

Thyago Sousa Mendes

**Renormalização de Teorias Clássicas do Elétron
Pontual**

Florianópolis, SC
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Renormalização de Teorias Clássicas do Elétron Pontual

Thyago Sousa Mendes

Dissertação de mestrado apresentada à Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jeferson
de Lima Tomazelli

Florianópolis, SC
2009

A minha mãe e irmã

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Jeferson de Lima Tomazelli, a quem sou muito grato pela amizade e pela orientação dedicada.

A minha mãe querida, pelo apoio durante o estudo que resultou neste trabalho.

Aos colegas Gerson, André, Paulo e Geovani pelo período de convivência.

Aos professores, demais funcionários e estudantes do departamento.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho examinamos diferentes formulações covariantes da eletrodinâmica clássica, onde as divergências nas quantidades físicas, que aparecem devido ao caráter singular dos objetos matemáticos associados, são contornadas apropriadamente. Mostramos que as teorias renormalizadas levam à equação de Abraham-Lorentz-Dirac, a qual descreve a dinâmica clássica do elétron pontual na presença de campos eletromagnéticos, discutindo também suas limitações.

Palavras-chave: renormalização, eletrodinâmica clássica, divergências, regularização, distribuições.

Abstract

In this work we examine different covariant formulations of classical electrodynamics, where the divergences in the physical quantities, which appear due to the singular nature of the associated mathematical objects, are appropriately circumvented. We show that the renormalized theories lead to the Abraham-Lorentz-Dirac equation, describing the classical dynamics of the point electron in the presence of electromagnetic fields, also discussing their restriction bounds.

Keywords: renormalization, classical electrodynamics, divergencies, regularization, distributions.

Sumário

1	Introdução	3
2	O modelo de Dirac	7
2.1	A equação de Abraham-Lorentz-Dirac (ALD)	7
2.2	Runaway e pré-aceleração	14
2.3	Addendum: o problema do fator $4/3$	16
3	O problema das divergências	23
3.1	O modelo estendido	23
3.2	A proposta de Mario Schönberg	27
3.2.1	Equações de movimento	29
3.2.2	O tensor momento-energia	29
3.3	Outras propostas	31
3.3.1	A eletrodinâmica de Feynman-Wheeler	31
3.3.2	A proposta de Gupta	36
4	Regularizações covariantes	39
4.1	Regularização de Pauli-Villars	39
4.2	Regularização em termos de seqüências de distribuições	44
5	Conclusão e perspectivas futuras	51
A	Expansão do tensor de campo	53
B	Teoria de distribuições	57
B.1	O espaço de funções teste \mathcal{D} e o suporte de uma distribuição	57
B.2	Distribuições regulares	58
B.3	Operações e propriedades	59
B.4	Seqüências de distribuições	62

C	Funções de Green	63
D	Expansão do tensor momento-energia	69

Lista de Figuras

2.1	Hipersuperfície envolvendo a linha de universo da partícula carregada . . .	10
2.2	Quadrivetor unitário u^μ , perpendicular à face lateral do tubo em cada ponto	10
2.3	Pré-aceleração de uma partícula submetida a uma força externa constante.(Extraído de [29], pág. 789)	15
3.1	Carga envolvida pelo absorvedor.	35

<

Capítulo 1

Introdução

A eletrodinâmica microscópica nasce como uma teoria de ação à distância proposta por Wilhem Weber em 1846. Ele se baseou na hipótese de seu colega na universidade de Göttingen, Gustav T. Fechner, que sugeriu que as correntes elétricas deveriam-se ao movimento de partículas carregadas [1].

A teoria, embora conduzisse a inconsistências, foi capaz de descrever corretamente o fenômeno de indução de correntes, sendo que, a partir de sua equação fundamental

$$\vec{F} = \frac{e \cdot e'}{r^2} \left[1 + \frac{r}{c^2} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \right)^2 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \hat{r}$$

para a força sobre uma partícula com carga e , na posição \vec{r} , devido a uma outra de carga e' , na origem, foi possível derivar a lei para a força entre correntes, proposta por Ampère.

Ainda no século XIX, teríamos o nascimento da eletrodinâmica de Maxwell-Faraday, onde as interações entre distribuições contínuas de cargas são intermediadas por campos. No entanto, somente no início do século seguinte, já após a descoberta do elétron e o sucesso do ambicioso programa de H. A. Lorentz [2], de construção de uma teoria que descrevesse os fenômenos da eletrodinâmica e da óptica em termos do comportamento dos elétrons, é que a eletrodinâmica clássica toma o viés de uma teoria mista de partículas e campos.

A base da eletrodinâmica clássica são as equações de Maxwell e a lei de força de Lorentz: as equações de campo permitem obter o campo eletromagnético, dado a dinâmica das fontes; a lei de força de Lorentz, associada à segunda lei de Newton, permite descrever a dinâmica das fontes, dado o campo externo.

Em cenários específicos, ambas descrições são empiricamente muito bem sucedidas dentro dos limites clássicos, mas levam a dificuldades matemáticas e inconsistências físicas, quando reunidas numa teoria que trate de forma unificada as influências mútuas entre campo e fontes.

O objetivo dessa monografia é levantar quais são essas dificuldades e as propostas de soluções, dentro do desenvolvimento histórico da teoria clássica do elétron. Vale esclarecer que o nome *teorias clássicas do elétron*, que aparece no título deste trabalho, não é o mais explicativo. Muitas características dos modelos que veremos não dependem de parâmetros específicos do elétron, de modo que a teoria do elétron na verdade seria uma *teoria de partículas carregadas*. No entanto, muitos dos desenvolvimentos que veremos foram motivados na descrição do elétron, e no curso do trabalho trataremos, salvo quando se fizer necessária alguma distinção, os termos *elétron* e *partícula carregada* como equivalentes.

A teoria do elétron possui uma etapa do seu desenvolvimento entrelaçada com o nascimento da teoria da relatividade especial. Pouco depois da descoberta do elétron em 1897, Walter Kaufmann, numa longa série de experimentos, descobriu e obteve a dependência da razão carga-massa do elétron com sua velocidade.

A teoria para essa dependência, por se tratar de um fenômeno de natureza elétrica, foi construída com base nas equações de Maxwell e na força de Lorentz, utilizando o conceito de *massa eletromagnética*, que discutiremos na seção 2.3. O elétron foi modelado inicialmente como uma pequena esfera rígida, carregada e com partes interagentes. Esse tipo de modelo foi criticado em 1904 por Lorentz, alertando que os modelos deveriam possuir estruturas que se contraem quando em movimento relativo ao éter, e Poincaré [3], em 1906, observou que seria necessário considerar alguma outra interação de origem não-eletromagnética para contrabalançar a repulsão coulombiana da estrutura (*problema da estabilidade*).

Em 1912, G. Mie propôs uma teoria com o intuito de resolver o problema da estabilidade de forma radical. Este generalizou as equações de Maxwell-Lorentz e redefiniu o tensor momento-energia, de modo que a força coulombiana repulsiva no interior do elétron é contida por outra igualmente elétrica, e as diferenças entre sua teoria e a eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz permanecem indetectáveis na região exterior à carga. Esta teoria, que é não-linear, consegue equacionar a dificuldade com a estabilidade, mas, por outro lado, padece da propriedade inaceitável do campo eletromagnético depender do valor absoluto dos potenciais [4].

Houve também propostas de modelos clássicos pontuais. Em 1938, Dirac [5] construiu um modelo relativístico para o elétron, sem considerar seu spin, com base nas equações de Maxwell e nas leis de conservação de momento

e energia, em que a equação de movimento (*equação de Abraham-Lorentz-Dirac*) possui um termo correspondendo à influência do processo de irradiação sobre o movimento (*reação de radiação*). Essa equação, no limite para baixas velocidades, coincide com a desenvolvida por Abraham [6] e Lorentz [2] no início do século XX.

Antes de Dirac, um outro modelo pontual relativístico já havia sido proposto em 1926 por Frenkel [7]. Tratava-se de um modelo spinorial, sem reação de radiação, que foi posteriormente aprimorado por muitos outros autores, dentre eles Bhabha [8] e Bhabha e Corben [9]. Esses autores, com base no trabalho de Dirac [5], desenvolveram um modelo consistente, não só com a lei de conservação do quadrimomento, como também com a conservação do momento angular.

Os modelos pontuais, ainda que apresentem vantagens em certos aspectos, como levar a equações de movimento diferenciais, ao invés de integro-diferenciais, possuem sérias dificuldades. Uma delas é o fato de que a energia eletromagnética do campo de Coulomb é infinita; essa energia está associada à inércia da partícula, de forma que seria necessário uma quantidade ilimitada de trabalho para acelerá-la.

Uma teoria, não discutida no presente trabalho, que vale citar pela sua importância histórica, é a *eletrodinâmica de Born e Infeld* [10], de 1934. Essa teoria, assim como a de Mie, é não-linear, e possui equações de campo que recaem nas equações de Maxwell, para campos suficientemente fracos. O campo possui, para cada ponto do espaço, um limite superior, implicando que, à medida que a carga seja mais localizada, a energia do campo não seja infinita; além da forte evidência experimental da linearidade do campo eletromagnético, essa teoria se torna matematicamente muito complicada para se explorar suas conseqüências.

Esta dissertação tem ênfase na crítica de trabalhos, envolvendo o próprio campo eletromagnético de Maxwell, que tentaram resolver as dificuldades do modelo pontual, devido às divergências da auto-energia e do tensor momento-energia, como os de Pryce [11] e Gupta [12]. Uma outra proposta, que já comentamos, é aquela feita em 1945 por Mario Schönberg e Leite Lopes [13], e posteriormente desenvolvida por Mario Schönberg nos níveis clássico [14] e quântico [15].

Schönberg abriu mão da concepção de Faraday para o campo eletromagnético, como sendo o único a intermediar as interações, entre todas as cargas do sistema, e desenvolveu um eletromagnetismo com campos “disjuntos”: cada partícula interage com as demais através de um campo que diverge na sua própria posição, mas não nas das demais, e interage com ela própria através de um outro campo, que é regular nas suas vizinhanças.

A eletrodinâmica de Feynman-Wheeler [16], [17], desenvolvida também

em 1945, é uma teoria de ação à distância onde o processo de irradiação não é entendido como elementar. A irradiação por uma carga ocorre como consequência de sua interação com o resto do sistema.

Uma outra teoria, importante historicamente, é a desenvolvida por Dirac [18] em 1951. A existência de uma transformação de gauge para os potenciais significa que há mais variáveis presentes do que as fisicamente necessárias. Com base neste fato, Dirac elabora uma teoria onde a carga elétrica é interpretada em termos dessa liberdade. Ao invés de utilizar uma condição de gauge subsidiária para restringir a arbitrariedade do potencial, abre-se mão dessa condição para, a partir das equações de campo livre, introduzir os graus de liberdade das cargas.

Apesar dos grandes aprimoramentos que a teoria do elétron recebeu ao longo de mais de um século, muitas dificuldades permanecem, de modo que não temos uma teoria eletromagnética completamente satisfatória, matemática e conceitualmente, dentro do nível de realidade que a compete.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No capítulo 2, trataremos do modelo de Dirac, discutindo a consistência das soluções da ALD. Discorreremos também (seção 2.3) a respeito do problema pontuado por Poincaré e sua relação com as propriedades cinemáticas previstas pela relatividade especial, como a contração de Lorentz.

No capítulo 3, revisaremos o problema das quantidades divergentes dos modelos pontuais, do ponto de vista físico, resgatando propostas de reformulações conceituais da eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz. Mais especificamente, a proposta de Mario Schönberg, a eletrodinâmica de Feynman-Wheeler e um trabalho de Gupta. Já no capítulo 4, revisaremos o problema das quantidades divergentes do ponto de vista matemático, discutindo o método de regularização de *Pauli-Villars* (seção 4.1) e propriedades das *funções generalizadas* (seção 4.2).

Finalmente, no capítulo 5, tecemos considerações finais e apresentamos nossas perspectivas futuras, quanto à continuidade do presente trabalho. Deixamos para os apêndices alguns desenvolvimentos técnicos.

Capítulo 2

O modelo de Dirac

2.1 A equação de Abraham-Lorentz-Dirac (ALD)

A equação ALD foi obtida inicialmente no limite não-relativístico por M. Abraham, em 1903, e por H. A. Lorentz, no ano seguinte. Os mesmos construíram um modelo, com massa de origem puramente eletromagnética, sendo que, ainda num período anterior à teoria da relatividade, Abraham foi capaz de obter uma generalização covariante. No entanto, uma construção relativística, de primeiros princípios, seria feita somente em 1938 por Dirac [5], com base nas leis de conservação de energia e momento, além da hipótese de que o elétron seria uma partícula pontual, conjectura que não foi feita pelos seus predecessores, Abraham e Lorentz. Estes modelaram o elétron atribuindo-lhe a estrutura (*modelo estendido*) de uma pequena esfera com carga distribuída uniformemente em sua superfície [29].

Apresentaremos nessa seção o trabalho de Dirac [5], com alguns detalhes feitos por Fritz Rohrlich [24], deixando os cálculos mais extensos para o apêndice A.

Utilizaremos, ao longo da dissertação, unidades gaussianas e o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ em componentes galileanas $g^{00} = -g^{ii} = 1$, $g^{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$.

No modelo de Dirac, o campo eletromagnético é descrito pelas equações de Maxwell no gauge de Lorentz, com fontes microscópicas localizadas, descritas pela função generalizada *delta de Dirac* (apêndice B).

Na forma tensorial, essas equações são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (2.1)$$

$$\partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0, \quad (2.2)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o *tensor de campo*, que, em termos do quadripotencial A^μ , é definido por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.3)$$

enquanto j^ν é a *quadridensidade de corrente* microscópica. Em termos da distribuição delta e da linha de universo $z^\nu = z^\nu(\tau)$ do elétron, esta última é definida como

$$\begin{aligned} j^\nu(x) &= ec \int \delta^{(4)}(x - z(\tau)) \frac{dz_\nu(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= e\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{z}(\tau_p))v^\nu(\tau_p), \end{aligned} \quad (2.4)$$

sendo τ_p o valor de τ correspondente ao instante x^0 .

Vale observar que a utilização das equações de Maxwell, nascidas numa teoria macroscópica com fontes do campo eletromagnético não-localizadas (éter ou fluido elétrico), numa teoria com fontes localizadas (partículas), não se trata de um procedimento puramente formal. Como mostrado primeiramente por Lorentz, as equações de Maxwell macroscópicas podem ser derivadas de uma base microscópica através de um procedimento de médias estatísticas [25].

Denotaremos $F_{in}^{\mu\nu}$ o campo que corresponde à solução da versão homogênea de (2.1). Este campo representa a radiação livre que se propaga de acordo com as condições iniciais, e incide sobre o elétron. Somando-o à solução retardada (apêndice C) da equação (2.1), temos a solução geral

$$F^{\mu\nu}(x) = F_{in}^{\mu\nu}(x) + F_{ret}^{\mu\nu}(x), \quad (2.5)$$

que traduz a idéia usual de causalidade, por ser uma solução determinada por eventos no passado de x , e estar de acordo com a assimetria temporal característica do processo de irradiação. Intuitivamente, essa assimetria corresponde ao quadro pictórico da radiação divergindo coerentemente da fonte ao ser acelerada.

Por outro lado, formalmente, também é possível formular o problema em termos de “condições finais”, condições posteriores ao início da dinâmica do sistema carga-radiação. Podemos compor uma solução geral com o campo de radiação livre $F_{out}^{\mu\nu}$, o qual se propaga, conforme as condições finais, até o elétron, e o campo avançado $F_{adv}^{\mu\nu}$ (apêndice C), que converge sobre a fonte,

$$F^{\mu\nu}(x) = F_{out}^{\mu\nu}(x) + F_{adv}^{\mu\nu}(x). \quad (2.6)$$

Essa solução é entendida como não-física, por depender da quadricorrente no futuro do evento x , mas formalmente é idêntica a (2.5), o que implica, comparando-as, a relação

$$\begin{aligned} F_{out}^{\mu\nu} - F_{in}^{\mu\nu} &= F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu} \\ &\equiv F_{rad}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

É importante notar que o campo $F_{rad}^{\mu\nu}$ fica completamente determinado pela linha de universo do elétron, além de possuir um valor definido sobre a mesma.

Em experimentos envolvendo processos de irradiação, a radiação produzida é detectada a grandes distâncias da fonte, decorrido um longo intervalo de tempo desde o instante da aceleração, de modo que, na região do espaço-tempo da detecção não há radiação $F_{adv}^{\mu\nu}$. Com base nisto, Dirac interpreta o campo $F_{rad}^{\mu\nu}$ como aquele correspondendo ao campo eletromagnético irradiado, ao invés do campo usual $F_{ret}^{\mu\nu}$. Neste caso, além de dar significado à radiação na própria posição da fonte, sem contradizer a observação, essa teoria dá sentido ao campo de radiação antes do instante de aceleração da fonte, e inova o pensamento da época, ao dar certo significado físico ao campo avançado.

Nesta altura, é conveniente introduzimos algumas definições, que utilizaremos em todo o trabalho:

$$F_-^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(F_{ret}^{\mu\nu} - F_{adv}^{\mu\nu}), \quad (2.8)$$

$$F_+^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(F_{ret}^{\mu\nu} + F_{adv}^{\mu\nu}), \quad (2.9)$$

$$\bar{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(F_{in}^{\mu\nu} - F_{out}^{\mu\nu}), \quad (2.10)$$

$$F^\mu \equiv \frac{e}{c} F^{\mu\nu} v_\nu. \quad (2.11)$$

Daremos continuidade à exposição da dedução da equação ALD, mostrando como Dirac implementou, de forma covariante, os princípios de conservação de momento e de energia. Para isso, consideremos uma hipersuperfície tridimensional, no espaço de Minkowski, em forma de “tubo”, um hipertubo, com raio invariável ρ , envolvendo a linha de universo da partícula num intervalo de tempo próprio $[\tau_1, \tau_2]$ (Figura 2.1).

