UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

MÁRCIO ROSTIROLLA ADAMES

Os invariantes de Perelman e Yamabe

Florianópolis - SC
Janeiro - 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

MÁRCIO ROSTIROLLA ADAMES

Os invariantes de Perelman e Yamabe

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso
Mestrado em Matemática - Habilitação Honors Magister
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Celso M. Doria

Florianópolis - SC
Janeiro - 2008

Agradecimentos

Graças ao Bom Senhor que me ajudou em muitos momentos neste trabalho, devido a Ele completei esta dissertação. Louvado seja o nome do Senhor.

A Jhuliane pelo carinho e a compreensão, nas noites e finais de semana que fiquei pesquisando e estudando.

Agradeço aos meus pais Vitor e Yara pela oportunidade de me dedicar aos meus estudos e apoio e incentivo em tudo o que faço, a minha vó Elça por também me apoiar e incentivar.

Agradeço ao meu orientador, o professor Celso M. Doria, pela paciência quando mudamos o assunto do trabalho e por estar disponível sempre que precisei.

Agradeço aos professores do Departamento que, apesar de não ter participação direta na pesquisa, me ajudaram em algumas dúvidas que tive pelo caminho: Ivan, Eliezer, Ruy Charão, Luciano, Marcelo.

Agradeço ao professor Fernando Codá Marques que, apesar de não me conhecer pessoalmente, respondeu os emails que lhe enviei e sua ajuda foi de grande valia.

Agradeço a todos os colegas do mestrado pois sempre que lhes perguntei algo tentaram me ajudar, especialmente ao Felipe Vieira pois pensamos juntos em várias questões e ao Conrado D. Lacerda pelo excelente trabalho sobre distribuições.

Agradeço a CAPES pelo patrocinio que deu a este trabalho, sem o qual seria impossível completa-lo.

Resumo

Definimos o Laplaciano e a Curvatura Escalar sobre uma variedade M e os invariantes de Yamabe e de Perelman. Provamos que eles são iguais quando o primeiro é não positivo e que o Invariante de Perelman é igual a $+\infty$ quando o invariate de Yamabe é positivo.

Abstract

We define the Laplacian and the Scalar Curvature of a manifold M and the invariants of Yamabe and Perelman. We prove that they are equal when the first is non-positive and that Perelman's invariant is equal to $+\infty$ when the Yamabe invariant is positive.

Sumário

Introdução **7**

1 Curvatura Escalar **10**
1.1 A conexão de Levi-Civita 10
1.2 Curvaturas 18

2 O Laplaciano **29**
2.1 Espaços e produtos internos sobre M 29
2.2 O divergente, o gradiente e o Laplaciano 33
2.3 Generalizando o Laplaciano 44
2.3.1 Integração à Lebesgue em Variedades 44

3 Os invariantes **49**
3.1 Invariante de Perelman 49
3.2 Problema de Yamabe 57
3.3 A igualdade entre os invariantes 71

4 Anexo **74**

Introdução

O estudo da geometria é muito antigo. Desde os primórdios a tarefa de medir comprimentos, áreas e volumes tem importancia prática nas mais diversas atividades humanas, desde a agricultura até a fabricação de vestes. Os elementos de Euclides, que tem mais de 2000 anos, reúnem o conhecimento geométrico que havia sido construido até a época em que foi escrito. Esse conhecimento resolvia muitos problemas envolvendo poligonos e círculos, mas não todos.

Com o advento do Plano Cartesiano e da Geometria Analítica muitos dos problemas que resistiam às ferramentas da Geometria Euclideana foram resolvidos, mas estas ferramentas são eficientes apenas no estudo de retas, círculos e algumas curvas simples.

O Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz resolve muitos destes problemas, calculando comprimentos de curvas, áreas de superfícies, e volumes de sólidos que possam ser descritos como funções. Para tais feitos utiliza-se o conceito de derivação: no caso de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se $v, p \in \mathbb{R}^n$, a derivada de f no ponto p na direção de v é denotada por $df_p(v)$ e é dada por

$$df_p(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

Note que precisa-se da estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ a fim de calcular f no ponto $p + tv$.

Considere no entanto o seguinte:

Exemplo 1. Sejam S^2 a superfície de uma esfera e $f : S^2 \to \mathbb{R}$ a função que descreva a temperatura em cada ponto da superfície. Dado um vetor v no plano tangente a S^2 no ponto p qual é a variação da temperatura em p na direção de v?

As ferramentas de cálculo não são suficientes para resolver tal problema pois não sabemos calcular $f(p+tv)$ para nenhum $t \neq 0$. Pelo mesmo motivo, as ferramentas do Cálculo não resolvem problemas análogos aos do Exemplo 1 para funções definidas em superfícies que não sejam planas.

Outro exemplo é a teoria da Relatividade Geral, na qual o espaço-tempo tem 4 dimensões mas não é plano como $\mathbb{R}^4$ e portanto as ferramentas do Cálculo são insuficientes para estudá-lo de forma completa.

A incapacidade do Cálculo para lidar com superfícies que não sejam planas é apenas um motivo que mostra a importância de construir uma teoria geral de superfícies (e uma geometria) que independa do espaço ambiente em que ela está contida. Para tal introduziu-se o conceito de variedade diferenciável:

Definição 0.0.1. Uma **variedade diferenciável** de dimensão n é um espaço topológico de Hausdorff segundo contável localmente homeomorfo ao $\mathbb{R}^n$ tal que as aplicações de transição sejam suaves.

Para mais detalhes sobre esta definição o leitor pode consultar [2].

A maioria dos objetos que pensamos intuitivamente como superfícies são variedades diferenciáveis. Existem generalizações para as variedades de muitos conceitos do Cálculo, e com eles podemos derivar e integrar funções definidas sobre estas variedades. Além disso, se tivermos uma métrica definida sobre a variedade, isto é, uma maneira de medirmos comprimentos e ângulos, podemos fazer geometria sobre a variedade.

Contudo estudar tais variedades é bastante complexo. Descobrir quais estruturas podem ser variedades e quais não, ou tentar extrair características destas variedades, ou dividi-las em classes que tenham alguma característica em comum são problemas que não estão completamente resolvidos.

Mas existem algumas ferramentas que nos permitem entender um pouco mais destas variedades. Uma delas são os invariantes, funções que associam a cada variedade um número real (ou um grupo, ou uma variedade, ou uma funçao) e são invariantes por difeomorfismos [1]

Neste trabalho denotamos por s_g a curvatura escalar e $\triangle_g$ o Laplaciano associados a métrica Riemanniana g. Definimos dois invariantes:

O invariante de Perelman

Definição 0.0.2. Sejam M uma variedade diferenciavel fechada orientada n-dimensional, $n \geq 3$. Dada uma métrica Riemanniana g sobre M, denotamos o menor autovalor do operador $4\triangle_g + s_g$ por λ_g e o volume de M em relação a esta métrica por vol_g. O **invariante de Perelman** $\overline{\lambda}$ de M é definido como

$$\overline{\lambda}(M) := \sup_g \lambda_g vol_g^{\frac{2}{n}},$$

onde o sup é tomado sobre todas as métricas Riemannianas de M.

[1] Em topologia diferencial diz-se que duas variedades são *a mesma* se elas são difeomorfas.

E o invariante de Yamabe

Definição 0.0.3. Seja M uma variedade diferenciavel fechada de dimensão $n \geq 3$. Definimos o **invariante de Yamabe** (também conhecido como *sigma constante*) de M como

$$\mathcal{Y}(M) = \sup_{\gamma} Y_{\gamma} = \sup_{\gamma} \inf_{g \in \gamma} \frac{\int_M s_g d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}, \tag{1}$$

onde o sup é tomado sobre as classes conformes (trataremos sobre estas classes mais adiante) e o infimo sobre as todas as métricas na classe conforme γ.

O primeiro surgiu em uns artigos de Perelman sobre o fluxo de Ricci ([9] e [10]) e o segundo em trabalhos de de Kobayashi [6] e Schoen [13] influenciados pelas ideias de Yamabe de encontrar métricas de curvatura escalar constante.

Assumimos que o leitor tem algum conhecimento sobre variedades diferenciáveis e Geometria Riemanniana, os primeiros 5 capítulos de [2] e o primeiro capítulo de [3] contém o que assumimos como já conhecido pelo leitor.

No primeiro capítulo definimos a curvatura escalar e introduzimos a notação para a métrica e outros objetos em coordenadas locais.

No segundo capítulo definimos a integração à Riemann sobre variedades e o Laplaciano para funções $C^{\infty}(M)$. Em seguida uma rápida apresentação sobre integração a Lebesgue em variedades, espaços $L^p(M)$ e teoria das distribuições. Por fim generalizamos o Laplaciano para estas funções e o escrevemos em termos dos coeficientes de conexão.

No terceiro capítulo definimos o invariante de Perelman e damos uma fórmula para encontrá-lo. Em seguida estudamos um pouco do problema de Yamabe e definimos o invariante de Yamabe. A última parte deste trabalho é baseada no artigo [1] no qual demonstra-se o seguinte fato: Estes invariantes são iguais se o invariante de Yamabe é não positivo e o invariante de Perelman é igual a $+\infty$ se o invariante de Yamabe é positivo. Este fato é um tanto surpreendente pois tais invariantes vem de contextos distintos.

Capítulo 1

Curvatura Escalar

Nosso objetivo neste capítulo é definir a curvatura escalar. Para isso definiremos uma conexão de Levi-Civita. A primeira seção é baseada no capítulo 2 de [3] e a segunda seção é baseada no capítulo 4 de [3].

1.1 A conexão de Levi-Civita

Denotamos $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais suaves sobre M.

Definição 1.1.1. Uma **conexão afim** ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

denotada por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ que, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$, satisfaz as seguintes propriedades

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

Podemos tomar esta definição localmente:

Dados um ponto $p \in M$ e campos vetoriais $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ tomemos uma carta local (U, α), com $\alpha(q) = (x_1(q), ..., x_n(q))$. Existem uma vizinhança $V \subset U$ de p e uma função suave $f : M \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ se $x \in V$ e $f(x) = 0$ se $x \in M \backslash U$. Assim, para qualquer ponto $q \in V$, temos

$$\nabla_{fX}(fY) = f^2 \nabla_X Y + fX(f)Y = \nabla_X Y,$$

portanto a conexão afim depende apenas do valor dos campos X e Y em uma vizinhança de p, ou seja, a conexão afim uma definição local.

Escrevendo $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x^j}$ temos

$$\nabla_X Y = \sum_{ij} a_i b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{ij} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}(b^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Fazendo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ (estas funções Γ_{ij}^k são chamadas de símbolos de Christoffel) temos

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} a_i b_j \Gamma_i j^k + X(b^k) \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Assim $\nabla_X Y(p)$ depende de $a_i(p)$, $b_k(p)$ e das derivadas $X(b_k)(p)$ de b_k segundo X, ou seja, depende apenas do valor do campo X no ponto p, de uma curva tangente a X no ponto p (pois a derivada $X(y_k)(p)$ depende apenas de uma destas curvas) e do campo Y em uma vizinhança do ponto p.

Portanto, dados $p \in M$, uma curva $c(t) : I \to M$ que passa por p, um campo vetorial X_c sobre c e um campo vetorial $Y \in \mathcal{X}(M)$, faz sentido escrever $\nabla_{X_c} Y$.

Teorema 1.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que, se V, W são campos de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I, temos:*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$
3. *Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$,*

onde $dc/dt = dc\left(\frac{d}{dt}\right)$.

Demonstração: Vamos supor que existe uma coorespondência satisfazendo $1, 2$ e 3. Sejam $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo com $c(I) \cap U \neq \emptyset$ e $(x^1(t), ..., x^n(t)) := \varphi \circ c$ para todo $t \in I$. Podemos expressar localmente o campo V como $V = \sum_j v^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j}(c(t))$.

Por 1 e 2 temos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_j v^j \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Mas $\frac{\partial}{\partial x^j}$ define um campo vetorial sobre U então, por 3, temos

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{dc/dt}\frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\sum_i \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_i \frac{dx^i}{dt}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j},\end{aligned}$$

pois $c(t) = \varphi^{-1}(x^1(t), ..., x^n(t))$ e daí

$$\begin{aligned}dc/dt &= d\varphi^{-1}(x^1(t), ..., x^n(t))/dt = d[\varphi^{-1}(x^1(t), ..., x^n(t))]\left(\frac{d}{dt}\right) \\ &= d\varphi^{-1}\left(\sum_i \frac{dx^i}{dt}\frac{d}{dx^i}\right) = \sum_i \frac{dx^i}{dt} d\varphi^{-1}\left(\frac{d}{dx^i}\right) = \sum_i \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{ij} \frac{dx^i}{dt} v^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{1.1}$$

Se existe uma correspondência satisfazendo às condições do teorema, a expressão 1.1 nos mostra que ela é única.

Para mostrar que tal correspondência existe, definamos $\frac{DV}{dt}$ em U por 1.1. É imediato que 1.1 tem as propriedades desejadas. Se $\beta : W \to \mathbb{R}^n$ é uma outra vizinhança coordenada, com $W \cap U \neq \emptyset$ e definirmos $\frac{DV}{dt}$ em W por 1.1 então, em $W \cap U$, ambas as definições são iguais, pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$ em U. Portanto podemos estender esta definição para todo M, o que conclui a demonstração.

■

Definição 1.1.3. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado **paralelo** quando $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.

Teorema 1.1.4. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$.*

Demonstração: Suponhamos que o teorema foi provado para o caso em que $c(I)$ está contido em uma vizinhança coordenada. Então, no caso geral, temos que o segmento $c([t_0,t_1]) \subset M$ (ou $c([t_1,t_0])$) para qualquer $t_1 \in I$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas, em cada uma das quais V pode ser definido por hipótese. Pela unicidade, as definições coincidem nas interseções não vazias, o que permite definir V para $c([t_0,t_1])$.

Deste modo podemos definir $V(t)$ para todo $t \in I$. Então basta mostrarmos o teorema para o caso em que $c(I)$ está em U, onde (φ, U) é uma carta de M.

Seja $\varphi(c(t)) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ a expressão local de $c(t)$ e seja $V_0 = \sum_j v_0^j \frac{\partial}{\partial x^j}(c(t_0))$.

Suponhamos que existe um V em U que é paralelo ao longo de c com $V(t_0) = V_0$. Então $\sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ satisfaz

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{ij} \frac{dx^i}{dt} v^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Escrevendo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ na base $\frac{\partial}{\partial x^j}$ obtemos $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Então obtemos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} v^j \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0.$$

Formamos um sistema de n equações diferenciais ordinárias em $v^k(t)$ para $k = 1, ..., n$

$$\frac{DV}{dt} = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} v^j \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0. \tag{1.2}$$

com a condição inicial $v^k(t_0) = v_0^k$. Tal sistema é linear e portanto admite uma única solução $v(t) = (v^1(t), ..., v^n(t))$ que está definida em todo I.

Definindo $V(t) = \sum_k v^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k}$, onde $v(t) = (v^1(t), ..., v^n(t))$ é a solução da equação 1.2, temos que V tem as propriedades desejadas e é o único campo que as satisfaz.

$\blacksquare$

O campo $V(t)$ encontrado no teorema acima é denominado **transporte paralelo** de V_0 ao longo de c.

Utilizaremos o seguinte produto de campos vetoriais. Sejam $(M, \langle\langle , \rangle\rangle)$ uma variedade Riemanniana e $V, W \in \mathcal{X}(M)$ definimos a função $\langle\langle V, W \rangle\rangle : M \to \mathbb{R}$ como $\langle\langle V, W \rangle\rangle(x) := \langle\langle V(x), W(x) \rangle\rangle$.

Definição 1.1.5. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanianna $\langle\langle , \rangle\rangle$. A conexão é dita **compatível com a métrica** $\langle\langle , \rangle\rangle$ quando, para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $\langle\langle P(c(t)), P'(c(t))\rangle\rangle = k$ fixo para todo $t \in I$.

Teorema 1.1.6. *Seja M uma variedade Riemanianna. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle\langle V, W\rangle\rangle = \left\langle\left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle\right\rangle, \ \ \forall t \in I. \tag{1.3}$$

Demonstração: ($\Longleftarrow$) Supomos que vale 1.3 então, dados campos paralelos P e P' ao longo de c temos

$$\frac{d}{dt}\langle\langle P, P'\rangle\rangle = \left\langle\left\langle \frac{DP}{dt}, P'\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle P, \frac{DP'}{dt}\right\rangle\right\rangle = 0$$

portanto, pelo teorema de existência e unicidade de EDO's, $\langle\langle P, P'\rangle\rangle = k$ constante.

($\Longrightarrow$) Supomos que ∇ é compatível com a métrica. Escolhamos uma base ortonormal $\{P_1(t_0), ..., P_n(t_0)\}$ de $T_{c(t_0)}M$. Pelo teorema 1.1.4 estendamos cada um dos vetores $P_i(t_0)$ ao longo de c. Como ∇ é compatível com a métrica temos que $\langle\langle P_i(t), P_j(t)\rangle\rangle = \delta_{ij}$. Portanto $\{P_1(t), ..., P_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{c(t)}M$ para todo $t \in I$. Deste modo podemos escrever

$$V = \sum_i v^i P_i, \qquad W = \sum_i w^i P_i,$$

onde v^i e w^i são funções diferenciáveis em I para todo i.

Segue-se daí que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i + \sum_i v^i \frac{dP_i}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i$$
$$\frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i + \sum_i w^i \frac{dP_i}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

Assim

$$\left\langle\left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle\right\rangle = \sum_i \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_i v^i w^i\right) = \frac{d}{dt}\langle\langle V, W\rangle\rangle. \qquad \blacksquare$$

Corolário 1.1.7. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e somente se*

$$X\langle\langle Y, Z\rangle\rangle = \langle\langle \nabla_X Y, Z\rangle\rangle + \langle\langle Y, \nabla_X Z\rangle\rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponhamos que ∇ é compatível com a métrica. Seja $p \in M$ e sejam $c : I \to M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$ e com $\frac{dc}{dt}\big|_{t=t_0} = X(p)$. Então

$$\begin{aligned} X(p)\langle\langle Y, Z\rangle\rangle &= \frac{dc}{dt}\bigg|_{t=t_0} \langle\langle Y, Z\rangle\rangle = \frac{d}{dt}\langle\langle Y(c(t)), Z(c(t))\rangle\rangle\bigg|_{t=t_0} \\ &= \left\langle\left\langle \frac{dY}{dt}, Z\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle Y, \frac{dZ}{dt}\right\rangle\right\rangle\bigg|_{t=t_0} \\ &= \langle\langle \nabla_{dc/dt} Y, Z\rangle\rangle + \langle\langle Y, \nabla_{dc/dt} Z\rangle\rangle\big|_{t=t_0} \\ &= \langle\langle \nabla_{X(p)} Y, Z\rangle\rangle_p + \langle\langle Y, \nabla_{X(p)} Z\rangle\rangle_p. \end{aligned}$$

Como p é arbitrário segue o resultado.

($\Longleftarrow$) Sejam P, P' campos paralelos sobre uma curva diferenciável $c(t)$ então

$$\frac{d}{dt}\langle\langle P(c(t)), P'(c(t))\rangle\rangle = \left\langle\left\langle \frac{DP}{dt}, P'\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle P, \frac{DP'}{dt}\right\rangle\right\rangle = 0.$$

Como $c(t)$ é uma curva arbitrária temos que $\langle\langle P, P'\rangle\rangle = k$ fixo, ou seja, a conexão é compatível com a métrica.

