

DIEGO AMADEU FURTADO TORRES

*Método dos Elementos Finitos  
Generalizados aplicado à análise de placas  
laminadas compostas inteligentes*

Florianópolis

Fevereiro de 2008

DIEGO AMADEU FURTADO TORRES

*Método dos Elementos Finitos  
Generalizados aplicado à análise de placas  
laminadas compostas inteligentes*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, do Centro Tecnológico da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, com ênfase em Análise e Projeto Mecânico.

Orientador:

Prof. Paulo de Tarso Rocha de Mendonça, Ph.D.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

Fevereiro de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA

*Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à  
análise de placas laminadas compostas inteligentes*

DIEGO AMADEU FURTADO TORRES

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

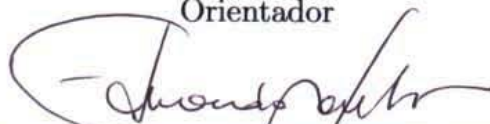
MESTRE EM ENGENHARIA  
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA  
ÊNFASE EM ANÁLISE E PROJETO MECÂNICO

sendo aprovada em sua forma final.



---

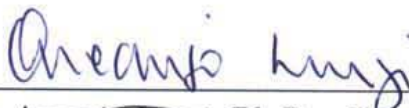
Prof. Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.  
Orientador



---

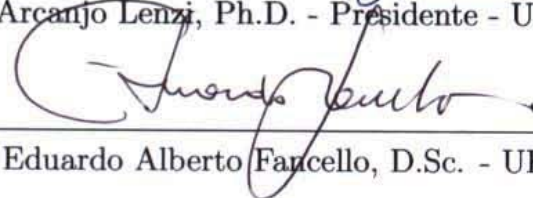
Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.  
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D. - Presidente - UFSC



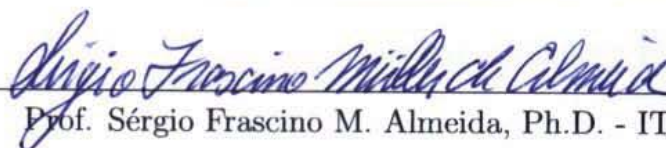
---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc. - UFSC



---

Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D. - UFSC



---

Prof. Sérgio Frascino M. Almeida, Ph.D. - ITA

*A todos que acreditam que é possível fazer mais.*

# *Agradecimentos*

À minha família, pelo carinho e presença constantes, apesar da distância, e em especial a minha querida Mãe, Miriam, a quem devo os mais nobres ensinamentos e cujo grande apoio me faz confiante em minhas escolhas.

Ao meu orientador, Prof. Paulo de Tarso, pelo compromisso e dedicação dispensados ao longo do desenvolvimento deste trabalho, pela competência e paciência em minha condução.

Ao Prof. Hércio de Queiroz, quem primeiro me apresentou a Mecânica dos Sólidos e cuja competência e habilidade me fizeram profundamente admirado e interessado por esta ciência.

Aos Profs. Luiz Nishiyama e Jesiel Cunha, orientadores durante a graduação, pela oportunidade e ensinamentos, amizade concedida e cujo apoio se fez imprescindível para minha chegada nesta etapa.

Aos caros companheiros do GRANTE, cuja amizade propiciou um ambiente bastante agradável para nos conhecermos e nos ajudarmos, onde compartilhamos bons momentos, os quais não posso deixar de citar: Andresa, Armin, Augusto, Daniel, Dyego, Emanuel, Enildo, Françoá, Jairo, Jorge, Juliana, Louise, Márcio, Pedro, Ronaldo e Waldemar.

À nação brasileira, que por meio da CAPES, proveu indispensável auxílio financeiro para a minha manutenção ao longo deste trabalho.

# *Resumo*

Estruturas inteligentes são sistemas cuja forma e características estruturais e operacionais podem ser monitoradas e modificadas ao longo de sua vida útil, permitindo garantir a satisfação aos requisitos de projeto e melhorando o desempenho. Neste escopo, estruturas laminadas compostas são bastante adaptáveis a esta tecnologia, favorecendo o projeto de componentes com sensores e atuadores inseridos no estratificado ou colados nas superfícies. Aliado ao excepcional desempenho dos materiais compostos e às propriedades especiais de materiais com resposta acoplada, sistemas de controle consistem do elo que completa a cadeia que define os sistemas inteligentes. Indubitavelmente, para o projeto de tais estruturas, existe a demanda por metodologias e ferramentas para análise e verificação. Assim, este trabalho apresenta uma formulação desenvolvida sob a ótica do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) para a análise numérica de placas laminadas compostas com sensores e atuadores piezelétricos. O MEFG, como uma formulação não convencional do Método de Elementos Finitos (MEF), emprega uma malha de elementos finitos para construir uma Partição da Unidade, sobre a qual são adicionados refinamentos  $p$ -hierárquicos com o propósito de ampliar o espaço de aproximação da solução. As funções de enriquecimento são definidas globalmente e, portanto, tal estratégia minimiza a importância da malha, fator que tem motivado o desenvolvimento dos métodos sem malhas. A formulação se baseia num modelo de Teoria Mista, e neste caso, propõem-se a aproximação das variáveis elétricas mediante a Teoria em Camadas Discretas de *Reddy* e a aproximação das variáveis mecânicas através da Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Superior de *Levinson*, isto é, uma Teoria em Camada Equivalente Única. Todo o desenvolvimento foi conduzido para um sistema dinâmico e foram implementadas rotinas computacionais em linguagem FORTRAN 90 para a análise estática de alguns modelos, cujas soluções obtidas através de outras teorias constantes na literatura foram usadas para validação da formulação. Além disso, foi analisada a influência da forma com que se impõem as condições de contorno essenciais, mostrou-se a capacidade de aproximação quando do uso do enriquecimento polinomial  $-p$  para malha com elementos distorcidos e a influência do enriquecimento polinomial  $-p$  na aproximação de campos primais e duais. As equações do movimento e as condições de contorno consistentes foram desenvolvidas para o modelo misto utilizado no desenvolvimento numérico. Um laminado retangular foi analisado pela formulação em MEFG e seus resultados foram comparados á solução analítica, em séries trigonométricas, obtida a partir da forma forte do problema.

*Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados, placas laminadas compostas, piezeletricidade, Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Superior, Teoria em Camadas Discretas.*

# *Abstract*

Intelligent structures are systems whose shape and structural and functional features may be monitored and modified while in its useful life, allowing to hold the satisfying to design requirements and improving the performance. In this scope, laminated composite structures are very adaptable to this technology, favoring the design of components with sensors and actuators embedded within the laminate or bonded on the surfaces. Allied to the exceptional performance of the composite materials and to the special properties of materials with coupled response, control systems consist of the link which complete the chain that define intelligent systems. Undoubtedly, for the design of such structures, there exist the demand for methodology and tools for analysis and verification. Hence, this work presents a tool implemented under the Generalized Finite Element Method philosophy (GFEM) for numerical analysis of composite laminated plates with piezoelectric sensors and actuators. The GFEM, as a nonconventional Finite Element Method (FEM) formulation, employs a finite element mesh to build a Partition of Unity, over which are added  $p$ -hierarchical refinements with the proposal of enlarge the solution approximation subspace. The enrichment functions are globally defined and, therefore, such strategy minimize the mesh importance, factor which has motivated the meshfree methods development. The formulation is based on a Mixed Theory model, and in this case, it is proposed the approximation of electrical unknowns through of the Reddy's Layerwise Theory and the approximation of mechanical unknowns through of the Levinson's Higher-Order Shear Deformation Theory, this is, a Equivalent Single Layer Theory. The complete development was conducted for a dynamic system and computational routines was implemented with FORTRAN 90 language for the static analysis of some models, whose solutions obtained by others theories constants in the literature were used for the formulation verification. Moreover, the influence of the way as the essential boundary conditions are enforced was analyzed, the approximation capability when of the use of polynomial enrichment  $-p$  for distorted meshes and its influence in the primal and dual fields approximation was showed. The displacement equations and the consistent boundary conditions were developed for the mixed model employed in the numerical implementation. A rectangular laminate was analyzed by the GFEM formulation and its results were compared to the analytical solution, using trigonometrical series, obtained from the strong form problem.

*Keywords: Generalized Finite Element Method, composite laminated plates, piezoelectricity, Higher-Order Shear Deformation Theory, Layerwise Theory.*

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação e proposta do trabalho . . . . .	1
1.2	Contribuições . . . . .	5
1.3	Estrutura da dissertação . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Estado da arte de modelagem de placas inteligentes</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG)</b>	<b>15</b>
3.1	Inserção do MEFG no curso do desenvolvimento dos métodos numéricos . .	15
3.2	Noção de aproximação local da solução . . . . .	22
3.3	Construção do espaço de aproximação . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Mecânica de placas laminadas compostas</b>	<b>32</b>
4.1	Macromecânica de uma lâmina composta . . . . .	33
4.2	Teorias de placas laminadas em camada equivalente única . . . . .	37
4.2.1	Teoria clássica de placas laminados . . . . .	38
4.2.2	Teoria de primeira ordem . . . . .	39
4.2.3	Teorias de ordem superior . . . . .	40
4.2.4	Teoria de deformação cisalhante de ordem zero . . . . .	45
4.3	Teorias de placas laminadas em camadas discretas . . . . .	47
4.4	Teorias mistas . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Eletroelasticidade linear</b>	<b>57</b>
5.1	Revisão histórica . . . . .	57



5.2	Formulação fenomenológica da eletroelasticidade linear . . . . .	59
5.3	Equações governantes da piezeletricidade linear . . . . .	62
5.4	Relação constitutiva acoplada . . . . .	66
5.4.1	Rotação da relação constitutiva acoplada . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Formulação discretizada em MEFG</b>	<b>76</b>
6.1	Funcional eletromecanicamente acoplado . . . . .	76
6.2	Descrição do comportamento mecânico . . . . .	78
6.2.1	Discretização das variáveis mecânicas . . . . .	79
6.3	Descrição do comportamento elétrico . . . . .	84
6.3.1	Discretização das variáveis elétricas . . . . .	85
6.4	Associação das variáveis mecânicas e elétricas . . . . .	88
6.4.1	Aproximação via MEF . . . . .	88
6.4.2	Aproximação via MEFG . . . . .	90
6.5	Correção da relação constitutiva . . . . .	92
6.6	Obtenção da matriz de rigidez do elemento . . . . .	97
6.7	Obtenção da matriz de inércia elementar . . . . .	108
6.8	Obtenção das forças elementares . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Solução analítica</b>	<b>113</b>
7.1	Equações de equilíbrio . . . . .	113
7.2	Princípio dos trabalhos virtuais . . . . .	115
7.3	Equações constitutivas do laminado piezelétrico . . . . .	128
7.4	Equações do movimento em termos de deslocamentos generalizados . . . . .	132
7.5	Solução de Navier . . . . .	135
7.5.1	Análise de flexão estática . . . . .	148
<b>8</b>	<b>Aplicações</b>	<b>154</b>

## Sumário

---

8.1	Bimorfo piezelétrico com atuação . . . . .	154
8.2	Placa com pastilhas piezelétricas discretas . . . . .	157
8.2.1	Placa laminada composta com atuadores . . . . .	157
8.2.2	Placa laminada composta com sensores e atuadores . . . . .	165
8.3	Placa laminada quadrada simplesmente apoiada . . . . .	167
8.3.1	Efeito do enriquecimento na aproximação de deslocamentos . . . . .	167
8.3.2	Efeito do enriquecimento na aproximação de tensões . . . . .	171
<b>9</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>174</b>
9.1	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	176
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>178</b>
	<b>Apêndice A – Solução do sistema de equações no MEF</b>	<b>186</b>

# *Lista de símbolos*

$C^k$	Espaço de funções com derivadas contínuas até a ordem $k$
$\Omega$	Domínio
$\mathbb{R}^n$	Espaço de dimensão $n$
$G_j$	Conjuntos abertos que definem os suportes das funções da PU
$\varphi_j$	Funções de forma do MEF usadas como PU no MEFG
$\mathbf{x}$	Posição no domínio
$t$	Instante de tempo
$\partial\Omega$	Contorno do domínio $\Omega$
$A$	Operador linear diferencial
$u(\mathbf{x})$	Função contínua
$f$	Função prescrita em $\Omega$ para o PVC
$g_k$	Função prescrita em $\partial\Omega$ para o PVC
$B_k$	Operadores lineares diferenciais no contorno de $\Omega$
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert
$\mathcal{X}$	Sub-espaço de dimensão finita de $\mathcal{H}$
$Q_{n_{nos}}$	Conjunto de pontos nodais
$\mathbf{x}_j$	Posição no domínio do nó número $j$
$w_j$	Nuvem nodal associada ao nó número $j$
$r_j$	Raio da nuvem nodal
$\mathcal{X}_{n_{nos}}$	União de todas as nuvens
$\bar{\Omega}$	Interior e contorno do domínio $\Omega$
$\tilde{u}$	Aproximação da função $u$ solução do PVC
$\alpha_i$	Valores discretos da função $\tilde{u}$ nos pontos nodais
$PU$	Partição da unidade
$C_0^l$	Espaço de funções com derivadas de suporte compacto e contínuas até a ordem $l$
$\mathcal{I}_N$	Cobertura aberta do domínio $\Omega$
$N$	Número de nós no domínio ou suportes de nuvens
$\tilde{u}_j^i$	Aproximação local $i$ de $u$ associada ao nó $j$

$\mathcal{L}_{ij}$	Funções de aproximação locais de ordem $i$ relativas ao nó $j$
$J(j)$	Conjunto de índices de referência às funções de enriquecimento do nó $j$
$\mathcal{N}_i^j$	Funções obtidas pelo produto de $\mathcal{L}_{ij}$ pela PU no elemento
$u _{\omega_j}$	Função solução $u$ sobre o suporte $\omega$ do nó $j$
$\tau_j$	Elemento finito $j$
$\mathcal{P}_k$	Espaço polinomial de grau máximo $k$
$\mathcal{F}_N^p$	Família de funções formada pela PU nos $N$ nós geradora do espaço $\mathcal{P}_p$
$Nne$	Número de nós do elemento
$a_j^k$	Constantes da combinação linear da PU, no nó $j$ relativa a $k$
$\Phi$	Vetor das funções de aproximação da solução
$\mathbf{U}$	Vetor de parâmetros generalizados do problema aproximado
$q_j(p)$	Número de funções enriquecedoras para a nuvem $\omega_j$ e com ordem polinomial $p$ máxima que se deseja representar
$\mathcal{B}(\bullet, \bullet)$	Forma bi-linear em $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$
$\ell(\bullet)$	Forma linear em $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$
$\tilde{v}$	Função teste do método de Galerkin
$\mathbf{V}$	Vetor de parâmetros generalizados da função teste
$\mathcal{U}_h$	Sub-espço de dimensão finita de $\mathcal{U}$
$\mathcal{V}_h$	Sub-espço de dimensão finita de $\mathcal{V}$
$h_{k_j}$	Dimensão característica da nuvem relativa ao nó $j$ na direção $k$
$b_{i_y}$	Parâmetros generalizados nodais das funções incógnitas correspondentes ao nó $i$ , das funções enriquecedoras $y$
$c_{i_y}$	Parâmetros generalizados nodais das funções incógnitas correspondentes ao nó $i$ , das funções enriquecedoras $y$
$\sigma$	Tensor de tensões
$\mathbf{C}$	Tensor de propriedades elásticas do material
$\varepsilon$	Tensor de deformações
$[C]$	Matriz de rigidez do material
$[S]$	Matriz de flexibilidade do material
$E_i$	Módulo de elasticidade na direção $i$
$\nu_{ij}$	Coefficiente de Poisson relativo às direções $i$ e $j$
$G_{ij}$	Módulo de cisalhamento no plano $ij$

$\Delta$	Constante para obtenção dos coeficientes da matriz de rigidez do material
$\vartheta_i$	Componente de deslocamento $i$ nas teorias em Camada Equivalente Única
$\vartheta_i^j$	Variáveis a serem determinadas nas teorias em Camada Equivalente Única
$u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t)$	Componentes do vetor deslocamento paralelas aos eixos cartesianos $x, y$ e $z$ , respectivamente
$u^o, v^o, w^o$	Deslocamentos generalizados na superfície de referência
$\psi_x, \psi_y, \psi_z$	Deslocamentos generalizadas de primeira ordem nas teorias de placas
$\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$	Deslocamentos generalizados de segunda ordem nas teorias de placas
$\phi_x, \phi_y, \phi_z$	Deslocamentos generalizados de terceira ordem nas teorias de placas
$\eta_x, \eta_y$	Deslocamentos generalizados de quarta ordem nas teorias de placas
$h$	Espessura do laminado
$z_{k-1}$	Superfície inferior da lâmina $k$
$z_k$	Superfície superior da lâmina $k$
$U_I, V_I, W_I$	Valores nodais de deslocamentos na interface $I$ nas teorias em Camadas Discretas
$\Phi^I, \Psi^I$	Funções de interpolação na direção da espessura na interface $I$ para as teorias em Camadas Discretas
<b>P</b>	Vetor polarização
<b>E</b>	Vetor campo elétrico
<b>d</b>	Tensor de constantes piezelétricas de deformação
$\rho_p$	Densidade de carga elétrica equivalente
<b>D</b>	Vetor deslocamento elétrico
$\chi$	Tensor de constantes de permissividade dielétrica
$\theta$	Temperatura
<b>p</b>	Vetor de coeficientes piroelétricos
$\Phi_0$	Funcional de energia livre de Gibbs
$\eta$	Entalpia
<b>e</b>	Tensor de constantes piezelétricas de tensão
$\beta_{ij}$	Coefficientes de expansão térmica

$c_v$	Calor específico por unidade de massa
$\Pi_G$	Funcional híbrido da piezeletricidade linear
$\mathbf{b}$	Vetor de forças de corpo
$\mathbf{t}$	Vetor de forças de superfície
$w$	Densidade superficial de carga elétrica
$\phi$	Potencial elétrico
$\bar{\bullet}$	Valor prescrito
$S_t, S_u, S_\omega, S_\phi$	Partições do contorno do domínio onde se prescrevem tensões, deslocamentos, cargas elétricas e potencial elétrico, respectivamente
$n_i$	Componentes do vetor $\mathbf{n}$ normal à superfície
$\mathcal{D}_e$	Operador diferencial do campo elétrico
$\mathcal{D}_m$	Operador diferencial de deformações mecânicas
$\mathbf{n}_m$	Vetor normal ao contorno onde se prescrevem tensões mecânicas
$\mathbf{n}_e$	Vetor normal ao contorno onde se prescrevem cargas elétricas
$[L]$	Matriz de rotação de tensores de segunda ordem
$[T]$	Matriz de rotação das componentes do vetor tensão com índices contraídos
$[R]$	Matriz de transformação entre as definições do vetor de deformação
$[\bar{C}]$	Matriz de coeficientes elásticos rotacionada
$[\bar{e}]$	Matriz de coeficientes piezelétricos rotacionada
$[\bar{\chi}]$	Matriz de coeficientes de permissividade dielétrica rotacionada
$\sigma^1, \varepsilon^1, D^1, E^1$	Variáveis definidas no sistema de coordenadas intrínseco do material
$\sigma^x, \varepsilon^x, D^x, E^x$	Variáveis definidas no sistema de coordenadas global do problema
$K$	Energia cinética total do sistema
$P$	Energia potencial de deformação total do sistema
$W$	Trabalho total das forças externas aplicadas
$\mathbf{f}^S$	Forças de superfície
$\mathbf{f}^V$	Forças de corpo
$\mathbf{f}^P$	Forças pontuais
$\varphi$	Potencial elétrico

$\ddot{\bullet}$	Segunda derivada temporal
$q$	Carga elétrica livre de superfície
$Q$	Carga elétrica livre
$T$	Matriz transposta
$\varepsilon_{mf}$	Deformações generalizadas de membrana e flexão
$\gamma_c$	Deformações generalizadas de cisalhamento transversal
$\varepsilon^0$	Deformações generalizadas normais
$\kappa$	Rotações generalizadas de primeira ordem
$\kappa_3$	Rotações generalizadas de ordem superior
$\gamma^0$	Deformações generalizadas angulares
$\kappa_2$	Rotações generalizadas de ordem superior de cisalhamento transversal
$[\mathbb{N}_{no}^e]$	Funções de forma elementares relativas ao nó $no$
$[\mathbf{N}^e]$	Matriz de funções de aproximação de variáveis no elemento
$\{\varepsilon_{mf}\}$	Vetor de componentes de deformações generalizadas de membrana e flexão
$[\mathbb{B}_{mfno}^e]$	Funções de aproximação das deformações de membrana e flexão relativas ao nó $no$
$[\mathbf{B}_{mf}^e]$	Matriz de aproximação das deformações de membrana e flexão no elemento $e$
$\{\gamma_c\}$	Vetor de componentes de deformações generalizadas de cisalhamento transversal
$[\mathbb{B}_{cno}^e]$	Funções de aproximação das deformações cisalhantes transversais relativas ao nó $no$
$[\mathbf{B}_c^e]$	Matriz de aproximação das deformações cisalhantes transversais no elemento $e$
$nf(\bullet_{no})$	Número de funções de enriquecimento da variável $\bullet$ relativas ao nó $no$
$f_{\bullet_{no}}^j$	Função de enriquecimento de número $j$ da variável $\bullet$ relativa ao nó $no$
$npar$	Número de parâmetros de enriquecimento no elemento
$\{\mathbb{U}_{no}^e\}$	Vetor de incógnitas relativas ao nó $no$
$\{\mathbf{U}^e\}$	Vetor de incógnitas do elemento $e$
$n_{piez}$	Número de lâminas piezelétricas
$L_1, L_2$	Funções de aproximação do potencial elétrico na espessura da lâmina em coordenadas intrínsecas
$\varphi_{no}^k$	Potencial elétrico relativo ao nó $no$ na lâmina piezelétrica $k$

$\tilde{\varphi}$	Aproximação da função potencial elétrico
$\tilde{\mathbf{E}}$	Aproximação do vetor campo elétrico
$h_k$	Espessura da lâmina $k$
$[\mathbb{B}_{no}^{ke}]$	Funções de aproximação do campo elétrico na lâmina piezolétrica $k$ relativas ao nó $no$
$[\mathbf{B}^{ke}]$	Matriz de aproximação do campo elétrico na lâmina piezolétrica $k$ no elemento $e$
$[\hat{\mathbf{C}}]$	Matriz de coeficientes de rigidez elástica corrigida
$[\hat{\mathbf{e}}]$	Matriz de coeficientes piezolétricos corrigida
$[\hat{\chi}]$	Matriz de coeficientes de permissividade dielétrica corrigida
$[\mathbf{B}^{0ke}]$	Matriz de aproximação da parcela constante do campo elétrico na lâmina piezolétrica $k$ no elemento $e$
$[\mathbf{B}^{1ke}]$	Matriz de aproximação da parcela com variação linear do campo elétrico na lâmina piezolétrica $k$ no elemento $e$
<b>A, B, D, F, H, L</b>	Sub-matrizes constitutivas do laminado de membrana e flexão
<b>Ac, Dc, Fc</b>	Sub-matrizes constitutivas do laminado de cisalhamento transversal
$\mathbf{O}^k, \mathbf{P}^k, \mathbf{Q}^k, \mathbf{R}^k, \mathbf{S}^k$	Sub-matrizes constitutivas da lâmina piezolétrica $k$ de acoplamento eletromecânico de membrana e flexão
$\mathbf{T}^k, \mathbf{U}^k, \mathbf{W}^k$	Sub-matrizes constitutivas da lâmina piezolétrica $k$ de acoplamento eletromecânico de cisalhamento transversal
$\mathbf{X}^k, \mathbf{Y}^k, \mathbf{Z}^k$	Sub-matrizes constitutivas da lâmina piezolétrica $k$ de comportamento puramente elétrico
$\mathbf{B}^{me}, \mathbf{B}^{fe}, \mathbf{B}^{3fe}$	Parcelas da matriz de aproximação das deformações de membrana e flexão
$\mathbf{B}^{ce}, \mathbf{B}^{2ce}$	Parcelas da matriz de aproximação das deformações cisalhantes transversais
$[\mathbf{K}_{uu}^e]$	Matriz de rigidez puramente mecânica do elemento $e$
$[\mathbf{K}_{u\varphi}^e]$	Matriz de rigidez mecânica eletricamente acoplada do elemento $e$
$[\mathbf{K}_{\varphi u}^e]$	Matriz de rigidez elétrica mecanicamente acoplada do elemento $e$
$[\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e]$	Matriz de rigidez puramente elétrica do elemento $e$
$[\mathbf{K}^e]$	Matriz de rigidez do elemento $e$
$\mathbf{N}^0, \mathbf{N}^1, \mathbf{N}^3$	Funções de aproximação dos deslocamentos generalizados de translação, rotações de primeira ordem e rotações de ordem superior, respectivamente



$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_6$	Massas generalizadas
<b>I</b>	Matriz identidade
$[\mathbf{M}^e]$	Matriz de inércia elementar
$\mathbf{F}^{eV}$	Vetor de forças de corpo elementar
$\mathbf{F}^{eS}$	Vetor de forças de superfície elementar
$\mathbf{F}^{eP}$	Vetor de forças pontuais elementar
$\{F\}$	Componentes da força de corpo
$\{T\}$	Componentes da força de superfície
$\{\bar{F}\}$	Componentes da força de corpo equivalente
$\bar{q}_e$	Carga elétrica livre por unidade de área
$\varphi^{(k)}(z)$	Função de aproximação do potencial elétrico na lâmina $k$ na direção da espessura
$\{N\}, \{M\}, \{M_3\}$	Resultantes de tensões de membrana e flexão
$\{Q\}, \{Q_2\}$	Resultantes de tensões cisalhantes transversais
$\{L\}^{(k)}$	Resultante do deslocamento elétrico coplanar na lâmina piezolétrica $k$
$J_k$	Resultante do deslocamento elétrico na direção da espessura da lâmina piezolétrica $k$
$\bar{q}_{sx}, \bar{q}_{sy}, \bar{q}_{sz}$	Componentes da força de superfície na face superior do laminado
$\bar{q}_{ix}, \bar{q}_{iy}, \bar{q}_{iz}$	Componentes da força de superfície na face inferior do laminado
$\bar{q}_{ek}$	Carga elétrica livre distribuída na face inferior da lâmina piezolétrica $k$
$\bar{q}_x, \bar{q}_y, \bar{q}_z$	Forças generalizadas no domínio plano
$\bar{m}_x, \bar{m}_y$	Momentos generalizados no domínio plano
$\bar{m}_{3x}, \bar{m}_{3y}$	Momentos generalizados de ordem superior no domínio plano
$\bar{N}_n, \bar{N}_{ns}$	Forças generalizadas normais aplicadas no contorno
$\bar{M}_n, \bar{M}_{ns}$	Momentos generalizados aplicados no contorno
$\bar{M}_{3n}, \bar{M}_{3ns}$	Momentos generalizados de ordem superior aplicados no contorno
$\bar{Q}_n$	Cortante generalizado aplicado no contorno
$f_x, f_y, f_z$	Forças generalizadas de inércia
$f_{mx}, f_{my}$	Forças generalizadas de inércia
$f_{3mx}, f_{3my}$	Forças generalizadas de inércia

$n_x, n_y$	Componentes cartesianas do vetor $\mathbf{n}$ normal ao contorno
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$	Coefficientes da expansão em séries dos deslocamentos generalizados para o harmônico $m, n$
$X_{mn}, Y_{mn}$	Coefficientes da expansão em séries das rotações generalizadas para o harmônico $m, n$
$\mathbb{X}_{mn}, \mathbb{Y}_{mn}$	Coefficientes da expansão em séries das rotações generalizadas para o harmônico $m, n$
$\Phi_{mn}^{(k-1)}$	Coefficiente da expansão em séries do potencial na lâmina piezométrica $k$ para o harmônico $m, n$
$a, b$	Dimensões da placa retangular
$m, n$	Harmônicos da expansão em séries trigonométricas
$\omega$	Frequência de vibração
$Q_{mn}$	Coefficiente da expansão em série do carregamento mecânico imposto
$\Theta_{mn}^{(k)}$	Coefficiente da expansão em série do potencial elétrico imposto na lâmina piezométrica $k$
$[K_{mn}]$	Matriz de coeficientes de rigidez para o harmônico $m, n$
$\{Z_{mn}\}$	Vetor de coeficientes incógnitos para o harmônico $m, n$
$\{F_{mn}\}$	Vetor de coeficientes de força externa para o harmônico $m, n$

# 1 *Introdução*

## 1.1 *Motivação e proposta do trabalho*

O aprimoramento das metodologias de análise de estruturas tem conduzido e estimulado a concepção de sistemas integrados, juntamente com a aplicação de materiais com propriedades bastante peculiares, capazes de perceber e se adaptar a possíveis alterações nas condições ambientais e operacionais, objetivando garantir o desempenho satisfatório da estrutura em face às solicitações e aos requisitos de projeto.

Na indústria da mobilidade, especialmente na aeroespacial, o peso próprio é uma das principais restrições e existe uma busca incessante por materiais mais leves que permitam satisfazer as mesmas propostas que seus similares convencionais. Grandes estruturas espaciais que usualmente envolvem trabalho de precisão são frequentemente flexíveis, leves e possuem baixo amortecimento, de tal forma que o comportamento vibratório se torna um item importante (CHEE, TONG e STEVEN, 1998).

Métodos passivos para redução de ruído e vibração ou para garantir um desempenho estrutural ótimo têm alcançado certos limites. Por esta razão, o desenvolvimento de *estruturas inteligentes* (smart structures) tem se tornado bastante importante. Os termos *estruturas inteligentes*, *estruturas adaptativas*, *estruturas ativas* e *adaptrônica* (do inglês “adaptronics”) fazem todos parte do referido campo de estudo (HURLEBAUS e GAUL, 2006). Todos estes termos se referem à integração de atuadores e sensores aos componentes estruturais, além de alguma espécie de unidade de controle ou amplificação e processamento de sinal. Em suma, o objetivo desta integração é a concepção de um sistema capaz de melhorar o desempenho estrutural, com reduzido aumento de massa e com baixo consumo de energia.

Devido à sua natureza, a análise e desenvolvimento de estruturas inteligentes requer interdisciplinaridade, visto que numerosas competências (ciência dos materiais, mecânica aplicada, teoria de controle, etc.) estão envolvidas no projeto de uma estrutura inteligente.

Estruturas inteligentes são sistemas cuja geometria e características estruturais podem ser satisfatoriamente modificadas durante sua vida operacional. Por causa de suas capacidades de auto-monitoramento e auto-adaptação as estruturas inteligentes, recentemente, têm atraído a atenção de inúmeros pesquisadores, cujos focos variam desde o controle de forma e controle de vibrações às aplicações de auto-diagnóstico para detecção de fraturas e danos na estrutura. A motivação para utilização de estruturas inteligentes é permitir mudar sua forma ou suas propriedades materiais ou estruturais evitando os problemas mencionados, melhorando desempenho e vida útil (CHEE, TONG e STEVEN, 1998).

Os quatro elementos fundamentais de uma estrutura inteligente são: os elementos **sensores**, destinados a captar as alterações nas condições ambientais e/ou modificações no funcionamento; os elementos **atuadores**, responsáveis pela ação de adaptação do sistema; os procedimentos de **controle**, geralmente implementados em microcomputadores digitais e que determinam as ações de controle a serem executadas pelos atuadores a partir das informações adquiridas pelos sensores; e é claro, a própria **estrutura** (FARIA, 2006).

Os materiais empregados em estruturas inteligentes frequentemente possuem interessantes e incomuns propriedades e são classificados de acordo com a capacidade de transformação energética. Materiais piezelétricos, eletrostrictivos e fluidos eletroreológicos, que transformam energia elétrica em mecânica e vice-versa; materiais magnetostrictivos e fluidos magnéto-reológicos, que sofrem transformações do tipo magnético-mecânica e ligas com memória de forma, que sofrem transformações termomecânicas, por exemplo, podem ser usados para projeto e desenvolvimento de estruturas que podem ser chamadas inteligentes.

O uso de materiais adaptativos substitui a necessidade de complexos mecanismos e sistemas de atuação e o material adaptativo por si próprio é embutido ou colado na estrutura, resultando na redução de material e peso. Em geral, as propriedades mecânicas de materiais adaptativos são controladas por temperatura, campo magnético ou campo elétrico (CHEE, TONG e STEVEN, 1998).

Materiais piezelétricos tem sido usados em uma variada gama de aplicações tais como em transdutores ultrasônicos, acelerômetros, gramofones, resonadores, filtros, impressoras à jato de tinta bem como em vários tipos de sensores e atuadores. Comparados aos materiais piezelétricos, materiais adaptativos de outras categorias são de integração mais difícil às estruturas existentes e, por serem relativamente novos, carecem de modelos matemáticos consistentes, ao passo que para os piezelétricos foram desenvolvidos

analiticamente por *Kelvin*, *Duhem* e *Voigt* no princípio do século passado.

Para o que se chama *mecanismo de atuação por deformação* que se aplica, por exemplo, a estruturas inteligentes do tipo placas e cascas dotadas de sensores e atuadores piezelétricos, a resposta frente às solicitações pode ser modificada pela indução de flexão, torsão ou extensão/contração. Em especial, os materiais piezelétricos podem ser usados tanto como sensores como atuadores em estruturas inteligentes e dentre as vantagens de seu emprego sobre outros tipos de atuação pode-se citar que são facilmente integrados à estrutura base, seja colados superficialmente, seja inseridos na estrutura, sem alterar significativamente as características de rigidez, além de serem facilmente obtidos

De maneira simplificada, em uma típica aplicação, a voltagem gerada pelo sensor é devidamente processada por um controlador que determina uma voltagem a ser aplicada ao atuador piezelétrico com o intuito de minimizar as perturbações indesejáveis da estrutura (FARIA, 2006).

Como um prognóstico, CRAWLEY e LAZARUS (1991) já citavam a possibilidade de aplicar este mecanismo de atuação por deformação em superfícies de controle aerodinâmico, o que permitiria controlar a forma de uma superfície com o propósito de alterar os efeitos da interação fluido-estrutura, de forma que o controle aerodinâmico seria efetuado sem o uso de estruturas articuladas e os respectivos mecanismos.

Recentemente, um grande número de estruturas inteligentes vem sendo utilizado para aplicações em diversos campos, como por exemplo, indústrias, esportes, veículos, etc. Novos materiais e técnicas de controle têm sido desenvolvidos. Assim, as estruturas inteligentes poderão expandir seu campo de aplicação e substituir aplicações convencionais (CARVALHAL, 2005).

Nada menos versáteis, os materiais compostos se mostram adaptáveis a esta nova tecnologia. Assim chamados por consistirem da associação macroscópica de dois ou mais materiais de naturezas diferentes, os materiais compostos apresentam melhores propriedades que seus constituintes isoladamente, sendo mais eficientes e podendo ter características direcionadas a atender exigências específicas.

Vários tipos de classificação para os materiais compostos são disponíveis na literatura. Os definidos em termos da morfologia de seus agentes de reforço são classificados em: compostos particulados, com fibras e compostos estruturais. Estes últimos, por sua vez, são subdivididos em compostos estruturais do tipo sanduíche, compostos laminados e compostos tridimensionais.

Dentre alguns dos atrativos destes materiais pode-se citar a durabilidade e resistência a ambientes quimicamente agressivos; resistência mecânica; sua capacidade de resistir às vibrações; a transparência eletromagnética; baixo valor do coeficiente de expansão térmica; pigmentação e características decorativas, além de elevada razão resistência/peso (MOSALLAM, 2002).

Frequentemente, os materiais tradicionais como, por exemplo, o aço e o alumínio, são considerados como solução mais segura em diversas aplicações se comparados aos compostos, naturalmente em virtude de apresentarem desempenho já bastante conhecido e de terem comportamento bem previsível. No entanto, os materiais compostos oferecem várias vantagens em relação aqueles materiais de uso corrente. A mais relevante delas, do ponto de vista mecânico, é a razão resistência/peso muito superior às de outros materiais. Além disso, os materiais compostos permitem o aumento de vida-útil de certos equipamentos graças a suas propriedades mecânicas (rigidez, resistência à fadiga, amortecimento viscoso) e químicas (resistência à corrosão), oferecendo maior segurança devido a uma melhor resposta ao impacto. Alguns compostos oferecem melhor isolamento térmico, sonoro e elétrico, além de flexibilizar as concepções estruturais, permitindo a realização de formas estruturais complexas com otimização da relação custo/benefício (CHALAYE, 2002, apud FARIA, 2006).

Sem sombra de dúvidas, a fertilidade do campo de estudo apresentado se torna evidente, oferecendo inúmeras alternativas de abordagens, inclusive em diferentes áreas do conhecimento.

Alinhada à esta tendência, a proposta deste trabalho consiste em contribuir para o entendimento do comportamento de placas laminadas compostas, que pela inserção de lâminas sensoras e atuadoras piezelétricas, podem ser utilizadas na concepção de estruturas inteligentes. Em uma abordagem numérica, propõem-se verificar o desempenho e a aplicabilidade do *Método de Elementos Finitos Generalizados*, fazendo-se um levantamento das principais características da metodologia e buscando compreender e evidenciar algumas peculiaridades de sua implementação. Além disso, num horizonte mais amplo, pretende-se também, é claro, auxiliar na divulgação e na consolidação do conhecimento relativo à adequação dos materiais compostos enquanto opção para aplicação estrutural, inclusive fornecendo subsídios para o vislumbramento de promissoras e interessantes aplicações.

## 1.2 Contribuições

O presente trabalho traz as seguintes contribuições:

- a apresentação de uma teoria mista HSDT-Layerwise para análise de placas laminadas compostas com lâminas piezelétricas de forma consistente;
- a implementação da referida teoria via Método dos Elementos Finitos Generalizados, com a apresentação detalhada da formulação e verificação de sua capacidade de representação do problema físico em análise;
- a obtenção da formulação forte para a teoria com o desenvolvimento de uma solução analítica pelo Método de Navier.

## 1.3 Estrutura da dissertação

A dissertação está estruturada em nove capítulos. O Capítulo 2 apresenta uma revisão de estado-da-arte de modelagem de placas laminadas piezelétricas. O Capítulo 3 apresenta o Método de Elementos Finitos Generalizados, discorrendo-se suas idéias básicas e principais características, além do procedimento de construção do espaço de aproximação. Uma revisão acerca das teorias para análise de placas laminadas é apresentada no Capítulo 4, provendo uma breve discussão sobre o refinamento das teorias ao longo das últimas décadas. A formulação fenomenológica da eletroelasticidade linear e a obtenção da relação constitutiva acoplada são tratadas ao longo do Capítulo 5. A discretização das variáveis e o desenvolvimento da formulação aproximada via MEFG são abordados no Capítulo 6, onde se obtém o equacionamento para cálculo das contribuições elementares e construção do sistema de equações. O Capítulo 7 é devotado ao estabelecimento das equações diferenciais do problema em análise e obtenção de uma solução analítica para a teoria apresentada. O Capítulo 8 discute os resultados obtidos para a formulação implementada. O Capítulo 9 traz alguns comentários e conclusões sobre o trabalho, além de sugestões para estudos futuros. O Apêndice A fornece o procedimento para solução do sistema de equações gerado pelo MEFG.

## 2 *Estado da arte de modelagem de placas inteligentes*

Em praticamente todas as etapas de projeto de estruturas complexas se requer o uso de modelos numéricos confiáveis capazes de proporcionar previsões qualitativas e quantitativas realistas acerca do comportamento estrutural. No caso particular de estruturas inteligentes, estes modelos devem ser capazes de representar, de forma adequada, a resposta acoplada dos ditos *smart materials* e devem ser aplicáveis a diversos tipos de elementos estruturais.

A modelagem matemática do comportamento de estruturas inteligentes pode ser categorizada em termos de configuração estrutural, ou seja, placas, cascas, treliças, etc. e também de acordo com o tipo de abordagem empregada, quer seja via abordagens aproximadas via métodos numéricos ou por soluções teóricas analíticas (CHEE, TONG e STEVEN, 1998).

Ao longo das três últimas décadas, uma grande variedade de modelos foi desenvolvida objetivando a predição do comportamento, por exemplo, dos materiais piezelétricos em estruturas inteligentes. De acordo com LEE (2001), estes modelos podem ser agrupados em três diferentes categorias: *modelos de deformação induzida*, *modelos eletromecânicos acoplados* e *modelos termoelctromecânicos acoplados*.

Os modelos de deformação induzida usam aproximações teóricas para incorporar o efeito piezelétrico e são geralmente limitados à predição somente da resposta ativa dos materiais piezelétricos visto que o potencial elétrico é negligenciado como variável de estado. Neste caso, as deformações nos materiais piezelétricos devidas aos potenciais aplicados são geradas por forças e momentos estaticamente equivalentes. Apesar de alguns modelos terem sido desenvolvidos com a introdução das equações constitutivas piezelétricas, permitindo representar o comportamento sensitivo, o potencial elétrico não é incluído geralmente como variável de estado, não considerando a conservação do fluxo elétrico nas equações do movimento, de forma que as voltagens dos sensores são pós-processadas



usando a equação de carga elétrica (LEE, 2001).

Os modelos eletromecânicos acoplados permitem uma representação mais consistente de ambas respostas ativa e sensitiva dos materiais piezelétricos pela incorporação de ambos deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos como variáveis de estado na formulação. E uma expansão natural deste último, consiste nos modelos termoeletromecânicos, que evidentemente incorporam o efeito térmico.

Tipicamente, os modelos eletromecânicos acoplados são implementados em códigos de elementos finitos por fornecerem uma ferramenta de análise mais poderosa, de forma que uma variedade de modelos de elementos de vigas, placas, cascas e sólidos foram desenvolvidos.

De uma forma geral, métodos para obtenção de soluções analíticas foram aplicados a modelos restritos a formas estruturais e condições de contorno simples e ilustraram o potencial do uso da piezeletricidade. Por sua vez, técnicas de elementos finitos foram usadas para problemas mais complicados incluindo geometrias complexas, comportamento não linear e controle dinâmico de estruturas.

Conforme CHEE, TONG e STEVEN (1998), modelos estruturais que incluem sensores e atuadores piezelétricos podem ser agrupados em três classes:

- sensores e atuadores piezelétricos na forma de pastilhas discretas que são coladas ou embutidas na estrutura, de forma que sua presença não afeta significativamente as propriedades da estrutura quando não são ativados (evidentemente, observando a proporção entre suas dimensões);
- sensores e atuadores piezelétricos na forma de filmes contínuos que são colados na superfície da estrutura e também não afetam significativamente as propriedades estruturais quando desativados; e
- lâminas piezelétricas dispostas juntas às lâminas de um substrato para formar um dito laminado composto piezelétrico, onde as propriedades mecânicas do material piezelétrico são consideradas no cálculo da relação constitutiva do laminado.

Vários autores apresentaram modelos teóricos ou analíticos de atuadores piezelétricos obtendo soluções exatas. Apesar de várias suposições e aproximações terem sido incorporadas a estes modelos, eles conduziram a resultados que bem concordaram com as avaliações experimentais.

Em uma revisão bibliográfica, CHEE, TONG e STEVEN (1998) citam o trabalho de CRAWLEY e DELUIS (1987) que, abordando estruturas inteligentes, analisaram a atuação de uma viga em balanço por flexão e extensão causada por atuadores piezelétricos. Os dois casos considerados foram atuadores colados sobre a viga e embutidos em seu interior. O desenvolvimento matemático da solução analítica para este problema unidimensional conduziu a uma equação do movimento dinâmico genérica com um termo extra que contém a diferença de potencial aplicada e a constante piezelétrica.

CRAWLEY e LAZARUS (1991) formularam soluções analíticas para encontrar as deformações e curvaturas induzidas para placas isotrópicas e anisotrópicas submetidas à atuação por extensão, flexão e torção. Soluções exatas puderam ser obtidas somente para casos bastante especiais quando supondo somente deformações atuantes planas, tendo a acuracidade do método sido verificada por comparação com experimento de viga em balanço.

RAY, RAO e SAMATA (1993) analisaram estaticamente estruturas inteligentes sob flexão cilíndrica através de uma formulação bidimensional de placa retangular simplesmente apoiada, usando as equações constitutivas piezelétricas lineares. Em seguida, RAY, BHATTACHARYA e SAMATA (1993) generalizaram a solução analítica para casos de carregamentos arbitrários, apesar da geometria ainda permanecer restrita a placa retangular (CHEE, TONG e STEVEN, 1998).

Também conforme CHEE, TONG e STEVEN (1998), BATRA e LIANG (1996) analisaram o controle de vibração de uma placa retangular simplesmente apoiada, similarmente a RAY, RAO e SAMATA (1993), onde as condições de contorno conduziram a predições de funções de deslocamentos na forma de *séries de Fourier*. Os autores propuseram otimizar a localização e o tamanho das pastilhas atuadoras para que uma mínima voltagem fosse necessária para amortecer a vibração da estrutura. Resultados numéricos da solução analítica, formulada pela *teoria da elasticidade linear*, indicaram que a posição ótima do atuador, para o problema analisado, era a região em que a vibração inicial atingia amplitude máxima.

Um dos primeiros trabalhos empregando a metodologia de elementos finitos para modelagem estrutural envolvendo o efeito piezelétrico foi realizado por ALLIK e HUGHES (1970). Os autores escolheram um tetraedro trilinear como elemento básico de sua formulação em elementos finitos que foi empregada para realizar análises estáticas e dinâmicas.

Também empregando elementos finitos sólidos, TZOU e TSENG (1990), realizaram

análises estáticas e dinâmicas de placas finas através de modelos genéricos onde tanto a estrutura hospedeira quanto os próprios conjuntos atuadores são modelados por elementos sólidos isoparamétricos de 8 nós. Os autores avaliaram numericamente o comportamento de placas com camadas piezelétricas ativas e passivas comparando os resultados com experimentos.

No controle de vibrações de placas laminadas, HA, KEILERS e CHANG (1992) incorporaram modos incompatíveis a um elemento sólido de 8 nós, cada qual com 4 graus de liberdade, sendo 3 deslocamentos mecânicos e 1 potencial elétrico. Tal formulação é geral no sentido de que pode ser aplicada a substratos laminados compostos com sensores e atuadores distribuídos, ainda que a formulação não use diretamente uma hipótese cinemática, como nos modelos de placas (CHEE, TONG e STEVEN, 1998).

A maioria das implementações de estruturas inteligentes em elementos finitos sólidos exibem excessiva rigidez ao cisalhamento a medida que a espessura diminui (DETWILER, SHEN e VENKAYYA, 1995). Além disso, a modelagem completamente tridimensional de tais estruturas gera sistemas com elevado número de graus de liberdade. Inconvenientes como estes motivaram o desenvolvimento de modelos bidimensionais, buscando reduzir o custo computacional das análises.

HWANG e PARK (1993) implementaram um elemento finito baseado numa formulação de atuação por deformação induzida, de forma que a carga elétrica total desenvolvida no sensor é calculada diretamente da equação da piezeletricidade. Utilizando a *Teoria Clássica de Placas Laminadas* (Classical Laminated Plates Theory - CLPT), os autores formularam um elemento finito de placa quadrangular com 3 graus de liberdade mecânicos por nó e 1 grau de liberdade elétrico por elemento. A lâmina piezelétrica com comportamento sensível possui voltagem de saída dependente da deformação média ao longo da área do elemento e a lâmina ativa induz um momento de controle nas extremidades do mesmo. O elemento bidimensional de placa destes autores é mais eficiente computacionalmente que elementos sólidos, mas apresenta restrições, pois pode somente ser usado para modelar sensores e atuadores piezelétricos aos pares.

DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995) apresentaram a formulação de um elemento finito isoparamétrico quadrangular de 4 nós capaz de modelar placas laminadas compostas contendo uma ou mais lâminas piezelétricas. Por se basear no modelo eletromecânico acoplado, o referido elemento pode conter uma ou mais lâminas piezelétricas capazes de representar comportamento ativo ou sensível, além de poder ser submetido a carregamentos mecânicos e elétricos variados sob condições estática ou dinâmica. Cada lâmina

piezolétrica pode ser admitida em uma posição arbitrária em relação ao plano médio de referência da placa e estar sujeita a diferentes voltagens elétricas. A formulação é baseada na hipótese de que o potencial elétrico permanece constante no plano e varia linearmente através da espessura da placa e o comportamento mecânico é modelado considerando a *Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem* (First-Order Shear Deformation Theory - FSDT). Assim, o elemento resultante possui 5 graus de liberdade mecânicos por nó e 2 graus de liberdade elétricos por elemento, para representar duas lâminas piezolétricas.

Um tipo de elemento finito de casca foi formulado por TZOU e YE (1996) para modelar cascas laminadas piezolétricas. Os autores utilizaram a Teoria em Camadas Discretas, com ângulo de cisalhamento constante, o que conduz a um empenamento não-linear da seção transversal e consideraram um sistema mecânica-eletricamente acoplado. Os autores analisaram frequências naturais e o efeito do controle sobre cascas com atuadores de várias dimensões.

LEE e SARAVANOS (1997), através de uma completa formulação em camadas discretas, implementaram um elemento finitos de placa bilinear de 4 nós, discretizando deslocamentos mecânicos, potencial elétrico e inclusive temperatura. A implementação permite demonstrar a capacidade do elemento finito em reproduzir deformações de flexão e torção induzidas termicamente em placas laminadas, além de fornecer campos de tensões e potenciais elétricos, indicando significância do efeito térmico no desempenho de estruturas piezolétricas submetidas a temperaturas extremas.

SARAVANOS, HEYLIGER e HOPKINS (1997) desenvolveram uma formulação utilizando a *Teoria em Camadas Discretas* (Layerwise Theory - LT) para modelagem de laminados com lâminas ativas e passivas que, uma vez considerando o potencial elétrico das lâminas como variável de estado, inclui contribuições elásticas, piezolétricas e dielétricas, consistindo num sistema eletromecânico acoplado. Foram apresentadas soluções aproximadas via elementos finitos para vigas laminadas sob carregamentos estáticos e análise de vibração livre. Os resultados de tensões interlaminares e planas, dos deslocamentos planos e transversais e dos potenciais elétricos apresentam boa concordância com valores de referência de soluções exatas.

SARAVANOS (1997), combinando uma descrição em camada equivalente única para o comportamento mecânico, através da FSDT, com uma descrição em camadas discretas para os potenciais elétricos de lâminas ativas elaborou uma chamada formulação mista. Os autor desenvolve a formulação para laminados considerando coordenadas curvilíneas

e implementa um elemento finitos quadrático de 8 nós, o qual é formulado para análises estáticas e dinâmicas. Avaliações numéricas são realizadas para painéis laminados compostos piezelétricos cilíndricos com atuadores contínuos e cascas em balanço com atuadores e sensores contínuos e discretos.

LIMA JR. (1999) faz comparações de resultados obtidos via implementação em elementos finitos de vigas e placas baseados na CLPT e na FSDT com valores experimentais quando do controle ativo de vibrações em estruturas.

REDDY (1999) apresentou formulações analíticas e discretizadas em elementos finitos eletromecanicamente acopladas, considerando o comportamento mecânico descrito pela CLPT e a *Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Superior* (Higher-Order Shear Deformation Theory - HSDT) de Reddy. Tais formulações incluem o efeito da não linearidade geométrica considerando as hipóteses de *von Kármán*, e são apresentadas soluções analíticas para placas retangulares laminadas simplesmente apoiadas.

Também procurando evitar o travamento por cisalhamento, CHEE (2000) desenvolveu uma formulação para um elemento de placa do tipo Serendipity de 8 nós empregando uma descrição do comportamento HSDT e teoria em camadas discretas para o potencial elétrico. Além disso, o autor apresenta formulações para vigas laminadas piezelétricas, tanto analíticas quanto por elementos finitos, além de várias análises de placas dotadas de sensores e atuadores.

CARVALHO NETO (2000) apresenta uma formulação em elementos finitos para placas laminadas compostas piezelétricas. Dotado de 6 graus de liberdade mecânicos e 1 grau de liberdade elétrico por lâmina piezelétrica, o elemento quadrangular de 4 nós possui funções de forma com continuidade  $C^0$  para aproximação dos deslocamentos coplanares e funções com continuidade  $C^1$  para aproximação dos deslocamentos transversais, uma vez que considera as hipóteses da CLPT.

DONADON (2000) realiza análises da influência do enrijecimento por tensões coplanares devidas a atuação piezelétrica na resposta em vibração de placas laminadas compostas. O autor desenvolve a formulação de um elemento finito de placa bicúbico, utilizando a FSDT para descrição do comportamento mecânico e considera atuação por deformação induzida pelos potenciais nas lâminas piezelétricas.

VEL e BATRA (2001) apresentaram soluções analíticas tridimensionais para flexão cilíndrica de placas laminadas simplesmente apoiadas com atuadores piezelétricos cisalhantes, admitindo que os deslocamentos mecânicos e os potenciais elétricos possam ser expandidos em séries trigonométricas e usando equações governantes da piezeletricidade

linear simplificadas devido à suposição de estado plano de deformação. Os deslocamentos e tensões obtidos para placas homogêneas piezelétricas são comparados com os resultados obtidos de acordo com as hipóteses da FSDT.

LEE (2001), empregando uma descrição tridimensional completa via teoria em camadas discretas, desenvolveu formulações para vigas, placas e cascas, estas últimas mediante sistemas de coordenadas curvilíneas, inserindo o efeito da temperatura nas equações constitutivas. São apresentadas inúmeras análises de estruturas laminadas inteligentes, variando desde vigas em balanços e placas simplesmente apoiadas com pastilhas discretas, para os quais comparações com resultados contidos na literatura foram realizadas. Além disso, o autor demonstra a capacidade da formulação através do cálculo de tensões induzidas termicamente e controle de forma por flexão e torção induzidas por temperatura.

CORREIA, GOMES, SULEMAN, SOARES e SOARES (2000) desenvolveram um elemento bidimensional de placa com 9 nós, formulado segundo o modelo misto utilizado por SARAVANOS (1997), para aproximação dos campos elétricos e mecânicos acoplados, no entanto, utilizando a descrição de uma *Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Superior* (Higher-Order Shear Deformation Theory - HSDT), permitindo a modelagem de placas finas e espessas e contornando os inconvenientes apresentados pela FSDT.

Formulando um elemento finito quadrangular de 4 nós, através de uma representação em camada equivalente única para o comportamento mecânico, segundo a FSDT, e usando funções lineares seccionalmente contínuas ao longo da espessura (metodologia em camadas discretas) para inserção do potencial elétrico em cada nó do elemento, CEN, SOH, LONG e YAO (2002) propuseram uma alternativa para a modelagem de placas laminadas piezelétricas. Estes autores alegaram superar a necessidade de qualquer suposição com relação à variação do potencial elétrico ao longo da espessura, devendo-se ressaltar que tal suposição é intrínseca à formulação quando da utilização de funções lineares seccionalmente contínuas na espessura. Além disso, os referidos autores empregaram um funcional de energia parcialmente híbrido para correção do cisalhamento transversal, de forma que o elemento resultante se adequa bem a análise de placas finas e espessas. São apresentadas análises para vigas em balanços e placas simplesmente apoiadas.

ABREU, RIBEIRO e STEFFEN JR. (2004) analisaram a influência de pastilhas piezelétricas, simetricamente coladas nas superfícies, no comportamento estático e dinâmico de placas isotrópicas. Para esta proposta, foi elaborada a formulação de um elemento finito quadrangular de 4 nós baseada nas hipóteses da CLPT. A metodologia desenvolvida é validada mediante comparações com soluções analíticas e soluções obtidas via código

comercial de elementos finitos. As formulações, tanto analíticas quanto discretizadas, são utilizadas para calcular frequências de ressonância e campos de deslocamentos em placas simplesmente apoiadas para várias frequências de excitação, considerando duas configurações para posicionamento das pastilhas piezelétricas.

LAGE, SOARES, SOARES e REDDY (2004a), empregando também um funcional parcialmente híbrido, desenvolveram uma formulação de placas laminadas piezelétricas através de uma descrição completa em camadas discretas, considerando funções quadráticas ao longo da espessura das lâminas discretas. Como tensões transversais são tomadas como variáveis na formulação, somente componentes de tensões coplanares e campos elétricos são calculados em pós-processamento via equações constitutivas. São analisadas placas simplesmente apoiadas, cujos resultados se mostram bastante concordantes com soluções analíticas.

Apenas expandindo a equação constitutiva para incorporar o efeito piezomagnético, LAGE, SOARES, SOARES e REDDY (2004b) utilizaram a mesma estrutura da formulação do trabalho já citado e implementaram testes numéricos de avaliação.

Considerando deformações induzidas devido ao efeito magnetostrictivo, LEE, REDDY e ROSTAM-ABADI (2004) implementaram um algoritmo de controle de vibrações em modelos discretizados por elementos finitos de placas laminadas compostas, considerando somente as variáveis mecânicas da HSDT como variáveis de estado, e portanto, o material magnetostrictivo não contribuindo para as características de rigidez do laminado.

Através de modelos de placas com atuadores piezelétricos considerando inclusive o efeito do adesivo de colagem e empregando uma equação constitutiva piezelétrica não-linear, SUN, TONG e WANG (2004) relacionaram algoritmos de análise incremental para aplicações em controle estático de forma de estruturas inteligentes. Um método incremental calibrado iterativamente é apresentado para obter os potenciais ótimos que podem deformar a estrutura e mantê-la como desejado.

