

Paulo Haas

Estimadores de Estados Robustos Baseados em
Implementações Ortogonais de Região de Confiança

FLORIANÓPOLIS
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Estimadores de Estados Robustos Baseados em
Implementações Ortogonais de Região de Confiança**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Paulo Haas

Florianópolis, novembro de 2008.

Estimadores de Estados Robustos Baseados em Implementações Ortogonais de Região de Confiança

Paulo Haas

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Sistemas de Energia Elétrica*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Prof. Antônio José Alves Simões Costa, Ph.D.
(Orientador - EEL - UFSC)

Prof^a. Katia Campos de Almeida, Ph.D.
(Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica)

Banca Examinadora:

Prof. Antônio José Alves Simões Costa, Ph.D.
Orientador

Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.
Co-Orientador

Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr.Eng.

Prof^a. Katia Campos de Almeida, Ph.D.

Prof. Aguinaldo Silveira e Silva, Ph.D

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial meus pais, Márcio e Renate, pelo apoio e compreensão.

Ao professor Antônio Simões Costa, pela amizade e confiança depositada ao longo do caminho.

Ao professor Roberto de Souza Salgado, pela ajuda em todos os momentos.

À todos os professores, funcionários e amigos do LABSPOT.

À CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso de mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Estimadores de Estados Robustos Baseados em Implementações Ortogonais de Regiões de Confiança

Paulo Haas

Novembro / 2008

Orientador: Antônio Simões Costa, Ph.D.

Co-Orientador: Roberto de Souza Salgado, Ph.D.

Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica

Palavras-chave: Estimacão de Estados em Sistemas de Potência, Métodos Numéricos de Otimização, Regiões de Confiança, Rotações Ortogonais de Givens

Número de Páginas: 74

Esta dissertação de mestrado apresenta o desenvolvimento e a implementação de estimadores de estados robustos baseados na aplicação de técnicas ortogonais baseadas em rotações de Givens ao método de Regiões de Confiança. Inicialmente, o problema de Estimacão de Estados em Sistemas de Potência (EESP) é apresentado como um problema de mínimos quadrados ponderados e resolvido através do método de Gauss-Newton. Mostra-se que o método de Gauss-Newton exibe como desvantagem uma tendência ao mau condicionamento numérico e como se contornar essa desvantagem com a utilização de métodos baseados em transformações ortogonais. Na seqüencia, o método de rotações de Givens de três multiplicadores (G3M) é aplicado ao problema de EESP. Mostra-se que o mesmo é capaz de fornecer soluções robustas, pois a degradação do condicionamento numérico do problema é evitada. A seguir, é introduzido o conceito de Regiões de Confiança. Mostra-se como os métodos de Regiões de Confiança podem ser vistos como uma evolução do algoritmo de Levenberg-Marquardt, e como o mesmo pode ser aplicado a problemas de EESP através de métodos ortogonais baseados em rotações de Givens. Dois métodos ortogonais são então desenvolvidos: o método IAPE, baseado na capacidade do método G3M de processar informações *a-priori*; e o método da Refatoração- λ , baseado na expansão da matriz Jacobiana para a inclusão do coeficiente de Levenberg-Marquardt. Comparações qualitativas e quantitativas sobre os métodos desenvolvidos são apresentadas. Por fim, resultados numéricos ilustram a capacidade dos métodos de Regiões de Confiança em obter soluções para vários casos-teste em que estimadores baseados no método convencional de Gauss-Newton não alcançam a convergência.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

Robust State Estimators based on orthogonal implementations of Trust Region Methods

Paulo Haas

November/2008

Advisor: Antônio Simões Costa, Ph.D.

Co-Advisor: Roberto de Souza Salgado, Ph.D.

Area of Concentration: Electric Energy Systems

Key words: Power System State Estimation, Numerical Optimization Methods, Trust Region, Givens Rotations

Number of Pages: 74

This thesis addresses the theoretical developments and implementation of robust state estimators based on the application of orthogonal Givens rotations to Trust Region optimization methods. Firstly, the Power system State Estimation (PSSE) problem is formulated as a weighted least squares problem to be solved by the Gauss-Newton method. The causes of the Gauss-Newton method's tendency to numerical ill-conditioning are then reviewed, as well as how such problems can be circumvented through the application of orthogonal techniques. In the sequel, the fast 3-multiplier version of Givens rotations (G3M) is applied to the EESP problem. It is shown that G3M methods can provide robust least-squares solutions by preventing the occurrence of numerical ill-conditioning. Since under the presence of network modeling errors even the use of numerically robust estimators may be insufficient to provide converged solutions, the need arises to search for optimization algorithms exhibiting enhanced convergence properties. This leads to the concept of Trust Region (TR) methods, which can be seen as an evolution of the Levenberg-Marquardt algorithm. It is shown in this thesis how TR methods can be applied to PSSE problems through orthogonal techniques based on G3M rotations. Two versions of orthogonal TR methods are investigated: the first one, referred to as APSI method, relies on the ability of G3M estimators to deal with *a priori* information, whereas the second version, denoted by λ -refactorization method, is based on the expansion of the Jacobian matrix in order to take the Levenberg-Marquardt parameter into account. The performance of the two versions are compared both from the qualitative and the quantitative point-of-view. Finally, numerical results obtained for distinct test systems illustrate the ability of the proposed orthogonal TR estimators to provide solutions for case studies in which conventional Gauss-Newton estimators fail to converge.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	A importância da estimação de estados na Moderna Operação de Sistemas Elétricos de Potência	1
1.2	Revisão Bibliográfica	3
1.3	Contribuições deste trabalho	4
1.4	Organização da dissertação	5
2	Método de Gauss-Newton e Rotações Ortogonais de Givens	7
2.1	Introdução	7
2.2	Modelo de medição não linear e estimador por Mínimos Quadrados Ponderados	8
2.3	Solução da EESP através do método de Gauss-Newton	9
2.3.1	Tratamento de informações <i>a priori</i>	10
2.4	Dificuldades Numéricas da solução via Equação Normal de Gauss	10
2.5	Solução da EESP via rotações de Givens	11
2.5.1	Forma convencional das Rotações de Givens	12
2.5.2	Rotações de Givens com três multiplicadores	13
2.5.2.1	Escalonamento de Matrizes e Rotações Modificadas	13
2.5.2.2	Tratamento de Informações <i>A-Priori</i>	15
2.5.3	Rotações de Givens pelo método de 2 multiplicadores	16
2.6	Conclusões	17

3	Regiões de Confiança	18
3.1	Introdução	18
3.2	Descrição Qualitativa do Método de Regiões de Confiança	19
3.3	Formulação Matemática do Método de Regiões de Confiança	19
3.4	Determinação da Solução "Praticamente Exata" para o Problema MQP	22
3.5	Equação de Levenberg-Marquardt	23
3.6	Algoritmo de Moré-Sorensen para o Cálculo de λ	25
3.7	Conclusões	29
4	Implementação Ortogonal de Métodos de Região de Confiança	31
4.1	Introdução	31
4.2	Método da Refatoração- λ	31
4.3	Método IAPE	33
4.4	Comparação qualitativa dos métodos propostos	34
4.5	Conclusões	35
5	Aspectos Computacionais	37
5.1	Introdução	37
5.2	Etapas de implementação de um Estimador de estados baseado no método de Gauss-Newton Convencional	37
5.3	Etapas principais da implementação de métodos de Região de Confiança via G3M	39
5.3.1	Descrição do Algoritmo	39
5.3.2	Ordenação para preservar a esparsidade	43
5.4	Implementação das etapas básicas	44
5.4.1	Implementação das etapas do método da Refatoração- λ	44
5.4.2	Implementação das etapas do método IAPE	46
5.5	Conclusões	46

6	Resultados Numéricos	48
6.1	Introdução	48
6.2	Sistema de 6 barras	49
6.3	Sistema de 30 barras	52
6.4	Sistemas de 118 barras	55
6.5	Sistemas de 300 barras	57
6.6	Comparação de desempenho numérico	58
6.7	Conclusões	58
7	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	60
7.1	Conclusões	60
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	61
A	Dados para o sistema de testes de 6 barras	63

Lista de Figuras

3.1	Passo baseado em uma aproximação quadrática.	20
3.2	Passo baseado em Região de Confiança.	20
6.1	Sistema teste de 6 barras com proposto esquema de medição	49
6.2	Sistema 6 barras - Vetor gradiente e função objetivo: ausência de dados espúrios	50
6.3	Sistema 6 barras - Vetor de incremento de estados: ausência de dados espúrios	51
6.4	Sistema 6 barras - Vetor gradiente e valor da função objetivo: medidas espúrias e erros topológicos	51
6.5	Sistema 6 barras - Vetor de incremento de estados: medidas espúrias e erros topológicos	52
6.6	Sistema teste de 30 barras com proposto esquema de medição	52
6.7	Sistema 30 barras - norma do vetor de incrementos de estados e função objetivo	54
6.8	Sistema teste de 118 barras	55
6.9	Sistema 118 barras - norma do vetor de incrementos de estados e função objetivo	56
6.10	Sistema 300 barras - norma do vetor de incrementos de estados e função objetivo	58

Lista de Algoritmos

1	Algoritmo básico para o método de Região de Confiança	24
2	Algoritmo para o método de Moré e Sorensen	29
3	Algoritmo para o método da Refatoração- λ	33
4	Algoritmo para o método IAPE	35

Lista de Tabelas

6.1	Total de medidas e redundância do sistema de 6 barras	49
6.2	Total de medidas e redundância do sistema de 30 barras	53
6.3	Processo iterativo: Sistema de 30 barras	53
6.4	Plano de Medição - Sistema 118 barras	56
6.5	Total de medidas e redundância do sistema de 118 barras	56
6.6	Plano de Medição - Sistema 300 barras	57
6.7	Total de medidas e redundância do sistema de 300 barras	57
6.8	Tempo de execução para os sistemas analisados (segundos)	59
A.1	Dados de linha - Sistema de 6 barras	63
A.2	Resultados Fluxo de Potência - Sistema de 6 barras	63

Capítulo 1

Introdução

1.1 A importância da estimação de estados na Moderna Operação de Sistemas Elétricos de Potência

O conhecimento das variáveis de estado de um sistema elétrico de potência, ou seja, suas tensões nodais complexas, é premissa para monitoração da operação em tempo real. Todo sistema de operação em tempo real deve ser capaz de fornecer com segurança ao seu operador um retrato fiel do atual ponto de operação do sistema elétrico de potência. A ferramenta responsável por transmitir essas informações de forma precisa e confiável sobre o sistema de potência ao operador é o Estimador de Estados. Um Estimador de Estados processa dados analógicos de medidas contaminadas por ruídos de todos os tipos de modo a fornecer uma estimativa para as tensões complexas nas barras do sistema. Dessa maneira, o Estimador de Estados deve estar situado no topo do processo de operação em tempo real, vindo a fornecer uma saída confiável para todos os outros programas empregados na operação do sistema elétrico. Dada a importância desta ferramenta, deve-se garantir o seu funcionamento mesmo em situações adversas.

Ao longo dos últimos anos, vários países conduziram o processo de reestruturação de seus setores elétricos. Empresas que antes eram totalmente verticalizadas foram fragmentadas em segmentos distintos de geração, transmissão e distribuição. Essa separação dos segmentos teve um impacto direto na forma como o sistema elétrico de potência é operado, tornando as condições nas quais o problema de Estimação de Estados em Sistemas de Potência (EESP) é executado bem mais severas. No atual modelo, os Operadores Independentes não são proprietários das redes elétricas que são supostos monitorar, dependendo então das empresas que controlam os outros segmentos para a obtenção de dados de telemetria e de topologia. Dessa forma, o processo de desverticalização acabou criando dificuldades adicionais ao bom desempenho do processo de EESP. Ainda com o novo modelo do setor elétrico, alguns Operadores Independentes passaram a utilizar a EESP para subsidiar a formação de preços marginais e

fornecer informações para aplicativos de despacho com restrições de segurança. Portanto, ao mesmo tempo em que as condições para o uso da EESP se tornam mais críticas, sua importância como ferramenta básica de operação cresce. Assim, justifica-se a busca por algoritmos de EESP com características mais robustas. Entre essas características, destaca-se a capacidade de se obter convergência sob situações adversas, tais como baixa redundância de medidas, grande número de medidas analógicas espúrias e erros topológicos. Deseja-se que uma solução seja encontrada mesmo com a presença de erros de modelagem severos, pois através da solução da EESP pode-se efetuar o rastreamento das causas dos erros (SIMÕES COSTA; GOUVÊA, 2000).

Nos últimos anos foram propostos alguns algoritmos de otimização para lidar com esses problemas. Em especial destacam-se os métodos de Região de Confiança. Métodos de Região de Confiança são uma classe relativamente nova de algoritmos que buscam melhorar a capacidade de convergência de soluções iterativas para problemas de otimização para os quais se utiliza um modelo aproximado de função objetivo ¹. O método recebe este nome pois pode-se “confiar” nessa dada região como sendo uma boa aproximação para a função objetivo não-linear, utilizando para isso um rigoroso processo de controle. Uma vez que os problemas de EESP são também resolvidos como uma aproximação quadrática da função objetivo através do método de Gauss-Newton, o algoritmo de Região de Confiança se torna uma boa alternativa para se obter maior robustez no processo de EESP, tornando o método capaz de superar eventuais problemas de modelagem.

Um dos métodos mais difundidos para a solução do problema de EESP é o método de Gauss-Newton, cuja versão convencional é baseada na solução da Equação Normal. Sabe-se que o método de Gauss-Newton pode falhar em obter uma solução, pois o mesmo apresenta uma tendência ao mau condicionamento numérico. Para lidar com os problemas de mau condicionamento numérico do método de Gauss-Newton foram propostos métodos baseados em transformações ortogonais. Métodos baseados em transformações ortogonais apresentam uma capacidade numérica superior pois evitam a formação de matrizes potencialmente mal condicionadas, contornando desse modo os problemas relacionados com a solução da equação normal. Muitos dos Estimadores de Estados atualmente disponíveis no mercado são baseados em transformações ortogonais, e destes grande parte utilizam o método de rotações Givens. O método baseado nas rotações Givens é de especial serventia no problema de EESP, pois dentre as suas qualidades destaca-se o fato de acessar as matrizes por linhas, sendo particularmente útil para tratamento seqüencial de medidas (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981).

Desta forma, propõe-se neste trabalho de dissertação o desenvolvimento de uma ferramenta de EESP que associe toda a robustez algorítmica dos métodos de Região de Confiança à robustez numérica dos métodos baseados em transformações ortogonais. Por ser mais adequado ao contexto de EESP, o método de Givens será utilizado na implementação das transformações ortogonais.

¹Neste Trabalho, este modelo aproximado é quadrático.

1.2 Revisão Bibliográfica

As primeiras manifestações sobre o uso de estimação de estados aplicada a sistemas de potência começaram a surgir com o advento do uso da tecnologia digital para o apoio à tomada de decisões na operação em tempo real de sistemas elétricos de potência. O primeiro trabalho contemplando esta idéia surgiu no início da década de 70, com SCHWEPPE e WILDES (SCHWEPPE; WILDES, 1970). Este é um artigo de três partes onde é abordada a estimação de estados utilizando um modelo exato, as modificações necessárias para se trabalhar com um modelo aproximado, bem como o processo de implementação do método. O algoritmo proposto para a realização da estimação de estados é baseado no método dos mínimos quadrados ponderados, que exige a solução da equação normal de Gauss. Esta equação envolve matrizes mal-condicionadas, levando à possível contaminação da solução por erros devidos a arredondamentos e aproximações (GENTLEMAN, 1973), (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981). Como conclusão os autores deste trabalho deixam registrado que não havia obstáculos tecnológicos para impedir a implementação prática do método. Desde então, surgiram vários trabalhos buscando o aperfeiçoamento do processo de estimação de estados aplicado a sistemas elétricos de potência, principalmente no que tange à busca de robustez numérica.

Uma alternativa para a solução do problema de EESP baseada em mínimos quadrados ponderados foi apresentada em 1985 por GJELSVIK, AAM e HOLTEN (GJELSVIK; AAM; HOLTEN, 1985) através da utilização do método da Matriz Aumentada de Hachtel's (também denominado método do Tableau Esparsa). Este método reformula a equação normal de Gauss, reescrevendo-a sob a forma de uma equação matricial cuja matriz de coeficientes é aumentada (GJELSVIK; AAM; HOLTEN, 1985), e evitando assim o cálculo explícito de multiplicações de matrizes. Desse modo, o método supera os problemas enfrentados na solução tradicional da equação normal de Gauss, resultando em sensível melhora do condicionamento numérico. Além de proporcionar uma elevada robustez numérica em comparação à solução clássica da equação normal, o método ainda se mostrou computacionalmente eficiente e de fácil implementação (WU *et al.*, 1987), sendo ainda uma boa escolha para a solução de problemas de EESP.

Outra abordagem para a solução do problema de EESP, porém não baseada em mínimos quadrados ponderados, consiste na minimização dos valores absolutos dos resíduos de medição ponderados pelos inversos das variâncias das medidas, também conhecido como método dos Mínimos Valores Absolutos Ponderados (MVAP). Essa abordagem foi introduzida por IRVING, OWEN e STERLING em 1978 (IRVING; OWEN; STERLING, 1978). O método MVAP surgiu como uma alternativa atraente em relação ao método de Mínimos Quadrados Ponderados devido às suas propriedades inerentes de rejeição de erros. Entretanto, esta classe de métodos não teve tanta aceitação prática como os métodos de mínimos quadrados ponderados. Uma possível explicação para isso reside no fato do método MVAP mostrar um comportamento computacionalmente mais custoso e ainda assim não mais robusto que os métodos baseados em mínimos quadrados ponderados (CLEMENTS; MAURAS, 1994).

Na busca de soluções mais robustas para a solução de problemas de EESP, surgiu a classe de algoritmos baseados em transformações ortogonais. No início da década de 80, SIMÕES COSTA e QUINTANA (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981), apresentaram um algoritmo para EESP com capacidade de processamento seqüencial por linhas baseado em rotações de Givens, utilizando para tal a versão que evita o uso de raízes quadradas, desenvolvida por Gentleman (GENTLEMAN, 1973). Este trabalho deixou registrado a robustez numérica do método, bem como sua superioridade em relação aos métodos convencionais baseados na equação normal. Outros métodos baseados em rotações de Givens também foram apresentados. Na década de 90, VEMPATI, SLUTSKER e TINNEY (VEMPATI; SLUTSKER; TINNEY, 1991) exploraram a opção deixada por Gentleman (GENTLEMAN, 1973) para a utilização do método de Givens com apenas dois multiplicadores.

Mesmo sendo um conceito conhecido na literatura referente a métodos numéricos de otimização, os métodos baseados na Região de Confiança só foram aplicados ao problema de EESP com CLEMENTS e PAJIC (PAJIC; CLEMENTS, 2003), (PAJIC; CLEMENTS, 2005). Nesses artigos, o método foi apresentado e sua implementação foi realizada com sucesso através do uso de técnicas ortogonais. Foi mostrado que a adição do método de Região de Confiança ao problema de EESP tornou o método muito mais confiável, principalmente quando sujeito a condições extremas. Explorando também esta classe de métodos, SIMÕES, SALGADO e HAAS (SIMÕES COSTA; SALGADO; HAAS, 2007) apresentaram a utilização de um método de Região de Confiança em conjunto com transformações ortogonais realizadas pelo método de Givens. Neste trabalho foi mostrado que o método de Região de Confiança pode ser mais facilmente implementado com o uso de rotações de Givens de 3 multiplicadores (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981) e com o uso de informações *a-priori* (SIMÕES COSTA; LOURENÇO; VIEIRA, 2005). Deste trabalho surgiram os métodos IAPE (Informações *A-Priori* sobre os Estados) e da Refatoração- λ , que foram mais detalhados em trabalho complementar posterior (SIMÕES COSTA; SALGADO; HAAS, 2009).

Métodos de Região de Confiança têm sido também associados a técnicas de Estatística robusta, visando aumentar a robustez global de estimadores de estado (HASSAÏNE *et al.*, 2005).

Nos últimos anos o método de Região de Confiança vem também sendo abordado por outros pesquisadores brasileiros, como TORRES (TORRES; SOUSA, 2007), (TORRES; SOUSA, 2008), que aplicam o método de Região de Confiança ao problema de Fluxo de Potência Ótimo.

