

CRISTIANO OLIVEIRA FERREIRA

**ALTERNATIVAS À MODELAGEM DE FUNÇÕES DE
TRANSFERÊNCIA DE AMBIENTES**

FLORIANÓPOLIS

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA**

**ALTERNATIVAS À MODELAGEM DE FUNÇÕES
DE TRANSFERÊNCIA DE AMBIENTES**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

CRISTIANO OLIVEIRA FERREIRA

Florianópolis, Fevereiro de 2008

ALTERNATIVAS À MODELAGEM DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE AMBIENTES

Cristiano Oliveira Ferreira

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração *Comunicações e Processamento de Sinais*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Rui Seara, Dr.
Orientador

Prof^a. Kátia Campos de Almeida, D. Sc.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Rui Seara, Dr.
Presidente

Orlando José Tobias, Dr.

Sidnei Noceti Filho, D. Sc.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Vicente e Delci e minha irmã Valéria, por ajudarem a concretizar mais um objetivo.

À Eli pelo carinho e amparo nos momentos difíceis.

Ao Prof. Rui Seara pela orientação.

À Fernando Pacheco, por compartilhar seu conhecimento e disponibilizar material pertinente ao trabalho.

À Elton Fontão pelo auxílio na formatação deste documento.

À Artur Jaekel, Eduardo Almeida e Marcos Odebrecht, mais do que colegas, amigos adquiridos nesta etapa.

Aos Profs. Sidnei Noceti Filho e Orlando José Tobias pelos comentários e sugestões.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

ALTERNATIVAS À MODELAGEM DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE AMBIENTES

Cristiano Oliveira Ferreira

Fevereiro/2008

Orientador: Rui Seara, Dr.

Área de Concentração: Comunicações e Processamento de Sinais.

Palavras-chave: Método de mínimos quadrados, modelagem de ambientes, pólos acústicos comuns, sistemas multitaxa, técnicas de agrupamento de pólos, *wavelets*.

Número de Páginas: 97.

RESUMO: Esta dissertação trata da modelagem de funções de transferência de ambientes (RTF) utilizando modelos auto-regressivo e média móvel (ARMA). A representação de tais funções através de sistemas digitais é decisiva em aplicações visando à correção de problemas do ambiente acústico como também na síntese de fenômenos acústicos associados. O problema da estimação baseada em mínimos quadrados dos coeficientes de modelos ARMA é tratado com a introdução do método de Brandenstein e Unbehauen, denominado LSBU. Como alternativa à implementação do modelo estimado por tal método é introduzido o filtro de Kautz. Considerando o comprimento elevado da resposta ao impulso do ambiente, são utilizadas estratégias de decomposição (polifásica e transformada *wavelet*) para viabilizar sua aproximação. O trabalho culmina com a modelagem de múltiplas RFTs através do modelo de zeros e pólos acústicos comuns (CAPZ). Propõe-se então uma estratégia de determinação dos pólos comuns com garantia de estabilidade, denominada matriz de singularidades quantizadas (MSQ). Aliada a MSQ, a viabilidade da utilização do método LSBU para a estimação de seus coeficientes é investigada. Uma comparação dos resultados obtidos através das técnicas aqui propostas com os fornecidos pelo modelo CAPZ, originalmente proposto na literatura, e os obtidos baseado no método de mínimos quadrados de Shanks associado ao algoritmo de agrupamento *c-means* mostram a aplicabilidade das estratégias propostas.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

ON THE MODELING OF ROOM TRANSFER FUNCTIONS

Cristiano Oliveira Ferreira

February/2008

Advisor: Rui Seara, Dr.

Area of Concentration: Communication and Signal Processing.

Keywords: Least-squares estimation, room modeling, common acoustic pole/zero, multirate systems, clustering techniques, wavelet filters.

Number of Pages: 97.

ABSTRACT: This work deals with the modeling of room transfer functions (RTFs) by using autoregressive moving average (ARMA) models. The modeling of such functions is critical in applications of both room equalization and sound field simulation. The least-squares estimation to obtain the ARMA model coefficients is attained through the Brandestein and Unbehauen (LSBU) algorithm. As an alternative to implement the required modeling, the Kautz filter is introduced. Due to the large length of room impulse responses, such functions are decomposed by using either wavelet or polyphase filters, aiming to approximate them by an ARMA model. The research work provides a common acoustic pole/zero (CAPZ) modeling of multiple RTFs. A novel approach to obtain the common acoustic poles of a room, which assures the stability of the estimated CAPZ model, termed singularity matrix (MSQ), is proposed. Besides the MSQ procedure, the parameter estimation of such a model by using the LSBU method is presented. The obtained results by considering the proposed approaches are similar to those obtained with both the original CAPZ model and a more recent one, the latter based on both the Shanks method and the c-means algorithm, corroborating the applicability of the proposed strategies.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO.....	1
1.1 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE AMBIENTES.....	1
1.2 MODELAGEM DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO AMBIENTE.....	4
1.3 OBJETIVO DO TRABALHO.....	8
1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	9
2 – MÉTODOS DE MÍNIMOS QUADRADOS.....	11
2.1 INTRODUÇÃO.....	11
2.2 MÉTODO DE BRANDENSTEIN E UNBEHAUEN.....	12
2.3 FILTROS E FUNÇÕES DE KAUTZ.....	18
2.4 CONCLUSÕES.....	32
3 – SÍNTESE POR MEIO DE SISTEMAS MULTITAXA E WAVELETS.....	34
3.1 INTRODUÇÃO.....	34
3.2 DECOMPOSIÇÃO POLIFÁSICA.....	35
3.3 DECOMPOSIÇÃO WAVELET.....	40
3.4 CONCLUSÕES.....	54
4 – MODELAGEM DE MÚLTIPLAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA.....	57
4.1 INTRODUÇÃO.....	57
4.2 MODELO DE ZEROS E PÓLOS ACÚSTICOS COMUNS.....	59
4.3 TÉCNICAS DE AGRUPAMENTO DE PÓLOS.....	65
4.3.1 ALGORITMO <i>K-MEANS</i> E <i>C-MEANS</i>	65
4.3.2 MATRIZ DE SINGULARIDADES QUANTIZADAS.....	68
4.3.3 PÓLOS COMUNS EM SUB-BANDAS.....	75
4.4 ESTIMAÇÃO DOS COEFICIENTES DO MODELO CAPZ POR TÉCNICA DE MÍNIMOS QUADRADOS.....	77

4.5 CONCLUSÕES.....	83
5 – CONCLUSÕES FINAIS.....	86
APÊNDICE A – SOLUÇÃO DE MÍNIMOS QUADRADOS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES SOBREDETERMINADOS.....	89
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	92

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração de alguns caminhos de propagação de uma onda sonora em um ambiente fechado.....	1
Figura 2 – Fonte $x(n)$ fixa e receptor $y(n, r_\ell)$ posicionado em diferentes localizações dentro do ambiente.....	2
Figura 3 – Resposta ao impulso típica de um ambiente.....	3
Figura 4 – (a) Magnitude da resposta em frequência da sala. (b) Detalhe da resposta de magnitude em baixas frequências.....	7
Figura 5 – Obtenção da seqüência $y(n)$	14
Figura 6 – Resposta ao impulso $h_{BU}(n)$ do modelo ARMA determinado pelo método LSBU.....	17
Figura 7 – Resposta em frequência do modelo ARMA estimado pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_1 e H_{BU} . (b) Comparação da fase de H_1 e H_{BU}	18
Figura 8 – Diagrama de blocos de um filtro de Kautz.....	20
Figura 9 – Diagrama de blocos de um filtro de Kautz obtido a partir de pares de pólos complexos conjugados.....	22
Figura 10 – Diagrama de blocos de um filtro de Kautz composto por dois pólos reais e dois pólos complexos conjugados.....	23
Figura 11 – Funções de Kautz obtidas a partir de dois pólos reais e dois pólos complexos conjugados.....	23
Figura 12 – Curvas de magnitude da resposta em frequência das funções de Kautz $g_1(n)$, $g_2(n)$, $\phi_1(n)$ e $\psi_1(n)$ obtidas a partir de dois pólos reais e dois pólos complexos conjugados.....	24
Figura 13 – Pólos linearmente espaçados no semi-plano z superior.....	27
Figura 14 – Resposta ao impulso do filtro de Kautz considerando pólos linearmente espaçados.....	27
Figura 15 – Resposta em frequência do filtro de Kautz com pólos linearmente espaçados. (a) Comparação da magnitude de H_k e H_1 . (b) Comparação da fase da de H_k e H_1	27
Figura 16 – Resposta ao impulso do filtro de Kautz com pólos obtidos pelo método BU.	30

Figura 17 – Filtro de Kautz com pólos obtidos pelo método BU. (a) Comparação da magnitude de H_k e H_1 . (b) Comparação da fase de H_k e H_1	30
Figura 18 – Energia dos coeficientes do filtro de Kautz com pólos obtidos pelo método BU.....	31
Figura 19 – Resposta ao impulso do filtro de Kautz considerando somente os pólos mais representativos.....	31
Figura 20. Filtro de Kautz considerando somente os pólos mais representativos. (a) Comparação da magnitude de H_k e H_1 . (b) Comparação da fase de H_k e H_1	32
Figura 21 – Diagrama de blocos da decomposição e reconstrução polifásica de uma seqüência $h(n)$	36
Figura 22 – Diagrama de blocos da decomposição e reconstrução polifásica de uma seqüência $h(n)$ utilizando elementos de avanço unitários cascadeados.....	36
Figura 23 – Estrutura de realização de um filtro a partir de seus componentes polifásicos.....	37
Figura 24 – Resposta ao impulso resultante da reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU.....	38
Figura 25 – Reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_p e H_2 . (b) Comparação da fase de H_p e H_2	38
Figura 26 – Sinal de erro obtido com a reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU.....	39
Figura 27 – Reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 128 modelos ARMA determinados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_p e H_2 . (b) Comparação da fase de H_p e H_2	40
Figura 28 – Sinal de erro obtido com a reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 128 modelos ARMA determinados pelo método LSBU.....	40
Figura 29 – Análise multirresolução através de banco de filtros.....	42
Figura 30 – Magnitude dos filtros da análise multirresolução.....	43
Figura 31 – Banco de filtros de reconstrução.....	43
Figura 32 – Coeficientes <i>wavelet</i> . (a) d_9 . (b) d_8 . (c) d_7 . (d) d_6 . (e) d_5 . (f) d_4	44
Figura 33 – Coeficientes <i>wavelet</i> . (a) d_3 . (b) d_2 . (c) d_1 . (d) d_0	45

Figura 34 – Coeficiente de escala c_0	45
Figura 35 – Reposta ao impulso resultante da reconstrução <i>wavelet</i> aplicada à resposta ao impulso de 7 modelos ARMA estimados pelo método LSBU.....	47
Figura 36 – Reconstrução <i>wavelet</i> aplicada à resposta ao impulso de 7 modelos ARMA estimados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_w e H_2 . (b) Comparação da fase de H_w e H_2	48
Figura 37 – Sinal de erro obtido com a reconstrução <i>wavelet</i> aplicada à resposta ao impulso de 7 modelos ARMA estimados pelo método LSBU.....	48
Figura 38 – Decomposição <i>wavelet</i> em um único nível de escala.....	49
Figura 39 – Reconstrução <i>wavelet</i> aplicada à reconstrução polifásica da resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_w e H_2 . (b) Comparação da fase de H_w e H_2	49
Figura 40 – Sinal de erro obtido com a reconstrução <i>wavelet</i> aplicada à reconstrução polifásica da resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU.....	50
Figura 41 – Decomposição em pacotes <i>wavelet</i> em três escalas.....	51
Figura 42 – Magnitude dos filtros de análise na decomposição em pacotes <i>wavelet</i> em três escalas.....	51
Figura 43 – Energia normalizada dos coeficientes da decomposição em pacotes <i>wavelet</i>	52
Figura 44 – Reconstrução em pacotes <i>wavelet</i> aplicada à resposta ao impulso de 20 modelos ARMA estimados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_{pw} e H_2 . (b) Comparação da fase de H_{pw} e H_2	53
Figura 45 – Sinal de erro obtido com a reconstrução em pacotes <i>wavelet</i> aplicada à resposta ao impulso de 20 modelos ARMA estimados pelo método LSBU.....	53
Figura 46 – Esquema mostrando as diversas RTFs para diferentes localizações do receptor.....	59
Figura 47 – Pólos referentes aos 20 modelos estimados pelo método de Prony.....	62
Figura 48 – Detalhe nos pólos obtidos dos 20 modelos estimados pelo método de Prony.	62
Figura 49 – Pólos comuns do polinômio determinado pela média dos coeficientes dos 20 modelos ARMA.....	62

Figura 50 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ estimado pelo método de Prony e pólos comuns determinados pela média dos coeficientes.....	63
Figura 51 – Comparação da magnitude das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ estimado pelo método de Prony e pólos comuns determinados pela média dos coeficientes.....	63
Figura 52 – Média e desvio padrão dos coeficientes dos denominadores dos 20 modelos ARMA estimados pelo método de Prony.....	64
Figura 53 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ estimado pelo método de Prony. O denominador comum é determinado pela média e os numeradores são determinados pelo método de Shanks.....	65
Figura 54 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ estimado pelo método de Prony. O denominador comum é determinado pela média e os numeradores são determinados pelo método de Shanks.....	65
Figura 55 – Pólos comuns determinados pelo algoritmo <i>k-means</i>	68
Figura 56 – Pólos comuns determinados pelo algoritmo <i>c-means</i>	68
Figura 57 – Pólos quantizados no plano z utilizando 8 níveis de quantização para a magnitude, 12 níveis para a fase e β igual a 1,4.....	71
Figura 58 – Pólos comuns determinados pela MSQ.....	72
Figura 59 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ, sendo os pólos comuns determinados pela MSQ e os numeradores, pelo método de Shanks.....	72
Figura 60 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ, sendo os pólos comuns obtidos pela MSQ e os numeradores, pelo método de Shanks.....	73
Figura 61 – Pólos comuns determinados pelos algoritmos <i>k-means</i> (“×”) e MSQ (“o”)...	73
Figura 62 – Pólos comuns determinados pelos algoritmos <i>c-means</i> (“×”) e MSQ (“o”)...	74
Figura 63 – Diagrama de blocos do modelo CAPZ em sub-bandas.....	76
Figura 64 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ, sendo os pólos comuns determinados pela MSQ e os numeradores, pelo método de Shanks.....	77
Figura 65 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ, sendo os pólos comuns obtidos pela MSQ e os numeradores, pelo método de Shanks.....	77
Figura 66 – Pólos referentes aos 20 modelos estimados pelo método LSBU.....	78
Figura 67 – Pólos comuns determinados pela MSQ.....	79

Figura 68 – Pólos comuns determinados pelo algoritmo <i>k-means</i>	79
Figura 69 – Pólos comuns determinados pelo algoritmo <i>c-means</i>	80
Figura 70 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo método LSBU associado a MSQ.....	80
Figura 71 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo LSBU associado a MSQ.....	80
Figura 72 – Média e desvios padrão dos coeficientes dos denominadores dos 20 modelos ARMA estimados pelo método LSBU.....	81
Figura 73 – Filtro de Kautz utilizado para modelar múltiplas RTFs.....	82
Figura 74 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo método LSBU, sendo os pólos comuns determinados pela MSQ em sub-bandas.....	82
Figura 75 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ determinado pelo LSBU, sendo os pólos comuns determinados pela MSQ em sub-bandas.....	83

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata da modelagem de funções de transferência de ambientes utilizando modelos auto-regressivo e média móvel (ARMA). Essas funções descrevem a transformação sofrida pela onda sonora no percurso entre a fonte e um receptor no interior de uma sala. A representação de tais funções através de sistemas digitais é decisiva em aplicações visando à correção de problemas acústicos do ambiente [1]-[6] como também na síntese de fenômenos acústicos associados¹ [7]-[10].

1.1 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE AMBIENTES

A resposta acústica de um ambiente fechado é o resultado combinado da propagação multipercurso de uma onda sonora emitida pela fonte e a parcela de sua energia captada por um receptor localizado em uma dada posição no ambiente considerado [11]. Na Figura 1, são ilustrados alguns caminhos de propagação de uma onda sonora em um ambiente fechado.

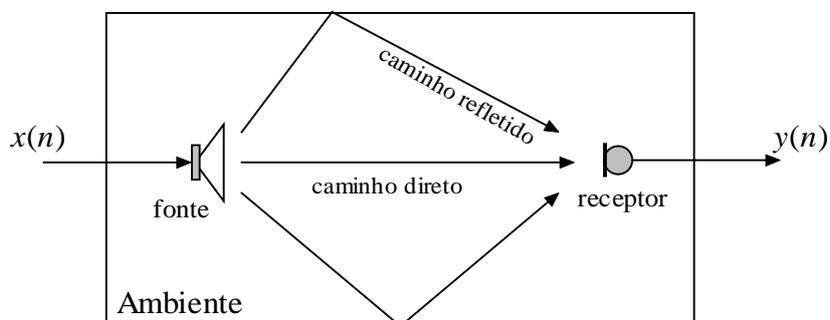


Figura 1 - Ilustração de alguns caminhos de propagação de uma onda sonora em um ambiente fechado.

Nesta figura, $x(n)$ e $y(n)$ representam, respectivamente, o sinal de entrada (fonte) e o sinal de saída (receptor). Em uma primeira aproximação, a resposta acústica do ambiente pode ser considerada linear e invariante no tempo [11]. Logo, podemos representá-la através da função de transferência do ambiente (RTF) definida no domínio da transformada z por

¹ Exemplos: eco e reverberação.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (1)$$

onde $X(z)$ e $Y(z)$ são, respectivamente, as transformadas z dos sinais de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ e $H(z)$ denota a RTF. É importante levar em conta que variações de temperatura, alterações no ambiente (abertura de portas e janelas) e a presença de pessoas na sala levam a modificações nas características do ambiente, indicando que o sistema pode não ser mais invariante como anteriormente preconizado [12].

Generalizando para o caso em que tem-se a fonte ou o receptor em localizações quaisquer, pode-se reescrever (1) como segue:

$$Y(z, r_\ell) = H(z, r_\ell)X(z, r_\ell), \quad \ell = 1, 2, \dots, L \quad (2)$$

onde r_ℓ denota uma dada localização da fonte e do receptor e L o número de localizações distintas consideradas. A Figura 2 apresenta esse novo cenário em que a fonte $x(n)$ é mantida fixa e os receptores $y(n, r_\ell)$, para $\ell = 1, 2, \dots, L$, posicionados em diferentes localizações no interior do ambiente.

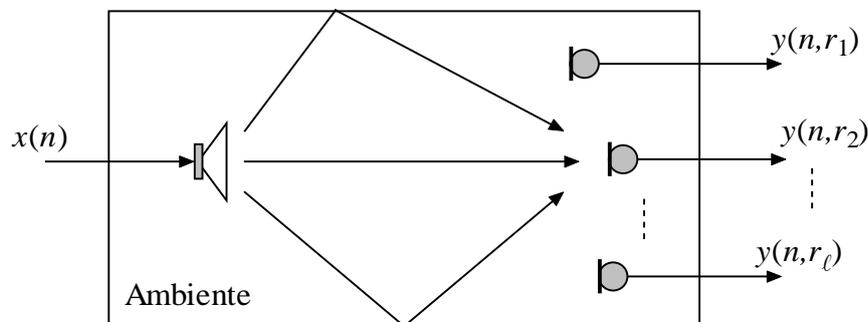


Figura 2 – Fonte $x(n)$ fixa e receptor $y(n, r_\ell)$ posicionado em diferentes localizações dentro do ambiente.

Associada a cada função de transferência $H(z, r_\ell)$, para $\ell = 1, 2, \dots, L$, existe uma resposta ao impulso $h(n, r_\ell)$ denominada resposta ao impulso do ambiente (RIR). A Figura 3 ilustra uma RIR obtida através de medida em um ambiente. Para a obtenção dessa resposta foi considerada uma frequência de amostragem de 48 kHz, resultando em uma seqüência com 31652 amostras com resolução de 20 bits. Essa e outras respostas são

disponibilizadas pelo laboratório de processamento avançado em áudio e fala da Universidade do Novo México [13].

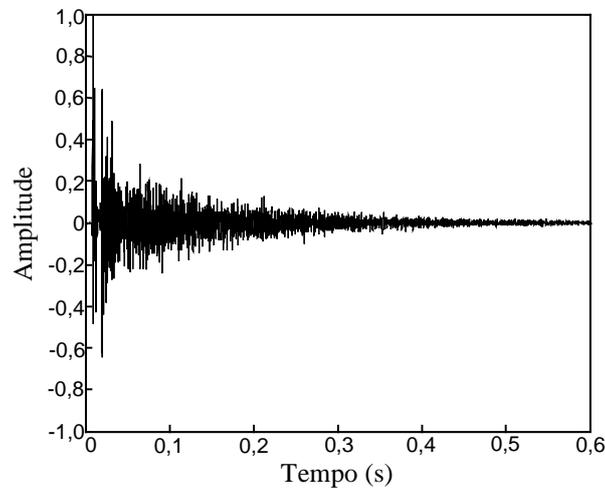


Figura 3 - Resposta ao impulso típica de um ambiente.

Da Figura 3, percebe-se que o comportamento temporal da RIR é bastante complexo. Tal complexidade faz com que seja necessária a utilização de uma frequência de amostragem elevada para a captura precisa de seus detalhes. Em equipamentos e *softwares* comerciais que recriam ambientes para serem inseridos em gravações de áudio, as RIRs são geralmente amostradas considerando uma frequência de amostragem de 96 kHz [14]. Outra característica importante das RIRs é a sua duração. Ela é definida pelo tempo de reverberação. Tal tempo pode ser determinado a partir da medida de energia da RIR. Esse resultado origina a curva de decaimento de energia $EDC(t)$, definida no domínio do tempo como [7]

$$EDC(t) = \int_t^{\infty} h^2(\tau) d\tau. \quad (3)$$

O tempo necessário para a energia $EDC(t)$ decair 60 dB define o tempo de reverberação (RT60) da RIR [7]. O RT60 pode alcançar altos valores tais como, 2 segundos para salas de concerto ou até mesmo 3 segundos em grandes igrejas [15].

A RIR pode ser classificada como uma resposta causal, estável (exceto quando ocorrer efeitos de realimentação como microfonia) e, em geral, de fase não-mínima [1]. Sendo assim, a função de transferência do ambiente pode ser escrita como

$$H(z, r_\ell) = \frac{\prod_{j=1}^{M_i} [1 - a_j(r_\ell)z^{-1}] \prod_{j=1}^{M_o} [1 - b_j(r_\ell)z]}{\prod_{j=1}^{N_i} (1 - c_j z^{-1})} \quad (4)$$

onde $|c_j| < 1$, $j = 1, 2, \dots, N_i$ e $|a_j(r_\ell)| < 1$, $j = 1, 2, \dots, M_i$ denotam, respectivamente, os pólos e zeros internos à circunferência de raio unitário e $|b_j(r_\ell)| < 1$, $j = 1, 2, \dots, M_o$, os zeros externos à circunferência de raio unitário.

Em (4), as diferentes RTFs de cada localização possuem o mesmo denominador, ou seja, os mesmos pólos [16]. Tais pólos, por sua vez, definem as frequências de ressonância do ambiente bem como seus respectivos fatores de qualidade, sendo apenas dependentes das características físicas do ambiente, tais como geometria, volume e coeficientes de reflexão das paredes, teto e piso [16]. Por outro lado, o que diferencia as RTFs, tomadas em diferentes localizações no interior de uma sala, são os diferentes zeros das distintas funções.

1.2 MODELAGEM DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO AMBIENTE

A maneira mais simples e direta de modelar uma dada RTF é a partir de sua RIR. Assim, as amostras da RIR definem os coeficientes de um modelo de média móvel (MA), representado pela seguinte função de transferência:

$$H_z(z) = \sum_{v=0}^M p_v z^{-v} \quad (5)$$

onde M é a ordem do modelo MA e p_v seus coeficientes.

Apesar da facilidade de obtenção deste modelo, sua implementação é onerosa, já que a ordem do filtro é igual ao comprimento da RIR a menos de uma amostra. Para reduzir o número de coeficientes do modelo, pode-se limitar o comprimento da RIR. No entanto, tal procedimento pode acarretar perda de características importantes da RTF tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Uma redução significativa na ordem do modelo é conseguida através da utilização de um modelo auto-regressivo e média móvel (ARMA) [11]. Essa modelagem permite a obtenção de um sistema apresentando uma resposta ao impulso infinita (IIR). Assim, a RTF pode ser então representada por [16]

$$\hat{H}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{v=0}^M p_v z^{-v}}{1 + \sum_{v=1}^N q_v z^{-v}} \quad (6)$$

onde $\hat{H}(z)$ denota o modelo da RTF, $P(z)$ e $Q(z)$ são os polinômios do numerador e denominador de ordem N e M , respectivamente, e p_v e q_v são os seus respectivos coeficientes.

Com as ordens N e M fixas, os coeficientes p_v e q_v devem ser determinados de forma a fornecer a melhor aproximação da RIR considerada. Uma alternativa para se obter tal objetivo é através do método de mínimos quadrados [16]. Ele minimiza a soma dos quadrados do erro de aproximação, dado por

$$e(n) = h(n) - \hat{h}(n). \quad (7)$$

A desvantagem de tal abordagem é que os coeficientes devem ser determinados através da solução de um sistema de equações não-lineares, inviabilizando uma solução analítica [16]. Assim, deve-se lançar mão de técnicas de otimização numérica para obter uma estimativa da solução. Uma das técnicas de otimização numérica mais popular para tal problema é a de Steiglitz e Mcbride [18], [19]. No entanto, como muitas técnicas desse tipo, pode não convergir para a solução ótima, ou mesmo ser instável.

Para se obter um conjunto de equação lineares e, por conseqüência, uma solução analítica para o problema de mínimos quadrados, se faz necessária a minimização de uma estimativa do erro de aproximação através de uma equação de erro $E'(z)$. Os métodos que efetuam esse tipo de minimização são conhecidos como indiretos [17]. O mais utilizado é o método de Prony, cuja equação de erro, descrita no domínio da transformada z , é dada por [17]

$$E'(z) = Q(z)H(z) - P(z) \quad (8)$$

ou

$$E'(z) = Q(z)E(z) \quad (9)$$

onde $E(z)$ é a transformada z do erro de aproximação $e(n)$. Tal solução é considerada em [20]-[23]. Porém, mesmo com a obtenção de uma solução analítica fornecida pelo método de Prony, o elevado número de amostras das RIRs faz com que seja necessário o cálculo e a manipulação de matrizes de autocorrelação de dimensão elevada, originando um custo computacional alto. Uma alternativa é a aplicação de alguma estratégia de decomposição à RIR. As seqüências obtidas dessa decomposição são então aproximadas por diferentes modelos ARMA. Podem-se classificar as estratégias de decomposição utilizadas na modelagem de uma RIR em duas categorias: as que consideram uma decomposição em sub-bandas (banco de filtros QMF [20], [21], transformada *wavelet* [22] e *frequency zooming* ARMA [24]) e as que fornecem os componentes polifásicos [19], [25].

A obtenção de uma solução analítica para o problema de mínimos quadrados também é obtida pela redução do modelo ARMA ao caso AR. Isso é conseguido fazendo em (6) $M = 0$. A utilização desse modelo é motivada pela facilidade de obtenção de seus coeficientes; porém, é restrita ao caso em que se deseja modelar a RIR em baixas freqüências, conforme discutido em [11] e [24]. Além disso, o ajuste da RIR modelada no domínio do tempo não fornece bons resultados [24]. Isso é evidenciado na formulação do método para determinação de seus coeficientes no domínio da freqüência. Conforme demonstrado em [26], a energia do erro minimizada é uma função do espectro de potência da RIR no domínio da freqüência, ou seja, do quadrado de sua magnitude. Como resultado, obtém-se um bom ajuste da magnitude da resposta em freqüência em detrimento da fase.

Recentemente, uma particular estrutura ARMA, denominada filtro de Kautz, vem sendo utilizada com sucesso na modelagem de RTFs [19], [25], [27]. Seus zeros são associados a seus pólos com o intuito de se gerar polinômios racionais ortonormais [28]. Assim, a RIR é aproximada pela ponderação de um conjunto de seqüências ortonormais (exponenciais e senóides amortecidas) chamadas funções de Kautz. Para a determinação dos pólos desse filtro também não existe um procedimento analítico; porém, recentemente em [29] foi proposto um método iterativo que permite obter os pólos ótimos desse particular tipo de filtro. Tal procedimento, chamado método BU, foi inspirado na técnica

de mínimos quadrados originalmente proposta por Brandenstein e Unbehauen (por essa razão a denominação BU) para ajustar a resposta ao impulso de um filtro IIR a de um filtro FIR [30].

A preferência pela utilização do modelo ARMA para a aproximação de RIRs é motivada pela presença de pólos e zeros no modelo. Tal característica faz com que os vales e picos presentes na magnitude da resposta em frequência de um ambiente sejam mais facilmente modelados. A Figura 4 mostra a resposta de magnitude da RIR considerada anteriormente na Figura 3. O detalhe nas baixas frequências mostra claramente o número grande de picos e vales. Outra consequência da presença de pólos e zeros no modelo ARMA é que sua ordem é sempre menor do que a obtida com um modelo MA e AR, para o mesmo erro quadrático médio de aproximação.

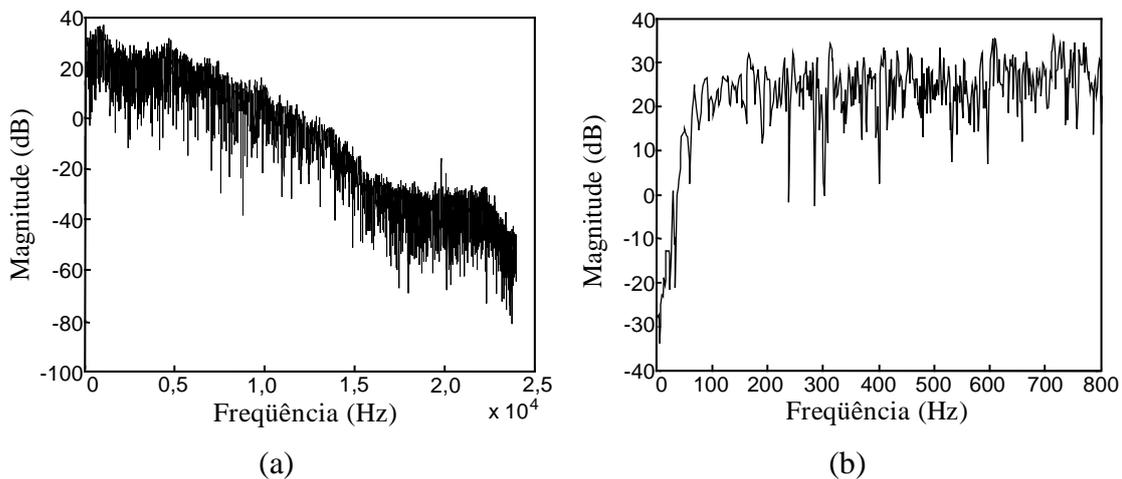


Figura 4 – (a) Magnitude da resposta em frequência da sala. (b) Detalhe da resposta de magnitude em baixas frequências.

A modelagem de um conjunto de RTFs de um ambiente possui uma particularidade evidenciada em (4): as diferentes RTFs de cada localização possuem o mesmo denominador, ou seja, os mesmos pólos. Em [16], essa característica foi explorada, originando um modelo ARMA conhecido na literatura como zeros e pólos acústicos comuns (CAPZ). A estimação dos parâmetros desse modelo é baseada no método de Prony. Sua utilização é restrita a RIRs com pequeno número de amostras já que o método minimiza uma equação de erro associada ao conjunto de RIRs. Em [16], é também proposto o seguinte procedimento para o caso de uma RIR com comprimento elevado:

- i) estimam-se os coeficientes do modelo ARMA para cada RIR;
- ii) os coeficientes do numerador de cada modelo estimado indicam os zeros das diferentes localizações no interior de uma sala;
- iii) os pólos comuns são determinados pela média dos coeficientes dos denominadores de todos os modelos estimados.

Conforme salientado em [16] e recentemente em [31], este procedimento não garante que os pólos comuns resultantes estejam circunscritos à circunferência de raio unitário por não se tratar de uma média geométrica dos pólos. Isso pode fazer com que, em certos casos, o modelo CAPZ resultante seja instável, mesmo que originado de modelos ARMA estáveis. Em [31], foi proposta a utilização do algoritmo de agrupamento *c-means* para a determinação dos pólos comuns do ambiente. A estabilidade do modelo CAPZ resultante, nesse caso, é garantida.

