
Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

**Análise de Estabilidade e Convergência
dos Métodos Chebyshev-Espectrais
para Problemas Parabólicos**

Fabiana Travessini

Orientador: Prof. Dr. Jáuber C. de Oliveira

Florianópolis
Fevereiro de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

**Análise de Estabilidade e Convergência dos Métodos
Chebyshev-Espectrais para Problemas Parabólicos**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Fabiana Travessini
Florianópolis, Fevereiro de 2007

Análise de Estabilidade e Convergência dos Métodos Chebyshev-Espectrais para Problemas Parabólicos

por

Fabiana Travessini

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”,
Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Prof. Dr. Clóvis Caesar Gonzaga
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Gustavo Perla Menzala (UFRJ)

Prof. Dr. Fermín Sinfórano Viloche Bazán (UFSC)

Prof. Dr. Igor Mozolevski (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2007.

Agradecimentos

A meus pais Nelsi e Valdir e meu irmão Evandro, por orientar o meu caminho e apoiar as decisões em todos os momentos.

Ao meu noivo Adriano De Cezaro, pelo incentivo de prosseguir sempre, pela dedicação, compreensão e amor durante essa jornada.

A meus amigos, por fazerem jus a assim serem chamados.

Ao Departamento de Matemática, em especial a Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

À Elisa Amaral, pela atenção e prestatividade com que sempre nos atendeu na secretaria da Pós-Graduação.

Aos Fermín S. V. Bazán, Joel dos Santos e Igor Mozolesvki, pelo conhecimento transmitido.

Ao CNPQ pelo suporte financeiro.

Finalmente, deixo meus sinceros agradecimentos ao Professor Jáuber C. de Oliveira, pela dedicação, paciência, amizade, pelo conhecimento compartilhado e pela forma com que conduziu esse trabalho. Enfim, acredito ter aqui, mais que um orientador, mas um grande amigo.

Ainda a banca examinadora, por dedicarem seu tempo a avaliarem o trabalho desenvolvido.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados de estabilidade e análise de convergência dos métodos Chebyshev-espectrais para equações diferenciais parciais parabólicas. Abordamos a teoria dos métodos Fourier-espectrais considerando apenas os resultados necessários ao desenvolvimento da teoria dos métodos Chebyshev-espectrais. A existência e unicidade de soluções foram obtidas através do método Faedo-Galerkin. Estabelecemos resultados de estabilidade e convergência de esquemas semi-discretos e totalmente discretos para as equações de advecção-difusão (uni e bidimensional) e do calor bidimensional. No caso de esquemas totalmente discretos, utilizamos o método implícito θ , $1/2 \leq \theta \leq 1$, para avançar no tempo. A taxa de convergência é espectral com relação ao espaço e polinomial no tempo (segunda ordem para $1/2 < \theta \leq 1$ e quarta ordem para $\theta = 1/2$).

Abstract

In this work we obtain results of stability and convergence analysis for spectral-Chebyshev methods applied to parabolic partial differential equations. The theory of spectral-Fourier methods is developed considering only the results necessary to prove some key theorems for spectral-Chebyshev methods. We establish results of stability and convergence of semi-discrete and totally discrete schemes for the advection-diffusion (one and two dimensions) and heat equations. In the case of the fully discrete scheme, we utilize the implicit theta-method ($1/2 \leq \theta \leq 1$) to advance in time. The convergence rate is spectral in space and polynomial in time (second-order for $1/2 < \theta \leq 1$ and fourth-order for $\theta = 1/2$).