Em cada ponto da linha de universo, a lateral do hipertubo é “paralela” à quadrivelocidade da partícula, de modo que seu elemento de volume $d\sigma^\mu$ tem

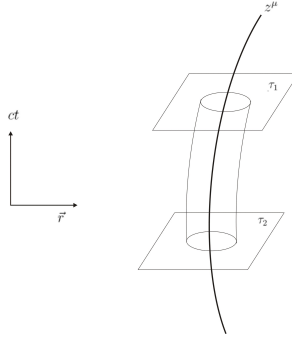


Fig. 2.1: Hipersuperfície envolvendo a linha de universo da partícula carregada

módulo $d^3\sigma$ e a orientação fixada pelo quadrivetor unitário tipo-espaço u^μ , que é perpendicular à quadri-velocidade em cada ponto da linha de universo (Figura 2.2).

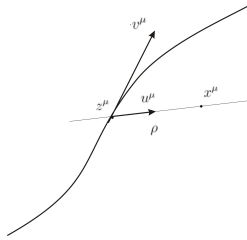


Fig. 2.2: Quadrivetor unitário u^μ , perpendicular à face lateral do tubo em cada ponto

Assim,

$$d\sigma^\mu = u^\mu d^3\sigma, \quad u^\mu u_\mu = -1, \quad u^\mu v_\mu = 0. \quad (2.12)$$

Dado $z^\mu(\tau)$, o evento x^μ de avaliação do campo sobre a hipersuperfície do tubo, que o é simultâneo, como representado na figura 2.2, fica definido por

$$x^\mu - z^\mu = \rho u^\mu. \quad (2.13)$$

A condição para que x^μ seja um ponto genérico sobre a superfície do hiper-tubo e, portanto, simultâneo a um dado $z^\mu(\tau)$, é

$$\frac{d}{d\tau} [(x^\mu - z^\mu)v_\mu] = 0, \quad (2.14)$$

o que implica, utilizando essa relação e (2.13), que

$$dx^\mu \frac{v_\mu}{c} = c(1 - \rho a_u/c^2)d\tau, \quad (2.15)$$

onde $a_u \equiv a_\lambda u^\lambda$.

Esta equação nos diz que um deslocamento infinitesimal, sobre a hiper-superfície do tubo, tem componente $c(1 - \rho a_u/c^2)d\tau$ na direção da quadriv-locidade. Com isso, em analogia com volumes no espaço tridimensional (dados pela área da base multiplicado pela altura), o produto dessa compo-nente com o elemento de área compreendido pelo ângulo sólido $d\Omega$, de uma esfera de raio ρ , nos dá o elemento de volume $d^3\sigma$, isto é

$$d\sigma^\mu = c(1 - \rho a_u/c^2)\rho^2 u^\mu d\Omega d\tau. \quad (2.16)$$

O tensor *momento-energia* representa o fluxo de quadrimomento em cada ponto, e sua definição usual é

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right); \quad (2.17)$$

em termo de suas componentes,

$$T^{00} = -U, \quad T^{0i} = -S^i/c, \quad T^{ij} = T_{ij}^M; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.18)$$

onde U corresponde à definição usual de densidade de energia eletromag-nética, S^i é i -ésima componente do vetor de Poynting e T_{ij}^M são as compo-nentes do *tensor de Maxwell*.

Para a radiação livre, a lei de conservação do quadrimomento é expressa pela relação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, que é uma conseqüência da invariância da ação do campo eletromagnético livre, sob translações espaço-temporais; para um campo eletromagnético externo $F_{ext}^{\mu\nu}$, a *densidade de quadriforça*

$$K^\mu \equiv \partial_\nu T^{\mu\nu} \quad (2.19)$$

é, em geral, não nula.

Dirac empregou a mesma definição (2.17) para representar o fluxo de quadrimomento do campo livre adicionado ao campo produzido pelo elétron ($F^{\mu\nu} = F_{in}^{\mu\nu} + F_{ret}^{\mu\nu}$), através da superfície do hipertubo.

Multiplicando por um fator $-1/c$ o fluxo do tensor momento-energia através da hipersuperfície lateral do tubo (figura 2.1), entre os planos de si-multaneidade τ_1 e τ_2 , temos o quadrivetor

$$\Delta P^\mu = -\frac{1}{c} \int_{hipertubo} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu, \quad (2.20)$$

interpretado por Dirac como correspondendo à variação do quadrimomento total do campo, entre os instantes τ_1 e τ_2 . Tal variação pode também ser escrita, usando (2.16), como

$$\Delta P^\mu = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\Omega T^{\mu\nu} u_\nu \rho^2 (1 - \rho a_u/c^2). \quad (2.21)$$

A solução (2.5) das equações de Maxwell não-homogêneas, com o auxílio de (2.7), (2.9) e (2.10), pode ser escrita na forma

$$F^{\mu\nu} = F_+^{\mu\nu} + \bar{F}^{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

Em termos deste campo, podemos calcular o tensor momento-energia em todas as ordens em ρ . No apêndice A é demonstrado que os termos que contribuem para o fluxo do tensor momento-energia através do hipertubo, no limite para o elétron pontual $\rho \rightarrow 0$, encontram-se todos na relação

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} u_\nu &= \frac{e^2/4\pi}{1 - \rho a_u/c^2} \left[\left(\frac{1}{2\rho^4} + \frac{a^2}{2c^4\rho^2} \right) u^\mu - \left(\frac{1}{2c^2\rho^3} + \frac{3a_u}{4c^4\rho^2} \right) a^\mu \right] \\ &+ \frac{e/4\pi}{1 - \rho a_u/c^2} \frac{1}{c\rho^2} \bar{F}^{\mu\alpha} v_\alpha. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Substituindo essa equação em (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta P^\mu &= - \frac{e^2}{4\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\Omega \left(\frac{1}{2\rho^2} + \frac{a^2}{2c^4} \right) u^\mu \\ &+ \frac{e^2}{4\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\Omega \left(\frac{1}{2c^2\rho} + \frac{3a_u}{4c^4} \right) a^\mu - \frac{e}{4\pi c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\Omega \bar{F}^{\mu\alpha} v_\alpha. \end{aligned} \quad (2.24)$$

No referencial de repouso, u^μ é um vetor puramente espacial, com componentes, digamos, $(0; \hat{u})$, onde $\hat{u} \cdot \hat{u} = 1$. Com isso, temos que a primeira integral é nula, pois $\int d\Omega \hat{u} = 0$.

Pela mesma razão, o termo cujo integrando é proporcional a a_u , na segunda integral, também se anula, restando, portanto, somente a última integral e aquela correspondente ao integrando da potência ρ^{-1} , o que faz com que (2.24) se reduza a

$$\Delta P^\mu = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{dP_{Coul}^\mu}{d\tau} - \frac{e}{c} \overline{F}^{\mu\nu} v_\nu \right) d\tau, \quad P_{Coul}^\mu = \frac{e^2}{2c^2\rho} v^\mu. \quad (2.25)$$

Esta integral não depende da forma da hipersuperfície, mas apenas dos extremos do intervalo, τ_1 e τ_2 . Para verificar, basta tomar uma outra hipersuperfície S_3 , envolvendo externamente o hipertubo e coincidindo com este nas extremidades.

Como a linha de universo da partícula não passa pelo interior do quadrivolume V_4 , da região entre as duas hiper-superfícies, $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ em V_4 . Desta forma, de acordo com o *teorema de Gauss*,

$$\int_{S_3 + \text{hipertubo}} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu = \int_{V_4} \partial_\nu T^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (2.26)$$

e, portanto,

$$\int_{\text{hipertubo}} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu = \int_{S_3} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu. \quad (2.27)$$

Isso implica que o integrando de (2.25) é a derivada total de algum quadrivetor, digamos B^μ ,

$$\dot{B}^\mu = \frac{e^2}{2c^2\rho} a^\mu - \frac{e}{c} \overline{F}^{\mu\nu} v_\nu. \quad (2.28)$$

Como o tensor de campo é anti-simétrico e $v_\mu a^\mu = 0$, temos $\dot{B}^\mu v_\mu = 0$, que define o movimento do elétron.

Nesse ponto, Dirac optou pela escolha mais simples possível para B^μ :

$$B^\mu = k v^\mu, \quad (2.29)$$

onde k é uma constante no tempo, que não depende do movimento.

Se a substituirmos na equação (2.28), temos que $k = e^2/2c^2\rho - m$, onde m é uma outra constante. A equação de movimento do elétron torna-se

$$m a^\mu = \frac{e}{c} \overline{F}^{\mu\nu} v_\nu, \quad (2.30)$$

ou, mais precisamente, uma vez que o limite $\rho \rightarrow 0$ não foi ainda tomado,

$$m a^\mu = \frac{e}{c} \overline{F}^{\mu\nu} v_\nu + \mathcal{O}(\rho). \quad (2.31)$$

A precisão dessa equação está limitada pelo tamanho finito do raio do hipertubo e, conseqüentemente, pelo tamanho do raio do elétron. Como no

limite $\rho \rightarrow 0$, $e^2/2c^2\rho \rightarrow \infty$, a constante m pode coincidir com a massa empírica se for escolhido $k = k(\rho)$, de tal modo que, nesse limite, $k \rightarrow \infty$. Esse procedimento, realizado por Dirac [5], ficou conhecido como *regularização clássica da massa do elétron*.

Com o auxílio da equação (2.7) e das definições (2.8) e (2.10), podemos obter a expressão $\bar{F}^{\mu\nu} = F_{-}^{\mu\nu} + F_{in}^{\mu\nu}$.

O cálculo de $F_{-}^{\mu\nu}$ é apresentado no apêndice A, equação (A.17). Com esse resultado, a equação de movimento, com massa renormalizada e generalizada para o caso onde haja influência externa sobre o elétron, é

$$ma^\mu = \frac{2e^2}{3c^3}(\dot{a}^\mu + a^\lambda a_\lambda a^\mu/c^2) + F_{in}^\mu + F_{ext}^\mu. \quad (2.32)$$

Esta é a equação que ficou conhecida como equação de Abraham-Lorentz-Dirac, em que, de acordo com a interpretação de Dirac, o primeiro termo do lado direito corresponde à quadriforça devido ao próprio campo de radiação $F_{rad}^{\mu\nu}$.

2.2 Runaway e pré-aceleração

Nessa seção, com o intuito de explicitar as principais dificuldades da teoria do elétron, analisaremos as soluções da equação ALD para dois casos simples, onde poderemos identificar características gerais das soluções. Faremos isso no limite não-relativístico,

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{F}_{ext}. \quad (2.33)$$

Esta equação corresponde à parte espacial de (2.32), descartado termos não lineares em v/c , e, como comentamos na introdução, é a equação desenvolvida por Abraham e Lorentz no início do século XX, e utilizada por Lorentz para descrever fenômenos ópticos e de transferência de calor.

A escolha da equação ALD no seu limite para baixas velocidades é feita com a intenção de tornar simples as manipulações, sabendo que as características dos nossos exemplos são comuns ao caso relativístico.

Tomemos o movimento de um elétron, na ausência de campo externo e campo livre incidente,

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\tau_0\ddot{\mathbf{v}}, \quad \tau_0 = \frac{2e^2}{3mc^3}. \quad (2.34)$$

O parâmetro τ_0 é importante em teoria do elétron, pois caracteriza a ordem de grandeza do intervalo de tempo para a luz percorrer uma distância igual ao *raio clássico do elétron*.

A equação acima é de segunda ordem na velocidade e sua solução geral, dada pela combinação de duas particulares, é

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 e^{t/\tau_0}, \quad (2.35)$$

onde \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 são dois vetores constantes no tempo.

O caso $\mathbf{a}_2 \neq 0$ descreve movimentos onde a velocidade da partícula aumenta indiscriminadamente com o tempo. Soluções com esse comportamento, inaceitáveis à luz da teoria da relatividade, não foram observadas e são conhecidas como *soluções runaway*.

Para resolver o problema das soluções runaway costuma-se incluir na teoria alguma hipótese física *ad hoc*, para selecionar as soluções fisicamente plausíveis. Por exemplo, nesse caso, contorna-se essa inconsistência selecionando a família de soluções em que $\mathbf{a}_2 = 0$, ou seja o repouso ou movimento uniforme. Num caso geral, podemos impor, como fez Dirac [5], a condição adicional

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{a}(t) = 0. \quad (2.36)$$

Essa condição, além de evitar que o elétron se auto-acelere indefinidamente, fornece um terceiro valor de contorno, que é indispensável, visto que a equação ALD é de terceira ordem. No entanto, essa condição de contorno não é usual, pois funciona como se a teoria atribuísse uma finalidade ao movimento.

Analisemos agora um segundo caso, correspondente ao movimento de um elétron sob a influência de uma ação externa, que pode ser expressa em termos de uma força função do tempo

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\tau_0\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{F}(t). \quad (2.37)$$

Para integrar essa equação, multipliquemos ambos os lados pelo fator integrante e^{-t/τ_0} , e integremos de t ao infinito

$$- \int_t^\infty m\tau_0 \frac{d}{dt'} [e^{-t'/\tau_0} \dot{\mathbf{v}}(t')] dt' = \int_t^\infty e^{-t'/\tau_0} \mathbf{F}(t') dt'. \quad (2.38)$$

Se integrarmos o primeiro termo, utilizando a condição

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t/\tau_0} \mathbf{a}(t) = 0, \quad (2.39)$$

que é mais fraca que (2.36), mas elimina as soluções runaway, temos

$$m\tau_0 e^{-t/\tau_0} \dot{\mathbf{v}}(t) = \int_t^\infty e^{(t-t')/\tau_0} \mathbf{F}(t') dt'. \quad (2.40)$$

Com a mudança de variável $t' = t + \tau_0 s$, verificamos que a aceleração é dada por

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m} \int_0^\infty e^{-s} \mathbf{F}(t + \tau_0 s) ds. \quad (2.41)$$

A equação acima mostra que a aceleração no instante t depende da força em todo o futuro $t + \tau_0 s$, o que representa uma clara violação de causalidade, ao menos na sua forma mais comumente entendida. Podemos visualizar melhor a situação na figura 2.3, que ilustra alguns parâmetros da dinâmica unidimensional de uma partícula, submetida a uma força constante que começa a agir sobre a mesma no instante $t = 0$

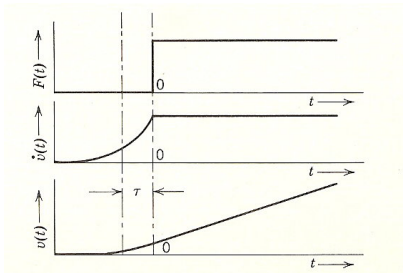


Fig. 2.3: Pré-aceleração de uma partícula submetida a uma força externa constante. (Extraído de [29], pág. 789)

Observa-se que o elétron é acelerado antes mesmo da ação da força externa. Essa *pré-aceleração*, como é conhecida, possui duração da ordem de τ_0 , que para o elétron é $\sim 10^{-23} s$, um intervalo que seria muito difícil de ser detectado em laboratório. Além disso, para se sondar um elétron durante um intervalo de tempo finito Δt , as medidas de sua energia estariam sujeitas a uma incerteza $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$. Para não entrar no domínio da teoria quântica, é necessário que $\Delta E \ll mc^2$, onde m é a massa de repouso do elétron. Isto implica que a dinâmica clássica só existe para intervalos $\Delta t \gg 137\tau_0 \gg \tau_0$, o que nos diz que o comportamento acausal ocorre somente durante uma etapa da evolução do sistema que deveria, em princípio, ser descrita pela física quântica.

Devido aos problemas de acausalidade e soluções *runaway* da equação ALD, outras equações foram propostas. Podemos citar as equações de segunda ordem propostas por Bonnor [19], em que a energia irradiada é suprida pela redução da massa de repouso da partícula, e a equação de Landau-Lifshitz (LL) [20], [21]. Esta última foi construída em base ao argumento físico de que o procedimento de regularização não é fidedigno, e o campo externo não

deve enxergar a estrutura do elétron. Em 2000, um importante trabalho foi realizado por Spohn [22], mostrando que as soluções de LL podem ser obtidas perturbativamente a partir do setor de soluções fisicamente aceitáveis (aceleração assintótica nula) de ALD. Rohrlich em [23] propõem uma interpretação física para esse fato.

2.3 Addendum: o problema do fator 4/3

Embora o problema do fator 4/3 não esteja relacionado ao modelo de Dirac, este será tratado nesta seção devido a sua relação com o conceito de massa eletromagnética, discutido na seção 3.1 do próximo capítulo, e a sua importância no desenvolvimento inicial da teoria da relatividade especial.

J. J. Thomson [26], em 1881, analisou o movimento não-relativístico de partículas carregadas, modelando-as como pequenas esferas rígidas, de raio a e com distribuição superficial de carga homogênea, verificando que o movimento de uma partícula com carga e produz uma energia adicional no campo, devido ao campo magnético

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{e}{r^2} \hat{r}, \quad (2.42)$$

que existe em função do movimento da partícula com velocidade \mathbf{v} .

Representando a densidade de energia eletromagnética por $U = (E^2 + B^2)/8\pi$, Thomson verificou que a energia adicional devido ao campo magnético é

$$\begin{aligned} E_{adic} &\equiv \frac{1}{8\pi} \int B^2 d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \frac{e^2}{2ac^2} \right) v^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Curiosamente, esse resultado possui a forma da expressão da mecânica newtoniana para a energia cinética de uma partícula com velocidade v . Mais que isso, para os seguidores de Maxwell, por representar a energia de um campo magnético, estaria associada à energia cinética do éter.

Diante dessa interpretação, Thomson associou duas massas ao movimento de uma partícula carregada: m_{bare} , a massa que corresponde ao conceito da mecânica clássica, que tanto partículas neutras quanto as carregadas possuem; m_{elm} , a *massa eletromagnética*, que descreveria uma inércia proveniente das propriedades eletromagnéticas da partícula.