1.3 Contribuições deste trabalho

Este trabalho tem por objetivo principal avaliar os ganhos de desempenho de Estimadores de Estados baseados no método de Região de Confiança com implementação ortogonal baseada no método de Givens de três multiplicadores. Para tal, mostra-se o desenvolvimento de

dois métodos, o método IAPE e o método da Refatoração- λ . O primeiro leva em conta a capacidade intrínseca dos estimadores G3M lidarem com informações *a priori*, utilizando-a para processar os coeficientes da equação de Levenberg-Marquardt, enquanto o segundo leva em conta o parâmetro de ponderação da equação de Levenberg-Marquardt através de uma matriz Jacobiana aumentada, a ser triangularizada pelas rotações ortogonais. Ambos os métodos desenvolvidos são comparados com uma solução ortogonal clássica baseada em rotações de Givens. Aliado ao desenvolvimento de novas estratégias de solução, faz-se o uso também de técnicas de tratamento de esparsidade e de ordenação de matrizes.

Os testes são realizados em redes elétricas de diferentes dimensões e com a inclusão de diferentes erros de modelagem, com a finalidade de gerar casos severos, de difícil convergência. Os resultados são aferidos através do comportamento ao longo do processo iterativo de grandezas como o vetor gradiente, o vetor de incrementos de variáveis de estado e a soma ponderada dos quadrados dos resíduos. Conclusões são então extraídas a cerca da capacidade dos métodos baseados em Região de Confiança terem melhor desempenho do que métodos convencionais quando utilizados em problemas com a presença de erros de modelagem severos.

1.4 Organização da dissertação

Este trabalho é organizado como segue. O Capítulo 2 apresenta o problema de EESP através do método de Gauss-Newton. São apresentados o modelo de medição não-linear e como o problema de Estimação de Estados pode ser formulado como um problema de Mínimos Quadrados Ponderados. É mostrado também como o uso de informações *a priori* pode ser incorporado ao processo de EESP (SIMÕES COSTA; GOUVÊA, 2000). Ainda no Capítulo 2 é apresentado a solução do problema de EESP pelo método de Givens (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981), sendo apresentadas todas as suas formas de solução: a forma convencional, a solução de três multiplicadores (G3M) e a solução de dois multiplicadores.

O Capítulo 3 apresenta em detalhes o método de Região de Confiança. A formulação do método é descrita, bem como os algoritmos para a implementação do método. Neste capítulo faz-se menção de como o método de Região de Confiança pode ser visto como uma evolução do método de Levenberg-Marquardt (LEVENBERG, 1944), (MARQUARDT, 1963). Mostra-se também como uma solução para a etapa básica do algoritmo de Região de confiança pode ser obtida através do algoritmo desenvolvido por Moré e Sorensen (MORÉ; SORENSEN, 1985).

No Capítulo 4 é detalhado todo o processo de implementação ortogonal de métodos de Região de Confiança. Este capítulo apresenta os métodos desenvolvidos neste trabalho, aqui nomeados método IAPE e da Refatoração- λ .

O Capítulo 5 trata dos aspectos computacionais que envolvem todos os métodos tratados nesse trabalho. Neste capítulo são detalhadas as etapas de implementação de um Estimador

de Estados via método de Gauss-Newton convencional e as etapas de implementação dos métodos baseados em Região de Confiança via G3M.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos com a execução dos métodos propostos. Os sistemas-teste são detalhados assim como os planos de medições utilizados, destacando-se as condições introduzidas para que os mesmos apresentem desafios à convergência. Por último, o Capítulo 7 apresenta as conclusões geradas com o desenvolvimento do trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Método de Gauss-Newton e Rotações Ortogonais de Givens

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar a formulação para o problema de EESP, bem como alguns dos métodos mais utilizados em sua solução. Será descrito o modelo de medição utilizado para o problema e como este pode ser formulado como um problema de Mínimos Quadrados Ponderados. Será apresentada a abordagem clássica para a solução do problema através do método de Gauss-Newton, assim como a solução através de métodos ortogonais baseados em rotações de Givens (GENTLEMAN, 1973), (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981), (VEMPATI; SLUTSKER; TINNEY, 1991). O uso de informações *a priori* (SIMÕES COSTA; LOURENÇO; VIEIRA, 2005) será detalhado para aplicação no método de Gauss-Newton bem como no método de rotações de Givens com três multiplicadores.

Os tópicos apresentados no presente capítulo fornecem o embasamento teórico necessário ao entendimento dos métodos propostos nesta dissertação, que serão descritos nos Capítulos 3 e 4.

Este capítulo é organizado como segue. A Seção 2.2 apresenta o modelo de medição não linear utilizado nos problemas de EESP e sua formulação como um problema de Mínimos Quadrados Ponderados. Na Seção 2.3 é demonstrado como o problema de EESP pode ser resolvido através do método de Gauss-Newton. A Seção 2.4 expõe as dificuldades numéricas encontradas na solução da equação Normal de Gauss-Newton. Uma alternativa à solução da equação Normal é apresentada na Seção 2.5, com a utilização de métodos ortogonais baseados em rotações de Givens.

2.2 Modelo de medição não linear e estimador por Mínimos Quadrados Ponderados

Para um sistema de potência de N barras onde l medidas são conhecidas, pode-se adotar um modelo não linear que relacione as quantidades medidas às variáveis de estado da seguinte forma (SCHWEPPE; WILDES, 1970):

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \varepsilon \quad (2.1)$$

onde \mathbf{z} é o vetor de ordem $(l \times 1)$ das quantidades medidas; isto é, a magnitude das tensões nas barras, as injeções de potência ativa e reativa, os fluxos de potência ativa e reativa, corrente nas linhas de transmissão e mais recentemente fasores de tensão; \mathbf{z}_0 é o vetor de ordem $(l \times 1)$ com os valores verdadeiros das quantidades medidas e ε é o vetor $(l \times 1)$ que modela os erros de medição, podendo estes serem causados por imprecisão dos medidores, erros de comunicação, efeitos de conversão analógico-digital, etc. É suposto que o vetor de erros de medição apresenta distribuição normal, com média zero e matriz de covariância \mathbf{R} . Isto pode ser expresso analiticamente como:

$$\mathbf{E}(\varepsilon) = \mathbf{0} \quad \mathbf{E}(\varepsilon\varepsilon^t) = \mathbf{R} \quad (2.2)$$

onde \mathbf{R} é uma matriz diagonal, denotando que os erros de medição são não-correlacionados. Os valores verdadeiros das quantidades medidas e os estados verdadeiros são relacionados por

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ é o vetor de ordem $(l \times 1)$ de funções não-lineares do estado do sistema e \mathbf{x} é o vetor $(n \times 1)$ de variáveis de estado do sistema, que para um sistema de N barras é de ordem $2N - 1$ (não se inclui o ângulo da barra de referência no vetor de estados do sistema). Assim, o modelo de medição da equação (2.1) pode ser reescrito como:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \varepsilon \quad (2.4)$$

A estimação de estados de um sistema de potência pode ser formulada como um problema de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP), onde uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ para os estados é calculada de forma a minimizar uma função objetivo baseada no modelo de medição dado pela equação (2.4). O problema pode ser descrito matematicamente na forma

$$\text{minimizar } \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] \quad (2.5)$$

onde a quantidade a ser minimizada é o índice representado pela soma dos quadrados dos

resíduos ponderados pelos inversos das variâncias dos erros de medição. A ponderação definida por \mathbf{R}^{-1} implica que medidas com maior incerteza recebem menor peso, tendo assim menor influência na resposta do problema.

2.3 Solução da EESP através do método de Gauss-Newton

A solução do problema de minimização apresentado na equação (2.5) através do método de Gauss-Newton requer em cada passo do processo iterativo a solução do sistema linear (SCHWEPPE; HANDSCHIN, 1974), (MONTICELLI, 1999), (ABUR; EXPÓSITO, 2004)

$$[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}] \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} \quad (2.6)$$

onde \mathbf{H} é a matriz Jacobiana de ordem $(l \times l)$ que representa as primeiras derivadas das funções não-lineares do vetor $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, calculada no ponto \mathbf{x}^k e $\Delta \mathbf{z}$ é o vetor $(l \times 1)$ de resíduos de medição, dado por

$$\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \quad (2.7)$$

A equação (2.6) é denominada Equação Normal de Gauss, e sua solução fornece o vetor de correções de estado $\Delta \mathbf{x}$, de ordem $(n \times 1)$, tal que a solução do problema não-linear é obtida por um processo iterativo dado por

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}. \quad (2.8)$$

O processo iterativo continua até que $\Delta \mathbf{x}$ se torne menor que uma tolerância pré-definida. A matriz de coeficientes no lado esquerdo da equação (2.6) é comumente chamada de matriz Ganho, definida como

$$\mathbf{G} = [\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}] \quad (2.9)$$

É importante notar que a matriz Ganho é de fato uma aproximação para a matriz Hessiana $\nabla^2 \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}})$ próxima da solução, e o lado direito da equação 2.6 é o negativo do gradiente de $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}})$, ambos calculados no ponto \mathbf{x}^k (MONTICELLI, 1999), (ABUR; EXPÓSITO, 2004). Pode ser mostrado que a matriz Ganho é uma aproximação válida para a matriz Hessiana $\nabla^2 \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}})$ pois, para um problema de mínimos quadrados não ponderados, a matriz Hessiana da função objetivo é dada por (ADBY; DEMPSTER, 1974)

$$\mathbf{H}^t(\mathbf{x}^k) \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^l \nabla^2 \mathbf{h}_i(\mathbf{x}^k) \mathbf{h}_i(\mathbf{x}^k) \quad (2.10)$$

Pela equação (2.9) fica claro que a matriz Ganho é a versão aproximada da matriz Hessiana, onde o termo de segunda ordem

$$\sum_{i=1}^l \nabla^2 \mathbf{h}_i(\mathbf{x}^k) \mathbf{h}_i(\mathbf{x}^k) \quad (2.11)$$

é negligenciado. Dessa forma, obtêm-se certo ganho computacional, às custas de alguma deterioração na taxa de convergência. Se o termo da (2.11) é relativamente pequeno próximo à solução, a convergência do método de Gauss-Newton é satisfatória. Este fato é frequentemente confirmado em muitas aplicações, particularmente quando os componentes de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ são pequenos próximos à solução (BERTSEKAS, 1995). Em condições práticas, a matriz Ganho é também mantida constante depois de algumas iterações, desse modo acumulando mais aproximações à matriz Hessiana.

2.3.1 Tratamento de informações *a priori*

O problema convencional de MQP (2.5) pode ser expandido para levar em consideração a disponibilidade de Informações *A Priori* nas variáveis de Estado, nesse documento referido pela sigla IAPE. Para levar em consideração as informações *a priori*, a função objetivo do problema (2.5) é aumentada pelo termo (SIMÕES COSTA; LOURENÇO; VIEIRA, 2005):

$$\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{P}^{-1}(\hat{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (2.12)$$

onde $\bar{\mathbf{x}}$ é o vetor ($n \times 1$) formado pelos valores *a priori* das variáveis de estado, cuja matrix de covariância de ordem ($n \times n$) é \mathbf{P} . Na prática, supõe-se que a matrix \mathbf{P} é diagonal, sendo o seu *i-ésimo* termo diagonal a variância σ_i^2 da informação *a priori* \bar{x}_i . Aplicando as condições de otimalidade ao problema aumentado chega-se na seguinte equação (SIMÕES COSTA; LOURENÇO; VIEIRA, 2005):

$$[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{P}^{-1}] \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1} \Delta \bar{\mathbf{x}} \quad (2.13)$$

onde $\Delta \bar{\mathbf{x}} \triangleq (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^k)$. Conseqüentemente, na presença de informações *a priori*, a equação (2.13) toma o lugar da equação (2.5) no processo de solução do problema de MQP.

2.4 Dificuldades Numéricas da solução via Equação Normal de Gauss

Embora sob condições usuais o método de Gauss-Newton seja capaz de resolver vários problemas práticos, ele exhibe como desvantagem uma tendência a mau condicionamento numérico. Isto pode ser verificado analisando-se o número de condicionamento da matriz Ganho,

definida na equação (2.9). O *Número de Condicionamento Espectral* de uma matriz \mathbf{C} é definido como (GOLUB; LOAN, 1989)

$$\mathbf{Cond}(\mathbf{C}) = \frac{\sigma_{\mathbf{M}}}{\sigma_{\mathbf{m}}} \quad (2.14)$$

onde $\sigma_{\mathbf{M}}$ e $\sigma_{\mathbf{m}}$ representam o máximo e mínimo auto-valores da matriz $\mathbf{C}^t\mathbf{C}$.

A grandeza $\mathbf{Cond}(\mathbf{C})$ mede o quanto pequenas perturbações na matriz \mathbf{C} afetam a solução de um sistema linear $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Para a equação normal de Gauss dada pela equação (2.6), pode-se provar que (NOCEDAL; WRIGHT, 1999)

$$\mathbf{Cond}(\mathbf{H}^t\mathbf{H}) = (\mathbf{Cond}(\mathbf{H}))^2.$$

Portanto, o número de condicionamento da matriz Ganho assumirá o quadrado do número de condicionamento da matriz $(\mathbf{R}^{\frac{1}{2}}\mathbf{H})$ (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981), ou seja, se \mathbf{H} não for muito bem condicionada, $\mathbf{H}^t\mathbf{H}$ será mal condicionada. Por esse motivo, a solução obtida através da equação normal pode ser muito menos exata do que as soluções obtidas por algoritmos que evitam explicitamente o cálculo da matriz Ganho. Na prática, se a matriz Jacobiana for mal condicionada, a fatoração da matriz Ganho pode falhar devido à acumulação de erros de arredondamento.

2.5 Solução da EESP via rotações de Givens

Como mostrado na Seção 2.4, a solução do problema de MQP pela resolução da equação normal (equação 2.6) exibe como desvantagem o mal condicionamento da matriz Ganho, causado pelo produto matricial $[\mathbf{H}^t\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}]$. Para se superar essa dificuldade numérica, foram propostos métodos de decomposição baseados em transformações ortogonais. Métodos baseados na aplicação das rotações de Givens (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981), (VEMPATI; SLUTSKER; TINNEY, 1991) mostram-se capazes de fornecer soluções robustas, uma vez que previnem a degradação do condicionamento numérico do problema.

A partir do modelo de medição linearizado, a função objetivo do problema de Mínimos Quadrados Ponderados é dada por

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) - \Delta\mathbf{z}]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) - \Delta\mathbf{z}] \quad (2.15)$$

ou

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) - \Delta\mathbf{z}])^t \mathbf{I} (\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) - \Delta\mathbf{z}]). \quad (2.16)$$

Sendo \mathbf{Q} uma matriz ortogonal, temos que

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad (2.17)$$

e portanto

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{Q}(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) - \Delta \mathbf{z}])\}^t \{\mathbf{Q}(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}[\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) - \Delta \mathbf{z}])\}. \quad (2.18)$$

Para ilustrar a aplicação dos métodos ortogonais, considere que sucessivas transformações ortogonais são aplicadas à matriz \mathbf{H} previamente ponderada pela matriz $\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}$, para se obter um sistema linear triangular superior de equações. Se \mathbf{Q} representa a matriz que armazena as rotações individuais, temos (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981), (SIMÕES COSTA; GOUVÊA, 2000):

$$\mathbf{Q} \left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{c} \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{x}} - \Delta \mathbf{z} \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{U} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \Delta \mathbf{x} - \left[\begin{array}{c} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{array} \right] \quad (2.19)$$

ou, aumentando-se a matriz Jacobiana com o vetor $\Delta \mathbf{z}$:

$$\mathbf{Q} \left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H} & \Delta \mathbf{z} \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f} \end{array} \right] \quad (2.20)$$

onde \mathbf{U} é uma matriz triangular de ordem $(n \times n)$, \mathbf{e} e \mathbf{f} são vetores de ordem n e $(l - n)$ respectivamente. Com essa transformação, pode-se obter o vetor de estados $\hat{\mathbf{x}}$ resolvendo-se o sistema triangular superior

$$\mathbf{U} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{e} \quad (2.21)$$

A soma ponderada dos quadrados dos resíduos é determinada a partir de \mathbf{f} , como subproduto do processo de triangularização do sistema equações (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981).

2.5.1 Forma convencional das Rotações de Givens

A etapa fundamental do desenvolvimento mostrado na seção anterior é a definição da transformação ortogonal representada pela matriz \mathbf{Q} da equação (2.20). Existem diversas possibilidades para se obter \mathbf{Q} . Contudo, em problemas de EESP é vantajoso que a matriz a ser triangularizada seja operada por linhas, pois isto possibilita que as medidas e equações correspondentes sejam processadas uma de cada vez. Para este fim, um método adequado é o algoritmo de Givens, que consiste em se aplicar rotações sucessivas entre os elementos de um vetor linha \mathbf{p} e as linhas de uma matriz triangular \mathbf{U} até que os elementos de \mathbf{p} sejam

completamente zerados. Se \mathbf{U} e \mathbf{p} possuem respectivamente ordem $(n \times n)$ e $(1 \times n)$ e se o vetor \mathbf{p} é denso, então os elementos deste vetor serão completamente anulados ao final de n rotações. A versão original das Rotações de Givens pode ser descrita como mostrado a seguir.

Considere os seguintes vetores:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= [0 \dots 0 \quad u_i \quad \dots \quad u_k \quad \dots \quad u_{n+1}] \\ \mathbf{p} &= [0 \dots 0 \quad p_i \quad \dots \quad p_k \quad \dots \quad p_{n+1}]\end{aligned}\tag{2.22}$$

O vetor \mathbf{u} pode ser considerado como a i -ésima linha da matriz triangular \mathbf{U} da equação (2.20). O vetor \mathbf{p} representa uma nova linha ainda a ser processada. A cada etapa do método de Givens, uma rotação de planos entre \mathbf{u} e \mathbf{p} é executada, de modo a anular o i -ésimo elemento de \mathbf{p} . Após a rotação, os vetores assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= [0 \dots 0 \quad u'_i \quad \dots \quad u'_k \quad \dots \quad u'_{n+1}] \\ \mathbf{p}' &= [0 \dots 0 \quad p'_i \quad \dots \quad p'_k \quad \dots \quad p'_{n+1}]\end{aligned}\tag{2.23}$$

As rotações a serem aplicadas aos vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} são definidas como:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' \\ p' \end{bmatrix}\tag{2.24}$$

onde $c^2 + s^2 = 1$. Os escalares c e s são obtidos a partir da condição imposta que $p'_i = 0$, e são dados por:

$$\begin{aligned}c &= \frac{u_i}{\sqrt{u_i^2 + p_i^2}} \\ s &= \frac{p_i}{\sqrt{u_i^2 + p_i^2}}\end{aligned}\tag{2.25}$$

2.5.2 Rotações de Givens com três multiplicadores

2.5.2.1 Escalonamento de Matrizes e Rotações Modificadas

As rotações de Givens também podem ser realizadas utilizando-se três multiplicações em cada etapa elementar, ao invés das quatro multiplicações requeridas pela equação (2.24) (GENTLEMAN, 1973), (HAMMARLING, 1974), (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981). Neste documento, a versão de três multiplicadores é referida como **G3M**. A versão G3M também evita cálculos de raízes quadradas na implementação das rotações. Para atingir estes dois níveis de redução no esforço computacional, parte-se da decomposição da matriz \mathbf{U} como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{U}} \quad (2.26)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal e $\bar{\mathbf{U}}$ é uma matriz triangular superior com diagonal unitária. Como o vetor $\Delta \mathbf{z}$ é considerado uma coluna extra da matriz \mathbf{H} , o vetor \mathbf{e} também será escalonado durante a transformação. O vetor escalonado resultante é denotado por $\bar{\mathbf{e}}$. O artifício de se escalonar \mathbf{U} como mostrado acima tem uma série de benefícios computacionais, tais como a eliminação do cálculo de raízes quadradas durante a fatorização dada pela equação (2.20) (GENTLEMAN, 1973). Na prática, o cálculo de $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ não é necessário, apenas \mathbf{D} precisa ser calculado. Seguindo o passo de transformação dado pela equação (2.20), o vetor $\Delta \mathbf{x}$ pode ser obtido pela simples solução do sistema triangular superior

$$\bar{\mathbf{U}} \Delta \mathbf{x} = \bar{\mathbf{f}} \quad (2.27)$$

por substituição inversa. Como no método original, a soma ponderada dos quadrados dos resíduos é determinada a partir de $\bar{\mathbf{f}}$, como subproduto do processo de triangularização do sistema equações. Para implementar sequencialmente o escalonamento da matriz \mathbf{U} como definido na equação (2.26), supõe-se que cada nova linha da matriz \mathbf{H} a ser processada (aumentada pela posição correspondente do vetor $\Delta \mathbf{z}$) é escalonada por um fator \sqrt{w} . Dessa maneira, para uma rotação genérica entre uma linha \mathbf{p} de \mathbf{H} e a *i-ésima* linha \mathbf{u} da matriz \mathbf{U} , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [0 \dots 0 \quad \sqrt{d} \quad \dots \quad \sqrt{d} \bar{u}_k \quad \dots \quad \sqrt{d} \bar{u}_{n+1}] \\ \mathbf{p} &= [0 \dots 0 \quad \sqrt{w} p_i \quad \dots \quad \sqrt{w} p_k \quad \dots \quad \sqrt{w} p_{n+1}] \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde \sqrt{d} é o fator de escala da linha \mathbf{u} da matriz \mathbf{U} . A próxima rotação elementar tem por objetivo anular a *i-ésima* posição de \mathbf{p} , produzindo o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= [0 \dots 0 \quad \sqrt{d'} \quad \dots \quad \sqrt{d'} \bar{u}'_k \quad \dots \quad \sqrt{d'} \bar{u}'_{n+1}] \\ \mathbf{p}' &= [0 \dots 0 \quad 0 \quad \dots \quad \sqrt{w'} p_k \quad \dots \quad \sqrt{w'} p'_{n+1}] \end{aligned} \quad (2.29)$$

As operações que implementam cada operação elementar são detalhadas a seguir. O objetivo da rotação elementar é anular a *i-ésima* posição de \mathbf{p} , ambos os vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} são escalonados por \sqrt{d} e \sqrt{w} , respectivamente (ver equações (2.28)). O resultado das rotações está representado nas equações (2.29). As equações que definem as relações entre as posições originais e as posições transformadas dos vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} são dadas por (GENTLEMAN, 1973):

$$\begin{aligned} d' &= d + w p_i^2 \\ w' &= d w / d' \\ \bar{c} &= d / d' \\ \bar{s} &= w p_i / d' \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\left. \begin{aligned} p'_k &= p_k - p_i \bar{u}_k \\ \bar{u}'_k &= \bar{c} \bar{u}_k + \bar{s} p_k \end{aligned} \right\}, \quad k = i + 1 \dots n + 1 \quad (2.31)$$

onde \bar{c} e \bar{s} são os parâmetros que definem cada rotação elementar. A variante de três multiplicadores das rotações de Givens (G3M) recebe o seu nome em razão do número de multiplicações requeridas nas transformações representadas pelas equações (2.31). Os pesos d e w devem ser inicializados, como será mostrado na seqüência.