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Resultados de análise funcional	3
1.2 Resultados da análise complexa	5
1.3 Os espaços L^p	5
1.4 Distribuições	7
1.5 Espaços de Sobolev	9
1.6 Espaços de Sobolev com peso	12
1.7 Os espaços $L^p(0, T; X)$	13
1.8 O espaço dual de $L^p(a, b; X)$	14
1.9 O espaço $W(a, b; V, V')$	15
1.10 Algumas desigualdades	20
2 O método Fourier Espectral	23
2.1 Distribuições periódicas	24
2.2 Espaços de Sobolev Periódicos	28
2.3 Estimativas de erro para o operador de projeção	28
2.4 Estimativas de erro para o operador de interpolação	30
3 Aproximação polinomial: polinômios de Chebyshev	40
3.1 Introdução aos polinômios de Chebyshev	40
3.1.1 Diferenciação no espaço de frequência	43
3.1.2 Diferenciação do espaço físico	44
3.2 O operador de projeção	45
3.3 O Operador de Interpolação de Chebyshev	54
4 Existência e unicidade	56
4.1 O problema exato	56
4.2 Unicidade	57

4.3	Existência de uma solução para o Problema P	58
4.4	Solução forte para o problema P	63
5	Métodos de Chebyshev-espectral para equações parabólicas unidimensionais	66
5.1	Equação de advecção-difusão	66
5.2	Métodos Chebyshev-espectrais para aproximar (5.1)	72
5.3	Métodos pseudo-espectrais para aproximar (5.1)	80
6	Métodos de Chebyshev-espectral para equações parabólicas bidimensionais	95
6.1	Equação do calor	95
6.1.1	Discretização espacial	99
6.1.2	Discretização completa pelo método- θ	108
6.2	Equação Advecção-Difusão	119
6.2.1	Discretização completa da equação de advecção-difusão	119
6.3	Aplicação numérica	128
	Considerações finais	131
	Bibliografia	131

Introdução

Os métodos espectrais têm origem histórica atribuída a C. Lanczos, [18]. Ele estabeleceu que a escolha conveniente de funções ortogonais infinitamente diferenciáveis e dos pontos de colocação é crucial para a precisão do método. No entanto, a viabilidade destes métodos na resolução de EDP's tornou-se possível apenas no final da década de 60 com os trabalhos de Orszag, [23, 24], Eliassen, Machenhauer e Rasmussen, [13]. A principal barreira vencida naquela época foi o desenvolvimento de transformadas, necessárias no esquema espectral-Galerkin para a avaliação das somas originárias dos termos não-lineares. Kreiss e Olinger, [17], e Orszag, [25], foram pioneiros na aplicação dos métodos espectrais por colocação.

Existem basicamente duas classes de métodos espectrais para problemas em domínios limitados. Uma delas são os métodos-Fourier espectrais, que empregam expansões em série de Fourier (clássica) e são adequados para problemas com condições de fronteira e dados periódicos. A outra classe baseia-se em expansões em polinômios que são auto-funções de problemas de Sturm-Liouville singulares (polinômios de Jacobi - os mais usados são os polinômios de Chebyshev e Legendre). Além de empregar tais expansões, os métodos espectrais utilizam um formalismo variacional (Galerkin, Colocação ou método Tau) para construir o problema aproximado. A propriedade fundamental destas expansões em séries é a seguinte: o erro de truncamento entre a série com um número finito de termos, digamos N , e a função a ser aproximada decai a zero mais rapidamente que qualquer potência de $1/N$, se a função é infinitamente diferenciável ou analítica. Este tipo de convergência é denominado convergência espectral, e dela surgiu o nome do método. Esta característica tornou os métodos espectrais bastante atrativos como instrumento de resolução computacional de equações diferenciais. Os vários aspectos da teoria matemática dos métodos espectrais estão reunidos em [6].