Para o modelo analisado por Thomson, a massa eletromagnética corresponde à expressão entre parênteses na equação (2.43)

$$m_{elm} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{2ac^2}. \quad (2.44)$$

Assim, uma partícula carregada possui energia cinética

$$K = \frac{1}{2} (m_{bare} + m_{elm}) v^2. \quad (2.45)$$

Como a energia eletrostática para o modelo em questão é

$$W_{est} = \frac{e^2}{2a}, \quad (2.46)$$

a massa eletromagnética se relaciona com a energia eletrostática por

$$m_{elm} = \frac{4}{3} \frac{W_{est}}{c^2}. \quad (2.47)$$

Essa relação entre massa e energia, cujo fator 4/3 deixa inquieto qualquer físico contemporâneo, foi incomodar somente com o surgimento da teoria da relatividade especial, que prevê a relação $m = E/c^2$.

É importante observar que o fator 4/3 não poderia simplesmente ser absolvido na definição da massa eletromagnética. Fazer isso, seria transferir o fator para a expressão da energia adicional (equação (2.43)).

Jules Henri Poincaré, em 1916 [3], se propôs a explicar a presença do fator 4/3, argumentando que somente a interação eletromagnética entre as partes do elétron não oferecia estabilidade ao mesmo e, portanto, uma parte da auto-energia do elétron deveria ser de natureza não-eletromagnética. Poincaré, então, postulou a existência de uma força estabilizadora, cuja pressão compensaria a repulsão coulombiana e diminuiria a auto-energia em $W_{est}/3$, de modo que a relação de Einstein $E = mc^2$ não fosse mais violada.

De forma mais matemática, o que foi feito por Poincaré corresponde a postular a existência de um tensor simétrico $\Pi^{\mu\nu}$ que, somado ao tensor momentum-energia $T^{\mu\nu}$ (equação (2.17)), produz o tensor $\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu}$, cuja densidade de quadri-força associada $K^\mu = \partial_\nu \Theta^{\mu\nu}$ é nula em todo espaço, o que corresponde a uma estrutura estável para o elétron.

A hipótese básica de Thomson para o cálculo da massa eletromagnética está na equação (2.43), onde o contorno de integração é uma esfera de raio a , independente do estado de movimento. Abraham e Lorentz definiram a massa eletromagnética a partir de uma expressão para o momento. Utilizaram como hipótese básica as definições, para a energia e momento,

$$W = - \int T^{00} d^3 \mathbf{r} = \int U d^3 \mathbf{r},$$

$$p^j = - \frac{1}{c} \int T^{0j} d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{c^2} \int S^j d^3 \mathbf{r}. \quad (2.48)$$

Essas definições, quando aplicadas ao mesmo modelo, de esfera rígida, se deslocando a baixas velocidades, usado por Thomson, leva a uma relação entre momento e energia, também com a presença do mesmo fator 4/3

$$p^j = \frac{4}{3} \frac{W_{est}}{c^2} v^j. \quad (2.49)$$

Para velocidades arbitrárias, a relação é

$$p^j = \frac{\frac{4}{3} \frac{W_{est}}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v^j. \quad (2.50)$$

Historicamente, o *problema do fator 4/3*, como ficou conhecido, foi entendido como correspondendo ao problema da estabilidade do elétron. Entretanto, veremos que esses dois problemas são independentes, e que o primeiro, na verdade, corresponde a encontrar a correta transformação, entre diferentes observadores, das propriedades do sistema.

Isso foi feito por Rohrlich [27], em 1960, quem observou que as definições (2.48) envolvem integrações que vão da superfície esférica do elétron até o infinito. No entanto, a forma da superfície não é a mesma, para todos os observadores, ou seja, essas definições não são covariantes. E para corrigir o problema, Rohrlich propôs uma definição que fosse manifestamente covariante, definindo o quadrivetor $P^\mu = (W/c, \mathbf{p})$ como

$$P^\mu \equiv - \frac{1}{c} \int_{(\sigma)} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu, \quad (2.51)$$

onde $d\sigma_\nu$ é um elemento de volume do hiperplano tipo-espaço σ e o índice (σ) indica que a integração é realizada sobre um o hiperplano com um “corte” na região dos eventos que correspondem à superfície tridimensional da partícula. (Para detalhes complementares sobre essa definição, vide referência [24].)

Escolhendo o hiperplano σ perpendicular (no sentido de quadrivetores) à linha de universo da partícula, temos que $d\sigma_\nu$ tem módulo $d^3\sigma$ e a orientação de um quadrivetor perpendicular ao plano, como o quadrivetor v_ν/c , isto é

$$d\sigma_\nu = \frac{v_\nu}{c} d^3\sigma. \quad (2.52)$$

Assim, a definição (2.51), em termos das componentes do tensor momento-energia (2.18) e das componentes da quadrivelocidade da partícula $v^\mu = (\gamma c; \gamma \mathbf{v})$, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} W &= \gamma \int U d^3\sigma - \frac{\gamma}{c^2} \int S^j v^j d^3\sigma, \\ p^j &= \frac{\gamma}{c^2} \int S^j d^3\sigma + \frac{\gamma}{c^2} \int T_{ji}^M v^i d^3\sigma, \end{aligned} \quad (2.53)$$

Chamando de $d^3\mathbf{r}$ o elemento de volume espacial no referencial de repouso, temos que, devido à contração de Lorentz-Fitzgerald, $\gamma d^3\sigma = d^3\mathbf{r}$.

Com isso, as equações (2.53), no limite não-relativístico, em primeira ordem em v/c , são

$$\begin{aligned} W &= \int U d^3\mathbf{r} \\ p^j &= \frac{1}{c^2} \int S^j d^3\mathbf{r} + \frac{1}{c^2} \int T_{ji}^M v^i d^3\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

levando-se em conta que o argumento das integrais correspondem aos limites não-relativísticos de U , S^j e T_{ji}^M .

O segundo termo da expressão para a energia em (2.53) foi truncado, devido ao fato de que o vetor de Poynting é linear na velocidade, o que faz com que o termo em questão seja de segunda ordem em v/c .

Devemos observar que as definições de Rohrlich (2.54) diferem das usadas por Lorentz e Abraham somente por um termo aditivo, na expressão do momento. Mostraremos, através de um cálculo simples, que esse termo aditivo é o que falta para a relação esperada $p^j = (W_{est}/c^2)v^j$.

Para isso, necessitamos das componentes do tensor de Maxwell, que são

$$T_{ij}^M = \frac{1}{4\pi} [E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\delta^{ij}]. \quad (2.55)$$

Com ele, com as definições para o campo da partícula a baixas velocidades

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

poderemos calcular o termo $\frac{1}{c^2} \int T_{ji}^M v^i d^3\mathbf{r}$ da definição de momento em (2.54), levando em conta somente termos lineares em v/c ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \int T_{ji}^M v^i d^3 \mathbf{r} &= \frac{e^2}{4\pi c^2} \int \frac{1}{r^4} \{ (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{c^2} [(\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{v}] (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}})^2 \mathbf{v} \}_j d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

O segundo termo do integrando é nulo, pois $(\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{v} = 0$; o quarto termo será desprezado por ser de segunda ordem em v/c , de modo que, escrevendo o elemento de volume $d^3 \mathbf{r} = r^2 d\Omega$, temos

$$\frac{1}{c^2} \int T_{ji}^M v^i d^3 \mathbf{r} = \frac{e^2}{4\pi c^2} \int [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}]_j d\Omega \int_a^\infty \frac{dr}{r^2}, \quad (2.58)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \int T_{ji}^M v^i d^3 \mathbf{r} &= \\ &= \frac{1}{2\pi c^2} \int [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} \mathbf{v}]_j d\Omega \left[\frac{1}{8\pi} \int_a^\infty \left(\frac{e}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right)^2 4\pi r^2 dr \right]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Além disso, temos $\int (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{r}} d\Omega = 4\pi \mathbf{v}/3$, o que é facilmente verificado escolhendo \mathbf{v} na direção $\hat{\mathbf{z}}$; o termo entre colchetes corresponde exatamente à energia eletrostática W_{est} , definida na equação (2.46). Desta forma, finalmente chegamos a

$$\frac{1}{c^2} \int T_{ji}^M v^i d^3 \mathbf{r} = -\frac{1}{3} \frac{W_{est}}{c^2} v^j. \quad (2.60)$$

Adicionando este último ao termo com o outro $\int S^j/c^2 d^3 \mathbf{r}$, da definição do momento na equação (2.54), que corresponde à definição utilizada por Abraham e Lorentz, dado pela equação (2.49), verificamos a relação

$$p^j = \frac{4}{3} \frac{W_{est}}{c^2} v^j - \frac{1}{3} \frac{W_{est}}{c^2} v^j = \frac{W_{est}}{c^2} v^j, \quad (2.61)$$

O que demonstra que a presença do fator $4/3$ não possui relação com propriedades dinâmicas do elétron, como a estabilidade, e sim, é uma consequência da cinemática relativística.

No caso relativístico, pode-se chegar à mesma conclusão de uma forma mais simples. Visto que $P^\mu = (W/c; \mathbf{p})$ na definição (2.51) é um quadrivetor no espaço de Minkowski, podemos obter explicitamente suas componentes, para um observador inercial qualquer, calculando primeiro $(W_{(0)}/c; \mathbf{p}_{(0)}) = P_0^\mu$, suas componentes no referencial de repouso, ou seja, realizando a integral de (2.51) sob o hiperplano σ perpendicular à quadrivelocidade, e posteriormente aplicando a elas um boost na direção \mathbf{v} do movimento. O boost que relaciona P_0^μ e P^μ é dado pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{W}{c} &= \gamma \left(\frac{W_0}{c} + \mathbf{p}_0 \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right), \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_0 + \frac{(\gamma - 1)}{v^2} (\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \gamma \frac{W_0}{c} \frac{\mathbf{v}}{c}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Necessitamos agora calcular W_0 e $\mathbf{p}_{(0)}$. Das definições (2.53), é imediato que $W_0 = W_{est}$ e $\mathbf{p}_{(0)} = 0$.

Substituindo esses valores na expressão do boost, concluímos que

$$\begin{aligned} W &= \frac{(W_{est}/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c^2 \\ \mathbf{p} &= \frac{(W_{est}/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Nota-se que em momento algum foram feitas hipóteses com respeito à estabilidade da estrutura do elétron. O resultado independe da densidade de quadriforça K^μ ser ou não nula sobre a superfície do elétron. Isto torna desnecessária a especulação de qualquer interação de origem não eletromagnética.

Capítulo 3

O problema das divergências

Este capítulo é dedicado à revisão de algumas formulações da eletrodinâmica que adotam a hipótese do carácter pontual para o elétron e se propõem a equacionar as dificuldades com quantidades divergentes, provenientes desta hipótese.

Antes de tratar dessas formulações da eletrodinâmica, daremos o exemplo de uma teoria que evita as divergências, modelando o elétron como uma partícula com estrutura, um modelo estendido. Esta teoria é útil para exemplificar as vantagens de não se modelar o elétron como uma partícula pontual e identificar características comuns entre os modelos pontuais e estendidos.

3.1 O modelo estendido

A equação de terceira ordem ALD viola a primeira lei de Newton, além de exibir outras patologias. Como discutido na seção 2.2, esta equação exibe soluções *runaway* e soluções com pré-aceleração, mas, apesar dessas inconsistências, a ALD vem sendo considerada a equação com reação de radiação mais promissora para a descrição da dinâmica clássica de partículas carregadas.

Embora Dirac [5] tenha elaborado uma teoria consistente e covariante, foi feito um trucamento dos termos de ordem superior no raio ρ do hipertubo (seção 2.1) para o cálculo do fluxo do tensor momento-energia.

O raio do tubo é o parâmetro que delimita o tamanho do elétron, de modo que o limite $\rho \rightarrow 0$ levaria a uma massa eletromagnética infinita na equação de movimento, embora a equação tenha sido redefinida através do procedimento de regularização clássica da massa. No entanto, não poderíamos dizer

que a ALD é uma aproximação, pois não temos outra equação, válida, para comparação.

O que faz a regularização clássica da massa é eliminar termos da auto-interação, adicionais ao quadrivetor de Abraham Γ^μ (equação (A.19)), que vão a zero no limite pontual. Sharp e Moniz [28] elaboraram um modelo onde todos esses termos são considerados, mantendo o raio do elétron finito, portanto, dispensando regularizações. Como veremos, esse modelo equivale ao de Dirac, exposto na seção 2.1, no limite para baixas velocidades e com força externa que varie suficientemente pouco sobre a extensão do elétron.

Partiremos da auto-interação que, no modelo em questão, é definida em termos da força de Lorentz

$$\mathbf{F}_{self} = \int d^3\mathbf{r} \left[\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_s(\mathbf{r}, t) \right], \quad (3.1)$$

onde o índice s refere-se ao campo produzido pelas partes da superfície do elétron, modelado como uma esfera com distribuição de carga superficial uniforme.

Em base à segunda lei de Newton, Sharp e Moniz postularam a equação de movimento

$$m_{bare} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{self}, \quad (3.2)$$

com m_{bare} representando a inércia relacionada às propriedades puramente mecânicas da partícula e \mathbf{F}_{ext} sendo uma força externa que varia pouco espacialmente, de modo a enxergar o elétron como pontual.

O desenvolvimento da expressão (3.1) é longo e fora do propósito desta seção. O cálculo pode ser encontrado em Jackson [29], onde a auto-força é desenvolvida, desprezando-se termos não lineares em v/c , na forma de uma série infinita, dada por

$$\mathbf{F}_{self} = -\frac{2}{3c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} \gamma_n \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \mathbf{v}(t), \quad (3.3)$$

onde γ_n é o fator geométrico

$$\gamma_n = \int \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n-1}. \quad (3.4)$$

Para o modelo de Sharp e Moniz, esse fator pode ser calculado facilmente, representando a densidade de carga em termos da função delta de Dirac por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi a^2} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)| - a), \quad (3.5)$$

onde a é o raio da esfera, \mathbf{r} e $\mathbf{r}_0(t)$ são as posições de um ponto genérico do espaço e do centro da esfera no instante t , respectivamente.

Com essa representação, obtemos

$$\gamma_n = 2e^2 \frac{(2a)^{n-1}}{n+1}. \quad (3.6)$$

Substituindo esses coeficientes na série para a auto-força (3.3), podemos escrever

$$\mathbf{F}_{self} = \frac{e^2}{3ca^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}\mathbf{v}}{dt^{n+1}}(t) \left(-\frac{2a}{c}\right)^{n+1}, \quad (3.7)$$

ou ainda, fazendo $k = n + 1$ e somando e subtraindo o termo correspondente a $k = 0$, podemos reescreve-la na forma

$$\mathbf{F}_{self} = \frac{e^2}{3ca^2} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k \mathbf{v}}{dt^k}(t) \left(-\frac{2a}{c}\right)^k - \frac{1}{0!} \frac{d^0 \mathbf{v}}{dt^0}(t) \left(-\frac{2a}{c}\right)^0 \right\}. \quad (3.8)$$

Observa-se que o somatório é exatamente a expansão em série de Taylor de $\mathbf{v}(t' = t - 2a/c)$ em torno do ponto $t' = t$. Com isso,

$$\mathbf{F}_{self} = \frac{e^2}{3ca^2} [\mathbf{v}(t - 2a/c) - \mathbf{v}(t)] \quad (3.9)$$

e a equação de movimento (3.2) adquire a forma

$$m_{bare} \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}_{ext} + \frac{e^2}{3ca^2} [\mathbf{v}(t - 2a/c) - \mathbf{v}(t)]. \quad (3.10)$$

Esta é uma *equação diferencial-diferença do tipo retardada*, que possui dois parâmetros livres, m_{bare} e o raio a do elétron. No entanto, m_{bare} guarda, a princípio, um difícil contato com a experiência por não corresponder à massa empírica, que pode ser medida. É possível remediar este problema postulando a quantidade $m \equiv m_{bare} + 2e^2/3c^2a$ como correspondendo à massa empírica. Assim,

$$m_{bare} \dot{\mathbf{v}}(t) = (m_{bare} + 2e^2/3c^2a) \dot{\mathbf{v}}(t) - (2e^2/3c^2a) \dot{\mathbf{v}}(t) = m(1 - c\tau_0/a) \dot{\mathbf{v}}(t), \quad (3.11)$$

onde τ_0 é definido em (2.34).

A definição acima permite escrever a equação de movimento (3.10) na forma

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{m(1 - c\tau_0/a)} \mathbf{F}_{ext} + \frac{(c/2a)(c\tau_0/a)}{(1 - c\tau_0/a)} [\mathbf{v}(t - 2a/c) - \mathbf{v}(t)]. \quad (3.12)$$

Analisemos esta equação para o caso de uma partícula hipotética com $m_{bare} = 0$, movimentando-se de modo que os termos da auto-força proporcionais a potências positivas de a sejam nulos ou desprezíveis. Para isso, precisamos expandir $\mathbf{v}(t - 2a/c)$ até segunda ordem:

$$\mathbf{v}(t - 2a/c) \approx \mathbf{v}(t) - \left(\frac{2a}{c}\right) \dot{\mathbf{v}}(t) + \left(\frac{1}{2!}\right) \left(\frac{2a}{c}\right)^2 \ddot{\mathbf{v}}(t). \quad (3.13)$$

Fazendo $m_{bare} = 0$ e substituindo esta expansão em (3.10), ou em (3.12), temos a equação

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}_{ext} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}(t), \quad m = \frac{4}{3} \frac{W_{est}}{c^2}, \quad (3.14)$$

que corresponde ao limite não-relativístico de ALD (equação (2.2)).

Análise das soluções

Estabelecida a relação entre a equação do modelo de Sharp e Moniz e a ALD, analisemos as características das soluções de (3.12).

Façamos isso para o caso $\mathbf{F}_{ext} = 0$, em que a equação de movimento é

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \xi [\mathbf{v}(t - 2a/c) - \mathbf{v}(t)], \quad \xi = \frac{(c/2a)(c\tau_0/a)}{(1 - c\tau_0/a)}. \quad (3.15)$$

Essa equação possui solução particular da forma

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0)e^{\beta t/\tau_0}, \quad (3.16)$$

onde $\mathbf{v}(0)$ é um vetor constante no tempo e β é um número complexo.

Para encontrarmos os possíveis valores de β , basta substituir a expressão acima na equação de movimento (3.15), obtendo

$$\frac{\beta}{\tau_0} = \xi \left[e^{-2a\beta/c\tau_0} - 1 \right]. \quad (3.17)$$

Não podemos resolver analiticamente esta equação, mas é possível conhecer o sinal da parte real através da parametrização

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{c\tau_0}{a} \right)^2 (\eta + i\vartheta),$$

$$g = \frac{1}{1 - c\tau_0/a}, \quad (3.18)$$

onde η e ϑ são números reais.

