEZES, Ivan Fábio Mota de., *Análise limite de lajes em concreto armado*. Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro, 1990.

MONT'ALVERNE, Alexandre Miranda. *Ferramentas computacionais para o projeto de lajes de concreto armado*. Tese de doutorado. Rio de Janeiro, 1998.

MONTOYA, J.; MESENGUER, A. G.; CABRE, F. M. *Hormigon Armado*. Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona, 1973.

OLIVEIRA, Richard Sarzi. *Análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física – modelagem e metodologia de aplicação a projetos*. Tese de doutorado. São Carlos, 2001.

PEREIRA, Janaína da Silva e DORNELLES, Francisco L. *Estudo sobre a análise de lajes em regime elástico*. Tese de conclusão de curso. Florianópolis, 2006.

REAL, Mauro de Vasconcellos. *Análise estática de lajes de concreto armado incluindo não-linearidade física e geométrica*. Dissertação de mestrado. UFRGS. Porto alegre, 1990.

SANTOS, Flora Isabel Grandó. *Estudo sobre a modelagem de pavimento de edifício*. Tese de conclusão de curso. Florianópolis, 2004.

SILVA, Flávia Mattos da. *Estudo comparativo de painel de lajes em concreto armado*. Tese de conclusão de curso. Florianópolis, 2005.

SLIZARD, Rudolph. *Theory and analysis of plates*. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

## 8. APÊNDICES

### 8.1. Lista de figuras

Figura 2-1 – Elementos infinitesimal $dx$ , $dy$ , sujeito a uma carga distribuída “ $p$ ”, JAWAD (1994)	7
Figura 2-2 – Equilíbrio de um elemento de placa para as forças cortantes (HENNRICHS, 2003)	7
Figura 2-3 – Equilíbrio de um elemento de placa para momentos fletores e torsores (HENNRICHS, 2003)	8
Figura 2-4 – Grelha plana, COELHO (2000)	13
Figura 2-5 – Graus de liberdade de uma barra de grelha, COELHO (2000)	14
Figura 2-6 – Ilustração de uma laje analisada por Analogia de Grelha (COELHO&LORIGGIO, 2002)	17
Figura 2-7 – Vetores de esforços atuantes em uma grelha plana	17
Figura 2-8 - Laje discretizada em elementos finitos (HENNRICHS 2003)	20
Figura 2-9 – Geometria do elemento DKQ	22
Figura 3-1 - Esquema simplificado adotado pela NBR 6118:2003 para o cálculo do momento de solidariedade	25
Figura 3-2 – Lançamento dos pilares análogo ao modelo de viga contínua	26
Figura 3-3 – Laje modelada com elementos de placa do tipo PLATE THIN - MEF	27
Figura 3-4 – Laje modelada por Analogia de Grelha	27
Figura 3-5 – Representação do pilar como barra, pilar com dimensão real e pilar como reação	28
Figura 3-6 – Caracterização do esforço axial do pilar como reação na laje	30
Figura 3-7 – Carregamento uniformemente distribuído na laje representando a reação do pilar na projeção da área da seção transversal	30
Figura 3-8 – Visualização do software SAP 2000 com o esforço normal como carregamento uniformemente distribuído na laje	31
Figura 3-9 – Esquema do método simulando pilar como reação na laje – casos em que há simetria do pilar na laje	32
Figura 3-10 – Caracterização do momento fletor do pilar como reação na laje	33
Figura 3-11 – Binário de forças resultante do momento fletor do pilar aplicado como reação na laje	33
Figura 3-12 - Visualização do software SAP 2000 com o momento fletor como carregamento prismático triangular distribuído na laje	34
Figura 3-13 – Carregamento final com $q_E$ e $q_D$ aplicado como reação na laje	35
Figura 3-14 – Pilar modelado como barra substituído por um apoio do segundo gênero	35
Figura 3-15 – Rigidez da mola: metade do pilar para cima e metade do pilar para baixo	36
Figura 3-16 – Rotação do nó do vínculo do pilar	37

