Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Filosofia e Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

Tópicos em Teoria de Quase-Conjuntos e Filosofia da Física Quântica

Jonas Rafael Becker Arenhart

Florianópolis, Agosto de 2008

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Filosofia e Ciências Humanas

Programa de Pós-Graduação em Filosofia

Tópicos em Teoria de Quase-Conjuntos e Filosofia da Física Quântica

Jonas Rafael Becker Arenhart

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Área de Concentração: Epistemologia e Lógica

Orientador: Décio Krause

Florianópolis, Agosto de 2008

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha mãe, minha irmã, aos meus amigos, ao meu orientador, prof. Décio Krause, por ter dado a oportunidade e o incentivo para que este trabalho fosse realizado. Devo grande parte de minha formação intelectual até aqui ao meu orientador, aos professores Newton C. A. da Costa, Antonio M. N. Coelho, Ivan Pontual Costa e Silva, Cezar A. Mortari, e gostaria de agradecer, em especial, aos professores Antônio e Ivan, por terem participado da banca de qualificação e terem contribuído com sugestões e críticas para melhorar e dar prosseguimento a este trabalho.

Resumo

Segundo alguns autores, a Mecânica Quântica não-relativista é compatível com duas posturas metafísicas distintas: uma em que os objetos com os quais ela trata são *indivíduos*, e outra, na qual esses objetos são *não-indivíduos*. Neste trabalho consideraremos a segunda opção, buscando explicar em que sentido podemos entender esta não-individualidade, e como podemos tratar formalmente com esta noção. Uma resposta possível, a que será considerada neste trabalho, é que podemos utilizar uma teoria de Quase-Conjuntos Q, que trata formalmente com certos itens que podem ser entendidos como representando não-indivíduos, no sentido de que nem a identidade nem a diferença fazem sentido para eles. Duas questões relacionadas com a teoria de Quase-Conjuntos serão tratadas. O primeiro é uma conseqüência da particular maneira como os não-indivíduos são representados na teoria Q. Sem a noção de identidade para estes itens, torna-se difícil generalizar as definições usuais de cardinal para coleções de não-indivíduos, já que a identidade é necessária nestes casos. Assim, apresentaremos uma definição para cardinais finitos distinta das usuais, que possa envolver os casos em que objetos sem identidade estejam presentes. O segundo problema que discutiremos consiste em uma aplicação da teoria Q. Apresentaremos uma lógica de primeira ordem cuja motivação principal consiste em tratar adequadamente não-indivíduos, que podem obedecer a uma relação primitiva de indistinguibilidade, mas não obedecem a relação de identidade. Exibiremos uma semântica para esta lógica tendo a teoria Q como metalinguagem, e argumentaremos que, em geral, ela preserva as motivações para se propor tal lógica. Por fim, generalizamos esta semântica para linguagens de primeira ordem em geral, permitindo que itens que representam os não-indivíduos estejam no domínio de interpretação.

Palavras-chave: não-individualidade, quase-conjuntos, cardinais, semântica.

Abstract

According to some authors, Non-relativistic Quantum Mechanics is compatible with two distinct metaphysical views: one in which the objects it deals with are *individuals*, while the other one consider these objects as *non-individuals*. In this work, we pursue the second option, trying to explain how this non-individuality can be understood, and how to provide a formal treatment of this notion. We analyze a possible answer to these questions, more specifically, we consider that a quasi-set theory Q can be used for some purposes, a theory in which some items can be seen as representing non-individuals, in the sense that neither identity nor difference make sense for them. Two basic questions related to the quasi-set theory are then treated. The first one follows from the particular way in which non-individuals are represented within Q. Without the notion of identity for these items, it becomes difficult to generalize to collections of non-individuals the standard definition of cardinality. So, we present a definition of finite cardinals which differs from the usual ones, and then we discuss how we can treat the cases involving objects without identity. The second question we discuss consists in an application of the theory Q. We present a first order logic whose main motivation consists in trying to deal adequately with non-individuals, and although an identity relation cannot hold between non-individuals, they can still figure in an indistinguishability relation. A semantic for this logic is constructed using Q as its metalanguage, and we suggest that this particular semantics preserves the motivations to propose this logic. Finally, this semantics is generalized to first order languages in general, allowing for items representing non-individuals to figure in the domain of interpretation.

Key-words: non-individuality, quasi-sets, cardinality, semantics.

Índice

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO AO TEMA DA INDIVIDUALIDADE E IDENTIDADE

Este capítulo objetiva destacar os tópicos que são centrais para o restante do trabalho. Faremos uma apresentação geral do tema do qual trata esta dissertação, qual seja, a abordagem de alguns problemas filosóficos tratados de um ponto de vista formal, relacionados à identidade e à individualidade, motivados por certas discussões levadas em conta nos fundamentos filosóficos da Mecânica Quântica. Trata-se, aqui, de fazer uma exposição de parte da terminologia e da problematização filosófica que permeia o trabalho, introduzindo o leitor aos problemas que serão abordados com mais detalhe em cada um dos capítulos seguintes.

1.1 – DUAS METAFÍSICAS POSSÍVEIS

A Mecânica Quântica apresenta grandes desafios para o filósofo da ciência, e dentre os problemas filosóficos colocados pela teoria está aquele que diz respeito à identidade e individualidade dos objetos aos quais ela supostamente se refere. Aparentemente, segundo certos autores, dentre eles muitos dos próprios cientistas que contribuíram para elaborar a teoria em seus primórdios, como Born, Heisenberg, Weyl e Schrödinger, esses objetos, diferentemente dos objetos ditos 'do dia a dia', não possuem individualidade. Para sustentar essa posição, muitas vezes esses autores fornecem um argumento que se baseia na maneira de contagem peculiar destes objetos conforme descritos pelas assim chamadas estatísticas quânticas, e em uma particular interpretação de um dos postulados da Mecânica Quântica, o Postulado da Indistinguibilidade (French e Rickles [2003], e French e Krause [2006] cap. 3).

Sem levar em conta muitos dos detalhes, podemos apresentar o argumento resumidamente, através de um exemplo que considera o caso para dois objetos, como se segue. Começamos por considerar dois objetos do mesmo tipo, que tanto na física clássica quanto na física quântica podem ser tomados como sendo absolutamente indistinguíveis, ou seja, tendo todas as mesmas propriedades intrínsecas. Vamos agora considerar as possibilidades de distribuir estes dois objetos, que podemos rotular *a* e *b*, em dois estados, que vamos chamar A e B, obtendo as seguintes possibilidades: 1) os dois objetos estão em A; 2) os dois estão em B; 3) um está em A e o outro está em B.

Na mecânica estatística clássica, o item 3 da distribuição acima recebe o dobro do valor que 1 e 2, para dar conta das possibilidades de que o objeto *a* esteja em A e o objeto *b* em B, e vice-versa, *a* em B e *b* em A, ou seja, a permutação destes elementos é contada como originando uma outra situação física, dando origem a um total de quatro estados. A estatística que se obtém deste modo é a de Maxwell-Boltzmann. Estamos assumindo aqui a hipótese de que os estados são equiprováveis. Por outro lado, na física quântica, como os objetos podem ser classificados em bósons ou férmions, podemos ter, respectivamente, dois casos: 1) para os bósons, os itens estão ambos em A, ou ambos em B, ou cada um em um estado, e são tais que uma permutação entre eles não conduz a um novo estado físico, dando origem a três combinações; ou 2) para os férmions, os dois itens estão cada um em um estado, dando origem a apenas uma combinação. No primeiro caso a estatística obtida é a estatística de Bose-Einstein, e o estado 3 é representado por uma função de onda simétrica, a segunda é a estatística de Fermi-Dirac, e seu estado 3 é representado por uma função de onda anti-simétrica, mas não entraremos em detalhes aqui sobre suas diferenças. É importante apenas enfatizar que, na mecânica quântica não-relativística, o fato de que esta distinção é exaustiva é algo assumido *ad hoc* (ver French e Rickles [2003] pp. 218-219), enquanto que na versão relativística da teoria, este fato pode ser demonstrado (ver Streater e Wightman [2000]).

O que nos interessa agora é que, no caso da estatística para os objetos quânticos, permutações nos rótulos das partículas, nos casos em que elas estão distribuídas cada uma em um estado, ao contrário do que ocorre na estatística de Maxwell-Boltzmann, não são em geral contadas como dando origem a um novo estado. É neste ponto que surge o 'Postulado da Indistinguibilidade'. Falando por alto, este postulado nos garante que, dada uma permutação dos rótulos das partículas distribuídas conforme o estado 3 acima, não é possível distinguir através de operadores que representam observáveis o estado após a permutação dos rótulos no estado original e antes da permutação, ou seja, o valor da medida do operador que representa o observável antes e depois da permutação dos rótulos permanece o mesmo (para uma discussão sobre o papel do Postulado da Indistinguibilidade nas estatísticas, ver French e Rickles [2003]).

Diante dessa diferença, com a qual nos deparamos ao considerar o papel das permutações para a obtenção das estatísticas corretas em cada caso — conclui o argumento — como no caso clássico permutações dão origem a novos estados, os objetos devem ser considerados como indivíduos em algum sentido, pois, apesar de poderem ser indistinguíveis, deve haver algo que faça a diferença para que se tenha os dois diferentes estados nos quais o estado 3 acima se desdobra, um princípio que, subjacente às propriedades dos objetos, serve para garantir a sua individualidade. Por raciocínio semelhante, como na estatística quântica estas permutações não dão origem a novos estados, as permutações não são observáveis, e portanto, estes objetos não seriam indivíduos, pois faltar-lhes-ia este algo que atribui individualidade, como no caso clássico, sendo então esta natureza peculiar das partículas quânticas apontada como responsável pelas diferenças nas estatísticas clássicas e quânticas (ver, por exemplo, Post [1963]).

No entanto, esta visão, chamada por alguns autores de *Received View*, de que os objetos quânticos, em oposição aos objetos clássicos, não são indivíduos, não se segue necessariamente da teoria. Pode-se argumentar que a teoria é compatível também com uma posição segundo a qual as entidades descritas são indivíduos, mesmo que talvez de algum tipo bastante diferente do que aquele das teorias clássicas. Podemos melhor esclarecer estas diferentes possibilidades de se dar um peso metafísico à compreensão das estatísticas se considerarmos que podem haver duas maneiras de se interpretar o papel desempenhado pelo Postulado de Indistinguibilidade no argumento, uma leitura forte e uma leitura fraca (seguindo terminologia de Readhead e Teller [1992] p. 208): por um lado, na leitura forte, pode-se considerá-lo como impondo restrições aos estados possíveis, de modo que estados que não são representados por funções de onda simétricas ou anti-simétricas simplesmente não são possíveis, não representam estados fisicamente significativos, e por outro, na leitura fraca, pode-se considerá-lo como impondo restrições aos possíveis operadores que representam observáveis, que devem ser invariantes por permutações dos rótulos das partículas. Na primeira leitura, como dissemos, temos que estados não-simétricos simplesmente não são possíveis em casos de distribuição como o 3, acima. É importante observar ainda que, uma vez imposta a condição de que os objetos satisfazem Bose-Einstein ou Fermi-Dirac, ou seja, que estão em estados simétricos ou anti-simétricos, pode-se assumir que eles sempre evoluem temporalmente para estados simétricos ou anti-simétricos, respectivamente, ou seja, o tipo de simetria é preservado na evolução temporal (Readhead e Teller [1992] p. 207), mas isto não impede que se considere, levando em conta a segunda leitura do Postulado de Indistinguibilidade, que alguns estados, os não-simétricos, que dão origem à estatística de Maxwell-Boltzmann, sejam estados apenas potencialmente acessíveis, mesmo que nunca realizados. A primeira interpretação é adotada quando se defende que a mecânica quântica implica uma metafísica de objetos sem individualidade, e a segunda, é uma das opções para se buscar uma metafísica de objetos dotados de individualidade (French [1989] e French e Rickles [2003]). Outras opções compatíveis com uma metafísica de indivíduos consistem, por exemplo, em se adotar uma interpretação modal da teoria, mas não discutiremos esta e outras possibilidades aqui (French e Krause [2006] p. 164).

O impasse ao qual se chega então, relativamente à pergunta sobre a ontologia com a qual nos compromete a teoria pode ser descrito abreviadamente do seguinte modo: a Mecânica Quântica não determina de modo unívoco se as entidades com as quais ela trata são ou não indivíduos, ou, dito de outro modo, não podemos determinar, considerando apenas a teoria, se ela nos compromete com uma ontologia de indivíduos ou uma ontologia de não-indivíduos, isso não é algo que pode ser estabelecido apenas considerando os dados que a teoria nos fornece, sendo as duas concepções sustentáveis, cada uma com seus vícios e virtudes. Há assim, o que Steven French chamou de uma 'subdeterminação da metafísica pela física' (French [1998]).

Um ponto importante a ser destacado é que estamos assumindo aqui, para que se tenha esta subdeterminação, que não se está comprometido com a concepção de que sempre há alguma doutrina metafísica anterior à investigação científica, ou seja, estamos considerando que de certa forma há uma relação de dependência entre a metafísica que se quer propor e as teorias científicas, e que a elaboração de nosso sistema de categorias não é feita sem que se consulte o que as teorias científicas nos dizem sobre o mundo. Este é certamente o caso de filósofos que adotam uma posição chamada algumas vezes de 'naturalismo ontológico', segundo a qual a ontologia deve ser 'inferida' ou 'lida' a partir das nossas melhores teorias científicas, e talvez até mesmo de outros filósofos, que mesmo sem adotarem uma posição naturalista (pelo menos não com respeito à ontologia), desejam uma metafísica que não seja alheia à situação atual da ciência. No caso de filósofos que aceitam que há uma metafísica como filosofia primeira, à qual a ciência deve se submeter, o problema possivelmente não surge, pois de antemão seu sistema de metafísica determina se o mundo é ou não constituído apenas por indivíduos, se objetos sem individualidade são permitidos ou não, entre outros.

Outra possibilidade que não vamos considerar, para que se possa sustentar esta indeterminação da metafísica, é a proposta de Quine de se 'evaporar' os objetos físicos (ver, por exemplo, Quine [1981a] pp. 16-18). Segundo esta opção, podemos estabelecer que quádruplas de números reais representam pontos do espaço-tempo em um sistema fixo de coordenadas, e identificar cada objeto com o conjunto de pontos do espaço-tempo que ele ocupa, ou seja, podemos de certo modo reduzir a ontologia a uma ontologia de conjuntos, já que os números reais podem ser representados nas teorias de conjuntos usuais. Seguir esta opção, claro, seria uma maneira de questionar a *Received View*, e considerar desde o início que todos os objetos físicos, inclusive os objetos quânticos, são indivíduos.

Tendo disponíveis duas metafísicas não compatíveis entre si, e ambas compatíveis com uma teoria tão importante, cabe-nos perguntar pela razoabilidade e pelas vantagens de cada uma das opções. Por um lado, admitir que a Mecânica Quântica trate com indivíduos assim como as outras teorias da física clássica favorece uma economia em termos de ontologia: não é necessário, caso se adote esta posição, aceitar outra categoria de itens a não ser aquela já aceita (e suficientemente problemática por si só) dos indivíduos, e aparentemente, com isto pode-se manter a lógica e teoria de conjuntos clássicas quando se trata com estas entidades.

Um caminho possível para se desenvolver esta opção seria, por exemplo, seguir a rota que indicamos acima, de se interpretar o Postulado de Indistinguibilidade como representando certa restrição aos estados acessíveis aos objetos, não proibindo a possibilidade de estados que não são simétricos ou anti-simétricos. Neste caso, profundas modificações teriam de ser feitas tanto na maneira como compreendemos os nomes próprios quanto na teoria das relações. Uma das sugestões feitas é de que para explicar os estados de superposição utilizados nestas situações, devemos empregar relações chamadas de não-supervenientes, ou seja, adotar uma teoria de relações distinta das usuais, mas não entraremos nestes detalhes aqui (ver French [1998]).

No entanto, para assumir a posição de que estes objetos são indivíduos, é preciso enfrentar alguns problemas delicados. Devemos explicar exatamente, por exemplo, o que confere individualidade a estes objetos. Argumenta-se fortemente que, ao que tudo indica o conhecido Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII), de Leibniz, que nos garante que se dois objetos são distintos então existe uma propriedade que os distingue, deve ser abandonado nestes contextos, de modo que o princípio que assegura a individualidade terá de ser procurado em outro lugar, que não através das propriedades dos objetos (French e Readhead [1988], French [1989a]). Ainda, é preciso explicar o motivo pelo qual, apesar de serem indivíduos, estes objetos, quando levamos em conta seu comportamento em agregados, dão origem a estatísticas distintas da clássica. Para finalizar, argumenta-se que uma grande desvantagem desta abordagem é que, quando se assume que os objetos quânticos são indivíduos, as estatísticas utilizadas na Mecânica Quântica não podem ser derivadas de modo natural sem a introdução de princípios de simetria *ad hoc*, ou seja, não podem ser formuladas sem o emprego de algum artifício que 'mascare' o fato de que os objetos são, em certo sentido, indivíduos (para uma análise de muitas das propostas para se considerar os quanta como indivíduos, e tentativas de se salvar PII nestes contextos, ver French e Krause [2006] cap. 4).

Por outro lado, para aqueles que acham que o compromisso com indivíduos neste caso conduz a dificuldades insuperáveis além de em alguns casos levar a metafísica muito longe, talvez o compromisso com itens sem individualidade, os não-indivíduos, soe mais plausível e cômodo. Além disso, poder-se-ia argumentar que esta opção está mais próxima do que nos conta a própria Mecânica Quântica em seu aspecto experimental. Neste caso, as estatísticas funcionam da maneira usual — em geral, como dissemos acima, na *Received View* acredita-se que a não-individualidade dos objetos tratados pela teoria pode ser vista como intimamente relacionada com a maneira como funcionam as estatísticas, as estatísticas 'refletem' a não-individualidade das partículas. O problema de se explicar que tipo de princípio confere individualidade aos objetos, caso se adote esta opção, simplesmente não aparece, pois não mais se consideram estes objetos como indivíduos. No entanto, seguindo por esta via, surgem outros problemas que devemos enfrentar, e que são, metafisicamente falando, não menos complicados do que aqueles que aparecem quando se faz a opção por indivíduos: primeiro, se a teoria trata de objetos que não são indivíduos, então devemos explicar como se entender esta ausência de individualidade e, em segundo lugar, temos que discutir se a lógica e a matemática subjacentes às discussões sobre o assunto podem ser as clássicas, pois, como veremos brevemente, estas são teorias de indivíduos, em particular envolvendo alguma forma do Princípio de Identidade dos Indiscerníveis, que, como já dissemos, pode ser considerado como sendo violado nestes contextos.

Neste caso, se não há, pelo menos atualmente, meios filosoficamente satisfatórios de se tratar adequadamente com não-indivíduos na matemática clássica, é razoável, então, procurar por sistemas formais mais adequados que nos permitam tratar com estes não-indivíduos, alternativas que não envolvam o compromisso com indivíduos, como parece ocorrer em geral na matemática clássica. Esta será a rota tomada neste trabalho. Consideraremos a abordagem que encara estes objetos como destituídos de individualidade, e apresentaremos um sistema formal que busca tratar mais adequadamente a noção de não-indivíduo, bem como dotar a posição da *Received*

View de aparato lógico-matemático filosoficamente mais adequado. Esta busca por sistemas formais alternativos pode ser encarada como conseqüência da usual liberdade de se investigar todos os sistemas logicamente possíveis, conforme proposto por Hilbert, e em particular então os sistemas que consideramos mais adequados para tratar com este tipo de entidades, ou, ainda, de modo mais relevante para nossos propósitos, como uma tentativa de fundamentar rigorosamente a concepção segundo a qual devemos considerar que a Mecânica Quântica trata com objetos destituídos de individualidade. Antes de partirmos em busca de sistemas formais alternativos, convém, no entanto, retornarmos ao primeiro problema enunciado no parágrafo acima, sobre como devemos entender a não-individualidade, para também com isto tornar mais claro como esta posição pode ser representada em um sistema formal, já que, como veremos abaixo, não há apenas um modo de se entender a ausência de individualidade destes objetos.

1.2 – INDIVÍDUOS E NÃO-INDIVÍDUOS

Até aqui estivemos tratando a noção de indivíduo sem fornecer muitos detalhes, trabalhando com ela apenas intuitivamente, e ainda, estivemos falando como se considerássemos como dignos de serem qualificados como ‘objetos’ ou ‘entidades’ mesmo os não-indivíduos, quando muitos filósofos guardariam o termo apenas para indivíduos, sendo esses termos considerados praticamente como sinônimos (a mesma observação também vale para o termo ‘coisa’). Ainda, a noção de ‘objeto’, no seu uso pelos filósofos em geral, pressupõe um critério de identidade (por exemplo, Lowe [1997] pp. 616-618), algo que, como veremos brevemente, pelo menos em certa acepção, não se aplica aos não-indivíduos. No momento, o termo mais correto seria o mais neutro ‘item’, que não parece nos sobrecarregar com todas estas pressuposições, mas como desejamos fazer uma discussão bastante geral, e para evitar repetição terminológica, utilizaremos ‘objeto’ como sinônimo para o termo ‘item’, a menos que o contrário seja explicitamente dito, e com isso não assumimos que um critério de identidade está pressuposto. Agora, como estamos interessados na noção de não-indivíduo, e ainda mais, como queremos indicar como se pode representar estes itens formalmente, visando apresentar sistemas formais adequados para tratar com eles, é chegada a hora de fazermos uma breve digressão sobre como podemos entender os indivíduos, para então passarmos aos não-indivíduos (sobre os pacotes metafísicos com os quais podemos considerar a individualidade, ver French e Krause [2006] cap. 1, Loux [1998]).

A pergunta sobre qual o princípio que confere individualidade a um item particular tradicionalmente costuma ter sua resposta classificada em uma das três possíveis estratégias seguintes: 1) as teorias de feixes de atributos (bundle theories), segundo as quais, falando por alto, um objeto é uma coleção de propriedades ou universais; 2) as teorias segundo as quais um objeto é caracterizado por sua trajetória espaço-temporal, chamadas, por isso, de teorias da individualidade espaço-temporal; 3) as teorias que, seguindo Locke, caracterizam um indivíduo através de algo que está além de suas propriedades, como um *substratum*, que transcende as propriedades, batizadas por este motivo de 'individualidade transcendental' (seguindo terminologia de Post [1963]). Segundo B. Russell [1948], as teorias do tipo 2 podem ser sempre reduzidas a um dos outros tipos, dependendo de como entendemos o espaço-tempo, e por isso não vamos discuti-las aqui.

Para os nossos propósitos temos que considerar com um pouco mais de cuidado as opções 1 e 3 apresentadas acima. Caso adotemos uma teoria de feixes, então, aparentemente estamos nos comprometendo com a visão segundo a qual especificar um indivíduo consiste em fornecer uma lista completa de todos os seus atributos. Dois problemas surgem: 1) como podemos garantir que não haverá múltipla instanciabilidade do mesmo feixe de atributos, ou seja, como podemos garantir que dois objetos não podem possuir todos os mesmos atributos e ainda assim serem dois; 2) que tipo de atributos estamos considerando como relevantes para caracterizar a individualidade.

Em geral, as respostas a estes problemas estão relacionadas. Em resposta à primeira pergunta, costuma-se adotar o já mencionado Princípio de Identidade dos Indiscerníveis (PII), que garante que se dois objetos possuem todos os mesmos atributos, então são o mesmo objeto. Podemos utilizar uma linguagem de segunda ordem e escrever uma fórmula que busca captar o PII do seguinte modo: $\forall F(F(a) \leftrightarrow F(b)) \rightarrow a=b$, onde F é uma variável de segunda ordem que varia sobre atributos. Aqui, a resposta à segunda pergunta passa a ser crucial, pois, assumindo PII, temos de determinar o escopo da variável F. Novamente, três opções estão disponíveis, sendo que PII toma uma forma particular em cada uma delas: (PII1) F varia sobre todas as propriedades e relações dos objetos, inclusive aquelas que são chamadas espaço-temporais; (PII2) F varia sobre todas as propriedades e relações, menos as espaço-temporais; (PII3) F varia apenas sobre propriedades monádicas. Em PII1 e PII2 a linguagem de segunda ordem utilizada teria de ser poliádica, e em PII3 poderia ser monádica.

Não entraremos aqui nos detalhes sobre os prós e contras de cada uma destas versões do PII, ou nas vantagens e desvantagens de se adotar uma teoria de feixes (ver Loux [1998], Black [1952], Van Cleve [1985]). Em geral, argumenta-se que PII2 e PII3 são violados mesmo na física clássica (French [1989a]), pois podemos ter dois objetos indistinguíveis, no sentido de partilharem os atributos relevantes em cada caso, sem que, no entanto, sejam o *mesmo*, enquanto que PII1, se tomado junto com a Hipótese da Impenetrabilidade, que garante que dois objetos não podem ocupar a mesma localização espaço-temporal, é aceito como válido nestes contextos (esta é uma das maneiras de acordo com a qual se pode reduzir a opção 2 acima, segundo a qual a individualidade é garantida pela localização espaço-temporal, a uma teoria de feixes de propriedades). O interessante para nós é perceber que neste tipo de abordagem, devido à adoção do PII, temos que os conceitos de individualidade e distinguibilidade não podem mais ser mantidos separados. Neste caso, itens distinguíveis são indivíduos diferentes, e itens indistinguíveis são o mesmo indivíduo, o princípio que garante a distinguibilidade e a individualidade é o mesmo.

A terceira abordagem mencionada acima, que atribui o princípio de individuação a algo além das propriedades e relações, permite que superemos a identificação de conceitos mencionada no parágrafo anterior, no sentido de que podemos manter separados os conceitos de distinguibilidade e individualidade (para uma defesa desta posição, ver Allaire [1963]). Segundo esta abordagem, a distinguibilidade é explicada em termos de diferentes propriedades, enquanto que a individualidade é procurada em algo além delas. Deste modo, a noção de distinguibilidade cumpre um papel epistemológico, podemos saber que indivíduos distintos contam como dois através de suas diferentes propriedades, mas o que confere a individualidade, em última instância, que desempenha um papel ontológico, está além das propriedades. Assim, falando sem muito rigor, distinguibilidade envolve mais de um item, enquanto que individualidade envolve apenas, de algum modo, o objeto em sua unidade. Ainda, de acordo com os defensores desta abordagem, esta distinção nos permite superar o principal problema da teoria dos feixes, qual seja, o da múltipla instanciabilidade de uma coleção de atributos, pois adotando esta particular abordagem metafísica é possível conceber indivíduos indistinguíveis, no sentido de partilharem todas as suas propriedades mas que, no entanto, não são numericamente idênticos, pois o que confere a individualidade está além das propriedades.

O grande desafio para esta abordagem está em descrever em que consiste este *substratum*, já que isto não pode ser feito em termos de propriedades possuídas pelo objeto, pelo menos não se entendermos as propriedades em seu sentido usual. A dificuldade pode ser compreendida do seguinte modo: ao se postular a existência de um *substratum* (na literatura também conhecido como 'bare particular'), queremos algo que esteja além das propriedades, para dar conta da possibilidade de existirem objetos qualitativamente idênticos, mas numericamente distintos. Este *substratum* deve ser o portador das propriedades do objeto e, no entanto, não é ele mesmo definível em termos de uma coleção de propriedades, caso contrário, voltaríamos ao problema de como podemos garantir a individualidade em casos de múltipla instanciabilidade do mesmo feixe de propriedades, agora no caso do *substratum*. Assim, conclui o argumento, estamos postulando algo que deve ser o portador das propriedades do objeto, mas que não pode ter propriedades.

Ainda, relacionado com o problema apontado no parágrafo anterior, temos que é difícil de ver como devemos caracterizar a individualidade de tal *substratum* e como distinguir diferentes *substrata*, caso estejamos diante de itens indistinguíveis, por exemplo. Suponha que *s* seja o substratum de um objeto *O*, ou seja, *s* é o portador das propriedades de *O*, e confere a individualidade de *O*. Como garantir a identidade de *s*? Se respondermos que *s* é determinado por certas propriedades, então, segundo esta abordagem, *s* precisa de um substratum *s*', que será o portador das propriedades de *s*. O problema não termina aqui, pois certamente queremos saber, agora, o que determina a identidade de *s*'. Se forem feixes de propriedades, certamente *s*' deverá ter seu substratum também, e assim entramos em uma regressão que só pode ser terminada assumindo que pode haver um substratum 'último' cuja identidade não é determinada por propriedades. Neste caso, é mais razoável, argumentam os defensores da teoria, assumir que *s* é esse substratum, e parar logo no primeiro passo da regressão, com cada objeto possuindo seu portador de propriedades com uma identidade determinada.

Existem várias possibilidades através das quais os defensores da individualidade transcendental costumam atacar esses problemas, explicando este 'algo' que atribui a individualidade não exatamente em termos de algum tipo de *substratum* lockeano, mas através de outras noções como haecceities, ou 'primitive thisness'. A alternativa que nos interessa considerar aqui é aquela que explica a individualidade em termos de um ‘primitive thisness’, um algo próprio de cada indivíduo, seguindo Adams [1979]. A vantagem desta opção sobre outras formas de individualidade transcendental repousa no fato de que é comum explicar o ‘primitive thisness’ em termos da auto-identidade de cada item consigo próprio, algo que cada objeto tem consigo mesmo e com nenhum outro. Neste caso, como se nota, a individualidade é explicada em termos de uma propriedade, no entanto, defendem seus proponentes, uma propriedade especial, muitas vezes dita ser uma propriedade ‘não-qualitativa’ (Adams [1979] p. 6). Como podemos representar formalmente a auto-identidade através da propriedade reflexiva do símbolo de identidade, ou seja, $\forall x(x=x)$, a sugestão que se faz é que podemos tentar captar formalmente a noção de não-indivíduo violando esta propriedade no caso de determinados itens, que, não sendo indivíduos, representam *não-indivíduos*. Negar uma ‘primitive thisness’, no entanto, não envolve afirmar que agora haverá algum objeto x tal que $x \neq x$. Vejamos com mais detalhes uma primeira tentativa de como esta idéia pode receber representação formal, com a proposta das Lógicas de Schrödinger.

1.3 – LÓGICA DE SCHRÖDINGER E SEMÂNTICA CLÁSSICA

Uma primeira tentativa para tratar formalmente de modo supostamente mais adequado com estas entidades poderia ser feita através das Lógicas de Schrödinger, ou seja, é possível, através destas lógicas, expressar formalmente esta concepção de não-indivíduos, negando-lhes individualidade no sentido das teorias de individualidade transcendental, entendida como um uma ‘primitive thisness’. Vejamos brevemente do que se trata. Em seu *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*, Newton da Costa (da Costa [1980] p. 117-119) apresentou um sistema de lógica de primeira ordem que batizou de Lógica de Schrödinger. O objetivo que tinha em mente ao apresentar este sistema de lógica era mostrar que o princípio de identidade, quando formulado como $\forall x(x=x)$, pode ser derrogado, ou seja, pode-se conceber um sistema de lógica, a Lógica de Schrödinger, no qual nem a identidade nem diferença se aplicam a todas as entidades com as quais se pretende tratar.

Ainda, como motivação fundamental para se propor um sistema de lógica deste tipo, visava com a Lógica de Schrödinger captar certas concepções de E. Schrödinger, que, falando sobre partículas elementares da física quântica insistia em que a questão sobre sua identidade ou diferença, em certos contextos, não faz sentido: “Está além da dúvida que a questão da ‘igualdade’, da identidade, real e verdadeiramente não tem sentido.” (Schrödinger [1952] p. 18). Apesar desta referência à Schrödinger e de ter suas motivações baseadas na Mecânica Quântica, é importante notar que a preocupação principal de da Costa ao apresentar seu sistema era com a possibilidade de violação das chamadas “Leis da Lógica”, neste caso particular, a “Lei da Identidade”, sendo que ele não utiliza o sistema que propõe para discutir especificamente questões concernentes à ontologia de teorias físicas, e não emprega o termo ‘não-indivíduo’. No entanto, acreditamos que a Lógica de Schrödinger pode ser utilizada com proveito neste tipo de discussão, mesmo que da Costa não a tenha proposto especificamente para esses fins. Assim, a Lógica de Schrödinger, baseada em concepções como a de Schrödinger sobre a natureza das partículas da física quântica, visava ser um exemplo de sistema de lógica no qual podemos mostrar que a lei da identidade, na formulação $\forall x(x=x)$, não vale irrestritamente, não devendo valer em particular para alguns objetos do modelo pretendido, o que, conforme sugerimos acima, seria um caminho possível para fornecermos um sistema formal mais adequado caso adotemos uma posição que aceita que os objetos com os quais a Mecânica Quântica trata não são indivíduos, na acepção explicada acima.

O efeito desejado — fazer com que não seja possível expressar a reflexividade da identidade no caso de certas entidades — era obtido ao se empregar uma linguagem bi-sortida, com duas espécies de termos individuais, e uma mudança conveniente na definição de fórmulas. Uma das espécies de termos — podemos supor que seja a primeira — denotaria objetos macroscópicos, para os quais a identidade não é problemática, e a outra espécie de termos, a segunda, denotaria as entidades microscópicas, que, seguindo essa interpretação da posição de Schrödinger, não podem figurar com sentido na relação de identidade. A restrição feita na definição de fórmula é a de impedir que o símbolo de identidade figure em uma fórmula quando ladeado por pelo menos um termo de segunda espécie. Os axiomas da lógica clássica, respeitadas as diferenças de termos que impõem pequenas restrições em sua formulação, como, por exemplo, nos axiomas da igualdade, completavam a apresentação de da Costa.

Assim, a interpretação pretendida para a Lógica de Schrödinger deveria ser feita de modo que estas intuições básicas fossem preservadas. As variáveis de primeira espécie percorreriam um conjunto no sentido usual, e as constantes de primeira espécie nomeariam elementos deste conjunto. Por outro lado, caso queiramos que nossa semântica seja consistente com as nossas motivações e que a Lógica de Schrödinger cumpra os objetivos para os quais foi proposta, as variáveis de segunda espécie deveriam percorrer um conjunto cujos elementos sejam tais que a identidade ou diferença não faça sentido para eles, e as constantes de segunda espécie devem nomear, de algum modo, tais elementos, ou seja, os termos de segunda espécie devem, neste caso, denotar não-indivíduos.

No entanto, este procedimento, quando realizado da maneira usual, qual seja, tendo uma teoria de conjuntos como ZF informal como metalinguagem, conduz a vários problemas filosóficos, pois em particular, como foi apontado por da Costa ([1980] p. 119), o conjunto no qual se interpreta os termos de segunda espécie aparentemente não pode ser um conjunto na acepção usual caso queiramos de fato preservar as intuições que deram origem à Lógica de Schrödinger. Isto ocorre porque nas teorias de conjuntos usuais, nas quais se faz a semântica para linguagens formais como a da Lógica de Schrödinger, a identidade sempre faz sentido para todos os elementos do conjunto utilizado como domínio (outros problemas relacionando semânticas para linguagens de primeira ordem com as teorias usuais de conjuntos, quando se tem em mente tratar com partículas quânticas podem ser vistos em Krause [2002]). Assim, conforme da Costa,

> "... ao tratarmos de partículas elementares, tudo indica que devemos procurar semânticas fora das teorias clássicas de conjuntos. A lógica não-reflexiva, *v.g.*, surgiu dessa circunstância; como já observamos, a igualdade parece carecer de sentido no tocante às partículas atômicas ou subatômicas, de modo que não se pode aplicar diretamente as noções da teoria usual de conjuntos a coleções de partículas elementares. Por conseguinte, a semântica de certas linguagens da física não é suscetível de se assentar, pura e simplesmente, em qualquer das teorias clássicas de conjunto." (da Costa [1999] p. 124)

Portanto, o problema com o qual nos deparamos é que apesar de termos uma linguagem de primeira ordem aparentemente compatível com nossas motivações oriundas da possibilidade de se considerar que as entidades tratadas pela Mecânica Quântica são certo tipo de não-indivíduos, não há indicações atualmente sobre como se poderia apresentar uma semântica adequada se utilizarmos uma teoria de conjuntos usual como metalinguagem. Podemos compreender o problema do seguinte modo: a teoria usualmente utilizada como metalinguagem para se estabelecer a semântica de linguagens de primeira ordem é Zermelo-Fraenkel e, no entanto, ZF, ao que tudo indica, é uma teoria de indivíduos, ou seja, todos os objetos com os quais esta teoria trata são indivíduos no sentido de satisfazerem não apenas a lei reflexiva da identidade, mas ainda mais, no sentido de que sempre podemos apresentar uma propriedade que serve para distinguir qualquer objeto dos demais, sendo assim, indivíduos no sentido de uma teoria de feixes.

A afirmação do parágrafo anterior pode ser mais bem fundamentada através de um metateorema de ZF, que nos garante que, para qualquer estrutura formulada em ZF, sempre existe uma extensão desta estrutura que é uma estrutura rígida, ou seja, uma estrutura cujo único automorfismo é a função identidade. O que isto nos garante é que, como dissemos, aparentemente não existem não-indivíduos em ZF, pois sempre podemos fazer com que a noção de distinguibilidade e identidade sejam a mesma noção, bastando para isso ampliar a estrutura em questão ao acrescentar-lhe mais propriedades dos elementos do domínio da estrutura (para uma discussão detalhada deste resultado e suas implicações, ver Krause e Coelho [2005]). Esse resultado, claro, vale também para as estruturas nas quais se interpreta a linguagem da Lógica de Schrödinger, quando ZF é utilizada como metalinguagem. Assim, aparentemente, não é possível utilizar ZF ou qualquer teoria de conjuntos semelhante como metalinguagem para se fazer semântica da Lógica de Schrödinger e ainda ser consistente com as nossas motivações de assumir um compromisso com a tese de que as entidades denotadas pelos termos de segunda espécie são não-indivíduos. Lembrando novamente que a noção de não-indivíduos que estamos tomando aqui se refere a objetos sem um ‘primitive thisness’, no sentido da auto-identidade.