1.3 OBJETIVO DO TRABALHO

Este trabalho foca tanto o problema da modelagem de uma única RTF como também a completa caracterização do ambiente pela modelagem do seu conjunto de RTFs, ambos utilizando modelos ARMA.

A modelagem ARMA é preferida já que o objetivo deste trabalho é a obtenção de um modelo que, com ordem reduzida, forneça um adequado ajuste a RIR modelada. Como alternativa aos métodos de mínimos quadrados, já mencionados para estimação dos coeficientes de modelos ARMA, propõe-se a utilização do método iterativo de Brandenstein e Unbenhauen [30], denominado LSBU, pelo seu já constatado sucesso na aproximação de respostas ao impulso finita de fase não-mínima e de comprimento elevado. A utilização de parte desse método para a estimação dos pólos do filtro de Kautz motivaram a sua utilização neste trabalho no intuito de fornecer uma alternativa à implementação de um modelo ARMA. A inerente decomposição ortonormal proporcionada pelo filtro de Kautz faz com que a contribuição de energia de um dado pólo na aproximação seja facilmente identificada através do coeficiente de ponderação da sua correspondente função de Kautz, viabilizando assim a identificação e desconsideração daqueles de pequena energia. Isso resultará em um modelo que, mesmo tendo uma ordem

menor, fornece praticamente o mesmo erro quadrático médio de aproximação a uma dada RIR.

Para o caso da modelagem de múltiplas RFTs através do modelo CAPZ, propõe-se uma estratégia de determinação dos pólos comuns com garantia de estabilidade chamada matriz de singularidades quantizadas (MSQ). O uso de técnica similar recentemente proposta [32] apresentou bons resultados em um problema de desconvolução cega, sendo esses melhores do que os obtidos com o algoritmo de agrupamento *k-means*. Aliada a MSQ, a viabilidade da utilização do método LSBU para a estimação dos coeficientes dos modelos ARMA do modelo CAPZ é investigada. Os resultados são confrontados com os fornecidos pelo modelo CAPZ conforme proposto em [16], como também com aqueles obtidos com uma recente proposta que utiliza o método de mínimos quadrados de Shanks e o algoritmo de agrupamento *c-means* [31].

Para viabilizar a aproximação de respostas ao impulso longas, faz-se uso da transformada *wavelet* e da decomposição polifásica como estratégias de decomposição. Os resultados obtidos com ambas estratégias são confrontados subjetivamente, por meio de uma avaliação auditiva informal das RIRs sintetizadas e, objetivamente, por meio da ordem do modelo resultante e do erro quadrático médio de aproximação com o intuito de indicar qual melhor resposta se ajusta ao problema em questão.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O Capítulo 2 apresenta o método de mínimos quadrados LSBU seguido pelo filtro de Kautz. Com respeito ao último, são apresentadas as funções de Kautz que definem o filtro, sua utilização na aproximação de sinais e sistemas e o método BU para estimação de seus pólos. No Capítulo 3, são desenvolvidas as estratégias de decomposição da RIR. Em ambos os capítulos, as ferramentas apresentadas são utilizadas para um problema de aproximação de uma única RTF. O Capítulo 4 é dedicado ao problema da modelagem das múltiplas RTFs. Além da apresentação do modelo CAPZ, é feita uma breve revisão sobre os algoritmos de agrupamento *k-means* e *c-means*, seguida do desenvolvimento da técnica MSQ. Posteriormente, é investigada a viabilidade da utilização do método LSBU para a determinação dos coeficientes do modelo CAPZ. Também neste capítulo é utilizada a

transformada *wavelet* para a determinação de pólos comuns em sub-bandas. Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões desta dissertação e as propostas para trabalhos futuros.

MÉTODOS DE MÍNIMOS QUADRADOS

2.1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas muito se tem pesquisado a respeito de técnicas para a aproximação das características de magnitude e fase de filtros FIR por filtros IIR [30], [33], [34]. Dentre elas, as mais proeminentes são as formuladas no espaço de estados [34]. Porém, devido à necessidade da conversão do modelo obtido no espaço de estados para uma função de transferência, tais métodos podem levar a erros numéricos consideráveis, principalmente quando a ordem do filtro é elevada [30]. Em um artigo recente, Brandenstein e Unbehauen propuseram uma técnica iterativa para obtenção de um filtro IIR a partir de um filtro FIR através de uma solução de mínimos quadrados [30]. Tal técnica não apresenta os problemas citados anteriormente já que trabalha diretamente com os coeficientes da função de transferência. Além disso, teoricamente, os pólos estimados levam sempre a sistemas estáveis.

Neste capítulo é descrito o método de Brandenstein e Unbehauen, denominado LSBU, e demonstrada sua utilização para a determinação dos coeficientes do modelo ARMA de uma dada RTF. A seguir é apresentado o filtro de Kautz o qual, conforme será visto, representa uma alternativa interessante para a implementação do modelo ARMA estimado pelo método LSBU, constituindo uma forma direta de se obter uma aproximação de mínimos quadrados partindo-se de um conjunto de pólos qualquer.

Considera-se então a modelagem da RIR apresentada anteriormente na Figura 3, porém restrita a 16384 amostras. Tal resposta será sempre referida como a RIR truncada (RIR1). A semelhança entre essa resposta e a aproximada pela resposta ao impulso de um modelo ARMA $\hat{h}(n)$ é avaliada por meio do erro quadrático médio normalizado entre ambas, ou seja

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} [h(n) - \hat{h}(n)]^2}{\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)}. \quad (10)$$

2.2 MÉTODO DE BRANDENSTEIN E UNBEHAUEN (LSBU)

Brandenstein e Unbehauen reformularam em [30] a solução do problema de mínimos quadrados introduzindo uma nova formulação para minimização do erro quadrático médio. O método minimiza a energia da diferença entre $h(n)$ e a resposta ao impulso $\hat{h}(n)$ do modelo ARMA, definido por

$$\hat{H}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{v=0}^N p_v z^{-v}}{1 + \sum_{v=1}^N q_v z^{-v}}. \quad (11)$$

Diferentemente de (6), este modelo considera agora um mesmo número de pólos e zeros. Tal restrição permite utilizar o teorema de Walsh [35], o qual é adaptado para o caso em que a analiticidade em $|z| > 1$ é requerida.

O referido teorema enuncia que dentre o conjunto de funções racionais $\hat{H}(z)$, com pólos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, situados em $|z| < 1$, a melhor aproximação sob o ponto de vista de mínimos quadrados, analítica em $|z| > 1$ e contínua em $|z| \geq 1$, é aquela que interpola $H(z)$ nos pontos singulares $z \rightarrow \infty, 1/\alpha_1^*, 1/\alpha_2^*, \dots, 1/\alpha_N^*$.

Então, fazendo o uso deste teorema, a determinação dos coeficientes do numerador p_v fica desacoplada da determinação dos coeficientes q_v do denominador e vice-versa, visto que os primeiros são obtidos a partir da solução de um problema de interpolação. A condição de interpolação diz que

$$H(z_v) = \hat{H}(z_v) \quad (12)$$

para $z_0 \rightarrow \infty$ e $z_v = 1/\alpha_v^*$, com $v = 1, 2, \dots, N$. Isso impõe que a equação do erro de aproximação no domínio da transformada z ,

$$E(z) = H(z) - \hat{H}(z) \quad (13)$$

possuirá $N + 1$ zeros em z_v , uma vez que

$$\hat{H}(z_v) - H(z_v) = 0. \quad (14)$$

Além disso, reescrevendo a equação do erro, percebe-se que seus pólos são os zeros de $Q(z)$, visto que substituindo (11) em (13) resulta em

$$E(z) = \frac{H(z)Q(z) - P(z)}{Q(z)}. \quad (15)$$

Logo, a equação de erro pode ser escrita como

$$E(z) = \frac{z^{-(N+1)}Q(z^{-1})}{Q(z)}G(z) \quad (16)$$

onde

$$G(z) = \sum_{\lambda=0}^{M-1} g_{\lambda} z^{-\lambda} \quad (17)$$

é um polinômio de ajuste necessário para que a ordem do numerador de (15) e (16) seja a mesma e M é a ordem do filtro FIR definido pelas amostras de $h(n)$.

Então, para $H(z)$ e $Q(z)$ dados, o numerador $P(z)$ pode ser determinado substituindo (16) em (15), resultando em

$$P(z) = H(z)Q(z) - z^{-(N+1)}Q(z^{-1})G(z). \quad (18)$$

Para determinar $P(z)$ é ainda necessário obter $G(z)$. Para tal, reescreve-se (18) como

$$z^{-M}X_2(z) = X_1(z)[z^{-N}Q(z^{-1})] - Q(z)Y(z) \quad (19)$$

onde

$$X_1(z) = z^{-M}H(z^{-1}) \quad (20)$$

$$X_2(z) = z^{-N}P(z^{-1}) \quad (21)$$

$$Y(z) = z^{-(M-1)}G(z^{-1}). \quad (22)$$

A transformada z inversa destas funções resultam nas seqüências $y(n)$, $x_1(n)$ e $x_2(n)$. Elas representam a reversão no domínio da seqüência das seqüências $g(n)$, $h(n)$ e $p(n)$, ou seja

$$x_1(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ h(M-n), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & n > M \end{cases} \quad (23)$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ p_{N-n}, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases} \quad (24)$$

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ g_{M-1-N}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & n > M-1. \end{cases} \quad (25)$$

Isolando em (19) $Y(z)$ obtém-se

$$Y(z) = \frac{z^{-N}Q(z^{-1})}{Q(z)}X_1(z) - \frac{z^{-M}}{Q(z)}X_2(z). \quad (26)$$

A seqüência $y(n)$ é obtida, então, pela filtragem das seqüências $x_1(n)$ e $x_2(n)$, conforme ilustrado na Figura 5.

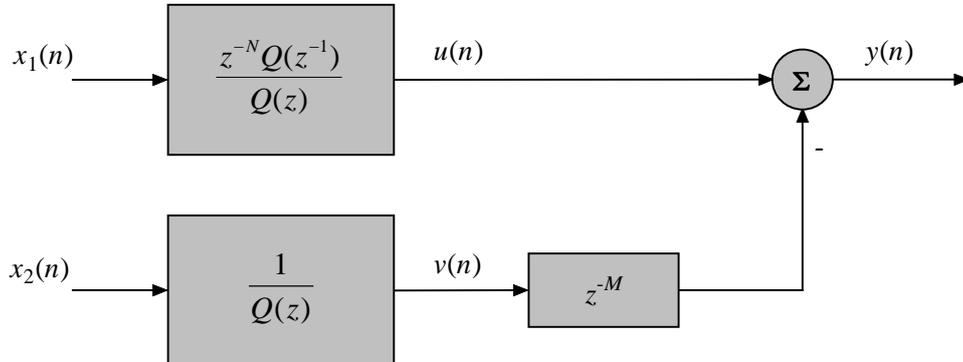


Figura 5 – Obtenção da seqüência $y(n)$.

Da Figura 5, observa-se que a relação existente entre $u(n)$, $v(n)$ e $y(n)$ no domínio da seqüência é

$$y(n) = u(n) - v(n - M). \quad (27)$$

Devido ao atraso z^{-M} aplicado à seqüência $v(n)$, tem-se

$$y(n) = u(n), \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (28)$$

e igualando (25) e (28), determina-se

$$g(M-1-n) = u(n), \quad 0 \leq n \leq M-1. \quad (29)$$

Para se obter a seqüência $g(n)$ é necessário aplicar à seqüência $g(M-1-n)$ uma reversão no domínio da seqüência e um avanço de $M-1$ amostras. Assim,

$$g(n) = u(M-1-n), \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (30)$$

em que as amostras dessa seqüência são os coeficientes do polinômio $G(z)$.

A determinação de $Q(z)$ é obtida através da minimização de (16). Esta equação indica que a energia do erro está concentrada em $G(z)$, uma vez que a parcela $z^{-N}Q(z^{-1})/Q(z)$ caracteriza um filtro passa-tudo e z^{-1} , um atraso unitário. A energia do erro da aproximação é então dada por

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} e^2(n) = \sum_{\lambda=0}^{M-1} g_{\lambda}^2(n). \quad (31)$$

Como $g(n) = u(M-1-n)$, no intervalo $n = 0, 1, \dots, M-1$ tem-se

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{M-1} u^2(n). \quad (32)$$

A seqüência $u(n)$ é o resultado da filtragem de $x_1(n)$ pelo filtro passa-tudo, conforme apresentado na Figura 5. Como tal filtro é conservativo, pode-se então escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_1^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} u^2(n) = \sum_{n=0}^{M-1} u^2(n) + \sum_{n=M}^{\infty} u^2(n) \quad (33)$$

em que as energias do erro de aproximação e da aproximação são representadas pela primeira e última parcela, respectivamente. Sendo assim, o problema de aproximação se restringe a determinar o polinômio $Q(z)$ que minimize a energia da seqüência $u(n)$, no intervalo $n = 0, 1, \dots, M-1$, quando é aplicada à entrada do filtro passa-tudo a seqüência $x_1(n)$.

Brandenstein e Unbehauen propuseram uma solução iterativa para este problema. O ponto de partida é então o seguinte filtro digital de ordem N :

$$U_k(z) = z^{-N} \frac{Q_k(z^{-1})}{Q_{k-1}(z)} X_1(z) \quad (34)$$

onde k representa os passos de iteração. Definindo-se a filtragem *all-pole* como

$$X_k(z) = \frac{X_1(z)}{Q_{k-1}(z)} \quad (35)$$

$U_k(z)$ se torna

$$U_k(z) = z^{-N} Q(z^{-1}) X_k(z). \quad (36)$$

O polinômio $Q_k(z)$ pode então ser escrito como

$$Q_k(z) = 1 + z^{-1} Q_{1,k}(z) \quad (37)$$

onde

$$Q_{1,k}(z) = \sum_{v=0}^{N-1} q_{v+1,k} z^{-v}. \quad (38)$$

Assim, substituindo (37) em (36), obtém-se

$$U_k(z) = z^{-N} X_k(z) + z^{-(N-1)} X_k(z) Q_{1,k}(z^{-1}). \quad (39)$$

Os coeficientes em z das parcelas de (39) definem os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= [u_k(0) \ u_k(1) \ \dots \ u_k(M-1)]^T \\ \mathbf{x}_k &= [0 \ \dots \ 0 \ x_k(0) \ x_k(1) \ \dots \ x_k(M-N-1)]^T \\ \mathbf{q}_k &= [q_{N,k} \ q_{N-1,k} \ \dots \ q_{1,k}]^T \end{aligned}$$

e a matriz

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} x_k(0) & 0 & \dots & 0 \\ x_k(1) & x_k(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ x_k(N-1) & \dots & & x_k(0) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_k(M-1) & \dots & & x_k(M-N) \end{bmatrix}$$

A expressão (39) caracteriza então um sistema de equações lineares sobredeterminado. Assim,

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{x}_k + \mathbf{X}_k \mathbf{q}_k \quad (40)$$

onde \mathbf{u}_k e \mathbf{q}_k são os vetores incógnitas do sistema. Como a minimização da energia do erro é obtida quando as amostras de \mathbf{u}_k são nulas para $0 \leq n \leq M - 1$, os coeficientes \mathbf{q}_k são determinados pela solução de

$$\mathbf{X}_k \mathbf{q}_k = -\mathbf{x}_k. \quad (41)$$

A solução de mínimos quadrados deste sistema é obtida conforme o procedimento descrito no Apêndice A.

Considerando a aplicação deste método para determinar os coeficientes do modelo ARMA da RIR1, obteve-se $\bar{E} = 0,7095$. A ordem do numerador e denominador adotada é igual a 500 e o número de iterações é fixado em 20 (inclusive nas simulações posteriores). Na Figura 6 é mostrada a resposta ao impulso $h_{\text{BU}}(n)$ do modelo ARMA estimado e na Figura 7, a comparação da magnitude e fase da resposta em frequência obtida com a da RIR original. Nessa figura H_1 e H_{BU} denotam o espectro de frequências da RIR1 e o da resposta $h_{\text{BU}}(n)$, respectivamente.

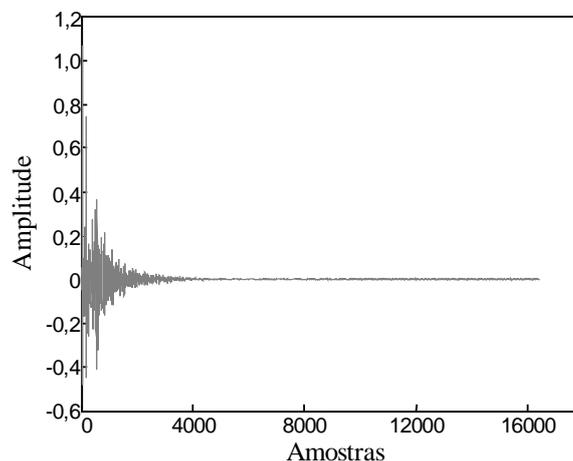


Figura 6 - Resposta ao impulso $h_{\text{BU}}(n)$ do modelo ARMA determinado pelo método LSBU.

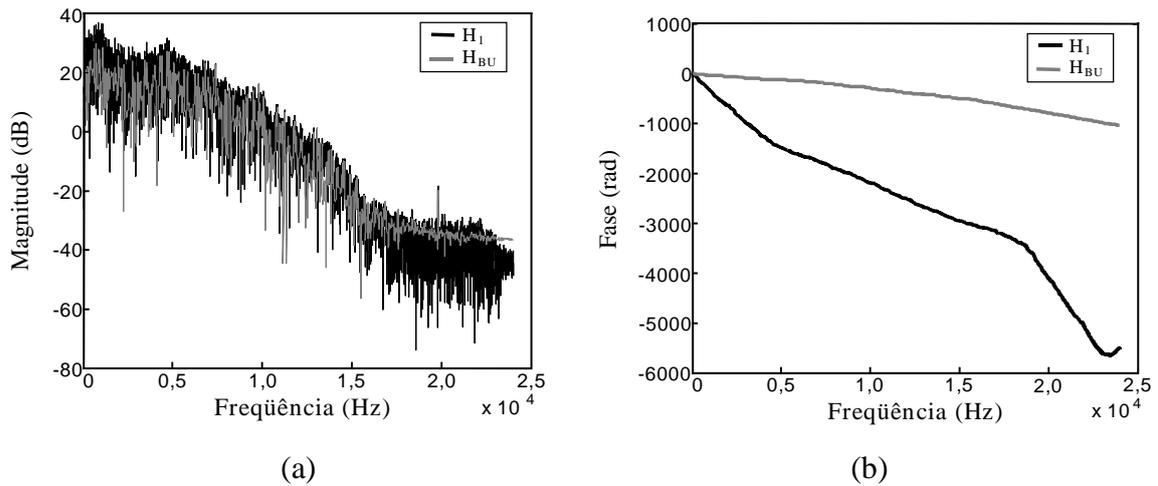


Figura 7 – Resposta em freqüência do modelo ARMA estimado pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_1 e H_{BU} . (b) Comparação da fase de H_1 e H_{BU} .

O elevado erro normalizado pode ser reduzido se adotado um modelo de ordem maior. Porém, tal solução onera sobremaneira a tarefa de estimação dos coeficientes de tal modelo.

2.3 FILTROS E FUNÇÕES DE KAUTZ

Um sinal pode ser representado de diferentes formas. Uma forma bastante utilizada é descrevê-lo como combinação linear de um conjunto de funções elementares. O exemplo mais conhecido deste tipo de representação é a série de Fourier, na qual um sinal periódico é representado como uma soma ponderada de componentes senoidais [36]. As funções de Kautz são funções elementares adequadas à representação de transitórios, como por exemplo, a resposta o impulso de um sistema dinâmico.

As funções de Kautz formam um conjunto de funções ortonormais do tipo exponencial ou senoidal amortecida. Como conseqüência, no domínio da transformada z , resultam em funções racionais ortogonais, podendo ser definidas a partir de um dado conjunto de pólos z_i . Assim, a correspondente base de funções ortonormais racionais $G_i(z)$ ou funções de Kautz, é da seguinte forma [28]:

$$G_i(z) = \frac{\sqrt{1 - z_i z_i^*}}{z^{-1} - z_i^*} \prod_{j=1}^i \frac{z^{-1} - z_j^*}{1 - z_j z^{-1}}, \quad i = 1, \dots, N \quad (42)$$

onde N denota o número de funções ou pólos. As funções de Kautz no domínio da seqüência $g_i(n)$ são obtidas pela transformada z inversa de (42). A propriedade de ortonormalidade entre tais funções pode ser facilmente verificada, no domínio da seqüência, através do seguinte produto interno:

$$\langle g_i, g_k \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n) \cdot g_k^*(n) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k. \end{cases} \quad (43)$$

O produto interno de um número finito de funções $g_i(n)$ resulta na representação matricial do delta de Kronecker [39]. Assim,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T & \mathbf{g}_2^T & \cdots & \mathbf{g}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

onde \mathbf{g}_i é um vetor linha composto pelas amostras da correspondente função $g_i(n)$ e o sobrescrito T denota a operação de transposição.

O filtro de Kautz $H(z)$ é o resultado da soma ponderada das funções $G_i(z)$ [28]. Então,

$$H(z) = \sum_{i=1}^N w_i G_i(z) \quad (45)$$

onde w_i são coeficientes de ponderação. Essa equação mostra que o filtro de Kautz é a generalização de um filtro FIR, em que os atrasos unitários são substituídos pelas funções $G_i(z)$.

A Figura 8 ilustra como o filtro de Kautz é estruturado. Nesta figura, $\delta(n)$ denota a função amostra unitária. Quando ela é aplicada à entrada do filtro, obtêm-se nos seus ramos as funções de Kautz $g_i(n)$ e o resultado da soma ponderada de tais funções originam a resposta ao impulso do filtro de Kautz $h(n)$. A parte transversal do filtro é composta por uma cascata de filtros passa-tudo de primeira ordem.

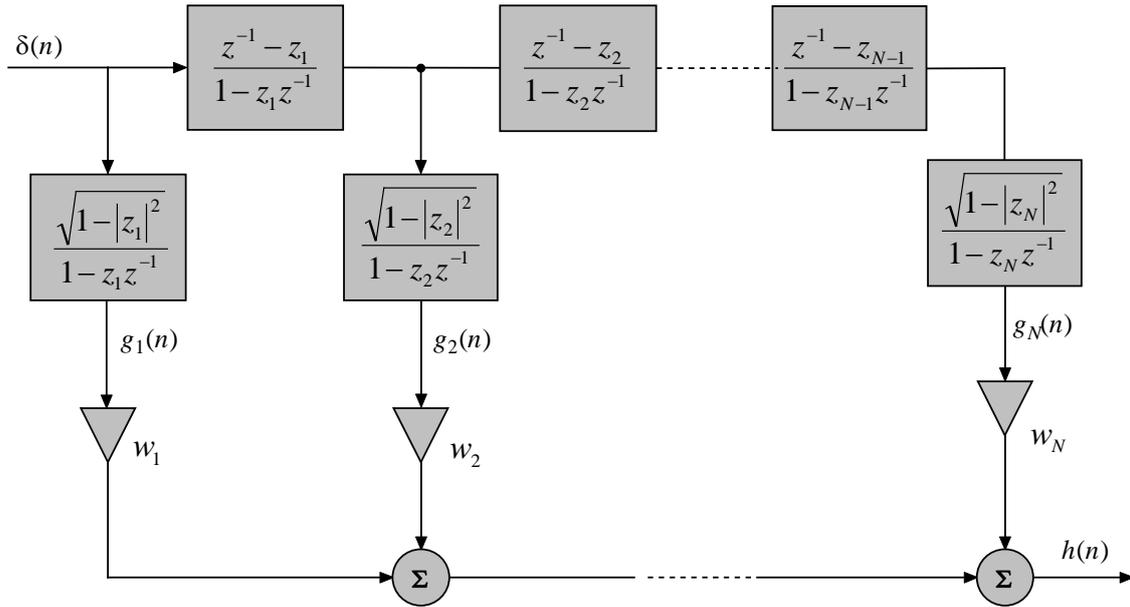


Figura 8 - Diagrama de blocos de um filtro de Kautz.

A expressão (42), definindo as funções de Kautz no domínio da transformada z , não impõe qualquer restrição aos pólos; ou seja, os mesmos podem ser reais ou complexos. Como consequência, os sinais internos ao filtro só serão reais no caso de pólos reais. Para possibilitar a obtenção de sinais reais com o uso de pólos complexos, Broome propõe o agrupamento dos pólos em pares conjugados a fim de formarem polinômios de segunda ordem [36]. As funções de Kautz definidas no domínio da transformada z passam a ser representadas por [38]

$$\Phi_m(z) = \frac{p_m(1 - z^{-1})}{1 + \gamma_1 z^{-1} + \rho_1 z^{-2}} \prod_{k=2}^m \frac{\rho_{k-1} + \gamma_{k-1} z^{-1} + z^{-2}}{1 + \gamma_k z^{-1} + \rho_k z^{-2}} \quad (46)$$

$$\Psi_m(z) = \frac{q_m(1 + z^{-1})}{1 + \gamma_1 z^{-1} + \rho_1 z^{-2}} \prod_{k=2}^m \frac{\rho_{k-1} + \gamma_{k-1} z^{-1} + z^{-2}}{1 + \gamma_k z^{-1} + \rho_k z^{-2}} \quad (47)$$

onde m denota o número de pólos complexos conjugados, $\Phi_m(z)$ e $\Psi_m(z)$ são as funções de Kautz associadas a um dado par de pólos complexos conjugados. Os coeficientes p_m e q_m são definidos por

$$p_m = \sqrt{\frac{(1 - \rho_m)(1 + \rho_m - \gamma_m)}{2}} \quad (48)$$

$$q_m = \sqrt{\frac{(1-\rho_m)(1+\rho_m+\gamma_m)}{2}} \quad (49)$$

com

$$\gamma_m = -2 \operatorname{Re}\{z_m\} \quad (50)$$

$$\rho_m = |z_m|^2. \quad (51)$$

Nas expressões (46) e (47), os polinômios $1-z^{-1}$ e $1+z^{-1}$ são necessários para ortonormalizar as funções de Kautz [28]. Neste caso, a equação que define o filtro de Kautz no domínio da seqüência toma a seguinte forma [38]:

$$h(n) = \sum_{i=1}^{N/2} [a_i \varphi_i(n) + b_i \psi_i(n)] \quad (52)$$

onde $\varphi(n)$ e $\psi(n)$ representam as transformadas z inversas de $\Phi_m(z)$ e $\Psi_m(z)$, respectivamente, e os coeficientes a_i e b_i são os coeficientes de ponderação, determinados pelos seguintes produtos interno:

$$a_i = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \varphi_i(n) \quad (53)$$

e

$$b_i = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \psi_i(n). \quad (54)$$

A estrutura do filtro de Kautz obtido a partir de pólos complexos conjugados é mostrada na Figura 9.

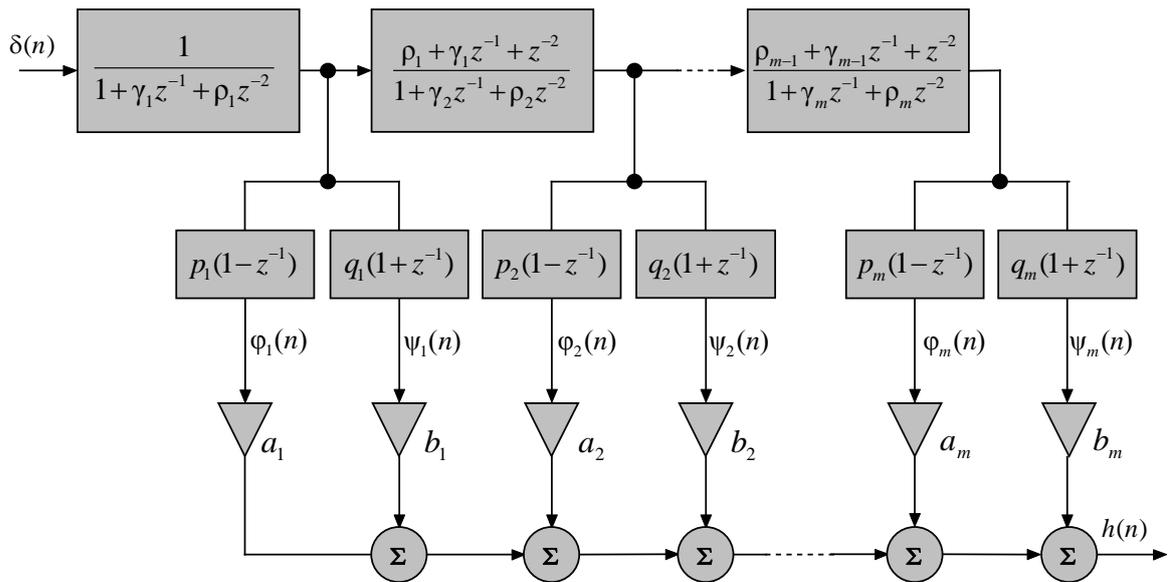


Figura 9 - Diagrama de blocos de um filtro de Kautz obtido a partir de pares de pólos complexos conjugados.

Para ilustrar a propriedade de ortonormalidade e a realização de um filtro de Kautz utilizando as estruturas apresentadas, considera-se o seguinte conjunto de pólos:

$$z_1 = 0,7 \quad z_2 = 0,8$$

$$z_3 = 0,5 + j0,7 \quad z_4 = 0,5 - j0,7$$

Os pólos reais z_1 e z_2 são utilizados em (42) e (45), resultando em um filtro semelhante ao apresentado na Figura 8, porém restrito a $N = 2$. Já os pólos complexos conjugados são utilizados em (46), (47) e (52), resultando em um filtro semelhante ao apresentado na, com $m = 1$. Para este último, é necessária a determinação dos parâmetros p_1 , q_1 , γ_1 e ρ_1 conforme apresentado a seguir:

$$\gamma_1 = -2 \operatorname{Re}\{z_3\} = -1 \quad \rho_1 = |z_3|^2 = 0,74$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{(1-\rho_1)(1+\rho_1-\gamma_1)}{2}} = 0,5968 \quad q_1 = \sqrt{\frac{(1-\rho_1)(1+\rho_1+\gamma_1)}{2}} = 0,3102$$

O diagrama de blocos deste filtro de Kautz, que é a cascata das estruturas das Figuras 8 e 9, é apresentado na Figura 10. Os sinais $g_1(n)$, $g_2(n)$, $\varphi_1(n)$ e $\psi_1(n)$ obtidos nos ramos do filtro, para a amostra unitária aplicada à entrada, são as funções de Kautz, as quais estão mostradas na Figura 11. A Figura 12 apresenta as curvas de magnitude da

resposta em frequência de tais funções. Observa-se então claramente, no caso das duas funções obtidas pelo par de pólos complexos conjugados, a ressonância típica de um sistema de segunda ordem.

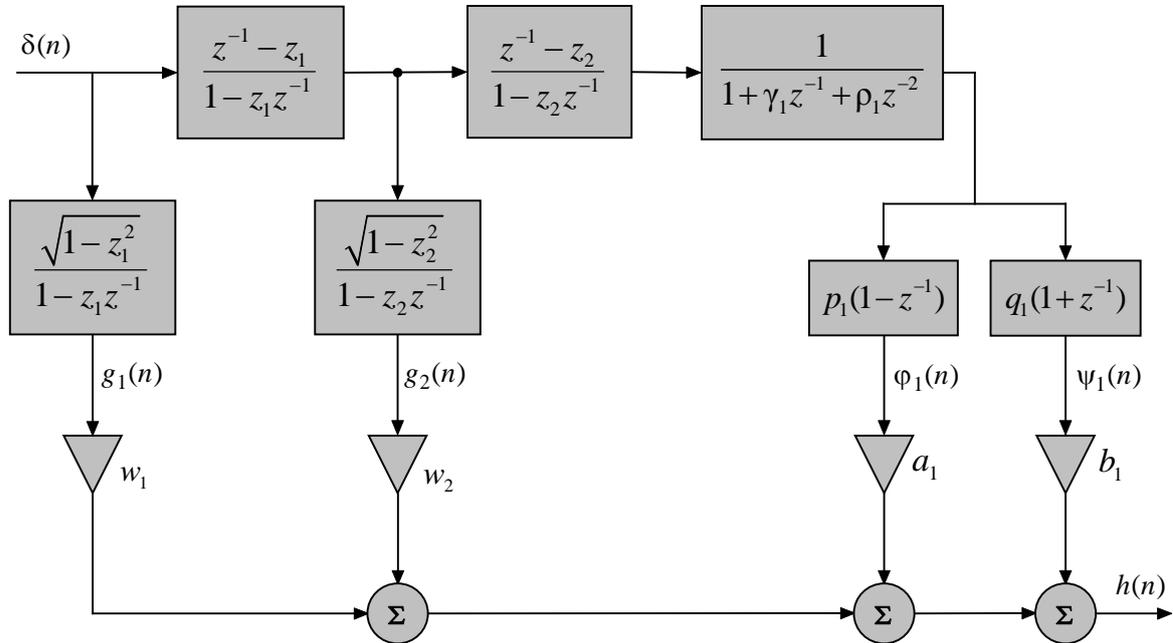


Figura 10 – Diagrama de blocos de um filtro de Kautz composto por dois pólos reais e dois pólos complexos conjugados.