Segundo a metodologia dos métodos sem-malhas, LIEW, HE, TAN e LIM (2004) desenvolveram uma formulação de placas laminadas com lâminas piezelétricas para o Método de Galerkin Livre de Elementos baseada na FSDT para descrição do comportamento mecânico. Utilizando funções peso típicas do *método dos mínimos quadrados móveis*, os autores aplicam um método de transformação, para permitir a imposição de condições de contorno essenciais, que atribui a característica do *delta de Kronecker* às funções base. Um simples algoritmo de controle é usado para atenuar a resposta em vibração de placas laminadas com pastilhas piezelétricas distribuídas, cujas posições ótimas os autores

propõem ainda identificar mediante análise de resultados.

MACHADO (2004) obtêm soluções analíticas para placa laminadas piezelétricas, cujas equações diferenciais do movimento são escritas considerando as hipóteses da FSDT. Utilizando as equações eletromecanicamente acopladas, o autor apresenta uma teoria de placas onde cada lâmina piezelétrica possui um campo de potencial elétrico incógnito, sendo este de variação linear ao longo da referida lâmina. Pela proposição de que os campos podem ser expandidos na forma de duplas séries trigonométricas, são obtidas soluções fechadas via *Método de Navier* e *Método de Lévy*.

Considerando as hipóteses da FSDT numa formulação para vigas e placas isotrópicas, ROCHA (2004) apresenta a implementação de elementos finitos para análise de estruturas com lâminas piezelétricas coladas nas superfícies, considerando técnicas para o posicionamento otimizado de sensores e atuadores visando o controle de forma.

FARIA (2006) faz a implementação de uma formulação de elemento finito quadrangular biquadrático do tipo Serendipity. Descrevendo o comportamento via metodologia em camada equivalente única segundo a HSDT, o elemento resultante possui 11 graus de liberdade mecânicos por nó. Além disso, considerando o potencial elétrico nas lâminas ativas como sendo aproximado por funções lineares por partes ao longo da espessura, são introduzidos mais dois graus de liberdade elétricos por lâmina piezelétrica. Avaliações do comportamento de placas inteligentes são realizadas considerando regime estático e vibração livre, sendo verificado também a não susceptibilidade ao travamento.



## 3 *Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG)*

### 3.1 Inserção do MEFG no curso do desenvolvimento dos métodos numéricos

A investigação de fenômenos físicos em geral requer a solução de equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais que governam o problema em análise, equações estas que podem ser complexas em virtude do domínio considerado e das condições de contorno e/ou condições iniciais impostas, sem citar a possível complexidade inerente à natureza da modelagem matemática.

Destarte, a obtenção das soluções exatas de tais equações quase sempre é impossível. Neste contexto, a partir da obtenção de formas integrais das expressões governantes dos fenômenos e da verificação da possibilidade de se tratar a integração sobre um domínio geometricamente complexo como somatório de várias integrais sobre domínios geometricamente simples, espera-se aproximar tais soluções.

Sob esta ótica, o *Método de Elementos Finitos* (MEF) é o método numérico mais amplamente utilizado na ciência em que se insere este trabalho, a *Mecânica dos Sólidos*. Particularmente neste âmbito, a sua difusão se deve, em parte, à simplicidade conceitual e facilidade de implementação computacional, sendo preferencialmente aplicado na chamada *formulação em deslocamentos*, que por sua vez independe do método numérico, mas sim depende da forma como é expresso um problema variacional.

O MEF gera soluções aproximadas de *Problemas de Valores no Contorno* (PVC) formulados em *forma fraca*, ou seja, expressões integrais obtidas pela minimização de funções de energia (ou outra função equivalente), utilizando-se de princípios variacionais ou através de métodos residuais como o *Método dos Resíduos Ponderados* (como por exemplo, o Método de Galerkin) ou pelo *Princípio Variacional de Hamilton* (PVH), que se reduz ao *Princípio dos Trabalhos Virtuais* (PTV) em análises estáticas.

O MEF preconiza a subdivisão do domínio estudado em entidades de geometria simples dotadas de *nós*, propondo a construção de aproximações para os campos incógnitos de interesse, no interior destas entidades, mediante interpolação dos valores nodais. Assim, tem-se por base um arranjo de *elementos finitos* constituindo uma *malha*, que genericamente, é definida como qualquer arranjo de células ou interstícios entre os fios de uma rede que é formada pela conexão de pontos nodais e, portanto, a chave deste conceito é que a malha deve ser pré-definida para se estabelecer uma certa relação entre os nós, que são a base da formulação dos métodos numéricos convencionais (LIU, 2003).

Pelo uso destas malhas e pela aplicação de princípios próprios, complexas equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais governantes dos problemas de valor no contorno podem ser expressas, equivalentemente, por expressões integrais sobre o domínio de interesse. Admitindo que os campos incógnitos sejam combinações lineares das *funções de forma* no domínio elementar, as integrais sobre o domínio completo passam a ser representadas pela soma de integrais sobre o domínio de cada elemento, colocando em evidência os campos de aproximação no domínio elementar. Com isso, obtém-se um conjunto de equações para cada entidade.

Esta estratégia permite a implementação computacional de procedimentos padronizados para a obtenção das contribuições elementares, ou seja, matrizes de rigidez e de inércia além, é claro, do vetor de forças nodais equivalentes.

A construção do problema global se processa, portanto, mediante somatório das contribuições de todos os elementos adjacentes a cada um dos nós, respeitando a indexação de conectividade, resultando em um sistema de equações global para o domínio completo.

O MEF é robusto e também foi exaustivamente trabalhado para ser aplicado em análises estáticas e dinâmicas, análise linear e não linear de tensões em sólidos e estruturas, bem como em mecânica dos fluidos, transferência de calor, eletromagnetismo, entre outros.

A maioria dos problemas práticos de engenharia relacionados à mecânica dos sólidos e das estruturas são correntemente resolvidos usando um grande número de bem desenvolvidos pacotes comerciais baseados em MEF. Entretanto, conforme LIU (2003), podem ser elencadas as seguintes limitações do método:

- a criação de uma malha para o domínio do problema é um pré-requisito no uso de pacotes de MEF;
- no cálculo de tensões, os campos obtidos via pacotes comerciais são normalmente descontínuos entre os elementos e de baixa precisão;

- quando manipulando grandes deformações, considerável precisão é perdida em virtude de distorções dos elementos;
- oferece grandes dificuldades para simular crescimento de trincas com formas arbitrárias e transformações de fase devido ao fato de as descontinuidades não coincidirem com linhas nodais originais;
- também oferece limitações para simular a ruptura do material em um grande número de fragmentos, pois o MEF é essencialmente fundamentado nas hipóteses da *Mecânica do Contínuo*;
- aproximações com malhas adaptativas têm sido propostas para manipulação destes tipos de problemas via MEF, situações estas em que o domínio do problema é remalhado em passos durante o processo de solução para prevenir distorções severas dos elementos e permitir que linhas nodais permaneçam coincidentes com os contornos das descontinuidades;
- processadores adaptativos requerem “mapeamento” de variáveis de campo entre malhas em sucessivos estágios na solução do problema, o que encarece tais procedimentos.

Também, conforme BELYTSCHKO, LU e GU (1994), apesar do notável desempenho do MEF, alguns inconvenientes de sua formulação em termos de deslocamentos têm motivado o desenvolvimento dos *Métodos Sem-Malha*. Embora seja um pouco redundante perante o que foi citado anteriormente, vale salientar:

- o custo computacional da geração de malha de elementos, fato ainda mais notável na análise de estruturas tridimensionais;
- o refinamento do tipo  $-h$  (introdução de novos pontos nodais no domínio) numa região exige a construção de uma nova malha de elementos finitos, ou a imposição de restrições cinemáticas aos novos nós;
- repetitiva e custosa alteração da malha necessária na simulação de grandes deformações, de forma a se evitar a ocorrência de elementos distorcidos;
- o método não favorece a resolução de problemas que envolvem a propagação de trincas, visto que estas não podem ser simuladas no interior dos elementos e, portanto, a sua evolução também requer uma alteração contínua da malha, com grandes inconvenientes.

Por sua vez, TORRES (2003) afirma que uma das limitações do MEF relaciona-se ao fato de o método correntemente gerar aproximações com base em funções interpoladoras polinomiais, cuja qualidade resulta diretamente dependente da geometria e do tipo de elemento. Essa característica pode mostrar-se particularmente ineficaz na simulação de fenômenos que implicam na ocorrência de elevados gradientes de deformações e, conseqüentemente, tensões e daqueles que, de uma forma geral, implicam em grande distorção da geometria dos elementos.

Como parece consenso que algumas limitações do MEF motivam a busca de novas alternativas, GARCIA (2003) afirma que a proposta de trabalhar com uma metodologia sem malha para construir o espaço de aproximação fundamenta-se em dois aspectos básicos a serem considerados. O primeiro consiste em eliminar os inconvenientes que surgem quando os domínios das funções de interpolação estão associados à malha. A primeira possibilidade seria construir funções totalmente independentes dos subdomínios da malha, embora implicando na possibilidade de se impor condições de contorno essenciais somente na forma fraca. Uma segunda alternativa utiliza a partição da unidade associada ao domínio do elemento, garantindo com isto uma conectividade fixa, funções de regularidade mais baixa, custo computacional inferior nos processos de integração numérica e a possibilidade de imposição de condições de contorno essenciais de forma mais simples. O segundo aspecto consiste na possibilidade de tornar flexível o espaço de aproximação, permitindo o uso de enriquecimentos locais ortotrópicos e a incorporação no espaço de aproximação de modos conhecidos do problema de valor no contorno.

Segundo BARROS (2002), nos métodos sem malha, a aproximação é feita utilizando-se um conjunto de pontos dispersos no domínio, sem que a conectividade entre eles seja previamente definida, portanto, não sendo dependente de uma malha no *sentido forte*, ou seja, a discretização do funcional independe de qualquer relação de conectividade entre os pontos nodais e sequer deve-se satisfazer os requisitos de conformidade exigidos em elementos finitos convencionais.

O procedimento proposto por NAYROLES, TOUZOT e VILLON (1992), denominado *Método dos Elementos Difusos* (MED) é considerado como uma das referências pioneiras dos métodos sem malha. Também contemporâneos ao trabalho destes autores, tem-se as propostas de MONAGHAN (1994), denominada *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), o trabalho de LISZKA e ORKISZ (1980) que apresenta o *Método de Diferenças Finitas Generalizado* (GFDM) e LANCASTER e SALKAUSKAS (1981) introduzindo o uso do *Método dos Mínimos Quadrados Móveis* (MMQM).

Na maior parte dos métodos ditos sem malha, uma aproximação para a função incógnita é determinada pelo MMQM. Basicamente, a aproximação global num ponto do domínio é construída com base numa ponderação sobre valores conhecidos da função incógnita associados aos nós que estejam numa vizinhança daquele ponto, definida por uma região de influência, ou *nuvem*. Ao contrário dos mínimos quadrados convencionais que determina a solução pela minimização do erro quadrático na média, no MMQM funções peso são incorporadas aos nós, atribuindo um carácter local à aproximação. Assim, o Método dos Mínimos Quadrados Móveis é um método de aproximação numérica que permite encontrar uma função que melhor se ajuste a um conjunto de dados associados aos pontos nodais, através de uma função de ponderação que acompanha o ponto onde se deseja definir a aproximação.

Introduzindo na metodologia do MED algumas modificações, BELYTSCHKO, LU e GU (1994) apresentam uma ferramenta numérica denominada *Método de Galerkin Livre de Elementos* (MGLE), que associa funções de interpolação semelhantes ao do MMQM aos pontos nodais, podendo-se citar:

- uso de células auxiliares para suporte da quadratura numérica sobre o domínio e consideração das derivadas completas da aproximação;
- emprego de *multiplicadores de Lagrange* para a imposição de condições de contorno essenciais, visto que a aproximação gerada pelo MMQM não se constitui numa interpolação e, portanto, valores prescritos no contorno não podem ser verificados de modo exato.

Como citado por GARCIA (2003), a imposição de condições de contorno essenciais via *multiplicadores de Lagrange* utilizados diretamente no princípio variacional clássico pode resultar numa matriz de rigidez que não é positiva definida, podendo apresentar problemas de condicionamento quando se trabalha com bases polinomiais de grau elevado.

Posteriormente ao MGLE, surgem os métodos que preconizam a construção do espaço de aproximação por enriquecimento externo das funções bases associadas aos nós. Os trabalhos de DUARTE (1996) e DUARTE e ODEN (1996) apresentam um método sem malha denominado *Método de Nuvens hp*, cuja principal aptidão é permitir promover o enriquecimento da aproximação polinomial original, obtida a partir do MMQM, através do produto tensorial das funções *Partição da Unidade* (PU) com bases polinomiais, sem acréscimo de pontos nodais no domínio, mas apenas adicionando novos parâmetros associados a esses nós.

Em sequência, lançando mão da idéia de adicionar refinamentos hierárquicos a um conjunto de funções de forma associadas a elementos finitos como, por exemplo, as funções de interpolação lagrangeanas, ODEN, DUARTE e ZIENKIEWICZ (1998) apresentaram um método híbrido entre o Método de Nuvens *hp* e a forma convencional do Método de Elementos Finitos, denominado *Método de Elementos Finitos Generalizados* (MEFG). Fundamentado em STROUBOULIS, BABUŠKA e COPPS (2000), o MEFG até poderia ser mencionado dentro do contexto dos métodos sem malha, pois utilizando os conceitos do *Método de Elementos Finitos de Partição da Unidade* (MEFPU), de BABUŠKA, CALOZ e OSBORN (1994) e MELENK (1995), e do Método de Nuvens *hp*, estabelece-se uma malha que serve apenas para se definir uma partição da unidade e um domínio para a integração numérica, sobre a qual é realizado o enriquecimento das funções de forma, responsável pela qualidade do método.

Para citar brevemente, o MEFPU é uma metodologia que se caracteriza por construir o espaço de aproximação por enriquecimento das funções partição da unidade do tipo *Lipschitz* com funções que apresentam boas propriedades de aproximação, como os polinômios de *Legendre*, os polinômios de *Lagrange* e funções que fazem parte da solução do PVC (GARCIA, 2003).

Os artigos que se originaram destes trabalhos ilustraram o desenvolvimento do MEFG para problemas de *Laplaciano* e de *Helmholtz*, e para uma classe geral de problemas elípticos, com o foco principal sendo a construção de aproximações que empregam o conhecimento prévio de características locais da solução na aproximação.

Direta, ou indiretamente, todos os métodos sem malha envolvem o conceito de *Partição da Unidade* (PU), uma vez que as funções de forma geradas a partir do MMQM satisfazem os critérios que a definem. Conforme a própria terminologia permite entender, Partição da Unidade (PU) é um conjunto de funções onde a soma de seus valores é igual à unidade em qualquer ponto do suporte. No entanto, juntamente com este, outros três critérios são usados para se verificar a aplicabilidade desta definição a um conjunto de funções de base. Basicamente, conforme ODEN e REDDY (1976), em um domínio  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^n$ , com cobertura formada pela união de conjuntos abertos  $\{G_j\}_{j=1}^N$ , uma classe de funções  $\varphi_j(\mathbf{x})$  forma uma partição da unidade caso apresente as seguintes propriedades:

- $\varphi_j(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(G_j)$ ;
- $\sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) = 1$ ;
- $\varphi_j(\mathbf{x}) \geq 0$  em  $\Omega$ ;

- todo sub-conjunto compacto de  $\Omega$  intercepta apenas um número finito de suportes de  $\varphi_j(\mathbf{x})$ .

Nesta abordagem surge o conceito de *cobertura* do domínio, diferentemente de discretização, como no MEF convencional. Obtém-se cobertura distribuindo pontos nodais sobre o domínio, aos quais tem-se associadas as *nuvens*, de forma que cada ponto do domínio de interesse seja coberto por pelo menos uma nuvem.

Deve-se ressaltar que as funções de forma dos elementos finitos podem ser consideradas como uma partição da unidade (PU) se houver um relaxamento dos critérios que a definem (TORRES, 2003), refletindo em simplicidade na geração da partição da unidade devido à possibilidade de se usar a interpolação lagrangeana. Ainda, conforme GARCIA (2003), pela definição da função de *Shepard* conclui-se que as funções da partição da unidade são as próprias funções globais usadas no MEF, levando a uma generalização das versões  $-h$ ,  $-p$  e  $-hp$ .

Dentre as limitações que acompanham o uso de funções polinomiais lineares, por exemplo, pode-se citar a geração de um espaço de aproximação do tipo  $C^0(\Omega)$ , implicando em descontinuidade interelemento das derivadas, e o problema de dependência linear quando as funções de enriquecimento são também polinomiais.

De acordo com ODEN, DUARTE e ZIENKIEWICZ (1998), o MEFG permite fácil implementação das condições de contorno, devido ao caráter interpolador da aproximação, e apresenta robustez mesmo sob forte distorção dos elementos, em virtude de o enriquecimento se dar sobre as coordenadas nodais após o mapeamento, de tal modo que a aproximação da solução via MEFG é construída mediante uma formulação que minimiza a importância da malha.

Assim, a possibilidade de modelar a ocorrência de trincas ou regiões de maior concentração de tensões através da introdução de funções especiais, a maior facilidade na realização do refinamento  $-p$ , uma vez que basta acrescentar novos parâmetros aos nós já existentes, e a possibilidade de enriquecer a aproximação apenas numa região limitada do domínio sem comprometer a conformidade dos elementos são recursos bastante interessantes do MEFG.

Por exemplo, um campo de aplicação que vem sendo bastante explorado é a análise de problemas de fratura, pois o emprego do MEFG torna possível a utilização de funções enriquecedoras que simulem a descontinuidade no campo de deslocamentos dentro de um mesmo elemento, tornando desnecessária qualquer alteração na malha (TORRES, 2003).

## 3.2 Noção de aproximação local da solução

Pode-se definir brevemente o Método de Elementos Finitos Generalizados como uma estratégia de ampliar o espaço de solução do MEF através da adição de funções especiais à base de aproximação convencional, definida como uma partição da unidade, possibilitando a inserção de qualquer informação que reflita o conhecimento prévio da forma da solução do PVC como, por exemplo, funções singulares obtidas de expansões assintóticas locais da solução exata nas vizinhanças de um ponto, etc. Com isso, o poder de aproximação proporcionado pelas funções de enriquecimento é incluído no espaço de funções gerado pelo método, apesar de manter a infra-estrutura básica dos códigos de elementos finitos, o que consiste numa grande vantagem.

Um PVC, conforme ODEN e REDDY (1976), pode ser enunciado da seguinte forma: encontrar  $u \in \mathcal{H}$  tal que

$$\begin{aligned} Au &= f \text{ em } \Omega \\ B_k u &= g_k \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ com } 0 \leq k \leq m-1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert,  $\Omega$  é um sub-conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ , de contorno suave  $\partial\Omega$ ,  $A$  é um operador linear diferencial de ordem  $2m$ ,  $\{B_k\}_{k=0}^{m-1}$  são operadores lineares diferenciais sobre o contorno, enquanto que  $f$  e  $g_k$  são funções prescritas.

A solução aproximada do PVC deve ser procurada em sub-espços  $\mathcal{X}$  de dimensão finita, de tal maneira que se tenha  $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$  quando se usa o procedimento de Galerkin (ODEN e REDDY, 1976). Assim, o mérito de um método numérico se deve à qualidade do sub-espaço  $\mathcal{X}$  gerado.

Para tanto, o domínio em análise  $\Omega$  é discretizado por um conjunto de pontos nodais indicado por  $Q_{n_{nos}} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n_{nos}}\}$ ,  $\mathbf{x}_j \in \Omega$ . Para delimitar a região de influência de cada nó  $\mathbf{x}_j$  define-se o suporte ou vizinhança como *nuvem nodal*, designada por  $w_j$ . No âmbito dos métodos sem malha, a nuvem é formada, em essência, pelos pontos do espaço no qual se situa o domínio, cuja distância ao nó é definida como sendo igual ou inferior a um dado raio  $r_j$ , que é a medida de referência. Em suma, escreve-se

$$\omega_j = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_{\mathbb{R}^n} \leq r_j \right\} \tag{3.2}$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  indica um ponto qualquer do espaço  $\mathbb{R}^n$ . A distribuição de pontos e nuvens



é tal que a união de todas as nuvens resultará na região  $\chi_{n_{nos}}$  que deverá conter o domínio  $\Omega$  e seu contorno  $\Gamma$ , região esta caracterizada como

$$\chi_{n_{nos}} = \bigcup_{j=1}^{n_{nos}} \omega_j, \quad \chi_{n_{nos}} \supset \bar{\Omega} \quad (3.3)$$

sendo que  $\bar{\Omega}$  inclui o interior e o contorno da região  $\Omega$ .

Por exemplo, sob a ótica do MEF, uma aproximação  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  para o campo de deslocamentos  $u(\mathbf{x})$  pode ser escrita na forma:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \varphi_1(\mathbf{x}) + \alpha_2 \varphi_2(\mathbf{x}) + \cdots + \alpha_i \varphi_i(\mathbf{x}) + \cdots + \alpha_n \varphi_n(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

onde  $\varphi_i(\mathbf{x})$ , com  $i = 1, \dots, n$  são denominadas funções de forma e devem ter regularidade suficiente para que as integrais presentes na *forma fraca* do problema possam existir. Ainda, outra importante característica é que, geralmente, as funções de forma têm valor unitário no nó correspondente e nulo nos outros nós, de forma que as constantes  $\alpha_i$  coincidam com valores discretos da função  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  nos pontos nodais.

Como mencionado anteriormente, pela consideração de que as nuvens nodais podem ser consideradas como sendo os conjuntos de elementos finitos adjacentes aos pontos nodais  $\mathbf{x}_j$ , no MEFG as funções de aproximação típicas do MEF passam a ser interpretadas como PU. Assim, o enriquecimento à maneira do Método de Nuvens *hp* permite que esse espaço seja ampliado pela multiplicação da função base de cada nó  $\mathbf{x}_j$  por um novo conjunto de funções de enriquecimento linearmente independentes.

Os critérios que definem uma partição da unidade são bastante restritivos e, por isso, são relaxados nas interpretações realizadas para o Método de Nuvens, o MEFG e o MEF. É importante ressaltar que uma função  $C_0^p(\Omega)$  é contínua até a ordem  $p$  no interior de  $\Omega$  e terá derivadas nulas de ordem 0 até  $p$  no contorno de  $\Omega$ , característica esta que garantirá que a função resultante da combinação da PU para um conjunto de nuvens terá continuidade  $C^p$ .

Em problemas bidimensionais, por exemplo, pode-se considerar como PU as funções de forma lagrangeanas bilineares, que apresentam apenas a continuidade  $C_0^0(\omega_j)$ . Além disso, neste caso, as primeiras derivadas com relação às direções coordenadas  $x$  e  $y$  não se anulam em todos os pontos do contorno da nuvem de um nó, além de não serem contínuas nas interfaces interelementos no interior da referida nuvem. Assim, também está claro que se para uma ordem  $q < p$ , a derivada de ordem  $q$  da função PU for não nula no contorno da

nuvem, a função de aproximação resultante da combinação de duas ou mais nuvens terá sua derivada de ordem  $q$  descontínua. Ainda, as funções lagrangeanas de ordem superior podem inclusive assumir valores negativos em regiões do suporte, contrariando o terceiro critério (BARROS, 2002).

Ao seu mérito, a última dentre aquelas propriedades (pág. 21) é, na verdade, uma garantia de que todo o domínio seja aproximado. No MEF e MEFG, a discretização em elementos finitos cobre todo o domínio, assegurando a verificação desta propriedade. Já no Método das Nuvens e MGLE ocorre uma sobreposição das nuvens, que deve ser tal que a cobertura formada não deixe pontos do domínio sem pertencer a nenhuma nuvem.

Para ilustração, consideremos uma função  $u$  definida no domínio  $\Omega \in \mathbb{R}$  (Figura 1). Construi-se uma cobertura aberta  $\mathcal{T}_N$  do domínio  $\Omega$  consistindo de  $N$  suportes  $\omega_j$  (nuvens) com centros em  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , onde  $N$  é igual ao número de nós

$$\mathcal{T}_N = \left\{ \omega_j \right\}_{j=1}^N \quad \bar{\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^N \omega_j \quad (3.5)$$

Seja  $\tilde{u}_j^i$  uma aproximação local de  $u$  que pertence a um espaço local  $\mathcal{X}_j(\omega_j)$  definido no suporte  $\omega_j$ , tal que  $\mathcal{X}_j(\omega_j) = \text{span}\{\mathcal{L}_{ij}\}_{i \in j(j)}$ , onde  $j(j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , é um conjunto de índices que fazem referência ao número de funções de enriquecimento para cada nó, e  $\mathcal{L}_{ij}$  denota uma função de enriquecimento  $i$  associada ao nó  $\mathbf{x}_j$ .

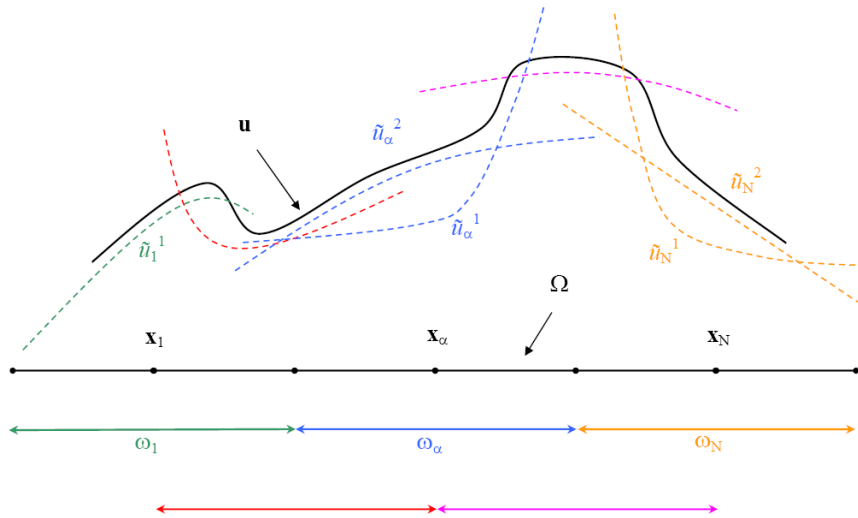


Figura 1: Funções de aproximação local da solução.

A proposta básica do MEFG é que cada espaço  $\mathcal{X}_j(\omega_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , possa ser escolhido tal que exista um  $\mathcal{L}_{ij} \in \mathcal{X}_j(\omega_j)$  que pode bem aproximar  $u|_{\omega_j}$  em alguns casos.

Nos métodos de partição da unidade, o conjunto de funções do forma do elemento  $\mathcal{S}_j(\omega_j)$  é construído usando funções PU definidas no suporte  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , que para esta finalidade, admite-se satisfazer apenas as seguintes propriedades:

$$\varphi_j \in C_0^S(\omega_j), \quad S \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (3.6)$$

$$\sum_j \varphi_j(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (3.7)$$

As funções  $\varphi_j$  são chamadas partições da unidade subordinadas à cobertura aberta  $\mathcal{T}_N$ , e como esta cobertura é definida por um conjunto de elementos finitos, a implementação do método é bastante semelhante do que seria no MEF. Esta escolha de partição da unidade evita o problema de integração numérica associado ao uso de partições da unidade do Método de Mínimos Quadrados Móveis ou partições da unidade de Shepard, empregadas em vários métodos sem malhas. No MEF, as integrações são executadas com o auxílio dos chamados elementos-mestres, como no MEF. Conseqüentemente, o MEF pode usar a infra-estrutura de algoritmos desenvolvidos para o MEF (DUARTE, BABUŠKA e ODEN, 2000).

### 3.3 Construção do espaço de aproximação

A título de exemplo, define-se aqui as funções de forma para elementos finitos generalizados num espaço bidimensional, que serão usadas na modelagem de placas, usando as idéias discutidas até então.

A Figura 2 mostra uma discretização em elementos finitos bidimensionais. As funções de partição da unidade  $\varphi_j$  são as funções de forma elementares globais, as clássicas funções lagrangeanas bi-lineares, associadas ao nó  $\mathbf{x}_j$ . O suporte é então definido como

$$\omega_j = \bigcup_{j=1}^4 \tau_j \quad (3.8)$$

Considere agora o elemento  $\tau_1$ , com nós  $\mathbf{x}_1$  até  $\mathbf{x}_4$ , como representado na figura. Assim, pode-se ampliar o conjunto de funções de forma do elemento combinando a PU com funções especiais  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{u}_2$  e  $\tilde{u}_3$ , de forma que

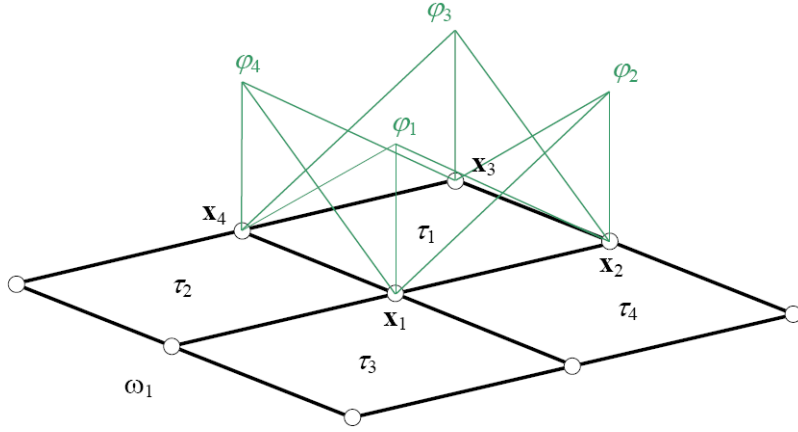


Figura 2: Definição do suporte do nó e funções PU do elemento.

$$\mathcal{S}_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \times \{1, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, (\varphi_1 \tilde{u}_1), \dots, (\varphi_4 \tilde{u}_3)\} \quad (3.9)$$

Com isso, o elemento  $\tau_1$  passa a ter então um total de dezesseis funções de forma (quatro em cada nó) construídas com o produto das funções de forma lagrangeanas elementares padrão (a partição da unidade) pelas aproximações locais  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{u}_2$  e  $\tilde{u}_3$ , que por suposição são funções definidas globalmente que podem aproximar bem a função  $u$ , solução do PVC, ao longo do domínio do elemento  $\tau_1$ . Podemos generalizar esta idéia pelo aumento do número de funções de enriquecimento, resultando num espaço  $\mathcal{S}_1$  de dimensão ainda maior.

Vistas as propriedades das funções de forma de elementos finitos de partição da unidade, podemos facilmente mostrar que a combinação linear das funções de forma definidas em (3.9) pode reproduzir as aproximações locais  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{u}_2$  e  $\tilde{u}_3$ , isto é

$$\varphi_1 \tilde{u}_j + \varphi_2 \tilde{u}_j + \dots + \varphi_4 \tilde{u}_j = \tilde{u}_j (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_4) = \tilde{u}_j \quad (3.10)$$

Em outras palavras

$$\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3 \in \{\mathcal{S}_1\}$$

Assim, caso as funções  $\tilde{u}_j$  em (3.9) sejam polinomiais, tem-se

$$\mathcal{P}_{p-1}(\omega_j) \subset \mathcal{X}_j(\omega_j), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.11)$$

onde  $\mathcal{P}_{p-1}$  denota o espaço de polinômios de grau menor ou igual a  $p - 1$ . Portanto, as funções de forma do elemento finito generalizado de grau  $p$  são definidas por

$$\mathcal{F}_N^p = \left\{ \mathcal{N}_i^j = \varphi_j \mathcal{L}_{ij}, j = 1, 2, \dots, N, i \in \mathcal{J}(j) \right\} \quad (3.12)$$

É importante citar que a estratégia de enriquecimento polinomial fornece um espaço expandido  $\mathcal{X}_j$  formado por um conjunto de bases linearmente dependentes, como pode ser visto em DUARTE, BABUŠKA e ODEN (2000), pois, por exemplo, considerando elementos planos, existem constantes  $a_j^x$  e  $a_j^y$ ,  $j = 1, \dots, Nne/\forall \mathbf{x} \in \tau$ , com  $Nne$  igual ao número de nós do elemento, tais que em combinação linear com a PU podem reproduzir uma determinada função de enriquecimento

$$\sum_{j=1}^{Nne} \varphi_j(\mathbf{x}) = 1, \quad \sum_{j=1}^{Nne} a_j^x \varphi_j(\mathbf{x}) = x, \quad \sum_{j=1}^{Nne} a_j^y \varphi_j(\mathbf{x}) = y \quad (3.13)$$

Valendo-se da propriedade vista em (3.10), de que a combinação da PU com uma função de enriquecimento pode reproduzir esta função de enriquecimento, tem-se

$$\sum_j^{Nne} (\varphi_j x) = x \sum_j^{Nne} \varphi_j = x \quad (3.14)$$

e portanto, prova-se a dependência linear

$$\sum_j^{Nne} (\varphi_j x) - \sum_j^{Nne} a_j^x \varphi_j = 0 \quad (3.15)$$

levando a um sistema de equações em termos de  $a_j^x$ . Assim, a matriz de rigidez obtida no MEFM se torna positiva semi-definida, mesmo após a eliminação dos movimentos de corpo rígido.

Fica evidente que a idéia básica dos métodos de partição da unidade e, em particular, do MEFM, é o uso da partição da unidade para associar às aproximações locais. As funções de forma são construídas de tal forma que podem reproduzir, através de combinações lineares, a aproximação local definida em cada nuvem.

Deve-se notar que existe considerável liberdade na escolha dos espaços  $\mathcal{X}_j$  e a escolha mais óbvia para a base  $\mathcal{X}_j$  são as funções polinomiais que podem aproximar bem as funções suaves. A implementação do método  $hp$  adaptativo é extremamente facilitada

pela estrutura de partição da unidade, pois cada base de funções  $\{\mathcal{L}_{ij}\}_{i \in j(j)}$  pode ter diferentes ordens polinomiais para cada  $j$ , ou seja, podemos ter diferentes ordens polinomiais associadas a cada nó da malha de elementos finitos.

As aproximações podem também ser anisotrópicas, ou seja, com diferentes graus polinomiais em diferentes direções do domínio, indiferentemente da escolha do elemento finito de partição da unidade.

Existem muitas situações em que a solução de um problema de valor no contorno não é uma função suave. Nestas situações, podemos usar qualquer conhecimento prévio da forma da solução para fazer uma melhor escolha dos espaços locais  $\mathcal{X}_j$ . Por exemplo, DUARTE, BABUŠKA e ODEN (2000) em seu trabalho apresentam a implementação do MEFG para problemas de elasticidade tridimensional, onde realizam o enriquecimento p-ortotrópico e também empregam funções conhecidas como soluções de problemas de singularidades para análise de problemas com geometria complexa.

Neste sentido, STROUBOULIS, BABUŠKA e COPPS (2000) demonstram que além da PU definida à maneira do MEF representar uma grande vantagem, principalmente no que se refere à capacidade de aproximação e estabilidade do método, existem algoritmos de quadratura adaptativa que podem integrar com precisão as entidades elementares e métodos de solução direta que podem lidar com os sistemas de equações que resultam de alguma forma onerosos devido à aplicação de funções de enriquecimento especiais.

Concluindo, para um caso geral define-se a família de Nuvens para o MEFG

$$\mathcal{F}_N^{k=1} = \left\{ \left\{ \varphi_j(\mathbf{x}) \right\}_{j=1}^N \cup \left\{ \varphi_j(\mathbf{x}) \mathcal{L}_{ji}(\mathbf{x}) \right\}_{j=1}^N \mid i \in j(j) \right\} \quad (3.16)$$

onde  $\varphi_j(\mathbf{x})$  são funções PU, neste caso, de grau  $k = 1$  e  $\mathcal{L}_{ji}(\mathbf{x})$  são as funções de enriquecimento, família esta utilizada para construir a seguinte aproximação

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j} \mathcal{L}_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{U} \quad (3.17)$$

em que

$$\mathbf{U}^T(\mathbf{x}) = \left[ u_1 \quad b_{1_1} \quad \cdots \quad b_{1_{q_1}} \quad \cdots \quad u_N \quad b_{N_1} \quad \cdots \quad b_{N_{q_N}} \right]$$

$$\mathbf{\Phi}^T = \left[ \varphi_1 \quad \mathcal{L}_{1_1} \varphi_1 \quad \cdots \quad \mathcal{L}_{1_{q_1}} \varphi_1 \quad \cdots \quad \varphi_N \quad \mathcal{L}_{N_1} \varphi_N \quad \cdots \quad \mathcal{L}_{N_{q_N}} \varphi_N \right]$$

sendo  $q_j$  o número de funções de enriquecimento de cada nó.

Então, sendo  $\mathcal{U}_h$  o subespaço gerado por um conjunto de funções cinematicamente admissíveis e  $\mathcal{V}_h$  o subespaço gerado por um conjunto de variações cinematicamente admissíveis, chega-se à seguinte aproximação de Galerkin, na abordagem do MEEG, para o PVC, que é encontrar  $\tilde{u} \in \mathcal{U}_h$  tal que

$$\mathcal{B}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \ell(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \mathcal{V}_h \quad (3.18)$$

onde  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v} \in \mathcal{U}_h = \mathcal{V}_h \subset \mathcal{H}^1$ , sendo  $\mathcal{H}^1$  o espaço de Hilbert de grau 1 definido no domínio  $\Omega$ ,  $\mathcal{B}(\bullet, \bullet)$  é uma forma bilinear de  $\mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\ell(\bullet)$  uma forma linear em  $\mathcal{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , que conduz ao seguinte sistema de equações

$$\mathcal{B}(\Phi^T \mathbf{U}, \Phi^T \mathbf{V}) = \ell(\Phi^T \mathbf{V}) \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{V}^T = \left[ v_1 \quad c_{1_1} \quad \cdots \quad c_{1_{q_1}} \quad \cdots \quad v_N \quad c_{N_1} \quad \cdots \quad c_{N_{q_N}} \right]$$

Caso as funções  $\mathcal{L}_{ij}$  sejam todas polinomiais, formando o espaço  $\mathcal{P}_p$  dos polinômios até a ordem  $p$ , definindo a família  $\mathcal{F}_N^{k=1,p}$  de funções geradas pela PU geradora do espaço  $\mathcal{P}_k$ , a aproximação  $\tilde{u}$  será representada de modo particular como

$$u_p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j(p)} p_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} = \Phi^T \mathbf{U} \quad (3.20)$$

No âmbito deste trabalho, para o desenvolvimento de uma formulação de elementos finitos generalizados para placas, pretende-se construir espaços de aproximação locais com enriquecimento até terceira ordem, sobre uma PU com funções bi-lineares, conforme a combinação linear expressa por

$$\varphi_j \times \left\{ 1, \frac{x-x_j}{h_{x_j}}, \frac{y-y_j}{h_{y_j}}, \left( \frac{x-x_j}{h_{x_j}} \right)^2, \left( \frac{x-x_j}{h_{x_j}} \right) \left( \frac{y-y_j}{h_{y_j}} \right), \left( \frac{y-y_j}{h_{y_j}} \right)^2, \right. \\ \left. \left( \frac{x-x_j}{h_{x_j}} \right)^3, \left( \frac{x-x_j}{h_{x_j}} \right)^2 \left( \frac{y-y_j}{h_{y_j}} \right), \left( \frac{x-x_j}{h_{x_j}} \right) \left( \frac{y-y_j}{h_{y_j}} \right)^2, \left( \frac{y-y_j}{h_{y_j}} \right)^3 \right\} \quad (3.21)$$

onde  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  são funções de forma bilineares padrão,  $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$  são as coordenadas do nó  $j$ ,  $h_{x_j}$  e  $h_{y_j}$  são as dimensões características da nuvem de cada nó, respectivamente, nas direções  $x$  e  $y$ , e  $N$  é o número de nós da malha de elementos finitos.

Então, conforme BARROS (2002), o emprego das funções do MEF para a PU evita problemas encontrados com as funções do MMQM, como aquele relativo à integração numérica, pois a aproximação torna-se polinomial, exceto quando o enriquecimento não tenha esta característica.

No entanto, empregando-se esta estratégia de enriquecimento, mantém-se o caráter interpolador somente da partição da unidade, contrariando a premissa citada por ODEN, DUARTE e ZIENKIEWICZ (1998). Para ilustrar, considere um nó, por exemplo, na origem do sistema de coordenadas planas conforme mostrado na Figura 3. Assim, multiplicando-se a PU referente ao nó pelas funções de enriquecimento, (3.21), obtém-se funções que são nulas sobre o respectivo nó, não sendo portanto interpoladoras.

Assim, por exemplo, para a primeira função de enriquecimento, percebe-se na referida figura que somente a PU satisfaz a condição do *delta de Kronecker*, ou seja,  $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$  e, por isso, contrariando uma prática corrente, as condições de contorno de *Dirichlet* não podem ser impostas diretamente, requerendo um tratamento diferenciado. Uma alternativa, mais direta, é garantir a preservação das funções  $\mathcal{N}_i^j$  de (3.12) que se anulam no contorno de *Dirichlet* nas nuvens dos nós contidos neste contorno pois, muito embora estas se anulem no respectivo nó, como visto na Figura 3, continuam melhorando a aproximação na vizinhança, observando-se que tal procedimento se aplica a contornos retos e paralelos aos eixos do sistema global de coordenadas. Porém, um tratamento mais rigoroso pode ser realizado com a aplicação das chamadas *funções de fronteira*, conforme descritas por GARCIA (2003).



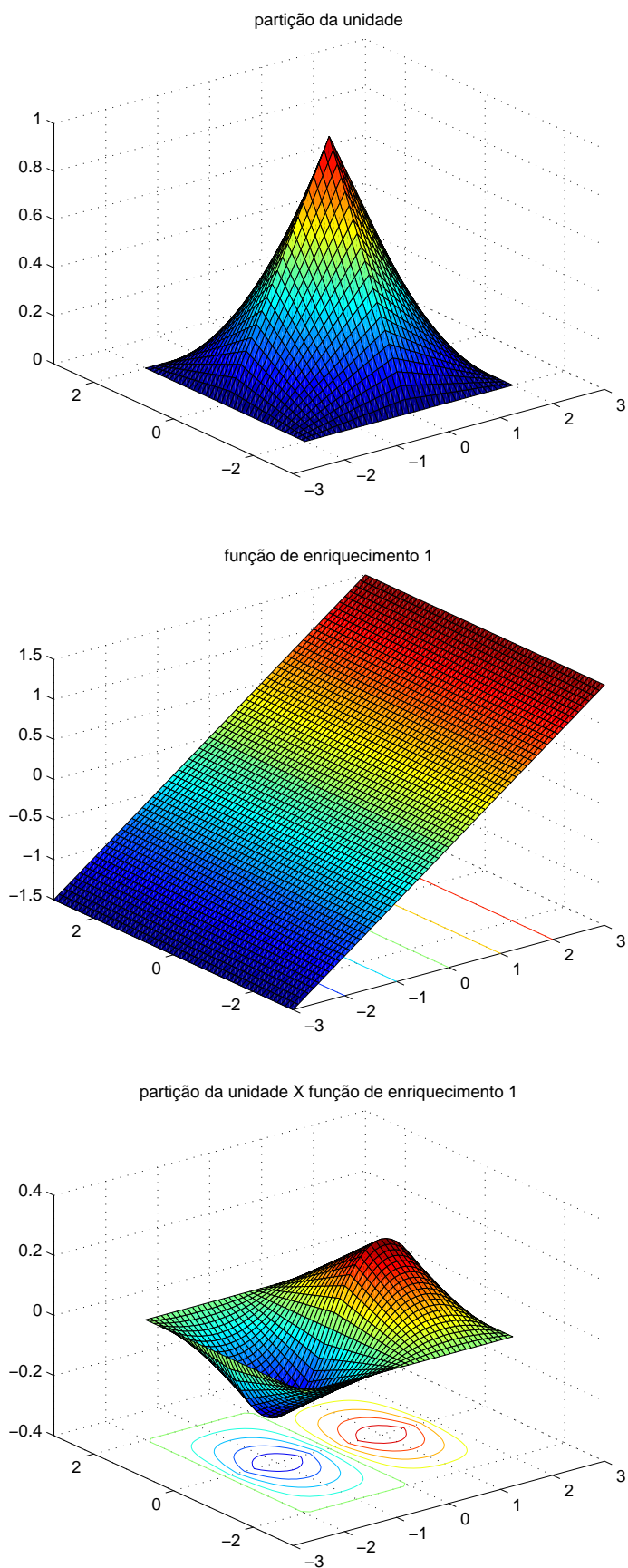


Figura 3: Combinação da PU com uma função de enriquecimento.

## 4 *Mecânica de placas laminadas compostas*

Geralmente, os compostos estruturais são classificados em sanduíches, laminados e compostos tridimensionais. Elaborados na forma de placas e cascas, os compostos laminados são formados pela superposição de duas ou mais lâminas, que numa situação genérica podem ser de diferentes materiais reforçados por fibras, cada qual com uma orientação e densidade de reforço.

Evidentemente, por construção, os laminados compostos possuem suas dimensões planares maiores que a espessura, o que em essência caracteriza uma estrutura do tipo placa. Ainda, uma placa pode ser entendida rigorosamente como um tipo especial de casca uma vez que, se as cascas são definidas como estruturas finas e curvadas constituídas de uma ou várias camadas, podendo ter diferentes curvaturas, aquelas se enquadram no conjunto das cascas com curvatura infinita.

Valendo-se deste preceito, um corpo tridimensional do tipo placa ou casca pode ser analisado considerando hipóteses cinemáticas que, pela suposição de modos de deslocamentos dos pontos materiais contidos num plano transversal inicialmente perpendicular à superfície média da estrutura, conduzem a um problema bidimensional. As teorias que partem deste princípio são chamadas *Teorias em Camada Equivalente Única* e geram um número fixo de funções de deslocamentos generalizados no plano de referência.

Uma outra metodologia consiste em considerar cada lâmina ou conjuntos de lâminas adjacentes num estratificado como uma camada discreta para efeito de cálculo, cada qual representada por seus deslocamentos, devendo-se impor condições de continuidade dos deslocamentos ou de tensões entre estas camadas, o que recebe o nome de *Teoria em Camadas Discretas*. Portanto, sob esta ótica, o número de graus de liberdade pode resultar dependente do número de camadas discretas considerado.

## 4.1 Macromecânica de uma lâmina composta

Conforme MENDONÇA (2005), o termo *comportamento macromecânico* refere-se ao comportamento da lâmina apenas quando as propriedades mecânicas aparentes médias, em sua forma macroscópica, são consideradas. Essas propriedades são obtidas diretamente de ensaios com corpos de prova, feitos com aquela lâmina, ou de forma aproximada a partir das propriedades termomecânicas dos componentes da lâmina, as fibras e a matriz, respeitando-se as proporções especificadas em projeto para cada constituinte.

A premissa básica consiste em supor que o comportamento de uma lâmina de um composto polimérico reforçado por fibras seja *hiperelástico linear*, ou seja, o comportamento constitutivo é somente função do estado de deformação.

Assim, a relação tensão-deformação para materiais elásticos-lineares é dada pela *Lei de Hooke* que, supondo a existência de uma tensão residual  $\sigma^0$  na configuração de referência, as componentes de tensão são consideradas como funções lineares das componentes de deformação, e que para o caso mais geral, considerando deformações infinitesimais, é escrita na forma tensorial como

$$\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon + \sigma^0 \quad (4.1)$$

e em termos das componente como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0 \quad (4.2)$$

com  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$  e  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ , onde  $\mathbf{C}$  é um tensor de quarta ordem que contém parâmetros materiais chamado *tensor de rigidez* ou *tensor de elasticidade elástico*, que na situação mais geral, possui  $3^4 = 81$  componentes escalares, número este que se reduz em virtude da simetria do tensor de tensões  $\sigma$ , da simetria do tensor de deformações  $\varepsilon$  e da possível simetria inerente à resposta do material.

Assim, feitas as considerações de simetria do tensor de tensões, pode-se escrever a relação constitutiva, usando a *notação contraída* ou *notação de Voigt-Kelvin*, no formato matricial, em termos das deformações de engenharia

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

onde

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} , \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} , \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} , \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} , \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} , \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} \quad (4.4)$$

MENDONÇA (2005) ainda cita que se existem dois planos ortogonais de simetria de propriedades no material, necessariamente existirá simetria relativa ao terceiro plano mutuamente ortogonal aos outros dois, de forma que a relação tensão-deformação se simplifica como

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

onde os planos de simetria são: 1 – 2, 1 – 3 e 2 – 3.

Esta *lei constitutiva* é característica dos materiais ditos *ortotrópicos*, e definem-se em seu meio três *direções principais* paralelas às interseções dos três planos ortogonais de simetria. Destarte, um material ortotrópico possui pelo menos um sistema de coordenadas em cada ponto em que as tensões normais provocam apenas deformações normais e as tensões cisalhantes provocam apenas deformações cisalhantes na direção do carregamento.

Esta *matriz de rigidez*  $[C]$ , por ser não-singular, pode ser invertida, resultando na relação deformação-tensão, e por isso, agora denominada *matriz de flexibilidade*  $[S]$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Conforme MENDONÇA (2005) e REDDY (2004), os coeficientes da matriz de flexibilidade podem ser escritos em termos das chamadas *constantes de engenharia*, que representam propriedades elásticas do material e possuem interpretação física óbvia, que são os módulos de Young generalizados ( $E_1, E_2, E_3$ ), os módulos de Coulomb generalizados ( $G_{12}, G_{23}, G_{31}$ ) e os coeficientes de Poisson ( $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{31}$ ), mensurados segundo os eixos principais de ortotropia, tal que os termos não-nulos são

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ S_{21} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} \\ S_{31} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & S_{32} &= -\frac{\nu_{23}}{E_3}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \end{aligned}$$

Deve-se ressaltar que, embora foram definidas 12 constantes de engenharia para o material ortotrópico, a simetria de  $[S]$  mostra que existem apenas 9 constantes independentes pois

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

A matriz de rigidez  $[C]$  para um material ortotrópico, em termos das constantes de engenharia, pode então ser obtida mediante a inversão da matriz de flexibilidade  $[S]$ , tal que os termos não nulos são:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{44} &= G_{23}, & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, & C_{55} &= G_{31}, & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \end{aligned}$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad C_{66} = G_{12}, \quad C_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$$

com  $\Delta$  obtido através do determinante do quadrante superior esquerdo da matriz de flexibilidade

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

No entanto, para os materiais compostos laminados cujas lâminas geralmente possuem reforço orientado unidirecionalmente numa dita direção 1, pode-se considerar que as fibras se distribuem de forma aleatória e macroscopicamente homogênea ao longo das direções ortogonais, então ditas direções 2 e 3. Assim, verifica-se a existência de simetria na resposta do material nos dois planos ortogonais à lâmina definidos por estas direções, sendo por isso designado material *isotrópico transverso*. Neste caso, tem-se as seguintes simplificações

$$C_{22} = C_{33}, \quad C_{12} = C_{13}, \quad C_{55} = C_{66}, \quad 2C_{44} = C_{22} - C_{23}$$

Logo, a relação constitutiva pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

implicando nas seguintes relações entre as constantes de engenharia

$$\begin{aligned} E_3 &= E_2, \quad \nu_{13} = \nu_{12}, \quad \nu_{23} = \nu_{32} \\ G_{31} &= G_{12}, \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \end{aligned} \quad (4.9)$$

## 4.2 Teorias de placas laminadas em camada equivalente única

Segundo REDDY (2004), as teorias de laminados em camada equivalente única (Equivalent Single Layer - ESL) são aquelas em que uma placa laminada heterogênea é tratada como uma única camada estaticamente equivalente possuindo uma complexa relação constitutiva. As teorias ESL são desenvolvidas considerando a forma do campo de deslocamentos ou campo de tensões como uma combinação linear de funções desconhecidas e a coordenada da espessura, conforme

$$\vartheta_i(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N (z)^j \vartheta_i^j(x, y, t) \quad (4.10)$$

onde  $\vartheta_i^j$  é a  $i$ -ésima componente de deslocamento generalizado na direção  $i$  ou tensão,  $(x, y)$  são as coordenadas planas,  $z$  é a coordenada na espessura,  $t$  denota a dependência do tempo,  $\vartheta_i^j$  são funções a serem determinadas e  $N$  é o grau polinomial.

Tendo como objetivo os valores das componentes de deslocamentos, as equações governantes  $\vartheta_i^j$  são calculadas através da aplicação de princípios variacionais, onde as parcelas de energia são determinadas em termos do campo de tensões real e das deformações virtuais, que resultam dependentes das funções deslocamentos  $\vartheta_i$  e suas variações.

Uma vez que é explícita a dependência com relação à coordenada da espessura, a integração sobre o domínio tridimensional conduz à integração imediata dos termos dependentes de  $z$ , dando origem à uma relação constitutiva do laminado em termos das resultantes de tensões médias ao longo da espessura. Assim, esta metodologia reduz a análise a um problema bidimensional, em termos apenas de integrais sobre as coordenadas planas contidas no plano de referência da placa.

Nesta seção serão expostas as características básicas das principais teorias de placas segundo a metodologia em camada equivalente única. Uma discussão completa sobre os resultados fornecidos por tais teorias, detalhes de implementação via MEF, soluções analíticas, etc., podem ser encontrados em referências como MENDONÇA (2005), REDDY (2004), REDDY (1997), BERTHELOT (1992) e JONES (1975).

### 4.2.1 Teoria clássica de placas laminadas

Sob a ótica das ESL, a mais simples das teorias é a *Teoria Clássica de Placas Laminadas* (Classical Laminated Plate Theory - CLPT), que basicamente é uma extensão da *Teoria Clássica de Placas* ao estudo de laminados. A CLPT estabelece que os deslocamentos respeitam as *hipóteses de Kirchhoff*, segundo as quais um segmento de reta inicialmente perpendicular à superfície média permanece reto e perpendicular a este plano após a deformação, além de ser inextensível, resultando numa teoria que negligencia o efeito da deformação cisalhante transversal e a deformação na direção da espessura. Estas hipóteses se traduzem no campo de deslocamentos expresso conforme

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v(\mathbf{x}, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\ w(\mathbf{x}, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $(u_0, v_0, w_0)$  são as componentes de deslocamentos nas direções coordenadas  $(x, y, z)$ , respectivamente, de um ponto na superfície de referência.

A CLPT repousa sobre outras hipóteses, a citar:

- não existe deslizamento entre lâminas, sendo para isso admitidas como perfeitamente coladas;
- cada lâmina tem espessura uniforme;
- os deslocamentos são contínuos através das lâminas;
- os deslocamentos, a deformações e as rotações são pequenos,

Deve-se ressaltar que, apesar de a CLPT gerar três deslocamentos generalizados no plano de referência, exige para ser implementada tanto em MEF como MEEG que o espaço de aproximação tenha continuidade  $C^1$ , ou seja, que as funções de forma de elementos finitos possuam continuidade da primeira derivada nas interfaces interelementos, visto que para atendimento do critério de conformidade, o espaço de aproximação deve ter continuidade das derivadas até um grau inferior ao máximo grau de derivação dos termos presentes no funcional.



### 4.2.2 Teoria de primeira ordem

A primeira tentativa de incluir o efeito da deformação cisalhante transversal ocorre com a elaboração da *Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem* (First Shear Deformation Theory - FSDT), que baseando-se nas hipóteses da *Teoria de Placas de Mindlin-Reissner* assume que um segmento de reta inicialmente normal à superfície de referência permanece reto após a deformação e, no entanto, não mais normal àquele plano, embora ainda seja inextensível.

Tal suposição implica em que a deformação cisalhante transversal apresente variação linear ao longo da espessura do laminado. Sabe-se, no entanto, da teoria elementar de vigas homogêneas que as tensões cisalhantes transversais variam parabolicamente ao longo da espessura da viga. Em vigas e placas compostas laminadas, por sua vez, estas tensões variam no mínimo quadraticamente através da espessura de cada lâminas.

A diferença entre o estado real de tensões e o estado de tensões constante, originado pela FSDT, é frequentemente corrigida no cálculo das forças resultantes transversais por um fator de correção, mediante a suposição de que a energia de deformação devida ao cisalhamento transversal seja igual à energia de deformação verdadeira, devida às tensões cisalhantes verdadeiras calculadas pela teoria da elasticidade tridimensional REDDY (2004).

Estas hipóteses se traduzem na relação cinemática expressa como

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \\ v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Uma vantagem desta teoria com relação à CLPT diz respeito à simplicidade quando da implementação via métodos numéricos, pois permite a utilização de espaços de aproximação com continuidade  $C^0$ , ou seja, funções apenas contínuas, sem a necessidade de se verificar a continuidade de suas primeiras derivadas nas interfaces interelementos. No entanto, como desvantagem, deve-se citar que a FSDT é suscetível ao travamento por cisalhamento.

Assim, como a relação cinemática expressa em (4.12) consiste numa expansão até os termos de primeiro grau de uma série de potências, LO, CHRISTENSEN e WU (1977) consideram que a CLPT e a FSDT são teorias de mesma ordem de aproximação, uma vez

que a CLPT é um caso especial da FSDT, quando a razão entre o módulo cisalhante e a deformação cisalhante transversal é admitida como muito grande, tal que a deformação cisalhante transversal pode ser negligenciada.

### 4.2.3 Teorias de ordem superior

Basicamente, teorias ESL de ordem superior para placas laminadas são aquelas que utilizam polinômios de grau maior que 1 nas expansões das componentes de deslocamentos através da espessura do laminado, introduzindo funções desconhecidas que frequentemente são de difícil interpretação física.