Assim, ao que tudo indica, apesar de podermos simular de algum modo a não-individualidade em ZF, ainda não há maneira de se estabelecer uma semântica adequada para as Lógicas de Schrödinger utilizando-se ZF como metalinguagem, e então, uma das soluções que se propôs seguir para resolver o problema foi que se formulasse uma teoria de Quase-Conjuntos, na qual se pudesse estabelecer uma semântica adequada para a Lógica de Schrödinger, solução esta que havia sido sugerida por da Costa ao detectar o problema. A teoria de Quase-Conjuntos que consideraremos neste trabalho foi elaborada por Krause (ver Krause [1990], e Krause [2007], cap. 4). Vale mencionar também que as Lógicas de Schrödinger não ficam restritas a linguagens de primeira ordem, mas podem ser formuladas com adaptações convenientes em linguagens de ordem superior, tendo os mesmo problemas que as linguagens de primeira ordem no que diz respeito à semântica feita tendo-se teorias de conjuntos clássicas como metalinguagem (ver Krause [1990], da Costa e Krause [1994], [1997]). Uma semântica mais adequada para estas lógicas, utilizando-se a teoria de Quase-Conjuntos como metalinguagem pode ser vista em da Costa e Krause [1997].

Consideraremos as Lógicas de Schrödinger com mais detalhes no capítulo 4. Ampliaremos a linguagem desta lógica para acrescentar também uma relação de indistinguibilidade, e apresentaremos uma semântica que consideramos mais adequada do ponto de vista do compromisso com as suas motivações. Como vemos, para tentarmos resolver o problema formal que se origina ao adotarmos um compromisso com não-indivíduos, não basta mudarmos de uma lógica clássica para uma lógica como a Lógica de Schrödinger. É preciso mudar também a metalinguagem, e buscar formular, por exemplo, uma teoria de "conjuntos" que nos permita tratar com coleções de não-indivíduos. Se não levarmos em conta tais considerações semânticas, a Lógica de Schrödinger, se formulada da maneira usual, apesar de suas motivações baseadas em interpretações de Schrödinger, em nada difere da lógica clássica, e como vimos brevemente, é difícil de dar sentido para a afirmação de que ela então capta adequadamente a noção de não-indivíduo. A Teoria de Quase-Conjuntos é uma candidata a nos fornecer tal tratamento de coleções de não-indivíduos, e consequentemente, formular uma semântica para a Lógica de Schrödinger, conforme veremos no capítulo 4.

1.4 – TEORIA DE QUASE-CONJUNTOS

A sugestão de se formular uma teoria de Quase-Conjuntos não é interessante apenas para que se possa estabelecer uma semântica adequada para a Lógica de Schrödinger. Existe atualmente um interesse em teorias desse tipo que é independente do problema originado com a semântica destas lógicas. Em particular, um dos problemas que motivou o desenvolvimento da teoria de Quase-Conjuntos, além do que acabamos de mencionar, está relacionado com os fundamentos da matemática e sua utilização em física, em particular, na atual física quântica. Este problema fornece uma razão adicional, independente das Lógicas de Schrödinger, para se elaborar uma teoria de Quase-Conjuntos, mas novamente relacionada com a aparente inadequação da matemática e lógica usuais em tratar com certas particularidades das entidades descritas pelas atuais teorias físicas.

Esta segunda motivação foi sugerida pelo matemático russo Yuri Manin em um congresso realizado em 1974 pela American Mathematical Society. O objetivo desse encontro era avaliar o avanço feito até a época com relação à resolução dos 23 problemas da matemática apresentados por David Hilbert em 1900, no Congresso

Internacional de Paris. As intenções de Hilbert ao propor sua famosa lista de problemas era que eles deveriam servir como uma espécie de guia para as pesquisas dos matemáticos no século XX, contendo alguns dos problemas mais interessantes a serem atacados. Do mesmo modo, no congresso de 1974, uma nova lista de problemas foi apresentada, e o primeiro deles versava sobre os fundamentos da matemática; era o problema proposto por Manin, ao qual estamos nos referindo, também chamado atualmente por alguns de 'Problema de Manin'.

De acordo com Manin, um dos novos rumos a seguir nas pesquisas sobre os fundamentos da matemática seria a busca por novas teorias do infinito, ou seja, novas teorias de conjuntos, nas quais fosse possível levar em conta de maneira mais adequada as particularidades de certas entidades envolvidas nas atuais teorias físicas, como principalmente a possibilidade de serem absolutamente indistinguíveis. O problema, segundo Manin, é que as teorias de conjuntos usuais, mais do que uma extrapolação das noções finitas, são uma extrapolação das noções da física clássica, onde os objetos podem ser contados e ordenados, e assim, mostram-se inadequadas para o tratamento de coleções de algumas das entidades que se apresentam nas novas teorias físicas. Desse modo, o que recomenda Manin é que "se olhe novamente para o mundo", conforme descrito pelas teorias físicas, para que se motive a construção de novas teorias matemáticas, em particular, uma matemática mais condizente com a situação atual na física. A teoria de Quase-Conjuntos é uma tentativa de resposta ao problema de Manin, uma candidata a nova teoria do infinito. Na mesma linha, podemos também citar a teoria de Qua-conjuntos, criada por M. L. Dalla Chiara e G. Toraldo di Francia, que tem propósitos semelhantes, mas da qual não trataremos neste trabalho (ver French e Krause [2006] cap. 5, e também Dalla Chiara, Giuntini e Krause [1998]). Uma observação importante a se fazer é que, apesar de estarmos seguindo a sugestão de Manin, de basear parte do desenvolvimento da matemática nas teorias físicas, não adotamos um naturalismo em filosofia da matemática (naturalismo em um sentido distinto daquele apresentado acima), segundo o qual o desenvolvimento de teorias matemáticas deve estar sempre atrelado às necessidades da física, e não discutiremos neste trabalho a correção ou não desta posição.

Em nosso trabalho, apresentaremos uma versão da teoria de Quase-Conjuntos no capítulo 2. Temos por enquanto duas motivações principais para formular a teoria: fornecer uma semântica mais adequada para a Lógica de Schrödinger e perseguir uma proposta de solução ao problema formulado por Manin, de se buscar uma linguagem que permita que se trate com coleções de objetos que podem ser, em particular, indistinguíveis mas não idênticos. Podemos acrescentar ainda o apelo de Post, segundo quem, em física quântica a não-individualidade deve ser levada em conta desde o princípio (Post [1963]). No entanto, deve-se notar que a teoria pode ser desenvolvida como um sistema formal, de forma independente dessas motivações físicas. Como vimos anteriormente, a vantagem em se tomar uma 'primitive thisness' como o princípio que confere individualidade aos objetos está em que ele permite expressarmos sua ausência formalmente, ao restringirmos a aplicação da identidade a determinados termos da linguagem. Seguiremos, no capítulo 2, esta rota ao considerarmos uma representação dos não-indivíduos na Teoria de Quase-Conjuntos que vamos formular.

No entanto, temos ainda pelo menos mais uma alternativa metafísica em termos da qual podemos entender a individualidade: aquela fornecida pelas teorias de feixes de propriedades. Correspondendo a esta concepção de individualidade, pode-se argumentar, há também alguma maneira de se compreender os não-indivíduos, violando de algum modo algumas das condições impostas por esta concepção para que um item figure como um indivíduo. Se esse raciocínio está correto, o passo seguinte, então, diz respeito à possibilidade de representarmos formalmente a não-individualidade nesta acepção. Podemos tentar formular uma teoria de conjuntos que englobe não-indivíduos no sentido de violar as condições de individualidade segundo esta concepção? Para tanto, aparentemente, teríamos de quebrar a ligação feita entre indiscernibilidade e identidade feita por PII, permitindo que determinados feixes de propriedades fossem instanciados 'mais de uma vez', ou seja, permitir que dois itens instanciem todas as mesmas propriedades.

Esta versão da *Received View* teria de englobar objetos podendo partilhar todas as propriedades sem serem idênticos. Esses, então, seriam os não-indivíduos. O problema agora é: como podemos representar em um sistema formal de teoria de conjuntos sua indistinguibilidade, se esta for entendida em termos de objetos numericamente distintos podendo partilhar todas as mesmas propriedades? Aparentemente, uma primeira sugestão é a de que poderemos definir um símbolo de indistinguibilidade do seguinte modo: $a \equiv b =_{\mathrm{Def}} (A(a) \leftrightarrow A(b))$, onde A é qualquer fórmula da linguagem em questão com apenas uma variável livre, e $A(b)$ resulta de $A(a)$ pela substituição de b por a em algumas ocorrências livres de a, e b é livre para a em $A(a)$. Daí se seguiria em particular que $a \equiv b \rightarrow (A(a) \leftrightarrow A(b))$. Ainda, como é difícil negar que a indistinguibilidade é uma relação reflexiva, teríamos que para qualquer aspirante a não-indivíduo *a*, $a \equiv a$. O problema imediato com esta sugestão é que, como se sabe, as duas propriedades acima, que devem estar dentre aquelas que se usam para caracterizar a nossa candidata a relação de indistinguibilidade, são exatamente os axiomas para a relação de identidade em uma linguagem de primeira ordem, por exemplo, e assim, seguir esta sugestão faz com que novamente a identidade e indistinguibilidade colapsem em uma única e mesma relação.

Não seguiremos buscando representar formalmente não-indivíduos segundo esta acepção. Gostaríamos apenas de enfatizar aqui que este problema, de se introduzir uma relação de indistinguibilidade por definição, como uma relação que se mantém entre objetos que possuem todas as propriedades em comum, ocorre também na teoria de Quase-Conjuntos, caso tentemos seguir este plano. Visando evitar este tipo de situação, a indistinguibilidade é introduzida nesta teoria através de um símbolo primitivo, com axiomas específicos que, como veremos no capítulo 2, permitem que a relação de indistinguibilidade não colapse na noção de identidade. Neste contexto, poder-se-ia sugerir que esta é uma maneira de se violar a condição de individualidade segundo as teorias de feixes de propriedades. No entanto, esta conclusão não pode ser tirada tão rapidamente, pois segundo essas teorias, a indistinguibilidade deve ser entendida em termos de objetos partilhando as mesmas propriedades, uma interpretação que não está assegurada apenas pelos postulados que introduzimos para a noção de indistinguibilidade, e que dificilmente pode ser garantida em um sistema formal sem que colapse na identidade.

Como mencionamos anteriormente, a teoria de Quase-Conjuntos não é a única que busca captar formalmente certas características dos objetos quânticos. Além desta teoria e da teoria de Qua-conjuntos, existem, como é bem sabido, outras lógicas e teorias de conjuntos, que foram propostas com diversos objetivos, em geral através de formulações algébricas na matemática clássica. No entanto, o interesse principal para se propor tais lógicas não está, em geral, diretamente relacionado com o problema da não-individualidade e ontologia das teorias quânticas, mas sim em outros aspectos específicos, como, por exemplo, o fato de que a conjunção e a disjunção não são distributivas. Não trataremos destas outras lógicas aqui, por estarmos buscando neste trabalho, como argumentamos acima, um tratamento matemático que consideramos mais adequado para a noção de não-individualidade (para uma apresentação geral de vários sistemas de lógicas quânticas, ver Dalla Chiara e Giuntini [2002]).

1.5 – CARDINAIS, ORDINAIS E INDIVIDUALIDADE

Introduzindo a noção de indistinguibilidade como um símbolo primitivo em nossa teoria de Quase-Conjuntos, podemos formar coleções de objetos que podem ser indistinguíveis sem que sejam idênticos, e aos quais nem a identidade e nem a diferença se aplicam. Agora, gostaríamos de chamar a atenção para um novo problema: como dissemos acima, assumiremos que os não-indivíduos são tais que podemos agregá-los em coleções de mais de um objeto, sendo todos eles absolutamente indistinguíveis, e podemos, também, pelo menos em princípio, saber quantos deles há na dita coleção. Deste modo, precisamos garantir que a noção de cardinalidade, quantidade de elementos, faz sentido para essas coleções. No entanto, sem a noção de identidade, que não se aplica aos objetos que compõem esta coleção, como podemos garantir que não teremos problema para introduzir esta noção? Notemos que, sem poder fazer uso da identidade, não poderemos utilizar as maneiras mais comuns de se introduzir esta noção nas teorias de conjuntos usuais, seja por axiomas, seja através da noção de ordinal, e assim, aparentemente, teremos que buscar outro meio para atribuir um cardinal a cada coleção da teoria.

Uma das soluções que se encontrou para este problema nas apresentações usuais da teoria de Quase-Conjuntos foi a introdução desta noção através da adoção de um novo símbolo primitivo na linguagem, que atribui um cardinal a qualquer coleção, governado por axiomas que garantem que este símbolo generaliza a noção usual de cardinalidade para qualquer coleção da teoria. Assim, o problema inicial, que consistia principalmente na atribuição do cardinal às coleções, é superado através da introdução de um símbolo novo na linguagem e de axiomas. Resta ainda, no entanto, o problema dos ordinais: com esta estratégia garantimos que cada coleção tem um cardinal, mas deste modo ainda não podemos garantir que possuem um ordinal. Aparentemente, não podemos garantir que estas coleções de objetos indistinguíveis, na teoria de Quase-Conjuntos, terão um ordinal associado, pois, para isso, seguindo o procedimento usual, teríamos que identificar os elementos da coleção, por exemplo, para indicarmos qual será o primeiro elemento da coleção, o segundo, ou o menor elemento de determinada sub-coleção relativamente à ordem induzida pela atribuição do ordinal. Apesar disso, nada impede que se defina cardinalidade para estas coleções, através de algum meio que não o usual, que depende do conceito de ordinal.

Estas considerações sobre cardinalidade e ordinalidade estão relacionadas com a discussão sobre a não-individualidade destes objetos. Segundo alguns autores, como Toraldo di Francia ([1978] p. 64, [1998] p. 27), as coleções de objetos quânticos seriam tais que, por serem estes objetos indistinguíveis, poderíamos associar a elas apenas um cardinal, mas não um ordinal, conforme nossa discussão acima. A conseqüência disto é que não podemos contar estes objetos, no sentido usual, atribuindo um elemento de um ordinal finito a cada membro da coleção. Ainda, segundo outros autores, como Lowe ([1997], [1998]), "Um princípio de individuação, podemos dizer, combina um critério de *identidade* com um princípio de *unidade*: itens contáveis são separados de outros do seu tipo de uma maneira distintiva que é determinada pelo conceito sortal sob o qual eles caem" ([1997], p. 616. Uma proposta semelhante pode ser vista também em Loux [1998] p. 244). Assim, a própria condição para ser um indivíduo, segundo Lowe, está associada a essa noção de que podemos tomar uma coleção de itens e determinar uma bijeção entre os elementos desta coleção e um ordinal. Seguindo este raciocínio, se admitirmos que não podemos, como sugere Toraldo di Francia, entre outros, associar um ordinal à coleções desses objetos, temos que os objetos em questão violam as duas condições para serem indivíduos. No entanto, para aceitar esta conclusão, é preciso admitir que o único modo de contar elementos de uma coleção pressupõe que devemos identificá-los.

No capítulo 3 de nosso trabalho, seguindo algumas idéias apresentadas no artigo de G. Domenech e F. Holik [2007], vamos propor que, se aceitamos que a teoria de Quase-Conjuntos proposta no capítulo 2 captura de algum modo a noção de não-indivíduo conforme a estamos entendendo neste trabalho, então, pelo menos no contexto dessa teoria, podemos introduzir uma diferente noção de contagem que permite estabelecermos um "procedimento de contagem" de objetos que são não-indivíduos. Essa noção de contagem será uma conseqüência de um objetivo mais amplo do capítulo, o de introduzir a noção de cardinal de uma coleção por definição, sem que tenhamos que apelar para novos axiomas na teoria, em uma tentativa de superar as dificuldades apontadas acima no caso de coleções de não-indivíduos. Com isto, acreditamos que novos rumos podem ser tomados, por exemplo, na pesquisa sobre a própria noção de contagem, e ainda, na definição dos predicados sortais quânticos, mas não vamos explorar estas possibilidades aqui (sobre predicados sortais quânticos, ver French e Krause [2006] p. 348).

1.6 – ESTRUTURA GERAL DO TRABALHO

Estas são as questões que abordaremos neste trabalho. Vamos dar agora uma visão geral da estrutura do texto e de como os problemas acima mencionados são abordados em cada capítulo. Primeiramente, no Capítulo 2, vamos apresentar a teoria de Quase-Conjuntos, seus axiomas e as motivações para os axiomas. Esta é a teoria que permite que se trate com coleções de objetos indistinguíveis, e formaliza a noção de não-indivíduo conforme explicamos anteriormente. Nesta primeira apresentação, ainda consideraremos a noção de cardinalidade como atribuída por axiomas e um símbolo primitivo, o símbolo qc para quase-cardinais. Também, neste capítulo, mencionaremos um problema sobre os fundamentos da teoria de Quase-Conjuntos, relativamente à sua lógica subjacente.

No capítulo 3, o problema relativo aos quase-cardinais será abordado. Baseando-nos em uma definição de Domenech e Holik (ver Domenech e Holik [2007]), apresentaremos uma definição de quase-cardinais finitos, válida para coleções finitas em geral, mesmo para aquelas que possuam elementos indistinguíveis. Nossa definição permite que mais alguns problemas sejam discutidos, como por exemplo, a validade ou não do Princípio de Hume, que garante que duas coleções possuem o mesmo cardinal se e somente se há uma bijeção entre elas e, ainda, podemos discutir uma maneira de estabelecer um procedimento de contagem de objetos indistinguíveis, de um modo distinto do usual, sem que seja necessário identificar os elementos da coleção.

Por fim, no capítulo 4, apresentamos uma semântica para a Lógica de Schrödinger baseada na teoria de Quase-Conjuntos. Faremos uma exposição da Lógica de Schrödinger de primeira ordem e mostraremos como é possível generalizar a semântica usual, feita em teorias de conjuntos usuais, em uma teoria de Quase-Conjuntos, de modo que as motivações iniciais para a Lógica de Schrödinger sejam mantidas. Ainda, podemos mostrar como estabelecer, utilizando a teoria de Quase-Conjuntos como metalinguagem, uma semântica para linguagens de primeira ordem em geral, de modo que o domínio de interpretação pode conter objetos aos quais as noções de identidade ou diferença não se apliquem sem que seja necessário que se tenham as restrições sintáticas da Lógica de Schrödinger. Ao fornecer esta semântica, teremos um sistema de lógica distinto da clássica: seus axiomas serão os da lógica clássica, mas sua semântica será feita na Teoria de Quase-Conjuntos. Este será o sistema de lógica (se entendermos por ‘lógica’ um sistema dedutivo de certo tipo dotado de uma semântica) que posteriormente diremos que é a lógica subjacente à teoria de Quase-Conjuntos. Com isto, esperamos contribuir para resolver alguns problemas relativos à interpretação dos quantificadores na teoria de Quase-Conjuntos, problema que será formulado no capítulo em questão, e também, como dissemos antes, no capítulo 2.

Antes de passarmos para o próximo capítulo, convém fazermos uma observação relevante, sobre um fato que estivemos pressupondo nas discussões anteriores, e que vamos continuar pressupondo como motivação para o restante deste trabalho: o tratamento dos objetos quânticos como partículas. Sabemos que há situações nas quais a noção de partícula não se aplica adequadamente, em que a noção de campo é que desempenha um papel fundamental. No entanto, não trataremos desses problemas e outros envolvendo campos, nem conduziremos a discussão para as Teorias Quânticas de Campos, ou seja, para os propósitos deste trabalho, nos limitaremos a considerar os objetos dos quais trata a Mecânica Quântica não-relativística como sendo partículas (para uma análise das diferentes formas em que a noção de partícula está implícita no trabalho dos físicos, ver Falkenburg [2007], cap. 6).

CAPÍTULO 2 - A TEORIA DE QUASE-CONJUNTOS Q

Neste capítulo, apresentamos a teoria de Quase-Conjuntos Q, fornecendo seus axiomas com suas respectivas motivações, e uma parte de seu desenvolvimento formal. Não iremos muito longe neste desenvolvimento, mostrando apenas o suficiente para se ter uma idéia de como a teoria funciona e também para fornecer o material que utilizaremos nos capítulos seguintes.

2.1 – A LINGUAGEM DE Q E A LÓGICA SUBJACENTE

Vamos apresentar agora com detalhes a teoria de Quase-Conjuntos Q. Nossa exposição será baseada na formulação da teoria conforme ela aparece em Krause [2007] cap. 4, e várias discussões pertinentes também podem ser vistas em French e Krause [2006] cap. 7. Trata-se de uma teoria formal de primeira ordem, baseada em postulados como aqueles formulados para o cálculo de predicados clássico de primeira ordem sem igualdade (falaremos mais sobre a lógica subjacente a Q no capítulo 4). Assumiremos como primitivos os seguintes símbolos lógicos:

1) conectivos: $\neg$ (negação) e $\rightarrow$ (implicação);
2) quantificador universal: $\forall$ (para todo);
3) uma coleção infinita enumerável de variáveis individuais indexadas pelos números naturais: x_0, x_1, x_2,...;
4) pontuação: ( ) , (parênteses e vírgula).

Os outros conectivos, bem como o quantificador existencial, podem ser introduzidos por definição abreviativa da maneira usual. Para facilitar a escrita de fórmulas posteriormente e não sobrecarregar na notação, usaremos x, y e z como metavariáveis para variáveis individuais.

A linguagem específica da teoria Q é composta do seguinte conjunto de símbolos primitivos $L^Q = \{m, M, Z, \in, \equiv, qc\}$. Por abuso, chamaremos de linguagem de Q o conjunto de símbolos lógicos e não-lógicos apresentados, que denotaremos por igualmente por L^Q. Antes de passarmos a considerações sobre o peso e o significado intuitivo destes símbolos, apresentamos a definição de expressões e termos da linguagem:

Def. [Expressão de L^Q] Uma expressão de L^Q é uma seqüência finita de símbolos da linguagem L^Q.

Def. [Termo de L^Q] Um termo de L^Q é uma variável individual ou uma expressão da forma qc(t), onde t é um termo de L^Q. Apenas esses são termos.

Usaremos t, w, u, como metavariáveis para termos. Para proceder com a definição de fórmula, convém agora sermos mais explícitos sobre os símbolos específicos de L^Q, sua aridade e significado intuitivo:

1) m, M e Z são símbolos de predicados unários. No caso dos dois primeiros, podemos ler intuitivamente m(t) como 't é um micro-átomo' e M(t) como 't é um macro-átomo', respectivamente; quanto a Z, Z(t) pode ser lido como 't é um conjunto';

2) $\in$ (pertinência) e $\equiv$ (indistinguibilidade) são símbolos de relações binárias. Dados t e w, lemos $t \in w$ como 't pertence a w', como é usual, e o símbolo de indistinguibilidade, quando temos $t \equiv w$, lê-se 't é indistinguível de w';

3) qc é um símbolo funcional de aridade 1, tal que qc(t) denotará intuitivamente o quase-cardinal de t, e cujos axiomas buscam estender a noção usual de cardinal para quase-conjuntos em geral.

Em breve faremos mais comentários sobre estes símbolos, e apresentaremos postulados para reger seu comportamento.

A definição usual de fórmula pode agora ser apresentada, mas queremos desde já relembrar e enfatizar que $t = w$ não figura entre as fórmulas de nossa linguagem, para quaisquer que sejam t e w, pois o símbolo = não faz parte de L^Q.

Def. [Fórmula atômica de L^Q] Dados t e w da linguagem, são fórmulas atômicas m(t), M(t), Z(t), $t \equiv w$ e $t \in w$.

Def. [Fórmula de L^Q] São fórmulas:

1) As fórmulas atômicas;

2) Se α é fórmula, então $\neg\alpha$ também é fórmula;

3) Se α e β são fórmulas, então $\alpha \rightarrow \beta$ é fórmula;

4) Se α é fórmula e x é uma variável individual, então $\forall x \alpha$ é fórmula;

5) Apenas essas são fórmulas.

Complementam esta exposição os postulados lógicos para a lógica de primeira ordem sem igualdade (por postulados entenderemos aqui axiomas, esquemas de axiomas e regras de derivação) e os postulados específicos da teoria Q. Vamos assumir como postulados lógicos aqueles fornecidos por Mendelson [1987], pp. 55-56, que são os da lógica elementar clássica sem identidade.

Antes de passarmos para a apresentação dos postulados específicos, gostaríamos de mencionar uma questão que pode ter sido sugerida pela leitura das noções e das definições que apresentamos, e que pode parecer problemática de um ponto de vista fundacional: ao apresentarmos a linguagem da teoria Q, acima, fizemos uso, mesmo que implicitamente, de vários conceitos de teoria de conjuntos intuitiva, como coleções, coleções enumeráveis, definições por recursão e seqüências, sendo que essas pressupõem uma noção de função e de uma coleção dos números naturais, por exemplo. Isto significa que a teoria Q pressupõe ou depende de alguma teoria de conjuntos clássica, mantida geralmente ao nível informal para que possa ser formulada? Essa constatação aparentemente inócua torna-se problemática se considerarmos que até hoje, pelo menos de um ponto de vista filosófico, não se conseguiu representar adequadamente os não-indivíduos nas teorias clássicas de conjuntos, de modo que o projeto de se erigir uma teoria que trate de coleções de não-indivíduos poderia, nestas circunstâncias, ser acusado de fracassar desde o começo, ao pressupor uma teoria clássica de conjuntos.

Outro problema relacionado ao que acabamos de mencionar diz respeito ao uso dos quantificadores na lógica subjacente à Q. Como dissemos, os axiomas da lógica subjacente são aqueles do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem Clássico sem identidade. Utilizando-se a semântica tarskiana usual feita para as teorias formuladas tendo-se esta lógica como lógica subjacente, é bastante conhecido que, por exemplo, ao afirmarmos que uma fórmula de L^Q como $\exists x m(x)$ é verdadeira em certa interpretação I, estamos assumindo pelo menos os seguintes fatos: 1) existe um conjunto que é I(m), a extensão de m, e 2) existe um objeto I(x) que pertence ao domínio de interpretação (que é também um conjunto), tal que I(x) pertence a I(m). Assim, novamente, aparentemente estamos pressupondo uma teoria como ZF ao assumirmos que a lógica subjacente é a clássica, e como já vimos brevemente acima, em ZF, aparentemente, todos os objetos tratados são indivíduos, de modo que nossas motivações oriundas da ontologia parecem ser violadas com esta formulação de Q, em particular, pelo fato de a lógica subjacente de ZF ser a lógica clássica de primeira ordem (pode-se acrescentar que o mesmo valeria para uma formulação de Q baseada nos axiomas da lógica clássica de segunda ordem, ou de ordens superiores). Trata-se aqui do mesmo problema que aparece no caso da semântica para as Lógicas de Schrödinger mas, agora, relativamente à interpretação da linguagem de Q.

Para resolver detalhadamente os problemas formulados nos dois parágrafos anteriores, precisaríamos já ter desenvolvido até certo ponto a teoria Q, para podermos mostrar que há uma 'cópia' de ZU em Q, onde ZU denota a teoria de conjuntos de Zermelo, semelhante à ZFU, com átomos, com axioma da fundação e escolha, porém, sem o axioma da substituição (sobre ZU, ver Franco de Oliveira [1982], cap. 14, onde ela aparece como ZC). Isto significa que todas as noções que utilizamos em ZU podem ser desenvolvidas em Q, naquilo que posteriormente chamaremos de sua parte 'clássica'. Assim, a teoria subjacente à metalinguagem que estamos utilizando, caso se queira considerar seriamente uma possível resposta para a primeira questão acima, pode ser dita ser Q, mantida ao nível informal, ou seja, podemos argumentar que estamos operando na parte 'clássica' de Q, onde as noções mencionadas de seqüência, coleção, enumerabilidade, entre outras, estão definidas e podem ser utilizadas, sem pressupor para isso uma teoria clássica de conjuntos, que aparentemente nos comprometeria com indivíduos. Entraremos em mais detalhes sobre este problema mais adiante (seção 2.5), após termos a teoria Q mais desenvolvida, mas por enquanto é importante não confundir neste tipo de situação os dois sentidos em que empregamos a teoria Q: a distinção fundamental entre a teoria que se utiliza como teoria de fundo, na metalinguagem, e a teoria que se apresenta como um sistema formal para estudo (ver também sobre este assunto, o livro de Ebbinghaus, Flum e Thomas [1994]). A segunda questão será tratada no capítulo 4, onde faremos algumas considerações sobre a semântica para a lógica subjacente à teoria Q. É importante ter em mente que os axiomas para essa lógica são os da lógica clássica sem identidade, o que dá conta de seu (por enquanto) aspecto sintático, mas ainda não dissemos nada sobre como se deve fazer sua semântica.

Antes de começarmos a apresentação de Q, descrevendo suas características mais básicas, é importante mencionar que tipo de abordagem se está seguindo aqui relativamente às definições. A menos que o contrário seja mencionado explicitamente, neste trabalho utilizaremos para 'introduzir' símbolos na linguagem de Q definições nominais ou abreviativas. Assim, uma definição é sempre dada na metalinguagem, e será da forma $A =_{Def} B$, onde A é a nova expressão que está sendo definida, chamada *definiendum*, e B é a expressão em termos da qual A está sendo definida, que contém apenas símbolos que fazem parte da linguagem primitiva e eventualmente expressões já definidas previamente, chamada *definiens*. Em breve entraremos em contato com as primeiras definições da teoria.

Passamos agora para a apresentação e discussão dos postulados específicos. Vamos dividir a apresentação destes postulados em três grupos: no primeiro grupo, teremos postulados que nos mostram como se relacionam os símbolos específicos da linguagem, sem postular a existência de nenhum objeto. No segundo grupo, teremos os axiomas de caráter existencial, que terão sua formulação baseada nos axiomas de ZU, e por fim, no terceiro grupo, são apresentados os axiomas para quase-cardinalidade, que serão abandonados no terceiro capítulo deste trabalho. Cada um dos três grupos tem motivações que não são necessariamente independentes entre si, mas a divisão que aqui adotamos tem motivação visando puramente à conveniência expositiva. Ainda, é importante deixar claro que estamos assumindo que nossa teoria permite a existência de átomos, mas não postularemos explicitamente que existem átomos, seguindo assim o procedimento usual nas apresentações de teorias de conjuntos com átomos.

2.2 – POSTULADOS DO PRIMEIRO GRUPO

Comecemos com o primeiro grupo de postulados. Queremos descrever uma teoria sobre átomos e coleções formadas a partir desses átomos, coleções de coleções de átomos, coleções de coleções formadas a partir de uma coleção vazia, etc., de modo semelhante à teoria ZU. No entanto, tendo em vista as motivações da física quântica que queremos captar em Q, teremos dois tipos de átomos, os átomos no sentido usual de ZU e os átomos que representarão na interpretação pretendida as partículas indistinguíveis, que estão pelos não-indivíduos. Nossos símbolos de predicados primitivos M e m servirão para distinguir entre esses dois tipos de átomos. Uma primeira exigência razoável a se fazer neste ponto é que nenhum objeto possa ser ao mesmo tempo um átomo dos dois tipos, e devemos introduzir esta exigência através dos axiomas de nossa teoria. Ainda, como usual em ZU, as coleções da teoria, que chamaremos de quase-conjuntos ou q-sets, serão por definição os objetos que não são átomos, dividindo o ‘domínio de discurso’ em átomos e coleções. Temos especificamente:

Q1) $\forall x(\neg m(x) \vee \neg M(x))$.

Def. [x é um q-set] $Q(x) =_{Def} \neg m(x) \wedge \neg M(x)$.

São conseqüências imediatas de Q1 que $\forall x(m(x) \rightarrow \neg M(x))$ e $\forall x(M(x) \rightarrow \neg m(x))$. Ainda visando fazer refletir em Q nossa concepção intuitiva sobre o funcionamento dos átomos, podemos conceber que átomos tenham partes das quais são compostos, no sentido de figurarem em alguma relação do tipo 'parte de' de alguma mereologia, mas é razoável esperar que eles não contenham elementos, no sentido da relação de pertinência conjuntista. Não trataremos aqui da possibilidade de se introduzir uma relação 'parte de' em Q, que vigoraria entre átomos, fazendo a ligação entre m-átomos e M-átomos, nos limitando a garantir que átomos não têm elementos, ou seja, se algo tem elemento, então é um q-set. O seguinte postulado dá conta desta característica dos átomos:

Q2) $\forall x \forall y(x \in y \rightarrow Q(y))$.

O motivo para introduzirmos dois tipos de átomos, como já dissemos ao apresentarmos as motivações para Q, é que desejamos que um dos tipos de átomos, os m-átomos, sejam tais que a identidade e a diferença não se aplique a eles. Esta falha em figurar com sentido na relação de identidade representa formalmente sua não-individualidade, se considerarmos, como discutimos no capítulo introdutório, que o princípio que confere a individualidade é algo como um 'primitive thisness', expresso em termos da auto-identidade. Assim, lembrando, o que caracteriza a individualidade é algo próprio a cada indivíduo, o fato de ser idêntico a si próprio, e o não-indivíduo falha em satisfazer esta condição. Para os objetos que não são indivíduos, vale, no entanto, a noção de indistinguibilidade, que foi introduzida como primitiva na teoria. Como não temos um símbolo de identidade na linguagem, queremos introduzi-lo por definição, de modo que essas motivações sejam preservadas, ou seja, o símbolo de identidade não deve se aplicar às entidades que satisfazem o predicado m. A seguinte definição nos parece adequada para estes fins:

Def. [Identidade Extensional] $w =_E t =_{Def} [(Q(w) \wedge Q(t) \wedge \forall z(z \in w \leftrightarrow z \in t)) \vee (M(w) \wedge M(t) \wedge \forall z(w \in z \leftrightarrow t \in z))]$.

É importante enfatizar que não estamos introduzindo um símbolo de identidade na linguagem. O que temos é que, quando pudermos demonstrar a fórmula do *definiens* em Q, então poderemos abreviá-la metalinguisticamente, escrevendo-a como a identidade extensional, e inversamente, quando tivermos a fórmula do *definiendum*, poderemos, caso isto facilite a operação, utilizar novamente em seu lugar a fórmula que a define. Pode-se perceber que o primeiro dos disjuntos da definição, além de exigir que os objetos sejam q-sets, utiliza uma fórmula que é o antecedente do condicional da fórmula do Axioma da Extensionalidade conforme este axioma é usualmente formulado nas teorias de conjuntos usuais (por exemplo, Enderton [1977], Fraenkel, Bar-Hillel e Levy [1984]). Para garantir que a identidade extensional terá todas as propriedades da identidade (no que diz respeito a q-sets e M-átomos) conforme apresentada usualmente nas teorias de conjuntos temos ainda o seguinte postulado:

Q3) $\forall x \forall y(x =_E y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$, onde $A(x)$ é uma fórmula na qual x figura livre e $A(y)$ é uma fórmula obtida de $A(x)$ a partir da substituição de algumas ocorrências livres de x por y, tal que y é livre para x em $A(x)$.

Temos então, com Q3 e a definição de identidade extensional, o seguinte resultado:

Teorema 1) Se $Q(x)$ ou $M(x)$, então $x =_E x$, ou seja, a relação de identidade extensional é reflexiva.

Dem. É imediata a partir da definição de identidade extensional e alguns fatos elementares da lógica subjacente à teoria. Pois suponha que $Q(x)$. Sabemos que $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in x)$ é teorema do cálculo de predicados subjacente à teoria. Temos deste último fato e da hipótese que $(Q(x) \wedge Q(x) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in x))$, e daí, com a regra do cálculo proposicional de introdução da disjunção, obtemos a fórmula desejada, $[(Q(x) \wedge Q(x) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in x)) \vee (M(x) \wedge M(x) \wedge \forall z(x \in z \leftrightarrow x \in z))]$, que é abreviada por $x =_E x$. De modo análogo, demonstra-se o caso $M(x)$.

c.q.d.

Faremos a convenção daqui por diante de que, para remeter aos teoremas já demonstrados, utilizaremos apenas a expressão abreviada 'Tn', onde n é o número do teorema em questão. Com Q3 e T1 podemos obter as outras propriedades da identidade: simetria e transitividade (para as demonstrações destes fatos, basta seguir Mendelson [1987] cap. 2), mantendo em mente que ela não se aplica a m-átomos. Assim, a identidade extensional tem todas as características da identidade usual relativamente aos objetos aos quais ela se aplica. Também podemos obter facilmente o seguinte resultado:

Teorema 2) Se $M(x)$ e $x =_E y$ então $M(y)$. Se $Z(x)$ e $x =_E y$ então $Z(y)$.

Dem. Suponha que $M(x)$ e $x =_E y$. Uma instância de Q3 é $(x =_E y \rightarrow (M(x) \rightarrow M(y))$, de onde obtemos, por duas aplicações de modus ponens, que $M(y)$. De modo análogo se demonstra o caso de $Z(x)$.

c.q.d.