∎

Podemos pensar, como no corolário anterior, em um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M)$, $X = \sum_i a_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ como um operador linear $X : C^1(M) \to C(M)$ definido por $X(f) = \sum_i a_i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}$. Pensando assim, dados dois campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, faz sentido pensar no operador XY, o qual não é um campo vetorial.

Contudo, calculando $XY - YX$ numa carta (U_α, x_α)

$$\begin{aligned} XYf &= X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \sum_{ij} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{ij} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \\ YXf &= Y\left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \sum_{ij} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{ij} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \end{aligned}$$

assim

$$(XY - YX)(f) = \sum_{ij} \left(a_i \frac{\partial b^j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a^j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Portanto $XY - YX$ está unicamente definido em cada carta.

Assim dadas cartas (U_α, x_α) e (U_β, x_β) com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos que $(XY-YX)(f)$ tem, na interseção, o mesmo valor em ambas as cartas. Desta maneira podemos definir um campo vetorial $XY - YX$ globalmente sobre M. Este campo é dado em coordenadas locais por

$$(XY - YX)(f) = \sum_{ij} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x^i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Podemos considerar a operação $[,] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ que associa dois campos vetoriais X e Y ao campo $[X,Y] := XY - YX$ tal operação é chamada **colchete**, ela é $\mathbb{R}$-linear e $[X,Y] = -[Y,X]$.

Lema 1.1.8 (Identidade de Jacobi). *Sejam X, Y, Z campos vetoriais diferenciáveis em M então*

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

Demonstração: Calculando diretamente temos

$$\begin{aligned}
[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] =& [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] \\
&+ [ZX - XZ, Y] \\
=& XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX \\
&- ZYX - XYZ + XZY + ZXY \\
&- XZY - YZX + YXZ = 0
\end{aligned}$$

■

Definição 1.1.9. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \text{ para quaisquer } X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

Teorema 1.1.10 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanianna M, existe uma única conexão afim ∇ em M simétrica e compatível com a métrica Riemanianna.*

Demonstração: Suponhamos que tal conexão afim ∇ exista. Pelo corolário do teorema 1.1.6 temos que

$$X\langle\langle Y, Z\rangle\rangle = \langle\langle \nabla_X Y, Z\rangle\rangle + \langle\langle Y, \nabla_X Z\rangle\rangle, \tag{1.4}$$
$$Y\langle\langle Z, X\rangle\rangle = \langle\langle \nabla_Y Z, X\rangle\rangle + \langle\langle Z, \nabla_Y X\rangle\rangle, \tag{1.5}$$
$$Z\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \langle\langle \nabla_Z X, Y\rangle\rangle + \langle\langle X, \nabla_Z Y\rangle\rangle. \tag{1.6}$$

Calculando (1.4) + (1.5) − (1.6) usando o fato que ∇ é simétrica temos

$$\begin{aligned}
X\langle\langle Y, Z\rangle\rangle + Y\langle\langle Z, X\rangle\rangle - Z\langle\langle X, Y\rangle\rangle &= \langle\langle \nabla_X Y, Z\rangle\rangle + \langle\langle Y, \nabla_X Z\rangle\rangle + \langle\langle \nabla_Y Z, X\rangle\rangle \\
&\quad + \langle\langle Z, \nabla_Y X\rangle\rangle - \langle\langle \nabla_Z X, Y\rangle\rangle - \langle\langle X, \nabla_Z Y\rangle\rangle \\
&= \langle\langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle\rangle + \langle\langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle\rangle \\
&\quad + \langle\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z\rangle\rangle + 2\langle\langle Z, \nabla_Y X\rangle\rangle \\
&= \langle\langle [X, Z], Y\rangle\rangle + \langle\langle [Y, Z], X\rangle\rangle \\
&\quad + \langle\langle [X, Y], Z\rangle\rangle + 2\langle\langle Z, \nabla_Y X\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\langle\langle Z, \nabla_Y X\rangle\rangle =& \frac{1}{2}\{X\langle\langle Y, Z\rangle\rangle + Y\langle\langle Z, X\rangle\rangle - Z\langle\langle X, Y\rangle\rangle \\
&- \langle\langle [X, Z], Y\rangle\rangle - \langle\langle [Y, Z], X\rangle\rangle - \langle\langle [X, Y], Z\rangle\rangle\}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Pelo isomorfismo canônico entre $\mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{X}(M)^*$ temos que $\nabla_Y X$ está unicamente definido pela equação 1.7. Assim se tal conexão existir ela é única.

Para mostrar a existência definamos ∇ por 1.7. Vamos mostrar que ela satisfaz as propriedades desejadas.

- ∇ é simétrica pois

$$\begin{aligned}
\langle\langle Z, \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle\rangle &= \langle\langle Z, \nabla_X Y\rangle\rangle - \langle\langle Z, \nabla_Y X\rangle\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{-\langle\langle [Y, X], Z\rangle\rangle + \langle\langle [X, Y], Z\rangle\rangle\} = \langle\langle [X, Y], Z\rangle\rangle
\end{aligned}$$

  como Z é arbitrário isto demonstra que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, ou seja, ∇ é simétrica.

- ∇ é compatível com a métrica pois, calculando diretamente, temos

$$\langle\langle \nabla_X Y, Z\rangle\rangle + \langle\langle Y, \nabla_X Z\rangle\rangle = X\langle\langle Y, Z\rangle\rangle.$$

  Então, pelo corolário do teorema 1.1.6, a conexão ∇ é compatível com a métrica. ■

A conexão dada pelo teorema anterior é denominada **conexão de Levi-Civita** (ou **Riemanianna**) de M. Agora calculemos a conexão de Levi-Civita em coordenadas locais. Para tal precisamos conhecer apenas os campos $\nabla_{\partial_i}\partial_j$, para $1 \leq i, j \leq n$, escrevemos:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Chamamos os coeficientes Γ_{ij}^k desta conexão de **símbolos de Christoffel**.

Denotamos por $g_{ij} := \langle\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle\rangle$ os coeficientes da matiz da métrica em uma carta local e por g^{ij} os coeficientes da inversa da matriz da métrica.

Pela equação 1.7, fazendo $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ e $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right\} &= \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle\right\rangle \\ &= \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \sum_l \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle\right\rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}.\end{aligned}$$

Denotando $z_k := \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right\}$ podemos escrever

$$(\Gamma_{ij}^1, \ldots, \Gamma_{ij}^n) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = (z_1, ..., z_n) \Longrightarrow$$

$$(\Gamma_{ij}^1, \ldots, \Gamma_{ij}^n) = (z_1, ..., z_n) \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix},$$

onde $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ portanto

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right\} g^{km}. \tag{1.8}$$

1.2 Curvaturas

Definição 1.2.1. A **curvatura** R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada, para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$, por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde ∇ é a conexão Riemanianna de M.

Proposição 1.2.2. A curvatura R de uma variedade Riemanianna tem as seguintes propriedades:

1. R é C^∞-bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

   $f, g : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

2. Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ é C^∞-linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

   $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ e $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Demonstração: Para o item 1) basta vermos que, para todo $Z \in \mathcal{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1)Z =& \nabla_{Y_1}\nabla_{fX_1+gX_2}Z - \nabla_{fX_1+gX_2}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{[fX_1+gX_2,Y_1]}Z \\ =& \nabla_{Y_1}(f\nabla_{X_1}Z) + \nabla_{Y_1}(g\nabla_{X_2}Z) - f\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z \\ & - g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{(fX_1+gX_2)Y_1 - Y_1(fX_1+gX_2)}Z \\ =& f\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z + Y_1(f)\nabla_{X_1}Z + g\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z + Y_1(g)\nabla_{X_2}Z \\ & - f\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z - g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z \\ & - \nabla_{(fX_1+gX_2)Y_1 - (fY_1X_1 + Y_1(f)X_1 + gY_1X_2 + Y_1(g)X_2)}Z \\ =& f\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z + Y_1(f)\nabla_{X_1}Z + g\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z + Y_1(g)\nabla_{X_2}Z \\ & - f\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z - g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{fX_1Y_1 - fY_1X_1}Z \\ & + \nabla_{gX_2Y_1 - gY_1X_2}Z + \nabla_{-Y_1(f)X_1}Z + \nabla_{-Y_1(g)X_2}Z \\ =& f\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z - f\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z + f\nabla_{X_1Y_1 - Y_1X_1}Z \\ & + g\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z - g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z + g\nabla_{X_2Y_1 - Y_1X_2}Z \\ & + Y_1(f)\nabla_{X_1}Z - Y_1(f)\nabla_{X_1}Z + Y_1(g)\nabla_{X_2}Z - Y_1(g)\nabla_{X_2}Z \\ =& fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1). \end{aligned}$$

Para a segunda igualdade basta notarmos que, para todo $Z \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z =& \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_X\nabla_YZ + \nabla_{[X,Y]}Z \\ =& -(-\nabla_Y\nabla_XZ + \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ R(X,Y)Z =& -(\nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ + \nabla_{[Y,X]}Z) = -R(Y,X)Z \end{aligned} \tag{1.9}$$

A primeira parte do item 2) vem do fato que $\nabla_X(Z+W) = \nabla_X Z + \nabla_X W$. Para a segunda parte vejamos que

$$\begin{aligned}\nabla_Y\nabla_X(fZ) =&\nabla_Y(f\nabla_X Z + X(fZ))\\ =&f\nabla_Y\nabla_X Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + (Y(Xf))Z.\end{aligned}$$

Portanto

$$\nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_X\nabla_Y(fZ) = f(\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y)Z + ((YX - XY)f)Z,$$

assim

$$\begin{aligned}R(X,Y)fZ =&f(\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y)Z + ([Y,X]f)Z\\ &+ f\nabla_{[X,Y]}Z + ([X,Y](f))Z = fR(X,Y)Z\end{aligned}$$

■

Lema 1.2.3 (Primeira Identidade de Bianchi). *Sejam* $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *então*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Demonstração: Pela simetria da conexão de Levi-Civita temos

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y =&\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z\\ &+ \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]}X\\ &+ \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]}Y\\ =&\nabla_Y[X,Z] + \nabla_X[Z,Y] + \nabla_Z[Y,X]\\ &+ \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_{[Z,X]}Y\\ =&[Y,[X,Z]] + [X,[Z,Y]] + [Z,[Y,X]],\end{aligned}$$

que é igual a zero pela identidade de Jacobi.

■

Proposição 1.2.4. Sejam $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$

1. $\langle\langle R(X,Y)Z, T\rangle\rangle + \langle\langle R(Y,Z)X, T\rangle\rangle + \langle\langle R(Z,X)Y, T\rangle\rangle = 0.$
2. $\langle\langle R(X,Y)Z, T\rangle\rangle = -\langle\langle R(Y,X)Z, T\rangle\rangle.$
3. $\langle\langle R(X,Y)Z, T\rangle\rangle = -\langle\langle R(X,Y)T, Z\rangle\rangle.$

4. $\langle\langle R(X,Y)Z,T\rangle\rangle = \langle\langle R(Z,T)X,Y\rangle\rangle$.

Demonstração: O item 1) segue da bilinearidade do produto interno e da primeira identidade de Bianchi. O item 2) segue da equação 1.9.

Para demonstrarmos o item 3) notemos que esta igualdade é equivalente a $\langle\langle R(X,Y)Z,Z\rangle\rangle = 0$ pois, se esta igualdade valer temos

$$\begin{aligned}
0 =& \langle\langle R(X,Y)(Z+T),(Z+T)\rangle\rangle \\
=& \langle\langle R(X,Y)Z,(Z+T)\rangle\rangle + \langle\langle R(X,Y)T,(Z+T)\rangle\rangle \\
=& \langle\langle R(X,Y)Z,Z\rangle\rangle + \langle\langle R(X,Y)T,Z\rangle\rangle + \langle\langle R(X,Y)Z,T\rangle\rangle + \langle\langle R(X,Y)T,T\rangle\rangle \\
=& \langle\langle R(X,Y)T,Z\rangle\rangle + \langle\langle R(X,Y)Z,T\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Agora provamos que $\langle\langle R(X,Y)Z,Z\rangle\rangle = 0$:

$$\langle\langle R(X,Y)Z,Z\rangle\rangle = \langle\langle \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle\rangle$$

Mas, pelo corolário 1.1.7

$$\langle\langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle\rangle = Y\langle\langle \nabla_X Z, Z\rangle\rangle - \langle\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle\rangle,$$

e

$$\begin{aligned}
&\langle\langle \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle\rangle = [X,Y]\langle\langle Z,Z\rangle\rangle - \langle\langle Z, \nabla_{[X,Y]}Z\rangle\rangle \\
&\Longrightarrow \langle\langle \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle\langle Z,Z\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle\langle R(X,Y)Z,Z\rangle\rangle =& Y\langle\langle \nabla_X Z, Z\rangle\rangle - X\langle\langle \nabla_Y Z, Z\rangle\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle\langle Z,Z\rangle\rangle \\
=& \frac{1}{2}Y(X\langle\langle Z,Z\rangle\rangle) - \frac{1}{2}X(Y\langle\langle Z,Z\rangle\rangle) + \frac{1}{2}[X,Y]\langle\langle Z,Z\rangle\rangle \\
=& \frac{1}{2}[Y,X]\langle\langle Z,Z\rangle\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle\langle Z,Z\rangle\rangle = 0,
\end{aligned}$$

o que demonstra 3).

Para demonstrar 4) usaremos 1) repetidas vezes

$$\begin{aligned}
&\langle\langle R(Y,Z)X,T\rangle\rangle + \langle\langle R(Z,X)Y,T\rangle\rangle + \langle\langle R(X,Y)Z,T\rangle\rangle = 0, \\
&\langle\langle R(Z,X)T,Y\rangle\rangle + \langle\langle R(X,T)Z,Y\rangle\rangle + \langle\langle R(T,Z)X,Y\rangle\rangle = 0, \\
&\langle\langle R(X,T)Y,Z\rangle\rangle + \langle\langle R(T,Y)X,Z\rangle\rangle + \langle\langle R(Y,X)T,Z\rangle\rangle = 0, \\
&\langle\langle R(T,Y)Z,X\rangle\rangle + \langle\langle R(Y,Z)T,X\rangle\rangle + \langle\langle R(Z,T)Y,X\rangle\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Somando as equações acima e usando 2) e 3) obtemos

$$2\langle\langle R(X,Y)Z,T\rangle\rangle + 2\langle\langle R(T,Z)X,Y\rangle\rangle = 0,$$

e, novamente 2), chegamos à

$$\langle\langle R(X,Y)Z,T\rangle\rangle = \langle\langle R(Z,T)X,Y\rangle\rangle.$$

$\blacksquare$

Como a curvatura R é C^∞-trilinear, para descreve-la precisamos apenas calculá-la numa base do plano tangente. Em coordenadas locais $\{\partial/\partial x^i\}$ denotamos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_l R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Assim R^l_{ijk} são os coeficientes da curvatura R em uma carta e, dados campos vetoriais

$$U = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad V = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad W = \sum_k w_k \frac{\partial}{\partial x^i},$$

obtemos

$$R(X,Y)Z = \sum_{ijkl} R^l_{ijk} u_i v_j w_k \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Para calcularmos a curvatura em termos dos coeficientes da conexão Γ^k_{ij} precisamos apenas calcular os coeficientes da curvatura R^l_{ijk} em termos dos coeficientes da conexão. Para tal calculemos:

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} =& \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k} + \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]}\frac{\partial}{\partial x^k} \\
=& \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\sum_m \Gamma^m_{ik}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\sum_m \Gamma^m_{jk}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) \\
=& \sum_m \Gamma^m_{ik}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^m} + \sum_m\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^m_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial x^m} \\
&- \sum_m \Gamma^m_{jk}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^m} - \sum_m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^m_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^m} \\
=& \sum_m \Gamma^m_{ik}\sum_l \Gamma^l_{jm}\frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_l\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial x^l} \\
&- \sum_m \Gamma^m_{jk}\sum_l \Gamma^l_{im}\frac{\partial}{\partial x^l} - \sum_l\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$R^l_{ijk} = \sum_m \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm} - \sum_m \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^l_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma^l_{jk}).$$

Também denotamos

$$R_{ijks} := \left\langle\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^s}\right\rangle\right\rangle = \sum_l R^l_{ijk} g_{ls},$$

portanto

$$(R_{ijk1}, R_{ijk2}, ..., R_{ijkn}) = (R^1_{ijk}, R^2_{ijk}, ..., R^n_{ijk}) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{11} & \cdots & g_{n1} \end{pmatrix},$$

$$(R^1_{ijk}, R^2_{ijk}, ..., R^n_{ijk}) = (R_{ijk1}, R_{ijk2}, ..., R_{ijkn}) \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{11} & \cdots & g^{n1} \end{pmatrix},$$

$$R^s_{ijk} = \sum_l R_{ijkl} g^{ls}.$$

Pela trilinearidade de R e a bilinearidade do produto interno o teorema anterior é equivalente a escrevermos

$$\begin{aligned} R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} &= 0 \\ R_{ijks} &= -R_{jiks} \\ R_{ijks} &= -R_{ijsk} \\ R_{ijks} &= R_{ksij}. \end{aligned}$$

Definição 1.2.5. Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM; tomemos uma base ortonormal $\{z_1, ..., z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x. A **curvatura de Ricci** da métrica $\langle\langle, \rangle\rangle$ no ponto p, na direção de x é:

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle\langle R(x, z_i)x, z_i\rangle\rangle.$$

A **curvatura escalar** da métrica $\langle\langle, \rangle\rangle$, no ponto p é:

$$s_{\langle\langle,\rangle\rangle}(p) = \sum_j \mathrm{Ric}_p(z_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1} \langle\langle R(z_i, z_j)z_i, z_j\rangle\rangle.$$

Teorema 1.2.6. *A curvatura de Ricci e a curvatura escalar independem da base escolhida.*

Demonstração: Consideremos a aplicação $Q : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definida como

$$Q(x, y) = \text{ traço da aplicação } z \to R(x, z)y.$$

Como R é C^∞-linear em cada uma das suas entradas temos que Q é bilinear. Sejam $x \in T_pM$ um vetor unitário e $\{z_1, ..., z_{n-1}, z_n = x\}$ uma base ortonormal de T_pM então, pelo teorema 1.2.4 item 4), temos

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \sum_i \langle\langle R(x, z_i)y, z_i\rangle\rangle \\ &= \sum_i \langle\langle R(y, z_i)x, z_i\rangle\rangle = Q(y, x), \end{aligned}$$

isto é, Q é simétrica e portanto só precisamos conhecer $Q(x, x)$ numa base ortonormal para defini-la. $Q(x, x)$ independe da base $\{z_1, ..., z_n = x\}$ que usamos para calcula-la (por ser um traço); mas $Q(x, x) = \mathrm{Ric}_p(x)$, então $\mathrm{Ric}_p(x)$ independe da base escolhida.

Por outro lado, podemos associar a forma bilinear Q em T_pM uma aplicação linear auto-adjunta K tal que

$$\langle\langle K(x), y\rangle\rangle = Q(x, y).$$

Tomando uma base ortonormal $\{z_1, ..., z_n\}$, temos

$$\begin{aligned} tr(K) &= \sum_j \langle\langle K(z_j), z_j\rangle\rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) \\ &= \sum_j \mathrm{Ric}_p(z_j) = s_{\langle\langle,\rangle\rangle}(p), \end{aligned}$$

o que demonstra que $s_{\langle\langle,\rangle\rangle}(p)$ independe da base escolhida.