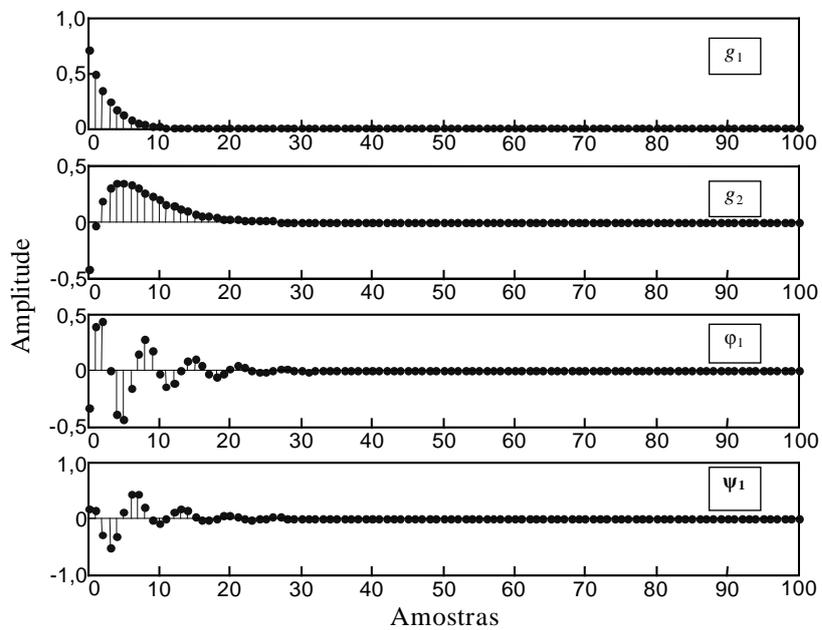


Figura 11 – Funções de Kautz obtidas a partir de dois pólos reais e dois pólos complexos conjugados.

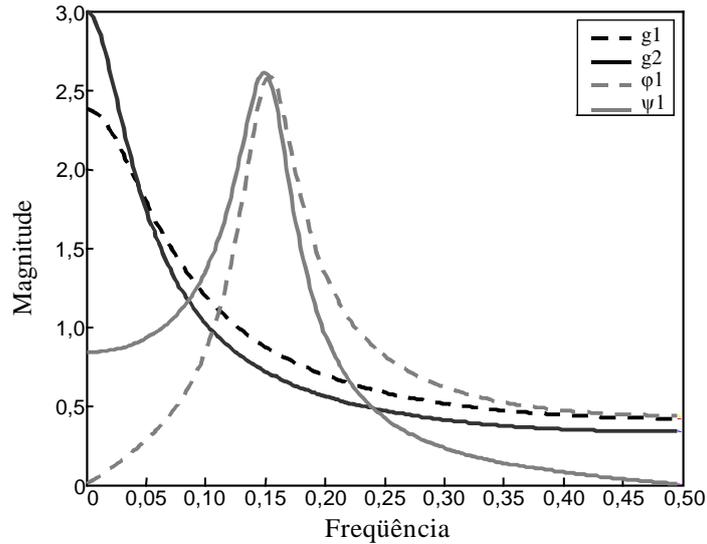


Figura 12 – Curvas de magnitude da resposta em frequência das funções de Kautz $g_1(n)$, $g_2(n)$, $\phi_1(n)$ e $\psi_1(n)$ obtidas a partir de dois pólos reais e dois pólos complexos conjugados.

O produto interno entre as funções $g_1(n)$, $g_2(n)$, $\phi_1(n)$ e $\psi_1(n)$, considerando suas 100 primeiras amostras, mostra a ortonormalidade desse conjunto de funções. O resultado numérico obtido é apresentado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T & \mathbf{g}_2^T & \phi_1^T & \psi_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00000000 & -0,00000000 & 0,00000000 & -0,00000000 \\ -0,00000000 & 1,00000000 & -0,00000000 & 0,00000000 \\ 0,00000000 & -0,00000000 & 0,99999999 & -0,00000000 \\ -0,00000000 & 0,00000000 & -0,00000000 & 0,99999999 \end{bmatrix}$$

Como as funções $g_i(n)$ formam um conjunto ortonormal (uma base ortogonal), qualquer sinal de energia finita e causal pode ser representado como combinação linear dessas funções [28]. Assim, a completa representação de um sinal $h(n)$ é

$$h(n) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i g_i(n) \tag{55}$$

ou no domínio da transformada z

$$H(z) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i G_i(z) \tag{56}$$

onde os coeficientes de ponderação w_i representam os coeficientes de Fourier da expansão da função $h(n)$ na base das funções $g_i(n)$, determinados como

$$w_i = \langle h, g_i \rangle. \quad (57)$$

A correspondente energia de $h(n)$ é

$$E_h = \|h\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2 = \langle h, h \rangle. \quad (58)$$

Como em termos práticos deve-se truncar a representação do sinal para que seja possível sua implementação por um filtro de Kautz, (55) e (56) se reduzem a

$$\hat{H}(z) = \sum_{i=1}^N w_i G_i(z) \quad (59)$$

$$\hat{h}(n) = \sum_{i=1}^N w_i g_i(n). \quad (60)$$

A energia correspondente é então

$$E_{\hat{h}} = \|\hat{h}\|^2 = \sum_{i=1}^N |w_i|^2 = \langle \hat{h}, \hat{h} \rangle. \quad (61)$$

e a energia do erro da aproximação é

$$E_{erro} = \sum_{i=N+1}^{\infty} |w_i|^2 = E_h - E_{\hat{h}}. \quad (62)$$

Os coeficientes de ponderação do filtro de Kautz podem também ser obtidos a partir do resultado da convolução do sinal $h(n)$ que se deseja aproximar (porém revertido no domínio da seqüência) e as funções de Kautz $g_i(n)$. Assim,

$$c_i(n) = g_i(n) * h(-n) = \sum_{k=0}^{\infty} g_i(k) h(n+k). \quad (63)$$

Fazendo $n = 0$ em (63), resulta no produto interno entre os sinais $g_i(n)$ e $h(n)$

$$c_i(0) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) g_i(k) = \langle h, g_i \rangle. \quad (64)$$

Outra importante conseqüência da aplicação do sinal $h(-n)$ na entrada do filtro de Kautz diz respeito a divisão da energia contida em $h(-n)$ nas parcelas $E_{\hat{h}}$ e E_{erro} , induzida pela cascata de filtros passa-tudo que definem sua parte transversal [28]. Young e Huggins já ressaltaram tal característica em funções passa-tudo definidas no domínio s de Laplace [40]. Considerando um operador passa-tudo $A[\cdot]$, definido pela parte transversal de um filtro de Kautz, e um sinal $h(n)$ de energia finita, o sinal $a(n)$ é obtido por

$$a(n) = A[h(n)]. \quad (65)$$

Como não há perdas em um filtro passa-tudo, a energia de $h(n)$ é preservada em tal transformação. Assim,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^2(n). \quad (66)$$

Contudo, o operador passa-tudo introduz uma interessante partição da energia quando se considera o sinal $h(-n)$. Para $h(-n)$, definido entre $n = -M, \dots, 0$, tem-se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) = \sum_{n=-M}^0 h^2(n) = \sum_{n=-M}^0 a^2(n) + \sum_{n=1}^{\infty} a^2(n) \quad (67)$$

onde o primeiro somatório expressa a energia do erro da aproximação de $h(n)$ e o segundo, a energia da aproximação [28]. Uma alternativa para a otimização da localização dos pólos do filtro de Kautz é minimizar a energia do sinal $a(n)$ no intervalo $n = -M, \dots, 0$ com respeito à localização de tais pólos.

Para ilustrar a utilização de um filtro de Kautz na aproximação da resposta ao impulso de um sistema, considera-se o caso da RIR1. Os pólos do filtro são alocados com magnitude constante, porém com ângulos linearmente espaçados ao longo do plano z . A Figura 13 apresenta os 500 pólos com módulo 0,97 (somente os 250 pólos do semi-plano z superior são mostrados). A síntese da RIR1 obtida pela utilização desses pólos é mostrada na Figura 14. A Figura 15 compara a magnitude e a fase da resposta em freqüência de ambas respostas. O erro normalizado obtido é $\bar{E} = 0,8446$. Nessas figuras, H_k denota o espectro da resposta ao impulso do filtro de Kautz.

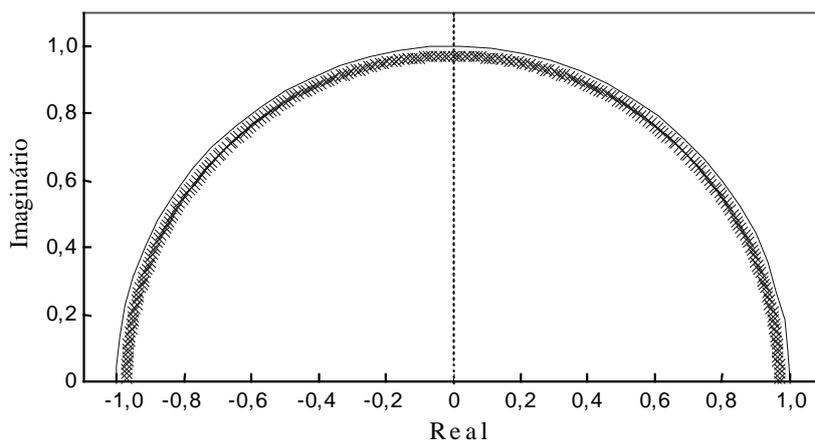


Figura 13 – Pólos linearmente espaçados no semi-plano z superior.

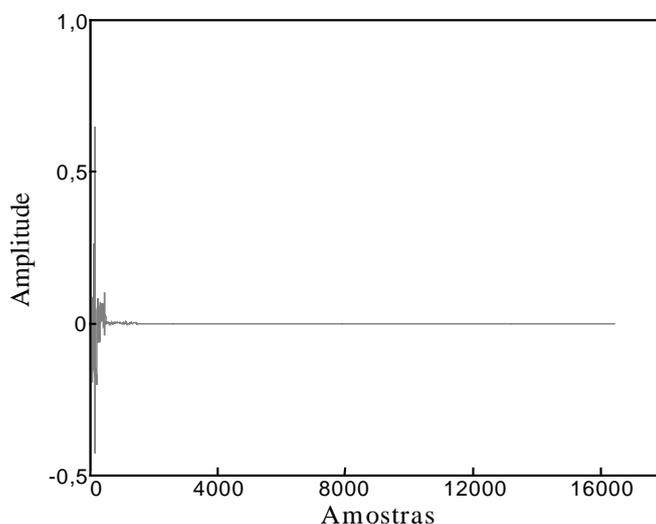


Figura 14 – Resposta ao impulso do filtro de Kautz considerando pólos linearmente espaçados.

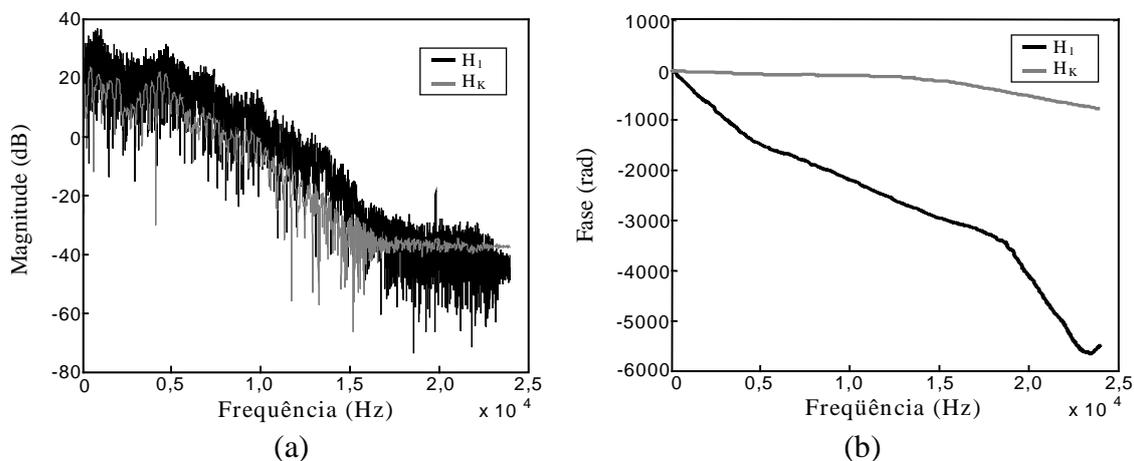


Figura 15 – Resposta em frequência do filtro de Kautz com pólos linearmente espaçados.

(a) Comparação da magnitude de H_k e H_1 . (b) Comparação da fase da de H_k e H_1 .

Apesar de um erro normalizado um tanto grande, a presença de pólos ao longo de toda a gama de frequências possibilita a captura de algumas ressonâncias da RIR1. Porém, não com um alto fator de qualidade necessário para que o longo decaimento presente na RIR original fosse modelado na resposta do filtro de Kautz.

O exemplo considerado de utilização do filtro de Kautz indica que o seu projeto envolve a determinação ou escolha de um conjunto de pólos e o cálculo dos respectivos coeficientes de ponderação. Diferente de outros métodos de modelagem, como, por exemplo, os filtros AR, não existe para o filtro de Kautz uma forma analítica para a determinação do conjunto de pólos [28]. A escolha dos pólos do filtro pressupõe o conhecimento a priori dos pólos ou frequências de ressonância do sistema a ser modelado, ou a obtenção dessas informações por meio indireto, utilizando-se alguma estratégia de modelagem AR, por exemplo [28]. Para o caso de pólos múltiplos, métodos de otimização podem ser utilizados tanto para a escolha do pólo como também para determinação da ordem do filtro [28], [41]. Uma relação entre os parâmetros ótimos do filtro e a superfície de energia do erro em relação aos pólos é discutida na literatura [38]. Porém, essas condições são válidas somente para os casos em que se utilizam pólos reais múltiplos. Friedman [33] apresenta um método de otimização não linear, baseado na descida mais íngreme do gradiente, para a determinação dos coeficientes das seções passa-tudo de segunda ordem de um filtro de Kautz, que melhor aproximam uma dada função FIR. A utilização dessa técnica, neste trabalho, para a aproximação de RIRs, originou problemas de divergência. Com o intuito de contornar esse problema, o algoritmo foi implementado dentro de um esquema de otimização linear. Nessa implementação o algoritmo passou a divergir com menos frequência, porém a grande complexidade computacional ainda inviabiliza sua utilização.

Na procura por um método eficiente para a determinação e otimização dos pólos do filtro de Kautz, Paatero [29] deparou-se com o problema de aproximação de filtros FIR por estruturas IIR. Isso porque a condição necessária para que se obtenham os pólos ótimos em um filtro de Kautz, através da minimização da energia do sinal na saída da cascata de filtros passa-tudo dentro de um intervalo definido, é a mesma utilizada no método de Brandenstein e Unbehauen para determinação dos coeficientes do denominador de um modelo ARMA. Causalizando a seqüência $h(-n)$ por meio de um atraso, ou seja, fazendo

$h(M-n)$, a distribuição da energia na saída da cascata de filtros passa-tudo de um filtro de Kautz definida em (67) pode ser reescrita como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a^2(n) = \sum_{n=0}^M a^2(n) + \sum_{n=M+1}^{\infty} a^2(n) \quad (68)$$

onde a primeira parcela, a menos de uma amostra, é a mesma energia de erro minimizada no método LSBU. O algoritmo denominado de método BU em [29], pode então ser resumido como segue:

1. Aplique o filtro $1/Q_{k-1}(z)$, para $k = 1, 2, \dots$, à seqüência $h(M-n)$. A seqüência filtrada define os elementos da matriz \mathbf{X}_k e do vetor \mathbf{x}_k do sistema de equações lineares dado por (41);
2. Resolva esse sistema utilizando alguma técnica que forneça solução de mínimos quadrados, conforme a alternativa apresentada no Apêndice A;
3. Após um certo número de iterações, escolha o polinômio $Q_k(z)$ que resulte no menor erro quadrático médio. Os pólos do filtro de Kautz são as raízes desse polinômio.

Os resultados obtidos pela utilização do filtro de Kautz com os pólos determinados pelo método BU são praticamente idênticos aos obtidos com o modelo ARMA resultante do método LSBU já que ambos fornecem uma solução de mínimos quadrados. A pequena diferença encontrada entre as duas abordagens ocorre porque o filtro de Kautz possui $N-1$ zeros [37], enquanto o modelo ARMA resultante do método LSBU possui N zeros. Sendo assim, a energia do erro de aproximação obtido pela implementação do modelo ARMA estimado pelo método LSBU é sempre ligeiramente menor. Os resultados a seguir atestam tal fato. É utilizado o método BU para determinação de 500 pólos de um filtro de Kautz para aproximar a RIR1. A Figura 16 apresenta a resposta ao impulso do filtro de Kautz $h_k(n)$ e a Figura 17 confronta a magnitude e fase da resposta em frequência de $h_k(n)$ e $h_1(n)$. O erro quadrático médio normalizado obtido é $\bar{E} = 0,7096$.

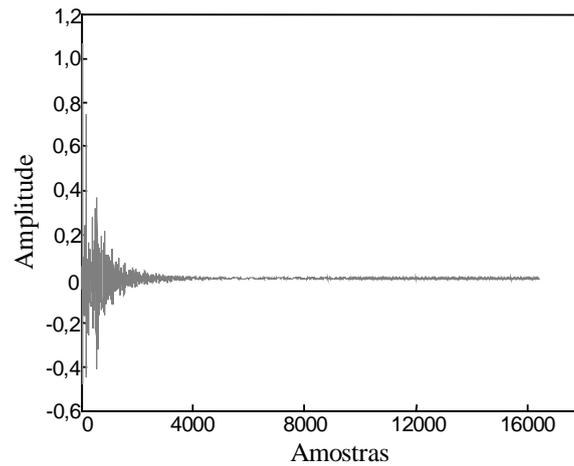


Figura 16 – Resposta ao impulso do filtro de Kautz com pólos obtidos pelo método BU.

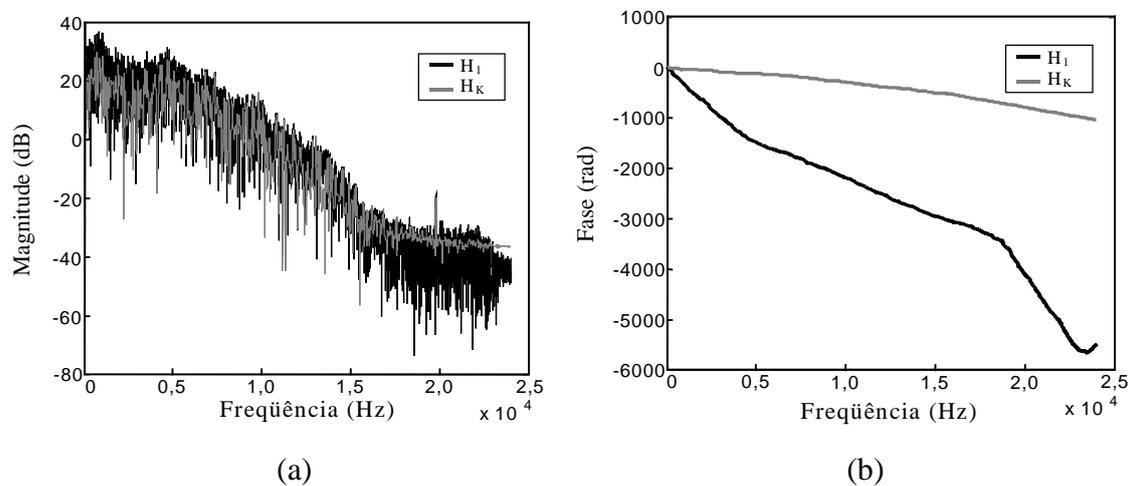


Figura 17 – Filtro de Kautz com pólos obtidos pelo método BU. (a) Comparação da magnitude de H_k e H_1 . (b) Comparação da fase de H_k e H_1 .

Uma propriedade interessante inerente à expansão ortonormal proporcionada pelo filtro de Kautz é que seus coeficientes de ponderação w_i quantificam a contribuição de cada função para compor a aproximação. A avaliação da energia desses coeficientes possibilita identificar as funções que possam ser desconsideradas e, conseqüentemente, os pólos que as definem. A Figura 18 apresenta a energia de cada coeficiente de ponderação do filtro de Kautz do exemplo considerado.

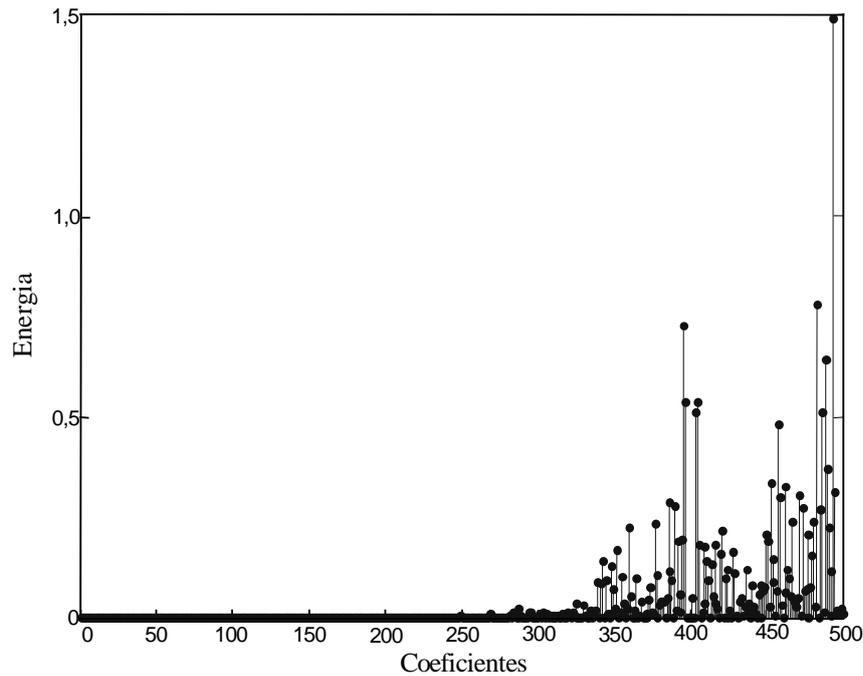


Figura 18 – Energia dos coeficientes do filtro de Kautz com pólos obtidos pelo método BU.

Definindo um limiar igual a 0,001, pode-se desprezar 289 pólos complexos conjugados e 2 pólos reais, restando então 209 pólos. O erro normalizado da implementação do filtro de Kautz com esses 209 pólos é $\bar{E} = 0,7098$. A Figura 19 mostra a resposta ao impulso obtida e a Figura 20 confronta a magnitude e fase da resposta em frequência.

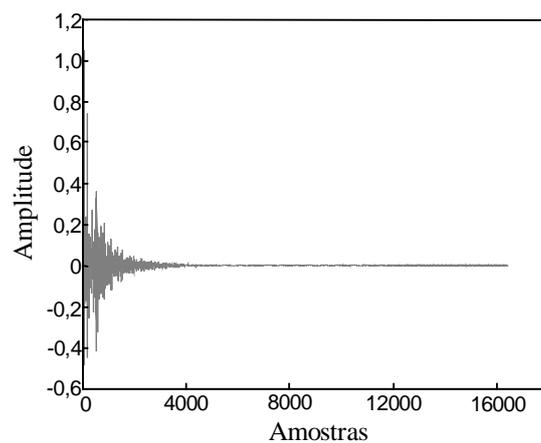


Figura 19 – Resposta ao impulso do filtro de Kautz considerando somente os pólos mais representativos.

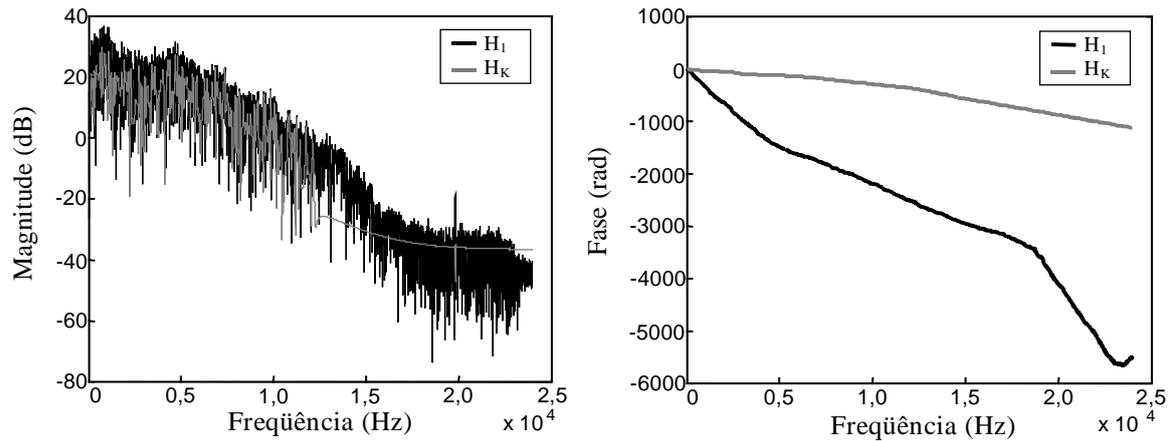


Figura 20 – Filtro de Kautz considerando somente os pólos mais representativos. (a) Comparação da magnitude de H_k e H_1 . (b) Comparação da fase de H_k e H_1 .

Conforme se poderia esperar, pela menor magnitude na resposta em frequência da RIR truncada nas altas frequências, os pólos localizados nessa região são desprezados.

2.4 CONCLUSÕES

Este capítulo discutiu o método LSBU e o filtro de Kautz. Ambos foram utilizados para a modelagem de uma única função de transferência de um ambiente.

Sob o ponto de vista da magnitude do erro quadrático médio normalizado, os resultados obtidos com a utilização destas técnicas para aproximação de respostas ao impulso longas não são animadores. Esses resultados são resumidos na Tabela 1. A utilização de uma ordem pequena comparada ao comprimento da RIR para evitar que os algoritmos manipulem matrizes de dimensões elevadas resulta em um erro normalizado grande. Uma ordem igual a 500 (utilizada no modelo ARMA) é ainda pequena para aproximar adequadamente o número grande de ressonâncias presentes na magnitude da resposta em frequência de uma sala. Ordens mais elevadas seriam necessárias para uma adequada estimativa da RIR1.

Tabela 1 – Resumo dos resultados obtidos com a modelagem ARMA

Filtro	Método de estimação dos parâmetros	Número de zeros	Número de pólos	\bar{E}
ARMA	LSBU	500	500	0,7095
Kautz	Pólos linearmente espaçados	-	500	0,8446
Kautz	BU	-	500	0,7096
Kautz	Pólos BU mais representativos	-	209	0,7098

Em nosso conhecimento, até então, o método LSBU, não tinha sido utilizado na aproximação de RTFs. Porém o sucesso aqui obtido não nos surpreende. Em [27], os autores já ressaltaram os bons resultados do algoritmo na aproximação de respostas ao impulso FIR de fase não-mínima e de comprimento elevado. Além disso, bons resultados também foram obtidos na sua utilização indireta, através do método BU, para estimar os pólos do filtro de Kautz. Com respeito a este último, a tentativa de determinar seus coeficientes por meio de otimização linear não obteve êxito.

Conforme mencionado, o filtro de Kautz é uma alternativa interessante sob o ponto de vista de implementação, pois possibilita desprezar pólos e coeficientes de ponderação que não contribuem de forma significativa para representar a RIR aproximada, resultando em um filtro de ordem reduzida, fornecendo praticamente o mesmo erro quadrático médio normalizado obtido com a utilização de um modelo ARMA estimado pelo método BU. Dependendo da astúcia do projetista, até mesmo uma sintonia manual dos pólos pode ser utilizada.

SÍNTESE POR MEIO DE SISTEMAS MULTITAXA E *WAVELETS*

3.1 INTRODUÇÃO

A utilização de técnicas baseadas em sistemas multitaxa e *wavelets* no problema de modelagem de RIRs é recente. Essas técnicas têm como principal potencialidade, o fato de decompor a RIR em segmentos que são facilmente tratados pelos algoritmos de estimação de coeficientes dos modelos AR e ARMA. Como consequência, obtém-se RIRs sintetizadas muito mais próximas às RIRs originais. O custo envolvido nesse processo é a necessidade da utilização de etapas extras de decomposição e reconstrução.

Em [19], é feito uso de banco de filtros para efetuar a decomposição de uma RIR. As seqüências resultantes dessa filtragem são aproximadas por modelos ARMA estimados por um procedimento similar ao utilizado em [14]. Os resultados apresentaram modelos mais precisos, atentando para a possibilidade de escolha de uma ordem distinta para os modelos em cada sub-banda nesse tipo de implementação. Zoelzer em uma série de trabalhos [20], [21], [22] também fez uso das técnicas envolvendo sistemas multitaxa. Em [42], apesar do objetivo não ser a modelagem de um dado ambiente, o autor propôs a utilização de bancos de filtros para se obter reverberação artificial em diversas bandas de frequência como alternativa à sua obtenção por meio da cascata de filtros recursivos (pente e passa-tudo), originalmente propostos por Schroeder [43]. O decaimento distinto em cada sub-banda é obtido pelo ajuste dos coeficientes de um filtro *allpole*. Zoelzer generalizou a utilização do banco de filtros às *wavelets* em [21] e [22]. Nestes trabalhos, os coeficientes da transformada *wavelet* discreta (DWT) foram aproximados por filtros pente cujos parâmetros foram determinados pelo método de Prony [17]. Além disso, em [20] o autor também propôs um algoritmo rápido para implementar a operação de convolução, facilitando, assim, a obtenção do sinal reverberado em cada sub-banda.

Recentemente, Lopacz [44] utilizou a DWT para a simulação de RIRs dentro do contexto de auralização de ambientes. Os parâmetros acústicos do ambiente dependentes da frequência foram utilizados para ponderar os coeficientes da DWT. Esses coeficientes foram obtidos a partir da análise de fenômenos distintos a que uma onda sonora é submetida quando se propaga em um ambiente fechado (tais como reflexão e difração).

Uma técnica de implementação de filtros digitais bastante conhecida no contexto de sistemas multitaxa chamada decomposição polifásica também vem sendo utilizada na decomposição de RIRs [19], [25]. Apesar de proposta conjugada ao filtro de Kautz, sua utilização não é restrita a esse tipo de filtro.

Neste capítulo apresenta-se a utilização da decomposição polifásica e da transformada *wavelet* para a decomposição de RIRs. A abordagem baseada em bancos de filtros foi desconsiderada por já estar contemplada no escopo das *wavelets*. Considera-se a modelagem da RIR apresentada anteriormente na Figura 3; porém, diferentemente do que foi apresentado no Capítulo 2, além das suas 31652 amostras, são adicionadas algumas amostras nulas para que seu comprimento se torne uma potência de 2, resultando em 32768 amostras. Essa resposta será referida no texto como RIR2.

Em adição a avaliação dos resultados pelo erro quadrático médio normalizado de aproximação, dado pela expressão (10), a audição informal também é utilizada para qualificar as respostas ao impulso obtidas com as técnicas utilizadas.

3.2 DECOMPOSIÇÃO POLIFÁSICA

A decomposição polifásica de uma seqüência $h(n)$ é obtida pela sua representação como a superposição de M subseqüências $e_k(n)$ chamadas componentes polifásicos, determinadas como [36]

$$e_k(n) = h(nM + k), \quad 0 \leq k \leq M - 1. \quad (69)$$

Estes componentes são as versões dizimadas e adiantadas de $h(n)$. A tarefa de reconstrução, ou seja, a obtenção da seqüência $h(n)$ a partir dos seus componentes polifásicos $e_k(n)$ é obtida por [36]

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k(n - k) \quad (70)$$

onde

$$h_k(n) = \begin{cases} e_k(n/M), & n/M \text{ inteiro} \\ 0. & \end{cases} \quad (71)$$

A representação gráfica dessa decomposição baseada em diagrama de blocos é mostrada na Figura 21. Os elementos de avanço z^i , $i = 1, 2, \dots, M - 1$, presentes na entrada da estrutura podem ser cascateados dando origem ao diagrama da Figura 22, em que somente avanços unitários são utilizados.