Utilizando a parametrização acima na equação (3.17), obtemos o par de equações

$$\eta = -g[1 - e^{-(c\tau_0/a)\eta} \cos(c\tau_0\vartheta/a)], \quad (3.19)$$

$$\vartheta = -ge^{-(c\tau_0/a)\eta} \sin(c\tau_0\vartheta/a). \quad (3.20)$$

Observa-se que, para $a > c\tau_0$, a equação (3.19) não possui soluções para valores positivos de η , o que nos garante que, neste caso, não há soluções runaway.

Já para o caso $a < c\tau_0$, é possível a existência de soluções da equação (3.19) para $\eta > 0$, o que significa a possibilidade de runaways.

Quanto à questão da pré-aceleração, Sharp e Moniz, no mesmo trabalho, analisam as soluções de (3.15) para o caso em que $\mathbf{F}_{ext} \neq 0$, verificando a existência de uma relação causal entre a força externa e a aceleração da partícula somente para $a > c\tau_0$, mostrando que, assim como as soluções runaway, a pré-aceleração não é própria do carácter pontual do elétron.

3.2 A proposta de Mario Schönberg

Mario Schönberg propôs eliminar as divergências sobre a linha de universo do elétron, da auto-força e do tensor momento-energia, com um método inspirado na eletrostática.

Por exemplo, em eletrostática, num sistema de cargas, a força total sobre uma partícula pontual com carga e_i , posicionada em \mathbf{r}_i ,

$$\mathbf{F}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{e_i e_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad (3.21)$$

assim como a energia do campo elétrico

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{e_i e_j}{r_{ij}}, \quad (3.22)$$

não divergem, pois a teoria postula que a i -ésima partícula interage somente com as demais partículas do sistema. No entanto, para o caso da eletrodinâmica, solução em tal sentido não seria possível, pois não descreveria a influência no movimento das cargas devido ao processo de irradiação.

Schönberg e Leite Lopes [13] dividiram o campo produzido pela i -ésima partícula em duas partes: (1) a parte que reage sobre a própria partícula, descrevendo a perda de energia no processo de irradiação, o campo rad (esse campo difere por um fator do campo definido por Dirac, seção 2.1); (2) a parte que não age sobre a i -ésima partícula, mas influencia o movimento das demais, o campo at .

O campo da parte (1), definido por Schönberg em [14], seria

$$F_{rad,i}^{\mu\nu} \equiv \frac{\epsilon_i}{2}(F_{ret,i}^{\mu\nu} - F_{adv,i}^{\mu\nu}). \quad (3.23)$$

Este, a menos de um fator $\epsilon_i/2$, é o campo definido por Dirac em (2.7).

Já o campo at , correspondente à parte (2), foi definido pelo tensor

$$F_{at,i}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{ret,i}^{\mu\nu} + F_{adv,i}^{\mu\nu}). \quad (3.24)$$

Na teoria de Schönberg não há um único campo responsável por todas as interações do sistema. Diferentemente da concepção de Maxwell e Faraday, cada partícula interage com um campo distinto.

O fator $\epsilon_i \equiv \pm 1$ corresponde às duas orientações da linha de universo da partícula i . O significado físico para cada um dos valores vem do *quadrimomento cinético*, definido por

$$G_{kin}^{\mu} \equiv m \frac{dx^{\mu}}{d\tau}. \quad (3.25)$$

A orientação $\epsilon_i = 1$ foi interpretada por Schönberg como correspondendo a movimentos com energia cinética (cG_{kin}^0) positiva e a orientação $\epsilon_i = -1$ não como correspondendo a movimentos retrógrados, como poderia ser pensado, mas a movimentos com energia cinética negativa.

Como o sinal da energia cinética é o mesmo do intervalo infinitesimal sobre a linha de universo, temos que

$$ds_i = \epsilon_i \sqrt{dx_i^{\mu} dx_{i,\mu}}. \quad (3.26)$$

O campo total produzido pela i -ésima partícula é

$$F_{part,i}^{\mu\nu} \equiv F_{rad,i}^{\mu\nu} + F_{at,i}^{\mu\nu} \quad (3.27)$$

e assume os valores

$$F_{part,i}^{\mu\nu} = F_{rad,i}^{\mu\nu} + F_{at,i}^{\mu\nu} = \begin{cases} F_{ret,i}^{\mu\nu}, & se \\ F_{adv,i}^{\mu\nu}, & se \end{cases} \quad \begin{matrix} \epsilon_i = +1, \\ \epsilon_i = -1. \end{matrix} \quad (3.28)$$

Esta equação nos diz que $F_{part,i}^{\mu\nu}$ é sempre um campo retardado, para um observador cujo tempo próprio flua na mesma direção do tempo próprio da partícula i .

3.2.1 Equações de movimento

Com base no significado físico dos campos $F_{rad,i}^{\mu\nu}$ e $F_{part,i}^{\mu\nu}$, Schönberg, ainda no mesmo trabalho [14], define o campo

$$F_{act,i}^{\mu\nu} \equiv F_{rad,i}^{\mu\nu} + \sum_{j \neq i} F_{part,j}^{\mu\nu} + F_{ext}^{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

atribuindo ao mesmo a representação de todas as influências sofridas pela i -ésima partícula do sistema. Além disso, nos moldes de uma equação de movimento newtoniana, foi postulado que a dinâmica de um sistema de n cargas é dada pelo sistema de equações

$$m_i a_i^\mu = \frac{e_i}{c} F_{act,i}^{\mu\nu} v_{i;\nu}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.30)$$

Através das equações (A.18) e (A.19) é fácil verificar que

$$F_{rad,i}^\mu = \frac{e_i}{c} F_{rad,i}^{\mu\nu} v_{i;\nu} = \frac{2e_i e_i^2}{3c^3} (a_i^\mu + a_{i;\lambda} a_i^\lambda v_i^\mu / c^2). \quad (3.31)$$

Com isso, podemos reescrever a equação (3.30) na forma

$$m_i a_i^\mu = \frac{2e_i e_i^2}{3c^3} (a_i^\mu + a_{i;\lambda} a_i^\lambda v_i^\mu / c^2) + \sum_{j \neq i} F_{part,j}^\mu + F_{ext}^\mu. \quad (3.32)$$

3.2.2 O tensor momento-energia

Na primeira parte da seção 3.2 mostramos como Schönberg contornou o problema da auto-força divergente, postulando funções para diversos campos. Aqui mostraremos qual foi sua proposta para o tensor momento-energia do qual pode ser derivada a expressão correta para a densidade de força, evitando, ao mesmo tempo, que as integrais espaciais de suas componentes fossem infinitas.

Schönberg postulou o tensor momento-energia pela expressão

$$\begin{aligned}
4\pi T_{Sch}^{\mu\nu} &= (F_{in}^{\nu\alpha} + \sum_i F_{rad,i}^{\nu\alpha})(F_{tot;\alpha}^\mu + \sum_i F_{at,i;\alpha}^\mu) \\
&+ \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(F_{in}^{\alpha\beta} + \sum_i F_{rad,i}^{\alpha\beta}) \times (F_{tot;\alpha\beta} + \sum_i F_{at,i;\alpha\beta}) \\
&+ \sum_i \sum_{j \neq i} (F_{at,i}^{\nu\alpha} F_{at,j;\alpha}^\mu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu} F_{at,i}^{\alpha\beta} F_{at,j;\alpha\beta}), \tag{3.33}
\end{aligned}$$

onde

$$F_{tot;\alpha\beta} = \sum_i F_{part,i;\alpha\beta} + F_{in;\alpha\beta}. \tag{3.34}$$

Observa-se que, para essa definição, $T_{Sch}^{\mu\nu}$ diverge segundo r^{-2} , e não r^{-4} como na definição usual (equação (2.17)). Logo, a integral espacial das componentes do tensor-momento energia sobre qualquer região é sempre finita.

Essa é uma propriedade importante, pois somente respeitada, a quantidade $G(\sigma) = \frac{1}{c} \int_\sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\nu$ pode representar o quadrimomento do campo.

A diferenciação de um termo típico de $T_{Sch}^{\mu\nu}$ seria, por exemplo,

$$\partial_{l;\nu} \sum_i \sum_{j \neq i} F_{at,i}^{\nu\alpha} F_{at,j;\alpha}^\mu = \frac{4\pi}{c} \sum_{i \neq l} F_{at,i;\alpha}^\mu j_l^\alpha + \sum_{i \neq l} F_{at,i}^{\nu\alpha} (\partial_{l;\nu} F_{at,l;\alpha}^\mu). \tag{3.35}$$

Derivando de modo semelhante os demais termos e agrupando-os, pode-se mostrar que a densidade de quadriforça da partícula l é

$$\begin{aligned}
K_{Sch,l}^\mu &\equiv \partial_{l;\nu} T_{Sch}^{\mu\nu} = \frac{1}{c} (F_{act,l}^{\mu\nu} + F_{in}^{\mu\nu}) j_{l;\nu} \\
&= \frac{e_l}{c} (F_{act,l}^{\mu\nu} + F_{in}^{\mu\nu}) \delta^{(3)} v_{l;\nu}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Portanto, a quadriforça $F^\mu(z_l)$ agindo sobre a l -ésima partícula na posição z_l^μ é

$$F^\mu(z_l) \equiv \int K_{Sch,l}^\mu d^3 \mathbf{r} = \frac{e_l}{c} (F_{act,l}^{\mu\nu} + F_{in}^{\mu\nu}) v_{l;\nu}, \tag{3.37}$$

que corresponde à quadriforça na equação (3.32), acrescida a força da radiação livre $F_{in}^{\mu\nu}$.

O sinal de integração na equação acima é simplesmente simbólico. Rigorosamente, $K_{Sch,l}^\mu$ é uma *distribuição não-regular* (apêndice B), de modo que a integração em (3.37) não faz sentido. O lado esquerdo dessa equação pode ser entendido como $\langle K_{Sch,l}^\mu, \phi \rangle$ (vide apêndice B), a atuação da distribuição $K_{Sch,l}^\mu$ sobre uma função teste ϕ , onde ϕ é uma função diferenciável com *suporte* contendo uma vizinhança de z_l^μ .

3.3 Outras propostas

3.3.1 A eletrodinâmica de Feynman-Wheeler

Esta teoria interpreta o processo de irradiação como consequência da interação entre uma partícula e o resto do sistema, de forma que, num sistema com uma única partícula, mesmo acelerada, não haveria irradiação.

Essa concepção é explicada em [16] com a citação das palavras de H. Tetrode, um dos pais da idéia, que transcrevemos abaixo

“The sun would not radiate if it were alone in space and no other bodies could absorb its radiation . . . If for example I observed through my telescope yesterday evening that star which let us say is 100 light years away, then not only did I know that the light which it allowed to reach my eye was emitted 100 years ago, but also the star or individual atoms of it knew already 100 years ago that I, who then did not even exist, would view it yestarday evening at such and such time . . . One might accordingly adopt the opinion that the amount of material in the universe determines the rate of emission.”

Diferente da teoria de Schönberg, onde há auto-interação, a eletrodinâmica de Feynman-Wheeler postula que uma dada partícula, a qual chamaremos, a partir de agora, de *fonte*, só interage com as demais partículas do sistema, cujo conjunto chamaremos de *absorvedor*.

O campo dessa interação, produzido pela k -ésima partícula do absorvedor, foi postulado como sendo

$$F_{k,int}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(F_{k,ret}^{\mu\nu} + F_{k,adv}^{\mu\nu}). \quad (3.38)$$

Outra diferença entre esta teoria e a de Schönberg está na função do absorvedor, que cumpre um papel essencial na explicação do mecanismo de interação. Por isso, como veremos, o absorvedor não é simplesmente o restante

do sistema, são atribuídas ao mesmo propriedades específicas, como ser composto de um número suficientemente grande de partículas, capazes de absorver completamente a radiação emitida pela fonte.

Apresentaremos a seguir um modelo muito ilustrativo, com uma configuração específica para o absorvedor, onde está aplicado as hipóteses da teoria. Esse é um dos exemplos dados por Feynman e Wheeler em [16].

Exemplo

Nesse modelo, o absorvedor é suposto como composto de um número infinito de cargas livres, todas em repouso e separadas por uma longa distância.

Suponha que a fonte com carga e , inicialmente em repouso, receba no instante t uma aceleração $\mathbf{a}(t)$. Isso produz um campo elétrico retardado, que $r_k(t)/c$ segundos depois perturba a k -ésima partícula do absorvedor, situada na posição $\mathbf{r}_k(t)$ no momento da aceleração da fonte. Esse campo elétrico, de acordo com a hipótese do modelo de grande afastamento entre as partículas, é, em boa aproximação,

$$\mathbf{E}_{e,e_k} = \frac{e}{c^2 r_k^3} \mathbf{r}_k(t) \times (\mathbf{r}_k(t) \times \mathbf{a}(t)). \quad (3.39)$$

Essa expressão só possui o termo correspondente ao campo de radiação, que cai com r_k^{-1} . Um outro termo, a parte coulombiana, que cai mais rapidamente, com r_k^{-2} , foi desprezado. A expressão geral para esse campo pode ser obtida na seção 63 da referência [21].

Após a aceleração da fonte, no instante $t' = t + r_k(t)/c$, quando o campo \mathbf{E}_{e,e_k} atingir a carga e_k , com massa m_k , esta sofrerá uma aceleração

$$\mathbf{a}_k = \frac{e_k}{m_k} \mathbf{E}_{e,e_k}. \quad (3.40)$$

Segundo a teoria, isso fará com que essa partícula do absorvedor reaja, irradiando um campo elétrico metade retardado e metade avançado, dado pela equação (3.38), sendo que a parte retardada dessa radiação alcançará a fonte somente no instante $t'' = t + r_k(t)/c + r_k(t'')/c$, sendo $r_k(t'')$ a distância entre a carga e_k e a fonte no instante t'' .

Já a parte avançada alcança a fonte no instante $t''' = t + r_k(t)/c - r_k(t)/c = t$, ou seja, a radiação avançada reage sobre a fonte no mesmo instante de sua aceleração inicial $\mathbf{a}(t)$, o que implica numa força elétrica instantânea, cuja componente na direção de $\mathbf{a}(t)$ é

$$f_k = e \frac{1}{2} \frac{e_k}{c^2 r_k^3} [-\mathbf{r}_k(t) \times (-\mathbf{r}_k(t) \times \mathbf{a}(t))] \cdot \hat{\mathbf{a}}(t). \quad (3.41)$$

Utilizando as equações (3.40) e (3.39), para escrever \mathbf{a}_k em termos de \mathbf{r}_k e \mathbf{a} , podemos obter f_k , omitindo o argumento (t), na forma

$$f_k = \frac{e^2 e_k^2}{2c^4 m_k r_k^6} \{ -\mathbf{r}_k \times [-\mathbf{r}_k \times (\mathbf{r}_k \times (\mathbf{r}_k \times \mathbf{a}))] \} \cdot \hat{\mathbf{a}}, \quad (3.42)$$

ou, utilizando a identidade vetorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$,

$$f_k = \frac{e^2 e_k^2 a}{2c^4 m_k r_k^2} \text{sen}^2(\mathbf{r}_k, \mathbf{a}), \quad (3.43)$$

onde o argumento da função seno indica o ângulo entre \mathbf{r}_k e \mathbf{a} .

Por motivos de simplificação, os autores do modelo trataram somente uma componente de Fourier da aceleração, isto é, escolheram

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.44)$$

No modelo, a velocidade de propagação do campo avançado da partícula k não é considerada c , e sim c/n , sendo n o índice de refração do meio constituído pelo absorvedor, que, por hipótese, é suposto constituído por partículas distribuídas uniformemente por todo o espaço, com densidade N .

O índice de refração, para a componente de Fourier do campo com frequência ω , é dado pela conhecida expressão da teoria de dispersão para meios não-dissipativos, com coeficiente de absorção pequeno,

$$n = 1 - \frac{2\pi N e_k^2}{m_k \omega^2}. \quad (3.45)$$

Essa alteração na velocidade da radiação avançada faz com que sua componente com frequência ω chegue à fonte com uma fase temporal

$$e^{-i\omega(r_k/c - nr_k/c)}.$$

Com esta fase temporal e a hipótese da homogeneidade do absorvedor, podemos calcular a reação total sobre a fonte, na direção de \mathbf{a} , através da integral

$$f = \int N f_k e^{-i\omega(r_k/c - nr_k/c)} d^3 \mathbf{r}, \quad (3.46)$$

que com o auxílio das equações (3.43) e (3.45), e escrevendo $d^3 \mathbf{r} = r_k^2 d\Omega$, pode ser reescrita como

$$f = \frac{e^2 e_k^2 N a_0 e^{-i\omega t}}{2c^4 m_k} \int d\Omega \text{sen}^2(\mathbf{r}_k, \mathbf{a}) \int_0^\infty dr_k e^{-i(2\pi N e_k^2 / m_k c \omega) r_k}. \quad (3.47)$$

A integral $\int_0^\infty dr_k e^{-i(2\pi N e_k^2/m_k c\omega)r_k}$ não é convergente, mas pode ser redefinida em termos de seu *valor principal* (apêndice C)

$$VP \int_0^\infty dr_k e^{-i(2\pi N e_k^2/m_k c\omega)r_k}$$

, o que equivale a escolher o fator na exponencial complexa, entre parênteses, como um número complexo na forma $(2\pi N e_k^2/m_k c\omega) - i\varepsilon$, realizar a integração e depois tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Este cálculo simples nos leva a

$$VP \int_0^\infty dr_k e^{-i(2\pi N e_k^2/m_k c\omega)r_k} = -i \frac{m_k c\omega}{2\pi N e_k^2}. \quad (3.48)$$

Finalmente, utilizando $\int d\Omega \text{sen}^2(\mathbf{r}_k, \mathbf{a}) = \frac{8\pi}{3}$ e a equação acima, chegamos a

$$f = \frac{2e^2}{3c^3} (-i\omega a_0 e^{-i\omega t}) = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{da}{dt}. \quad (3.49)$$

Observa-se que essa expressão corresponde ao primeiro termo do lado direito da equação (2.33), que corresponde à reação de radiação da equação ALD, no limite não-relativístico.