■

Dada uma métrica $\langle\langle, \rangle\rangle$ precisaremos, muitas vezes, nos referir a matriz G que a representa a métrica. Por isso usaremos, de agora em diante, a notação $g(,)$ (ou simplesmente g) para a métrica. Denotaremos os coeficientes da matriz G por g_{ij} e os coeficientes de sua inversa por g^{ij}.

A forma bilinear Q é chamada, às vezes, de **tensor de Ricci**. Calculemos agora os coeficientes deste tensor numa base ortonormal $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ de TM.

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \sum_l g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
&= \sum_l R^l_{ilj} g\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
&= \sum_l R^l_{ilj} = \sum_{lm} R_{iljm} g^{ml}.
\end{aligned}$$

Observemos que se $A : T_pM \to T_pM$ é uma aplicação linear auto-adjunta e $B : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é a forma bilinear tal que $B(X,Y) = g(A(X),Y)$, temos

$$\begin{aligned}
u^T Bv = B(u,v) = g(Au,v) = (Au)^T Gv = uA^T Gv \\
B = A^T G \longrightarrow A^T = BG^{-1},
\end{aligned}$$

onde G é a matriz que representa a métrica.

Então $tr(A) = \sum_{ik} B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) g^{ik}$. Portanto, a curvatura escalar é dada por

$$s_g = \sum_{ijl} R^l_{ilj} g^{ij} = \sum_{ij} R_{ij} g^{ij},$$

onde denotamos $R_{ij} = \sum_l R^l_{ilj}$.

Usando a expressão

$$R^l_{ijk} = \sum_m \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm} - \sum_m \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^l_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma^l_{jk}).$$

dos coeficientes da curvatura em termos dos coeficientes da conexão temos

$$s_g = \sum_{ijlm} g^{ij}\left(\Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{lm} - \Gamma^m_{lj}\Gamma^l_{im} + \frac{\partial}{\partial x^l}(\Gamma^l_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma^l_{lj})\right). \tag{1.10}$$

Vamos mostrar que a curvatura escalar é um invariante por ismetrias. Para isso precisaremos do seguinte resultado:

Teorema 1.2.7. *Sejam (M,h) e (N,g) variedades Riemannianas de dimensão n, ∇^g a conexão de Levi-Civita de (N,g) e ϕ uma isometria entre elas, então $\nabla^* : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por $\nabla^*_X Y = d\phi^{-1}\nabla^g_{d\phi X} d\phi Y$ é a conexão de Levi-Civita em (M,h).*

Demonstração: Seja (U_i, α_i) um atlas de M. Então $(\phi(U_i), \alpha_i \circ \phi^{-1})$ é um atlas de N. As bases dos planos tangentes de M e N são, respectivamente, $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ e $\frac{\partial}{\partial x_*^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_*^n}$. Podemos considerar um vetor de T_pM como uma clase de equivalência de curvas do seguinte modo: o vetor $\frac{\partial}{\partial x^j}$ pode ser visto como a classe de equivalência da curva $\alpha_i^{-1} \circ x^j : \mathbb{R} \to M$, onde $x^j(t)_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é dada por $x^j(t)_p = (x_1, ..., x_j + t, ..., x_n)$, (onde $\alpha_i(p) = (x_1, ..., x_j, ..., x_n)$) pela relação $k \sim l$ se, e somente se, $(\alpha_i \circ k)'(0) = (\alpha_i \circ l)'(0)$. Assim

$$\frac{\partial}{\partial x_*^j} = [\phi \circ \alpha_i^{-1} \circ x^j] = d\phi[\alpha_i^{-1} \circ x^j] = d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Sejam $a, b \in C^\infty(M)$ e $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. ∇^* é uma conexão afim pois valem as propriedades

$$\begin{aligned}\nabla^*_{aX+bY}Z =& d\phi^{-1}\nabla^g_{(a\circ\phi^{-1})d\phi X}d\phi Z + d\phi^{-1}\nabla^g_{(b\circ\phi^{-1})d\phi Y}d\phi Z\\ =& a.d\phi^{-1}\nabla^g_{d\phi X}d\phi Z + b.d\phi^{-1}\nabla^g_{d\phi Y}d\phi Z\\ =& a\nabla^*_X Z + b\nabla^*_Y Z\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla^*_X(Y+Z) =& d\phi^{-1}\nabla^g_{d\phi X}d\phi Y + d\phi^{-1}\nabla^g_{d\phi X}d\phi Z\\ =& \nabla^*_X Y + \nabla^*_X Z\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla^*_X(aY) =& d\phi^{-1}\nabla^g_{d\phi X}(a\circ\phi^{-1})d\phi Y\\ =& d\phi^{-1}[(a\circ\phi^{-1})\nabla^g_{d\phi X}d\phi Y + d\phi X(a\circ\phi^{-1})d\phi Y]\\ =& a.d\phi^{-1}\nabla^g_{d\phi X}d\phi Y + X(a)Y = a\nabla^*_X Y + X(a)Y,\end{aligned}$$

pois, se $X = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, temos

$$\begin{aligned}d\phi X(a\circ\phi^{-1}) =& \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_*^i}(a\circ\phi^{-1})\\ =& \lim_{t\to 0}\sum_i u_i(a\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\alpha_i^{-1}\circ(x^i)^{-1})(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n)\\ =& \lim_{t\to 0}\sum_i u_i(a\circ\alpha_i^{-1}\circ(x^i)^{-1})(x_1, ..., x_i + t, ..., x_n) = X(a)\circ\phi.\end{aligned}$$

∇^* é simétrica pois, se $X = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x^j}$, temos

$$
\begin{aligned}
[d\phi X, d\phi Y] =& d\phi X d\phi Y - d\phi Y d\phi X \\
=& \sum_{ij} \left((u_i \circ \phi^{-1}) \frac{\partial (v_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_*^i} - (v_i \circ \phi^{-1}) \frac{\partial (u_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_*^i} \right) \frac{\partial}{\partial x_*^j} \\
=& \sum_{ij} d\phi \left[\left(u_i \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - v_i \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = d\phi [X, Y].
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
h(Z, \nabla_X Y - \nabla_Y X) &= g(d\phi Z, \nabla_{d\phi X} d\phi Y - \nabla_{d\phi Y} d\phi X) \\
&= g(d\phi Z, [d\phi X, d\phi Y]) = g(d\phi Z, d\phi [X, Y]) = h(Z, [X, Y]).
\end{aligned}
$$

∇^* é compatível com a métrica h: Sejam $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ uma curva diferenciavel e $\alpha_i : U_i \subset M \to \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo com $c(I) \cap U_i \neq \emptyset$ e $(c^1(t), ..., c^n(t)) := \alpha_i \circ c$ para todo $t \in I$. Podemos expressar localmente o campo Y como $Y = \sum_j v^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j}(c(t))$ e, pela equação 1.1, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{D(d\phi Y)}{dt} &= \sum_i \frac{d(v^j \circ \phi^{-1})}{dt} \frac{\partial}{\partial x_*^j} + \sum_{ij} \left(\frac{dc^i}{dt} \circ \phi^{-1} \right) (v^j \circ \phi^{-1}) \nabla^g_{\frac{\partial}{\partial x_*^i}} \frac{\partial}{\partial x_*^j} \\
&= d\phi \left(\sum_i \frac{dv^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{ij} \frac{dc^i}{dt} v^j \nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = d\phi \frac{DY}{dt}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} h(X, Y) &= \frac{d}{dt} g(d\phi X, d\phi Y) = g\left(\frac{D d\phi X}{dt}, d\phi Y \right) + g\left(d\phi X, \frac{D d\phi Y}{dt} \right) \\
&= h\left(\frac{DX}{dt}, Y \right) + g\left(X, \frac{DY}{dt} \right),
\end{aligned}
$$

deste modo, pelo teorema 1.1.6, a conexão é compatível com a métrica.

Portanto, pela unicidade da conexão de Levi-Civita, ∇^* é a conexão de Levi-Civita de (M, h).

$\blacksquare$

Teorema 1.2.8. *Sejam (M, h) e (N, g) variedades Riemannianas e ϕ uma isometria entre elas, então $s_g \circ \phi = s_h$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior $\nabla^* : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por $\nabla^*_X Y = d\phi^{-1}\nabla^g_{d\phi X} d\phi Y$ é a conexão de Levi-Civita em (M, h). Assim, denotando por R e R^* as curvaturas de N e M respectivamente, temos

$$R^*(X,Y)Z = d\phi^{-1}(R(d\phi X, d\phi Y)d\phi Z),$$

então, como ϕ é uma isometria,

$$\begin{aligned} h\left(R^*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) =& g\left(R\left(d\phi\frac{\partial}{\partial x^i}, d\phi\frac{\partial}{\partial x^j}\right)d\phi\frac{\partial}{\partial x^k}, d\phi\frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ =& g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i_*}, \frac{\partial}{\partial x^j_*}\right)\frac{\partial}{\partial x^k_*}, \frac{\partial}{\partial x^l_*}\right) \end{aligned}$$

Deste modo $R^*_{ijkl} = R_{ijkl} \circ \phi$ para quaisquer $i, j, k, l \in \{1, ..., n\}$.

Por outro lado

$$h(X,Y) = g(d\phi X, d\phi Y) = X^T D^T G D Y$$

onde G é a matriz da métrica, $d\phi$ é a derivada de ϕ e D é a matriz Jacobiana de $(\alpha_i \circ \phi^{-1}) \circ \phi \circ \alpha_i^{-1} = I$, assim $h^{ij} = g^{ij} \circ \phi$.

Então

$$s_h = \sum_{ijlm} R^*_{iljm} h^{ml} = \sum_{ijlm} (R_{iljm} g^{ml}) \circ \phi = s_g \circ \phi$$

■

Capítulo 2

O Laplaciano

2.1 Espaços e produtos internos sobre M

Definiremos o produto interno de duas funções $f, h \in C^\infty(M)$ como uma integral sobre uma variedade Riemanniana (M, g) (que consideraremos orientada e fechada), faremos isto usando a n-forma dvol e, com esta, definiremos o que significa integrar sobre M usando o atlas diferenciável de M.

Definição 2.1.1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. A **forma de volume** de uma métrica Riemanniana g é a n-forma dvol que é dada em coordenadas locais por

$$\mathrm{dvol}_g = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n,$$

para uma base $(\partial_{x^1}, ..., \partial_{x^n})$ de $T_x M$ orientada positivamente. Definimos o volume de (M, g) como

$$vol_g(M) = \int_M \mathrm{dvol}_g.$$

Teorema 2.1.2. *A forma de volume* $\mathrm{dvol} = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ *independe das coordenadas locais; ou seja, dadas coordenadas locais δ e β em x temos*

$$\sqrt{\det g(\delta)} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = \sqrt{\det g(\beta)} dy^1 \wedge ... \wedge dy^n$$

Demonstração: Dadas as coordenadas locais δ e β definimos, para cada $i \in \{0, ..., n\}$, as aplicações $x^i : M \to \mathbb{R}$ como $x^i := \pi_i \circ \delta$ e $y^i : M \to \mathbb{R}$ como $y^i := \pi_i \circ \beta$, onde π_i é a projeção na i-ésima coordenada. Temos então que $\delta(x) = (x^1(x), ..., x^n(x))$ e que $\beta(x) = (y^1(x), ..., y^n(x))$. De modo que

$y^i = \pi_i \circ \beta \circ \delta^{-1}(x^1, ..., x^n)$ e $x^i = \pi_i \circ \delta \circ \beta^{-1}(y^1, ..., y^n)$, assim podemos nos referir a $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ e $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ daí:

$$dy^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \quad \text{e} \quad dx^k = \sum_l \frac{\partial x^k}{\partial y^l} dy^l.$$

Então, denotando Υ como o conjunto das permutações de n elementos, temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det g(\beta)} dy^1 \wedge ... \wedge dy^n &= \sqrt{\det g(\beta)} \sum_j \frac{\partial y^1}{\partial x^j} dx^j \wedge ... \wedge \sum_j \frac{\partial y^n}{\partial x^j} dx^j \\
&= \sqrt{\det g(\beta)} \sum_{\sigma \in \Upsilon} (-1)^\sigma \prod_i \frac{\partial y^i}{\partial x^{\sigma(i)}} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \sqrt{\det g(\beta)} \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $h \in C^\infty(M)$

$$\frac{\partial}{\partial y^i} h = \sum_l \frac{\partial h}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial y^i} = \left(\sum_l \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) h.$$

Assim $\frac{\partial}{\partial y^i} = \left(\sum_l \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$ e:

$$g_{ij}(\beta) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\rangle = \sum_l \sum_k \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \sum_l \sum_k \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} g_{lk}(\delta).$$

Portanto, denotando $J := \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)$, temos $g(\beta) = J^T g(\delta) J$. Então:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det g(\beta)} dy^1 \wedge ... \wedge dy^n &= \sqrt{\det g(\beta)} \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \sqrt{\det(J^T g(\delta) J)} \det(J^{-1}) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \sqrt{\det(J)^2 \det(g(\delta))} \det(J^{-1}) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \sqrt{\det(g(\delta))} \det(J) \det(J^{-1}) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \sqrt{\det(g(\delta))} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

■

Definição 2.1.3. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, (U_k, ϕ_k) uma carta de M e $\alpha = \left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ a base para TU_i associada a esta carta. Dizemos que uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é **integrável** se cada $f \circ \phi_k^{-1} : \phi_k(U_k) \to \mathbb{R}$ for integrável à Riemann e definimos a **integral** de f sobre U_k como

$$\int_{U_k} f(x)\mathrm{dvol}_g = \int_{\phi_k(U_k)} \left(f(x)\sqrt{\det(g(\alpha))}\right) \circ \phi_k^{-1} dx^1 ... dx^n.$$

Esta integral esta bem definida pois dadas cartas (U_k, ϕ_k) e (U_l, ϕ_l) em um atlas positivamente orientado tais que $U_k \cap U_l \neq \emptyset$. Sejam $\alpha = \left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ a base de $T\{U_k \cap U_l\}$ associada a carta (U_k, ϕ_k) e $\beta = \left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ a base de $T\{U_k \cap U_l\}$ associada a carta (U_l, ϕ_l). Denotamos por $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ as matrizes que representam a métrica associadas a α e β respectivamente a aplicação de transição θ_{kl} temos:

$$\begin{aligned}
\int_{U_k \cap U_l} f(x)\mathrm{dvol} &= \int_{\phi_k(U_k \cap U_l)} \left(f(x)\sqrt{\det(g(\alpha))}\right) \circ \phi_k^{-1} dx^1 ... dx^n \\
&= \int_{\theta_{kl}\phi_l(U_k \cap U_l)} \left(f(x)\sqrt{\det(g(\alpha))}\right) \circ \phi_k^{-1} dx^1 ... dx^n \\
&= \int_{\phi_l(U_k \cap U_l)} \left(f(x)\sqrt{\det(g(\alpha))}\det(J(\theta_{kl}))\right) \circ \phi_l^{-1} dy^1 ... dy^n \\
&= \int_{\phi_l(U_k \cap U_l)} \left(f(x)\sqrt{\det(g(\beta))}\right) \circ \phi_l^{-1} dy^1 ... dy^n.
\end{aligned}$$

Onde usamos formula de mudança de variável (teorema 4.0.4 em anexo) em $\mathbb{R}^n$ e o fato que a orientação é positiva.

Assim, dada uma função integrável $f : M \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em uma carta U_k, dizemos que

$$\int_M f(x)\mathrm{dvol}_g = \int_{U_k} f(x)\mathrm{dvol}_g.$$

Definição 2.1.4. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $\{(U_i, \phi_i)\}$ um atlas de M, $\{a_i\}_{1 \leq i \leq k}$ uma partição da unidade associada a este atlas e $\alpha = \{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ uma base local para TM. Dizemos que uma função f é integrável se $a_i f$ é integrável sobre M para $i \in [1, ...k]$ e definimos a integral de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ sobre M como

$$\int_M f(x)\mathrm{dvol}_g = \sum_{i=1}^{k} \int_M a_i f(x)\sqrt{\det(g(\alpha))} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n.$$

A definição de f ser integrável independe da partição da unidade e esta integral esta bem definida pois, dada outra partição da unidade $\{b_i\}_{1\leq i\leq l}$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\int_M a_i f(x)\mathrm{dvol}_g &= \sum_{i=1}^{k}\int_M \sum_{j=1}^{l} b_j a_i f(x)\mathrm{dvol}_g \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\int_M b_j a_i f(x)\mathrm{dvol}_g \\
&= \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}\int_M b_j a_i f(x)\mathrm{dvol}_g \\
&= \sum_{j=1}^{l}\int_M b_j \sum_{i=1}^{k} a_i f(x)\mathrm{dvol}_g \\
&= \sum_{j=1}^{l}\int_M b_j f(x)\mathrm{dvol}_g.
\end{aligned}$$

Note, que por temos definido a integral usando a partição da unidade faz sentido escrevermos a integral de um objeto local, como o produto interno de campos vetoriais em coordenadas locais.

Também definimos um produto interno em $C^\infty(M)$ por

$$\langle f, h\rangle = \int_M f(x)h(x)\mathrm{dvol}_g.$$

Definimos o produto interno de dois campos vetoriais X e Y sobre M como

$$\langle X, Y\rangle = \int_M g(X(x), Y(x))\mathrm{dvol}_g,$$

onde $g(X(x), Y(x)) := \langle\langle X(x), Y(x)\rangle\rangle$. Utilizamos estas duas notações durante o texto. É claro que isto define um produto interno.

Sejam $\Omega^1(M)$ o conjunto das 1-formas sobre M e o isomorfismo natural $\alpha_g : \mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$, dado em cada plano tangente por $\alpha_g(v) = v^*$ onde $v^*(w) = \langle v, w\rangle$ para quaisquer $v, w \in T_M$. Definimos o produto interno de duas 1-formas v^* e w^* como

$$\langle v^*, w^*\rangle = \int_M g(\alpha_g^{-1}v^*(x), \alpha_g^{-1}w^*(x))\mathrm{dvol}_g.$$

É claro que isto define um produto interno.

Vamos calcular $\alpha^{-1}(v^*)$ e $\langle v^*, w^* \rangle$ em coordenadas locais.

Sejam $v, w \in TM$, $w = \sum_k w_k \frac{\partial}{\partial x^k}$ e $v^* = \sum_j v^j dx^j$. Pela definição de α temos

$$w_k = dx^k(w) = \langle \alpha_g^{-1}(dx^k), w \rangle = \sum_{ij} \gamma_i g_{ij} w_j.$$

Onde $\alpha_g^{-1}(dx^k) = \sum_i \gamma_i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Então, variando j, formamos o seguinte sistema de equações

$$\sum_i \gamma_i g_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ 1 & \text{se } j = k \end{cases}$$

que é denotado matricialmente por $(g_{ij})\gamma = e_k$ e admite uma única solução

$$\gamma = (g_{ij})^{-1} e_k = \sum_i g^{ik} e_i.$$

Desta forma $\alpha_g^{-1}(dx^j) = \sum_i g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}$. Portanto

$$\alpha_g^{-1}(v^*) = \alpha_g^{-1}\left(\sum_j v_j dx^j\right) = \sum_j v_j \alpha_g^{-1}(dx^j) = \sum_{ij} v_j g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (2.1)$$

Para o produto interno tome duas formas $v^* = \sum_j v^j dx^j$ e $w^* = \sum_k w^k dx^k$ sobre M

$$\begin{aligned}
\langle v^*, w^* \rangle &= \int_M g\left(\alpha_g^{-1} v^*(x), \alpha_g^{-1} w^*(x)\right) \mathrm{dvol}_g \\
&= \int_M g\left(\sum_{ij} v_j g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{lk} w_k g^{lk} \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \mathrm{dvol}_g \\
&= \int_M \sum_{ijkl} v_j g^{ij} w_k g^{lk} g_{il} \mathrm{dvol} = \int_M \sum_{ijk} v_j g^{ij} w_k \delta_{ik} \mathrm{dvol}_g \\
&= \int_M \sum_{ij} v_j g^{ij} w_i \mathrm{dvol}_g.
\end{aligned}$$

2.2 O divergente, o gradiente e o Laplaciano

Em $\mathbb{R}^n$ podemos definir um operador $\triangle : C^2(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ chamado de Laplaciano da seguinte forma

$$\triangle f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}. \tag{2.2}$$

Assim, no caso euclidiano, o Laplaciano é dado por $-\left(\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + ... + \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2}\right)$.