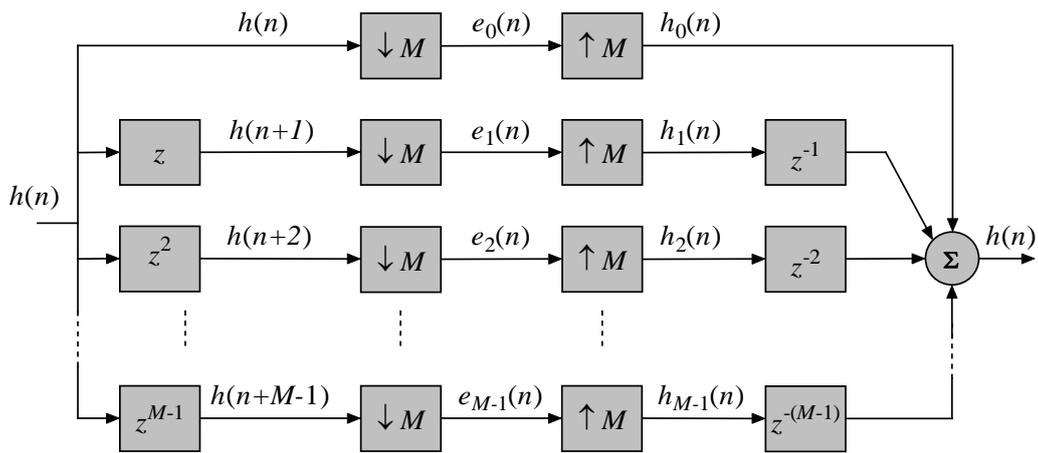


Figura 21 – Diagrama de blocos da decomposição e reconstrução polifásica de uma seqüência $h(n)$.

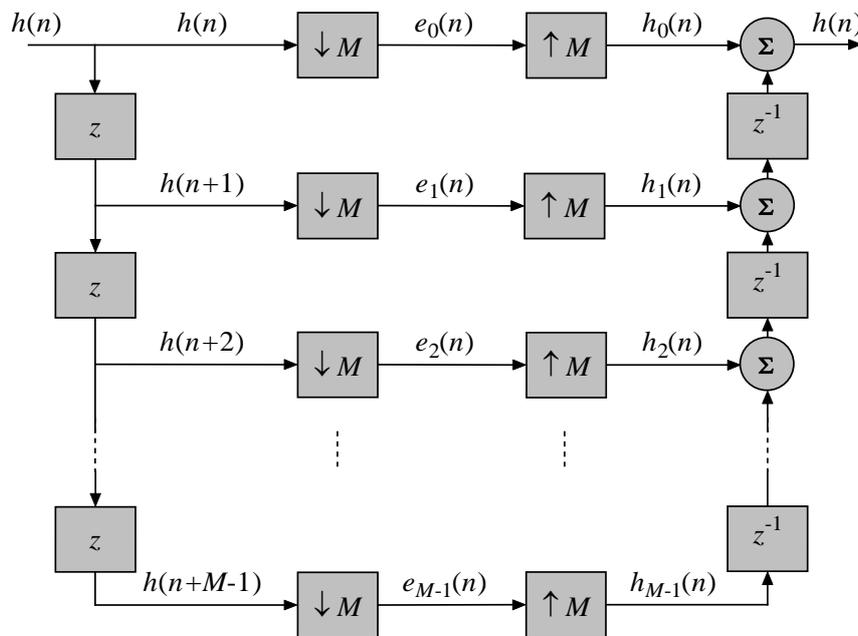


Figura 22 – Diagrama de blocos da decomposição e reconstrução polifásica de uma seqüência $h(n)$ utilizando elementos de avanço unitários cascateados.

No domínio da transformada z , a equação que descreve a reconstrução da seqüência $h(n)$ a partir dos seus componentes polifásicos pode ser escrita como [36]

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k} \quad (72)$$

onde $H(z)$ e $E_k(z)$ são, respectivamente, a transformada z das seqüências $h(n)$ e $e_k(n)$. Essa equação representa uma alternativa de realização de um filtro FIR com resposta ao impulso $h(n)$ a partir dos seus componentes polifásicos $e_k(n)$, mostrada na Figura 23. Nesta figura, $x(n)$ representa o sinal de entrada do filtro e $y(n)$, o sinal de saída.

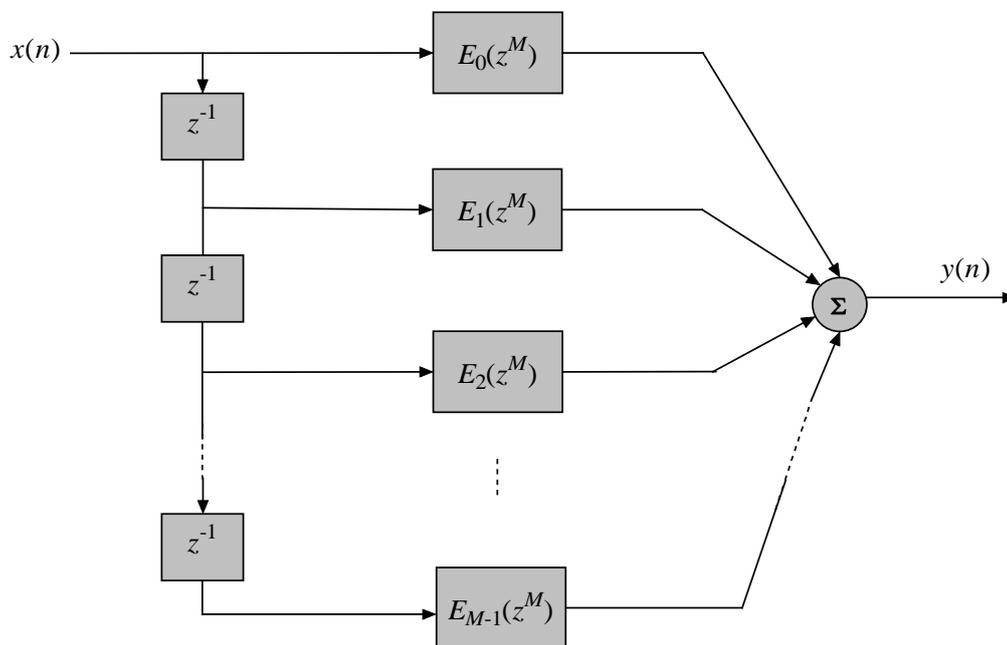


Figura 23 – Estrutura de realização de um filtro a partir de seus componentes polifásicos.

Este tipo de decomposição já foi utilizada em [19] e [25] para possibilitar a síntese de RIRs de longa duração utilizando o filtro de Kautz. Cada componente polifásico $e_k(n)$ é aproximado por um distinto filtro de Kautz, resultando em um componente aproximado $\hat{e}_k(n)$. A implementação completa do filtro é idêntica a estrutura de realização da Figura 23, com exceção que são utilizados os componentes polifásicos $\hat{e}_k(n)$. Apesar de essa estratégia ter sido proposta associada ao filtro de Kautz, qualquer tipo de filtro e/ou modelo (AR ou ARMA) pode ser utilizado. Nas figuras a seguir, são apresentados os resultados obtidos da aproximação da RIR2, através de um modelo ARMA estimado pelo

método LSBU. Ela é decomposta em 64 componentes polifásicos, cada qual com comprimento de 512 amostras. O modelo ARMA obtido pelo método LSBU utiliza 200 pólos e 200 zeros para aproximar cada componente polifásico, resultando em um erro quadrático médio normalizado de $2,6 \times 10^{-3}$. A resposta ao impulso do filtro é ilustrada na Figura 24. Na Figura 25, são mostrados a magnitude e a fase da resposta em frequência e na Figura 26, o sinal de erro. Nessas figuras e nas subseqüentes, H_p denota o espectro de frequência da resposta ao impulso obtida pela reconstrução polifásica e H_2 , o espectro da RIR2.

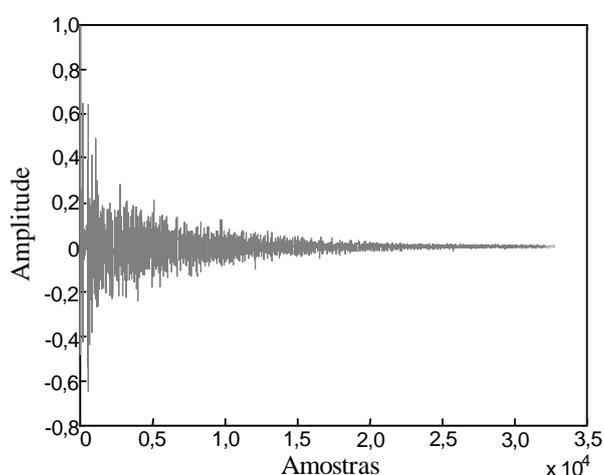


Figura 24 – Resposta ao impulso resultante da reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU.

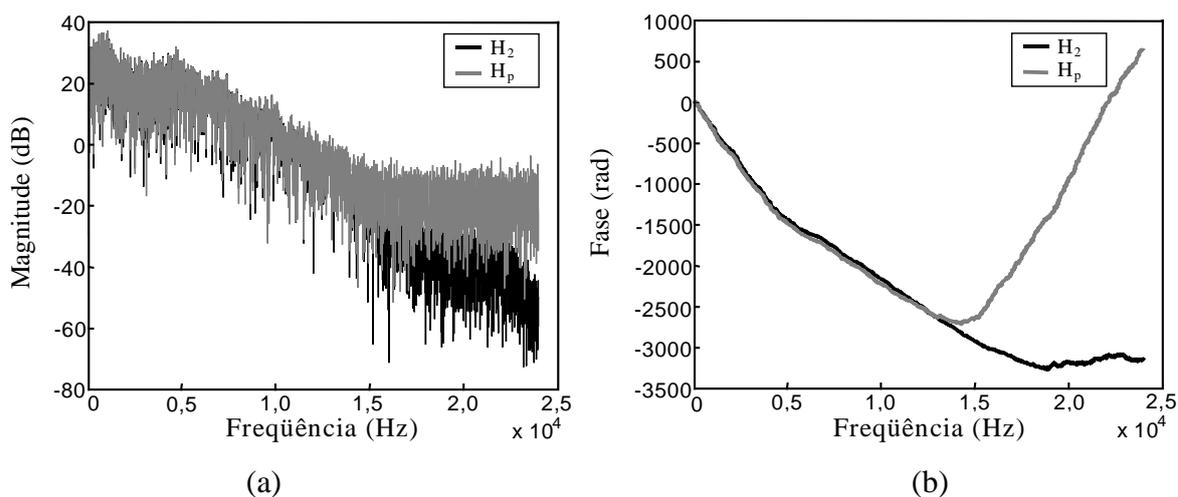


Figura 25 – Reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_p e H_2 . (b) Comparação da fase de H_p e H_2 .

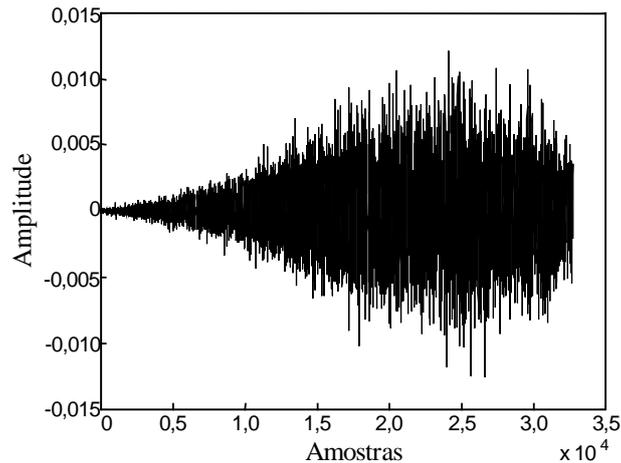


Figura 26 – Sinal de erro obtido com a reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU.

Apesar do pequeno erro normalizado obtido decorrente da utilização dos modelos ARMA de ordem 200, a necessidade de uma síntese mais próxima a RIR original é indicada pela avaliação subjetiva da resposta ao impulso sintetizada. Isso pode também ser constatado na amplitude crescente do sinal de erro mostrado na Figura 26. Como a ordem dos filtros é razoavelmente grande, comparada ao comprimento das seqüências, pode-se decompor a RIR em um número maior de componentes polifásicos para se obter uma redução do erro quadrático médio normalizado. A Figura 27 apresenta a magnitude e a fase da resposta em freqüência da síntese da mesma RIR a partir de 128 componentes polifásicos, resultando em seqüências com 256 amostras. Ordem igual a 200 foi utilizada para cada modelo ARMA. Nesse caso, o erro quadrático médio normalizado é reduzido para $2,59 \times 10^{-9}$. O sinal de erro é apresentado na Figura 28. Aliado ao pequeno erro quadrático médio, a avaliação subjetiva da resposta ao impulso sintetizada obtida agora atesta a sua grande semelhança com a RIR original.

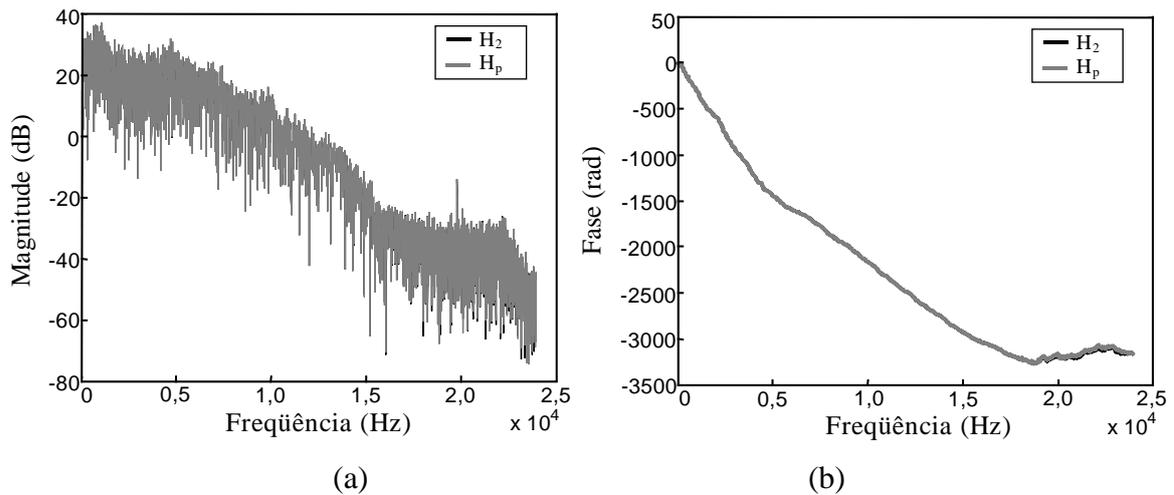


Figura 27 – Reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 128 modelos ARMA determinados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_p e H_2 . (b) Comparação da fase de H_p e H_2 .

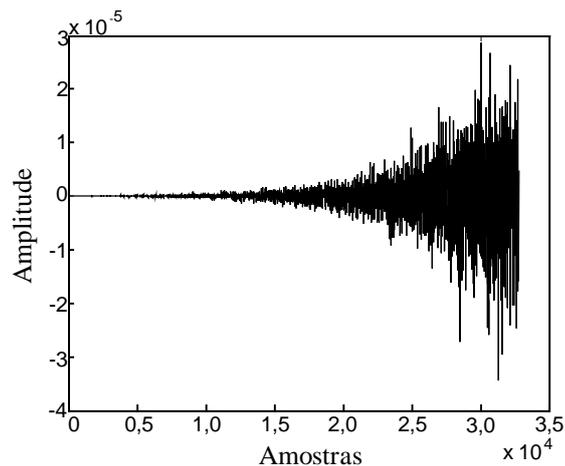


Figura 28 – Sinal de erro obtido com a reconstrução polifásica aplicada à resposta ao impulso de 128 modelos ARMA determinados pelo método LSBU.

3.3 DECOMPOSIÇÃO WAVELET

A utilização da DWT em [22] parte do ponto de vista de filtragem, ou seja, da sua implementação por meio de um banco de filtros e a inerente decomposição do sinal em sub-bandas com fator de qualidade constante. Neste trabalho ela é apresentada sob a ótica da aproximação de funções.

A aproximação de uma função $h(t)$ através de *wavelets* pode ser obtida como [45]

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{J_0,k} \varphi_{J_0,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=J_0}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (73)$$

onde $d_{j,k}$ são os coeficientes da decomposição ou a transformada *wavelet* discreta (DWT) de $h(t)$, $\psi_{j,k}(t)$ são as funções *wavelet*, $c_{J_0,k}$ é o coeficiente que pondera a função de escala $\varphi(t)$ na escala J_0 , j denota a escala e k , o deslocamento. Em (73), $h(t)$ é aproximada por uma soma de versões escaladas e deslocadas da mesma função $\psi(t)$, adicionada a uma função de escala $\varphi(t)$. Esta última é necessária sempre que se considera a aproximação por um número finito de *wavelets* [45].

As funções de escala são definidas como [45]

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k). \quad (74)$$

Elas podem ser expressas em termos de uma soma ponderada de versões deslocadas de $\varphi(2t)$ [45]

$$\varphi(t) = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (75)$$

onde $h_0(n)$ é uma seqüência de números reais ou complexos chamados coeficientes da função de escala [45].

As funções *wavelet* são definidas a partir das funções de escala como

$$\psi(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (76)$$

Os coeficientes $h_1(n)$ estão relacionados aos coeficientes da função de escala por meio da seguinte expressão [45]:

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(1 - n). \quad (77)$$

As funções *wavelet* geradas por (76) resultam em uma família de funções da forma [44]

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \quad (78)$$

Os coeficientes da decomposição $c_{j,k}$ e $d_{j,k}$ podem ser obtidos recursivamente como [44]

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)c_{j+1}(m) \quad (79)$$

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)c_{j+1}(m). \quad (80)$$

Estas equações indicam que os coeficientes da decomposição na escala j podem ser obtidos pela dizimação de um fator de 2 da convolução dos coeficientes na escala $j+1$ com os coeficientes $h_0(-n)$ e $h_1(-n)$. A Figura 29 apresenta tal esquema de filtragem e dizimação. Esse tipo de análise é conhecido como multirresolução [45].

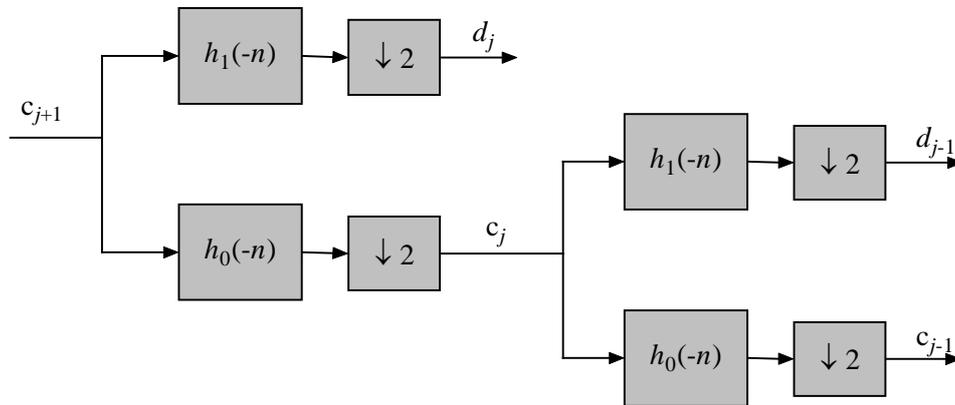


Figura 29 – Análise multirresolução através de banco de filtros.

As amostras das seqüências $h_0(-n)$ e $h_1(-n)$ são os coeficientes de um filtro FIR, sendo que, o primeiro define um filtro passa-baixas e o segundo um passa-altas [45]. Então, sob o ponto de vista de filtragem, o primeiro estágio de decomposição divide o espectro de freqüências de c_{j+1} em bandas passa altas e passa baixas, resultando nos coeficientes *wavelet* e de escala, respectivamente, no nível j . O segundo estágio divide a banda passa baixas em novas bandas passa baixas e passa altas. O resultado são filtros com largura de banda espaçadas logaritmicamente e fator de qualidade (Q) constante, conforme ilustrado na Figura 30, em que f_a denota freqüência de amostragem. Essa decomposição se estende até a escala mais grosseira $j = J_0$, na qual mais nenhum detalhe relevante do sinal analisado é obtido [45]. O nível de resolução do primeiro estágio de decomposição é definido pela amostragem do sinal analisado, já que esse sinal é aplicado à entrada do primeiro estágio. Caso ele tenha sido limitado em banda e amostrado respeitando o critério

de Nyquist [36], as amostras de $h(n)$ representam praticamente todos os seus detalhes [45].

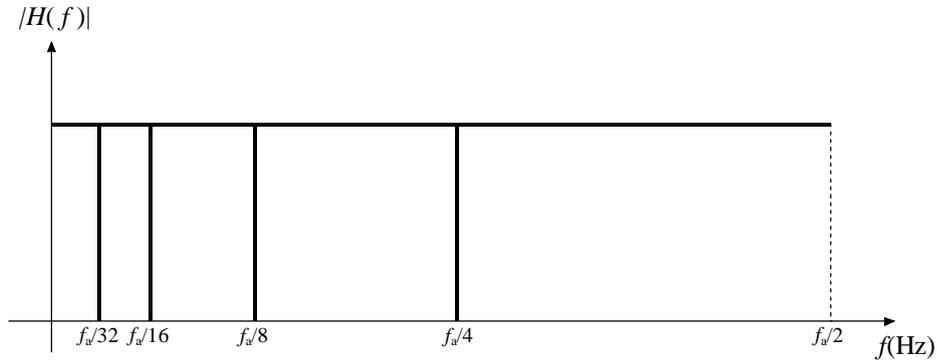


Figura 30 – Magnitude dos filtros da análise multirresolução.

A reconstrução dos coeficientes do sinal em uma escala de maior resolução pode ser obtida pela combinação da função de escala com o coeficiente *wavelet* em uma resolução mais baixa [45]. Assim,

$$c_{j+1}(k) = \sum_m c_j(m)h_0(k-2m) + \sum_m d_j(m)h_1(k-2m). \quad (81)$$

Enquanto as equações (79) e (80) definem filtragem e dizimação, (81) define expansão e filtragem. O esquema de reconstrução é mostrado na Figura 31, onde $g_0(n) = h_0(n)$ e $g_1(n) = h_1(n)$.

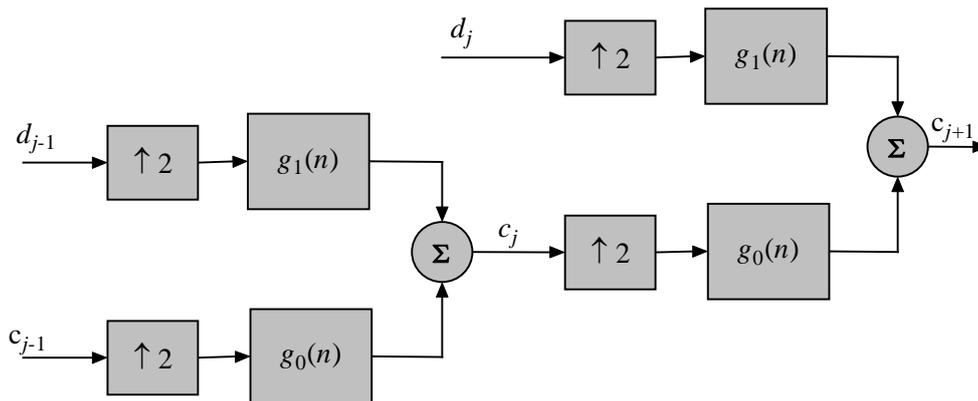


Figura 31 – Banco de filtros de reconstrução.

Da mesma forma como no caso da decomposição polifásica, a DWT é utilizada como uma estratégia de pré-processamento para fornecer seqüências de menor comprimento e menos complexas, no intuito de facilitar a tarefa de modelagem ARMA.

Nas figuras a seguir são mostrados os coeficientes da decomposição *wavelet* da RIR2. É utilizada a função *wavelet* de Daubechies db10 e 10 níveis de decomposição, resultando em 10 coeficientes *wavelet* (d_0, d_1, \dots, d_9) e um coeficiente de escala (c_0).

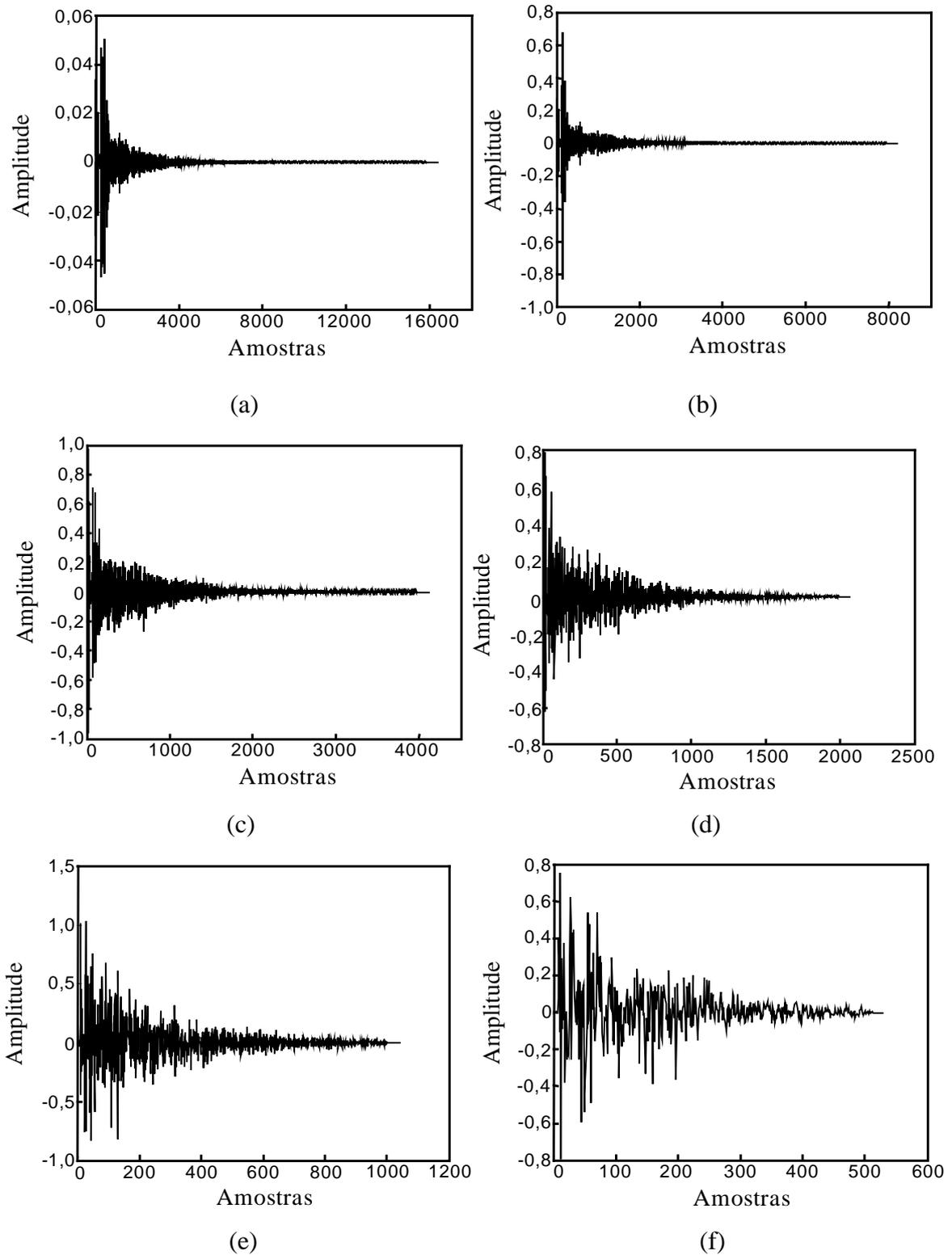


Figura 32 – Coeficientes *wavelet*. (a) d_9 . (b) d_8 . (c) d_7 . (d) d_6 . (e) d_5 . (f) d_4 .

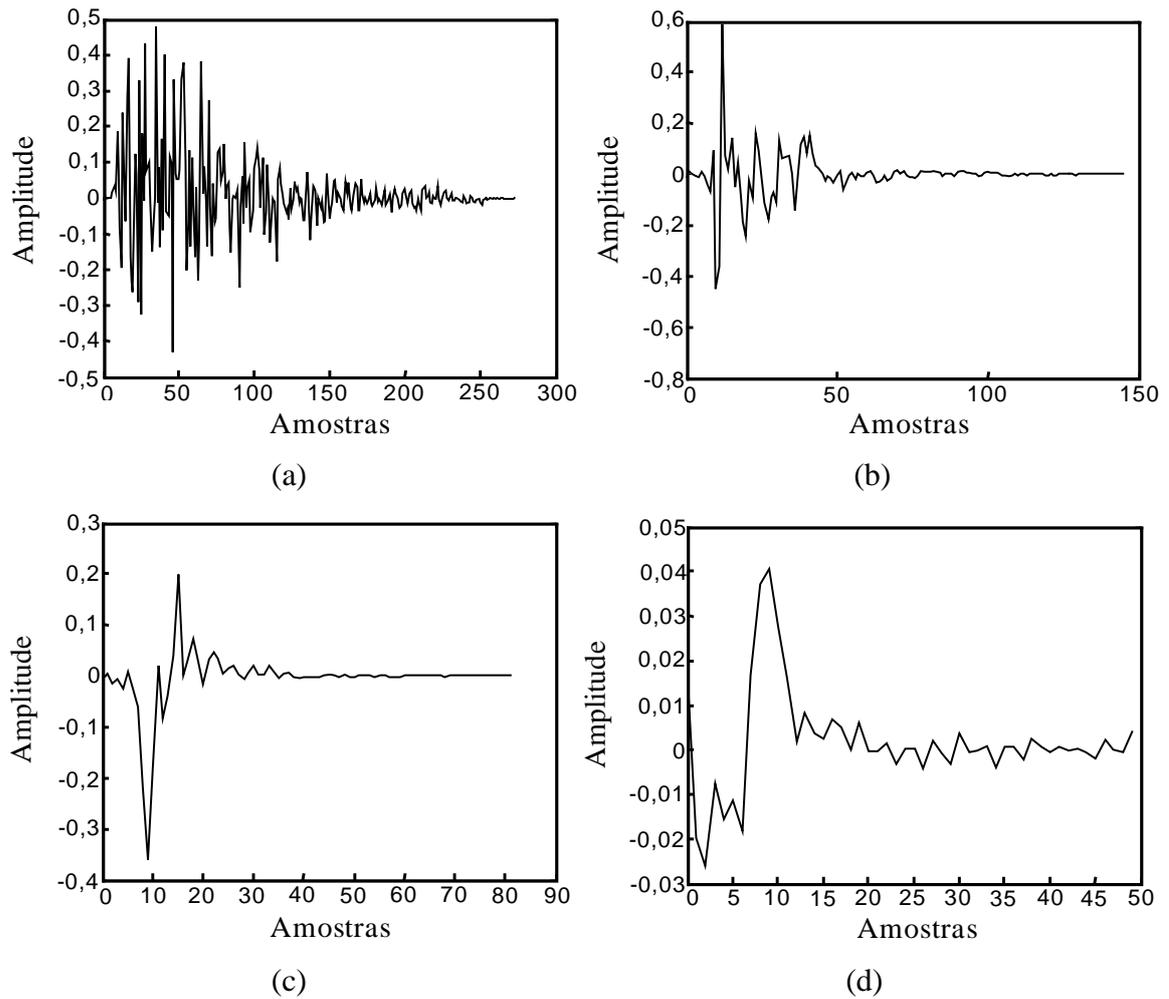


Figura 33 – Coeficientes *wavelet*. (a) d_3 . (b) d_2 . (c) d_1 . (d) d_0 .

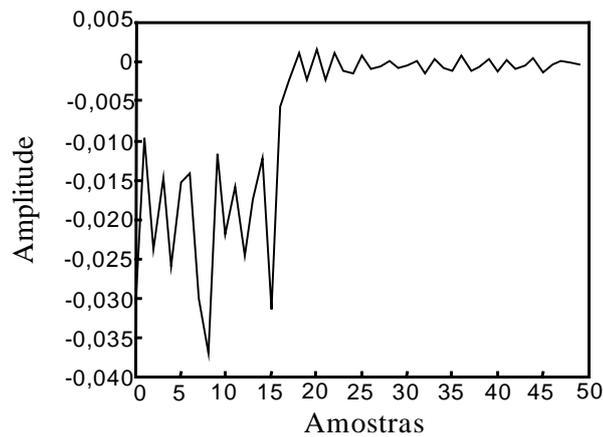


Figura 34 – Coeficiente de escala c_0 .