A teoria será exposta, agora, em termos gerais, para melhor compreensão das hipóteses utilizadas no modelo.

Teoria geral

Como foi comentado, a eletrodinâmica de Feynman-Wheeler é formulada com base no papel do absorvedor. Todas as situações descritas pela teoria admitem sua existência.

O absorvedor na teoria geral é caracterizado pela propriedade de que no seu exterior (figura 3.1) vale a relação

$$\sum_k \frac{1}{2} (F_{ret,k}^{\mu\nu} + F_{adv,k}^{\mu\nu}) = 0, \quad (3.50)$$

onde o somatório inclui todas as partículas do sistema, inclusive a fonte.

Em termos físicos, como cada elemento da soma representa, segundo a definição (3.38), o campo produzido pela k -ésima partícula do sistema, essa equação diz que uma partícula teste, do lado de fora, não experimentaria nenhuma força, em outras palavras, a equação acima corresponde à completa absorção da radiação.

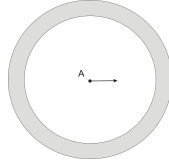


Fig. 3.1: Carga envolvida pelo absorvedor.

Como os campos retardado total e o avançado total representam ondas divergentes e convergentes, respectivamente, estes não podem interferir destrutivamente em todos os instantes e todas as posições fora do absorvedor, implicando ser possível a validade da equação (3.50) somente caso

$$\sum_k F_{ret,k}^{\mu\nu} = \sum_k F_{adv,k}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.51)$$

Portanto

$$F_{outside}^{\mu\nu} \equiv \sum_k \frac{1}{2} (F_{ret,k}^{\mu\nu} - F_{adv,k}^{\mu\nu}) = 0 \quad (3.52)$$

fora do absorvedor.

$F_{outside}^{\mu\nu}$ é uma solução da versão homogênea da equação de Maxwell (2.1), isto é, $\partial_\nu F_{outside}^{\mu\nu} = 0$, em todo o espaço e qualquer instante.

Um teorema sobre funções harmônicas garante que se $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ em todo espaço e o campo $F^{\mu\nu}$ decai, assintoticamente, mais rápido que $1/r^{3/2}$, então $F^{\mu\nu} = 0$ em todo espaço. Aplicando o teorema ao campo $F_{outside}^{\mu\nu}$, temos que equação (3.52) é válida dentro e fora do absorvedor.

Equação de movimento

O campo total que age sobre a fonte, rotulada por l , é o campo metade retardado e metade avançado produzido por todas as partículas do absorvedor

$$\sum_{k \neq l} \frac{1}{2} (F_{ret,k}^{\mu\nu} + F_{adv,k}^{\mu\nu}), \quad (3.53)$$

de modo que a equação de movimento da fonte é

$$m_l a_l^\mu = \frac{e_l}{c} \left[\sum_{k \neq l} \frac{1}{2} (F_{ret,k}^{\mu\nu} + F_{adv,k}^{\mu\nu}) \right] v_{\nu,l}. \quad (3.54)$$

O campo (3.53) pode ser dividido em três partes

$$\sum_{k \neq l} \frac{1}{2} (F_{ret,k}^{\mu\nu} + F_{adv,k}^{\mu\nu}) = \sum_{k \neq l} F_{ret,k}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (F_{ret,l}^{\mu\nu} - F_{adv,l}^{\mu\nu}) - \sum_k \frac{1}{2} (F_{ret,k}^{\mu\nu} - F_{adv,k}^{\mu\nu}). \quad (3.55)$$

O último termo do lado direito desta equação é nulo, devido (3.52); o primeiro termo encontra-se no apêndice A (equação (A.17)). Assim, a equação de movimento da fonte (3.54) adquire a forma

$$m_l a_l^\mu = \frac{2e_l^2}{3c^3} (\dot{a}_l^\mu + a_l^\lambda a_{\lambda l} v_l^\mu / c^2) + \sum_{k \neq l} F_{ret,k}^\mu, \quad (3.56)$$

que, em termos da interpretação do campo de acordo com o modelo de Dirac (seção 2.1), corresponde à equação de movimento de uma partícula interagindo com o seu próprio campo de radiação (primeiro termo) e com o campo externo retardado produzido pelas demais partículas.

3.3.2 A proposta de Gupta

Gupta [12] apresentou, em 1950, uma proposta interessante e simples para a eliminação das divergências da eletrodinâmica clássica, que conduz à equação ALD.

Nessa teoria, a remoção da auto-energia das partículas carregadas de um sistema é feita através da modificação da expressão usual da densidade de quadriorça total, com base na hipótese de que a auto-energia não possui significado físico.

O tensor momento-energia referente à nova densidade de quadriorça possui singularidade quadrática e a quadriorça sobre cada partícula, associada ao mesmo, é finita.

Gupta postulou a adição de um contra-termo na expressão para a densidade total de quadriorça. Para um sistema com n partículas, sendo $J_\nu \equiv \sum_{k=1}^n j_{\nu,k}$, a quadricorrente total, e $F^{\mu\nu} \equiv \sum_{k=1}^n F_{ret,k}^{\mu\nu} + F_{ext}^{\mu\nu}$, o campo retardado total adicionado ao campo externo, a densidade de quadriorça total ao invés de

$$K^\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} J^\nu, \quad (3.57)$$

passa a ser dada por

$$K_{S.G.}^\mu = \frac{1}{c} (F_{\mu\nu} J^\nu - \sum_k F_{+,k}^{\mu\nu} j_{\nu,k}), \quad (3.58)$$

onde $F_{+,k}^{\mu\nu}$ é o campo simétrico correspondente a partícula k , definido em (2.9).

A nova densidade de quadriforça total deve se relacionar ao tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$, diferente do usual (equação (2.17)). Como, por definição, $K_{S,G}^\mu = \partial_\nu T_{S,G}^{\mu\nu}$, Gupta fez a seguinte escolha para o tensor momento-energia

$$T_{S,G}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \sum_k T_{+,k}^{\mu\nu}, \quad (3.59)$$

onde

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (3.60)$$

e

$$T_{+,k}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4\pi} \left(F_{+,k}^{\mu\alpha} F_{+,k;\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{+,k;\alpha\beta} F_{+,k}^{\alpha\beta} \right). \quad (3.61)$$

Embora $T^{\mu\nu}$ e $\sum_k T_{+,k}^{\mu\nu}$ diverjam sobre as linhas de universo de cada partícula, de acordo com r^{-4} , $T_{S,G}^{\mu\nu}$ diverge conforme r^{-2} . Para verificar, observe que

$$F^{\mu\nu} = \sum_k F_{+,k}^{\mu\nu} + \left[\sum_k F_{-,k}^{\mu\nu} + F_{ext}^{\mu\nu} \right], \quad (3.62)$$

onde $F_{-,k}^{\mu\nu}$ é definido por (2.8). O termo entre colchetes é finito em todo o espaço-tempo, implicando que o tensor $T^{\mu\nu}$, pelo fato de ser quadrático no campo, pode ser dividido em três partes

$$T^{\mu\nu} = \sum_{k=1}^n T_{+,k}^{\mu\nu} + T_{mix}^{\mu\nu} + T_{fin}^{\mu\nu}, \quad (3.63)$$

onde $T_{mix}^{\mu\nu}$ diverge quadraticamente sobre as linhas de universo de cada partícula, por envolver o produto entre o primeiro e o segundo termo do lado direito de (3.62); $T_{fin}^{\mu\nu}$ é finito, pois envolve somente o campo entre colchetes de (3.62). Com isso, podemos escrever $T_{S,G}^{\mu\nu}$ na forma

$$T_{S,G}^{\mu\nu} = T_{mix}^{\mu\nu} + T_{fin}^{\mu\nu}, \quad (3.64)$$

comprovando sua divergência quadrática e, portanto, fazendo com que qualquer integral espacial do mesmo seja finita, o que é importante para uma representação covariante da energia e do momento do campo, como comentado na seção 3.2.2.

Com o novo tensor momento-energia, a densidade de quadriforça da k -ésima partícula passa a ser

$$K_{S.G,k}^\mu = \partial_{\nu,k} T_{S.G}^{\mu\nu} = \frac{1}{c} (F^{\mu\nu} - F_{+,k}^{\mu\nu}) j_{k;\nu}, \quad (3.65)$$

ou, utilizando a definição de quadricorrente em termos da função delta, equação (2.4),

$$K_{S.G,k}^\mu = \frac{e_k}{c} (F^{\mu\nu} - F_{+,k}^{\mu\nu}) \delta^{(3)} v_{k;\nu}. \quad (3.66)$$

Integrando $K_{S.G,l}^\mu$ em todo o espaço, encontraremos a quadriforça total agindo sob a l -ésima partícula,

$$\int K_{S.G,l}^\mu d^3 \mathbf{r} = \frac{e_l}{c} (F^{\mu\nu} - F_{+,l}^{\mu\nu}) v_{l;\nu}. \quad (3.67)$$

O campo entre parênteses na equação acima pode ser dividido em três partes

$$F^{\mu\nu} - F_{+,l}^{\mu\nu} = F_{-,l}^{\mu\nu} + \sum_{k \neq l} F_{ret}^{\mu\nu} + F_{ext}^{\mu\nu}, \quad (3.68)$$

o que conduz à equação ALD,

$$m_l a_l^\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{a}_l^\mu + \frac{1}{c^2} a_l^\lambda a_{l;\lambda} v_l^\mu) + F_{ext}^\mu. \quad (3.69)$$

Capítulo 4

Regularizações covariantes

Este capítulo é dedicado ao estudo de métodos de regularização, que são procedimentos formais usados para transformar uma teoria com quantidades divergentes em outra com as mesmas quantidades finitas, mantendo simetrias, como covariância, invariância de gauge, etc.

4.1 Regularização de Pauli-Villars

Como mostrado no apêndice C, as funções de Green $D_{ret,M}$ e $D_{adv,M}$ e as funções de comutação $D^{(+)}$, $D^{(-)}$, $D^{(c)}$ e D exibem singularidades tipo delta $\delta(\lambda)$, onde $\lambda = x^2$, e pólos de primeira ordem $1/\lambda$, que são independentes da massa M de cada campo. Exibem também singularidades logarítmicas $\ln(\lambda)$ e descontinuidades tipo salto $\theta(\lambda)$ que são proporcionais a M^2 . Pauli e Villars [30] propuseram um método para subtrair, de forma covariante, essas singularidades de funcionais lineares dessas funções. O método consiste em supor a existência de campos fictícios com massas M_j e, associando a estes uma função de Green ou de comutação D_{M_j} do conjunto $\{D_{M_i}\} = \{D^{(+)}, D^{(-)}, D, D_{ret,M_i}, D_{adv,M_i}\}$, construir propagadores através de combinações das funções desse conjunto. Isto é, dada uma função D_{M_i} , para a subtração das singularidades, a mesma deve ser substituída por outra $reg\{D_{M_i}\}$, definida pela combinação

$$reg\{D_{M_i}\} \equiv \sum_j c_j D_{M_j}. \quad (4.1)$$

Os coeficientes c_j devem estar submetidos às condições

$$\sum_j c_j = 0, \quad (4.2)$$

para a remoção das singularidades independentes das massas dos campos, e

$$\sum_j c_j M_j^2 = 0, \quad (4.3)$$

para eliminação das singularidades proporcionais ao quadrado das massas.

Para se obter expressões contínuas e com derivadas contínuas sobre o cone de luz até ordem $n - 1$, deve-se estender as condições acima,

$$\begin{aligned} \sum_j c_j M_j^4 &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_j c_j M_j^{2n} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Faz parte da prescrição do método tomar o primeiro termo da série (4.1) como a própria função D_{M_i} , a ser regularizada, e $c_i = 1$, assim como a condição

$$\lim_{M_j \rightarrow \infty} \sum_{j \neq i} c_j D_{M_j} = 0, \quad (4.5)$$

de modo que, tomando o limite $M_j \rightarrow \infty$ no final dos cálculos, a expressão não regularizada é recuperada, isto é

$$\lim_{M_j \rightarrow \infty} \text{reg}\{D_{M_i}\} = D_{M_i}. \quad (4.6)$$

Essa propriedade é assegurada pela condição imposta pelo método às massas fictícias e aos coeficientes c_j

$$\lim_{M_j \rightarrow \infty} \sum_{j \neq i} \frac{|c_j|}{M_j^2} = 0. \quad (4.7)$$

Desejamos, como aplicação do método, regularizar o tensor de campo retardado $F_{ret}^{\mu\nu}$, que é um funcional da função de Green D_{ret} . Encontra-se no apêndice C a expansão dessa função, que mostra que sua única singularidade, em $\lambda = 0$, é a do tipo delta, além de uma descontinuidade tipo salto. Para

o cálculo de $F_{ret}^{\mu\nu}$ basta, como veremos, eliminar a singularidade tipo delta, de modo que a condição (4.2) é suficiente. Isto implica que somente uma massa auxiliar M é necessária, além daquela correspondente a D_{ret} , que é nula. Com isso, temos que, da equação (4.1),

$$reg\{D_{ret}(x)\} = c_0 D_{ret}(x) + c_1 D_{ret,M}(x). \quad (4.8)$$

Da prescrição do método, $c_0 = 1$ e, de (4.2), segue que $c_0 = -c_1 = 1$. Considerando estes valores para os coeficientes c_j e utilizando a expressão da função de Green retardada

$$D_{ret}(x) = \frac{\theta(x^0)}{2\pi} \left[\delta(\lambda) - \frac{M}{2} \theta(\lambda) \frac{J_1(M\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \right], \quad (4.9)$$

cujos desenvolvimentos se encontra no apêndice C, temos que

$$reg\{D_{ret}(x)\} = \frac{M}{4\pi} \theta(x^0) \theta(\lambda) \frac{J_1(M\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}. \quad (4.10)$$

Como pode ser encontrado no apêndice C, a transformada de Fourier da função de Green G do operador $\square + M^2$ é

$$G(k) = -\frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (4.11)$$

o que implica que a transformada de Fourier de $reg\{D_{ret}(x)\}$, que denotaremos simplesmente por $reg\{D_{ret}(k)\}$, tem a forma

$$reg\{D_{ret}(k)\} = -\frac{1}{k^2 + i\epsilon} + \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (4.12)$$

que é o conhecido *cutoff de Feynman*, em que o primeiro termo é o propagador, no espaço recíproco, do campo eletromagnético, não massivo, e o segundo termo é o propagador do campo fictício. Nessa forma, é imediata a verificação que o propagador original é recuperado no limite $M \rightarrow \infty$.

Aplicação: regularização do auto-campo do elétron pontual

Nesta seção vamos expor o cálculo da regularização do tensor de campo $F_{ret;\mu\nu}$ feito por Coleman em [31], usando o método de Pauli-Villars.

Por economia na notação, tomaremos a velocidade da luz igual à unidade e recuperaremos os fatores envolvendo c no final dos cálculos, por análise dimensional.

Substituindo a definição (2.3) na equação (2.1) e utilizando a condição de gauge de Lorentz, temos a equação de campo

$$\square A_\mu = 4\pi j_\mu, \quad \square = \partial_\nu \partial^\nu, \quad (4.13)$$

cuja solução em termos da função de Green retardada D_{ret} (apêndice C) é

$$A_{ret;\mu}(x) = 4\pi e \int_{-\infty}^{\tau_p} D_{ret}(x - z(\tau)) \dot{z}_\mu(\tau) d\tau. \quad (4.14)$$

Este funcional de D_{ret} diverge sobre a linha de universo $z_\mu(\tau)$, mas podemos regularizá-lo nessa região do espaço-tempo substituindo D_{ret} por $reg\{D_{ret}\}$ e, antes de aplicar o limite $M \rightarrow \infty$, como prescrito pelo método de regularização de Pauli-Villars, eliminar os termos em potências positivas de M .

De acordo com o método, a equação (4.14) pode ser escrita na forma

$$A_\mu(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} 4\pi e \int_{-\infty}^{\tau_p} reg\{D_{ret}(x - z(\tau))\} \dot{z}_\mu(\tau) d\tau. \quad (4.15)$$

Por economia na notação, também omitiremos o sinal de limite e o símbolo $reg\{\}$. Utilizando a definição (2.3) para o cálculo do tensor de campo e escolhendo o evento x sobre a linha de universo, coincidindo com o evento $w = z(\tau_p)$, podemos verificar que o auto-campo do elétron é

$$F_{ret;\mu\nu}(z(\tau_p)) = 4\pi e \int_{-\infty}^{\tau_p} \partial_\mu D_{ret}(w - z(\tau)) dz_\nu(\tau) - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad (4.16)$$

onde o segundo termo, denotado por $(\mu \leftrightarrow \nu)$, é, a menos da troca do índice μ por ν , igual ao primeiro.

Podemos reparametrizar a integral acima em termos do intervalo entre os eventos $w = z(\tau_p)$ e $z(\tau)$, $r^2 = (w - z(\tau))^2$, de modo que

$$\partial_\mu = \frac{(w - z)_\mu}{r} \frac{d}{dr} \quad (4.17)$$

e, portanto,

$$F_{ret;\mu\nu}(z(\tau_p)) = 4\pi e \int_0^1 \frac{(w - z)_\mu}{r} \frac{d}{dr} D_{ret}(r) \frac{dz_\nu}{dr} dr - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (4.18)$$

Integrando por partes a equação acima e eliminando termos simétricos nos índices μ e ν , temos que

$$F_{ret;\mu\nu}(z(\tau_p)) = 4\pi e \int_0^\infty dr D_{ret}(r) \frac{d}{dr} \left[\frac{(w-z)_\mu}{r} \frac{dz_\nu}{dr} \right] - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (4.19)$$

Para obter o auto-campo em termos de uma série, vamos expandir a trajetória $z_\mu(r)$ em torno do evento w_μ , ou seja, em torno de $r = 0$,

$$z_\mu(r) = z_\mu(0) + z'_\mu(0)r + \frac{1}{2}z''_\mu(0)r^2 + \frac{1}{6}z'''_\mu(0)r^3 + O(r^4), \quad (4.20)$$

onde cada ' representa uma derivada em relação a r .