Queremos definir o operador Laplaciano sobre $C^\infty(M)$. Se o definirmos como na equação 2.2 o nosso operador dependerá do sistema coordenado em questão, mas queremos um operador que independa do sistema de coordenadas. Para tal lembremos da equação clássica para o Laplaciano em $\mathbb{R}^n$:

$$-\left(\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + ... + \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2}\right) = -\text{div} \circ \text{grad}.$$

Definiremos os operadores grad : $C^\infty(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ e div: $\mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ em uma variedade Riemanniana de modo que eles independam de coordenadas locais para, através destes, definir o Laplaciano.

Definição 2.2.1. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $d : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ a derivada exterior e α_g o isomorfismo canônico entre $\mathcal{X}(M)$ e $\Omega^1(M)$. O **gradiente** é o operador grad : $C^\infty(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ definido por grad $:= \alpha_g^{-1} \circ d$.

Podemos definir o gradiente da mesma maneira em uma variedade diferenciável (sem mátrica) mas colocamos uma variedade Riemanniana na definição pois estamos interessados em coordenadas locais.

Teorema 2.2.2. *Em coordenadas locais o gradiente é dado por*

$$\text{grad} f = \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i f \partial_j,$$

onde $\partial_j = \partial_{x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}$ *e* $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Demonstração: Dada $f \in C^\infty(M)$ temos

$$\begin{aligned}
\text{grad} f = \alpha_g^{-1} \circ d(f) = \alpha_g^{-1} \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) \\
= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \alpha_g^{-1}(dx^i) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \left(\sum_j g^{ji} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
= \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ji} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

■

Que no caso euclidiano é o gradiente usual. Daí definirmos grad $:= \alpha_g^{-1} \circ d$ pois, α_g^{-1} e d independem de coordenadas e coincidem com o gradiente usual em $\mathbb{R}^n$.

Por outro lado lembremos que no caso de um campo vetorial suave $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o divergente é definido por

$$\mathrm{div}(X) := \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$$

e que, dada uma função $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}
\langle -\mathrm{div} X, f\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \partial_i X_i . f = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \frac{\partial (f.X_i)}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \partial_i f . X_i \\
= -\sum_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f.X_i)\Big|_{-\infty}^{+\infty} dx_1 ... dx_{i-1} dx_{i+1} ... dx_n \\
+ \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \partial_i f . X_i \\
= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \partial_i f . X_i \\
= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \partial_i f . X_i = \langle X, \mathrm{grad} f\rangle,
\end{aligned}$$

pois f tem suporte compacto. Assim o divergente de um campo vetorial X em $\mathbb{R}^n$ satisfará, $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, a equação

$$\langle -\mathrm{div} X, f\rangle = \langle X, \mathrm{grad} f\rangle \tag{2.3}$$

Sejam $X = \sum_i X^i \partial_i \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in C_0^\infty(M)$ e (U_i, ϕ_i) um atlas na variedade M com particação da unidade associada $\{a_i\}_{i=1,...,k}$. Suponhamos que exista uma função div$X$ satisfazendo a equação 2.3 . Então, em coordenadas locais, temos

$$
\begin{aligned}
\langle X, \mathrm{grad} f\rangle &= \int_M \langle\langle X, \mathrm{grad} f\rangle\rangle \mathrm{dvol} \\
&= \int_U \left\langle\left\langle \sum_i X^i \partial_i, \sum_{k,j} g^{kj}\partial_k f \partial_j \right\rangle\right\rangle \mathrm{dvol} \\
&= \sum_l \int_{\phi_l(U_l)} a_l \sum_{ijk} X^i (\partial_k f) g^{kj} g_{ij} \sqrt{\det g} dx_1 ... dx_n \\
&= \sum_l \int_{\phi_l(U_l)} a_l \sum_i X^i (\partial_i f) \sqrt{\det g} dx_1 ... dx_n \\
&= -\sum_l \int_{\phi_l(U_l)} a_l \frac{1}{\sqrt{\det g}} f \sum_i \partial_i (X^i \sqrt{\det g}) \sqrt{\det g} dx_1 ... dx_n \\
&= \langle f, -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \partial_i (X^i \sqrt{\det g})\rangle
\end{aligned}
$$

integrando por partes e usando o fato que (g^{ij}) e (g_{ij}) são inversas.

O que nos motiva a definir o divergente em coordenadas locais da seguinte maneira.

Definição 2.2.3. O **divergente** é o operador div: $\mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$, dado localmente por

$$
\mathrm{div} X := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \partial_i (X^i \sqrt{\det g}).
$$

Este operador esta bem definido, pois

Teorema 2.2.4. *A função* $\mathrm{div} X$ *está bem definida, isto é, dadas coordenadas locais* $\gamma = (x^1, ..., x^n)$ *e* $\beta = (y^1, ..., y^n)$ *em um aberto* $U \in M$*, escrevendo* $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ *temos que*

$$
\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i \sqrt{\det g}) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_j \frac{\partial}{\partial y^j} (Y^j \sqrt{\det g})
$$

Demonstração: Podemos considerar qualquer função $f : M \to \mathbb{R}$ como uma função que depende das funções x^i e y^j (análogamente ao que fizemos no teorema 2.1.2). Notamos então que

$$
\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{ij} X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \Longrightarrow Y^j = \sum_i X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}
$$

portanto

$$\sum_j \frac{\partial Y^j}{\partial y^j} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial y^j}\left(X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) = \sum_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i} + \sum_{ij} X^i \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)$$
$$= \sum_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i} + \sum_{ij} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial y^j}{\partial y^j}\right) = \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}. \tag{2.4}$$

Por outro lado, denotando $\Upsilon(n)$ como o conjunto das perutações de n elementos e $J := \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l}\right)$, temos $J^{-1} := \left(\frac{\partial y^l}{\partial x^k}\right)$ daí

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\det(J^{-1}) = \frac{\partial}{\partial y^j}\sum_{\sigma\in\Upsilon}(-1)^\sigma \prod_l \frac{\partial y^l}{\partial x^{\sigma(l)}} = \sum_{\sigma\in\Upsilon}(-1)^\sigma \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\prod_l \frac{\partial y^l}{\partial x^{\sigma(l)}}\right) =$$
$$= \sum_{\sigma\in\Upsilon}(-1)^\sigma\left(\sum_{\rho\in\Upsilon}\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{a!(n-a)!}\prod_{i=1}^{a}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial y^{\rho(i)}}{\partial x^{\sigma(\rho(i))}}\right)\prod_{i=a+1}^{n}\frac{\partial y^{\rho(i)}}{\partial x^{\sigma(\rho(i))}}\right) =$$
$$= \sum_{\sigma\in\Upsilon}(-1)^\sigma\left(\sum_{\rho\in\Upsilon}\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{a!(n-a)!}\prod_{i=1}^{a}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma(\rho(i))}}\left(\frac{\partial y^{\rho(i)}}{\partial y^j}\right)\prod_{i=a+1}^{n}\frac{\partial y^{\rho(i)}}{\partial x^{\sigma(\rho(i))}}\right) = 0, \tag{2.5}$$

pois $\frac{\partial y^i}{\partial y^j} = \delta_{ij}$ e, da primeira para a segunda linha, usamos a regra do produto várias vezes.

Usando as equações 2.5 e 2.4 temos

$$\frac{1}{\sqrt{\det g(\gamma)}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(X^i\sqrt{\det g(\gamma)}) = \frac{1}{\sqrt{\det g(\gamma)}}\sum_i\sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}(X^i\sqrt{\det g(\gamma)})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det g(\gamma)}}\sum_i\sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\left(\frac{\partial X^i}{\partial y^j}\sqrt{\det g(\gamma)} + \frac{\partial\sqrt{\det g(\gamma)}}{\partial y^j}X^i\right) =$$

$$= \frac{1}{\det(J^{-1})\sqrt{\det g(\beta)}}\sum_i\sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\left(\frac{\partial X^i}{\partial y^j}\sqrt{\det g(\beta)}\det(J^{-1}) + \right.$$

$$\left. + X^i\frac{\partial\sqrt{\det g(\beta)}}{\partial y^j}\det(J^{-1}) + X^i\frac{\partial\det(J^{-1})}{\partial y^j}\sqrt{\det g(\beta)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det g(\beta)}}\sum_j\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\sqrt{\det g(\beta)} + \frac{\partial y^j}{\partial x^i}X^i\frac{\partial\sqrt{\det g(\beta)}}{\partial y^j} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det g(\beta)}}\sum_j \frac{\partial Y^j}{\partial y^j}\sqrt{\det g(\beta)} + Y^j\frac{\partial\sqrt{\det g(\beta)}}{\partial y^j} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det g(\beta)}}\sum_j \frac{\partial}{\partial y^j}\left(Y^j\sqrt{\det g(\beta)}\right).$$

■

Podemos agora definir o Laplaciano.

Definição 2.2.5. O Laplaciano é o operador $\triangle : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definido como $\triangle f = (-\mathrm{div}\circ \mathrm{grad} f)$.

Agora escreveremos o Laplaciano em coordenadas locais. Tome $f \in C^\infty(M)$ então

$$\begin{aligned}\triangle f &= -\mathrm{div}(\mathrm{grad} f)\\ &= -\mathrm{div}\left(\sum_i g^{ij}\partial_i f\partial_j\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_j \partial_j\left(\sum_i g^{ij}\partial_i f\sqrt{\det g}\right).\end{aligned}$$

Que no espaço euclideano é o Laplaciano usual.

Observe que apesar de estar definido em coordenadas locais o Laplaciano independe destas pois div e grad independem das coordenadas locais. O Laplaciano é linear pois:

Dados $f, h \in C^\infty(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\triangle(af + bh) &= -\text{div} \circ \text{grad}(af + bh) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_j \partial_j \left(\sum_i g^{ij} \partial_i (af + bh) \sqrt{\det g} \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_j \partial_j \left(a \sum_i g^{ij} \partial_i f \sqrt{\det g} \right) + \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_j \partial_j \left(b \sum_i g^{ij} \partial_i h_n \sqrt{\det g} \right) \\
&= -\frac{a}{\sqrt{\det g}} \sum_j \partial_j \left(\sum_i g^{ij} \partial_i f_n \sqrt{\det g} \right) + \\
&\quad - \frac{b}{\sqrt{\det g}} \sum_j \partial_j \left(\sum_i g^{ij} \partial_i h \sqrt{\det g} \right) \\
&= a\triangle f + b\triangle h.
\end{aligned}$$

Considerando α_g como o isomorfismo canônico entre $\mathcal{X}(M)$ e $\Omega^1(M)$. Definimos o seguinte operador:

Definição 2.2.6. Definimos $\delta : \Omega^1(M) \to C^\infty(M)$ por $\delta(w) = -\text{div}(\alpha_g^{-1}(w))$.

Como α_g é uma isometria pela definição de produto interno em TM^*, $g(\alpha(X), df) = g(X, \text{grad} f)$ para qualquer campo vetorial X e qualquer função $f \in C^\infty(M)$ então temos que δ é caracterizado, para quaisquer $w \in \Omega^1(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, pela equação

$$\langle \delta w, f \rangle = \langle \alpha_g^{-1}(w), \text{grad} f \rangle = \langle \alpha_g^{-1}(w), \alpha_g^{-1} \circ df \rangle = \langle w, df \rangle, \tag{2.6}$$

usando o fato que definimos div de modo que $\langle \text{grad} f, X \rangle = \langle f, -\text{div} X \rangle$ para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathcal{X}(M)$.

Teorema 2.2.7. *Para $w = \sum_i w_i dx^i \in \Omega^1(M)$ temos que δ é dado, em coordenadas locais, por*

$$\delta(w) = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \partial_j (g^{ij} \sqrt{\det g} w_i).$$

Onde $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Demonstração: Pela equação 2.1 temos $\alpha_g^{-1}(w) = \sum_{ij} w_j g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}$. Portanto:

$$\begin{aligned}\delta(w) = -\mathrm{div}(\alpha^{-1}(w)) &= -\mathrm{div}\left(\sum_{ij} w_j g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \partial_j (g^{ij} \sqrt{\det g} w_i).\end{aligned}$$

■

Agora damos uma segunda definição de Laplaciano, equivalente à primeira.

Definição 2.2.8. O Laplaciano é o operador $\triangle : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definido como $\triangle f = \delta df$.

Como, para todo $f \in C^\infty(M)$ temos $\delta df = (-\mathrm{div}\alpha^{-1}) \circ (\alpha(\mathrm{grad} f)) = -\mathrm{div} \circ \mathrm{grad} f$ vemos que as duas definições coincidem.

Ainda notamos, pela equação 2.6, que $\triangle$ é simétrica pois

$$\langle \triangle f, g\rangle = \langle \delta df, g\rangle = \langle df, dg\rangle = \langle f, \delta dg\rangle = \langle f, \triangle g\rangle.$$

Agora vamos escrever o Laplaciano em termos dos coeficientes da conexão. Para isso precisaremos do seguinte Lema:

Lema 2.2.9. *Sejam (g_{ij}) a matriz que representa a métrica em uma base $\partial_1, ..., \partial_n$ e (g^{ij}) sua inversa então temos as duas igualdades*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} g_{mk} &= -\sum_{jl} g_{ml} g_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{lj}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g^{mk} &= -\sum_{jl} g^{mj} g^{lk} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj}.\end{aligned}$$

Demonstração: Como (g_{ij}) e (g^{ij}) são inversas

$$\delta_{mk} = \sum_j g_{jk} g^{mj} \Longrightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j g_{jk} g^{mj} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} g^{mj} + g_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{mj},$$

então

$$\begin{pmatrix} g^{11} & \dots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \dots & g^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{1k} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{nk} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{m1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g^{mn} \end{pmatrix},$$

assim

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{1k} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{nk} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{m1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g^{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} g_{mk} = - \sum_{jl} g_{ml} g_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{lj}$$

e

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} g^{m1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g^{mn} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{1k} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} g^{mk} = - \sum_{jl} g^{mj} g^{lk} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj}.$$

■

Como corolário podemos escrever a seguinte derivada em termos da conexão

Corolário 2.2.10. *Sejam (g_{ij}) a matriz que representa a métrica em uma base $\partial_1, ..., \partial_n$, (g^{ij}) sua inversa e Γ^i_{jk}, para $i, j, k \in \{1, ..., n\}$, os coeficientes da conexão de Levi-Civita (símbolos de Christoffel) então*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g^{im} = - \sum_k g^{ik} \Gamma^m_{ik} - \sum_j g^{jm} \Gamma^i_{ji},$$

$$\sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} = \sum_j \Gamma^j_{jl} + \sum_i \Gamma^i_{il}.$$

Demonstração: Pelo Lema anterior

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} g^{im} &= -\sum_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj} g^{ik} g^{jm} \\
&= -\sum_{kj} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj} g^{ik} g^{jm} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ji} g^{ik} g^{jm} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ji} g^{ik} g^{jm} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} g^{ik} g^{jm} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} g^{ik} g^{jm} \right) \\
&= -\sum_{kj} \left\{ \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj} g^{ik} g^{jm} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ji} g^{ik} g^{jm} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} g^{ik} g^{jm} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} g_{kj} g^{ik} g^{jm} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} g^{ik} g^{jm} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ji} g^{ik} g^{jm} \right) \right\} \\
&= -\sum_{k} g^{ik} \Gamma^m_{ik} - \sum_{j} g^{jm} \Gamma^i_{ij},
\end{aligned}$$

onde usamos a fórmula 1.8 que dá os simbolos de Christoffel em termos da métrica $\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right\} g^{km}$.

Para a outra igualdade basta calcularmos diretamente

$$\begin{aligned}
\sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} =& \sum_{ij} \left\{ \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} - \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} \right\} \\
=& \sum_j \Gamma^j_{jl} + \sum_i \Gamma^i_{il}.
\end{aligned}$$

■

Podemos demonstrar que

Teorema 2.2.11. *Sejam (g_{ij}) a matriz que representa a métrica em uma base $\partial_1, ..., \partial_n$, (g^{ij}) sua inversa e Γ^i_{jk}, para $i, j, k \in \{1, ..., n\}$, os coeficientes da conexão de Levi-Civita (símbolos de Christoffel) então*

$$\triangle u = \sum_{jkm} \frac{\partial u}{\partial x_k} g^{jm} \Gamma^k_{jm} - \sum_{jk} g^{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u.$$

Demonstração: Denotando $* := \sum_{jk} g^{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u - \sum_{jkm} \frac{\partial u}{\partial x_k} g^{jm} \Gamma^k_{jm}$ temos

$$
\begin{aligned}
* =& \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} u - \sum_{jkm} \frac{\partial u}{\partial x_k} g^{jm} \\
=& \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) + \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\sum_m g^{jm} \Gamma^k_{jm} + g^{mk} \Gamma^j_{mj} \right) - \sum_{jkm} \frac{\partial u}{\partial x_k} g^{jm} \Gamma^k_{jm} \\
=& \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) + \sum_{jmk} \frac{\partial u}{\partial x_k} g^{mk} \Gamma^j_{mj} \\
=& \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) + \sum_{ijmk} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_k} g^{mk} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ji}.
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_m} \log \sqrt{\det g} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det g} \left(\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} C_{ij} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{C_{ij}}{\det g} \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij},
\end{aligned}
$$

onde $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(g(i,j))$ e $g(i,j)$ é a matriz obtida de g retirando-se a linha i e a coluna j.

Portanto

$$
\begin{aligned}
* =& \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) + \sum_{mk} \frac{\partial u}{\partial x_k} g^{mk} \frac{\partial}{\partial x_m} \log \sqrt{\det g} \\
=& \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) + \sum_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} g^{jk} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{\det g} \\
=& \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) \sqrt{\det g} + \sum_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{\det g} \right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g^{jk} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) = -\triangle u.
\end{aligned}
$$

■

2.3 Generalizando o Laplaciano

Até agora construímos um operador Laplaciano definido sobre funções $C^\infty(M)$ contudo precisaremos defini-lo em espaços mais gerais do que esse para calcular o menor auto-valor do operador $4\triangle + s_g$, onde s_g é a curvatura escalar. Para tal utilizaremos alguns teoremas de E.D.P. sobre operadores elípticos definidos sobre espaços de Sobolev. Nesta seção definimos tais espaços e construimos uma teoria de integração a Lebesgue, que pode ser encontrada em [12] com mais detalhes.