Depois da inicialização dos pesos, as linhas de \mathbf{H} são processadas seqüencialmente, cada uma delas submetendo-se às rotações elementares necessárias para anular todas as posições diferentes de zero. O número de linhas de \mathbf{U} , bem como a matriz \mathbf{D} , são atualizadas durante este processo, através das equações acima.

Uma característica muito atraente das rotações de Givens com 3 multiplicadores é que o mecanismo de escalonamento necessário para a sua implementação permite que a solução do problema de mínimos quadrados *ponderados* seja encontrada automaticamente, isto é, sem nenhum custo computacional extra (GENTLEMAN, 1973). Este é exatamente o caso da EESP, que portanto é um problema em que se pode tirar o máximo proveito das propriedades do método G3M. Nesta aplicação, o valor inicialmente atribuído ao fator de peso de linhas w é o peso associado à medida correspondente. Assim, se a linha p corresponde, por exemplo, a medida z_j , então $w = 1/\sigma_j^2$ (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981).

2.5.2.2 Tratamento de Informações *A-Priori*

Uma vez que a função do fator de ponderação de medidas w já foi estabelecida, é natural então buscar-se uma interpretação para o fator de ponderação d associado às linhas da matriz \mathbf{U} . Analogamente a w , o valor inicial de d também deve ser interpretado como um peso, mas neste caso *associado aos estados* (observe que existem tantos d 's quantas são as variáveis de estado). Além disso, os valores iniciais de d devem ser vistos como ponderações para os estados *antes de que qualquer medida seja processada*. Em outras palavras, d_i é o fator de peso para a informação *a priori* disponível para a variável de estado x_i . Adicionalmente, o valor para d_i deve estar de acordo com a expressão (2.12), que estabelece a forma como as informações *a priori* são tratadas no processo de estimação. Isso nos leva à conclusão que (SIMÕES COSTA; LOURENÇO; VIEIRA, 2005).

$$d_i = 1/\bar{\sigma}_i^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

onde $\bar{\sigma}_i^2$ é a variância da informação *a priori* para a variável de estado i .

A prática em aplicações convencionais das rotações G3M a problemas de EESP (que negligenciam informações de estado *a priori*) tem sido inicializar $d_i = 0$ e $\bar{u}_{ii} = 1.0$ para cada linha de \mathbf{U} , com $u_{ij} = 0$, $j = i$ (SIMÕES COSTA; QUINTANA, 1981). Isto é consistente

com o que foi apresentado na Subsecção 2.3.1, uma vez que tal inicialização realmente significa que *nada é conhecido antecipadamente sobre os estados*, ou seja, suas variâncias *a priori* são consideradas infinitas.

Dessa maneira, pode-se concluir que a informação prévia sobre os estados pode ser facilmente considerada no processo de rotações por G3M simplesmente inicializando-se o elemento extra \bar{u}_{n+1} na equação (2.28) como \bar{x}_i , e d_i como mostrado na equação (2.32). Já que as mesmas variáveis estão presentes na formulação convencional, não existe mais uma vez nenhum custo computacional extra para se tirar proveito de mais esta propriedade do método G3M.

Deve ser enfatizado que, nos termos do método de MQP, a solução obtida é teoricamente equivalente a resolver o problema pelos métodos convencionais não-ortogonais, ou seja, via equação (2.13).

2.5.3 Rotações de Givens pelo método de 2 multiplicadores

Conforme (GENTLEMAN, 1973), o método de 3 multiplicadores pode ainda ser reescrito de modo a economizar mais uma multiplicação. Para tanto, as rotações elementares assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} d' &= d + wp_i^2 \\ w' &= d w/d' \\ \bar{s} &= wp_i/d' \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\left. \begin{aligned} p'_k &= p_k - p_i \bar{u}_k \\ \bar{u}'_k &= \bar{u}_k + \bar{s} p'_k \end{aligned} \right\}, \quad k = i + 1 \dots n + 1 \quad (2.34)$$

Apesar do aparente Ganho computacional, a variante com 2 multiplicadores acima não é recomendada por ser numericamente instável (GENTLEMAN, 1973). É possível, entretanto, monitorar esta instabilidade e, além disso, desenvolver variantes de rotações com dois multiplicadores que sejam complementares do ponto de vista da estabilidade numérica, isto é: quando uma das variantes tornar-se instável, a outra deve ser estável, e vice-versa. Assim, monitorando-se as condições que determinam a estabilidade numérica, pode-se implementar um processo dinâmico de escolha entre as duas variantes durante a triangularização de uma dada matriz de modo a manter a estabilidade (GOLUB; LOAN, 1989). Esta versão das rotações de Givens tem sido chamada de "Rotações Rápidas de Givens" (Fast Givens), e foram também aplicadas à EESP (VEMPATI; SLUTSKER; TINNEY, 1991).

Como desvantagem, o método com 2 multiplicadores não apresenta a mesma facilidade para o processamento de informações *a priori* para as variáveis de estado, sendo este o principal motivo para não ser utilizado no presente trabalho.

2.6 Conclusões

Embora seja capaz de fornecer soluções práticas para o problema de EESP sobre condições usuais, o método de Gauss-Newton pode falhar devido a problemas de mal condicionamento da matriz Jacobiana, causados pelo acúmulo de erros de arredondamento na fatoração da matriz Ganho. Os métodos baseados em transformações ortogonais mostraram-se bastante robustos para lidar com tais problemas, especialmente por evitar o cálculo explícito da matriz Ganho.

Dentre esses métodos, destacam-se os baseados em rotações de Givens, por serem capazes de operar as matrizes a serem triangularizadas por linhas, podendo assim processar uma medida de cada vez. Pode-se concluir também que, entre as formulações baseadas em rotações de Givens, a mais adequada para o problema proposto é a versão com 3 multiplicadores (G3M) (GENTLEMAN, 1973) que, além de fornecer a solução para o problema de EESP, é capaz de incorporar o uso de informações *a priori* para os estados do sistema sem custo computacional extra.

Capítulo 3

Regiões de Confiança

3.1 Introdução

Neste capítulo será introduzido o método de Regiões de Confiança, sua formulação e os algoritmos que definem o método. Os métodos baseados em Regiões de confiança geram passos baseados em um modelo quadrático para a função objetivo. Define-se uma área ao redor da atual solução, na qual o modelo em uso é supostamente uma boa representação da função objetivo, e então escolhe-se um passo como minimizador para o modelo da região de confiança (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Pode-se empregar diversos métodos para o cálculo do parâmetro que ajusta a solução à região de confiança. Nesse trabalho será utilizado o método desenvolvido por *Moré e Sorensen* (MORE; SORENSEN, 1985). O conceito de Regiões de Confiança foi inicialmente aplicado ao problema de EESP por *Pajic e Clements* (PAJIC; CLEMENTS, 2003, 2005), obtendo bons resultados para problemas com grande presença de medidas espúrias e/ou erros de topologia. Posteriormente, o método foi implementado com sucesso através do uso da solução através de rotações de Givens e uso de informação *a priori* (SIMÕES COSTA; SALGADO; HAAS, 2007).

Este capítulo é organizado como segue. A Seção 3.2 descreve qualitativamente o método de Regiões de Confiança, procurando enfatizar seus aspectos conceituais. A formulação matemática do método é apresentada na Seção 3.3, onde são descritos o problema de otimização restrita associado e uma métrica para avaliar os progressos obtidos com o modelo aproximado da função-objetivo. A determinação de soluções "praticamente exatas" do problema é abordada na Seção 3.4. O método básico de Levenberg-Marquardt para a solução de problemas de otimização não-lineares é revisto na Seção 3.5, dada a sua afinidade com os métodos de regiões de confiança usados neste trabalho. O algoritmo de Moré-Sorensen para ajuste iterativo do parâmetro que garante a observância do raio da região de confiança é apresentado na Seção 3.6, que é seguida pelas conclusões do capítulo.

3.2 Descrição Qualitativa do Método de Regiões de Confiança

Segundo *Nocedal e Wright* (NOCEDAL; WRIGHT, 1999), a utilização do método de regiões de confiança contribui para o aumento da robustez do processo de convergência do método de Gauss-Newton. Métodos de Regiões de Confiança geram passos com a ajuda de um modelo quadrático da função objetivo. Uma região ao redor da iteração atual é definida, na qual o modelo é supostamente uma boa representação da função objetivo. Um passo candidato é então selecionado como sendo um minimizador aproximado da representação quadrática da região de confiança. Na realidade, a determinação de um minimizador para o modelo da região de confiança, implica na escolha simultânea da direção e do comprimento do passo. No caso de um passo não ser aceitável, o raio da região de confiança é reduzido e se realiza o cálculo de um novo passo. Para se ajustar o raio da região de confiança, uma função de mérito é definida como uma função escalar das variáveis de otimização para indicar se o candidato a uma nova iteração é melhor ou pior do que a iteração atual, no sentido do progresso feito em direção à solução ótima. No caso de EESP, a soma ponderada dos quadrados dos resíduos se qualifica como uma opção válida para ser usada como função de mérito para a definição da região de confiança.

Para ilustrar a lógica do conceito de Regiões de Confiança, vamos considerar um problema envolvendo apenas duas variáveis de estado. Podemos definir $J(\mathbf{x}^k)$ e $m(\mathbf{x}^k)$ como os somatórios dos quadrados ponderados dos resíduos para a função objetivo real e o correspondente modelo quadrático aproximado, respectivamente, calculados em uma k -ésima iteração. Na situação descrita pela Figura 3.1, os contornos de J descrevem as curvas de nível da função a ser minimizada, onde a solução atual \mathbf{x}^k se encontra na parte superior das curvas e a solução ótima \mathbf{x}^* na parte inferior da figura. Uma busca baseada no modelo quadrático local dado por $m(\mathbf{x}^k)$, cujos contornos elípticos são mostrados em azul na figura, conduzirá a uma solução intermediária muito longe do minimizador real, resultando em pequena redução em J . Valendo-se do conceito de regiões de confiança, uma área pode ser definida ao redor da solução atual, na qual espera-se obter uma melhor representação da função objetivo, como visto na Figura 3.2. Após um passo não aceitável, baseado na aproximação dada pelo círculo externo, o passo calculado pelo método da região de confiança estará confinado ao círculo tracejado verde ao redor de \mathbf{x}^k , tal que o passo de otimização conduzirá ao ponto \mathbf{x}^{k+1} . Esse ponto leva a uma redução mais significativa em J e também permanece mais próximo do caminho na direção do minimizador ótimo.

3.3 Formulação Matemática do Método de Regiões de Confiança

Denotando-se o gradiente da função objetivo por $\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ e a aproximação para a matriz Hessiana calculada no ponto atual por $\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)$, pode-se formular o problema de região de

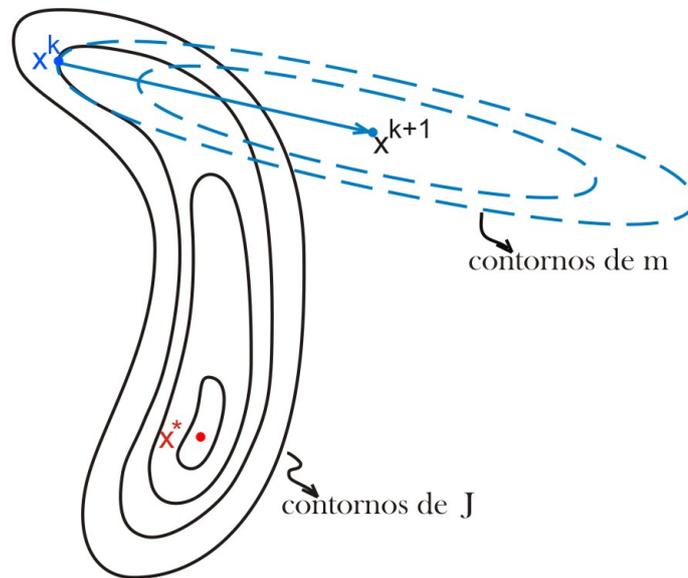


Figura 3.1: Passo baseado em uma aproximação quadrática.

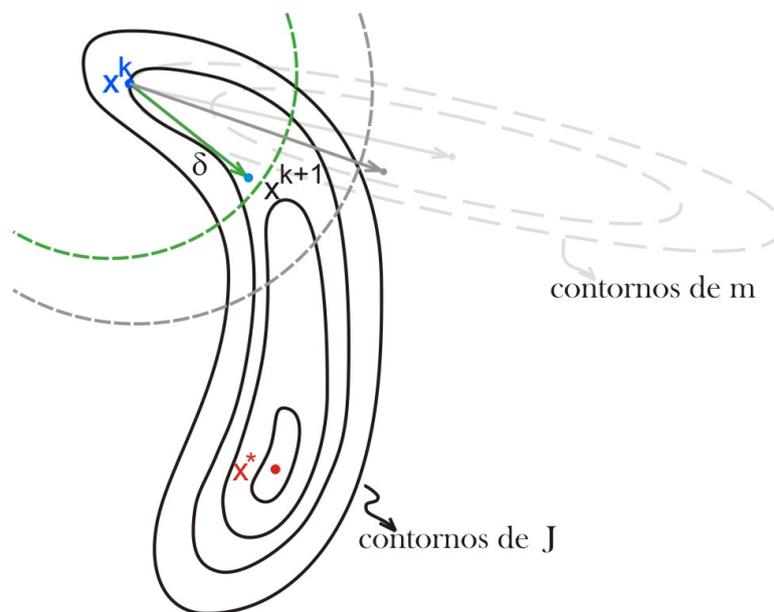


Figura 3.2: Passo baseado em Região de Confiança.

confiança como:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \mathbf{g}^t(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^t\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x} \\ & \text{sujeito a } \|\Delta\mathbf{x}\| \leq \delta \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde o índice a ser minimizado é o modelo quadrático local da função objetivo e o escalar δ é o raio da região de confiança.

Como mostrado acima, o método da Região de Confiança resolve o subproblema (3.1) para obter $\Delta\mathbf{x}^k$ e, assim, o ponto \mathbf{x}^{k+1} . O valor real da função objetivo é então calculado em \mathbf{x}^{k+1} e comparado com o valor predito pelo modelo quadrático, afim de se verificar se o ponto localizado na região de confiança representa um progresso efetivo em direção à solução ótima. De acordo com a magnitude do progresso obtido, o raio da região de confiança pode precisar ser redimensionado. O processo que analisa o progresso obtido por um passo candidato será detalhado a seguir.

O raio da região de confiança é um parâmetro crítico para a eficácia de cada passo. Se a região é muito pequena, um passo maior, que poderia levar à um ponto mais próximo da solução ótima, não pode ser tomado. Em contrapartida, se a região é muito grande, o modelo quadrático que representa a função objetivo pode ser inadequado, tornando então necessário a redução do raio da região de confiança. Na prática, o raio da região de confiança é determinado através da evolução do processo iterativo. Se o modelo é suficientemente preciso, o raio da região é permanentemente aumentado para permitir que passos maiores sejam tomados. Do contrário, o modelo quadrático é inadequado e o raio da região de confiança necessita ser reduzido.

A fim de se estabelecer um algoritmo para controlar o raio da região de confiança, define-se uma *razão de redução* calculada na k -ésima iteração (denotada ρ_k) como

$$\rho_k = \frac{J(\mathbf{x}^k) - J(\mathbf{x}^{k+1})}{m(\mathbf{x}^k) - m(\mathbf{x}^{k+1})} \quad (3.2)$$

onde $m(\mathbf{x}^k) - m(\mathbf{x}^{k+1}) > 0$, já que, por construção, \mathbf{x}^{k+1} está mais próximo à solução minimizadora do que \mathbf{x}^k .

Observe que ρ_k pode ser visto como a razão entre a *redução real* e a *redução predita* da função objetivo.

3.4 Determinação da Solução "Praticamente Exata" para o Problema MQP

A etapa crucial no método de regiões de confiança é a solução do Problema (3.1). Há basicamente dois tipos de estratégias para atingir este objetivo: soluções *aproximadas* e soluções ditas "*praticamente exatas*" (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Os métodos que pertencem à primeira dessas classes partem do reconhecimento de que, para se obter a convergência global do problema de otimização, não é essencial determinar exatamente a solução ótima do Problema (3.1). Na verdade, é suficiente se encontrar uma solução aproximada $\Delta \mathbf{x}$ que pertença à região de confiança e que promova uma redução suficiente na função-objetivo do modelo. A esta classe pertencem o algoritmo do ponto de Cauchy, o método "dogleg", a minimização em subespaços bidimensionais, dentre outros (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Os métodos "praticamente exatos", em contrapartida, exploram mais intensamente o modelo, em busca de melhores aproximações para a solução de (3.1). É portanto de se esperar que requeiram um pouco mais de esforço computacional.

Nesta dissertação, opta-se pela adoção de uma estratégia que fornece soluções "praticamente exatas". Além da maior precisão esperada, a principal razão para a escolha deve-se ao fato de que esta abordagem envolve, como etapa básica, a solução de uma equação do tipo Levenberg-Marquardt (LEVENBERG, 1944; MARQUARDT, 1963). Equações desse tipo têm sido utilizadas no contexto da EESP (RAO; TRIPATHY, 1980; PAJIC; CLEMENTS, 2003, 2005), havendo portanto experiência acumulada quanto a métodos para resolvê-la. Adicionalmente, esta estratégia se adapta bem ao uso de técnicas ortogonais, como será visto no Capítulo 4.

Sempre que a restrição de desigualdade do problema (3.1) não está ativa, este se torna irrestrito, e sua solução é dada por:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k). \quad (3.3)$$

De outra maneira, quando o passo se torna restrito pelo atual valor do raio da região de confiança δ , pode ser mostrado que a solução é obtida resolvendo-se (NOCEDAL; WRIGHT, 1999):

$$\left(\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) + \lambda \mathbf{I} \right) \Delta \mathbf{x}(\lambda) = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \quad (3.4)$$

com $\|\Delta \mathbf{x}(\lambda)\| = \delta$ onde λ é o multiplicador de Lagrange (escalar) correspondente à restrição da região de confiança.