Passamos agora para a relação de indistinguibilidade. Com ela, visamos formalizar o fato de que os objetos com os quais trata a teoria podem ser absolutamente indistinguíveis, no sentido de partilhar todas as propriedades. No caso dos m-átomos, em especial, isso deve ser válido sem que esta indistinguibilidade implique identidade numérica. O fato de que a identidade não está definida para estes objetos nos indica que neste caso estas relações serão distintas. É razoável supor que ela satisfaça as propriedades de uma relação de equivalência, ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva, mas, para que ela não colapse na identidade usual, não podemos permitir que seja uma $\in$-congruência em geral (conforme terminologia, por exemplo, de Fraenkel, Bar-Hillel e Levy [1984]), ou seja, não podemos permitir que, sempre que tivermos $x \equiv y$ e $x \in z$ então $y \in z$, e que de $x \equiv y$ e $z \in x$ infiramos $z \in y$, o que, dito de outro modo, significa que a indistinguibilidade não é em geral compatível com a pertinência. É fácil se perceber a motivação intuitiva subjacente a esta exigência, pois se x e y forem m-átomos indistinguíveis, e x está em algum q-set z, então y não deve necessariamente estar em z. Notemos ainda que a relação de indistinguibilidade não é ela mesma uma relação no sentido quase-conjuntista usual, como apresentaremos abaixo, pois não é um q-set de pares ordenados. Temos:

Q4) São axiomas de Q as seguintes fórmulas:

$\forall x(x \equiv x)$ ($\equiv$ é reflexiva);

$\forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$ ($\equiv$ é simétrica);

$\forall x \forall y \forall z((x \equiv y \wedge y \equiv z) \rightarrow x \equiv z)$ ($\equiv$ é transitiva).

Apesar de impormos a restrição de que a indistinguibilidade não é compatível com a relação de pertinência no caso dos m-átomos, gostaríamos que nos casos de objetos clássicos as relações de identidade extensional e indistinguibilidade coincidissem, como prega a Lei de Leibniz nestes contextos, ou seja, queremos que objetos clássicos indistinguíveis sejam idênticos, e a recíproca também deve valer, exatamente como ocorre na matemática usual. Para atingir este objetivo, introduzimos agora uma definição e um novo postulado. Lembremos que $Z(x)$ significa que x representa em Q um conjunto no sentido usual (falaremos mais sobre Z em breve). Os "objetos clássicos" da teoria Q então são os M-átomos e os objetos que satisfazem o predicado Z. Vamos nos referir a eles de maneira abreviada, seguindo Zermelo, como as *Dinge* da teoria, as coisas clássicas:

Def. [x é uma Ding] $D(x) =_{Def} M(x) \vee Z(x)$.

Q5) $\forall_D x \forall y(x \equiv y \rightarrow x =_E y)$.

Na formulação de Q5 fizemos uso de quantificadores relativizados. Em geral, para uma fórmula F, quando queremos restringir o escopo do quantificador aos objetos que satisfazem F, escrevemos $\forall_F xB$. Esta é simplesmente uma maneira de abreviar a escrita de $\forall x(F(x) \rightarrow B)$. No caso do quantificador existencial, o quantificador relativizado $\exists_F xB$ abrevia a fórmula $\exists x(F(x) \wedge B)$. Empregaremos mais algumas vezes quantificadores relativizados adiante em nossa exposição, ficando claro como re-escrever estas fórmulas novamente na linguagem de Q, caso se deseje. Um resultado importante que se segue é o que nos garante que para as Dinge da teoria, identidade extensional e indistinguibilidade são equivalentes. Ainda devemos notar que não é preciso formular o axioma Q5 exigindo que tanto x quanto y sejam Dinge, pois este fato agora pode ser derivado, ou seja, podemos, com esta formulação mais forte, mostrar que objetos indistinguíveis de Dinge são também Dinge. Com isto, Q5, T3 e T4, teremos a equivalência, para as Dinge, entre identidade extensional e indistinguibilidade. Temos então:

Teorema 3) Se $D(x)$ e $x =_E y$, então $x \equiv y$.

Dem. Se $D(x)$, então $M(x)$ ou $Z(x)$. Suponha que $M(x)$. Como por hipótese $x =_E y$, então, por T2, $M(y)$. Seja uma instância de Q3 $(x =_E y \rightarrow (x \equiv x \rightarrow x \equiv y))$. Então, por Modus Ponens, com uso de Q4, temos $x \equiv y$.

c.q.d.

Teorema 4) Se $M(x)$ e $x \equiv y$, então $M(y)$. Se $Z(x)$ e $x \equiv y$, então $Z(y)$.

Dem. Se $M(x)$, então $D(x)$. Como por hipótese temos também $x \equiv y$, então por Q5 temos também que $x =_E y$. Por T2 temos então que $M(y)$. De modo inteiramente análogo se demonstra o caso em que $Z(x)$.

c.q.d.

Como se pode notar, já temos, com a demonstração deste teorema, as seguintes propriedades, que relacionam o símbolo de indistinguibilidade com os símbolos de predicado M e Z: se M(x) e $x \equiv y$, então M(y), e, se Z(x) e $x \equiv y$, então Z(y). O que podemos dizer com relação aos símbolos m e Q? Para responder a esta pergunta vamos precisar do seguinte postulado:

Q6) $\forall x \forall y(m(x) \wedge x \equiv y \rightarrow m(y))$.

Agora podemos tratar do caso relativamente a Q:

Teorema 5) Se Q(x) e $x \equiv y$ então Q(y).
Dem. Suponha que Q(x) e $x \equiv y$, mas que não é o caso que Q(y). Pela definição de q-sets, m(y) ou M(y). Como por hipótese temos $x \equiv y$, se m(y) for o caso, então, por Q6 e pela simetria de $\equiv$, temos m(x), contradizendo a hipótese de que Q(x) (esta hipótese implica em particular que $\neg m(x)$). Do mesmo modo, se M(y) for o caso, da hipótese que $x \equiv y$, por T4 e simetria da relação $\equiv$, temos M(x), novamente contradizendo a hipótese de que Q(x) (que implica em particular que $\neg M(x)$). Assim, por redução ao absurdo, temos que Q(y).

c.q.d.

Com esses resultados buscamos garantir que a relação $\equiv$ de indistinguibilidade é realmente uma relação de equivalência que não é necessariamente uma congruência, por não ser possível provar que ela é compatível em geral com a pertinência, como comentamos acima que seria razoável para caracterizá-la, apesar de ser compatível com M, m, Z e Q. Assim, garantimos que identidade extensional e indistinguibilidade não colapsam na mesma relação.

Além de q-sets de átomos em geral, queremos que seja possível obter em Q as coleções que representem coleções clássicas, ou seja, coleções que serão cópias de coleções de ZU, contendo apenas M-átomos ou coleções formadas a partir do q-set vazio e que sejam tais que m-átomos não estejam envolvidos em nenhuma etapa da construção de seus elementos. Coleções deste tipo serão identificadas pelo predicado Z da teoria, e serão chamadas de conjuntos, sendo que em geral ficará claro pelo contexto quando estamos nos referindo a conjuntos neste sentido, como cópias em Q dos conjuntos de ZU, ou conjuntos no sentido usual, em alguma teoria clássica de conjuntos. Para garantir que estes conjuntos satisfazem nossas restrições, vamos postular que os objetos que satisfazem Z são tais que seus elementos são ou M-átomos ou objetos que satisfazem Z. Com isto vamos garantir que, intuitivamente falando, conforme formos examinando os elementos de x, os elementos de seus elementos, etc., vamos encontrar apenas M-átomos e conjuntos. Ainda, para não multiplicar desnecessariamente a terminologia e facilitar a obtenção de alguns resultados, vamos postular que todos os conjuntos são q-sets (a recíproca certamente não é verdadeira na presença de m-átomos ao formarmos coleções). Temos:

Q7) $\forall x(Z(x) \rightarrow Q(x))$;

Q8) $\forall_Q x \forall y((y \in x \rightarrow D(y)) \leftrightarrow Z(x))$.

Quando nos restringimos aos conjuntos, considerando-se os postulados para construção de q-sets dados abaixo, podemos obter em Q toda a matemática que se obtém em ZU. Isto ficará claro mais adiante, quando mostrarmos como se pode estabelecer uma tradução da linguagem de ZU em Q.

2.3 – POSTULADOS DO SEGUNDO GRUPO

Por enquanto ainda não especificamos como as coleções vão ser construídas, quais serão os princípios que vão balizar a noção de q-set, mas já podemos antecipar uma classificação dos tipos de coleções que teremos em Q, e que queremos que os postulados nos permitam estabelecer:

1) Conjuntos: são os q-sets que satisfazem o predicado Z. Seus elementos são ou M-átomos ou outros q-sets que satisfazem Z. Note que as coleções de ZC (a teoria de Zermelo sem átomos) estão contidas aqui como um caso particular, quando temos apenas q-sets formados a partir do vazio, onde átomos (nem m-átomos, nem M-átomos) não aparecem em nenhuma etapa da obtenção de qualquer um de seus elementos.

2) Q-sets puros: são os q-sets que contêm apenas m-átomos como elementos.

3) Q-sets mistos: possuem elementos dos dois tipos acima. Podem ter como elementos tanto objetos clássicos quanto m-átomos ou q-sets puros. Note que os dois casos acima são casos particulares deste tipo de q-set.

Temos que 1 e 2 acima dividem os q-sets em duas classes disjuntas, falando intuitivamente.

Dentre os postulados dados até agora nenhum afirmava a existência de qualquer objeto, eles tinham o objetivo de estruturar nossa concepção de átomos e q-sets, estabelecer como se comportam alguns dos símbolos primitivos da linguagem. A partir de agora, passamos ao segundo grupo de postulados que visam estabelecer quais são os q-sets que existem relativamente a Q, assim como, por exemplo, os postulados usuais de ZFC que possuem caráter existencial. Estes postulados serão, dada nossa motivação de que Q seja semelhante a ZU, adaptações dos postulados de ZU à linguagem L^Q, e por isso não os comentaremos muito detalhadamente, por serem já conhecidas as suas motivações intuitivas e os desenvolvimentos a partir deles em ZU (cf. Shoenfield [1977], Boolos [1983]). Certamente poderíamos proceder de outra forma, escolhendo outra teoria como Kelley-Morse, von Neumann-Bernays-Gödel ou ainda a teoria NF de Quine-Rosser, como teoria na qual nos basear, mas não faremos isto aqui.

Ainda, é importante notar que estamos utilizando ZU como teoria na qual vamos nos basear, e não ZFU, pois, em geral, para as aplicações às quais a teoria Q se destina, não são necessárias mais do que coleções finitas de m-átomos e a matemática usual, que, por sua vez, também não depende do axioma da substituição. Com algumas adaptações, poderíamos enunciar também este axioma aqui, e então, termos uma teoria de Quase-Conjuntos baseada em axiomas ao estilo ZFU, mas não o faremos (a apresentação da teoria com este axioma pode ser vista em French e Krause [2006], em particular, para a formulação do axioma da substituição em Q, ver p. 291). Começamos estabelecendo a existência do q-set vazio:

Q9) $\exists_Q x \forall y(\neg y \in x)$.

Podemos agora demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 6) O q-set postulado por Q9 é um conjunto, e é único.
Dem. Por Q9, existe um q-set x tal que $\forall y(\neg y \in x)$. Mas Q8 implica que em particular $(y \in x \rightarrow D(y)) \rightarrow Z(x)$. Pela lógica subjacente, temos $\neg y \in x \rightarrow (y \in x \rightarrow D(y))$, de onde obtemos por Modus Ponens que $(y \in x \rightarrow D(y))$, e daí, $Z(x)$. Para provar a unicidade suponha que por Q9 temos x e x' tais que para qualquer y, $\neg y \in x$ e $\neg y \in x'$. Novamente, pela lógica subjacente, temos em particular que $\neg y \in x \rightarrow (y \in x \rightarrow y \in x')$ e $\neg y \in x' \rightarrow (y \in x' \rightarrow y \in x)$, de onde obtemos, respectivamente, $(y \in x \rightarrow y \in x')$ e $(y \in x' \rightarrow y \in x)$, e daí temos que $(y \in x \leftrightarrow y \in x')$. Como por Q9 temos $Q(x)$ e $Q(x')$, podemos garantir, então, que $Q(x) \wedge Q(x') \wedge \forall y(y \in x \leftrightarrow y \in x')$, e daí obtemos a fórmula que, conforme a definição de identidade extensional, é abreviada por $x =_E x'$.

c.q.d.

Por T6, podemos introduzir sem ambigüidades o nome $\varnothing$ para o q-set postulado por Q9, como se faz usualmente.

O axioma-esquema da separação também está presente em Q: dada uma fórmula F(x) na qual x esteja livre e y não ocorre livre, a seguinte fórmula é um axioma:

Q10) $\forall_Q z \exists_Q y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge F(x))$.

O q-set y cuja existência é postulada em Q10 será denotado $[x \in z: F(x)]$, e caso estejamos tratando apenas com objetos clássicos, podemos utilizar a notação usual $\{x \in z: F(x)\}$. O próximo axioma que introduziremos é o axioma da união. A formulação que utilizaremos em Q é a seguinte:

Q11) $\forall_Q x \exists_Q y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists_Q w (w \in x \wedge z \in w))$.

Este q-set será denotado como usualmente por $\cup x$. Também teremos em Q a existência do q-set das partes de um dado q-set. Para introduzir este postulado, vamos definir a noção de sub-q-set, uma generalização da noção de ‘estar contido em’ para q-sets. É importante perceber que, apesar dos quantificadores relativizados não aparecerem na fórmula desta definição, este símbolo de relação está sendo definido apenas para q-sets, de modo que não faz sentido, em Q, dizer que um átomo está contido em algum outro objeto (q-set ou átomo) e nem que algum q-set está contido em algum átomo:

Def. [Sub-q-set] $x \subseteq y =_{\text{Def}} \forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$.

Q12) $\forall_Q x \exists_Q y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.

Como é usual, denotaremos o q-set y postulado por Q12 por $\wp(x)$.

Nosso próximo passo é garantir que para quaisquer objetos x e y sempre existe um q-set que os contém como elementos. O objetivo por trás deste postulado é garantir a existência de q-sets análogos aos pares não-ordenados de ZU, o que faremos em breve. Temos:

Q13) $\forall x \forall y \exists_Q z (x \in z \wedge y \in z)$.

Agora, queremos aplicar ao q-set z cuja existência foi postulada o esquema da separação com a seguinte fórmula F(w): $w \equiv x \vee w \equiv y$. Temos então o q-set $[w \in z: w \equiv x \vee w \equiv y]$. Devemos notar que se x e y forem objetos clássicos, obtemos um q-set cujos elementos são exatamente x e y, e o denotamos por $\{x, y\}$. Caso x ou y ou ambos não forem clássicos, vamos denotar este q-set por $[x, y]_z$, que chamaremos de *par não-ordenado fraco de x e y relativamente a z.* Se $x \equiv y$, teremos o *unitário fraco de x relativamente a z*, denotado por $[x]_z$. O que esta maneira de introduzir pares não-ordenados indica é que teremos em Q apenas pares não-ordenados relativos a certos q-sets, e não podemos falar de par ordenado sem mais qualificações, a menos que os objetos sejam clássicos. No geral, deixaremos o q-set z de onde o par foi retirado subentendido, ficando claro pelo contexto, para facilitar a notação. Deve-se notar que neste segundo caso, quando um dos elementos não é clássico, não podemos garantir que o q-set $[x, y]_z$ possui apenas dois elementos, pois, como se viu, estamos separando de um q-set dado todos os indistinguíveis de x ou de y que estejam neste q-set, e tampouco podemos garantir que $[x]_z$ possui apenas um elemento, tomando a noção de quantidade de elementos por enquanto no seu sentido intuitivo.

Pode parecer estranho não termos postulado simplesmente a existência de um q-set z tal que w pertence a z se e somente se $w \equiv x \vee w \equiv y$. Como justificar o fato de não termos seguido o procedimento usual, e apresentarmos esta formulação mais simples do axioma do par em Q? Suponha que introduzimos o axioma do par deste modo, como $\forall x \forall y \exists_Q z \forall w(w \in z \leftrightarrow w \equiv x \vee w \equiv y)$. Vamos argumentar tendo em vista o caso mais simples em que $x \equiv y$, e x é m-átomo. Neste caso teríamos a existência de um q-set z que contém como elementos todos os m-átomos indistinguíveis de x. Este q-set é maior do que costumamos precisar em Q, e parece pouco usual falar em um q-set de todos os objetos de certo tipo. Além disso, outras complicações surgem com relação às operações em q-sets, conforme definidas a seguir, mas não vamos entrar em detalhes aqui.

Temos agora algumas das definições usuais das operações que permitem fazer em Q a álgebra de q-sets, e nos restringiremos aos símbolos de operação binária. Como é conhecido do caso em ZU, também em Q a união de dois q-sets será um caso particular da união em geral, e a interseção e diferença de q-sets tem sua existência justificada pelo esquema da separação:

Def. [União] $x \cup y =_{Def} \cup[x, y]$

Def. [Interseção] $x \cap y =_{Def} [z \in x: z \in y]$

Def. [Diferença relativa] $x \backslash y =_{Def} [z \in x: \neg(z \in y)]$

O par ordenado também pode ser introduzido, mas, por ser definido a partir dos pares não-ordenados, será, como estes últimos, relativo a certo q-set dado. Temos:

Def. [Par ordenado] $<x, y>_z =_{Def} [[x]_z, [x,y]_z]_{\wp(\wp(z))}$

A propriedade fundamental dos pares ordenados, que, se adaptada diretamente a Q deveria garantir que se $<x, y>_z =_E <u, v>_z$ então $u =_E x$ e $y =_E v$ certamente não pode ser formulada desta maneira caso algum dos objetos em questão não seja clássico. No caso clássico, temos o resultado usual, mas se x, y, u ou v forem m-átomos, então o conseqüente do condicional não está nem mesmo definido na linguagem de Q. A fórmula candidata mais provável para substituir esta formulação clássica, que implica o caso clássico quando estamos tratando de objetos clássicos seria: se $<x, y>_z \equiv <u, v>_w$ então $x\equiv u$ e $y\equiv v$. Para provarmos este resultado, precisamos desenvolver mais um pouco a teoria, apresentar ainda mais alguns postulados para sabermos determinar em que condições certos objetos podem ser considerados indistinguíveis.

Com esta definição, podemos também introduzir o produto cartesiano entre dois q-sets. Novamente, devemos levar em conta que apenas tratamos em Q com q-sets de pares relativos a certo q-set. Assim, definimos:

Def. [Produto cartesiano] $u \times v =_{Def} [<x, y>_{A\cup B} \in \wp(\wp(A\cup B)): x\in A \wedge y\in B]$

Para finalizar os axiomas do segundo grupo, temos o axioma do infinito e o axioma da regularidade:

Q14) $\exists_Q x(\emptyset\in x \wedge \forall y(y\in x \rightarrow y\cup[y]_x\in x))$

Q15) $\forall_Q x(x\neq_E\emptyset \rightarrow \exists y\forall z(z\in x \rightarrow \neg(z\in y))$

Note que apesar de Q14 estar introduzindo um q-set que vamos por enquanto considerar intuitivamente como infinito, nada nele implica a existência de infinitos m-átomos. Se eventualmente existirem m-átomos no q-set postulado por este axioma, não se segue daí que serão em quantidade infinita por força deste axioma, ou seja, não se pode argumentar que se y for um átomo pertencente a este q-set, então a segunda parte da conjunção do axioma garante a existência de infinitos outros m-átomos, pois note que $y\cup[y]_x$ está definida apenas para q-sets, e o resultado desta operação tampouco seria um m-átomo.

2.3.1 - Quase-Relações e Quase-Funções

Passamos agora para uma breve discussão da generalização das noções de relações e funções em Q, que chamaremos quase-relação e quase-função. A princípio, não há motivo para que a definição usual de relação seja modificada, e então, como se espera, temos a seguinte definição:

Def. [quase-relação R entre x e y] $R =_{Def} [\langle u, v\rangle_{x\cup y} : u\in x \wedge v\in y]$

Assim, uma quase-relação entre x e y é o q-set dos pares ordenados formados por elementos de x e y. Poderíamos agora prosseguir desenvolvendo a teoria das relações em Q definindo quase-relação de equivalência, classe de equivalência, partição de um q-set, entre outros, simplesmente generalizando suas formulações em Q. No entanto, ao seguirmos este procedimento temos de tomar cuidado no caso das relações de ordem, onde já não é possível evitar que alguns problemas apareçam relativamente aos q-sets com átomos. O problema neste caso é facilmente compreensível quando consideramos intuitivamente como poderíamos ordenar uma coleção de objetos que sejam todos indistinguíveis entre si. Neste caso, a princípio, não faz sentido dizer que um determinado elemento é anterior ou posterior a qualquer outro, assim como outros conceitos da teoria das relações de ordem, como maior elemento, ou menor elemento, também perdem sua razão de ser, pois se estes objetos são realmente indistinguíveis, qualquer permutação de elementos mantém a relação inalterada, ou seja, a ordem não se altera quando substituímos objetos indistinguíveis entre si, o que não parece de acordo com nossas intuições relativamente à noção de ordem.

Considerando o problema em termos um pouco mais técnicos, e agora tomando o caso relativamente a Q, vamos supor que queremos definir uma quase-relação de ordem parcial R sobre um q-set x cujos elementos sejam todos m-átomos indistinguíveis. Por definição, R deve ser reflexiva, anti-simétrica e transitiva em x. Podemos perceber que o problema é similar àquele com o qual nos deparamos quando tentamos formular a propriedade fundamental dos pares ordenados, agora relativamente ao requisito de anti-simetria: R é anti-simétrica se e somente se para u, v em x, se uRv e vRu então $u =_E v$. No entanto, novamente, a identidade não está definida para m-átomos, de modo que a condição de anti-simetria não pode ser formulada para quase-relações entre q-sets quaisquer geral.

Podemos, no entanto, para tentar salvar a possibilidade de estabelecer algum tipo de ordenação de x, querer definir uma pré-ordem R. Neste caso, R deve ser reflexiva e transitiva (para uma discussão ilustrativa do problema, ver Krause [2007] cap. 4). Note que em particular a relação de indistinguibilidade restrita relativamente a x, ou seja, quando tomada como o q-set dos pares de elementos de x que são indistinguíveis, seria uma pré-ordem em x, por ser reflexiva e transitiva. Assim, será que podemos concluir que ordenamos, no sentido usual, os elementos de x? A resposta imediata é que não, por um motivo simples. Seja R a tal relação sobre x (que suporemos por simplicidade ter apenas 3 elementos, em um sentido por enquanto intuitivo). Dados u e v em x, suponha que $\langle u, v\rangle \in R$. Note que $\langle u,v\rangle$ é o q-set [[u], [u,v]] (relativo a algum q-set z, mas não é necessário levá-lo em consideração aqui). Como [u] é o q-set dos indistinguíveis de u, temos que em particular v está em [u], ou seja, este é o mesmo q-set que [v], e o par anterior pode ser escrito como [[v], [v,u]], ou seja, $\langle v,u\rangle$ está em R. Deste modo, para quaisquer elementos indistinguíveis, será impossível impor que um preceda o outro, pois automaticamente teremos que a relação se mantém também quando, intuitivamente, 'invertemos' o par, ou, dito ainda de outro modo, podemos permutar os elementos e a ordem permanece 'a mesma'. No caso particular que estamos tratando, temos que, se uRv, então também vRu, e dificilmente consideraríamos tal relação de uma ordenação dos elementos de x, apesar de que ela satisfaz as condições usuais para sê-lo. Um tratamento mais rigoroso deste ponto em particular pode ser dado mais adiante, no corolário do teorema 19.

Do que acabamos de discutir podemos tirar uma conclusão que será mais discutida no próximo capítulo deste trabalho: como não podemos ordenar no sentido usual os q-sets que possuem m-átomos como elementos, consequentemente não podemos definir uma boa-ordem para estes q-sets, então não podemos associar a eles, da maneira usual, um ordinal. Em particular não podemos estabelecer um isomorfismo de ordem entre estes tipos de q-sets e outros q-sets bem ordenados, supondo-se que tivéssemos uma definição razoável de isomorfismo. Sem ordinais, a conclusão mais imediata a que se chega é que não podemos, como conseqüência, definir os cardinais destes q-sets da maneira usual, como um ordinal particular. Como já dissemos, este é assunto para o próximo capítulo.

Também um análogo ao conceito usual de função pode ser introduzido em Q, onde temos as quase-funções. Diferentemente do caso da definição das quase-relações, não podemos utilizar a mesma formulação de ZU, e o motivo, como fica patente ao se considerar a definição usual de função, é que ela utiliza a identidade em sua formulação: uma relação R é uma função se, quando é o caso que $\langle x, y\rangle \in R$ e $\langle x, z\rangle \in R$, então temos que $y=z$. Certamente não podemos utilizar esta formulação, pois, no caso em que

R seja uma relação entre q-sets que contenham m-átomos como elementos, como já vimos, não temos a identidade disponível.

Intuitivamente, vamos considerar que uma quase-função é um certo tipo de quase-relação R entre dois q-sets x e y tal que se u está relacionado por R com v, e w com z, e ainda, se u for indistinguível de w, então temos que v e z são indistinguíveis. Neste caso, x será chamado de domínio da quase-função, e y de contradomínio. Assim, o requisito que queremos impor é que R associe com cada objeto do domínio um objeto do contradomínio, e que para objetos do domínio que sejam indistinguíveis, não seja o caso que eles sejam associados por R a objetos que não são indistinguíveis no contradomínio. Como se observa facilmente, caso os q-sets domínio e contradomínio sejam clássicos, recaímos no caso usual de função. Temos:

Def. [quase-função] f é quase-função de A em B $=_{Def}$ f é uma quase-relação entre A e B tal que para todo $u \in A$ existe um $v \in B$ e se $\langle u, v \rangle \in f$ e $\langle w, z \rangle \in f$ e $u \equiv w$ então $v \equiv z$.

Uma das questões interessantes agora é como generalizar as importantes noções de função injetora, sobrejetora e bijetora para dar conta de todos os casos de q-sets disponíveis na teoria Q. Nestes casos, para garantirmos que para q-sets com m-átomos estas noções terão sentido similar ao usual, teremos de empregar a noção de quase-cardinalidade, através do símbolo primitivo qc. Intuitivamente, como já explicamos, qc(x) denota uma generalização da noção de cardinalidade de x, atribuindo para qualquer q-set x um cardinal, no sentido usual. A relação '$\leq_E$' que aparece nas definições a seguir é a relação de ordem usual entre cardinais, utilizada conforme pode ser definida na parte 'clássica' de Q, já que cardinais são objetos clássicos em Q (o axioma da escolha, enunciado abaixo, garante que sempre podemos comparar quaisquer dois cardinais. Falaremos mais sobre a parte clássica de Q abaixo). Temos então as seguintes definições de quase-função injetora e sobrejetora, onde f é uma q-função de t em v, dom(f) denota o domínio de f e ran(f) denota a imagem de f:

Def. [q-função injetora] f é uma q-função injetora $=_{Def}$ f é uma quase função que satisfaz a condição $\forall x \forall x' \forall y \forall y' (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x', y' \rangle \in f \wedge y \equiv y' \rightarrow x \equiv x') \wedge qc(dom(f)) \leq_E qc(Ran(f))$

Def. [q-função sobrejetora] f é uma q-função sobrejetora $=_{Def}$ f é uma quase-função que satisfaz $\forall y (y \in v \rightarrow \exists x (x \in t \wedge \langle x, y \rangle \in f)) \wedge qc(Ran(f)) \leq_E qc(Dom(f))$.

Como dissemos, é preciso utilizar a noção de quase-cardinal para garantir que estas noções terão sentido análogo ao sentido usual quando aplicadas a q-sets com m-átomos. Note que, por exemplo, se ficássemos sem a cláusula que envolve quase-cardinais na definição de q-injeção, poderíamos ter uma q-função de um q-set A com, intuitivamente, n elementos, todos m-átomos indistinguíveis, em um q-set B, com $m < n$ elementos, sendo todos eles m-átomos indistinguíveis, tal que a definição de q-injeção fosse satisfeita, ou seja, mandando objetos indistinguíveis em indistinguíveis do modo definido. No entanto, não consideraríamos este um exemplo de injeção. Observações análogas valem para q-funções sobrejetoras, notando que os casos problemáticos originam-se sempre com o uso de q-sets que possuem m-átomos como elementos.

Por fim, uma q-bijeção pode ser definida do seguinte modo:

Def. [q-função bijetora] f é uma q-bijeção $=_{Def}$ f é uma q-função injetora e sobrejetora.

No caso da q-bijeção, temos imediatamente a partir da definição que $qc(Dom(f)) =_E qc(Ran(f))$. É importante notar que não podemos dar o sentido usual para uma bijeção em Q sem utilizarmos a noção de quase-cardinal. Para se convencer desta afirmação, basta verificar que, sem a igualdade da quase-cardinalidade do domínio e imagem da quase-função f, teríamos que o mesmo exemplo anterior dado para o caso da q-injeção seria também uma q-bijeção, o que está longe de satisfazer nossa concepção intuitiva de associação um-a-um.

Deve-se notar que todas estas definições, quando aplicadas a objetos clássicos, recaem nas definições usuais. Um dos problemas de não conseguirmos definir a noção de quase-bijeção entre q-sets sem apelo ao conceito de quase-cardinalidade está em que, por exemplo, as definições usuais de cardinal, em geral, dependem da noção de bijeção, o que nos impede, em Q, de seguirmos estas maneiras usuais de definir estes conceitos, para evitarmos um círculo vicioso. Esta questão será mais comentada adiante, principalmente no capítulo seguinte, quando a definição de quase-cardinal estiver em foco.

Tendo o conceito de quase-função em mãos, podemos formular uma versão quase-conjuntista do axioma da escolha, que também segue a formulação para este axioma dada na teoria ZU:

(AE) Se A é um q-set cujos elementos são q-sets não-vazios, então existe uma q-função f tal que, para todo q-set B que pertence ao q-set A, $f(B) \in B$.

Como fica claro se considerarmos a noção de q-função, teremos que, em geral, quando há m-átomos no q-set B ao qual se aplica a q-função escolha f, não será possível distinguir os elementos que f seleciona de B. No caso de ser aplicada a objetos clássicos, recaímos no caso usual. Mais será dito sobre este axioma no capítulo seguinte, por hora, nos contentamos apenas em enunciá-lo. Por ser um axioma bastante especial, não vamos numerá-lo juntamente com os outros. Seria interessante considerar se todas as formas usualmente equivalentes do axioma da escolha o são também em Q, mas não faremos isto aqui (em particular, seria interessante considerar o caso da equivalência ou não entre este axioma e a tricotomia para quase-cardinais).

2.4 – POSTULADOS DO TERCEIRO GRUPO

Passamos agora aos axiomas do terceiro grupo, os axiomas para o símbolo qc, de quase-cardinal.

Como já foi exposto acima, as relações de ordem não podem ser definidas de modo satisfatório para todos os q-sets. Em particular, para q-sets contendo m-átomos como elementos, não podemos utilizar as relações de ordem que tenham como propriedades definidoras a anti-simetria e a tricotomia, por exemplo, e não podemos esperar que as relações de ordem definíveis nestes q-sets realmente ordenem os seus elementos, em algum sentido intuitivo do termo, apesar de podermos mostrar em alguns casos, como o de pré-ordens, que existem relações sobre estes q-sets que satisfazem as propriedades que definem estes tipos de ordem. Tampouco podemos esperar que esses q-sets possam ser bem-ordenados, pois isto implicaria em particular, como dissemos, a existência de um único menor elemento, o que não faz sentido para as relações de ordem definidas nestes casos.

Sem boa-ordem, como podemos obter os ordinais associados a estes q-sets? A resposta é que, se desejamos proceder seguindo a maneira como usualmente é feita, não podemos associar ordinais a eles. Assim, como não têm ordinais associados, estes q-sets tampouco têm um cardinal associado, caso se proceda na definição de cardinal como um particular ordinal (um ordinal chamado ordinal inicial do conjunto). O problema é, então, saber como garantir que todos os q-sets terão um cardinal, ou em nosso caso, um quase-cardinal associado. Note que esta parece ser uma exigência razoável a se impor sobre todas as coleções simples em geral, a de que seja bem determinado em princípio o número de elementos de qualquer tal coleção. No entanto, como veremos adiante, existem situações em física em que a quantidade de elementos de um sistema não está bem determinada, e até mesmo em ZFC existem casos famosos em que a cardinalidade não é determinada apenas pelos axiomas da teoria, como ocorre com o contínuo. Poderíamos querer insistir que estas situações são distintas, pois em física, muitas vezes, não faz nem mesmo sentido querer falar sobre a cardinalidade de certas coleções, enquanto que em teorias como ZFC sabemos que o contínuo, por exemplo, tem um cardinal, mas os axiomas não nos permitem determinar qual é. Não seguiremos estas discussões neste capítulo (para o caso da física, ver Domenech e Holik [2007]).

A solução que se adota para Q em geral é postular a existência de quase-cardinais, utilizando um símbolo primitivo na linguagem, o nosso símbolo funcional unário qc. Um postulado que se poderia querer sugerir imediatamente para este símbolo, seguindo as estratégias usuais ao se introduzir o símbolo para cardinais como primitivo é o seguinte:

Postulado dos Quase-Cardinais: $qc(x) =_E qc(y) \leftrightarrow x \sim y$.

Aqui, a expressão '$x \sim y$' significa que existe uma função bijetora entre os q-sets x e y. Consideremos agora se este postulado pode ser considerado um candidato razoável em Q.

Quando formulada relativamente a cardinais, esta é algumas vezes mencionada como a propriedade fundamental dos cardinais. Não estamos adotando este postulado oficialmente em Q, pois é fácil de se perceber a razão pela qual este postulado, apesar de razoável em teorias como ZF, ZU e ZFU, não pode funcionar adequadamente aqui. Em geral, deseja-se que este postulado funcione como uma explicação do significado do símbolo que é introduzido para denotar o cardinal de uma coleção (no nosso caso, qc). Para que tal ocorra, o lado direito da bi-implicação não deve conter ocorrências de tal símbolo. No entanto, de nossa definição de quase-bijeção, vimos que, em particular, se tomamos, como é usual, que $x \sim y$ significa que existe uma q-bijeção entre x e y, então este fato pressupõe em particular que $qc(x) =_E qc(y)$. Com isto, para que, com base neste axioma, possamos estabelecer em Q se os quase-cardinais de dois q-sets x e y são o mesmo, precisaríamos estabelecer uma q-bijeção entre x e y, para a qual já teríamos que saber que $qc(x) =_E qc(y)$. Assim, este axioma claramente não vai funcionar. Seu próprio enunciado, aliás, pressupõe que já saibamos que um quase-cardinal é um q-set ou um M-átomo, para que se possa aplicar a eles a definição de igualdade, algo que, por enquanto, não pode ser tomado como óbvio.

Como podemos formular axiomas mais adequados para o símbolo qc? Devemos levar em conta que teremos que, em geral, muitos q-sets não serão problemáticos no sentido apresentado acima, de que não se pode definir sobre eles uma boa-ordem. Em particular, todos os q-sets clássicos são deste tipo. Assim, para estes q-sets, podemos, em princípio, definir cardinalidade da maneira usual. Deste modo, os postulados para qc devem ser tais que, quando x for um conjunto, qc(x) não seja diferente do cardinal associado da maneira usual a x. Note ainda que, no geral, qc(x) não deveria ser diferente de algum cardinal, pois o problema original é simplesmente que não se pode fazer a associação da maneira usual, e não que a quantidade de elementos de algum q-set será algo diferente de algum cardinal usual (um número natural, ou algum álefe, por exemplo). Assim, os quase-cardinais serão cardinais, estes últimos definidos na parte clássica da teoria.

2.4.1 - Uma subteoria clássica de Q

Para obtermos a definição dos cardinais, e então postularmos que os quase-cardinais são cardinais, precisamos tornar claro como funciona a ‘cópia’ de ZU em Q, garantir que de fato há uma parte de Q que se comporta como uma teoria de conjuntos clássica. Para isso, temos pelo menos duas alternativas: 1) podemos mostrar como se pode traduzir em Q a linguagem usual de ZU, e com isso, demonstrar que as traduções dos postulados usuais de ZU são teoremas de Q, sendo exatamente essa a sua parte clássica, ou 2), podemos mostrar que, em Q, os postulados para construção de q-sets, quando relativizados a conjuntos, também são deriváveis, de modo que é possível erigir a partir deles uma cópia de uma teoria clássica de conjuntos dentro de Q.

Para esboçarmos brevemente cada uma das idéias, começamos com a primeira alternativa. Consideraremos ZU como formulada usualmente, tendo a lógica clássica de primeira ordem com identidade como lógica subjacente, um símbolo de relação binária $\in$ para a pertinência, e, apenas por conveniência, um símbolo primitivo de predicado unário C, tal que C(x) significa que x é um conjunto. Assim, as variáveis individuais percorrem um domínio pretendido de conjuntos e átomos. Não consideramos necessário introduzir um símbolo diferente para a pertinência aqui, pois, em geral, ficará claro pelo contexto se estamos falando do símbolo em Q ou em ZU. Suporemos também que a lógica subjacente a ZU possui os mesmo símbolos primitivos que Q, conforme apresentamos acima, mais o símbolo de identidade com os axiomas convenientes para este símbolo.