Uma das vantagens da utilização da DWT é que, de posse dos coeficientes, pode-se facilmente efetuar um procedimento de compressão [46], similar ao que foi realizado nos coeficientes e pólos do filtro de Kautz discutido na Seção 3.2.3. Pode-se então, antes de

proceder a modelagem, avaliar quais são os coeficientes mais representativos da DWT. Isso pode ser feito de duas formas:

- i) iguala-se a zero os coeficientes c_j com amplitude menor que um certo limiar [46];
- ii) desprezam-se os coeficientes cuja energia relativa sejam menores do que um certo limiar.

Ambas as estratégias são utilizadas sendo que a primeira, apesar de resultar em pequeno erro médio quadrático, não é satisfatória quando avaliada subjetivamente. Isso se deve ao fato de somente as amostras iniciais serem retidas após a imposição do limiar, inviabilizando a reconstrução do longo decaimento que fornece uma das principais características subjetivas da reverberação [15]. No caso da segunda, para proceder a avaliação dos coeficientes mais representativos, são determinadas as suas energias. Esse resultado é apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 – Energia dos coeficientes da DWT

Coefficiente	Energia normalizada	Sub-banda (Hz)
d_9	0,0014	12000 - 24000
d_8	0,0880	6000 - 12000
d_7	0,2385	3000 - 6000
d_6	0,1414	1500 - 3000
d_5	0,3203	750 - 1500
d_4	0,1399	375 - 750
d_3	0,0489	187 - 375
d_2	0,0172	94 - 187
d_1	0,0044	47 - 94
d_0	0,0001	23,5 - 47
c_0	0,0001	0 - 23,5

Por meio de avaliação auditiva informal, escolheu-se 0,01 como um limiar adequado. Assim, somente os coeficientes d_2 , d_3 , d_4 , d_5 , d_6 , d_7 e d_8 são utilizados para efetuar a modelagem ARMA. A Tabela 3 apresenta a ordem dos modelos estimados pelo método LSBU para cada coeficiente.

Tabela 3 – Ordem do modelo ARMA para cada coeficiente

Coeficiente	Ordem
d_2	30
d_3	60
d_4	120
d_5	240
d_6	480
d_7	600
d_8	800

A Figura 35 mostra a resposta ao impulso obtida pela implementação do modelo ARMA e a posterior reconstrução dos coeficientes. O erro quadrático médio normalizado obtido é $3,8 \times 10^{-2}$. A Figura 36 apresenta a magnitude e a fase da resposta em frequência. Nestas figuras e nas subseqüentes, H_w denota o espectro de frequência da resposta ao impulso obtida pela reconstrução *wavelet* e H_2 , o espectro da RIR2.

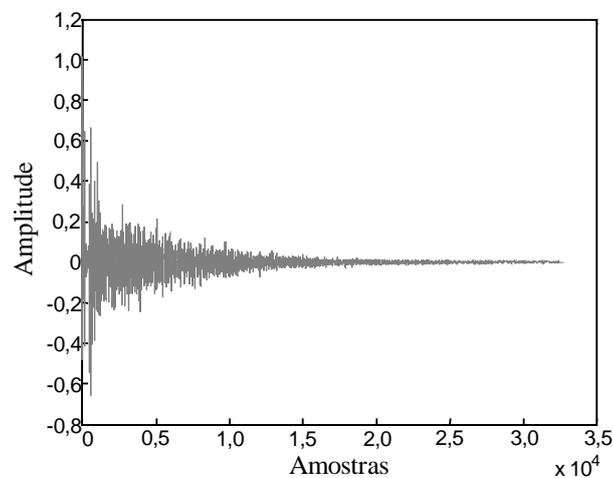


Figura 35 – Resposta ao impulso resultante da reconstrução *wavelet* aplicada à resposta ao impulso de 7 modelos ARMA estimados pelo método LSBU.

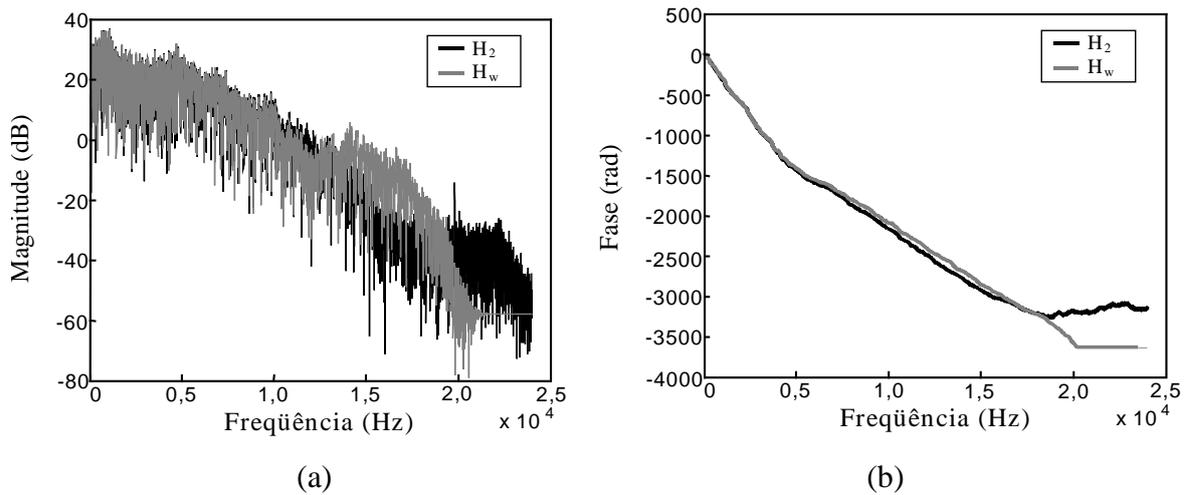


Figura 36 – Reconstrução *wavelet* aplicada à resposta ao impulso de 7 modelos ARMA estimados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_w e H_2 . (b) Comparação da fase de H_w e H_2 .

Comparando o sinal de erro obtido na síntese da RIR baseada na decomposição polifásica, mostrado na Figura 26, e o apresentado a seguir na Figura 37, resultante da utilização das *wavelets*, percebe-se que o primeiro é menor em amplitude e, conseqüentemente, também na média quadrática. Entretanto a avaliação subjetiva das duas repostas ao impulso sintetizadas indica maior semelhança da resposta resultante da utilização das *wavelets*. Isso é fruto da sua propriedade de multirresolução, pois, a resolução logarítmica em frequência é similar a forma como o ouvido humano avalia a energia em função da frequência [47].

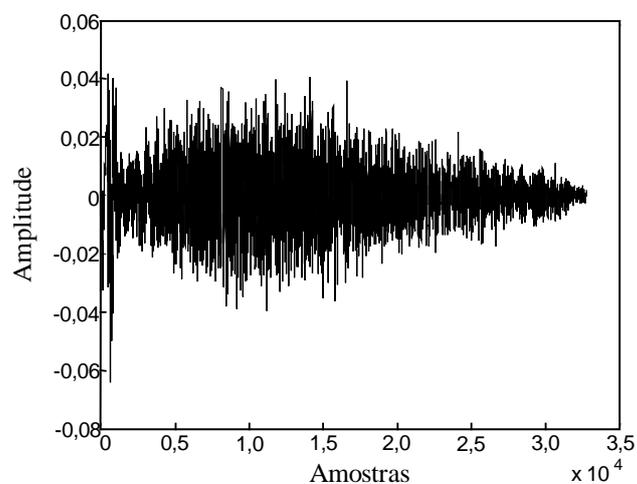


Figura 37 – Sinal de erro obtido com a reconstrução *wavelet* aplicada à resposta ao impulso de 7 modelos ARMA estimados pelo método LSBU.

Pode-se obter um melhor resultado com a decomposição polifásica fazendo uso da DWT. Realizando a decomposição em um único nível de escala, conforme apresentado na Figura 38, efetua-se a decomposição polifásica somente do coeficiente d_0 , já que o coeficiente de escala c_0 é desprezável, uma vez que sua energia é bastante pequena. Considerando a decomposição em 64 componentes polifásicos e o modelo com 200 pólos e 200 zeros, obtém-se um erro quadrático médio normalizado de $1,4 \times 10^{-3}$ e a avaliação subjetiva, mostra resultado similar ao obtido com 128 componentes polifásicos. A Figura 39 apresenta a magnitude e a fase da resposta em frequência da resposta ao impulso obtida e a Figura 40, o sinal de erro. Nestas figuras H_w denota o espectro da resposta ao impulso obtida pela reconstrução *wavelet* aplicada a reconstrução polifásica.

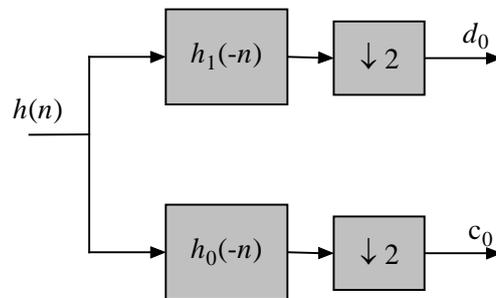


Figura 38 – Decomposição *wavelet* em um único nível de escala.

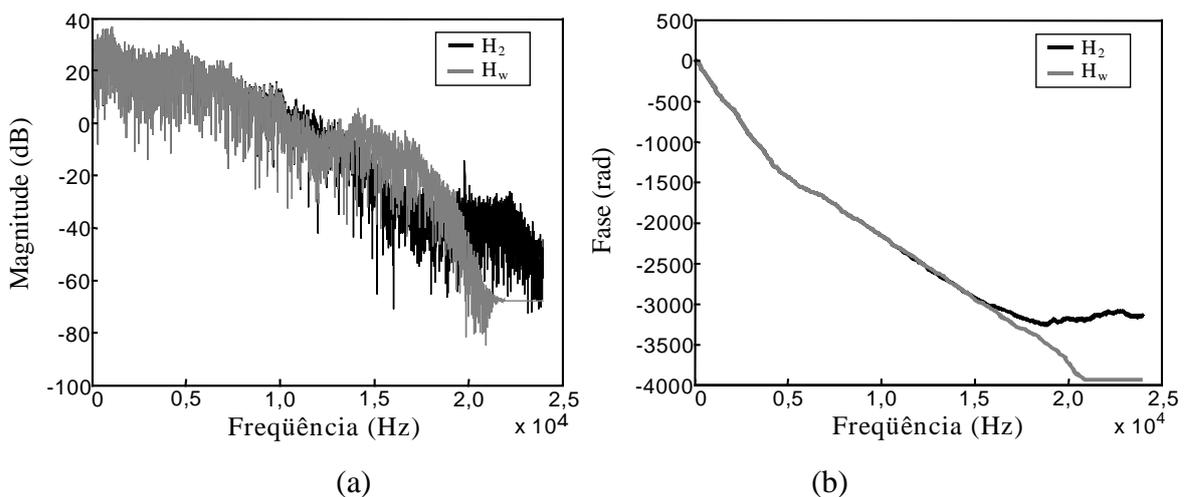


Figura 39 – Reconstrução *wavelet* aplicada à reconstrução polifásica da resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_w e H_2 . (b) Comparação da fase de H_w e H_2 .

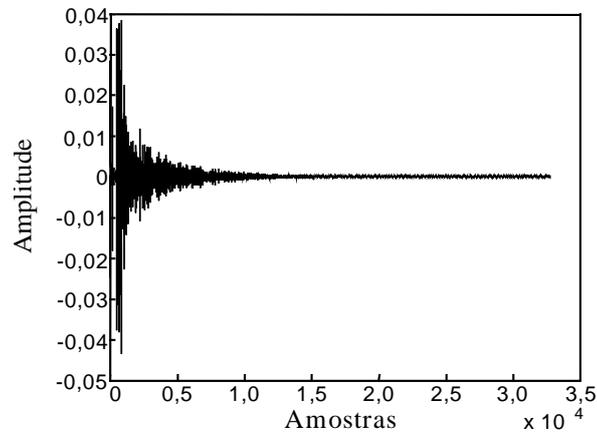


Figura 40 – Sinal de erro obtido com a reconstrução *wavelet* aplicada à reconstrução polifásica da resposta ao impulso de 64 modelos ARMA determinados pelo método LSBU.

O comprimento ainda elevado dos coeficientes d_6 , d_7 e d_8 pode ser reduzido se efetuado mais um nível de decomposição nessas sub-bandas. Esse procedimento é conhecido como pacote *wavelet* (*wavelet packet*) [45]. A resolução em frequência nesse tipo de decomposição não é mais logarítmica como no caso da análise multirresolução, mas sim ajustável [45]. Isso possibilita, por exemplo, obter uma resolução mais fina nas altas frequências. A Figura 41 apresenta o banco de filtros de análise que implementa tal decomposição e a Figura 42, a magnitude da resposta em frequência dos filtros, ambas para análise completa em três escalas. Os números entre parênteses ao lado da identificação dos coeficientes na Figura 41 representam uma forma alternativa de identificá-los.

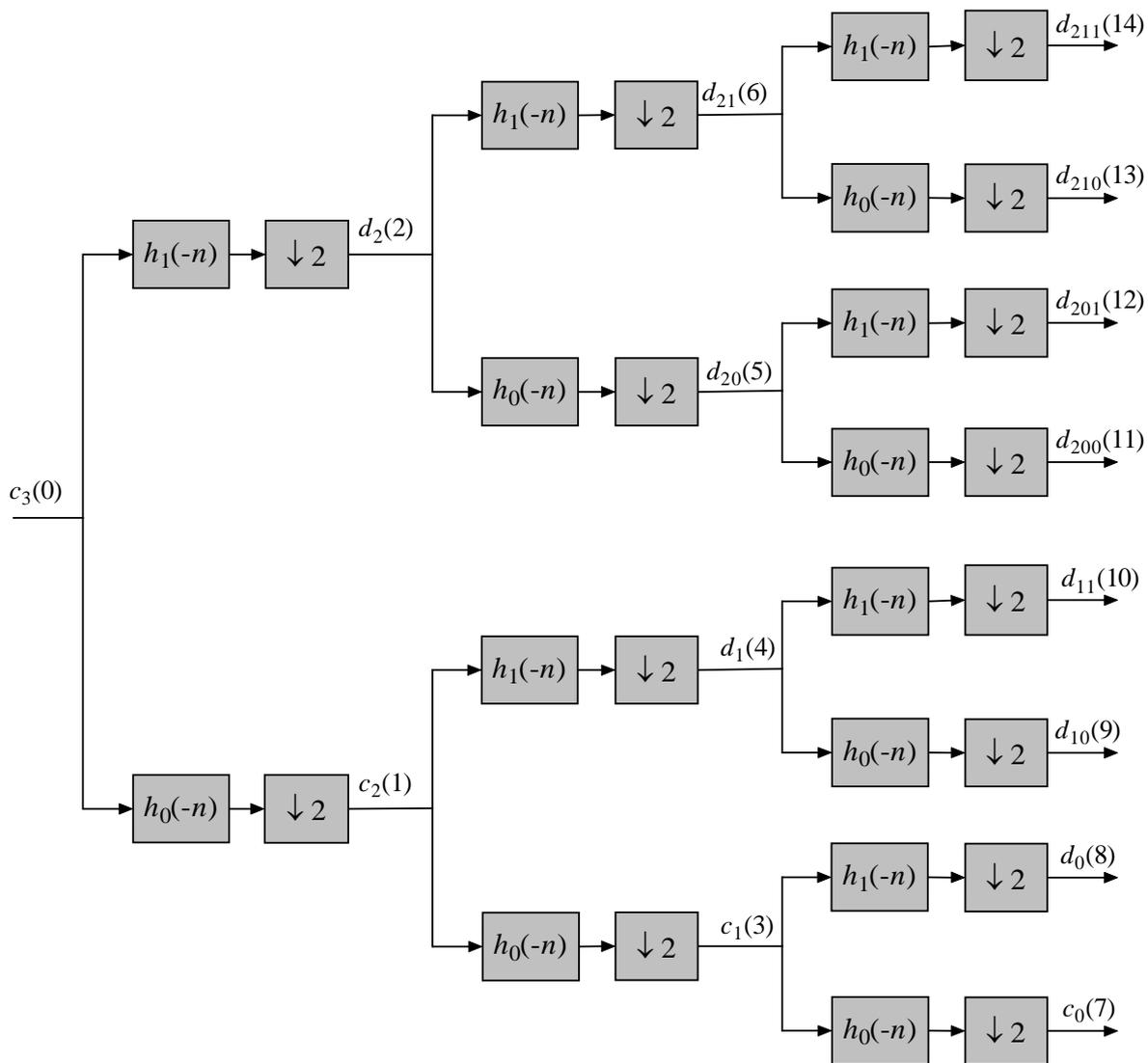


Figura 41 – Decomposição em pacotes wavelet em três escalas.

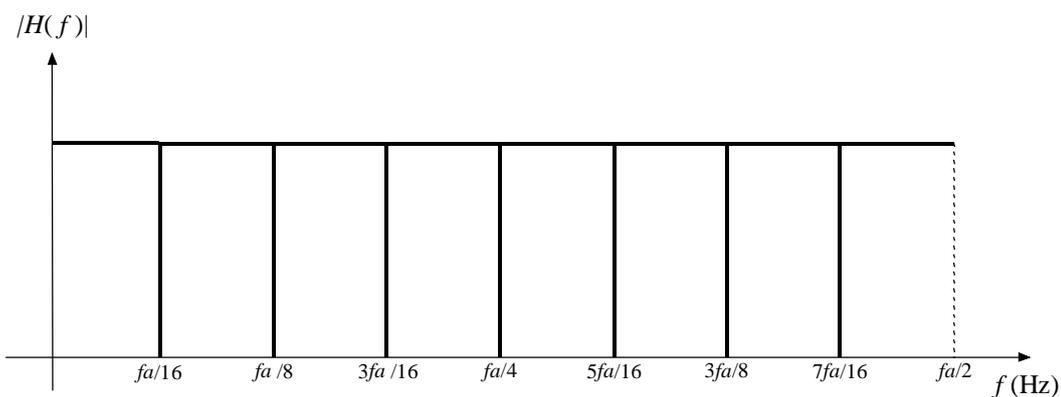


Figura 42 – Magnitude dos filtros de análise na decomposição em pacotes wavelet em três escalas.

Utilizando a análise em pacotes *wavelet*, a RIR2 é decomposta em 6 escalas, resultando em 64 coeficientes. A energia normalizada de cada um deles é apresentada na Figura 43. Nessa decomposição, percebe-se que podem ser desprezados além dos coeficientes obtidos pela decomposição dos detalhes na escala de maior resolução, alguns coeficientes obtidos na região de médias freqüências. O mesmo limiar utilizado na análise multirresolução é utilizado aqui, ou seja, 0,01. Sendo assim, os coeficientes de 79 a 86 e de 91 a 126 são desprezados, restando 20 coeficientes para serem aproximados. A ordem escolhida para aproximá-los utilizando o método LSBU é 200, resultando em um erro quadrático médio normalizado de $2,2 \times 10^{-2}$. A magnitude e a fase da resposta em freqüência são mostrados na Figura 44 e o sinal de erro, na Figura 45. Nestas figuras H_{pw} denota o espectro de freqüências da resposta ao impulso obtida pela reconstrução em pacotes *wavelet*.

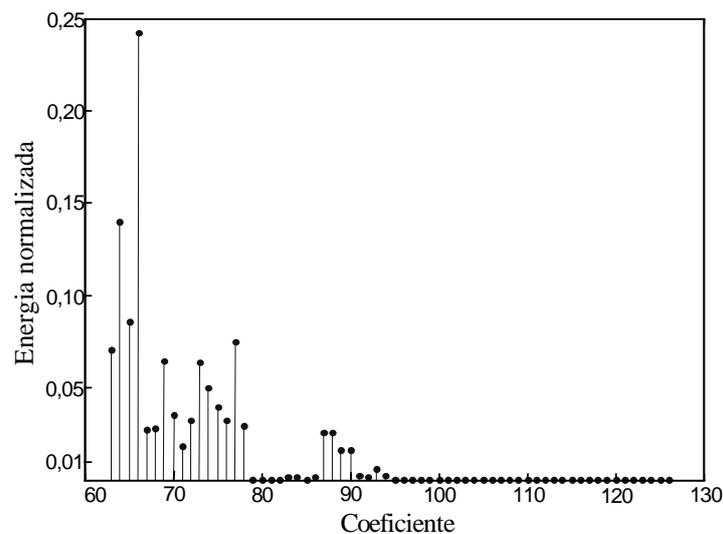


Figura 43 – Energia normalizada dos coeficientes da decomposição em pacotes *wavelet*.

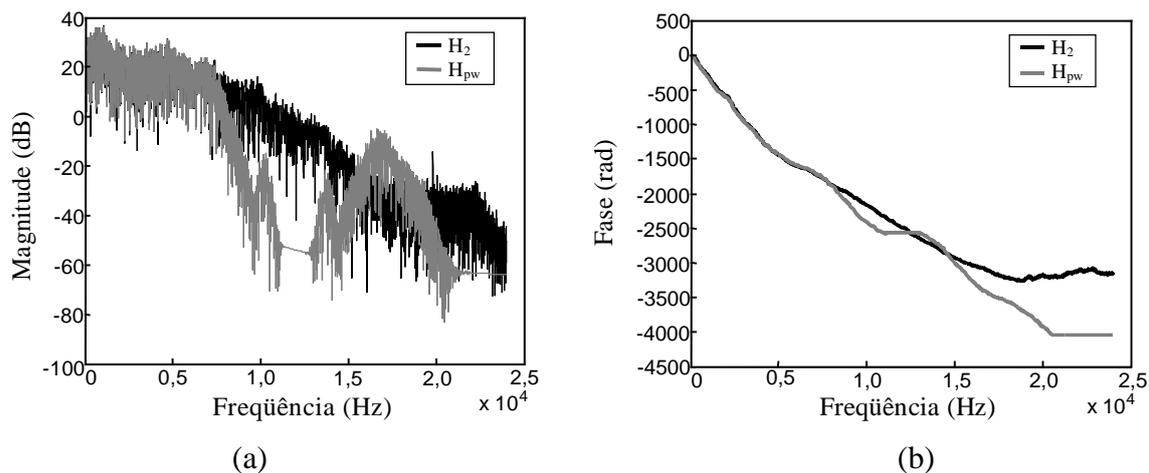


Figura 44 – Reconstrução em pacotes *wavelet* aplicada à resposta ao impulso de 20 modelos ARMA estimados pelo método LSBU. (a) Comparação da magnitude de H_{pw} e H_2 . (b) Comparação da fase de H_{pw} e H_2 .

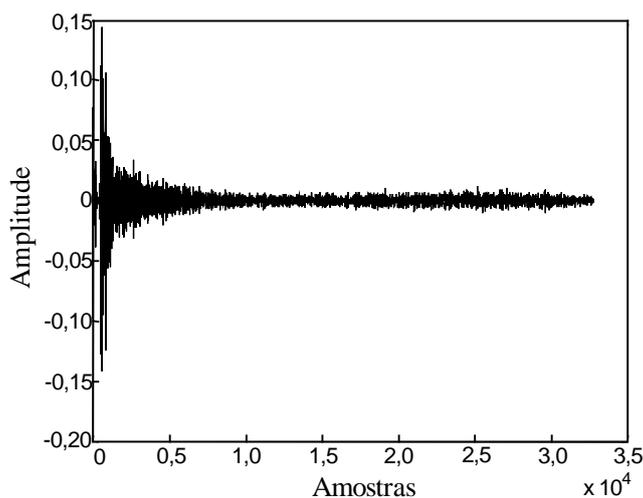


Figura 45 – Sinal de erro obtido com a reconstrução em pacotes *wavelet* aplicada à resposta ao impulso de 20 modelos ARMA estimados pelo método LSBU.

Apesar do pequeno erro quadrático médio normalizado, a avaliação subjetiva da resposta ao impulso sintetizada demonstra que ela perdeu importantes componentes de altas frequências.

3.4 CONCLUSÕES

Este capítulo apresentou algumas estratégias de decomposição que desempenharam papel de pré-processamento à tarefa de modelagem de uma RIR. Graças a essas estratégias foi possível viabilizar a aproximação de RIRs com pequeno erro quadrático médio normalizado e aliviar a tarefa do algoritmo LSBU na estimação dos parâmetros do modelo ARMA.

A decomposição polifásica foi proposta conjugada ao filtro de Kautz em [19] e [25] para modelar longas RIRs. Porém nada impede o seu uso com outras estratégias de modelagem, sendo que aqui, ela foi utilizada em conjunto com um modelo ARMA determinado pelo método LSBU. Um resumo dos resultados obtidos é apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 – Resumo dos resultados obtidos com a modelagem ARMA associada ao uso da decomposição polifásica

Número de componentes polifásicas	Pré-processamento	Ordem do modelo ARMA estimado pelo método LSBU		\bar{E}	Avaliação subjetiva da semelhança com a RIR original
		Por componente polifásica	Total		
64	-	200	12800	$2,6 \times 10^{-3}$	Razoável
128	-	200	25600	$2,59 \times 10^{-9}$	Ótima
64	Filtragem e dizimação	200	12800	$1,4 \times 10^{-3}$	Boa

A utilização de 64 modelos ARMA de ordem 200 estimados pelo método LSBU e a posterior reconstrução polifásica forneceu um pequeno erro quadrático médio normalizado. Porém, a avaliação da resposta ao impulso sintetizada indicou que sua reverberação não é realista como a da RIR original. A utilização de 128 modelos ARMA de ordem 200 resolveu esse problema, porém, a necessidade de armazenar um grande número de coeficientes, inviabiliza sua utilização em um *hardware* mais modesto. Isso pôde ser

contornado filtrando e dizimando a RIR. Embora essa possibilidade tenha sido evidenciada pela análise tempo-freqüência proporcionada pela DWT, sabe-se que em salas reais o efeito de reverberação diminui com o aumento da freqüência [15]. Isso já validaria a redução da freqüência de amostragem proporcionada pela filtragem passa baixas e dizimação. O menor número de amostras, resultante desse pré-processamento, possibilitou que com a utilização de 64 componentes polifásicos e ordem 200 para os modelos ARMA se obtivesse pequeno erro quadrático médio normalizado e um resultado subjetivo satisfatório.

Finalizamos o capítulo com o uso das *wavelets* para análise e auxílio à síntese de RIRs. Nas simulações foram investigadas a utilização da análise multirresolução e dos pacotes *wavelet*. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Resumo dos resultados obtidos com a modelagem ARMA associada ao uso da decomposição *wavelet*

Tipo de análise	Número de coeficientes	Número de coeficientes representativos	Ordem do modelo ARMA estimado pelo método LSBU		\bar{E}	Avaliação subjetiva da semelhança com a RIR original
			Por coeficiente	Total		
multirresolução	10	7	30, 60, 120, 240, 480, 600, 800	2330	$3,8 \times 10^{-2}$	Boa
pacotes	64	20	200	4000	$2,2 \times 10^{-2}$	Razoável

Da mesma forma que com o filtro de Kautz, os coeficientes da DWT fornecem um caminho simples de avaliar a energia da RIR em função da freqüência. Sendo assim, os coeficientes cuja energia não é significativa para a representação da RIR também são desconsiderados no procedimento de modelagem. Com a análise multirresolução tem-se a vantagem da resolução diferenciada em função da freqüência, similar ao processo de percepção do ouvido humano. Isso faz com que a síntese dos coeficientes mais representativos dessa análise tenha um melhor resultado subjetivo mesmo com um erro quadrático médio ligeiramente maior do que o obtido com outras estratégias, como por

exemplo, a análise por pacotes *wavelet*. A utilização dessa técnica foi motivada pelo comprimento ainda elevado dos coeficientes da análise multirresolução em resoluções mais altas. Embora a redução do comprimento desses coeficientes tenha sido obtida com a decomposição em *pacotes wavelet*, a avaliação subjetiva da resposta ao impulso sintetizada mostrou menor semelhança à RIR original.

MODELAGEM DE MÚLTIPLAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

4.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foi abordado o problema da modelagem de uma única função de transferência de um ambiente. Esse tipo de modelagem é útil na implementação de reverberadores para recriar as propriedades acústicas de uma sala em uma dada localização. Contudo, em aplicações tridimensionais nos deparamos com o problema de modelar múltiplas funções de transferência. Um exemplo são os canceladores de eco acústico que, a partir do conhecimento das RTFs, possibilita o cancelamento através de um filtro inverso [1].

Conforme já discutido no Capítulo 1, a RTF é dependente tanto da localização da fonte quanto do receptor, fornecendo assim diferentes RTFs para diferentes posições de ambos (fonte e receptor). No entanto, pode ser mostrado que as diferentes RTFs, para um dado ambiente, têm em comum o mesmo denominador, ou seja, os mesmos pólos [16], [48]. Por outro lado, o que diferencia as RTFs, então, são os zeros das diferentes funções. Dessa forma, é possível representar as distintas RTFs de um ambiente (pólos comuns e zeros dependentes das distintas localizações entre fonte e receptor) por meio de um modelo ARMA, denominado na literatura da área modelo de zeros e pólos acústicos comuns (CAPZ) [16]. Os parâmetros de tal modelo são determinados a partir de um conjunto de respostas ao impulso do ambiente, obtidas para diferentes localizações da fonte e/ou receptor. Isso se faz necessário visto que não é possível estimar os pólos comuns da RTF através de uma única RIR devido a influência dos zeros sobre os pólos da função em questão [16]. A grande variação dos zeros em cada localização [49], [50] torna necessário o conhecimento de um grande número de RTFs para caracterizar completamente o ambiente. Isso vem motivando a pesquisa de algoritmos de interpolação e extrapolação que, a partir de um número reduzido de RTFs, possam estimar os zeros em qualquer localização do ambiente [49].

A determinação dos pólos comuns do modelo CAPZ pode ser obtida utilizando uma das estratégias mencionadas a seguir [16]:

- i) minimização de uma função-custo associada ao erro entre as RIRs e a resposta ao impulso de seus respectivos modelos ARMA;
- ii) média dos coeficientes dos denominadores dos modelos ARMA referente a cada RIR.

Conforme discutido em [16] e [31], a primeira técnica (i) envolve um grande esforço computacional, sendo viável apenas quando se utilizam modelos ARMA de ordem reduzida. Já a segunda (ii), apesar de ser computacionalmente mais vantajosa em relação à primeira, não garante a estabilidade da RTF resultante, devido a erros na determinação do polinômio associado aos pólos comuns da função [16], [31]. Em [31], o algoritmo de agrupamento *c-means* é utilizado com sucesso na determinação dos pólos comuns. Ele é aplicado às raízes do polinômio do denominador dos modelos ARMA estimados nas diferentes localizações do ambiente. O algoritmo identifica grupos dentro desse conjunto de pólos e seus centróides são assumidos como os pólos comuns do ambiente. Seu uso garante que o polinômio resultante da desfatoração possua somente singularidades internas a circunferência de raio unitário, levando a um modelo estável. Com o intuito de reduzir a complexidade da tarefa de determinação dos grupos e seus centróides, o algoritmo é aplicado em sub-bandas.

Neste capítulo, além da apresentação do modelo CAPZ e uma revisão das técnicas de agrupamento, é proposta uma nova estratégia para a obtenção dos pólos comuns de um ambiente. Tal abordagem é inspirada em [32] e [51]. Da mesma forma como em [31], os pólos comuns são obtidos a partir da constelação de pólos no plano z do modelo ARMA de cada RIR. O semi-plano z superior é mapeado com uma grade ou matriz de localização de singularidades quantizadas (MSQ) e as regiões ou células que possuírem a maior ocorrência de pólos são assumidas como sendo os pólos comuns da sala. Aliada a essa estratégia de agrupamento para determinação dos pólos comuns é também proposta a utilização do método de mínimos quadrados LSBU, já considerado nos capítulos anteriores, para obtenção dos coeficientes dos modelos ARMA. Em contraste com a abordagem sugerida em [16], a qual considera a minimização de uma estimativa do erro (equação de erro aproximada), a estratégia dada em [30], por sua vez, usa o erro quadrático médio, fornecendo uma solução mais precisa para o problema em questão.

Para avaliação dos resultados, a figura de mérito usada é a média da energia do erro quadrático médio normalizado entre o conjunto das seqüências $h(n, r_\ell)$ e $\hat{h}(n, r_\ell)$, dada por

$$\bar{E}_c = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \left[\frac{\sum_{n=0}^{\infty} [h(n, r_\ell) - \hat{h}(n, r_\ell)]^2}{\sum_{n=0}^{\infty} h^2(n, r_\ell)} \right] \quad (82)$$

sendo L o número de posições consideradas.