Estas teorias vêm sendo desenvolvidas desde a segunda metade da década de 1950, e a inspiração para tal desenvolvimento decorre na necessidade de obter melhores previsões no que tange ao comportamento estático e dinâmico de estruturas laminadas, principalmente no que diz respeito a uma análise em escala de lâminas.

Pode-se citar como a primeira na hierarquia das teorias de ordem superior a teoria apresentada por *Nagdhi* em 1957, que se diferencia da FSDT apenas por considerar uma expansão até o termo quadrático para o deslocamento transversal  $w$ , conforme se pode ver na sua relação cinemática

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \\ v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\zeta_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

que, conforme LO, CHRISTENSEN e WU (1977), foi utilizada para desenvolver uma teoria de cascas laminadas cilíndricas por WHITNEY e SUN (1974), que inconsistentemente utilizaram um fator de correção do cisalhamento transversal da mesma forma que a FSDT, embora a relação cinemática expressa em (4.13) implique numa distribuição das tensões cisalhantes transversais não linear.

NELSON e LORCH (1974) apresentaram uma aplicação para laminados de uma relação cinemática expressa como

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) \\
v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) \\
w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\zeta_z(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

incorrendo no mesmo erro cometido por WHITNEY e SUN (1974), quando do cálculo do fator de correção do cisalhamento. Deve-se notar que a expansão até os termos quadráticos contraria o aspecto da deformada de um plano perpendicular à superfície de referência que, como é de se esperar quando do comportamento em flexão de uma viga homogênea, se assemelha a uma função ímpar com relação à coordenada da espessura.

Ainda, uma outra alternativa consiste na consideração da inextensibilidade do segmento normal (REDDY, 1997), resultando na relação cinemática expressa como

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) \\
v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) \\
w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

A primeira proposta de incluir os termos cúbicos na expansão dos deslocamentos coplanares se deve a REISSNER (1975), que utilizando a relação cinemática

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t) &= z\psi_x(x, y, t) + z^3\phi_x(x, y, t) \\
v(\mathbf{x}, t) &= z\psi_y(x, y, t) + z^3\phi_y(x, y, t) \\
w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) + z^2\zeta_z(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

verificou que a correspondente teoria fornece bons resultados se comparado com a solução da elasticidade para flexão de uma placa com furo circular. Embora a negligência do efeito dos deslocamentos coplanares fosse apropriado para analisar o problema proposto pelo autor supracitado, a influência dos deslocamentos de membrana pode ser significativa em outras situações (LO, CHRISTENSEN e WU, 1977).

LO, CHRISTENSEN e WU (1977), assumindo as mesmas hipóteses da CLPT e da FSDT, exceto aquelas referentes à normalidade e retilinidade do segmento normal à superfície de referência e à inextensibilidade deste segmento, introduz uma expansão até os termos de terceira ordem para as componentes coplanares de deslocamentos  $u$  e  $v$  e uma

expansão até os termos de segunda ordem para o deslocamento transversal  $w$ , conforme

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) + z^3\phi_x(s, y, t) \\ v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) + z^3\phi_y(x, y, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\zeta_z(s, y, t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde  $\phi_x$  e  $\phi_y$  são rotações de ordem superior dos segmentos normais à superfície de referência em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente, e as funções  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\psi_z$ ,  $\zeta_x$  e  $\zeta_y$  também dependentes apenas das coordenadas planas,  $x$  e  $y$ , não permitem uma interpretação física evidente, mas podem ser admitidas como rotações de ordem superior que descrevem a deformação de um segmento normal ao plano de referência (MENDONÇA, 2005).

Deve-se notar, comparando as expansões empregadas por LO, CHRISTENSEN e WU (1977) com aquelas usadas na FSDT, que a introdução de seis novas funções desconhecidas, *a priori* independentes em virtude de não se ter explicitamente imposto a nulidade das tensões cisalhantes transversais nas superfícies livres da placa, aumenta significativamente o custo computacional quando da implementação de modelos numéricos baseados nesta teoria.

Com o objetivo de reduzir o número de funções desconhecidas nas expansões das componentes de deslocamentos, REDDY (1984) propõe uma teoria de ordem superior partindo de uma expansão cúbica dos deslocamentos coplanares ao longo da espessura do laminado, com capacidade de redução àquelas expansões da CLPT e FSDT como casos especiais.

Conforme REDDY (1997), o campo de deslocamentos expresso como

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z \left( \phi_x(x, y, t) - c_0 \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \right) - z^3 c_1 \phi_x(x, y, t) \\ v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z \left( \phi_y(x, y, t) - c_0 \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \right) - z^3 c_1 \phi_y(x, y, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

se reduz àquele expresso segundo as hipóteses da CLPT quando  $c_0$  é admitido como nulo e  $\phi_x = \phi_y = 0$ , e ainda, fazendo  $c_0 = c_1 = 0$ , tem-se a redução ao campo de deslocamentos da FSDT.

Introduzindo as variáveis  $\zeta_x$  e  $\zeta_y$  definidas como

$$\zeta_x = \phi_x - c_0 \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x}, \quad \zeta_y = \phi_y - c_0 \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \quad (4.19)$$

fica claro que  $(u_0, v_0, w_0)$  e  $(\zeta_x, \zeta_y)$  possuem o mesmo significado físico como na FSDT.

Assim, o campo de deslocamentos expresso em (4.18) pode ser reescrito em termos de  $\zeta_x$  e  $\zeta_y$  como

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u_0(x, y, t) + z\zeta_x(x, y, t) - c_1 z^3 \left( \zeta_x(x, y, t) + c_0 \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \right) \\ v(\mathbf{x}, t) &= v_0(x, y, t) + z\zeta_y(x, y, t) + c_1 z^3 \left( \zeta_y(x, y, t) + c_0 \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \right) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Deve-se deixar evidente que REDDY (1984) não utiliza funções de ordem superior arbitrárias, mas as determinam de maneira a garantir explicitamente a nulidade das tensões cisalhantes transversais nas superfícies livres da placa, de forma que  $c_1 = 4/(3h^2)$ , onde  $h$  é a espessura do laminado.

É ainda importante ressaltar que a HSDT de REDDY (1984) gera apenas cinco deslocamentos generalizados  $(u_0, v_0, w_0, \zeta_x, \zeta_y)$  na superfície de referência da placa, ou seja, a mesma quantidade de funções incógnitas presente na FSDT, o que representa baixo custo computacional de sua implementação. No entanto, visto a existência de derivadas parciais do deslocamento transversal  $w_0$  nos termos de ordem superior dos deslocamentos coplanares, a teoria acaba por exigir um espaço de aproximação com continuidade  $C^1$ . O próprio autor em diversos trabalhos implementa sua teoria utilizando funções de forma de elementos finitos de *Hermite*, que conhecidamente se aplicam apenas a elementos finitos retangulares, estratégia que gera um total de 8 graus de liberdade por nó, por exemplo, admitindo pequenas deformações, pois devem ser aproximadas também as derivadas parciais do deslocamento transversal  $w$ .

Conforme MENDONÇA (2005), a exigência de que  $w \in C^1(\Omega)$  na teoria de REDDY (1984) pode ser contornada com uma formulação mista obtida modelando as funções que multiplicam os termos cúbicos da expansão em série de potências em (4.20) por novas funções de ordem superior, no entanto sem impor diretamente a condição da nulidade das tensões cisalhantes transversais nas superfícies do laminado, resultando na hipótese

cinemática proposta por LEVINSON (1980), expressa como

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^3\psi_{3x}(s, y, t) \\ v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^3\psi_{3y}(x, y, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

que permite a aproximação numérica utilizando espaços de aproximação com continuidade  $C^0$ , sendo por isso de fácil implementação e gerando apenas 7 graus de liberdade por nó.

A teoria proposta por PANDYA e KANT (1988), além de considerar uma expansão com variação cúbica ao longo da espessura para as componentes de deslocamentos coplanares, inclui o termo quadrático na componente de deslocamento transversal  $w$

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^3\psi_{3x}(x, y, t) \\ v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^3\psi_{3y}(x, y, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) + z^2w_2(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Introduzindo termos quárticos na expansão dos deslocamentos coplanares, JIA-XIONG e YE-LI (1990) propuseram uma hipótese cinemática ainda mais refinada, embora mantendo a inextensibilidade do segmento normal. Sua hipótese se traduz na relação cinemática expressa por

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) + z^3\phi_{3x}(x, y, t) + z^4\eta_x(x, y, t) \\ v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(s, y, t) + z^3\phi_{3y}(x, y, t) + z^4\eta_y(x, y, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

a partir da qual, pela imposição da nulidade das tensões cisalhantes transversais nas superfícies inferior e superior do laminado, se obtém o campo de deslocamentos expresso como

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t) &= u^0 + z\psi_x \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) + z^2\zeta_x \left(1 - \frac{2z^2}{h^2}\right) + \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w}{\partial x} \\
v(\mathbf{x}, t) &= v^0 + z\psi_y \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) + z^2\zeta_y \left(1 - \frac{2z^2}{h^2}\right) + \frac{4z^3}{3h^2} \frac{\partial w}{\partial y} \\
w(\mathbf{x}, t) &= w^0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

de onde se percebe que permanecem 7 deslocamentos generalizados no plano de referência da placa. Utilizando as relações deformações/deslocamentos lineares, observa-se que as deformações incluem as segundas derivadas parciais do deslocamento transversal  $w$  em relação às coordenadas planas, o que implica na necessidade de um espaço de aproximação com continuidade  $C^1$  quando da implementação numérica do modelo.

Os autores supracitados apresentaram em seu trabalho as equações diferenciais do movimento em termos de esforços generalizados para placas e cascas e soluções analíticas via expansão em duplas séries trigonométricas para placas retangulares simplesmente apoiadas e cascas esféricas. Por exemplo, no caso de placas, percebe-se que os valores adimensionalizados de tensões obtidos, tanto coplanares quanto transversais, ainda se distanciam dos valores referenciais da solução da elasticidade.

#### 4.2.4 Teoria de deformação cisalhante de ordem zero

Contrariamente à tendência de incorporar termos nas expansões das componentes de deslocamentos, RAY (2003) aplicou a relação cinemática derivada da *Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Zero* (Zeroth-Order Shear Deformation Theory - ZSDT) na análise de placas laminadas. A ZSDT satisfaz a condição de nulidade das tensões cisalhantes transversais nas superfícies livres, não requer fatores de correção do cisalhamento transversal e não é susceptível ao travamento (SHIMPI, 1998 apud RAY, 2003).

Assim chamada por não conter rotações generalizadas nas expansões de deslocamentos, a ZSDT incorpora o efeito do cisalhamento transversal através do uso de resultantes de tensões cisalhantes transversais,  $Q_x$  e  $Q_y$ , nas expansões dos deslocamentos coplanares. A relação cinemática pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u^0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_x} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_x(x, y, t) \\
v(x, t) &= v^0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + \frac{1}{\lambda_y} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_y(x, y, t) \\
w(x, t) &= w^0(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

As constantes  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  são determinadas através do cálculo das deformações cisalhantes transversais  $\varepsilon_{xz}$  e  $\varepsilon_{yz}$  (4.26), que escritas em termos das resultantes de tensões cisalhantes transversais (4.27), explicitamente se anulam nas superfícies inferior e superior da laminado.

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{\lambda_x} \left( \frac{3}{2h} - \frac{6z^2}{h^3} \right) Q_x \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{\lambda_y} \left( \frac{3}{2h} - \frac{6z^2}{h^3} \right) Q_y \tag{4.26}$$

$$Q_x = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{xz}^k dz \quad Q_y = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{yz}^k dz \tag{4.27}$$

Logo, substituindo (4.27) em (4.26) e usando a relação constitutiva das lâminas obtém-se as expressões para as constantes

$$\begin{aligned}
\lambda_x &= \sum_{k=1}^N C_{55}^k \left[ \frac{3}{2h} (z_k - z_{k-1}) - \frac{2}{h^3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \\
\lambda_y &= \sum_{k=1}^N C_{44}^k \left[ \frac{3}{2h} (z_k - z_{k-1}) - \frac{2}{h^3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Apesar da ZSDT ser atrativa computacionalmente em virtude de gerar apenas 3 deslocamentos generalizados, sua implementação numérica exige espaços de aproximação com continuidade  $C^1$ , pois as componentes de deformações lineares contém as segundas derivadas parciais do deslocamento transversal  $w$ .

RAY (2003) apresenta soluções analíticas obtidas pelo *Método de Navier* para placas retangulares simplesmente apoiadas, de onde se percebe boa concordância com os resultados obtidos via teoria da elasticidade para deflexões centrais e máximas tensões coplanares, em laminados simétricos cruzados. Mais importante ainda, é observar que a ZSDT é capaz de fornecer campos de tensões coplanares contínuos e descontínuos ao longo da espessura do laminado, satisfazendo as restrições da mecânica do contínuo (que



serão elencadas a seguir), podendo inclusive apresentar variação não-linear ao longo da espessura do laminado.

### 4.3 Teorias de placas laminadas em camadas discretas

A análise de qualquer estrutura composta reforçada por fibras, não somente placas e cascas, se apresenta ao projetista com muitos desafios em virtude de sua complexa constituição heterogênea e anisotrópica, diferentemente de estruturas formadas por elementos produzidos com materiais homogêneos e isotrópicos.

A heterogeneidade e a anisotropia geralmente implicam na ocorrência de inúmeros fenômenos, que inclusive podem ser verificados em diferentes escalas geométricas, a citar:

- escala global, se o fenômeno se verifica em escala de laminado ou em escala de um elemento estrutural como um todo (*macro* escala) como, por exemplo, a maior flexibilidade de uma viga ou placa em material composto se comparado a membros estruturais de dimensões equivalentes em material homogêneo e isotrópico, devido à baixa rigidez ao cisalhamento transversal;
- escala de lâmina, se tratando de um fenômeno no interior do laminado que se caracteriza pela ocorrência de perturbações com dimensões ditas na *meso* escala como, por exemplo, processos de danificação do tipo *delaminação* e descolagem do adesivo em ligações, além de concentrações de tensões cisalhantes transversais próximas à descontinuidades geométricas e materiais; e
- escala de fibra e matriz, caracterizando um processo em *micro* escala, como fenômenos de danificação do tipo ruptura de fibra ou descolamento entre fibra e matriz, entre outras formas de dano que degradam a rigidez de uma lâmina individualmente, causando uma complexa redistribuição de esforços.

Além disso, a deformação global de uma estrutura laminada composta é geralmente caracterizada pelo complexo acoplamento entre extensão, flexão e modos de cisalhamento.

Deve-se citar que, principalmente na análise de estruturas em materiais compostos laminados submetidos à transição de componentes estruturais secundários para componentes estruturais primários críticos, é necessário dar bastante ênfase à avaliação precisa de regiões localizadas onde o início do dano é favorecido (REDDY, 2004).

Ainda segundo REDDY (2004), as simples teorias em camada equivalente única que frequentemente se provam adequadas para modelar estruturas secundárias são de limitado poder preditivo na modelagem de estruturas primárias por duas razões. Antes de tudo, vários componentes estruturais primários são consideravelmente mais espessos que componentes secundários e assim a exata determinação da resposta global pode requerer uma teoria de laminados refinada que contemple efeitos na espessura. Segundo, a avaliação de regiões localizadas de potencial início de dano depende de uma precisa determinação do estado tridimensional de tensões e deformações em nível de lâmina, não obstante se esta avaliação e predição é desejada em nível de lâmina ou em nível de fibra/matriz.

As simples teorias em camada equivalente única são mais frequentemente incapazes de determinar precisamente o campo tridimensional de tensões na escala de lâmina. E uma vez que danos significativos ocorrem em nível de lâmina, a descrição cinemática e material do problema deve ser modificada antes de proceder a qualquer análise mais refinada. Assim, o exame de componentes estruturais primários compostos pode requerer o emprego da teoria da elasticidade tridimensional ou de teorias em camadas discretas, que contém relações cinemáticas e constitutivas completamente tridimensionais.

A partir de uma breve reflexão a respeito do equilíbrio de forças interlaminares, conforme se pode ver na Figura 4, nota-se que os campos de tensões cisalhantes transversais e de tensões normais na direção da espessura devem ser contínuos, ou seja

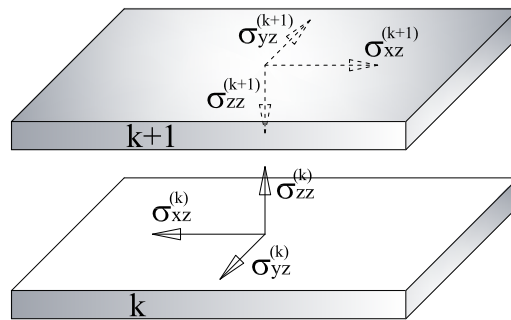


Figura 4: Equilíbrio das tensões interlaminares.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k-1)} \quad (4.29)$$

E lembrando que, embora as deformações normais coplanares sejam contínuas nas interfaces, as correspondentes tensões normais podem não ser, em virtude da descontinuidade

das propriedades materiais. Logo, pode-se resumir que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{k+1} \quad (4.30)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k \neq \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{k+1} \quad (4.31)$$

E novamente devido à descontinuidade material e ao exposto na eq. (4.29) tem-se

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^{(k)} \neq \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (4.32)$$

e portanto, o conjunto de condições expressas em (4.29) - (4.32) se constitui num conjunto de restrições da mecânica do contínuo.

Do exposto anteriormente e sabendo que nas teorias em camada equivalente única (ESL) admite-se campos de deslocamentos que são descritos como funções contínuas da coordenada da espessura do laminado, percebe-se que utilizando esta metodologia tem-se contrariada a restrição expressa em (4.32) e, conseqüentemente, também contrariada a restrição expressa em (4.29)

Portanto, todas tensões obtidas utilizando-se teorias ESL são descontínuas nas interfaces entre lâminas de materiais diferentes, quando obtidas via procedimento padrão empregando-se as relações constitutivas das lâminas, embora seja comum implementar pós-processamento de resultados via integração das *equações diferenciais de equilíbrio* para obtenção de distribuições contínuas de tensões cisalhantes transversais ao longo da espessura, como será detalhado adiante.

Desta feita, uma alternativa para superar a inconveniente continuidade das deformações cisalhantes transversais nas interfaces entre lâminas é admitir que os campos de deslocamentos sejam apenas seccionalmente regulares ao longo da espessura do laminado. Em outras palavras, tal estratégia significa que as deformações serão apenas contínuas no interior das lâminas, podendo no entanto ser descontínuas nas interfaces interlaminares e, como consequência, permitindo a existência de campos de tensões cisalhantes transversais

contínuos nas interfaces entre materiais com diferentes propriedades. Tal característica, conforme REDDY (2004), implica no fato de os campos de deslocamentos obtidos via teorias em camadas equivalentes discretas fornecerem uma representação cinematicamente mais correta de torções moderadas e severas associadas com deformações de laminados espessos.

Aproximações de campos de deslocamentos em laminados via teorias em camadas discretas podem ser construídas admitindo apenas expansões contínuas por partes para os deslocamentos coplanares  $u$  e  $v$ , metodologia esta designada por *Teoria em Camadas Discretas Parcial*. Por outro lado, introduzindo ainda expansões em camadas discretas para o deslocamento transversal  $w$  além dos deslocamentos coplanares tem-se a chamada *Teoria em Camadas Discretas Total*.

Numa forma bastante direta de expandir em camadas discretas os deslocamentos em um laminado, REDDY (1997) apresenta uma teoria onde o campo de deslocamentos na lâmina  $k$  é escrito como

$$\begin{aligned} u^k(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^m u_j^k(x, y, t) \phi_j^k(z) \\ v^k(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^m v_j^k(x, y, t) \phi_j^k(z) \\ w^k(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^n w_j^k(x, y, t) \psi_j^k(z) \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde  $u^k, v^k, w^k$  representam as componentes do deslocamento total nas direções  $x, y, z$ , respectivamente, de um ponto material inicialmente localizado em  $(x, y, z)$  no laminado indeformado, e  $\phi_j^k(z)$  e  $\psi_j^k(z)$  são funções contínuas por partes na coordenada  $z$ , em geral  $\psi^k \neq \phi^k$ , que podem ser admitidas como sendo as funções de interpolação lagrangeanas unidimensionais na coordenada da espessura. Neste caso,  $(u_j^k, v_j^k, w_j^k)$  denotam valores de  $(u^k, v^k, w^k)$  no  $j$ -ésimo plano, ou seja, as funções  $u_j^k(x, y, t)$ ,  $v_j^k(x, y, t)$  e  $w_j^k(x, y, t)$  representam as componentes de deslocamentos em todos os pontos localizados no  $j$ -ésimo plano (definido por  $z = z_j$ ) no laminado indeformado.

Deve-se notar que os limites dos somatórios são diferentes, o que significa que a discretização ao longo da espessura pode ser diferente para os deslocamentos coplanares e para o deslocamento transversal. Assim, o número de nós na espessura da lâmina  $k$ , quer seja  $m$  ou  $n$ , define o grau polinomial  $p = m - 1$  de  $\phi_j^k(z)$  e  $p = n - 1$  de  $\psi_j^k(z)$ , que

são definidas somente dentro da  $k$ -ésima lâmina.

Visto que a variação das componentes de deslocamento ao longo da espessura é definida em termos de funções de interpolação lagrangianas, as componentes de deslocamento serão contínuas através da espessura do laminado, mas as deformações transversais serão des- contínuas nas interface entre subdivisões adjacentes da espessura do laminado. Isto conduz à possibilidade de as tensões cisalhantes transversais serem contínuas ao longo das interfaces entre lâminas discretas.

Note que o uso de funções *Hermitianas* ao longo da espessura é cinematicamente incorreto para vários laminados visto que as deformações transversais são forçadas serem contínuas através da espessura.

Qualquer grau de variação do deslocamento desejado é facilmente obtido pela adição de subdivisões de elementos finitos ao longo da espessura (refinamento  $h$ ) ou pelo uso de funções de interpolação de maior ordem (refinamento  $p$ ). Ao longo da espessura o conceito introduzido aqui é muito geral no que se refere ao número de subdivisões pois pode ser maior, igual, ou menor que o número de materiais ou orientações distintos através da espessura, e cada lâmina pode ter variação linear, quadrática ou de maior ordem dos deslocamentos.

Note que o conceito de sublaminado pode ser usado (isto é, o número de subdivisões é menor que o número de lâminas materiais), entretanto, cada sublaminado será representado como uma camada equivalente, única e homogênea.

Portanto, do empilhamento das camadas discretas, o campo de deslocamento total do laminado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \sum_{I=1}^N U_I(x, y, t) \Phi^I(z) \\ v(\mathbf{x}, t) &= \sum_{I=1}^N V_I(x, y, t) \Phi^I(z) \\ w(\mathbf{x}, t) &= \sum_{I=1}^N W_I(x, y, t) \Psi^I(z) \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde  $(U_I, V_I, W_I)$  denotam os valores nodais de  $(u, v, w)$ ,  $N$  é o número de nós e  $\Phi^I$  são as funções de interpolação globais (veja a Figura 5) para a discretização dos deslocamentos coplanares através da espessura e  $M$  é o número de nós e  $\Psi^I$  as funções de interpolação

do deslocamento transversal ao longo da espessura.

Conforme REDDY (1997), ambas as teorias em camadas equivalentes conseguem representar o comportamento *zig-zag* dos deslocamentos coplanares  $u$  e  $v$  através da espessura do laminado, comportamento este que pode ser visto nas soluções exatas via teoria da elasticidade tridimensional.

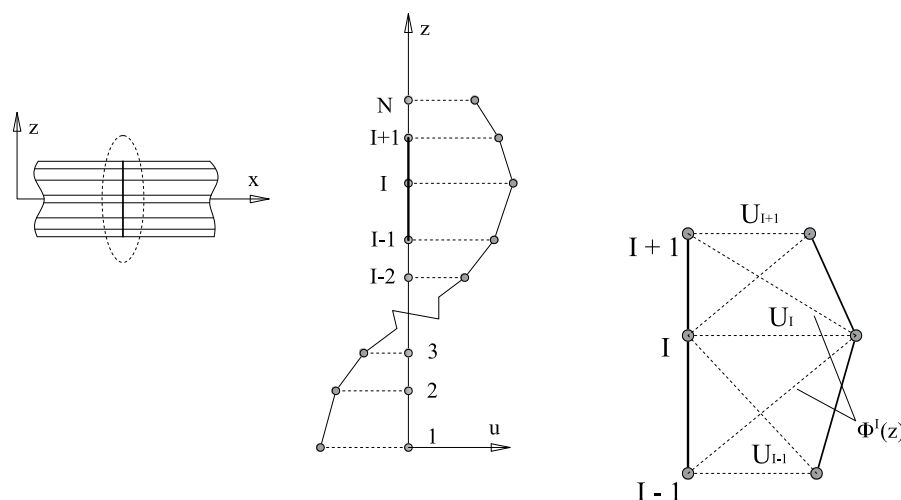


Figura 5: Representação dos deslocamentos e funções de aproximação linear na espessura.

## 4.4 Teorias mistas

De uma forma geral, uma tentativa de circunscrever o inconveniente aumento do custo da análise é utilizar funções contínuas por partes ditas *zig-zag*, dando origem às teorias que podem ser chamadas *Teorias em Camadas Discretas Parciais Independentes*, onde o número de incógnitas não resulta dependente do número de lâminas discretas considerado.

Conforme DI e ROTHERT (1995), basicamente existem três diferentes concepções de forma da função *zig-zag*. Como se pode ver na Figura (6), utilizando uma concepção do tipo (a) tem-se como resultado a possibilidade de rotações independentes em cada lâmina discreta, gerando assim maior número de incógnitas conforme o aumento do número de lâminas. No entanto, ambas as concepções (b) e (c) restringem estas rotações, mas na primeira delas, o parâmetro  $\phi$  é definido de tal forma que a seção transversal de cada lâmina gera a mesma projeção sobre o plano de referência, enquanto na segunda, é definida uma rotação com relação ao segmento normal ao plano de referência para todas as lâminas. Quando todas as lâminas do laminado têm a mesma espessura ambas concepções (b) e (c) são equivalentes, mas quando as espessuras são diferentes, a hipótese ilustrada em (c)

é mais adequada em virtude do parâmetro  $\phi$  refletir a influência da espessura de cada lâmina.

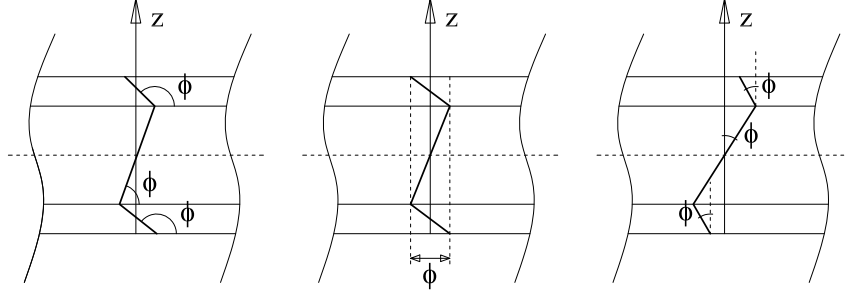


Figura 6: Suposições sobre o comportamento “zig-zag” ao longo da espessura.

Objetivando também respeitar as restrições da *Mecânica do Contínuo*, DISCIUVA (1985) apresenta uma teoria para placas laminadas considerando uma relação cinemática conforme

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z \left( \gamma_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \sum_k^N \varrho_k(x, y, t) \left[ (z - z_k) Y^k(z - z_k) \right] \\
 v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z \left( \gamma_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \sum_k^N \rho_k(x, y, t) \left[ (z - z_k) Y^k(z - z_k) \right] \\
 w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

onde  $Y^k(z - z_k)$  é uma função com inclinação unitária válida somente na lâmina  $k$ . Examinando as expressões dos deslocamentos (4.35) não é difícil perceber que os deslocamentos  $u$  e  $v$  são funções contínuas da coordenada da espessura para todos os valores das funções  $\varrho_k(x, y, t)$  e  $\rho_k(x, y, t)$ , que podem ser determinadas impondo a condição de continuidade das tensões cisalhantes transversais (DISCIUVA, 1985).

Introduzindo uma função *zig-zag* nas expansões de deslocamentos da FSDT, MURAKAMI (1986) apresenta a teoria designada por *Reissner Multilayered Theory*, a qual fornece uma resposta melhorada do comportamento em membrana, se comparado à FSDT original, pois é capaz de melhor representar os efeitos transversais.

CARRERA (2004), por exemplo, apresenta um refinamento da FSDT introduzindo a chamada *função zig-zag de Murakami* em todas as componentes de deslocamentos. Segundo o autor, do ponto de vista de implementação, a inclusão de tal função em modelos

de placas existentes requer o mesmo esforço requerido quando da inclusão de termos de maior ordem nas expansões em séries de potências características das teorias ESL, sem contar na significativa melhora das predições.

O autor supracitado faz uma implementação da hipótese cinemática que se traduz como

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + (-1)^k \zeta_k u^M \\ v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + (-1)^k \zeta_k v^M \\ w(\mathbf{x}, y) &= w^0(x, y, t) + z\psi_w(x, y, t) + (-1)^k \zeta_k w^M \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para tanto, considera  $z_k$  como sendo a cota média de cada lâmina  $k$ , com espessura  $h_k$ , de forma que introduzindo a coordenada adimensionalizada  $\zeta_k$

$$\zeta_k = \frac{z_k}{2h_k} \quad -1 \leq \zeta_k \leq 1 \quad (4.37)$$

define a *função zig-zag de Murakami* como sendo expressa por

$$M(z) = (-1)^k \zeta_k \quad (4.38)$$

que é uma função contínua seccionalmente linear, tem magnitude unitária para todas as lâminas, cuja derivada tem o sinal alterado nas interfaces interlaminares.

Vale ressaltar que o graus de liberdade adicionais  $u^M$  e  $v^M$  possuem significado de deslocamentos, além de serem independentes das lâminas, ou seja, possuem uma intrínseca descrição em camada equivalente única.

COTONI, MASSON e CÔTÉ (2006), combinam funções seccionalmente regulares a expansões em séries de potências até quarta ordem, conforme expresso por

$$\begin{aligned} u^k(\mathbf{x}, t) &= u_0 - z\beta_x + z^2\alpha_x + z^3\delta_x + z^4\gamma_x + \left( \frac{\lambda_x^k - \lambda_x^{k+1}}{h_k} z_k + \frac{\lambda_x^k + \lambda_x^{k-1}}{2} \right) \\ v^k(\mathbf{x}, t) &= v_0 - z\beta_y + z^2\alpha_y + z^3\delta_y + z^4\gamma_y + \left( \frac{\lambda_y^k - \lambda_y^{k+1}}{h_k} z_k + \frac{\lambda_y^k + \lambda_y^{k-1}}{2} \right) \\ w^k(\mathbf{x}, t) &= w_0 \end{aligned} \quad (4.39)$$



onde  $u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y, \alpha_x, \alpha_y, \delta_x, \delta_y, \gamma_x, \gamma_y, \lambda_x^k$  e  $\lambda_y^k$  são funções das duas coordenadas coplanares  $(x, y)$  e do tempo  $t$ . Os primeiros cinco termos nas equações são termos em camada equivalente única, visto que eles não dependem do número de lâminas. Em particular, os primeiros dois termos são como aqueles da FSDT. Os dois último termos entre parênteses são termos em camadas discretas, que dependem das características de cada lâmina individualmente. Eles permitem que a derivada dos deslocamentos no plano  $u$  e  $v$  com relação a  $z$  sejam descontínuas na interface entre lâminas com a consequência de que a tensão cisalhante transversal possa ser contínua.

Refinando a *Teoria Global-Local Clássica* de LI e LIU (1997) através da inserção do efeito da deformação normal transversal, ZHEN e WANJI (2007) apresentam uma formulação baseada na relação cinemática expressa como

$$\begin{aligned} u^k(\mathbf{x}, t) &= u_G(\mathbf{x}, t) + \bar{u}_L^k(\mathbf{x}, t) + \hat{u}_L^k(\mathbf{x}, t) \\ v^k(\mathbf{x}, t) &= v_G(\mathbf{x}, t) + \bar{v}_L^k(\mathbf{x}, t) + \hat{v}_L^k(\mathbf{x}, t) \\ w^k(\mathbf{x}, t) &= w_G(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde  $u_G, v_G$  e  $w_G$  representam expansões em componentes globais de deslocamentos,  $\bar{u}_L, \bar{v}_L$  são expansões locais de dois termos e  $\hat{u}_L, \hat{v}_L$  são o grupo de expansões locais de um termo, com o superescrito  $k$  representando a ordem da lâmina. As coordenadas espaciais globais associadas à placa são  $x, y, z$ , considerando o plano médio como sendo de referência. Por sua vez, as coordenadas locais para uma lâmina são denotadas por  $x, y, \zeta_k$ , onde  $-1 \leq \zeta_k \leq 1$ .

As componentes globais são expandidas na forma

$$\begin{aligned} u_G(\mathbf{x}, t) &= u_0(x, y, t) + zu_1(x, y, t) + z^2u_2(x, y, t) + z^3u_3(x, y, t) \\ v_G(\mathbf{x}, t) &= v_0(x, y, t) + zu_1(x, y, t) + z^2u_2(x, y, t) + z^3u_3(x, y, t) \\ w_G(\mathbf{x}, t) &= w_0(x, y, t) + zw_1(x, y, t) + z^2w_2(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

e as componentes locais podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
\bar{u}_L^k(\mathbf{x}, t) &= \zeta_k u_1^k(x, y, t) + \zeta_k^2 u_2^k(x, y, t) \\
\bar{v}_L^k(\mathbf{x}, t) &= \zeta_k v_1^k(x, y, t) + \zeta_k^2 v_2^k(x, y, t) \\
\hat{u}_L^k(\mathbf{x}, t) &= \zeta_k^3 u_3^k(x, y, t) \\
\hat{v}_L^k(\mathbf{x}, t) &= \zeta_k^3 v_3^k(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

onde

$$\zeta_k = a_k z - b_k \quad a_k = \frac{2}{z_k - z_{k-1}} \quad b_k = \frac{z_k + z_{k-1}}{z_k - z_{k-1}} \tag{4.43}$$

Deve-se citar que esta teoria origina 13 funções incógnitas de deslocamentos generalizados, após a imposição da condição de continuidade das tensões cisalhantes transversais.

## 5 *Eletroelasticidade linear*

### 5.1 Revisão histórica

A eletroelasticidade lida com o fenômeno causado pela interação entre variáveis de campo mecânicas e elétricas. O fenômeno piezométrico é um destes fenômenos e este é relacionado ao efeito da carga elétrica na deformação mecânica. Uma estrutura laminada com lâminas piezométricas, por exemplo, sofre atuação através de deformação induzida por um campo elétrico aplicado à lâmina piezométrica, ou esta emite um sinal elétrico que pode ser usado para medir a deformação do laminado.

O termo piezeletricidade, que possui o prefixo *piezo*, derivado da palavra grega *piezein*, que significa pressionar, sugere portanto eletricidade devido a uma pressão e basicamente consiste na capacidade de alguns materiais denominados piezométricos de converterem energia mecânica em energia elétrica e vice-versa.

Buscando-se rememorar o processo que levou à descrição do fenômeno piezométrico, pode-se citar que em 1756, o físico germânico Franz Aepinus (1724 – 1802), inventor do capacitor elétrico, observou nos cristais de turmalina a ocorrência de uma polarização elétrica quando estes são submetidos a variações de temperatura, comportamento este que foi designado posteriormente por piroeletricidade em 1824, pelo físico escocês David Brewster (1782 – 1868).

Por sua vez, em 1814, o mineralogista francês René Haüy (1743 – 1822) observou que o espató calcário se eletrizava quando comprimido. No entanto, foram os irmãos Jacques Curie (1856 – 1941) e Pierre Curie (1859 – 1906) que em 1880 publicaram o primeiro trabalho descrevendo o efeito piezométrico direto, ou seja, a conversão de energia mecânica em energia elétrica em cristais.

No ano seguinte, Gabriel Lippmann (1845 – 1921), através de considerações puramente termodinâmicas previu a piezeletricidade inversa, ou seja, a conversão de energia elétrica em energia mecânica, o que fora verificado experimentalmente, também em 1881, pelos

irmãos Curie

Conforme FARIA (2006), um material que pode ser polarizado sob um campo elétrico é chamado material dielétrico, e também é conhecido como isolante elétrico. Dentre as formas possíveis de se obter a polarização, a que se aplica aos materiais piezelétricos industriais é o mecanismo de *reorientação dos dipolos*, quando um campo elétrico aplicado causa uma reorientação das moléculas do dielétrico, induzindo uma polarização global. Macroscopicamente, um material pode ser composto por várias moléculas polarizadas, tal que aleatoriamente distribuídas mantém o material em estado neutralizado. Em uma estrutura molecular polar, o fenômeno de polarização consiste no alinhamento dos dipolos de suas moléculas, e numa estrutura apolar consiste na criação e no subsequente alinhamento dos dipolos.

Assim, o primeiro material piezelétrico sintético foi obtido em 1940 após polarização do *titanato de bário* ( $BaTiO_3$ ) pela aplicação de um campo elétrico. Este fato conduziu à descoberta na década de 1950 do *titanato zirconato de chumbo* ( $Pb(Zr,Ti)O_3$ ), também chamado (PZT), que apresenta coeficientes elásticos com valores muito semelhantes aos do alumínio e coeficientes piezelétricos relativamente altos, capaz de desenvolver deformações elásticas da ordem de 0,1%, e trabalhar em uma larga faixa de frequências. Atualmente, os cerâmicos PZT são um dos materiais piezelétricos mais facilmente encontrados no mercado.

Além dos materiais piezelétricos cerâmicos, polímeros piezelétricos como o *polifluoreto de vinilideno* (PVDF) são amplamente empregados. A natureza piezelétrica do PVDF foi descoberta em 1969 pelo físico japonês Heiji Kawai, e atualmente os polímeros piezelétricos são disponíveis na forma de filmes finos.

Os materiais cerâmicos piezelétricos são frágeis e rígidos, enquanto os materiais poliméricos são mais dúcteis e flexíveis. Os cerâmicos são mais utilizados como atuador devido à sua rigidez mecânica relativamente alta. Por outro lado, os poliméricos são mais flexíveis e apesar de possuírem propriedades piezelétricas mais fracas, são mais sensíveis que os cerâmicos, fazendo com que sejam indicados para aplicações como sensores (MACHADO, 2004).

## 5.2 Formulação fenomenológica da eletroelasticidade linear

O efeito piezométrico é descrito pelo *vetor polarização*  $\mathbf{P}$ , que representa o *momento elétrico por unidade de volume* ou *carga de polarização por unidade de área* (REDDY, 2004).

Como já mencionado, a piezoelectricidade pode se manifestar de forma direta ou inversa. Por definição, o *efeito piezométrico direto* é o desenvolvimento de uma polarização devida à deformação mecânica, e pode ser formulado como uma relação linear na qual cada uma das componentes do vetor polarização  $\mathbf{P}$  é dado por uma combinação linear das 9 componentes do *Tensor Tensão de Cauchy*  $\sigma$ . Logo, este relacionamento se dá através da expressão

$$\mathbf{P} = \mathbf{d} \cdot \sigma \quad (5.1)$$

ou em termos de componentes cartesianas retangulares

$$P_i = d_{ijk} \sigma_{jk} \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{d}$  é um tensor de terceira ordem de *módulos piezométricos*, mais especificamente designados como *constantes piezométricas de tensão*.

Por outro lado, o *efeito piezométrico inverso* relaciona o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$  ao tensor de deformações lineares  $\varepsilon$  através da expressão

$$\varepsilon = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \quad (5.3)$$

ou em termos de componentes cartesianas retangulares

$$\varepsilon_{ij} = d_{kij} E_k \quad (5.4)$$

Deve-se notar que  $d_{kij}$  é um tensor simétrico com relação aos índices  $i$  e  $j$  devido à simetria de  $\varepsilon_{ij}$ .

Por consequência, quando o material dielétrico é polarizado, os dipolos elétricos alinhados produzem uma *densidade de carga volumétrica equivalente*  $\rho_p$  que afeta o campo

elétrico (NYE, 1969 apud FARIA, 2006), variável esta que se relaciona à polarização conforme

$$\rho_p = -\frac{\partial P_i}{\partial x_i} = -\text{div} \mathbf{P} \quad (5.5)$$

onde, de acordo com a *convenção de soma de Einstein*, a repetição dos índices indica um somatório de  $i = 1$  a  $3$ . Esta relação origina a definição de *deslocamento elétrico*  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \chi \cdot \mathbf{E} \quad (5.6)$$

e em termos de componentes cartesianas retangulares

$$D_i = \chi_{ij} E_j \quad (5.7)$$

onde  $\chi_{ij}$  são as *constantes de permissividade dielétrica*.

O *efeito piroelétrico* é outro fenômeno que relaciona variações de temperatura à polarização de um material. Para uma pequena variação de temperatura  $\Delta\theta$ , a variação no vetor polarização  $\Delta\mathbf{P}$  é dada por

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{p}\Delta\theta \quad (5.8)$$

ou em termos de componentes cartesianas retangulares

$$\Delta P_i = p_i \Delta\theta \quad (5.9)$$

onde  $\mathbf{p}$  é o *vetor de coeficientes piroelétricos*.

De acordo com REDDY (2004), o acoplamento entre efeitos mecânico, térmico e elétrico pode ser estabelecido usando princípios termodinâmicos e as relações de Maxwell. Análogo ao *funcional de energia de deformação*  $U_0$  para a elasticidade e ao *funcional de energia livre de Helmholtz*  $\Psi_0$  para a termoelasticidade, admite-se a existência de um funcional  $\Phi_0$  tal que

$$\begin{aligned} \Phi_0(\varepsilon_{ij}, E_i, \theta) &= U_0 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \eta\theta \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} \varepsilon_{ij} E_k - \beta_{ij} \varepsilon_{ij} \theta - \frac{1}{2} \chi_{kl} E_k E_l - p_k E_k \theta - \frac{\rho c_v}{2\theta_0} \theta^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

que é chamado *funcional de energia livre de Gibbs* ou funcional de entalpia, onde  $\eta$  é a entalpia,  $C_{ijkl}$  são os módulos elásticos,  $e_{ijk}$  são os módulos piezelétricos, mais especificamente *constantes piezelétricas de deformação*,  $\chi_{ij}$  são as constantes dielétricas,  $p_k$  são as constantes piroelétricas,  $\beta_{ij}$  são os coeficientes térmicos,  $c_v$  é o calor específico por unidade de massa e  $\theta_0$  é a temperatura de referência.

Assim, fazendo-se as derivações parciais deste funcional em relação às variáveis de campo  $\varepsilon$ ,  $E$  e  $\theta$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial E_i}, \quad \eta = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \quad (5.11)$$

obtem-se as equações constitutivas acopladas para um meio piropiezoelétrico deformável

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{ijk}E_k - \beta_{ij}\theta \\ D_k &= e_{ijk}\varepsilon_{ij} + \chi_{kl}E_l + p_k\theta \\ \eta &= \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + p_kE_k + \frac{\rho c_v}{\theta_0}\theta \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de tensões mecânicas,  $D_i$  são as componentes do vetor deslocamento elétrico e  $\eta$  é a entalpia.

As relações expressas em (5.12) também podem ser escritas utilizando-se notação contraída ou notação de *Kelvin - Voigt*, conforme também apresentado em LEE (2001) e LEE e SARAVANOS (1997)

$$\begin{aligned} \sigma_i &= C_{ij}^{E,\theta}(\theta)\varepsilon_j - e_{ik}^\theta(\theta)E_k - \beta_i^{E,\theta}(\theta)\theta \\ D_k &= e_{kj}^\theta(\theta)\varepsilon_j + \chi_{kl}^{\varepsilon,\theta}(\theta)E_l + p_k^{\varepsilon,\theta}(T)\theta \\ \eta &= \beta_i^{E,\theta}(\theta)\varepsilon_i + p_k^{\varepsilon,\theta}(\theta)E_k + \frac{\rho c_v}{\theta_0}\theta \end{aligned} \quad (5.13)$$

com as seguintes relações entre os vários módulos piezelétricos e propriedades térmicas

$$\begin{aligned} e_{ik}^\theta(\theta) &= C_{ij}^{E,\theta}(\theta)d_{jk}^\theta(\theta)E_k \\ \beta_i^{E,\theta}(\theta) &= C_{ij}^{E,\theta}(\theta)\alpha_j^{E,\theta}(\theta) \\ \chi_{kl}^{\varepsilon,\theta}(\theta) &= \chi_{kl}^{\sigma,\theta}(\theta) - d_{ki}^\theta(\theta)e_{ik}^\theta(\theta) \\ p_k^{\varepsilon,\theta}(\theta) &= p_k^{\sigma,\theta}(\theta) - d_{k,i}^\theta(\theta)\beta_i^{E,\theta}(\theta) \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde os sobrescritos  $E, \sigma, \varepsilon, \theta$  representam situação de campo elétrico constante, tensão constante, deformação constante e temperatura constante, respectivamente. Deve-se observar que, para o caso mais geral, os diversos coeficientes materiais podem ser inclusive função da temperatura.

Note que a variação dos índices é diferente para os diferentes termos:  $i, j = 1, 2, \dots, 6$  e  $k, l = 1, 2, 3$ . Para um material totalmente anisotrópico, existem 21 constantes elásticas independentes, 18 constantes piezelétricas, 6 constantes dielétricas, 3 constantes piroelétricas, e 6 coeficientes de expansão térmicas.

No entanto, por ocasião da formulação aqui apresentada, desprezou-se em (5.12) o efeito da variação de temperatura, de modo que as *equações constitutivas acopladas* são

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{ijk}E_k \\ D_k &= e_{ijk}\varepsilon_{ij} + \chi_{kl}E_l \\ \eta &= \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + p_kE_k\end{aligned}\tag{5.15}$$

ou em notação contraída

$$\begin{aligned}\sigma_i &= C_{ij}^E\varepsilon_j - e_{ik}E_k \\ D_k &= e_{kj}\varepsilon_j + \chi_{kl}^e E_l \\ \eta &= \beta_j\varepsilon_j + p_kE_k\end{aligned}\tag{5.16}$$

Deve-se salientar que as *constantes piezelétricas de deformação*  $e_{ij}$  são mais frequentemente fornecidas pelos fabricantes, e seu relacionamento com as constantes de tensão piezelétricas se dá através da expressão

$$e_{ik} = d_{ij}C_{jk}^E\tag{5.17}$$

### 5.3 Equações governantes da piezeletricidade linear

Para um corpo sólido piezelétrico ocupando o domínio  $\Omega$  tem-se, segundo SZE e PAN (1999), que o funcional híbrido mais geral envolvendo todas as seis variáveis de campo assumidas (deslocamentos mecânicos, deformações, tensões, deslocamentos elétricos, potenciais e campo elétricos) pode ser expresso como



$$\begin{aligned}
\Pi_G = & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} C^E & e^T \\ e & -\chi^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} \\
& - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix}^T \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathfrak{D}_m \mathbf{u} \\ \mathfrak{D}_e \phi \end{Bmatrix} \right) - \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{u} \Big] dv \\
& - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} \, ds - \int_{S_\omega} \phi \bar{\omega} \, ds - \int_{S_u} (\mathbf{n}_m \sigma)^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, ds - \int_{S_\phi} (\mathbf{n}_e \mathbf{D})^T (\phi - \bar{\phi}) \, ds
\end{aligned} \tag{5.18}$$

A parcela

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C^E & e^T \\ e & -\chi^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

é conhecida como a *entalpia elétrica* e  $\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}\}^T$  é o vetor de componentes de deformações,  $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$  é o vetor de componentes do deslocamento mecânico,  $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}^T$  é o vetor de componentes do campo elétrico,  $\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}^T$  é o vetor de componentes de tensão,  $\mathbf{D} = \{D_x, D_y, D_z\}^T$  é o vetor de componentes do deslocamento elétrico,  $\phi$  é o potencial elétrico,  $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}^T$  é o vetor das componentes da força de corpo,  $\bar{\mathbf{t}} = \{\bar{t}_x, \bar{t}_y, \bar{t}_z\}^T$  é o vetor de componentes de tensão prescrita no contorno,  $\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z\}^T$  é o deslocamento prescrito,  $\omega$  é a densidade de carga elétrica de superfície,  $\bar{\phi}$  é o potencial elétrico prescrito,  $C^E = C^{E^T}$  é a matriz de elasticidade com coeficientes medidos à condição de campo elétrico constante,  $e^\varepsilon$  é a matriz de coeficientes piezelétricos de deformação medidos à condição de deformação constante,  $\chi^\varepsilon = \chi^{\varepsilon^T}$  é a matriz de permissividade dielétrica com coeficientes medidos à condição de deformação constante, além dos operadores diferenciais  $D_e$  e  $D_m$  que podem ser escritos na forma matricial como

$$\mathfrak{D}_e = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

$$\mathfrak{D}_m = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T$$

assim como

$$n_m = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}^T$$

$$n_e = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \end{bmatrix}$$

com  $\{n_x, n_y, n_z\}^T$  sendo o vetor unitário normal saindo do contorno  $\partial\Omega$  do domínio  $\Omega$ .

Pelo emprego do teorema da divergência, temos

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u} \mathfrak{D}_m^T \sigma + \sigma^T \mathfrak{D}_m \delta \mathbf{u}) dv = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_m \sigma)^T \delta \mathbf{u} ds, \quad (5.21)$$

$$\int_{\Omega} (\delta \phi \mathfrak{D}_e^T \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathfrak{D}_e \delta \phi) dv = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}_e \mathbf{D})^T \delta \phi ds, \quad (5.22)$$

em que  $\delta$  é o símbolo variacional. Logo, a variação de  $\Pi_G$  pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta \Pi_G = & \int_{\Omega} \left[ \left\{ \begin{array}{c} \delta \varepsilon \\ -\delta \mathbf{E} \end{array} \right\}^T \left( \left[ \begin{array}{cc} C^E & e^T \\ e & -\chi^\varepsilon \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \mathbf{D} \end{array} \right\} \right) \right. \\ & \left. - \left\{ \begin{array}{c} \delta \sigma \\ \delta \mathbf{D} \end{array} \right\}^T \left( \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \\ -\mathbf{E} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{D}_m \mathbf{u} \\ \mathfrak{D}_e \phi \end{array} \right\} \right) - \left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{u} \\ \delta \phi \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{D}_m^T \sigma + \mathbf{b} \\ \mathfrak{D}_e^T \mathbf{D} \end{array} \right\} \right] dv \\ & + \int_{S_t} \left[ (\mathbf{n}_m \sigma - \bar{t})^T \delta \mathbf{u} \right] ds + \int_{S_\omega} \left[ (\mathbf{n}_e D - \bar{\omega})^T \delta \phi \right] ds \\ & - \int_{S_u} \left[ (\mathbf{n}_m \delta \sigma)^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \right] ds - \int_{S_\phi} \left[ (\mathbf{n}_e \delta \mathbf{D})^T (\phi - \bar{\phi}) \right] ds \end{aligned} \quad (5.23)$$

Assim, da condição de estacionaridade do funcional  $\Pi_G$  obtém-se as equações governantes do fenômeno piezolétrico (SZE e PAN, 1999), que são sumarizadas a seguir:

1. relação deformações - deslocamentos linear

$$\varepsilon = \mathfrak{D}_m \mathbf{u}, \text{ em } \Omega \quad (5.24)$$

2. relação campo elétrico - potencial elétrico

$$\mathbf{E} = -\mathfrak{D}_e \phi, \text{ em } \Omega \quad (5.25)$$

3. relações constitutivas

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^E & e^T \\ e & -\chi^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

4. condição de equilíbrio de tensões

$$\mathfrak{D}_m^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \text{ em } \Omega \quad (5.27)$$

5. condição de conservação de carga elétrica

$$\mathfrak{D}_e^T \mathbf{D} = \mathbf{0}, \text{ em } \Omega \quad (5.28)$$

6. condição de contorno natural mecânica

$$\mathbf{n}_m \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}}, \text{ em } S_t \quad (5.29)$$

7. condição de contorno natural elétrica

$$\mathbf{n}_e \mathbf{D} = \bar{\omega}, \text{ em } S_\omega \quad (5.30)$$

8. condição de contorno essencial mecânica

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \text{ em } S_u \quad (5.31)$$

9. condição de contorno essencial elétrica

$$\phi = \bar{\phi}, \text{ em } S_\phi \quad (5.32)$$

É notório que  $\varepsilon$  e  $\mathbf{E}$  são conjugados energéticos de  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{D}$ , respectivamente.

Então, é suposto que o contorno  $\partial\Omega$  do domínio  $\Omega$  pode ser particionado em  $S_t, S_u, S_\omega$  e  $S_\phi$ , respectivamente, onde se prescrevem forças de superfície, deslocamentos mecânicos, deslocamentos elétricos e potenciais elétricos. Essas partições são tais que

$$S_t \cap S_u = S_\omega \cap S_\phi = 0, \quad (5.33)$$

$$S_t \cup S_u = S_\omega \cup S_\phi = \partial\Omega \quad (5.34)$$

Uma vez que no MEF podem-se satisfazer as duas condições de contorno essenciais tendo-se deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos como variáveis nodais, o funcional pode ser simplificado. Caso  $\mathbf{E} = -\mathfrak{D}_e\phi$  e  $\varepsilon = \mathfrak{D}_m\mathbf{u}$  sejam satisfeitas por definição, o funcional  $\Pi_G$  pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathfrak{D}_m\mathbf{u} \\ \mathfrak{D}_e\phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C^E & e^T \\ e & -\chi^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathfrak{D}_m\mathbf{u} \\ \mathfrak{D}_e\phi \end{Bmatrix} - \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{u} \right) dv \\ - \int_{S_t} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{u} ds - \int_{S_\phi} \phi \omega ds \end{aligned} \quad (5.35)$$

que dá origem à formulação irreduzível em piezeletricidade.

## 5.4 Relação constitutiva acoplada

Como visto, a matriz constitutiva elástica de uma lâmina no sistema de eixos intrínseco de ortotropia (eq. 4.8, pág. 36) é

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Assim, tomando a matriz de constantes piezelétricas para um atuador de modo extensional, modo este que se caracteriza por uma deformação normal predominante na direção perpendicular à direção de polarização do material piezelétrico quando este é submetido a um campo elétrico paralelo à sua direção de polarização, conforme REDDY (2004)

$$\mathbf{e}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou, em se tratando de atuador piezelétrico de modo cisalhante, caracterizado por uma deformação cisalhante predominante no plano formado pela direção de polarização do material e uma direção perpendicular na qual é aplicado o campo elétrico, conforme VEL e BATRA (2001)

$$\mathbf{e}_c = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix}$$

e finalmente, a matriz de constantes de permissividade dielétrica do material piezelétrico

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}$$

pode-se relacionar as matrizes de propriedades materiais e escrever as seguintes equações matriciais que representam a relação constitutiva linear eletromecanicamente acoplada (eq. 5.16) no sistema de eixos de ortotropia (indicado pelo superescrito 1) para uma lâmina piezelétrica  $k$  de modo extensional

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^1 \\ \sigma_2^1 \\ \sigma_3^1 \\ \tau_{23}^1 \\ \tau_{31}^1 \\ \tau_{12}^1 \\ D_1^1 \\ D_2^1 \\ D_3^1 \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & C_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31}^1 \\ C_{21}^1 & C_{22}^1 & C_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{32}^1 \\ C_{31}^1 & C_{32}^1 & C_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33}^1 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^1 & 0 & 0 & 0 & e_{24}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^1 & 0 & e_{15}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^1 & 0 & -\chi_{11}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & -\chi_{22}^1 & 0 \\ e_{31}^1 & e_{32}^1 & e_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\chi_{33}^1 \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_3^1 \\ \gamma_{23}^1 \\ \gamma_{31}^1 \\ \gamma_{12}^1 \\ -E_1^1 \\ -E_2^1 \\ -E_3^1 \end{Bmatrix}^k \quad (5.36)$$

e para uma lâmina piezelétrica de modo cisalhante

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^1 \\ \sigma_2^1 \\ \sigma_3^1 \\ \tau_{23}^1 \\ \tau_{31}^1 \\ \tau_{12}^1 \\ D_1^1 \\ D_2^1 \\ D_3^1 \end{pmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & C_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & e_{11}^1 & 0 & 0 \\ C_{21}^1 & C_{22}^1 & C_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & e_{12}^1 & 0 & 0 \\ C_{31}^1 & C_{32}^1 & C_{33}^1 & 0 & 0 & 0 & e_{13}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^1 & 0 & 0 & 0 & e_{35}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^1 & 0 & e_{26}^1 & 0 \\ e_{11}^1 & e_{12}^1 & e_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & -\chi_{11}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26}^1 & 0 & -\chi_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35}^1 & 0 & 0 & 0 & -\chi_{33}^1 \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_3^1 \\ \gamma_{23}^1 \\ \gamma_{31}^1 \\ \gamma_{12}^1 \\ -E_1^1 \\ -E_2^1 \\ -E_3^1 \end{pmatrix}^k \quad (5.37)$$

### 5.4.1 Rotação da relação constitutiva acoplada

As estruturas laminadas em geral podem ser concebidas com lâminas nas mais diversas orientações, buscando-se com isso adequação aos requisitos de projeto, otimização das propriedades mecânicas, etc. Além disso, como já citado, devido à sua natureza ortotrópica, os materiais compostos empregados na estrutura base e os materiais piezelétricos incorporados possuem individualmente propriedades que dependem da orientação em que são dispostos.