A tradução será feita por uma função t, que a cada fórmula primitiva da linguagem de ZU associa uma fórmula de Q. Se A é uma fórmula de ZU, sua tradução t(A) na linguagem de Q será definida do seguinte modo (ver também French e Krause [2006] cap. 7):

1) Se A é C(x), então t(A) é Z(x);

2) Se A é $x = y$, então t(A) é $((M(x) \wedge M(y)) \vee (Z(x) \wedge Z(y)) \wedge x =_E y)$;

3) Se A é $x \in y$, então t(A) é $(((M(x) \vee Z(x)) \wedge Z(y)) \wedge x \in y)$;

4) Se A é $\neg B$, então t(A) é $\neg t(B)$;

5) Se A é $B \rightarrow C$, então t(A) é $t(B) \rightarrow t(C)$;

6) Se A é $\forall x B$, então t(A) é $\forall x((M(x) \vee Z(x)) \rightarrow t(B))$.

Agora, para garantirmos que esta tradução faz o que se espera dela, temos o seguinte teorema:

Teorema 7) Se A é um axioma de ZU, t(A) é uma tradução de A na linguagem de Q conforme as cláusulas acima, então t(A) é teorema de Q.

A demonstração deste teorema se faz através da aplicação de t aos axiomas de ZU, mostrando que são de fato teoremas de Q.

Consideremos agora como se pode seguir a alternativa 2 apresentada acima. Queremos mostrar como, em Q, versões dos postulados de ZU podem ser derivadas como casos particulares dos postulados de Q. Trataremos apenas de dois casos, o axioma do par e o axioma da extensionalidade, sendo os outros derivados de modo semelhante. Começamos com o par.

Teorema 8) $\forall_D x \forall_D y \exists_Z w(\forall t(t \in w \leftrightarrow t =_E x \vee t =_E y))$

Dem. Dados D(x) e D(y), por Q13 temos que existe um q-set z tal que $(x \in z \wedge y \in z)$. Pelo esquema da separação, $\exists w(\forall t(t \in w \leftrightarrow t \in z \wedge t =_E x \vee t =_E y))$. A partir daí, procedendo com o uso da lógica subjacente, derivamos, como é usual, que $\forall t(t \in w \leftrightarrow t =_E x \vee t =_E y)$. Por Q8, vemos que Z(w). Assim, $\exists_Z w(\forall t(t \in w \leftrightarrow t =_E x \vee t =_E y))$.

c.q.d.

Agora, vejamos como se mostra o caso do axioma da extensionalidade.

Teorema 9) $\forall_Z x \forall_Z y(\forall_D z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x =_E y)$

Dem. Sejam Z(x) e Z(y), e suponha que $\forall_D z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. Temos das primeiras hipóteses que, por Q7, Q(x) e Q(y), e assim, pelo cálculo proposicional subjacente, $Q(x) \wedge Q(y)$. Temos ainda que se $z \in x$, então, por Q8, D(z), e por hipótese, $z \in y$, ou seja, $z \in x \rightarrow z \in y$. Do mesmo modo, se $z \in y$, então, por Q8, D(z), e por hipótese, $z \in x$, de onde temos que $z \in y \rightarrow z \in x$. Assim, temos que $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$, e pela lógicasubjacente temos então $[Q(x) \wedge Q(y) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)]$, e, novamente pela lógica subjacente, temos $[Q(x) \wedge Q(y) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)] \vee [M(x) \wedge M(y) \wedge \forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z)]$, ou seja, a fórmula que é abreviada por $x =_E y$. Com o teorema da dedução, obtém-se o resultado desejado.

c.q.d.

Tendo estes resultados, podemos então definir em Q alguns conceitos clássicos, valendo para os objetos clássicos de Q, onde se opera como em ZU. Temos então os seguintes conceitos: 1) card(x), o cardinal de um conjunto x, com seu sentido usual, sendo um particular ordinal em Q; temos também 2) Cd(x), que significa que x é um cardinal; e por fim, 3) Fin(x), que significa que x é um conjunto finito, com a definição usual, de que existe uma bijeção entre x e um número natural. Devemos lembrar que os números naturais também são desenvolvidos na parte clássica de Q. Vale observar ainda que eventuais problemas com as noções de finitude e número natural, como a existência de números naturais não-standard infinitos, ocorrem também em teorias clássicas como ZFC, e não podem ser apontados como uma deficiência de Q.

2.4.2 - Postulados para quase-cardinal

Agora, começamos a introduzir os postulados para o símbolo de quase-cardinal com auxílio destas noções clássicas de Q.

Como já dissemos, a primeira exigência razoável a se fazer sobre o conceito de quase-cardinal de um q-set é que seja, em particular, um cardinal. O grande problema de Q, como já foi mencionado, era como garantir que existe um cardinal atribuído à qualquer q-set, já que isso não podia ser feito através das definições usuais. Como o símbolo primitivo qc deverá fazer esta atribuição por decreto de axioma, superamos esta dificuldade, e então estipulamos que se atribua cardinais, no sentido usual, aos q-sets, de modo que, se este q-set for um conjunto, então este cardinal seja o próprio cardinal do conjunto, sendo qc portanto uma maneira de generalizar a noção de cardinal a todos os q-sets. Temos então, para estes fins, o seguinte postulado:

Q16) $\forall x \exists ! y(Cd(y) \wedge qc(x) =_E y \wedge (Z(x) \rightarrow y =_E card(x)))$.

Uma conseqüência deste postulado é a seguinte:

Teorema 10) $qc(\varnothing) =_E 0$.

Dem. Por Q16, $\exists ! y(Cd(y) \wedge qc(\varnothing) =_E y \wedge (Z(\varnothing) \rightarrow y =_E card(\varnothing)))$. Como vimos em T6, $\varnothing$ é um conjunto. Assim, temos que o y postulado por Q16 é tal que $y =_E card(\varnothing) =_E 0$ (esta última igualdade verifica-se na parte clássica de Q). Como temos também que $y =_E qc(\varnothing)$, temos então que $qc(\varnothing) =_E 0$.

c.q.d.

Note que o quantificador universal em Q16 não está relativizado a q-sets ou outro tipo de objetos, sendo então qc um símbolo funcional definido em todo o ‘universo de discurso’ de Q, ou, como se costuma dizer nestes contextos, qc é uma função no sentido lato, por oposição a funções no sentido estrito, definidas como uma coleção de pares ordenados, ou seja, uma relação, satisfazendo a condição de ser funcional. Em particular, teremos então que, sendo x um átomo, por Q16 o símbolo qc(x) denotará um cardinal. Como já convencionamos acima, através de axiomas do primeiro grupo, átomos não têm elementos, de modo que é razoável esperar que, como devem ter um cardinal associado, o cardinal atribuído a eles seja o zero. Para garantir isto, postulamos:

Q17) $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow qc(x) =_E 0)$.

Outra exigência razoável que nos permitirá operar com o símbolo qc é a de que qualquer sub-q-set próprio z de um determinado q-set x seja tal que z tenha quase-cardinal menor do que x. Apesar de sabermos que esta proposição é verdadeira para cardinais, devemos garantir que também será para quase-cardinais, ou seja, devemos acrescentar o seguinte postulado:

Q18) $\forall_Q x \forall_Q y(x \subset y \rightarrow qc(x) < qc(y))$.

Segue-se imediatamente deste axioma a seguinte conseqüência bastante intuitiva, que em geral é um dos postulados para o símbolo qc (ver French e Krause [2006], p. 287) e nos garante, afirmando de modo um pouco diferente, algo que já sabíamos: o q-set vazio é o único q-set cujo quase-cardinal é zero, ou seja, é o único q-set que não possui elementos. Temos:

Teorema 11)$\forall_Q x(x \neq_E \varnothing \rightarrow qc(x) \neq_E 0)$.

Dem. Seja x um q-set. Suponha que $qc(x) =_E 0$ mas que $x \neq_E \varnothing$. Então, existe um z tal que $z \in x$, e temos que $\varnothing \subset x$. Segue-se de Q18 então que $qc(\varnothing) < qc(x)$. Por T8, $qc(\varnothing) =_E 0$, e então, temos que $0 < qc(x)$, o que contradiz nossa hipótese de que $qc(x) =_E 0$ (pois em particular, como já postulamos, quase-cardinais são cardinais, e assim obedecem a ordem dos cardinais), logo, $x =_E \varnothing$.

c.q.d.

É importante não confundir o teorema acima com a afirmação mais geral de que o único objeto de cardinalidade nula é o q-set vazio. Como vimos com Q17, esta afirmação é falsa na presença de átomos.

Apesar de ser bastante intuitivo, convém mostrar também que o seguinte resultado pode ser derivado:

Teorema 12) Se $x =_E y$, então $qc(x) =_E qc(y)$.

Dem. Por Q16, existe um único cardinal z tal que $qc(x) =_E z$. Por Q3, temos que $x =_E y \rightarrow (qc(x) =_E z \rightarrow qc(y) =_E z)$, e daí, por MP, temos que $qc(y) =_E z$, de onde se segue pelas propriedades de simetria e transitividade de $=_E$ que $qc(x) =_E qc(y)$.

c.q.d.

O seguinte teorema também é utilizado algumas vezes nas apresentações usuais de Q como um dos axiomas introduzidos para o símbolo de quase-cardinais, mas em nossa exposição o substituímos pelo enunciado mais forte Q18, que preferimos, pois que o implica, além de outros resultados. Temos:

Teorema 13) $\forall_Q x \forall_Q y(x \subseteq y \rightarrow qc(x) \leq qc(y))$.

Dem. Dados q-sets x e y, suponha que $x \subseteq y$. Se $x \subset y$, então o resultado desejado é conseqüência de Q18. Por outro lado, se $x =_E y$, então, por T10, temos em particular que $qc(x) \leq qc(y)$, como desejado.

c.q.d.

Uma conseqüência importante deste resultado é o seguinte teorema, cujo significado intuitivo é bastante claro:

Teorema 14) Se $x \subseteq y$ e $y \subseteq x$, então $qc(x) =_E qc(y)$.

Dem. Sejam x e y q-sets tais que $x \subseteq y$ e $y \subseteq x$. Por T11, temos que $qc(x) \leq qc(y)$ e também que $qc(y) \leq qc(x)$, de onde se segue que $qc(x) =_E qc(y)$, pois qc(x) e qc(y) são cardinais na parte clássica de Q, cuja relação de ordem satisfaz esta propriedade.

c.q.d.

Outro postulado que costuma ser adicionado para caracterizar qc, relacionando o símbolo de quase-cardinal com a noção de finitude, mas que podemos demonstrar como conseqüência imediata de Q18 é o seguinte (novamente, ver French e Krause, [2006], p. 287):

Teorema 15) $\forall_Q x \forall_Q y(Fin(x) \wedge x \subset y \rightarrow qc(x) < qc(y))$.

Dem. Sejam x e y q-sets, tais que $Fin(x) \wedge x \subset y$. Temos em particular que $x \subset y$, e assim, por Q18, $qc(x) < qc(y)$.

c.q.d.

Assim, ao substituirmos o enunciado de T13, que costuma ser um axioma para quase-cardinal, por Q18, conseguimos demonstrar T11, T13 e T15, e em todas as três demonstrações utilizamos este axioma, ou seja, foi possível demonstrar três proposições que costumam figurar entre os axiomas para qc.

O próximo postulado para qc vai garantir que, para qualquer quase-cardinal k menor que o quase-cardinal de um q-set x, existe um sub-q-set y de x tal que o quase-cardinal de y é k. Note que esta é também uma afirmação que nos ajuda a determinar melhor a noção de q-set. Temos então o seguinte postulado, onde os símbolos β e α denotam ordinais:

Q19) $\forall_Q x(qc(x) =_E \alpha \rightarrow \forall\beta(\beta \leq \alpha \rightarrow \exists_Q y(y \subseteq x \wedge qc(y) =_E \beta)))$.

Passamos agora para a generalização de um fato básico da aritmética de cardinais para quase-cardinais de q-sets em geral: queremos que o quase-cardinal do q-set que resulta da união de dois q-sets disjuntos seja igual à soma dos quase-cardinais dos q-sets, como temos na aritmética de cardinais usual. Para isto, temos de introduzir um novo postulado. O símbolo de soma no lado direito da igualdade é o símbolo usual para a soma de cardinais, pois lembremos, um quase-cardinal é um cardinal, e para estes a aritmética está definida da maneira usual na parte clássica de Q. Temos então o seguinte postulado:

Q20) $\forall_Q x \forall_Q y(\forall w(w \notin x \wedge w \notin y) \rightarrow qc(x \cup y) =_E qc(x) + qc(y))$.

O próximo postulado também vai funcionar como uma maneira de generalizar fatos da aritmética de cardinais em geral para uma aritmética de quase-cardinais. Temos:

Q21) $\forall_Q x(qc(\wp(x)) =_E 2^{qc(x)})$

A particular formulação que Q21 adota se explica facilmente pelo fato de que, em geral, se x for um q-set contendo m-átomos, o q-set 2^x, que denota o q-set de todas as q-funções de x em {0, 1}, será tal que não se distingue entre algumas delas, mais precisamente, não é possível distinguir aquelas que mapeiam elementos indistinguíveis no mesmo número (0 ou 1). Intuitivamente, Q21 serve para garantir que a quantidade de sub-q-sets de x é igual a $2^{qc(x)}$, já que a demonstração usual de que $\wp(x)$ é equipotente a 2^x, em geral, não vai poder ser feita da maneira costumeira quando x tem m-átomos como elementos, e, também, este fato, se demonstrado, não poderá ser usado para seus fins habituais, de mostrar que os dois q-sets possuem o mesmo cardinal, pois isto já deverá estar pressuposto quando estabelecermos a quase-bijeção.

Estamos agora em condições de apresentar o Axioma da Extensionalidade Fraca. Este axioma pretende ser uma generalização para q-sets do axioma da extensionalidade de ZU. Antes, porém, devemos introduzir duas novas noções que nos auxiliarão no trabalho de formular o dito axioma de maneira mais concisa. Tratam-se das noções de similaridade e quase-similaridade entre q-sets x e y. Diremos que x e y são similares se possuem todos os elementos indistinguíveis entre si, e são quase-similares se forem similares e, ainda, tiverem o mesmo quase-cardinal. Formalmente, temos:

Def. [x é similar a y] $Sim(x, y) =_{Def} \forall z \forall w(z \in x \wedge w \in y \rightarrow z \equiv w)$.

Def. [x é q-similar a y] $Qsim(x, y) =_{Def} Sim(x, y) \wedge qc(x) =_E qc(y)$.

Agora temos o axioma. Devemos lembrar que, na notação empregada em sua formulação, $x\backslash\equiv$ denota o q-set das classes de equivalência de x pela relação de indistinguibilidade. Novamente, como $\equiv$ não é uma relação no sentido definido anteriormente, de ser um q-set de pares ordenados, mas sim uma relação no sentido lato, devemos, como é usual, sempre ter em mente que estamos considerando uma restrição desta relação ao q-set em questão, sendo então o q-set dos pares ordenados de elementos indistinguíveis deste particular q-set. Temos:

Q22) $\forall_Q x \forall_Q y(\forall z(z \in x\backslash\equiv \rightarrow \exists w(w \in y\backslash\equiv \wedge \mathrm{qsim}(z, w))) \wedge \forall w(w \in y\backslash\equiv \rightarrow \exists z(z \in x\backslash\equiv \wedge \mathrm{qsim}(w, z))) \leftrightarrow x \equiv y)$.

É importante atentar para o motivo pelo qual este axioma tem de ser formulado desta maneira. Intuitivamente, ele nos diz que dois q-sets são indistinguíveis se e somente se possuem a mesma quantidade de elementos indistinguíveis. Note que, se exigíssemos apenas que, para cada elemento de x houvesse um indistinguível dele em y, e reciprocamente, então, teríamos em particular que q-sets com diferentes cardinalidades seriam indistinguíveis. Por exemplo, dado um q-set x com quase-cardinal 1, com um m-átomo como elemento, e outro q-set y, com quase-cardinal 3, com m-átomos como elementos tais que são todos indistinguíveis entre si e indistinguíveis do elemento de x, então, segundo este critério, seriam indistinguíveis, o que parece bastante contra-intuitivo.

Um teorema importante que se segue de Q22 é o seguinte:

Teorema 16) Se $x \subseteq y$ e $y \subseteq x$ então $x \equiv y$.

Dem. Seja $z \in x\backslash\equiv$. Dado t em z, como $x \subseteq y$, t está em y, de modo que $\exists w(w \in y\backslash\equiv)$ tal que t está em w. Certamente que sim(z, w). Note que como $x \subseteq y$, então $z \subseteq w$, e como $y \subseteq x$, então $w \subseteq z$. Disto temos por T12 que $qc(z) =_E qc(w)$. Assim, qsim(z, w). Do mesmo modo se mostra que para uma classe de equivalência em $y\backslash\equiv$ tem-se uma classe em $x\backslash\equiv$ e que estas classes são q-similares. O resultado vem então diretamente de Q22.

c.q.d.

Mais um resultado que se segue de Q22:

Teorema 17) (i) $\forall_Q x \forall_Q y(\mathrm{Sim}(x,y) \wedge qc(x) =_E qc(y) \rightarrow x \equiv y)$.

(ii) $x \equiv y \wedge qc([x]_z) =_E qc([y]_w) \leftrightarrow [x]_z \equiv [y]_w$.

Dem. (i) Da hipótese de que $\mathrm{Sim}(x,y) \wedge qc(x) =_E qc(y)$, temos, por definição, que qsim(x,y). Note ainda que, por serem similares, x é o único elemento de $x\backslash\equiv$, e y é o único elemento de $y\backslash\equiv$. O resultado agora se segue imediatamente de Q22.

(ii) Suponha que $x \equiv y \wedge qc([x]_z) =_E qc([y]_w)$. Como em particular $x \equiv y$, e $[x]_z$ é o q-set cujos elementos são indistinguíveis de x em z, então, para qualquer elemento x’ de $[x]_z$ temos que $x' \equiv y$, pelas propriedades da indistinguibilidade. Argumentando-se do mesmo modo, para qualquer elemento y’ em y, temos que $y' \equiv x$. Assim, $\mathrm{Sim}([x]_z, [y]_w)$, e daí, temos que $\mathrm{qsim}([x]_z, [y]_w)$. Da parte (i) temos imediatamente que $[x]_z \equiv [y]_w$.

Agora, seja $[x]_z \equiv [y]_w$. Por Q22, temos $\forall x'(x' \in [x]_z\backslash\equiv \rightarrow \exists y'(y' \in [y]_w\backslash\equiv \wedge \text{qsim}(x', y'))) \wedge \forall y'(y' \in y\backslash\equiv \rightarrow \exists x'(x' \in x\backslash\equiv \wedge \text{qsim}(y', x')))$. Como $[x]_z$ é o q-set dos indistinguíveis de x em z, $[x]_z$ é o único q-set em $[x]_z\backslash\equiv$, e do mesmo modo para $[y]_w\backslash\equiv$, e daí, estes q-sets são q-similares, ou seja, por definição, $qc([x]_z) =_E qc([y]_w)$, e $Sim([x]_z, [y]_w)$, de onde temos em particular que $x\equiv y$.

c.q.d.

Note que com este resultado podemos resolver um problema que deixamos sem solução anteriormente: a propriedade fundamental dos pares ordenados. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 18) Se $\langle x, y\rangle_z \equiv \langle u, v\rangle_w$ então $x\equiv u$ e $y\equiv v$.

Dem. Suponha que $\langle x, y\rangle_z \equiv \langle u, v\rangle_w$. É fácil de perceber que, se $x\equiv y$, então, devido à nossa hipótese e a Q22, $u\equiv v$. Por definição, a hipótese se torna $[[x]] \equiv [[u]]$, e daí, por duas aplicações de T17(ii), temos $x\equiv u$, e como $x\equiv y$, então $y\equiv u$, e então por hipótese, $y\equiv v$. Por outro lado, se não é o caso que x é indistinguível de y, por Q22, temos que $[x]\backslash\equiv$ é q-similar a $[u]\backslash\equiv$ ou a $[u, v]\backslash\equiv$. Se este último fosse o caso, teríamos em particular que $u\equiv v$, que, como se pode verificar por Q22, violaria a hipótese de que $\langle x, y\rangle_z \equiv \langle u, v\rangle_w$. Assim, $[x]\backslash\equiv$ é q-similar a $[u]\backslash\equiv$, e em particular, $x \equiv u$. Agora, suponha que y não é indistinguível de v. Então, em particular, temos que não ocorre $[y] \equiv [v]$, e daí, não são indistinguíveis $[x, y]$ e $[u, v]$, assim contradizendo a hipótese de que $\langle x, y\rangle \equiv \langle u, v\rangle$. Temos então que $y\equiv v$.

c.q.d.

Podemos ainda demonstrar o seguinte teorema, uma versão fraca da volta do anterior, que apenas enunciaremos aqui:

Teorema 19) Dado um q-set A, com x, y, z, w em A, se $x\equiv z$ e $y\equiv w$ então $\langle x,y\rangle_A\equiv\langle z,w\rangle_A$.

Há ainda outra conseqüência imediata deste resultado, expressa no corolário seguinte, que nos permite expressar formalmente na teoria Q o fato que já discutimos acima, de que relações de ordem definidas em q-sets cujos elementos são m-átomos não conseguem ‘fixar’ os elementos ordenados de modo único, estabelecer de maneira não ambígua uma relação de precedência entre os elementos relacionados:

Corolário de T19. Dado um q-set A tal que $x, y \in A$, se $x\equiv y$ então $\langle x,y\rangle_A\equiv\langle y,x\rangle_A$.

Por fim, vamos apenas enunciar o teorema que, em Q, corresponde a uma formalização da afirmação de que em MQ as permutações não são observáveis, conforme discutimos brevemente no capítulo 1. Este resultado também decorre do teorema da extensionalidade fraca, e como se pode notar, não pode ser derivado, pelo menos não tão diretamente, em teorias de conjuntos usuais como ZFU. Antes disso, no entanto, precisamos apresentar mais uma definição, a de q-set unitário forte de x, que será denotado por $<x>$:

Def. [Unitário forte de x]

i) Se $x \in B$, definimos $S_x =_{Def} [s \in \wp([x]_B) : x \in s]$;

ii) $<x> =_{Def} \cap_{t \in Sx} t$

Esta definição será retomada no capítulo seguinte. Para a demonstração do teorema, com as discussões pertinentes, ver French e Krause [2006], cap. 7. A idéia intuitiva é que, dado um q-set com m-átomos como elementos, podemos 'trocar' um de seus elementos que seja m-átomo por 'outro' m-átomo, que não pertença o q-set, e o q-set obtido com esta 'permutação' será indistinguível do q-set original.

Teorema 20) [Permutações não são observáveis] Seja x um q-set, z um m-átomo tal que $z \in x$. Se w é um m-átomo tal que $w \notin x$ e $w \equiv z$, então $(x \backslash <z>) \cup <w> \equiv x$.

Antes de prosseguirmos, um pequeno comentário sobre a importância deste resultado parece pertinente. Um dos problemas na discussão sobre a ontologia da mecânica quântica não-relativística diz respeito ao papel desempenhado pelo Postulado da Indistinguibilidade junto às estatísticas. Em geral, como comentamos no capítulo anterior, argumenta-se que ele não implica a não-individualidade dos itens com os quais trata a teoria, ou seja, que podemos, apesar de adotar este postulado, assumir que a teoria trata com indivíduos de algum tipo. Agora, a questão que surge é: podemos, de algum modo, derivar o Postulado da Indistinguibilidade se assumirmos a hipótese da não-individualidade, associada à indistinguibilidade destas partículas?

Uma das respostas usuais é que o Postulado da Indistinguibilidade não é nem necessário e nem suficiente para a não-individualidade (ver a discussão em French e Rickles [2003] pp. 228-229). O problema neste caso é que, se assumimos alguma forma de não-individualidade e não conseguimos derivar o Postulado da Indistinguibilidade, este último ficaria "metafisicamente infundado" (French e Rickles [2003] p. 229). No entanto, como se pode ver com T20, em Q, assumindo a não-individualidade em uma particular acepção, juntamente com a indistinguibilidade, podemos demonstrar uma fórmula que busca captar este postulado. Isto nos fornece, de certo modo, evidência de que a teoria Q contribui para dar uma melhor fundamentação à metafísica da não-individualidade, e em particular, para a *Received View*.

2.5 - RESOLVENDO UM PROBLEMA DOS FUNDAMENTOS DE Q

A partir de agora, vamos interromper o desenvolvimento da teoria Q para cumprirmos uma promessa feita anteriormente (para mais detalhes sobre outros axiomas que podem ser acrescentados e resultados que podem ser obtidos em Q, ver French e Krause [2006] cap. 7). Como dissemos há pouco, podemos desenvolver em Q uma teoria de conjuntos análoga a ZU, como se fosse uma subteoria de Q. Nela, podemos definir conceitos clássicos e operar com os objetos clássicos de Q. Isto nos permitirá resolver um problema que enunciamos ao apresentar a linguagem de Q.

Relembrando um dos problemas que deixamos em aberto no começo deste capítulo, tínhamos chegado a uma situação desagradável para o proponente da teoria de Quase-Conjuntos: aparentemente, para se formular a teoria Q, devido ao uso de conceitos como coleção, família, coleções enumeráveis, entre outros, nos comprometemos com uma teoria de conjuntos clássica na metalinguagem. Assim, se este for realmente o caso, recaímos no mesmo problema que enfrentávamos ao tentar formular uma semântica que fosse adequada para a Lógica de Schrödinger, de que a metalinguagem é uma teoria de indivíduos.

Agora, vamos mostrar, sem muitos detalhes, como Q pode ser desenvolvida tendo-se uma teoria de Quase-Conjuntos informal como teoria da metalinguagem. Isso serve para mostrar que não necessariamente pressupomos uma teoria clássica de conjuntos para formular Q, de modo que não nos comprometemos com indivíduos logo de saída. A primeira distinção fundamental a ser feita é entre a teoria de fundo e a teoria objeto. A teoria de fundo é a teoria que utilizamos na metalinguagem, que apesar de ser mantida ao nível informal, pode ser formalizada. A teoria objeto é aquela teoria que estamos formulando com o auxílio da teoria de fundo, e que queremos estudar. Para dar alguns exemplos, em geral, para se estudar ZFC (teoria objeto), utilizamos uma teoria de fundo que é também uma versão informal de ZFC. Poderíamos, por outro lado, querer estudar lógica de primeira ordem (teoria objeto) utilizando uma lógica intuicionista como teoria de fundo, e isso, como se sabe, geraria resultados distintos daqueles que se obtém ao estudar esta lógica tendo-se ZFC como teoria de fundo.

Começaremos mostrando como se pode considerar as fórmulas de uma teoria de primeira ordem como q-sets em Q. Em nossa exposição, faremos uma adaptação de Ebbinghaus, Flum e Thomas [1994] pp. 112-114.

Para facilitar a terminologia, chamaremos de ZU’ a contraparte em Q da teoria clássica ZU. Em ZU’ podemos obter o conjunto (conjunto no sentido de Q) ω dos números naturais seguindo von Neumann, como se faz da maneira usual (por exemplo, em Enderton [1977], p. 68). Para variáveis de nossa teoria de primeira ordem, tomaremos os elementos de ω. Assim, há uma coleção enumerável de variáveis.

O próximo passo consiste em representar desse mesmo modo os conectivos e quantificadores que assumimos como primitivos na linguagem de Q. Colocaremos por definição que a negação será $\underline{\neg} =_{Def} <0, 0>$, para a implicação teremos $\underline{\rightarrow} =_{Def} <0, 1>$, e para o quantificador universal fazemos $\underline{\forall} =_{Def} <0, 2>$. Com isto, damos conta dos símbolos lógicos. Agora, consideremos os símbolos de relações e propriedades. Para os predicados unários m, M e Z colocamos $\underline{m} =_{Def} <1, 1>$, $\underline{M} =_{Def} <2, 1>$ e $\underline{Z} =_{Def} <3, 1>$. Para os símbolos de relação binária $\equiv$ e $\in$ definimos $\underline{\equiv} =_{Def} <1, 2>$, e $\underline{\in} =_{Def} <2, 2>$. Finalmente, para o símbolo funcional qc, temos $\underline{qc} =_{Def} <4, 1>$. Note que no caso dos símbolos não lógicos, o segundo elemento destes pares representa o peso do símbolo.

Agora, vamos representar as fórmulas deste modo. Fórmulas também serão n-uplas ordenadas. Uma fórmula do tipo m(x), por exemplo, será representada pelo par ordenado $<\underline{m}, z>$, onde z é uma função de 1 em ω (lembrando novamente, que 1 é um número natural definido segundo von Neumann, tal que $1 =_{Def} \{0\}$, e $0 =_{Def} \varnothing$, e assim por diante). Uma fórmula do tipo $x \in y$ corresponde a pares ordenados do tipo $<\underline{\in}, z>$, onde z é uma função de 2 em ω. Do mesmo modo, para as outras fórmulas atômicas, temos que serão pares ordenados, cujo primeiro elemento é o representante do símbolo, e o segundo é uma função do número que representa o peso do símbolo em ω, que designará as ‘variáveis’ que acompanham o símbolo.

Se considerarmos $\underline{R}$ um representante de um símbolo de relações apresentado nos parágrafos anteriores, com seu peso subentendido, então as fórmulas atômicas são representadas pelo conjunto $At = \{<\underline{R}, z>$: z é uma função do número que representa o peso de $\underline{R}$ em $\omega\}$.

Para a definição de fórmulas, temos que o conjunto das fórmulas é o menor conjunto F que satisfaz as seguintes cláusulas:

1) At $\subseteq$ F;

2) Se f $\in$ F, então $<\underline{\neg}, f> \in$ F;

3) Se f, g $\in$ F, então $<f, \underline{\rightarrow}, g> \in$ F;

4) Se n $\in$ ω e f $\in$ F, então $<\underline{\forall}, n, f> \in$ F.

A partir daqui, as noções sintáticas usuais, como de demonstração, derivação a partir de uma coleção de premissas, entre outras, podem ser definidas. Como se vê, apesar de utilizarmos conceitos clássicos, tudo foi feito na parte clássica de Q, de modo que não é o caso que necessariamente será preciso pressupor uma teoria de conjuntos clássica para formular Q. Isso nos mostra que, para desenvolver Q como uma teoria de primeira ordem, não precisamos pressupor, na metalinguagem, uma teoria de conjuntos clássica. No entanto, esta é uma solução apenas para a sintaxe de Q, e ainda não falamos nada sobre a interpretação dos quantificadores e problemas relacionados. Voltaremos a este assunto, tratando da lógica subjacente à teoria de Quase-Conjuntos e sua semântica no capítulo 4.

CAPÍTULO 3 – UMA DEFINIÇÃO DE QUASE-CARDINAIS FINITOS NA TEORIA DE QUASE-CONJUNTOS

Neste capítulo apresentamos uma definição de quase-cardinal finito em Q. Apesar de nos basearmos em certa medida no trabalho de Domenech e Holik [2007], mostramos como um quase-cardinal segundo a definição apresentada por estes autores pode também ser entendido como um quase-cardinal na acepção apresentada aqui. Ainda, fazendo uso de conceitos apresentados neste capítulo, sugerimos uma maneira distinta da usual de se associar indiretamente números ordinais a q-sets finitos em geral. Permeando o capítulo, consideramos problemas filosóficos relacionados com o tópico da cardinalidade em relação com a mecânica quântica e a teoria Q.

3.1 - INTRODUÇÃO: TEORIA DE QUASE-CONJUNTOS Q E QUASE-CARDINAIS

Como vimos anteriormente, um dos problemas com o qual nos deparamos ao formular uma teoria de conjuntos, ou, no nosso caso, de quase-conjuntos, é o de estabelecer a quantidade de elementos nas coleções que os axiomas de nossa teoria permitem que existam, ou seja, determinar a cardinalidade destas coleções. Usualmente, em teorias como ZFC, ZFU, NBG, este conceito é introduzido através da noção de número ordinal, onde o cardinal de certa coleção é um determinado ordinal a ela associado, qual seja, o ordinal que não é equipotente a nenhum ordinal menor que ele próprio. Ainda considerando estas teorias, para garantirmos que todo conjunto tem um cardinal, basta então garantirmos que possui um ordinal associado, e para isso apelamos para o axioma da escolha, que nos garante que todo conjunto pode ser bem-ordenado, e assim, demonstramos que é ordem-isomorfo a pelo menos um ordinal. A partir daí, falando por alto, basta tomarmos o ordinal apropriado.

No entanto, como já foi brevemente mencionado no capítulo 2, quando discutimos a definição de quase-relação em Q, aparentemente pelas próprias motivações que nos levaram a propor a teoria, este procedimento usual está barrado para nós. O grande problema é que para certos q-sets, nomeadamente os q-sets cujos elementos são m-átomos, em geral, não será possível definir relações de ordem, e assim, em particular a noção de boa-ordem não pode ser estabelecida de maneira sensata para estes q-sets, de modo que não podemos associar a eles um número ordinal. Associar um ordinal a estes q-sets implicaria, por exemplo, determinarmos um menor elemento (que devemos também ser capazes de provar que é único) do q-set relativamente a esta relação, o que pressupõe, para que este conceito faça sentido, que possamos identificá-lo (para detalhes, ver French e Krause [2006], p.282-284).

Vamos supor, no entanto, que queremos insistir em tentar definir este conceito seguindo outras abordagens ao problema, também bastante usuais. Vamos então considerar, para argumentação, que não temos em Q o nosso símbolo para qc, nem os axiomas do terceiro grupo apresentados acima. Chamemos esta teoria de Q'. O que estamos querendo agora é analisar a viabilidade de algumas das maneiras usuais de se definir cardinalidade nas teorias de conjuntos clássicas, quando utilizadas em Q restrita desta maneira (notemos que em particular, neste caso, não contamos com o axioma da extensionalidade fraca, que utiliza o símbolo qc em sua formulação).

Poderíamos primeiramente considerar como uma opção viável de solução para este problema uma definição ao estilo Frege-Russell, colocando o cardinal de um quase-conjunto A como sendo, por definição, a coleção de todos os quase-conjuntos B para os quais existe uma correspondência biunívoca entre A e B, ou seja, escrevendo, provisoriamente, Kard(A) como o símbolo que estamos tentando definir na teoria Q', gostaríamos de poder escrever:

Kard(A) $=_{\mathrm{Def}}$ [B: existe uma bijeção f entre A e B].

Tendo em vista as conhecidas dificuldades com as antinomias, estamos considerando, como é usual no tratamento axiomático desta particular abordagem, apenas coleções de certo rank, pressupondo que este último conceito está definido em Q'. Apesar de parecer uma alternativa razoável, por não envolver o conceito de ordinais diretamente, teremos neste caso o problema de que a noção de bijeção é problemática para certos q-sets. Como o leitor pode estar recordando do capítulo anterior, a grande dificuldade para introduzirmos a noção de bijeção de maneira geral está em adaptar esta noção para os q-sets cujos elementos são m-átomos indistinguíveis, pois para eles dificilmente podemos aplicar com sentido a noção usual de bijeção tomada literalmente, e uma adaptação muito razoável desta noção não funciona em Q, conforme formulada usualmente, sem que em sua definição se utilize o conceito de cardinalidade, que envolve o símbolo qc, como vimos no capítulo anterior ao considerarmos as quase-funções (ver também French e Krause [2006] p. 284). No entanto, para nós, que operamos temporariamente em Q', esta noção não está disponível.

Outra possibilidade, dentre as consideradas usualmente, é a de introduzir na linguagem um novo símbolo funcional unário primitivo 'Kard', onde Kard(x) denota o cardinal de qualquer coleção x, em particular das coleções em Q' que possuem m-átomos como elementos. Como vimos acima, o axioma para este conceito não poderá utilizar a conhecida formulação que nos garante que x e y terão o mesmo cardinal se e somente se são equipotentes, ou seja, $Kard(x) =_E Kard(y) \leftrightarrow x \sim y$, pois isto significa simplesmente que deve existir uma bijeção entre x e y, o que, novamente, como já vimos, não pode ser feito em Q' de modo geral sem a noção de quase-cardinal (mas devemos deixar claro, não pode ser feito em Q' se procedermos da maneira usual, sem considerarmos que poderia existir uma definição adequada e geral de bijeção em Q' que não utiliza o conceito de quase-cardinal).

Se não podemos introduzir o cardinal das coleções, em Q', procedendo de alguma das maneiras usuais, isso significa que não é possível considerar a cardinalidade destas coleções? A resposta a esta pergunta tem de ser negativa, pois, levando em conta a motivação para se propor Q', devemos considerar que os físicos, em geral, sabem, por exemplo, que um átomo de Hélio tem 2 elétrons. Achamos que seria desejável tentar capturar em Q' esta característica das coleções de objetos indistinguíveis que queremos representar, qual seja, a de possuir um cardinal a elas associado (a afirmação de que faz sentido atribuir um cardinal a coleções de objetos absolutamente indistinguíveis, é defendida, por exemplo, em Black [1952] p. 162. Note, no entanto, que ali não se trata com uma metafísica de não-indivíduos).

A solução adotada em Q foi utilizar um símbolo funcional unário qc como símbolo primitivo da linguagem, sendo que, como explicamos no capítulo 2, o símbolo qc(x) denota o quase-cardinal de um q-set x, com uma lista de postulados específicos que, apesar de intuitivos, não são tão simples quanto o postulado único usualmente utilizado nas teorias de conjuntos clássicas quando se decide introduzir, nestas teorias, este símbolo como primitivo.

A noção de quase-cardinal, apresentada deste modo, é uma generalização da noção de cardinal para q-sets em geral, e coincide com esta última quando aplicada aos conjuntos de Q. Para este conceito, os axiomas formulados são aqueles que apresentamos no grupo 3 dados no capítulo 2, concebidos especialmente para garantir que todos os q-sets possuem um quase-cardinal associado (o que não implica, note, que tenham também um ordinal associado no sentido usual, de existir uma bijeção entre o q-set e o ordinal satisfazendo certas condições), e também que este operador possui algumas das propriedades que usualmente esperamos dos cardinais.