Desta equação podemos calcular a expansão para dz_μ/dr ,

$$\frac{dz_\mu}{dr}(r) = z'_\mu + z''_\mu r + \frac{1}{2}z'''_\mu r^2 + O(r^3), \quad (4.21)$$

onde os argumentos das derivadas foram omitidos e o continuarão sendo nas próximas passagens.

Com as duas expansões, podemos calcular a derivada do termos entre cochetes que aparece em (4.19),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{(w-z)_\mu}{r} \frac{dz_\nu}{dr} \right] &= \left(-z'_\mu z''_\nu - \frac{1}{2}z''_\mu z'_\nu \right) \\ &+ \left(-z'_\mu z'_\nu - z''_\mu z''_\nu - \frac{1}{3}z'''_\mu z'_\nu \right) r + O(r^2), \end{aligned} \quad (4.22)$$

com a qual, eliminando o termo simétricos nos índices μ e ν , chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{(w-z)_\mu}{r} \frac{dz_\nu}{dr} \right] - (\mu \leftrightarrow \nu) &= \left(\frac{1}{2}z''_\mu z'_\nu \right) \\ &+ \left(\frac{2}{3}z'''_\mu z'_\nu - \frac{2}{3}z'_\mu z'''_\nu \right) r + O(r^2). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nesta última passagem, eliminamos os termos simétricos nos índices μ e ν e mantivemos a precisão somente até primeira ordem em r , pois os demais termos produziriam, no resultado final, termos do tipo $O(1/M)$, que vão a zero no limite $M \rightarrow \infty$.

Substituindo (4.23) e a expressão para $reg\{D_{ret}\}$, equação (4.10), em (4.19), temos a expressão

$$\begin{aligned} F_{ret;\mu\nu}(z(\tau_p)) &= eM \left(\frac{1}{2}z''_\mu z'_\nu \right) \int_0^\infty r^{-1} J_1(Mr) dr + \\ &eM \left(\frac{2}{3}z'''_\mu z'_\nu - \frac{2}{3}z'_\mu z'''_\nu \right) \int_0^\infty J_1(Mr) dr + O(1/M), \end{aligned} \quad (4.24)$$

em que as integrais podem ser calculadas com ajuda da identidade

$$\int_0^\infty r^n J_1(Mr) dr = \frac{2^n}{M^{n+1}} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)}{\Gamma(1 - \frac{1}{2}n)}, \quad (4.25)$$

levando a

$$F_{ret;\mu\nu}(z(\tau_p)) = eM \left(\frac{1}{2} z''_\mu z'_\nu \right) + e \left(\frac{2}{3} z'''_\mu z'_\nu - \frac{2}{3} z'_\mu z'''_\nu \right) + O(1/M), \quad (4.26)$$

que pode ainda ser reescrita em termos das derivadas em relação ao tempo próprio τ , através das relações

$$\begin{aligned} z'_\mu &= -\dot{z}_\mu, \\ z''_\mu &= \ddot{z}_\mu, \\ z'''_\mu &= -\ddot{\dot{z}}_\mu + \dot{z}_\mu \frac{d^3\tau}{dr^3}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Finalmente, utilizando as relações acima, concluímos que

$$F_{ret;\mu\nu}(z(\tau_p)) = -\frac{eM}{2} (\ddot{z}_\mu \dot{z}_\nu) + \frac{2e}{3} (\ddot{\dot{z}}_\mu \dot{z}_\nu - \dot{z}_\mu \ddot{\dot{z}}_\nu) + O(1/M). \quad (4.28)$$

O primeiro termo dessa expressão é infinito no limite $M \rightarrow \infty$ e, portanto, deve ser absorvido nos parâmetros para os quais a teoria não prevê valores. Com isso, o campo regularizado na posição da partícula, recuperado os fatores envolvendo c que dão a correta dimensão, é

$$F_{ret;\mu\nu}(z(\tau_p)) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^4} (\ddot{\dot{z}}_\mu \dot{z}_\nu - \dot{z}_\mu \ddot{\dot{z}}_\nu) = \frac{2}{3} \frac{e}{c^4} \dot{a}_{[\mu} v_{\nu]}, \quad (4.29)$$

que é a o mesmo campo dado por (A.17).

4.2 Regularização em termos de seqüências de distribuições

Mostraremos agora a regularização da quadriforça $F_{ret;\mu}$, utilizando um método em que a distribuição delta é representada como o limite de uma seqüência de distribuições regulares (apêndice B). Esse cálculo foi realizado

em [32]. Faremos $c = 1$ para simplificação da notação e recuperaremos a unidade correta no final dos cálculos.

A função de Green retardada é dada por

$$D(x)_{ret} = \frac{\theta(x^0)}{2\pi} \delta(x^2), \quad (4.30)$$

Podemos expressar essa distribuição como o limite com $b \rightarrow 0^+$ da seqüência

$$\delta_b(t^2) = \frac{e^{-t^2/b}}{b}, \quad (4.31)$$

que possui a propriedade

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \delta_b(t) h(t) dt = h(0), \quad (4.32)$$

onde $h(t)$ é uma função integrável qualquer e o parâmetro b é conhecido como *parâmetro de regularização*. Com a seqüência (4.31) podemos definir o funcional

$$F_b[h] = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2/b}}{b} h(t) dt, \quad (4.33)$$

que, em termos da expansão em série de Taylor de $h(t)$ em torno de $t = 0$, é

$$\begin{aligned} F_b[h] &= \sum_{n=0}^{\infty} b^{(n-1)/2} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \int_0^\infty e^{-t'^2} t'^n dt' \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b^{(n-1)/2} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Esta série mostra que no limite $b \rightarrow 0^+$ temos uma única divergência, do tipo $1/\sqrt{b}$, a qual não seria problema para o sub-espço das funções $h(t)$ que são nulas na origem. Uma forma de subtrair esta divergência, sem restringir o funcional ao sub-espço de funções $h(t)$ tal que $h(0) = 0$, é através da definição do novo funcional

$$reg F_b[h] \equiv \int_0^\infty \delta_b(t^2) (h(t) - h(0)) dt. \quad (4.35)$$

Para esta nova definição, o limite $b \rightarrow 0^+$, que chamaremos de $regF[h]$, é

$$regF[h] \equiv \lim_{b \rightarrow 0^+} regF_b[h] = \frac{1}{2}h'(0). \quad (4.36)$$

Nesse mesmo espírito, dado o funcional envolvendo a seqüência que converge para a derivada da distribuição delta $\delta'_b(t)$

$$F'_b[h] \equiv \int_0^\infty \delta'_b(t^2)h(t)dt, \quad (4.37)$$

podemos redefini-lo, subtraindo suas divergências, através do funcional

$$regF'_b[h] \equiv \int_0^\infty \delta'_b(t^2)(h(t) - h(0) - th'(0) - t^2h''(0)/2!)dt \quad (4.38)$$

e, expandindo $h(t)$, verificar que

$$regF'_b[h] = -\frac{1}{12}h'''(0), \quad (4.39)$$

Como veremos, a auto-força pode ser expressa em termos de um funcional semelhante ao (4.37). Para verificar, partamos da expressão do apêndice B para $A_{ret}^\mu(x)$

$$A_{ret}^\mu(x) = 2e \int_{-\infty}^{\tau_p} \delta[(x - z(\tau))^2]v^\mu(\tau)d\tau, \quad (4.40)$$

onde τ_p é o valor de τ correspondente a x^0 .

Com esta expressão, podemos calcular o tensor de campo retardado pela definição (2.3)

$$F_{ret;\mu\nu}(x) = 4e \int_{-\infty}^{\tau_p} \delta'\{[x - z(\tau)]^2\}[x - z(\tau)]_{[\mu}v_{\nu]}(\tau)d\tau, \quad (4.41)$$

onde $[x - z(\tau)]_{[\mu}v_{\nu]}(\tau) \equiv [x - z(\tau)]_\mu v_\nu(\tau) - [x - z(\tau)]_\nu v_\mu(\tau)$.

E fácil verificar que a seqüência

$$\delta'_b(t) = -\frac{\partial}{\partial b} \frac{e^{-t/b}}{b} \quad (4.42)$$

converge para a distribuição δ' no limite $b \rightarrow 0^+$. Ou seja

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \delta'_b(t) h(t) dt = -h'(0). \quad (4.43)$$

Com (4.42), podemos reescrever (4.41) na forma

$$F_{ret;\mu\nu}(x) = - \lim_{b \rightarrow 0^+} 4e \frac{\partial}{\partial b} \int_{-\infty}^{\tau_p} \frac{e^{-[x-z(\tau)]^2/b}}{b} [x-z(\tau)]_{[\mu\nu]}(\tau) d\tau. \quad (4.44)$$

Escolhendo $x = z(\tau_p)$, ou seja, sobre a linha de universo da partícula, e utilizando a definição da quadriforça (2.11), temos que a auto-força do elétron é

$$F_{ret;\mu}(z(\tau_p)) = - \lim_{b \rightarrow 0^+} 4e^2 \frac{\partial}{\partial b} \int_{-\infty}^{\tau_p} \frac{e^{-[z(\tau_p)-z(\tau)]^2/b}}{b} [z(\tau_p) - z(\tau)]_{[\mu\nu]}(\tau) v^\nu(\tau) d\tau. \quad (4.45)$$

Realizando uma mudança de variável de integração $\tau \rightarrow \tau_p - \tau$, temos

$$F_{ret;\mu}(z(\tau_p)) = - \lim_{b \rightarrow 0^+} 4e^2 \frac{\partial}{\partial b} \int_0^\infty \frac{e^{-[z(\tau_p)-z(\tau_p-\tau)]^2/b}}{b} [z(\tau_p) - z(\tau_p - \tau)]_{[\mu\nu]}(\tau_p - \tau) v^\nu(\tau_p) d\tau. \quad (4.46)$$

Para se obter uma expressão em termos de potências do parâmetro de regularização, como em (4.34), necessitamos expandir o integrando da equação acima em torno de $\tau = 0$. A expansão do expoente da função exponencial é

$$\begin{aligned} [z(\tau_p) - z(\tau_p - \tau)]^2 &= \tau^2 - \frac{1}{12} a_\lambda(\tau_p) a^\lambda(\tau_p) \tau^4 + \frac{1}{12} a_\lambda(\tau_p) \dot{a}^\lambda(\tau_p) \tau^5 \\ &\quad - \left(\frac{1}{45} \dot{a}_\lambda(\tau_p) \dot{a}^\lambda(\tau_p) + \frac{1}{40} a_\lambda(\tau_p) \ddot{a}^\lambda(\tau_p) \right) \tau^6 + O(\tau^7). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Podemos também calcular a expansão de $[z(\tau_p) - z(\tau_p - \tau)]_{[\mu\nu]}(\tau_p - \tau)$:

$$\begin{aligned} [z(\tau_p) - z(\tau_p - \tau)]_{[\mu\nu]}(\tau_p - \tau) &= \frac{1}{2} a_{[\mu\nu]} \tau^2 \\ &\quad - \frac{1}{3} \dot{a}_{[\mu\nu]} \tau^3 + \left(\frac{1}{8} \ddot{a}_{[\mu\nu]} + \frac{1}{12} \dot{a}_{[\mu\nu]} \right) \tau^4 \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{1}{24} \ddot{a}_{[\mu} v_{\nu]} + \frac{1}{24} \ddot{a}_{[\mu} a_{\nu]} \right) \tau^5 + O(\tau^6), \quad (4.48)$$

onde os argumentos (τ_p) foram omitidos.

Definindo as funções

$$\begin{aligned} g(\tau, s) &\equiv \frac{1}{12} a_\lambda a^\lambda s^4 - \frac{1}{12} a_\lambda \dot{a}^\lambda s^5 \\ &+ \left(\frac{1}{45} \dot{a}_\lambda \dot{a}^\lambda + \frac{1}{40} a_\lambda \ddot{a}^\lambda \right) s^6 + O(s^7) \end{aligned} \quad (4.49)$$

e

$$f_\mu(\tau, \tau_p) \equiv [z(\tau_p) - z(\tau_p - \tau)]_{[\mu} v_{\nu]}(\tau_p) v^\nu(\tau), \quad (4.50)$$

cujas expansão é

$$f_\mu(\tau, \tau_p) = -\frac{1}{2} a_\mu \tau^2 + \frac{1}{3} (\dot{a}_\mu + a_\lambda a^\lambda v_\mu) \tau^3 + O(\tau^4), \quad (4.51)$$

(4.46) adquire a forma

$$F_{ret;\mu}(z(\tau_p)) = -4e^2 \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial b} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau^2/b}}{b} e^{g/b} f_\mu d\tau. \quad (4.52)$$

É fácil verificar que as derivadas da função $e^{g/b}$ seguem o padrão

$$\frac{d^m}{d\tau^m} e^{g(0, \tau_p)/b} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } 1 < m < 3, \\ g^{(m)}(0, \tau_p)/b, & \text{se } m > 3. \end{cases}$$

Com essa equação, podemos expandir a função $e^{g/b}$ em torno de $\tau = \tau_p$ e reescrever (4.52) na forma

$$\begin{aligned} F_{ret;\mu}(z(\tau_p)) &= -4e^2 \lim_{b \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\partial}{\partial b} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau^2/b}}{b} f_\mu(\tau, \tau_p) d\tau \right. \\ &\left. + \sum_{m=4}^{\infty} \frac{g^{(m)}(0, \tau_p)}{m!} \frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau^2/b}}{b} f_\mu(\tau, \tau_p) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

ou, em termos das definições (4.33) e (4.37) de F_b e F'_b , respectivamente,

$$F_{ret;\mu}(z(\tau_p)) = 4e^2 \lim_{b \rightarrow 0^+} \left\{ F'_b[f_\mu] + \sum_{m=4}^{\infty} \frac{g^{(m)}(0, \tau_p)}{m!} [b^{-2}F_b[\tau^m f_\mu] + F'_b[\tau^m f_\mu]] \right\}. \quad (4.54)$$

Poderíamos regularizar essa expressão simplesmente substituindo F_b por $regF_b$ e F'_b por $regF'_b$; no entanto, o funcional $b^{-2}F_b$, devido ao fator b^{-2} , necessita de uma definição particular que subtraia todas suas divergências. Definamos, com esse propósito, o funcional

$$regb^{-2}F_b[h] \equiv \int_0^\infty \delta_b(t^2)(h(t) - h(0) - th'(0) - t^2h''(0)/2! - t^3h'''(0)/3! - t^4h^{(iv)}(0)/4!)dt. \quad (4.55)$$

Com este funcional, temos que a auto-força regularizada $regF_{ret;\mu}(z(\tau_p))$ é

$$regF_{ret;\mu}(z(\tau_p)) = 4e^2 \lim_{b \rightarrow 0^+} \left\{ regF'_b[f_\mu] + \sum_{m=4}^{\infty} \frac{g^{(m)}(0, \tau_p)}{m!} [regb^{-2}F_b[\tau^m f_\mu] + regF'_b[\tau^m f_\mu]] \right\}. \quad (4.56)$$

No limite $b \rightarrow 0^+$, todos os termos do somatório vão a zero, restando simplesmente

$$regF_{ret;\mu}(z(\tau_p)) = 4e^2 \lim_{b \rightarrow 0^+} regF'_b[f_\mu], \quad (4.57)$$

$$= \frac{e^2}{3} f'''_\mu(0, \tau_p), \quad (4.58)$$

de acordo com (4.39).

Utilizando a expressão para $f'''_\mu(0, \tau_p)$ que se encontra no coeficiente do termo de terceira ordem na expansão (4.51), temos que

$$regF_{ret;\mu}(z(\tau_p)) = \frac{2e^2}{3} (\dot{a}_\mu + a_\lambda a^\lambda v_\mu). \quad (4.59)$$

Recuperando os fatores envolvendo a velocidade da luz, chegamos à expressão para a auto-força regularizada

$$regF_{ret;\mu}(z(\tau_p)) = \frac{2e^2}{3c^3}(\dot{a}_\mu + a_\lambda a^\lambda v_\mu/c^2), \quad (4.60)$$

o qual, como esperado, corresponde ao quadrivetor de Abraham.

Capítulo 5

Conclusão e perspectivas futuras

Neste trabalho, mostramos uma visão geral do desenvolvimento da teoria eletromagnética microscópica, baseada em modelos clássicos para o elétron pontual, procurando enfatizar tanto aspectos conceituais quanto matemáticos, ao lidarmos com quantidades divergentes.

No capítulo 2, expusemos o modelo de Dirac, onde, como foi visto, a divergência no coeficiente da aceleração foi eliminada através do procedimento que ficou conhecido como *regularização clássica da massa*. Este procedimento não é geral e poderia ter comprometido a estrutura da teoria, violando alguma simetria, como, por exemplo, a invariância de gauge. À época, o único procedimento adotado para lidar com quantidades divergentes constituía-se no esquema da chamada *física de subtrações* [38], utilizada na teoria quântica relativística.

Vimos, ainda no capítulo 2, que nem todas as soluções da ALD são aceitáveis, o que levou Fritz Rohrlich, em 2008, a impor condições físicas sobre ALD, modificando-a numa equação de segunda ordem, livre de soluções não físicas. A análise de Rohrlich pressupõe que a aceleração da carga se anula na região assintótica; o papel das condições assintóticas para o campo eletromagnético, como já houvera salientado Coleman [31], é fundamental, tanto na teoria quântica do espalhamento quanto na própria eletrodinâmica clássica, problema que surge já na mecânica newtoniana, ao considerarmos condições iniciais assintóticas na determinação das soluções das equações de movimento para a partícula [40].

Analizamos, no capítulo 3, o problema das divergências em algumas formulações da eletrodinâmica clássica, que dão origem à equação ALD. Vimos

exemplos de como as divergências podem ser evitadas, alterando o corpo conceitual da teoria eletromagnética, como fez Mario Schönberg ao postular que a auto-interação e a interação entre cargas se dá através de campos distintos, ou através de hipóteses físicas, como fizeram Feynman e Wheeler, supondo que o universo possui um número suficientemente grande de partículas para absorver toda a radiação emitida.