Com o intuito de aplicar estes resultados ao caso específico de EESP, verificamos inicialmente que, neste caso, a aproximação para a matriz Hessiana, $\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)$, e o vetor gradiente (x^k) são dados por:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \quad (3.5)$$

e

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = -\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z}. \quad (3.6)$$

Portanto, a solução do problema irrestrito (3.3) corresponde à equação normal de Gauss (2.6) enquanto que, quando o passo é restrito pela região de raio δ , a equação (3.4) torna-se

$$(\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} \quad (3.7)$$

Conforme mencionado na seção anterior, a equação (3.7) exhibe a mesma forma básica do método de Levenberg-Marquardt (L-M) para a solução de problemas não-lineares de mínimos quadrados (LEVENBERG, 1944), (MARQUARDT, 1963). Esta similaridade era esperada, visto que o método de Região de Confiança nasceu como uma implementação robusta do algoritmo obtido como resultado do trabalho de Levenberg e Marquardt. O algoritmo original de L-M utiliza entretanto uma lógica diferente para o ajuste de λ (MARQUARDT, 1963; RAO; TRIPATHY, 1980), a ser apresentado na próxima subseção.

O algoritmo básico para o método de Região de Confiança está sumarizado no Algoritmo 1 (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

No algoritmo 1, $\bar{\delta}$ representa o limite máximo do comprimento de passo. O raio δ^k é aumentado apenas se for verificado que há progresso suficiente com o modelo local e $\|\Delta \mathbf{x}^k\|$ alcançou o limite da região de confiança. Se o passo permanece estritamente dentro da região, pode se concluir que o valor de δ^k não está interferindo no progresso do algoritmo e portanto o seu valor permanece o mesmo para a próxima iteração.

O passo crucial no algoritmo acima é o cálculo de um $\lambda > 0$, o qual garanta que $\|\Delta \mathbf{x}(\lambda)\| \leq \delta$. Uma técnica eficiente para o cálculo de λ é a baseada no algoritmo de Moré e Sorensen (MORÉ; SORENSEN, 1985). Essa estratégia resulta em soluções *praticamente exatas*, com um custo computacional relativamente baixo. A base teórica para o cálculo de λ será apresentada nas próximas seções.

3.5 Equação de Levenberg-Marquardt

O algoritmo de Levenberg-Marquardt (L-M) é uma técnica iterativa para a determinação do mínimo de uma função multivariável expressa como a soma dos quadrados de funções não-lineares (LEVENBERG, 1944), (MARQUARDT, 1963), sendo bastante utilizado na solução

Dados $\bar{\delta} > 0$, $\delta^0 \in (0, \bar{\delta})$, e $\eta \in [0, \frac{1}{4}]$:

para $k = 0, 1, 2, \dots$

 Resolva a Equação (3.3) (Eq. (3.4) com $\lambda = 0$);

se $\|\Delta \mathbf{x}^k\| > \delta^k$:

 Defina $\Delta \mathbf{x}(\lambda) = -(\mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{g}$;

 Calcule

$\lambda > 0$ tal que $\|\Delta \mathbf{x}(\lambda)\| = \delta$;

$\Delta \mathbf{x}^k = \Delta \mathbf{x}(\lambda)$;

fim

 Calcule a razão de redução ρ_k (Eq. (3.2));

se $\rho_k < \frac{1}{4}$:

$\delta^{k+1} = \frac{1}{4} \|\Delta \mathbf{x}^k\|$; (*diminui região de confiança*)

se não

se $\rho_k > \frac{3}{4}$ e $\|\Delta \mathbf{x}^k\| = \delta^k$:

$\delta^{k+1} = \min\{2\delta^k, \bar{\delta}\}$; (*expande região de confiança*)

se não

$\delta^{k+1} = \delta^k$; (*mantém região de confiança*)

fim (se)

fim

se $\rho_k > \eta$:

$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$; (*atualiza solução*)

se não

$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k$; (*fica no mesmo ponto e tenta novamente*)

fim

fim

Algoritmo 1: Algoritmo básico para o método de Região de Confiança

de problemas não-lineares de mínimos quadrados. A característica essencial do método de L-M é a modificação da diagonal principal da equação normal (2.6) através da adição de um escalar a cada elemento da diagonal principal da matriz Ganho. A equação proposta por Levenberg pode ser sumarizada como:

$$[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \alpha \mathbf{D}_i] \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} \quad (3.8)$$

onde \mathbf{D}_i é a matriz diagonal cujos elementos são iguais aos elementos diagonais da matriz $[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$ e α é um escalar maior que zero. Uma das grandes desvantagens deste método é que, se o valor escolhido para α for muito grande, todo o esforço envolvido para o cálculo da matriz Hessiana será de pequeno ou nenhum uso. Marquardt, por sua vez, idealizou um algoritmo onde a diagonal da matriz Ganho recebe um reforço de um escalar λ , como mostrado a seguir:

$$[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}] \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} \quad (3.9)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e λ é um escalar maior que zero. É interessante ressaltar que Marquardt desenvolveu o seu trabalho sem o conhecimento do trabalho prévio de Levenberg.

Mesmo assim, a equação (3.9) passou a ser conhecida como equação de Levenberg-Marquardt (L-M).

Uma constatação importante sobre ambos os métodos é feita com respeito aos seus comportamentos. Escolhendo-se um escalar para reforço da matriz Hessiana (α ou λ) cujo valor tenda a zero, reverte-se a equação à forma original do método de Gauss-Newton, ao passo que com a escolha de valores elevados para α a equação assume a forma do método do Gradiente. Desse modo, estratégias adequadas para se estabelecer o valor de α podem permitir que se usufrua das vantagens dos dois métodos. Assim, quando a solução atual está longe da solução ótima, o uso de um valor elevado para α faz com que o algoritmo se comporte como o método do Gradiente, que tende a levar à convergência, mas pode ser demasiado lento. Por outro lado, quando a solução alcança a vizinhança da solução ótima, a adoção de um valor menor para α leva o algoritmo a se comportar como o método de Gauss-Newton.

É importante ressaltar que o método de L-M não é de nenhuma forma um método ótimo, mas sim heurístico. Mesmo assim permite obter resultados bastante satisfatórios na prática. A atualização de λ segue uma heurística baseada em uma razão entre uma redução real na função objetivo e uma redução prevista (RAO; TRIPATHY, 1980). Este mesmo modelo de atualização é utilizado nos métodos de Região de Confiança, porém neste caso o valor sujeito à alteração direta é δ ao invés de λ .

3.6 Algoritmo de Moré-Sorensen para o Cálculo de λ

Como citado anteriormente, um dos passos cruciais no algoritmo da Região de Confiança é o cálculo de um $\lambda > 0$ que garanta que $\|\Delta \mathbf{x}(\lambda)\| \leq \delta$. Diversos métodos podem ser empregados para se obter um valor de λ que cumpra a restrição de desigualdade acima citada. Nesse trabalho, optou-se pela utilização da estratégia de *Moré e Sorensen* (MORÉ; SORENSEN, 1985), que resulta em uma solução “praticamente exata”. O método de *Moré e Sorensen* será descrito a seguir.

Para se obter um passo viável quando a restrição do Problema (3.1) está ativa, definimos

$$\Delta \mathbf{x}(\lambda) = - \left(\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) + \lambda \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \quad (3.10)$$

Um valor suficientemente grande de $\lambda > 0$ é procurado tal que a matriz $\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) + \lambda \mathbf{I}$ é definida positiva e

$$\|\Delta \mathbf{x}(\lambda)\| = \delta \quad (3.11)$$

A primeira vista, a solução de

$$\phi_1(\lambda) \triangleq \|\Delta \mathbf{x}(\lambda)\| - \delta = 0, \quad (3.12)$$

pode ser obtida pelo método de Newton. Entretanto, ϕ_1 é uma função fortemente não-linear de λ . Essa não-linearidade pode ser demonstrada da seguinte maneira:

Sendo a matriz $\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)$ da equação (3.10) uma matriz simétrica, a mesma pode ser escrita da forma

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^t, \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ e \mathbf{T} é uma matriz ortogonal. Adicionalmente, seja λ_1 o menor autovalor de $\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)$ (que possui autovalores reais como consequência de sua simetria). Das equações (3.10) e (3.13), pode ser provado que $\Delta \mathbf{x}(\lambda)$ é dado por (MORÉ; SORENSEN, 1985), (NOCEDAL; WRIGHT, 1999)

$$\Delta \mathbf{x}(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{t}_j^t \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)}{\lambda_j + \lambda} \mathbf{t}_j \quad (3.14)$$

onde \mathbf{t}_j é a j -ésima coluna de \mathbf{T} e adicionalmente se leva em conta a ortogonalidade das colunas da matriz \mathbf{T} . Portanto

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{x}(\lambda)\|^2 &= \Delta \mathbf{x}(\lambda)^t \Delta \mathbf{x}(\lambda) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{(\mathbf{t}_j^t \mathbf{g}(\mathbf{x}^k))^2}{(\lambda_j + \lambda)^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Da equação (3.15), pode ser mostrado que, se $\lambda > -\lambda_j$, então existe apenas uma solução para a equação (3.11) (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Particularmente, se $\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)$ é definida positiva mas $\|\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)^{-1} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})\| > \delta$, existe um valor estritamente positivo de λ que satisfaz a equação (3.11). Nesse caso, o valor de λ estará no intervalo $(0, \infty)$. Se a matriz $\mathbf{G}(\mathbf{x}^k)$ é indefinida, e supondo que $\mathbf{t}_j^t \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \neq 0$, a solução está no intervalo $(-\lambda_1, \infty)$.

A Eq. (3.15) também indica que ϕ_1 é fortemente não-linear em λ , e portanto, a solução de (3.12) pelo método de Newton é pouco eficiente. Melhores resultados podem ser encontrados resolvendo-se a equação

$$\phi_2(\lambda) = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\|\Delta \mathbf{x}(\lambda)\|} = 0 \quad (3.16)$$

cujas soluções são claramente a mesma da equação (3.12). Considerando que ϕ_2 é aproximadamente linear próximo a solução λ , o método de Newton resulta

$$\phi_2(\lambda) \approx \phi_2(\lambda^k) + \phi_2'(\lambda^k) \delta\lambda$$

e deste modo

$$\Delta\lambda = -\frac{\phi_2(\lambda^k)}{\phi_2'(\lambda^k)} \quad (3.17)$$

tal que λ pode ser atualizado por

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta\lambda = \lambda^k - \frac{\phi_2(\lambda^k)}{\phi_2'(\lambda^k)} \quad (3.18)$$

com a primeira derivada ϕ_2' com respeito a λ dada por

$$\phi_2'(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\|\Delta\mathbf{x}\|} \right) \quad (3.19)$$

onde, com o fim de simplificar a notação, o argumento λ de $\Delta\mathbf{x}$ é omitido.

O lado direito da equação (3.19) pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\|\Delta\mathbf{x}\|} \right) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\|\Delta\mathbf{x}\|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\|\Delta\mathbf{x}\|^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{d\lambda} \|\Delta\mathbf{x}\|^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Da equação (3.15),

$$\frac{d}{d\lambda} \|\Delta\mathbf{x}\|^2 = -2\alpha(\lambda) \quad (3.21)$$

onde

$$\alpha(\lambda) \triangleq \sum_{j=1}^n \frac{\left(\mathbf{t}_j^t \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \right)^2}{(\lambda_j + \lambda)^3} = \frac{\Delta\mathbf{x}^t \Delta\mathbf{x}}{(\lambda_j + \lambda)} \quad (3.22)$$

Como os termos $(\lambda_j + \lambda)$ formam a diagonal da matriz $(\mathbf{\Lambda} + \lambda\mathbf{I})$, a equação (3.22) pode ser reescrita como

$$\alpha(\lambda) = \Delta\mathbf{x}^t \times \mathbf{M} \times (\mathbf{\Lambda} + \lambda\mathbf{I})^{-1} \times \mathbf{N} \times \Delta\mathbf{x} \quad (3.23)$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{N} são matrizes $n \times n$, e para consistência com as equações (3.22) e (3.23), $\mathbf{M} = \mathbf{T}$ e $\mathbf{N} = \mathbf{T}^t$.

Uma vez que

$$\mathbf{T}(\mathbf{\Lambda} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{T}^t = (\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) + \lambda\mathbf{I})^{-1}$$

então

$$\alpha(\lambda) = \mathbf{\Delta x}^t (\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) + \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Delta x} \quad (3.24)$$

Assumindo que a matriz $(\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) + \lambda\mathbf{I})$ está disponível na sua forma fatorada; que é,

$$(\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) + \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{U}^t \mathbf{D} \mathbf{U}$$

onde \mathbf{U} é uma matriz triangular superior com diagonal unitária e \mathbf{D} é uma matriz diagonal, a equação (3.24) pode ser expressa como

$$\alpha(\lambda) = \mathbf{\Delta x}^t \mathbf{U}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^{-t} \mathbf{\Delta x} = [\mathbf{U}^{-t} \mathbf{\Delta x}]^t \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U}^{-t} \mathbf{\Delta x}].$$

Definindo-se

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{U}^{-t} \mathbf{\Delta x}$$

então

$$\alpha(\lambda) = \tilde{\mathbf{q}}^t \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} = \|\mathbf{q}\|^2 \quad (3.25)$$

onde $\mathbf{q} \triangleq \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{q}}$.

Finalmente, a combinação das equações (3.20), (3.21) e (3.25) resulta

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\|\mathbf{\Delta x}(\lambda)\|} \right) = \|\mathbf{\Delta x}\|^{-3} \|\mathbf{q}\|^2$$

e dessa maneira

$$\phi_2'(\lambda) = -\|\mathbf{\Delta x}\|^{-3} \|\mathbf{q}\|^2 \quad (3.26)$$

De posse das equações (3.26) e (3.18) pode ser concluído que

$$\Delta\lambda = -\frac{\phi_2(\lambda^k)}{\phi_2'(\lambda^k)} = \frac{\|\mathbf{\Delta x}^k\|^{-1}}{\|\mathbf{\Delta x}^k\|^{-3} \|\mathbf{q}^k\|^2} \times \left(\frac{\|\mathbf{\Delta x}^k\| - \delta}{\delta} \right)$$

ou simplesmente

$$\Delta\lambda = \frac{\|\Delta\mathbf{x}^k\|^2}{\|\mathbf{q}^k\|^2} \times \left(\frac{\|\Delta\mathbf{x}^k\| - \delta}{\delta} \right) \quad (3.27)$$

Assim, a estratégia para atualizar λ pode ser sumarizada como:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{\|\Delta\mathbf{x}^k\|^2}{\|\mathbf{q}^k\|^2} \times \left(\frac{\|\Delta\mathbf{x}^k\| - \delta}{\delta} \right) \quad (3.28)$$

Dessa maneira, a equação (3.28) permite que se encontre iterativamente um valor para λ de modo que a restrição imposta pelo raio da região de confiança seja cumprida. Idealmente seriam utilizadas tantas iterações quantas forem necessárias para que o valor de λ se tornasse compatível uma dada tolerância. Na prática, entretanto, o número de iterações executadas como um laço iterativo secundário do método da Região de Confiança (Algoritmo 1) é limitado a um valor pré-definido, denotado por *itmaxms*. Em linhas gerais, pode-se definir os passos para implementação do método de Moré e Sorensen de acordo com o Algoritmo (2) a seguir:

Dados: $\delta > 0$, $\lambda^0 \geq 0$, *itmaxms*; matrizes \mathbf{R} e \mathbf{H} ,
vetor $\Delta\mathbf{z}$.

Para $k = 1 : itmaxms$

- Fatore $(\mathbf{G}(\mathbf{x}^k) + \lambda^k \mathbf{I}) = \mathbf{U}^t \mathbf{D} \mathbf{U}$;
- Resolva $(\mathbf{U}^t \mathbf{D} \mathbf{U}) \Delta\mathbf{x}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$;
- Resolva o sistema triangular inferior $(\mathbf{U}^k)^t \tilde{\mathbf{q}}^k = \Delta\mathbf{x}^k$;
- Calcule $\|\Delta\mathbf{x}^k\|^2 = \sum_{i=1}^n (\Delta\mathbf{x}^k)^2$;
- Calcule $\|\mathbf{q}^k\|^2 = \sum_{i=1}^n [(\tilde{\mathbf{q}}_i^k)^2 / d_{ii}^k]$;
- Atualize λ :

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{\|\Delta\mathbf{x}^k\|^2}{\|\mathbf{q}^k\|^2} \times \frac{\|\Delta\mathbf{x}^k\| - \delta}{\delta}$$

Fim

Algoritmo 2: Algoritmo para o método de Moré e Sorensen

3.7 Conclusões

Este capítulo apresenta a base teórica para o método da Região de Confiança. Como mostrado ao longo do texto, métodos de Região de Confiança podem ser vistos como uma

evolução dos algoritmos de Levenberg-Marquardt. Apesar de eficaz para grande parte dos problemas de mínimos quadrados não-lineares, o algoritmo de Levenberg-Marquardt é heurístico e pode falhar quando aplicado a problemas mal comportados. Métodos de Região de Confiança, por outro lado, promovem uma estratégia mais cuidadosa de ajuste do passo e tendem a ser mais robustos.

Um dos pontos-chaves para o sucesso na execução do método é a escolha de um raio adequado para a Região de Confiança. Com um raio muito pequeno, o algoritmo pode perder oportunidade de gerar avanços mais significativos em direção à solução ótima. Em contrapartida, um raio muito grande pode levar a soluções intermediárias muito distantes do minimizador da função objetivo, gerando a necessidade de uma nova tentativa de passo com um raio reduzido.

Alguns outros detalhes são também de fundamental importância para o desempenho do método, como os parâmetros para atualização do raio da Região de Confiança e o parâmetro para aceitação do passo atual. Por serem baseados em heurísticas, estes ajustes requerem uma certa sensibilidade para se obter a solução no caso de problemas mais críticos. Ainda assim, a execução com valores de uso comum na literatura é capaz de solucionar a maior parte dos problemas.

Capítulo 4

Implementação Ortogonal de Métodos de Região de Confiança

4.1 Introdução

Como apresentado no Capítulo 2, a utilização de métodos ortogonais para a solução de problemas de mínimos quadrados apresenta diversas vantagens, como a capacidade de evitar problemas numéricos devido ao mau condicionamento da matriz Ganho e, com o uso do método de Givens, a capacidade de processamento seqüencial de medidas. Nesse capítulo serão apresentadas estratégias de implementação de métodos de Região de Confiança através de técnicas ortogonais baseadas no método de rotações G3M. Serão consideradas duas alternativas, uma baseada na expansão da matriz Jacobiana para inclusão do coeficiente de Levenberg-Marquardt e outra baseada na utilização de informações *a-priori* sobre os estados, aqui denominadas, respectivamente, método da Refatoração- λ (PAJIC; CLEMENTS, 2003), (PAJIC; CLEMENTS, 2005) e método IAPE (SIMÕES COSTA; SALGADO; HAAS, 2007).

4.2 Método da Refatoração- λ

O método da Refatoração- λ leva em consideração que o coeficiente da matriz da equação de Levenberg-Marquardt (4.1), dada por

$$(\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} \quad (4.1)$$

pode ser reescrita como

$$\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^t & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \\ & \lambda^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ou, se definirmos

$$\tilde{\mathbf{H}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{R}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \\ & \lambda^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

então

$$\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{H}} \quad (4.4)$$

Assim, o efeito do termo extra $\lambda \mathbf{I}$ adicionado à matriz Ganho é equivalente a aumentar a matriz Jacobiana com linhas extras (obtidas da matriz identidade), sendo atribuídos a essas linhas pesos iguais a λ^{-1} . Similarmente ao que foi previamente feito para o método de mínimos quadrados (equação (2.20)), é também possível realizar uma fatoração ortogonal desta matriz aumentada, ou seja,

$$\tilde{\mathbf{Q}} \left(\tilde{\mathbf{R}}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}} \right) = \tilde{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H} \\ \lambda^{\frac{1}{2}} \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde $\tilde{\mathbf{Q}}$ é uma matriz ortogonal e $\tilde{\mathbf{U}}$ é uma matriz triangular superior de ordem $n \times n$.

Ainda que os desenvolvimentos acima sejam baseados no método clássico de Givens, os mesmos argumentos da Seção 2.5 podem ser empregados para concluir que a fatoração é também implementável através da versão de 3 multiplicadores (G3M).

A equação (4.5) sugere que a fatoração pode ser vista como a composição de 2 passos. No primeiro, as linhas da matriz Jacobiana original (ponderada pelo inverso dos desvios-padrão das medidas) são processadas pelo algoritmo G3M, da mesma forma já discutida em conexão com a equação (2.20). O segundo passo consiste em se aplicar rotações adicionais para se processar as linhas da matriz identidade ponderadas por $\lambda^{\frac{1}{2}}$.