Por consequência, a análise do comportamento de estruturas assim concebidas exige a definição de um sistema de coordenadas global, para que se obtenha a relação constitutiva do laminado. Emprega-se para esta finalidade, matrizes constitutivas transformadas de cada lâmina, que são obtidas pela rotação coplanar de um ângulo medido entre o sistema intrínseco da lâmina e o sistema global.

As relações constitutivas (5.36) e (5.37) para um material ortotrópico foram escritas em termos de componentes de tensão e deformação que são referenciadas a um sistema de coordenadas que coincide com o sistema de coordenadas principal (íntrinseco) do material.

Assim, existe uma necessidade de estabelecer relações de transformação entre tensões e deformações em um sistema de coordenadas às quantidades correspondentes no outro sistema de coordenadas. Estas relações podem ser usadas para transformar as equações constitutivas das coordenadas materiais de cada lâmina para as coordenadas usadas na descrição do problema.

Na confecção de laminados planos, lâminas reforçadas por fibras são dispostas com

seus planos 12 paralelos mas cada uma tendo uma orientação própria das fibras, ou seja, uma rotação em torno do eixo 3. Se o eixo  $z$  do problema é considerado ao longo da espessura do laminado, a coordenada 3 de cada lâmina será sempre coincidente com a coordenada  $z$  do problema. Assim, temos um tipo especial de transformação entre coordenadas materiais e coordenadas usadas na descrição do problema.

Seja  $(x, y, z)$  denotando o sistema de coordenadas usado para escrever as equações governantes do laminado, e seja  $(1, 2, 3)$  as coordenadas materiais principais de uma lâmina típica no laminado tal que o eixo 3 é paralelo ao eixo  $z$ . As coordenadas de um ponto material em dois sistemas de coordenadas são relacionadas como segue

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

onde o ângulo  $\theta$  é medido a partir do eixo  $x$  do sistema de coordenadas do problema para o eixo 1 de ortotropia do material.

A inversa da equação (5.38) é:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = [L]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

Note que a inversa da matriz  $[L]$  é igual à sua transposta:  $[L]^{-1} = [L]^T$ .

As transformações (5.38) e (5.39) são também válidas para vetores unitários associados aos dois sistemas de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{Bmatrix} = [L]^T \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

Feitas as considerações relativas à transformação de coordenadas, passa-se ao tratamento dispensado para transformação das componentes de tensões.

A seguir consideramos a relação entre as componentes de tensões nos sistemas de coordenadas  $(x, y, z)$  e  $(1, 2, 3)$ . Seja  $\sigma$  denotando o tensor de tensões, que possui componentes  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{33}$  no sistema de coordenadas material (1)  $(1, 2, 3)$  e as componentes

$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots, \sigma_{zz}$  no sistema de coordenadas de descrição do problema ( $x$ ) ( $x, y, z$ ). Visto que o tensor tensão é um tensor de segunda ordem, a transformação se dá de acordo com a equação:

$$(\sigma_{kq})^1 = \ell_{ki}\ell_{qj}(\sigma_{ij})^x, \quad (\sigma_{kq})^x = \ell_{ik}\ell_{jq}(\sigma_{ij})^1 \quad (5.41)$$

onde  $(\sigma_{ij})^1$  são componentes do tensor tensão  $\sigma$  nas coordenadas materiais (1, 2, 3), enquanto  $(\sigma_{ij})^x$  são as componentes do mesmo tensor tensão  $\sigma$  no problema de coordenadas ( $x, y, z$ ) e  $\ell_{ij}$  são os cossenos diretores definidos por:

$$\ell_{ij} = (e_i)^1 \cdot (e_j)^x \quad (5.42)$$

com  $(e_i)^1$  e  $(e_i)^x$  sendo os vetores de bases ortonormais no sistema de coordenadas material e do problema, respectivamente. Note que as equações de transformação tensorial (eq.5.41) são válidas somente entre componentes tensoriais. Esta transformação (5.41) pode ser expressa na forma matricial. Primeiro, introduzimos arranjos de dimensão  $3 \times 3$  de componentes de tensão nos dois sistemas de coordenadas:

$$[\sigma]^x = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad [\sigma]^1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Então, (5.41) pode ser expressa na forma matricial como

$$\begin{aligned} [\sigma]^1 &= [L][\sigma]^x[L]^T \\ [\sigma]^x &= [L]^T[\sigma]^1[L] \end{aligned} \quad (5.44)$$

A primeira das equações em (5.44) tem o propósito de converter as componentes de tensão referenciadas às coordenadas do problema àquelas referenciadas às coordenadas do material, enquanto a segunda das equações (5.44) faz exatamente o contrário. As equações (5.44) são válidas para qualquer transformação de coordenadas e, portanto, são válidas para as transformações especiais representadas em (5.38) e (5.39).

Neste sentido, deve-se partir da equação do efeito eletromecânico acoplado na forma inversa

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} + [e]^T\{-\mathbf{E}\} \quad (5.45)$$



Sabe-se que a relação entre as tensões no sistema global  $\{\sigma\}^x$  e as tensões no sistema local  $\{\sigma\}^1$  é dada pela expressão

$$\{\sigma\}^x = [T]\{\sigma\}^1 \quad (5.46)$$

tal que a matriz  $[T]$ , que representa a transformação das componentes de tensão mecânica quando de uma rotação coplanar da lâmina, obtida pela explicitação dos produtos matriciais na segunda das equações (5.44) e rearranjando as equações em termos de componentes de tensão com índices contraídos, é dada como a seguir

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Logo, admitindo (5.45) como definida no sistema local e substituindo em (5.46)

$$\{\sigma\}^x = [T]\left\{[C]\{\varepsilon\}^1 + [e]^T\{-\mathbf{E}\}^1\right\} \quad (5.48)$$

mas, além de (5.46) temos a relação inversa entre  $\{\sigma\}^x$  e  $\{\sigma\}^1$

$$\{\sigma\}^1 = [T]^{-1}\{\sigma\}^x \quad (5.49)$$

Da mesma forma, pode-se escrever uma relação entre as deformações referenciadas ao sistema de coordenadas global  $\{\varepsilon\}^x$  e as deformações referenciadas ao sistema de coordenadas do material  $\{\varepsilon\}^1$ , que é dada pela expressão

$$\{\varepsilon\}^1 = [R][T]^{-1}[R]^{-1}\{\varepsilon\}^x \quad (5.50)$$

onde a matriz  $[R]$  é uma matriz de transformação entre os vetores de deformações com índices contraídos tal que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

ou seja

$$\{\varepsilon\}^x = [R]\{\varepsilon\}^{\bar{x}} \quad (5.52)$$

Assim, a relação inversa é dada por

$$[R]^{-1}\{\varepsilon\}^x = [T][R]^{-1}\{\varepsilon\}^1 \quad (5.53)$$

Ainda, com respeito à transformação do vetor campo elétrico, temos que  $\{\mathbf{E}\}^x$  e  $\{\mathbf{E}\}^1$  se relacionam através da expressão

$$\{\mathbf{E}\}^x = [L]^T\{\mathbf{E}\}^1 \quad (5.54)$$

assim como a transformação do vetor deslocamento elétrico é dada por

$$\{D\}^x = [L]^T\{D\}^1 \quad (5.55)$$

cuja inversa  $[L]^{-1}$  é igual a transposta  $[L]^T$ .

Assim, substituindo (5.50) e (5.53) em (5.48) tem-se

$$\{\sigma\}^x = [T]\left\{[C][R][T]^{-1}[R]^{-1}\{\varepsilon\}^x + [e]^T[L]\{-\mathbf{E}\}^x\right\} \quad (5.56)$$

obtendo-se com o produto distributivo

$$\{\sigma\}^x = [T][C][R][T]^{-1}[R]^{-1}\{\varepsilon\}^x + [T][e]^T[L]\{-\mathbf{E}\}^x \quad (5.57)$$

Tem-se que

$$[R][T]^{-1}[R]^{-1} = [T]^T \quad (5.58)$$

então, pode-se identificar que as transformações das matrizes de rigidez elástica e de constantes piezelétricas são dadas pelas expressões:

$$[\bar{C}] = [T][C][T]^T \quad (5.59)$$

$$[\bar{e}]_1 = [T][e]^T[L] \quad (5.60)$$

Considerando a expressão do efeito direto nas direções principais

$$\{D\}^1 = [e]\{\varepsilon\}^1 + [-\chi]\{-\mathbf{E}\}^1 \quad (5.61)$$

utiliza-se (5.55) de forma a obter

$$\{D\}^x = [L]^T \left\{ [e]\{\varepsilon\}^1 + [-\chi]\{-\mathbf{E}\}^1 \right\} \quad (5.62)$$

Aplicando (5.50) e (5.53), lembrando que a matriz  $[L]$  é ortogonal obtém-se

$$\{D\}^x = [L]^T \left\{ [e][R][T]^{-1}[R]^{-1}\{\varepsilon\}^x + [-\chi][L]\{-\mathbf{E}\}^x \right\} \quad (5.63)$$

o que resulta em

$$\{D\}^x = [L]^T [e][R][T]^{-1}[R]^{-1}\{\varepsilon\}^x + [L]^T [-\chi][L]\{-\mathbf{E}\}^x \quad (5.64)$$

de onde se pode definir as seguintes relações de transformação

$$[\bar{e}]_2 = [L]^T [e][T]^T \quad (5.65)$$

$$[-\bar{\chi}] = [L]^T [-\chi][L] \quad (5.66)$$

Observa-se que  $[\bar{e}]_1 = [\bar{e}]_2^T$ .

Então, apresenta-se a seguir as componentes rotacionadas de  $[\bar{C}]$ ,  $[\bar{e}]$  e  $[-\bar{\chi}]$ , conforme

também apresentado em REDDY (2004)

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta - 4C_{16} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&\quad - 4C_{26} \cos \theta \sin^3 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \\
\bar{C}_{12} &= C_{12} \cos^4 \theta + 2(C_{16} - C_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&\quad + 2(C_{26} - C_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{12} \sin^4 \theta \\
\bar{C}_{13} &= C_{13} \cos^2 \theta - 2C_{36} \cos \theta \sin \theta + C_{23} \sin^2 \theta \\
\bar{C}_{14} &= C_{14} \cos^3 \theta + (C_{15} - 2C_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{24} - 2C_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{25} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{15} &= C_{15} \cos^3 \theta - (C_{14} + 2C_{56}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{25} - 2C_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta - C_{24} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{16} &= C_{16} \cos^4 \theta + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(C_{26} - C_{16}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&\quad + (2C_{66} + C_{12} - C_{22}) \cos \theta \sin^3 \theta - C_{26} \sin^4 \theta \\
\bar{C}_{22} &= C_{22} \cos^4 \theta + 4C_{26} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&\quad + 4C_{16} \cos \theta \sin^3 \theta + C_{11} \sin^4 \theta \\
\bar{C}_{23} &= C_{23} \cos^2 \theta + 2C_{36} \cos \theta \sin \theta + C_{13} \sin^2 \theta \\
\bar{C}_{24} &= C_{24} \cos^3 \theta + (C_{25} + 2C_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{14} + 2C_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{15} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{25} &= C_{25} \cos^3 \theta + (2C_{56} - C_{24}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{15} - 2C_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta - C_{14} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{26} &= C_{26} \cos^4 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(C_{16} - C_{26}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&\quad + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - C_{16} \sin^4 \theta \tag{5.67} \\
\bar{C}_{33} &= C_{33} \\
\bar{C}_{34} &= C_{34} \cos \theta + C_{35} \sin \theta \\
\bar{C}_{35} &= C_{35} \cos \theta - C_{34} \sin \theta \\
\bar{C}_{36} &= (C_{13} - C_{23}) \cos \theta \sin \theta + C_{36}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
\bar{C}_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta + 2C_{45} \cos \theta \sin \theta \\
\bar{C}_{45} &= C_{45}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (C_{55} - C_{44}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{C}_{46} &= C_{46} \cos^3 \theta + (C_{56} + C_{14} - C_{24}) \cos^2 \theta \sin \theta \\
&\quad + (C_{15} - C_{25} - C_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta - C_{56} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{55} &= C_{55} \cos^2 \theta + C_{44} \sin^2 \theta - 2C_{45} \cos \theta \sin \theta \\
\bar{C}_{56} &= C_{56} \cos^3 \theta + (C_{15} - C_{25} - C_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta \\
&\quad + (C_{24} - C_{14} - C_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{46} \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{66} &= 2(C_{16} - C_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
&\quad + 2(C_{26} - C_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{e}_{14} &= (e_{15} - e_{24}) \sin \theta \cos \theta & \bar{e}_{31} &= e_{31} \cos^2 \theta + e_{32} \sin^2 \theta \\
\bar{e}_{24} &= e_{24} \cos^2 \theta + e_{15} \sin^2 \theta & \bar{e}_{32} &= e_{31} \sin^2 \theta + e_{32} \cos^2 \theta \\
\bar{e}_{15} &= e_{15} \cos^2 \theta + e_{24} \sin^2 \theta & \bar{e}_{33} &= e_{33} \\
\bar{e}_{25} &= (e_{15} - e_{24}) \sin \theta \cos \theta & \bar{e}_{36} &= (e_{31} - e_{32}) \sin \theta \cos \theta
\end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}_{xx} &= \chi_{11} \cos^2 \theta + \chi_{22} \sin^2 \theta \\
\bar{\chi}_{yy} &= \chi_{11} \sin^2 \theta + \chi_{22} \cos^2 \theta \\
\bar{\chi}_{xy} &= (\chi_{11} - \chi_{22}) \sin \theta \cos \theta
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Portanto, tem-se às seguintes relações constitutivas num sistema de eixos rotacionado, para uma lâmina piezelétrica de modo extensional e cisalhante, respectivamente

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^x \\ \sigma_2^x \\ \sigma_3^x \\ \tau_{23}^x \\ \tau_{31}^x \\ \tau_{12}^x \\ D_1^x \\ D_2^x \\ D_3^x \end{pmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} & 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} & 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{e}_{33} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 & \bar{e}_{14} & \bar{e}_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 & \bar{e}_{15} & \bar{e}_{25} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} & 0 & 0 & \bar{e}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{14} & \bar{e}_{15} & 0 & -\bar{\chi}_{11} & -\bar{\chi}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{24} & \bar{e}_{25} & 0 & -\bar{\chi}_{12} & -\bar{\chi}_{22} & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & \bar{e}_{33} & 0 & 0 & \bar{e}_{36} & 0 & 0 & -\bar{\chi}_{33} \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} \varepsilon_1^x \\ \varepsilon_2^x \\ \varepsilon_3^x \\ \gamma_{23}^x \\ \gamma_{31}^x \\ \gamma_{12}^x \\ -E_1^x \\ -E_2^x \\ -E_3^x \end{pmatrix}^k \tag{5.70}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^x \\ \sigma_2^x \\ \sigma_3^x \\ \tau_{23}^x \\ \tau_{31}^x \\ \tau_{12}^x \\ D_1^x \\ D_2^x \\ D_3^x \end{pmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} & \bar{e}_{11} & \bar{e}_{21} & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} & \bar{e}_{12} & \bar{e}_{22} & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} & \bar{e}_{13} & \bar{e}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{35} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} & \bar{e}_{16} & \bar{e}_{26} & 0 \\ \bar{e}_{11} & \bar{e}_{12} & \bar{e}_{13} & 0 & 0 & \bar{e}_{16} & -\bar{\chi}_{11} & -\bar{\chi}_{12} & 0 \\ \bar{e}_{21} & \bar{e}_{22} & \bar{e}_{23} & 0 & 0 & \bar{e}_{26} & -\bar{\chi}_{12} & -\bar{\chi}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{34} & \bar{e}_{35} & 0 & 0 & 0 & -\bar{\chi}_{33} \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} \varepsilon_1^x \\ \varepsilon_2^x \\ \varepsilon_3^x \\ \gamma_{23}^x \\ \gamma_{31}^x \\ \gamma_{12}^x \\ -E_1^x \\ -E_2^x \\ -E_3^x \end{pmatrix}^k \tag{5.71}$$

## 6 *Formulação discretizada em MEEG*

O presente capítulo trata da formulação discretizada em Elementos Finitos Generalizados, onde são mostrados detalhes da obtenção do sistema de equações para o problema em análise.

Neste escopo, é desenvolvida a formulação de um elemento finito generalizado quadrangular para placa laminada com sensores e atuadores piezelétricos. São considerados 8 nós, com as correspondentes funções biquadráticas do tipo *Serendipity*, para aproximação da geometria, e 4 nós (nos vértices) para definição da partição da unidade, admitida como sendo as funções lagrangeanas bilineares, sobre a qual é efetuado o enriquecimento do espaço de aproximação dos campos incógnitos.

O referido elemento é *superparametrizado*, ou seja, uma vez que considerando apenas a PU, são utilizadas funções de interpolação de ordem mais alta para definição da geometria do que as funções para aproximação dos campos. De acordo com SORIANO (2003), tal característica não garante o critério de completude, o que inviabiliza a utilização deste tipo de estratégia.

Tal critério preconiza que as formas distorcidas do elemento devem ser capazes de representar campos polinomiais completos com grau igual à máxima ordem de derivação que ocorre no funcional energia potencial total, escrito em termos de variáveis ditas primárias, neste caso, deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos.

No entanto, ficará evidenciado que a ampliação do espaço de aproximação com refinamentos polinomiais hierárquicos permite contornar tal inconveniente.

### 6.1 Funcional eletromecanicamente acoplado

A formulação aqui apresentada foi deduzida a partir do funcional do *Princípio Variacional de Hamilton* (PVH), que é uma forma variacional equivalente às equações difer-

enciais de equilíbrio dinâmico governantes das respostas mecânica e elétrica de um meio contínuo eletromecanicamente acoplado (LEE, 2001), ou seja, as *equações do movimento de Cauchy*

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (6.1)$$

onde é usada a *convenção do somatório de Einstein* e a *equação da conservação do fluxo elétrico de Maxwell*

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \mathbf{Q} \quad (6.2)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são componentes cartesianas de tensão,  $f_i$  são forças de corpo por unidade de volume,  $\rho$  é a massa específica do material,  $u_i$  são as componentes do deslocamento mecânico,  $D_i$  são as componentes do deslocamento elétrico (fluxo elétrico) e  $\mathbf{Q}$  é a carga elétrica.

O funcional do Princípio Variacional de Hamilton pode ser escrito, conforme CHEE (2000), na forma

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta P + \delta W) dt = 0 \quad (6.3)$$

para qualquer  $t_1$ , onde  $K$ ,  $P$  e  $W$  são a energia total cinética, a energia total potencial de deformação e o trabalho total das forças externas aplicadas ao sistema, respectivamente, e  $\delta$  é o operador variação. A expressão pode ser expandida como

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ - \int_V \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dV - \int_V \begin{Bmatrix} \sigma^x \\ \mathbf{D}^x \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \delta \epsilon^x \\ -\delta \mathbf{E}^x \end{Bmatrix} dV + \right. \\ & \left. + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}^V dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^S dS + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^P + \int_V \delta \varphi^T \mathbf{Q} dV - \int_S \delta \varphi^T \mathbf{q} dS \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento mecânico,  $\sigma$  é o tensor de tensões mecânicas,  $\epsilon$  é o tensor de deformações mecânicas,  $\mathbf{D}$  é o deslocamento elétrico,  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico,  $\mathbf{f}^S$  é a força de superfície,  $\mathbf{f}^V$  é a força de corpo,  $\mathbf{f}^P$  são forças pontuais,  $\varphi$  é o potencial elétrico,  $\mathbf{Q}$  é a carga elétrica livre e  $\mathbf{q}$  é a carga elétrica livre de superfície.

## 6.2 Descrição do comportamento mecânico

Para a descrição do comportamento mecânico de placas sob flexão é considerada a metodologia em camada equivalente única, adotando-se as hipóteses cinemáticas que consistem na *Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Superior* (HSDT) de *Levinson*.

Portanto, o campo de deslocamentos mecânicos  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  tem suas componentes nas direções cartesianas,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , expressas pelas seguintes expansões (como também consta em (4.21), pág. 44)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^3\psi_{3x}(x, y, t) \\ v(\mathbf{x}, t) &= v^0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^3\psi_{3y}(x, y, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^0(x, y, t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

A escolha desta teoria se deve ao custo computacional relativamente baixo da formulação decorrente, pois são gerados 7 deslocamentos generalizados,  $u^0$ ,  $v^0$ ,  $w^0$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\psi_{3x}$  e  $\psi_{3y}$ , funções incógnitas que podem ser aproximadas no domínio bidimensional,  $(x, y)$ , por espaços de funções com continuidade  $C^0$ .

Assim, utilizando as relações deformações - deslocamentos lineares

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.6)$$

obtem-se o campo de deformações, particionado em *deformações coplanares*,  $\varepsilon_{mf}(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mf}(\mathbf{x}, t) &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\mathbf{x}, t) \\ \varepsilon_y(\mathbf{x}, t) \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^0(x, y, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0(x, y, t)}{\partial y} \\ \frac{\partial u^0(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v^0(x, y, t)}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &+ z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y(x, y, t)}{\partial x} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_{3x}(x, y, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{3y}(x, y, t)}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_{3x}(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{3y}(x, y, t)}{\partial x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.7)$$



de onde se pode identificar as *deformações generalizadas normais*,  $\{\varepsilon^0\}$ , e as *rotações generalizadas de primeira ordem*,  $\{\kappa\}$ , e de *ordem superior*,  $\{\kappa_3\}$ , tais que

$$\varepsilon_{mf}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon^0(x, y, t) + z\kappa(x, y, t) + z^3\kappa_3(x, y, t) \quad (6.8)$$

e ainda, em *deformações cisalhantes transversais*,  $\gamma_c(\mathbf{x}, t)$

$$\gamma_c(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}(\mathbf{x}, t) \\ \gamma_{xz}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_y(x, y, t) + \frac{\partial w^0(x, y, t)}{\partial y} \\ \psi_x(x, y, t) + \frac{\partial w^0(x, y, t)}{\partial x} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} 3\psi_{3y}(x, y, t) \\ 3\psi_{3x}(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

podendo-se identificar as *deformações generalizadas angulares*,  $\{\gamma^0\}$ , e as *rotações generalizadas de ordem superior*,  $\{\kappa_2\}$ , de forma que

$$\gamma_c = \gamma^0 + 3z^2\kappa_2 \quad (6.10)$$

### 6.2.1 Discretização das variáveis mecânicas

A formulação em elementos finitos é desenvolvida definindo-se, inicialmente, as funções base no domínio do elemento  $e$  para cada nó  $no$ ,  $N_{no}^e(x, y)$ , de forma que as funções incógnitas dos deslocamentos mecânicos generalizados na superfície de referência da placa

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{u}(x, y, t) \right\}^T &= \left\{ u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), w^0(x, y, t), \psi_x(x, y, t), \right. \\ &\quad \left. \psi_y(x, y, t), \psi_{3x}(x, y, t), \psi_{3y}(x, y, t) \right\} \end{aligned} \quad (6.11)$$

podem ser aproximadas no domínio do elemento  $e$  por

$$\left\{ \tilde{\mathbf{u}}(x, y, t)^e \right\} = \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbf{N}_{no}^e(x, y) \right] \left\{ \mathbf{U}_{no}^e(t) \right\} = \left[ \mathbf{N}^e(x, y) \right] \left\{ \mathbf{U}^e(t) \right\} \quad (6.12)$$

onde  $\tilde{\bullet}$  denota aproximação, tal que o vetor de deslocamentos mecânicos nodais elementares  $\{\mathbf{U}^e\}$  é um arranjo de ordem  $7Nne \times 1$  que contém os deslocamentos generalizados nodais nos  $Nne$  nós do elemento, onde os deslocamentos generalizados para um nó genérico  $no$  podem ser agrupados como

$$\left\{ \mathbf{U}_{no}^e \right\}^T = \left\{ \dots u_{no}^0, v_{no}^0, w_{no}^0, \psi_{xno}, \psi_{yno}, \psi_{3xno}, \psi_{3yno} \dots \right\} \quad (6.13)$$

Por sua vez,  $[\mathbf{N}^e]$  é um arranjo de ordem  $7 \times 7Nne$  que contém as funções base no elemento, onde a parcela referente ao nó  $no$  tem a seguinte representação matricial

$$\left[ \mathbf{N}_{no}^e \right] = \begin{bmatrix} N_{no} & 0 & \dots & 0 & & & \\ & 0 & N_{no} & \dots & 0 & & \\ \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & 0 & 0 & \dots & N_{no} & & \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

As parcelas de deformações generalizadas de membrana e flexão podem ser agrupadas num arranjo como

$$\left\{ \varepsilon_{mf} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\varepsilon^0\} \\ \{\kappa\} \\ \{\kappa_3\} \end{array} \right\} \quad (6.15)$$

Desta forma, a aproximação das deformações generalizadas de membrana e flexão no elemento são obtidas substituindo (6.12) em (6.7), o que fornece a *matriz de aproximação das deformações generalizadas de membrana e flexão*,  $[\mathbf{B}_{mf}^e]$ , de ordem  $9 \times 7Nne$ , respeitando a organização proposta em (6.15)

$$\left\{ \tilde{\varepsilon}_{mf}(\mathbf{x}, t)^e \right\} = \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbb{B}_{mfno}^e(x, y) \right] \left\{ \mathbf{U}_{no}(t) \right\} = \left[ \mathbf{B}_{mf}^e \right] \left\{ \mathbf{U}^e \right\} \quad (6.16)$$

onde a parcela referente ao nó  $no$ ,  $[\mathbb{B}_{mfno}^e]$  é dada conforme o arranjo

$$\left[ \mathbb{B}_{mfno}^e \right] = \begin{bmatrix} N_{no,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & N_{no,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ N_{no,y} & N_{no,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & N_{no,x} & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no,y} & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & N_{no,y} & N_{no,x} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no,x} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no,y} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no,y} & N_{no,x} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Em (6.17) podem-se identificar que as três linhas superiores representam as deformações generalizadas de membrana e portanto são designadas como  $[\mathbb{B}_{no}^{me}]$ , as três linhas intermediária representam as rotações generalizadas de primeira ordem, logo  $[\mathbb{B}_{no}^{fe}]$  e, finalmente, as três linha inferiores, as rotações generalizadas de ordem superior  $[\mathbb{B}_{no}^{3fe}]$ .

Por sua vez, as deformações generalizadas cisalhantes transversais podem ser agrupadas como

$$\{\gamma_c\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\gamma^0\} \\ \{3\kappa_2\} \end{array} \right\} \quad (6.18)$$

Estas deformações podem ser aproximadas substituindo (6.12) em (6.9), o que fornece a *matriz de aproximação das deformações generalizadas cisalhantes transversais*,  $[\mathbf{B}_c^e]$ , de ordem  $4 \times 7Nne$ , respeitando a organização proposta em (6.18)

$$\{\tilde{\gamma}_c(\mathbf{x}, t)^e\} = \sum_{no=1}^{Nne} [\mathbb{B}_{cno}^e(x, y)] \{\mathbf{U}_{no}^e(t)\} = [\mathbf{B}_c^e] \{\mathbf{U}^e\} \quad (6.19)$$

onde a parcela referente ao nó  $no$ ,  $[\mathbb{B}_{cno}^e]$  é dada conforme o arranjo

$$[\mathbb{B}_{cno}^e] = \sum_{no=1}^{Nne} \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{no,y} & 0 & N_{no} & 0 & 0 & & \\ \dots & 0 & 0 & N_{no,x} & N_{no} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_{no} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_{no} & 0 & & \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Em (6.20), de forma semelhante às deformações de membrana e flexão, pode-se fazer um particionamento, considerando as duas linhas superiores como deformações angulares  $[\mathbb{B}_{no}^{ce}]$  e as duas linha inferiores como curvaturas de ordem superior  $[\mathbb{B}_{no}^{2ce}]$ .

Diferentemente, a formulação em elementos finitos generalizados (MEFG) é desenvolvida a partir da definição das funções de partição da unidade (PU) no domínio do elemento. Assim o enriquecimento dos campos é feito adicionando-se novos parâmetros vinculados às variáveis nodais, associados às funções que multiplicam as bases originais, de forma que os deslocamentos mecânicos generalizados na superfície de referência,  $(u^0, v^0, w^0, \psi_x, \psi_y, \psi_{3x}, \psi_{3y})$ , podem ser aproximados por

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^0 &= \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left( u_{no}^0(t) + \sum_{j=1}^{nf(u_{no}^0)} u_{no}^{0j}(t) f_{u_{no}^0}^j(x, y) \right) \\
\tilde{v}^0 &= \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left( v_{no}^0(t) + \sum_{j=1}^{nf(v_{no}^0)} v_{no}^{0j}(t) f_{v_{no}^0}^j(x, y) \right) \\
\tilde{w}^0 &= \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left( w_{no}^0(t) + \sum_{j=1}^{nf(w_{no}^0)} w_{no}^{0j}(t) f_{w_{no}^0}^j(x, y) \right) \\
&\vdots \\
\tilde{\psi}_{3y} &= \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left( \psi_{3y_{no}}(t) + \sum_{j=1}^{nf(\psi_{3y_{no}})} \psi_{3y_{no}}^j(t) f_{\psi_{3y_{no}}}^j(x, y) \right)
\end{aligned} \tag{6.21}$$

onde  $nf(\bullet_{no})$  denota o número de funções de enriquecimento da variável  $\bullet$  do nó  $no$ .

Logo, reunindo todas as funções numa única matriz de aproximação de deslocamentos temos uma representação simbólica para a discretização das funções incógnitas semelhante à (6.12), cuja nova matriz  $[\mathbb{N}^e]$ , no entanto, possui ordem  $7 \times 7(Nne + npar)$ , com  $npar$  igual ao número de parâmetros de enriquecimento do elemento.

Assim, a parcela relativa ao nó  $no$ ,  $[\mathbb{N}_{no}^e]$ , é dada conforme o arranjo

$$\begin{aligned}
[\mathbb{N}_{no}^e] &= \begin{bmatrix} N_{no} & N_{no} f_{u_{no}^0}^1 & \cdots & N_{no} f_{u_{no}^0}^{nf(u_{no}^0)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ N_{no} & N_{no} f_{v_{no}^0}^1 & \cdots & N_{no} f_{v_{no}^0}^{nf(v_{no}^0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & N_{no} & N_{no} f_{w_{no}^0}^1 & \cdots & N_{no} f_{w_{no}^0}^{nf(w_{no}^0)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & N_{no} & N_{no} f_{\psi_{3y_{no}}}^1 & \cdots & N_{no} f_{\psi_{3y_{no}}}^{nf(\psi_{3y_{no}})} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

O vetor de deslocamentos mecânicos elementares  $\{\mathbf{U}^e\}$  se torna então um arranjo de ordem  $7(N_{ne} + npar) \times 1$  que contém os parâmetros nodais dos  $N_{ne}$  nós do elemento, onde os parâmetros correspondentes a um nó genérico podem ser agrupados como

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{U}_{no}^e \right\}^T = & \left\{ \dots u_{no}^0, u_{no}^{01}, \dots, u_{no}^{nf(u_{no}^0)}, v_{no}^0, v_{no}^{01}, v_{no}^{nf(v_{no}^0)}, \right. \\ & w_{no}^0, w_{no}^{01}, \dots, w_{no}^{nf(w_{no}^0)}, \psi_{x_{no}}, \psi_{x_{no}}^1, \dots, \psi_{x_{no}}^{nf(\psi_{x_{no}})}, \psi_{y_{no}}, \psi_{y_{no}}^1, \dots, \psi_{y_{no}}^{nf(\psi_{y_{no}})}, \\ & \left. \psi_{3x_{no}}, \psi_{3x_{no}}^1, \dots, \psi_{3x_{no}}^{nf(\psi_{3x_{no}})}, \psi_{3y_{no}}, \psi_{3y_{no}}^1, \dots, \psi_{3y_{no}}^{nf(\psi_{3y_{no}})} \dots \right\} \end{aligned} \quad (6.23)$$

As deformações generalizadas de membrana e flexão no elemento são obtidas com auxílio da *matriz de aproximação das deformações generalizadas de membrana e flexão*  $[\mathbf{B}_{mf}^e]$  com ordem  $9 \times 7(N_{ne} + npar)$ , que surge com a substituição de (6.12) em (6.7), considerando as novas concepções de  $[\mathbf{N}^e]$  e  $\{\mathbf{U}^e\}$ , cuja parcela referente ao nó  $no$ ,  $[\mathbb{B}_{mf_{no}}^e]$  é dada conforme o arranjo

$$\begin{aligned} [\mathbb{B}_{mf_{no}}^e] = & \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial N_{no}}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{u_{no}^0}^1 \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{u_{no}^0}^{nf(u_{no}^0)} \right) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \frac{\partial N_{no}}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{u_{no}^0}^1 \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{u_{no}^0}^{nf(u_{no}^0)} \right) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \\ & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{\partial N_{no}}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{v_{no}^0}^1 \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{v_{no}^0}^{nf(v_{no}^0)} \right) & \dots \\ \frac{\partial N_{no}}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{v_{no}^0}^1 \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{v_{no}^0}^{nf(v_{no}^0)} \right) & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{array} \right] \\ & \left[ \begin{array}{cccc} \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \frac{\partial N_{no}}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{\psi_{3y_{no}}}^1 \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{\psi_{3y_{no}}}^{nf(\psi_{3y_{no}})} \right) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (6.24)$$

As deformações generalizadas cisalhantes transversais são também obtidas substituindo (6.12) em (6.9), o que fornece a *matriz de aproximação das deformações generalizadas cisalhantes transversais*,  $[\mathbf{B}_c^e]$ , de ordem  $4 \times 7(Nne + npar)$ , considerando as novas concepções de  $[\mathbf{N}^e]$  e  $\{\mathbf{U}^e\}$ , cuja parcela referente ao nó  $no$ ,  $[\mathbb{B}_{cno}^e]$  é dada conforme o arranjo

$$\begin{aligned}
 [\mathbb{B}_{cno}^e] = & \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{2+nf(w_{no}^0)+nf(v_{no}^0)} \\ \cdots \\ \left. \begin{array}{c} \frac{\partial N_{no}}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{w_{no}^0}^1 \right) \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{w_{no}^0}^{nf(w_{no}^0)} \right) \\ \frac{\partial N_{no}}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{w_{no}^0}^1 \right) \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{w_{no}^0}^{nf(w_{no}^0)} \right) \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \end{array} \right| \\ \left. \begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad N_{no} \quad N_{no} f_{\psi_{yno}}^1 \quad \cdots \quad N_{no} f_{\psi_{yno}}^{nf(\psi_{yno})} \\ N_{no} \quad N_{no} f_{\psi_{xno}}^1 \quad \cdots \quad N_{no} f_{\psi_{xno}}^{nf(\psi_{xno})} \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \end{array} \right| \\ \left. \begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 3N_{no} \quad 3N_{no} f_{\psi_{3yno}}^1 \quad \cdots \quad 3N_{no} f_{\psi_{3yno}}^{nf(\psi_{3yno})} \quad \cdots \\ 3N_{no} \quad 3N_{no} f_{\psi_{3xno}}^1 \quad \cdots \quad 3N_{no} f_{\psi_{3xno}}^{nf(\psi_{3xno})} \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \end{array} \right] \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

### 6.3 Descrição do comportamento elétrico

Neste estágio é necessário definir como os graus de liberdade elétricos são incorporados. Será considerada a Teoria em Camadas Discretas de *Reddy* para a interpolação da função potencial elétrico. O potencial elétrico  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  no elemento é então discretizado por funções lineares contínuas por partes ao longo da espessura das lâminas piezelétricas, e uma vez que a tensão elétrica é geralmente aplicada ao longo da espessura das lâminas ativas, tal hipótese é aceitável supondo que o material seja homogêneo.

A um nó  $no$  na superfície de referência de um laminado com  $n_{piez}$  lâminas piezelétricas, correspondem  $N = n_{piez} + 1$ , se as lâminas piezelétricas forem justapostas, ou  $N = 2n_{piez}$  se existir material inerte entre elas, valores nodais de potencial elétrico,  $\varphi_{no}^1$  a  $\varphi_{no}^N$ . Assim, o valor aproximado do potencial elétrico  $\tilde{\varphi}_{no}$  numa cota intermediária  $z$  de uma lâmina piezelétrica  $k$  arbitrária, em um instante de tempo  $t$ , é dado pela expressão

$$\tilde{\varphi}_{no}(z, t)^k = \varphi_{no}^{k-1}(t)L_1(r) + \varphi_{no}^k L_2(r) \quad (6.26)$$

onde  $\varphi^k$  é o valor do potencial elétrico na cota superior e  $\varphi^{k-1}$  é o valor do potencial elétrico na cota inferior da lâmina piezelétrica  $k$ . Além disso,  $L_1(r)$  e  $L_2(r)$  são funções lineares por partes, cujas derivadas somente são contínuas ao longo de cada lâmina piezelétrica, definidas em termos da coordenada intrínseca à lâmina,  $r$ , como

$$L_1(r) = \frac{1}{2}(1 - r) \quad L_2(r) = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (6.27)$$

com  $-1 \leq r \leq 1$ .

Procurando substituir o mapeamento em  $r$ , é possível expressar a dependência em relação à coordenada global  $z$  por

$$L_1(z) = \frac{z_k - z}{h_k} \quad L_2(z) = \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \quad (6.28)$$

cujas derivadas com relação a esta coordenada são

$$\frac{dL_1(z)}{dz} = -\frac{1}{h_k} \quad \frac{dL_2(z)}{dz} = \frac{1}{h_k} \quad (6.29)$$

Logo, usando as definições constantes em (6.28), pode-se reescrever a aproximação do potencial elétrico no interior de uma lâmina piezelétrica (6.26) como

$$\tilde{\varphi}_{no}(z, t)^k = \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \quad (6.30)$$

### 6.3.1 Discretização das variáveis elétricas

A interpolação do potencial elétrico, primeiramente via MEF, nas direções coplanares à superfície de referência  $(x, y)$ , em um ponto qualquer da lâmina piezelétrica  $k$ , é obtida pelas mesmas funções bases  $N_{no}^e(x, y)$  usadas para aproximar o campo de deslocamentos

mecânicos, de forma que a aproximação do potencial elétrico no elemento em termos das três coordenadas espaciais e do tempo pode ser expressa por

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t)^{k^e} = \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \varphi_{no}^k(z, t) = \left[ \mathbf{N}^e(x, y) \right] \left\{ \varphi^k(z, t) \right\} \quad (6.31)$$

e substituindo (6.30) em (6.31) obtém-se

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t)^{k^e} = \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \quad (6.32)$$

O vetor campo elétrico  $\{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\}$  é definido como o gradiente negativo da função potencial elétrico, tal que

$$\left\{ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right\} = -\nabla \varphi(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \\ -\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \\ -\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (6.33)$$

Logo, usando a definição de  $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t)^{k^e}$  em (6.32), pode-se exprimir a aproximação do campo elétrico no elemento  $e$ , numa lâmina piezelétrica  $k$ , por

$$\left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)^{k^e} \right\} = - \sum_{no=1}^{Nne} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \right\} \end{array} \right\} \quad (6.34)$$

e aplicando a regra de derivação do produto de funções, a equação (6.34) pode ser desenvolvida na forma



$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)^{k^e} = & - \sum_{no=1}^{Nne} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} [\mathbb{N}_{no}^e(x, y)] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y} [\mathbb{N}_{no}^e(x, y)] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial z} [\mathbb{N}_{no}^e(x, y)] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \end{array} \right\} \\ & - \left\{ \begin{array}{l} [\mathbb{N}_{no}^e(x, y)] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \\ [\mathbb{N}_{no}^e(x, y)] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \\ [\mathbb{N}_{no}^e(x, y)] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Logo, como as derivadas das funções PU,  $[\mathbb{N}_{no}^e(x, y)]$ , com relação à coordenada da espessura são nulas, o mesmo podendo-se dizer das derivadas das funções lineares por partes para discretização em  $z$  com relação às coordenadas planas, o campo elétrico na lâmina piezelétrica  $k$  se simplifica conforme

$$\left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)^{k^e} \right\} = - \sum_{no=1}^{Nne} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} [\mathbb{N}_{no}^e(x, y)] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y} [\mathbb{N}_{no}^e(x, y)] \left\{ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right\} \\ [\mathbb{N}_{no}^e(x, y)] \frac{1}{h_k} \left\{ -\varphi_{no}^{k-1}(t) + \varphi_{no}^k(t) \right\} \end{array} \right\} \quad (6.36)$$

e distribuindo os termos entre parênteses e simplificando a notação

$$\left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)^{k^e} \right\} = - \sum_{no=1}^{Nne} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} N_{no} \left[ \varphi_{no}^{k-1} \left( \frac{z_k}{h_k} \right) - \varphi_{no}^{k-1} \left( \frac{z}{h_k} \right) - \varphi_{no}^k \left( \frac{z_{k-1}}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k \left( \frac{z}{h_k} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} N_{no} \left[ \varphi_{no}^{k-1} \left( \frac{z_k}{h_k} \right) - \varphi_{no}^{k-1} \left( \frac{z}{h_k} \right) - \varphi_{no}^k \left( \frac{z_{k-1}}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k \left( \frac{z}{h_k} \right) \right] \\ N_{no} \frac{1}{h_k} \left[ -\varphi_{no}^{k-1} + \varphi_{no}^k \right] \end{array} \right\} \quad (6.37)$$

## 6.4 Associação das variáveis mecânicas e elétricas

### 6.4.1 Aproximação via MEF

Neste estágio deve-se definir a estrutura do vetor de deslocamentos e potenciais nodais elementares, acrescentando-se os correspondentes graus de liberdade elétricos do nó  $no$  aos respectivos graus de liberdade mecânicos, de forma que se tem

$$\left\{ \mathbb{U}_{no}^e \right\}^T = \left\{ \dots \underbrace{u_{no}^0, v_{no}^0, w_{no}^0, \psi_{x_{no}}, \psi_{y_{no}}, \psi_{3x_{no}}, \psi_{3y_{no}}}_{\text{G.L. mecânicos}}, \underbrace{\varphi_{no}^1, \varphi_{no}^2, \dots, \varphi_{no}^k, \dots, \varphi_{no}^N}_{\text{G.L. elétricos}} \dots \right\} \quad (6.38)$$

As funções incógnitas agora são

$$\left\{ \tilde{u}(x, y, t) \right\}^T = \left\{ u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \dots, \psi_{3y}(x, y, t), \right. \\ \left. \varphi^1(x, y, t), \varphi^2(x, y, t), \dots, \varphi^k(x, y, t), \dots, \varphi^N(x, y, t) \right\} \quad (6.39)$$

Estas funções são aproximadas no domínio do elemento de forma análoga ao exposto em (6.12). Assim, deve-se definir o arranjo  $[\mathbf{N}^e]$ , de ordem  $(7 + N) \times (7 + N)Nne$ , que contém as funções base no elemento. A parcela referente ao nó  $no$  tem a seguinte representação

$$[\mathbf{N}_{no}^e] = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} N_{no} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N_{no} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{no} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{no} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{no} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_{no} \end{array} \right] \quad (6.40)$$

Por consequência, as *deformações mecânicas generalizadas de membrana e flexão* são obtidas de maneira análoga à (6.16), considerando os novos arranjos de  $[\mathbb{N}_{no}^e]$  e  $\{\mathbb{U}_{no}^e\}$ , de forma que a matriz  $[\mathbf{B}_{mf}^e]$ , de ordem  $9 \times (7 + N)Nne$ , é tal que a parcela referente ao nó *no* é

$$[\mathbb{B}_{mfno}^e] = \begin{bmatrix} N_{no,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0}^N \\ 0 & N_{no,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ N_{no,y} & N_{no,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{no,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & N_{no,y} & N_{no,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no,x} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no,y} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{no,y} & N_{no,x} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

De forma semelhante, as *deformações generalizadas cisalhantes transversais* são aproximadas, de forma análoga a (6.19), com o uso do arranjo  $[\mathbf{B}_c^e]$ , de ordem  $4 \times (7 + N)Nne$ , cuja parcela referente ao nó *no* é

$$[\mathbb{B}_{cno}^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{no,y} & 0 & N_{no} & 0 & 0 & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0}^N \\ 0 & 0 & N_{no,x} & N_{no} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_{no} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_{no} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Finalmente, o vetor campo elétrico na lâmina piezolétrica *k* pode ser aproximado na forma

$$\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)^{k^e}\} = - \sum_{no=1}^{Nne} [\mathbb{B}_{no}^{k^e}] \{\mathbb{U}_{no}^e\} = - [\mathbf{B}^{k^e}] \{\mathbf{U}^e\} \quad (6.43)$$

onde a parcela referente ao nó *no*,  $[\mathbb{B}_{no}^{k^e}]$  é

$$\left[ \mathbb{B}_{no}^{k^e} \right] = \left[ \begin{array}{cccccccc}
\overbrace{0 \cdots 0}^7 & \cdots & \overbrace{\left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) N_{no,x}}^N & \overbrace{\left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) N_{no,x}}^N & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & 0 & \cdots & \overbrace{\left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) N_{no,y}}^N & \overbrace{\left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) N_{no,y}}^N & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & -\frac{1}{h_k} N_{no} & \frac{1}{h_k} N_{no} & 0 & \cdots & 0
\end{array} \right] \quad (6.44)$$

### 6.4.2 Aproximação via MEFG

Uma complementação ao que já foi desenvolvido na subseção (6.2.1), para o tratamento das variáveis mecânicas, será feita aqui para a incorporação dos parâmetros associados às variáveis elétricas.

A aproximação do potencial elétrico nas direções coplanares à superfície de referência  $(x, y)$  em um ponto qualquer da lâmina piezelétrica  $k$  segundo a metodologia do MEFG é obtida pelas mesmas funções PU ( $N_{no}(x, y)$ ) usadas para aproximar o campo de deslocamentos mecânicos, além do produto da PU pelas funções de enriquecimento, tal que a aproximação  $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t)^{k^e}$  é

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t)^{k^e} = \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left( \varphi_{no}^k(z, t) + \sum_{j=1}^{nf(\varphi_{no}^k)} \varphi_{no}^{kj}(z, t) f_{\varphi_{no}^k}^j(x, y) \right) \quad (6.45)$$

e pela substituição de (6.30) em (6.45)

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t)^{k^e} &= \sum_{no=1}^{Nne} \left[ \mathbb{N}_{no}^e(x, y) \right] \left\{ \left[ \varphi_{no}^{k-1}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^k(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right] \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^{nf(\varphi_{no}^k)} \left[ \varphi_{no}^{k-1j}(t) \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) + \varphi_{no}^{kj}(t) \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \right] f_{\varphi_{no}^k}^j(x, y) \right\} \quad (6.46)
\end{aligned}$$

Incorporando os graus de liberdade elétricos aos mecânicos (dados em (6.23)), tem-se, para a formulação em MEFG, o seguinte arranjo de parâmetros nodais elementares correspondentes ao nó  $no$

$$\left\{ \mathbb{U}_{no}^e \right\}^T = \left\{ \dots, u_{no}^0, u_{no}^{0^1}, \dots, u_{no}^{0^{nf(u_{no}^0)}}, v_{no}^0, v_{no}^{0^1}, \dots, v_{no}^{0^{nf(v_{no}^0)}}, \right. \\ \left. w_{no}^0, w_{no}^{0^1}, \dots, w_{no}^{0^{nf(w_{no}^0)}}, \dots, \psi_{3y_{no}}, \psi_{3y_{no}}^1, \dots, \psi_{3y_{no}}^{nf(\psi_{3y_{no}})}, \right. \\ \left. \varphi_{no}^1, \varphi_{no}^{1^1}, \dots, \varphi_{no}^{1^{nf(\varphi_{no}^1)}}, \varphi_{no}^2, \varphi_{no}^{2^1}, \dots, \varphi_{no}^{2^{nf(\varphi_{no}^2)}}, \dots, \varphi_{no}^N, \varphi_{no}^{N^1}, \dots, \varphi_{no}^{N^{nf(\varphi_{no}^N)}} \dots \right\} \quad (6.47)$$

Consequentemente, reescrevendo a aproximação do campo elétrico na lâmina piezolétrica  $k$  à maneira da equação (6.43) obtém-se a matriz de aproximação do campo elétrico incluindo o enriquecimento, onde a parcela referente ao nó  $no$ ,  $[\mathbb{B}_{no}^{k^e}]$ , é dada por

$$[\mathbb{B}_{no}^{k^e}] = \left[ \begin{array}{c} \overbrace{7+nf(u_{no}^0)+\dots+nf(\psi_{3y_{no}})} \\ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \end{array} \right] \\ \left| \begin{array}{ccc} \dots & \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x} & \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^{k-1}}^1 \right) & \dots \\ \dots & \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y} & \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^{k-1}}^1 \right) & \dots \\ \dots & \left( -\frac{1}{h_k} \right) N_{no} & \left( -\frac{1}{h_k} \right) \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^{k-1}}^1 \right) & \dots \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc} \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^{k-1}}^{nf(\varphi_{no}^{k-1})} \right) & \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x} & \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^k}^1 \right) \\ \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^{k-1}}^{nf(\varphi_{no}^{k-1})} \right) & \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y} & \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^k}^1 \right) \\ \left( -\frac{1}{h_k} \right) \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^{k-1}}^{nf(\varphi_{no}^{k-1})} \right) & \left( \frac{1}{h_k} \right) N_{no} & \left( \frac{1}{h_k} \right) \left( \partial N_{no} f_{\varphi_{no}^k}^1 \right) \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc} \dots & \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^k}^{nf(\varphi_{no}^k)} \right) & 0 \quad \dots \quad 0 \\ \dots & \left( \frac{z - z_{k-1}}{h_k} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^k}^{nf(\varphi_{no}^k)} \right) & 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \\ \dots & \left( \frac{1}{h_k} \right) \left( N_{no} f_{\varphi_{no}^k}^{nf(\varphi_{no}^k)} \right) & 0 \quad \dots \quad 0 \end{array} \right] \quad (6.48)$$

## 6.5 Correção da relação constitutiva

Aqui, vale salientar a complicação que surge devido à hipótese que considera a lâmina submetida a um *estado plano de tensões* (EPT) quando da obtenção da matriz constitutiva da lâmina e, conseqüentemente, do laminado. Por exemplo, MENDONÇA (2005) e VEL e BATRA (2001), citam a necessidade de se fazer uma correção na matriz de rigidez da lâmina, na ocasião da análise de placas e cascas segundo teorias cujas relações cinemáticas preconizam a inextensibilidade do segmento normal à superfície de referência. Verifica-se, portanto, uma incoerência, uma vez que a inextensibilidade na direção da espessura da placa reflete a nulidade da deformação normal na mesma direção, que se contrapõem à ausência de restrição nesta direção quando do tratamento em EPT.

Primeiramente, fazendo a correção, ou seja, impondo a nulidade da tensão  $\sigma_3^x$ , a partir da relação constitutiva acoplada para lâmina piezelétrica de modo extensional (5.70), temos

$$\sigma_3^x = \bar{C}_{13}\varepsilon_1^x + \bar{C}_{23}\varepsilon_2^x + \bar{C}_{33}\varepsilon_3^x + \bar{C}_{36}\gamma_{12}^x - \bar{e}_{33}E_3^x = 0 \quad (6.49)$$

o que corresponde à eliminação da terceira linha da relação constitutiva (5.70).