No capítulo 4, retomamos a eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz e rederivamos a equação ALD, modificando os propagadores do campo eletromagnético, de modo a tornar a teoria finita, recuperando a teoria original no limite apropriado.

Ao longo do trabalho utilizamos algumas propriedades intrínsecas à teoria de distribuições, o que é indispensável, por exemplo, para se representar a densidade de carga e de corrente associadas a um objeto idealizado como uma carga pontual. Pensamos que uma formulação adequada da eletrodinâmica de partículas pontuais necessita de um formalismo com base nestes objetos.

Como perspectiva futura, pretendemos investigar a viabilidade de se formular a eletrodinâmica clássica de Maxwell-Lorentz como uma teoria construída diretamente no espaço de Schwartz [39], assim como feito para a eletrodinâmica quântica, na teoria de Epstein e Glaser [41]. Pretendemos também estudar futuramente modelos clássicos de partículas com spin, como os de Frenkel [7] e de Bargmann, Michel e Telegdi [42], além de prosseguir no estudo de modelos sem a inclusão do spin do elétron, como o de Bhabha [8].

Apêndice A

Expansão do tensor de campo

Para o cálculo do tensor de campo retardado e avançado $F_{adv}^{\mu\nu}(x)$ nas vizinhanças da linha de universo $z^\mu(\tau)$ do elétron, partiremos das expressões dos potenciais de Liénard-Wiechert

$$\mathbf{A}_{adv}^{ret}(x) = \frac{e\mathbf{v}}{c|\mathbf{r}-\mathbf{z}|(1 \mp v_{\parallel}/c)}, \quad \phi_{adv}^{ret}(x) = \frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{z}|(1 \mp v_{\parallel}/c)}, \quad (\text{A.1})$$

onde $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{z}) / |\mathbf{r}-\mathbf{z}|$ e os índices *ret* e *adv* indicam que as expressões do lado direito das respectivas equações devem ser tomadas para os valores de τ correspondentes às intersecções da linha de universo com o cone do passado do evento x^μ (intersecção que passaremos a chamar de *ponto retardado*) e com o cone do futuro (intersecção que chamaremos de *ponto avançado*), respectivamente.

O desenvolvimento das expressões em (A.1) pode ser encontrado em [24] e [33], assim como o reagrupamento de ambos potenciais na forma das componentes do quadripotencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$:

$$A_{adv}^{\mu} = \frac{ev^{\mu}}{c\rho}, \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\rho_{adv}^{ret} = \mp v_{\mu} R_{adv}^{\mu} / c, \quad R_{adv}^{\mu} = x^{\mu} - z^{\mu}. \quad (\text{A.3})$$

Para um dado evento x^μ , de avaliação do campo, existe sempre um outro evento $z^\mu(\tau')$ sobre a linha de universo da partícula simultâneo ao primeiro no seu referencial próprio no instante τ' (Figura 2.2). Logo, τ' fica definido pela equação

$$v_\mu(\tau')(x^\mu - z^\mu(\tau')) = 0, \quad (\text{A.4})$$

o que implica em escrever

$$x^\mu - z^\mu(\tau') = \rho u^\mu(\tau'), \quad (\text{A.5})$$

onde u^μ é um quadrivetor perpendicular (no sentido da métrica de Minkowski) à quadrivelocidade em cada instante e com a propriedade $u^\mu u_\mu = -1$.

Diferenciando, podemos mostrar as relações

$$\partial^\mu \rho_{ret}^{adv} = u^\mu - a_u R_{ret}^\mu / c^2, \quad a_u = a^\nu u_\nu, \quad (\text{A.6})$$

$$\partial^\mu A^\nu(x) = -\frac{ev^\nu}{c\rho^2} \partial^\mu \rho + \frac{ea^\nu}{c\rho} \partial^\mu \tau. \quad (\text{A.7})$$

Com essas expressões e a definição do tensor de campo (2.3) podemos expressar este último como

$$F_{ret}^{\mu\nu}(x) = \left\{ \frac{e}{c\rho^2} (v^\mu u^\nu - v^\nu u^\mu) + \frac{e}{c^2\rho} [(a^\mu v^\nu - a^\nu v^\mu)/c + u^\mu \left(\frac{v^\nu}{c} a_u \mp a^\nu \right) - \left(\frac{v^\mu}{c} a_u \mp a^\mu \right)] \right\}_{ret}^{adv}. \quad (\text{A.8})$$

A expansão do tensor de campo será feita de modo a manter somente termos que não vão a zero no limite $\rho \rightarrow 0$. Com esse objetivo, basta expandir $z^\mu(\tau)$ até terceira ordem em torno de τ_p , o valor de τ correspondente a x^0 ,

$$z^\mu(\mp\tau) = z^\mu \mp \tau v^\mu + \frac{\tau^2}{2} a^\mu \mp \frac{\tau^3}{6} \dot{a}^\mu + \dots, \quad (\text{A.9})$$

onde o argumento $\mp\tau$ é uma notação em que o sinal negativo refere-se ao ponto retardado e o sinal positivo ao avançado. Com essa notação, podemos reescrever a equação acima em termos de uma derivada, para facilitar os cálculos:

$$F_{ret}^{\mu\nu}(x) = \left[\pm \frac{e}{\rho c^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v^\mu R^\nu - v^\nu R^\mu}{\rho} \right) \right]_{ret}^{adv}. \quad (\text{A.10})$$

Faremos $c = 1$ a partir de agora e recuperaremos a unidade correta no final do cálculo.

De (A.9) seque que a expansão para a quadrivelocidade é

$$v^\mu(\mp\tau) = v^\mu \mp \tau a^\mu + \frac{\tau^2}{2} \dot{a}^\mu + \dots \quad (\text{A.11})$$

Com esta expansão, (A.9) e a definição (A.3), calcula-se a expansão correspondente a $\rho(\mp\tau) = \rho_{adv}$:

$$\rho(\mp\tau) = \tau(1 - \rho a_u) \mp \frac{\tau^2}{2} \dot{a}_u - \frac{\tau^3}{6} a^2 + \dots \quad (\text{A.12})$$

Com a expansão (A.9), a equação (A.5) e o fato de $R_\mu(\mp\tau)R^\mu(\mp\tau)$ ser nulo, pois $R^\mu(\mp\tau)$ é tipo-luz, encontramos a relação entre $\rho(\tau_p)$ e τ

$$\rho^2 = \tau^2 \left(1 - \rho a_u \pm \frac{\rho\tau}{3} \dot{a}_u - \frac{\tau^2}{12} a^2 \right). \quad (\text{A.13})$$

A expansão da quantidade $1/\rho(\mp\tau)$, que aparece em (A.10), pode ser obtida invertendo e expandindo (A.12):

$$\frac{1}{\rho(\mp\tau)} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{1 - \rho a_u} \left(1 \mp \frac{1}{2} \rho\tau \dot{a}_u + \frac{1}{6} \tau^2 a^2 \right). \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.9), (A.11) e (A.14) na equação (A.10) e realizando a derivação em relação a τ , temos

$$\begin{aligned} F_{ret}^{\mu\nu}(x) &= \frac{-e}{\sqrt{1 - \rho a_u}} \left[-\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\rho}{\tau} \right)^3 (1 - \rho a_u)^{-3/2} v^{[\mu} u^{\nu]} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{\tau} \right) (1 - \rho a_u)^{-3/2} v^{[\mu} a^{\nu]} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\tau} \right)^2 \dot{a}_u (1 - \rho a_u)^{-3/2} v^{[\mu} u^{\nu]} \\ &\left. \pm \frac{2}{3} (1 - \rho a_u)^{-3/2} v^{[\mu} \dot{a}^{\nu]} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\tau} \right) (1 - \rho a_u)^{-3/2} \dot{a}^{[\mu} u^{\nu]} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

com a notação $b^{[\mu} d^{\nu]} = b^\mu d^\nu - b^\nu d^\mu$.

Eliminando na equação acima a dependência com relação a τ através de (A.13), chegamos a

$$F_{ret}^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{\sqrt{1 - \rho a_u}} \left(\frac{1}{\rho^2} v^{[\mu} u^{\nu]} - \frac{1}{2\rho} v^{[\mu} a^{\nu]} - \frac{a_u}{2} v^{[\mu} a^{\nu]} \right)$$

$$-\frac{a^2}{8}v^{[\mu}u^{\nu]} - \frac{1}{2}\dot{a}^{[\mu}u^{\nu]} \pm \frac{2}{3}\dot{a}^{[\mu}v^{\nu]}) . \quad (\text{A.16})$$

Com esta expansão podemos calcular o campo $F_-^{\mu\nu}$, definido em (2.8), sobre a linha de universo da partícula

$$F_-^{\mu\nu}(z(\tau_p)) = \frac{2e}{3}\dot{a}^{[\mu}v^{\nu]} . \quad (\text{A.17})$$

Recuperando os fatores envolvendo a velocidade da luz, esse campo pode ser reescrito como

$$F_-^{\mu\nu}(z(\tau_p)) = \frac{2e}{3c^3}\dot{a}^{[\mu}v^{\nu]} \quad (\text{A.18})$$

e com este podemos calcular o *quadrivetor de Abraham* Γ^μ :

$$\Gamma^\mu \equiv \frac{e}{c}F_-^{\mu\nu}(z(\tau_p))v_\nu(\tau_p) = \frac{2e^2}{3c^3}(\dot{a}^\mu + a^\lambda a_{\lambda\nu}v^\nu/c^2). \quad (\text{A.19})$$

Apêndice B

Teoria de distribuições

Uma distribuição é um funcional linear *contínuo* \mathbf{T} , que atribui um valor complexo $\langle \mathbf{T}, \phi \rangle$ a cada função teste ϕ de um espaço \mathcal{D} , de funções infinitamente diferenciáveis.

O funcional \mathbf{T} ser contínuo significa que, para toda seqüência de funções teste $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ que converge para $\phi(t) \in \mathcal{D}$, a seqüência $\{\langle \mathbf{T}, \phi_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ converge para $\langle \mathbf{T}, \phi \rangle$, [35],[34].

B.1 O espaço de funções teste \mathcal{D} e o suporte de uma distribuição

Uma função ϕ pertence ao espaço \mathcal{D} se, e somente se, esta for infinitamente diferenciável e nula fora de algum intervalo finito. Um exemplo de função que pertence a \mathcal{D} é

$$\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } |t| \geq 0 \\ \exp \frac{1}{t^2-1}, & \text{se } |t| < 1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

O menor intervalo fora do qual uma função é nula é o seu *suporte*. No caso da função acima, seu suporte é o conjunto $|t| < 1$; no entanto, não necessariamente todos os elementos de \mathcal{D} devem possuir o mesmo suporte.

Também se define o *suporte de uma distribuição*. Uma distribuição \mathbf{T} é dita nula dentro de um conjunto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ se $\langle \mathbf{T}, \phi \rangle = 0$, para toda $\phi \in \mathcal{D}$ que tem seu suporte em Ω , sendo o suporte de \mathbf{T} definido como o complemento desse conjunto.

B.2 Distribuições regulares

Podemos gerar distribuições a partir de uma função $f(t)$ localmente integrável. Definimos a distribuição correspondente a $f(t)$, que denotaremos com a mesma letra f , mas sem seu argumento, pela integral convergente

$$\langle f, \phi \rangle \equiv \int f(t)\phi(t)dt. \quad (\text{B.2})$$

Devido às propriedades da integral, f é claramente um funcional linear; quanto à continuidade, seja $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência que converge em \mathcal{D} para $\phi(t)$. Com o uso da desigualdade triangular, temos que

$$|\langle f, \phi \rangle - \langle f, \phi_n \rangle| = \left| \int f(t)[\phi(t) - \phi_n(t)]dt \right| \leq \int |f(t)||\phi(t) - \phi_n(t)|dt. \quad (\text{B.3})$$

Da definição de limite de uma seqüência de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para todo $n > n_0$, vale $|\phi(t) - \phi_n(t)| < \varepsilon$. Utilizando essa desigualdade na inequação acima, concluímos que

$$|\langle f, \phi \rangle - \langle f, \phi_n \rangle| < \varepsilon \int |f(t)|dt = \varepsilon'. \quad (\text{B.4})$$

Como $\varepsilon' = \varepsilon \int |f(t)|dt$ é arbitrário, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\langle f, \phi_n \rangle\} = \langle f, \phi \rangle$, confirmando que f é um funcional linear contínuo e, portanto, uma distribuição.

Distribuições como f , geradas a partir de funções localmente integráveis, são chamadas de *distribuições regulares*. No entanto, nem todas as distribuições podem ser geradas dessa maneira: são as chamadas *distribuições não-regulares*, cujo exemplo é a distribuição conhecida em Física como *função delta de Dirac*, definida por

$$\langle \delta, \phi \rangle \equiv \phi(0) \quad (\text{B.5})$$

ou

$$\langle \delta(t_0), \phi \rangle \equiv \phi(t_0). \quad (\text{B.6})$$

Na notação $\delta(t_0)$, (t_0) não indica um argumento, indica somente que o funcional leva a função ϕ no seu valor $\phi(t_0)$.

Caso a distribuição delta pudesse ser gerada a partir de uma função integrável, teríamos para a função $\xi(t/a)$ (equação (B.1))

$$e^{-1} = \int_{-a}^a \delta(t)\xi(t/a)dt. \quad (\text{B.7})$$

No entanto, o *teorema geral da integral de Lebesgue* afirma que o lado direito dessa equação tem limite zero para $a \rightarrow 0$, o que contradiz o lado esquerdo. Sendo assim, a expressão comumente encontrada nos textos de Física

$$\phi(0) = \int \delta(t)\phi(t)dt, \quad (\text{B.8})$$

pressupondo existir uma função $\delta(t)$ com tal propriedade, não pode ser entendida como uma integração ordinária, embora operacionalmente isto seja feito, levando a resultados com significado.

B.3 Operações e propriedades

Derivada distribucional

Assim como no caso de funções, podemos definir a operação de diferenciação para distribuições. A derivada distribucional \mathbf{T}' de uma distribuição unidimensional \mathbf{T} é também uma distribuição, definida por

$$\langle \mathbf{T}', \phi \rangle \equiv -\langle \mathbf{T}, \phi' \rangle. \quad (\text{B.9})$$

De forma mais geral, para uma distribuição de dimensão qualquer,

$$\langle D^a \mathbf{T}, \phi \rangle \equiv (-1)^{|a|} \langle \mathbf{T}, D^a \phi \rangle, \quad (\text{B.10})$$

onde

$$D^a = \prod_i (\partial/\partial x_i)^{a_i}, \quad |a| = \sum_i a_i. \quad (\text{B.11})$$

A função de Heaviside $\theta(t)$ é definida por

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ 1, & \text{se } t > 0. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Como exemplo de derivadas de distribuições, calculemos a derivada da distribuição regular θ , gerada a partir da função de Heaviside, definida por

$$\langle \theta, \phi \rangle \equiv \int \theta(t)\phi(t)dt. \quad (\text{B.13})$$

Da definição de derivada distribucional,

$$\int \theta'(t)\phi(t)dt = - \int \theta(t)\phi'(t)dt, \quad (\text{B.14})$$

o que, utilizando a definição (B.12) no lado direito, leva a

$$\langle \theta', \phi \rangle = \phi(0), \quad (\text{B.15})$$

ou seja, no sentido distribucional,

$$\theta' = \delta. \quad (\text{B.16})$$

Essa relação, muito utilizada operacionalmente em Física, fica justificada pela definição de derivada distribucional.

Convolução entre distribuições

Já para definir o produto entre distribuições, encontram-se dificuldades. Pois, por exemplo, se uma função $f(t)$ é integrável e, portanto, existe uma distribuição regular f associada à mesma, nada garante que a função $g(t) = f^2(t)$ também seja integrável, permitindo associar a $g(t)$ uma distribuição regular g . O que se define para distribuições, regulares ou não, é o produto entre uma função diferenciável $\alpha(t)$ e uma distribuição \mathbf{T} . Essa entidade é uma nova distribuição, que denotamos por $\alpha\mathbf{T}$, definida por

$$\langle \alpha\mathbf{T}, \phi \rangle \equiv \langle \mathbf{T}, \alpha\phi \rangle. \quad (\text{B.17})$$

Uma outra operação muito importante em teoria de distribuições é a chamada *convolução*. Dadas duas distribuições \mathbf{S} e \mathbf{T} , a convolução entre elas, denotada por $\mathbf{S} * \mathbf{T}$, é uma terceira distribuição cuja definição é

$$\langle \mathbf{S} * \mathbf{T}, \phi \rangle \equiv \langle \mathbf{S}_\xi, \langle \mathbf{T}_\eta, \phi(\xi + \eta) \rangle \rangle, \quad \xi + \eta \in \text{suporte de } \phi. \quad (\text{B.18})$$

Dentre as propriedades da convolução, destacamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} * \mathbf{T} &= \mathbf{T} * \mathbf{S}, & (i) \\ \delta^4(y) * \mathbf{T}(x) &= \mathbf{T}(x - y), & (ii) \\ (D\mathbf{S}) * \mathbf{T} &= \mathbf{S} * (D\mathbf{T}). & (iii) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Podemos utilizar essas propriedades para resolver a equação de campo

$$\square A^\mu = (4\pi/c)j^\mu \quad (\text{B.20})$$

em termos da solução da equação de Green

$$\square G = \delta. \quad (\text{B.21})$$

Utilizando a propriedade (iii) da convolução, temos

$$(\square G(x)) * A^\mu(x) = G(x) * (\square A^\mu(x))$$

que, de acordo com a equação de Green, fornece

$$= \delta(x) * A^\mu(x).$$

e com a propriedade (ii)

$$= A^\mu(x).$$

Isto é

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} G(x) * j^\mu(x). \quad (\text{B.22})$$

Uma das soluções da equação de Green (apêndice C) é

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2), \quad (\text{B.23})$$

de modo que, usando a definição da quadricorrente em (2.4), temos

$$A^\mu(x) = 2e \int \delta(x^2) * \delta^4(x - z(\tau)) v^\mu(\tau) d\tau. \quad (\text{B.24})$$

A partir da propriedade (i) e (ii), concluímos que

$$A^\mu(x) = 2e \int \delta[(x - z(\tau))^2] v^\mu(\tau) d\tau. \quad (\text{B.25})$$

Restringindo a integração aos intervalos $[-\infty, \tau_p]$ e $[\tau_p, \infty]$, onde τ_p é o valor de τ correspondente a x^0 , temos, respectivamente,

$$A_{ret}^\mu(x) = 2e \int_{-\infty}^{\tau_p} \delta[(x - z(\tau))^2] v^\mu(\tau) d\tau \quad (\text{B.26})$$

e

$$A_{adv}^\mu(x) = 2e \int_{\tau_p}^{\infty} \delta[(x - z(\tau))^2] v^\mu(\tau) d\tau. \quad (\text{B.27})$$

B.4 Seqüências de distribuições

Dizemos que a seqüência de distribuições $\{\mathbf{T}_n\}_{n=0}^\infty$ converge para a distribuição \mathbf{T} se para toda função $\phi(t) \in \mathcal{D}$ a seqüência de números

$$\{\langle \mathbf{T}_n, \phi \rangle\}_{n=0}^\infty$$

converge, no sentido de convergencia de seqüências de números complexos, para $\langle \mathbf{T}, \phi \rangle$.