Além disso, não é necessário que os passos acima sejam realizados simultaneamente. De fato, a divisão dos dois passos acima é computacionalmente vantajosa. Isto se dá porque, numa iteração principal do estimador de estados, várias iterações intermediárias para λ , como dado pela equação (3.28), são usualmente requeridas para se satisfazer a restrição da região de confiança. Uma vez que durante as iterações intermediárias a matriz \mathbf{H} permanece constante e apenas λ varia, o primeiro passo da fatoração é realizado apenas uma vez, enquanto o segundo passo é executado o mesmo número de vezes em que λ é atualizado. Da mesma forma, se \mathbf{U} é uma matriz triangular produzida pela fatoração de \mathbf{H} no primeiro passo, então $\tilde{\mathbf{U}}$ é obtida como

$$\mathbf{Q}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda^{\frac{1}{2}} \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Estando \mathbf{U} já disponível, \mathbf{Q}_1 leva em consideração apenas as rotações de Givens adicionais necessárias para *retriangularizar* a matriz aumentada no lado esquerdo da equação (4.6), através do processamento das linhas da matriz diagonal $\lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{I}$.

O passo final do método da Refatoração- λ é o cálculo de $\Delta\mathbf{x}$ a ser usado na equação (3.28) para se gerar um λ que garanta o cumprimento da restrição da região de confiança. Utilizando a matriz $\tilde{\mathbf{U}}$ da equação (4.6) e o vetor \mathbf{e} , proveniente da triangularização realizada no passo principal (equação (2.20)), pode-se obter o vetor de incrementos $\Delta\mathbf{x}$ através da solução do sistema linear dado por

$$\tilde{\mathbf{U}}\Delta\mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{e} \quad (4.7)$$

De maneira sucinta, o método da Refatoração- λ pode ser descrito pelo Algoritmo 3 a seguir:

Dado $\lambda_{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}$

1. Calcule $\lambda_{\mathbf{k}+1}$ (equação (3.28));
2. Execute a Retriangularização de \mathbf{U} com as linhas da matriz identidade ponderadas por $\lambda_{\mathbf{k}+1}$ (equação (4.6));
3. Calcule vetor de incrementos $\Delta\mathbf{x}$ e verifique se a condição (3.11) é atendida;
 - 3.1 Em caso negativo, faça $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$, $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda_{\mathbf{k}+1}$ e retorne ao passo 1;
 - 3.2 Em caso afirmativo, fim.

Algoritmo 3: Algoritmo para o método da Refatoração- λ

4.3 Método IAPE

Como apresentado na Subseção 2.5.2, o método de rotações G3M possibilita que informações de estado *a priori* sejam eficientemente processadas. Essa capacidade intrínseca de processamento de informações de estado *a priori* pode ser utilizada para a solução da equação de Levenberg-Marquardt (L-M), equação (4.1). A relação entre a equação de L-M e o processamento de informações *a priori* através de estimadores baseados em mínimos quadrados será estabelecida na seqüência.

A equação (2.13) permite a estimação de estados considerando-se as informações *a priori*. Por conveniência, esta equação é reproduzida abaixo:

$$[\mathbf{H}^t\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{P}^{-1}]\Delta\mathbf{x} = \mathbf{H}^t\mathbf{R}^{-1}\Delta\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\Delta\bar{\mathbf{x}} \quad (4.8)$$

Observa-se que a equação (4.8), que fornece estimativas na presença de informações de estado *a priori*, e a equação de L-M (4.1) apresentam similaridades evidentes. De fato, pode ser visto que a equação (4.1) pode ser obtida de (4.8) fazendo-se

$$\mathbf{P}^{-1} = \lambda \mathbf{I} \quad (4.9)$$

e

$$\Delta \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

Esse resultado indica que um estimador de estados capaz de eficientemente processar dados *a priori* pode ser utilizado para resolver a equação de L-M, equação (4.1). A equação (4.9) pode ainda nos levar a mais conclusões. Como visto na Subseção 2.3.1, a matriz \mathbf{P} representa a incerteza quanto às informações *a-priori*. Utilizando a relação da equação (4.9) e atribuindo $\lambda = 0$, teremos que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{P} \rightarrow \infty$. A interpretação deste resultado indica que, neste caso, há total incerteza em relação às informações *a-priori*. Além disso, quando λ assumir um valor positivo maior que zero teremos que $\mathbf{P} = \lambda^{-1} \mathbf{I}$ e portanto a incerteza sobre as informações *a-priori* será finita.

A comparação das equações (4.1) e (4.8) nos permite portanto concluir que uma solução ortogonal para a equação L-M (3.7) pode ser obtida com o uso do estimador de estados G3M dotado de capacidade de processamento de informações *a priori* sobre os estados. Isto é equivalente a dizer que as repetidas soluções da equação L-M requeridas pelo algoritmo de Região de Confiança para se chegar a um valor adequado de λ podem ser obtidas graças à capacidade do método de rotações G3M de processar informações *a priori* sobre os estados.

Para tirar proveito das observações acima, fazemos uso das equações (2.32) e (4.9) e simplesmente inicializamos os fatores de peso para as linhas da matriz triangular \mathbf{U} como

$$d_i = \lambda, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

Adicionalmente, a informação de estado *a priori* deve ser definida de acordo com a equação (4.10). A execução da estimação de estados G3M como definida na Seção 2.5 considerando este esquema de inicialização resultará na solução desejada para a equação de L-M.

Uma consideração adicional deve ser feita sobre a estratégia utilizada no método IAPE. Ao contrário do que acontece no método da Refatoração- λ , o método IAPE não permite que a fatoração da matriz de coeficientes seja separada em duas etapas. Com isso, uma refatoração completa da matrix de coeficientes será exigida a cada passo da busca por um λ candidato.

O Algoritmo 4 abaixo é o algoritmo básico que descreve o método IAPE.

4.4 Comparação qualitativa dos métodos propostos

Nas Seções 4.2 e 4.3 foram descritas duas estratégias distintas para combinar o conceito de regiões de confiança e implementações ortogonais de estimadores de estados para sistemas

Dado $\lambda_{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$:

1. Calcule $\lambda_{\mathbf{k}+1}$ (equação (3.28));
2. Inicialize $d_i = \lambda_{k+1}$, $i = 1, \dots, n$ (4.11) e execute a triangularização de \mathbf{U} ;
3. Calcule vetor de incrementos $\Delta \mathbf{x}$ e verifique se a condição (3.11) é atendida;
 - 3.1 Em caso negativo, faça $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda_{\mathbf{k}+1}$ e retorne ao passo 1;
 - 3.2 Em caso afirmativo, fim.

Algoritmo 4: Algoritmo para o método IAPE

de potência. Em ambos os casos, a metodologia baseada no conceito de regiões de confiança requer a definição dinâmica do raio da região durante o processo iterativo a qual, às custas de algum esforço computacional extra, leva a significantes melhoras na capacidade de convergência do estimador de estados.

A principal diferença entre essas estratégias se reflete na maneira de aplicação das rotações de Givens durante o processo iterativo. No método da Refatoração- λ , a matrix \mathbf{H} não se altera durante o processo iterativo para a escolha de λ . Conseqüentemente o primeiro passo, dado pela equação (2.20), é realizado apenas na iteração principal do método da Região de Confiança (algoritmo 1). O segundo passo, descrito pela equação (4.6), consiste em se aplicar a fatoração QR a uma matriz aumentada. Isto é realizado através da rotação das linhas de uma matriz diagonal sobre a matriz triangular superior \mathbf{U} calculada no primeiro passo. O fato de \mathbf{U} estar previamente disponível e a natureza diagonal da matriz cujas linhas serão rotacionadas reduzem significativamente o custo computacional requerido pela fatoração QR no segundo passo.

Em contrapartida, o método IAPE trabalha apenas com a matrix $\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}$, não necessitando dessa maneira de uma matriz aumentada. Além disso, seu processo de fatoração utiliza completamente a capacidade do método G3M de processar informações *a priori*. Entretanto, a concepção do método IAPE não permite o desacoplamento de matrizes propiciado pelo método da Refatoração- λ . Isto quer dizer que as rotações devem ser aplicadas desde o começo cada vez que um novo valor de λ estiver disponível. Conseqüentemente, mesmo com a esperada melhoria da robustez numérica do método IAPE pela utilização de informações *a priori*, pode-se esperar um incremento no custo computacional, amplificado pela dimensão do sistema sob estudo, como resultado da necessidade da reaplicação completa das rotações para a matrix Jacobiana ponderada a cada iteração do método IAPE.

4.5 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os métodos da Refatoração- λ e o método IAPE. Ambos utilizam técnicas ortogonais e são baseados no método de rotações G3M. Mais especificamente, os métodos lidam com as iterações internas do algoritmo do método de Regiões de Confiança

para encontrar um λ compatível com o valor corrente de raio desta região. Conforme visto no Capítulo 3, esta busca é baseada na técnica desenvolvida por Moré e Sorensen.

No método da Refatoração- λ o processo de fatoração pode ser dividido em duas partes. Na primeira, apenas a matriz Jacobiana é fatorada. Esse passo é dado durante a iteração principal do método de Região de Confiança, sendo as rotações resultantes da fatoração armazenadas. Na segunda parte, apenas matrizes identidade ponderadas por λ são fatoradas, quantas vezes isto for necessário para se garantir o cumprimento da restrição de dimensão da região de confiança.

No método IAPE, não existe a necessidade de se fatorar uma matriz estendida, como no método da Refatoração- λ . Em contrapartida, toda a matriz Jacobiana ponderada deverá ser fatorada sempre que um novo λ for encontrado. Visivelmente, este método é o que utilizará o maior número de operações para ser realizado, conduzindo portanto a um maior custo computacional.

Apesar da informação acima citada, não se pode presumir que um método terá vantagem sobre o outro apenas baseado no número de operações necessárias para que o mesmo seja completado. Mais detalhes sobre o desempenho de ambos os métodos serão apresentados nos próximos capítulos.

Capítulo 5

Aspectos Computacionais

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores foram descritos os métodos necessários para se obter uma implementação de um estimador de estados baseado no método de Região de Confiança através de técnicas ortogonais. Nesse capítulo, serão descritos os aspectos computacionais e os detalhes de implementação destes métodos, iniciando pelas etapas básicas de um estimador de estados convencional baseado no método de Gauss-Newton e estendendo-se até as etapas internas da implementação ortogonal do método de Região de Confiança.

Na Seção 5.2 serão descritas as etapas de implementação de um Estimador de Estados baseado no método de Gauss-Newton. As etapas principais da implementação ortogonal dos métodos de Região de Confiança via rotações G3M serão apresentadas na Seção 5.3. Ainda nesta seção serão introduzidos os esquemas de ordenação e esparsidade utilizados na implementação dos métodos desenvolvidos, sendo mais detalhados na Seção 5.3.2. A Seção 5.4 apresentará os passos para a implementação das etapas básicas do método de Regiões de Confiança.

5.2 Etapas de implementação de um Estimador de estados baseado no método de Gauss-Newton Convencional

Como apresentado no Capítulo 2, um dos métodos mais comumente utilizados no processo de EESP é o método de Gauss-Newton ou da Equação Normal. Foi visto que o método faz uma aproximação para a matriz Hessiana, de modo a tornar sua implementação mais simples, além de proporcionar um certo ganho computacional, admitindo para isso um possível aumento no número de iterações até a convergência.

O processo de EESP pelo método de Gauss-Newton pode ser sumarizado nos seguintes passos (MONTICELLI, 1999), (ABUR; EXPÓSITO, 2004):

1. Determinar a estrutura das matrizes Jacobiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ e da matriz Ganho $[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$, bem como a ordenação da matriz Ganho;
2. Arbitrar uma estimativa inicial para o vetor de estados $\hat{\mathbf{x}}^0$;
3. Calcular os valores numéricos das matrizes $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)$ e $[\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)]$ e dos vetores $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^k)$ e $\mathbf{b} = \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}^k)^t \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z}$;
4. Fatorar a matriz Ganho $[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}] = \mathbf{L} \mathbf{L}^t$;
5. Resolver o sistema linear $\mathbf{L} \mathbf{L}^t \Delta \hat{\mathbf{x}}^k = \mathbf{b}$;
6. Atualizar o vetor de estados $\hat{\mathbf{x}}^{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^k + \Delta \hat{\mathbf{x}}^k$;
7. Verificar se os critérios de convergência são atendidos. Em caso afirmativo, determinar os valores correntes para as variáveis do sistema de acordo com as novas estimativas e finalizar o processo iterativo. Em caso negativo, continuar;
8. Incrementar o contador de iterações $k = k + 1$ e retornar ao passo 3.

De acordo com o passo 1, devemos encontrar as estruturas simbólicas da matriz Jacobiana e da matriz Ganho. Isto será realizado apenas uma vez, visto que a estrutura das matrizes não será alterada durante o processo iterativo, deste modo agilizando o processo computacional pois várias soluções da equação normal serão requeridas. A determinação da estrutura e ordenação das matrizes, aliada ao uso de técnicas de armazenamento compacto resulta em grande otimização do custo computacional requerido pelo método, diminuindo os requerimentos de memória e a quantidade de operações necessárias.

No passo 2, uma estimativa inicial é feita para o vetor de estados. Usualmente, os valores escolhidos para a inicialização do vetor de estado são $1,0 pu$ para valores de magnitude de tensão e $0,0 rad$ para valores de ângulos de tensão. Outra alternativa é fazer uso de uma estimativa passada obtida de execução prévia do estimador de estados.

No passo 4, a fatoração da matriz Ganho é necessária devido ao alto custo computacional envolvido na operação de inversão de matrizes (PRESS *et al.*, 1992), possivelmente agravados pelo mau condicionamento numérico da matriz Ganho. Nos passos acima, a fatoração da matriz Ganho é realizada através do método de Cholesky, que é vantajoso quando aplicado a matrizes simétricas e definidas positivas (GOLUB; LOAN, 1989). Um aspecto importante que também deve ser levado em consideração é a utilização de técnicas que exploram a esparsidade de matrizes. Tais técnicas são conjugadas a esquemas de ordenação, com o intuito de se obter uma redução na quantidade de enchementos decorrentes da fatoração da matriz em questão (defini-se como enchimento o aparecimento de valores em determinadas posições da matriz

que eram originalmente nulas antes da fatoração). Os métodos de ordenação mais comumente utilizados em problemas de sistemas de potência são os métodos Tinney I, II e III (TINNEY; WALKER, 1967).

No passo 7, verificamos se os critérios de convergência são atendidos. Usualmente se compara o valor da norma do vetor de incrementos de estados com um tolerância pré-definida. Essa comparação também pode ser realizada com o valor da norma do vetor gradiente, que é um bom indicador de convergência. Como regra geral, define-se um número máximo de iterações permitidas como salvaguarda para finalizar o método em caso de dificuldade de convergência..

Como descrito no Capítulo 2, é possível manter a matriz Jacobiana constante após um certo número de iterações, devido ao fato da mesma apresentar variações praticamente desprezíveis quando a solução atual está próxima da solução real. Essa prática pode reduzir consideravelmente o esforço computacional empregado no método. A escolha por manter a matriz Jacobiana constante deve ser feita antes do passo 3. Com esta opção ativa, apenas os vetores $\Delta \mathbf{z}$ e \mathbf{b} necessitam ser recalculados. Portanto um desvio deve ser introduzido no algoritmo do passo 3 para o passo 5, isto é, omite-se o passo 4.

5.3 Etapas principais da implementação de métodos de Região de Confiança via G3M

Na seção anterior, foram apresentados os passos para a implementação de um estimador de estados baseado na equação Normal (Método de Gauss-Newton). Estruturalmente, a principal diferença entre a implementação do método de Gauss-Newton e uma implementação ortogonal, como o método G3M, está no fato dos métodos ortogonais evitarem o cálculo da matriz Ganho para a determinação do vetor de incrementos de estados. No método G3M, essa determinação é feita com a obtenção de uma matriz triangular superior como resultado da aplicação de rotações sobre a matriz Jacobiana ponderada através do método de Givens de três multiplicadores. Dessa maneira, os passos desenvolvidos na Seção 5.2 podem ser facilmente alterados para se utilizar o método G3M.

Como apresentado no Capítulo 4, pode-se obter uma implementação do método de Regiões de Confiança através do método de rotações G3M. Na sequência, serão detalhados os passos principais que definem tal implementação.

5.3.1 Descrição do Algoritmo

Os passos para a implementação do método de Região de Confiança através das rotações G3M são os seguintes:

1. Definir parâmetros do método G3M: $itmax$, $itjcb$. Atribuir $k = 0$;
2. Definir parâmetros para o método de Região de Confiança: $\bar{\delta} > 0$, $\delta^0 \in (0, \bar{\delta})$, e $\eta \in [0, \frac{1}{4}]$;
3. Determinar a estrutura da matriz Jacobiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$;
4. Arbitrar uma estimativa inicial para o vetor de estados $\hat{\mathbf{x}}^0$;
5. Calcular $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^k)$ e $\Delta \mathbf{z}^k = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^k)$;
6. Calcular valores iniciais para a função objetivo e para o modelo quadrático: $J_0 = (\Delta \mathbf{z}^0)^t R^{-1} \Delta \mathbf{z}^0$ e $m_0 = J_0$;
7. Se $k \leq itcjb$, calcular valores numéricos para a matriz Jacobiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$;
8. Executar ordenação da matriz Jacobiana;
9. Aplicar rotações G3M:

- Se $k \leq itjcb$:

$$\mathbf{Q} \left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} \left[\mathbf{H} \mid \Delta \mathbf{z} \right] \right) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U} & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{e} \end{array} \right]$$

- Se $k > itjcb$:

$$\mathbf{Q} \left(\mathbf{R}^{-\frac{1}{2}} [\Delta \mathbf{z}] \right) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{c} \\ \mathbf{e} \end{array} \right]$$

10. Resolver $\mathbf{U} \Delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}$;
11. Calcular $p = \|\Delta \hat{\mathbf{x}}\|$;
12. Se $p > \delta$:
 - Aplicar método de Moré e Sorensen para escolha de um passo que respeite a região de confiança;
13. Calcular a razão de redução definida por ρ_k :
 - $\rho_k = \frac{J(\mathbf{x}^k) - J(\mathbf{x}^{k+1})}{m(\mathbf{x}^k) - m(\mathbf{x}^{k+1})}$;
14. Aplicar regras de atualização do raio da região de confiança de acordo com ρ_k ;
15. Aplicar regra de atualização da solução de acordo com o valor de η ;
16. Verificar critérios de convergência: Em caso afirmativo, fim. Em caso negativo, continuar;

17. Atribuir $\mathbf{k} = \mathbf{k} + \mathbf{1}$ e retornar ao passo 7;

No passo 1 são definidos os valores para $itmax$, $itjcb$, onde $itmax$ representa o número máximo de iterações para o processo de estimação de estados, e $itjcb$ o número de iterações nas quais a matriz Jacobiana será atualizada. Uma vez alcançada a iteração $itjcb$ (passo 7), a matriz Jacobiana será mantida constante. Como visto nos capítulos anteriores, o fato de se manter a matriz Jacobiana constante reduz consideravelmente o esforço computacional, porém essa prática deve ser empregada com cautela a problemas de difícil solução nos quais a escolha de $itjcb = itmax$ é mais indicada. Neste trabalho, optou-se pela utilização de $itmax = 30$ e, quando utilizado, $itjcb = 3$.

No passo 2, são definidos valores para os parâmetros do método de Região de Confiança. Um dos parâmetros mais importantes é δ^0 , que definirá o raio inicial da região de confiança. Como regra geral, define-se δ^0 de modo que o primeiro passo dado pelo estimador esteja dentro do raio da região de confiança, ou seja, não se aplica nenhuma restrição ao passo inicial. Uma maneira de assegurar essa condição é atribuir o valor de δ^0 após o passo 11, fazendo $\delta^0 = p$. Neste caso, o mesmo valor pode ser atribuído para $\bar{\delta}$. O valor de η ditará se no final de uma iteração o incremento de estados será incorporado à solução corrente ou se o mesmo será descartado. Como podemos ver no Algoritmo 1, o valor de η é utilizado para comparação com o valor de ρ . Pela teoria apresentada, sabemos que valores positivos para ρ indicam progressão na solução. Dessa maneira, para problemas de difícil convergência, pode ser necessário a diminuição do valor de η , ou até mesmo inicializar-se $\eta = 0$, para se tirar proveito de possíveis melhorias na solução.

Logo após, no passo 3, determina-se a estrutura da matriz Jacobiana. Para tal, percorre-se a lista compacta que armazena a estrutura da rede elétrica em questão. Por tratarem-se de dados estáticos, que não serão alterados no decorrer do processo iterativo, toda a informação sobre a estrutura de rede do sistema utilizado é armazenada na forma de uma lista de adjacências. Listas de adjacências são facilmente implementadas e tornam a busca por informações um processo extremamente rápido. A estrutura da matriz Jacobiana, por sua vez, é armazenada na forma de uma lista encadeada. Em uma lista encadeada, os dados são armazenados em uma estrutura de células, onde cada célula contém informações sobre o próximo item da lista. Listas encadeadas, ao contrário das listas de adjacências, podem ser expandidas à qualquer momento, adicionando-se os dados recentes ao final da lista existente. A determinação da estrutura da matriz Jacobiana será executada apenas uma vez, tendo em vista que a mesma não será alterada. Outras matrizes utilizadas no decorrer do processo iterativo, como a matriz \mathbf{U} , obtida no passo 9, serão também armazenadas na forma de listas encadeadas.