4.2 MODELO DE ZEROS E PÓLOS ACÚSTICOS COMUNS

O modelo CAPZ considera a modelagem das múltiplas RTFs de um ambiente. Tal esquema é ilustrado na Figura 46.

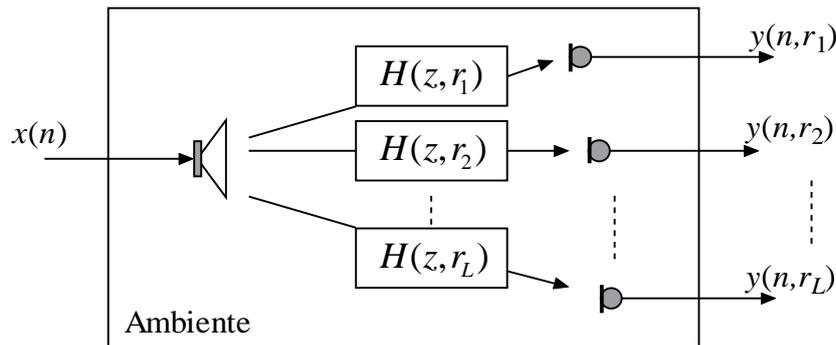


Figura 46 – Esquema mostrando as diversas RTFs para diferentes localizações do receptor.

Nesta figura, $x(n)$ representa a fonte sonora fixa e $y(n, r_\ell)$, para $\ell = 1, 2, \dots, L$, são os sinais correspondentes a cada um dos receptores posicionados nas diferentes localizações. Tais sinais podem ser obtidos através da transformada z inversa de

$$Y(z, r_\ell) = \hat{H}(z, r_\ell)X(z) \quad (83)$$

onde $\hat{H}(z, r_\ell)$ representa o modelo das diferentes RTFs associadas a cada posição r_ℓ do receptor e as variáveis $X(z)$ e $Y(z, r_\ell)$ caracterizam as transformadas z de $x(n)$ e $y(n, r_\ell)$, respectivamente. Tais modelos podem ser representados por uma estrutura ARMA, contendo os pólos comuns e os zeros correspondentes da função associados às localizações r_ℓ [16]. Assim, pode-se escrever

$$\hat{H}(z, r_\ell) = \frac{P(z, r_\ell)}{Q(z)} = \frac{\sum_{v=0}^M p_v(r_\ell) z^{-v}}{1 + \sum_{v=1}^N q_v z^{-v}}. \quad (84)$$

Então, considerando o modelo de função dado em (84), o erro entre a resposta ao impulso real $h(n, r_\ell)$ e a sua versão estimada $\hat{h}(n, r_\ell)$ é dado por

$$e(n, r_\ell) = h(n, r_\ell) - \hat{h}(n, r_\ell) \quad (85)$$

ou, no domínio da transformada z , por

$$E(z, r_\ell) = H(z, r_\ell) - \hat{H}(z, r_\ell). \quad (86)$$

A expressão (86) pode então ser reescrita como

$$E(z, r_\ell) = H(z, r_\ell) - \sum_{v=0}^M p_v(r_\ell) z^{-v} + \hat{H}(z, r_\ell) \sum_{v=1}^N q_v z^{-v}. \quad (87)$$

A linearização de (87), em relação a $p_v(r_\ell)$ e q_v , pode ser obtida substituindo $\hat{H}(z, r_\ell)$ por $H(z, r_\ell)$ [16], resultando na seguinte expressão aproximada para $E(z, r_\ell)$:

$$\hat{E}(z, r_\ell) = H(z, r_\ell) \left[1 + \sum_{v=1}^N q_v z^{-v} \right] - \sum_{v=0}^M p_v(r_\ell) z^{-v}. \quad (88)$$

A minimização de (88) é obtida através do método de Prony [17]. Manipulando (88), pode-se reescrever $\hat{E}(z, r_\ell)$ como uma versão filtrada de $E(z, r_\ell)$. Portanto,

$$\hat{E}(z, r_\ell) = E(z, r_\ell) Q(z). \quad (89)$$

Este resultado é o motivo pelo qual esse método em questão para estimação dos coeficientes do modelo ARMA é mais eficiente em baixas frequências, conforme mencionado em [16].

Os coeficientes $p_v(r_\ell)$ e q_v são determinados a partir da minimização da energia do erro J_{eq} do conjunto das L RIRs [16], dada por

$$J_{\text{eq}} = \sum_{\ell=1}^L \sum_{n=0}^{N+M} \hat{e}^2(n, r_\ell) \quad (90)$$

onde $\hat{e}(n, r_\ell)$ é a transformada z inversa de $\hat{E}(n, r_\ell)$.

Dependendo do comprimento da RIR, é necessário utilizar um modelo ARMA de ordem elevada, sendo proibitiva a minimização da energia do erro do conjunto de RIRs. Nesse caso, é proposto em [16] a minimização da energia do erro de cada posição $J_{\text{eq}}(r_\ell)$, definida por

$$J_{\text{eq}}(r_\ell) = \sum_{n=0}^{M+N} \hat{e}^2(n, r_\ell). \quad (91)$$

Os pólos comuns são obtidos pela média dos coeficientes q_v do modelo ARMA de cada posição. Assim,

$$q_v = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L q_v(r_\ell), \quad v = 1, 2, \dots, N. \quad (92)$$

Essa estratégia de estimação envolve um menor esforço computacional, porém não garante que os pólos da RTF resultante estejam restritos ao interior da circunferência de raio unitário.

Para demonstrar a utilização deste método, considera-se, como exemplo um conjunto de 20 RIRs obtidas pelo método da imagem [48], para diferentes localizações do receptor no ambiente. Considera-se uma sala com dimensões [7m × 6m × 6m], coeficiente de reflexão igual a 0,85 para paredes, teto e piso, e frequência de amostragem de 800 Hz. Utiliza-se o mesmo número de pólos e zeros, sendo ordem 80 para ambos. A Figura 47 apresenta as raízes dos polinômios dos denominadores dos 20 modelos estimados pelo método descrito. Um detalhe do semi-plano z superior é apresentado na Figura 48 para demonstrar como os pólos estão distribuídos. Os pólos comuns apresentados na Figura 49 são as raízes do polinômio obtido pela média dos coeficientes dos polinômios dos denominadores dos modelos ARMA estimados.

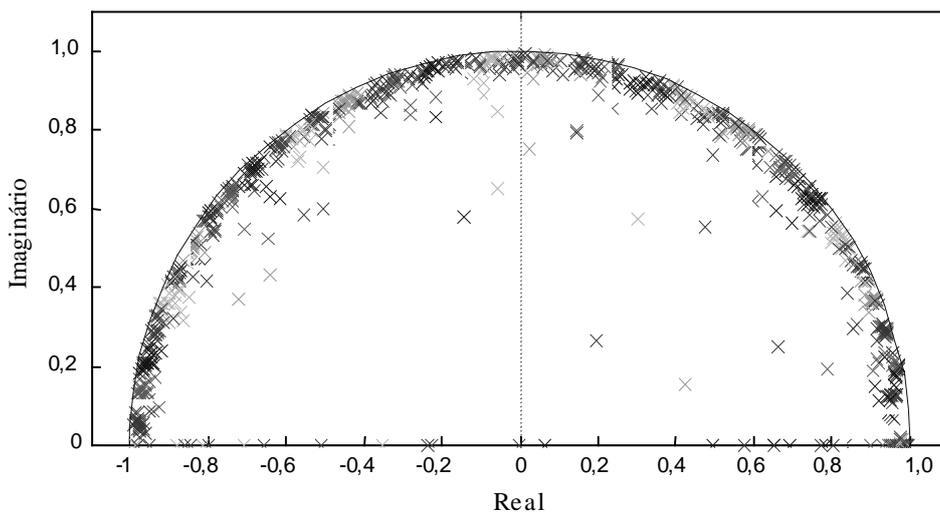


Figura 47 – Pólos referentes aos 20 modelos estimados pelo método de Prony.

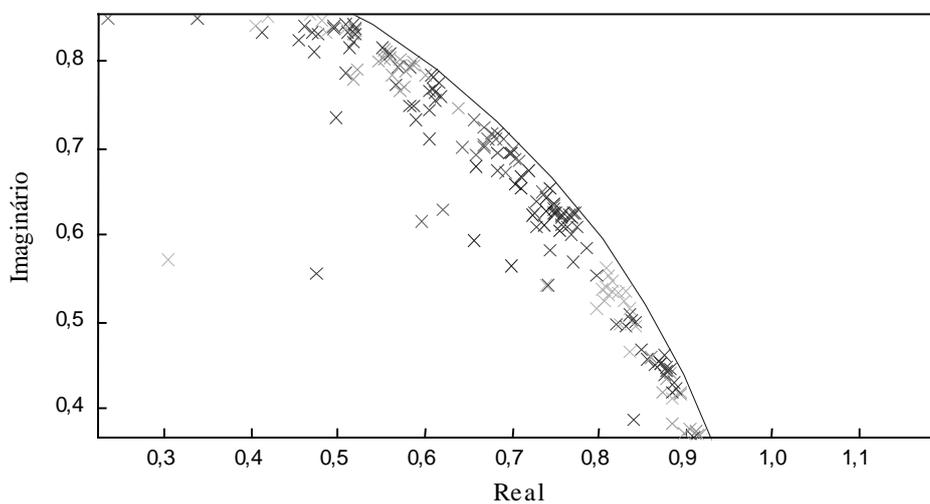


Figura 48 – Detalhe nos pólos obtidos dos 20 modelos estimados pelo método de Prony.

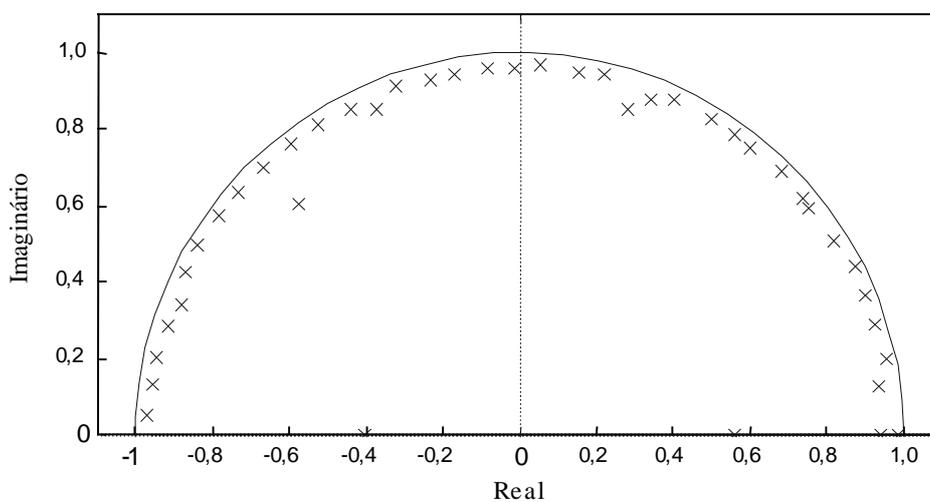


Figura 49 – Pólos comuns do polinômio determinado pela média dos coeficientes dos 20 modelos ARMA.

A comparação da resposta ao impulso e da magnitude da resposta em frequência das RIRs originais com as obtidas pelo modelo CAPZ para duas localizações são apresentadas nas Figuras 50 e 51, respectivamente. A média da energia do erro normalizado obtido na aproximação desse conjunto de RIRs é $\bar{E}_c = 0,5209$.

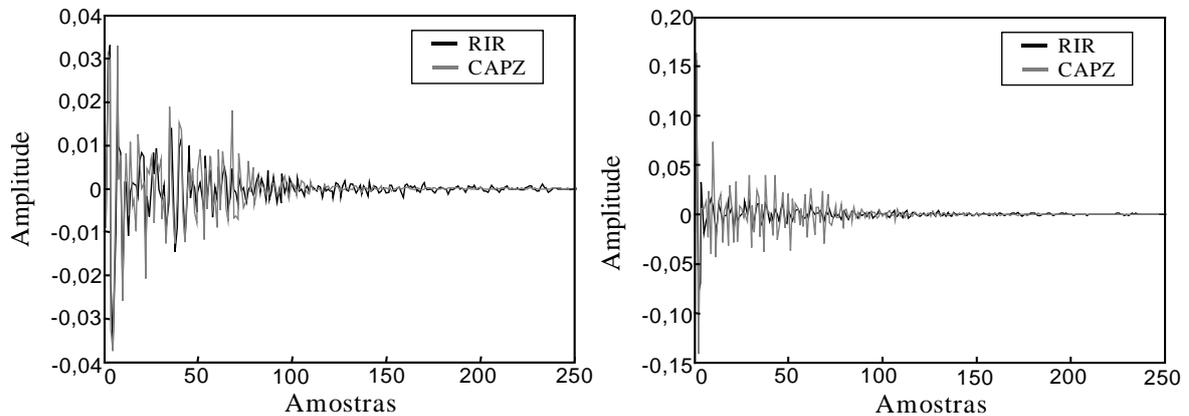


Figura 50 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ estimado pelo método de Prony e pólos comuns determinados pela média dos coeficientes.

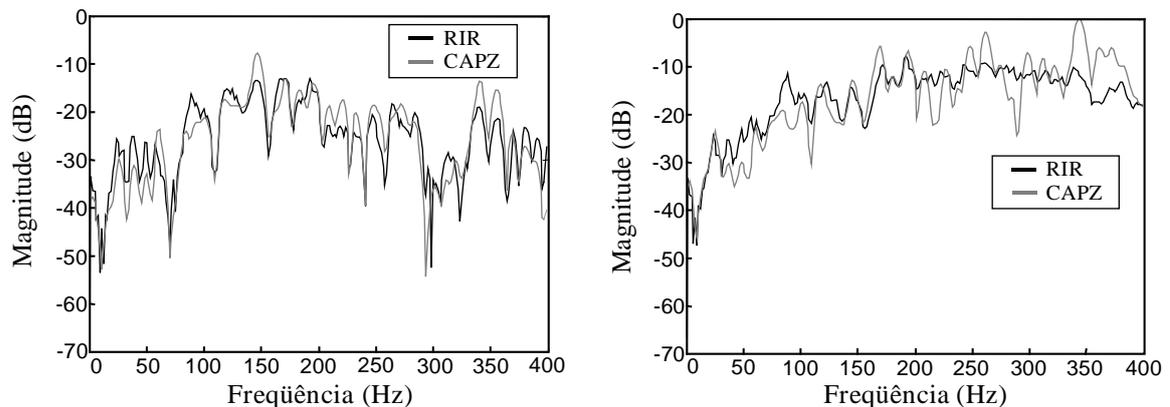


Figura 51 – Comparação da magnitude das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ estimado pelo método de Prony e pólos comuns determinados pela média dos coeficientes.

O erro normalizado grande verificado se deve ao fato de, no método de estimação dos coeficientes do modelo CAPZ proposto em [16], o polinômio do numerador e do denominador são estimados conjuntamente e, após a determinação do polinômio que define os pólos comuns, os numerados de cada localização não são recalculados. Isso seria necessário já que no método de Prony, os coeficientes do numerador são determinados em função dos coeficientes do denominador [17]. Pode-se justificar o procedimento utilizado

em [16] pelo fato da variação nos coeficientes dos polinômios do denominador dos modelos ARMA estimados ser pequena. O desvio padrão da média dos coeficientes atesta esse fato. No caso da modelagem das 20 RIRs apresentada, a Figura 52 mostra por meio de um gráfico de barras o desvio padrão obtido para cada um dos 81 coeficientes dos 20 modelos ARMA como também a média dos coeficientes (linha contínua).

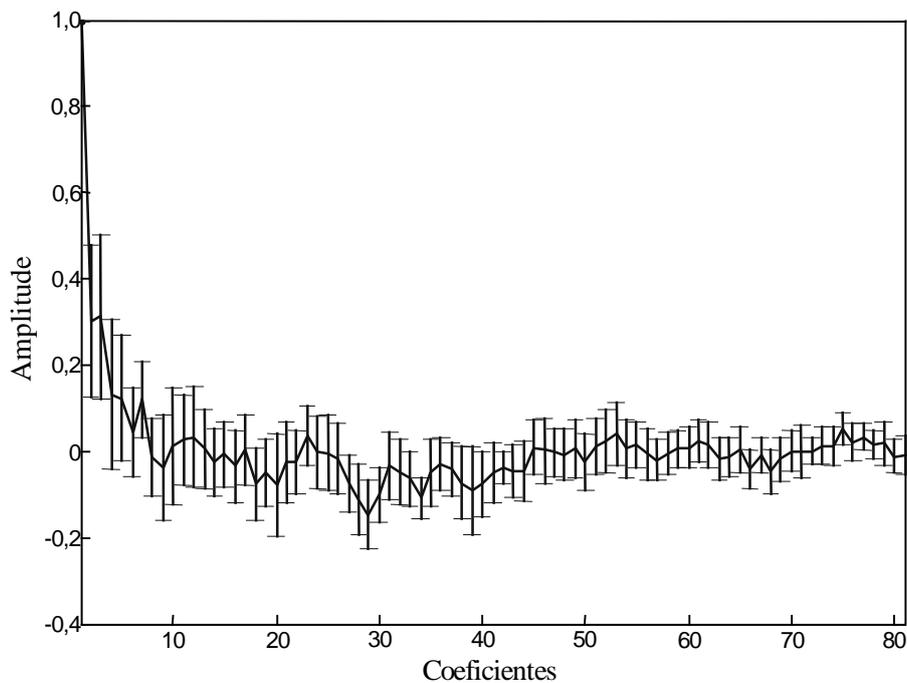


Figura 52 – Média e desvio padrão dos coeficientes dos denominadores dos 20 modelos ARMA estimados pelo método de Prony.

Em [31], o método de Shanks foi utilizado para recalcular os coeficientes do numerador de cada localização a partir dos coeficientes do denominador comum a todos os modelos ARMA. Esse método determina os coeficientes do numerador que minimizam a energia do erro quadrático médio da aproximação de uma dada função pela resposta ao impulso de um modelo ARMA cujo denominador é pré-estabelecido [17]. No exemplo considerado, a utilização do método de Shanks resulta em $\bar{E}_c = 0,096$. Na Figura 53, são mostradas as respostas ao impulso obtidas e na Figura 54, as magnitudes da resposta em frequência para as duas localizações consideradas.

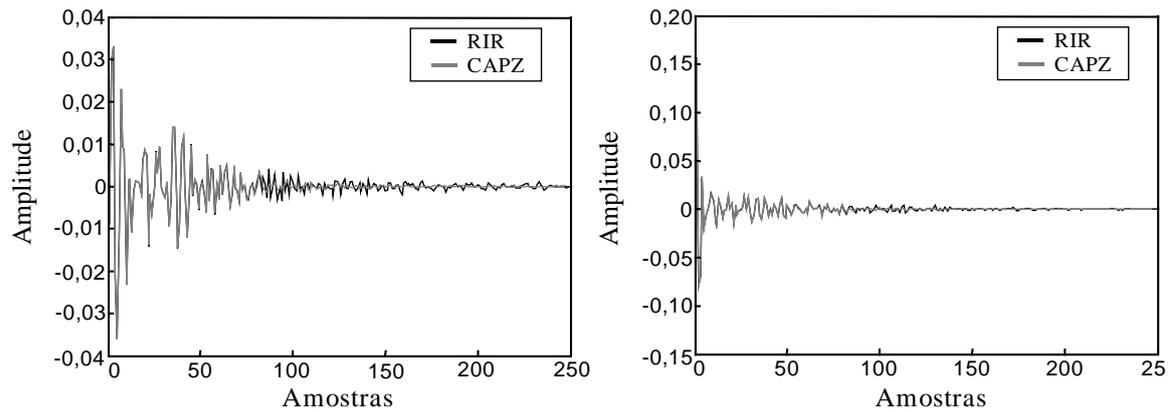


Figura 53 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ estimado pelo método de Prony. O denominador comum é determinado pela média e os numeradores são determinados pelo método de Shanks.

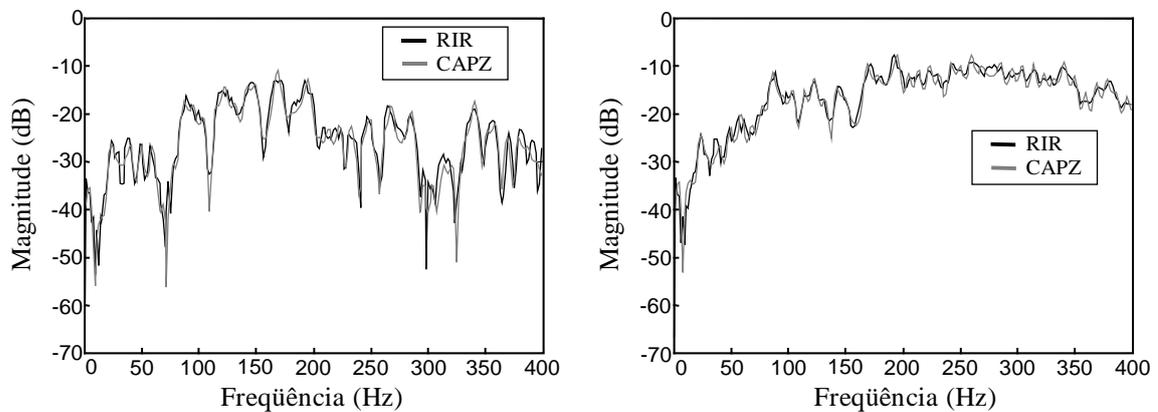


Figura 54 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ estimado pelo método de Prony. O denominador comum é determinado pela média e os numeradores são determinados pelo método de Shanks.

4.3 TÉCNICAS DE AGRUPAMENTO DE PÓLOS

Estratégias de agrupamento de pólos têm uso comum no contexto de desconvolução cega [32], [52]. Os algoritmos mais utilizados são o *k-means* e a sua versão *fuzzy* chamada *c-means*.

4.3.1 ALGORITMO *K-MEANS* E *C-MEANS*

Estas duas estratégias de agrupamento são classificadas como algoritmos de aprendizado não supervisionado [53]. Como tais, são capazes de a partir de um conjunto de

dados, identificar grupos cujos membros possuem alguma similaridade entre si. Os dados pertencentes a outros grupos são dissimilares com respeito a qualquer outro. No contexto deste trabalho, os dados são raízes ou, mais especificamente pólos, e o critério de similaridade utilizado é a distância Euclidiana.

O *k-means* é considerado um algoritmo de agrupamento exclusivo, haja vista que cada pólo pode pertencer a um único grupo. Já o *c-means* é um algoritmo de agrupamento por sobreposição, pois permite que um mesmo pólo pertença a grupos distintos. A sua utilização é mais adequada quando os pólos analisados não estão satisfatoriamente agrupados a ponto de se definir grupos isolados [54].

Os passos considerados no algoritmo *k-means* são bastante simples. Inicialmente defini-se k centróides referentes aos grupos que se deseja caracterizar. É importante que os centróides estejam localizados distantes uns dos outros. O próximo passo é associar a cada centróide os pólos mais próximos, utilizando o critério de distância, definindo assim k grupos. Novos centróides devem ser calculados de forma a se tornarem o baricentro dos grupos a que pertencem. Novamente os dados deverão ser reorganizados levando em conta a nova posição dos centróides. Esse processo segue até que a seguinte equação atinja o seu valor mínimo [54]:

$$J = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \|x_i^{(j)} - c_j\|^2 \quad (93)$$

onde $\|x_i^{(j)} - c_j\|$ é a medida de distância escolhida entre o dado $x_i^{(j)}$ e o centróide c_j do grupo j . A medida de distância pode ser uma norma qualquer

$$d(x_i, c_j) = \left(\sum_{k=1}^d |x_{i,k} - c_{j,k}|^p \right)^{1/p} \quad (94)$$

onde d é a dimensão dos dados. Fazendo $p = 2$ obtém-se a distância Euclidiana.

O *c-means* é baseado na minimização da seguinte função-custo [54]:

$$J_m = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^C u_{ij}^m \|x_i^{(j)} - c_j\|^2, \quad 1 \leq m < \infty \quad (95)$$

onde m é o chamado fuzzificador e u_{ij}^m é o grau de pertinência de x_i ao grupo j . O fuzzificador desempenha um papel importante, pois defini o quanto os grupos estarão sobrepostos [54]. Tipicamente utiliza-se $m = 2$ [54].

O agrupamento *fuzzy* é realizado através de uma otimização iterativa da função-custo dada por (95), atualizada pelo grau de pertinência u_{ij}^m , dado por

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{i=1}^c \left(\frac{\|x_i - c_j\|^2}{\|x_i - c_k\|^2} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad (96)$$

e pela localização do centróide determinada como

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ij}^m \cdot c_i}{\sum_{i=1}^N u_{ij}^m}. \quad (97)$$

O processo iterativo cessará quando

$$\max \left\{ \left| u_{ij}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)} \right| \right\} < \varepsilon \quad (98)$$

onde ε é um limiar escolhido entre 0 e 1, k defini as iterações e $\max \{ \cdot \}$ é o operador que determina o maior elemento de um conjunto de dados.

Para ambos os algoritmos, os pólos comuns são os centróides obtidos ao final do processo iterativo. Cabe ressaltar que, por envolverem otimização iterativa, a solução pode não convergir para um ponto de mínimo da função J , (no caso do *k-means*) e de J_m (no caso do *c-means*) [54]. Sendo assim, os pólos comuns obtidos poderão não ser ótimos. Além disso, diferentes alocações iniciais dos centróides podem levar a soluções distintas [54].

Nas Figuras 55 e 56 são mostrados no semi-plano z superior os pólos comuns obtidos a partir do conjunto de pólos previamente apresentado na Figura 47 utilizando o algoritmo *k-means* e *c-means*, respectivamente. Em ambos os casos, foram usados 40

centróides iniciais com magnitude igual a 0,8 e espaçamento linear para o ângulo. É escolhido como critério de parada um limiar de 0,01 para a função-custo de ambos.

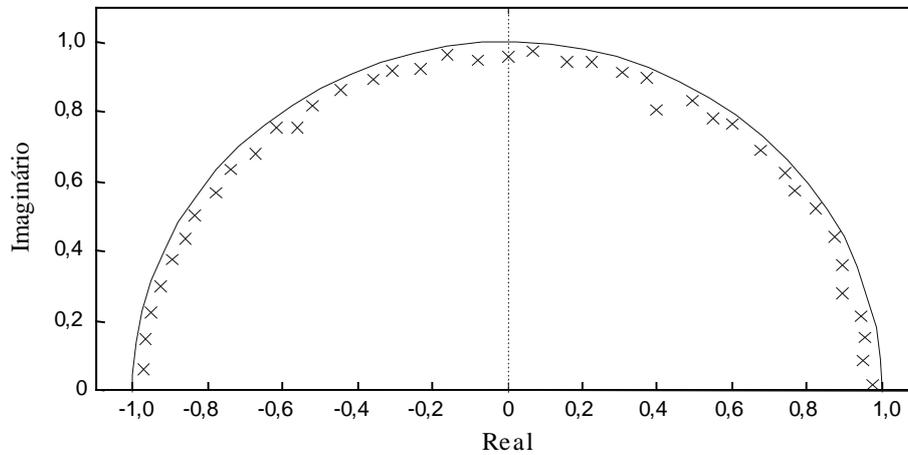


Figura 55 – Pólos comuns determinados pelo algoritmo *k-means*.

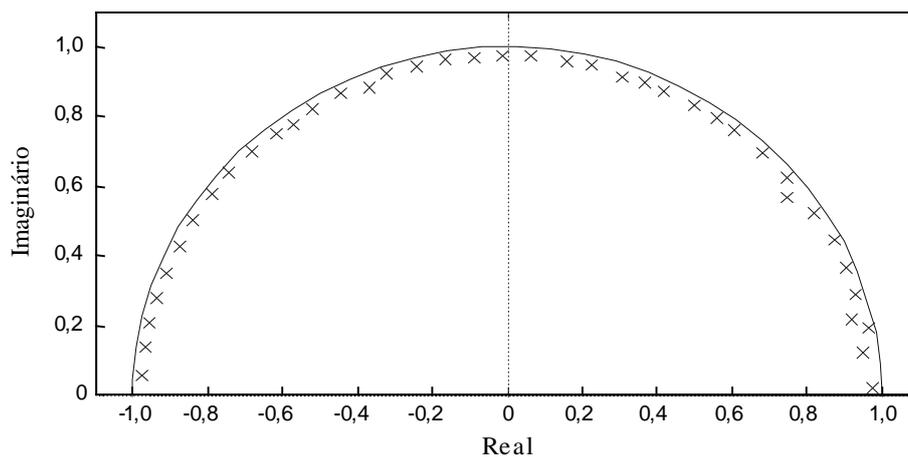


Figura 56 – Pólos comuns determinados pelo algoritmo *c-means*.

A partir do denominador definido pelos polos comuns são determinados os numeradores de cada localização utilizando o método de Shanks. A média da energia do erro obtida utilizando os polos comuns determinados pelo algoritmo *k-means* é $\bar{E}_c = 0,1091$ e, no caso do *c-means*, $\bar{E}_c = 0,1042$.

4.3.2 MATRIZ DE SINGULARIDADES QUANTIZADAS

Apesar desta estratégia ter sido proposta em [31], possivelmente o primeiro uso do termo matriz de singularidades quantizadas (MSQ) tenha ocorrido em [51]. Em [31], o

problema em questão é o de equalização de sinais de fala distorcidos por um canal de comunicação. Segmentos de 32ms do sinal de fala corrompido são estimados por um filtro *all-pole*. Como o canal de comunicação é estacionário e sua resposta ao impulso tem duração menor que do 32ms, seus pólos estarão presentes em todos os segmentos. A avaliação do mapa das raízes do modelo *all-pole* em cada segmento no plano z mostra o aparecimento de grupos com pólos próximos indicando os pólos do canal, além de uma grande quantidade de pólos espalhada pelo interior da circunferência de raio unitário devidos ao próprio sinal de fala. Uma técnica de agrupamento é então utilizada para identificar os grupos e seus respectivos centróides, definindo os pólos do canal.

Devido ao desempenho não satisfatório do algoritmo de agrupamento *k-means*, tanto em termos da precisão na identificação dos pólos do canal quanto na velocidade de convergência (o que inviabiliza sua aplicação na tarefa de equalização em tempo real), uma técnica que avalia a função de densidade de ocorrência dos pólos é proposta. Primeiramente, o semi-plano z superior é quantizado em magnitude e fase. O intervalo de quantização da magnitude é $0,8 < r < 1$ e da fase é $0 \leq \theta < \pi$. À medida que os modelos *all-pole* são estimados, seus pólos determinados por alguma técnica de fatoração têm suas magnitude e fase quantizadas e associadas a um dos intervalos de quantização do semi-plano z superior. Esses intervalos têm então sua densidade de ocorrência de pólos incrementada sempre que um pólo quantizado é associado a ela. A densidade de pólos é calculada por

$$\rho_i = n_i / N \quad (99)$$

onde ρ_i é a densidade de pólos na região i , n_i é o número total de pólos que são associados à região i , e N é a ordem do modelo *all-pole*. Os pólos do canal são os centróides dos intervalos que possuem densidade de ocorrência de pólos maior do que um certo limiar ρ_T .

Com tal estratégia, a precisão na identificação dos pólos do canal foi melhorada, haja vista que ela passa a ser função somente da resolução utilizada para quantizar o semi-plano z superior. A velocidade de convergência é superior a obtida com o algoritmo *k-means* por não envolver uma etapa de otimização.

Para utilização dessa técnica na determinação dos pólos acústicos comuns de ambientes, optou-se por quantizar não linearmente a magnitude, conforme feito em [51]. Em [31], foi ressaltado que esse procedimento seria um possível refinamento à técnica proposta. Além disso, para evitar problemas de convergência nas etapas de fatoração e de determinação das raízes nos casos em que a ordem do modelo é elevada, é utilizado o algoritmo de fatoração de Lindsey-Fox [51], [55].