Em seguida, multiplica-se a terceira coluna desta relação constitutiva reduzida pela componente de deformação  $\varepsilon_3^x$ , inserindo este efeito no vetor de tensões mecânicas e deslocamentos elétricos, ou seja, explicitando o efeito de  $\varepsilon_3^x$ , conforme

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{13}\varepsilon_3^x \\ \bar{C}_{23}\varepsilon_3^x \\ 0 \\ 0 \\ \bar{C}_{36}\varepsilon_3^x \\ 0 \\ 0 \\ \bar{e}_{33}\varepsilon_3^x \end{Bmatrix}^k + \begin{Bmatrix} \sigma_1^x \\ \sigma_2^x \\ \tau_{23}^x \\ \tau_{31}^x \\ \tau_{12}^x \\ D_1^x \\ D_2^x \\ D_3^x \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} [\bar{C}] & [\bar{e}]^T \\ [\bar{e}] & [-\bar{\chi}] \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^x \\ \varepsilon_2^x \\ \gamma_{23}^x \\ \gamma_{31}^x \\ \gamma_{12}^x \\ -E_1^x \\ -E_2^x \\ -E_3^x \end{Bmatrix}^k \quad (6.50)$$

Isolando  $\varepsilon_3^x$  em (6.49) pode-se escrever

$$\bar{C}_{13}\varepsilon_3^x = -\frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[ (\bar{C}_{13})^2\varepsilon_1^x + \bar{C}_{13}\bar{C}_{23}\varepsilon_2^x + \bar{C}_{13}\bar{C}_{36}\gamma_{12}^x - \bar{C}_{13}\bar{e}_{33}E_3^x \right]$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{23}\varepsilon_3^x &= -\frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[ \bar{C}_{23}\bar{C}_{13}\varepsilon_1^x + (\bar{C}_{23})^2\varepsilon_2^x + \bar{C}_{23}\bar{C}_{36}\gamma_{12}^x - \bar{C}_{23}\bar{e}_{33}E_3^x \right] \\
\bar{C}_{36}\varepsilon_3^x &= -\frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[ \bar{C}_{13}\bar{C}_{36}\varepsilon_1^x + \bar{C}_{23}\bar{C}_{36}\varepsilon_2^x + (\bar{C}_{36})^2\gamma_{12}^x - \bar{e}_{33}\bar{C}_{36}E_3^x \right] \\
\bar{e}_{33}\varepsilon_3^x &= -\frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[ \bar{e}_{33}\bar{C}_{13}\varepsilon_1^x + \bar{e}_{33}\bar{C}_{23}\varepsilon_2^x + \bar{e}_{33}\bar{C}_{36}\gamma_{12}^x - (\bar{e}_{33})^2E_3^x \right]
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Pela inserção destes termos na matriz constitutiva reduzida, obtemos

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^x \\ \sigma_2^x \\ \tau_{23}^x \\ \tau_{31}^x \\ \tau_{12}^x \\ D_1^x \\ D_2^x \\ D_3^x \end{pmatrix}^k = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 & 0 & \hat{C}_{16} & 0 & 0 & \hat{e}_{31} \\ \hat{C}_{12} & \hat{C}_{22} & 0 & 0 & \hat{C}_{26} & 0 & 0 & \hat{e}_{32} \\ 0 & 0 & \hat{C}_{44} & \hat{C}_{45} & 0 & \hat{e}_{14} & \hat{e}_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_{45} & \hat{C}_{55} & 0 & \hat{e}_{15} & \hat{e}_{25} & 0 \\ \hat{C}_{16} & \hat{C}_{26} & 0 & 0 & \hat{C}_{66} & 0 & 0 & \hat{e}_{36} \\ 0 & 0 & \hat{e}_{14} & \hat{e}_{15} & 0 & -\hat{\chi}_{11} & -\hat{\chi}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{e}_{24} & \hat{e}_{25} & 0 & -\hat{\chi}_{12} & -\hat{\chi}_{22} & 0 \\ \hat{e}_{31} & \hat{e}_{32} & 0 & 0 & \hat{e}_{36} & 0 & 0 & -\hat{\chi}_{33} \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} \varepsilon_1^x \\ \varepsilon_2^x \\ \gamma_{23}^x \\ \gamma_{31}^x \\ \gamma_{12}^x \\ -E_1^x \\ -E_2^x \\ -E_3^x \end{pmatrix}^k \tag{6.52}$$

Os novos coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{11} &= \bar{C}_{11} - \frac{(\bar{C}_{13})^2}{\bar{C}_{33}} & \hat{C}_{12} &= \bar{C}_{12} - \frac{\bar{C}_{13}\bar{C}_{23}}{\bar{C}_{33}} & \hat{C}_{16} &= \bar{C}_{16} - \frac{\bar{C}_{13}\bar{C}_{36}}{\bar{C}_{33}} \\
\hat{C}_{22} &= \bar{C}_{22} - \frac{(\bar{C}_{23})^2}{\bar{C}_{33}} & \hat{C}_{26} &= \bar{C}_{26} - \frac{\bar{C}_{23}\bar{C}_{36}}{\bar{C}_{33}} & \hat{C}_{66} &= \bar{C}_{66} - \frac{(\bar{C}_{36})^2}{\bar{C}_{33}} \\
\hat{C}_{44} &= \bar{C}_{44} & \hat{C}_{45} &= \bar{C}_{45} & \hat{C}_{55} &= \bar{C}_{55} \\
\hat{e}_{31} &= \bar{e}_{31} + \frac{\bar{C}_{13}\bar{e}_{33}}{\bar{C}_{33}} & \hat{e}_{32} &= \bar{e}_{32} + \frac{\bar{C}_{23}\bar{e}_{33}}{\bar{C}_{33}} & \hat{e}_{36} &= \bar{e}_{36} + \frac{\bar{e}_{33}\bar{C}_{36}}{\bar{C}_{33}} \\
\hat{e}_{14} &= \bar{e}_{14} & \hat{e}_{15} &= \bar{e}_{15} & \hat{e}_{24} &= \bar{e}_{24} & \hat{e}_{25} &= \bar{e}_{25}
\end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\hat{\chi}_{11} = \bar{\chi}_{11} \quad \hat{\chi}_{12} = \bar{\chi}_{12} \quad \hat{\chi}_{22} = \bar{\chi}_{22} \quad \hat{\chi}_{33} = \bar{\chi}_{33} + \frac{(\bar{e}_{33})^2}{\bar{C}_{33}}$$

Para as deduções seguinte, é interessante identificar em (6.52) as parcelas

$$\begin{aligned} [\hat{C}^\sigma]^k &= \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & \hat{C}_{16} \\ \hat{C}_{12} & \hat{C}_{22} & \hat{C}_{26} \\ \hat{C}_{16} & \hat{C}_{26} & \hat{C}_{66} \end{bmatrix}^k & [\hat{C}^\tau]^k &= \begin{bmatrix} \hat{C}_{44} & \hat{C}_{45} \\ \hat{C}_{45} & \hat{C}_{55} \end{bmatrix}^k \\ [\hat{e}^\sigma]^k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{e}_{31} & \hat{e}_{32} & \hat{e}_{36} \end{bmatrix}^k & [\hat{e}^\tau]^k &= \begin{bmatrix} \hat{e}_{14} & \hat{e}_{15} \\ \hat{e}_{24} & \hat{e}_{25} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \end{aligned} \quad (6.54)$$

Utilizando a mesma metodologia para a correção da relação constitutiva de uma lâmina piezolétrica de modo cisalhante, aplica-se a restrição da nulidade de  $\sigma_3^x$  a partir da relação constitutiva acoplada para lâmina piezolétrica (5.71), de forma que

$$\sigma_3^x = \bar{C}_{13}\varepsilon_1^x + \bar{C}_{23}\varepsilon_2^x + \bar{C}_{33}\varepsilon_3^x + \bar{C}_{36}\gamma_{12}^x - \bar{e}_{13}E_1^x - \bar{e}_{23}E_2^x \quad (6.55)$$

Explicitando o efeito de  $\varepsilon_3^x$ , temos

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{C}_{13}\varepsilon_3^x \\ \bar{C}_{23}\varepsilon_3^x \\ 0 \\ 0 \\ \bar{C}_{36}\varepsilon_3^x \\ \bar{e}_{13}\varepsilon_3^x \\ \bar{e}_{23}\varepsilon_3^x \\ 0 \end{Bmatrix}^k + \begin{Bmatrix} \sigma_1^x \\ \sigma_2^x \\ \tau_{23}^x \\ \tau_{31}^x \\ \tau_{12}^x \\ D_1^x \\ D_2^x \\ D_3^x \end{Bmatrix}^k &= \begin{bmatrix} [\bar{C}] & [\bar{e}]^T \\ [\bar{e}] & [-\bar{\chi}] \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^x \\ \varepsilon_2^x \\ \gamma_{23}^x \\ \gamma_{31}^x \\ \gamma_{12}^x \\ -E_1^x \\ -E_2^x \\ -E_3^x \end{Bmatrix}^k \end{aligned} \quad (6.56)$$

Isolando  $\varepsilon_3^x$  em (6.55), podemos escrever

$$\bar{C}_{13}\varepsilon_3^x = -\frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[ (\bar{C}_{13})^2 \varepsilon_1^x + \bar{C}_{13}\bar{C}_{23}\varepsilon_2^x + \bar{C}_{13}\bar{C}_{36}\gamma_{12}^x - \bar{C}_{13}\bar{e}_{13}E_1^x - \bar{C}_{13}\bar{e}_{23}E_2^x \right]$$



$$\begin{aligned}\bar{C}_{23}\varepsilon_3^x &= -\frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[ \bar{C}_{23}\bar{C}_{13}\varepsilon_1^x + (\bar{C}_{23})^2\varepsilon_2^x + \bar{C}_{23}\bar{C}_{36}\gamma_{12}^x - \bar{C}_{23}\bar{e}_{13}E_1^x - \bar{C}_{23}\bar{e}_{23}E_2^x \right] \\ \bar{C}_{36}\varepsilon_3^x &= -\frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[ \bar{C}_{36}\bar{C}_{13}\varepsilon_1^x + \bar{C}_{36}\bar{C}_{23}\varepsilon_2^x + (\bar{C}_{36})^2\gamma_{12}^x - \bar{C}_{36}\bar{e}_{13}E_1^x - \bar{C}_{36}\bar{e}_{23}E_2^x \right]\end{aligned}\tag{6.57}$$

$$\bar{e}_{13}\varepsilon_3^x = -\frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[ \bar{e}_{13}\bar{C}_{13}\varepsilon_1^x + \bar{e}_{13}\bar{C}_{23}\varepsilon_2^x + \bar{e}_{13}\bar{C}_{36}\gamma_{12}^x - (\bar{e}_{13})^2E_1^x - \bar{e}_{13}\bar{e}_{23}E_2^x \right]$$

$$\bar{e}_{23}\varepsilon_3^x = -\frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[ \bar{e}_{23}\bar{C}_{13}\varepsilon_1^x + \bar{e}_{23}\bar{C}_{23}\varepsilon_2^x + \bar{e}_{23}\bar{C}_{36}\gamma_{12}^x - \bar{e}_{23}\bar{e}_{13}E_1^x - (\bar{e}_{23})^2E_2^x \right]$$

Pela inserção destes termos na matriz constitutiva reduzida, obtemos

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^x \\ \sigma_2^x \\ \tau_{23}^x \\ \tau_{31}^x \\ \tau_{12}^x \\ D_1^x \\ D_2^x \\ D_3^x \end{pmatrix}^k = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 & 0 & \hat{C}_{16} & \hat{e}_{11} & \hat{e}_{21} & 0 \\ \hat{C}_{12} & \hat{C}_{22} & 0 & 0 & \hat{C}_{26} & \hat{e}_{12} & \hat{e}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_{44} & \hat{C}_{45} & 0 & 0 & 0 & \hat{e}_{34} \\ 0 & 0 & \hat{C}_{45} & \hat{C}_{55} & 0 & 0 & 0 & \hat{e}_{35} \\ \hat{C}_{16} & \hat{C}_{26} & 0 & 0 & \hat{C}_{66} & \hat{e}_{16} & \hat{e}_{26} & 0 \\ \hat{e}_{11} & \hat{e}_{12} & 0 & 0 & \hat{e}_{16} & -\hat{\chi}_{11} & -\hat{\chi}_{12} & 0 \\ \hat{e}_{21} & \hat{e}_{22} & 0 & 0 & \hat{e}_{26} & -\hat{\chi}_{12} & -\hat{\chi}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{e}_{34} & \hat{e}_{35} & 0 & 0 & 0 & -\hat{\chi}_{33} \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} \varepsilon_1^x \\ \varepsilon_2^x \\ \gamma_{23}^x \\ \gamma_{31}^x \\ \gamma_{12}^x \\ -E_1^x \\ -E_2^x \\ -E_3^x \end{pmatrix}^k \tag{6.58}$$

Os novos coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}\hat{e}_{11} &= \bar{e}_{11} + \frac{\bar{C}_{13}\bar{e}_{13}}{\bar{C}_{33}} & \hat{e}_{12} &= \bar{e}_{12} + \frac{\bar{C}_{23}\bar{e}_{13}}{\bar{C}_{33}} & \hat{e}_{16} &= \bar{e}_{16} + \frac{\bar{C}_{36}\bar{e}_{13}}{\bar{C}_{33}} \\ \hat{e}_{21} &= \bar{e}_{21} + \frac{\bar{e}_{13}\bar{C}_{23}}{\bar{C}_{33}} & \hat{e}_{22} &= \bar{e}_{22} + \frac{\bar{C}_{23}\bar{e}_{23}}{\bar{C}_{33}} & \hat{e}_{26} &= \bar{e}_{26} + \frac{\bar{C}_{36}\bar{e}_{23}}{\bar{C}_{33}} \\ \hat{e}_{34} &= \bar{e}_{14} & \hat{e}_{35} &= \bar{e}_{15}\end{aligned}\tag{6.59}$$

$$\hat{\chi}_{11} = \bar{\chi}_{11} + \frac{(\bar{e}_{13})^2}{\bar{C}_{33}} \quad \hat{\chi}_{12} = \bar{\chi}_{12} + \frac{\bar{e}_{13}\bar{e}_{23}}{\bar{C}_{33}} \quad \hat{\chi}_{22} = \bar{\chi}_{22} + \frac{(\bar{e}_{23})^2}{\bar{C}_{33}} \quad \hat{\chi}_{33} = \bar{\chi}_{33}$$

sendo os coeficientes da matriz de rigidez elástica,  $\widehat{C}_{ij}$ , iguais aos definidos em (6.53).

Novamente, para as deduções seguintes é interessante identificar em (6.58) as seguintes submatrizes

$$\begin{aligned}
 \left[\widehat{C}^\sigma\right]^k &= \begin{bmatrix} \widehat{C}_{11} & \widehat{C}_{12} & \widehat{C}_{16} \\ \widehat{C}_{12} & \widehat{C}_{22} & \widehat{C}_{26} \\ \widehat{C}_{16} & \widehat{C}_{26} & \widehat{C}_{66} \end{bmatrix}^k & \left[\widehat{C}^\tau\right]^k &= \begin{bmatrix} \widehat{C}_{44} & \widehat{C}_{45} \\ \widehat{C}_{45} & \widehat{C}_{55} \end{bmatrix}^k \\
 \left[\widehat{e}^\sigma\right]^k &= \begin{bmatrix} \widehat{e}_{11} & \widehat{e}_{12} & \widehat{e}_{16} \\ \widehat{e}_{21} & \widehat{e}_{22} & \widehat{e}_{26} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k & \left[\widehat{e}^\tau\right]^k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \widehat{e}_{34} & \widehat{e}_{35} \end{bmatrix}^k
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

## 6.6 Obtenção da matriz de rigidez do elemento

Desenvolvendo cada uma das parcelas do funcional do PVH e inserindo a discretização das variáveis pode-se deduzir as expressões para obtenção das contribuições elementares.

Primeiramente, a **variação da energia potencial total**, que inclui a energia potencial mecânica e a energia potencial elétrica, é expressa na forma

$$\delta P = \int_V \left\{ \begin{array}{c} \delta \varepsilon^x \\ -\delta \mathbf{E}^x \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} \sigma^x \\ \mathbf{D}^x \end{array} \right\} dV \quad (6.61)$$

onde  $\varepsilon^x$  é o vetor de deformações mecânicas que contém as parcelas de deformações de membrana e flexão (6.7) e de cisalhamento transversal (6.9), podendo então ser particionado, resultando em

$$\delta P = \int_V \left\{ \begin{array}{c} \delta \varepsilon_{mf}^x \\ \delta \gamma_c^x \\ -\delta \mathbf{E}^x \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} \sigma^x \\ \tau^x \\ \mathbf{D}^x \end{array} \right\} dV \quad (6.62)$$

com  $\bullet^x$  denotando que as variáveis estão definidas no sistema de coordenadas global.

As tensões mecânicas,  $\sigma^x$  e  $\tau^x$ , e o deslocamento elétrico  $\mathbf{D}^x$  podem ser escritos em termos das deformações,  $\varepsilon_{mf}^x$  e  $\gamma_c^x$ , e do campo elétrico  $\mathbf{E}^x$ , respectivamente, utilizando a relação constitutiva acoplada, quer seja (6.52) ou (6.58), usando as submatrizes  $C^\sigma$ ,  $C^\tau$ ,  $e^\sigma$  e  $e^\tau$  e retirando-se  $\hat{\bullet}$  para facilitar a notação

$$\begin{aligned} \delta P = \int_V \left\{ \begin{array}{c} \delta \varepsilon_{mf}^x \\ \delta \gamma_c^x \end{array} \right\}^T \begin{bmatrix} C^\sigma & 0 & e^{\sigma T} \\ 0 & C^\tau & e^{\tau T} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{mf}^x \\ \gamma_c^x \\ -\mathbf{E}^x \end{array} \right\} \\ - \{\delta \mathbf{E}^x\}^T \begin{bmatrix} e^{\sigma T} & e^{\tau T} & -\chi \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{mf}^x \\ \gamma_c^x \\ -\mathbf{E}^x \end{array} \right\} dV \end{aligned} \quad (6.63)$$

As deformações mecânicas, por sua vez, podem ser colocadas em função das deformações generalizadas, empregando (6.8) e (6.10)

$$\delta P = \int_{\Omega} \int_z \left\{ \begin{array}{c} \delta\varepsilon^0 + z\delta\kappa + z^3\delta\kappa_3 \\ \delta\gamma^0 + z^2\delta\kappa_2 \end{array} \right\}^T \begin{bmatrix} C^\sigma & 0 & e^{\sigma T} \\ 0 & C^\tau & e^{\tau T} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^0 + z\kappa + z^3\kappa_3 \\ \gamma^0 + z^2\kappa_2 \\ -\mathbf{E}(z) \end{array} \right\} \quad (6.64)$$

$$- \{\delta\mathbf{E}\}^T \begin{bmatrix} e^\sigma & e^\tau & -\chi^x \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^0 + z\kappa + z^3\kappa_3 \\ \gamma^0 + z^2\kappa_2 \\ -\mathbf{E}(z) \end{array} \right\} dz d\Omega$$

Nota-se que cada parcela de deformação e o campo elétrico evolui de forma particular ao longo da espessura do laminado:  $\varepsilon_{mf}$  varia cubicamente,  $\gamma_c$  varia quadraticamente e  $\mathbf{E}$  varia linearmente, este último em cada lâmina piezolétrica. É então prudente explicitar cada termo e realizar a integração em  $z$  de forma adequada.

Assim, desenvolvendo (6.64) e explicitando o campo elétrico na lâmina piezolétrica  $k$  tem-se

$$\delta P = \int_{\Omega} \int_z \left\{ (\delta\varepsilon^0 + z\delta\kappa + z^3\delta\kappa_3)^T C^\sigma (\varepsilon^0 + z\kappa + z^3\kappa_3) \right. \\ \left. + (\delta\gamma^0 + z^2\delta\kappa_2)^T C^\tau (\gamma^0 + z^2\kappa_2) \right\} dz d\Omega \quad (6.65)$$

$$+ \int_{\Omega} \left\{ \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ -(\delta\varepsilon^0 + z\delta\kappa + z^3\delta\kappa_3)^T e^{\sigma T} \mathbf{E}^k - (\delta\gamma^0 + z^2\delta\kappa_2)^T e^{\tau T} \mathbf{E}^k \right. \right. \\ \left. \left. - \{\delta\mathbf{E}^k\}^T e^\sigma (\varepsilon^0 + z\kappa + z^3\kappa_3) - \{\delta\mathbf{E}^k\}^T e^\tau (\gamma^0 + z^2\kappa_2) - \{\delta\mathbf{E}^k\}^T \chi^x \{\mathbf{E}^k\} \right] dz \right\} d\Omega$$

Observa-se que a primeira integral em (6.65) contém os termos puramente mecânicos e a segunda integral contém os termos de acoplamento eletromecânico e o último entre os integrandos é o termo puramente elétrico.

Para as deduções posteriores é conveniente desmembrar o campo elétrico em cada lâmina piezolétrica em parcela constante e parcela com variação linear ao longo da espessura da referida lâmina  $k$  na forma

$$\left\{ \tilde{\mathbf{E}}^{ke}(\mathbf{x}, t) \right\} = - \sum_{no=1}^{Nne} \left\{ \left[ \mathbb{E}_{no}^{0k} \right] + z \left[ \mathbb{E}_{no}^{1k} \right] \right\} = - \left\{ \left[ \mathbf{E}^{0k} \right] + z \left[ \mathbf{E}^{1k} \right] \right\} \quad (6.66)$$

de maneira que, buscando a estrutura da aproximação expressa em (6.43), tem-se

$$\{\tilde{\mathbf{E}}^{k^e}(\mathbf{x}, t)\} = - \sum_{no=1}^{Nne} \left\{ [\mathbb{E}_{no}^{0k}] + z [\mathbb{E}_{no}^{1k}] \right\} = - \sum_{no=1}^{Nne} [\mathbb{B}_{no}^{k^e}] \{\mathbf{U}_{no}^e\} \quad (6.67)$$

Assim, o arranjo  $[\mathbb{B}_{no}^{k^e}]$ , para aproximação em MEF, expresso em (6.44), pode ser reescrito como

$$[\mathbb{B}_{no}^{k^e}] = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \cdots 0 \cdots 0}^7 \cdots \underbrace{\left( \frac{z_k}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x} \quad \left( -\frac{z_{k-1}}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x}}^N & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots \underbrace{\left( \frac{z_k}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y} \quad \left( -\frac{z_{k-1}}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y}}^N & 0 & \cdots & 0 \cdots \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots \underbrace{\left( -\frac{1}{h_k} \right) N_{no} \quad \left( \frac{1}{h_k} \right) N_{no}}^N & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ + z \begin{bmatrix} \overbrace{0 \cdots 0 \cdots 0}^7 \cdots \underbrace{\left( -\frac{1}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x} \quad \left( \frac{1}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x}}^N & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots \underbrace{\left( -\frac{1}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y} \quad \left( \frac{1}{h_k} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y}}^N & 0 & \cdots & 0 \cdots \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots \underbrace{0 \quad 0}_{7 \quad N} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

de onde se pode identificar dois novos arranjos,  $[\mathbb{B}_{no}^{0k^e}]$  e  $[\mathbb{B}_{no}^{1k^e}]$ , tais que

$$\{\tilde{\mathbf{E}}^{k^e}(\mathbf{x}, t)\} = - \sum_{no=1}^{Nne} \left\{ [\mathbb{B}_{no}^{0k^e}] + z [\mathbb{B}_{no}^{1k^e}] \right\} \{\mathbf{U}_{no}^e\} = - \left\{ [\mathbf{B}^{0k^e}] + z [\mathbf{B}^{1k^e}] \right\} \{\mathbf{U}^e\} \quad (6.69)$$

De forma análoga aos arranjos que se propõem para as deformações, equações (6.15) ou (6.18), para o campo elétrico é interessante agrupar  $[\mathbf{E}^{0k}]$  e  $[\mathbf{E}^{1k}]$ , da definição (6.66) na seguinte forma

$$\{\tilde{\mathbf{E}}^{k^e}\} = - \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E}^{0k} \\ \mathbf{E}^{1k} \end{array} \right\} \quad (6.70)$$

visto que se tornam *parcelas generalizadas de campo elétrico*.

A título de ilustração, vale expandir os arranjos  $[\mathbb{B}_{no}^{0k^e}]$  e  $[\mathbb{B}_{no}^{1k^e}]$  para a situação em que se tenha mais de uma lâmina piezoeletrica. Assim, para o trecho relativo ao nó  $no$ , para

as lâminas piezelétricas  $k = 1, n_{piez}$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{no}^{01e} \\ \mathbb{B}_{no}^{11e} \end{bmatrix} &= \dots \left[ \begin{array}{c} \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad \overbrace{\left( \frac{z_1}{h_1} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x} \quad \left( -\frac{z_0}{h_1} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x}}^{2 \times n_{piez}} \quad \dots \quad 0 \\ \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad \overbrace{\left( \frac{z_1}{h_1} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y} \quad \left( -\frac{z_0}{h_1} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y}}^{2 \times n_{piez}} \quad \dots \quad 0 \\ 0 \dots 0 \quad \left( -\frac{1}{h_1} \right) N_{no} \quad \left( \frac{1}{h_1} \right) N_{no} \quad \dots \quad 0 \quad \dots \\ \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad \overbrace{\left( -\frac{1}{h_1} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x} \quad \left( \frac{1}{h_1} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x}}^{2 \times n_{piez}} \quad \dots \quad 0 \\ \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad \overbrace{\left( -\frac{1}{h_1} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y} \quad \left( \frac{1}{h_1} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y}}^{2 \times n_{piez}} \quad \dots \quad 0 \\ \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \end{array} \right] \quad (6.71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} B_{no}^{0n_{piez}e} \\ B_{no}^{1n_{piez}e} \end{bmatrix} &= \dots \left[ \begin{array}{c} \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad \overbrace{0 \dots \left( \frac{z_{n_{piez}}}{h_{n_{piez}}} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x} \quad \left( -\frac{z_{n_{piez}-1}}{h_{n_{piez}}} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x}}^{2 \times n_{piez}} \\ \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad \overbrace{0 \dots \left( \frac{z_{n_{piez}}}{h_{n_{piez}}} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y} \quad \left( -\frac{z_{n_{piez}-1}}{h_{n_{piez}}} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y}}^{2 \times n_{piez}} \\ 0 \dots 0 \quad 0 \dots \left( -\frac{1}{h_{n_{piez}}} \right) N_{no} \quad \left( \frac{1}{h_{n_{piez}}} \right) N_{no} \quad \dots \\ \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad \overbrace{0 \dots \left( -\frac{1}{h_{n_{piez}}} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x} \quad \left( \frac{1}{h_{n_{piez}}} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial x}}^{2 \times n_{piez}} \\ \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad \overbrace{0 \dots \left( -\frac{1}{h_{n_{piez}}} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y} \quad \left( \frac{1}{h_{n_{piez}}} \right) \frac{\partial N_{no}}{\partial y}}^{2 \times n_{piez}} \\ \overbrace{0 \dots 0}^7 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \end{array} \right] \quad (6.72)
 \end{aligned}$$

Deve-se salientar que aos arranjos (6.71) e (6.72) também se acrescentam os termos referentes ao enriquecimento quando do tratamento MEEG, semelhante à (6.48).

Então, devido à discretização do campo elétrico ao longo da espessura, convém desenvolver a segunda integral em (6.65) para uma única camada piezelétrica  $k$ , designando por  $\delta P_{ex}^{ke}$  a parcela da variação da energia eletromecanicamente acoplada.

Portanto, inserindo as aproximações para as variáveis na parcela  $\delta P_{ex}^{ke}$

$$\begin{aligned}
\delta P_{e\chi}^{k^e} = & \int_{\Omega} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ \left[ -\delta(\mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e + z\mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e + z^3\mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e) \right]^T e^{\sigma T} \left[ -(\mathbf{B}^{0k^e} + z\mathbf{B}^{1k^e}) \mathbf{U}^e \right] \right. \\
& + \left[ -\delta(\mathbf{B}^{c^e} \mathbf{U}^e + z^2\mathbf{B}^{2c^e} \mathbf{U}^e) \right]^T e^{\tau T} \left[ -(\mathbf{B}^{0k^e} + z\mathbf{B}^{1k^e}) \mathbf{U}^e \right] \\
& + \left[ \delta(\mathbf{B}^{0k^e} + z\mathbf{B}^{1k^e}) \mathbf{U}^e \right]^T e^{\sigma} (\mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e + z\mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e + z^3\mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e) \\
& + \left[ \delta(\mathbf{B}^{0k^e} + z\mathbf{B}^{1k^e}) \mathbf{U}^e \right]^T e^{\tau} (\mathbf{B}^{c^e} \mathbf{U}^e + z^2\mathbf{B}^{2c^e} \mathbf{U}^e) \\
& \left. + \left[ \delta(\mathbf{B}^{0k^e} + z\mathbf{B}^{1k^e}) \mathbf{U}^e \right]^T \chi \left[ -(\mathbf{B}^{0k^e} + z\mathbf{B}^{1k^e}) \mathbf{U}^e \right] \right\} dz d\Omega
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Aplicando o operador variacional obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta P_{e\chi}^{k^e} = & \int_{\Omega} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ (\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{m^e T} e^{\sigma T} + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{f^e T} e^{\sigma T} + z^3\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{3f^e T} e^{\sigma T}) (\mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e + z\mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e) \right. \\
& + (\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{c^e T} e^{\tau T} + z^2\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{2c^e T} e^{\tau T}) (\mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e + z\mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e) \\
& + (\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} e^{\sigma} + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} e^{\sigma}) (\mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e + z\mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e + z^3\mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e) \\
& + (\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} e^{\tau} + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} e^{\tau}) (\mathbf{B}^{c^e} \mathbf{U}^e + z^2\mathbf{B}^{2c^e} \mathbf{U}^e) \\
& \left. - (\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} \chi + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} \chi) (\mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e + z\mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e) \right] dz d\Omega
\end{aligned} \tag{6.74}$$

Efetuada os produtos distributivos, esta expressão toma a forma

$$\begin{aligned}
\delta P_{e\chi}^{k^e} = & \int_{\Omega} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{m^e T} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{f^e T} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e + z^3\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{3f^e T} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e \right. \\
& + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{m^e T} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e + z^2\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{f^e T} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e + z^4\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{3f^e T} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e \\
& + \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{c^e T} e^{\tau T} \mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e + z^2\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{2c^e T} e^{\tau T} \mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e \\
& + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{c^e T} e^{\tau T} \mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e + z^3\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{2c^e T} e^{\tau T} \mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e \\
& + \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} e^{\sigma} \mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} e^{\sigma} \mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} e^{\sigma} \mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e \\
& + z^2\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} e^{\sigma} \mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e + z^3\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} e^{\sigma} \mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e + z^4\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} e^{\sigma} \mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e \\
& + \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} e^{\tau} \mathbf{B}^{c^e} \mathbf{U}^e + z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} e^{\tau} \mathbf{B}^{c^e} \mathbf{U}^e \\
& + z^2\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} e^{\tau} \mathbf{B}^{2c^e} \mathbf{U}^e + z^3\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} e^{\tau} \mathbf{B}^{2c^e} \mathbf{U}^e \\
& - \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} \chi \mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e - z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} \chi \mathbf{B}^{0k^e} \mathbf{U}^e \\
& \left. - z\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{0k^e T} \chi \mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e - z^2\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{1k^e T} \chi \mathbf{B}^{1k^e} \mathbf{U}^e \right) dz d\Omega
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Colocando-se em evidência o vetor de parâmetros nodais  $\mathbf{U}^e$  e sua variação e separando as parcelas acopladas da parcela puramente elétrica em  $\delta P_{e\chi}$ , de forma a identificar  $\delta P_{u\varphi}^{k^e}$ ,  $\delta P_{\varphi u}^{k^e}$  e  $\delta P_{\varphi\varphi}^{k^e}$ , respectivamente, parcela mecânica-eletricamente acoplada, parcela elétrica-mecanicamente acoplada e parcela puramente elétrica

$$\begin{aligned} \delta P_{u\varphi}^{k^e} = \delta \mathbf{U}^{eT} \left\{ \left[ \int_{\Omega} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \mathbf{B}^{m^eT} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{0k^e} + z \mathbf{B}^{f^eT} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{0k^e} + z^3 \mathbf{B}^{3f^eT} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{0k^e} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + z \mathbf{B}^{m^eT} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{1k^e} + z^2 \mathbf{B}^{f^eT} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{1k^e} + z^4 \mathbf{B}^{3f^eT} e^{\sigma T} \mathbf{B}^{1k^e} + \mathbf{B}^{c^eT} e^{\tau T} \mathbf{B}^{0k^e} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + z^2 \mathbf{B}^{2c^eT} e^{\tau T} \mathbf{B}^{0k^e} + z \mathbf{B}^{c^eT} e^{\tau T} \mathbf{B}^{1k^e} + z^3 \mathbf{B}^{2c^eT} e^{\tau T} \mathbf{B}^{1k^e} \right) dz d\Omega \right] \mathbf{U}^e \right\} \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$\begin{aligned} \delta P_{\varphi u}^{k^e} = \delta \mathbf{U}^{eT} \left\{ \left[ \int_{\Omega} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \mathbf{B}^{0k^eT} e^{\sigma} \mathbf{B}^{m^e} + z \mathbf{B}^{1k^eT} e^{\sigma} \mathbf{B}^{m^e} + z \mathbf{B}^{0k^eT} e^{\sigma} \mathbf{B}^{f^e} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + z^2 \mathbf{B}^{1k^eT} e^{\sigma} \mathbf{B}^{f^e} + z^3 \mathbf{B}^{0k^eT} e^{\sigma} \mathbf{B}^{3f^e} + z^4 \mathbf{B}^{1k^eT} e^{\sigma} \mathbf{B}^{3f^e} + \mathbf{B}^{0k^eT} e^{\tau} \mathbf{B}^{c^e} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + z \mathbf{B}^{1k^eT} e^{\tau} \mathbf{B}^{c^e} + z^2 \mathbf{B}^{0k^eT} e^{\tau} \mathbf{B}^{2c^e} + z^3 \mathbf{B}^{1k^eT} e^{\tau} \mathbf{B}^{2c^e} \right) dz d\Omega \right] \mathbf{U}^e \right\} \end{aligned} \quad (6.77)$$

$$\begin{aligned} \delta P_{\varphi\varphi} = -\delta \mathbf{U}^{eT} \left\{ \left[ \int_{\Omega} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \mathbf{B}^{0k^eT} \chi \mathbf{B}^{0k^e} + z \mathbf{B}^{1k^eT} \chi \mathbf{B}^{0k^e} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + z \mathbf{B}^{0k^eT} \chi \mathbf{B}^{1k^e} + z^2 \mathbf{B}^{1k^eT} \chi \mathbf{B}^{1k^e} \right) dz d\Omega \right] \mathbf{U}^e \right\} \end{aligned} \quad (6.78)$$

Desenvolvendo a primeira integral em (6.65), que representa a variação da energia de deformação puramente mecânica,  $\delta P_{uu}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \delta P_{uu} = \int_{\Omega} \int_z \left[ \delta (\mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e + z \mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e + z^3 \mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e)^T C^{\sigma} (\mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e + z \mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e + z^3 \mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e) \right. \\ \left. + \delta (\mathbf{B}^{c^e} \mathbf{U}^e + z^2 \mathbf{B}^{2c^e} \mathbf{U}^e)^T C^{\tau} (\mathbf{B}^{c^e} \mathbf{U}^e + z^2 \mathbf{B}^{2c^e} \mathbf{U}^e) \right] dz d\Omega \end{aligned} \quad (6.79)$$

Em seguida, efetuando-se os produtos distributivos, pode-se escrever



$$\begin{aligned}
\delta P_{uu} = \int_{\Omega} \int_z & \left( \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{m^eT} C^{\sigma} \mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e + z \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{f^eT} C^{\sigma} \mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e + z^3 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{3f^eT} C^{\sigma} \mathbf{B}^{m^e} \mathbf{U}^e \right. \\
& + z \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{m^eT} C^{\sigma} \mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e + z^2 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{f^eT} C^{\sigma} \mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e + z^4 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{3f^eT} C^{\sigma} \mathbf{B}^{f^e} \mathbf{U}^e \\
& + z^3 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{m^eT} C^{\sigma} \mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e + z^4 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{f^eT} C^{\sigma} \mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e + z^6 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{3f^eT} C^{\sigma} \mathbf{B}^{3f^e} \mathbf{U}^e \\
& + \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{c^eT} C^{\tau} \mathbf{B}^{c^e} \mathbf{U}^e + z^2 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{2c^eT} C^{\tau} \mathbf{B}^{c^e} \mathbf{U}^e \\
& \left. + z^2 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{c^eT} C^{\tau} \mathbf{B}^{2c^e} \mathbf{U}^e + z^4 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{B}^{2c^eT} C^{\tau} \mathbf{B}^{2c^e} \mathbf{U}^e \right) dz d\Omega
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Finalmente, a variação da energia de deformação total do sistema  $\delta P$  é obtida pela soma das equações (6.76), (6.77), (6.78) e (6.80), ou seja

$$\delta P = \delta P_{uu} + \delta P_{u\varphi} + \delta P_{\varphi u} + \delta P_{\varphi\varphi} \tag{6.81}$$

A partir da parcela puramente mecânica da variação da energia de deformação (6.81) pode-se identificar a parcela de *rigidez puramente mecânica*, composta por uma contribuição de rigidez de membrana e flexão  $[\mathbf{K}_{mf}^e]$  e cisalhamento transversal  $[\mathbf{K}_c^e]$ . A integração no domínio plano,  $\Omega_e$  do elemento  $e$ , das parcelas de membrana e flexão pode ser esquematizada conforme segue

$$[\mathbf{K}_{mf}^e] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{m^e} \\ \mathbf{B}^{f^e} \\ \mathbf{B}^{3f^e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{L} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{m^e} \\ \mathbf{B}^{f^e} \\ \mathbf{B}^{3f^e} \end{bmatrix} d\Omega_e \tag{6.82}$$

Agregando as três parcelas de deformações de membrana e flexão na matriz  $[\mathbf{B}_{mf}^e]$ , pode-se simplificar (6.82) como

$$[\mathbf{K}_{mf}^e] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_{mf}^e]^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{L} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} [\mathbf{B}_{mf}^e] d\Omega_e \tag{6.83}$$

A integração no domínio plano das parcelas de cisalhamento transversal pode ser esquematizada conforme segue

$$[\mathbf{K}_c^e] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{c^e} \\ \mathbf{B}^{2c^e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}c & \mathbf{D}c \\ \mathbf{D}c & \mathbf{F}c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{c^e} \\ \mathbf{B}^{2c^e} \end{bmatrix} d\Omega_e \tag{6.84}$$

Agregando as duas parcelas de cisalhamento transversal na matriz  $[\mathbf{B}_c^e]$ , simplifica-se (6.84) como

$$[\mathbf{K}_c^e] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_c^e]^T \begin{bmatrix} \mathbf{Ac} & \mathbf{Dc} \\ \mathbf{Dc} & \mathbf{Fc} \end{bmatrix} [\mathbf{B}_c^e] d\Omega_e \quad (6.85)$$

A integração ao longo da espessura dos produtos entre as constantes materiais e a coordenada  $z$  dá origem às submatrizes  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$ ,  $[\mathbf{D}]$ ,  $[\mathbf{F}]$ ,  $[\mathbf{H}]$  e  $[\mathbf{L}]$ , componentes da *matriz constitutiva puramente mecânica de membrana e flexão do laminado*, de ordem  $9 \times 9$ , cujas componentes são obtidas através das expressões

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} C_{ij}^{\sigma^k} dz = \sum_{k=1}^N [C_{ij}^{\sigma^k} (z_k - z_{k-1})] \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z C_{ij}^{\sigma^k} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [C_{ij}^{\sigma^k} (z_k^2 - z_{k-1}^2)] \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 C_{ij}^{\sigma^k} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [C_{ij}^{\sigma^k} (z_k^3 - z_{k-1}^3)] \\ L_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^3 C_{ij}^{\sigma^k} dz = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N [C_{ij}^{\sigma^k} (z_k^4 - z_{k-1}^4)] \\ F_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^4 C_{ij}^{\sigma^k} dz = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^N [C_{ij}^{\sigma^k} (z_k^5 - z_{k-1}^5)] \\ H_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^6 C_{ij}^{\sigma^k} dz = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^N [C_{ij}^{\sigma^k} (z_k^7 - z_{k-1}^7)] \end{aligned} \quad (6.86)$$

com  $i, j = 1, 2, 6$ .

Igualmente, para a obtenção da *matriz constitutiva puramente mecânica do laminado de cisalhamento transversal*, de ordem  $4 \times 4$ , tem-se que as submatrizes  $[\mathbf{Ac}]$ ,  $[\mathbf{Dc}]$  e  $[\mathbf{Fc}]$  são constituídas por componentes expressas como

$$\begin{aligned} Ac_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} C_{ij}^{\tau^k} dz = \sum_{k=1}^N [C_{ij}^{\tau^k} (z_k - z_{k-1})] \\ Dc_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 C_{ij}^{\tau^k} dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [C_{ij}^{\tau^k} (z_k^3 - z_{k-1}^3)] \\ Fc_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^4 C_{ij}^{\tau^k} dz = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^N [C_{ij}^{\tau^k} (z_k^5 - z_{k-1}^5)] \end{aligned} \quad (6.87)$$

com  $i, j = 4, 5$ .

Logo, a contribuição completa de rigidez puramente mecânica do elemento é representada na forma da *matriz de rigidez puramente mecânica*  $[\mathbf{K}_{uu}^e]$ , de ordem  $((7 + N)Nne + npar) \times ((7 + N)Nne + npar)$ , obtida pela soma de  $[\mathbf{K}_{mf}^e]$  e  $[\mathbf{K}_c^e]$ .

A partir da parcela mecânica-eletricamente acoplada  $\delta P_{u\varphi}$  (6.76) da variação da energia de deformação pode-se identificar a parcela de *rigidez mecânica-eletricamente acoplada*, composta por uma contribuição de rigidez acoplada de membrana e flexão  $[\mathbf{K}_{mf-\varphi}^e]$  e acoplada de cisalhamento transversal  $[\mathbf{K}_{c-\varphi}^e]$ . A integração no domínio plano das parcelas acopladas de membrana e flexão pode ser esquematizada conforme

$$[\mathbf{K}_{mf-\varphi}^e] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{m^e} \\ \mathbf{B}^{f^e} \\ \mathbf{B}^{3f^e} \end{bmatrix}^T \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}^1 \dots \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}^{n_{piez}} \right] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{01^e} \\ \mathbf{B}^{11^e} \\ \vdots \\ \mathbf{B}^{0n_{piez}^e} \\ \mathbf{B}^{1n_{piez}^e} \end{bmatrix} \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (6.88)$$

Agregando as parcelas de deformações e as parcelas de campo elétrico e definindo-se a *matriz constitutiva mecânica-eletricamente acoplada de membrana de flexão do laminado*, de ordem  $9 \times 6n_{piez}$ , formada pelas submatrizes  $[\mathbf{O}]^k$ ,  $[\mathbf{P}]^k$ ,  $[\mathbf{Q}]^k$ ,  $[\mathbf{R}]^k$  e  $[\mathbf{S}]^k$ , independentes para cada lâmina piezolétrica  $k$ , simplifica-se (6.88) como

$$[\mathbf{K}_{mf-\varphi}^e] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_{mf}^e]^T \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}^{lam} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{1^e} \\ \vdots \\ \mathbf{E}^{n_{piez}^e} \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (6.89)$$

As componentes das submatrizes  $[\mathbf{O}]^k$ ,  $[\mathbf{P}]^k$ ,  $[\mathbf{Q}]^k$ ,  $[\mathbf{R}]^k$  e  $[\mathbf{S}]^k$  são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned} O_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} e_{ij}^{\sigma^k} dz = e_{ij}^{\sigma^k} (z_k - z_{k-1}) \\ P_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} z e_{ij}^{\sigma^k} dz = \frac{1}{2} [e_{ij}^{\sigma^k} (z_k^2 - z_{k-1}^2)] \\ Q_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 e_{ij}^{\sigma^k} dz = \frac{1}{3} [e_{ij}^{\sigma^k} (z_k^3 - z_{k-1}^3)] \\ R_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^3 e_{ij}^{\sigma^k} dz = \frac{1}{4} [e_{ij}^{\sigma^k} (z_k^4 - z_{k-1}^4)] \\ S_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^4 e_{ij}^{\sigma^k} dz = \frac{1}{5} [e_{ij}^{\sigma^k} (z_k^5 - z_{k-1}^5)] \end{aligned} \quad (6.90)$$

com  $i, j = 1, 2, 6$ .

A integração no domínio plano das parcelas acopladas de cisalhamento transversal pode ser esquematizada conforme

$$[\mathbf{K}_{c-\varphi}^e] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{c^e} \\ \mathbf{B}^{2c^e} \end{bmatrix}^T \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{bmatrix}^1 \cdots \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{bmatrix}^{n_{piez}} \right] \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{01^e} \\ \mathbf{B}^{11^e} \\ \vdots \\ \mathbf{B}^{0n_{piez}^e} \\ \mathbf{B}^{1n_{piez}^e} \end{bmatrix} \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (6.91)$$

Agregando as parcelas de deformações e as parcelas de campo elétrico e definindo-se a *matriz constitutiva mecânica-eletricamente acoplada de cisalhamento transversal do laminado*, de ordem  $4 \times 6n_{piez}$ , formada pelas submatrizes  $[\mathbf{T}]^k$ ,  $[\mathbf{U}]^k$ ,  $[\mathbf{V}]^k$  e  $[\mathbf{W}]^k$ , também independentes para cada lâmina piezolétrica  $k$ , simplifica-se (6.91) como

$$[\mathbf{K}_{c-\varphi}^e] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_c^e]^T \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{bmatrix}^{lam} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{1^e} \\ \vdots \\ \mathbf{E}^{n_{piez}^e} \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (6.92)$$

As componentes das submatrizes  $[\mathbf{T}]^k$ ,  $[\mathbf{U}]^k$ ,  $[\mathbf{V}]^k$  e  $[\mathbf{W}]^k$  são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned} T_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} e_{ij}^{\tau^k} dz = e_{ij}^{\tau^k} (z_k - z_{k-1}) \\ U_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} z e_{ij}^{\tau^k} dz = \frac{1}{2} [e_{ij}^{\tau^k} (z_k^2 - z_{k-1}^2)] \\ V_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 e_{ij}^{\tau^k} dz = \frac{1}{3} [e_{ij}^{\tau^k} (z_k^3 - z_{k-1}^3)] \\ W_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^3 e_{ij}^{\tau^k} dz = \frac{1}{4} [e_{ij}^{\tau^k} (z_k^4 - z_{k-1}^4)] \end{aligned} \quad (6.93)$$

com  $i, j = 4, 5$ .

Assim, obtém-se  $[\mathbf{K}_{u\varphi}^e]$  pela soma de  $[\mathbf{K}_{mf-\varphi}^e]$  e  $[\mathbf{K}_{c-\varphi}^e]$ .

Igualmente, de (6.77), obtém-se a *matriz rigidez elétrica-mecanicamente acoplada*,  $[\mathbf{K}_{\varphi u}^e]$ , de forma semelhante ao exposto para a matriz de rigidez mecânica-eletricamente acoplada,  $[\mathbf{K}_{u\varphi}^e]$ . Deve-se ressaltar que  $[\mathbf{K}_{\varphi u}^e] = [\mathbf{K}_{u\varphi}^e]^T$ .

Por fim, a *matriz de rigidez puramente elétrica*  $[\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e]$  pode ser obtida a partir de (6.78) pela integração no plano conforme

$$[\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{01e} \\ \mathbf{B}^{11e} \\ \vdots \\ \mathbf{B}^{0n_{piez}e} \\ \mathbf{B}^{1n_{piez}e} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}^1 & \cdots & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}^{n_{piez}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{01e} \\ \mathbf{B}^{11e} \\ \vdots \\ \mathbf{B}^{0n_{piez}e} \\ \mathbf{B}^{1n_{piez}e} \end{bmatrix} \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (6.94)$$

Agregando as parcelas de campo elétrico e definindo-se a *matriz constitutiva puramente elétrica do laminado*, de ordem  $6n_{piez} \times 6n_{piez}$ , formada pelas submatrizes  $[\mathbf{X}^k]$ ,  $[\mathbf{Y}^k]$  e  $[\mathbf{Z}^k]$ , para cada lâmina piezométrica  $k$ , simplifica-se (6.94) como

$$[\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{1e} \\ \vdots \\ \mathbf{E}^{n_{piez}e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}^{lam} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{1e} \\ \vdots \\ \mathbf{E}^{n_{piez}e} \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (6.95)$$

As componentes da *matriz constitutiva puramente elétrica do laminado* são expressas conforme

$$\begin{aligned} X_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \chi_{ij}^k dz = \chi_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) \\ Y_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \chi_{ij}^k dz = \frac{1}{2} [\chi_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)] \\ Z_{ij}^k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \chi_{ij}^k dz = \frac{1}{3} [\chi_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3)] \end{aligned} \quad (6.96)$$

com  $i, j = 1, 2, 3$ .

Assim, a matriz de rigidez total do elemento será obtida somando as parcelas que são todas matrizes quadradas de mesmas dimensões

$$[\mathbf{K}_{uu}^e] + [\mathbf{K}_{u\varphi}^e] + [\mathbf{K}_{\varphi u}^e] - [\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e] = [\mathbf{K}^e] \quad (6.97)$$

## 6.7 Obtenção da matriz de inércia elementar

Do funcional do PVH tem-se que a energia cinética do sistema é dada pela expressão

$$K = - \int_V \rho \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (6.98)$$

Logo, a variação da energia cinética é

$$\delta K = - \int_V \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV \quad (6.99)$$

Então, a matriz de inércia elementar pode ser obtida desenvolvendo a expressão da variação da energia cinética a partir da inserção da discretização das variáveis.

Os deslocamentos generalizados das expansões das componentes de deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , podem ser agrupados em vetores de acordo com a ordem da relação com a coordenada  $z$ , à maneira com que é feito para as deformações e para o campo elétrico.

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} = \begin{Bmatrix} u^0(x, y, t) \\ v^0(x, y, t) \\ w^0(x, y, t) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \psi_x(x, y, t) \\ \psi_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \psi_{3x}(x, y, t) \\ \psi_{3y}(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.100)$$

Seja a matriz de aproximação das funções de deslocamentos mecânicos generalizados,  $[\mathbf{N}^e]$ , cujo trecho relativo ao nó  $no$  é semelhante ao exposto em (6.22), mas agora com colunas nulas referentes aos parâmetros nodais correspondentes aos potenciais elétricos nas lâminas piezelétricas, respeitando a definição do vetor de parâmetros elementares (6.47).

Então, considerando  $[\mathbf{N}^e]$  também particionada de modo que se tenha  $[\mathbf{N}^{0e}]$  para os deslocamentos no plano de referência,  $[\mathbf{N}^{1e}]$  para as rotações de primeira ordem e  $[\mathbf{N}^{3e}]$  para as rotações de ordem superior, pode-se reescrever a equação (6.99) em termos das aproximações das funções incógnitas como

$$\delta K = - \int_{\Omega_e} \int_z \left\{ \rho \left[ (\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{0T} + z \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{1T} + z^3 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{3T}) \right. \right. \\ \left. \left. (\mathbf{N}^0 \ddot{\mathbf{U}}^e + z \mathbf{N}^1 \ddot{\mathbf{U}}^e + z^3 \mathbf{N}^3 \ddot{\mathbf{U}}^e) \right] \right\} dz d\Omega_e \quad (6.101)$$

O produto distributivo entre as parcelas conduz a

$$\begin{aligned}
\delta K = - \int_{\Omega_e} \int_z & \left[ \rho (\delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{0T} \mathbf{N}^0 \ddot{\mathbf{U}}^e + z \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{0T} \mathbf{N}^1 \ddot{\mathbf{U}}^e \right. \\
& + z^3 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{0T} \mathbf{N}^3 \ddot{\mathbf{U}}^e + z \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^0 \ddot{\mathbf{U}}^e \\
& + z^2 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^1 \ddot{\mathbf{U}}^e + z^4 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^3 \ddot{\mathbf{U}}^e \\
& + z^3 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{3T} \mathbf{N}^0 \ddot{\mathbf{U}}^e + z^4 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{3T} \mathbf{N}^1 \ddot{\mathbf{U}}^e \\
& \left. + z^6 \delta \mathbf{U}^{eT} \mathbf{N}^{3T} \mathbf{N}^3 \ddot{\mathbf{U}}^e \right] dz d\Omega_e
\end{aligned} \tag{6.102}$$

Colocando em evidência, de um lado, a variação dos deslocamentos nodais, e do outro, o vetor de acelerações nodais e explicitando a integração na direção da espessura em cada camada isoladamente tem-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\delta K = - \int_{\Omega_e} & \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ \delta \mathbf{U}^{eT} (\rho^k \mathbf{N}^{0T} \mathbf{N}^0 + \rho^k z \mathbf{N}^{0T} \mathbf{N}^1 + \rho^k z^3 \mathbf{N}^{0T} \mathbf{N}^3 \right. \right. \\
& + \rho^k z \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^0 + \rho^k z^2 \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^1 + \rho^k z^4 \mathbf{N}^{1T} \mathbf{N}^3 \\
& \left. \left. + \rho^k z^3 \mathbf{N}^{3T} \mathbf{N}^0 + \rho^k z^4 \mathbf{N}^{3T} \mathbf{N}^1 + \rho^k z^6 \mathbf{N}^{3T} \mathbf{N}^3) \ddot{\mathbf{U}}^e \right] dz \right\} d\Omega_e
\end{aligned} \tag{6.103}$$

Retirando os vetores de parâmetros nodais da integral, uma vez que são constantes, e restringindo a integração na direção da espessura apenas aos termos dependentes de  $z$ , pode-se reescrever a equação (6.103) como

$$\begin{aligned}
\delta K = - \delta \mathbf{U}^{eT} & \left\{ \int_{\Omega_e} \left[ \mathbf{N}^{0T} \rho_0 \mathbf{N}^0 + \mathbf{N}^{0T} \rho_1 \mathbf{N}^1 + \mathbf{N}^{0T} \rho_3 \mathbf{N}^3 \right. \right. \\
& + \mathbf{N}^{1T} \rho_1 \mathbf{N}^0 + \mathbf{N}^{1T} \rho_2 \mathbf{N}^1 + \mathbf{N}^{1T} \rho_4 \mathbf{N}^3 \\
& \left. \left. + \mathbf{N}^{3T} \rho_3 \mathbf{N}^0 + \mathbf{N}^{3T} \rho_4 \mathbf{N}^1 + \mathbf{N}^{3T} \rho_6 \mathbf{N}^3 \right] d\Omega_e \right\} \ddot{\mathbf{U}}^e
\end{aligned} \tag{6.104}$$

Na equação (6.104) as *massas generalizadas*,  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ ,  $\rho_4$  e  $\rho_6$ , foram definidas por

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k dz = \sum_{k=1}^N \rho^k (z_{k-1} - z_k) \\
\rho_1 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \rho^k (z_{k-1}^2 - z_k^2) \\
\rho_2 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \rho^k (z_{k-1}^3 - z_k^3) \\
\rho_3 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k z^3 dz = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \rho^k (z_{k-1}^4 - z_k^4) \\
\rho_4 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k z^4 dz = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^N \rho^k (z_{k-1}^5 - z_k^5) \\
\rho_6 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k z^6 dz = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^N \rho^k (z_{k-1}^7 - z_k^7)
\end{aligned} \tag{6.105}$$

Agrupando as parcelas das matrizes de aproximação dos deslocamentos generalizados,  $[\mathbf{N}^e]$  e introduzindo o caráter matricial às massas generalizadas através de matrizes identidades  $[I]$  ou partes destas, tem-se finalmente a variação da energia cinética

$$\delta K = -\delta \mathbf{U}^{eT} \left\{ \int_{\Omega_e} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^0 \\ \mathbf{N}^1 \\ \mathbf{N}^3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho_0 [I_{3 \times 3}] & \rho_1 [I_{3 \times 2}] & \rho_3 [I_{3 \times 2}] \\ \rho_1 [I_{2 \times 3}] & \rho_2 [I_{2 \times 2}] & \rho_4 [I_{2 \times 2}] \\ \rho_3 [I_{2 \times 3}] & \rho_4 [I_{2 \times 2}] & \rho_6 [I_{2 \times 2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^0 \\ \mathbf{N}^1 \\ \mathbf{N}^3 \end{Bmatrix} d\Omega_e \right\} \ddot{\mathbf{U}}^e \tag{6.106}$$

A integração no domínio do elemento  $\Omega_e$  fornece a *matriz de inércia elementar*  $[\mathbf{M}^e]$

$$[\mathbf{M}^e] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}^e]^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_6 \end{bmatrix} [\mathbf{N}^e] d\Omega_e \tag{6.107}$$

## 6.8 Obtenção das forças elementares

Por fim, o último componente do funcional do PVH é o trabalho das forças externas aplicadas ao sistema.

O trabalho virtual exteno é



$$\delta W = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^V dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^S dS + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^P + \int_V \delta \varphi^T \mathbf{Q} dV - \int_S \delta \varphi^T \mathbf{q} dS \quad (6.108)$$

com  $\mathbf{Q} = 0$  pois o material piezelétrico, como um dielétrico, não apresenta carga elétrica livre e sendo  $\mathbf{q}$  a carga elétrica nos eletrodos de superfície do piezelétrico.

Os deslocamentos mecânicos são discretizados na forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^U \mathbf{U}(t) \quad (6.109)$$

com  $\mathbf{N}^U$  sendo a parcela da matriz de aproximação dos graus de liberdade elementares referente aos deslocamentos mecânicos, e a função potencial elétrico

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^\varphi \mathbf{U}(t) \quad (6.110)$$

com  $\mathbf{N}^\varphi$  sendo a parcela da matriz de deslocamentos elementares referente aos potenciais elétricos nas lâminas piezelétricas, devendo-se lembrar que o vetor de deslocamentos elementares  $\mathbf{U}$  contém tantos os graus de liberdades mecânicos quanto os elétricos.

De maneira semelhante, as forças mecânicas e as carga elétricas podem ser discretizadas no domínio do elemento, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^V(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}^f \mathbf{F}^V(t) \\ \mathbf{f}^S(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{N}^f \mathbf{F}^S(t) \\ \mathbf{f}^P(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{F}^P(t) \\ \mathbf{q}(x, t) &= \mathbf{N}^Q \mathbf{Q}^S(t) \end{aligned} \quad (6.111)$$

Assim, substituindo as funções contínuas na expressão do trabalho virtual externo pelas funções discretizadas temos

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_V \delta(\mathbf{N}^U \mathbf{U})^T \mathbf{N}^f \mathbf{F}^V dV + \int_S \delta(\mathbf{N}^U \mathbf{U})^T \mathbf{N}^f \mathbf{F}^S dS \\ &\quad + \delta(\mathbf{N}^U \mathbf{U})^T \mathbf{F}^P - \int_S \delta(\mathbf{N}^\varphi \varphi)^T \mathbf{N}^Q \mathbf{Q}^S dS \end{aligned} \quad (6.112)$$

Colocando a variação dos deslocamentos e do potencial elétrico em evidência temos

os vetores de forças nodais equivalentes

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{F}^{eV}\} &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}_{uu}^e]^T [\mathbf{N}^{fe}] F^V d\Omega_e \\
 \{\mathbf{F}^{eS}\} &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}_{uu}^e]^T [\mathbf{N}^{fe}] F^S d\Omega_e \\
 \{\mathbf{F}^{eP}\} &= [\mathbf{N}_{uu}^e]^T F^P \\
 \{\mathbf{F}^{eQ}\} &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}_{\varphi\varphi}^e]^T [\mathbf{N}^{qe}] Q^S d\Omega_e
 \end{aligned} \tag{6.113}$$

de maneira que a soma de todas estas parcelas fornece o vetor de forças elementares  $\{F^e(t)\}$ .

Portanto, reunindo as contribuições de todos os elementos tem-se o seguinte sistema de equações

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}(t)\} = \{\mathbf{F}(t)\} \tag{6.114}$$

Considerando que as solicitações externas não variem no tempo, tem-se o sistema de equações para o caso estático

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \tag{6.115}$$

Devido à dependência linear entre as equações do sistema, consequência da estratégia de enriquecimento polinomial sobre uma partição da unidade também polinomial, deve-se utilizar um procedimento de solução conveniente. Neste trabalho será utilizado o *Método de Babuška*, conforme detalhado no Apêndice B.

## 7 Solução analítica

Neste capítulo é desenvolvida uma solução analítica para placas laminadas compostas retangulares, mais especificamente placas simétricas cruzadas, com sensores e atuadores piezelétricos, considerando as mesmas hipóteses cinemáticas utilizadas para a formulação discretizada em Elementos Finitos Generalizados.

As equações governantes do fenômeno mecânica-eletricamente acoplado são desenvolvidas usando o *Princípio dos Trabalhos Virtuais*, sob a restrição de que as propriedades dos materiais são independentes do campo elétrico, ou seja, sob a ótica da piezeletricidade linear.

São obtidas as equações diferenciais do movimento a partir das quais, com a aplicação de expansões em séries trigonométricas para aproximar os campos incógnitos, o sistema de equações diferenciais parciais se transforma num sistema de equações algébricas, estratégia esta conhecida como *Método de Navier*.

### 7.1 Equações de equilíbrio

Um corpo deformável pode estar sujeito a forças de corpo por unidade de volume

$$\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\}^T \quad (7.1)$$

e a forças de superfície por unidade de área

$$\{T\} = \{T_x \ T_y \ T_z\}^T \quad (7.2)$$

referidas a um sistema de coordenadas cartesianas retangulares  $xyz$ .

As componentes de tensões atuantes no interior do corpo podem ser expressas na forma do vetor tensão com índices contraídos ou na notação de *Voigt* como

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{xz} \ \tau_{xy}\}^T \quad (7.3)$$

e devem satisfazer às *Equações do Movimento de Cauchy*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= \rho \frac{d^2 v}{dt^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= \rho \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Aplicando o *Princípio de D'Alembert* às equações do movimento, de modo que as forças de inércia podem ser incorporadas às forças de corpo, constituindo um problema estático equivalente, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{F}_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{F}_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{F}_z &= 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde definem-se as forças de corpo equivalentes por unidade de volume,  $\bar{F}_x$ ,  $\bar{F}_y$  e  $\bar{F}_z$ , dadas por

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= F_x - \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \bar{F}_y &= F_y - \rho \frac{d^2 v}{dt^2} \\ \bar{F}_z &= F_z - \rho \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Além disso, na superfície do corpo devem-se verificar as condições de equilíbrio

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= \bar{T}_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= \bar{T}_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= \bar{T}_z \end{aligned} \quad (7.7)$$

na região  $S_\sigma$  do contorno onde  $\{\bar{T}\}$  é aplicada e sendo  $\{n\} = \{n_x \ n_y \ n_z\}^T$  o vetor unitário normal à superfície e apontando para fora da mesma.

Para a formulação do **problema eletromecanicamente acoplado** ainda é necessário estabelecer que, se o material apresenta uma carga elétrica livre  $\bar{Q}_e$  por unidade de volume, o **deslocamento elétrico** é um campo vetorial com componentes

$$\{\mathbf{D}\} = \{D_x \ D_y \ D_z\}^T \quad (7.8)$$

o qual deve satisfazer a condição de equilíbrio

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} - \bar{Q}_e = 0 \quad (7.9)$$

no interior do corpo e

$$D_x n_x + D_y n_y + D_z n_z = \bar{q}_e \quad (7.10)$$

na região  $S_q$  do contorno, onde existe uma carga elétrica livre  $\bar{q}_e$  por unidade de área.