Tendo esta visão geral da situação, em particular tendo em vista a constante insistência dos q-sets contendo m-átomos como elementos em desobedecer muitas de nossas intuições clássicas sobre o comportamento de conjuntos, podemos nos perguntar se ainda é razoável buscar alternativas para a solução acima apresentada, qual seja, a de postular a existência de quase-cardinais para estes q-sets. A resposta que daremos neste capítulo é afirmativa. A pertinência desta busca pode ainda ser evidenciada se considerarmos French e Krause [2006], p. 287, que, falando sobre possibilidades alternativas de se introduzir a noção de cardinal em Q através de alguma definição, afirmam que ".... parece claro que a busca por uma definição mais adequada de cardinal (e também, é claro, de 'contagem') no que diz respeito à física quântica, é algo a ser investigado mais amplamente".

Com isto, não estamos apenas visando economia de noções primitivas e de axiomas em Q, mas também e acima de tudo consideramos que tal empreendimento é interessante por nos permitir fazer uma discussão de alguns problemas mais gerais suscitados pela noção de cardinalidade quando aplicada a coleções que contenham objetos indistinguíveis como elementos e que, por sua vez, estão também relacionados com a maneira como são solucionados em Q usualmente, pela introdução do conceito de quase-cardinal como primitivo.

Um dos problemas mais imediatos relacionados à noção de cardinalidade, que surge quando tratamos com coleções que pretendemos que contenham elementos indistinguíveis, como em particular os q-sets de m-átomos em Q, diz respeito à possibilidade de se apresentar uma demonstração do assim chamado Princípio de Hume, segundo o qual duas coleções possuem a mesma quantidade de elementos se e somente se existe uma correspondência biunívoca entre elas:

(PH) $Kard(x) = Kard(y) \leftrightarrow x \sim y$.

Aparentemente, trata-se de uma propriedade bastante intuitiva e desejável, que qualquer noção de 'quantidade de elementos' de uma coleção deveria satisfazer. Tanto é assim que, em geral, como já vimos, este princípio é exatamente a fórmula que se introduz como axioma para o símbolo de cardinal quando este é utilizado como um símbolo primitivo nas teorias usuais de conjuntos.

Estamos usando aqui a palavra ‘coleção’ como um termo neutro, para apresentar o problema de um modo mais geral, e mostrar que ele não está restrito à teoria Q e suas coleções em particular, os q-sets. Nas teorias usuais, o Princípio de Hume pode ser derivado da definição usual de cardinal, e desempenha um papel importante no desenvolvimento da teoria de cardinais.

Agora, considerando o caso em que as coleções em questão são quase-conjuntos, como já tivemos a oportunidade de notar várias vezes, em Q a noção de bijeção só faz sentido quando associada com a noção de quase-cardinal (lembremos novamente, que este comentário se refere à noção de bijeção quando definida da maneira usual, conforme a definição apresentada no cap. 2). Assim, o Princípio de Hume, que em geral é o principal critério que se tem para determinar quando as quantidades de elementos de duas coleções são iguais, não pode ser aplicado com esta finalidade em geral em Q, procedendo-se da maneira usual.

Nestes casos, permanece a questão de saber se o Princípio de Hume é violado ou se pode ser adaptado caso adotemos alguma noção alternativa de quase-cardinal, que não aquela introduzida por postulados. Note que se trata de noção bastante intuitiva sobre a quantidade de elementos de coleções, em geral, algo que se espera que seja demonstrado para atestar a adequação intuitiva da definição de cardinalidade que se está propondo. O que podemos garantir, por enquanto, é que certamente, como é formulado em Q, utilizando a noção de quase-cardinal nos dois lados do bicondicional, não cumpre seu papel fundamental de nos ajudar a elucidar o significado do símbolo qc.

Outro problema ainda, relacionado com este que acabamos de mencionar, diz respeito ao desenvolvimento em Q da teoria usual da equipotência entre quase-conjuntos, que nas teorias usuais de conjuntos desempenha um papel essencial, por exemplo, para se estabelecer a aritmética dos cardinais, através do Princípio de Hume. Neste caso, é difícil perceber como se pode utilizar com proveito este método, que deveria servir para estabelecer a igualdade de quase-cardinais, mas que, no entanto, já pressupõe tal igualdade, ou seja, como já comentamos acima, a noção de bijeção faz sentido em Q apenas para q-sets que tenham a mesma quase-cardinalidade, e assim, estaríamos na seguinte situação: para provarmos que $qc(x) =_E qc(y)$, temos de estabelecer uma q-bijeção entre q-sets x e y, mas para estabelecer esta bijeção, temos em particular que ter que $qc(x) =_E qc(y)$.

Neste capítulo, visando tratar detalhadamente destes problemas, apresentamos uma definição de quase-cardinal para q-sets finitos. Utilizaremos uma versão da teoria

Q sem o símbolo qc e seus respectivos axiomas, que vamos a partir de agora chamar Q*, e daremos uma indicação de como podemos derivar em Q* as fórmulas utilizadas como axiomas para quase-cardinais apresentados no capítulo anterior, quando se restringem estas fórmulas de Q aos q-sets finitos. Trata-se de um primeiro passo para considerar uma possível solução aos problemas acima mencionados de modo alternativo. Vamos sugerir como abordar as questões formuladas através do uso de nossa definição e de algumas conseqüências desta definição, que permitirão dar soluções que consideramos adequadas aos problemas acima suscitados através de convenientes generalizações dos termos em que o problema está posto.

No entanto, é importante mencionar, há precedentes na tentativa de definir quase-cardinais em Q, e consequentemente, na tentativa de resolver, através de uma definição que se considera mais adequada para o conceito de quase-cardinal, certos problemas envolvidos com a formulação usual de Q e os seus postulados para o símbolo primitivo qc. Nosso trabalho sobre quase-cardinais está em parte baseado em idéias sugeridas por esta particular abordagem. Vejamos esta definição e suas motivações com algum cuidado antes de apresentarmos nossa proposta.

3.2 - QUASE-CARDINAL FINITO SEGUNDO G. DOMENECH E F. HOLIK

Em seu trabalho ‘A discussion on particle number and quantum indistinguinshability’ [2007], G. Domenech e F. Holik apresentam uma definição de quase-cardinal finito para a teoria de Quase-Conjuntos. Podemos selecionar aqueles que a nosso ver são os três objetivos principais dos autores neste trabalho: 1) mostrar que ao contrário do que se tem feito até hoje nas apresentações de Q, não é necessário introduzir tal conceito através de axiomas, pelo menos para q-sets finitos, 2) que a particular definição por eles apresentada permite que alguns q-sets não tenham um quase-cardinal associado, e com isso, na concepção destes autores, suprir algumas deficiências de Q no que diz respeito à possibilidade de representar nesta teoria certos sistemas físicos que entram em discussão quando se considera a física quântica relativista, e 3) os autores argumentam que a particular maneira como apresentam sua definição permite que esta capture uma idéia intuitiva de um procedimento físico de contagem, como a realização de um processo efetivo, feito em laboratório, mas não trataremos, aqui, deste objetivo, deixando para discutir mais adiante este ponto.

A importância do objetivo 1 reside no fato de que nas formulações usuais da teoria de Quase-Conjuntos, como tivemos a oportunidade de ver no capítulo 2 anteriormente, para garantir que todos os q-sets tenham um quase-cardinal associado, utiliza-se um símbolo funcional unário qc primitivo na linguagem, para o qual são formulados axiomas convenientes, como por exemplo, aqueles que apresentamos para o grupo 3 no capítulo anterior. O grande problema que se busca solucionar procedendo-se deste modo é a dificuldade em se introduzir cardinais em geral utilizando-se alguma das definições usuais, através da noção de ordinal ou dando uma definição ao estilo Frege-Russell, por exemplo, pois, como já argumentamos na seção anterior, se não podemos pressupor o símbolo de qc conforme formulado em Q (ou algo semelhante), acabamos sempre de algum modo esbarrando em grandes dificuldades.

No entanto, esta particular maneira de introduzir o conceito de quase-cardinalidade em Q, de acordo com estes autores, tem um efeito colateral indesejado: não é possível representar de maneira adequada na teoria de Quase-Conjuntos certos agregados de partículas. O calcanhar de Aquiles desta solução, conforme visto por eles, é que introduzir quase-cardinalidade por postulados desta maneira específica faz com que todos os q-sets tenham um quase-cardinal associado, o que impede que se representem na teoria de Quase-Conjuntos sistemas físicos para os quais a noção de número de partículas não está bem definida, como ocorre, por exemplo, em sistemas de partículas que não estejam no auto-estado de um operador número de ocupação. Como esta é uma situação freqüente na física quântica relativista, temos daí a importância de se levar em conta o objetivo 2, que busca contornar este efeito indesejado do método empregado para resolver o problema dos quase-cardinais em Q. Assim, segundo Domenech e Holik, garantir que todo q-set possui um quase-cardinal associado é garantir demais. Cabe aqui mencionar, no entanto, que a motivação para o desenvolvimento da teoria Q sempre foi a Mecânica Quântica não-relativística, ainda que French e Krause tenham adiantado algo a respeito das teorias quânticas de campos em French e Krause [2006] cap. 9.

A solução proposta por Domenech e Holik para se resolver estes problemas consiste em introduzir o conceito de quase-cardinal por definição, e não através de um símbolo primitivo com seus respectivos axiomas. Sua abordagem permitirá que todos os q-sets finitos tenham um quase-cardinal finito, e que outros q-sets não tenham um quase-cardinal definido (pelo menos não de acordo com esta definição, como veremos). No entanto, apesar de economizar uma noção primitiva, ao permitir que o símbolo de quase-cardinal seja introduzido por definição, esta apresentação ainda depende de que sejam introduzidos certos axiomas adicionais na teoria Q*, para que se possam demonstrar os resultados desejados e introduzir de modo adequado o símbolo para quase-cardinal. Este último fato, de certo modo, acaba por impor que se enfraqueça um pouco o objetivo 1, conforme foi proposto por estes autores. Mais adiante, comentaremos mais sobre os axiomas por eles propostos.

O cerne do procedimento sugerido por Domenech e Holik é basicamente o que seguiremos também para formular nossa própria definição, no entanto, com várias modificações que descreveremos com mais detalhes abaixo. A idéia fundamental por trás do raciocínio por eles apresentado é que, dado um q-set não-vazio A, podemos, utilizando os recursos de Q* (mais os dois axiomas por eles introduzidos), retirar sempre aquilo que intuitivamente consideraríamos como um único elemento de A, e verificar se o q-set obtido após realizarmos esta operação é ou não vazio. Se não for vazio, repetimos o procedimento retirando mais um elemento do q-set anteriormente obtido. Novamente, verificamos se o q-set assim obtido é ou não vazio, e assim por diante. Em alguns casos o procedimento eventualmente chegará ao conjunto vazio após um número finito de repetições deste processo, mas em outros casos, repetiremos a operação indefinidamente e não obteremos o q-set vazio. Temos como resultado duas possibilidades: ou o q-set é 'esvaziado' em um número finito de passos, e diremos que ele é, por definição, finito, ou não se pode esvaziá-lo com tal procedimento, e diremos que ele é infinito.

No primeiro caso, iniciaremos um procedimento que eventualmente atinge o q-set vazio, nos dando, na terminologia destes autores, uma 'cadeia descendente' do seguinte tipo: $\varnothing \subseteq ... \subseteq A'' \subseteq A' \subseteq A$, onde A´ denota o q-set A com um 'único' elemento a menos (um descendente direto de A, na terminologia de Domenech e Holik), e do mesmo modo para A´´ com relação a A', etc. No segundo caso, teremos que cadeias descendentes serão tais que, por mais elementos que se retire dos q-sets que fazem parte da cadeia, o procedimento não atingirá o q-set vazio, e estas cadeias terão intuitivamente a forma $... \subseteq ... \subseteq A'' \subseteq A' \subseteq A$. Nestes casos o q-set não possuirá um quase-cardinal finito associado (não terá um quase-cardinal finito associado, e nenhum quase-cardinal, fique bem entendido, que seja definido segundo este método).

Para as cadeias que chegam ao q-set vazio após um número finito de repetições do procedimento, os autores mostram como associar um número natural de maneira única a cada passo do procedimento. Esta associação será tal que ao q-set A será associado um número n, ao descendente de A, A’, será associado n-1, e assim por diante até que para o q-set ∅ seja atribuído o número 0. Devemos ainda notar que a definição de q-set finito apresentada por estes autores depende essencialmente desta particular noção de numeração: será finito um q-set para o qual existe um número natural que pode ser utilizado para contar os passos de uma cadeia descendente deste q-set que atinge o q-set vazio. A unicidade deste número natural, quando ele existe, pode ser demonstrada. Como veremos adiante, este número será também, por definição, o quase-cardinal deste q-set.

Uma das virtudes desta maneira de se definir quase-cardinais, segundo seus proponentes, é que não é importante para o processo de esvaziamento do q-set que se identifique o elemento que foi retirado em cada passo, pois idealmente o número de elementos do q-set independe da ordem em que se retira cada elemento ou de qual elemento específico é retirado em cada etapa, de modo que o fato de que o anonimato do elemento excluído não interfere na contagem deve garantir que podemos aplicar com sentido o procedimento a q-sets com elementos indistinguíveis. A existência das cadeias descendentes, pelo menos uma para cada q-set não-vazio, é postulada por estes autores, de modo aparentemente *ad hoc* (contrariando o objetivo 1, proposto por eles. Falaremos mais sobre isso abaixo). O quase-cardinal, como dissemos, é estabelecido para os q-sets cujas cadeias terminam através de uma q-função que atribui um número natural de modo conveniente a cada passo da cadeia descendente.

Ainda outro axioma é adicionado a Q* (também de modo aparentemente *ad hoc*), para garantir que, dados q-sets x e y finitos e tais que se x e y são indistinguíveis, se x está contido em y, então x é igual a y, e se y está contido em x, então x é igual a y. Este axioma visa garantir que conforme vamos eliminando elementos de um q-set A, sempre podemos distinguir um q-set de seu descendente direto.

Mais adiante apresentaremos versões formalizadas destes dois axiomas introduzidos em Q*, e os consideraremos mais detalhadamente. Por enquanto, apenas os apresentamos informalmente para motivar a definição de quase-cardinal feita por Domenech e Holik, e indicar qual será a idéia fundamental seguida também em nossa definição.

Apenas gostaríamos de chamar a atenção agora para o fato de que, em geral, de um ponto de vista filosófico, a introdução de novos axiomas em uma teoria de conjuntos envolve o problema de justificá-los, ou seja, argumentar pela razoabilidade de se aceitar tais axiomas na teoria, a menos que se adote uma posição formalista extrema (cf. Boolos

[1983] e Shoenfield [1977], para uma das maneiras usuais de se justificar a aceitação dos axiomas de ZF). Gostaríamos de saber, por exemplo, em que os novos axiomas nos ajudarão a compreender o universo intuitivo de coleções descrito pelos axiomas já aceitos, ou como eles contribuem para esclarecer problemas que não podem ser atacados apenas com estes últimos. Podemos então perguntar que razões temos para aceitar o postulado que garante que para todo q-set não-vazio existe ao menos uma cadeia descendente, em que os descendentes diretos de cada membro da cadeia são únicos, e como ele nos ajuda a compreender, por exemplo, a noção de quase-cardinal. Ainda, a introdução de axiomas parece contradizer as propostas de Domenech e Holik conforme as enunciamos no objetivo 1.

Como poderíamos então justificar a aceitação destes axiomas na coleção permanente de postulados de Q*? Domenech e Holik nos dão poucas indicações neste sentido, estando mais preocupados em seu trabalho em mostrar que realmente se pode introduzir a noção de quase-cardinal através de uma definição, caso se adote os postulados por eles propostos. Em princípio, poderíamos tentar justificar a aceitação dos postulados argumentando que sua introdução em Q* nos permite obter uma definição da noção de quase-cardinalidade. No entanto, esta pode não ser uma boa estratégia, uma vez que deste modo podemos também justificar os axiomas para quase-cardinal originalmente utilizados na teoria Q, com base em que estes axiomas nos permitem derivar as noções sobre cadeias descendentes postuladas por Domenech e Holik. Ainda, se poderia argumentar que começar com axiomas sobre cardinalidade tem a adicional vantagem de neste caso não serem necessários, para operar com esta noção, desvios através de noções como as de cadeias descendentes e descendentes diretos. Quanto ao segundo axioma, parece bastante plausível quando restrito a q-sets finitos, mas, se sua plausibilidade conta em seu favor, devemos levar em conta que os axiomas para quase-cardinal introduzidos na teoria de quase-conjuntos também são plausíveis.

Apesar de seguirmos muitas das intuições presentes em Domenech e Holik [2007], não buscaremos aqui estabelecer uma resposta para a preocupação que motivou a busca por uma solução para o problema posto no item 2 acima, ou seja, a princípio, para nós, mesmo que alguns q-sets não tenham um quase-cardinal associado, não damos a eles o papel de representar sistemas físicos nos quais a quantidade de elementos não esteja bem determinada e não trataremos deste problema aqui. Como este assunto não será retomado ao longo deste capítulo como tema central, daremos agora uma breve justificativa de nossa posição.

Não queremos nos comprometer, através de nossa definição de quase-cardinal que será apresentada abaixo, com uma busca solução do objetivo 2 pois consideramos que não está claro em que sentido os q-sets que ficam sem um quase-cardinal segundo estas abordagens possam representar sistemas físicos que não estejam no auto-estado de um operador número de ocupação, em particular por serem sempre infinitos os tais q-sets, de acordo com a solução proposta.

Enfatizando este ponto, é questionável que, seguindo a sugestão de Domenech e Holik, houve de fato sucesso em se atingir o objetivo 2, pois a noção de quase-cardinal está definida, segundo a abordagem deles, para todos os q-sets finitos, e os q-sets que não possuem quase-cardinal associado são aqueles que não são finitos, ou seja, aqueles que não podem ser contados segundo este método, e não aqueles que não possuem de todo um cardinal associado.

Consideramos que há uma diferença entre afirmar que um conceito como o de quase-cardinal não pode ser definido e afirmar que não está atualmente definido, pois uma eventual definição mais geral pode dar conta deste último caso, mas não do primeiro. O que podemos aceitar como argumento para mostrar que a certos q-sets não se pode associar um quase-cardinal segundo certo tipo de definição aceitável desta noção seria um teorema, mostrando que para certos q-sets, esta noção é de fato indefinível. É importante esclarecer que a noção de ‘definibilidade’ que estamos considerando aqui não é a de ‘definibilidade em uma estrutura’, que envolve a apresentação de uma fórmula na linguagem da teoria que satisfaz certas condições, mas sim, a de ‘definibilidade em uma teoria’.

Notemos ainda que, aparentemente, toda esta discussão depende de uma hipótese aceita implicitamente por estes autores, que é a de que sistemas físicos são representados por certos q-sets. Assim, o problema, de modo geral, seria que aparentemente ou não há q-sets em quantidade suficiente, ou seja, não há q-sets que representam coleções para as quais a noção de quase-cardinalidade não pode ser definida, ou então, estes q-sets, juntamente com os postulados para quase-cardinalidade são, em alguns casos, inadequados, pois alguns sistemas físicos não podem ser representados em Q desta maneira. Um dos problemas que vemos com esta sugestão é que não é claro como esta representação de sistemas físicos sem um quase-cardinal bem definido deve ser entendida em Q, de modo que a discussão sobre uma representação adequada ou não de certos sistemas físicos em Q se beneficiaria enormemente se houvesse uma clarificação desta noção, com pelo menos algumas indicações sendo dadas.

Ainda com relação ao objetivo 2, notamos, em particular, que este mesmo resultado (o de que o quase-cardinal não está definido para os q-sets infinitos) pode ser obtido também quando se utiliza o conceito de quase-cardinal como primitivo, na teoria Q, bastando para isso restringir os axiomas do grupo 3 apresentados acima aos q-sets finitos, ou seja, caso se aceite a proposta de Domenech e Holik de que alguns q-sets infinitos representam com sucesso, na teoria de Quase-Conjuntos, sistemas físicos que não possuem cardinal bem determinado, não é necessário utilizar a definição proposta por eles para se obter tal resultado, bastando para isto restringir os axiomas específicos do símbolo qc aos q-sets finitos, depois de se ter formulado uma conveniente definição de q-set finito (como por exemplo, no sentido de Tarski, ver abaixo). Assim, consideramos que modificações mais profundas terão de ser realizadas na teoria de Quase-Conjuntos para que ela satisfaça este tipo de exigência, mas não nos ocuparemos mais deste assunto aqui.

3.3 - MOTIVAÇÃO INFORMAL

Para motivar intuitivamente a definição que será apresentada a seguir, vamos descrever informalmente o processo que queremos que nossa definição reflita na teoria de Quase-Conjuntos Q*. O principal problema é determinar quantos elementos um q-set finito possui, levando em conta que certos q-sets possuem m-átomos indistinguíveis como elementos. Queremos um procedimento para determinar quase-cardinalidade que seja geral o suficiente para lidar não apenas com conjuntos, mas também com tais situações envolvendo objetos indistinguíveis.

Temos então que nossa questão principal é: supondo que sabemos que determinado q-set tem uma quantidade finita de elementos (com esta noção sendo definida de modo independente da noção de cardinalidade), como devemos proceder para determinar seu quase-cardinal?

A partir deste ponto, é útil atentarmos com algum detalhe para o motivo pelo qual a resposta mais imediata, de que devemos ser capazes de mostrar que existe uma bijeção entre o q-set e um número natural, não pode ser utilizada, em geral, em Q. Não podemos simplesmente tentar estabelecer uma bijeção entre os elementos do q-set e algum número natural pois este procedimento, apesar de adequado para os objetos da teoria que são conjuntos, falha para os q-sets que contenham m-átomos como elementos, como já mencionamos acima. Neste último caso, é fácil perceber onde ocorre a falha quando levamos em consideração o conceito de quase-função, pois para quaisquer elementos indistinguíveis do q-set, teremos que qualquer q-função que associe um número natural a um destes elementos associará o mesmo número a qualquer um de seus indistinguíveis que também pertença ao q-set, dado que, por definição, q-funções não determinam unicamente o seu valor quando este for um m-átomo, de modo que aparentemente não estaremos contando adequadamente o número de elementos do q-set (para detalhes sobre a definição de q-função, além do exposto no capítulo 2 acima, ver French e Krause [2006], cap. 7).

Mesmo que insistamos e formulemos esta definição diretamente em Q, se levarmos em conta a formulação apresentada no capítulo 2, para que uma q-função seja uma bijeção entre os q-sets A e B, temos como uma das condições que $qc(A) =_E qc(B)$, o que pressupõe o conceito que estamos tentando definir. Isto significa que o processo usual de contagem de coleções finitas, que consiste em se estabelecer uma bijeção entre os elementos de um conjunto e um número natural falha no caso geral na teoria de Quase-Conjuntos. O problema que se coloca é: como contar os elementos de um q-set que podem eventualmente ser indistinguíveis? Podemos também colocar a seguinte questão mais geral: é possível estabelecer um modo de determinar quantos elementos tem um q-set finito, de tal maneira que obtenhamos a resposta adequada no caso de q-sets cujos elementos sejam m-átomos indistinguíveis e que seja tal que a resposta, no caso dos q-sets clássicos, seja a mesma que a obtida pelo procedimento usual? Uma resposta razoável a esta questão poderia servir para dar uma definição matematicamente aceitável do que faz o físico quando “conta” partículas elementares indiscerníveis.

Seguindo G. Domenech e F. Holik [2007] (mas com motivações diferentes das apresentadas por eles, conforme explicado acima), para responder a estas perguntas adotaremos o seguinte expediente: vamos tentar esvaziar o q-set tirando apenas um elemento de cada vez e contar de algum modo o número de vezes que repetimos o procedimento até que já não seja mais possível prosseguir, quando o q-set estará vazio. Uma das diferenças principais entre este procedimento e o uso de bijeções entre elementos do q-set e os naturais é que neste caso não precisamos identificar o elemento retirado, bastando que se saiba que se está retirando, intuitivamente falando, apenas um em cada etapa, como já explicamos acima ao considerar uma das virtudes do método proposto por Domenech e Holik. Adiante faremos mais comentários sobre esta característica deste procedimento.

Em nossa abordagem, a contagem das etapas será feita através do uso dos números naturais, com os quais vamos contar os passos até o q-set ficar vazio, tirando o que intuitivamente consideramos um único elemento por vez, começando no passo zero com o próprio q-set, e, dado o passo marcado com o número n, queremos no passo n+1 tirar um elemento do q-set que sobrou quando realizamos a operação no passo n, se ainda restar algum. Isto é feito de modo que a cada passo obtemos um q-set que é subconjunto do q-set do passo anterior, o que, como veremos depois, gera um tipo especial de cadeia de sub-q-sets do q-set a ser contado, ordenada pela relação de 'estar contido em'.

Devemos notar que estamos contando os passos do processo de retirada de elementos do q-set a ser contado ao mesmo tempo em que o esvaziamos, e como estamos retirando apenas um elemento por vez (novamente, isto deve ser entendido apenas de modo intuitivo), da maneira particular como estamos fazendo teremos que o índice associado a cada passo do processo representa intuitivamente o número de elementos que já foi retirado, caso o q-set ainda não esteja vazio. Como fica evidente do comentário acima, no primeiro passo, marcado com o zero, começamos com o próprio q-set, ou seja, nenhum elemento foi retirado nesta etapa. Procedendo assim, consideramos razoável definir a quantidade de elementos do q-set, ou seja, seu quase-cardinal, como sendo o menor número natural no qual se chega ao q-set vazio na contagem dos passos do procedimento.

Destas considerações, podemos perceber em particular que o q-set vazio terá, de acordo com este procedimento, quase-cardinal zero, pois, como dissemos, o passo zero começa com o próprio q-set a ser avaliado, que neste caso é o vazio, e seu cardinal é o menor natural que marca o passo em que se chegou ao q-set vazio, neste caso, o próprio zero. Ainda, a afirmação de que tiramos um único elemento em cada passo ficará mais clara na seção seguinte, quando mostrarmos como se pode dar sentido a essa afirmação na teoria de Quase-Conjuntos, sem que para isso se utilize a identidade.

Nossa definição utilizará uma versão do axioma da escolha, que veremos abaixo. A necessidade de se utilizar este axioma pode ser justificada do seguinte modo: apesar de que para conjuntos finitos (os objetos de Q* que satisfazem o predicado Z e são finitos) sempre se pode especificar uma função escolha, o mesmo não ocorre para q-sets puros, por exemplo, pois não podemos apontar para um m-átomo específico, marcá-lo e retirá-lo do q-set, pois para isto seria necessário identificá-lo, o que é impossível nesta teoria. A q-função escolha garante que podemos designar, mesmo que ambiguamente nestes casos (dada a definição de q-função, como já comentamos), um elemento de um tal q-set. Como isto entra na descrição do procedimento que queremos estabelecer, seguindo a motivação intuitiva de nossa contagem, de retirar um 'único' elemento do q-set? Ora, tendo uma maneira de nos referir a elementos de um q-set, podemos aplicar a operação quase-conjuntista de formação do unitário forte, que intuitivamente significa que tomamos um q-set com um único elemento indistinguível do elemento ao qual se aplicou a operação. Esta operação é definida, como veremos abaixo, sem menção à noção de quase-cardinal, e como veremos, quando aplicada a objetos clássicos recai na noção usual de conjunto unitário.

O caso que nos interessa é quando há m-átomos no q-set a ser contado, caso em que este procedimento vai garantir que em cada etapa da contagem selecionamos, com a quase-função escolha, um elemento do q-set disponível na etapa anterior, que poderá não ser unicamente determinado caso seja um m-átomo, e a partir daí, formamos o unitário forte deste elemento, para então retirá-lo do q-set. Passamos agora a considerar com mais detalhe a maneira como isto é feito na Teoria de Quase-Conjuntos Q*.

3.4 - UMA DEFINIÇÃO DE QUASE-CARDINAL

Estamos adotando em nossa exposição as definições e os axiomas da teoria de Quase-Conjuntos conforme formulados no capítulo 2 acima (seguindo Krause [2007] cap. 4), sem os axiomas do terceiro grupo para o operador qc de quase-cardinal, que não figura entre os nossos símbolos primitivos. Devemos notar que, sem o símbolo qc na linguagem, algumas restrições devem ser consideradas quando operamos em Q*, pois várias noções que dependem deste conceito não podem ser formuladas e utilizadas, por exemplo, as definições de q-função sobrejetora, injetora e bijetora em suas versões gerais (no entanto, estas noções valem da maneira usual para objetos clássicos da teoria), o axioma da extensionalidade fraca e as instâncias do axioma da separação nas quais a condição A(x) for formulada com auxílio deste símbolo, entre outras. Ainda, convém relembrar que estamos adotamos a seguinte formulação do axioma da escolha em Q*:

(AE) Se A é q-set cujos elementos são q-sets não-vazios, então existe uma q-função f tal que, para todo B que pertence ao q-set A, $f(B) \in B$.

Note-se que, para q-sets cujos elementos sejam q-sets que contenham m-átomos indistinguíveis, a q-função dada pelo axioma não vai, em geral, especificar um único elemento, como se pode observar pela definição de q-função.

Def. [$\subset$-minimal] Dado um q-set B cujos elementos sejam q-sets, dizemos que um elemento A de B é $\subset$-minimal se e somente se $\forall C(C \in B \rightarrow \neg C \subset A)$.

Algo a ser notado é que esta definição é dada para q-sets cujos elementos são q-sets. Como vimos anteriormente ao considerarmos a definição de quase-relações, para q-sets que tivessem m-átomos como elementos, certas noções usuais, como menor elemento, elemento minimal, maior elemento, entre outras deixavam de ter seu sentido usual, devido principalmente à possibilidade de permutarmos elementos indistinguíveis e "mantermos a ordem", sendo que apenas certas relações de ordem poderiam ser definidas, aquelas que podem ser caracterizadas sem utilizar propriedades definidas com o uso da noção de igualdade (como anti-simetria e tricotomia). O leitor poderia estar se perguntando se a relação de inclusão própria que utilizamos aqui para ordenar os elementos de B não sofre do mesmo problema. O que queremos aqui é fazer notar que mesmo que alguns elementos de B tenham m-átomos como elementos, a relação de inclusão está sendo utilizada para ordenar q-sets, não envolvendo m-átomos diretamente. Assim, apesar de que noções como de elemento minimal sejam problemáticas na teoria de Quase-Conjuntos quando relacionada com relações de ordem em q-sets que contenham m-átomos como elementos, algumas destas noções podem ser utilizadas de modo geral para coleções de q-sets.

Def. [Q-set finito (Tarski)] Um q-set A é finito sse toda coleção não-vazia de subconjuntos de A possui um elemento $\subset$-minimal.

É importante perceber que podemos falar de q-sets finitos, mesmo que sejam q-sets puros, sem que tenhamos que necessariamente estabelecer quase-funções entre o q-set e algum número natural. Definir finitude de modo independente de associação com os números naturais, ou seja, independente de se tentar estabelecer já um cardinal para o q-set, tem a vantagem de fazer com que todos os q-sets ao qual o procedimento intuitivo descrito acima se aplique tenham um cardinal associado, pois restringiremos a aplicação deste modo de contagem aos q-sets finitos no sentido de Tarski. O resultado mais imediato que consideramos interessante ao seguirmos esta abordagem é que, ao contrário do que fizeram Domenech e Holik, o procedimento de se retirar elementos de um q-set sempre terminará no q-set vazio, pois não corremos o risco de iniciar a contagem em um q-set infinito, ou, para empregar a terminologia vista na seção 3.2, não teremos cadeias descendentes (se adaptarmos a terminologia para o nosso procedimento) que não terminem no q-set vazio.

Apenas para complementar o que acabamos de dizer: em Q*, a definição de finitude de Tarski e a definição usual, que nos garante que uma coleção é finita quando existe uma bijeção entre esta coleção e um número natural não são equivalentes. O problema é simples de se enunciar, e já apareceu várias vezes em nossas discussões: sem o conceito de quase-cardinal não podemos estabelecer bijeções em geral, e sem bijeções, a definição usual de finitude não pode sequer ser expressa. Note ainda que, em particular, para definirmos finitude no sentido usual, se queremos utilizar a definição usual de bijeção dada em Q, precisamos do símbolo que estamos tentando definir, qual seja, o símbolo qc, que, por sua vez, de acordo com nosso método, será definido para q-sets finitos no sentido de Tarski. Abaixo faremos uma proposta de generalização da noção usual de finitude, para abarcar também o caso de q-sets com m-átomos como elementos.

Para completude da exposição, vamos ainda recordar a definição de unitário forte de um q-set x, que será denotado por <x>.

Def. [Unitário forte de x]

i) Se $x \in B$, definimos $S_x =_{Def} [s \in \wp([x]_B) : x \in s]$;

ii) $\langle x \rangle =_{Def} \bigcap_{t \in S_x} t$

Um pequeno comentário é pertinente: a operação < >, para se obter o unitário forte, apesar de frequentemente associada ao conceito de quase-cardinal nas apresentações usuais de Q, é definida sem recurso a este símbolo, que não está sendo tomado aqui como primitivo, e, como Domenech e Holik [2007] bem argumentaram, <x> representa aquilo que intuitivamente tomaríamos como um q-set com apenas um elemento (e como veremos, quando apresentarmos a definição de quase-cardinal, este será o caso).

Antes de formularmos a definição de quase-cardinal de um q-set finito, precisamos apresentar ainda uma função que posteriormente fará o papel de retirar 'um a um' os elementos do q-set a serem contados. Para facilitar a referência a esta função mais adiante, chamá-la-emos de função subtração. Seja A um q-set finito. Pelo AE, existe uma quase-função escolha g para $\wp(A)\backslash\{\varnothing\}$ (essas operações quase-conjuntistas, como o q-set das partes e diferença, são justificadas pelos axiomas de Q*, como tivemos oportunidade de ver no capítulo 2). Agora, definimos a q-função h, chamada função subtração de A, de $\wp(A)$ em $\wp(A)$, do seguinte modo:

Def. [Função subtração de A]

$h(B) =_E B\backslash<g(B)>$ se $B \neq_E \varnothing$;

$\varnothing$ se $B =_E \varnothing$.

A função h, intuitivamente falando, tira de cada sub-q-set de A um único elemento, tendo como resultado um q-set com um elemento a menos, que ainda é um sub-q-set de A. Caso seja aplicada ao q-set vazio, como não há nada a tirar, teremos por definição que a função subtração terá como valor novamente o q-set vazio. Como dissemos, estamos falando apenas intuitivamente que um único elemento é retirado de cada vez através do uso da função subtração. Para garantir que o significado de h em geral em Q* é esse mesmo, precisaríamos fazer uso do conceito de quase-cardinal. No caso de objetos clássicos, pode-se provar na parte clássica de Q* que isto de fato é assim, e apenas por analogia estamos utilizando o significado do caso clássico para os casos envolvendo também m-átomos e outros q-sets. Posteriormente, mostraremos que, com nossa definição de qc, este resultado pode ser demonstrado.

A existência de h pode ser garantida pelo axioma da separação, observando-se que h pertence ao q-set $\wp((\wp(A)\times\wp(A))$.

Convém lembrar que $\wp(A)$ é um q-set cujos elementos são q-sets, e assim, a identidade está definida (pois ela está definida para q-sets). Com isto, podemos verificar que o teorema da recursão pode ser aplicado.

Definimos por recursão a função f de ω em $\wp(A)$:

$f(0) =_E A$

$f(n+1) =_E h(f(n))$

Def. [qc(A)] O quase-cardinal de A, qc(A) é o menor número natural n tal que $f(n) =_E \varnothing$.

Podemos garantir que a seqüência sempre chegará ao q-set vazio em algum passo, como comentamos acima, pois em caso contrário, teríamos uma coleção de sub-q-sets de A sem um elemento $\subset$-minimal, contradizendo o fato que assumimos de que o q-set A é finito. Assim, qualquer q-set finito possuirá sempre uma quantidade finita de etapas na contagem de seus elementos, o que, apesar de não ser uma grande novidade, dá certa credibilidade ao empreendimento.

Retomando neste ponto um comentário que fizemos anteriormente: o fato de assumirmos que os q-sets são finitos antes de aplicarmos o procedimento de contagem é que nos permite garantir que a seqüência sempre chegará ao fim, e esta é mais uma das diferenças entre nossa abordagem e a de Domenech e Holik [2007], onde, em alguns casos o procedimento de contagem, conforme proposto por esses autores, pode não terminar (quando o q-set for infinito), ou para utilizar a terminologia destes autores, conforme expusemos acima, existem cadeias descendentes que não terminam no q-set vazio. Para esses autores, a noção de q-set finito é definida, intuitivamente, como aquele em que o procedimento de contagem proposto por eles atinge o conjunto vazio em um número finito de passos.

Note-se, no entanto, que a q-função f acima foi definida em termos da q-função subtração h, e esta, por sua vez, está definida em termos de uma q-função escolha g. Precisamos mostrar que faz sentido falar em um único quase-cardinal para A, ou seja, que, dadas g_1 e g_2 q-funções escolha para $\wp(A)\backslash\{\emptyset\}$, não vai ocorrer de definirmos $qc_1(A) \neq_E qc_2(A)$. É a esta tarefa que nos dedicaremos agora.

Sejam g_1 e g_2 q-funções escolha para $\wp(A)\backslash\{\emptyset\}$, e sejam h_1 e h_2 as respectivas q-funções subtração definidas como h acima. Temos, então, pelo teorema de recursão, q-funções f_1 e f_2 do conjunto dos naturais no q-set $\wp(A)$.