Como em [51] o objetivo é a determinação dos zeros do ambiente e neste trabalho se está interessado nos pólos, desenvolveu-se um conjunto de equações distinto para efetuar tal quantização. Assim, a magnitude e a fase de cada pólo são quantizadas, respectivamente, como

$$N_{mq} = \left\lfloor \frac{N_m}{\text{tg}(\beta)} \text{tg}(\beta A) \right\rfloor, \quad 0 \leq A < 1 \quad (100)$$

$$N_{fq} = \left\lfloor \frac{F N_f}{\pi} \right\rfloor, \quad 0 \leq F \leq \pi \quad (101)$$

onde N_m representa o número de níveis de quantização da magnitude; N_f , o número de níveis de quantização da fase; N_{mq} , o resultado da quantização da magnitude ($0 \leq N_{mq} \leq N_m - 1$); N_{fq} , o resultado da quantização da fase ($0 \leq N_{fq} \leq N_f - 1$); A é a magnitude do pólo; F , a fase do pólo; β , o parâmetro que determina a não-linearidade entre A e N_{mq} ($0 < \beta < \pi/2$); e $\lfloor \cdot \rfloor$ representa o operador de truncamento.

A quantização não-linear da magnitude visa distribuir melhor os níveis de quantização, resultando em um maior número próximo à circunferência de raio unitário, já que a grande maioria dos pólos está localizado nessa região. A Figura 57 ilustra (considerando a metade superior do semi-plano z quantizado), 8 níveis de quantização para a magnitude, 12 níveis para a fase e β igual a 1,4. Os pólos indicados são os centróides de cada nível de quantização.

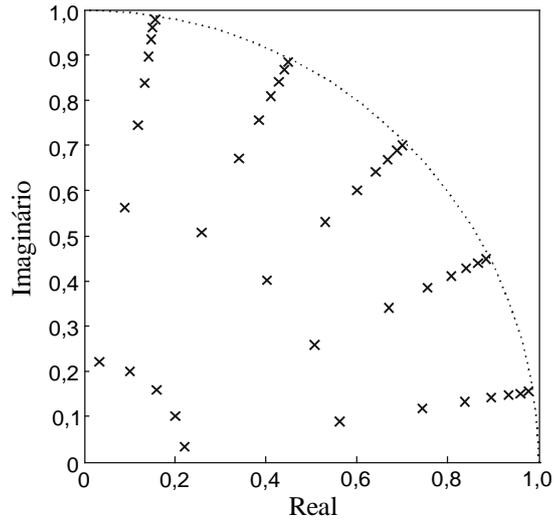


Figura 57 – Pólos quantizados no plano z utilizando 8 níveis de quantização para a magnitude, 12 níveis para a fase e β igual a 1,4.

A quantização do semi-plano z é representada por intermédio de uma matriz de singularidades quantizadas. Essa matriz é inicializada com valores iguais a zero em todas as posições. À medida que os pólos são quantizados, a célula de localização bidimensional de cada pólo é incrementada. As $N/2$ (sendo N a ordem do modelo ARMA estimado) células que possuírem o maior número de ocorrências são eleitas os pólos comuns. Conhecendo-se os níveis de quantização de magnitude N_{mq} e de fase N_{fq} , para os quais os pólos comuns estão localizados, pode-se determinar seus centróides de magnitude A_q e fase F_q como segue:

$$A_q = A_N + \frac{\Delta}{2} \quad (102)$$

$$F_q = \frac{N_{fq} \pi}{N_f} + \frac{\pi}{2N_f} \quad (103)$$

com

$$\Delta = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{N_m \cdot \operatorname{tg}(\beta)}{N_m^2 + (1 + N_{mq}) N_{mq} \cdot \operatorname{tg}^2(\beta)} \right] \quad (104)$$

e

$$A_N = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{N_{mq} \operatorname{tg}(\beta)}{N_m} \right]. \quad (105)$$

O parâmetro Δ é utilizado para se obter o centróide do nível de quantização relativo à amplitude de um certo nível A_N . Os pólos comuns são dados por

$$\alpha_v = A_{qv} e^{\pm jF_{qv}}. \tag{106}$$

Finalmente, determina-se o denominador comum através do processo de desfatoração.

Para o caso avaliado com os algoritmos *k-means* e *c-means*, obtêm-se os resultados mostrados nas Figuras 58, 59 e 60 através do uso da MSQ. São utilizados 6 níveis de quantização para a magnitude, 44 níveis para a fase e β igual a 1,3. Considerando o denominador definido por esses pólos comuns, os coeficientes do numerador determinados pelo método de Shanks resultaram em $\bar{E}_c = 0,1498$.

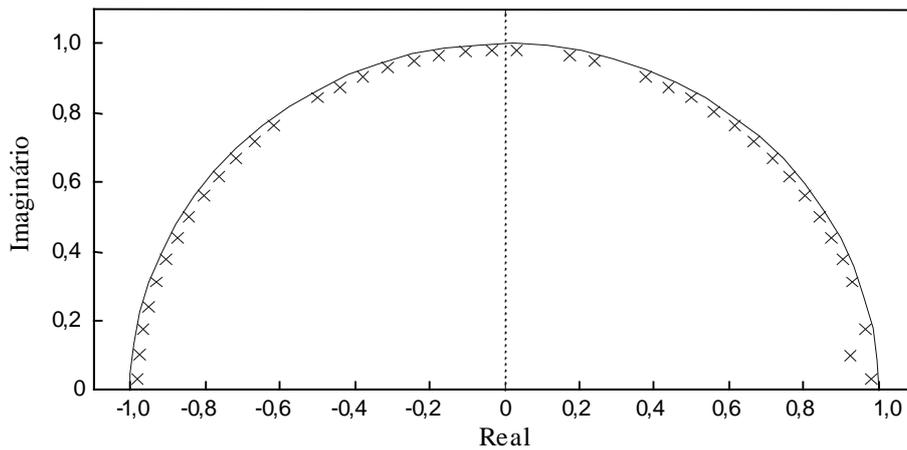


Figura 58 – Pólos comuns determinados pela MSQ.

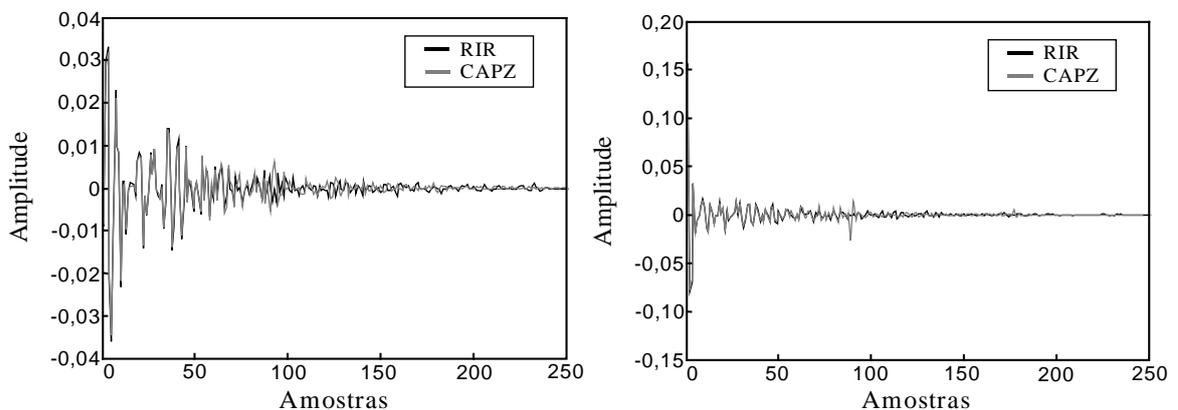


Figura 59 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ, sendo os pólos comuns determinados pela MSQ e os numeradores, pelo método de Shanks.

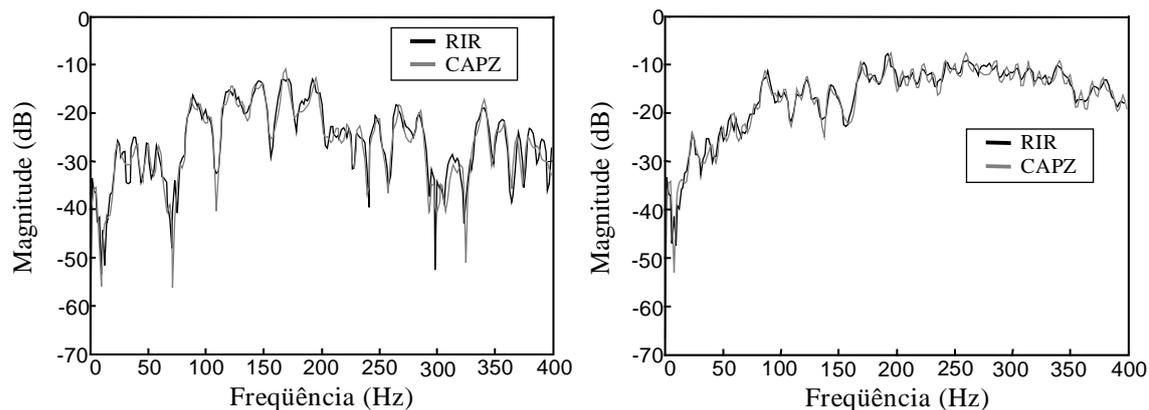


Figura 60 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ, sendo os pólos comuns obtidos pela MSQ e os numeradores, pelo método de Shanks.

Comparando graficamente, através das Figuras 61 e 62, os pólos obtidos por meio dos algoritmos *k-means* e *c-means* (ambos identificados com o símbolo “x”) com os obtidos usando a MSQ (identificados com o símbolo “o”) percebe-se que não há grandes discrepâncias entre eles, principalmente quando são comparados os resultados entre o *c-means* e a MSQ.

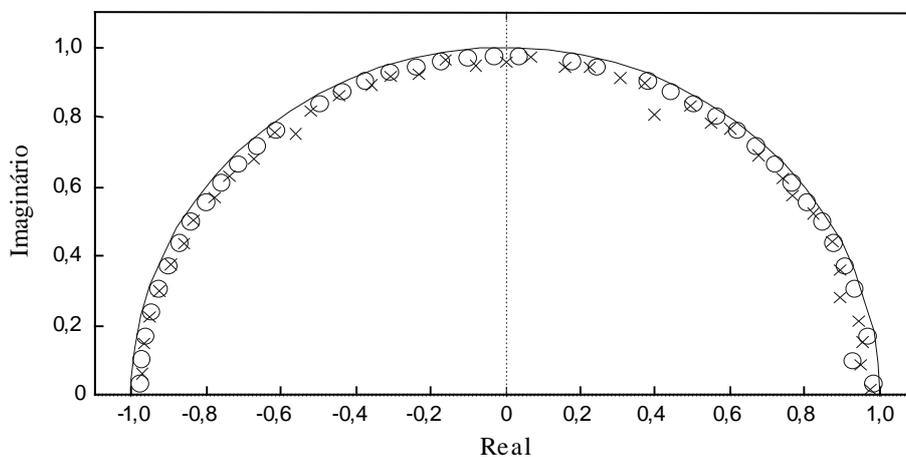


Figura 61 – Pólos comuns determinados pelos algoritmos *k-means* (“x”) e MSQ (“o”).

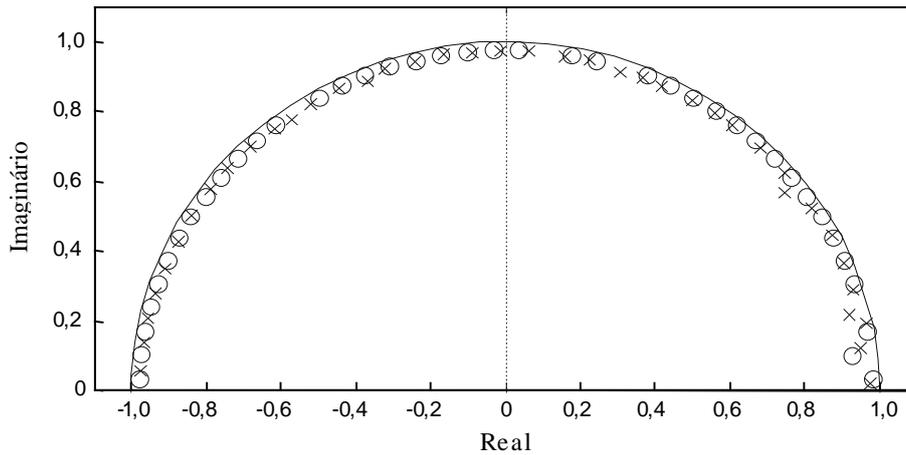


Figura 62 – Pólos comuns determinados pelos algoritmos *c-means* (“x”) e MSQ (“o”).

A natureza do problema estudado aliada à experiência adquirida durante as simulações indicam algumas diretrizes para auxiliar na escolha dos parâmetros da MSQ. Os parâmetros livres do algoritmo são os seguintes:

- Número de níveis de quantização da magnitude N_m .
- Número de níveis de quantização da fase N_f .
- Não-linearidade entre A e N_{mq} definida por β .

Um indicativo que pode ser utilizado para definir N_f é a ordem do modelo ARMA estimado. Como pode ser visto na Figura 48, os grupos de pólos resultantes são relativamente esparsos, além de não possuírem limites bem definidos, não justificando a utilização de um número de níveis de quantização muito maior do que a ordem N do modelo. Resultados satisfatórios foram obtidos utilizando N_f ligeiramente maior do que metade da ordem, utilizando-se a seguinte expressão:

$$N_f = \left\lceil \frac{N}{1,8} \right\rceil. \quad (107)$$

O valor de N_m também não deve ser muito grande pelo mesmo motivo discutido no caso da quantização da fase. Muitos níveis de quantização de magnitude fazem com que vários grupos sejam divididos e tenham-se centróides com mesmo ângulo, o que não é coerente com o tipo de sistema que se está modelando.

O outro parâmetro decisivo na quantização da magnitude é o β . Seu ajuste na direção de $\pi/2$ resulta no aumento da não linearidade entre N_{mq} e A e, conseqüentemente, o centróide do último nível de quantização é alocado mais próximo à circunferência de raio unitário.

A escolha de um número grande de níveis para a quantização de magnitude e fase também acarreta em erros numéricos no processo de desfatoração dos pólos, resultando em um polinômio cujas raízes não correspondem ao diagrama de pólos comuns que o originou.

4.3.3 PÓLOS COMUNS EM SUB-BANDAS

Recentemente em [31] utilizou-se o algoritmo *c-means* para determinação dos pólos comuns em sub-bandas e, conforme já atestado na Seção 4.3.1, apresentando resultados adequados. Nessa abordagem, as sub-bandas das RIRs são obtidas por meio de um banco de filtros modulado, implementado de acordo com [56]. Somente as freqüências positivas da RIR analisada são filtradas, logo, os sinais nas sub-bandas são de amplitude complexa.

Para contornar o inconveniente de manipular sinais complexos, lançou-se mão da DWT para efetuar a decomposição em sub-bandas, conforme apresentado na Seção 3.3.2. Dessa forma, primeiramente as RIRs a serem aproximadas são decompostas por meio da DWT. Os coeficientes do denominador do modelo ARMA de cada coeficiente *wavelet* em cada sub-banda devem ser estimados. Posteriormente, os pólos definidos em cada um desses polinômios devem ser analisados por alguma das técnicas de agrupamento descritas anteriormente, no intuito de determinar os pólos comuns em cada sub-banda. Finalmente, o polinômio do numerador em cada sub-banda é determinado pelo método de Shanks a partir do polinômio obtido pela desfatoração dos pólos comuns, como mostrado na Seção 4.3.2. O numerador deverá ser determinado para cada localização que se deseja aproximar.

Para se obter o efeito da sala em uma dada localização r_l do receptor, deve-se decompor a fonte sonora $x(n)$ nas mesmas sub-bandas consideradas no processo de decomposição *wavelet*. As seqüências resultantes da decomposição são filtradas pelo

modelo ARMA que aproxima o comportamento do ambiente na respectiva sub-banda. Esse esquema é apresentado na Figura 63 para o caso de duas sub-bandas.

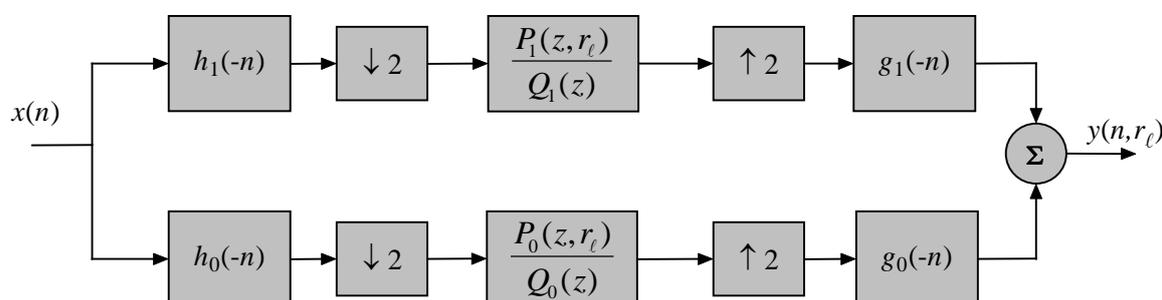


Figura 63 – Diagrama de blocos do modelo CAPZ em sub-bandas.

Nas figuras a seguir são mostrados os resultados da aplicação de tal procedimento visando aproximar 20 RIRs de uma sala com dimensões [7m × 6m × 6m], coeficiente de reflexão igual a 0,9 para paredes, teto e piso, e frequência de amostragem de 20 kHz. As RIRs foram decompostas em 5 escalas (6 sub-bandas) por meio da DWT. O número de pólos e zeros dos modelos estimados pelo método de Prony associado ao método de Shanks para cada coeficiente *wavelet* é apresentado na Tabela 6.

Tabela 6 – Ordem do modelo ARMA para cada coeficiente *wavelet*

Coefficiente	Ordem
c_0	80
d_0	80
d_1	120
d_2	200
d_3	400
d_4	800

Para determinação dos pólos comuns em cada sub-banda, foram utilizadas as três técnicas de agrupamento apresentadas. No caso dos algoritmos *k-means* e *c-means*, os parâmetros utilizados foram os mesmos do exemplo de modelagem apresentado na Seção 4.3.1, já para a MSQ, a única exceção é o número de níveis de quantização da fase em cada sub-banda, determinado de acordo com (107). A média da energia do erro obtida com a MSQ foi de $\bar{E}_c = 0,2576$. Já com os algoritmos *k-means* e *c-means* obtêm-se $\bar{E}_c = 0,2626$

e $\bar{E}_c = 0,2602$, respectivamente. Duas das respostas ao impulso dos modelos cujos pólos comuns foram determinados pela MSQ são apresentadas na Figura 64, e as correspondentes magnitudes da resposta em frequência na Figura 65.

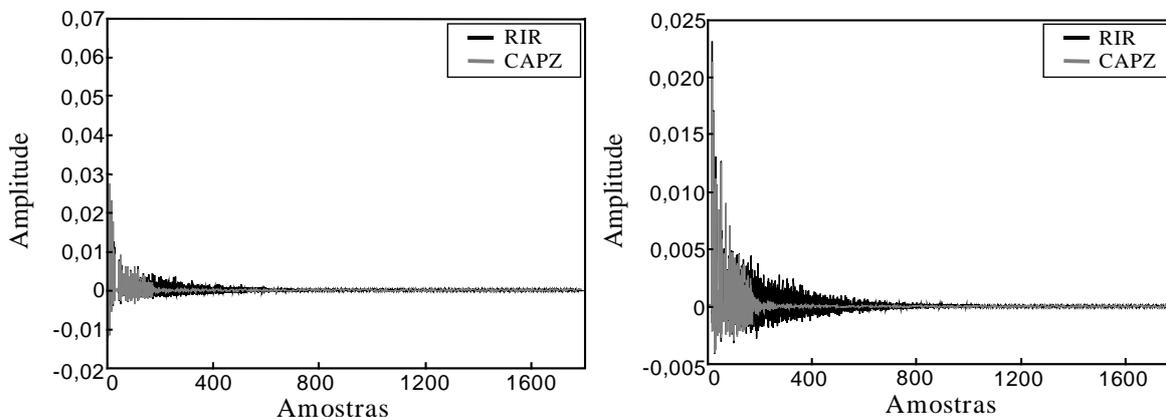


Figura 64 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ, sendo os pólos comuns determinados pela MSQ e os numeradores, pelo método de Shanks.

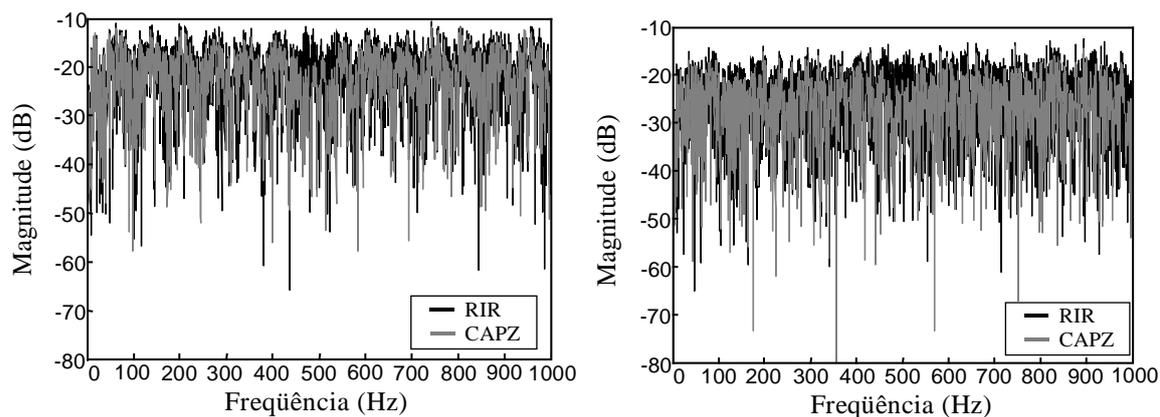


Figura 65 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ, sendo os pólos comuns obtidos pela MSQ e os numeradores, pelo método de Shanks.

4.4 ESTIMAÇÃO DOS COEFICIENTES DO MODELO CAPZ POR TÉCNICA DE MÍNIMOS QUADRADOS

Conforme discutido no Capítulo 3, a técnica LSBU para estimação dos coeficientes de um modelo ARMA leva a resultados muito bons por atuar diretamente na minimização da energia do erro quadrático. Além disso, as raízes do denominador do modelo estimado por tal técnica definem os pólos do filtro de Kautz, possibilitando assim uma alternativa à

implementação do modelo que, em alguns casos, pode ser mais eficiente. Esse algoritmo associado a alguma das técnicas de agrupamento de pólos já mencionadas, pode ser utilizado para contornar alguns dos problemas e restrições do modelo CAPZ proposto em [16]. Em [57], é discutida a utilização do método LSBU associado à matriz de singularidades quantizadas. Considerando o problema de modelar um conjunto de RIRs, tem-se o seguinte procedimento:

- Utilizando o método LSBU, estimar os coeficientes dos denominadores dos modelos ARMA das L RIRs consideradas.
- Determinar os pólos desses polinômios e identificar os pólos comuns do ambiente por meio de alguma das estratégias de agrupamento descritas na Seção 4.3.
- Utilizando alguma técnica de desfatoração, determinar o polinômio do denominador a partir dos pólos comuns.
- Fazendo-se novamente uso do método LSBU, determinar o polinômio do numerador do modelo ARMA de cada localização.

A Figura 66 apresenta os pólos dos 80 modelos estimados pelo método LSBU, para a mesma sala considerada na Seção 4.2. Por meio do uso da MSQ, com os mesmos parâmetros utilizados na Seção 4.3.1, obteve-se os pólos comuns mostrados na Figura 67. A média da energia do erro obtida é $\bar{E}_c = 0,1267$.

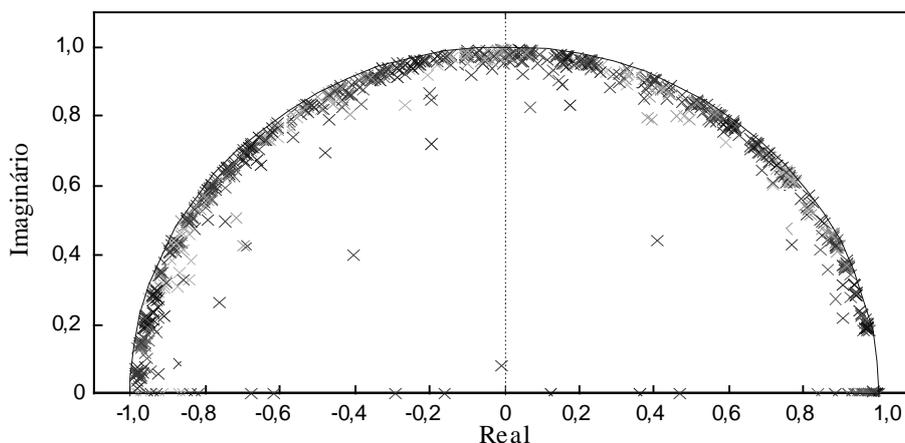


Figura 66 – Pólos referentes aos 20 modelos estimados pelo método LSBU.

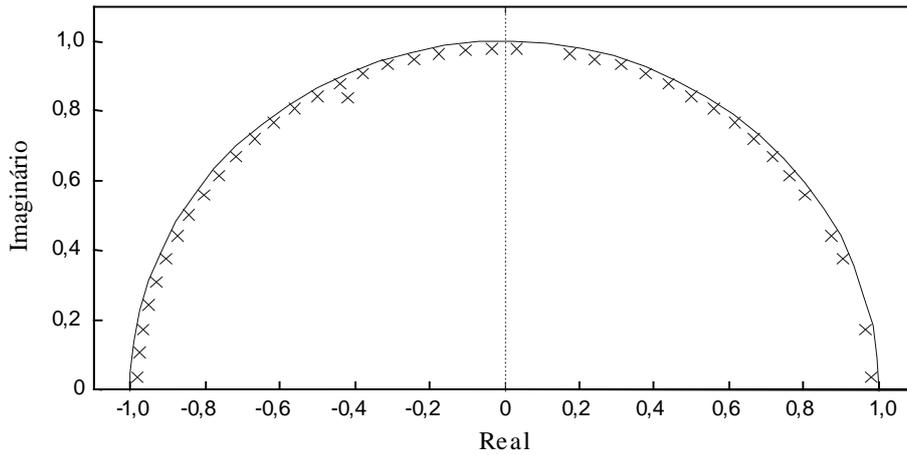


Figura 67 – Pólos comuns determinados pela MSQ.

Utilizando os algoritmos *k-means* e *c-means* para determinar os pólos comuns da constelação de pólos apresentada na Figura 66, obtêm-se os pólos mostrados nas Figuras 68 e 69, respectivamente. A média da energia do erro obtida é $\bar{E}_c = 0,1083$ no caso do *k-means* e $\bar{E}_c = 0,1116$ para o *c-means*.

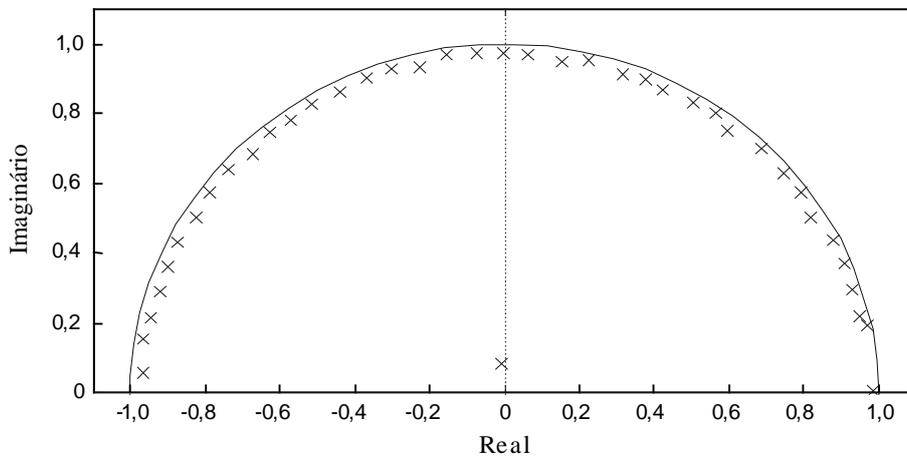


Figura 68 – Pólos comuns determinados pelo algoritmo *k-means*.

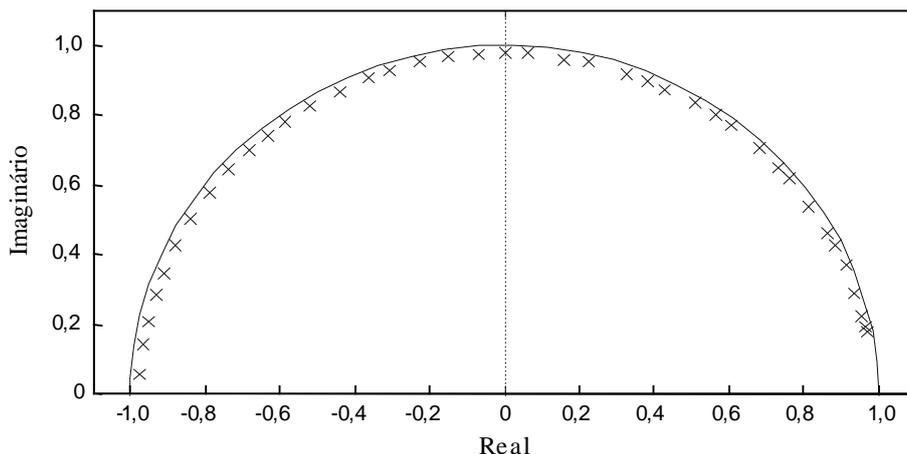


Figura 69 – Pólos comuns determinados pelo algoritmo *c-means*.

As Figuras 70 e 71 apresentam duas das respostas ao impulso dos modelos ARMA estimados pelo método LSBU associado à MSQ e as magnitudes das correspondentes repostas em frequência sobrepostas àquelas das RIRs originais.

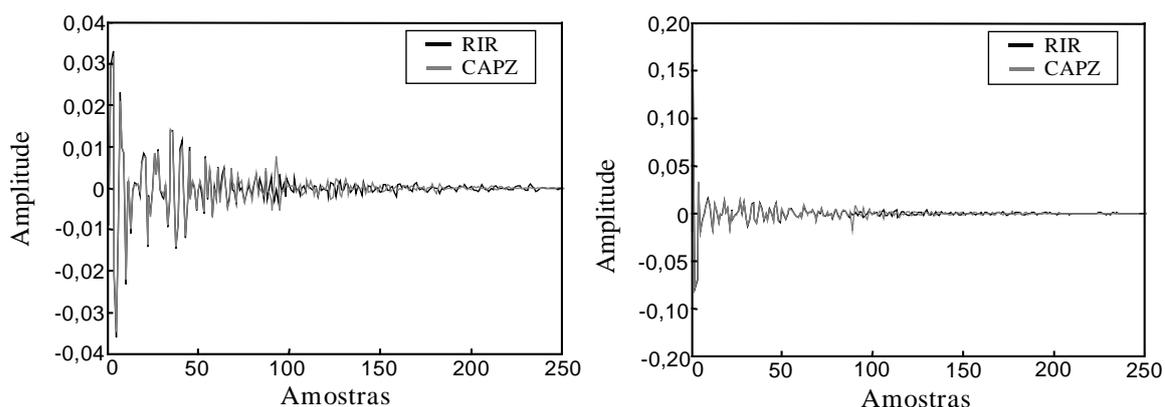


Figura 70 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo método LSBU associado a MSQ.

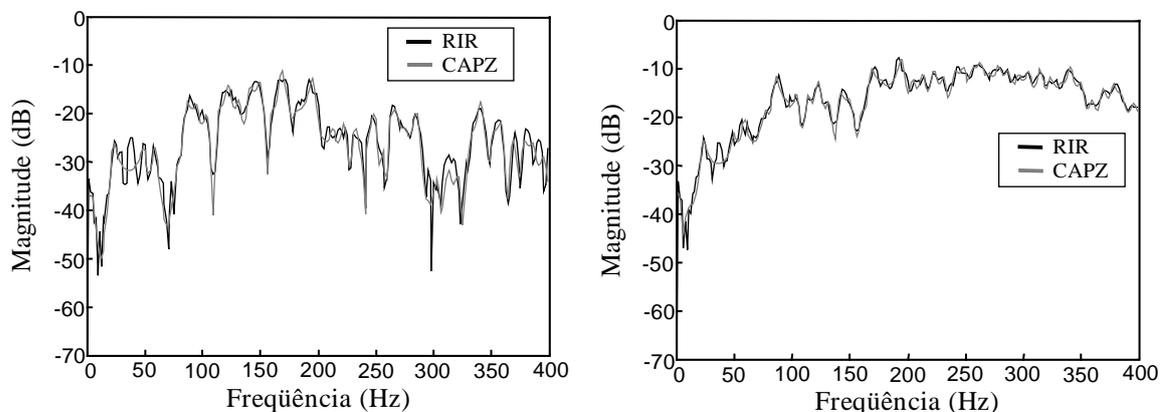


Figura 71 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo LSBU associado a MSQ.