2.3.1 Integração à Lebesgue em Variedades

Definição 2.3.1. Uma coleção $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de um conjunto X é dita ser uma **σ-álgebra** em X se $\mathfrak{M}$ tem as seguintes propriedades:

- $X \in \mathfrak{M}$.
- Se $A \in \mathfrak{M}$ então $A^c \in \mathfrak{M}$, onde A^c é o complemento de A em relação a X.
- Se $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e se $A_n \in \mathfrak{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $A \in \mathfrak{M}$.

Se $\mathfrak{M}$ é uma σ-álgebra em X, então $(X, \mathfrak{M})$ é dito um **espaço mensurável** e os elementos de $\mathfrak{M}$ são ditos os **conjuntos mensuráveis** em X. Muitas vezes denotaremos um espaço mensurável $(X, \mathfrak{M})$ apenas por X.

Se X é um espaço mensurável, Y é um espaço topológico e f é uma função de X em Y então f é dita ser *mensurável* se $f^{-1}(V)$ é mensurável para todo aberto $V \subset Y$.

Definição 2.3.2. Uma **medida** é uma função μ, definida em uma σ-álgebra $\mathfrak{M}$ cuja imagem está em $[0, \infty]$ e que é aditivamente contável, ou seja, se A_i é uma coleção disjunta de elementos de $\mathfrak{M}$ então

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

E $\mu(A_i) < \infty$ para algum $A \in \mathfrak{M}$.

Um **espaço de medida** é um espaço mensurável que tem uma medida definida na σ-álgebra dos seus conjuntos mensuráveis.

No começo deste capítulo definimos o que significa integrar (no sentido de Riemann) sobre uma variedade diferenciável M, com esta definição podemos definir uma medida μ e uma σ-álgebra $\mathfrak{M}$ sobre M da seguinte maneira:

Dizemos que um conjunto $E \subset M$ é mensurável se a função característica $\zeta_E : M \to \mathbb{R}$ de E, definida como $\zeta_E(x) = 1$ se $x \in E$ e $\zeta_E(y) = 0$ se $y \in E^c$, é integrável à Riemann e definimos a medida $\mu(E)$ de um conjunto mensurável E como

$$\mu(E) = \int_M \zeta_E \mathrm{dvol}.$$

Então consideramos a σ-álgebra gerada por estes conjuntos. Note que, utilizando esta medida, temos que a medida de um ponto é zero (pois a função característica deste ponto é integrável a Riemann e sua integral vale zero) então, como a medida é aditivamente contável qualquer conjunto enumerável de pontos tem medida nula.

Podemos estender nossa σ-álgebra e nossa medida utilizando o seguinte teorema, que está demonstrado em [12].

Teorema 2.3.3. *Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida, seja $\mathfrak{M}^*$ a coleção de todos conjuntos $E \subset X$ para os quais existem conjuntos $A, B \in \mathfrak{M}^*$ tais que $A \subset E \subset B$ e $\mu(B - A) = 0$, definimos $\mu(E) = \mu(A)$. Então $\mathfrak{M}^*$ é uma σ-álgebra e μ é uma medida em $\mathfrak{M}^*$.*

Seja P é uma propriedade que pode valer ou não para um ponto $x \in M$. Dizemos que P vale *quase sempre* em M se o conjunto dos pontos onde P não vale tem medida nula.

Com esta medida definiremos uma teoria de integração a Lebesgue

Definição 2.3.4. Se $f : M \to [0, \infty)$ uma função da forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \zeta_{A_i},$$

onde $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, com $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$; então dizemos que f é uma **função simples**.

Note que f é mensurável se e somente se os conjuntos A_i são mensuráveis.

Definição 2.3.5. Seja $f : M \to [0, \infty)$ uma função simples mensurável, $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \zeta_{A_i}$. Dado um conjunto $E \in \mathfrak{M}^*$ definimos a integral a Lebesgue de f sobre E em relação a medida μ como

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i).$$

A medida de alguns conjuntos pode ser infinita. Para lidarmos com isto, definimos, $a.\infty = \infty.a = \infty$ se $a \in (0, \infty)$ e $0.\infty = \infty.0 = 0$ e $a + \infty = \infty + a = \infty$ se $a \in [0, \infty]$.

Definição 2.3.6. Dado um conjunto $E \in \mathfrak{M}^*$ definimos a **integral a Lebesgue** de $f : M \to [0, \infty)$ sobre E em relação a medida μ como

$$\int_E f d\mu = \sup_s \int_E s d\mu,$$

onde s é uma função simples menor ou igual que f.

Denotando

$$f^+ := \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}, \qquad f^- := \begin{cases} 0, & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

podemos definir o que é uma função integrável a Lebesgue e a integral de uma destas funções como

Definição 2.3.7. Dizemos que uma função mensurável é **integrável a Lebesgue** se

$$\int_M |f(x)| d\mu < \infty.$$

Denotamos o conjunto das funções integráveis a Lebesgue em M por $I^1(M)$.

Dado um conjunto $E \in \mathfrak{M}^*$ definimos a **integral a Lebesgue** de $f : M \to \mathbb{R}$ sobre E em relação a medida μ como

$$\int_E f d\mu = \sup_{s^+} \int_E s^+ d\mu - \sup_{s^-} \int_E s^- d\mu,$$

onde s^+ é uma função simples menor ou igual que f^+ e s^- é uma função simples menor ou igual que f^-.

Se uma função é integrável à Riemann ela também o é à Lebesgue e as duas integrais tem o mesmo valor. O operador integral à Lebesgue também é linear.

Sejam $f, g \in I^1(M)$, $f = g$ quase sempre (a menos de um conjunto G mensurável); E, F conjuntos mensuráveis e $\mu(F) = 0$ então

$$\int_F f d\mu \leq \int_F \sup f d\mu = \sup f \mu(F) = 0;$$
$$\int_E (f - g) d\mu = \int_{E-G} (f - g) d\mu + \int_G (f - g) d\mu = 0.$$

Temos ainda o seguinte resultado de convergência:

Teorema 2.3.8 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis à Lebesgue em X, tais que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Se existe uma função $g \in I^1(M)$ tal que

$$|f(x)| \leq g(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $f \in I^1(M)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int f(x) d\mu.$$

Assim como o conjunto $I^1(M)$ das funções integráveis em módulo podemos definir $I^p(M)$, para todo $p \in \mathbb{N}$, como o conjunto das funções mensuráveis tais que

$$\int_M |f|^p d\mu \leq \infty.$$

Denotando $E_p = \{f \in L^p(M) | \int_M |f|^p = 0\}$ (o qual é um subespaço vetorial) definimos $\mathbf{L^p(M)} := I^p(M)/E_p$ e uma norma da seguinte maneira

$$\|f\|_p = \left(\int_M |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Os espaços $L^p(M)$ são completos. De fato: Se (f_n) é uma sequência de Cauchy de funções em $L^p(M)$ então $f^n \to f$, onde f é uma função mensurável, e $(f_n)^p$ é uma sequência de Cauchy. Tome $\epsilon > 0$ fixo, então existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq N_0$ temos, a menos de um conjunto de medida nula:

$$\sup_x ((f_n(x))^p - (f_m(x))^p) \leq \varepsilon$$

deste modo $|f_n(x)|^p \leq g(x) := \sup_x \{|f_1(x)|^p, ..., |f_{N_0 - 1}(x)|^p, |f_{N_0}(x)|^p + \varepsilon\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ $g : M \to \mathbb{R}$ é uma função integrável (pois é o sup de um número finito de funções integráveis) assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $|f_n|^p \to h$ e $h = |f|^p$ pela unicidade do limite. Portanto os espaços $L^p(M)$ são completos.

Pode-se mostrar que o único destes espaços no qual a norma provém de um produto inteno é $L^2(M)$ e que $L^p(M)$ é espaço de Banach se $p \geq 1$ e portanto um espaço de Hilbert se $p = 2$.

Podemos definir uma norma em $L^2(M)$:

$$\|u\|_{L^2} = (\langle u, u \rangle_{L^2})^{1/2} = \left(\int_M u^2 d\mu \right)^{1/2}$$

e uma norma em $C^\infty(M)$:

$$\|u\|_{H^1} = \Big(\langle u,u\rangle_{H_0^1}\Big)^{1/2} = \left(\int_M u^2 d\mu + \int_M g(\text{grad}u, \text{grad}u)d\mu\right)^{1/2}.$$

Estas normas estão associadas, respectivamente, ao seguintes produtos internos

$$\langle u,v\rangle_{L^2} = \int_M uv d\mu$$

e ao produto interno de $u, v \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_{H^1} &= \int_M uv d\mu + \int_M g(\alpha_g^{-1}(du), \alpha_g^{-1}(dv))d\mu \\ &= \int_M uv d\mu + \int_M g(\text{grad}u, \text{grad}v)d\mu.\end{aligned}$$

Pode ser demostrado que $C^\infty(M)$ é denso em $L^2(M)$ em relação a norma $\|.\|_{L^2}$. Além disso, em relação a esta norma, a imersão de $C^\infty(M)$ em $L^2(M)$ é compacta. Denotaremos o fecho de $C^\infty(M)$ em relação a norma $\|u\|_{H^1}$ por $H^1(M)$.

Dizemos que $H^1(M)$ e $H_0^1(M)$ ($f \in H^1(M)$ com suporte compacto) são **espaços de Sobolev**.

Capítulo 3

Os invariantes

3.1 Invariante de Perelman

Seja M uma variedade fechada conexa de dimensão $n \geq 3$ e g uma métrica Riemanniana sobre M. Considere o operador $4\triangle_g + s_g I : C^\infty(M) \to \mathbb{C}^\infty(M)$ associado a g, onde s_g é a curvatura escalar de g e $\triangle_g = -\mathrm{div} \circ \mathrm{grad}$ é o operador de Laplace-Beltrami.

Denotamos por λ_g o menor autovalor do operador $4\triangle_g + s_g I$ que é dado, em termos do quociente de Rayleigh, pelo seguinte teorema

Teorema 3.1.1. *O menor autovalor λ_g do operador $4\triangle_g + s_g I$ é dado por*

$$\lambda_g = \inf_u \frac{\int_M [s_g u^2 + 4|\mathrm{grad} u|^2] d\mu_g}{\int_M u^2 d\mu_g} \tag{3.1}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções reais suaves u sobre M. Além disso este ínfimo é atingido por uma única função $u \in C^\infty(M)$.

Demonstração: Podemos escrever, para cada $f \in C^\infty(M)$, este operador como

$$
\begin{aligned}
(4\triangle_g + s_g I)(f) &= \frac{-4}{\sqrt{\det g}} \sum_j \partial_j \left(\sum_i g^{ij} \partial_i (f\sqrt{\det g}) \right) + s_g f \\
&= \frac{-4}{\sqrt{\det g}} \sum_j \partial_j \left(\sum_i g^{ij} \left(\partial_i f \sqrt{\det g} + f \partial_i \sqrt{\det g} \right) \right) + s_g f \\
&= -4 \sum_j \partial_j \left(\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i g^{ij} \left(\partial_i f \sqrt{\det g} + f \partial_i \sqrt{\det g} \right) \right) \\
&+ 4 \sum_j \partial_j \left(\frac{1}{\sqrt{\det g}} \right) \sum_i g^{ij} \left(\partial_i f \sqrt{\det g} + f \partial_i \sqrt{\det g} \right) + s_g f \\
&= -4 \sum_j \partial_j \left(\sum_i g^{ij} (\partial_i f) \right) - 4 \sum_j \partial_j \left(\sum_i g^{ij} \frac{\partial_i \sqrt{\det g}}{\sqrt{\det g}} (f) \right) \\
&+ 4 \sum_j \partial_j \left(\frac{1}{\sqrt{\det g}} \right) \sum_i g^{ij} \sqrt{\det g} (\partial_i f) \\
&+ 4 \sum_j \partial_j \left(\frac{1}{\sqrt{\det g}} \right) \sum_i g^{ij} \partial_i \sqrt{\det g} (f) + s_g (f) \\
&= -4 \sum_j \partial_j \left(\sum_i g^{ij} (\partial_i f) \right) - 4 \sum_j \partial_j \left(\sum_i g^{ij} \frac{\partial_i \det g}{2 \det g} (f) \right) \\
&- 4 \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial_i \det g}{2 \det g} \partial_j f + \left(4 \sum_j \partial_j \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i g^{ij} \partial_i \sqrt{\det g} + s_g \right) f \\
&= -4 \partial_j (g^{ij} (\partial_i f)) + \partial_j (b^i f) + b^i \partial_j f + cf,
\end{aligned}
$$

utilizando a convenção de somatório de Einstein e denotando $b^j = -4 \sum_i g^{ij} \frac{\partial_i \det g}{2 \det g}$, $c = 4 \sum_j \partial_j \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i g^{ij} \partial_i \sqrt{\det g} + s_g$.

Podemos definir uma forma quadrática em $C^\infty(M)$ associada ao operador $4\triangle_g + s_g I$ por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(u, v) :&= \langle (4\triangle_g + s_g I)(u), v \rangle_{L^2} \\
&= \int_M \left(4g^{ij} \partial_i u \partial_j v + \partial_j (b^j u) v + b^j \partial_j uv + cuv \right) d\mu \\
&= \int_M \left(4g^{ij} \partial_i u \partial_j v - b^j u \partial_j v + b^j \partial_j uv + cuv \right) d\mu.
\end{aligned}
$$

O operador $4\triangle_g + s_g I$ é *elíptico*[1].

[1] A teoria que desenvolvemos aqui pode ser generalizada para operadores elípticos em

Para cada $u \in C^{\infty}(M)$, $u \neq 0$, a razão

$$J(u) = \frac{\mathcal{L}(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}}$$

é dita o quociente de Rayleigh de $\mathcal{L}$.

Vamos minimizar J. Primeiro notamos que J é limitado inferiormente pois, como M é compacta, $|s_g| \leq k$ para algum $k \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{\mathcal{L}(u,u)}{\langle u,u\rangle_{L^2}} = \frac{\langle (4\triangle_g + s_g)(u), u\rangle_{L^2}}{\int_M u^2 d\mu} \\ &= \frac{4\langle \text{grad}u, \text{grad}u\rangle_{L^2}}{\int_M u^2 d\mu} + \frac{\int_M s_g u^2 d\mu}{\int_M u^2 d\mu} \geq \frac{\int_M -ku^2 d\mu}{\int_M u^2 d\mu} = -k. \end{aligned}$$

Assim faz sentido definirmos

$$\lambda_g = \inf_{u \in C^{\infty}(M)} J(u).$$

Vamos mostrar que λ_g é um autovalor de $4\triangle_g + s_g I$.

Como λ_g é o infimo de $J(u)$ existe uma sequência $\{v_m\} \subset C^{\infty}(M)$ tal que $J(v_m) \to \lambda_g$ então, denotando $u_m = v_m/\|v_m\|_{L^2}$, temos que $J(u_m) = J(v_m)$ portanto $J(u_m) \to \lambda_g$. É claro que $\|u_m\|_{L^2} = 1$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(u_m, u_m) = \int_M [4g(\text{grad}(u_m), \text{grad}(u_m)) + s_g u_m^2] d\mu \leq \lambda_g + k,$$

pois $\mathcal{L}(u_m, u_m) = J(u_m)$ e $J(u_m) \to \lambda_g$. Então

$$\begin{aligned} \int_M g(\text{grad}u_m, \text{grad}u_m) d\mu &\leq \frac{1}{4}\left(\lambda_g + k - \int_M s_g u_m^2 d\mu\right) \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\lambda_g + k - (-k)\int_M u_m^2 d\mu\right) = \frac{1}{4}\left(\lambda_g + k + k\right) := K_0. \end{aligned}$$

$C^{\infty}(M)$ pode ser mergulhada em $H^1(M)$, usaremos a mesma notação para $\{u_n\}$ e sua imagem de $\{u_n\}$ em $H^1(M)$. Portanto, para todo $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\|u_m\|_{H^1} = \int_M g(\text{grad}u_m, \text{grad}u_m) d\mu + \int_M u_m^2 d\mu \leq K_0 + 1,$$

ou seja, $\{u_m\}$ é limitada em $H^1(M)$.

geral. Para ver detalhes sobre a teoria de operadores elípticos consulte [4]

O espaço $H^1(M)$ pode ser compactamente mergulhado (teorema 4.0.6 no anexo) em $L^2(M)$, portanto a imagem de $\{u_m\}$ em $L^2(M)$, que denotamos por $\{w_m\}$, possui uma subsequência $\{w'_m\}$ converge para uma função w em $L^2(M)$ com $\|w\|_{L^2} = 1$.

Denotando $\mathcal{Q}(u) = \mathcal{L}(u,u)$ temos, para todo $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right) + \mathcal{Q}\left(\frac{u_l + u_m}{2}\right) = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}(u_m) + \mathcal{Q}(u_l)),$$

então

$$\mathcal{Q}\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right) = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}(u_m) + \mathcal{Q}(u_l)) - \mathcal{Q}\left(\frac{u_l + u_m}{2}\right) \to 0$$

quando $m, l \to \infty$ pois

$$\lim_{m,l\to\infty} \mathcal{Q}(\frac{1}{2}(u_m + u_l)) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{Q}(2u_m) = \lim_{l\to\infty} \mathcal{Q}(u_l) = \lambda_g.$$

Deste modo

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right) = &\int_M 4g\left(\operatorname{grad}\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right), \operatorname{grad}\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right)\right) d\mu \\ &+ \int_M s_g \left(\frac{u_l - u_m}{2}\right)^2 d\mu,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\int_M g\left(\operatorname{grad}\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right), \operatorname{grad}\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right)\right) d\mu =& \frac{1}{4}\mathcal{Q}\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right) \\ &- \int_M \frac{1}{4} s_g \left(\frac{u_l - u_m}{2}\right)^2 d\mu \to 0\end{aligned}$$

quando $m, l \to \infty$ pois s_g é limitada.

Assim

$$\|u_l - u_m\|_{H^1} = \|u_l - u_m\|_{L^2} + \int_M g\left(\operatorname{grad}(u_l - u_m), \operatorname{grad}(u_l - u_m)\right) d\mu \to 0$$

quando $l, m \to \infty$, ou seja, $\{u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $H^1(M)$ que é completo em relação à norma de $\|.\|_{H^1}$ portanto $u_m \to u$ em $H^1(M)$. Os resultados clássicos de regularização (teorema 4.0.5 no anexo) de EDP's garantem que $u \in c^\infty(M)$. Assim $\mathcal{Q}(u) = \lambda_g$ e $u = w$ pela unicidade do limite. Além disso provamos que existe uma única função u tal que $J(u,u) = \lambda_g$ (caso contrário a sequência (u_m) poderia não convergir).