*MODELAGEM DE LAJES PLANAS SIMÉTRICAS E ASSIMÉTRICAS EM CONCRETO ARMADO*  
*ANÁLISE INTEGRADA LAJE X PILAR*

---

---

<i>Figura 3-17 - Esquema do método simulando pilar como reação na laje – casos em que não há simetria do pilar na laje</i>	38
<i>Figura 3-18 – Transição na malha para coincidir com as coordenadas do pilar</i>	38
<i>Figura 3-19 - Transição na malha e alteração nas coordenadas dos nós para coincidir com as coordenadas do pilar</i>	39
<i>Figura 3-20 – Transição em toda extensão da laje analisada por Analogia de Grelha</i>	40
<i>Figura 3-21 – Transição somente na região do pilar na análise por Analogia de Grelha</i>	40
<i>Figura 3-22 – Trechos rígidos, NBR 6118:2003</i>	41
<i>Figura 3-23 – Região rígida do pilar na análise pelo MEF</i>	42
<i>Figura 3-24 - Região rígida do pilar na análise por Analogia de Grelha</i>	42
<i>Figura 3-25 – Modelo com pilar definido como elemento sólido (Henrichs,2003)</i>	43
<i>Figura 3-26 – Seção do pilar projetada no centro geométrico da laje</i>	44
<i>Figura 3-27 - Região do pilar mostrando o trecho rígido, a dimensão do elemento e a dimensão projetada no centro de gravidade da laje – MEF</i>	45
<i>Figura 3-28 – Região do pilar mostrando o trecho rígido, a dimensão do elemento e a dimensão projetada no centro de gravidade da laje – Analogia de Grelha</i>	45
<i>Figura 3-29 – Vista 3D do modelo com as dimensões dos elementos</i>	46
<i>Figura 3-30 – Corte na laje para obtenção dos momentos fletores na direção X</i>	48
<i>Figura 3-31 – Casos 1 e 2 — Pilar P5 posicionado simétrico em relação à laje</i>	49
<i>Figura 3-32 - Casos 3 e 4 — Pilar P5 assimétrico em relação à laje em 1 metro na direção X</i>	50
<i>Figura 4-1 – Caso 1.1 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF</i>	53
<i>Figura 4-2 - Caso 1.2 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF</i>	55
<i>Figura 4-3 - Caso 1.3 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF</i>	57
<i>Figura 4-4 - Gráfico 3D dos momentos atuantes na laje plana – Caso 1.1</i>	61
<i>Figura 4-5 – Gráfico 3D dos momentos atuantes na laje plana – Caso 1.2</i>	61
<i>Figura 4-6 - Caso 1.1 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - AG</i>	65
<i>Figura 4-7 - Caso 1.2 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - AG</i>	67
<i>Figura 4-8 - Caso 1.3 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 – AG</i>	68
<i>Figura 4-9 – Valor adotado para o momento na face do pilar P5 na análise por Analogia de Grelha</i>	73
<i>Figura 4-10 - Caso 3.1 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF</i>	81
<i>Figura 4-11 - Caso 3.2 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF</i>	82
<i>Figura 4-12 - Caso 3.3 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte1-1 - MEF</i>	83
<i>Figura 4-13 - Gráfico 3D dos momentos atuantes na laje plana – Caso 3.1</i>	86
<i>Figura 4-14 - Gráfico 3D dos momentos atuantes na laje plana – Caso 3.2</i>	86
<i>Figura 4-15 – Região do pilar P5 – (a) Caso 3.1 ; (b) Caso 3.2</i>	87

---

---

---

Figura 4-16 - Caso 3.1 - Momentos fletores da laje na direção X – Corte 1-1 - AG	91
Figura 4-17 – Momentos fletores no pilar P5 para a laje plana com assimetria	103
Figura 5-1 – Vista 3D do modelo gerado no software Eberick V5 Gold	117
Figura 5-2 – Ligação das barras da grelha da laje com as barras rígidas do pilar	118
Figura 5-3 – Casos 1 e 2 - Momentos fletores na laje plana analisada pelo Eberick	121