Para o valor inicial do vetor de estimativas de estados, usa-se a mesma abordagem utilizada no método de Gauss-Newton, inicializando os valores das estimativas de magnitude de tensão como 1.0 pu e os valores de ângulos de tensão como 0.0 rad (partida plana). Outra

possibilidade é a de se utilizar a solução de uma execução anterior como entrada para as estimativas de estado. Esta última alternativa, que caracteriza o chamado *estimador rastreador*, é bastante válida quando utilizada para sistemas que são executados periodicamente, pois espera-se que a nova solução seja muito próxima da solução antiga.

No passo 6 determina-se os valores iniciais para a função objetivo e para o modelo quadrático. Esses valores são necessários pois serão utilizados no cálculo da figura de mérito ρ . Para o cálculo de J_k emprega-se a equação (2.5), enquanto m_k é dado por

$$m_k = [\Delta \mathbf{z}^k - \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{x}}]^t \mathbf{R}^{-1} [\Delta \mathbf{z}^k - \mathbf{H} \Delta \hat{\mathbf{x}}] \quad (5.1)$$

Pela equação (5.1) podemos ver que no passo que antecede a primeira iteração teremos $\Delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, portanto m_0 assume o valor de J_0 . Nas iterações futuras, o cálculo de m_k deve ser realizado por completo, porém com o uso das rotações G3M esse valor é obtido como subproduto do processo de EESP, sendo encontrado na posição $n + 1$ do vetor \mathbf{d} .

A etapa 8 consiste na ordenação da matriz Jacobiana, e será detalhada na Seção 5.3.2. Na etapa seguinte, o método G3M é aplicado à matriz \mathbf{H} ponderada e aumentada pelo vetor $\Delta \mathbf{z}$, conforme a equação (2.20). Nesta etapa do processo de EESP, o método G3M deve ser executado levando em consideração que $\lambda = 0$. Como visto na equação (4.11), esta consideração pode ser feita inicializando-se $\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Com a execução do método G3M, o vetor de incrementos $\Delta \hat{\mathbf{x}}$ é encontrado pela simples solução por substituição inversa do sistema dado pela equação (2.21).

Após o cálculo do vetor de incrementos de estados $\Delta \hat{\mathbf{x}}$ chega-se ao ponto em que a resposta inicial é testada para se verificar a necessidade ou não da utilização do método de Região de Confiança. É importante frisar que até esse momento, todos os passos tomados são os mesmos utilizados em uma implementação G3M normal. Percebe-se portanto que o método de Região de Confiança apenas será acionado quando necessário. Essa necessidade pode surgir quando o método for aplicado a problemas com forte instabilidade numérica e problemas de convergência. Desse modo, para problemas bem comportados, o método de Região de Confiança deverá passar incógnito, sendo mantidos apenas os passos principais dados pelo método G3M. Se o teste realizado no passo 12 retornar positivo, o método de Moré e Sorensen deverá ser aplicado para se encontrar um passo que respeite a restrição do raio da região de confiança. Como visto anteriormente, o método de Moré e Sorensen pode ser aplicado com o uso do método da Refatoração- λ ou com o método IAPE. Por serem passos cruciais para a implementação, essa etapa do desenvolvimento será detalhada na Seção 5.4.

No passo 13 é calculada a razão de redução ρ . Da teoria apresentada no Capítulo 3 sabemos que ρ indica a qualidade do último passo tomado, guiando a atualização do raio da região de confiança δ e servindo como critério de aceitação de passo. Portanto, do cálculo correto de ρ depende todo o bom funcionamento do método de Região de Confiança. De acordo com as implementações realizadas, o uso de ρ como parâmetro de atualização mos-

trou bons resultados, refletindo fielmente o comportamento do problema. Para casos com problemas de convergência, o valor calculado para ρ em várias iterações foi menor do que a tolerância especificada para o mesmo, resultando em diminuição da região de confiança e descarte do passo calculado. Em casos onde não se manifestaram problemas de convergência, ρ foi suficientemente grande para que a região de confiança fosse mantida ou expandida e para que o passo calculado fosse acrescentado à solução atual. Os valores para as tolerâncias inferior e superior para ρ foram valores encontrados heurísticamente, sendo usualmente 1/4 e 3/4 (MORÉ; SORENSEN, 1985), (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Tais valores mostraram bom funcionamento prático. Ainda assim, a alteração dos mesmos por valores mais eficazes não é descartada, ainda que não testada nesse trabalho.

Os critérios de convergência utilizados para a implementação do método de Região de Confiança via G3M são basicamente os mesmos utilizados para a implementação do método de Gauss-Newton mostrado na seção anterior, realizando a comparação da norma do vetor de incrementos de estados com uma tolerância pré-especificada, sendo usualmente utilizado o valor 1×10^{-3} .

5.3.2 Ordenação para preservar a esparsidade

Um passo muito importante e que não foi abordado até o momento é a utilização de esquemas de ordenação das matrizes utilizadas nas rotações de Givens. Como visto no Capítulo 3, a retriangularização da matriz \mathbf{H} muda a estrutura da linha que está sendo rotacionada bem como a estrutura da linha da matriz \mathbf{U} . Quando uma nova linha de \mathbf{H} é rotacionada com uma linha específica de \mathbf{U} , ambas assimilam o padrão de esparsidade da união dessas linhas. Além disso, o padrão de esparsidade muda após cada rotação e como consequência os enchimentos em \mathbf{U} tendem a aumentar, assim como o número necessário de rotações para a retriangularização da matriz Jacobiana, definindo-se por enchimentos os valores de uma matriz que mudam de nulos para um valor não-nulo durante a execução de um algoritmo. Para manter-se esses enchimentos dentro de limites aceitáveis, é praticamente obrigatório que um esquema de ordenação conveniente de linhas e colunas seja utilizado (SIMÕES COSTA, 1981).

Os métodos de ordenação existentes podem ser divididos em dois grupos: métodos dinâmicos (VEMPATI; SLUTSKER; TINNEY, 1991) e métodos estáticos ou de ordenação "*a priori*" (DUFF, 1974). Os esquemas dinâmicos são baseados nos mesmos critérios utilizados nos métodos desenvolvidos por Tinney e Walker (TINNEY; WALKER, 1967), e apresentam resultados satisfatórios na conservação da esparsidade (VEMPATI; SLUTSKER; TINNEY, 1991). Nesse trabalho, entretanto, optou-se pela utilização do esquema de ordenação "*a-priori*" descrito em (DUFF, 1974) e (SIMÕES COSTA, 1981).

O método de ordenação "*a-priori*" utilizado consiste em dois estágios. No primeiro estágio, as colunas da matriz em questão são arranjadas em ordem ascendente de contagem de

colunas, onde o termo contagem de colunas (linhas) é definido como o número de elementos não-nulos na coluna (linha) em questão (DUFF, 1974). No segundo estágio, para cada coluna, o pivô será o elemento não-nulo dessa coluna correspondente à linha com menor contagem de linhas. As colunas remanescentes são arranjadas em ordem ascendente de número de colunas. Esses passos são facilmente implementáveis no estimador de estados em desenvolvimento, visto que a estrutura da matriz Jacobiana é determinada explicitamente. Além disso, dos métodos testados em (DUFF, 1974), este geralmente obtém os melhores resultados.

O uso de técnicas de ordenação reduz expressivamente o esforço computacional requerido no uso das rotações G3M para fatoração da matriz Jacobiana. Uma matriz na ordem natural, usualmente, irá requerer um maior número de operações para ser fatorada e ocasionará um maior número de enchiamentos. Quanto maior for o número de enchiamentos resultantes da fatoração, maior será o número de operações necessárias para se operar a matriz resultante, aumentando dessa forma a possibilidade de acúmulos de erros de arredondamento e contribuindo para a deterioração do resultado.

5.4 Implementação das etapas básicas

A etapa mais importante dentro do algoritmo do método de Região de Confiança (Algoritmo (1), Capítulo 3) consiste em se encontrar uma solução para a equação (3.10) que satisfaça a condição dada pelo raio da região de confiança, como visto na equação (3.11). Neste trabalho, optou-se pela utilização do método de Moré e Sorensen para tal fim, cujas etapas são descritas no Algoritmo (2) do Capítulo 3. A solução do método de Moré e Sorensen é encontrada através de um processo iterativo, que requer a retriangularização da matriz \mathbf{U} a cada vez que um novo valor para λ for calculado. Esta etapa de processamento está localizada no passo 12 descrito na Seção 5.3. Como pode ser visto, ao se alcançar esta etapa o algoritmo G3M já realizou pelo menos uma triangularização da matriz Jacobiana. Desse modo, existirão informações suficientes para que ambos os métodos descritos na seqüência sejam executados. Nesta seção, ao fazermos referência ao processo iterativo dos métodos, isto estará relacionado ao processo iterativo do laço interno para a busca de λ , não devendo ser confundido com o processo iterativo principal do algoritmo.

Para a realização da etapa de retriangularização da matriz \mathbf{U} , foram testadas as duas alternativas descritas no Capítulo 4, denominadas método da Refatoração- λ e método IAPE. As etapas de implementação desses métodos são descritas a seguir.

5.4.1 Implementação das etapas do método da Refatoração- λ

O método da Refatoração- λ foi apresentado em detalhes na Seção 4.2. Como já descrito, este método permite que o processo de fatoração da matriz Jacobiana \mathbf{H} , aumentada pela matriz $\lambda^{1/2}\mathbf{I}$ oriunda da equação de Levenberg-Marquardt, seja realizado em duas partes. Desse

modo, realiza-se a fatoração da matriz \mathbf{H} apenas uma vez, aplicando sobre a matriz triangular \mathbf{U} obtida da fatoração prévia as rotações necessárias para se incorporar a matriz $\lambda^{1/2}\mathbf{I}$ ao resultado. A implementação das etapas do método da Refatoração- λ pode ser resumizada nos passos a seguir:

1. Definir parâmetros do método: *itmaxms*. Atribuir $\lambda = 0$, $k = 0$;
2. Realizar a cópia da matriz \mathbf{U} para a matriz \mathbf{U}_0 ;
3. Incrementar contador de iterações $k = k + 1$;
4. Verificar se as restrições dadas pelo raio da região de confiança δ e pelo máximo número de iterações *itmaxms* estão ativas;
5. Calcular um novo valor para λ ;
6. Realizar a rotação da matriz $\lambda^{1/2}\mathbf{I}$ sobre a matriz \mathbf{U} ;
7. Calcular vetor de incrementos $\Delta\mathbf{x}$;
8. Restaurar a cópia da matriz \mathbf{U}_0 para a matriz \mathbf{U} ;
9. Retornar ao passo 3.

No passo 1 são definidos os parâmetros para o método. O valor *itmaxms* é definido de forma que o processo iterativo para a busca de λ seja concluído dentro de um número limitado de iterações. Comumente, o valor calculado para λ se encontra dentro de uma tolerância de convergência após três iterações internas (MOREÉ; SORENSEN, 1985; NOCEDAL; WRIGHT, 1999), portanto pode-se utilizar *itmaxms* = 3 com a obtenção de bons resultados (PAJIC; CLEMENTS, 2005).

No passo seguinte, realiza-se uma cópia da matriz \mathbf{U} atualmente armazenada para a matriz \mathbf{U}_0 . É de vital importância que se preserve esta cópia, pois os valores da matriz \mathbf{U} sofrerão alterações durante cada iteração interna, devido às rotações das linhas matriz $\lambda^{1/2}\mathbf{I}$ sobre a mesma. Ao final de toda iteração, o conteúdo original da matriz \mathbf{U} deverá ser restaurado, fazendo com que cada iteração se inicie com a matriz \mathbf{U} contendo os valores das rotações das linhas da matriz Jacobiana, armazenadas em \mathbf{U}_0 .

No passo 4, executa-se uma verificação nas restrições dadas pelo raio da região de confiança δ e pelo máximo número de iterações *itmaxms*. Esta etapa é condicional e poderá marcar o fim do processo iterativo. As condições exigidas neste caso são: $k > itmaxms$ ou $\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \delta$.

O cálculo do valor de λ é realizado no passo 5, de acordo com a equação (3.28). De posse de um valor para λ , pode-se realizar as rotações das linhas da matriz $\lambda^{1/2}\mathbf{I}$ sobre as rotações existentes na matriz \mathbf{U} . Na seqüência, o valor para o vetor de incrementos $\Delta\mathbf{x}$ pode ser calculado, levando o algoritmo novamente ao passo 3.

5.4.2 Implementação das etapas do método IAPE

Como visto na Seção 4.3, o método IAPE leva em conta a capacidade intrínseca do algoritmo G3M de processar informações *a-priori* para encontrar uma solução para equação de Levenberg-Marquardt. Isto é realizado inicializando-se os fatores de peso da matriz \mathbf{U} como $d_i = \lambda$ e realizando a fatoração completa da matriz Jacobiana. Na seqüência estão detalhados os passos que definem tal implementação:

1. Definir parâmetros do método: *itmaxms*. Atribuir $\lambda = 0$, $k = 0$;
2. Incrementar contador de iterações $k = k + 1$;
3. Verificar se as restrições dadas pelo raio da região de confiança δ e pelo máximo número de iterações *itmaxms* estão ativas;
4. Calcular um novo valor para λ ;
5. Realizar a rotação da matriz \mathbf{H} , inicializando-se os fatores de peso $\mathbf{d} = \lambda$;
6. Calcular vetor de incrementos $\Delta \mathbf{x}$;
7. Retornar ao passo 3.

Os passos 1, 2 e 3, que já foram discutidos na subseção anterior, levam em conta a inicialização das variáveis para o método bem como os dispositivos de controle do algoritmo.

No passo 4, um valor para λ é calculado, levando em consideração as informações existentes oriundas do algoritmo G3M. Na seqüência, a etapa que dá nome ao método é realizada. Toda a informação sobre a matriz Jacobiana é mantida, e a única alteração realizada consiste na inicialização das linhas vetor \mathbf{d} com o valor de λ calculado no passo anterior. Feita esta inicialização, as rotações G3M podem ser aplicadas para se realizar a triangularização da matriz Jacobiana. Realizada a triangularização, resolve-se o sistema linear resultante para a obtenção do vetor de incrementos $\Delta \mathbf{x}$ e retorna-se ao passo 3.

5.5 Conclusões

Este capítulo apresentou os aspectos da implementação computacional dos métodos desenvolvidos e aplicados neste trabalho. A implementação de um estimador de estados clássico baseado na solução da equação Normal foi também apresentada, para fins de comparação com a implementação dos métodos desenvolvidos. Conforme descrito, o método clássico pode ser implementado de maneira mais simples do que os demais métodos apresentados, porém seu funcionamento pode ser afetado de diversas maneiras, sendo portanto o seu uso não indicado para aplicações reconhecidamente adversas para a convergência do estimador.

O método de Regiões de Confiança, por sua vez, necessita de uma implementação mais elaborada, como pode ser visto na Seção 5.3. Neste trabalho, a implementação do método de Regiões de Confiança foi realizada em conjunto com a implementação de um estimador de estados ortogonal G3M. Desse modo, fica clara a necessidade de se obter uma sólida implementação do método G3M como passo anterior à implementação do método de Regiões de Confiança, uma vez que este último pode ser inserido no algoritmo do estimador G3M sem a necessidade de grandes alterações estruturais.

Na implementação do método de Regiões de Confiança percebe-se que, para a obtenção de um funcionamento adequado, o método depende fortemente dos parâmetros utilizados na sua inicialização. Portanto, a escolha de valores para o raio da região de confiança δ , para o parâmetro η que dita a aceitação dos incrementos do vetor $\Delta \mathbf{x}$, e para os limites utilizados em conjunto com o parâmetro ρ , podem ser vitais para que se garanta o bom funcionamento do método. Como mostrado no desenvolvimento deste trabalho, esses parâmetros são, em sua maioria, definidos heurísticamente, cabendo portanto o ajuste dos mesmos de acordo com o problema em questão.

A implementação das etapas básicas do método de Regiões de Confiança também foi abordada. Da Seção 5.4 pode-se perceber que a implementação do método IAPE, quando utilizado em conjunto com o algoritmo G3M, torna-se bastante simples, visto que se pode utilizar boa parte das estruturas já existentes no método G3M. A utilização do método da Refatoração- λ , por sua vez, requer a introdução de algumas alterações no método G3M. Este é o caso da aplicação de rotações à matriz Jacobiana na forma aumentada e do armazenamento de uma cópia das rotações originais da matriz Jacobiana antes de cada iteração interna.

Outro aspecto que não pode passar despercebido é a utilização de técnicas que exploram a esparsidade. Seja aplicado à um estimador baseado na equação Normal ou à uma implementação ortogonal de regiões de confiança, o uso de técnicas de esparsidade pode levar a uma redução expressiva do esforço computacional requerido para a solução dos métodos citados. Por serem facilmente implementados em conexão com os métodos, o uso de técnicas de esparsidade se torna portanto um aspecto mandatório em qualquer implementação.

Capítulo 6

Resultados Numéricos

6.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo uma comparação quantitativa das estratégias para a solução de problemas de EESP baseadas em regiões de confiança, conforme descrito nas Seções 4.2 e 4.3, denominados método da Refatoração- λ e método IAPE. Como referência, são também apresentados resultados da execução do estimador de estados baseado no método G3M (Seção 2.5.2). Todo o código dos programas desenvolvidos foi escrito na linguagem Fortran e executado em ambiente Unix.

Os resultados numéricos foram obtidos realizando-se a estimação de estados através dos métodos descritos acima para um sistema de 6 barras e para os sistemas-teste do IEEE de 30, 118 e 300 barras. Os dados de ramos e barras para os sistemas do IEEE bem como os diagramas de unifilares podem ser encontrados em (UNIVERSITY OF WASHINGTON, 2008). Os dados para o sistema-teste de 6 barras estão disponíveis no Apêndice A. Os conjuntos de medidas para os sistemas utilizados foram compostos de 15, 73, 403 e 911 medidas respectivamente, resultando em correspondentes redundâncias de 1.36, 1.23, 1.71 and 1.52. Esses conjuntos de medidas englobam medidas de fluxo de potência ativa e reativa nos ramos, injeções de potência ativa e reativa nas barras e magnitude de tensão em barras, e foram gerados com a adição de erros aleatórios com distribuição normal aos resultados de fluxos de potência convergidos para os sistemas citados.

Todos os estimadores foram inicializados com perfis planos de tensão. Buscando uma redução no esforço computacional exigido para a realização de operações de fatoração durante as execuções, a opção de se utilizar esquemas de ordenação de matrizes foi ativada.

Para se avaliar o desempenho dos estimadores de estados baseados em regiões de confiança em termos da taxa de convergência do processo iterativo do problema de EESP e também de esforço computacional, erros de modelagem significativos foram inseridos nos conjuntos de dados. Assim, foram inseridos dados analógicos espúrios, erros topológicos, ou ambos. Em

adição, em alguns casos os sistemas de potência foram levados a condições de operação mais severas através do aumento dos respectivos carregamentos.

Sabe-se que a combinação de dados analógicos espúrios e uma condição de grande carregamento produzem condições desafiadoras para a convergência do processo iterativo do problema de EESP. O critério de convergência utilizado para todos os casos é baseado na norma da diferença entre duas estimativas consecutivas, isto é, o máximo incremento nas estimativas de estados. Uma tolerância de 1×10^{-3} foi adotada. Para uma melhor percepção da performance dos estimadores de estados testados, foram apresentadas a evolução na norma do vetor gradiente e da função objetivo através das iterações. Em alguns casos, para melhora da visualização de alguns gráficos, escalas semi-logarítmicas foram utilizadas.

6.2 Sistema de 6 barras

A Figura 6.1 mostra o sistema de testes de 6 barras com o correspondente conjunto de medidas utilizado.