Esta dissertação é um estudo da teoria dos métodos Chebyshev-espectrais para equações diferenciais parabólicas. Os fundamentos desta teoria, desenvolvidos ao longo do trabalho, aparecem na literatura nos seguintes textos: em [5] são estabelecidas as propriedades de convergência ótima dos operadores de projeção e interpolação baseados em expansões de Chebyshev; em [12] desenvolve-se uma teoria de existência e unicidade baseada no método de Faedo-Galerkin; em [3, 4] analisa-se a estabilidade e convergência dos métodos espectrais aplicados às equações de advecção-difusão (uni e bidimensional) e do calor bidimensional. Ressaltamos que vários resultados que eram enunciados (com esboço de demonstração ou sem demonstração)

nos artigos foram provados nessa dissertação com detalhes. Por exemplo, as proposições 5.1.3, 6.1.1, 6.1.2, observações 5.1.1 e 5.2.1, teoremas 5.2.3, 6.1.7, 6.1.8, lemas 5.3.2 e 5.3.3.

A descrição dos capítulos deste trabalho é a seguinte. No primeiro capítulo, apresentamos algumas definições e teoremas relativos à Análise Funcional, espaços de Sobolev (e Sobolev com peso), espaços $L^p(0, T; X)$ e $W(0, T; V, V')$. Ou seja, as ferramentas necessárias que serão usadas nos capítulos subsequentes. No segundo capítulo, introduzimos as distribuições periódicas e espaços de Sobolev periódicos, necessários para obtermos resultados de convergência do método Fourier-Espectral. Este método é usado, principalmente, na resolução de EDP's com dados e condições de fronteira periódicos. Ademais, tais resultados serão importantes na análise do método de Chebyshev-espectral. No terceiro capítulo, introduzimos os polinômios de Chebyshev e apresentamos algumas de suas principais propriedades. Consideramos aproximações baseadas em expansões em polinômios de Chebyshev e fazemos estimativas de erro, numa norma conveniente, entre a função e seu aproximante. Este capítulo é a base dos quinto e sexto capítulos. No quarto capítulo, obtemos a existência e unicidade de EDP's parabólicas lineares através do método de Faedo-Galerkin. No quinto, analisamos o método espectral e pseudo-espectral para a equação de advecção-difusão unidimensional, submetida as condições de fronteira de Dirichlet em $(-1, 1)$. Resultados (em termos do grau do polinômio e regularidade da função) de estabilidade e convergência são apresentados. Dividimos o sexto capítulo em duas seções. Na primeira, discretizamos a equação do calor bidimensional apenas espacialmente. Em seguida, discretizamos completamente, isto é, no espaço e no tempo. Esquemas implícitos são considerados para avançar no tempo através do método- θ , ($1/2 \leq \theta \leq 1$). Novamente, obtemos estabilidade e convergência. Na segunda seção, apresentamos uma discretização completa da equação de advecção-difusão bidimensional. Usamos o método- θ , com $1/2 \leq \theta \leq 1$, para o termo difusivo, enquanto o termo advectivo é tratado de forma explícita. Obtemos estabilidade e para $\theta = 1$ também convergência.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados de análise funcional

Teorema 1.1.1 (Representação de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert real e H' denotando o seu dual. Então, $H' \simeq H$, isto é, $\forall f \in H'$, existe um único $y \in H$ tal que:*

- (i) $f(x) = \langle f, x \rangle = \langle x, y \rangle_H, \forall x \in H$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ é o produto interno em H .
- (ii) $\|f\|_{H'} = \|y\|$.

Definição 1.1.2 (Convergência fraca) *Sejam X um espaço de Banach, X' denotando o seu dual, e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Dizemos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ no sentido **fraco** quando $n \rightarrow \infty$, se*

$$\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in X'.$$

Denotamos a convergência fraca por $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema 1.1.3 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em X . Então, é possível extrair de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma subseqüência $\{x_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ a qual converge fraco em X .*

Este é um resultado de compacidade fraca, o qual pode ser apresentado como

Teorema 1.1.4 *A bola unitária em um espaço de Banach reflexivo é compacta no sentido fraco.*

Teorema 1.1.5 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em X tal que*

- (i) $\|x_n\| \leq C < \infty$, em que C é uma constante.
 - (ii) O conjunto dos pontos de acumulação para a topologia fraca é reduzido a $\{x\}$.
- Então, a seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x fracamente em X .*

Definição 1.1.6 Se X é um espaço linear, X é convexo se dados x, y pertencentes a X e para qualquer t (real) pertencente a $[0, 1]$, então $tx + (1 - t)y$ pertence a X . Seja A um subconjunto de um espaço linear. O casco convexo de A é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém A .