Suponha que $qc_1(A) =_E n$ e $qc_2(A) =_E m$. Temos de mostrar que $n =_E m$, ou seja, garantir que o resultado final não depende da particular ordem de escolha que fazemos dos elementos que vão sendo retirados de A. Para o caso do q-set vazio, podemos estabelecer diretamente este resultado.

Lema 1. Se $A =_E \emptyset$, então $qc_1(A) =_E 0 =_E qc_2(A)$.

Dem. Se A é vazio, temos por definição que $f_1(0) =_E A =_E \emptyset$ e $f_2(0) =_E A =_E \emptyset$, de onde temos que os quase-cardinais sempre coincidirão, e serão sempre 0.

c.q.d.

Vamos supor agora que $A \neq_E \emptyset$. Podemos, pelo axioma da separação, obter de $\wp(A)$ os seguintes q-sets:

$C =_{def} [\langle g_1(f_1(t))\rangle: 0 \leq t \leq n]$;

$D =_{def} [\langle g_2(f_2(t))\rangle: 0 \leq t \leq m]$.

Lema 2. $\cup C =_E A$

Dem. $X \in \cup C \rightarrow x \in A$ é imediato.

Agora, suponha que $x \in A$, mas não é o caso que $x \in \cup C$. Note que $x \in f_1(0) =_E A$, e não ocorre que $x \in f_1(n) =_E \varnothing$. Tome o menor k tal que x não pertence a $f_1(k)$. Note que $k \leq n$. Então $x \in f_1(k\text{-}1)$. Mas $f_1(k) =_E h_1(f_1(k\text{-}1)) =_E f_1(k\text{-}1) \backslash <g_1(f_1(k\text{-}1))>$. Suponha que não ocorre que $x \in <g_1(f_1(k\text{-}1))>$. Então, $x \in f_1(k)$, o que é absurdo. Logo, $x \in \cup C$.

Assim, $Q(A) \wedge Q(\cup C) \wedge (x \in \cup C \leftrightarrow x \in A)$, que, pela definição de igualdade, nos dá a fórmula desejada.

c.q.d.

Lema 3. $\cup D =_E A$

Dem. Adaptação da anterior.

c.q.d.

Lema 4. Para $t \neq_E k$, com $t < k \leq n$, temos que $<g_1(f_1(t))> \cap <g_1(f_1(k))> =_E \varnothing$.

Dem. Note que $f_1(k) \subseteq f_1(t+1)$, e que $<g_1(f_1(t))> \cap f_1(t+1) =_E \varnothing$, mas $<g_1(f_1(k))> \subseteq f_1(k) \subseteq (f_1(t+1))$, logo, os q-sets referidos não podem ter elementos em comum.

c.q.d.

Lema 5. Para $t \neq_E k$, com $t < k \leq m$, temos que $<g_2(f_2(t))> \cap <g_2(f_2(k))> =_E \varnothing$.

Dem. Adaptação da anterior.

c.q.d.

Lema 6. $[x \in C: \forall y \in D(x \cap y =_E \varnothing)] =_E \varnothing$.

Dem. Suponha que exista um x que pertença a este q-set. Então, para algum $k \leq n$ temos que $x =_E <g_1(f_1(k))>$. Como $<g_1(f_1(k))> \subseteq A =_E \cup D$ (pelo lema 3), temos que há pelo menos um y em D tal que $x \cap y$ não é vazio, contradizendo a hipótese.

c.q.d.

Lema 7. $[x \in D: \forall y \in C(x \cap y =_E \varnothing)] =_E \varnothing$.

Dem. Basta adaptar a demonstração anterior.

c.q.d.

Lema 8. $\forall x \in C, \exists y \in D(x \cap y \neq_E \varnothing)$.

Dem. Conseqüência do lema 6.

c.q.d.

Lema 9. $\forall x \in D, \exists y \in C(x \cap y \neq_E \varnothing)$.

Dem. Segue-se do lema 7.

c.q.d.

Vamos utilizar também o seguinte lema (a demonstração que apresentamos aqui é devida a Domenech e Holik [2007], onde aparece como prop. 4.4):

Lema 10. Se $y \in \wp(\langle x \rangle)$, então $y =_E \varnothing$ ou $y =_E \langle x \rangle$.

Dem. Seja X um q-set tal que $x \in X$, e considere $y \in \wp(\langle x \rangle)$, de onde temos em particular que Q(y). Pela lógica subjacente à teoria, $x \in y \vee \neg(x \in y)$. Considere o primeiro caso. Como $y \subseteq \langle x \rangle$, então $y \subseteq X$, e como por hipótese $x \in y$, então $y \in S_x$, e pela definição de $\langle x \rangle$ temos que $\langle x \rangle \subseteq y$, logo, $\langle x \rangle =_E y$. No segundo caso, como $\neg(x \in y)$, então $x \in \langle x \rangle \backslash y \subseteq \langle x \rangle \subseteq X$ de onde temos que $\langle x \rangle \backslash y \in S_x$, de onde segue-se que $\langle x \rangle \subseteq \langle x \rangle \backslash y$, e assim, $\langle x \rangle =_E \langle x \rangle \backslash y$. Supondo que $y \neq \varnothing$, teríamos que existe pelo menos um z tal que $z \in y$. Por hipótese, $y \subseteq \langle x \rangle$, de onde temos que $z \in \langle x \rangle$, mas como vimos, $\langle x \rangle =_E \langle x \rangle \backslash y$, e z pertence a $\langle x \rangle \backslash y$, ou seja, $z \notin y$, o que é absurdo. Logo, $y =_E \varnothing$.

c.q.d.

Lema 11. Para $x \in C$, não ocorre que $x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle \neq_E \varnothing$ e $x \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle \neq_E \varnothing$, caso $u \leq m$ e $k \leq m$ e $u \neq_E k$.

Dem. Se $x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle =_E \varnothing$ e $x \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle =_E \varnothing$, nada há a fazer. Lembre que $x =_E \langle g_1(f_1(t)) \rangle \neq_E \varnothing$, para algum $t \leq n$. Suponha que $x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle \neq_E \varnothing$. Pelo lema 5, $\langle g_2(f_2(u)) \rangle \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle =_E \varnothing$, quando $k \neq_E u$. Como $z =_{Def} x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle \neq_E \varnothing$ temos em particular que $z \subseteq x$ e pelo lema anterior, $z =_E x$. Se $w =_{Def} x \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle \neq_E \varnothing$, temos também pelo lema anterior que $w =_E x$. Agora note que $w \cap z =_E (x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle) \cap (x \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle) =_E \varnothing =_E x \cap x =_E x$, o que é absurdo.

c.q.d.

Lema 12. Para $x \in D$, não ocorre que $x \cap \langle g_1(f_1(u)) \rangle \neq_E \varnothing$ e $x \cap \langle g_1(f_1(k)) \rangle \neq_E \varnothing$, caso $u \leq n$ e $k \leq n$ e $u \neq_E k$.

Dem. Adaptação da anterior.

c.q.d.

Teorema 1. Dados $qc_1(A)$ e $qc_2(A)$ como acima, temos que $qc_1(A) =_E qc_2(A)$, ou seja, $n =_E m$.

Dem. Os lemas 8 e 11 garantem que para cada x em C há apenas um y em D tal que $x \cap y \neq_E \emptyset$, ou seja, $n \leq m$, e os lemas 9 e 12 garantem que para cada y em D há apenas um x em C tal que $y \cap x \neq_E \emptyset$, ou seja $m \leq n$, de onde $m =_E n$.

c.q.d.

Com este teorema, que é conseqüência direta dos lemas demonstrados acima, garantimos que o quase-cardinal de um q-set finito não depende da particular q-função escolha que comparece na definição da q-função subtração empregada em sua definição. Faremos agora a seguinte convenção: chamaremos de função contagem a q-função f dada pelo teorema de recursão restrita ao menor valor n para o qual $f(n) =_E 0$. Então, em geral, para estabelecer o quase-cardinal de um q-set, precisamos estabelecer uma função contagem. Ainda com relação ao fato de que o quase-cardinal de um q-set não depende da q-função escolha utilizada, para facilitar o trabalho na demonstração de alguns resultados, no caso dos q-sets que satisfazem o predicado Z, muitas vezes podemos especificar uma adequada escolha de elementos dos seus subconjuntos, como se nota no caso seguinte:

Teorema 2. Sendo n um número natural, $qc(n) =_E n =_E card(n)$ (onde card é o cardinal definido na parte clássica de Q*, para objetos clássicos).

Dem. Podemos tomar como q-função escolha $u(B) =_E$ (o maior número natural que pertence a B) (pois n é finito). Então, a função subtração correspondente é dada por $h(B) =_E B \backslash \langle u(B) \rangle$. Note, se B for em particular um número natural, $h(B) =_E B-1$ (caso B não seja o número 0). Temos então a definição: $f(0) =_E n$, e $f(k+1) =_E h(f(k))$. Da observação anterior temos que em particular $f(n) =_E n-n =_E 0 =_E \emptyset$. Se n não fosse o menor número natural para o qual isto ocorre, teríamos, para algum número natural k tal que $k < n$, que $f(k) =_E 0$, ou seja, $n-k =_E 0$, o que é impossível.

c.q.d.

Do mesmo modo, podemos mostrar que o quase-cardinal de um conjunto é igual ao seu cardinal, definido da maneira usual, ou seja, se A for um q-set finito tal que Z(A), e $card(A) =_E n$, então $qc(A) =_E n$. Assim, garantimos que o processo de contagem assegura o resultado adequado também para os conjuntos finitos.

Teorema 3. Se A for um conjunto finito, então $card(A) =_E n =_E qc(A)$

Dem. Se $qc(A) =_E n$, então, por definição existe uma q-função f que efetua a contagem da subtração dos elementos de A e tal que $f(n) =_E \emptyset$. Podemos definir uma bijeção t na parte clássica de Q^* entre A e n do seguinte modo: $t(k) =_E g(f(k-1))$, para $1\leq k\leq n$, e $t(0) =_E A\backslash\{g(f(k-1)): 1\leq k\leq n\}$. É fácil verificar que t é uma função e é bijetora, de modo que $card(A) =_E n$.

Por outro lado, se $card(A) =_E n$, existe uma função bijetora t entre A e n na parte clássica de Q^*. Podemos estabelecer que a função escolha g na contagem de A seja dada a partir de t, do seguinte modo: para cada subconjunto B de A, $g(B) =_E t(k)$, com k o menor natural tal que $t(k) \in B$. Assim, podemos definir f do seguinte modo: $f(0) =_E A$, $f(1) =_E A\backslash\langle g(f(0))\rangle$, e em geral, $f(k) =_E f(k-1)\backslash\langle g(f(k-1))\rangle$, ou seja, a função escolha toma de cada subconjunto de A o elemento que é imagem do menor número natural pela função t. Temos apenas que verificar que $f(n) =_E \emptyset$. Note que $f(n) =_E f(n-1)\backslash\langle g(f(n-1))\rangle$. Se este conjunto não fosse vazio, haveria algum elemento em A que não é imagem pela função t, o que contradiz nossa hipótese. Assim, $qc(A) =_E n$.

c.q.d.

Agora chegou o momento de para pagar uma promessa feita anteriormente, e para garantir que de acordo com a definição estamos realmente tirando apenas um elemento em cada passo da contagem, vamos mostrar que para qualquer objeto x, $qc(\langle x\rangle) =_E 1$. Com isto, damos sentido rigoroso à afirmação feita anteriormente apenas por analogia com o caso clássico, de que o processo de contagem aqui descrito permite que se retire apenas um elemento por vez. Com auxílio do lema 10 não é difícil verificar que $\langle x\rangle$ é finito, e assim a q-função qc está definida neste caso.

Teorema 4. Para qualquer x, $qc(\langle x\rangle) =_E 1$.

Dem. Temos que mostrar que a q-função f de contagem dos passos é tal que $f(1) =_E \emptyset$. Note que por definição $f(0) =_E \langle x\rangle$, e $f(1) =_E h(f(0)) =_E f(0)\backslash\langle g(f(0))\rangle =_E \langle x\rangle\backslash\langle g(\langle x\rangle)\rangle$. Suponha que este último q-set não é vazio. Como $\langle x\rangle\backslash\langle g(\langle x\rangle)\rangle \subseteq \langle x\rangle$, então $\langle x\rangle\backslash\langle g(\langle x\rangle)\rangle\in \wp(\langle x\rangle)$, de onde temos pelo lema 10 que $\langle x\rangle\backslash\langle g(\langle x\rangle)\rangle =_E \langle x\rangle$, de onde segue que $\langle g(\langle x\rangle)\rangle =_E \emptyset$, o que é absurdo. Logo, $f(1) =_E \langle x\rangle\backslash\langle g(\langle x\rangle)\rangle =_E \emptyset$, e 1 é o menor natural em que a contagem chega ao q-set vazio, e assim temos que, $qc(\langle x\rangle) =_E 1$.

c.q.d.

Intuitivamente, com este teorema garantimos que estamos retirando apenas um elemento em cada passo, e ainda, obtemos um resultado da teoria Q quando formulada tendo o símbolo qc como primitivo (French e Krause [2006] p. 294, teorema 24).

Podemos ainda, relativamente a esta afirmação, de que tiramos apenas um elemento do q-set em cada passo, provar mais alguns resultados, que nos ajudam a compreender como podemos formular esta idéia sem o auxílio da identidade. Temos:

Teorema 5. Se $qc(A) =_E n$ e $x \notin A$, então, $qc(A \cup \langle x \rangle) =_E n+1 =_E qc(A) + qc(\langle x \rangle)$.

Dem. Seja g a q-função escolha de $\wp(\langle x \rangle)$, tal que $g(\langle x \rangle) \in \langle x \rangle$, que é utilizada na q-função contagem para $qc(\langle x \rangle) =_E 1$ (pelo teorema 4), e seja h a q-função escolha utilizada na contagem de $qc(A) =_E n$. Podemos apresentar a seguinte q-função escolha j para $\wp(A \cup \langle x \rangle)$: $j(B \cup \langle x \rangle) =_E h(B)$ se B for um sub-q-set não-vazio de A, e $j(B \cup \langle x \rangle) =_E g(\langle x \rangle)$ se B for vazio. Agora, temos que existe uma q-função contagem f de $A \cup \langle x \rangle$, com uma q-função subtração s. Note que no passo n+1 temos que ter por definição $f(n+1) =_E s(f(n)) =_E f(n) \backslash \langle j(f(n)) \rangle$. Se $j(f(n)) =_E h(f(n))$, então, há ainda elementos de A no passo n, contradizendo o fato de que $qc(A) =_E n$. Logo, $j(f(n)) =_E g(f(n))$, e $g(f(n)) \in \langle x \rangle$, assim, temos que ter $f(n) =_E \langle x \rangle$, e $f(n+1) =_E \emptyset$, pois caso contrário, novamente teríamos algum elemento de A ainda sem ser contado, contradizendo a definição de j, ou teríamos que $qc(\langle x \rangle)$ é maior que 1, novamente uma contradição.

c.q.d.

Teorema 6. Se $A \neq_E \emptyset$ é um q-set finito tal que $qc(A) =_E n$, então, para qualquer $x \in A$, $qc(A \backslash \langle x \rangle) =_E n-1$.

Dem. Note que $n =_E qc(A) =_E qc(A \backslash \langle x \rangle \cup \langle x \rangle)$. Pelo teorema anterior, temos que $qc(A \backslash \langle x \rangle \cup \langle x \rangle) =_E qc(A \backslash \langle x \rangle) + qc(\langle x \rangle)$, e daí, temos que $qc(A \backslash \langle x \rangle) + 1 =_E n$, ou seja, $qc(A \backslash \langle x \rangle) =_E n-1$.

c.q.d.

Por fim, antes de partirmos para outras discussões, podemos considerar o problema de saber se todos os q-sets possuem ou não um quase-cardinal associado. Note que a resposta é positiva para q-sets finitos. E quanto aos q-sets infinitos, o que podemos afirmar? Será que estamos na mesma situação que Domenech e Holik, em que certos q-sets infinitos não possuem um quase-cardinal associado?

Um primeiro ponto a se notar é que de acordo com o axioma do infinito que adotamos, Q14, podem existir q-sets com infinitos elementos tais que, em particular, muitos desses elementos não sejam objetos clássicos, de modo que nem mesmo o q-set cuja existência se está postulando será clássico. Isto significa, em particular, que não poderemos utilizar sem restrições, na parte clássica de Q*, as definições usuais de cardinalidade para estes q-sets, pois eles não satisfazem o predicado Z. No entanto, note que se garantirmos que todos os q-sets infinitos que existem são conjuntos, poderemos, na parte clássica, garantir que todos eles possuem um cardinal associado.

Para que possamos realizar a proposta do parágrafo anterior, o primeiro passo consiste em notar que quando aplicamos um número finito de vezes as operações quase-conjuntistas usuais de união, interseção, potência, diferença, etc., em q-sets finitos, obtemos ainda q-sets finitos, de modo análogo ao caso clássico. Também é importante perceber que não postulamos um axioma da substituição, que permitiria, por exemplo, substituir os elementos de um q-set infinito clássico por objetos não-clássicos. Por fim, podemos também modificar Q14 para Q14' do seguinte modo:

Q14') $\exists_Z x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup [y]_x \in x))$

Note que agora nos restringimos a conjuntos em Q*, evitando os casos problemáticos em que este postulado poderia ser usado para justificar a existência de um q-set infinito que não seja também um conjunto. Ainda, para os propósitos de aplicações da teoria Q* à física também não há prejuízo com esta substituição, pois, para estes propósitos, aparentemente, sempre é suficiente um número finito, mesmo que arbitrariamente grande de átomos. O papel dos q-sets infinitos é garantir que a matemática usual pode ser desenvolvida em Q*, e para isso, note, os q-sets que são conjuntos são tudo o que precisamos.

Assim, todos os q-sets podem ser ditos terem um quase-cardinal, onde no caso dos q-sets infinitos, que serão sempre conjuntos, o quase-cardinal será simplesmente seu cardinal, no sentido usual, definido na parte clássica da teoria. Esta parece ser mais uma evidência de que, para se atingir com mais êxito o objetivo 2 proposto por Domenech e Holik, algumas alterações mais profundas terão de ser feitas em Q*, e com isto, não queremos argumentar que não devam ser feitas.

3.5 - MAIS ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE QUASE-CARDINAIS

A partir de agora vamos apresentar alguns tópicos diversos relacionados com a noção de quase-cardinal finito, e que estão relacionados com a discussão feita na seção 3.1 deste trabalho.

3.5.1 - A definição de Domenech e Holik

Vamos ver agora como a discussão sobre quase-cardinais feita em Domenech e Holik [2007] pode ser traduzida em nossa abordagem, e como as fórmulas utilizadas por eles como axiomas podem ser demonstrados (lembrando que estamos operando em Q*). Esta seção pode ser encarada, além disso, como uma formalização das noções que foram tratadas somente intuitivamente na seção 3.2. Diferentemente dos autores citados, vamos nos restringir, como já dissemos anteriormente, a fazer considerações apenas a q-sets finitos (no sentido de Tarski). Assim, apesar de que um dos axiomas destes autores é válido também para q-sets infinitos, (o axioma que garante a existência de cadeias descendentes, conforme seção 3.2 acima) vamos derivá-lo aqui a partir de nossa própria abordagem apenas para q-sets finitos. Isso pode ser feito sem prejuízo à abordagem desses autores, mesmo porque, sua validade para q-sets infinitos em nenhum momento é utilizada no trabalho mencionado, pois não está envolvida diretamente na definição de quase-cardinais finitos.

A primeira noção importante para nossos objetivos, com a qual nos deparamos no trabalho destes autores, e que não é apresentada nas formulações usuais da teoria de Quase-Conjuntos, é a noção de que 'Y é um descendente direto de um q-set X', onde se impõe a condição extra de que X seja não-vazio. Formalmente temos a definição do símbolo DDx(Y):

Def. [Y é um descendente direto de X] $DD_X(Y) \leftrightarrow \exists z(z \in X \wedge Y =_E X \backslash \langle z \rangle)$

Poderíamos, tendo em vista tornar a definição mais geral, estipular que se X for o q-set vazio, ele é seu próprio descendente direto. Considerando nossa apresentação de quase-cardinais anterior, o que seriam os equivalentes da noção de descendentes diretos? É imediato que, para um q-set X, se ele for vazio, em nossa abordagem teremos que, dada uma q-função contagem f para X, $f(0) =_E X$, e como acabamos de estipular, ele será seu próprio descendente. Para um q-set não-vazio finito X em geral, dada sua q-função contagem f, teremos que, se $qc(X) =_E n$, então, para cada f(k) na contagem do quase-cardinal, com $k \leq n-1$, teremos que f(k+1) será seu descendente direto, pois recordemos, por definição $f(k+1) =_E h(f(k)) =_E f(k)\backslash\langle g(f(k))\rangle$, que satisfaz imediatamente a definição.

A próxima noção que nos importa definir é a de 'cadeia descendente de X' (ver a seção 3.2). Esta noção é introduzida por estes autores para q-sets em geral, finitos e infinitos, mas aqui, vamos tratar dela apenas para o caso dos q-sets finitos, como já comentamos. Também é importante lembrar que, por enquanto, não introduzimos a noção de finitude e infinitude para q-sets conforme formulada por estes autores, e assim, as estamos tomando em nosso sentido, conforme definimos na seção 3.4. A definição para o símbolo CDx(γ), que se lê 'γ é uma cadeia descendente de X' é:

Def. [γ é uma cadeia descendente de X] $CDx(\gamma) \leftrightarrow (\gamma \in \wp(\wp(X)) \wedge X \in \gamma \wedge \forall z \forall y(z \in \gamma \wedge y \in \gamma \wedge z \neq_E y \rightarrow (z \subseteq y \vee y \subseteq z)) \wedge \forall z(z \in \gamma \wedge z \neq_E \varnothing \rightarrow \exists Y(Y \in \gamma \wedge DDz(Y) \wedge \forall w(w \in \gamma \wedge DDz(w) \rightarrow w =_E Y))))$.

Para mostrarmos como podemos 'traduzir' esta definição em termos que foram utilizados em nossa apresentação, basta notar que, em nossa abordagem, dado um q-set X, com uma função contagem f, tal que $qc(X) =_E n$, podemos considerar o q-set $\gamma =_{Def} [f(k): 0 \leq k \leq n]$ como uma cadeia descendente de X. Se tomarmos cada uma das fórmulas da conjunção como uma condição, temos que todas as condições são satisfeitas. Note que a primeira cláusula está trivialmente satisfeita, e, como por definição $X =_E f(0)$, e $f(0) \in \gamma$, temos que a segunda exigência também é imediatamente cumprida. Ainda, devemos notar que para quaisquer dois elementos de γ que representam passos diferentes na contagem de X, f(k) e f(m), podemos supor sem nenhuma perda de generalidade que $k < m$, e teremos imediatamente que $f(m) \subseteq f(k)$, satisfazendo a terceira cláusula. Quanto à última condição, temos que, para qualquer f(k) tal que $k \neq_E n$, como vimos anteriormente, f(k+1) será seu descendente direto, e sua unicidade pode ser facilmente verificada, bastando para isso utilizar alguns dos lemas e teoremas que apresentamos na seção 3.4.

Com estas noções 'traduzidas' em nosso esquema, podemos mostrar que a fórmula utilizada como primeiro axioma proposta por Domenech e Holik é derivável em Q*. Vejamos o primeiro axioma proposto por eles, chamado o 'axioma das cadeias descendentes', de caráter existencial:

A1) $\forall_Q X(X \neq_E \varnothing \rightarrow \exists\gamma(CDx(\gamma)))$

Podemos mostrar que esta fórmula pode ser derivada em Q sem, no entanto, entrar em muitos detalhes na demonstração, do seguinte modo:

Demonstração de A1) Primeiramente, note que, para todo q-set finito X não-vazio, sempre há uma função escolha g, de modo que a sua função subtração h está bem definida. A contagem para X é estabelecida pelo teorema da recursão, quando não puder ser feita diferentemente, de modo direto, como nos exemplos que apresentamos anteriormente. Como argumentamos acima, esta contagem chegará ao q-set vazio em um certo n, tal que teremos por definição que qc(X) $=_E$ n. Como indicamos anteriormente, teremos com isto garantido a existência de uma cadeia descendente para X.

c.q.d.

É importante enfatizar novamente que estamos tratando sempre de X finito, pois o caso em que X é infinito não entra em nossas considerações, e no caso dos autores que estamos considerando, não desempenha nenhum papel relevante na definição de quase-cardinal finito, apesar de estar envolvido indiretamente com suas motivações em representar certos sistemas quânticos. Novamente, para uma maior generalidade, seria razoável conceder que o q-set vazio possui uma cadeia descendente, cujo único elemento é o próprio q-set vazio, e como já argumentamos acima, não é difícil de se perceber que nossa definição também garantiria de imediato uma cadeia descendente para este caso.

Seria interessante considerar o caso em que nossa definição não fosse aplicada apenas a q-sets finitos. Teríamos assim, quando o procedimento fosse aplicado a q-sets infinitos, q-funções de contagem que não atingiriam o q-set vazio em nenhum número natural, resultando em algo equivalente às cadeias descendentes cuja existência é postulada por Domenech e Holik, quando estas são consideradas no caso dos q-sets infinitos. De modo aproximado e indireto, estaríamos mostrando que q-sets infinitos possuem um sub-q-set enumerável. Por hora, no entanto, ficaremos restritos aos q-sets finitos.

A próxima noção que nos interessa considerar para nossos objetivos nesta seção é a definição de q-set finito segundo estes autores. Certamente, os q-sets que são finitos segundo nossa abordagem, serão também finitos segundo a abordagem agora apresentada, mas note que começar com q-sets finitos e definir quase-cardinais apenas para estes q-sets simplifica enormemente o trabalho. Para não confundirmos as duas noções, quando dissermos que um q-set é finito, sem qualificações, ele será finito no sentido apresentado anteriormente, seguindo Tarski, e se for finito no sentido de Domenech e Holik, escreveremos Fin(X). Vejamos a fórmula que serve como definição do símbolo Fin(X):

Def. [Fin(X)] Se X é um q-set não-vazio, $Fin(X) \leftrightarrow \exists n(n \in \omega \wedge \forall \gamma(CDx(\gamma) \rightarrow \exists F(F \subseteq \gamma \times n^{+} \wedge qf(F) \wedge \langle n, X\rangle \in F \wedge \forall z(z \in \gamma \rightarrow \exists j(j \in n^{+} \wedge \langle j,z\rangle \in F)) \wedge \forall j(j \in n+ \wedge j \neq_E 0 \rightarrow DD_{F(j)}(F(j-1)))))$

Nesta definição, 'qf(F)' significa 'F é uma quase-função', e n^{+} é o sucessor de n, conforme a definição usual de que $n^{+} =_E n \cup \{n\}$. Poderíamos novamente, em nome da generalidade, permitir que o q-set vazio também fosse finito de acordo com esta definição, caso as noções de 'descendente direto' e 'cadeia descendente' fossem adaptadas conforme indicamos acima. Da maneira como é feita por Domenech e Holik, este fato é um teorema, que depende, na abordagem deles, de um axioma adicional que vamos considerar abaixo.

Podemos mostrar que se X é finito em nossa acepção, então Fin(X) do seguinte modo:

Se X é finito no sentido de Tarski, então existe uma quase-função contagem f para X, tal que $qc(X) =_E n$. Como vimos anteriormente, $[f(k): 0\leq k \leq n]$ é uma cadeia descendente. Certamente, a quase-função F de n^{+} em $[f(k): 0\leq k \leq n]$ tal que $F(k) =_E f(n-k)$ é uma quase-função que satisfaz as condições da definição acima.

c.q.d.

O próximo passo antes de definir quase-cardinal segundo Domenech e Holik é apresentar o seu segundo axioma, utilizado essencialmente para garantir, como mencionamos acima, que para qualquer q-set finito, no sentido proposto por eles, teremos que a q-função F dita existir na definição de finitude é tal que $F(0) =_E \emptyset$.

A2) $\forall_Q X \forall_Q Y(Fin(X) \wedge Fin(Y) \wedge X \equiv Y \rightarrow ((X \subseteq Y \rightarrow X =_E Y) \wedge (Y \subseteq X \rightarrow X =_E Y)))$

Para demonstrar esta afirmação em nosso sistema, vamos utilizar um axioma de Q, que pode ser formulado em Q* depois que definimos o símbolo qc, em uma versão mais fraca, valendo apenas para q-sets finitos, que são aqueles que nos interessam nesta seção deste trabalho. Trata-se do axioma da extensionalidade fraca, que é fundamental na teoria de Quase-Conjuntos para nos ajudar a operar com o símbolo ≡, como vimos no capítulo 2. Não apresentaremos novamente sua versão formalizada aqui, que o leitor pode conferir no capítulo anterior. Intuitivamente, lembremos, o axioma nos garante que q-sets X e Y que possuem a mesma quantidade de elementos indistinguíveis do mesmo tipo (ou seja, para cada classe de equivalência de X pela relação de indistinguibilidade, existe uma classe de equivalência em Y por esta relação, tal que as duas classes têm o mesmo quase-cardinal, e reciprocamente) são eles mesmos indistinguíveis, e reciprocamente.

O argumento informal para derivar A2 é o seguinte:

Sejam X e Y q-sets satisfazendo as hipóteses do axioma A2. Vamos supor que $X \subseteq Y$ mas que $X \neq_E Y$. Então, para pelo menos um z, temos que $z \in Y \backslash X$. Neste caso, ou existe algum elemento de Y do qual z é indistinguível, ou não há nenhum tal elemento. No primeiro caso, violamos uma das hipóteses do axioma da extensionalidade fraca, que necessita que todos os tipos de elementos de Y devem ter um correspondente em X, mas como todos os tipos de elementos de X estão também em Y, e o tipo de elementos de z não está em X (*i.e.*, a classe de equivalência de z pela relação de indistinguibilidade não tem nenhuma correspondente em X), temos que não é o caso que $X \equiv Y$, em contradição com nossa hipótese. Por outro lado, se z é indistinguível de algum elemento de Y, ele estará em uma das classes de equivalência de Y pela relação de indistinguibilidade, mas note, em X haverá uma classe do mesmo tipo, que será subqset próprio da classe equivalente de Y, e terá cardinal menor, pois pelo menos $z \notin Y$, e assim violamos novamente a hipótese do axioma da extensionalidade fraca, tendo que novamente não é o caso que $X \equiv Y$, o que é absurdo. Argumento análogo trata do caso em que $Y \subseteq X$.

c.q.d.

Não deve passar despercebido o fato de que mostramos que A2 pode ser derivado em Q* mas com o auxílio fundamental, pelo menos em nossa demonstração, da noção de quase-cardinal conforme a definimos. Com A2 em mãos, seguindo-se a abordagem de Domenech e Holik, algumas proposições podem ser demonstradas por eles para garantir que o número natural n na definição de q-set finito é único, o que os permite apresentar sua definição de quase-cardinal. Utilizaremos, como eles, o símbolo qcard(X), para distingui-lo do nosso qc(X), que, como vimos no cap. 2, é o mesmo símbolo utilizado em geral quando este conceito é tratado como primitivo em Q. Vamos à definição:

Def. [qcard(X)] Se X é não-vazio e finito, $qcard(X) =_E n$, onde n é o natural que aparece na definição de Fin(X). O q-set vazio também é considerado finito, e $qcard(\emptyset) =_E 0$.

Agora, vejamos como um quase-cardinal na nossa acepção é também um quase-cardinal segundo esta definição. Isto pode ser mostrado do seguinte modo:

Seja X um q-set finito, segundo Tarski. Como vimos acima, temos que disso se segue que Fin(X). Dada uma função contagem f para X, suponhamos que qc(X) $=_E$ n. Então temos, como mostramos acima, que $\gamma =_{Def}$ [f(k): $0 \leq k \leq n$] é uma cadeia descendente para X, e que a q-função F de n+ em [f(k): $0 \leq k \leq n$] tal que F(k) $=_E$ f(n-k) é uma q-função que satisfaz a definição de Fin(X), em particular F(n) $=_E$ X. A partir daí é imediato que qcard(X) $=_E$ n.

c.q.d.

Na seqüência do trabalho, podemos derivar os axiomas de quase-cardinalidade que estabelecemos no capítulo 2 para o terceiro grupo, o grupo de axiomas para o símbolo primitivo de quase-cardinal em Q, (uma pequena variante daqueles propostos em French e Krause [2006] cap. 7 e em Krause [2007] cap. 4) que agora passam a ser teoremas para q-sets finitos. Isto pode ser feito seguindo-se da noção de qcard, que por sua vez é implicada por qc. Não faremos isto aqui, remetemos o leitor ao já mencionado trabalho de Domenech e Holik, onde isto já está feito.

3.5.2 - As $\subset$-imagens

Anteriormente, nos capítulos 1 e 2, afirmamos que não se pode associar um ordinal da maneira usual a um q-set cujos elementos sejam m-átomos indistinguíveis pelos motivos já exaustivamente apontados. Note que quando mencionamos que isto não pode ser feito da maneira usual, estamos dizendo que em geral não é possível estabelecer um isomorfismo de ordem entre $\langle n, \in \rangle$ e $\langle X, R \rangle$, em que R é uma boa ordem de X, e X é finito. Será que existe algo que podemos fazer de proveitoso, neste sentido, com a função contagem f que garantimos para X? Nesta seção vamos argumentar que esta função pode nos auxiliar neste problema, permitindo que associemos de modo indireto um ordinal a todos os q-sets finitos.

O primeiro passo para chegarmos onde desejamos é perceber que, supondo qc(X) $=_E$ n, a relação $\subset$, quando restrita a [f(k): $0 \leq k \leq n$] é transitiva, irreflexiva e conectada. Na impossibilidade de ordenar os elementos de X caso alguns deles sejam m-átomos, podemos, intuitivamente, considerar cada elemento de X como sendo fixado justamente no passo da contagem em que ele é retirado, por exemplo, o primeiro elemento retirado de X é fixado em f(1), e trata-se do elemento de $\langle g(f(0)) \rangle$, seja lá qual for ele. É importante ressaltar isto: se X contiver m-átomos, não haverá problema, bastando que cada elemento seja fixado uma única vez, não sendo para isso necessário identificá-lo, e todo este procedimento, na verdade, é motivado justamente para dar conta deste caso específico. Note-se que, como nenhum elemento é fixado no passo 0, deixaremos f(0) de lado. Ficamos com o q-set [f(k): $1 \leq k \leq n$], em que cada elemento de X é fixado indiretamente em alguma etapa, a etapa na qual ele é retirado.

Como esta maneira de marcar elementos de X pode nos auxiliar? Vamos denotar este q-set pela notação mais sugestiva (lembrando que estamos considerando que f está definida relativamente a X) $f(k)_{1\leq k \leq n}$. Podemos estabelecer a seguinte estrutura, que chamaremos a $\subset$-imagem de X, pois queremos ressaltar a semelhança intuitiva com a noção de $\in$-imagem usual (sobre $\in$-imagens, ver, por exemplo, Enderton [1977]):

Def. [$\subset$-imagem de X] Se $qc(X) =_E n$, então, sua $\subset$-imagem é o par $<f(k)_{1\leq k \leq n}, \subset>$.

Acreditamos que a noção de $\subset$-imagem de X pode nos ajudar a associar um ordinal a X, sem que para isto seja necessário identificar seus elementos, como é necessário no modo usual de se proceder. O que é fundamental para nossos objetivos é verificar que existe um isomorfismo de ordem entre $<f(k)_{1\leq k \leq n}, \subset>$ e $<n, \in>$. Podemos verificar que a q-função j de n em $f(k)_{1\leq k \leq n}$ definida por $j(k) =_E f(k+1)$ é um tal isomorfismo de ordem. É fácil perceber que para cada elemento de n há apenas um elemento de $f(k)_{1\leq k \leq n}$ associado, e reciprocamente. Ainda, se $k \in m$, com $k < m < n$, como $j(k) =_E f(k+1)$ e $j(m) =_E f(m+1)$, temos que $j(k) \subset j(m)$.

Com isto, associamos de modo indireto, através da $\subset$-imagem de X, um único ordinal a X. O papel das $\subset$-imagens consiste em permitir que se proceda a esta associação sempre (no caso de q-sets finitos), pois, note, apesar de que nem todos os q-sets finitos possuem uma $\in$-imagem associada da maneira usual, certamente todos possuem uma $\subset$-imagem associada, e através desta, uma $\in$-imagem. Assim, aparentemente, podemos contar os elementos de um q-set em certa ordem, sem nos preocuparmos com sua identificação, pois, em casos de q-sets que possuam m-átomos, isto não será possível. Ainda, podemos verificar que, no caso de q-sets clássicos, o ordinal associado através da $\subset$-imagem é o mesmo associado através da $\in$-imagem.

É importante perceber que o ordinal associado ao q-set X através da $\subset$-imagem é exatamente o mesmo que o quase-cardinal de X, como era de se esperar. Ainda, apesar de ter um ordinal associado, q-sets finitos cujos elementos são m-átomos não o têm da maneira usual, assim, apesar de que o ordinal associado a estes q-sets ter um menor elemento, por exemplo, os próprios q-sets, neste caso não o têm. É simples de se entender isto quando consideramos que o ordinal foi associado através de suas $\subset$-imagens, que, não possuem um menor elemento, mas possuem, no entanto, uma menor etapa de contagem, a última. Ainda, esta última etapa, como já afirmamos acima, não implica em momento algum que temos ou podemos identificar o elemento retirado exatamente neste passo.