Vamos mostrar que

$$(4\triangle_g + s_g)u - \lambda_g u = 0$$

pelo método usual do cálculo variacional. Dado $v \in H^1(M)$, definimos

$$f(t) = J(u + tv).$$

Vamos calcular $f'(0)$

$$\begin{aligned}
f'(0) =& \lim_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \\
=& \lim_{t \to 0} \frac{1}{t \int_M (u+tv)^2 \, d\mu} \bigg(\int_M 4g^{ij} \partial_i u \partial_j u + 4tg^{ij} \partial_i u \partial_j v + 4tg^{ij} \partial_i v \partial_j u \\
& + 4t^2 g^{ij} \partial_i v \partial_j v - b^j u \partial_j u - tb^j u \partial_j v - tb^j v \partial_j u - t^2 b^j v \partial_j v + b^j u \partial_j u \\
& + tb^j u \partial_j v + tb^j v \partial_j u + t^2 b^j v \partial_j v + cu^2 + 2tcuv + t^2 cv^2 \, d\mu \big) \\
& - \frac{1}{t \int_M u^2 d\mu} \int_M g^{ij} \partial_i u \partial_j u + cu^2 d\mu \\
=& \lim_{t \to 0} \frac{1}{t \int_M (u+tv)^2 \, d\mu} \bigg(\lambda_g + \int_M 4tg^{ij} \partial_i u \partial_j v + 4tg^{ij} \partial_i v \partial_j u + 4t^2 g^{ij} \partial_i v \partial_j v \\
& - tb^j u \partial_j v - tb^j v \partial_j u - t^2 b^j v \partial_j v + tb^j u \partial_j v + tb^j v \partial_j u + t^2 b^j v \partial_j v + 2tcuv \\
& + t^2 cv^2 d\mu - \lambda_g \left(1 + 2t \int_M uv d\mu + t^2 \int_M v^2 \, d\mu \right) \bigg) \\
=& \int_M 4g^{ij} \partial_i u \partial_j v - b^j u \partial_j v + b^j \partial_j u v + cuv \, d\mu \\
& + \int_M 4g^{ij} \partial_i u \partial_j v - b^j v \partial_j u + b^j \partial_j v u + cuv \, d\mu - 2\lambda_g \int_M uv d\mu \\
=& 2\mathcal{L}(u,v) - 2\lambda_g \langle u, v \rangle_{L^2},
\end{aligned}$$

pois $\mathcal{L}(u,v) = \mathcal{L}(v,u)$. Portanto f é diferenciável no 0.

Por outro lado, como $J(u)$ é o ínfimo, temos

$$\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \geq 0 \qquad \text{para } t > 0 \text{ e}$$
$$\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \leq 0 \qquad \text{para } t < 0.$$

então

$$\mathcal{L}(u,v) - \lambda_g \langle u, v \rangle_{L^2} = f'(0) = 0, \qquad \forall v \in H^1(M),$$

então $(4\triangle_g + s_g)u = \lambda_g u$, ou seja, u é um autovetor com autovalor associado λ_g.

É claro que este é o menor autovalor pois, dado um autovetor w, com autovalor associado λ_0 temos

$$\lambda_g \leq J(w) = \frac{\lambda_0 \langle w, w \rangle_{L^2}}{\langle w, w \rangle_{L^2}} = \lambda_0. \qquad \blacksquare$$

Como existe um único $u \in H^1(M)$ tal que $J(u) = \lambda_g$ temos que λ_g é um autovalor simples.

Definição 3.1.2. Sejam M uma variedade diferenciavel fechada orientáda n-dimensional, $n \geq 3$. Dada uma métrica Riemanniana g sobre M, denotamos o menor autovalor do operador $4\triangle_g + s_g$ por λ_g e o volume de M em relação a esta métrica por vol_g. O **invariante de Perelman** $\overline{\lambda}$ de M é definido como

$$\overline{\lambda}(M) := \sup_g \lambda_g vol_g^{\frac{2}{n}},$$

onde o sup é tomado sobre todas as métricas Riemannianas de M.

Teorema 3.1.3. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\phi : M \to N$ um difeomorfismo então $\overline{\lambda}(M) = \overline{\lambda}(N)$, ou seja, $\overline{\lambda}$ é um invariante por difeomorfismos.*

Demonstração: Sejam $\{a_1, ..., a_k\}$ uma partição da unidade associada ao atlas (U_i, α_i) de M e $\{b_1, ..., b_l\}$ uma partição da unidade associada ao atlas (V_j, β_j) de N e g uma métrica Riemanniana sobre N. Então o pullback $\phi^* g$ de g define uma métrica Riemanniana sobre M e, por definição, $(M, \phi^* g)$ e (N, g) são isométricas. As formas de volume são, respectivamente,

$$\mathrm{dvol}_{\phi^* g} = \sqrt{\det(\phi^* g)} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

e

$$\mathrm{dvol}_g = \sqrt{\det(g)} dy^1 \wedge ... \wedge dy^n.$$

Pelo teorema 1.2.8 $s_g \circ \phi = s_{\phi^* g}$. Além disso, dados campos vetoriais X, Y em M temos, em $U_i \cap \phi^{-1}(V_j)$,

$$\phi^* g(X, Y) = g(d\phi X, d\phi Y) = X^T D^T G D Y$$

onde G é a matriz da métrica, $d\phi$ é a derivada de ϕ e D é a matriz Jacobiano de $\beta_j \circ \phi \circ \alpha_i^{-1}$, então $\sqrt{\det(\phi^* g)} = \det(D) \sqrt{\det(g)}$.

Além disso $D = (\frac{\partial (y^i \circ \phi)}{\partial x^j})$, então

$$(\phi^* g)^{ij} = \sum_{lr} \frac{\partial x^i}{\partial (y^l \circ \phi)} g^{lr} \frac{\partial x^j}{\partial (y^r \circ \phi)}.$$

Portanto, para cada $u \in C^\infty(M)$ usando a fórmula de mudança de variáveis (teorema 4.0.4 em anexo) em $\mathbb{R}^n$, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\phi^*g}(u,u) &= \int_M 4(\triangle_{\phi^*g}u)u + s_{\phi^*g}u^2 d\mu_{\phi^*g} \\
&= \int_M 4\phi^*g(\mathrm{grad}_{\phi^*g}u, \mathrm{grad}_{\phi^*g}u) + s_{\phi^*g}u^2 d\mu_{\phi^*g} \\
&= \int_M 4\phi^*g\left(\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial x^j}{\partial(y^r\circ\phi)}\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial x^j}{\partial(y^r\circ\phi)}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&\qquad\qquad + s_{\phi^*g}u^2 d\mu_{\phi^*g} \\
&= \int_M 4\phi^*g\left(\frac{\partial u}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}, \frac{\partial u}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}\right) + s_{\phi^*g}u^2 d\mu_{\phi^*g} \\
&= \sum_{ij}\int_{\alpha_i(U_i\cap\phi^{-1}(V_j))}\left[\left(4\phi^*g\left(\frac{\partial u}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}, \frac{\partial u}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + s_{\phi^*g}u^2\right) a_i(b_j\circ\phi)\right] \\
&\qquad\qquad\quad \circ\,\alpha_i^{-1}\det(D)\sqrt{\det(g)}dx^1...dx^n \\
&= \sum_{j}\int_{\beta_j(V_j)}\left[\left(4\phi^*g\left(\frac{\partial u}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}, \frac{\partial u}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + s_{\phi^*g}u^2\right)\circ\phi^{-1}\circ\beta_j^{-1}\right](b_j\circ\beta_j^{-1})\sqrt{\det(g)}dy^1...dy^n.
\end{aligned}
$$

Por outro lado temos

$$
\frac{\partial u}{\partial(y^i\circ\phi)} = \lim_{t\to 0} u\circ\phi^{-1}\circ(y^i)^{-1}(y_1,...,y_i+t,...,y_n) = \frac{\partial(u\circ\phi^{-1})}{\partial y^i}.
$$

Também temos que o vetor $\frac{\partial}{\partial(y^f\circ\phi)}$ pode ser visto como a classe de equivalência da curva $\phi^{-1}\circ\beta_j^{-1}\circ(y^f)^{-1}:\mathbb{R}\to M$, onde $y^f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ é dada por $y^f(t)_p = (y_1,...,y_f+t,...,y_n)$, pela relação $k\sim l$ se, e somente se, $(\beta_j\circ k)'(0) = (\beta_j\circ l)'(0)$. Assim $d\phi([\phi^{-1}\circ\beta_j^{-1}\circ(y^i)^{-1}]) = [\circ\beta_j^{-1}\circ y^i] = \frac{\partial}{\partial y}$. Assim:

$$
\begin{aligned}
&\phi^*g\left(\frac{\partial u}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}, \frac{\partial u}{\partial(y^l\circ\phi)}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}\right) = \\
=&g\left(d\phi\left(\frac{\partial(u\circ\phi^{-1})}{\partial y^l}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}\right), d\phi\left(\frac{\partial(u\circ\phi^{-1})}{\partial y^l}g^{lr}\frac{\partial}{\partial(y^r\circ\phi)}\right)\right) = \\
=&g\left(\frac{\partial(u\circ\phi^{-1})}{\partial y^l}g^{lr}\frac{\partial}{\partial y^r}, \frac{\partial(u\circ\phi^{-1})}{\partial y^l}g^{lr}\frac{\partial}{\partial y^r}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\phi^* g}(u,u) &= \int_N 4g(\mathrm{grad}_g(u\circ\phi^{-1}), \mathrm{grad}_g(u\circ\phi^{-1})) + s_{\phi^* g}(u^2\circ\phi^{-1})d\mu_g \\ &= \mathcal{L}_g(u\circ\phi^{-1}, u\circ\phi^{-1}).\end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned}\int_M u^2 d\mu_{\phi^* g} &= \int_M u^2\sqrt{\det(\phi^* g)}dx^1\wedge ...\wedge dx^n \\ &= \sum_{ij}\int_{\alpha_i(U_i\cap\phi^{-1}(V_j))}(a_i(b_j\circ\phi)u^2)\circ\alpha_i^{-1}\det(D)\sqrt{\det(g)}dx^1...dx^n \\ &= \sum_j\int_{\beta_j(V_j)}[b_j(u^2\circ\phi^{-1})]\circ\beta_j^{-1}\sqrt{\det(g)}dy^1...dy^n \\ &= \int_N (u^2\circ\phi^{-1})d\mu_g\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_M d\mu_{\phi^* g} &= \int_M \sqrt{\det(\phi^* g)}dx^1\wedge ...\wedge dx^n \\ &= \sum_{ij}\int_{\alpha_i(U_i\cap\phi^{-1}(V_j))}[a_i(b_j\circ\phi)s_{\phi^* g}]\circ\alpha_i^{-1}\det(D)\sqrt{\det(g)}dx^1...dx^n \\ &= \sum_j\int_{\beta_j(V_j)} b_j\circ\beta_j^{-1}\sqrt{\det(g)}dy^1...dy^n \\ &= \int_N d\mu_g.\end{aligned}$$

Deste modo para cada $u\in C^\infty(M)$ temos outra função $u\circ\phi^{-1}\in C^\infty(N)$ tal que $J_g(u\circ\phi^{-1}) = J_{\phi^* g}(u)$. Daí $\lambda_g\le\lambda_{\phi^* g}$, mas $\phi^{-1}: N\to M$ é um difeomorfismo, então $\lambda_{\phi^* g}\le\lambda_g$ (análogo ao que fizemos acima) $\Longrightarrow \lambda_{\phi^* g} = \lambda_g$.

Portanto para cada g em N temos outra métrica $\phi^* g$ em M tal que $\lambda_{\phi^* g} = \lambda_g$. Daí $\overline{\lambda}(M)\ge\overline{\lambda}(N)$, mas $\phi^{-1}: N\to M$ é um difeomorfismo, então $\overline{\lambda}(N)\ge\overline{\lambda}(M)$ (análogo ao que fizemos acima) $\Longrightarrow \overline{\lambda}(M)\ge\overline{\lambda}(N)$.

■

3.2 Problema de Yamabe

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana suave fechada conexa orientável de dimensão $n \geq 3$ (escreveremos apenas variedade Riemanniana). Consideremos o conjunto $\Psi(M)$ de todas as métricas Riemannianas sobre M (que não é vazio, pois toda variedade Hausdorff com base enumerável admite ao menos uma métrica Riemanniana [3]). Podemos definir sobre este conjunto a relação $\sim$ como $g \sim \tilde{g} \Longleftrightarrow \tilde{g} = ug$ para alguma $u : M \to \mathbb{R}^+$ de classe C^∞. Esta é uma relação de equivalência pois

- $g \sim g$ pois a função $1 : M \to \mathbb{R}^+$, dada por $1(x) = 1$ é de classe C^∞.
- $g \sim h \Longrightarrow h \sim g$ pois $u : M \to \mathbb{R}^+$ de classe $C^\infty \Longrightarrow 1/u : M \to \mathbb{R}^+$ é de classe C^∞ então $h = ug \Longrightarrow g = \frac{1}{u}h$.
- $g \sim h \sim i \Longrightarrow g \sim i$ pois $h = ug$ e $i = vh$ implica em $i = (uv)g$ e $uv : M \to \mathbb{R}^+$ é de classe C^∞.

Definição 3.2.1. Definimos a **classe conforme** γ de uma métrica $g \in \Psi(M)$ como
$$\gamma = [g] = \{\tilde{g} \in \Psi(M) | \tilde{g} \sim g\}.$$
Se $\tilde{g}, g \in \gamma$ dizemos que $\tilde{g}$ é conformal a g e que γ é uma classe conforme sobre M.

Em [14] Yamabe conjecturou que:
Problema de Yamabe: *Para toda variedade compacta Riemanniana* (M, g) *de dimensão* $n \geq 3$*, existe uma métrica conforme à* g*, denotada por* $\tilde{g}$*, de curvatura escalar constante.*

Ao tentarmos formular este problema em termos de EDP chegamos a uma equação que relaciona o operador de Laplace-Beltrami e a curvatura escalar com a curvatura escalar de uma métrica $\tilde{g}$ conforme à g. De fato:

Suponha que (M, g) é uma variedade riemanniana compacta conexa de dimensão $n \geq 3$. Qualquer métrica $\tilde{g}$ conforme a g pode ser escrita na forma $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ para alguma função real u suave em M. Denotando $r = \frac{4}{n-2}$ e usando a equação 1.8 temos que os símbolos de Christoffel $\widetilde{\Gamma}_{ij}^m$ da métrica são dados por

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}^m_{ij} =& \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{g}_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j}\tilde{g}_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{g}_{ij} \right\} \tilde{g}^{km} \\
=& \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(u^r g_{jk}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(u^r g_{ki}) - \frac{\partial}{\partial x^k}(u^r g_{ij}) \right\} u^{-r} g^{km} \\
=& \frac{1}{2}\sum_k u^r \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right\} u^{-r} g^{km} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} u^r g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} u^r g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} u^r g_{ij} \right\} u^{-r} g^{km} \\
=& \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right\} g^{km} \\
&+ \frac{1}{2} r u^{-1} \sum_k \left\{ \frac{\partial u}{\partial x^i} g_{jk} g^{km} + \frac{\partial u}{\partial x^j} g_{ik} g^{km} - \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{ij} g^{km} \right\} \\
=& \Gamma^m_{ij} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left\{ \delta_{jm} \frac{\partial u}{\partial x^i} + \delta_{im} \frac{\partial u}{\partial x^j} - \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{ij} g^{km} \right\}.
\end{aligned}
$$

Teorema 3.2.2. *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão n, $\tilde{g}$ é uma métrica conforme à g, com $\tilde{g} = u^r g$, $r = \frac{4}{n-2}$, $\triangle_g$ é o Laplaciano em relação à métrica g, s_g a curvatura escalar de (M, g) e $s_{\tilde{g}}$ a curvatura escalar de $(M, \tilde{g})$ então*

$$
\triangle_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} s_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} s_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}.
$$

Demonstração: Pela equação 1.10 da curvatura em termos dos simbolos de Christoffel temos