Proposição 1.1.7 (Propriedades da Convergência Fraca) Seja $\{u_n\}$ uma seqüência no espaço de Banach X sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Então:

- (i) A convergência forte $u_n \rightarrow u$ implica $u_n \rightharpoonup u$ quando.
- (ii) Se $\dim X < \infty$, então a convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ implica que $u_n \rightarrow u$ forte.
- (iii) Se $u_n \rightharpoonup u$, então $\{u_n\}$ é limitada e

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|.$$

- (iv) Seja X é uniformemente convexo localmente. Se $u_n \rightharpoonup u$ e $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$, então $u_n \rightarrow u$.
- (v) Se $u_n \rightharpoonup u$, então existe uma seqüência $\{v_n\}$ no casco convexo fechado de $\{u_n\}$ tal que $v_n \rightarrow u$.
- (vi) Se $u_n \rightharpoonup u$, então u pertence ao casco convexo fechado de $\{u_n\}$.
- (vii) Se $\{u_n\}$ é limitada em X e se existem um $u \in X$ e um conjunto D denso em X' tal que

$$\langle f, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle, \quad \forall f \in D,$$

então $u_n \rightharpoonup u$.

- (viii) Se X é reflexivo e a seqüência real $\{\langle v, u_n \rangle\}$ converge para qualquer $v \in X'$, então existe $u \in X$ tal que $u_n \rightharpoonup u$.
- (ix) Se cada subsequência de $\{u_n\}$ que converge fraco tem o mesmo limite u , então $u_n \rightharpoonup u$.
- (x) Se $u_n \rightharpoonup u$ em X e $f_n \rightarrow f$ em X' , então $\langle f_n, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$.
- (xi) Seja X um espaço reflexivo. Se $u_n \rightarrow u$ em X e $f_n \rightharpoonup f$ em X' , então $\langle f_n, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$.

Definição 1.1.8 (Convergência fraca*) Seja X um espaço normado e X' o seu dual. Dizemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in X'$, $\forall n$, converge no sentido **fraco*** para $f \in X'$ quando $n \rightarrow \infty$, isto é, $f_n \xrightarrow{*} f$ quando $n \rightarrow \infty$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, x \rangle = \langle f, x \rangle, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 1.1.9 (Alaoglu) Seja X um espaço vetorial normado separável. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in X'$, $\forall n$ uma seqüência limitada em X' . Então, é possível extrair de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma subsequência $\{f_{n_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tal que $f_{n_l} \rightarrow f$ em X' equipada com a topologia fraca* para alguma $f \in X'$.

Proposição 1.1.10 (Propriedades da Convergência Fraca*) Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} e $\{f_n\}$ uma seqüência em X' . Então:

(i) Se $f_n \rightarrow f$ em X' , então $f_n \xrightarrow{*} f$.

(ii) Se $f_n \xrightarrow{*} f$, então $\{f_n\}$ é limitada em X' e $\|f\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$.

(iii) Se $\{f_n\}$ é limitada em X' e se existe uma $f \in X'$ e um subconjunto D denso em X tal que

$$\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall x \in D,$$

então $f_n \xrightarrow{*} f$.

(iv) Se a seqüência real $\{\langle f_n, x \rangle\}$ é convergente para qualquer $x \in X$, então existe uma $f \in X'$ tal que $f_n \xrightarrow{*} f$.

(v) Se $u_n \rightarrow u$ em X e $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' implicam que $\langle f_n, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$.

(vi) Se X é reflexivo, então $f_n \xrightarrow{*} f$ é equivalente a $f_n \rightharpoonup f$.