## 7.2 Princípio dos trabalhos virtuais

A expressão do balanço de trabalhos virtuais para o problema eletromecanicamente acoplado é

$$\begin{aligned} & - \int_V \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV + \int_V \{\bar{F}\}^T \{\delta u\} dV + \int_{S_\sigma} \{\bar{T}\}^T \{\delta u\} dS \\ & + \int_V \{\mathbf{D}\}^T \{\mathbf{E}\} dV + \int_V \bar{Q}_e \delta\phi dV - \int_{S_q} \bar{q}_e \delta\phi dS = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

que deve ser satisfeita para qualquer  $\delta u$  e  $\delta\phi$  cinematicamente admissíveis. A expressão (7.11) é uma condição necessária e suficiente para que (7.5), (7.7), (7.9) e (7.10) sejam satisfeitas. Uma vez que não faz uso das equações constitutivas é, portanto, aplicável a um material qualquer definido por relações que envolvam  $\{\sigma\}$ ,  $\{\mathbf{D}\}$ ,  $\{\varepsilon\}$  e  $\{\mathbf{E}\}$ .

Assim, pode-se identificar na equação (7.11) a variação do trabalho virtual realizado pelas forças internas

$$\delta W_{int} \equiv - \int_V \left( \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} - \{\mathbf{D}\}^T \{\delta\mathbf{E}\} \right) dV \quad (7.12)$$

e o trabalho virtual realizado pelas forças externas

$$\delta W_{ext} \equiv \int_{S_\sigma} \{\bar{T}\}^T \{\delta u\} dS - \int_{S_q} \bar{q}_e \delta \phi dS + \int_V \left( \{\bar{F}\}^T \{\delta u\} + \bar{Q}_e \delta \phi \right) dV \quad (7.13)$$

Utiliza-se a relação constitutiva e a relação cinemática de ordem superior para representar o trabalho virtual interno em termos das tensões coplanares e deformações generalizadas de membrana e flexão e em termos das tensões cisalhantes transversais e as respectivas deformações generalizadas (que também é obtida na equação (6.64), página 98)

$$\begin{aligned} \delta W_i = - \int_V \left\{ \left[ \left( \{\delta \varepsilon^0\} + z \{\delta \kappa\} + z^3 \{\delta \kappa_3\} \right)^T \{\sigma\} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \{\delta \gamma^0\} + z^2 \{\delta \kappa_2\} \right)^T \{\tau\} - \{\delta \mathbf{E}\}^T \{\mathbf{D}\} \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (7.14)$$

Efetando os produtos na equação (7.14) e separando as integrais de superfície ( $\Omega$ ) e ao longo da espessura do laminado

$$\begin{aligned} \delta W_i = - \int_\Omega \int_z \left( \{\delta \varepsilon^0\}^T \{\sigma\} + z \{\delta \kappa\}^T \{\sigma\} + z^3 \{\delta \kappa_3\}^T \{\sigma\} \right. \\ \left. + \{\delta \gamma^0\}^T \{\tau\} + z^2 \{\delta \kappa_2\}^T \{\tau\} - \{\delta \mathbf{E}\}^T \{\mathbf{D}\} \right) dz d\Omega \end{aligned} \quad (7.15)$$

Efetua-se a integral em  $z$  e utilizam-se as definições dos esforços generalizados  $\{N\}$ ,  $\{M\}$ ,  $\{M_3\}$ ,  $\{Q\}$  e  $\{Q_2\}$

$$\begin{aligned} \delta W_i = - \int_x \int_y \left( \{\delta \varepsilon^0\}^T \{N\} + \{\delta \kappa\}^T \{M\} + \{\delta \kappa_3\}^T \{M_3\} \right. \\ \left. + \{\delta \gamma^0\}^T \{Q\} + \{\delta \kappa_2\}^T \{Q_2\} \right) dy dx \\ + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\delta \mathbf{E}\}^{(k)T} \{\mathbf{D}\}^{(k)} dz dy dx \end{aligned} \quad (7.16)$$

No último termo de (7.15), a integral na espessura do laminado foi substituída por uma soma de integrais ao longo das  $n_{piez}$  lâminas piezelétricas.

O potencial elétrico na lâmina piezelétrica  $k$  é aproximado na direção da espessura na forma

$$\varphi^{(k)}(z) = \frac{z_k - z}{h_k} \varphi_{k-1} \quad (7.17)$$

onde  $\varphi_{k-1}$  é o valor do potencial na superfície inferior da lâmina piezolétrica  $k$ .

De forma análoga ao que foi feito para o campo de deformações, o vetor campo elétrico também é aproximado ao longo da espessura de cada lâmina piezolétrica por uma função linear, seccionalmente contínua. No presente caso, como temos a definição

$$\mathbf{E}^{(k)} = -\nabla\varphi^{(k)}(z) \quad (7.18)$$

as componentes coplanares,  $E_x$  e  $E_y$ , são aproximadas de forma linear e a componente transversal  $E_z$  por uma constante, isto é

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix}^{(k)} = \left(\frac{z - z_k}{h_k}\right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \left(\frac{z - z_k}{h_k}\right) \begin{Bmatrix} E_{p_x} \\ E_{p_y} \end{Bmatrix}^{(k)} = \left(\frac{z - z_k}{h_k}\right) \{E_p\}^{(k)} \quad (7.19)$$

$$E_z^{(k)} = \frac{\varphi_{k-1}}{h_k} \quad (7.20)$$

de forma que a equação da variação do trabalho virtual interno em (7.16) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \delta W_i = & - \int_x \int_y \left( \{\delta\varepsilon^0\}^T \{N\} + \{\delta\kappa\}^T \{M\} + \{\delta\kappa_3\}^T \{M_3\} \right. \\ & \left. + \{\delta\gamma^0\}^T \{Q\} + \{\delta\kappa_2\}^T \{Q_2\} \right) dy dx \\ & + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \left( \{\delta E_p\}^{(k)T} \{L\}^{(k)} + \delta\varphi_{k-1} J_k \right) dy dx \end{aligned} \quad (7.21)$$

Os esforços generalizados são definidos como

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (7.22)$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (7.23)$$

$$\{M_3\} = \begin{Bmatrix} M_{3x} \\ M_{3y} \\ M_{3xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz \quad (7.24)$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (7.25)$$

$$\{Q_2\} = \begin{Bmatrix} Q_{2y} \\ Q_{2x} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} z^2 dz \quad (7.26)$$

$$\{L\}^{(k)} = \begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \end{Bmatrix}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \frac{z - z_k}{h_k} \right) \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (7.27)$$

$$J_k = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{D_z^{(k)}}{h_k} dz \quad (7.28)$$

Por sua vez, o **trabalho virtual das forças externas** pode ser escrito como na equação (7.29). Para tanto, considera-se que o corpo seja solicitado por forças distribuídas na face superior  $\{\bar{q}_{sx} \bar{q}_{sy} \bar{q}_{sz}\}$ , na face inferior  $\{\bar{q}_{ix} \bar{q}_{iy} \bar{q}_{iz}\}$  e nas bordas  $\{\bar{T}_n \bar{T}_{ns} \bar{T}_{nz}\}$ , onde  $n$  e  $s$  representam a direção normal e tangencial ao contorno, respectivamente. Admite-se que  $\bar{Q}_e = 0$ , visto que o material é piezelétrico, dielétrico por natureza, e não apresenta carga livre, e denota-se por  $\bar{q}_{ek}$  a **carga elétrica** livre distribuída na face inferior da camada piezelétrica  $k$  (por convenção neste trabalho)

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_x \int_y \int_z (\bar{F}_x \delta u_x + \bar{F}_y \delta u_y + \bar{F}_z \delta u_z) dz dy dx \\ & + \int_x \int_y \left[ \bar{q}_{sx} \delta u_x(h/2) + \bar{q}_{sy} \delta u_y(h/2) + \bar{q}_{sz} \delta u_z(h/2) \right. \\ & \left. + \bar{q}_{ix} \delta u_x(-h/2) + \bar{q}_{iy} \delta u_y(-h/2) + \bar{q}_{iz} \delta u_z(-h/2) \right] dy dx \\ & - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int \int \bar{q}_{ek} \delta \varphi_{k-1} dy dx + \int_{\Gamma_\sigma} \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{T}_n \delta u_n + \bar{T}_{ns} \delta u_s + \bar{T}_{nz} \delta u_z) dz ds \end{aligned} \quad (7.29)$$

onde  $\Gamma_\sigma$  denota o contorno da superfície de referência que intercepta a borda com carregamento externo aplicado, e  $\delta u_n$  e  $\delta u_s$  são as componentes do deslocamento virtual nas direções normal e tangencial,  $n$  e  $s$ , respectivamente. É importante observar que  $\delta \phi$  é nulo na face superior de cada lâmina piezelétrica, impedindo assim que a carga elétrica



alí distribuída realize trabalho.

A seguir, substituem-se os campos incógnitos pelas expressões dadas nas relações cinemáticas (6.5), página 78, isto é

$$\begin{aligned}
\delta u_x &= \delta u^0 + z\delta\psi_x + z^3\delta\psi_{3x} \\
\delta u_y &= \delta v^0 + z\delta\psi_y + z^3\delta\psi_{3y} \\
\delta u_z &= \delta w^0 \\
\delta\varphi &= \left(\frac{z_k - z}{h_k}\right)\delta\varphi_{k-1}
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Definem-se as componentes de deslocamentos nas direções normal e tangencial ao contorno da superfície de referência

$$\begin{aligned}
\delta u_n &= \delta u_{0n} + z\delta\psi_n + z^3\delta\psi_{3n} \\
\delta u_s &= \delta u_{0s} + z\delta\psi_s + z^3\delta\psi_{3s}
\end{aligned} \tag{7.31}$$

e considera-se a definição das forças de corpo equivalentes (7.6), página 114, de forma que pode-se reescrever a variação do trabalho virtual externo como

$$\begin{aligned}
\delta W_e &= \int_x \int_y \int_z (F_x - \rho\ddot{u}^0)(\delta u^0 + z\delta\psi_x + z^3\delta\psi_{3x}) \\
&+ (F_y - \rho\ddot{v}^0)(\delta v^0 + z\delta\psi_y + z^3\delta\psi_{3y}) + (F_z - \rho\ddot{w}^0)(\delta w^0) dz dy dx \\
&+ \int_x \int_y \left\{ \bar{q}_{sx} \left[ \delta u^0 + \left(\frac{h}{2}\right)\delta\psi_x + \left(\frac{h}{2}\right)^3\delta\psi_{3x} \right] \right. \\
&+ \bar{q}_{sy} \left[ \delta v^0 + \left(\frac{h}{2}\right)\delta\psi_y + \left(\frac{h}{2}\right)^3\delta\psi_{3y} \right] + \bar{q}_{sz}(\delta w^0) \\
&+ \bar{q}_{ix} \left[ \delta u^0 + \left(-\frac{h}{2}\right)\delta\psi_x + \left(-\frac{h}{2}\right)^3\delta\psi_{3x} \right] \\
&+ \bar{q}_{iy} \left[ \delta v^0 + \left(-\frac{h}{2}\right)\delta\psi_y + \left(-\frac{h}{2}\right)^3\delta\psi_{3y} \right] \\
&+ \left. \bar{q}_{iz}(\delta w^0) \right\} dy dx - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \bar{q}_{ek} \delta\varphi_{k-1} dy dx \\
&+ \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \bar{T}_n (\delta u_{0n} + z\delta\psi_n + z^3\delta\psi_{3n}) \right. \\
&+ \left. \bar{T}_{ns} (\delta u_{0s} + z\delta\psi_s + z^3\delta\psi_{3s}) + \bar{T}_{nz}(\delta w^0) \right] dz ds
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Novamente é evidenciada a integração na espessura dos termos dependentes da respectiva coordenada e colocando em evidência as variações dos deslocamentos generalizados a expressão da variação do trabalho virtual externo toma a forma

$$\begin{aligned}
\delta W_e = & \int_x \int_y \left\{ \left[ \bar{q}_{sx} + \bar{q}_{ix} + \int_{-h/2}^{h/2} F_x dz \right] \delta u^0 + \left[ \bar{q}_{sy} + \bar{q}_{iy} + \int_{-h/2}^{h/2} F_y dz \right] \delta v^0 \right. \\
& + \left[ \bar{q}_{sz} + \bar{q}_{iz} + \int_{-h/2}^{h/2} F_z dz \right] \delta w^0 + \left[ \left( \frac{h}{2} \right) \bar{q}_{sx} - \left( \frac{h}{2} \right) \bar{q}_{ix} + \int_{-h/2}^{h/2} z F_x dz \right] \delta \psi_x \\
& + \left[ \left( \frac{h}{2} \right) \bar{q}_{sy} - \left( \frac{h}{2} \right) \bar{q}_{iy} + \int_{-h/2}^{h/2} z F_y dz \right] \delta \psi_y \\
& + \left[ \left( \frac{h^3}{8} \right) \bar{q}_{sx} - \left( \frac{h^3}{8} \right) \bar{q}_{ix} + \int_{-h/2}^{h/2} z^3 F_x dz \right] \delta \psi_{3x} \\
& + \left. \left[ \left( \frac{h^3}{8} \right) \bar{q}_{sy} - \left( \frac{h^3}{8} \right) \bar{q}_{iy} + \int_{-h/2}^{h/2} z^3 F_y dz \right] \delta \psi_{3y} \right\} dy dx \\
& - \int_x \int_y \left\{ \left[ \ddot{u}^0 \left( \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \right) + \ddot{\psi}_x \left( \int_{-h/2}^{h/2} z \rho dz \right) + \ddot{\psi}_{3x} \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^3 \rho dz \right) \right] \delta u^0 \right. \\
& + \left[ \ddot{v}^0 \left( \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \right) + \ddot{\psi}_y \left( \int_{-h/2}^{h/2} z \rho dz \right) + \ddot{\psi}_{3y} \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^3 \rho dz \right) \right] \delta v^0 \\
& + \left[ \ddot{w}^0 \left( \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \right) \right] \delta w^0 \\
& + \left[ \ddot{u}^0 \left( \int_{-h/2}^{h/2} z \rho dz \right) + \ddot{\psi}_x \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \rho dz \right) + \ddot{\psi}_{3x} \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^4 \rho dz \right) \right] \delta \psi_x \\
& + \left[ \ddot{v}^0 \left( \int_{-h/2}^{h/2} z \rho dz \right) + \ddot{\psi}_y \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \rho dz \right) + \ddot{\psi}_{3y} \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^4 \rho dz \right) \right] \delta \psi_y \\
& + \left[ \ddot{u}^0 \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^3 \rho dz \right) + \ddot{\psi}_x \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^4 \rho dz \right) + \ddot{\psi}_{3x} \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^6 \rho dz \right) \right] \delta \psi_{3x} \\
& + \left. \left[ \ddot{v}^0 \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^3 \rho dz \right) + \ddot{\psi}_y \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^4 \rho dz \right) + \ddot{\psi}_{3y} \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^6 \rho dz \right) \right] \delta \psi_{3y} \right\} dy dx \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \bar{q}_{e_k} \delta \varphi_{k-1} dy dx \\
& + \int_{\Gamma_\sigma} \left[ \left( \int_{-h/2}^{h/2} \bar{T}_n dz \right) \delta u_{0n} + \left( \int_{-h/2}^{h/2} z \bar{T}_n dz \right) \delta \psi_n + \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^3 \bar{T}_n dz \right) \delta \psi_{3n} \right. \\
& + \left( \int_{-h/2}^{h/2} \bar{T}_{ns} dz \right) \delta u_{0s} + \left( \int_{-h/2}^{h/2} z \bar{T}_{ns} dz \right) \delta \psi_s + \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^3 \bar{T}_{ns} dz \right) \delta \psi_{3s} \\
& \left. + \left( \int_{-h/2}^{h/2} \bar{T}_{nz} dz \right) \delta w^0 \right] ds
\end{aligned} \tag{7.33}$$

de onde se pode identificar que a segunda integral é o trabalho virtual das forças de inércia.

Logo, reunindo-se a expressão da variação do trabalho virtual interno (7.21) à expressão da variação do trabalho virtual externo (7.33) tem-se a expressão do princípio dos trabalhos virtuais

$$\begin{aligned}
& - \int_x \int_y \left( \{\delta\varepsilon^0\}^T \{N\} + \{\delta\kappa\}^T \{M\} + \{\delta\kappa_3\}^T \{M_3\} + \{\delta\gamma^0\}^T \{Q\} + \{\delta\kappa_2\}^T \{Q_2\} \right) dy dx \\
& + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \left( \{\delta E_p\}^{(k)T} \{L\}^{(k)} + \delta\varphi_{k-1} J_k \right) dy dx \\
& + \int_x \int_y \left( \bar{q}_x \delta u^0 + \bar{q}_y \delta v^0 + \bar{q}_z \delta w^0 - \bar{m}_x \delta\psi_y + \bar{m}_y \delta\psi_x - \bar{m}_{3x} \delta\psi_{3y} + \bar{m}_{3y} \delta\psi_{3x} \right) dy dx \\
& - \int_x \int_y \left( f_x \delta u^0 + f_y \delta v^0 + f_z \delta w^0 + f_{mx} \delta\psi_x + f_{my} \delta\psi_y + f_{3mx} \delta\psi_{3x} + f_{3my} \delta\psi_{3y} \right) dy dx \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \bar{q}_{ek} \delta\varphi_{k-1} dy dx + \\
& \int_{\Gamma_\sigma} \left( \bar{N}_n \delta u_{0n} + \bar{M}_n \delta\psi_n + \bar{M}_{3n} \delta\psi_{3n} + \bar{N}_{ns} \delta u_{0s} + \bar{M}_{ns} \delta\psi_s + \bar{M}_{3ns} \delta\psi_{3s} + \bar{Q}_n \delta w^0 \right) ds = 0
\end{aligned} \tag{7.34}$$

onde a primeira integral corresponde à energia potencial de deformação mecânica, a segunda à energia potencial associada ao campo elétrico, a terceira integral compreende o trabalho realizado pelas forças de superfície e pelas forças de corpo, a quarta integral corresponde à energia cinética, a quinta integral diz respeito ao trabalho externo realizado pelas cargas elétricas e, finalmente, a sexta integral corresponde ao trabalho externo realizado pelas forças no contorno.

Em (7.34) foram definidas as seguintes forças generalizadas no domínio plano

$$\begin{aligned}
\bar{q}_x &= \bar{q}_{sx} + \bar{q}_{ix} + \int_{-h/2}^{h/2} F_x dz, & \bar{q}_y &= \bar{q}_{sy} + \bar{q}_{iy} + \int_{-h/2}^{h/2} F_y dz \\
\bar{q}_z &= \bar{q}_{sz} + \bar{q}_{iz} + \int_{-h/2}^{h/2} F_z dz \\
\bar{m}_y &= \frac{h}{2} (\bar{q}_{sx} - \bar{q}_{ix}) + \int_{-h/2}^{h/2} z F_x dz, & \bar{m}_x &= -\frac{h}{2} (\bar{q}_{sy} - \bar{q}_{iy}) - \int_{-h/2}^{h/2} z F_y dz \\
\bar{m}_{3y} &= \frac{h^3}{8} (\bar{q}_{sx} - \bar{q}_{ix}) + \int_{-h/2}^{h/2} z^3 F_x dz, & \bar{m}_{3x} &= -\frac{h^3}{8} (\bar{q}_{sy} - \bar{q}_{iy}) - \int_{-h/2}^{h/2} z^3 F_y dz
\end{aligned} \tag{7.35}$$

as forças generalizadas aplicadas no contorno

$$\begin{aligned}
\bar{N}_n &= \int_{-h/2}^{h/2} T_n dz, & \bar{M}_n &= \int_{-h/2}^{h/2} z T_n dz, & \bar{M}_{3n} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^3 T_n dz \\
\bar{N}_{ns} &= \int_{-h/2}^{h/2} T_{ns} dz, & \bar{M}_{ns} &= \int_{-h/2}^{h/2} z T_{ns} dz, & \bar{M}_{3ns} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^3 T_{ns} dz \\
\bar{Q}_n &= \int_{-h/2}^{h/2} T_{nz} dz
\end{aligned} \tag{7.36}$$

e as forças generalizadas de inércia

$$\begin{aligned}
f_x &= \ddot{u}^0 \rho_0 + \ddot{\psi}_x \rho_1 + \ddot{\psi}_{3x} \rho_3, & f_y &= \ddot{v}^0 \rho_0 + \ddot{\psi}_y \rho_1 + \ddot{\psi}_{3y} \rho_3, & f_z &= \ddot{w}^0 \rho_0 \\
f_{mx} &= \ddot{u}^0 \rho_1 + \ddot{\psi}_x \rho_2 + \ddot{\psi}_{3x} \rho_4, & f_{my} &= \ddot{v}^0 \rho_1 + \ddot{\psi}_y \rho_2 + \ddot{\psi}_{3y} \rho_4 \\
f_{3mx} &= \ddot{u}^0 \rho_3 + \ddot{\psi}_x \rho_4 + \ddot{\psi}_{3x} \rho_6, & f_{3my} &= \ddot{v}^0 \rho_3 + \ddot{\psi}_y \rho_4 + \ddot{\psi}_{3y} \rho_6
\end{aligned} \tag{7.37}$$

sendo ainda necessário para estas últimas a definição dos **momentos de massa generalizados** (7.38)

$$\{\rho_0; \rho_1; \rho_2; \rho_3; \rho_4; \rho_6\} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \{1; z; z^2; z^3; z^4; z^6\} dz \tag{7.38}$$

Usando as relações deformações-deslocamentos lineares (6.6), página 78, pode-se escrever a expressão dos trabalhos virtuais somente em termos de deslocamentos generalizados e de suas derivadas em relação às coordenadas planas

$$\begin{aligned}
& - \int_x \int_y \left[ N_x \delta u^0_{,x} + N_y \delta v^0_{,y} + N_{xy} (\delta u^0_{,y} + \delta v^0_{,x}) + M_x \delta \psi_{x,x} + M_y \delta \psi_{y,y} \right. \\
& + M_{xy} (\delta \psi_{x,y} + \delta \psi_{y,x}) + M_{3x} \delta \psi_{3x,x} + M_{3y} \delta \psi_{3y,y} + M_{3xy} (\delta \psi_{3x,y} + \delta \psi_{3y,x}) + \\
& \left. Q_y (\delta \psi_y + \delta w^0_{,y}) + Q_x (\delta \psi_x + \delta w^0_{,x}) + Q_{2y} (3\delta \psi_{3y}) + Q_{2x} (3\delta \psi_{3x}) \right] dy dx \\
& + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \left( L_x^{(k)} \delta \varphi_{k-1,x} + L_y^{(k)} \delta \varphi_{k-1,y} + J_k \delta \varphi_{k-1} \right) dy dx \\
& + \int_x \int_y \left( \bar{q}_x \delta u^0 + \bar{q}_y \delta v^0 + \bar{q}_z \delta w^0 - \bar{m}_x \delta \psi_y + \bar{m}_y \delta \psi_x - \bar{m}_{3x} \delta_{3y} + \bar{m}_{3y} \delta_{3x} \right) dy dx \\
& - \int_x \int_y \left( f_x \delta u^0 + f_y \delta v^0 + f_z \delta w^0 + f_{mx} \delta \psi_x + f_{my} \delta \psi_y + f_{m3x} \delta \psi_{3x} + f_{m3y} \delta \psi_{3y} \right) dy dx \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \bar{q}_{ek} \delta \varphi_{k-1} dy dx + \int_{\Gamma_\sigma} \left( \bar{N}_n \delta u_{0n} + \bar{M}_n \delta \psi_n + \bar{M}_{3n} \delta \psi_{3n} \right. \\
& \left. + \bar{N}_{ns} \delta u_{0s} + \bar{M}_{ns} \delta \psi_s + \bar{M}_{3ns} \delta \psi_{3s} + \bar{Q}_n \delta w^0 \right) ds = 0
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Em seguida, objetivando a remoção das derivações das variações dos deslocamentos generalizados nas parcelas da energia potencial de deformação, aplica-se a versão do *Teorema da Divergência* para funções de duas variáveis, conforme MENDONÇA (2005)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial x} g d\Omega = \int_{\Gamma} g h n_x dS - \int_{\Gamma} h \frac{\partial g}{\partial x} d\Omega \quad (7.40)$$

(o que é analogamente válido para a derivada com relação à coordenada  $y$ ) onde  $n_x$  e  $n_y$  são as componentes do vetor  $n$  normal ao contorno  $\Gamma$ .

Portanto, a expressão do *Princípio dos Trabalhos Virtuais* em termos somente das variações dos deslocamentos generalizados é

$$\begin{aligned} & \int_x \int_y \left[ \left( N_{x,x} + N_{xy,y} + \bar{q}_x - f_x \right) \delta u^0 + \left( N_{xy,x} + N_{y,y} + \bar{q}_y - f_y \right) \delta v^0 + \right. \\ & \left( Q_{x,y} + Q_{y,x} + \bar{q}_z - f_w \right) \delta w^0 + \left( M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + \bar{m}_y - f_{mx} \right) \delta \psi_x + \\ & \left( M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y - \bar{m}_x - f_{my} \right) \delta \psi_y + \left( M_{3x,x} + M_{3xy,y} - 3Q_{2x} + \bar{m}_{3y} - f_{3mx} \right) \delta \psi_{3x} + \\ & \left. \left( M_{3xy,x} + M_{3y,y} - 3Q_{2y} - \bar{m}_{3x} - f_{3my} \right) \delta \psi_{3y} \right] dy dx \\ & - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \left( L_{x,x}^{(k)} + L_{y,y}^{(k)} - J_k + \bar{q}_{ek} \right) \delta \varphi_{k-1} dy dx \\ & + \int_{\Gamma} \left( N_y \delta v^0 + N_{xy} \delta u^0 + M_y \delta \psi_y + M_{xy} \delta \psi_x + M_{3y} \delta \psi_{3y} + M_{3xy} \delta \psi_{3x} + Q_x \delta w^0 \right) dx \\ & - \int_{\Gamma} \left( N_x \delta u^0 + N_{xy} \delta v^0 + M_x \delta \psi_x + M_{xy} \delta \psi_y + M_{3x} \delta \psi_{3x} + M_{3xy} \delta \psi_{3y} + Q_y \delta w^0 \right) dy \\ & - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_{\Gamma^{(k)}} L_y^{(k)} \delta \varphi_{k-1} dx + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_{\Gamma^{(k)}} L_x^{(k)} \delta \varphi_{k-1} dy \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} \left( \bar{N}_n \delta u_{0n} + \bar{M}_n \delta \psi_n + \bar{M}_{3n} \delta \psi_{3n} + \bar{N}_{ns} \delta u_{0s} + \bar{M}_{ns} \delta \psi_s + \bar{M}_{3ns} \delta \psi_{3s} + \bar{Q}_n \delta w^0 \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (7.41)$$

Para simplificar as parcelas de integração no contorno consideram-se, primeiramente, as relações

$$\begin{aligned} dx &= -ds \sin \alpha = -ds n_y \\ dy &= ds \cos \alpha = ds n_x \end{aligned} \quad (7.42)$$

e a relação das variações das componentes de deslocamentos  $\delta u^0$  e  $\delta v^0$  em termos de  $\delta u_{0n}$ ,

$\delta u_{0s}$  e do ângulo  $\alpha$  entre os eixos  $xy$  e  $ns$

$$\begin{aligned}\delta u^0 &= \delta u_{0n} \cos \alpha - \delta u_{0s} \sin \alpha = \delta u_{0n} n_x - \delta u_{0s} n_y \\ \delta v^0 &= \delta u_{0n} \sin \alpha + \delta u_{0s} \cos \alpha = \delta u_{0n} n_y + \delta u_{0s} n_x\end{aligned}\quad (7.43)$$

Adicionalmente, tem-se para as rotações de primeira ordem e de ordem superior

$$\begin{aligned}\delta \psi_x &= \delta \psi_n n_x - \delta \psi_s n_y \\ \delta \psi_y &= \delta \psi_n n_y + \delta \psi_s n_x \\ \delta \psi_{3x} &= \delta \psi_{3n} n_x - \delta \psi_{3s} n_y \\ \delta \psi_{3y} &= \delta \psi_{3n} n_y + \delta \psi_{3s} n_x\end{aligned}\quad (7.44)$$

Assim, a substituição das variações dos deslocamentos generalizados expressas em termos de componentes no contorno (7.43) e (7.44) nas integrais de contorno em (7.41) resulta em

$$\begin{aligned}& \int_x \int_y \left[ \left( N_{x,x} + N_{xy,y} + \bar{q}_x - f_x \right) \delta u^0 + \left( N_{xy,x} + N_{y,y} + \bar{q}_y - f_y \right) \delta v^0 \right. \\ & + \left( Q_{x,y} + Q_{y,x} + \bar{q}_z - f_w \right) \delta w^0 + \left( M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + \bar{m}_y - f_{mx} \right) \delta \psi_x \\ & + \left( M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y - \bar{m}_x - f_{my} \right) \delta \psi_y + \left( M_{3x,x} + M_{3xy,y} - 3Q_{2x} + \bar{m}_{3y} - f_{3mx} \right) \delta \psi_{3x} \\ & \left. + \left( M_{3xy,x} + M_{3y,y} - 3Q_{2y} - \bar{m}_{3x} - f_{3my} \right) \delta \psi_{3y} \right] dy dx \\ & - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \left( L_{x,x}^{(k)} + L_{y,y}^{(k)} - J_k + \bar{q}_{ek} \right) \delta \varphi_{k-1} dy dx \\ & - \int_{\Gamma} \left[ N_x \left( \delta u_{0n} n_x - \delta u_{0s} n_y \right) + N_{xy} \left( \delta u_{0n} n_y + \delta u_{0s} n_x \right) + M_x \left( \delta \psi_n n_x - \delta \psi_s n_y \right) + \right. \\ & M_{xy} \left( \delta \psi_n n_y + \delta \psi_s n_x \right) + M_{3x} \left( \delta \psi_{3n} n_x - \delta \psi_{3s} n_y \right) + M_{3xy} \left( \delta \psi_{3n} n_y + \delta \psi_{3s} n_x \right) + Q_y \delta w^0 \left. \right] dy \\ & + \int_{\Gamma} \left[ N_y \left( \delta u_{0n} n_y + \delta u_{0s} n_x \right) + N_{xy} \left( \delta u_{0n} n_x - \delta u_{0s} n_y \right) + M_y \left( \delta \psi_n n_y + \delta \psi_s n_x \right) + \right. \\ & M_{xy} \left( \delta \psi_n n_x - \delta \psi_s n_y \right) + M_{3y} \left( \delta \psi_{3n} n_y + \delta \psi_{3s} n_x \right) + M_{3xy} \left( \delta \psi_{3n} n_x - \delta \psi_{3s} n_y \right) + Q_x \delta w^0 \left. \right] dx \\ & + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_{\Gamma^{(k)}} L_y^{(k)} \delta \varphi_{k-1} dx + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_{\Gamma^{(k)}} L_x^{(k)} \delta \varphi_{k-1} dy \\ & + \int_{\Gamma^{\sigma}} \left( N_n \delta u_{0n} + M_n \delta \psi_n + M_{3n} \delta \psi_{3n} + N_{ns} \delta u_{0s} + M_{ns} \delta \psi_s + M_{3ns} \delta \psi_{3s} + Q_n \delta w^0 \right) ds = 0\end{aligned}\quad (7.45)$$

onde  $\Gamma$ ,  $\Gamma^{(k)}$  e  $\Gamma^\sigma$  definem, respectivamente, o contorno da superfície média do laminado, o contorno da face inferior da camada piezolétrica  $k$  e o contorno da superfície média que intercepta a borda com forças externas aplicadas.

Reescrevendo somente as duas primeiras integrais no contorno, fazendo-se a substituição de  $dx$  por  $n_x ds$  e  $dy$  por  $-n_y ds$ , tem-se

$$\begin{aligned}
I = & - \int_{\Gamma} \left( N_x \delta u_{0n} n_x - N_x \delta u_{0s} n_y + N_{xy} \delta u_{0n} n_y + N_{xy} \delta u_{0s} n_x + \right. \\
& M_x \delta \psi_n n_x - M_x \delta \psi_s n_y + M_{xy} \delta \psi_n n_y + M_{xy} \delta \psi_s n_x + \\
& M_{3x} \delta \psi_{3n} n_x - M_{3x} \delta \psi_{3s} n_y + M_{3xy} \delta \psi_{3n} n_y + M_{3xy} \delta \psi_{3s} n_x + Q_y \delta w^0 \left. \right) (n_x) ds + \\
& \int_{\Gamma} \left( N_y \delta u_{0n} n_y + N_y \delta u_{0s} n_x + N_{xy} \delta u_{0n} n_x - N_{xy} \delta u_{0s} n_y + \right. \\
& M_y \delta \psi_n n_y + M_y \delta \psi_s n_x + M_{xy} \delta \psi_n n_x - M_{xy} \delta \psi_s n_y + \\
& M_{3y} \delta \psi_{3n} n_y + M_{3y} \delta \psi_{3s} n_x + M_{3xy} \delta \psi_{3n} n_x - M_{3xy} \delta \psi_{3s} n_y - Q_x \delta w^0 \left. \right) (-n_y) ds
\end{aligned} \tag{7.46}$$

Fazendo o produto distributivo e reagrupando os termos em função dos deslocamentos generalizados tem-se, após rearranjo dos termos

$$\begin{aligned}
I = & \int_{\Gamma} \left[ \left( -N_x n_x^2 - N_y n_y^2 - N_{xy} (2n_x n_y) + \bar{N}_n \right) \delta u_{0n} + \right. \\
& \left( N_x n_x n_y - N_y n_x n_y - N_{xy} (n_x^2 - n_y^2) + \bar{N}_{ns} \right) \delta u_{0s} + \\
& \left( -M_x n_x^2 - M_y n_y^2 - M_{xy} (2n_x n_y) + \bar{M}_n \right) \delta \psi_n + \\
& \left( M_x n_x n_y - M_y n_x n_y - M_{xy} (n_x^2 - n_y^2) + \bar{M}_{ns} \right) \delta \psi_s + \\
& \left( -M_{3x} n_x^2 - M_{3y} n_y^2 - M_{3xy} (2n_x n_y) + \bar{M}_{3n} \right) \delta \psi_{3n} + \\
& \left( M_{3x} n_x n_y - M_{3y} n_x n_y - M_{3xy} (n_x^2 - n_y^2) + \bar{M}_{3ns} \right) \delta \psi_{3s} + \\
& \left. \left( Q_y + Q_x + Q_n \right) \delta w^0 \right] ds - \\
& \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_{\Gamma^{(k)}} L_y^{(k)} \delta \varphi_{k-1} dx + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_{\Gamma^{(k)}} L_x^{(k)} \delta \varphi_{k-1} dy
\end{aligned} \tag{7.47}$$

Portanto, a expressão do *Princípio do Trabalhos Virtuais* (7.41) para um segmento genérico de contorno  $ds$  é

$$\begin{aligned}
& \int_x \int_y \left[ \left( N_{x,x} + N_{xy,y} + \bar{q}_x - f_x \right) \delta u^0 + \left( N_{xy,x} + N_{y,y} + \bar{q}_y - f_y \right) \delta v^0 \right. \\
& + \left( Q_{x,y} + Q_{y,x} + \bar{q}_z - f_w \right) \delta w^0 + \left( M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + \bar{m}_y - f_{mx} \right) \delta \psi_x \\
& + \left( M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y - \bar{m}_x - f_{my} \right) \delta \psi_y + \left( M_{3x,x} + M_{3xy,y} - 3Q_{2x} + \bar{m}_{3y} - f_{3mx} \right) \delta \psi_{3x} \\
& \left. + \left( M_{3xy,x} + M_{3y,y} - 3Q_{2y} - \bar{m}_{3x} - f_{3my} \right) \delta \psi_{3y} \right] dy dx \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_x \int_y \left( L_{x,x}^{(k)} + L_{y,y}^{(k)} - J_k + \bar{q}_{ek} \right) \delta \varphi_{k-1} dy dx \\
& - \int_{\Gamma} \left[ \left( N_n - \bar{N}_n \right) \delta u_{0n} + \left( N_{ns} - \bar{N}_{ns} \right) \delta u_{0s} + \left( Q_n - \bar{Q}_n \right) \delta w^0 + \right. \\
& \left. \left( M_n - \bar{M}_n \right) \delta \psi_n + \left( M_{ns} - \bar{M}_{ns} \right) \delta \psi_{ns} + \left( M_{3n} - \bar{M}_{3n} \right) \delta \psi_{3n} \right. \\
& \left. + \left( M_{3ns} - \bar{M}_{3ns} \right) \delta \psi_{3ns} \right] ds + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \int_{\Gamma^{(k)}} L_n^{(k)} \delta \varphi_{k-1} ds = 0
\end{aligned} \tag{7.48}$$

Nesta expressão foram identificados os esforços no contorno

$$\left\{ \begin{array}{c} N_n \\ N_{ns} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{array} \right\} \tag{7.49}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} M_n \\ M_{ns} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\} \tag{7.50}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{3n} \\ M_{3ns} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} M_{3x} \\ M_{3y} \\ M_{3xy} \end{array} \right\} \tag{7.51}$$

$$\begin{aligned}
Q_n &= Q_x n_x + Q_y n_y \\
L_n^{(k)} &= L_x^{(k)} n_x + L_y^{(k)} n_y
\end{aligned} \tag{7.52}$$

Finalmente, em virtude da arbitrariedade e independência dos campos  $\delta u^0$ ,  $\delta v^0$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \psi_x$ ,  $\delta \psi_y$ ,  $\delta \psi_{3x}$  e  $\delta \psi_{3y}$  no domínio e no contorno, aplica-se o *Lema Fundamental do Cálculo Variacional*, que permite identificar, a partir das integrais no domínio da (7.48), o seguinte



conjunto de **equações diferenciais do movimento** em termos de esforços (mecânicos e elétricos), forças de campo e de inércia generalizados

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \bar{q}_x &= f_x \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \bar{q}_y &= f_y \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \bar{q}_z &= f_z \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + \bar{m}_y &= f_{mx} \\
\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - \bar{m}_x &= f_{my} \\
\frac{\partial M_{3x}}{\partial x} + \frac{\partial M_{3xy}}{\partial y} - 3Q_{2x} + \bar{m}_{3y} &= f_{3mx} \\
\frac{\partial M_{3xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{3y}}{\partial y} - 3Q_{2y} - \bar{m}_{3x} &= f_{3my} \\
\frac{\partial L_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial L_y^{(k)}}{\partial y} - J_k + \bar{q}_{ek} &= 0
\end{aligned} \tag{7.53}$$

e a partir das integrais no contorno, o seguinte conjunto de **condições de contorno variacionalmente consistentes**

$$\begin{aligned}
N_n = \bar{N}_n \quad N_{ns} = \bar{N}_{ns} \quad Q_n = \bar{Q}_n \\
M_n = \bar{M}_n \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns} \quad M_{3n} = \bar{M}_{3n} \quad M_{3ns} = \bar{M}_{3ns}
\end{aligned} \tag{7.54}$$

em  $\Gamma_\sigma$  da superfície média e

$$L_n^{(k)} = 0 \tag{7.55}$$

em  $\Gamma_q^{(k)}$  da face inferior de cada camada piezelétrica  $k$ .

Se for considerada a existência de carga elétrica livre distribuída na superfície lateral  $\Gamma^{(k)}$  que contorna a camada  $k$ , a condição tornar-se-ia  $L_n^{(k)} = \bar{L}_m^{(k)}$ .

## 7.3 Equações constitutivas do laminado piezelétrico

As equações constitutivas do laminado relacionam os esforços internos generalizados às deformações generalizadas. Cada lâmina é admitida como sendo constituída de um material transversalmente isotrópico e as relações constitutivas expressas nas equações (6.52) e (6.58) são válidas para a  $k$ -ésima lâmina nas coordenadas do problema.

Apesar das deformações coplanares serem contínuas através da espessura, as correspondentes tensões não são, em virtude da mudança dos coeficientes materiais de uma lâmina para outra e portanto, a integração na espessura é efetuada lâmina à lâmina.

A relação constitutivas (6.52) pode ser desmembrada como a seguir, em tensões de membrana e flexão, tensões de cisalhamento transversal e deslocamentos elétricos, para uma lâmina  $k$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{36} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} -E_x \\ -E_y \\ -E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (7.56)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} e_{14} & e_{24} & 0 \\ e_{15} & e_{25} & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} -E_x \\ -E_y \\ -E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (7.57)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & e_{25} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & e_{36} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} - \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & 0 \\ \chi_{12} & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -E_x \\ -E_y \\ -E_z \end{Bmatrix} \quad (7.58)$$

Utilizando as definições dos esforços generalizados, equações (7.22) - (7.28), as relações deformações - deslocamentos, equações (6.6), as relações campos elétricos - potenciais, (7.19) e (7.20), e as relações constitutivas, (7.56) - (7.58), pode-se definir as relações constitutivas do laminado, que envolvem os esforços generalizados e as deformações generalizadas

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x + z^3\kappa_{3x} \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y + z^3\kappa_{3y} \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} + z^3\kappa_{3xy} \end{Bmatrix} \right) \\
&\quad + \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{Bmatrix}^{(k)} \left( -\frac{\varphi_{k-1}}{h_k} \right) dz \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} \\ \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (7.59) \\
&\quad + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{16} \\ L_{12} & L_{22} & L_{26} \\ L_{16} & L_{26} & L_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial x} \end{Bmatrix} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{Bmatrix}^{(k)} \varphi_{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x + z^3\kappa_{3x} \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y + z^3\kappa_{3y} \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} + z^3\kappa_{3xy} \end{Bmatrix} \right) \\
&\quad + \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{Bmatrix}^{(k)} \left( -\frac{\varphi_{k-1}}{h_k} \right) z dz \\
&= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} \\ \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (7.60) \\
&\quad + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial x} \end{Bmatrix} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{Bmatrix}^{(k)} \varphi_{k-1} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} M_{3x} \\ M_{3y} \\ M_{3xy} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \left[ \begin{array}{ccc} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{array} \right]^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x + z^3\kappa_{3x} \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y + z^3\kappa_{3y} \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} + z^3\kappa_{3xy} \end{array} \right\} \right. \\
& \left. + \left\{ \begin{array}{l} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{array} \right\}^{(k)} \left( -\frac{\varphi_{k-1}}{h_k} \right) \right) z^3 dz \\
& = \left[ \begin{array}{ccc} L_{11} & L_{12} & L_{16} \\ L_{12} & L_{22} & L_{26} \\ L_{16} & L_{26} & L_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} \\ \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{ccc} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{array} \right\} \\
& + \left[ \begin{array}{ccc} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial x} \end{array} \right\} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left\{ \begin{array}{l} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{array} \right\}^{(k)} \varphi_{k-1} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4)
\end{aligned} \tag{7.61}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} Q_y \\ Q_x \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \left[ \begin{array}{cc} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{array} \right]^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^0 + z^2\kappa_{2yz} \\ \gamma_{xz}^0 + z^2\kappa_{2xz} \end{array} \right\} \right. \\
& \left. + \left[ \begin{array}{cc} e_{14} & e_{24} \\ e_{15} & e_{25} \end{array} \right]^{(k)} \left( \frac{z_k - z}{k_k} \right) \left\{ \begin{array}{l} E_{px} \\ E_{py} \end{array} \right\} \right) dz \\
& = \left[ \begin{array}{cc} Ac_{44} & Ac_{45} \\ Ac_{45} & Ac_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \psi_y + \frac{\partial w^0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{cc} Dc_{44} & Dc_{45} \\ Dc_{45} & Dc_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} 3\psi_{3y} \\ 3\psi_{3x} \end{array} \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left[ \begin{array}{cc} e_{14} & e_{24} \\ e_{15} & e_{25} \end{array} \right]^{(k)} \frac{h_k}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \end{array} \right\}^{(k)}
\end{aligned} \tag{7.62}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} Q_{2y} \\ Q_{2x} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 + z^2 \kappa_{2yz} \\ \gamma_{xz}^0 + z^2 \kappa_{2xz} \end{Bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} e_{14} & e_{24} \\ e_{15} & e_{25} \end{bmatrix}^{(k)} \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) \begin{Bmatrix} E_{px} \\ E_{py} \end{Bmatrix} \right) z^2 dz \\
&= \begin{bmatrix} Dc_{44} & Dc_{45} \\ Dc_{45} & Dc_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w^0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Fc_{44} & Fc_{45} \\ Fc_{45} & Fc_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3\psi_{3y} \\ 3\psi_{3x} \end{Bmatrix} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \begin{bmatrix} e_{14} & e_{24} \\ e_{15} & e_{25} \end{bmatrix}^{(k)} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \end{Bmatrix}^{(k)}
\end{aligned} \tag{7.63}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \end{Bmatrix} &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \begin{bmatrix} e_{14} & e_{24} \\ e_{15} & e_{25} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 + z^2 \kappa_{2yz} \\ \gamma_{xz}^0 + z^2 \kappa_{2xz} \end{Bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix}^{(k)} \left( \frac{z_k - z}{h_k} \right) \begin{Bmatrix} E_{px} \\ E_{py} \end{Bmatrix} \right) \left( \frac{z - z_k}{h_k} \right) dz \\
&= -\frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} e_{14} & e_{15} \\ e_{24} & e_{25} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w^0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w^0}{\partial x} \end{Bmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \begin{bmatrix} e_{14} & e_{15} \\ e_{24} & e_{25} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} 3\psi_{3y} \\ 3\psi_{3x} \end{Bmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{h_k^2} \left( \frac{z_k^3}{3} + z_k z_{k-1}^2 - z_k^2 z_{k-1} - \frac{z_{k-1}^3}{3} \right) \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.64}$$

$$\begin{aligned}
J_k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{1}{h_k} \left( \left\{ \begin{array}{c} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{array} \right\}^{(k)T} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x^0 + z\kappa_x + z^3\kappa_{3x} \\ \varepsilon_y^0 + z\kappa_y + z^3\kappa_{3y} \\ \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} + z^3\kappa_{3xy} \end{array} \right\} + \frac{\chi_{33}^{(k)}}{h_k} \varphi_{k-1} \right) dz \\
&= \left\{ \begin{array}{c} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{array} \right\}^{(k)T} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} \\ \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \end{array} \right\} + \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \left\{ \begin{array}{c} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{array} \right\}^{(k)T} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{array} \right\} \\
&+ \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \left\{ \begin{array}{c} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{36} \end{array} \right\}^{(k)T} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial x} \end{array} \right\} + \frac{\chi_{33}^{(k)}}{h_k} \varphi_{k-1}
\end{aligned} \tag{7.65}$$

## 7.4 Equações do movimento em termos de deslocamentos generalizados

As equações do movimento do problema em análise são obtidas em termos dos deslocamentos generalizados substituindo as relações constitutivas em termos de esforços generalizados (7.59) - (7.65), no conjunto de equações diferenciais do movimento (7.53) e levando-se em conta as relações deformações-deslocamentos generalizados (6.7) e (6.9)

$$\begin{aligned}
&A_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} \\
&+ B_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
&+ L_{11} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x^2} + 2L_{16} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x \partial y} + L_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial y^2} + L_{16} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x^2} + (L_{12} + L_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x \partial y} + L_{26} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial y^2} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} + \bar{q}_x = f_x
\end{aligned} \tag{7.66}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} \\
& + B_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& + L_{16} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x^2} + (L_{12} + L_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x \partial y} + L_{26} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial y^2} + L_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x^2} + 2L_{26} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x \partial y} + L_{22} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial y^2} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} + \bar{q}_y = f_y
\end{aligned} \tag{7.67}$$

$$\begin{aligned}
& Ac_{55} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + Ac_{45} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + Ac_{45} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + Ac_{44} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + Ac_{55} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + 2Ac_{45} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} + Ac_{44} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\
& + 3Dc_{55} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial x} + 3Dc_{45} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial y} + 3Dc_{44} \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial y} + 3Dc_{45} \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial x} \\
& + \sum_{k=0}^{n_{piez}} e_{15}^{(k)} \frac{h_k}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial x^2} + \sum_{k=0}^{n_{piez}} (e_{14}^{(k)} + e_{25}^{(k)}) \frac{h_k}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial x \partial y} + \sum_{k=0}^{n_{piez}} e_{24}^{(k)} \frac{h_k}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial y^2} + \bar{q}_z = f_z
\end{aligned} \tag{7.68}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} \\
& + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& + F_{11} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x^2} + 2F_{16} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x \partial y} + F_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial y^2} + F_{16} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x^2} + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x \partial y} + F_{26} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial y^2} \\
& - Ac_{45} \psi_y - Ac_{45} \frac{\partial w^0}{\partial y} - Ac_{55} \psi_x - Ac_{55} \frac{\partial w^0}{\partial x} - 3Dc_{45} \psi_{3y} - 3Dc_{55} \psi_{3x} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{15}^{(k)} \frac{h_k}{2} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{25}^{(k)} \frac{h_k}{2} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} + \bar{m}_y = f_{m_x}
\end{aligned} \tag{7.69}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} \\
& + D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& + F_{16} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x^2} + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x \partial y} + F_{26} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial y^2} + F_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x^2} + 2F_{26} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x \partial y} + F_{22} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial y^2} \\
& - Ac_{44} \psi_y - Ac_{44} \frac{\partial w^0}{\partial y} - Ac_{45} \psi_x - Ac_{45} \frac{\partial w^0}{\partial x} - 3Dc_{44} \psi_{3y} - 3Dc_{45} \psi_{3x} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{14}^{(k)} \frac{h_k}{2} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{24}^{(k)} \frac{h_k}{2} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} - \bar{m}_x = f_{my}
\end{aligned} \tag{7.70}$$

$$\begin{aligned}
& L_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + 2L_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + L_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + L_{16} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + (L_{12} + L_{66}) \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + L_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} \\
& + F_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2F_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + F_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + F_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + F_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& + H_{11} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x^2} + 2H_{16} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x \partial y} + H_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial y^2} + H_{16} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x^2} + (H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x \partial y} + H_{26} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial y^2} \\
& - 3Dc_{45} \psi_y - 3Dc_{45} \frac{\partial w^0}{\partial y} - 3Dc_{55} \psi_x - 3Dc_{55} \frac{\partial w^0}{\partial x} - 9Fc_{45} \psi_{3y} - 9Fc_{55} \psi_{3x} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \left( 3e_{15}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + 3e_{25}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) + \bar{m}_{3y} = f_{3mx}
\end{aligned} \tag{7.71}$$



$$\begin{aligned}
& L_{16} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + (L_{12} + L_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + L_{26} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + L_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + 2L_{26} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + L_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} \\
& + F_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + F_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + F_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2F_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + F_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& + H_{16} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x^2} + (H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x \partial y} + H_{26} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial y^2} + H_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x^2} + 2H_{26} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x \partial y} + H_{22} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial y^2} \\
& - 3Dc_{44} \psi_y - 3Dc_{44} \frac{\partial w^0}{\partial y} - 3Dc_{45} \psi_x - 3Dc_{45} \frac{\partial w^0}{\partial x} - 9Fc_{44} \psi_{3y} - 9Fc_{45} \psi_{3x} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \left( 3e_{14}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + 3e_{24}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) - \bar{m}_{3x} = f_{3my}
\end{aligned} \tag{7.72}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{h_k}{2} \left( e_{14}^{(k)} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + e_{14}^{(k)} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} + e_{15}^{(k)} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + e_{15}^{(k)} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \right. \\
& \quad \left. + e_{24}^{(k)} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + e_{24}^{(k)} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + e_{25}^{(k)} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + e_{25}^{(k)} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \\
& - \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \left( 3e_{14}^{(k)} \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial x} + 3e_{15}^{(k)} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial x} + 3e_{24}^{(k)} \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial y} + 3e_{25}^{(k)} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial y} \right) \\
& + \frac{1}{h_k^2} \left( \frac{z_k^3}{3} + z_k z_{k-1}^2 - z_k^2 z_{k-1} - \frac{z_{k-1}^3}{3} \right) \left( \chi_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial x^2} + 2\chi_{12}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial x \partial y} + \chi_{22}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial y^2} \right) \\
& \quad - \left( e_{31}^{(k)} \frac{\partial u^0}{\partial x} + e_{32}^{(k)} \frac{\partial v^0}{\partial y} + e_{36}^{(k)} \frac{\partial u^0}{\partial y} + e_{36}^{(k)} \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) \\
& \quad - \left( \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \left( e_{31}^{(k)} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + e_{32}^{(k)} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + e_{36}^{(k)} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + e_{36}^{(k)} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\
& - \left( \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \right) \left( e_{31}^{(k)} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial x} + e_{32}^{(k)} \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial y} + e_{36}^{(k)} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial y} + e_{36}^{(k)} \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial x} \right) - \frac{\chi_{33}^{(k)}}{h_k} \varphi_{k-1} + \bar{q}_{ek} = 0
\end{aligned} \tag{7.73}$$

## 7.5 Solução de Navier

Considera-se o problema de uma placa laminada retangular, de lados  $a$  e  $b$ , como na Figura 7, simplesmente apoiada nos quatro bordos, submetida a um carregamento transversal normal, aplicado sobre a superfície superior.

No Método de Navier os deslocamentos generalizados desconhecidos são admitidos como expansões na forma de séries trigonométricas nas direções coplanares, que satisfazem

à todas condições de contorno e às equações diferenciais do movimento do problema.

Nesta seção será demonstrado que é possível determinar uma solução deste tipo para alguns casos de laminado com camadas piezelétricas, consistente com os modelos cinemáticos adotados, isto é, campo de deslocamentos de ordem superior ao longo da espessura e potencial elétrico linear seccionalmente contínuo.

As condições de contorno que se buscam satisfazer são mostradas na Figura 7.

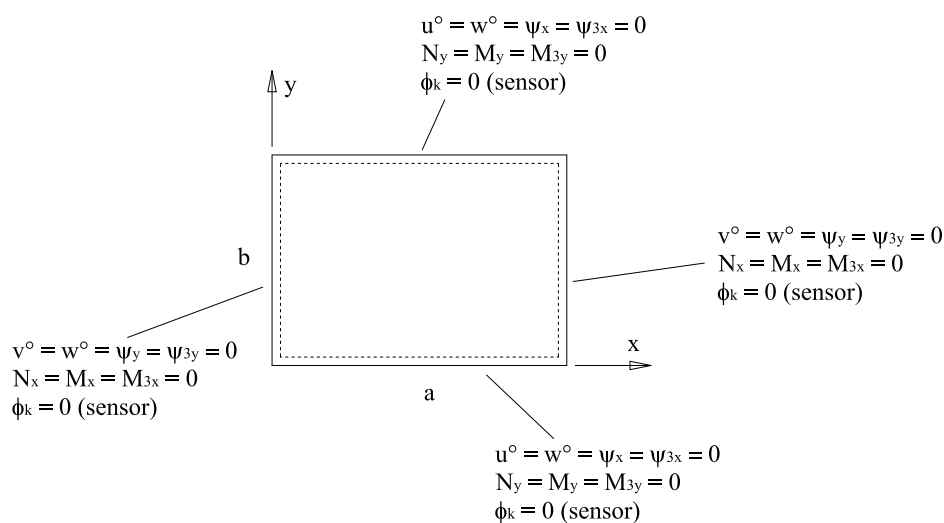


Figura 7: Placa simplesmente apoiada nos quatro bordos e condições de contorno.

Mostra-se que sob certas condições, tanto estas condições de contorno quanto as equações do movimento, (7.66) - (7.73), são satisfeitas pelas séries trigonométricas duplas

$$\begin{aligned}
u^0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
v^0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
w^0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
\psi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
\psi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
\psi_{3x}(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
\psi_{3y}(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Y}_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\
\varphi_{k-1}(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}^{(k-1)} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.74}$$

onde  $m$  e  $n$  são os harmônicos,  $a$  e  $b$  são as dimensões da placa e  $\omega$  é uma frequência.