$$
\begin{aligned}
s_{\tilde{g}} =& \sum_{ijlm} \tilde{g}^{ij} \left(\widetilde{\Gamma}^m_{ij} \widetilde{\Gamma}^l_{lm} - \widetilde{\Gamma}^m_{lj} \widetilde{\Gamma}^l_{im} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\widetilde{\Gamma}^l_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x^i} (\widetilde{\Gamma}^l_{lj}) \right) \\
=& \sum_{ijlm} u^{-r} g^{ij} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\Gamma^l_{ij} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left\{ \delta_{jl} \frac{\partial u}{\partial x^i} + \delta_{il} \frac{\partial u}{\partial x^j} - \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{ij} g^{kl} \right\} \right) \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\Gamma^l_{lj} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left\{ \delta_{jl} \frac{\partial u}{\partial x^l} + \delta_{ll} \frac{\partial u}{\partial x^j} - \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{lj} g^{kl} \right\} \right) \\
& + \left(\Gamma^m_{ij} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left\{ \delta_{jm} \frac{\partial u}{\partial x^i} + \delta_{im} \frac{\partial u}{\partial x^j} - \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{ij} g^{km} \right\} \right) \\
& \cdot \left(\Gamma^l_{lm} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left\{ \delta_{ml} \frac{\partial u}{\partial x^l} + \delta_{ll} \frac{\partial u}{\partial x^m} - \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{lm} g^{kl} \right\} \right) \\
& - \left(\Gamma^m_{lj} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left\{ \delta_{jm} \frac{\partial u}{\partial x^l} + \delta_{lm} \frac{\partial u}{\partial x^j} - \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{lj} g^{km} \right\} \right) \\
& \left. \cdot \left(\Gamma^l_{im} + \frac{1}{2} r u^{-1} \left\{ \delta_{ml} \frac{\partial u}{\partial x^i} + \delta_{il} \frac{\partial u}{\partial x^m} - \sum_k \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{im} g^{kl} \right\} \right) \right\} \\
=& u^{-r} \sum_{ijlm} g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma^l_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^l_{lj} + \Gamma^m_{ij} \Gamma^l_{lm} - \Gamma^m_{lj} \Gamma^l_{im} \right) \\
& + \frac{r}{2} \sum_{ijklm} u^{-r} g^{ij} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \left(u^{-1} \left\{ \delta_{jl} \frac{\partial u}{\partial x^i} + \delta_{il} \frac{\partial u}{\partial x^j} - \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{ij} g^{kl} \right\} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(u^{-1} \left\{ \delta_{jl} \frac{\partial u}{\partial x^l} + \delta_{ll} \frac{\partial u}{\partial x^j} - \frac{\partial u}{\partial x^k} \delta_{jk} \right\} \right) \right\} \\
& + \frac{r}{2} \sum_{ijklm} u^{-r-1} \left\{ \Gamma^m_{ij} g^{ij} \delta_{ml} \frac{\partial u}{\partial x^l} + \Gamma^m_{ij} g^{ij} \delta_{ll} \frac{\partial u}{\partial x^m} - \Gamma^m_{ij} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{lm} g^{kl} \right\} \\
& + \frac{r}{2} \sum_{ijklm} u^{-r-1} \left\{ \Gamma^l_{lm} g^{ij} \delta_{jm} \frac{\partial u}{\partial x^i} + \Gamma^l_{lm} g^{ij} \delta_{im} \frac{\partial u}{\partial x^j} - \Gamma^l_{lm} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{ij} g^{km} \right\} \\
& - \frac{r}{2} \sum_{ijklm} u^{-r-1} \left\{ \Gamma^m_{lj} g^{ij} \delta_{ml} \frac{\partial u}{\partial x^i} + \Gamma^m_{lj} g^{ij} \delta_{il} \frac{\partial u}{\partial x^m} - \Gamma^m_{lj} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{im} g^{kl} \right\} \\
& - \frac{r}{2} \sum_{ijklm} u^{-r-1} \left\{ \Gamma^l_{im} g^{ij} \delta_{jm} \frac{\partial u}{\partial x^l} + \Gamma^l_{im} g^{ij} \delta_{lm} \frac{\partial u}{\partial x^j} - \Gamma^l_{im} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^k} g_{lj} g^{km} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{\delta_{jm}\frac{\partial u}{\partial x^i}g^{ij}\delta_{ml}\frac{\partial u}{\partial x^l}+\delta_{jm}\frac{\partial u}{\partial x^i}g^{ij}\delta_{ll}\frac{\partial u}{\partial x^m}-\delta_{jm}\frac{\partial u}{\partial x^i}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{lm}g^{kl}\right\}\\
&+\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{\delta_{im}\frac{\partial u}{\partial x^j}g^{ij}\delta_{ml}\frac{\partial u}{\partial x^l}+\delta_{im}\frac{\partial u}{\partial x^j}g^{ij}\delta_{ll}\frac{\partial u}{\partial x^m}-\delta_{im}\frac{\partial u}{\partial x^j}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{lm}g^{kl}\right\}\\
&+\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{lj}g^{km}g^{ij}\delta_{ml}\frac{\partial u}{\partial x^l}+\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{lj}g^{km}g^{ij}\delta_{ll}\frac{\partial u}{\partial x^m}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\sum_{r}\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{lj}g^{km}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^r}g_{lm}g^{rl}\right\}\\
&-\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{\delta_{jm}\frac{\partial u}{\partial x^l}g^{ij}\delta_{ml}\frac{\partial u}{\partial x^i}+\delta_{jm}\frac{\partial u}{\partial x^l}g^{ij}\delta_{il}\frac{\partial u}{\partial x^m}-\delta_{jm}\frac{\partial u}{\partial x^l}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{im}g^{kl}\right\}\\
&-\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{\delta_{lm}\frac{\partial u}{\partial x^j}g^{ij}\delta_{ml}\frac{\partial u}{\partial x^i}+\delta_{lm}\frac{\partial u}{\partial x^j}g^{ij}\delta_{il}\frac{\partial u}{\partial x^m}-\delta_{lm}\frac{\partial u}{\partial x^j}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{im}g^{kl}\right\}\\
&-\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{lj}g^{km}g^{ij}\delta_{ml}\frac{\partial u}{\partial x^i}+\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{lj}g^{km}g^{ij}\delta_{il}\frac{\partial u}{\partial x^m}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{lj}g^{km}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{im}g^{kl}\right\}\\
=&u^{-r}s_g+\frac{r}{2}\sum_{ijklm}u^{-r}g^{ij}\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial x^l}\left(u^{-1}\frac{\partial u}{\partial x^k}g_{ij}g^{kl}\right)-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(u^{-1}\left\{\frac{\partial u}{\partial x^j}+n\frac{\partial u}{\partial x^j}-\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\}\right)\right\}\\
&+\frac{r}{2}\sum_{ijklm}u^{-r-1}\left\{\Gamma^l_{ij}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^l}+n\Gamma^m_{ij}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^m}-\Gamma^k_{ij}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^k}+\Gamma^l_{lj}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right\}\\
&+\frac{r}{2}\sum_{ijklm}u^{-r-1}\left\{\Gamma^l_{li}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}-n\Gamma^l_{lm}g^{km}\frac{\partial u}{\partial x^k}-\Gamma^l_{lj}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}-\Gamma^m_{ij}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^m}\right\}\\
&+\frac{r}{2}\sum_{ijklm}u^{-r-1}\left\{\Gamma^m_{lm}\frac{\partial u}{\partial x^k}g^{kl}-\Gamma^l_{ij}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^l}-\Gamma^l_{il}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}+\Gamma^l_{lm}\frac{\partial u}{\partial x^k}g^{km}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}+ng^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}-g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\}\\
&+\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}+ng^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}-g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right\}\\
&+\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{g^{km}\frac{\partial u}{\partial x^k}\frac{\partial u}{\partial x^m}+ng^{km}\frac{\partial u}{\partial x^k}\frac{\partial u}{\partial x^m}-g^{km}\frac{\partial u}{\partial x^k}\frac{\partial u}{\partial x^m}\right\}\\
&-\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}+g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}-ng^{kl}\frac{\partial u}{\partial x^l}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right\}\\
&-\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{n^2g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}+g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}-g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}\right\}\\
&-\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}+ng^{km}\frac{\partial u}{\partial x^k}\frac{\partial u}{\partial x^m}-g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\}\\
=&u^{-r}s_g+\frac{r}{2}\sum_{ijklm} u^{-r}\left\{2(n-1)u^{-2}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}-2(n-1)u^{-1}g^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^j\partial x^i}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-u^{-1}g^{ij}g^{kl}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\frac{\partial u}{\partial x^k}-nu^{-1}\frac{\partial g^{kl}}{\partial x^l}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right\}\\
&+\frac{r}{2}\sum_{ijklm} u^{-r-1}\left\{(n-1)\Gamma^m_{ij}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^m}-(n-1)\Gamma^l_{li}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\}\\
&+\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{(-n^2+3n-2)g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\}\\
=&u^{-r}s_g+\frac{r}{2}\sum_{ijklm} u^{-r}\left\{2(n-1)u^{-2}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}-2(n-1)u^{-1}g^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^j\partial x^i}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-u^{-1}g^{kl}\left(\Gamma^j_{jl}+\Gamma^i_{il}\right)\frac{\partial u}{\partial x^k}-nu^{-1}\left(-g^{li}\Gamma^k_{li}-g^{ik}\Gamma^l_{li}\right)\frac{\partial u}{\partial x^k}\right\}\\
&+\frac{r}{2}\sum_{ijklm} u^{-r-1}\left\{(n-2)\Gamma^m_{ij}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^m}-(n-2)\Gamma^l_{li}g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\}\\
&+\frac{r^2}{4}\sum_{ijklm} u^{-r-2}\left\{(-n^2+3n-2)g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right\}
\end{aligned}
$$

Onde usamos o corolário 2.2.10.

$$
\begin{aligned}
s_{\tilde{g}} =& u^{-r-1} s_g + \frac{r}{2} \sum_{ijklm} u^{-r} \left\{ 2(n-1) \left(\Gamma^m_{ij} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^m} - g^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i} \right) \right\} \\
&+ \frac{r^2}{4} \sum_{ijklm} u^{-r-2} \left\{ 2(n-1) \left(1 + \frac{2}{r} \right) g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right\} \\
=& u^{-r} s_g + \frac{r}{2} 2(n-1) u^{-r-1} \triangle_g u.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
s_{\tilde{g}} u^{r+1} =& s_g u + \frac{4(n-1)}{n-2} \triangle_g u \\
\frac{n-2}{4(n-1)} s_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} =& \frac{n-2}{4(n-1)} s_g u + \triangle_g u.
\end{aligned}
$$

■

Teorema 3.2.3 (Problema de Yamabe (formulação EDP)). *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana de dimensão* $n \geq 3$. *O problema de Yamabe tem solução se, e somente se, existem* $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ *em* M *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$
\triangle_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} s_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{3.2}
$$

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Se o problema de Yamabe tem solução existe uma métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ onde $u : M \to \mathbb{R}^+$ é suave tal que a curvatura escalar de $(M, \tilde{g})$ é constante então, pelo teorema anterior 3.2.2, temos

$$
\triangle_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} s_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} s_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}},
$$

com $\lambda = \frac{n-2}{4(n-1)} s_{\tilde{g}}$ constante.

$(\Longleftarrow)$ Se existem $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ em M e $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfazem a equação 3.2 então, para a métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ que é conforme à g, temos

$$
\lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} = \triangle_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} s_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} s_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}},
$$

então, como $u > 0$, $\frac{n-2}{4(n-1)} s_{\tilde{g}} = \lambda$ portanto $s_{\tilde{g}}$ é constante. ■

Tinhamos um problema geométrico e o transformamos em um problema de EDP. Vamos dar a formulação variacional deste problema.

Definição 3.2.4. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, γ a classe conforme de g e $p = \frac{2n}{n-2}$.

Definimos $Q : \gamma \to \mathbb{R}$ do seguinte modo: para cada métrica $\tilde{g} = u^{p-2}g$ conforme a g definimos

$$Q(\tilde{g}) := \frac{\int_M s_{\tilde{g}} d\mu_{\tilde{g}}}{\left(\int_M d\mu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Também definimos $Q_g : \{u : M \to \mathbb{R}^+,\, u \in C^\infty(M)\} \to \mathbb{R}$ como

$$Q_g(u) := Q(u^{p-2}g).$$

De agora em diante usaremos $p = \frac{2n}{n-2}$. Pelo teorema 3.2.2, denotando $E(u) := \int_M \left(\frac{4}{n(n-2)}(\triangle u)u + s_g u^2\right) d\mu_g$, temos

$$\begin{aligned} Q_g(u) =& Q(u^{p-2}g) = \frac{\int_M s_{\tilde{g}} d\mu_{\tilde{g}}}{\left(\int_M d\mu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{2}{p}}} \\ =& \frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2}(\triangle_g u)u^{-\frac{n+2}{n-2}} + s_g u^{-\frac{4}{n-2}}\right) u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{E(u)}{\|u\|_p^2}. \end{aligned}$$

Teorema 3.2.5. *Uma função $u : M \to \mathbb{R}^+$ de classe $C^\infty(M)$ é um ponto crítico de Q_g se, e somente se, satisfaz a equação 3.2 com $\lambda = \frac{E(u)}{\|u\|_p^p}$, ou seja,*

$$\triangle_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} s_g u = \frac{E(u)}{\|u\|_p^p} u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Demonstração: Pelo método usual do cálculo variacional, usando a generalização do binômio de Newton

$$(x+y)^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (z-j) x^{z-k} (y)^k,$$

tomando uma função $v \in C^\infty(M)$ e denotando $* = \frac{1}{t}(Q(u+tv) - Q(u))$ temos

$$
\begin{aligned}
* =& \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2} \triangle_g (u+tv)(u+tv) + s_g (u+tv)^2 d\mu_g}{t\left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\
&- \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2} (\triangle_g u) u + s_g u^2 d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\
=& \left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2} \triangle_g (u+tv)(u+tv) d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\
&+ \left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \frac{\int_M s_g (u+tv)^2 d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\
&- \left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2} (\triangle_g u) u + s_g u^2 d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\
=& \left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2} \triangle_g (u) u + 2t \triangle_g (u) v + t^2 \triangle_g (v) v d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\
&+ \left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \frac{\int_M s_g u^2 + 2t s_g uv + t^2 s_g v^2 d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\
&- \left(\int_M \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (p-j)\, u^{p-k} (tv)^k + u^p \right. \\
&\left. + p u^{p-1} tv \; d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} . \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2} (\triangle_g u) u + s_g u^2 d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\
=& \left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2} \triangle_g (u) u + 2t \triangle_g (u) v + t^2 \triangle_g (v) v d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\
&+ \left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \frac{\int_M s_g u^2 + 2t s_g uv + t^2 s_g v^2 d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left\{\left(\int_M u^p + pu^{p-1}tv\ d\mu\right)^{\frac{2}{p}}\right.\\
&+\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\prod_{i=0}^{l-1}\left(\frac{2}{p}-i\right)\left(\int_M u^p + pu^{p-1}tv\ d\mu\right)^{\frac{2}{p}-l}\right.\\
&\left.\left.\left(\int_M\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(p-j)\,u^{p-k}(tv)^k\ d\mu\right)^l\right]\right\}\\
&\cdot\frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2}(\triangle_g u)u + s_g u^2 d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}}\\
=&\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}\frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2}\triangle_g(u)u + 2t\triangle_g(u)v + t^2\triangle_g(v)v d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}}\\
&+\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}\frac{\int_M s_g u^2 + 2ts_g uv + t^2 s_g v^2 d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}}\\
&-\left\{\left(\int_M u^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}} + \frac{2}{p}\left(\int_M u^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}-1}\left(pt\int_M u^{p-1}v\ d\mu\right)\right.\\
&+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r!}\prod_{s=0}^{r-1}\left(\frac{2}{p}-s\right)\left(\int_M u^p\ d\mu\right)^{\frac{2}{p}-r}\left(p\int_M u^{p-1}tv\ d\mu\right)^r\\
&+\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\prod_{i=0}^{l-1}\left(\frac{2}{p}-i\right)\left(\int_M u^p + pu^{p-1}tv\ d\mu\right)^{\frac{2}{p}-l}\right.\\
&\left.\left.\left(\int_M\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(p-j)\,u^{p-k}(tv)^k\ d\mu\right)^l\right]\right\}\\
&\cdot\frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2}(\triangle_g u)u + s_g u^2 d\mu_g}{t\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}\left(\int_M (u+tv)^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}}.
\end{aligned}
$$

Note que somente os dois primeiros dos termos negativos não apresentam fator t^x, com $x \geq 2$ então

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Q(u+tv)\bigg|_0 &= \lim_{t\to 0}\frac{Q(u+tv)-Q(u)}{t}\\
&= \frac{\int_M 2\frac{4(n-1)}{n-2}\triangle_g(u)v + 2s_g uv d\mu_g}{\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}}\\
&\quad - 2\left(\int_M u^p d\mu\right)^{-1}\left(\int_M u^{p-1}v\; d\mu\right).\frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2}(\triangle_g u)u + s_g u^2 d\mu_g}{\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}}\\
&= 2\frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2}\triangle_g(u) + s_g u - \|u\|_p^{-p}E(u)u^{\frac{n+2}{n-2}}\right)v d\mu_g}{\left(\int_M u^p d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}}
\end{aligned}
$$

Como v é qualquer de classe $C^\infty(M)$ temos que u é um ponto crítico de Q_g se e somente se

$$
\frac{4(n-1)}{n-2}\triangle_g(u) + s_g u - \frac{E(u)}{\|u\|_p^p}u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0.
$$

■

Existe uma constante $c > 0$ tal que $\|u\|_2 \leq c\|u\|_p$ (pela desigualdade de Holder). Por outro lado M é compacta então $|s_g|$ é limitada por uma constante k então

$$
\begin{aligned}
Q_g(u) &= \frac{E(u)}{\|u\|_p^2} = \frac{1}{\|u\|_p^2}\int_M \left[\frac{4(n-1)}{(n-2)}g(\text{grad}u, \text{grad}u) + s_g u^2\right] d\mu_g\\
&\geq \frac{1}{\|u\|_p^2}\int_M s_g u^2 d\mu_g \geq -k\frac{\|u\|_2^2}{\|u\|_p^2} \geq -kc^2.
\end{aligned}
$$

Assim, podemos definir a constante de Yamabe como segue:

Definição 3.2.6. Seja M uma variedade fechada suave orientada de dimensão $n \geq 3$. A cada classe conforme γ sobre M podemos associar o número Y_γ, chamado **constante de Yamabe** da classe γ, definido como

$$
Y_\gamma = \inf_{g\in\gamma}\frac{\int_M s_g\, d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}. \tag{3.3}
$$

Se existir uma função u tal que $Q_g(u) = Y_\gamma$ então Y_γ é um valor crítico de Q_g, portanto $u^{p-2}g$ é uma métrica conforme a g de curvatura escalar constante $\frac{E(u)}{\|u\|_p^p}$. A prova da existência de tal função é devida aos trabalhos de Yamabe, Truddinger, Aubin e Schoen, uma demonstração completa disto e um panorama histórico da solução pode ser visto em [7].

Definição 3.2.7. Uma métrica g tal que

$$\frac{\int_M s_g \, d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = Y_\gamma,$$

onde γ é a classe conforme de g, é dita um **minimizante de Yamabe**.

Lema 3.2.8. *Seja M uma variedade diferenciável fechada conexa suave de dimensão $n \geq 3$. Se g é uma métrica Riemanniana sobre M com curvatura escalar $s_g \leq 0$ constante então g é um minimizante de Yamabe.*

Demonstração: Se g é uma métrica e $c > 0$ então $\tilde{g} = cg$ é conforme a g e os coeficientes da conexão (Simbolos de Christoffel) são

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{ij}^m =& \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} c g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} c g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} c g_{ij} \right\} \frac{1}{c} g^{km} \\
=& \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right\} g^{km} = \Gamma_{ij}^m.
\end{aligned}$$

Assim a curvatura escalar é

$$\begin{aligned}
s_{\tilde{g}} =& \sum_{ijlm} \tilde{g}^{ij} \left(\widetilde{\Gamma}_{ij}^m \widetilde{\Gamma}_{lm}^l - \widetilde{\Gamma}_{lj}^m \widetilde{\Gamma}_{im}^l + \frac{\partial}{\partial x^l}(\widetilde{\Gamma}_{ij}^l) - \frac{\partial}{\partial x^i}(\widetilde{\Gamma}_{lj}^l) \right) \\
=& \sum_{ijlm} \frac{1}{c} g^{ij} \left(\Gamma_{ij}^m \Gamma_{lm}^l - \Gamma_{lj}^m \Gamma_{im}^l + \frac{\partial}{\partial x^l}(\Gamma_{ij}^l) - \frac{\partial}{\partial x^i}(\Gamma_{lj}^l) \right) = \frac{1}{c} s_g.
\end{aligned}$$

Portanto

$$Q(\tilde{g}) = \frac{\int_M s_{\tilde{g}} d\mu_{\tilde{g}}}{\left(\int_M d\mu_{\tilde{g}}\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{\frac{1}{c}\int_M s_g c^{\frac{n}{2}} d\mu_g}{\left(\int_M c^{\frac{n}{2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{c^{\frac{n-2}{2}} \int_M s_g d\mu_g}{c^{\frac{n-2}{2}} \left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} = Q(g).$$

Além disso, o volume de M em relação à métrica $h = \left(\int_M d\mu_g\right)^{-\frac{2}{n}} g$ é

$$vol(M, h) = \int_M d\mu_h = \int_M \left(\int_M d\mu_g\right)^{-\frac{2}{n}\cdot\frac{n}{2}} d\mu_g = \left(\int_M d\mu_g\right)^{-1} \int_M d\mu_g = 1.$$

Se g é uma métrica tal que a curvatura escalar $s_g \leq 0$ é constante, $c = \left(\int_M d\mu_g\right)^{-\frac{2}{n}}$, $h = cg$ e se q satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos que, para qualquer outra métrica $\tilde{g} = ug$ conforme a g temos

$$\begin{aligned}
Q(\tilde{g}) =& Q_g(u) = Q(u^{p-2}g) = Q(cu^{p-2}g) = Q_{cg}(u) \\
=& \frac{\int_M \frac{4}{n(n-2)} h(\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} u) + s_h u^2 d\mu_h}{\|u\|_p^2} \\
\geq & s_h \frac{\|u\|_2^2}{\|u\|_p^2} \geq \frac{s_g}{c} \left(\int_M d\mu_h \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{s_g}{c} = Q(g),
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}
\int_M u^2 d\mu_h \leq & \left(\int_M |u^2|^p d\mu_h \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M d\mu_h \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_M |u^2|^p d\mu_h \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_M d\mu_h \right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq & \left(\int_M |u|^p d\mu_h \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_M d\mu_h \right)^{\frac{1}{q}} \Longrightarrow \frac{\|u\|_2^2}{\|u\|_p^2} \leq 1.
\end{aligned}$$

■

Corolário 3.2.9. *Seja M uma variedade diferenciável fechada orientada suave de dimensão $n \geq 3$, sejam γ uma classe conformal sobre M e Y_γ a constante de Yamabe associada a γ. Se $Y_\gamma \leq 0$ o minimizante de Yamabe é único a menos de reescalamento constante.*

Demonstração: Já mostramos, na demonstração do teorema anterior, que o reescalamento constante de uma métrica g não altera o valor de $Q(g)$, portanto qualquer múltiplo positivo de um minimizante de Yamabe também é um minimizante de Yamabe.