1.2 Resultados da análise complexa

Os dois teoremas, que enunciaremos a seguir, serão empregados posteriormente para obtermos uma cota superior para o erro de interpolação de funções analíticas e 2π -periódicas, [21].

Teorema 1.2.1 (Resíduos) *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto, conexo, z_1, z_2, \dots, z_n pontos distintos de A ; f holomorfa sobre $A \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$; γ curva fechada em A homotópica a um ponto em A ; $z_i \notin \gamma$, $i = 1, \dots, n$. Então,*

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{i=1}^n [\text{Res}(f, z_i)] \cdot I(\gamma, z_i),$$

em que $\text{Res}(f, z_i)$ é o resíduo de f em z_i , $I(\gamma, z_i)$ é o índice de γ em relação a z_i .

Teorema 1.2.2 (Princípio da Reflexão de Schwarz) *Seja A região no semiplano superior (do plano complexo) cuja fronteira ∂A intercepta o eixo real em um intervalo $[a, b]$ (ou uma união finita de intervalos disjuntos). Sejam f analítica sobre A e contínua sobre $A \cap (a, b)$; $\bar{A} = \{z \in \mathbb{C} / \bar{z} \in A\}$ a reflexão de A ; g definida sobre \bar{A} por $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Assumimos que f é real sobre (a, b) . Então, g é analítica e é a única continuação analítica de f para $A \cap (a, b) \cap \bar{A}$.*

1.3 Os espaços L^p

Seja μ a medida de Lebesgue no \mathbb{R}^d . Os subconjuntos do \mathbb{R}^d nos quais μ está bem definida são denominados conjuntos mensuráveis. As funções f tais que $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < a\}$ é um conjunto mensurável, para cada $a \in \mathbb{R}$, são denominadas funções mensuráveis. A integral de Lebesgue é definida para este conjunto de funções.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Consideremos o conjunto de funções mensuráveis v tais que

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1.1)$$

ou, quando $p = \infty$,

$$\sup\{|v(x)| : x \in \Omega\} < \infty. \quad (1.2)$$

Definição 1.3.1 Dizemos que duas funções são **equivalentes** em Ω , com respeito a medida de Lebesgue, se elas são iguais quase sempre. Isto é, $w \equiv v$, se w e v têm valores diferentes apenas sobre um subconjunto de Ω de medida nula.

A **classe de equivalência** determinada por v consiste de todas as funções f que são equivalentes a v .

Baseados nas classes de equivalência, introduzimos os espaços L^p .

Definição 1.3.2 Seja $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ consiste no espaço das classes de equivalência de funções mensuráveis satisfazendo (1.1), quando $1 \leq p < \infty$, ou (1.2), quando $p = \infty$. Para $1 \leq p < \infty$, munimos estes espaços com a norma

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.3)$$

Para $p = \infty$, a norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess} \{|v(x)| : x \in \Omega\}, \quad (1.4)$$

em que $\sup \text{ess} |v(x)| = \inf\{M > 0 : |v(x)| \leq M \text{ quase sempre em } \Omega\}$.

Em outras palavras, na definição acima, podemos dizer que nos espaços L^p duas funções, as quais são diferentes em um subconjunto de medida nula, são identificadas uma com a outra.

Os espaços $L^p(\Omega)$ são espaços de Banach com as normas definidas em (1.3), para $1 \leq p < \infty$, e (1.4) para $p = \infty$. Somente para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert., munido com o produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

A norma em $L^2(\Omega)$ é dada por $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$ e será denotada por $\|\cdot\|_o$.

Teorema 1.3.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto. Então, $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Teorema 1.3.4 (Imersão dos Espaços L^p) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, não vazio, com medida finita e $f \in L^p(\Omega)$. Então, $f \in L^r(\Omega)$ para $1 \leq r \leq p$.