O que esta discussão visa mostrar é que, diferentemente do que usualmente se escreve, não é o caso que pressupomos a identidade para associar a uma coleção um procedimento de contagem, como enunciado, por exemplo, em Toraldo di Francia [1978] e Lowe [1997], [1998]. O que a discussão destes autores mostra, em geral, é que não podemos contar objetos sem identificá-los, apenas se por 'contar' estivermos entendendo o procedimento de associar um número ordinal a esta coleção através de uma bijeção, mas não mostra, note, que em qualquer outro sentido plausível de 'contar', não possamos contar sem pressupor a identificação dos elementos contados. Com isto, ainda, acreditamos que podemos tornar mais rigoroso o objetivo 3 de Domenech e Holik enunciado na seção 3.2, de se estabelecer um método de contagem que, de certo modo, funciona para coleções de objetos indistinguíveis.

3.5.3 – O Princípio de Hume

Chegamos agora em um ponto em que podemos verificar também a seguinte conseqüência de nossas definições: dados q-sets finitos X e Y, $qc(X) =_E qc(Y)$ se e somente se existe uma correspondência um a um entre as etapas das contagens destes q-sets. Com efeito, considere as $\subset$-imagens $\langle f(k)_{1\leq k \leq n}, \subset\rangle$ e $\langle g(k)_{1\leq k \leq m}, \subset\rangle$ de X e Y respectivamente. Se há uma correspondência um a um entre as etapas de contagem, ou seja, para cada f(k) existe apenas um g(k) e reciprocamente, então, estas duas $\subset$-imagens são ordem isomorfas à mesma $\in$-imagem, e assim, $m =_E n$, e portanto o quase-cardinal destes dois q-sets também é o mesmo. Por outro lado, suponha que $qc(X) =_E n =_E qc(Y)$. Como vimos, a $\in$-imagem $\langle n, \in\rangle$ é ordem isomorfa às $\subset$-imagens $\langle f(k)_{1\leq k \leq n}, \subset\rangle$ e $\langle g(k)_{1\leq k \leq n}, \subset\rangle$ de X e Y, de onde temos que uma simples composição de q-funções nos dá a desejada correspondência um a um entre os passos da contagem (acrescentando-se que f(0) corresponde a g(0)).

O que acabamos de mostrar é uma versão daquilo que acreditamos ser uma adequada adaptação do Princípio de Hume para q-sets finitos em geral. Com indiscerníveis envolvidos, não podemos mais estabelecer uma correspondência direta entre os elementos de quaisquer q-sets, mas podemos estabelecer uma correspondência indireta, como motivamos acima na introdução das $\subset$-imagens, fazendo corresponder etapas da contagem, que por sua vez marcam, intuitivamente, o elemento contado\retirado do q-set naquele passo, sem precisar identificá-lo. Consideramos nossa formulação uma pequena generalização bastante intuitiva do princípio, tendo-se em vista a peculiaridade dos elementos com os quais agora temos de tratar.

Para enfatizar a importância de se derivar da definição de quase-cardinal este princípio, lembramos o que nos dizem Fraenkel, Bar-Hillel e Levy, [1984], p. 96: "Qualquer que seja a maneira utilizada para definir a cardinalidade $|x|$ do conjunto x, a noção definida pode ser considerada como correspondendo à noção intuitiva de cardinalidade apenas se podemos provar

(4.1) $|x| = |y|$ se e somente se os conjuntos x e y são equinumerosos." (a numeração que aparece na citação é do texto original, e $|x|$ é a notação desses autores para o cardinal de x). Assim, com a argumentação e construção acima, acreditamos que nossa definição cumpriu parte de seu papel, onde a correspondência entre as etapas faz a parte de uma generalização da noção de equinumerosidade, que de modo usual é definida diretamente entre os elementos dos q-sets, causando os problemas que já consideramos quando há m-átomos envolvidos.

CAPÍTULO 4 – SEMÂNTICA E A TEORIA DE QUASE-CONJUNTOS

Neste capítulo, apresentamos uma semântica para as Lógicas de Schrödinger que, de um ponto de vista filosófico, consideramos mais adequada no que diz respeito a estar de acordo com as motivações que se tem para se propor estas lógicas. Para isto, utilizaremos a teoria de Quase-Conjuntos apresentada no capítulo 2 como metalinguagem. Antes, porém, faremos uma exposição mais pormenorizada do sistema $S^{\equiv}$, no qual incluiremos um símbolo para a relação de indistinguibilidade, e discutiremos a tese geral de que de um ponto de vista filosófico pode ser adequado e conveniente buscar, para lógicas não-clássicas, semânticas distintas das usuais, no sentido de que não sejam construídas em ZF. Por fim, mostramos como se generalizar esta semântica para linguagens de primeira ordem em geral, sem as restrições sintáticas presentes em $S^{\equiv}$. O interesse em se fazer esta generalização está em permitir tratar de um problema com o qual travamos contato no capítulo 2: especificar mais detalhadamente a lógica subjacente à teoria Q.

4.1 – SEMÂNTICAS NÃO-CLÁSSICAS

É fato bastante conhecido para a grande maioria dos filósofos que, com os trabalhos de Alfred Tarski, a teoria semântica da verdade alcançou formulação extremamente precisa e, atualmente, desfruta de posição privilegiada em livros-texto de lógica e apresentações padrão da lógica clássica. Com esta teoria obteve-se o nível de rigor necessário para que, quando permanecemos restritos a linguagens satisfazendo certos requisitos, seja possível fornecer uma semântica matematicamente rigorosa para estas linguagens. De acordo com da Costa, ([1980] p. 172) “Podemos asseverar, sem rodeios, que a concepção tarskiana dominou completamente a lógica clássica e iniciou nova era no estudo dos sistemas lógico-matemáticos, pondo em relevo a sua dimensão semântica”.

Contudo, não somente a lógica clássica, mas também muitas das lógicas não-clássicas se beneficiaram com os trabalhos de Tarski, e a maneira proposta por ele para se fazer semântica formal foi ampliada e utilizada para se prover uma semântica também para estas lógicas. No entanto, considerando-se a pluralidade de sistemas de lógica, com suas variadas motivações, parece lícito perguntar se, de um ponto de vista filosófico, esta maneira de proceder é sempre a mais adequada. Aparentemente, para muitos sistemas não-clássicos de lógica, semânticas que de algum modo são distintas da semântica tarskiana (num sentido que em breve ficará claro) deveriam ser propostas, para que se dê conta das motivações que levaram a se proporem tais lógicas.

Para se perceber qual é o interesse filosófico em se seguir esta sugestão, e se convencer de que não se trata apenas de curiosidade matemática, é importante ter em mente qual o rumo que estamos sugerindo que as semânticas alternativas poderiam seguir. Ao propor que lógicas não-clássicas poderiam ter semânticas de bases distintas da semântica tarskiana, queremos chamar a atenção em particular para um dos pressupostos fundamentais desta maneira de se fazer semântica: a contraparte matemática na qual ela é delineada é geralmente uma teoria de conjuntos 'clássica', como por exemplo, ZF (Zermelo-Fraenkel) informal. Este pressuposto, em geral, não é mencionado e muito menos questionado nas apresentações usuais destes sistemas de lógica.

Assim, apesar da naturalidade do procedimento usual para se estabelecer a semântica para uma lógica L, alguns autores têm sugerido que muitas das características particulares dessa semântica em grande parte dependem da teoria de conjuntos que se utiliza para se estabelecer essa semântica (da Costa, [1980], da Costa, Béziau e Bueno [1995]). Deste modo, o uso de diferentes teorias de conjuntos poderia ter implicações matemáticas e filosóficas interessantes.

De modo geral, o problema para o qual estamos chamando atenção aqui pode ser posto do seguinte modo: dada uma lógica não-clássica L, que eventualmente derroga algum princípio da lógica clássica, e uma semântica clássica para esta lógica, no sentido de que é construída tendo ZF como metalinguagem, como é possível garantir que com esta semântica os princípios que pretendíamos ter abandonado com a formulação da lógica em questão não são re-introduzidos via metalinguagem, dado que ZF se baseia na lógica clássica? Dadas as motivações para se formular a dita lógica, parece que muitas vezes, ao se estabelecer uma semântica baseada em ZF para esta lógica, acabamos nos comprometendo, através da metalinguagem, com os mesmos princípios que pretendíamos ter abandonado ao formular o sistema, eles são re-introduzidos através da metalinguagem, ou seja, "re-introduzimos, por assim dizer, pela porta dos fundos, exatamente aquilo que pretendíamos ter abandonado na entrada!" (da Costa, Béziau e Bueno [1995] p. 44).

Este tipo de situação é particularmente problemático nos casos em que a lógica em questão foi proposta como uma alternativa ou rival para a lógica clássica, para dar conta de aspectos que, afirma-se, não são contemplados pela lógica clássica. Nestas circunstâncias, caso a única semântica disponível para tal lógica seja baseada em ZF, não é possível se asseverar que ela atingiu seus objetivos, e é fácil de perceber o motivo: tendo apenas uma semântica clássica, esta lógica ainda depende da lógica clássica, na medida em que esta é a lógica subjacente de ZF, e assim, não pode substituí-la.

Um exemplo deste último tipo de caso ocorre com a lógica relevante. Muitos de seus principais proponentes são enfáticos em manter que a lógica clássica está errada, que falha em capturar os conceitos de imposição e implicação (segundo eles, este é o objetivo de uma verdadeira lógica), e que, portanto, deve ser substituída. A alternativa proposta, que satisfaz os requisitos que uma verdadeira lógica deve cumprir (segundo os critérios deles), é a lógica relevante (da Costa [1980] p. 156). Até hoje, no entanto, não há uma teoria de conjuntos baseada na lógica relevante, ao que parece tal teoria não pode ser obtida, o que é uma limitação dessas lógicas, e a semântica para as lógicas relevantes é feita em ZF. De acordo com da Costa, Béziau e Bueno, "esse passo parece ser bastante intrigante, dada a rejeição da lógica clássica pelos teóricos da relevância." ([1995], p. 45). Ou seja, fundar a semântica desta lógica em ZF gera uma situação que, de um ponto de vista filosófico, parece no mínimo paradoxal, caso se tenha propostas ambiciosas como neste caso.

Outro exemplo deste fenômeno pode ser fornecido pela lógica intuicionista. Esta lógica visa refletir procedimentos que são em certo sentido construtivos, certas construções mentais que poderiam ser realizadas por um matemático ideal, das quais a lógica clássica não daria conta satisfatoriamente, em particular, segundo os intuicionistas, por estender a domínios atualmente infinitos, procedimentos de demonstração que somente são legítimos em domínios finitos ou potencialmente infinitos. Uma semântica clássica para uma lógica intuicionista, por ser fundada em uma teoria de conjuntos como ZF, seria inaceitável de um ponto de vista intuicionista, pois em particular nos comprometeria com a existência de domínios compostos por objetos já dados, inclusive conjuntos infinitos, que em nada lembram as construções mentais pregadas pelos intuicionistas. Ainda, a metamatemática clássica está comprometida com a validade do terceiro excluído, e ainda outros princípios que, quando aplicados sem restrições, são intuicionisticamente inaceitáveis. Desta maneira, deve-se buscar uma semântica aceitável do ponto de vista intuicionista, baseada em uma metamatemática intuicionista (um esboço neste sentido pode ser visto, por exemplo, em da Costa [1980], pp. 139-140).

Tendo em vista essas e outras dificuldades, N. C. A. da Costa tem insistido, juntamente com alguns colaboradores, que é adequado e filosoficamente relevante procurarmos uma semântica para uma lógica não-clássica L que seja condizente com seus pressupostos básicos (da Costa [1980], da Costa, Béziau e Bueno [1995], da Costa e Bueno [2001]). Assim, da Costa sugere que se construa, para uma lógica paraconsistente, por exemplo, uma semântica baseada em uma teoria de conjuntos paraconsistente (da Costa e Bueno, [2001], da Costa, Béziau e Bueno [1996]). Claro, nestes casos é importante ter sempre em mente a distinção entre a teoria de fundo, utilizada na metalinguagem, e a teoria objeto, aquela que se está estudando, para evitar confusões e a estranheza de que, aparentemente, tal semântica deverá ser feita em uma matemática baseada na própria L que se está a considerar, gerando assim um aparente círculo vicioso.

A partir da próxima seção, vamos apresentar algumas evidências em favor da pertinência dessa sugestão de da Costa por meio do estudo de um caso particular, das lógicas de Schrödinger. Estas lógicas, como já explicamos anteriormente, no capítulo 1, foram propostas primeiramente pelo próprio da Costa, e um de seus objetivos é lidar com entidades para as quais as relações de identidade e a diferença não fazem sentido em geral. Como já argumentamos brevemente anteriormente, as motivações para se propor tais lógicas estão, de certo modo, em conflito com algumas restrições impostas pelas teorias de conjuntos clássicas aos objetos que podem figurar em um conjunto clássico, que nesta semântica é utilizado como domínio da interpretação, entre outros problemas que examinaremos adiante. Assim, como sugeriu da Costa ([1980], p. 119), é preciso, caso queiramos preservar as intuições que deram origem a tal lógica, fundarmos a semântica para estas lógicas em uma teoria de conjuntos distinta da clássica.

A escolha da metalinguagem apropriada, no caso das lógicas de Schrödinger, recaiu "quase que naturalmente" na teoria de Quase-Conjuntos. Esta escolha tem motivações filosóficas, históricas e técnicas, que apresentaremos brevemente neste trabalho. Também se podem notar explicitamente neste caso, que características próprias da teoria de Quase-Conjuntos influenciam vários aspectos da semântica resultante que proporemos. Por exemplo, como veremos com mais cuidado adiante, para os m-átomos, que podem constar no domínio de interpretação, não poderemos atribuir um nome no sentido usual, de que a ele esteja associada uma constante individual da linguagem que se está interpretando, e de modo que a dita constante seja concebida como denotando apenas aquele m-átomo específico. Esta é, certamente, uma conseqüência da natureza dos m-átomos na teoria Q. Adiante, apresentaremos melhor este e outros pontos característicos desta semântica.

4.2 – MOTIVAÇÕES PARA AS LÓGICAS DE SCHRÖDINGER

As Lógicas de Schrödinger foram propostas por da Costa originalmente como um sistema de 1ª ordem (da Costa [1980]), e foram posteriormente generalizadas para uma teoria simples de tipos (Krause [1990], da Costa e Krause [1994]), na qual também foram introduzidos operadores modais (da Costa e Krause [1997]). Vamos nesta seção retomar parte da discussão feita no capítulo 1.

A motivação inicial que levou da Costa a propor as Lógicas de Schrödinger, que por brevidade chamaremos, adaptando a terminologia introduzida por ele, de S, é uma tentativa de dialetizar, no sentido de questionar, o conceito clássico de identidade, conforme formalizado em geral nos sistemas de lógica clássica de primeira ordem com identidade, por exemplo. Com isto, tinha em vista principalmente fazer refletir com estas lógicas alguns pontos enfatizados nos trabalhos de E. Schrödinger sobre a natureza das partículas em física quântica (Schrödinger [1952]). A passagem específica de Schrödinger utilizada por da Costa é a seguinte,

> "Quando você observa uma partícula de certo tipo, digamos um elétron, aqui e agora, isto deve ser tratado em princípio como um evento *isolado*. Mesmo que você observe uma partícula semelhante pouco tempo depois em um lugar muito próximo do primeiro, e mesmo que tenha todas as razões para assumir uma *conexão causal* entre a primeira e a segunda observação, não há nenhum sentido verdadeiro, não-ambíguo, na afirmação de que é a *mesma* partícula que você observou nos dois casos. As circunstâncias podem ser tais que tornem altamente conveniente e desejável se expressar assim, mas é apenas uma abreviação da fala; pois existem casos onde a 'igualdade' se torna inteiramente sem sentido; e não há nenhum limite preciso, nenhuma distinção clara entre eles, há uma transição gradual nos casos intermediários. E eu insisto em enfatizar isto, e rogo que você acredite: não é uma questão de estarmos aptos a afirmar a identidade em alguns casos e não estarmos aptos em outros. Está além da dúvida que a questão da 'igualdade', da identidade, real e verdadeiramente não tem sentido." (Schrödinger [1952], pp. 16-18)

Um primeiro ponto a ser esclarecido é que, nesta passagem, aparentemente, Schrödinger poderia estar chamando a nossa atenção apenas para o fato de que a chamada identidade transtemporal não faz sentido, ou seja, o problema seria que não poderíamos identificar duas ocorrências de partículas similares em tempos t_1 e t_2 como sendo ocorrências da mesma partícula, mesmo que as circunstâncias para tal fossem bastante favoráveis. Mas isto não significaria, necessariamente, que a identidade deixaria de fazer sentido de todo. No entanto, não é assim que se costuma interpretar esta passagem nas apresentações usuais das Lógicas de Schrödinger, e outros textos de Schrödinger mostram que ele, independentemente do modo que se interprete a passagem acima, defendia que a identidade não tem sentido em geral, não apenas no caso da identidade transtemporal (por exemplo, em Schrödinger [1998]).

Como não estamos interessados em fazer uma exegese do pensamento de Schrödinger, mas sim em compreender as motivações da lógica S, vamos apresentar a maneira como se interpreta a passagem acima nas apresentações da Lógica de Schrödinger, e que determinará algumas das direções de nossa investigação, principalmente com relação à semântica para esta lógica. Nestes casos, sustenta-se que quando Schrödinger enfatiza que existem certas circunstâncias nas quais não faz sentido afirmar que partículas a e b são iguais ou diferentes, que a 'questão da 'igualdade'' não tem sentido, devemos tomar esta afirmação no sentido mais forte de que a identidade e a diferença não fazem sentido nem mesmo para itens em um único instante de tempo t (a identidade sincrônica), e ainda, sustenta-se que se trata de um problema ontológico, e não apenas epistemológico.

Explicando esta distinção, se o problema fosse encarado como epistemológico, a questão da identidade ou diferença das partículas envolveria um problema relativo a deficiências de nossas atuais capacidades de reconhecimento, que cedo ou tarde poderíamos, pelo menos em princípio, resolver, de modo que apenas ainda não temos os aparatos ou conhecimento para saber quando certa partícula A é a mesma que uma partícula B semelhante, que nos aparece instantes depois, ou ainda, poderia ocorrer que esta incapacidade de identificação fosse considerada como uma incompletude da teoria, que precisa ser melhorada e complementada. Ao afirmarmos que estamos tomando o problema como ontológico, afirmamos que se trata de muito mais do que uma questão de deficiência epistemológica: as próprias entidades em questão seriam, seguindo esta leitura, de tal modo que não faz sentido falarmos em sua igualdade ou diferença, de modo que, por princípio, não podemos identificá-las (para mais detalhes sobre esta interpretação da posição de Schrödinger, e em particular, desta passagem, ver Krause [1990] e French e Krause [2006] cap. 6).

Além de ser formulada para capturar formalmente este fato, o de que para algumas entidades do domínio de discurso são tais que, a elas a identidade e diferença não se aplicam com sentido, desejamos das lógicas de Schrödinger que permitam que, para estas mesmas entidades, uma relação mais fraca, de indistinguibilidade, seja válida, que será introduzida como primitiva. Esta motivação provém da necessidade de se representar formalmente a maneira como os físicos usam a palavra 'identidade' nos contextos em que estão envolvidas partículas. Quando falam de partículas idênticas, não é com o significado usual, de identidade numérica, que usam a palavra, mas sim significando indistinguibilidade. Assim, podemos dizer que "quando eles (os físicos) dizem que dois elétrons são 'idênticos', eles pretendem dizer que os elétrons são 'indistinguíveis' no sentido de que eles têm todas as suas propriedades 'intrínsecas' em comum" (da Costa e Krause [1994], p. 534). Deste modo, uma relação de indistinguibilidade deve figurar na nova lógica que se está propondo, uma relação que não colapse na identidade quando se trata com termos que pretendemos que denotem objetos microscópicos.

Por que é preciso propor uma nova relação primitiva para captar tais intuições, e o que exatamente queremos que nosso formalismo reflita? Quais são os problemas com os quais nos deparamos ao tentar definir esta relação na lógica de Schrödinger que pretendemos apresentar? Poderíamos compreender melhor a resposta se considerarmos o fato aparentemente não relacionado a este assunto de que tanto a lógica quanto a matemática clássica estão comprometidas com uma noção leibniziana de identidade, que se baseia no dito de Leibniz de que não existem entidades que difiram apenas em número, tendo todas as mesmas propriedades. Estamos retomando o argumento do capítulo 1.

Leibniz é conhecido por ter afirmado que se dois objetos possuem as mesmas propriedades, então não são dois, mas apenas um e o mesmo objeto, ou equivalentemente, se não há nenhuma propriedade para distingui-los, então são o mesmo. O que ocorre é que na matemática e lógica clássicas tudo se passa deste modo, ou seja, este enunciado, conhecido como Princípio da Identidade dos Indiscerníveis, é teorema da lógica clássica de pelo menos segunda ordem e possui versões para as teorias de conjuntos clássicas. Em uma linguagem de pelo menos segunda ordem monádica, podemos tentar captar formalmente o 'Princípio de Identidade dos Indiscerníveis' (abreviadamente, PII) com a seguinte fórmula: $\forall F((F(x) \leftrightarrow F(y)) \rightarrow (x=y))$, com significação óbvia.

A recíproca de PII é o 'Princípio da Indiscernibilidade dos Idênticos', que nos garante que objetos idênticos partilham todas as mesmas propriedades. Podemos tentar captar formalmente este princípio em linguagem de segunda ordem monádica como $(x=y) \rightarrow \forall F(F(x) \leftrightarrow F(y))$, resultando na conhecida lei da substituição para a identidade, que nos afirma que termos que estão na relação de identidade são substituíveis entre si. Em geral, costuma-se distinguir a Indiscernibilidade dos Idênticos da lei de substituição, sendo o primeiro considerado quase consensualmente como verdadeiro, e o segundo como falso em contextos que não são extensionais, mas não entraremos em detalhes aqui (ver, por exemplo, Cartwright [1971]). A conjunção da fórmula para o PII com a lei substituição resulta na chamada Lei de Leibniz. Na presença da Lei de Leibniz, então, não é possível que tenhamos apenas indiscernibilidade sem termos também igualdade, ou seja, não é possível termos objetos partilhando todos os atributos sem que se tenha também a igualdade numérica destes objetos; estas noções são equivalentes. Expresso em termos das diferentes abordagens metafísicas vistas no capítulo 1, teríamos que se trata de uma teoria englobando indivíduos no sentido das teorias de feixes de propriedades.

O que ocorre, no entanto, é que segundo a interpretação que estamos seguindo da posição de Schrödinger, de que a identidade simplesmente carece de sentido quando se trata destas entidades, e conforme explicamos anteriormente, que esta é uma das maneiras de se violar a individualidade como compreendida por certas versões da Individualidade Transcendental, parece-nos impossível introduzir a noção de indistinguibilidade, no sentido razoável de que as entidades que entram nesta relação partilham todas as mesmas propriedades, sem voltarmos a nos comprometer com uma relação muito parecida com a identidade leibniziana. Considerando com mais detalhes, temos que, para certas entidades do domínio, a identidade não se aplique, são os nossos não-indivíduos. A candidata a indistinguibilidade seria definida, ainda em uma linguagem de segunda ordem, como $(x \equiv y) =_{\mathrm{Def}} \forall F(F(x) \leftrightarrow F(y))$. Teríamos então em particular que para qualquer x, $x \equiv x$, e com isto também PII seria derivado. Novamente, como já observamos, estes são os axiomas da identidade usual, e o resultado seria que, na verdade, ao invés de considerar estes objetos como representando não-indivíduos, estamos tratando-os como indivíduos em uma teoria de feixes de propriedades.

As lógicas de Schrödinger, assim, são formuladas com o intento de permitir que estes dois conceitos, o de indistinguibilidade e igualdade, sejam tratados como dois conceitos que não necessariamente se implicam, violando formalmente a Lei de Leibniz para certos objetos do domínio. Isto se obtém em grande parte através do uso de uma linguagem bi-sortida, que separa os termos da linguagem em dois tipos, os termos que denotam intuitivamente micro-objetos, e os termos que denotam macro-objetos. Quando se trata dos termos para micro-objetos, desejamos que apenas a relação de indistinguibilidade se aplique, mas, seguindo Schrödinger, a identidade não deveria se aplicar, no caso das partículas elementares. Para os outros termos, identidade e indistinguibilidade podem coincidir, como usual.

No caso de estarmos tratando com os objetos que são considerados indivíduos, os objetos clássicos da Lógica de Schrödinger, identidade e indistinguibilidade coincidirão. Nestes casos, a indistinguibilidade pode ser entendida como o partilhar de todas as propriedades, mas aqui é importante perceber que, ainda assim a relação de indistinguibilidade[1] é um símbolo primitivo, e esta equivalência será obtida com o uso de alguns postulados adicionais.

Deve-se notar também que não estamos afirmando que a Lógica de Schrödinger é a lógica que deve ser utilizada para se fundamentar a mecânica quântica, nem que ela é indispensável para se fazer física, mas apenas que ela captura certas intuições a respeito da natureza de certas entidades, pelo menos de acordo com esta interpretação de Schrödinger (lembrando que a idéia de que as entidades quânticas seriam não-indivíduos em um certo sentido foi proposta por vários autores logo nos primórdios da Mecânica Quântica – um tratamento detalhado do assunto pode ser visto em French e Krause [2006] cap. 3). Outro ponto a se notar é que o próprio Schrödinger, partindo de sua análise do conceito de partícula em mecânica quântica, adotou uma ontologia de ondas, entendida por ele de diferentes modos no decorrer de sua vida. No entanto, não vamos entrar em detalhes sobre a proposta de Schrödinger diante de sua constatação da não-individualidade das partículas em física quântica (para mais detalhes sobre a posição de Schrödinger, ver Bitbol [1996]).

4.3 – O SISTEMA $S^{\equiv}$

Nesta seção, apresentaremos detalhadamente uma linguagem de primeira ordem para as Lógicas de Schrödinger, com seus postulados. Quando se trata com linguagens de ordem superior, o símbolo para indistinguibilidade, como já comentamos, pode ser definido, e não precisamos utilizá-lo como primitivo. No entanto, conforme argumentamos anteriormente, nestes casos é formalmente impossível distinguir a relação de indistinguibilidade da relação de identidade, sendo que a possibilidade de se introduzir a indistinguibilidade como um símbolo primitivo nestes casos é uma

[1] Estamos adotando esta idéia, de se acrescentar um símbolo para a relação de indiscernibilidade, baseando-nos na Lógica da Indiscernibilidade, apresentada em Krause [2007], cap. 3.

alternativa a ser considerada (ver da Costa e Krause [1994], [1997]). Chamaremos de $S^{\equiv}$ a linguagem que vamos apresentar, composta dos seguintes símbolos primitivos:

a) Conectivos: $\rightarrow$ (implicação) e $\neg$ (negação).

b) Quantificador universal: $\forall$ (para todo).

c) Pontuação:), (, , (parênteses e vírgula).

d) Uma coleção enumerável infinita de variáveis individuais de primeira espécie x_1, x_2,..., x_n,..., e de constantes individuais de primeira espécie a_1, a_2,..., a_n, ...

e) Uma coleção enumerável infinita de variáveis individuais de segunda espécie X_1, X_2,..., X_n,..., e de constantes individuais de segunda espécie A_1, A_2,..., A_n, ...

f) O símbolo de relação binária '=', para a identidade, e o símbolo de relação binária '≡', para a indistinguibilidade.

g) Para cada número natural $n > 0$, uma coleção eventualmente vazia de símbolos de predicados n-ários.

Os outros conectivos, disjunção, conjunção e bi-implicação podem ser definidos da maneira usual, assim como o quantificador existencial. Um termo é uma variável ou uma constante individual. Os termos podem ser divididos, de modo evidente, em termos de primeira e segunda espécie. Por brevidade, usaremos as letras t_1, t_2, t_3, etc., como meta-variáveis para termos de qualquer das duas espécies, e x, y e z sem índices como meta-variáveis para variáveis de qualquer das duas espécies. Outra convenção que passaremos a utilizar será denotar por 'm-termos' os termos de primeira espécie e 'M-termos' os termos de segunda espécie.

Intuitivamente, os m-termos representarão as entidades básicas da microfísica, tal como descritas por alguma versão da mecânica quântica não-relativística, e os M-termos, representarão os objetos macroscópicos. O objetivo, seguindo nossa interpretação das intuições de Schrödinger, é fazer com que a identidade se aplique apenas a M-termos, e não a m-termos, pois para estes não faria sentido falar em identidade ou em diversidade, e que a indistinguibilidade se aplique a todos os objetos, desde que sejam da mesma espécie. Formalmente, isso se obtém ao se impedir, na definição de fórmula, que $t_i=t_j$ seja bem formada caso t_i e t_j sejam m-termos, e ao impormos que t_i e t_j sejam da mesma espécie para que $t_i \equiv t_j$ seja bem formada. Com exceção destas restrições, a definição de fórmula também segue a usual, e como se pode notar a partir dos postulados que daremos, a lógica clássica se aplica de maneira usual aos M-termos. Mais especificamente, temos:

Def. [Fórmulas atômicas] Se t_i, t_j são termos da mesma espécie, então $t_i \equiv t_j$ é fórmula atômica. Se t_i, t_j são termos de segunda espécie, então $t_i = t_j$ é fórmula atômica. Se P é um símbolo de predicados de peso n, e $t_1 \ldots t_n$ são n termos, então $Pt_1 \ldots t_n$ é fórmula atômica.

Def. [Fórmulas] As fórmulas de $S^{\equiv}$ são: (i) As fórmulas atômicas; (ii) Se α é fórmula, $\neg\alpha$ é fórmula; (iii) Se α e β são fórmulas, então $\alpha \rightarrow \beta$ é fórmula; (iv) Se α é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x\alpha$ é uma fórmula; (v) Apenas estas são fórmulas.

É importante enfatizar: $t_i = t_j$ será fórmula apenas se t_i e t_j forem ambos termos de segunda espécie. Nossa definição de fórmula proíbe que expressões como, por exemplo, $x_1 = X_1$, ou $A_2 = x_1$ ou ainda $A_1 = a_2$ sejam bem formadas. No entanto, a relação de indistinguibilidade vai se manter entre os dois tipos de objetos. Teremos que $t_i \equiv t_j$ sempre será uma fórmula bem formada, mas devemos observar a restrição de que t_i e t_j sejam de mesma espécie, ou seja, a definição de fórmula proíbe que, por exemplo, $x_1 \equiv X_1$, $A_2 \equiv x_1$ e $A_1 \equiv a_2$ sejam fórmulas.

O seguinte conjunto de postulados pode ser utilizado para $S^{\equiv}$ (outra formulação de uma lógica de primeira ordem com uma relação de indistinguibilidade pode ser encontrada nos postulados para a Lógica da Indiscernibilidade, em Krause [2007] cap. 3):

1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

2) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

3) $((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha))$

4) $\alpha \rightarrow \beta, \alpha / \beta$ (MP)

5) $\forall x\alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$, com x e t da mesma espécie, e t livre para x em $\alpha(x)$.

6) $\beta \rightarrow \alpha(x) / \beta \rightarrow \forall x\alpha(x)$, onde x não ocorre livre em β.

7) $t=v \rightarrow (\alpha(t) \rightarrow \alpha(v))$, com t e v termos de segunda espécie, além das restrições usuais.

8) $\forall x(x \equiv x)$.

9) $\forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$.

10) $\forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$.

11) $\forall X \forall Y(X \equiv Y \rightarrow X = Y)$.

É importante perceber que os postulados que envolvem a relação de identidade estão formulados para termos de segunda espécie, principalmente o postulado 11, que intuitivamente significa que se dois macro-objetos são indiscerníveis, então eles são idênticos. Em breve veremos que a recíproca é teorema de $S^{\equiv}$.

Conceitos sintáticos como os de demonstração, dedução a partir de um conjunto de fórmulas, teorema, ocorrências livres e ligadas de variáveis entre outros também são definidos da maneira usual. O Teorema da Dedução também pode ser demonstrado da maneira usual.

Temos agora o prometido teorema de que, para M-objetos, a igualdade implica a indistinguibilidade.

Teorema. $X=Y \rightarrow X\equiv Y$

1) $X=Y$ (hipótese)

2) $X=Y \rightarrow (X\equiv X \rightarrow X\equiv Y)$ (postulado 7)

3) $(X\equiv X \rightarrow X\equiv Y)$ (1,2 Modus Ponens)

4) $\forall X(X\equiv X)$ (postulado 8)

5) $\forall X(X\equiv X) \rightarrow X\equiv X$ (postulado 5)

6) $X\equiv X$ (4, 5 MP)

7) $X\equiv Y$ (3, 6 Modus Ponens)

8) $X=Y \rightarrow X\equiv Y$ (1-7 Teorema da Dedução)

Assim, com este teorema e o postulado 11, temos que para M-objetos, $X=Y \leftrightarrow X\equiv Y$. No entanto, para m-objetos, este bicondicional não pode ser demonstrado. Ainda, neste caso, a relação de indistinguibilidade é caracterizada apenas como uma relação de equivalência, sem valer necessariamente o esquema da substituição dado pelo postulado 7. Isto a caracteriza sintaticamente como uma relação mais fraca do que a identidade. No entanto, como ainda não especificamos como devemos interpretar estes símbolos, nada impede, certamente, que ao se fazer uma semântica para $S^{\equiv}$ se interprete a relação de indistinguibilidade também como a relação de identidade, que satisfaz os axiomas de $S^{\equiv}$ dados para o símbolo de indistinguibilidade.

Também temos como teorema de $S^{\equiv}$ a reflexividade da identidade, que não precisa ser postulada. Com isto, a identidade possui em $S^{\equiv}$ as duas propriedades que a caracterizam usualmente: reflexividade e substituição. Com estas propriedades, como se sabe, é possível demonstrar, por exemplo, que a relação de identidade é simétrica e transitiva.

Teorema. $X = X$

1) $\forall X(X \equiv X)$ (postulado 8)

2) $\forall X(X \equiv X) \rightarrow (X \equiv X)$ (postulado 5)

3) $X \equiv X$ (1,2 MP)

4) $\forall X(X \equiv X \rightarrow X = X)$ (postulado 11)

5) $\forall X(X \equiv X \rightarrow X = X) \rightarrow (X \equiv X \rightarrow X = X)$ (postulado 5)

6) $(X \equiv X \rightarrow X = X)$ (4,5 MP)

7) $X = X$ (3, 6 MP)

É interessante notar também que a lógica clássica de primeira ordem está de certo modo 'contida' na lógica $S^{\equiv}$. Isto ocorre pelo fato de que, intuitivamente, os postulados de $S^{\equiv}$, quando restritos aos M-termos, podem ser tomados como um conjunto de postulados para a lógica clássica. Falando mais rigorosamente, é possível se estabelecer uma tradução da lógica clássica em $S^{\equiv}$, mostrando que os postulados da lógica clássica, quando traduzidos em $S^{\equiv}$, são teoremas de $S^{\equiv}$ (de modo semelhante ao que fizemos no capítulo 2, quando traduzimos em Q a linguagem de ZFU).

4.4 – SEMÂNTICA QUASE-CONJUNTISTA PARA $S^{\equiv}$

Dada a linguagem de $S^{\equiv}$, vamos agora mostrar como podemos formular uma semântica utilizando-se Q como metalinguagem, que consideramos condizente com as motivações dadas para $S^{\equiv}$. Queremos fornecer uma interpretação em uma estrutura **e** $=_E$ $\langle D, I\rangle$, onde D é um quase-conjunto não-vazio, tal que $D =_E D_1 \cup D_2$, com $D_1 \cap D_2 =_E \emptyset$, e ainda, D_1 é um q-set puro e D_2 é um q-set standard, isto é, uma cópia de um conjunto de ZU. Temos também que I é uma q-função interpretação, definida do seguinte modo:

I.1) Se a_i é constante de primeira espécie, então $I(a_i) \in D_1$;

I.2) Se A_i é constante de segunda espécie, então $I(A_i) \in D_2$;

I.3) Se P é símbolo de predicado de peso n, então I(P) é subconjunto de D^n;

I.4) $I(=) =_E \{\langle x,y\rangle : x,y \in D_2 \text{ e } x =_E y\}$;

I.5) $I(\equiv) =_E [\langle x,y\rangle : x,y \in D \text{ e } x \equiv y]$.

Note que, como os elementos de D_1 são todos indistinguíveis (estamos assumindo por simplicidade que há apenas um tipo de m-átomos em Q), $I(a_i)$ não denota um elemento bem determinado, mas denota ambiguamente qualquer um dos elementos de D_1. Trata-se de um nome-tipo, ou seja, como $I(a_i)$ é indistinguível de qualquer elemento de D_1, não podemos dizer que a_i funciona como um designador rígido. No caso geral, se há mais de um tipo de m-átomos, se queremos, por exemplo, que certo tipo de m-átomos represente elétrons em Q, e outro tipo, prótons, que certamente não são indistinguíveis dos elétrons, teremos que constantes de primeira espécie que forem associadas com m-átomos que representam elétrons, não vão ser indistinguíveis das constantes que estiverem associadas com os m-átomos que representam prótons, cada uma destas constantes vai denotar, então, apenas objetos de certo tipo.

Ainda, é importante perceber que I.5 nos garante que a interpretação do símbolo de indistinguibilidade contém, como caso particular, a diagonal usual de D_2. Isto já era esperado, se considerarmos que para os objetos clássicos de Q, a indistinguibilidade implica a identidade extensional. Esta interpretação para este símbolo, definida em todo o domínio D, serve para garantir que os axiomas de $S^{\equiv}$ serão satisfeitos, conforme especificaremos abaixo. É importante perceber que, a menos que D_1 seja vazio, $I(\equiv)$ contém $I(=)$, pois este último q-set denota apenas uma parte do domínio, enquanto que o primeiro denota uma relação no domínio inteiro.