## 8.2. Lista de gráficos

Gráfico 4-1 - Caso 1.1 - Momentos fletores da laje – MEF	54
Gráfico 4-2 - Caso 1.2 - Momentos fletores da laje – MEF	56
Gráfico 4-3 - Caso 1.3 - Momentos fletores da laje – MEF	58
Gráfico 4-4 - Caso 2.1 - Momentos fletores da laje – MEF	58
Gráfico 4-5 - Caso 2.2 - Momentos fletores da laje - MEF	59
Gráfico 4-6 - Caso 2.3 - Momentos fletores da laje – MEF	60
Gráfico 4-7 - Caso 1 e 2 - Comparativo momentos fletores na laje – Malha 12,5x12,5cm – MEF	62
Gráfico 4-8 - Caso 1 e 2 - Comparativo momentos fletores máximos face do pilar P5 - MEF	63
Gráfico 4-9 - Caso 1 - Comparativo momentos fletores máximos no centro do pilar P5 - MEF	64
Gráfico 4-10 - Caso 1.1 - Momentos fletores da laje – AG	66
Gráfico 4-11 - Caso 1.2 - Momentos fletores da laje – AG	67
Gráfico 4-12 - Caso 1.3 - Momentos fletores da laje – AG	69
Gráfico 4-13 - Caso 2.1 - Momentos fletores da laje – AG	69
Gráfico 4-14 - Caso 2.2 - Momentos fletores da laje – AG	70
Gráfico 4-15 - Caso 2.3 - Momentos fletores da laje – AG	71
Gráfico 4-16 - Casos 1 e 2 - Comparativo momentos fletores na laje – Malha 12,5x12,5cm – AG	72
Gráfico 4-17 - Casos 1 e 2 - Comparativo momentos fletores máximos face do pilar P5 - AG	73
Gráfico 4-18 - Caso 1 - Comparativo momentos fletores máximos no centro do pilar P5 - AG	74
Gráfico 4-19 - Caso 1: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores próximos ao pilar P5 - Malha 12,5x12,5cm	75
Gráfico 4-20 - Caso 2: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores próximos ao pilar P5 Malha 12,5x12,5cm	77
Gráfico 4-21 - Casos 1 e 2 - Comparativo MEF e AG - Momentos fletores positivos máximos	79
Gráfico 4-22 - Caso 3 - Momentos fletores da laje – MEF	84
Gráfico 4-23 - Caso 4 - Momentos fletores da laje – MEF	85
Gráfico 4-24 - Caso 3 e 4 - Comparativo momentos fletores na laje – Malha 25x25cm refinada no pilar para 3,125x3,125cm – MEF	88
Gráfico 4-25 - Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos face esquerda pilar P5 - MEF	89

*MODELAGEM DE LAJES PLANAS SIMÉTRICAS E ASSIMÉTRICAS EM CONCRETO ARMADO*  
*ANÁLISE INTEGRADA LAJE X PILAR*

---

Gráfico 4-26 - Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos face direita pilar P5 - MEF _____	89
Gráfico 4-27 - Caso 3 - Comparativo momentos fletores máximos sobre pilar P5 - MEF _____	90
Gráfico 4-28 - Caso 3 - Momentos fletores da laje – AG _____	91
Gráfico 4-29 - Caso 4 - Momentos fletores da laje – AG _____	92
Gráfico 4-30 - Caso 3 e 4 - Comparativo momentos fletores na laje – Malha 25x25cm refinada no pilar para 3,125x3,125cm – AG _____	93
Gráfico 4-31 - Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos face esquerda pilar P5 - AG _____	94
Gráfico 4-32 - Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos face direita pilar P5 - AG _____	94
Gráfico 4-33 – Casos 3 e 4 - Comparativo momentos fletores máximos sobre o pilar P5 - AG _____	95
Gráfico 4-34 - Caso 3: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores próximos ao pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm _____	96
Gráfico 4-35 - Caso 4: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores próximos ao pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm _____	98
Gráfico 4-36 - Casos 3 e 4 - Comparativo MEF e AG - Momentos fletores positivos máximos _____	101
Gráfico 4-37 – Casos 1 e 2 – Esforço normal no pilar P5 - MEF _____	104
Gráfico 4-38 - Casos 1 e 2 – Esforço normal no pilar P5 - AG _____	105
Gráfico 4-39 - Caso 1 – Comparativo esforço normal no pilar P5 – MEF e AG _____	106
Gráfico 4-40 - Caso 2 – Comparativo esforço normal no pilar P5 – MEF e AG _____	106
Gráfico 4-41 - Casos 3 e 4 – Esforço normal no pilar P5 - MEF _____	108
Gráfico 4-42 - Casos 3 e 4 – Esforço normal no pilar P5 – AG _____	108
Gráfico 4-43 – Caso 3 - Comparativo esforço normal no pilar P5 – MEF e AG _____	109
Gráfico 4-44 - Caso 4 - Comparativo esforço normal no pilar P5 – MEF e AG _____	110
Gráfico 4-45 - Casos 3 e 4 - Momentos fletores no pilar P5 – MEF _____	111
Gráfico 4-46 - Diferenças percentuais momento fletor P5 em relação aos casos 3.1 e 4.1 – MEF _____	112
Gráfico 4-47 - Casos 3 e 4 - Momentos fletores no pilar P5 – AG _____	113
Gráfico 4-48 - Diferenças percentuais momento fletor P5 em relação aos casos 3.1 e 4.1 – AG _____	113
Gráfico 4-49 – Caso 3 - Comparativo momento fletor no pilar P5 – MEF e AG _____	114
Gráfico 4-50 – Caso 4 - Comparativo momento fletor no pilar P5 – MEF e AG _____	115
Gráfico 5-1 – Momento fletor negativo máximo sobre o pilar P5 – Casos 1 e 2, 3 e 4 – EB _____	121
Gráfico 5-2 - Momento fletor positivo máximo no maior vão da laje – Casos 1 e 2, 3 e 4 - EB _____	122
Gráfico 5-3 – Esforço normal no pilar P5 – Casos 1 e 2, 3 e 4 – EB _____	123
Gráfico 5-4 – Momento fletor no pilar P5 – Caso 3 e 4 – EB _____	123
Gráfico 5-5 – Caso 1: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores negativos máximos na face do pilar P5 _____	124