Para a unicidade a menos de rescalamento constante consideremos um minimizante de Yamabe g e uma métrica $\tilde{g} = u^{p-2}g$ conforme a g tal que $u : M \to \mathbb{R}^+$ seja não constante. Como reescalamento constante não altera o valor de $Q_g(u)$ podemos considerar o volume de M em relação a $\tilde{g}$ como unitário, assim, usando a desigualdade de Holder como no teorema anterior

$$\begin{aligned}
Q(\tilde{g}) =& Q_g(u) = \frac{\int_M \left[\frac{4(n-1)}{n-2} g(\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} u) + s_g u^2 \right] d\mu_g}{\|u\|_p^2} \\
>& \frac{\int_M s_g u^2 d\mu_g}{\|u\|_p^2} = \frac{s_g \|u\|_2^2}{\|u\|_p^2} \geq s_g,
\end{aligned}$$

pois $\|\mathrm{grad}(u)\| > 0$ se u é não constante e do fato que $s_g < 0$.

■

A situação é muito mais difícil quando $Y_\gamma > 0$, contudo podemos notar que

Teorema 3.2.10. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$. Se g é uma métrica para qual s_g tem sinal fixo (positivo, negativo ou zero) em todo lugar em M, então este sinal concorda com o do número Y_γ, onde $\gamma = [g]$ é a classe conforme de g.*

Demonstração: Existe $c > 0$ tal que $\|v\|_2 \geq c\|v\|_p$ para todo $v \in C^\infty(M)$ (segue da desigualdade de Holder).

Se s_g é positiva existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $s_g \geq k$ (pois M é compacta) assim, para qualquer métrica $\tilde{g} = u^{p-2}g$ conforme a g, temos

$$Q(\tilde{g}) = Q_g(u) = \frac{E(u)}{\|u\|_p^2} = \frac{\int_M \frac{4}{n(n-2)}(\triangle u)u + s_g u^2 d\mu_g}{\|u\|_p^2} \geq k\frac{\|u\|_2^2}{\|u\|_p^2} \geq kc,$$

portanto $Y_\lambda \geq kc > 0$.

Se $s_g = 0$ temos, para qualquer métrica $\tilde{g} = u^{p-2}g$ conforme a g,

$$Q(\tilde{g}) = Q_g(u) = \frac{E(u)}{\|u\|_p^2} = \frac{\int_M \frac{4}{n(n-2)}(\triangle u)u + s_g u^2 d\mu_g}{\|u\|_p^2} \geq 0,$$

assim $Y_\lambda \geq 0$, mas $Q(g) = \frac{\int_M s_g d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} = 0$ então $Y_\lambda = 0$.

Se s_g é negativa existe $k < 0$ tal que $s_g \leq k$ (pois M é compacta) assim

$$Q(g) = \frac{\int_M s_g d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} \leq k\frac{\int_M d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{2}{p}}} < 0,$$

portanto $Y_\lambda < 0$.

■

O trabalho de Yamabe foi aparentemente motivado pela esperança de construir métricas de Einstein através de uma abordagem variacional. Esta idéia levou Kobayashi [6] e Schoen [13] a, independentemente, introduzir o invariante de variedade suave:

Definição 3.2.11. Seja M uma variedade compacta suave de dimensão $n \geq 3$. Definimos o **invariante de Yamabe** (também conhecido como *sigma constante*) de M como

$$\mathcal{Y}(M) := \sup_\gamma Y_\gamma = \sup_\gamma \inf_{g \in \gamma} \frac{\int_M s_g d\mu_g}{\left(\int_M d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}. \tag{3.4}$$

Teorema 3.2.12. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\phi : M \to N$ um difeomorfismo então $\mathcal{Y}(M) = \mathcal{Y}(N)$, ou seja, $\mathcal{Y}$ é um invariante por difeomorfismos.*

Demonstração: Sejam $\{a_1, ..., a_k\}$ uma partição da unidade associada ao atlas (U_i, α_i) de M e $\{b_1, ..., b_l\}$ uma partição da unidade associada ao atlas (V_j, β_j) de N e g uma métrica sobre N. Então o pullback ϕ^*g de g define uma métrica Riemanniana sobre M e, por definição, (M, ϕ^*g) e (N, g) são isométricas. As formas de volume são, respectivamente,

$$\mathrm{dvol}_{\phi^*g} = \sqrt{\det(\phi^*g)}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

e

$$\mathrm{dvol}_g = \sqrt{\det(g)}dy^1 \wedge ... \wedge dy^n.$$

Pelo teorema 1.2.8 $s_g \circ \phi = s_{\phi^*g}$. Além disso, dados campos vetoriais X, Y em M temos, em $U_i \cap \phi^{-1}(V_j)$,

$$\phi^*g(X, Y) = g(d\phi X, d\phi Y) = X^T J^T G J Y$$

onde G é a matriz da métrica, $d\phi$ é a diferencial de ϕ e D é a matriz Jacobiano de $\beta_j \circ \phi \circ \alpha_i^{-1}$, então $\sqrt{\det(\phi^*g)} = \det(D)\sqrt{\det(g)}$. Portanto, usando a fórmula de mudança de variáveis (teorema 4.0.4 em anexo) em $\mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_M s_{\phi^*g} d\mu_{\phi^*g} &= \int_M s_{\phi^*g}\sqrt{\det(\phi^*g)}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \sum_{ij} \int_{\alpha_i(U_i \cap \phi^{-1}(V_j))} [a_i(b_j \circ \phi)s_{\phi^*g}] \circ \alpha_i^{-1} \det(D)\sqrt{\det(g)}dx^1...dx^n \\
&= \sum_j \int_{\beta_j(V_j)} b_j s_g \circ \beta_j^{-1}\sqrt{\det(g)}dy^1...dy^n \\
&= \int_N s_g d\mu_g
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_M d\mu_{\phi^*g} &= \int_M \sqrt{\det(\phi^*g)}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \\
&= \sum_{ij} \int_{\alpha_i(U_i \cap \phi^{-1}(V_j))} [a_i(b_j \circ \phi)s_{\phi^*g}] \circ \alpha_i^{-1} \det(D)\sqrt{\det(g)}dx^1...dx^n \\
&= \sum_j \int_{\beta_j(V_j)} b_j \circ \beta_j^{-1}\sqrt{\det(g)}dy^1...dy^n \\
&= \int_N d\mu_g.
\end{aligned}$$

Deste modo $Q(g) = Q(\phi^* g)$. É claro que ϕ^* mantém classes conformes então as constantes de Yamabe das respectivas classes são iguais, ou seja, $Y_{[g]} = Y_{[\phi^* g]}$. Daí $\mathcal{Y}(M) \geq \mathcal{Y}(N)$, mas $\phi^{-1} : N \to M$ é um difeomorfismo, então $\mathcal{Y}(N) \geq \mathcal{Y}(M)$ (análogo ao que fizemos acima). Portanto $\mathcal{Y}(M) = \mathcal{Y}(N)$.

■

Lema 3.2.13. *Seja M uma variedade fechada suave de dimensão $n \geq 3$. $\mathcal{Y}(M) \leq 0$ se, e somente se, M não admite métricas de curvatura escalar positiva. Se $\mathcal{Y}(M) \leq 0$ então $\mathcal{Y}(M)$ é simplesmente o supremo das curvaturas escalares das métricas em M com curvatura escalar constante de volume unitário.*

Demonstração: A primeira afirmação é consequência imediata da definição e do teorema 3.2.10. A segunda afirmação vem da unicidade a menos de reescalamento constante do minimizante de Yamabe e do fato que toda métrica de curvatura escalar constante não positiva é um minimizante de Yamabe.

■

Este resultado mostra a importância do invariante de Yamabe pois, se $\mathcal{Y}(M) \leq 0$, sabemos que a variedade não admite métricas de curvatura escalar positiva o que é uma importante informação topológica da variedade.

3.3 A igualdade entre os invariantes

O fato que existe uma relação fundamental entre o invariante de Yamabe $\mathcal{Y}(M)$ e o invariante de Perelman $\overline{\lambda}$ foi apontado pela primeira vez provavelmente por Anderson [C1]. Mais recentemente Fang e Zang [C2] calcularam o invariante de Perelman para uma grande classe de 4-variedades, na qual o invariante de Yamabe já havia sido calculado por Ishida e Lebrun [C3, C5] e Petean [C6, C7]. Os resultados obtidos para o invariante de Perelman são iguais os encontrados para o invariante de Yamabe, como foi enfatizado por Kotoschick [C4]. Nosso objetivo, baseado em [1], é mostrar que isso não é mera coincidência.

Teorema 3.3.1. *Seja M uma variedade suave compacta de dimensão $n \geq 3$. Então*

$$\overline{\lambda}(M) = \begin{cases} \mathcal{Y}(M) & \text{se } \mathcal{Y}(M) \leq 0 \\ +\infty & \text{se } \mathcal{Y}(M) > 0 \end{cases}$$

Para demonstrar este fato precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Proposição 3.3.2. Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$ e λ_g o menor autovalor do operador $4\triangle_g + s_g$. Se a classe conforme γ de g não contém uma métrica de curvatura escalar positiva então

$$Y_\gamma = \sup_{g\in\gamma} \lambda_g vol_g^{2/n}.$$

Demonstração: Seja $g \in \gamma$, e seja $\widehat{g} = u^{4/(n-2)}g$ o minimizante de Yamabe em γ (só existe um pelo lema 3.2.8 e seu corolário 3.2.9). Então

$$0 \geq Y_\gamma = \frac{\int_M \left[s_g u^2 + 4\frac{n-1}{n-2}|\mathrm{grad} u|^2\right] d\mu_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Usando isto, a equação 3.1 e a definição 3.2.7 calculamos

$$\begin{aligned}
\lambda_g \int u^2\, d\mu_g &\leq \int [s_g u^2 + 4|\mathrm{grad} u|^2] d\mu_g \\
&\leq \int \left[s_g u^2 + 4\frac{n-1}{n-2}|\mathrm{grad}\ u|^2\right] d\mu_g \\
&= Y_\gamma \left(\int u^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g\right)^{(n-2)/n}
\end{aligned}$$

$$\lambda_g \int u^2 d\mu_g \leq Y_\gamma vol_g^{-2/n} \int u^2 d\mu_g, \tag{3.5}$$

onde, como $Y_\gamma \leq 0$, o último passo é uma aplicação da desigualdade de Holder

$$\int f_1 f_2 d\mu \leq \left(\int |f_1|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int |f_2|^q d\mu\right)^{1/q},$$

com $f_1 = 1$, $f_2 = u^2$, $p = n/2$ e $q = n/(n-2)$ e do fato que $0 \geq Y_\gamma$.

Como $vol_g^{-2/n} \geq 0$ a equação 3.5 mostra que

$$\lambda_g vol_g^{2/n} \leq Y_\gamma.$$

Se g é um minimizante de Yamabe então, pelo corolário 3.2.9, $\widehat{g}$ tem curvatura escalar constante e u é constante assim, vale a igualdade na desigualdade de Holder e grad $u = 0$ portanto temos a igualdade na equação 3.5, ou seja,

$$\lambda_{\widehat{g}} \int u^2 d\mu_g = Y_\gamma vol_{\widehat{g}}^{-2/n} \int u^2 d\mu_g,$$

assim segue que

$$Y_\gamma = \sup_{g\in\gamma} \lambda_g vol_g^{2/n}. \qquad \blacksquare$$

Lema 3.3.3. *Se M carrega uma métrica g com $s_g > 0$ então,* $\overline{\lambda}(M) = +\infty$.

Demonstração: Como M carrega uma métrica g com $s_g > 0$ então, dada uma função $f : M \to \mathbb{R}$ suave não constante, Kobayashi mostrou (em [6]) que existe uma métrica h com volume unitário em M com $s_h = f$. Em particular, dado qualquer número real L, existe uma métrica com volume unitário g_L sobre M com $s_{g_L} > L$ em toda parte. Mas para tal métrica, $\lambda_{g_L} > L$ e $vol_{g_L} = 1$. Assim, tomando $L \to \infty$, temos $\overline{\lambda}(M) = \sup_g \lambda_g vol_g^{2/n} = +\infty$.

■

Agora vamos demonstrar o teorema 3.3.1

Demonstração do teorema 3.3.1: Se $\mathcal{Y}(M) > 0$, então M admite uma métrica g com $s_g > 0$ e o lema 3.3.3 mostra que $\overline{\lambda}(M) = +\infty$. Por outro lado, se $\mathcal{Y}(M) \leq 0$ então nenhuma classe conforme contém uma métrica de curvatura escalar positiva a proposição 3.3.2 garante que cada métrica h com curvatura escalar constante maximiza $\lambda_h vol_h^{2/n}$ em sua classe conformal.

Para qualquer sequência $(\widehat{g}_j)$ de métricas tal que $\lambda_{\widehat{g}_j} vol_{\widehat{g}_j}^{2/n} \to \overline{\lambda}(M)$ podemos construir uma nova sequência (g_j) onde cada g_j maximiza $\lambda vol^{2/n}$ na classe conformal $[\widehat{g}_j]$ e tem volume unitário (dividindo pelo volume de M em relação a esta métrica pois multiplicar a métrica por uma constante positiva não altera o valor de $\lambda vol^{2/n}$), é claro que $\lambda_{g_j} vol_{g_j}^{2/n} \to \overline{\lambda}(M)$.

Contudo, para cada g_i, pela proposição 3.3.2 temos $\lambda_{g_j} V_{g_j}^{2/n} = Y_{[g_j]}$. Deste modo

$$\mathcal{Y}(M) = \sup_{\gamma} Y_\gamma = \lim_{j\to\infty} Y_{[g_j]} = \lim_{j\to\infty} \lambda_{g_j} vol_{g_j}^{2/n} = \overline{\lambda}(M)$$

■

Calcular o valor destes invariantes pode ser um trabalho duro, por que considerar o supremo sobre o conjunto das métricas (ou das classes conformes) é difícil, pois o conjunto destas métricas é bastante grande. Os artigos [C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7] contém mais informações sobre estes invariantes e calculam os invariantes de Perelman e Yamabe para algumas classes de variedades.

Capítulo 4

Anexo

Enunciamos aqui alguns teoremas que utilizamos sem colocar os enunciados explicitamente no trabalho.

Teorema 4.0.4 (Fórmula da mudança de variáveis). *Sejam* $V \subset \mathbf{R}^n$, $\phi\colon V \to \mathbf{R}$ *contínua e com suporte compacto,* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *diferenciável e* $U = f(V)$, *então:*

$$\int_U \phi \circ f(x)|Df(x)|dx = \int_V \phi(y)dy.$$

Este é um resultado clássico de análise.

Teorema 4.0.5. *Sejam* M *uma variedade diferenciável compacta com densidade e* L *um operador diferencial elíptico que é formalmente auto adjunto. Então todos os autovetores de* L *no sentido distribucional são funções em* $C^\infty(M)$.

Este resultado pode ser visto em [5] pág 87

Teorema 4.0.6 (Teoremas de Mergulho de Sobolev para variedades compactas). . *Seja* M *uma variedade Riemanniana compacta de dimensão* n *(possivelmente com fronteira de classe* C^1*).*

(a) Se

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{k}{n},$$

então $L^q_k(M)$ *está mergulhada continuamente em* $L^r(M)$.

(b)(Teorema de Rellich-Kondrakov) Suponha que vale a igualdade estrita em (a). Então a inclusão $L^q_k(M) \subset L^r(M)$ *é um operador compacto.*

(c) Suponha que $0 < \alpha < 1$, *e*

$$\frac{1}{q} \leq \frac{k - \alpha}{n}.$$

Então $L_k^q(M)$ *esta mergulhado continuamente em* $C^\alpha(M)$.

Uma versão para $\mathbb{R}^n$ deste resultado clássico pode ser encontrado em [4], teorema 7.22. A versão para variedades ser encontrada em [7].

Conclusão

O fato que se uma variedade tem invariante de Yamabe não positivo então a variedade não admite métricas de curvatura escalar positiva é um exemplo de como os invariantes podem revelar importantes características das variedades. Uma das possibilidades de pesquisa para se seguir é estudar os diversos invariantes das variedades.

Calculando o menor autovalor do operador $4\triangle + s_g$ utilizamos algumas técnicas básicas de EDP. Outra possibilidade de pesquisa poderia ser estudar EDP's em variedades.

Também estudamos um pouco do problema de Yamabe e a sua solução completa utiliza muitas técnicas interessantes (que não apresentamos no trabalho mas podem ser vistas em [8]). Este é outro tema no qual a pesquisa pode continuar.

Ainda temos o fluxo de Ricci que não estudamos, mas é tema comum a todas as referências sobre o invariante de Perelman e que parece ser bastante importante em algumas áreas da geometria diferencial.

Poderia se pensar que o trabalho foi prematuramente interrompido contudo chegamos ao nosso objetivo principal. O que ficam são as várias possibilidades para seguir estudando e as linhas de pesquisa que se abrem a frente.

Bibliografia

[1] Akutagawa, k.; Ishida, M.; LeBrun,C. - *Perelman's invariant, Ricci flow, and the Yamabe invariants of smooth manifolds.* Archiv der Mathematik, (88):71-76, 2007.

[2] Barden, D.; Thomas, C. - *An Introduction to Differential Manifolds.* Imperial College Press, Londres, Inglaterra, 2005.

[3] Carmo, M. P. do - *Geometria Riemanniana.* Impa, Rio de Janeiro, Brasil, 2005.

[4] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, Berlin, Alemanha, 2005.

[5] Thayer, F. J. - *Notes on partial differential equations.* Impa, Rio de Janeiro, Brasil, 1980.

[6] Kobayashi, O. - *Scalar curvature of a metric of unit volume.* Math. Ann., (279): 253 - 265, 1987.

[7] Lee, J. M.; Parker, T. H. - *The Yamabe Problem.* Bull. Amer. Math. Soc., (17): 37 - 91, 1987.

[8] Miyagaki, O. H. - *Equações Elípticas Modeladas em Variedades Riemannianas: Uma Introdução.* Milênio Workshop em Equações Elípticas, UFCG/UFPB, Campina Grande / João Pessoa, Brasil, 2004.

[9] Perelman, G. - *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.* e-print math.DG/0211159.

[10] Perelman, G. - *Ricci flow with surgery on three-manifolds.* e-print math.DG/0303109.

[11] Rosenberg, S. - *The Laplacian on a Riemannian Manifold.* London Mathematical Society Student Texts 31. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 1997.

[12] Rudin, W. - *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill, Londres, Inglaterra, 1970.

[13] Schoen, R. - *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics.* Lec. Notes Math., (1365), 120-154, 1987.

[14] Yamabe, H. - *On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds.* Osaka Math. J., (12), 21-37, 1960.

Biliografia Complementar

[C1] Anderson, M. T. - *Canonical metrics on 3-manifolds and 4-manifolds.* Asian J. Math., (10), 127-163, 2006.

[C2] Fang, F.; Zang, Y. - *Perelman's λ functional and the Seiberg-Witten equations.* e-print math.FA/0608439.

[C3] Ishida, M.; LeBrum, C. - *Curvature, connected sums, and the Seiberg-Witten theory.* Comm. Anal. Geom., (11), 809-836, 2003.

[C4] Kotschick, D. - *Monopole classes and Perelman's invariant of four manifolds.* e-print math.DG/0608504.

[C5] LeBrum, C. - *Four-manifolds without Einstein metrics.* Math. Res, Lett., (3), 133-147, 1996

[C6] Petean, J. - *Computations of the Yamabe invariant.* Math. Res. Lett. (5), 703-709, 1998.

[C7] Petean, J. - *The Yamabe invariant of simply connected manifolds.* J. Reine Angew. Math. (523), 225-231, 2000.