Agora, queremos definir a relação de satisfatibilidade de uma fórmula **A** por uma q-função s*, que fará o papel das seqüências nas formulações usuais. Seja s uma q-função da coleção de variáveis individuais da linguagem de $S^{\equiv}$ em D. Queremos que s seja tal que $s(x_i) \in D_1$ e $s(X_i) \in D_2$. Agora, como usual, estendemos esta q-função s para uma q-função s*, que atribui aos termos da linguagem de $S^{\equiv}$ elementos convenientes de D, do seguinte modo:

(i) $s^*(x_i) \equiv s(x_i)$ (ii) $s^*(X_i) =_E s(X_i)$

(iii) $s^*(a_i) \equiv I(a_i)$ (iv) $s^*(A_i) =_E I(A_i)$

Temos então:

Def. [Satisfatibilidade de uma fórmula por uma q-função s*]

1) Se a fórmula **A** for $t_i = t_j$, então s* *satisfaz* **A** se e somente se $s^*(t_i) =_E s^*(t_j)$. Deve-se lembrar que $t_i = t_j$ só é fórmula se ambos os termos são de segunda espécie.

Se **A** for $t_i \equiv t_j$, então s* *satisfaz* **A** se e somente se $s^*(t_i) \equiv s^*(t_j)$. Observamos novamente que $t_i \equiv t_j$ só é fórmula se ambos os termos são da mesma espécie. Se forem de segunda espécie, claro, recaímos, na denotação atribuída por s*, na identidade extensional em $s^*(t_i) =_E s^*(t_j)$.

2) Se **A** é uma fórmula atômica da forma $P(t_1,...,t_n)$, com $t_1,...,t_n$ termos de qualquer espécie, então s* *satisfaz* **A** se e somente se $<s^*(t_1),...,s^*(t_n)>$ é indistinguível de alguma n-upla $<d_1, ..., d_n>$ que pertence a $I(P^n)$.

3) s* *satisfaz* ¬**A** se e somente se s* *não satisfaz* **A**.

4) s* *satisfaz* uma fórmula da forma **A** → **B** se e somente se s* não *satisfaz* **A** ou s* *satisfaz* **B**.

5) Seja **A** uma fórmula do tipo ∀xB(x). Dizemos que s* *satisfaz* **A** se e somente se toda s'* que 'difere' de s*, quando muito, no valor de x, também *satisfaz* B(x).

Algumas destas cláusulas merecem explicação. Começamos com a segunda Ela foi feita para captar uma intuição que perpassa a discussão sobre semântica para linguagens das teorias físicas. Como se sugere com a discussão do Postulado de Indistinguibilidade, há certa 'ignorância ontológica' nos contextos em que entidades da física quântica estão envolvidas, no sentido de não podermos determinar univocamente a extensão de alguns símbolos, como os de predicado. A idéia aqui é que, como os quanta indiscerníveis são invariantes por permutações, se permutarmos quanta indiscerníveis no q-set que faz papel de extensão do predicado, o valor de verdade não se altera. As permutações não são observáveis, assim, se permutamos alguns elementos da extensão, nada de diferente resulta, e em particular, o valor de verdade não se altera. Em Q, esta discussão pode ser feita mais rigorosamente levando-se em conta o teorema que garante que permutações não são observáveis (Teorema 20, capítulo 2), mas não vamos entrar em todos os detalhes aqui.

Ainda, na cláusula 2, caso tenhamos apenas objetos clássicos na extensão de certo predicado P, como se pode perceber facilmente, recaímos no caso clássico. Neste caso, tomando, por exemplo, $P(t_1,...,t_n)$, a única n-upla indistinguível da n-upla $<s^*(t_1),...,s^*(t_n)>$ é ela própria, e o mesmo vale para I(P).

Passamos agora a fazer algumas considerações sobre a cláusula 5. Vamos esclarecer o que significa tomarmos s'* que 'difere' de s* apenas no valor dado a x. Intuitivamente, uma seqüência vai diferir de outra apenas no valor atribuído a x se, para qualquer outra variável y diferente de x, as duas seqüências possuem valores indistinguíveis. Falando mais rigorosamente, quando a variável quantificada é de primeira espécie, as q-funções s'* que consideraremos serão aquelas nas quais o valor para as variáveis y diferentes de x é tal que $s^*(y) \equiv s'^*(y)$, e, eventualmente, não é o caso que $s^*(x) \equiv s'^*(x)$. Se as variáveis forem de segunda espécie, recaímos no caso usual.

Def. [Verdade em **e**]
Uma fórmula é *verdadeira* na estrutura **e** se e somente se for satisfeita por todas as q-funções denotação s*. Uma fórmula é *falsa* em **e** se não for satisfeita por nenhuma s*.

Os conceitos de modelo, de conseqüência semântica, etc. são definidos da maneira usual, e não vamos introduzi-los explicitamente aqui.

Com esta semântica quase-conjuntista para $S^{\equiv}$, além de fornecermos uma semântica filosoficamente mais adequada conforme se sugeriu que deveria ser feito na seção 4.1, podemos formular uma resposta ao seguinte problema: ao apresentar um sistema de lógica que se pretende como uma alternativa à lógica clássica, no sentido de tratar de algum aspecto que esta lógica não trata, em geral, esperamos alguma novidade na apresentação, seja na sintaxe, com a introdução de novos operadores, ou uma coleção de postulados distintos dos postulados para o Cálculo Quantificacional Clássico, seja na semântica, ou alguma combinação destes elementos. Por exemplo, o cálculo quantificacional intuicionista de Brouwer-Heyting, apesar de poder ser formulado na mesma linguagem da lógica clássica, apresenta diferentes postulados, e em geral, uma semântica distinta da semântica clássica usual. As lógicas modais, além de introduzirem novos operadores, introduzem novos postulados para estes operadores e uma nova semântica. No caso da Lógica de Schrödinger, como apresentada usualmente, o que a distingue da lógica clássica?

Devemos lembrar que a Lógica de Schrödinger foi apresentada por da Costa [1980] como um sistema de primeira ordem, dotado de postulados da lógica clássica, e com uma semântica conjuntista usual, que foi identificada como problemática do ponto de vista das suas motivações. Nada nesta apresentação dava uma característica própria a esta lógica, apenas em suas motivações ela diferia da lógica clássica, ou seja, seus teoremas eram os teoremas da lógica clássica, e as fórmulas válidas eram as mesmas que as da lógica clássica. Agora, com a introdução de uma relação de indistinguibilidade com seus postulados específicos, e principalmente, com uma semântica quase-conjuntista, podemos sugerir estas como sendo suas características principais, ou seja, uma Lógica de Schrödinger é uma lógica que possui, além da relação de identidade, uma relação de indistinguibilidade que satisfaz os axiomas de uma relação de equivalência que não necessariamente é uma congruência, e uma semântica quase-conjuntista conforme exposta acima.

4.5 – SEMÂNTICA QUASE-CONJUNTISTA PARA LINGUAGENS DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção apresentaremos uma semântica baseada em Q para qualquer linguagem de primeira ordem. A linguagem que consideraremos aqui é a mesma de $S^{\equiv}$, no entanto, com apenas um tipo de termos individuais, e sem o símbolo para a relação de indistinguibilidade. A definição de fórmula segue aquela que foi dada anteriormente, relativamente aos símbolos que estamos assumindo aqui. Os postulados que tomaremos são 1-7 apresentados para $S^{\equiv}$, adicionando a reflexividade da relação de identidade, ou seja, temos como oitavo postulado a fórmula $\forall x(x=x)$.

Também neste caso, queremos interpretar esta linguagem em uma estrutura **e** = <D, I>, onde D é um q-set não-vazio e I uma q-função interpretação, que atribui aos símbolos da linguagem elementos de D do seguinte modo:

1) $I(a_i) \in D$, ou seja, a cada constante individual da linguagem L, I atribui um elemento de D (ver comentário abaixo);

2) $I(P) \subseteq D^n$, onde P é símbolo de predicado de peso n;

3) $I(=) =_E [\langle x,y\rangle: x, y \in D \text{ e } x \equiv y]$.

A diferença principal com relação à semântica apresentada para $S^{\equiv}$ diz respeito ao item 3, a interpretação dada ao símbolo de identidade. Como não temos mais a relação de indistinguibilidade na linguagem, o símbolo de identidade desempenhará um duplo papel agora, sendo que a interpretação deste símbolo vai depender do q-set D que for escolhido como domínio, uma vez que pode ser de qualquer um dos tipos apresentados no capítulo 2: um conjunto, contendo apenas elementos clássicos, um q-set puro, tendo apenas m-átomos como elementos, ou um q-set misto, com os dois tipos de elementos.

Devemos perceber que no caso de D ser um conjunto, teremos algo equivalente à semântica usual se aplicando à linguagem. Neste conjunto, o símbolo de identidade passa a ser interpretado como a identidade entre seus elementos. Isto decorre de resultados apresentados no capítulo 2, em particular, de Q5 e Teorema 3, que mostram que para as Dinge da teoria Q, identidade e indistinguibilidade são noções equivalentes.

Com isto, a identidade é interpretada na diagonal de D. Também a q-função I tem o significado usual, de uma função em um conjunto usual, atribuindo a cada símbolo da linguagem que estamos interpretando um elemento bem determinado de D.

Quando, por outro lado, o q-set domínio for um quase-conjunto puro, temos algumas mudanças interessantes, que lembram as observações feitas para as denotações de constantes de primeira espécie na semântica de $S^{\equiv}$. A nossa quase-função interpretação atribuirá novamente nomes aos elementos de D de maneira ambígua, sendo impossível determinar unicamente o elemento nomeado.

Neste caso ainda, em que o domínio de interpretação é um q-set puro, com relação à extensão dos predicados, deve-se levar em conta mais uma característica própria desta semântica que é influenciada pela metalinguagem que estamos empregando. A cada símbolo de predicado de peso n da linguagem está associado um sub-q-set de n-uplas do domínio. No entanto, podem existir outros sub-q-sets de D indistinguíveis deste particular q-set denotação. Para representarmos de algum modo a situação com a qual nos deparamos quando consideramos a relação entre os símbolos de predicados e suas extensões nos casos em que não-indivíduos estão envolvidos, teremos que garantir que, dado qualquer q-set indistinguível da extensão associada a P, teremos que este q-set também pode, de certo modo, fazer o papel de extensão de P. A idéia básica é que, se aceitarmos que em contextos envolvendo objetos indistinguíveis que são algum tipo de não-indivíduos, conforme argumento apresentado no capítulo 1, as permutações de objetos indistinguíveis não são observáveis, teremos que, permutando elementos da extensão de um predicado com aqueles que não estão nesta extensão, nada altera o valor de verdade da sentença em questão. Em breve, quando apresentarmos nossa relação de satisfação de uma fórmula por uma seqüência, esta idéia ficará mais clara.

Com relação ao símbolo de identidade, ele passa, neste caso particular em que o domínio é um q-set puro, a representar não mais a identidade usual, mas a relação de indistinguibilidade. Como vimos, a relação representada pelo símbolo '=' se manterá entre elementos indistinguíveis do domínio, que não precisam ser numericamente o mesmo (se é que tem algum sentido falar em 'o mesmo' neste caso). Há ainda um paralelo interessante com a interpretação clássica do símbolo '=', relacionado com o que explicamos acima sobre a extensão de símbolos de predicados, de que permutações de objetos indistinguíveis na extensão não devem alterar o valor de verdade da sentença.

Explicaremos esta situação em breve, quando tivermos introduzido a noção de satisfatibilidade.

Quando no domínio tivermos um q-set usual, ou seja, contendo tanto m-átomos quanto objetos clássicos, aplicam-se considerações similares às que foram apresentadas anteriormente, com algumas restrições simples, que podem ser compreendidas a partir do que já se explicou para os casos anteriores.

Agora, passamos para a relação de satisfação de uma fórmula por uma seqüência de elementos do domínio. Seja s uma q-função do q-set das variáveis individuais em D. Vamos novamente considerar a seguinte q-função s*, que atribui elementos de D a termos da linguagem interpretada:

(i) $s^*(x_i) \equiv s(x_i)$ (ii) $s^*(a_i) \equiv I(a_i)$

A definição de satisfatibilidade de uma fórmula por s* é dada pela seguinte definição:

Def. [Satisfatibilidade de uma fórmula **A** por uma q-função s*]

1) Se a fórmula **A** for $t_i = t_j$, então s* *satisfaz* **A** se e somente se $s^*(t_i) \equiv s^*(t_j)$.

2) Se **A** é uma fórmula atômica da forma $P(t_1,...,t_n)$, com $t_1,...,t_n$ termos individuais, então s* *satisfaz* **A** se e somente se $<s^*(t_1),...,s^*(t_n)>$ é indistinguível de alguma n-upla $<d_1, ..., d_n>$ que pertence a $I(P^n)$.

3) s* *satisfaz* ¬**A** se e somente se s* *não satisfaz* **A**.

4) s* *satisfaz* uma fórmula da forma **A** → **B** se e somente se s* não *satisfaz* **A** ou s* *satisfaz* **B**.

5) Seja **A** uma fórmula do tipo ∀xB(x). Dizemos que s* *satisfaz* **A** se e somente se toda s'* que 'difere' de s*, quando muito, no valor de x, também *satisfaz* B(x).

Valem aqui as mesmas observações feitas no caso da semântica para a linguagem de $S^{\equiv}$. Agora podemos também voltar ao tema da extensão dos predicados. Como assumimos um axioma que busca formalizar a lei da substituição para o símbolo de identidade, ou seja, $t=v \to (\alpha(t) \to \alpha(v))$, aparentemente nos comprometeríamos com o fato de que a relação de indistinguibilidade deve ser compatível com a pertinência. No entanto, com a particular definição de satisfatibilidade que estamos empregando, este não será o caso, pois não é preciso que a denotação de um termo pertença à extensão de um predicado para satisfazê-lo. No caso em que o domínio é um q-set clássico, se a=b, então, dado um símbolo de predicado unário P, por exemplo, teremos pela lei de substituição que, se P(a) então P(b), ou seja, podem-se substituir os nomes sem alterar a verdade. Semanticamente, teremos que a denotação de a e b será a mesma e, portanto, se I(a) pertence a I(P) então I(b) também pertence (levando em conta que nestes casos as relações de identidade e indistinguibilidade são equivalentes, conforme comentamos antes). No caso que estamos examinando agora, quando tratamos de m-átomos no domínio, o mesmo ainda se mantém, ou seja, se a=b, com as características explicadas acima, então, P(a) implica P(b), isto é demonstrado na sintaxe. Semanticamente, podemos entender isto do seguinte modo: se I(a) é indistinguível de I(b), ou seja, as constantes 'nomeiam' objetos que são indistinguíveis, então há um q-set que faz o papel de extensão de P tal que se há um indistinguível de I(a) neste q-set, haverá também um elemento indistinguível de I(b) neste q-set, sem que necessariamente algum deles pertença a este q-set.

Agora, podemos novamente definir a noção de verdade em uma estrutura:

Def. [Verdade em **e**]
Uma fórmula é *verdadeira* na estrutura **e** se e somente se for satisfeita por todas as q-funções denotação s*. Uma fórmula é *falsa* em **e** se não for satisfeita por nenhuma s*.

Outras noções como de conseqüência lógica, satisfatibilidade de uma coleção de fórmulas, fórmula válida, entre outros, podem ser definidos da maneira usual.

Um ponto importante a se notar é que, como a semântica clássica é um caso particular da semântica que apresentamos, podemos demonstrar um Teorema de Completude de forma análoga ao que se faz usualmente (por exemplo, em Ebbinghaus, Flum e Thomas [1994]). Além da importância usual que se atribui a este resultado, temos ainda outra conseqüência interessante da demonstração deste teorema, se seguirmos o método proposto por Henkin: podemos obter, através desta demonstração, um modelo cujo domínio para qualquer teoria consistente T consiste apenas de objetos clássicos. Para compreendermos isto, é importante lembrar que, na demonstração usual do Teorema da Completude, um dos resultados preliminares que devemos mostrar é o chamado Teorema de Henkin, que nos garante que, se uma teoria T for consistente, então existe um modelo para esta teoria. O passo fundamental na demonstração deste resultado, e que também vale para o nosso caso, é exibir um modo para se obter tal modelo, dada a teoria T. Isso se faz, em particular, especificando um particular domínio de interpretação, que será formado por certas classes de equivalências dos termos da linguagem de T. Como essas classes são conjuntos, quando demonstramos este teorema utilizando a semântica apresentada acima, feita em Q, estamos também, em particular, mostrando como podemos obter um modelo clássico para qualquer teoria consistente T, ou seja, um modelo que contém apenas elementos da parte clássica de Q, e nenhum m-átomo.

No entanto, apesar de sempre podermos obter um modelo clássico para as teorias consistentes, as estruturas cujos domínios são q-sets com m-átomos podem também, em alguns casos, fornecer alguns resultados que são próprios apenas desta semântica. Consideraremos alguns poucos exemplos em que o uso de m-átomos, de certo modo, nos permite nos desviar-mos da semântica usual, sem entrar em muitos detalhes.

Como primeiro exemplo, seja T a teoria cujo único axioma próprio é a fórmula $\exists x\forall y(x=y)$. Como é bem sabido, na semântica clássica, T é satisfeita apenas por estruturas cujos domínios possuem apenas um elemento. No entanto, na semântica feita em Q, é simples de verificar que T pode possuir modelos com mais de um elemento, desde que sejam todos eles m-átomos indistinguíveis.

Para generalizar o exemplo anterior, seja P um símbolo de predicado unário. Vamos considerar a fórmula $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x = y))$, geralmente abreviada como $\exists!xP(x)$. Na semântica usual, as estruturas que satisfazem esta fórmula são tais que a função interpretação deve atribuir ao símbolo P uma coleção com apenas um elemento. É fácil de perceber que, se considerarmos a semântica apresentada acima, podemos, em uma estrutura que contenha m-átomos, fazer com que a q-função interpretação atribua a este símbolo uma extensão com quase-cardinal maior que 1, desde que os elementos do q-set extensão sejam m-átomos indistinguíveis.

Outro caso interessante diz respeito às fórmulas que, na semântica clássica, nos permitem fixar o cardinal do domínio, nos casos em que a teoria é satisfeita por alguma estrutura cujo domínio seja finito (no caso de domínios infinitos, os teoremas de Löwenheim-Skolem impedem que se estabeleça o cardinal do domínio deste modo). Uma dessas fórmulas, por exemplo, é uma generalização da idéia apresentada no primeiro exemplo, que, permite que se estabeleça que o domínio é composto por exatamente n elementos. Agora, por simplicidade, tratamos apenas do caso de três elementos, e a fórmula pode ser escrita como: $\exists x\exists y\exists z(x\neq y \wedge x\neq z \wedge y\neq z \wedge \forall w(w=x \vee w=y \vee w=z))$. Como se sabe, na semântica clássica, o domínio da estrutura que satisfaz esta fórmula (ou uma teoria que contenha esta fórmula como um de seus axiomas) deve possuir apenas três elementos. Um modelo simples para esta fórmula pode ser obtido, por exemplo, com um domínio com dois elementos clássicos a e b, e um m-átomo c. No entanto, assim como nos casos anteriores, não é preciso que tenhamos apenas um m-átomo, podemos acrescentar ao domínio uma coleção de n m-átomos, desde que sejam todos indistinguíveis de c, e a estrutura assim obtida também vai satisfazer a fórmula acima, apesar de seu quase-cardinal não ser apenas 3.

Neste último exemplo, utilizamos um método que pode ser utilizado de modo geral: podemos substituir um dos elementos de um domínio clássico por um m-átomo, modificar adequadamente a q-função interpretação, e verificar que esta mudança de elementos do domínio não vai alterar o valor de verdade da fórmula interpretada. Com isso, podemos, como fizemos nos exemplos anteriores, introduzir coleções com mais de um m-átomo, desde que sejam todos indistinguíveis dos m-átomos já presentes, e aumentar o quase-cardinal do q-set interpretação sem, com isso, fazer com que a interpretação deixe de ser modelo da fórmula.

Uma conclusão que pode ser tirada dos exemplos acima é que, diferentemente da semântica clássica, na semântica feita em Q, não podemos fixar através da linguagem, o tamanho do domínio de interpretação nem mesmo os casos finitos. Em geral, podemos sempre aumentar o quase-cardinal do domínio de interpretação com m-átomos que sejam indistinguíveis de algum dos m-átomos já presentes no q-set domínio. Nos casos infinitos, como já mencionamos, na semântica em Q não é possível fixar o cardinal de uma interpretação, assim como ocorre na semântica clássica, devido aos teoremas de Löwenheim-Skolem, que podem ser demonstrados nesta semântica do mesmo modo que no caso clássico. Não seguiremos buscando por mais resultados para a semântica feita em Q, deixando para outra ocasião uma investigação mais detalhada deste tópico.

4.5.1 - A lógica subjacente a Q

Agora, passamos ao problema de explicitar adequadamente a lógica subjacente à teoria Q. Conforme foi explicado no capítulo 1, um possível argumento contra a viabilidade de uma teoria de Quase-Conjuntos poderia ser baseado neste ponto, seguindo nas seguintes linhas: ao utilizarmos os axiomas para o cálculo de predicados de primeira ordem clássico sem identidade em nossa lógica subjacente para a teoria Q, nos comprometemos com uma semântica conjuntista clássica, já que esta é a semântica para esta lógica. Quando utilizamos fórmulas com quantificadores existenciais, por exemplo, o que estamos querendo dizer, pelo menos intuitivamente, é que existe um conjunto, no sentido da semântica clássica, que contêm um elemento que satisfaz a fórmula assim quantificada. Com isto, segue o argumento, estamos nos comprometendo com uma ontologia de indivíduos, nossas variáveis individuais percorreriam um 'domínio' de indivíduos, e as extensões dos predicados, seriam conjuntos, na acepção usual.

No entanto, como já enfatizamos ao apresentar a teoria Q, no capítulo 2, os postulados para a lógica subjacente são os postulados para a lógica clássica, mas com isto não estávamos nos comprometendo com a interpretação da semântica clássica para estas fórmulas e para os postulados das teorias baseadas no sistema formal assim obtido. Nossa proposta é a de que se caracterize a lógica subjacente à teoria Q como aquela que utiliza estes postulados, mas cuja semântica é aquela proposta na seção anterior, neste caso particular, feita para uma linguagem sem o símbolo de identidade. Com isto, acreditamos que podemos dar uma semântica para a lógica subjacente condizente com as motivações da própria teoria Q, e evitar o problema levantado pelo argumento acima, sem pressupor uma teoria de conjuntos clássica.

Para esclarecermos possíveis suspeitas de circularidade que poderiam surgir ao nos depararmos com a proposta do parágrafo anterior, basta lembrar novamente a distinção entre a teoria que estamos utilizando (teoria de fundo) e a teoria que estamos estudando (teoria objeto). Aqui, a teoria estudada é a teoria de Quase-Conjuntos Q, e para realizar este estudo, utilizamos também uma teoria de Quase-Conjuntos, mantida ao nível informal.

Apesar de parecer um pouco estranha, nossa proposta é que se considere o problema para a teoria Q de modo análogo ao que ocorre com as teorias de conjuntos clássicas, como ZFC, por exemplo. A lógica subjacente à teoria ZFC é a lógica clássica, cuja semântica é feita tendo-se, por exemplo, ZFC como metateoria. Ainda, no caso das teorias clássicas, utilizamos em geral, como teoria de fundo, uma teoria de conjuntos assumida informalmente, como a própria ZFC para estudar, na teoria objeto, ZFC. O que estamos sugerindo é que se siga o mesmo procedimento para o caso da teoria Q, o que parece natural se assumirmos a posição de que nenhuma particular teoria de conjuntos pode ser considerada privilegiada, pelo menos de um ponto de vista lógico.

5 – CONCLUSÃO

Neste trabalho, tivemos como tema central o tratamento formal de uma particular maneira de se conceber a não-individualidade. Nossa principal motivação para propor este tratamento formal desta noção de não-indivíduo foi baseada em uma maneira de se conceber uma possível metafísica da mecânica quântica não-relativística. Como apresentamos em nosso trabalho, a idéia de que as entidades com as quais a teoria trata não são indivíduos não se segue necessariamente da teoria, mas, a nosso ver, esta parece ser uma opção bastante plausível. Em geral, argumenta-se que a teoria de Quase-Conjuntos Q, apresentada aqui, pode ajudar a fundamentar uma versão da *Received View*, fornecendo uma base formal para este particular '*framework*' conceitual, e contribuir, com isso, para que se supere a dificuldade de se tratar com não-indivíduos, devido principalmente à estranheza desta noção aparentemente pouco convencional (French [1998] p. 102).

Com as aplicações da teoria Q feitas nos capítulos anteriores, esperamos que esta maneira de se compreender a relação da teoria com suas motivações oriundas da física e da metafísica tenha sido corroborada. Sabemos que apenas algumas das principais dificuldades associadas com a aceitação da *Received View* foram, de algum modo, tocadas nos tópicos tratados neste trabalho, mas buscamos mostrar como, com auxílio da teoria Q, podemos tratar de alguns dos desafios com os quais se depara esta concepção segundo a qual as entidades tratadas pela mecânica quântica não-relativística são não-indivíduos. Os problemas aos quais nos dedicamos, como foi visto, são a relação entre a não-individualidade e a cardinalidade de coleções de não-indivíduos, e as modificações que devem ser feitas na semântica de alguns sistemas de lógica, quando se quer tratar com estes itens. No primeiro caso, o problema é esclarecer como podemos determinar o cardinal de coleções de não-indivíduos se não podemos distingui-los. Como vimos, foi preciso utilizar uma abordagem distinta da usual para se definir esta noção para coleções finitas. No segundo caso, ao fazermos uma semântica para certos sistemas de lógica, tínhamos o problema de que, aparentemente, dada a motivação inicial para se propor estes sistemas que visavam tratar com não-indivíduos, a semântica conjuntista usual nos comprometia novamente com indivíduos na metalinguagem. Assim, foi preciso utilizar na metalinguagem a teoria Q, o que permitiu que coleções de não-indivíduos figurem como domínio de interpretação, de modo que as motivações para estas lógicas podem ser preservadas.

Muitas outras aplicações no sentido de se mostrar como a teoria Q pode contribuir para fundamentar a opção segundo a qual uma “mecânica quântica de não-indivíduos” seria possível já foram feitas (French e Krause [2006] cap. 7), e outras mais estão sendo feitas. Em particular, podemos mencionar o trabalho que busca mostrar como se pode empregar Q para reconstruir uma versão da mecânica quântica não-relativística de modo mais condizente com uma metafísica de não-indivíduos (ver Domenech, Holik e Krause [2008]).

Vale a pena mencionar ainda que, em geral, um dos temas mais recorrentes quando se trata com sistemas formais motivados por teorias científicas é a questão de se saber se a lógica é empírica. E ainda, como vimos ao apresentar uma pequena introdução à teoria Q, no primeiro capítulo, Manin sugere que devemos olhar novamente para as teorias sobre o mundo para propor novos sistemas formais. No entanto, se quisermos adotar esta tese com relação a Q, será preciso fazer algumas qualificações, pois se a tese da subdeterminação da metafísica pela física estiver correta, pelo menos com relação ao tópico da individualidade, será preciso adicionar um pouco de metafísica na busca da lógica que reflete este particular aspecto da teoria física.

Por fim, gostaríamos de chamar a atenção para o fato de que, apesar de termos tratado do tema de um ponto de vista eminentemente formal, e com motivações oriundas de uma teoria física, é importante notar que a noção de não-individualidade não precisa estar sempre vinculada à formulação de um sistema formal, e nem precisa buscar suas motivações em teorias físicas, ou seja, podemos investigar este assunto de um ponto de vista puramente metafísico, e esta investigação complementaria o tipo de trabalho feito aqui. Não tratamos com detalhe deste tipo de investigação aqui, mas sem ir muito longe, podemos encontrar exemplos de sistemas de metafísica que admitem itens que não sejam indivíduos, ainda que entendam a individualidade e a sua ausência em acepções diferentes daquela apresentada aqui. Um caso deste tipo seria o sistema proposto por Lowe [1998], onde se admite certos itens que não satisfazem os seus critérios que qualificam algo como um indivíduo (na verdade, não são nem mesmo objetos, na acepção de Lowe). Lowe propõe a seguinte classificação para os itens que não serão indivíduos: 1) têm-se os quase-objetos, itens que não possuem condições de identidade, mas podem ser contados de algum modo, como, por exemplo, elétrons, (é interessante notar que Lowe não esclarece como devemos contar itens sem condições de identidade, talvez uma versão da construção proposta em nosso trabalho possa servir para fundamentar rigorosamente esta posição metafísica), 2) os quase-indivíduos, que são os itens que, apesar de possuírem condições de identidade determinada, não podem ser contados, como, por exemplo, partes de ouro, e partes de matéria em geral, e por fim, 3) os chamados ‘não-objetos’, que, para Lowe, são os particulares que não possuem nem condições de identidade e nem são contáveis, exemplos dos quais seriam itens como os tropos, as ocorrências particulares de atributos. Como dissemos, nenhum destes itens qualifica-se como indivíduo no seu sistema. Assim, os indivíduos contam como um caso especial dentre os itens particulares, e este é um exemplo de um sistema de metafísica envolvendo itens que não são indivíduos.

Relacionar a investigação filosófica com a ciência atual certamente é um trabalho que pode nos ensinar muito sobre os fundamentos da ciência, e a busca por esclarecimento conceitual das teorias científicas pode contribuir para abrir novas perspectivas na investigação filosófica, inclusive dando novas roupagens para antigos problemas, como é o caso da identidade e individualidade. A união de ciência e filosofia é certamente um campo no qual há muito ainda a ser desbravado.

6 - REFERÊNCIAS

Adams, R. M., [1979], 'Primitive Thisness and Primitive Identity' *The Journal of Philosophy*, **76**, no. 1, 1979.

Allaire, E. B., [1963], 'Bare Particulars' *Philosophical Studies*, **14**, pp. 1-8, reimpresso em Laurence, S. e Macdonald, C. [1998], pp. 248-254.

Barwise, J., [1977], '*Handbook of Mathematical Logic*' North-Holland.

Benacerraf, P., e Putnam, H., (eds.), [1983], '*Philosophy of Mathematics: Selected Readings*' 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press.

Bitbol, M., [1996], '*Schrödinger´s Philosophy of Quantum Mechanics*' Kluwer Ac. Press, (Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. 188)

Black, M., [1952], 'The Identity of Indiscernibles' *Mind* vol. **61**, no. 242, 1952, pp. 153-164.

Boolos, G., [1983], 'The Iterative Conception of a Set' em Benacerraf, P., e Putnam, H. [1983], pp. 486-502.

Brading, K, Castellani, E., (eds.) [2003], '*Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*' Cambridge University Press.

Cartwright, R., [1971], 'Identity and Substitutivity' em M. Munitz (ed.) *Identity and Individuation*, New York Un. Press, 1971, pp. 135-147, reimpresso em Laurence, S. e Macdonald, C. [1998], pp. 69-80.

Castellani, E. (ed.) [1998], '*Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*' Princeton, NJ: Princeton University Press.

da Costa, N. C. A., [1980], '*Ensaio sobre os fundamentos da lógica*' São Paulo, Hucitec/EdUSP (2ª ed. Hucitec 1994).

da Costa, N. C.A., [1999], '*O Conhecimento Científico*' Discurso Editorial.

da Costa, N. C. A., Bueno, O., [2001], 'Paraconsistency: towards a tentative interpretation' *Theoria – Segunda Época* **v**. 16/1, 2001, 119-145.

da Costa, N. C. A., Bueno, O., Béziau, J-Y., [1995], 'What is semantics? A brief note on a huge question' *Sorites – Electronic Quarterly of Analytical Philosophy* 3, p. 43-47.

da Costa, N. C. A., Bueno, O., Béziau, J-Y., [1996], '*Elementos de uma teoria paraconsistente de conjuntos*' São Paulo, CLE, 1996.

da Costa, N. C. A., Krause, D., [1994], 'Schrödinger Logics' *Studia Logica* **53** (4), 1994, pp. 533-550.

da Costa, N. C. A., Krause, D., [1997], 'An Intensional Schrödinger Logic' *Notre Dame Journal of Formal Logic* **38** (2), 1997, pp. 179-194.

Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., [2002], 'Quantum Logics' em Gabbay e Guenthner [2002], pp. 129-228.

Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., Krause, D., [1998], 'Quasiset theories for microobjects: a comparison' em Castellani [1998], pp. 142-152.

Domenech, G., Holik, F., [2007], 'A discussion on particle number and quantum indistinguinshability' *Foundations of Physics*, vol. 37, no. 6 pp. 855-878.

Domenech, G., Holik, F., Krause, D., [2008], '*Quasi-spaces and the foundations of Quantum Mechanics*' a aparecer em *Foundations of Physics*.

Ebbinghaus, H.D., Flum, J., e Thomas, W. [1994], '*Mathematical Logic*' Springer-Verlag, New-York.

Enderton, H., B., [1977], '*Elements of set theory*' New York, Academic Press.

Falkenburg, B., [2007], '*Particle Metaphysics, a critical account of subatomic reality*' Springer.

Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y., Levi, A., [1984], '*Foundations of Set Theory*' North-Holland.

Franco de Oliveira, A.J. [1982], '*Teoria de Conjuntos, intuitiva e axiomática (ZFC)*' Livraria Escolar Editora, Lisboa.

French, S. [1989], 'Identity and Individuality in Classical and Quantum Physics' *Australasian Journal of Philosophy* **67** (4), 1989, pp. 433-446.

French, S. [1989a], 'Why the Principle of Identity of Indiscernibles is not Contingently True Either' *Synthese* **78**, 1989, pp. 141-166.

French, S. [1998], 'On the Withering Away of Physical Objects' em E. Castellani (ed.), pp. 93-113

French, S., Krause, D., [2006], '*Identity in Physics. A historical, philosophical and formal analysis*' Oxford: Oxford University Press.

French, S., Readhead, M., [1988], 'Quantum Physics and the Identity of Indiscernibles' *British Journal for the Philosophy of Science* **39**, 1988, pp. 233-246.

French, S., Rickles, D., [2003] 'Understanding Permutation Symmetry' em Brading, K., e Castellani, E., [2003], pp. 212-238.

Gabbay, D., Guenthner, F., (eds.) [2002], '*Handbook of Philosophical Logic*' Vol. 6 Kluwer Academic Publishers.

Hale, B. e Wright, C. (eds.) [1997], '*A Companion to the Philosophy of Language*' Oxford: Blackwell.

Krause, D. [1990], '*Não-Reflexividade, Indistinguibilidade e Agregados de Weyl*' Tese, Universidade de São Paulo.

Krause, D. [2002], 'Why quasi-sets?' *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática* **v. 20** 1/2, 2002, pp. 73-92.

Krause, D., [2007], '*La metafísica de los quanta*' em preparo.

Krause, D. e Coelho, A.M.N. [2005], 'Identity, Indiscernibility and Philosophical Claims' *Axiomathes* **15** (2) Junho, pp. 191-210.

Laurence, S. e Macdonald, C. (eds.) [1998], '*Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics*' Oxford: Blackwell.

Loux, M. J. [1998], 'Beyond Substrata and Bundles: a Prolegomenon to a Substance Ontology' em Laurence, S. e Macdonald, C. [1998], pp. 233-247.

Lowe, E. J. [1997], 'Objects and Criteria of Identity' em Hale, B. e Wright, C. (eds.) pp. 613-633.

Lowe, E. J. [1998], '*The Possibility of Metaphysics: Substance, Identity and Time*' Oxford: Oxford University Press.

Mendelson, E. [1987], '*Introduction to Mathematical Logic*' 3ª ed., Wadsworth & Brooks.

Post, H. [1963], 'Individuality and Physics' *The Listener*, 10 de outubro, pp. 534-7, reimpresso em *Vedanta for East and West* **132**, 1973, pp. 14-22.

Quine, W. v. O. [1981], '*Theories and Things*' Harvard University Press.

Quine, W. v. O. [1981a], 'Things and Their Place in Theories' em Quine [1981].

Readhead, M., Teller, P., [1992], 'Particle Labels and the Theory of Indistinguishable Particles in Quantum Mechanics' *British Journal for the Philosophy of Science*, **43**, pp. 201-218.

Russell, B. [1948], '*Human Knowledge: Its Scopes and Limits*' London: George Allen and Unwin; New York: Simon and Shuster.

Schrödinger, E. [1952], '*Science and Humanism*' Cambridge, Cambridge Un. Press.

Schrödinger, E. [1998], 'What Is an Elementary Particle?' em Castellani, E. [1998] pp. 197-210.

Shoenfield, J. R., [1977], 'Axioms of Set Theory' em Barwise [1977], pp. 321-370.

Streater, R. F., e Wightman, A. S., [2000], '*PCT, Spin and Statistics, and All That*', Princeton Un. Press.

Toraldo di Francia, G. [1978], 'What is a physical object?' *Scientia* **113**, pp. 57-65.

Toraldo di Francia, G. [1998], 'A World of Individual Objects?' em Castellani, E. [1998] pp. 21-29.

Van Cleve, J. [1985], 'Three Versions of the Bundle Theory' *Philosophical Studies* 47, pp. 95-107, reimpresso em Laurence, S. e Macdonald, C. [1998], pp. 264-274.