---

Gráfico 5-6 - Caso 2: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5	126
Gráfico 5-7 - Caso 3: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5	127
Gráfico 5-8 - Caso 4: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores negativos máximos sobre o pilar P5	128
Gráfico 5-9 - Casos 1 e 2: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores positivos máximos da laje plana	130
Gráfico 5-10 - Casos 3 e 4: Comparativo Eberick/MEF/AG - Momentos fletores positivos máximos Maior vão da laje	131
Gráfico 5-11 - Caso 1: Comparativo Eberick/MEF/AG – Esforço normal Pilar P5	132
Gráfico 5-12 - Caso 2: Comparativo Eberick/MEF/AG – Esforço normal Pilar P5	133
Gráfico 5-13 - Caso 3: Comparativo Eberick/MEF/AG – Esforço normal Pilar P5	133
Gráfico 5-14 - Caso 4: Comparativo Eberick/MEF/AG – Esforço normal Pilar P5	134
Gráfico 5-15 - Caso 3: Comparativo Eberick/MEF/AG – Momento Fletor Pilar P5	135
Gráfico 5-16 - Caso 4: Comparativo Eberick/MEF/AG – Momento Fletor Pilar P5	136

### 8.3. Lista de tabelas

Tabela 3-1 – Resumo dos casos utilizados na dissertação	51
Tabela 4-1 – Caso 1: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos no centro do pilar P5 - Malha 12,5x12,5cm	75
Tabela 4-2 - Caso 2: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos no centro do pilar P5 - Malha 12,5x12,5cm	76
Tabela 4-3 - Caso 2: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face do pilar P5 - Malha 12,5x12,5cm	77
Tabela 4-4 – Comparativo entre os casos 1 e 2: Momentos fletores máximos na face do pilar P5 – MEF e AG - Malha 12,5x12,5cm	78
Tabela 4-5 - Caso 3: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos sobre o pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm	96
Tabela 4-6 - Caso 3: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face esquerda do pilar P5 - Malha 25x25 com refinamento para 3,125cm	97
Tabela 4-7 - Caso 3: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face direta do pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm	97
Tabela 4-8 - Caso 4: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face esquerda do pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm	99

*MODELAGEM DE LAJES PLANAS SIMÉTRICAS E ASSIMÉTRICAS EM CONCRETO ARMADO*  
*ANÁLISE INTEGRADA LAJE X PILAR*

---

---

<i>Tabela 4-9 - Caso 4: Comparativo entre MEF e AG - Momentos fletores máximos na face esquerda do pilar P5 - Malha 25x25cm com refinamento para 3,125x3,125cm</i>	<i>99</i>
<i>Tabela 4-10 – Comparativo entre os casos 3 e 4: Momentos fletores máximos na face esquerda do pilar P5 – MEF e AG - Malha 12,5x12,5cm</i>	<i>100</i>
<i>Tabela 4-11 – Comparativo entre os casos 3 e 4: Momentos fletores máximos na face direita do pilar P5 – MEF e AG - Malha 12,5x12,5cm</i>	<i>101</i>
<i>Tabela 4-12 – Comparativo entre os casos 3 e 4: Momentos fletores Pilar P5 – MEF e AG - Malha 3,125x3,125cm</i>	<i>116</i>
<i>Tabela 5-1 – Caso 1: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores negativos máximos na face do pilar P5</i>	<i>125</i>
<i>Tabela 5-2 - Caso 2: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores negativos máximos na face do pilar P5</i>	<i>126</i>
<i>Tabela 5-3 - Caso 3: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores negativos máximos na face esquerda do pilar P5</i>	<i>128</i>
<i>Tabela 5-4 - Caso 4: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores negativos máximos na face esquerda do pilar P5</i>	<i>129</i>
<i>Tabela 5-5 - Caso 3: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores no pilar P5</i>	<i>136</i>
<i>Tabela 5-6 - Caso 4: Comparativo em relação ao Eberick - Momentos fletores no pilar P5</i>	<i>137</i>