Como exemplo, avaliemos qual é o limite $b \rightarrow \infty$ da seqüência de distribuições regulares

$$S_b(t) = \frac{\sin(bt)}{\pi t}. \quad (\text{B.28})$$

Para isso, é necessário calcular o limite

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \langle S_b, \phi \rangle = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(bt)}{\pi t} \phi(t) dt. \quad (\text{B.29})$$

Expandindo ϕ em torno de $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \langle S_b, \phi \rangle &= \lim_{b \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\phi^{(m)}(0)}{b^m \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{1-m}} dx = \\ &= \frac{\phi^{(0)}(0)}{b^0 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \phi(0), \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

que mostra que a seqüência de distribuições regulares S_b converge para a distribuição não-regular delta.

Alguns outros exemplos de seqüência distribuições que convergem no limite $b \rightarrow \infty$ para a distribuição delta são:

$$\begin{aligned} i) & \frac{b}{\sqrt{\pi}} e^{-b^2 t^2}, \\ ii) & \frac{b}{2} e^{-b|t|}, \\ iii) & \frac{b}{\pi(1 + b^2 t^2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Apêndice C

Funções de Green

A transformada de Fourier $\mathcal{F}\mathbf{T}$ de uma distribuição \mathbf{T} é definida como uma distribuição pela equação

$$\langle \mathcal{F}\mathbf{T}, \phi \rangle \equiv \langle \mathbf{T}, \mathcal{F}\phi \rangle, \quad (\text{C.1})$$

onde $\mathcal{F}\phi$ é a transformada de Fourier da função $\phi \in \mathcal{D}$.

Esta expressão não possui sentido para \mathbf{T} qualquer, pois ϕ pertencer a \mathcal{D} não garante que $\mathcal{F}\phi$ também pertença. Uma categoria de distribuições a que a definição acima pode ser aplicada são as chamadas *distribuições temperadas*, que são distribuições que atuam no espaço \mathcal{G} , de funções infinitamente diferenciáveis, que decaem assintoticamente, junto com suas derivadas, mais rapidamente que $1/r$ (vide [36]).

A distribuição delta de Dirac é uma distribuição temperada. De acordo com a definição (C.1)

$$\langle \mathcal{F}\delta, \phi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\phi \rangle. \quad (\text{C.2})$$

Sendo a transformada de Fourier de ϕ dada por

$$\mathcal{F}\phi(k) = \int e^{-ik \cdot x} \phi(x) d^4x, \quad (\text{C.3})$$

temos que

$$\langle \mathcal{F}\delta^{(4)}, \phi \rangle = \langle \delta^{(4)}(k), \int e^{-ik \cdot x} \phi(x) d^4x \rangle$$

$$= \int \phi(x) d^4x, \quad (\text{C.4})$$

ou seja, simbolicamente

$$\mathcal{F}\delta = 1. \quad (\text{C.5})$$

Também simbolicamente, a transformada de Fourier da constante $1/(2\pi)^4$ é dada por

$$\mathcal{F} = \frac{1}{(2\pi)^4} = \delta^4. \quad (\text{C.6})$$

Vamos utilizar (C.5) e (C.6) para resolver a equação de Green

$$(\square + M^2)D(x) = \delta^{(4)}(x). \quad (\text{C.7})$$

Pode-se mostrar que

$$\mathcal{F}[(\square + M^2)D](k) = (-k^2 + M^2)\mathcal{F}D(k), \quad (\text{C.8})$$

de modo que, utilizando a equação (C.5), temos

$$(-k^2 + M^2)\mathcal{F}D(k) = 1. \quad (\text{C.9})$$

Uma solução partícular desta equação é dada pelo valor principal

$$\mathcal{F}D(k) = VP \frac{1}{-k^2 + M^2} \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_0x_0}}{\mathbf{k}^2 + M^2 - k_0^2} dk_0. \quad (\text{C.10})$$

Para $x_0 > 0$, a integral em k_0 pode ser calculada pelo método de resíduos, contornando os pólos em $k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}$ pela parte inferior do plano complexo, e a integral no ângulo sólido $d\Omega_{\mathbf{k}}$ pode ser facilmente resolvida, escolhendo \mathbf{r} na direção \hat{z} , resultando em

$$D_{ret}(x) = -\frac{1}{8\pi^2r} \left\{ \int_0^{\infty} e^{i(\sqrt{\kappa^2 + M^2}x_0 + \kappa r)} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + M^2}} + \int_0^{\infty} e^{-i(\sqrt{\kappa^2 + M^2}x_0 + \kappa r)} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + M^2}} - \int_0^{\infty} e^{-i(\sqrt{\kappa^2 + M^2}x_0 - \kappa r)} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + M^2}} \right\}$$

$$- \int_0^\infty e^{i(\sqrt{\kappa^2 + M^2}x_0 - \kappa r)} \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + M^2}} \Big\}, \quad (\text{C.11})$$

onde $\kappa = |\mathbf{k}|$.

As integrais entre chaves podem ser parametrizadas por

$$\begin{aligned} \sqrt{\kappa^2 + M^2} &= M \cosh \varphi, \\ \kappa &= M \sinh \varphi, \\ x_0 &= \sqrt{\lambda} \cosh \varphi_0, \\ r &= \sqrt{\lambda} \sinh \varphi_0, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

onde $\lambda = x^2$, de modo que, por exemplo, a primeira dessas integrais adquire a forma

$$-i \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty e^{iM\sqrt{\lambda} \cosh(\varphi + \varphi_0)} d\varphi. \quad (\text{C.13})$$

Utilizando a representação integral para a função de Hankel de primeira espécie

$$H_0^{(1)}(s) \equiv J_0(s) + iN_0(s) = \frac{2}{\pi i} \int_0^\infty e^{is \cosh t} dt, \quad s > 0, \quad (\text{C.14})$$

podemos mostrar que a função de Green retardada $D_{ret,M}(x)$, que é nula para $x_0 < 0$ e $\lambda < 0$, para $x_0 > 0$ e $\lambda > 0$, é

$$-\frac{M}{4\pi} \frac{J_1(M\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}. \quad (\text{C.15})$$

A expressão é diferente para $\lambda = 0$ pois a representação em (C.14) só é válida para $s > 0$. Para $\lambda = 0$ a função de green retardada difere de (C.15) pelo valor correspondente ao caso $M = 0$ de (C.11), que pode facilmente ser mostrado ser

$$\frac{1}{2\pi} \delta(\lambda), \quad (\text{C.16})$$

de modo que

$$D_{ret,M}(x) = \frac{\theta(x^0)}{2\pi} \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \theta(x^0) \frac{M}{4\pi} \frac{J_1(M\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}. \quad (C.17)$$

Nas proximidades da linha de universo

$$D_{ret,M}(x) = \frac{\theta(x^0)}{2\pi} \delta(\lambda) - \frac{M^2}{8\pi} \theta(\lambda) \theta(x^0) + O(\lambda). \quad (C.18)$$

Com um procedimento semelhante, para o caso $x_0 < 0$, obtemos a função de Green avançada, que é nula para $x_0 > 0$,

$$D_{adv,M}(x) = \frac{\theta(-x^0)}{2\pi} \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \theta(-x^0) \frac{M}{4\pi} \frac{J_1(M\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}. \quad (C.19)$$

Com estas funções podemos calcular a função de Pauli-Jordan $D \equiv D_{ret,M} - D_{adv,M}$:

$$\begin{aligned} D(x) &\equiv D_{ret,M}(x) - D_{adv,M}(x) \\ &= \frac{\epsilon(x^0)}{2\pi} \delta(\lambda) - \theta(\lambda) \epsilon(x^0) \frac{M}{4\pi} \frac{J_1(M\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}, \end{aligned} \quad (C.20)$$

cuja expansão nas proximidades da linha de universo é

$$D(x) = \frac{\epsilon(x^0)}{2\pi} \delta(\lambda) - \frac{M^2}{8\pi} \theta(\lambda) \epsilon(x^0) + O(\lambda). \quad (C.21)$$

Outras funções importantes são as chamadas funções de comutação (nome herdado dos comutadores dos operadores do campo eletromagnético quantizado).

$$D^{(+)}(x-y) \equiv i[\varphi^-(x), \varphi^+(y)] = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) - \frac{iM}{8\pi\sqrt{\lambda}} \theta(\lambda).$$

$$\left[N_1(M\sqrt{\lambda}) - i\varepsilon(x^0) J_1(M\sqrt{\lambda}) \right] + \theta(-\lambda) \frac{Mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}} K_1(M\sqrt{-\lambda}), \quad (C.22)$$

e

$$D^{(-)}(x-y) \equiv i[\varphi^+(x), \varphi^-(y)] = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) + \frac{iM}{8\pi\sqrt{\lambda}} \theta(\lambda).$$

$$\left[N_1(M\sqrt{\lambda}) + i\varepsilon(x^0)J_1(M\sqrt{\lambda}) \right] - \theta(-\lambda) \frac{Mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}} K_1(M\sqrt{-\lambda}), \quad (\text{C.23})$$

onde φ^+ e φ^- são os operadores associados às partes de frequência positiva e negativa, respectivamente, do campo de Klein-Gordon livre de massa M .

As expansões destas funções nas proximidades da linha de universo são

$$D^{(\pm)}(x-y) = \frac{\epsilon(x^0)}{4\pi} \delta(\lambda) \pm \frac{i}{4\pi^2\lambda} \mp \frac{iM^2}{8\pi^2} \ln \frac{M\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{M^2}{16\pi} \epsilon(x^0) \theta(\lambda) + O(\sqrt{\lambda} \ln |\lambda|). \quad (\text{C.24})$$

Para maiores detalhes sobre as funções de comutação vide referência [37].

Apêndice D

Expansão do tensor momento-energia

Substituindo (2.22) em (2.17) obtemos

$$\begin{aligned} 4\pi T^{\mu\nu} u_\nu &= F_+^{\mu\alpha} F_{+,\alpha\nu} u^\nu + F_+^{\mu\alpha} \bar{F}_{\alpha\nu} u^\nu + \bar{F}^{\mu\alpha} F_{+,\alpha\nu} u^\nu \\ &\quad + \bar{F}^{\mu\alpha} \bar{F}_{\alpha\nu} u^\nu + \frac{1}{4} \left(F_+^{\alpha\beta} F_{+,\alpha\beta} u^\mu + F_+^{\alpha\beta} \bar{F}_{\alpha\beta} u^\mu \right. \\ &\quad \left. + \bar{F}^{\alpha\beta} F_{+,\alpha\beta} u^\mu + \bar{F}^{\alpha\beta} \bar{F}_{\alpha\beta} u^\mu \right). \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

A expansão de cada um destes termos nas vizinhanças da linha de universo da carga é obtida utilizando (A.16):

$$\begin{aligned} F_+^{\mu\alpha} F_{+,\alpha\nu} u^\nu &= \frac{e^2}{1 - \rho a_u} \left[\left(\frac{1}{\rho^4} + \frac{a_u}{2\rho^3} + \frac{a_u^2}{2\rho^2} + \frac{a^2}{4\rho^2} \right) u^\mu \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2\rho^3} + \frac{3a_u}{4\rho^2} \right) a^\mu \right], \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\bar{F}^{\mu\alpha} F_{+,\alpha\nu} u^\nu = -\frac{e}{1 - \rho a_u} \frac{1}{\rho^2} \bar{F}^{\mu\alpha} v_\alpha, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{1}{4} F_+^{\alpha\beta} F_{+,\alpha\beta} u^\mu = -\frac{e^2}{1 - \rho a_u} \left(\frac{1}{2\rho^4} + \frac{a_u}{2\rho^3} + \frac{a_u^2}{2\rho^2} + \frac{a^2}{4\rho^2} \right) u^\mu. \quad (\text{D.4})$$

Os demais termos não serão calculados, pois todos os demais possuem ordem maior que $1/(1 - \rho a_u)\rho^2$, a que necessitamos. Nesta ordem de aproximação, a contração do tensor momento-energia com o vetor u^μ é

$$T^{\mu\nu}u_\nu = \frac{e^2/4\pi}{1 - \rho a_u} \left[\left(\frac{1}{2\rho^4} + \frac{a^2}{2\rho^2} \right) u^\mu - \left(\frac{1}{2\rho^3} + \frac{3a_u}{4\rho^2} \right) a^\mu \right] - \frac{e/4\pi}{1 - \rho a_u} \frac{1}{\rho^2} \bar{F}^{\mu\alpha} v_\alpha \quad (\text{D.5})$$

Acrescentando a esta expressão os fatores envolvendo a velocidade da luz, temos

$$T^{\mu\nu}u_\nu = \frac{e^2/4\pi}{1 - \rho a_u/c^2} \left[\left(\frac{1}{2\rho^4} + \frac{a^2}{2c^4\rho^2} \right) u^\mu - \left(\frac{1}{2c^2\rho^3} + \frac{3a_u}{4c^4\rho^2} \right) a^\mu \right] - \frac{e/4\pi}{1 - \rho a_u/c^2} \frac{1}{c\rho^2} \bar{F}^{\mu\alpha} v_\alpha. \quad (\text{D.6})$$

Referências Bibliográficas

- [1] E. T. Whittaker, *A History of the Theories of Aesther and Electricity*, 2nd Ed., Vol. 1 (Thomas Nelson and Sons, 1951).
- [2] H. A. Lorentz, *The electron theory* (Academic Press, New York and London, 1964).
- [3] H. Poincaré, *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, **21**, t. 29-175 (1906).
- [4] W. Pauli, *Theory of Relativity* (Pergamon Press, 1958).
- [5] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **167**, 148 (1938).
- [6] M. Abraham, *Ann. Phys.*, **10**, 105 (1903).
- [7] J. I. Frenkel, *Z. Phys.*, **37**, 243 (1926).
- [8] H. J. Bhabha, *Proc. Indian Acad. Sci. A* **10**, 324 (1939).
- [9] H. J. Bhabha and H. C. Corben, *Proc. Roy. Soc. A* **178**, 273 (1941).
- [10] M. Born and L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. A* **144**, 425 (1934).
- [11] M. H. L. Pryce, *Proc. Roy. Soc. A* **168**, 389 (1938).
- [12] Suraj N. Gupta, *Proc. Phys. Soc. A* **64**, 50, (1950).
- [13] J. L. Lopes and M. Schonberg, *Phys. Rev.* **67**, 122 (1945).
- [14] M. Schonberg, *Phys. Rev.* **69**, 211 (1945).
- [15] M. Schonberg, *Phys. Rev.* **74**, 738 (1948).
- [16] J. A. Wheeler e R. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 157 (1945).
- [17] J. A. Wheeler e R. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 425 (1949).
- [18] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **209**, 291 (1951).

- [19] W. B. Bonnor, Proc. Roy. Soc. A **337**, 591 (1974).
- [20] G. Ares de Parga, R. Mares and S. Domingues, Annales da la Fondation Louis de Broglie, Vol. 30, 3-4 (2005).
- [21] Landau, L. D., and Lifshitz, E. M., *The Classical Theory of Fields*, 4th Ed., Vol. 2 (Butterworth-Heinemann, 1980).
- [22] H. Spohn, Europhys. Lett., **50**: (3), 287 (2000).
- [23] F. Rohrlich, Phys. Rev. E **77**, 046609 (2008).
- [24] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, 3rd Ed. (World Scientific, Singapore, 2007).
- [25] S. R. De Groot, *Studies in Statistical Mechanics*, Vol.4 (North-Holland Publishing Company, 1969).
- [26] J. J. Thomson, Philosophical Magazine [series 5], **11**, 229 (1881).
- [27] F. Rohrlich, Am. J. Phys. **28**, 639 (1960).
- [28] D. H. Sharp and E. J. Moniz, Phys. Rev. D **15**, 2850 (1977).
- [29] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd Ed. (John Wiley & Sons, Inc., 1975).
- [30] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
- [31] S. Coleman, Classical Electron Theory from a Modern Standpoint. In: *Electromagnetism Paths to Research*, Ed. by D. Teplitz (Plenum, New York, 1982).
- [32] P. O. Kazinski, S. L. Lyakhovich and A. A. Sharapov, Phys. Rev. D, **66**, 025017 (2002).
- [33] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications, Inc., New York, 1980).
- [34] I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, *Generalized Functions* (Academic Press, New York and London, 1964).
- [35] L. Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences* (Dover Publications, 2008).
- [36] A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis* (Dover Publications, Inc., New York, 1987).

-
- [37] N. N. Bogoliubov e D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, New York, 1959).
- [38] V. Weisskopf, Kgl. Danske Videnskab. Selskab., **14**, No. 6 (1936).
- [39] E. G. Peter Rowe, Phys. Rev. Lett. **19**, 1779 (1984).
- [40] J. L. Tomazelli e T. S. Mendes, artigo em preparação.
- [41] G. Scharf, *Finite Quantum Electrodynamics: the Causal Approach*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 1995).
- [42] V. Bargmann, L. Michel and V. Telegdi, Phys. Rev., **2**, 435 (1959).