Primeiro, é verificado se as condições de contorno de forças generalizadas são satisfeitas inserindo as expansões (7.74) nas definições dos esforços generalizados, equações (7.59) - (7.65)

$$\begin{aligned}
N_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\alpha_m A_{11} U_{mn} - \beta_n A_{12} V_{mn} - \alpha_m B_{11} X_{mn} \right. \\
&\quad \left. - \beta_n B_{12} Y_{mn} - \alpha_m L_{11} \mathbb{X}_{mn} - \beta_n L_{12} \mathbb{Y}_{mn} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{16} (\alpha_m V_{mn} + \beta_n U_{mn}) + B_{16} (\alpha_m Y_{mn} + \beta_n X_{mn}) \right. \\
&\quad \left. + L_{16} (\alpha_m \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \mathbb{X}_{mn}) \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.75}$$

$$\begin{aligned}
N_y = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\alpha_m A_{12} U_{mn} + \beta_n A_{22} V_{mn} - \alpha_m B_{12} X_{mn} \right. \\
& - \beta_n B_{22} Y_{mn} - \alpha_m L_{12} \mathbb{X}_{mn} - \beta_n L_{22} \mathbb{Y}_{mn} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \left. \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{26} (\alpha_m V_{mn} + \beta_n U_{mn}) + B_{26} (\alpha_m Y_{mn} + \beta_n X_{mn}) \right. \\
& \left. + L_{26} (\alpha_m \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \mathbb{X}_{mn}) \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.76}$$

$$\begin{aligned}
M_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\alpha_m B_{11} U_{mn} - \beta_n B_{12} V_{mn} - \alpha_m D_{11} X_{mn} - \beta_n D_{12} Y_{mn} \right. \\
& - \alpha_m F_{11} \mathbb{X}_{mn} - \beta_n F_{12} \mathbb{Y}_{mn} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \left. \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_{16} (\alpha_m V_{mn} + \beta_n U_{mn}) + D_{16} (\alpha_m Y_{mn} + \beta_n X_{mn}) \right. \\
& \left. + F_{16} (\alpha_m \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \mathbb{X}_{mn}) \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.77}$$

$$\begin{aligned}
M_y = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\alpha_m B_{12} U_{mn} - \beta_n B_{22} V_{mn} - \alpha_m D_{12} X_{mn} - \beta_n D_{22} Y_{mn} \right. \\
& - \alpha_m F_{12} \mathbb{X}_{mn} - \beta_n F_{22} \mathbb{Y}_{mn} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \left. \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_{26} (\alpha_m V_{mn} + \beta_n U_{mn}) + D_{26} (\alpha_m Y_{mn} + \beta_n X_{mn}) \right. \\
& \left. + F_{26} (\alpha_m \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \mathbb{X}_{mn}) \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.78}$$

$$\begin{aligned}
M_{3x} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\alpha_m L_{11} U_{mn} - \beta_n L_{12} V_{mn} - \alpha_m F_{11} X_{mn} - \beta_n F_{12} Y_{mn} \right. \\
& - \alpha_m H_{11} \mathbb{X}_{mn} - \beta_n H_{12} \mathbb{Y}_{mn} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \left. \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ L_{16} (\alpha_m V_{mn} + \beta_n U_{mn}) + F_{16} (\alpha_m Y_{mn} + \beta_n X_{mn}) \right. \\
& \left. + H_{16} (\alpha_m \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \mathbb{X}_{mn}) \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.79}$$

$$\begin{aligned}
M_{3y} = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\alpha_m L_{12} U_{mn} + \beta_n L_{22} V_{mn} - \alpha_m F_{12} X_{mn} - \beta_n F_{22} Y_{mn} \right. \\
& - \alpha_m H_{12} \mathbb{X}_{mn} - \beta_n H_{22} \mathbb{Y}_{mn} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \left. \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ L_{26} (\alpha_m V_{mn} + \beta_n U_{mn}) + F_{26} (\alpha_m Y_{mn} + \beta_n X_{mn}) \right. \\
& \left. + H_{26} (\alpha_m \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \mathbb{X}_{mn}) \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.80}$$

com

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b} \tag{7.81}$$

Da análise destas expressões percebe-se que as condições de contorno nas forças generalizadas serão então satisfeitas se ocorrer nulidade dos seguintes coeficientes de rigidez do laminado

$$A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = L_{16} = L_{26} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = 0 \tag{7.82}$$

Isto restringe a solução a **laminados ortotrópicos**, por exemplo, laminados cruzados, simétricos ou anti-simétricos.

Desta forma, as equações diferenciais em termos dos deslocamentos generalizados (7.66) - (7.72), podem ser reescritas de forma simplificada como segue

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \\
& + L_{11} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x^2} + L_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial y^2} + (L_{12} + L_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x \partial y} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{31}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + e_{36}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) + \bar{q}_x = f_x
\end{aligned} \tag{7.83}$$

$$\begin{aligned}
& (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& + (L_{12} + L_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x \partial y} + L_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x^2} + L_{22} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial y^2} - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{36}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + e_{32}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) + \bar{q}_y = f_y
\end{aligned} \tag{7.84}$$

$$\begin{aligned}
& Ac_{55} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + Ac_{45} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + Ac_{45} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + Ac_{44} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + Ac_{55} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + 2Ac_{45} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \\
& + Ac_{44} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 3Dc_{55} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial x} + 3Dc_{45} \frac{\partial \psi_{3x}}{\partial y} + 3Dc_{44} \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial y} + 3Dc_{45} \frac{\partial \psi_{3y}}{\partial x} \\
& + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{h_k}{2} \left( e_{15}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial x^2} + (e_{14}^{(k)} + e_{25}^{(k)}) \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial x \partial y} + e_{24}^{(k)} \frac{\partial^2 \varphi_{k-1}}{\partial y^2} \right) + \bar{q}_z = f_z
\end{aligned} \tag{7.85}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \\
& + F_{11} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x^2} + F_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial y^2} + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x \partial y} \\
& - Ac_{45} \psi_y - Ac_{45} \frac{\partial w^0}{\partial y} - Ac_{55} \psi_x - Ac_{55} \frac{\partial w^0}{\partial x} - 3Dc_{45} \psi_{3y} - 3Dc_{55} \psi_{3x} \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \left( e_{31}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + e_{36}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) \\
& - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{h_k}{2} \left( e_{15}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + e_{25}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) + \bar{m}_y = f_{mx}
\end{aligned} \tag{7.86}$$

$$\begin{aligned}
& (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& \quad + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x \partial y} + F_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x^2} + F_{22} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial y^2} \\
& \quad - Ac_{44} \psi_y - Ac_{44} \frac{\partial w^0}{\partial y} - Ac_{45} \psi_x - Ac_{45} \frac{\partial w^0}{\partial x} - 3Dc_{44} \psi_{3y} - 3Dc_{45} \psi_{3x} \\
& \quad - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \left( e_{36}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + e_{32}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) \\
& \quad - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{h_k}{2} \left( e_{14}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + e_{24}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) - \bar{m}_x = f_{my}
\end{aligned} \tag{7.87}$$

$$\begin{aligned}
& L_{11} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2} + L_{66} \frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2} + (L_{12} + L_{66}) \frac{\partial^2 v^0}{\partial x \partial y} + F_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + F_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \\
& \quad + H_{11} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x^2} + H_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial y^2} + (H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x \partial y} \\
& \quad - 3Dc_{45} \psi_y - 3Dc_{45} \frac{\partial w^0}{\partial y} - 3Dc_{55} \psi_x - 3Dc_{55} \frac{\partial w^0}{\partial x} - 9Fc_{45} \psi_{3y} - 9Fc_{55} \psi_{3x} \\
& \quad - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \left( e_{31}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + e_{36}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) \\
& \quad - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \left( 3e_{15}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + 3e_{25}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) + \bar{m}_{3y} = f_{3mx}
\end{aligned} \tag{7.88}$$

$$\begin{aligned}
& (L_{12} + L_{66}) \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + L_{66} \frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} + L_{22} \frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2} + (F_{12} + F_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + F_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + F_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
& \quad + (H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^2 \psi_{3x}}{\partial x \partial y} + H_{66} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial x^2} + H_{22} \frac{\partial^2 \psi_{3y}}{\partial y^2} \\
& \quad - 3Dc_{44} \psi_y - 3Dc_{44} \frac{\partial w^0}{\partial y} - 3Dc_{45} \psi_x - 3Dc_{45} \frac{\partial w^0}{\partial x} - 9Fc_{44} \psi_{3y} - 9Fc_{45} \psi_{3x} \\
& \quad - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \left( e_{36}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + e_{32}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) \\
& \quad - \sum_{k=1}^{n_{piez}} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \left( 3e_{14}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x} + 3e_{24}^{(k)} \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial y} \right) - \bar{m}_{3x} = f_{3my}
\end{aligned} \tag{7.89}$$

Então, substituindo as expansões propostas para os deslocamentos generalizados (7.74)

nas equações diferenciais simplificadas, (7.83) - (7.89), e na (7.73) obtém-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A_{11} \alpha_m^2 + A_{66} \beta_n^2 \right) U_{mn} + \left( A_{12} + A_{66} \right) \alpha_m \beta_n V_{mn} \right. \\
& + \left( B_{11} \alpha_m^2 + B_{66} \beta_n^2 \right) X_{mn} + \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n Y_{mn} + \left( L_{11} \alpha_m^2 + L_{66} \beta_n^2 \right) \mathbb{X}_{mn} \\
& \left. + \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{Y}_{mn} + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_0 U_{mn} + \rho_1 X_{mn} + \rho_3 \mathbb{X}_{mn} \right) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.90}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A_{12} + A_{66} \right) \alpha_m \beta_n U_{mn} + \left( A_{66} \alpha_m^2 + A_{22} \beta_n^2 \right) V_{mn} \right. \\
& + \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n X_{mn} + \left( B_{66} \alpha_m^2 + B_{22} \beta_n^2 \right) Y_{mn} + \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{X}_{mn} \\
& \left. + \left( L_{66} \alpha_m^2 + L_{22} \beta_n^2 \right) \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_0 V_{mn} + \rho_1 Y_{mn} + \rho_3 \mathbb{Y}_{mn} \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.91}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A c_{55} \alpha_m X_{mn} + A c_{44} \beta_n Y_{mn} + \left( A c_{55} \alpha_m^2 + A c_{44} \beta_n^2 \right) W_{mn} + 3 D c_{55} \alpha_m \mathbb{X}_{mn} \right. \\
& \left. + 3 D c_{44} \beta_n \mathbb{Y}_{mn} + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( \alpha_m^2 e_{15}^{(k)} + \beta_n^2 e_{24}^{(k)} \right) \frac{h_k}{2} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A c_{45} \beta_n X_{mn} + A c_{45} \alpha_m Y_{mn} + 2 A c_{45} \alpha_m \beta_n W_{mn} + 3 D c_{45} \beta_n \mathbb{X}_{mn} \right. \\
& \left. + 3 D c_{45} \alpha_m \mathbb{Y}_{mn} + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \alpha_m \beta_n \left( e_{14}^{(k)} + e_{25}^{(k)} \right) \frac{h_k}{2} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} - q_z \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0 W_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.92}$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( B_{11} \alpha_m^2 + B_{66} \beta_n^2 \right) U_{mn} + \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n V_{mn} \right. \\
& + \left( D_{11} \alpha_m^2 + D_{66} \beta_n^2 \right) X_{mn} + \left( D_{12} + D_{66} \right) \alpha_m \beta_n Y_{mn} + \left( F_{11} \alpha_m^2 + F_{66} \beta_n^2 \right) \mathbb{X}_{mn} \\
& \quad + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{Y}_{mn} + Ac_{55} \left( X_{mn} + \alpha_m W_{mn} \right) + 3Dc_{55} \mathbb{X}_{mn} \\
& + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{31}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) + e_{15}^{(k)} \frac{h_k}{2} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \left. \right] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ Ac_{45} \left( Y_{mn} + \beta_n W_{mn} \right) + 3Dc_{45} \mathbb{Y}_{mn} \right. \\
& + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{36}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) + e_{25}^{(k)} \frac{h_k}{2} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \left. \right] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_1 U_{mn} + \rho_2 X_{mn} + \rho_4 \mathbb{X}_{mn} \right) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.93}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n U_{mn} + \left( B_{66} \alpha_m^2 + B_{22} \beta_n^2 \right) V_{mn} \right. \\
& + \left( D_{12} + D_{66} \right) \alpha_m \beta_n X_{mn} + \left( D_{66} \alpha_m^2 + D_{22} \beta_n^2 \right) Y_{mn} + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{X}_{mn} \\
& \quad + \left( F_{66} \alpha_m^2 + F_{22} \beta_n^2 \right) \mathbb{Y}_{mn} + Ac_{44} \left( Y_{mn} + \beta_n W_{mn} \right) + 3Dc_{44} \mathbb{Y}_{mn} \\
& + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{32}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) + e_{24}^{(k)} \frac{h_k}{2} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \left. \right] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ Ac_{45} \left( X_{mn} + \alpha_m W_{mn} \right) + Dc_{45} \mathbb{X}_{mn} \right. \\
& + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{36}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) + e_{14}^{(k)} \frac{h_k}{2} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \left. \right] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_1 V_{mn} + \rho_2 Y_{mn} + \rho_4 \mathbb{Y}_{mn} \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.94}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( L_{11} \alpha_m^2 + L_{66} \beta_n^2 \right) U_{mn} + \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n V_{mn} + \left( F_{11} \alpha_m^2 + F_{66} \beta_n^2 \right) X_{mn} \right. \\
& \quad + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n Y_{mn} + \left( H_{11} \alpha_m^2 + H_{66} \beta_n^2 \right) \mathbb{X}_{mn} + \left( H_{12} + H_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \\
& \quad + 3Dc_{55} \left( X_{mn} + \alpha_m W_{mn} \right) + 9Fc_{55} \mathbb{X}_{mn} + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \Phi_{mn}^{(k-1)} \\
& \quad \left. + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} 3e_{15}^{(k)} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 3Dc_{45} \left( Y_{mn} + \beta_n W_{mn} \right) + 9Fc_{45} \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right. \\
& \quad \left. + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} 3e_{25}^{(k)} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_3 U_{mn} + \rho_4 X_{mn} + \rho_6 \mathbb{X}_{mn} \right) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.95}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n U_{mn} + \left( L_{66} \alpha_m^2 + L_{22} \beta_n^2 \right) V_{mn} + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n X_{mn} \right. \\
& \quad + \left( F_{66} \alpha_m^2 + F_{22} \beta_n^2 \right) Y_{mn} + \left( H_{12} + H_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{X}_{mn} + \left( H_{66} \alpha_m^2 + H_{22} \beta_n^2 \right) \mathbb{Y}_{mn} \\
& \quad + 3Dc_{44} \left( Y_{mn} + \beta_n W_{mn} \right) + 9Fc_{44} \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \Phi_{mn}^{(k-1)} \\
& \quad \left. + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} 3e_{24}^{(k)} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 3Dc_{45} \left( X_{mn} + \alpha_m W_{mn} \right) + 9Fc_{45} \mathbb{X}_{mn} + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{36}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right. \\
& \quad \left. + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} 3e_{14}^{(k)} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_3 V_{mn} + \rho_4 Y_{mn} + \rho_6 \mathbb{Y}_{mn} \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.96}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_k}{2} \left[ e_{14}^{(k)} \alpha_m Y_{mn} + e_{14}^{(k)} \alpha_m \beta_n W_{mn} \right. \\
& \quad \left. + e_{25}^{(k)} \beta_n X_{mn} + e_{25}^{(k)} \alpha_m \beta_n W_{mn} \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_k}{2} \left[ e_{15}^{(k)} \alpha_m X_{mn} + e_{15}^{(k)} \alpha_m^2 W_{mn} + e_{24}^{(k)} \beta_n Y_{mn} + e_{24}^{(k)} \beta_n^2 W_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \left[ 3e_{14}^{(k)} \alpha_m \mathbb{Y}_{mn} + 3e_{25}^{(k)} \beta_n \mathbb{X}_{mn} \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \left[ 3e_{15}^{(k)} \alpha_m \mathbb{X}_{mn} + 3e_{24}^{(k)} \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_k^2} \left( \frac{z_k^3}{3} + z_k z_{k-1}^2 - z_k^2 z_{k-1} - \frac{z_{k-1}^3}{3} \right) \left[ 2\chi_{12}^{(k)} \alpha_m \beta_n \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& \quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_k^2} \left( \frac{z_k^3}{3} + z_k z_{k-1}^2 - z_k^2 z_{k-1} - \frac{z_{k-1}^3}{3} \right) \\
& \quad \left[ \chi_{11}^{(k)} \alpha_m^2 \Phi_{mn}^{(k-1)} + \chi_{22}^{(k)} \beta_n^2 \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& \quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e_{36}^{(k)} \beta_n U_{mn} + e_{36}^{(k)} \alpha_m V_{mn} \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e_{31}^{(k)} \alpha_m U_{mn} + e_{32}^{(k)} \beta_n V_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \left[ e_{36}^{(k)} \beta_n X_{mn} + e_{36}^{(k)} \alpha_m Y_{mn} \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \left[ e_{31}^{(k)} \alpha_m X_{mn} + e_{32}^{(k)} \beta_n Y_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \right) \left[ e_{36}^{(k)} \beta_n \mathbb{X}_{mn} + e_{36}^{(k)} \alpha_m \mathbb{Y}_{mn} \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \right) \left[ e_{31}^{(k)} \alpha_m \mathbb{X}_{mn} + e_{32}^{(k)} \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& \quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_k} \left( \chi_{33}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} + \bar{q}_{ek} = 0
\end{aligned} \tag{7.97}$$

Neste estágio, pode se constatar que, para as condições de contorno propostas, é possível obter a solução de Navier para laminados ortotrópicos, nos quais os seguintes coeficientes de rigidez se anulam

$$Ac_{45} = Dc_{45} = Fc_{45} = e_{14}^{(k)} = e_{25}^{(k)} = e_{36}^{(k)} = \chi_{12}^{(k)} = 0 \quad (7.98)$$

de forma que a segunda série trigonométrica em cada uma das equações (7.90) - (7.96) e as séries em termos de  $\cos \alpha_m x \cos \beta_n y$  na equação (7.97) desaparecem e as expressões tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A_{11} \alpha_m^2 + A_{66} \beta_n^2 \right) U_{mn} + \left( A_{12} + A_{66} \right) \alpha_m \beta_n V_{mn} \right. \\ & + \left( B_{11} \alpha_m^2 + B_{66} \beta_n^2 \right) X_{mn} + \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n Y_{mn} + \left( L_{11} \alpha_m^2 + L_{66} \beta_n^2 \right) \mathbb{X}_{mn} \\ & \left. + \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{Y}_{mn} + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\ & = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_0 U_{mn} + \rho_1 X_{mn} + \rho_3 \mathbb{X}_{mn} \right) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (7.99)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A_{12} + A_{66} \right) \alpha_m \beta_n U_{mn} + \left( A_{66} \alpha_m^2 + A_{22} \beta_n^2 \right) V_{mn} \right. \\ & + \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n X_{mn} + \left( B_{66} \alpha_m^2 + B_{22} \beta_n^2 \right) Y_{mn} + \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{X}_{mn} \\ & \left. + \left( L_{66} \alpha_m^2 + L_{22} \beta_n^2 \right) \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\ & = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_0 V_{mn} + \rho_1 Y_{mn} + \rho_3 \mathbb{Y}_{mn} \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (7.100)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ Ac_{55} \alpha_m X_{mn} + Ac_{44} \beta_n Y_{mn} + \left( Ac_{55} \alpha_m^2 + Ac_{44} \beta_n^2 \right) W_{mn} + 3Dc_{55} \alpha_m \mathbb{X}_{mn} \right. \\ & \left. + 3Dc_{44} \beta_n \mathbb{Y}_{mn} + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( \alpha_m^2 e_{15}^{(k)} + \beta_n^2 e_{24}^{(k)} \right) \frac{h_k}{2} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} - q_z \\ & = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0 W_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (7.101)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( B_{11} \alpha_m^2 + B_{66} \beta_n^2 \right) U_{mn} + \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n V_{mn} \right. \\
& + \left( D_{11} \alpha_m^2 + D_{66} \beta_n^2 \right) X_{mn} + \left( D_{12} + D_{66} \right) \alpha_m \beta_n Y_{mn} + \left( F_{11} \alpha_m^2 + F_{66} \beta_n^2 \right) \mathbb{X}_{mn} \\
& \quad + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{Y}_{mn} + A c_{55} \left( X_{mn} + \alpha_m W_{mn} \right) + 3 D c_{55} \mathbb{X}_{mn} \\
& \quad \left. + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{31}^{(k)} \frac{1}{2 h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) + e_{15}^{(k)} \frac{h_k}{2} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i \omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_1 U_{mn} + \rho_2 X_{mn} + \rho_4 \mathbb{X}_{mn} \right) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i \omega t}
\end{aligned} \tag{7.102}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n U_{mn} + \left( B_{66} \alpha_m^2 + B_{22} \beta_n^2 \right) V_{mn} \right. \\
& + \left( D_{12} + D_{66} \right) \alpha_m \beta_n X_{mn} + \left( D_{66} \alpha_m^2 + D_{22} \beta_n^2 \right) Y_{mn} + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{X}_{mn} \\
& \quad + \left( F_{66} \alpha_m^2 + F_{22} \beta_n^2 \right) \mathbb{Y}_{mn} + A c_{44} \left( Y_{mn} + \beta_n W_{mn} \right) + 3 D c_{44} \mathbb{Y}_{mn} \\
& \quad \left. + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{32}^{(k)} \frac{1}{2 h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) + e_{24}^{(k)} \frac{h_k}{2} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i \omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_1 V_{mn} + \rho_2 Y_{mn} + \rho_4 \mathbb{Y}_{mn} \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i \omega t}
\end{aligned} \tag{7.103}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( L_{11} \alpha_m^2 + L_{66} \beta_n^2 \right) U_{mn} + \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n V_{mn} + \left( F_{11} \alpha_m^2 + F_{66} \beta_n^2 \right) X_{mn} \right. \\
& \quad + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n Y_{mn} + \left( H_{11} \alpha_m^2 + H_{66} \beta_n^2 \right) \mathbb{X}_{mn} + \left( H_{12} + H_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \\
& \quad + 3 D c_{55} \left( X_{mn} + \alpha_m W_{mn} \right) + 9 F c_{55} \mathbb{X}_{mn} + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \frac{1}{4 h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \Phi_{mn}^{(k-1)} \\
& \quad \left. + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} 3 e_{15}^{(k)} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i \omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_3 U_{mn} + \rho_4 X_{mn} + \rho_6 \mathbb{X}_{mn} \right) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i \omega t}
\end{aligned} \tag{7.104}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n U_{mn} + \left( L_{66} \alpha_m^2 + L_{22} \beta_n^2 \right) V_{mn} + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n X_{mn} \right. \\
& + \left( F_{66} \alpha_m^2 + F_{22} \beta_n^2 \right) Y_{mn} + \left( H_{12} + H_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{X}_{mn} + \left( H_{66} \alpha_m^2 + H_{22} \beta_n^2 \right) \mathbb{Y}_{mn} \\
& + 3Dc_{44} \left( Y_{mn} + \beta_n W_{mn} \right) + 9Fc_{44} \mathbb{Y}_{mn} + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \Phi_{mn}^{(k-1)} \\
& + \left. \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} 3e_{24}^{(k)} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t} \\
& = -\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \rho_3 V_{mn} + \rho_4 Y_{mn} + \rho_6 \mathbb{Y}_{mn} \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{7.105}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_k}{2} \left[ e_{15}^{(k)} \alpha_m X_{mn} + e_{15}^{(k)} \alpha_m^2 W_{mn} + e_{24}^{(k)} \beta_n Y_{mn} + e_{24}^{(k)} \beta_n^2 W_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \left[ 3e_{15}^{(k)} \alpha_m \mathbb{X}_{mn} + 3e_{24}^{(k)} \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_k^2} \left( \frac{z_k^3}{3} + z_k z_{k-1}^2 - z_k^2 z_{k-1} - \frac{z_{k-1}^3}{3} \right) \\
& \left[ \chi_{11}^{(k)} \alpha_m^2 \Phi_{mn}^{(k-1)} + \chi_{22}^{(k)} \beta_n^2 \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e_{31}^{(k)} \alpha_m U_{mn} + e_{32}^{(k)} \beta_n V_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \left[ e_{31}^{(k)} \alpha_m X_{mn} + e_{32}^{(k)} \beta_n Y_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \right) \left[ e_{31}^{(k)} \alpha_m \mathbb{X}_{mn} + e_{32}^{(k)} \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h_k} \left( \chi_{33}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y e^{i\omega t} + \bar{q}_{ek} = 0
\end{aligned} \tag{7.106}$$

### 7.5.1 Análise de flexão estática

No problema de flexão estática de placas laminadas piezolétricas o lado direito da igualdade das sete primeiras equações em termos de séries para laminados simétricos cruzados (7.99) - (7.105) desaparece. Além disso, pela análise das funções trigonométricas

que regem os modos nas terceira e última equações, (7.101) e (7.106), percebe-se que os carregamentos são convenientemente expandidos pelas seguintes séries de *Fourier*

$$\begin{aligned}\bar{q}_z(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \\ \bar{q}_{ek}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{mn}^{(k)} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\end{aligned}\quad (7.107)$$

Para os carregamentos  $\bar{q}_z$  e  $\bar{q}_{ek}$  impostos, os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}Q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{q}_z(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy dx \\ \Theta_{mn}^{(k)} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \bar{q}_{ek}(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy dx\end{aligned}\quad (7.108)$$

Desta forma, substituindo as expansões dos carregamentos externos nas equações do movimento em termos de expansões em séries tem-se que as equações resultantes se verificam em todos os pontos do domínio para cada par  $m$  e  $n$  se

$$\begin{aligned}& \left( A_{11}\alpha_m^2 + A_{66}\beta_n^2 \right) U_{mn} + \left( A_{12} + A_{66} \right) \alpha_m \beta_n V_{mn} + \left( B_{11}\alpha_m^2 + B_{66}\beta_n^2 \right) X_{mn} \\ & + \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n Y_{mn} + \left( L_{11}\alpha_m^2 + L_{66}\beta_n^2 \right) \mathbb{X}_{mn} + \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \\ & + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} = 0\end{aligned}\quad (7.109)$$

$$\begin{aligned}& \left( A_{12} + A_{66} \right) \alpha_m \beta_n U_{mn} + \left( A_{66}\alpha_m^2 + A_{22}\beta_n^2 \right) V_{mn} + \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n X_{mn} \\ & + \left( B_{66}\alpha_m^2 + B_{22}\beta_n^2 \right) Y_{mn} + \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{X}_{mn} + \left( L_{66}\alpha_m^2 + L_{22}\beta_n^2 \right) \mathbb{Y}_{mn} \\ & + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} = 0\end{aligned}\quad (7.110)$$

$$\begin{aligned}& Ac_{55}\alpha_m X_{mn} + Ac_{44}\beta_n Y_{mn} + \left( Ac_{55}\alpha_m^2 + Ac_{44}\beta_n^2 \right) W_{mn} + 3Dc_{55}\alpha_m \mathbb{X}_{mn} \\ & + 3Dc_{44}\beta_n \mathbb{Y}_{mn} + \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( \alpha_m^2 e_{15}^{(k)} + \beta_n^2 e_{24}^{(k)} \right) \frac{h_k}{2} \Phi_{mn}^{(k-1)} = Q_{mn}\end{aligned}\quad (7.111)$$

$$\begin{aligned}
& \left( B_{11}\alpha_m^2 + B_{66}\beta_n^2 \right) U_{mn} + \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n V_{mn} + \left( D_{11}\alpha_m^2 + D_{66}\beta_n^2 \right) X_{mn} \\
& + \left( D_{12} + D_{66} \right) \alpha_m \beta_n Y_{mn} + \left( F_{11}\alpha_m^2 + F_{66}\beta_n^2 \right) \mathbb{X}_{mn} + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \\
& \quad + Ac_{55} \left( X_{mn} + \alpha_m W_{mn} \right) + 3Dc_{55} \mathbb{X}_{mn} \\
& + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{31}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) + e_{15}^{(k)} \frac{h_k}{2} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} = 0
\end{aligned} \tag{7.112}$$

$$\begin{aligned}
& \left( B_{12} + B_{66} \right) \alpha_m \beta_n U_{mn} + \left( B_{66}\alpha_m^2 + B_{22}\beta_n^2 \right) V_{mn} + \left( D_{12} + D_{66} \right) \alpha_m \beta_n X_{mn} \\
& + \left( D_{66}\alpha_m^2 + D_{22}\beta_n^2 \right) Y_{mn} + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{X}_{mn} + \left( F_{66}\alpha_m^2 + F_{22}\beta_n^2 \right) \mathbb{Y}_{mn} \\
& \quad + Ac_{44} \left( Y_{mn} + \beta_n W_{mn} \right) + 3Dc_{44} \mathbb{Y}_{mn} \\
& + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} \left( e_{32}^{(k)} \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) + e_{24}^{(k)} \frac{h_k}{2} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} = 0
\end{aligned} \tag{7.113}$$

$$\begin{aligned}
& \left( L_{11}\alpha_m^2 + L_{66}\beta_n^2 \right) U_{mn} + \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n V_{mn} + \left( F_{11}\alpha_m^2 + F_{66}\beta_n^2 \right) X_{mn} \\
& + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n Y_{mn} + \left( H_{11}\alpha_m^2 + H_{66}\beta_n^2 \right) \mathbb{X}_{mn} + \left( H_{12} + H_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \\
& \quad + 3Dc_{55} \left( X_{mn} + \alpha_m W_{mn} \right) + 9Fc_{55} \mathbb{X}_{mn} \\
& + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{31}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \Phi_{mn}^{(k-1)} + \alpha_m \sum_{k=1}^{n_{piez}} 3e_{15}^{(k)} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} = 0
\end{aligned} \tag{7.114}$$

$$\begin{aligned}
& \left( L_{12} + L_{66} \right) \alpha_m \beta_n U_{mn} + \left( L_{66}\alpha_m^2 + L_{22}\beta_n^2 \right) V_{mn} + \left( F_{12} + F_{66} \right) \alpha_m \beta_n X_{mn} \\
& + \left( F_{66}\alpha_m^2 + F_{22}\beta_n^2 \right) Y_{mn} + \left( H_{12} + H_{66} \right) \alpha_m \beta_n \mathbb{X}_{mn} + \left( H_{66}\alpha_m^2 + H_{22}\beta_n^2 \right) \mathbb{Y}_{mn} \\
& \quad + 3Dc_{44} \left( Y_{mn} + \beta_n W_{mn} \right) + 9Fc_{44} \mathbb{Y}_{mn} \\
& + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} e_{32}^{(k)} \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \Phi_{mn}^{(k-1)} + \beta_n \sum_{k=1}^{n_{piez}} 3e_{24}^{(k)} \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \Phi_{mn}^{(k-1)} = 0
\end{aligned} \tag{7.115}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{h_k}{2} \left[ e_{15}^{(k)} \alpha_m X_{mn} + e_{15}^{(k)} \alpha_m^2 W_{mn} + e_{24}^{(k)} \beta_n Y_{mn} + e_{24}^{(k)} \beta_n^2 W_{mn} \right] \\
& + \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) \left[ 3e_{15}^{(k)} \alpha_m \mathbb{X}_{mn} + 3e_{24}^{(k)} \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \right] \\
& - \frac{1}{h_k^2} \left( \frac{z_k^3}{3} + z_k z_{k-1}^2 - z_k^2 z_{k-1} - \frac{z_{k-1}^3}{3} \right) \left[ \chi_{11}^{(k)} \alpha_m^2 \Phi_{mn}^{(k-1)} + \chi_{22}^{(k)} \beta_n^2 \Phi_{mn}^{(k-1)} \right] \\
& + \left[ e_{31}^{(k)} \alpha_m U_{mn} + e_{32}^{(k)} \beta_n V_{mn} \right] + \left( \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \left[ e_{31}^{(k)} \alpha_m X_{mn} + e_{32}^{(k)} \beta_n Y_{mn} \right] \\
& + \left( \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) \right) \left[ e_{31}^{(k)} \alpha_m \mathbb{X}_{mn} + e_{32}^{(k)} \beta_n \mathbb{Y}_{mn} \right] - \frac{1}{h_k} \left( \chi_{33}^{(k)} \Phi_{mn}^{(k-1)} \right) = -\Theta_{mn}^{(k-1)}
\end{aligned} \tag{7.116}$$

Este conjunto de equações constitui um sistema linear algébrico e como tal admite a representação matricial para um harmônico arbitrário  $m$  e  $n$

$$[K_{mn}] \{Z_{mn}\} = \{F_{mn}\} \tag{7.117}$$

em que  $[K_{mn}]$  é a matriz de coeficientes de rigidez, dada por

$$[K_{mn}] = \begin{bmatrix}
s_{11} & s_{12} & \dots & s_{17} & s_{1(7+1)} & \dots & s_{1(7+n_{piez})} \\
s_{12} & s_{22} & \dots & s_{27} & s_{2(7+1)} & \dots & s_{2(7+n_{piez})} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s_{17} & s_{27} & \dots & s_{77} & s_{7(7+1)} & \dots & s_{7(7+n_{piez})} \\
s_{1(7+1)} & s_{2(7+1)} & \dots & s_{7(7+1)} & s_{(7+1)(7+1)} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{1(7+n_{piez})} & s_{2(7+n_{piez})} & \dots & s_{7(7+n_{piez})} & 0 & \dots & s_{(7+n_{piez})(7+n_{piez})}
\end{bmatrix} \tag{7.118}$$

Observa-se que  $[K_{mn}]$  é simétrica e seus coeficientes são dados pelas expressões

$$\begin{aligned}
s_{11} &= A_{11}\alpha_m^2 + A_{66}\beta_n^2 \\
s_{12} = s_{21} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_m\beta_n \\
s_{14} = s_{41} &= B_{11}\alpha_m^2 + B_{66}\beta_n^2 \\
s_{15} = s_{51} &= (B_{12} + B_{66})\alpha_m\beta_n \\
s_{16} = s_{61} &= L_{11}\alpha_m^2 + L_{66}\beta_n^2 \\
s_{17} = s_{71} &= (L_{12} + L_{66})\alpha_m\beta_n \\
s_{1(7+k)} &= \alpha_m e_{31}^{(k)}
\end{aligned} \tag{7.119}$$

$$\begin{aligned}
s_{22} &= A_{66}\alpha_m^2 + A_{22}\beta_n^2 \\
s_{24} = s_{42} &= (B_{12} + B_{66})\alpha_m\beta_n \\
s_{25} = s_{52} &= B_{66}\alpha_m^2 + B_{22}\beta_n^2 \\
s_{26} = s_{62} &= (L_{12} + L_{66})\alpha_m\beta_n \\
s_{27} = s_{72} &= L_{66}\alpha_m^2 + L_{22}\beta_n^2 \\
s_{2(7+k)} &= \beta_n e_{32}^{(k)}
\end{aligned} \tag{7.120}$$

$$\begin{aligned}
s_{33} &= Ac_{55}\alpha_m^2 + Ac_{44}\beta_n^2 \\
s_{34} = s_{43} &= Ac_{55}\alpha_m \\
s_{35} = s_{53} &= Ac_{44}\beta_n \\
s_{36} = s_{63} &= 3Dc_{55}\alpha_m \\
s_{37} = s_{73} &= 3Dc_{44}\beta_n \\
s_{3(7+k)} &= \frac{h_k}{2} \left( \alpha_m^2 e_{15}^{(k)} + \beta_n^2 e_{24}^{(k)} \right)
\end{aligned} \tag{7.121}$$

$$\begin{aligned}
s_{44} &= D_{11}\alpha_m^2 + D_{66}\beta_n^2 + Ac_{55} \\
s_{45} = s_{54} &= (D_{12} + D_{66})\alpha_m\beta_n \\
s_{46} = s_{64} &= F_{11}\alpha_m^2 + F_{66}\beta_n^2 + 3Dc_{55} \\
s_{47} = s_{74} &= (F_{12} + F_{66})\alpha_m\beta_n \\
s_{4(7+k)} &= \alpha_m \left( \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) e_{31}^{(k)} + \frac{h_k}{2} e_{15}^{(k)} \right)
\end{aligned} \tag{7.122}$$

$$\begin{aligned}
s_{55} &= D_{66}\alpha_m^2 + D_{22}\beta_n^2 + Ac_{44} \\
s_{56} = s_{65} &= (F_{12} + F_{66})\alpha_m\beta_n \\
s_{57} = s_{75} &= F_{66}\alpha_m^2 + F_{22}\beta_n^2 + 3Dc_{44} \\
s_{5(7+k)} &= \beta_n \left( \frac{1}{2h_k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) e_{32}^{(k)} + \frac{h_k}{2} e_{24}^{(k)} \right)
\end{aligned} \tag{7.123}$$

$$\begin{aligned}
s_{66} &= H_{11}\alpha_m^2 + H_{66}\beta_n^2 + 9Fc_{55} \\
s_{67} = s_{76} &= (H_{12} + H_{66})\alpha_m\beta_n \\
s_{6(7+k)} &= \alpha_m \left[ \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) e_{31}^{(k)} + \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) 3e_{15}^{(k)} \right]
\end{aligned} \tag{7.124}$$

$$\begin{aligned}
s_{77} &= H_{66}\alpha_m^2 + H_{22}\beta_n^2 + 9Fc_{44} \\
s_{7(7+k)} &= \beta_n \left[ \frac{1}{4h_k} (z_k^4 - z_{k-1}^4) e_{32}^{(k)} + \frac{1}{h_k} \left( \frac{z_k^4}{12} - \frac{z_k z_{k-1}^3}{3} + \frac{z_{k-1}^4}{4} \right) 3e_{24}^{(k)} \right]
\end{aligned} \tag{7.125}$$

$$s_{(7+k)(7+k)} = - \left[ \frac{1}{h_k^2} \left( \frac{z_k^3}{3} + z_k z_{k-1}^2 - z_k^2 z_{k-1} - \frac{z_{k-1}^3}{3} \right) (\chi_{11}^{(k)} \alpha_m^2 + \chi_{22}^{(k)} \beta_n^2) + \frac{1}{h_k} \chi_{33}^{(k)} \right] \tag{7.126}$$

## 8 Aplicações

### 8.1 Bimorfo piezelétrico com atuação

Este primeiro exemplo trata de um modelo numérico inspirado no experimento proposto por TZOU e TSENG (1990) e reportado em vários trabalhos constantes na literatura especializada.

O modelo consiste de uma placa em balanço composta por somente duas lâminas de material piezelétrico isotrópico (PVDF) com polaridades opostas, consistindo num denominado bimorfo piezelétrico. A geometria da placa é tal que seu comprimento é de 100,0 mm, a largura é 5,0 mm e a espessura de cada lâmina é 0,5 mm, que totaliza portanto a espessura de 1,0 mm para a placa, conforme a Figura 8.

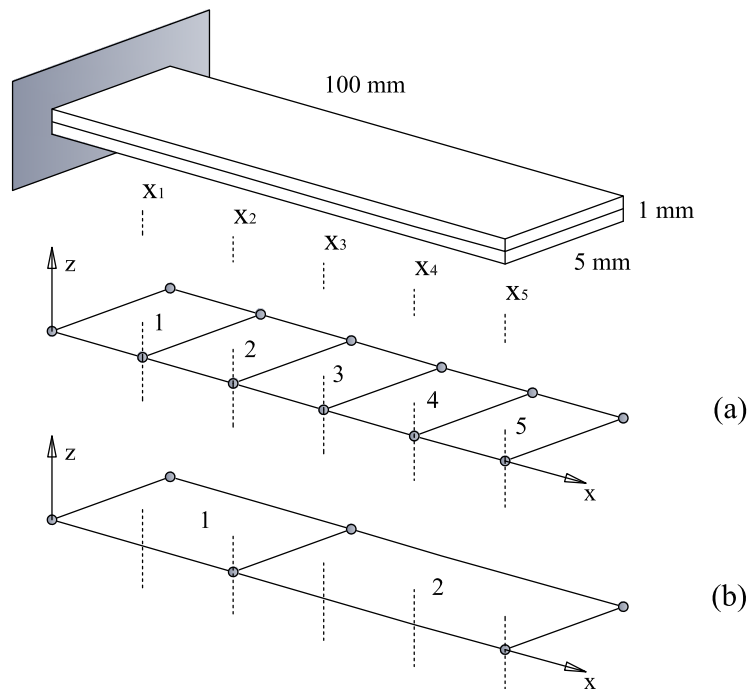


Figura 8: Bimorfo piezelétrico e modelos discretizados: (a) malha de elementos finitos; (b) malha de elementos finitos generalizados.

A atuação por deformação piezolétrica testada consiste do efeito de um campo elétrico de intensidade unitária aplicado paralelamente à espessura da placa, uniformemente distribuído em todo o seu comprimento. Assim, conhecida sua espessura, nota-se que aplicando potenciais elétricos de  $+0,5$  V e  $-0,5$  V, respectivamente nas superfícies inferior e superior da placa, pode-se induzir o campo elétrico de intensidade unitária. Desta maneira, a placa tem todos os deslocamentos mecânicos restringidos na extremidade  $\mathbf{x} = 0,0$  mm e a diferença de potencial de 1 V é induzida pela aplicação dos potenciais referidos em todos os nós do modelo de elementos finitos generalizados.

As propriedades dos materiais são listadas na Tabela 1. Deve-se ressaltar que o coeficiente de Poisson é admitido como nulo para simular a condição de *Estado Plano de Tensões*.

Tabela 1: Propriedades dos materiais	
$E = 2$ GPa	$\nu = 0,29$
$e_{31} = 0,046$ C/m <sup>2</sup>	$e_{32} = 0,046$ C/m <sup>2</sup>
$\chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33} = 0,1062 \times 10^{-9}$ F/m	

CEN, SOH, LONG e YAO (2002) consideraram uma malha regular de elementos finitos de placa quadrangulares de 4 nós, com 5 elementos de mesmas dimensões, sendo duas lâminas, conforme Figura 8(a). O elemento utilizado tem 8 graus de liberdade por nó, oriundos da descrição do comportamento mecânico via FSDT e inserção dos potenciais elétricos nodais via *Teoria em Camadas Discretas*. Os resultados obtidos a partir da análise foram comparados com outros obtidos através de modelos de elementos finitos sólidos, pela teoria de vigas e pelo experimento conduzido por TZOU e TSENG (1990).

DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995) também consideraram uma malha regular de elementos finitos de placa quadrangulares de 4 nós, com cinco elementos de mesmas dimensões, sendo duas lâminas. Apesar destes autores utilizarem a FSDT para descrição do comportamento mecânico, em sua formulação é admitido que não há gradiente do potencial elétrico nas direções planas no domínio do elemento, resultando apenas 1 grau de liberdade elétrico por lâmina piezolétrica, por elemento. Os valores de deslocamentos transversais nodais também foram comparados com outros resultados disponíveis na literatura.

FARIA (2006) apresentou o referido modelo construído com cinco elementos biquadráticos do tipo *Serendipity*. Sua formulação, baseada na HSDT, gera 11 graus de liberdade mecânicos por nó, além de um potencial elétrico para cada interface, totalizando 3 potenciais elétricos por nó.

No presente trabalho, considerou-se para esta análise um modelo com 2 elementos finitos generalizados, conforme a Figura 8(b). Foram considerados dois níveis de enriquecimento em todas as variáveis. Para o caso com enriquecimento linear isotrópico resultaram  $(7 + 4) \times (1 + 2)$  parâmetros nodais, sendo 7 variáveis de deslocamentos generalizados, oriundos da descrição mecânica via HSDT, 4 valores de potenciais elétricos, em camadas discretas, e 2 funções de enriquecimento, além da PU. Para o caso com enriquecimento quadrático isotrópico resultaram  $(7 + 4) \times (1 + 5)$  parâmetros nodais, sendo 5 funções de enriquecimento.

Para a imposição das condições de contorno homogêneas de deslocamentos no engaste, foram eliminadas todas as funções de enriquecimento nos nós deste contorno, de forma que nas correspondentes nuvens persistiu somente a partição da unidade.

Para a aplicação dos potenciais elétricos também foi considerado somente a partição da unidade, cancelando-se todas as funções de enriquecimento das referidas variáveis.

Os valores de deslocamentos transversais nos pontos  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_5$  são mostrados na Tabela 2. Os valores em  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_5$  para o modelo em elementos finitos generalizados são obtidos diretamente da solução do sistema de equações (6.115). Os valores para  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_3$  e  $\mathbf{x}_4$  foram calculados em nível de pós-processamento.

Tabela 2: Deflexão induzida por um campo elétrico unitário.

Teoria	Deflexão $\times 10^{-7}$ m				
	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$
PRESENTE (enriq. 1 grau)	0,0699	0,5538	1,2390	2,2155	3,4512
PRESENTE (enriq. 2 grau)	0,0711	0,5533	1,2380	2,2156	3,4514
FARIA (2006)	0,1400	0,5500	1,2400	2,2100	3,4500
CEN <i>et al.</i> (2002)	0,1380	0,5520	1,2420	2,2080	3,4500
DETWILER <i>et al.</i> (1995)	0,1400	0,5500	2,1000	2,2100	3,4500
CHEE (viga)	0,1380	0,5520	1,2420	2,2080	3,4500
TZOU (sólido)	0,1240	0,5080	1,1600	2,1000	3,3000
TZOU (experimento)	-	-	-	-	3,1500

Percebe-se boa concordância entre os valores de deslocamentos transversais obtidos via modelos numéricos, notando-se que no primeiro nível de enriquecimento atinge-se o valor reportado na literatura do deslocamento na extremidade livre. Exceto para o ponto  $\mathbf{x}_1$ , onde observa-se uma discrepância considerável, o que se deve à restrição do espaço de aproximação das nuvens dos nós do contorno.

Os resultados referidos aos trabalhos cujas datas não constam na tabela foram extraídos das demais fontes citadas nesta seção.

Quanto à discrepância verificada entre o valor de deslocamento obtido via experimentação e modelagens numéricas, DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995) citam que provavelmente tal fato se deve ao cisalhamento na interface entre as lâminas, decorrente de uma possível imperfeição na colagem. Sendo assim, contrariando o que poderia se esperar por uma redução na rigidez, levando a maiores deslocamentos transversais no caso de carregamentos mecânicos, no processo de atuação por deformação induzida a deficiência do adesivo não assegura que toda deformação axial nas lâminas piezelétricas gere efetivamente momento fletor.

Deve-se salientar que uma opção para reduzir o número de graus de liberdade desta análise seria a estratégia de enriquecimento ortotrópico, adicionando novas funções somente na direção paralela ao comprimento da placa.

## 8.2 Placa com pastilhas piezelétricas discretas

### 8.2.1 Placa laminada composta com atuadores

Este exemplo consiste de um problema bastante citado na literatura. Trata-se de uma placa laminada em grafite/epóxi AS5/3501 considerada engastada em uma das arestas, contendo 15 pares de atuadores piezelétricos colados nas superfícies inferior e superior, submetidos a um potencial uniforme que deflete a placa.

A placa em questão com 292 mm de comprimento ( $C$ ) e 152 mm de largura ( $B$ ) é constituída por um empilhamento de seis lâminas de mesma espessura, totalizando 0,83 mm, analisada experimentalmente por CRAWLEY e LAZARUS (1991), que está mostrada na Figura 9. A esta placa são coladas as pastilhas de piezocerâmica PZT designada por G1195, sendo 10 pares com dimensões 51 mm  $\times$  51 mm, 4 pares com dimensões 51 mm  $\times$  25 mm e 1 par com dimensões 25 mm  $\times$  25 mm, todas com 0,25 mm de espessura, conforme DETWILER, SHEN e VANKAYYA (1995), SARAVANOS, HEYLIGER e HOPKINS (1997), LIMA JR. (1999), CHEE (2000), LEE (2001) e FARIA (2006).

DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995) utilizaram uma formulação de elemento finito de placa segundo a FSDT e incorporando 1 grau de liberdade elétrico por lâmina piezelétrica, por elemento. Os autores analisaram dois casos de atuação piezelétrica. O primeiro consiste de uma sequência de empilhamento  $[0/+45/-45]_s$  e a aplicação de um potencial elétrico de 157,6 V e o segundo de uma sequência de empilhamento  $[+30/+30/0]_s$  e a aplicação de um potencial elétrico de 188,8 V.

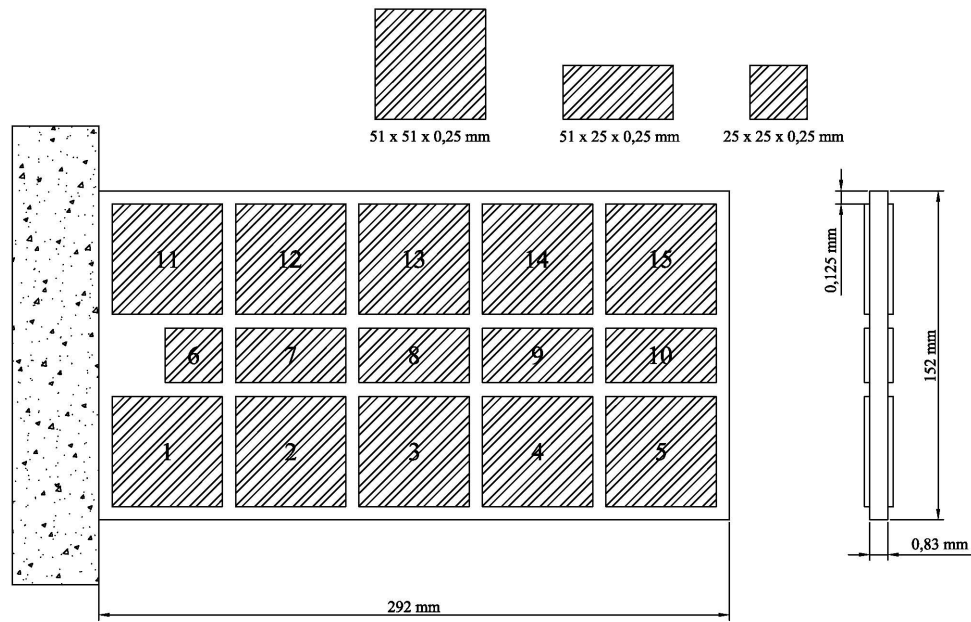


Figura 9: Modelo de placa laminada composta com posicionamento dos atuadores.

SARAVANOS, HEYLIGER e HOPKINS (1997) utilizaram uma formulação desenvolvida completamente em camadas discretas para implementação de um elemento de placa quadrangular bilinear. Estes autores forneceram as curvas para três deslocamentos normalizados a citar: a deflexão por flexão axial, a curvatura por flexão transversal e o ângulo de torção devido ao acoplamento flexão-torção. Para tanto, os autores trazem as seguintes equações para normalização dos deslocamentos

$$T_1 = \frac{w_2}{B} \quad T_2 = \frac{1}{B} \left( w_2 - \frac{(w_1 + w_3)}{2} \right) \quad T_3 = \frac{(w_3 - w_1)}{B} \quad (8.1)$$

onde  $w_2$ ,  $w_1$  e  $w_3$  são deslocamentos transversais ao longo da linha média e das duas arestas paralelas ao comprimento, respectivamente, e  $B$  é a largura da placa.

Os autores supracitados consideraram um laminado  $[0/+45/-45]_s$  cuja flexão é induzida por um campo elétrico uniforme de 394 V/mm, de polaridade oposta nas pastilhas inferiores e superiores. Com um modelo de  $16 \times 9$  elementos finitos, os autores obtiveram curvas dos referidos deslocamento normalizados, a partir das quais percebe-se boa concordância entre os resultados obtidos numericamente com aqueles apresentados por CRAWLEY e LAZARUS (1991) para o deslocamento  $T_1$ , enquanto para  $T_2$  e  $T_3$  não se pode relatar o mesmo. Os autores citam o fato de seus resultados se aproximarem bastante



daqueles apresentados por HA, KEILERS e CHANG (1992) e atribuem a fraca correlação com os valores experimentais à incertezas quanto às propriedades materiais adotadas e à possíveis imperfeições no corpo de prova utilizado por CRAWLEY e LAZARUS (1991).

CHEE (2000) empregou para a modelagem uma malha de  $12 \times 7$  elementos finitos bi-quadráticos do tipo *Serendipity*. O autor realizou uma primeira análise para um laminado  $[0/+45/-45]_s$ , para o qual as pastilhas piezelétricas foram submetidas a um potencial uniforme de 100 V. Em seguida, modificou-se a orientação das lâminas, considerando uma sequência  $[+30/+30/0]_s$ , situação em que foi aplicado um potencial de 120 V. Foram apresentadas curvas de deflexões ao longo do comprimento, sem citar qualquer procedimento de normalização dos valores, e os resultados foram comparados novamente com aqueles apresentados por CRAWLEY e LAZARUS (1991), verificando-se também alguma discrepância entre estes. De acordo com o autor, esta diferença não é de toda inesperada em virtude das diferentes formulações. Conforme CHEE (2000), o trabalho de CRAWLEY e LAZARUS (1991) é um dos pioneiros neste campo e estes utilizam o conceito de deformação induzida, ou seja, permitindo somente análises onde as pastilhas piezelétricas se comportam como atuadores.

Por outro lado, LEE (2001) utilizou uma malha com  $16 \times 9$  elementos finitos do tipo *Serendipity* com 8 nós, formulados completamente segundo a *teoria em camadas discretas*, exceto para o deslocamento transversal  $w$ , considerando 8 lâminas discretas para elementos de placa e casca. O autor apresentou duas curvas de deslocamentos transversais normalizados que se enquadram na definição de deflexão por flexão axial de SARAVANOS, HEYLIGER e HOPKINS (1997). As situações analisadas também foram um campo elétrico aplicado de 394 V/mm para uma configuração  $[0/+45/-45]_s$  e 472 V/mm para uma configuração  $[+30/+30/0]_s$ .

Ainda, LIMA JR. (1999) empregou elementos finitos de placa baseados na FSDT, cujas matrizes de rigidez elementares foram obtidas com funções lagrangeanas bilineares para o deslocamento transversal e as rotações no plano de referência e funções de interpolação diferentes para o efeito de distorção. Com uma malha de  $10 \times 6$  elementos, o autor obteve resultados para a configuração  $[0/+45/-45]_s$  que são mostrados também na forma de gráficos, para os quais utilizou a mesma normalização dos deslocamentos transversais que SARAVANOS, HEYLIGER e HOPKINS (1997), onde se pode observar boa concordância para o deslocamento normalizado  $T_1$ .

Utilizando elementos finitos do tipo *Serendipity* de oito nós, FARIA (2006) analisou o mesmo problema empregando uma malha de  $12 \times 7$  elementos considerando as duas

situações de empilhamento de lâminas,  $[0/+45/-45]_s$  e  $[+30/+30/0]_s$ , e para as quais sendo aplicado um potencial de 100 V e 120 V, respectivamente. Seus resultados, assim como os de LIMA JR. (1999) deixam claro que os modelos de primeira ordem e ordem superior, respectivamente, apresentam maior rigidez na deformação por atuação piezelétrica em virtude da formulação eletromecanicamente acoplada.

Para tal análise, considerou-se neste trabalho a malha de elementos finitos generalizados mostrada na Figura 10. As propriedades materiais são mostradas na Tabela 3.

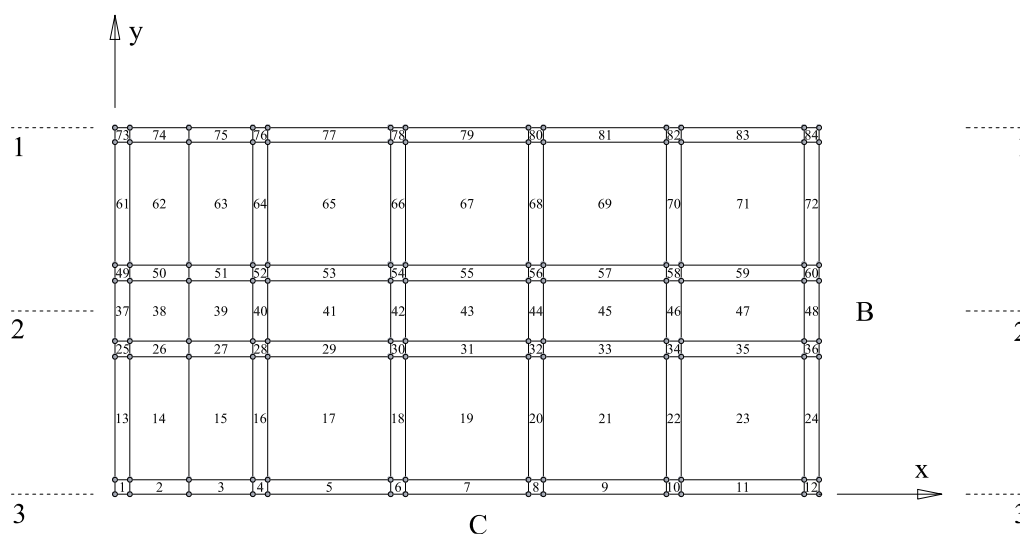


Figura 10: Malha de elementos finitos generalizados para análise de placa com atuadores discretos. São mostrados apenas os nós de aproximação dos campos incógnitos.

Num primeiro instante, considerou-se o laminado com sequência de empilhamento  $[0/+45/-45]_s$ , submetido a uma atuação gerada pela aplicação de um potencial de 100 V nas pastilhas piezelétricas, semelhante a FARIA (2006) e CHEE (2000).

Buscando averiguar o efeito decorrente da forma como se impõe as condições de contorno essenciais, primeiramente foram canceladas todas as funções de enriquecimento nos nós contidos no contorno com imposição da nulidade dos deslocamentos. Os resultados para os deslocamentos transversais  $T_1$ , normalizados conforme SARAVANOS, HEYLIGER e HOPKINS (1997), são mostrados na Figura 11.

Pelo progresso do nível de enriquecimento isotrópico para todas as variáveis obteve-se um campo de deslocamentos convergente para os enriquecimentos de segundo e terceiro grau, motivo pelo qual são apresentadas as curvas somente até o enriquecimento de segundo grau. Estes resultados foram diretamente confrontados com os obtidos por

Tabela 3: Propriedades dos materiais

propriedades	Gr/Epoxy	PZT-4
constantes elásticas		
$E_1$ (N/mm <sup>2</sup> )	$142,86 \times 10^3$	$62,97 \times 10^3$
$E_2$ (N/mm <sup>2</sup> )	$9,70 \times 10^3$	$62,97 \times 10^3$
$E_3$ (N/mm <sup>2</sup> )	$9,70 \times 10^3$	$62,97 \times 10^3$
$G_{12}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$6,00 \times 10^3$	$24,20 \times 10^3$
$G_{23}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$4,00 \times 10^3$	$24,20 \times 10^3$
$G_{13}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$6,00 \times 10^3$	$24,20 \times 10^3$
$\nu_{12}$	0,30	0,30
$\nu_{23}$	0,37	0,30
$\nu_{31}$	0,30	0,30
coeficientes piezelétricos		
$e_{15}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$14,13 \times 10^{-6}$
$e_{14}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$14,13 \times 10^{-6}$
$e_{31}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$18,41 \times 10^{-6}$
$e_{32}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$18,41 \times 10^{-6}$
$e_{33}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$12,51 \times 10^{-6}$
constantes dielétricas		
$\chi_{11}$ (F/mm)	-	$15,30 \times 10^{-10}$
$\chi_{22}$ (F/mm)	-	$15,30 \times 10^{-10}$
$\chi_{33}$ (F/mm)	-	$15,00 \times 10^{-10}$

FARIA (2006). Como se verificou plena concordância, fazendo-se a devida ressalva que se tem disponível valores com precisão gráfica somente, não são mostrados os resultados do referido autor, pois haveria sobreposição de curvas.