Diferentemente do método de estimação utilizado em [16], em que a variância dos coeficientes dos diferentes denominadores estimados é pequena, o uso do LSBU resulta em coeficientes muito dispersos. Na Figura 72, a média dos coeficientes dos denominadores dos 20 modelos ARMA estimados anteriormente (linha contínua) e as barras correspondendo aos desvios padrão de cada um deles é mostrada. A grande dispersão obtida indica a necessidade de recalculer o polinômio do numerador dos diferentes modelos ARMA, caso contrário, o erro normalizado será grande.

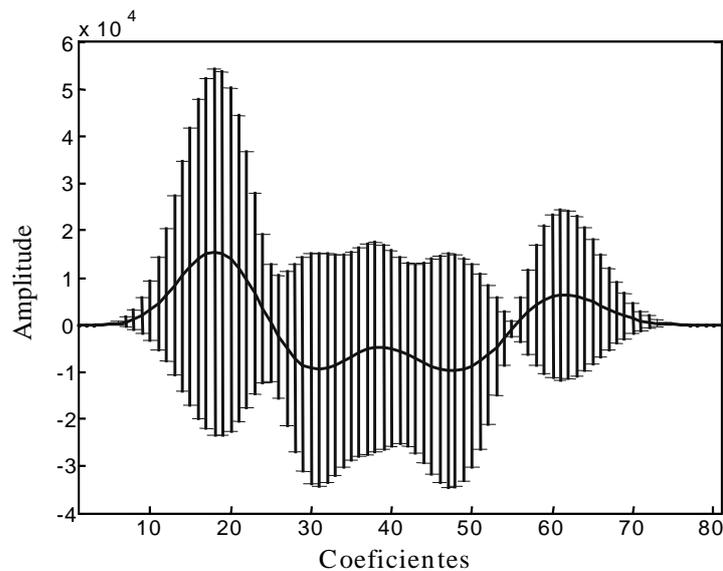


Figura 72 – Média e desvios padrão dos coeficientes dos denominadores dos 20 modelos ARMA estimados pelo método LSBU.

Outra estratégia de modelagem ARMA que pode também ser utilizada é o filtro de Kautz. Neste caso, os pólos do filtro são os pólos comuns determinados por alguma das estratégias de agrupamento apresentadas anteriormente. A síntese das diferentes localizações é obtida pelo cálculo dos coeficientes de ponderação do filtro, conforme mostrado na Figura 73.

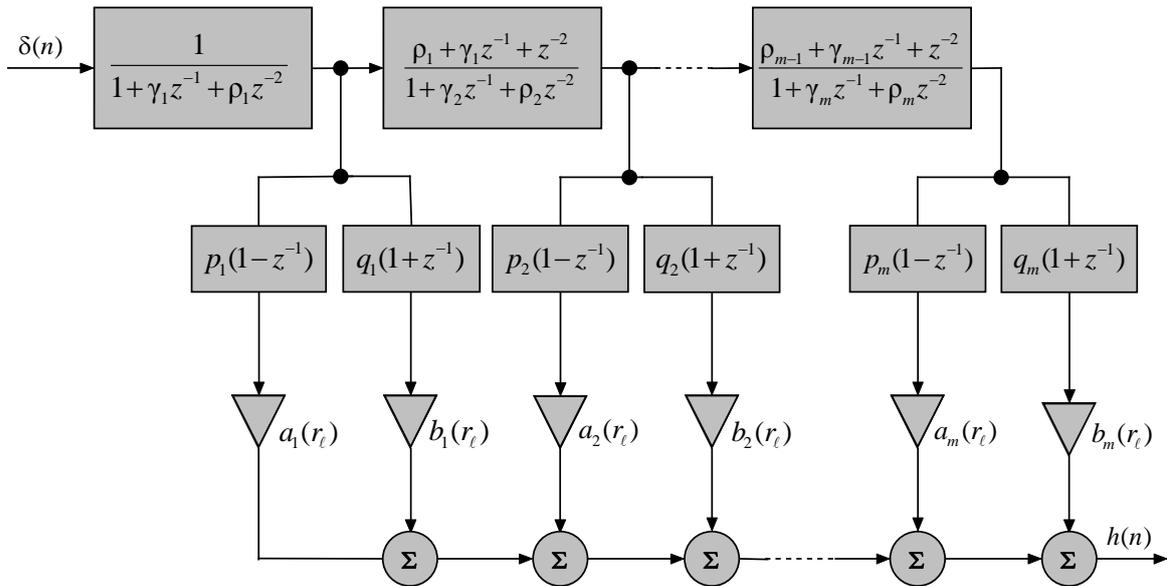


Figura 73 – Filtro de Kautz utilizado para modelar múltiplas RTFs.

Para avaliar a utilização do método LSBU na tarefa de estimação dos parâmetros do modelo CAPZ em sub-bandas, considera-se o mesmo cenário apresentado na Seção 4.3.3. Utilizando a MSQ, obtiveram-se os resultados apresentados nas Figuras 74 e 75. A média da energia do erro obtida com a MSQ, *k-means* e *c-means* é $\bar{E}_c = 0,2589$, $\bar{E}_c = 0,2747$ e $\bar{E}_c = 0,2789$, respectivamente.

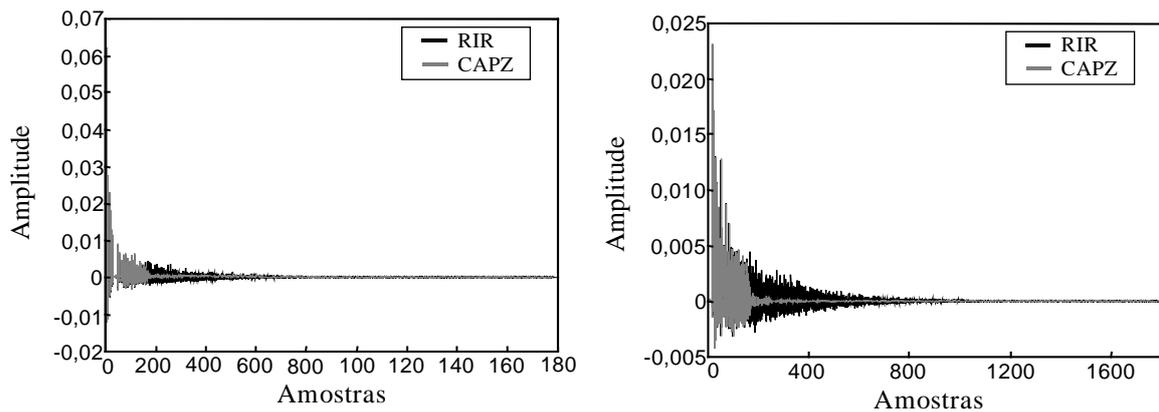


Figura 74 – Comparação das RIRs originais e das obtidas pelo método LSBU, sendo os pólos comuns determinados pela MSQ em sub-bandas.

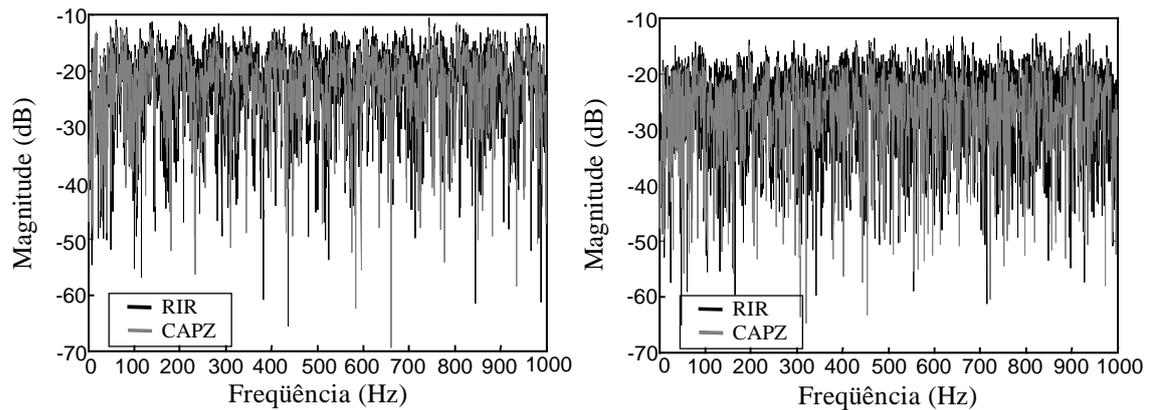


Figura 75 – Comparação das magnitudes das RIRs originais e das obtidas pelo modelo CAPZ determinado pelo LSBU, sendo os pólos comuns determinados pela MSQ em sub-bandas.

4.5 CONCLUSÕES

Este capítulo tratou da modelagem das múltiplas funções de transferência de um ambiente. Foram apresentados o modelo CAPZ e seu método de estimação das diferentes RTFs. Como alternativa, introduziu-se uma nova técnica para determinação dos pólos comuns com garantia de estabilidade e um algoritmo de estimação dos coeficientes dos modelos ARMA das diferentes localizações que minimiza o erro quadrático médio e não uma estimativa do erro conforme sugerido em [16].

Para determinação dos pólos comuns, utilizou-se uma estratégia de identificação de singularidades no plano z adaptada ao contexto deste trabalho, chamada MSQ. Seu desempenho foi comparado aos dos algoritmos *k-means* e *c-means*. Por se tratarem de técnicas que realizam uma média geométrica dos pólos, a estabilidade dos pólos comuns é garantida. Os resultados obtidos, conforme resumido na Tabela 7, demonstram que o uso da MSQ resulta em maior erro normalizado. Porém, comparado com as outras abordagens avaliadas, ela exibe como vantagem ser consideravelmente simples. A implementação em *hardware* de técnica similar discutida em [32] resultou em tempo de processamento menor do que o demandado pelo algoritmo *k-means* na tarefa de determinação dos pólos de um canal de comunicação. A utilização então da MSQ no problema aqui tratado é promissora sob o ponto de vista de implementação.

Conforme discutido anteriormente, o grande erro normalizado obtido na utilização do método de estimação proposto por Haneda [16] é motivado pela não atualização dos coeficientes do polinômio do numerador dos modelos ARMA após a determinação do polinômio definido pelos pólos comuns. O desinteresse do referido autor pela correta definição dos zeros de cada posição pode talvez ser justificada pela aplicação que inicialmente foi dada ao modelo: um cancelador de eco acústico em que os coeficientes do polinômio do numerador são ajustados por meio de um algoritmo adaptativo *least-mean-square* (LMS). O uso do método de Shanks, conforme proposto em [31], para realizar a estimação dos coeficientes dos polinômios dos numeradores resulta na redução do erro normalizado.

Tabela 7 – Resumo dos resultados obtidos na determinação dos parâmetros do modelo CAPZ

Método de determinação dos coeficientes do denominador	Método de determinação dos coeficientes do numerador	Ordem	Técnica para determinação dos pólos comuns	\bar{E}_c
Prony	Prony	80	média dos coeficientes	0,5209
Prony	Shanks		média dos coeficientes	0,096
Prony	Shanks		<i>k-means</i>	0,1091
Prony	Shanks		<i>c-means</i>	0,1042
Prony	Shanks		MSQ	0,1498
LSBU	LSBU		<i>k-means</i>	0,1083
LSBU	LSBU		<i>c-means</i>	0,1116
LSBU	LSBU		MSQ	0,1267

A utilização do método LSBU para estimação dos coeficientes do modelo CAPZ não superou a estimativa obtida com o método de Prony e Shanks. Porém, apesar de não ser apresentado nos resultados de simulação deste capítulo, o erro normalizado da

estimativa de cada RIR utilizando o primeiro foi sempre muito menor do que a obtida com os últimos. O aumento do erro normalizado no caso do LSBU é devido à estimativa dos pólos comuns.

No caso da modelagem em sub-bandas, os resultados obtidos com a utilização da MSQ também são comparáveis aos obtidos com os algoritmos *k-means* e *c-means*. Esses resultados estão apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 – Resumo dos resultados obtidos na determinação dos parâmetros do modelo CAPZ em sub-bandas

Método de determinação dos coeficientes do denominador	Método de determinação dos coeficientes do numerador	Ordem		Técnica para determinação dos pólos comuns	\bar{E}_c
		Por coeficiente	Total		
Prony	Shanks	80, 80, 120, 200, 400, 800	1680	<i>k-means</i>	0,2616
Prony	Shanks			<i>c-means</i>	0,2590
Prony	Shanks			MSQ	0,2653
LSBU	LSBU			<i>k-means</i>	0,2796
LSBU	LSBU			<i>c-means</i>	0,2791
LSBU	LSBU			MSQ	0,2585

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES FINAIS

Este trabalho avaliou as soluções clássicas adotadas na tarefa de modelagem de funções de transferências de ambientes e, a partir desse estudo, foi possível qualificá-las e propor algumas alternativas para melhorá-las.

Após uma discussão inicial sobre a aplicação dos modelos MA, AR e ARMA para modelagem de função de transferência de ambientes, seguiu-se a apresentação de duas técnicas de grande impacto em modelagem ARMA, a saber: o método LSBU e o filtro de Kautz. Além da vantagem de fornecerem uma solução baseada em mínimos quadrados, os pólos definidos pelo polinômio do denominador do referido modelo estimado pelo método LSBU são os pólos ótimos do filtro de Kautz. Sendo assim, esse filtro se mostrou uma alternativa atrativa para a implementação do modelo ARMA estimado pelo método LSBU. Outra característica importante do filtro de Kautz é a forma ortonormal representada pelos pólos da estrutura, possibilitando a avaliação da contribuição de cada pólo na aproximação da resposta ao impulso do ambiente. No exemplo de modelagem estudado neste trabalho, foram desconsiderados os pólos cujos coeficientes de ponderação da correspondente função de Kautz apresentam pequena energia, obtendo-se dessa forma uma redução considerável na ordem do filtro em detrimento de um pequeno acréscimo do erro quadrático médio de aproximação.

A decomposição polifásica e a transformada *wavelet* foram introduzidas com o objetivo de facilitar a tarefa de estimação dos parâmetros dos modelos ARMA. A utilização de ambas resultou em um pequeno erro quadrático médio na aproximação da RIR. No caso da decomposição polifásica, o uso do modelo ARMA estimado pelo método LSBU para aproximar cada componente polifásico resultou em uma satisfatória aproximação da resposta ao impulso da sala; porém, sendo necessário um número significativamente maior de componentes. Resultado similar, sob o ponto de vista subjetivo, foi obtido quando se reduziu a frequência de amostragem da resposta ao impulso da sala por um fator de dois. Nesse caso, foi utilizado metade do número de componentes polifásicos considerados inicialmente e usando com o método LSBU, modelos ARMA de

mesma ordem. A possibilidade da redução da frequência de amostragem ficou evidenciada no uso da transformada *wavelet* na resposta ao impulso. A interpretação-tempo e frequência fornecida pelos coeficientes da transformada aliada à facilidade de sua computação são características que a tornam mais atraente do que a decomposição polifásica. Ademais, a ortonormalidade das funções *wavelet*, torna possível desconsiderar os coeficientes de menor energia, reduzindo, assim, o número de modelos a serem estimados na síntese baseada em tal decomposição.

Para facilitar a tarefa de estimação dos modelos ARMA dos coeficientes *wavelet* nos níveis de escalas mais altos (frequências altas), decompôs-se os detalhes da DWT fazendo-se uso de pacotes *wavelet*. Esse objetivo foi alcançado, porém, a perda da propriedade de decomposição em oitavas proporcionada pelo uso das *wavelets*, fez com que a avaliação subjetiva considerada levasse a um resultado não muito animador. Conforme é sabido, o ouvido humano realiza uma filtragem com resolução em frequência similar a análise *wavelet* multirresolução. Então, pode-se conjecturar que os coeficientes desconsiderados na análise de pacotes *wavelet*, apesar de não serem relevantes em termos de erro quadrático médio, os são sob o ponto de vista subjetivo.

A segunda parte do trabalho tratou da modelagem de múltiplas funções de transferência de um ambiente através do modelo CAPZ. Foi mostrado que o método utilizado para a determinação dos coeficientes do modelo minimiza uma estimativa do erro, sendo que essa equação de erro é a minimizada pelo método de Prony. Além disso, a solução proposta em [16], não prevê a atualização dos coeficientes do numerador após a determinação do denominador comum. No método de Prony [17], a determinação dos coeficientes do numerador é realizada a partir dos coeficientes do denominador. Então, a não atualização dos coeficientes dos numeradores após a determinação do denominador comum acarreta um aumento do erro quadrático médio. Isso foi atestado nesse trabalho pelos resultados obtidos com a utilização do método de Shanks na determinação dos numeradores. Optou-se por esse método por ele fornecer uma solução de mínimos quadrados considerando todo o comprimento do sinal de erro, diferentemente do método de Prony em que os coeficientes do numerador são ajustados de forma a se igualarem somente as primeiras amostras da resposta ao impulso que se está aproximando [17].

Para contornar o problema da não garantia de estabilidade do polinômio comum obtido pela média dos coeficientes dos modelos ARMA estimados, propôs-se a utilização da matriz de singularidades quantizadas (MSQ). Seus resultados foram similares aos obtidos com a técnica de agrupamento *c-means*, já proposta em [31] para solucionar o problema em questão. Contudo, a implementação da MSQ é mais simples por não envolver otimização numérica.

Após o estudo inicial sobre o modelo CAPZ, investigou-se a viabilidade da utilização do método de mínimos quadrados LSBU para estimação dos coeficientes de tal modelo. Comparado ao método de Prony, associado ao de Shanks, o resultado sob o ponto de vista de erro quadrático médio foi semelhante. Apesar do referido erro ser menor na estimação de cada RFT com o uso do LSBU, a determinação do numerador comum leva a uma deterioração da estimativa final. Uma das características que poderia justificar o uso do LSBU é novamente a possibilidade da implementação do filtro de Kautz. Nesse caso, foi mostrado que a síntese das diferentes RTFs de um ambiente é obtida por meio do ajuste dos coeficientes de ponderação do filtro.

Conforme apresentado em [31], estudou-se o caso da modelagem de múltiplas RTFs em sub-bandas. Enquanto nesse trabalho foi utilizado o método de Prony associado ao de Shanks aliado ao algoritmo *c-means* para a estimação dos coeficientes do modelo CAPZ, propôs-se aqui a utilização do método LSBU associado a MSQ. Para a obtenção dos sinais nas sub-bandas, fez-se uso da DWT. Os resultados de ambas alternativas foram comparáveis, mostrando a viabilidade da solução aqui proposta, possuindo como vantagem do uso da MSQ ser de fácil implementação.

Como trabalho futuro, verifica-se a necessidade de um estudo sobre os erros numéricos no processo de desfatoração dos pólos comuns quando usado o método de desfatoração de Lindsey e Fox [55]. Tal problema foi abrandado aqui ao custo de uma resolução menos fina na MSQ.

SOLUÇÃO DE MÍNIMOS QUADRADOS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES SOBREDETERMINADOS

Um sistema de n equações lineares com m incógnitas pode ser escrito como

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \quad (108)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (109)$$

em que \mathbf{A} é uma matriz de dimensão $n \times m$ contendo os coeficientes a_{ij} , com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$; \mathbf{x} é um vetor coluna com dimensão m contendo as incógnitas e \mathbf{b} é um vetor coluna de dimensão n contendo os elementos b_i . A equação (109) pode ser interpretada como a combinação linear dos vetores a_i da matriz \mathbf{A} , com o objetivo de representar o vetor \mathbf{b} , ou seja

$$b = \sum_{i=1}^n x_i a_i. \quad (110)$$

A solução do sistema de equações depende da dimensão da matriz \mathbf{A} , de seu ranque e dos elementos do vetor \mathbf{b} . Neste trabalho, o tipo de sistema encontrado é o sobredeterminado. Tal sistema ocorre quando $m < n$, ou seja, existem mais equações do que incógnitas.

Neste tipo de sistema, o vetor \mathbf{b} não pode ser escrito como combinação linear das colunas de \mathbf{A} . Deve-se então determinar os coeficientes x_i que resultem na melhor aproximação de b . Assim,

$$\hat{b} = \sum_{i=1}^n x_i a_i. \quad (111)$$

A estratégia, via de regra utilizada, é determinar a solução de mínimos quadrados, ou seja, encontrar o vetor x_i que minimize a norma do erro

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|^2. \quad (112)$$

Esta condição é atendida quando o vetor \mathbf{e} é ortogonal aos vetores que definem a base em que \mathbf{b} será expandido. A ortogonalidade implica que

$$\mathbf{A}^H \mathbf{e} = 0 \quad (113)$$

onde H denota a hermitiana transposta.

A equação (109) pode então ser reescrita como

$$\mathbf{A}^H \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad (114)$$

resultando nas equações normais [17]. Se as colunas de \mathbf{A} são linearmente independentes, isto é, possuem ranque completo, então a matriz $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ é inversível e a solução de mínimos quadrados é

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{b}. \quad (115)$$

O mínimo erro quadrático médio obtido é:

$$e_{\min} = \mathbf{b}^H \mathbf{b} - \mathbf{b}^H \mathbf{Ax} \quad (116)$$

No *software* MATLAB, a solução de mínimos quadrados de um sistema de equações lineares é obtida pelo operador “\” [58]. O exemplo a seguir mostra a utilização de tal operador para a obtenção da solução de mínimos quadrados:

```
>> A = [1 2 3;4 5 6;7 8 0;2 5 8]
```

A =

```

1  2  3
4  5  6
7  8  0
2  5  8
```

```
>> y = [366 804 351 514]'
```

```
y =
```

```
366
```

```
804
```

```
351
```

```
514
```

```
>> x = A \ y
```

```
x =
```

```
247.981818181818
```

```
-173.109090909091
```

```
114.927272727273
```

```
>> e = A * x - y
```

```
e =
```

```
-119.454545454545
```

```
11.9454545454547
```

```
4.54747350886464e-013
```

```
35.836363636364
```

```
>> norm(e)
```

```
ans =
```

```
125.284984226871
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] S. T. Neely and J. B. Allen. "Invertibility of a room impulse response," *J. Acoust. So. Am.*, vol 66, no. 1, pp. 165-169, July 1979.
- [2] K. Pedersen, T. B. Sivertsen, and M. Tyril. *Digital Equalization Techniques for Loudspeaker and Room*. Master's Thesis, Institute of Electronic Systems, University of Aalborg, 1998.
- [3] M. Miyoshi and Y. Kaneda, "Inverse Filtering of Room Acoustics," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Audio Processing*, vol. 36, no. 2, pp. 145-152, Feb. 1988.
- [4] R. A. Kennedy and B. D. Radlovic, "Iterative Cepstrum-based approach for speech dereverberation," in *Proc. Int. Symp. Signal Processing and Its Applications (ISSPA '99)*, vol I, pp 55-58, Aug. 1999.
- [5] B. D. Radlovic and R. A. Kennedy, "Nonminimum-phase equalization and its subjective importance in room acoustics," *IEEE Trans. Speech Audio Processing*, vol. 8, no. 6, pp. 728-737, Nov. 2000.
- [6] L. D. Fielder, "Analysis of traditional and reverberation-reducing methods of room equalization," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 51, no. ½, pp. 3-26, Jan/Feb 2003.
- [7] M. Kahrs and K. Brandenburg, *Applications of Digital Signal Processing to Audio and Acoustics*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [8] J. Huopanieme. *Virtual acoustics and 3D sound in multimedia signal processing*. Dissertation for the Degree of Doctor of Science in Technology, Helsinki University of Technology, Finland, 1999.
- [9] L. Savioja. *Modelling Techniques for Virtual Acoustics*. Master of Science Thesis, Helsinki University of Technology, Finland, 2000.
- [10] Y. A. Huang and J. Benesty. *Audio Signal Processing For Next Generation Multimedia Communication Systems*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [11] J. Mourjopoulos and M. A. Paraskevas, "Pole and Zero Modeling of Room Transfer Functions," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 1, no. 3, pp. 281-302, Sep. 1991.
- [12] J. Mourjopoulos, "On the variation and invertibility of room impulse response functions," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 1, no. 3, pp. 217-228, Sep. 1985.

- [13] P. D. Leon, "Impulse Responses for Various Acoustic Environments," <http://www.ece.nmsu.edu/~pdeleon/ASAP/index.html>.
- [14] F. Henriques. "Convolução, o processamento do século 21". *Áudio, Música & Tecnologia*, edição 150, pp. 30-34, Março de 2004.
- [15] F. A. Everest, *Master Handbook of Acoustics*, MacGraw-Hill, 2001.
- [16] Y. Haneda, S. Makino, and Y. Kaneda, "Common acoustical pole and zero modeling of room transfer functions," *IEEE Trans. Speech and Audio Process.*, vol. 2, no. 2, pp. 320-328, April 1994.
- [17] M. H. Hayes, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, John Wiley & Sons, 1996.
- [18] K. Steiglitz and L. McBride, "A technique for the identification of linear systems," *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 10, no 4, pp. 461-464, Oct. 1965.
- [19] T. Paatero and M. Karjalainen, "New Digital Filter Techniques for Room Response Modeling," in *Proc. AES 21st Conf.*, St. Petersburg, June 2002.
- [20] M. Schoenle, U. Zoelzer and N. Fliege, "Modeling of Room Impulse Responses by Multirate System," *93rd AES convention*, San Francisco, Oct. 1992.
- [21] M. Schoenle, N. Fliege and U. Zoelzer, "Parametric Approximation of Room Impulse Responses by Multirate System," *Proc. ICASSP-93*, vol. 1, pp. 153-156, April 1993.
- [22] M. Schoenle, N. Fliege and U. Zoelzer, "Parametric Approximation of Room Impulse Responses based on Wavelet Decomposition," *Proc. ICASSP-93*, pp. 68-71, Oct. 1993.
- [23] J. Pongsiri, P. Amin and C. Thompson, "Modeling the acoustic transfer function of a room," *Proceedings of the 12th International Conference on Scientific Computing and Mathematical Modeling*, pp. 44-51, Aug. 1999.
- [24] M. Karjalainen, P. A. A. Esquef, P. Antsalo, A. Mäkivirta and V. Välimäki, "Frequency-zooming ARMA modeling of resonant and reverberant systems," *Journal of Engineering Society*, vol. 50, no. 12, pp. 1012-1029, Dec. 2002.

- [25] T. Paatero, "Modeling of Long and Complex Responses Using Kautz Filters and Time-Domain Partitions," in *Proceedings of 12th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2004)*, pp. 313-316, Sept. 2004.
- [26] J. Makhoul, "Linear Prediction: A Tutorial Review," *Proceedings of the IEEE*, vol. 63, no 4, pp. 561-580, Apr. 1975.
- [27] T. Paatero, "Efficient Pole-zero Modeling of Resonant Systems using Complex Warping and Kautz Filter Techniques," in *Proceedings of IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA'03)*, pp. 9-12, Oct. 2003.
- [28] T. Paatero and M. Karjalainen, "Kautz Filters and Generalized Frequency Resolution: Theory and Audio Applications," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 51, no. 1/2, pp. 29-46, Jan./Feb. 2003.
- [29] T. Paatero, "An audio motivated hybrid of warping and Kautz filter techniques," in *Proceedings of XI European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2002)*, Toulouse, France, September 3-6, 2002.
- [30] H. Brandenstein and R. Unbehauen, "Least-squares approximation of FIR by IIR digital filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, no. 1, pp. 21-30, Jan. 1998.
- [31] P. Zuccarelo, A. González, J. Domingo, and G. Ayala, "Computation of common acoustical poles in subbands by means of a clustering technique," in *Proc. European Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, pp. 1-5, Sept. 2006.
- [32] B. Theobald, S. Cox, G. Cawley, and B. Milner, "Fast method of channel equalization for speech signals and its implementation on a DSP," *IEEE Electronics Lett.*, vol. 35, no. 16, pp. 1309-1311, Aug. 1999.
- [33] D. H. Friedman, "On approximating an FIR filter using discrete orthonormal exponentials," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-29, pp. 923-926, Aug. 1981.
- [34] B. Beliczynski, J. Kale, and G. D. Cain, "Approximation of FIR by IIR digital filters: An algorithm based on balanced model reduction," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 532-542, Mar. 1992.

- [35] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, Providence, RI: Amer. Math Soc., 1965.
- [36] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer and J. R. Buck, *Discrete-time Signal Processing*, Prentice Hall, 1999.
- [37] P. W. Broome, "Discrete Orthonormal Sequences," *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 12, no. 2, pp. 151-168, April 1965.
- [38] A. C. den Brinker, F. P. A. Benders and T. A. M. O. e Silva, "Optimality Conditions for Truncated Kautz Series," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 43, no. 2, pp. 117-122, Feb. 1996.
- [39] M. Kunt, *Digital Signal Processing*, Artech House, 1986.
- [40] T. Y. Young and W. H. Huggins, "'Complementary' Signals and Orthogonalized Exponentials," *IRE Trans Circuit Theory*, vol. CT-9, pp. 362-370 (1962).
- [41] T. Paatero, M. Karjalainen and A. Härmä, "Modeling and Equalization of Audio Systems Using Kautz Filters," in *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'01)*, vol. 5, pp. 3313-3316, Salt Lake City, Utah, USA, May 7-11, 2001.
- [42] U. Zoelzer, N. Fliege, M. Schoenle and M. Schusdzirra, "Multirate Digital Reverberation System," *AES Preprint*, 89th Convention, Los Angeles 1990.
- [43] M. R. Schroeder, "Natural Sound Artificial Reverberation," *Journal of Engineering Society*, vol. 10, pp. 219-223, July 1962.
- [44] H. Lopacz and P. Kleczkowski, "Synthesis of Room Impulse Response Based on the Discrete Wavelet Transform," *AES Preprint*, 109th Convention, Los Angeles, 2000.
- [45] C. S. Burrus, R. A. Gopinath and H. Guo. *Introduction to wavelets and wavelets transforms*, Prentice Hall, 1998.
- [46] T.K. Sarkar, C. Su, R. Adve, M. Salazar-Palma, L. Garcia-Casillo, R. R. Boix, "A tutorial on wavelets from an electrical engineering perspective. I. Discrete wavelet techniques," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 40, pp. 33-49, oct. 1998.
- [47] B. Gold and N. Morgan. *Speech and Audio Signal Processing*, John Wiley & Sons, 2000.

- [48] `rir_generator.oct`; 2006. Versão 1.7.20060531. Programa que implementa o método da imagem para gerar respostas ao impulso de ambientes. E. A. P. Habets. Technische University Eindhoven, The Netherlands. <http://www.sps.ele.tue.nl/members/E.A.P.Habets/rir%5Fgenerator/>. Linguagem MATLAB.
- [49] Y. Haneda, Y. Kaneda and N. Kitawachi, “Common-Acoustical-Pole and Residue Model and Its Application to Spatial Interpolation and Extrapolation of a Room Transfer Function,” *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing Mag.*, vol. 7, no. 6, pp. 709-717, Nov. 1999.
- [50] J. Mourjopoulos, “On the Variation of Room Impulse Response Functions,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 1, no. 3, pp. 281-302, Sep. 1991.
- [51] F. S. Pacheco e R. Seara, “Remoção do efeito de reverberação do ambiente em sinais de fala considerando um único microfone,” *Anais do XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2004)* Belém, PA, Set. 2004, pp. 1-5.
- [52] P.S. Spencer and P.J.W. Rayner, “Separation of Stationary and Time-Varying Systems and Its Application to the Restoration of Gramophone Recordings”, *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 1, pp. 292–295, May 1989.
- [53] L. Kaufman, P. J. Rouseuw. *Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis*, John Wiley & Sons, 2005.
- [54] F. Klawonn and F. Hoppner, “What is Fuzzy about Fuzzy Clustering? Understanding and Improving the Concept of the Fuzzfier”, M.R. Berthold, H.-J. Lenz, E. Bradley, R. Kruse, C. Borgelt (eds.): *Advances in Intelligent Data Analysis V*. Springer, Berlin, pp. 254-264, 2003.
- [55] G. A. Sitton, C. S. Burrus, J. W. Fox, and S. Treitel, “Factoring very-high-degree polynomials,” *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 20, no. 6, pp. 27-42, Nov. 2003.
- [56] Zoran Cvetkovic and James D. Johnston, “Nonuniform oversampled filter banks for audio signal processing,” *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 11, no. 5, pp. 393–399, September 2003.

-
- [57] C. O. Ferreira e R. Seara, “Determinação dos Pólos Comuns de Funções de Transferências de Ambientes Utilizando Matriz de Singularidades Quantizadas”, XXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT 2007, 03-06 de setembro de 2007, RECIFE, PE.
- [58] D. Hanselman and B. Littlefield, *Matlab 6 Curso Completo*, Prentice Hall, São Paulo, 2003.