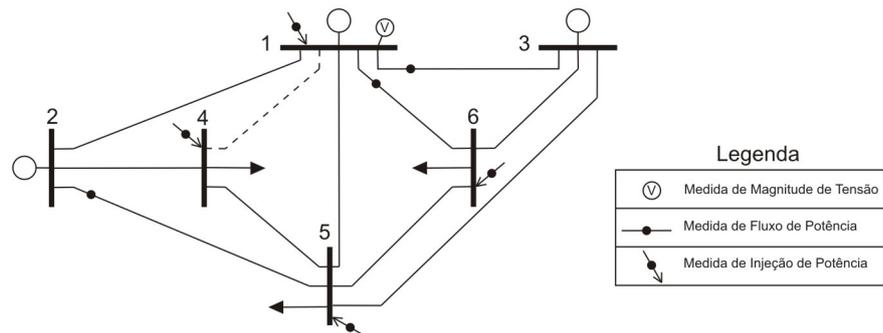


Figura 6.1: Sistema teste de 6 barras com proposto esquema de medição

O plano de medição é composto de medidas ativas e reativas de injeção de potência nas barras 1, 4, 5 e 6, fluxos de potência ativa e reativa nas linhas de transmissão 1-3, 1-6 e 2-5, e uma medida de tensão na barra 1. A Tabela 6.1 relaciona o total de medidas empregadas e apresenta a redundância de medidas obtida.

Tabela 6.1: Total de medidas e redundância do sistema de 6 barras

Magnitude de tensão	1
Injeções de potência	8
Fluxo de potência	6
Total	15
Redundância	1,36

O primeiro teste busca uma comparação na precisão dos resultados produzidos pelos métodos baseados na região de confiança com respeito aos resultados obtidos com a execução do estimador G3M. Por esse motivo, nenhum erro de modelagem ou condição de operação extrema foi considerado. Adicionalmente, por se tratar de um sistema de pequeno porte, esperam-se resultados idênticos para ambas as implementações baseadas em regiões de confiança abordadas nesta dissertação, e portanto apenas o método IAPE foi simulado. As Figuras 6.2 e 6.3 mostram as somas ponderadas dos quadrados dos resíduos e as normas dos vetores gradiente e dos incrementos de estados gerados por ambos estimadores. Como se pode perceber dos gráficos, todos os estimadores convergem em três iterações e percorrem trajetórias similares até a solução ótima. No caso dos estimadores baseados em regiões de confiança, pode ser concluído que o raio da região de confiança é efetivamente ajustado pelo algoritmo da Seção 3.3 para prevenir ações de controle desnecessárias que poderiam ter afetado a taxa de convergência.

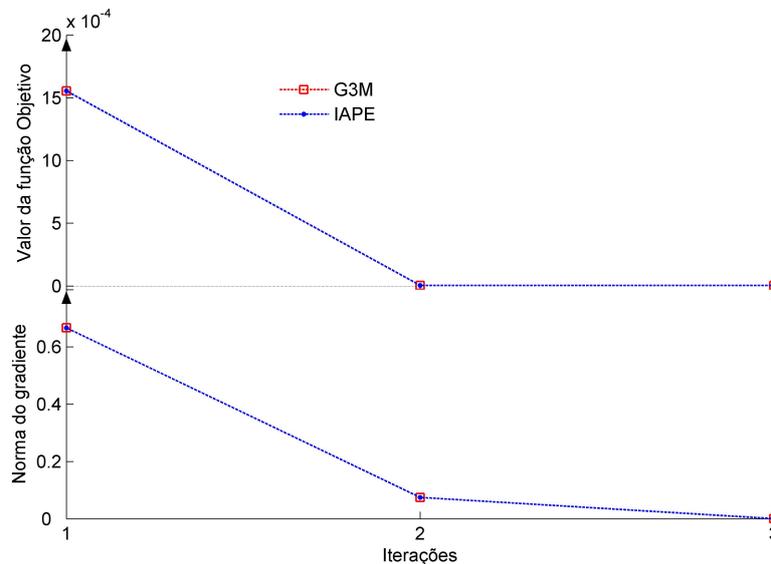


Figura 6.2: Sistema 6 barras - Vetor gradiente e função objetivo: ausência de dados espúrios

O próximo passo consiste em se introduzir erros grosseiros simultâneos nas medidas de injeção de potência ativa e reativa tomadas na barra 1. Em adição, um erro topológico de exclusão é simulado envolvendo o ramo 1-4 do sistema, como pode ser visto em tracejado na Figura 6.1.

A Figura 6.4 mostra a evolução da norma do gradiente e a soma ponderada dos quadrados dos resíduos durante o processo iterativo para ambos os estimadores, sob a influência dos erros de modelagem. Pode ser visto que após algumas iterações o método G3M diverge, como consequência de resíduos extremamente altos. A Figura 6.5 mostra que o mesmo ocorre com a norma do vetor de incrementos de estados. Em contrapartida, o estimador baseado na região de confiança não apenas evita a divergência do processo iterativo, mas também promove o decréscimo permanente dos valores da função objetivo através das iterações. É importante

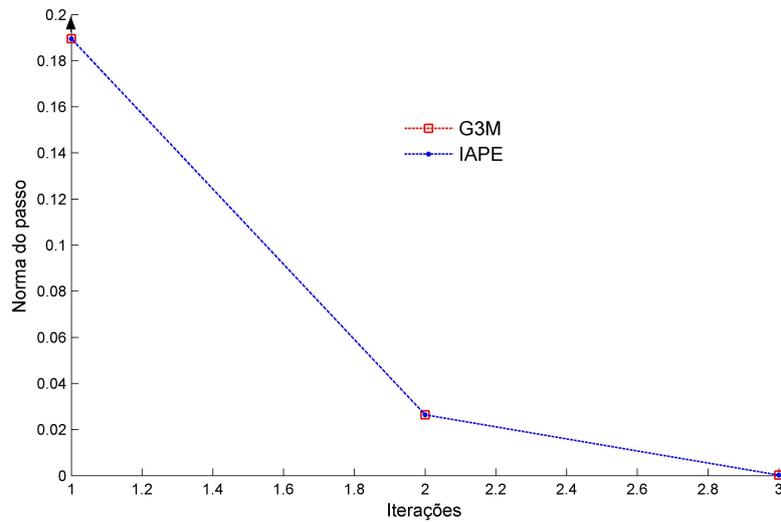


Figura 6.3: Sistema 6 barras - Vetor de incremento de estados: ausência de dados espúrios

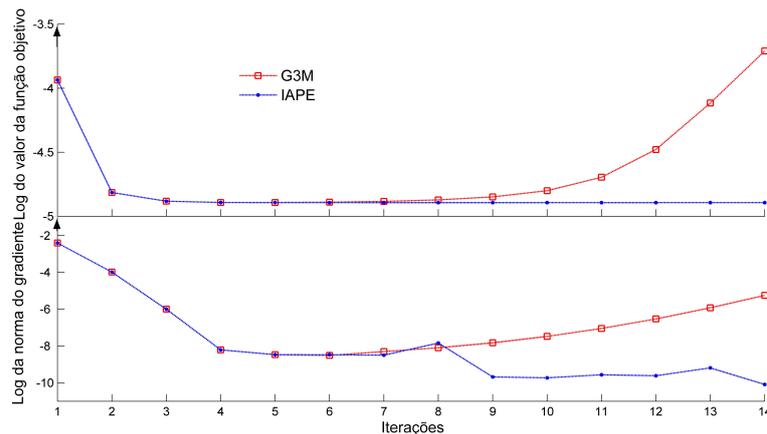


Figura 6.4: Sistema 6 barras - Vetor gradiente e valor da função objetivo: medidas espúrias e erros topológicos

lembrar que a soma ponderada dos quadrados dos resíduos compõe a Figura de mérito em que se baseia o cálculo do raio da região de confiança. Dessa maneira, se o raio da região de confiança é corretamente definido, tal índice deve decrescer continuamente. A norma do vetor gradiente, deixando de lado algumas ocasionais oscilações, acaba por se tornar menor do que a tolerância especificada, sendo que essa condição deve ser efetivamente satisfeita para se obter convergência. Deve-se perceber também que o gráfico vai até a décima quarta iteração apenas por questões de visualização. A norma do vetor dos incrementos de estados decresce até que o critério de convergência é satisfeito, como indicado na Figura 6.5.

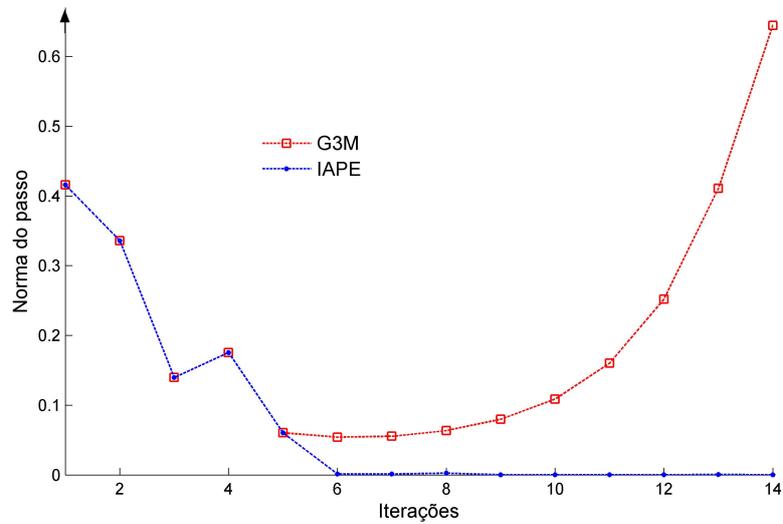


Figura 6.5: Sistema 6 barras - Vetor de incremento de estados: medidas espúrias e erros topológicos

6.3 Sistema de 30 barras

A Figura 6.6 mostra o sistema de testes de 30 barras com o respectivo plano de medição utilizado. O plano de medição é composto por medidas de magnitudes de tensão, injeções de potência ativa e reativa e fluxos de potência ativa e reativa, com o montante de medidas utilizadas e a resultante redundância sendo listados na Tabela 6.2.

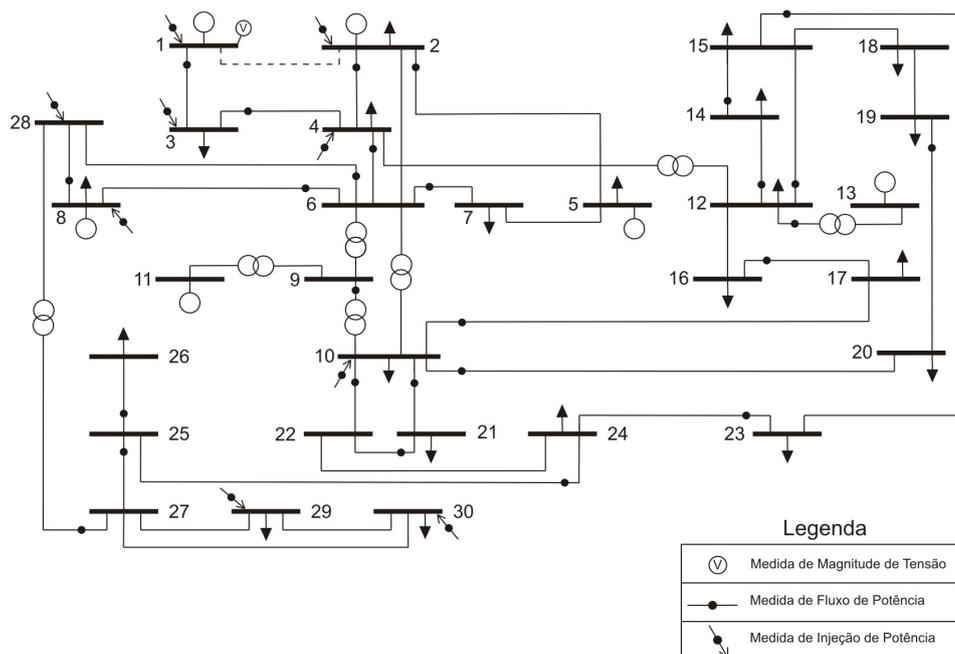


Figura 6.6: Sistema teste de 30 barras com proposto esquema de medição

Tabela 6.2: Total de medidas e redundância do sistema de 30 barras

Magnitude de tensão	1
Injeções de potência	18
Fluxo de potência	54
Total	73
Redundância	1,24

O caso baseado no sistema de 30 barras considera um ponto de operação severo gerado por um aumento uniforme de cargas ativas em todas as barras. Em adição, uma medida analógica espúria e um erro de topologia são introduzidos no conjunto de dados disponível ao estimador de estados, sendo o erro topológico representado pela retirada do ramo 1-2, conforme linha tracejada na Figura 6.6. A combinação de tais fatores produz duras condições para o estimador de estados convergir.

Os testes conduzidos nesse sistema tem como objetivo a comparação das trajetórias geradas por ambas as implementações baseadas em regiões de confiança em direção a uma possível solução convergida. Os resultados são apresentados na Tabela 6.3 e indicam que ambas as implementações baseadas em regiões de confiança seguem o mesmo caminho até alcançarem convergência. Tal comportamento era esperado, já que as diferenças entre o método IAPE e o método da Refatoração- λ residem apenas na forma em que a fatoração ortogonal é aplicada durante os passos internos do algoritmo da região de confiança. Adicionalmente, o algoritmo para se calcular λ é o mesmo para ambos os métodos.

Tabela 6.3: Processo iterativo: Sistema de 30 barras

Métodos IAPE e Refatorização- λ		
Passo Principal	Passos Internos	Valor de λ
1	1	0
2	3	7.43×10^3
3	2	4.71×10^3
4	1	1.82×10^3
5	1	7.74×10^2
6	1	2.60×10^2
7	1	0
8	2	7.35×10^3
9	1	3.60×10^3
10	1	0
11	2	6.16×10^2
12	1	3.21×10^2
13	1	0
14	2	6.35×10^2

Na Tabela 6.3, referimos por *laço principal* o laço interno em que os incrementos do vetor de variáveis de estados são calculados, enquanto que o *laço interno* compreende os passos necessários para se definir o raio da região de confiança. Um valor zero atribuído a λ em um passo interno significa que o passo gerado pelo método de Gauss-Newton foi utilizado em sua totalidade, isto é, não há necessidade de ajustar o raio da região de confiança para restringir o tamanho do passo. A Tabela mostra que um passo completo de Gauss-Newton é utilizado durante os passos principais 1, 7, 10 e 13. Em contrapartida, um valor para λ diferente de zero indica que o passo tomado foi limitado pelo raio da região de confiança. Por exemplo, no segundo passo principal três passos internos foram necessários para se encontrar λ igual a 7.43×10^3 , valor que veio a garantir que o passo fosse limitado pelo raio da região de confiança. Dessa maneira pode-se ver também que o número de passos internos necessários para se calcular λ estará associado com a dimensão atual do raio da região de confiança.

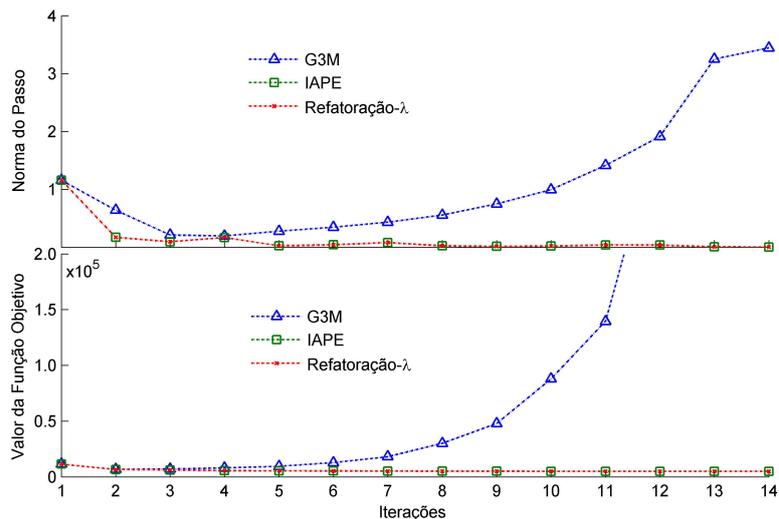


Figura 6.7: Sistema 30 barras - norma do vetor de incrementos de estados e função objetivo

Outros aspectos quantitativos considerados na comparação dos métodos ortogonais baseados em regiões de confiança foram as evoluções da função objetivo e dos incrementos nas variáveis de estado durante as iterações. A Figura 6.7 mostra a norma do vetor de incrementos das variáveis de estados e a soma ponderada dos quadrados dos resíduos (referidas como "norma do passo" e "valor da função objetivo") resultante dos três estimadores para o sistema de 30 barras. Novamente observamos que, devido a grandes resíduos resultantes da presença de erros de modelagem, o estimador G3M não alcança convergência. Em contrapartida, ambos os estimadores baseados em regiões de confiança utilizam quatorze iterações para alcançar a convergência para os mesmos valores, seguindo caminhos similares até a solução ótima. Novamente, a convergência pode ser atribuída ao controle efetivo do raio da região

de confiança. A soma ponderada dos quadrados dos resíduos decresce de forma constante e a norma do passo, apesar de algumas oscilações ocasionais, se torna ao final menor do que a tolerância especificada, satisfazendo assim o critério de convergência.

6.4 Sistemas de 118 barras

O sistema de 118 barras utilizado é apresentado na Figura 6.8, com o plano de medição utilizado sendo mostrado na Tabela 6.4. A Tabela 6.5 apresenta o total de medidas utilizadas e a redundância de medidas alcançada. Da mesma forma que nos casos anteriores, uma condição mais severa de convergência foi simulada para os estimadores de estados em uso com o sistema de 118 barras. Neste caso, essa condição foi alcançada através da introdução de um erro topológico severo afetando um importante corredor de transmissão dado pelo ramo 8-30, conforme linha tracejada na Figura 6.8.

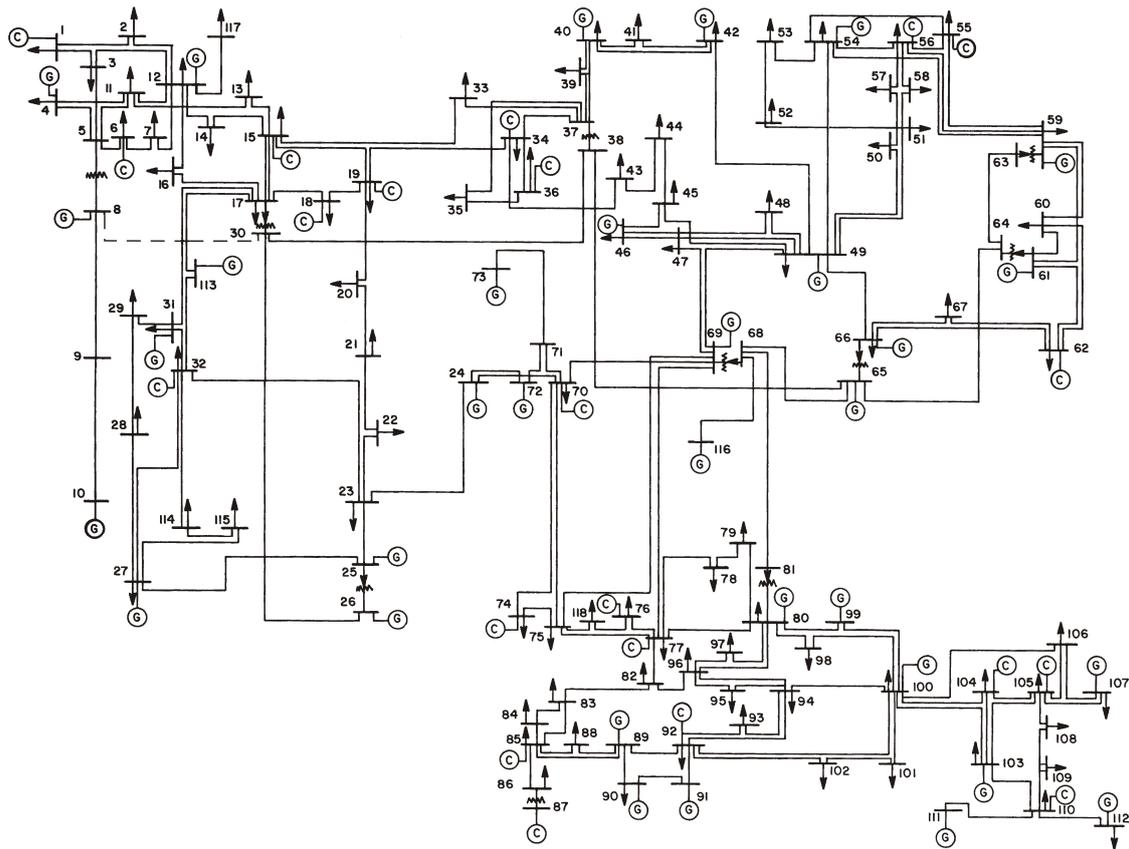


Figura 6.8: Sistema teste de 118 barras

Tabela 6.4: Plano de Medição - Sistema 118 barras

Tipo de medida	Localização
Magnitude de Tensão	Barras: 1
Injeção de Potência	Barras: 1, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 17, 22, 30, 31, 37, 44, 54, 59, 66, 71, 76, 94, 100
Fluxo de Potência	Ramos: Todos os ramos, partindo do ramo A para o ramo B, com exceção ramos 27, 43 e 49 (medidos em ambas extremidades)

A Figura 6.9 mostra a evolução do incremento das variáveis de estado e da soma ponderada dos quadrados dos resíduos ao longo das iterações para o sistema de teste. A análise do gráfico nos conduz a conclusões similares às encontradas nos casos prévios. Mais uma vez, o estimador G3M convencional falhou na obtenção de convergência em ambos os casos, como se pode deduzir dos gráficos de resultados para os sistemas em questão. A execução do método ortogonal IAPE resultou em convergência após seis iterações para o sistema de 118 barras ao passo que o método da Refatoração- λ obteve convergência após nove iterações.