Em seguida, aplicou-se as restrições de deslocamentos de uma forma mais refinada, de forma que foram eliminadas apenas as funções de enriquecimento que são não nulas no *contorno de Dirichlet*, preservando a contribuição das funções restantes na aproximação no interior das nuvens próximas a este contorno. Deve-se ressaltar que tal procedimento se torna viável em função dos contornos serem retos e paralelos aos eixos do sistema de coordenadas. Diferentemente, neste caso observa-se a convergência da solução imediatamente para o enriquecimento de primeiro grau, conforme pode-se ver na Figura 12, onde são também mostrados os resultados, relativos ao deslocamento normalizado  $T_1$ , de outras fontes.

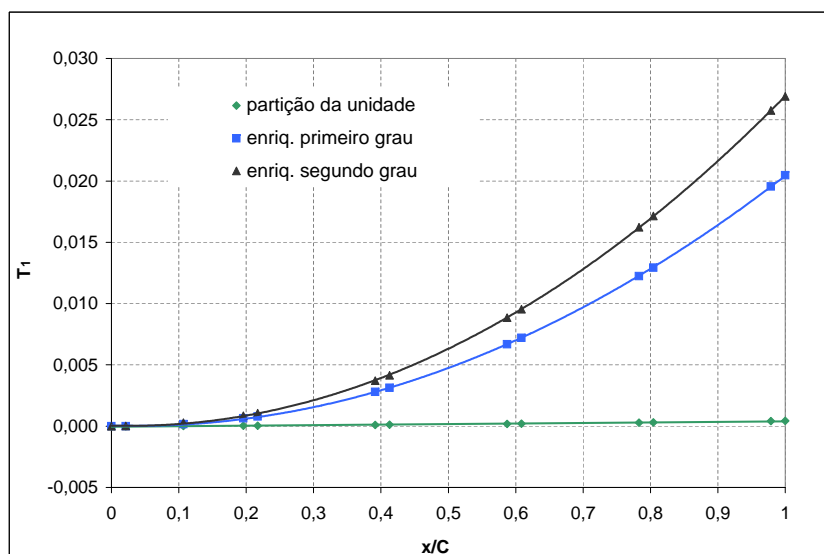


Figura 11: Deflexão normalizada  $T_1$  para a condição de eliminação de todas as funções de enriquecimento no *contorno de Dirichlet*.

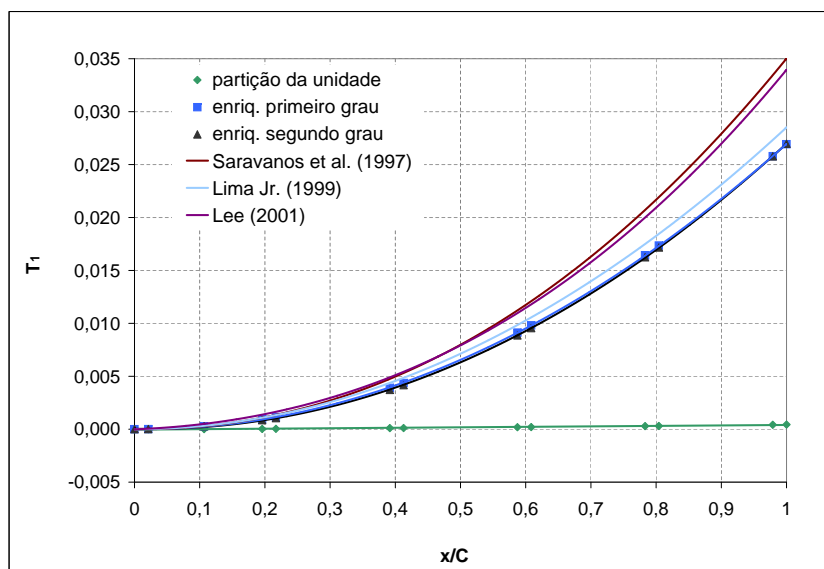


Figura 12: Deflexão normalizada  $T_1$  para laminado  $[0/+45/-45]_s$ .

Assim, fica evidente que o espaço de aproximação para o caso em que se impõe diretamente as condições de contorno fica limitado nas proximidades do *contorno de Dirichlet*, exigindo enriquecimento de maior grau para permitir a convergência da solução. Embora tenha-se na literatura relatos de tal procedimento funcionar adequadamente para problemas de elasticidade tridimensional, GARCIA (2003) também mostra que a simples

eliminação de todas as funções de enriquecimento no *contorno de Dirichlet* acaba por restringir o espaço de aproximação, de forma que este fica incapaz de aproximar alguns modos de deformações em placas e cascas, principalmente quando são utilizados poucos elementos.

Posteriormente, foi modelada a placa com sequência de empilhamento  $[+30/+30/0]_s$ , situação onde os atuadores piezelétricos foram submetidos a uma diferença de potencial de 120 V. As condições de contorno de deslocamentos foram impostas de forma a preservar as funções de enriquecimento que se anulam no contorno, garantindo o enriquecimento completo nas nuvens adjacentes.

Os resultados obtidos pela solução do sistema de equações (6.115) são mostrados na Figura 13. Novamente, estes resultados foram diretamente confrontados com os apresentados por FARIA (2006), os quais também não são aqui apresentados em virtude de bem concordarem com os obtidos.

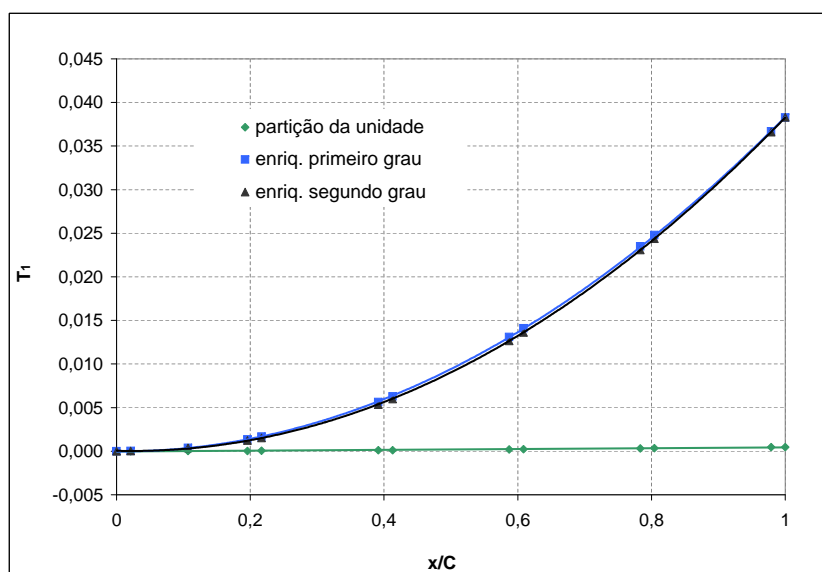


Figura 13: Deflexão normalizada  $T_1$  para laminado  $[+30/+30/0]_s$ .

Adicionalmente, verificou-se a capacidade de aproximação para os deslocamentos normalizados  $T_2$  e  $T_3$ , conforme (8.1). Para tal finalidade, considerando um laminado com sequência de empilhamento  $[0/+45/-45]_s$ , aplicou-se um potencial elétrico de 157,6 V, semelhante ao experimento numérico realizado por DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995). Os resultados obtidos a partir da formulação apresentada neste trabalho podem ser comparados com os reportados pelos autores supracitados e por SARAVANOS, HEYLIGER e HOPKINS (1997) com o auxílio das Figuras 14 e 15. E finalmente, considerando um lami-

nado com sequência de empilhamento  $[+30/+30/0]_s$ , aplicou-se um potencial elétrico de 188,8 V, conforme DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995), e os resultados são mostrados nas Figuras 16 e 17.

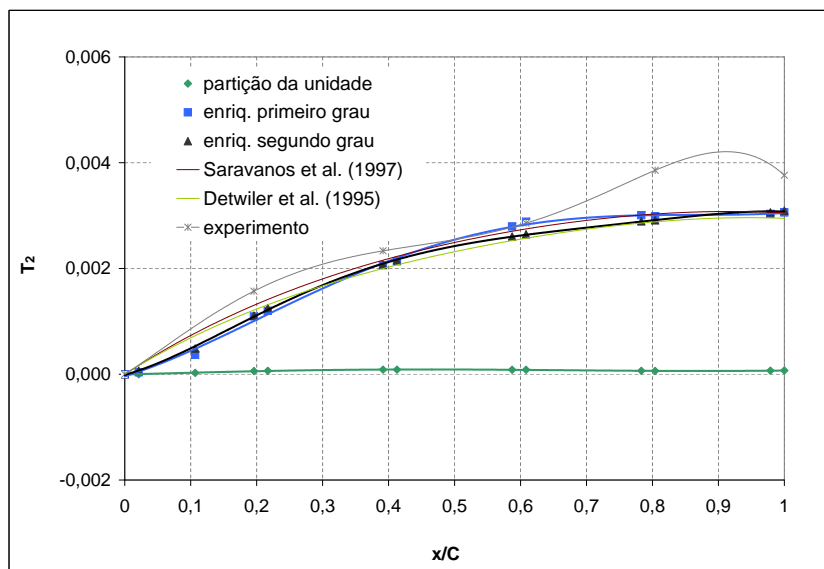


Figura 14: Deflexão normalizada  $T_2$  para laminado  $[0/+45/-45]_s$ .

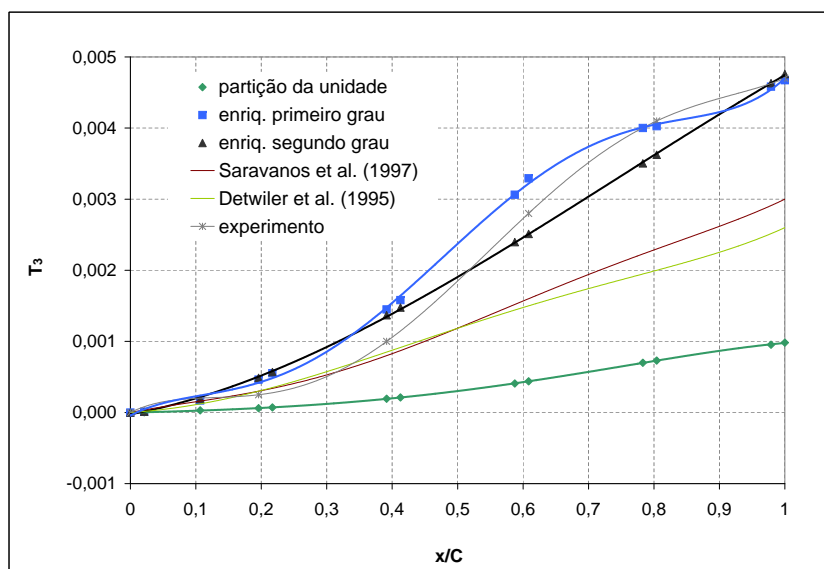


Figura 15: Deflexão normalizada  $T_3$  para laminado  $[0/+45/-45]_s$ .

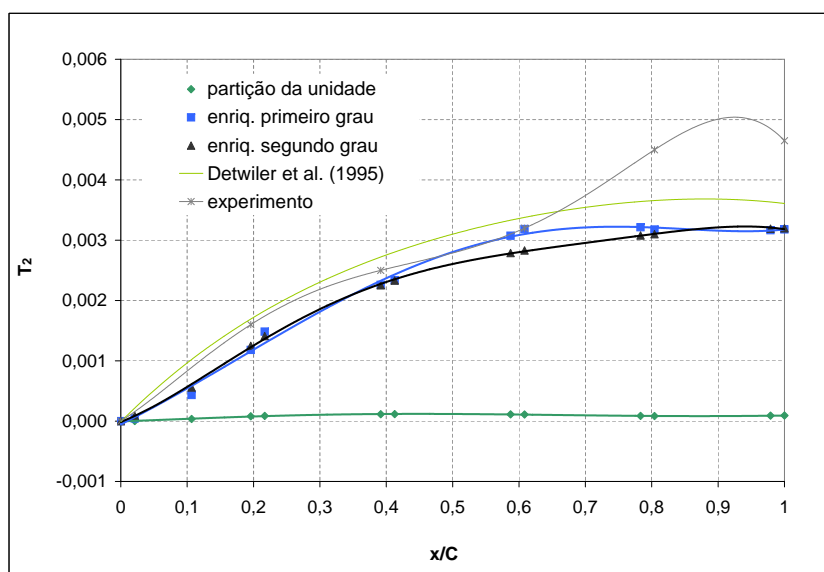


Figura 16: Deflexão normalizada  $T_2$  para laminado  $[+30/+30/0]_s$ .

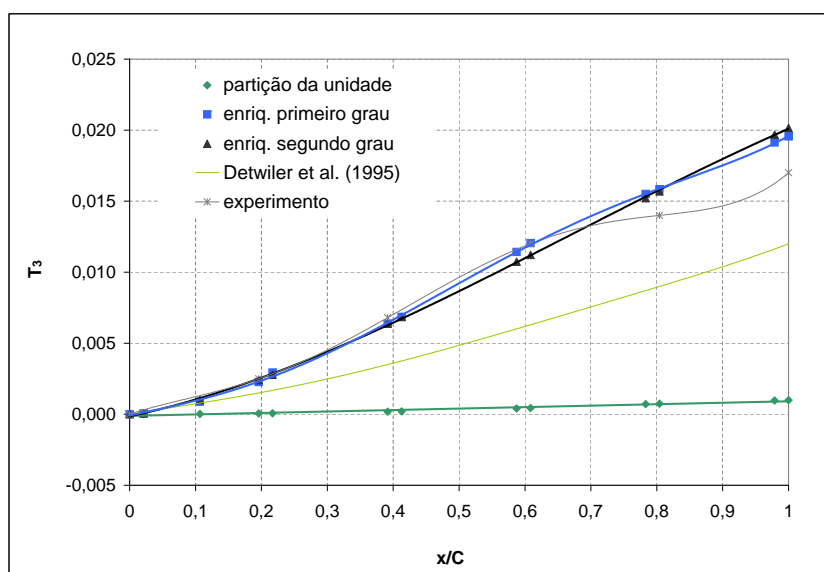


Figura 17: Deflexão normalizada  $T_3$  para laminado  $[+30/+30/0]_s$ .

### 8.2.2 Placa laminada composta com sensores e atuadores

Ainda, considerando a mesma placa do experimento de CRAWLEY e LAZARUS (1991), DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995) apresentaram uma outra situação para análise de sua implementação baseada na modelagem executada com elementos sólidos formulados por HA, KEILERS e CHANG (1992). Aqueles autores consideraram a mesma placa como

descrito anteriormente, para uma sequência de empilhamento  $[+30/+30/0]_s$ , no entanto, com a aplicação de um potencial de 100 V, negativo nas pastilhas superiores e positivo nas pastilhas inferiores, de um lado da placa. O mesmo potencial elétrico foi aplicado na linha de pastilhas do outro lado da placa, mas agora com polaridade invertida. As pastilhas piezelétricas da linha central permaneceram com os graus de liberdade de potencial elétrico livres, configurando-se como sensores. Além disso, uma força de 0,2 N foi aplicada no centro da aresta em balanço.

Neste trabalho, tal modelo de verificação foi analisado impondo-se a condição de igualdade entre os graus de liberdade de potencial elétrico dos elementos com lâminas piezelétricas configuradas como sensores. Isto se deve ao fato de que o elemento finito formulado por DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995) ter a restrição de nulidade do gradiente do potencial elétrico nas direções coplanares, e tal restrição se faz necessária para se poder fazer alguma comparação.

Os valores de potenciais calculados nas pastilhas piezelétricas configuradas como sensores são mostrados na Figura 18. São também mostrados os resultados para o modelo com elementos de placa implementados por DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995) e elementos sólidos formulados por HA, KEILERS e CHANG (1992).

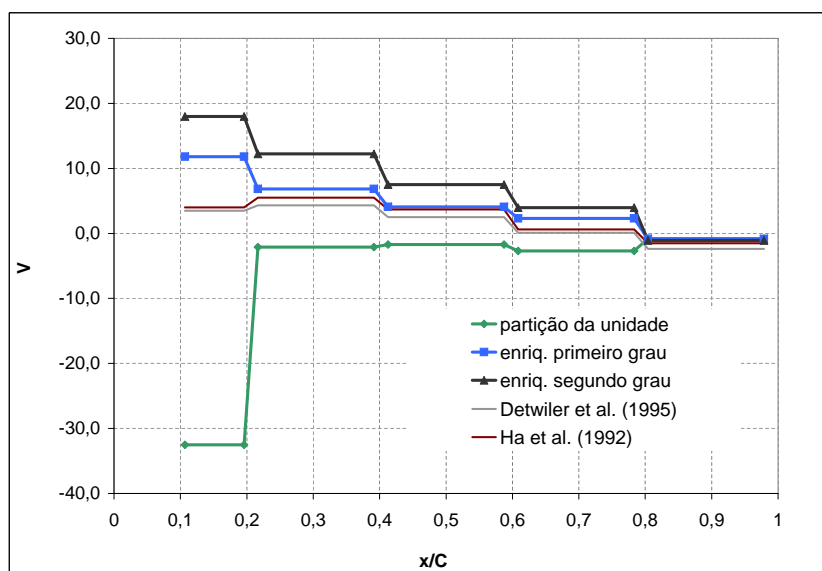


Figura 18: Potenciais elétricos calculados para sensores em laminado  $[+30/+30/0]_s$ .

É notável a diferença entre os resultados obtidos para o enriquecimento de primeiro grau e a aproximação com somente a PU. Como visto, a utilização de um espaço de aproximação constituído somente pela PU, para a malha considerada, não conduz a resultados



acurados. Deve-se citar também que são três formulações distintas, sob vários aspectos. O elemento de DETWILER, SHEN e VENKAYYA (1995) é formulado segundo uma descrição mecânica via FSDT e considera um grau de liberdade elétrico por lâmina piezolétrica, por elemento. HA, KEILERS e CHANG (1992) utilizaram modos incompatíveis para consideração de deformações localizadas geradas pela atuação de lâminas piezolétricas em sua formulação tridimensional de um elemento paralelepípedo de 8 nós. Ainda, deve-se salientar que os valores do potencial elétrico calculados nos sensores próximos à aresta engastada devem, de fato, corresponderem aos valores máximos, em virtude da maior intensidade da flexão.

## 8.3 Placa laminada quadrada simplesmente apoiada

### 8.3.1 Efeito do enriquecimento na aproximação de deslocamentos

Com o propósito de avaliar com melhor precisão a capacidade de aproximação do MEFG foram analisados modelos de placa quadrada simplesmente apoiada com carregamento mecânico, para os quais foram obtidas as soluções exatas através do *Método de Navier*, conforme dedução desenvolvida no Capítulo 7, para o mesmo modelo cinemático usado na formulação em MEFG.

O primeiro caso consiste de uma placa quadrada, simplesmente apoiada nos quatro bordos, de dimensões  $1000 \text{ mm} \times 1000 \text{ mm}$ , com  $50 \text{ mm}$  de espessura, cuja sequência de empilhamento é  $[0/+90/+90/0]_s$ , sendo todas as camadas de mesma espessura. Foi considerado um carregamento mecânico uniformemente distribuído de intensidade  $10 \text{ N/cm}^2$ . As propriedades elásticas do material são listadas na Tabela 4.

Para avaliar o efeito dos refinamentos  $-h$  e  $-p$ , um quarto da placa foi modelado com malhas regulares de 1 até  $4 \times 4$  elementos finitos generalizados, aplicando-se gradativamente enriquecimentos até terceiro grau, conforme a Figura 19.

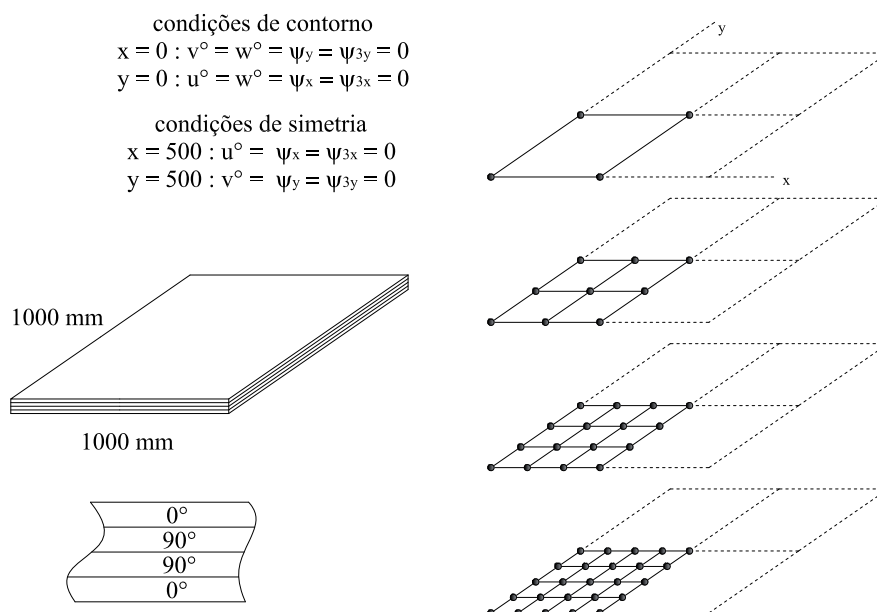
As condições de contorno essenciais de deslocamentos foram aplicadas de forma que para cada nível de enriquecimento foram preservadas as funções de enriquecimento que se anulam no *contorno de Dirichlet*.

As Figuras 20 - 23 apresentam perfis de deslocamentos transversais normalizados, com relação ao valor de referência obtido pela solução exata via expansão em séries trigonométricas, ao longo do contorno  $\mathbf{x} = 500 \text{ mm}$ , para os diversos graus de refina-

mento. A Tabela 5 mostra a quantidade de variáveis dos modelos em elementos finitos generalizados para cada nível de enriquecimento e número de elementos.

Tabela 4: Propriedades dos materiais

propriedades	base	piezolétrico
constantes elásticas		
$E_1$ (N/mm <sup>2</sup> )	$172,25 \times 10^3$	$94,95 \times 10^3$
$E_2$ (N/mm <sup>2</sup> )	$6,89 \times 10^3$	$94,95 \times 10^3$
$E_3$ (N/mm <sup>2</sup> )	$6,89 \times 10^3$	$81,89 \times 10^3$
$G_{12}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$3,45 \times 10^3$	$35,90 \times 10^3$
$G_{23}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$1,38 \times 10^3$	$25,40 \times 10^3$
$G_{13}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$3,45 \times 10^3$	$25,40 \times 10^3$
$\nu_{12}$	0,25	0,32
$\nu_{23}$	0,25	0,38
$\nu_{31}$	0,38	0,38
coeficientes piezolétricos		
$e_{15}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$9,20 \times 10^{-6}$
$e_{14}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$9,20 \times 10^{-6}$
$e_{31}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$-2,10 \times 10^{-6}$
$e_{32}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$-2,10 \times 10^{-6}$
$e_{33}$ (C/mm <sup>2</sup> )	-	$9,50 \times 10^{-6}$
constantes dielétricas		
$\chi_{11}$ (F/mm)	-	$4,07 \times 10^{-12}$
$\chi_{22}$ (F/mm)	-	$4,07 \times 10^{-12}$
$\chi_{33}$ (F/mm)	-	$2,08 \times 10^{-12}$

Figura 19: Modelos de um quadrante de placa com refinamento  $-h$ .

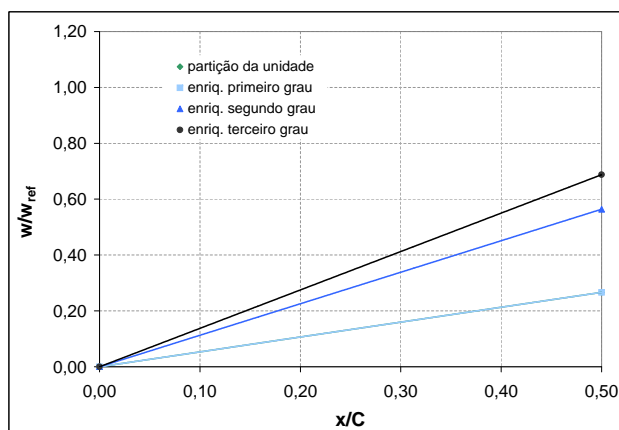
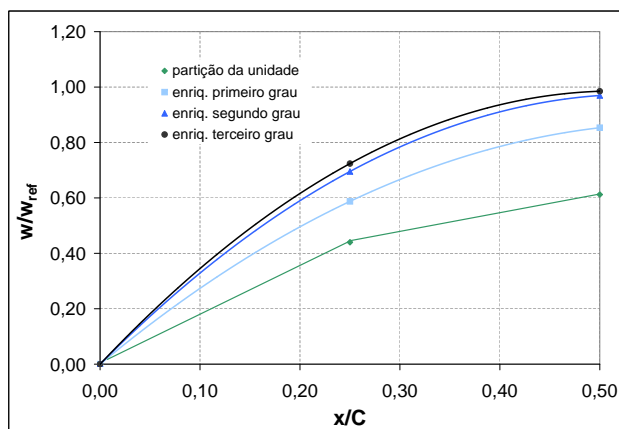
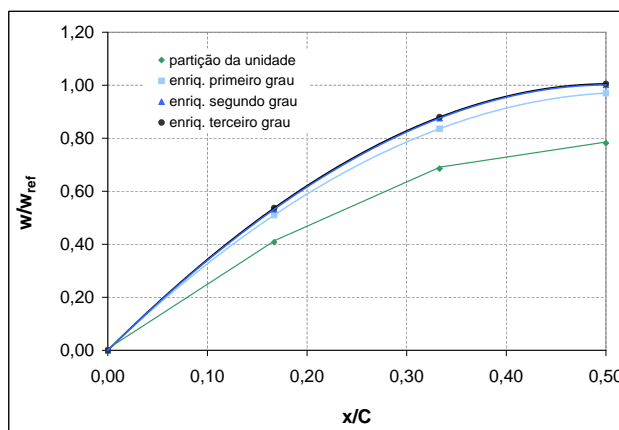


Figura 20: Deslocamento transversal normalizado para malha com 1 elemento.

Figura 21: Deslocamento transversal normalizado para malha com  $2 \times 2$  elementos.Figura 22: Deslocamento transversal normalizado para malha com  $3 \times 3$  elementos.

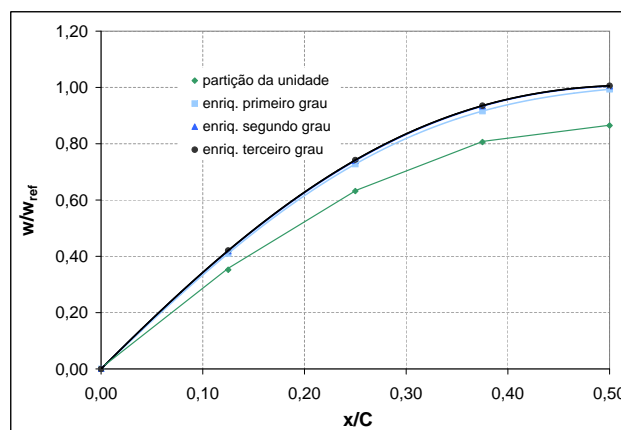


Figura 23: Deslocamento transversal normalizado para malha com  $4 \times 4$  elementos.

Tabela 5: Número de variáveis do modelo para cada nível de refinamento.

grau da aproximação	número de elementos			
	1	4	9	16
linear	6	6	38	88
quadrático	28	70	175	338
cúbico	63	175	399	729
quártico	112	322	707	1263

Para ilustrar a não susceptibilidade à distorção da malha, procedeu-se a modelagem de um quadrante da placa referida na análise anterior, com mesmas dimensões e mesma sequência de empilhamento. Considerou-se porém uma malha com elementos distorcidos conforme mostrado na Figura 24.

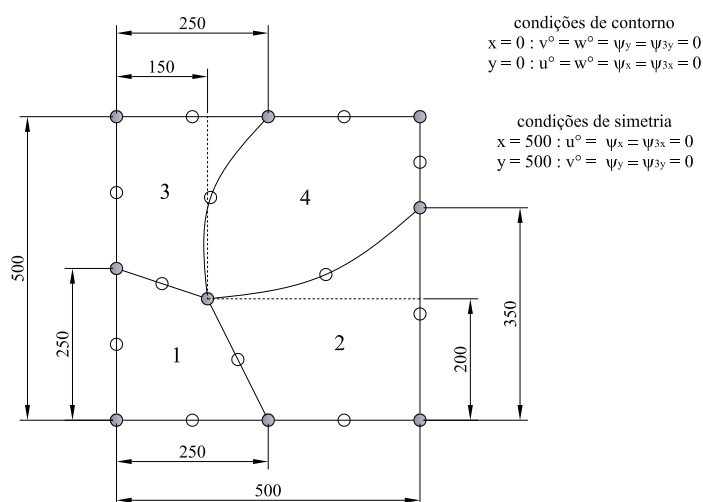


Figura 24: Malha com elementos distorcidos para enriquecimento  $-p$ .

Observa-se na Figura 25 que um espaço de aproximação constituído somente pela PU, para a malha proposta, não é suficiente para aproximar bem a solução do problema, conduzindo a um valor de deslocamento máximo da ordem de 55% do valor exato. Notável melhoria da aproximação já é conseguida com enriquecimento isotrópico de segundo grau, com o qual se obteve um deslocamento máximo da ordem de 90% do valor exato.

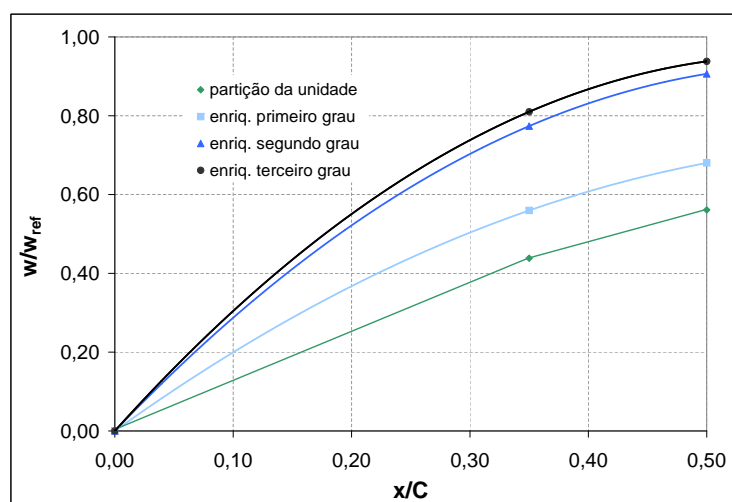


Figura 25: Deslocamento transversal normalizado para a malha com elementos distorcidos.

### 8.3.2 Efeito do enriquecimento na aproximação de tensões

Para verificar a capacidade da formulação de aproximar campos de tensões em placas laminadas, considerou-se um modelo de placa quadrada simplesmente apoiada nos quatro bordos, com carregamento senoidal, apresentado por REDDY (2004). O referido autor apresenta curvas de tensões máximas normalizadas para um laminado cruzado simétrico  $[0/+90/+90/0]_s$  com razão de aspecto, ou seja, a razão dimensão/espessura igual a 10. Seus resultados foram obtidos através da solução exata para o modelo HSDT de Reddy. As propriedades elásticas são aquelas citadas na Tabela 4.

No presente trabalho, são apresentados os perfis de tensões obtidas pela relação constitutiva considerando a seguinte normalização, conforme REDDY (2004)

$$\bar{\sigma} = \sigma \left( \frac{h^2}{q_0 a^2} \right) \quad (8.2)$$

para as tensões normais,  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , e

$$\bar{\sigma} = \sigma \left( \frac{h}{q_0 a} \right) \quad (8.3)$$

para as tensões cisalhantes transversais,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ .

Foi considerada uma malha regular com 16 elementos finitos generalizados, assim como aquela utilizada para a verificação da influência do enriquecimento  $-p$  (Figura 19), em virtude de que a aproximação do carregamento distribuído na forma senoidal ser aproximado linearmente no domínio do elemento para a implementação desenvolvida para este trabalho, o que poderia ser evitado implementando a obtenção do vetor de forças consistentes inserindo a própria função seno.

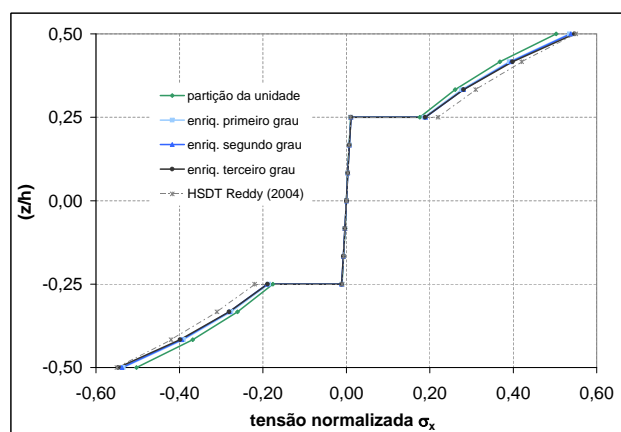


Figura 26: Máxima tensão normal normalizada  $\sigma_x$  em função do nível de enriquecimento

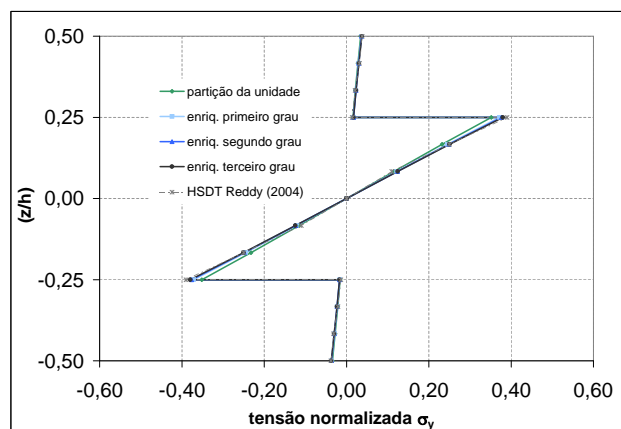


Figura 27: Máxima tensão normal normalizada  $\sigma_y$  em função do nível de enriquecimento

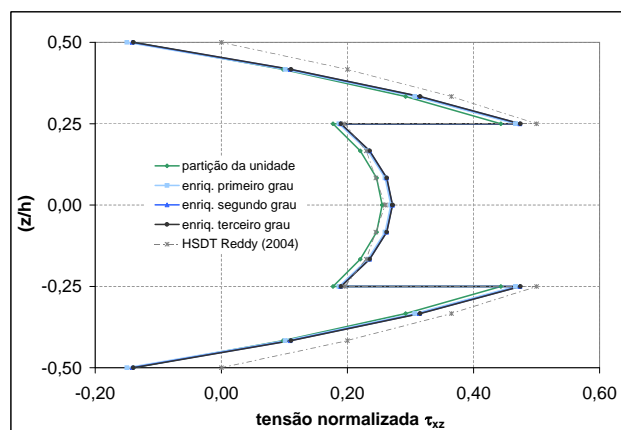


Figura 28: Máxima tensão cisalhante transversal normalizada  $\sigma_{xz}$  em função do nível de enriquecimento

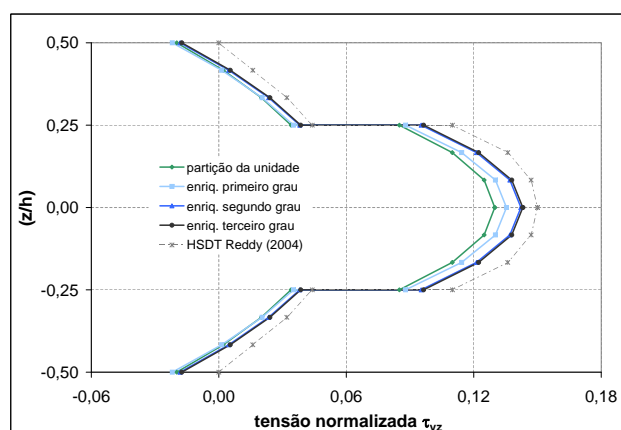


Figura 29: Máxima tensão cisalhante transversal normalizada  $\sigma_{yz}$  em função do nível de enriquecimento

Fica evidente a consistência da formulação, deixando claro ainda que o enriquecimento  $-p$  melhora a capacidade de aproximação dos campos de tensões em estruturas laminadas.

Deve-se fazer a ressalva que para as tensões cisalhantes transversais obtidas pela relação constitutiva que a condição de nulidade das referidas tensões nas superfícies livres do laminado não é satisfeita, como para os valores de comparação apresentados por REDDY (2004). Tal fato se deve diretamente à hipótese cinemática adotada na formulação, que não impõem tal restrição tanto quanto aquela desenvolvida pelo referido autor.

## 9 *Considerações finais*

A presente dissertação considera o desenvolvimento e a implementação computacional de uma formulação para análise de placas laminadas compostas inteligentes, dotadas de sensores e atuadores piezelétricos, através de uma metodologia numérica de origem relativamente recente.

A associação das potencialidades do Método dos Elementos Finitos Generalizados à descrição cinemática através da Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Superior e à descrição do comportamento elétrico dos sensores e atuadores via Teoria em Camadas Discretas, representa uma alternativa bastante eficiente para a modelagem de tais estruturas, favorecendo a implementação de ferramentas capazes de auxiliar no desenvolvimento de projeto de estruturas formadas por estes sistemas.

Portanto, a proposta do trabalho esteve inserida em dois amplos horizontes: contribuir para a consolidação do MEFG enquanto alternativa viável em análise estrutural, quer seja pela sua capacidade de aproximação ou pela relativa simplicidade de implementação, e contribuir para a difusão dos sistemas estruturais inteligentes, enquanto tecnologia aplicável à manutenção de forma, controle e supressão de vibrações, monitoramento de integridade e detecção de processos de dano.

A revisão da literatura especializada permitiu constatar que o escopo do trabalho tem atraído e motivado inúmeros pesquisadores.

Foi apresentado o MEFG, sua origem, suas principais características, a noção de aproximação local da solução e a metodologia de construção do espaço de aproximação.

Discorreu-se sobre a *mecânica de placas laminadas compostas*, fazendo-se uma revisão acerca da obtenção da matriz constitutiva da lâmina e levantando-se as principais teorias para descrição do comportamento de laminados, tanto as *Teorias em Camada Equivalente Única* quanto as mais recentes propostas baseadas na metodologia em *Camadas Discretas*. Vale citar que, embora não seja um tema de origem recente em virtude de haver, no mínimo, três décadas de evoluções e aperfeiçoamentos, o assunto ainda continua instigando



e motivando o trabalho de vários estudiosos, além de ser do interesse do presente autor.

Contemplou-se a formulação fenomenológica da eletroelasticidade linear, a obtenção das equações governantes do fenômeno piezolétrico e a representação da relação constitutiva mecânica-eletricamente acoplada.

A partir do *Princípio Variacional*, as equações do movimento do sistema eletromecanicamente acoplado foram apresentadas, o que possibilitou a correta representação do comportamento dos elementos piezolétricos inseridos na estrutura laminada. Ao longo da exposição, procurou-se detalhar a geração da matriz de rigidez elementar, da matriz de inércia elementar e dos vetores de forças consistentes, enfatizando a semelhança com o MEF convencional e a possibilidade de se alterar, sem grandes obstáculos, os códigos computacionais existentes baseados em elementos finitos.

Despertou-se o interesse também pelo tratamento analítico do problema de flexão de placas com sensores e atuadores piezolétricos. Pela constatação da carência de tal desenvolvimento para modelos baseados nas hipóteses cinemáticas da presente formulação, investiu-se na dedução das equações diferenciais do movimento do problema mecânica-eletricamente acoplado juntamente com as condições de contorno consistentes. A partir desta *forma forte*, foi obtida a solução analítica para o problema de uma placa laminada retangular sob carregamento uniformemente distribuído. Apesar de ainda em fase inicial, tal desenvolvimento permitirá avaliar a taxa de convergência da formulação discretizada para variados refinamentos  $-h$  e enriquecimentos  $-p$ .

A verificação da formulação e da respectiva implementação foi conduzida mediante comparação de resultados para alguns casos-testes reportados na literatura.

Ficou constatado que o enriquecimento da aproximação inicial obtida com a PU, na forma proposta pelo MEF, permite uma melhoria na qualidade da resposta, sem a necessidade de alteração da malha de elementos. Como vantagem, ressalta-se a possibilidade do uso de funções enriquecedoras de diferentes graus polinomiais, conforme a região do domínio, sem perda de conformidade entre os elementos.

O uso de funções de forma lagrangeanas do MEF, combinando com a utilização de funções enriquecedoras polinomiais, conduz à geração de sistemas lineares singulares, o que requer a utilização de sub-rotinas compatíveis para a solução de sistemas de equações.

A característica do MEF de permitir de modo bastante conveniente o enriquecimento local da aproximação faz deste método uma alternativa eficiente na simulação do fenômeno de localização, conforme se observou na literatura. Com isso, podem-se cap-

turar os elevados gradientes de deformação que ocorrem de forma localizada, sem que haja um aumento substancial do custo computacional.

## 9.1 Sugestões para trabalhos futuros

Pode-se citar brevemente como propostas para trabalhos futuros:

- medida da taxa de convergência na média do método, usando-se os conceitos de norma de energia e norma do erro, por exemplo;
- adaptatividade e estimação de erro por objetivo;
- modelagem de cascas laminadas compostas inteligentes utilizando a metodologia do MEFG;
- incorporação de relações constitutivas que contemplam os efeitos piroelétrico e magnetoelétrico, além da consideração do efeito higrotérmico;
- modelagem de placas e cascas laminadas e estruturas sanduíche considerando material com memória de forma na arquitetura do composto;
- análise de placas e cascas no domínio do tempo e da frequência e avaliação dos efeitos do enriquecimento na resposta dinâmica da estrutura, incluindo a aplicação de funções de enriquecimento não polinomiais;
- controle ativo de forma e vibrações em estruturas do tipo placa e casca;
- análise de sensibilidade e otimização do posicionamento dos sensores e atuadores;
- inclusão do efeito da não linearidade geométrica;
- análise do efeito do enrijecimento por tensões induzidas no comportamento vibratório e em flambagem;
- análise do efeito do enriquecimento para funções incógnitas específicas do modelo cinemático na resposta para campos primais e duais;
- estudos locais dos campos de tensões, deformações e variação do potencial elétrico;
- estudo do fenômeno de localização de deformações e de dano;

- 
- modelagem do monitoramento do processo evolutivo do dano em estruturas laminadas compostas inteligentes, uso de funções não polinomiais para enriquecimento do espaço juntamente com metodologias multi-escala e teoria de micromecânica para meios heterogêneos.

## *Referências bibliográficas*

ABREU, G. L. C. M.; RIBEIRO, J. F.; STEFFEN JR., V. Finite element modeling of a plate with localized piezoelectric sensors and actuators. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 26, n. 2, p. 117 - 128, 2004.

ALLIK, H.; HUGHES, T. J. R. Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 2, p. 151 - 158, 1970.

BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special Finite Element Method for a classe of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Methods in Engineering*, v. 31, n. 4, p. 945 - 981, 1994.

BARROS, F. B. *Métodos sem malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em análise não-linear de estruturas*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

BATRA, R. C.; LIANG, X. Q. Shape control of vibrating simply supported rectangular plates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 34, n. 1, p. 116 - 122, 1996.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y.; GU, L. Element-Free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, p. 229 - 256, 1994.

BERTHELOT, J. -M. *Matériaux Composites: comportement mécanique et analyse des structures*. Paris: Masson, 1992.

CARRERA, E. On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers and Structures*, v. 82, p. 541 - 554, 2004.

CARVALHAL, R. *Controle ativo de vibrações em estruturas espaciais tipo treliças usando controladores IMSC*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.

CARVALHO NETO, A. L. *Formulation of a rectangular finite element for a laminated composite plate with piezoelectric layers*. Dissertação (Mestrado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2000.

CEN, S.; SOH, A. -K.; LONG, Y. -Q.; YAO, Z. -H. A new 4-node quadrilateral FE model with variable electrical degrees of freedom for the analysis of piezoelectric laminated composite plates. *Composite Structures*, v. 58, p. 583 - 599, 2002.

CHALAYE, H. *Les matériaux composites: dynamisme et innovation*. Le 4 pages: des statistiques industrielles, DiGIPTIP: Ministère de l'Economie, des Finances et de l'Industrie. n. 158, 2002.

CHEE, C. Y. K. *Static shape control of laminated composite plate smart structure using piezoelectric actuators*. Tese (Doutorado) - University of Sydney, Sydney, 2000.

CHEE, C. Y. K.; TONG, L.; STEVEN, G. P. A review on the modelling of piezoelectric sensors and actuators incorporated in intelligent structures. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 9, p. 3 - 19, 1998.

CORREIA, V. M. F.; GOMES, M. A. A.; SULEMAN, A.; SOARES, C. M. M.; SOARES, C. A. M. Modelling and design of adaptive composite structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 185, p. 325 - 346, 2000.

COTONI, V.; MASSON, P.; CÔTÉ, F. A finite element for piezoelectric multilayered plates: combined higher-order and piecewise linear  $C^0$  formulation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 17, p. 155 - 166, 2006.

CRAWLEY, E. F.; DE LUIS, J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 25, n. 10, p. 1373 - 1384, 1987.

CRAWLEY, E. F.; LAZARUS, K. B. Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 29, n. 6, p. 944 - 951, 1991.

DETWILER, D. T.; SHEN, M. -H. H.; VENKAYYA, V. B. Finite element analysis of laminated composite structures containing distributed piezoelectric actuators and sensors. *Finite Element in Analysis and Design*, v. 20, p. 87 - 100, 1995.

DI, S.; ROTHERT, H. A solution of laminated cylindrical shells using an unconstrained third-order theory. *Journal of Composite Structures*, v. 32, p. 667 - 680, 1995.

DI SCIUVA, M. Development of an anisotropic, multilayered, shear-deformable rectangular plate element. *Computers and Structures*. v. 21, n. 4, p. 789 - 796, 1985.

DONADON, M. V. *Vibração de placas laminadas na presença de tensões induzidas piezoeletricamente*. Dissertação (Mestrado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2000.

DUARTE, C. A. *The hp-cloud method*. Tese (Doutorado) - The University of Texas at Austin, Austin, 1996.

DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. Generalized Finite Element Methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, v. 77, p. 215 - 232, 2000.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An *h-p* adaptive method using cloud. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 237 - 262, 1996.

FARIA, A. W. *Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2006.

GARCIA, O. A. *Elementos Finitos Generalizados na análise estática de placas e cascas*. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

- HA, S. K.; KEILERS, C.; CHANG, F. K. Finite Element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 30, n. 3, p. 772 - 780, 1992.
- HURLEBAUS, S.; GAUL, L. Smart structures dynamics: review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 20, p. 255 - 281, 2006.
- HWANG, W. S.; PARK, H. C. Finite Element modeling of piezoelectric sensors and actuators. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 31, n. 5, p. 930 - 937, 1993.
- JIA-XIONG, Z.; YE-LI, F. A new higher-order theory to laminated plates and shells. *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 14, n. 1, p. 23 - 32, 1990.
- LIMA JR., J. J. *Modelagem de sensores e atuadores piezolétricos com aplicações em controle ativo de estruturas*. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.
- LAGE, R. G.; SOARES, C. M. M.; SOARES, C. A. M.; REDDY, J. N. Layerwise partial mixed finite element analysis of magneto-electro-elastic plates. *Computers and Structures*, v. 82, p. 1293 - 1301, 2004.
- LAGE, R. G.; SOARES, C. M. M.; SOARES, C. A. M.; REDDY, J. N. Modelling of piezolaminated plates using layerwise mixed finite elements. *Computers and Structures*, v. 82, p. 1849 - 1963, 2004.
- LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by Moving Least Squares Methods. *Mathematics of Computation*, v. 37, n. 155, p. 141 - 158, 1981.
- LEE, H. J. *Finite element analysis of active and sensory thermopiezoelectric composite materials*. National Aeronautics and Space Administration. Report 210892, 2001.
- LEE, H. J.; SARAVANOS, D. A. Generalized finite element formulation for smart multi-layered thermal piezoelectric composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 34, n. 26, p. 3355 - 3371, 1997.

LEE, S. J.; REDDY, J. N.; ROSTAM-ABADI, F. Transient analysis of laminated composite plates with embedded smart-material layers. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, p. 463 - 483, 2004.

LEVINSON, M. An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, v. 7, p. 343 - 350, 1980.

LI, X. Y.; LIU, D. Generalized laminate theories based on double superposition hypothesis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 1197 - 1212, 1997.

LIEW, K. M.; HE, X. Q.; TAN, M. J.; LIM, H. K. Dynamic analysis of laminated composite plates with piezoelectric sensor/actuator patches using the FSDT mesh-free method. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 46, p. 411 - 431, 2004.

LISZKA, T.; ORKISZ, J. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers and Structures*, v. 11, p. 83 - 95, 1980.

LIU, G. R. *Mesh free methods: moving beyond the Finite Element Method*. Boca Raton: CRC Press, 2003.

LO, K. H.; CHRISTENSEN, R. M.; WU, E. M. A high-order theory of plate deformation: homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*, p. 663 - 668, 1977.

MACHADO, M. A. M. *Soluções analíticas para placas laminadas piezelétricas retangulares*. Dissertação (Mestrado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2004.

MELENK, J. M. *On Generalized Finite Element Methods*. Tese (Doutorado) - University of Maryland, College Park, 1995.

MENDONÇA, P. T. R. *Materiais compostos e estruturas sanduíche*. Barueri: Manole, 2005.

MONAGHAN, J. J. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, v. 110, p. 399 - 406, 1994.



MOSALLAM, A. S. Polymer composites: architectural and civil construction materials for the twenty first century. In: Anais da Conferência Internacional de Compósitos na Arquitetura e Construção Civil - Arquimacom 2002. São Paulo, 2002.

MURAKAMI, H. Laminated composite plate theory with improved in-plane response. *Journal of Applied Mechanics*, v. 53, p. 661 - 666, 1986.

NEYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the Finite Element Method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, v. 10, p. 307 - 318, 1992.

NELSON, R. B.; LORCH, D. R. A refined theory of laminated orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 41, n. 1, p. 177 - 183, 1974.

NYE, J. F. *Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices*. 4. ed. London: Oxford University Press, 1969.

ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based *hp* finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 153, p. 117 - 126, 1998.

PANDYA, B. N.; KANT, T. A. A refined higher-order generally orthotropic  $C^0$  plate bending element. *Computer and Structures*, v. 28, n. 2, p. 119 - 133 , 1988.

RAY, M. C. Zeroth-order shear deformation theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 70, p. 374 - 380, 2003.

RAY, M. C.; BHATTACHARYA, C. R.; SAMATA, B. Exact solutions for static analysis of intelligent structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 31, n. 9, p. 1684 - 1691, 1993.

RAY, M. C.; RAO, K. M.; SAMATA, B. Exact solution for static analysis of an intelligent structure under cylindrical bending. *Computer and Structures*, v. 47, n. 6, p. 1031 - 1042, 1993.

- REDDY, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 51, p. 745 - 752, 1984.
- REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates*. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- REDDY, J. N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators. *Engineering Structures*, v. 21, p. 568 - 593, 1999.
- REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004.
- ODEN, J. T.; REDDY, J. N. *An introduction to the mathematical theory of Finite Elements*. New York, John Wiley and Sons, 1976.
- REISSNER, E. On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, v. 11, p. 569 - 573, 1975.
- ROCHA, T. L. *Modelagem de estruturas inteligentes*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004.
- SARAVANOS, D. A. Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 35, p. 1327 - 1333, 1997.
- SARAVANOS, D. A.; HEYLIGER, P. R.; HOPKINS, D. A. Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. *International Journal for Solids and Structures*, v. 34, n. 3, p. 359 - 378, 1997.
- SHIMPI, R. C. Zeroth-order shear deformation theory for plates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 37, p. 524 - 526, 1998.
- SORIANO, H. L. *Método de Elementos Finitos em análise de estruturas*. São Paulo: Edusp, 2003.

STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The desing and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, p. 43 - 69, 2000.

SUN, D.; TONG, L.; WANG, D. An incremental algorithm for static shape control of smart structures with nonlinear piezoelectric actuators. *International Journal of Solids and Structures*, v. 41, p. 2277 - 2292, 2004.

SZE, K. Y.; PAN, Y. S. Hybrid finite element models for piezoelectric materials. *Journal of Sound and Vibration*, v. 226, n. 3, p. 519 - 547, 1999.

TORRES, I. F. R. *Desenvolvimento e aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

TZOU, H. S.; TSENG, C. I. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach. *Journal of Sound and Vibration*, v. 138, p. 17 - 34, 1990.

TZOU, H. S.; YE, R. Analysis of piezoelastic structures with laminated piezoelectric triangle shell elements. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 34, n. 1, p. 110 - 115, 1996.

VEL, S. S.; BATRA, R. C. Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators. *Smart Materials and Structures*, v. 10, p. 240 - 251, 2001.

WHITNEY, J. M.; SUN, C. T. A refined theory for laminated anisotropic cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, v. 41, n. 2, p. 471 - 476, 1974.

ZHEN, W.; WANJI, C. Refined global-local higher order theory and finite element for laminated plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, p. 1627 - 1670, 2007.

## *APÊNDICE A – Solução do sistema de equações no MEFG*

Seja o seguinte sistema de equações, obtido da aproximação de Galerkin de um PVC para a formulação em MEFG

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{A.1}$$

tal que, devido à dependência linear do conjunto de funções aproximadoras, a matriz  $\mathbf{K}$  possui novas auto-funções cuja natureza é desconhecida. Desse modo, não se define a inversa  $\mathbf{K}^{-1}$ . Ainda assim, a solução do sistema existe, apesar de não ser única. Para resolvê-lo, uma das alternativas propostas no trabalho de STROUBOULIS, BABUŠKA e COPPS (2000), consiste em se introduzir uma pequena perturbação na matriz de rigidez e, através de um procedimento iterativo, corrigir a solução aproximada obtida para o novo sistema de equações, estratégia que é reportada na literatura como *procedimento de Babuška*.

Considera-se então,  $\mathbf{I}$  a matriz identidade e  $\epsilon > 0$  uma constante. A partir de  $\mathbf{K}$  determina-se uma nova matriz, agora positiva definida e dada por

$$\mathbf{K}_\epsilon = \mathbf{K} + \epsilon\mathbf{I} \tag{A.2}$$

Com a nova matriz  $\mathbf{K}_\epsilon$  gera-se uma primeira aproximação para a solução do sistema na forma

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{K}_\epsilon^{-1}\mathbf{F} \tag{A.3}$$

Como  $\mathbf{U}_0$  é aproximada, haverá um resíduo definido por

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}_0 \quad (\text{A.4})$$

A aproximação  $\mathbf{e}_0$  para o primeiro erro do procedimento é definida como

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{K}_\epsilon^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}_0) \quad (\text{A.5})$$

e substituindo (A.4) em (A.5) obtém-se

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{K}_\epsilon^{-1}\mathbf{r}_0 \quad (\text{A.6})$$

A solução aproximada é, então, atualizada através de

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_0 + \mathbf{e}_0 \quad (\text{A.7})$$

cujo resíduo é definido por

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{K}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{e}_0) \quad (\text{A.8})$$

Pode-se reescrever (A.8) como

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{K}\mathbf{e}_0 \quad (\text{A.9})$$

Repetindo-se (A.5), tem-se, para a iteração 1

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{K}_\epsilon^{-1}\mathbf{r}_1 \quad (\text{A.10})$$

Uma nova solução aproximada é, portanto, obtida

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 + \mathbf{e}_1 = \mathbf{U}_0 + (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \quad (\text{A.11})$$

e o resíduo correspondente é

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{K}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{e}_1) = \mathbf{F} - \mathbf{K}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \quad (\text{A.12})$$

que reformulado determina

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{K}(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \quad (\text{A.13})$$

O erro aproximado pra a iteração 2 é, então, dado por

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{K}_\epsilon^{-1} \mathbf{r}_2 \quad (\text{A.14})$$

e a próxima solução aproximada é

$$\mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_2 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{U}_0 + (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \quad (\text{A.15})$$

As expressões (A.13) - (A.15) devem ser repetidas até que uma determinada medida de erro seja pequena o suficiente.

Em DUARTE, BABUŠKA e ODEN (2000) sugere-se que a matriz de rigidez tenha sua diagonal normalizada, gerando-se um sistema de equações equivalente

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (\text{A.16})$$

de forma que procura-se reduzir os erros durante o processo iterativo, fazendo-se com que a perturbação na diagonal principal seja independente da ordem de grandeza dos elementos de  $\bar{\mathbf{K}}$ .