Tabela 6.5: Total de medidas e redundância do sistema de 118 barras

Magnitude de tensão	1
Injeções de potência	40
Fluxo de potência	362
Total	403
Redundância	1,71

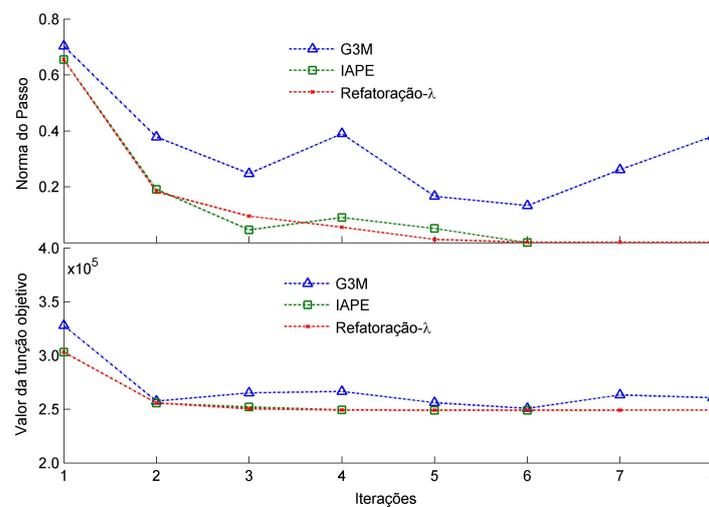


Figura 6.9: Sistema 118 barras - norma do vetor de incrementos de estados e função objetivo

6.5 Sistemas de 300 barras

Devido às dimensões do sistema, a figura que representa o sistema de 300 barras foi omitida, estando disponível em (UNIVERSITY OF WASHINGTON, 2008). O plano de medição utilizado para a realização das simulações com este sistema pode ser visto na Tabela 6.6, sendo o total de medidas e a redundância resultantes apresentados na tabela 6.7. Para o sistema de 300 barras, o estimador de estados foi submetido a condições mais severas através do aumento do carregamento do sistema até um ponto bastante elevado, fora dos padrões normais de operação, sem a necessidade de inserção de erros de topologia.

Tabela 6.6: Plano de Medição - Sistema 300 barras

Tipo de medida	Localização
Magnitude de Tensão	Barras: 1, 27, 29, 30, 31, 32, 41, 81, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 121, 161, 201, 209, 211, 212, 213, 214, 241
Injeção de Potência	Barras: 1, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 41, 81, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 121, 161, 201, 209, 211, 212, 213, 214, 261
Fluxo de Potência	Ramos: Todos os ramos, partindo do ramo A para o ramo B

Tabela 6.7: Total de medidas e redundância do sistema de 300 barras

Magnitude de tensão	27
Injeções de potência	66
Fluxo de potência	818
Total	911
Redundância	1,52

A Figura 6.10 mostra a evolução do incremento das variáveis de estado e da soma ponderada dos quadrados dos resíduos ao longo das iterações para o sistema de 300 barras. Novamente, pode-se concluir que ambas implementações baseadas em região de confiança tiveram sucesso em alcançar convergência, ao passo em que o método G3M convencional divergiu. A execução do método ortogonal IAPE resultou em convergência após quatro iterações para o sistema de 300 barras, e após três iterações para o método da Refatoração- λ . A Figura 6.10 também mostra que os estimadores baseados em regiões de confiança são capazes não só de superar problemas causados por dados analógicos espúrios, mas também problemas causados por carregamentos não usuais.

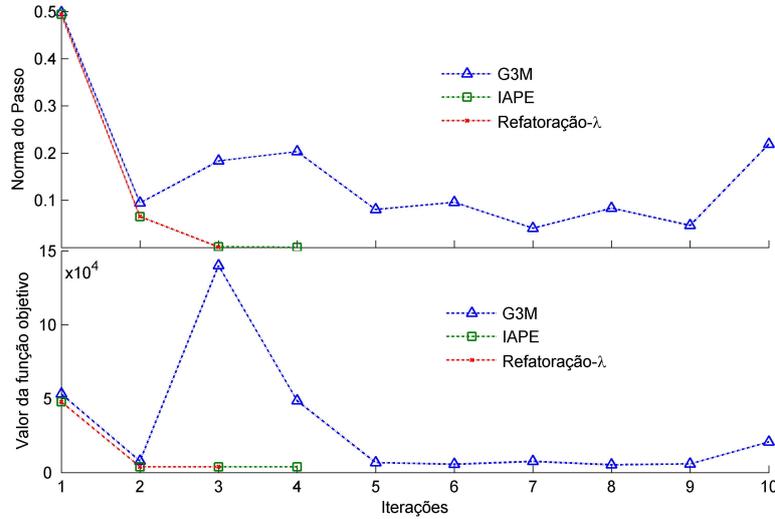


Figura 6.10: Sistema 300 barras - norma do vetor de incrementos de estados e função objetivo

6.6 Comparação de desempenho numérico

Para se realizar uma avaliação do esforço computacional requerido pelos estimadores de estados ortogonais baseados em regiões de confiança testados nesse trabalho, optou-se por determinar os tempos de CPU requeridos por ambos os métodos IAPE e da Refatoração- λ quando aplicados aos sistemas-teste e realizar uma comparação dos tempos obtidos. Os testes foram realizados em um computador com processador Pentium 4 de 2.0 Ghz e com 1 GB de memória RAM. Como era esperado, para o sistema de 6 barras os tempos de execução foram muito baixos, tornando qualquer esquema de medição de tempo de CPU inviável para se realizar a comparação desejada. Posteriormente, como antecipado pela análise qualitativa realizada na Seção 4.4, os resultados do sistema de 30 barras confirmaram que a estratégia utilizada pelo método IAPE é vantajosa quando aplicada a sistemas de pequeno porte. Entretanto, com o aumento do tamanho do sistema e da redundância de medição, o método da Refatoração- λ tende a superar a estratégia IAPE, como pode ser visto claramente nos índices de performance computacional obtidos para os sistemas de 118 e 300 barras. Os tempos obtidos com a execução dos programas desenvolvidos para os sistemas aqui analisados são apresentados na Tabela 6.8.

6.7 Conclusões

Dos resultados obtidos com a execução dos estimadores de estados ortogonais baseados em regiões de confiança propostos, observa-se que ambos alcançaram seus objetivos plenos,

Tabela 6.8: Tempo de execução para os sistemas analisados (segundos)

Sistema	IAPE	Refatoração- λ
6 barras	-	-
30 barras	0,487	0,727
118 barras	7,481	4,820
300 barras	62,730	34,306

ou seja, foram capazes de fornecer uma solução para casos que não obtiveram convergência quando executados com um estimador de estados convencional. Dessa forma, pode-se concluir que ambos os métodos IAPE e da Refatoração- λ são soluções viáveis para utilização em sistemas que sofram com problemas de não-convergência.

Todos os casos-teste foram concebidos de maneira a adicionar grandes dificuldades ao processo iterativo, através da adição de medidas analógicas espúrias, erros topológicos e grandes carregamentos. O pressuposto é de que todas estas situações podem vir a ocorrer em um contexto real, e aqui se nota então a grande valia dos métodos propostos.

Conforme visto nos resultados obtidos, o método da Refatoração- λ mostrou-se superior em relação do método IAPE quando ambos são aplicados a sistemas de grande/médio porte. Mesmo se obtendo a mesma solução em ambas as implementações, o método IAPE seria o menos indicado para a utilização em sistemas reais que superem em número de barras os sistemas utilizados nesse trabalho, uma vez que o mesmo apresentou um custo computacional mais elevado quando comparado ao método da Refatoração- λ . Entretanto, a utilização do método IAPE não deve ser descartada, pois conforme foi visto durante todo o desenvolvimento, a implementação do mesmo é visivelmente menos trabalhosa, especialmente quando utilizada em conjunto com estimadores de estados G3M.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

Esta dissertação teve como foco principal o estudo e implementação de estimadores de estados robustos baseados em implementações ortogonais do método de Regiões de Confiança através de rotações de Givens.

As principais metodologias para a solução do problema de EESP foram abordadas. Foi mostrado como o método de Gauss-Newton pode falhar sob condições não-usuais de operação, devido ao acúmulo de erros de arredondamento na fatoração da matriz ganho. Foram apresentados métodos ortogonais para a solução do problema de EESP, dando especial atenção aos métodos baseados em Rotações de Givens. Dentre os métodos ortogonais estudados, a variante de rotações de Givens G3M mostra-se a mais apta para a utilização no trabalho proposto.

Esta dissertação também demonstra como os métodos de Regiões de Confiança podem ser vistos como uma evolução do algoritmo de otimização de Levenberg-Marquardt e como os métodos de Regiões de Confiança podem ser inseridos no problema de EESP. Duas estratégias para a solução dos métodos de Regiões de Confiança foram utilizadas, uma baseada na expansão da matriz Jacobiana para a inclusão do coeficiente de Levenberg-Marquardt, denominada método da Refatoração- λ , e outra baseada na utilização de informações *a-priori* sobre os estados, denominada método IAPE.

Os métodos de Regiões de Confiança desenvolvidos mostram-se aptos para a solução de problemas que não obtiveram convergência quando executados por estimadores de estados ortogonais convencionais. Desta maneira, pode-se afirmar que a utilização de métodos de Regiões de Confiança adiciona robustez significativa aos estimadores de estados, tornando-os

capazes de lidar com problemas mal-condicionados e/ou com dificuldades de convergência. Esta afirmação é evidenciada pelos resultados numéricos obtidos através da simulação de severas condições de operação nos diversos sistemas-teste utilizados.

Outra constatação feita neste trabalho indica que os métodos de Regiões de Confiança são fortemente dependentes dos parâmetros utilizados na sua execução, em especial do raio da região de confiança. A escolha inadequada do raio inicial pode comprometer o funcionamento do método, tendo-se concluído que a atribuição do valor inicial do raio da região de confiança de modo a assegurar que o primeiro passo do estimador de estados não seja restringido é uma boa solução.

Dentre os métodos desenvolvidos, o método IAPE mostra-se o de mais fácil implementação, por tirar proveito da capacidade intrínseca do estimador G3M de processar informações *a-priori* sobre os estados. Em contrapartida, o método da Refatoração- λ demandou maiores alterações para a sua implementação, especialmente por dividir o processo de retriangularização em duas partes. Ambos os métodos mostraram-se aptos, visto que seu funcionamento foi comprovado em todos os casos a que foram submetidos. Após a realização das simulações com sistemas-teste, através das quais foram apurados os tempos de execução de cada método, pode-se concluir que o método da Refatoração- λ constitui-se na melhor alternativa, pois seus tempos de execução tendem a ser menores que os tempos do método IAPE. Esta diferença fica mais acentuada com o aumento de dimensão dos sistemas utilizados.

De forma geral, os resultados obtidos comprovam a eficiência dos métodos de Regiões de Confiança analisados, ilustrando todo o potencial desta metodologia para o melhoramento das ferramentas de apoio à operação de sistemas de potência em tempo real.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Investigações mais aprofundadas acerca dos métodos utilizados nesta dissertação podem ser feitas com o intuito de se buscar melhorias de desempenho computacional e numérico. Outras investigações podem ainda ser conduzidas na análise de resultados, objetivando a compreensão de eventuais casos de mau comportamento nos casos estudados. São sugeridos os seguintes temas para trabalhos futuros:

- Análise de resíduos obtidos com a solução através do método de Região de Confiança na presença de erros de modelagem com o objetivo de identificar a causa de tais erros;
- Investigações adicionais sobre os ajustes dos parâmetros do método de Região de Confiança e seu impacto sobre o desempenho do método;
- Utilização do método de Givens com 2 multiplicadores na implementação de um estimador de estados baseado no método de Região de Confiança;

- Outras abordagens para a cálculo de λ do método da Região de confiança utilizando métodos aproximados: método *Dogleg* (NOCEDAL; WRIGHT, 1999), de minimização em um espaço subdimensional (NOCEDAL; WRIGHT, 1999), método de Steihaug (NOCEDAL; WRIGHT, 1999), etc.

Apêndice A

Dados para o sistema de testes de 6 barras

As tabelas A.1 e A.2 mostram os dados de linha e os resultados de um fluxo de potência convergido para o sistema teste de 6 barras.

Tabela A.1: Dados de linha - Sistema de 6 barras

Line	Buses	R (%)	X (%)	B (%)
1	1 - 3	5.00	25.0	6.00
2	3 - 6	2.00	10.00	2.00
3	4 - 5	20.00	40.00	0.00
4	3 - 5	12.00	26.00	5.00
5	5 - 6	10.00	30.00	6.00
6	1 - 4	5.00	10.00	0.00
7	1 - 2	10.00	20.00	0.00
8	2 - 4	5.00	20.00	0.00
9	2 - 5	0.00	30.00	0.00
10	1 - 6	7.00	20.0	5.00
11	1 - 5	10.00	30.0	4.00

Tabela A.2: Resultados Fluxo de Potência - Sistema de 6 barras

Bus	Type	V (pu)	δ ($^{\circ}$)	P_g (MW)	Q_g (Mvar)	P_d (MW)	Q_d (Mvar)
1	slack	1.043	0.00	340.4	110.1	-	-
2	PV	0.955	-0.03	80.2	-31.9	-	-
3	PV	1.050	-6.07	97.6	122.3	-	-
4	PQ	0.958	-5.18	-	-	120.0	16.5
5	PQ	0.935	-11.16	-	-	190.0	30.0
6	PQ	0.950	-10.53	-	-	180.0	80.0

Referências Bibliográficas

- ABUR, A.; EXPÓSITO, A. G. "*Power System State Estimation - Theory and Implementation*". 1ª. ed. EUA: Marcel Dekker, 2004.
- ADBY, P. R.; DEMPSTER, M. A. H. "*Introduction to Optimization Methods*". 1ª. ed. Londres: Chapman and Hall, 1974.
- BERTSEKAS, D. P. "*Nonlinear Programming*". 1ª. ed. Belmont, Massachusetts, EUA: Athena Scientific, 1995.
- CLEMENTS, K. A.; MAURAS, F. H. "A Comparison of Algorithms for Least Absolute Value State Estimation in Electric Power Networks". *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, v. 6, p. 53–66, 1994.
- DUFF, I. S. "Pivot Selection and Row Ordering in Givens Reduction on Sparse Matrices". *Computing*, v. 13, n. 3-4, p. 239–248, 1974.
- GENTLEMAN, M. W. "Least-squares computations by givens transformations without square roots". *Journal of the Inst. Math. Applics.*, v. 12, p. 329–336, 1973.
- GJELSVIK, A.; AAM, S.; HOLTEN, L. "Hachtel's Augmented Matrix Method - A Rapid Method Improving Numerical Stability in Power System Static State Estimation". *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-104, n. 11, p. 2987–2993, Nov 1985.
- GOLUB, G.; LOAN, C. V. "*Matrix Computations*". 2ª. ed. Baltimore and London: The John Hopkins University Press, 1989.
- HAMMARLING, S. "A note on modifications to the givens plane rotations". *Journal of the Inst. Math. Applics.*, v. 13, p. 215–218, 1974.
- HASSAÏNE, Y. *et al.* "M-arctan estimator based on the trust-region method". *Anais da 15a. Power Systems Computation Conference*, v. 125, 2005.
- IRVING, M. R.; OWEN, R. C.; STELING, M. J. H. "Power-system state estimation using linear programming". *Proceedings of IEE*, v. 125, p. 879–885, 1978.
- LEVENBERG, K. "A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares". *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 2, n. 2, p. 164–168, 1944.

- MARQUARDT, D. W. "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters". *SIAM Journal of Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963.
- MONTICELLI, A. J. "State Estimation in Electric Power Systems: A Generalized Approach". 1ª. ed. EUA: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- MORÉ, J. J.; SORENSEN, D. "Computing a Trust Region Step". *SIAM Journal of Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 4, n. 3, p. 553–572, 1985.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. "Numerical Optimization". 1ª. ed. 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA: Springer, 1999. (Springer Series in Operations Research). ISBN 0-387-98793-2.
- PAJIC, S.; CLEMENTS, K. A. "Globally Convergent State Estimation via the Trust Region Method". In: . Bologna-Italy: Proceedings of the IEEE Bologna Power Tech, 2003. v. 1, p. 23–26.
- PAJIC, S.; CLEMENTS, K. A. "Globally Convergent State Estimation via the Trust Region Method". *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 4, p. 1683–1689, 2005.
- PRESS, W. H. *et al.* "Numerical Recipes in Fortran". 2ª. ed. England: Cambridge University Press, 1992.
- RAO, N. D.; TRIPATHY, S. C. "Power System Static State Estimation by the Levenberg-Marquardt Algorithm". *Proceedings of the IEEE/PES Winter Meeting*, v. 99, n. 2, p. 695–702, 1980.
- SCHWEPPE, F. C.; HANDSCHIN, E. J. "Static state estimation in electric power systems". *Proceedings of the IEEE*, v. 62, n. 7, Jul 1974.
- SCHWEPPE, F. C.; WILDES, J. "Power system static-state estimation, Parts I, II and III". *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 89, n. 1, Jan 1970.
- SIMÕES COSTA, A. J. A. "Power System State Estimation: Orthogonal Methods for Estimation and Bad Data Detection, and Techniques fo Topological Observability". Tese (PhD in Electrical Engineering) — University of Waterloo, Dept. of Electrical Engineering, Mar 1981.
- SIMÕES COSTA, A. J. A.; GOUVÊA, J. "A Constrained Orthogonal State Estimator for External System Modeling". *Electric Power and Energy System*, v. 22, n. 8, p. 555–562, Nov. 2000.
- SIMÕES COSTA, A. J. A.; LOURENÇO, E.; VIEIRA, F. "Topology Error Identification for Orthogonal Estimators Considering A Priori State Information". In: . Liege-Belgium: Power Systems Computing Conference, Liège, Belgium, 2005. v. 1, p. 1–6.

SIMÕES COSTA, A. J. A.; QUINTANA, V. H. "An orthogonal row-processing algorithm for power system sequential state estimation". In: . Atlanta - USA: IEEE PES Winter Meeting, 1981.

SIMÕES COSTA, A. J. A.; SALGADO, R. S.; HAAS, P. "Globally convergent state estimation based on givens rotations". In: . Charleston, South Carolina, USA: IREP Symposium 2007, Bulk Power System Dynamics and Control VII, 2007.

SIMÕES COSTA, A. J. A.; SALGADO, R. S.; HAAS, P. "Trust Region Optimization Methods via Givens Rotations Applied to Power System State Estimation". In: CASTRONOVO Edgardo Daniel (Ed.). *Optimization Advances in Electric Power Systems*. NY, USA: Nova Publishers, 2009. cap. 2.

TINNEY, W. F.; WALKER, J. W. "Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization". Proceedings of the IEEE, v. 55, n. 11, p. 1801–1809, Nov 1967.

TORRES, G. L.; SOUSA, A. A. "Globally Convergent Optimal Power Flow by Trust-Region Interior-Point Methods". *Anais da IEEE PowerTech'07*, Jun 2007.

TORRES, G. L.; SOUSA, A. A. "Fluxo de Potência Ótimo Robusto via Métodos de Região de Confiança: Formulação Matemática". *SBSE 2008*, Abril 2008.

UNIVERSITY OF WASHINGTON. "*Power Systems Test Case Archive*". WEB: <http://www.ee.washington.edu/research/pstca>, 2008.

VEMPATI, N.; SLUTSKER, I. W.; TINNEY, W. F. "Enhancements to givens rotations for power system state estimation". *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, n. 2, p. 842–849, 1991.

WU, F. F. *et al.* "Computational Issues in the Hachtel's Augmented Matrix Method for Power System State Estimation". Proceedings of the 9th Power Systems Computation Conference, Lisbon-Portugal, 1987.