Se $1 \leq p < \infty$, através do teorema de Representação de Riesz, obtemos que o espaço dual $L^p(\Omega)$ é dado por $L^{p'}(\Omega)$, em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ($p' = \infty$, se $p = 1$). Ainda, temos as seguintes propriedades:

Proposição 1.3.5 Seja Ω uma aberto, não-vazio do \mathbb{R}^d .

(i) O conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tais que f é contínua e $\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ é um compacto contido em Ω , denotado por $C_o(\Omega)$, é denso em $L^p(\Omega)$.

(ii) Se $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é separável.

(iii) Se $1 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

(iv) $L^1(\Omega)$ não é reflexivo.

(v) $L^\infty(\Omega)$ não é separável e não é reflexivo.

1.4 Distribuições

Apresentaremos os conceitos básicos da teoria das distribuições, principalmente a noção de derivada distribucional, os quais serão necessários para introduzir os espaços de Sobolev.

Definição 1.4.1 O conjunto $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ é chamado de **suporte** da função f e denotado por $\text{supp } f$.

Definição 1.4.2 $C_o^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis que possuem suporte compacto contido em Ω .

Munindo $C_o^\infty(\Omega)$ de uma topologia, temos um espaço vetorial topológico. Assim, precisamos saber como são caracterizadas as seqüências convergentes em $C_o^\infty(\Omega)$. Primeiro, lembremos que se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ é um multi-índice, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, d$, então $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$, em que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$.

Definição 1.4.3 $C^k(\Omega)$ é o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, k vezes continuamente diferenciáveis. $C^k(\overline{\Omega})$ é o conjunto das funções $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{K}$, k vezes continuamente diferenciáveis. $C^o(\Omega)$ é o conjunto das funções contínuas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ com suporte compacto. $C^o(\overline{\Omega})$ é o conjunto das funções contínuas $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{K}$ com suporte compacto.

Definição 1.4.4 Uma seqüência de funções $\{v_m\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, se existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$, fixo, tal que $\text{supp } v_m \subset K$, $\forall m \in \mathbb{N}$, e para qualquer α multi-índice, a derivada $D^\alpha v_n$ converge para zero uniformemente em K .

Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido dessa noção de convergência.

Definição 1.4.5 Um funcional T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ é uma **distribuição** sobre Ω se $\langle T, v_m \rangle \rightarrow 0$ sempre que $v_m \rightarrow 0$ no sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$.

O espaço das distribuições, que é o dual do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$, é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Uma função u definida quase sempre em Ω é dita ser **localmente integrável** sobre Ω , se $u \in L^1(A)$, para qualquer subconjunto A compacto contido em Ω . Neste caso, escrevemos $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Observamos que $L^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$, via desigualdade de Hölder.

Agora, cada função $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ pode ser associada com a seguinte distribuição T_u :

$$\langle T_u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Portanto, a aplicação $\phi : L_{loc}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, que a cada u associa T_u , é linear, injetiva e contínua, [16]. Por causa destas propriedades da aplicação ϕ , é comum identificar a distribuição T_u com $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, $u \simeq T_u$. Por este motivo, os elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ são também chamados de funções generalizadas.

Agora, introduziremos a diferenciação de uma distribuição. Sejam α um multi-índice e T uma distribuição. Sejam $u \in C^1(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Como ϕ se anula fora de algum subconjunto compacto contido em Ω , pela fórmula de integração por partes em cada variável x_j ,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \right) dx.$$

Similarmente, se $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, integrando por partes $|\alpha|$ vezes,

$$\int_{\Omega} (D^\alpha u(x)) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx.$$

Isto motiva a seguinte definição da derivada $D^\alpha T$:

$$\langle D^\alpha T, v \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.5)$$

Observamos que $D^\alpha T$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$ e qualquer distribuição possui derivadas de ordens arbitrárias em $\mathcal{D}'(\Omega)$ no sentido da definição (1.5). Ainda, se T é uma função suave, integrando por partes, a derivada no sentido distribucional coincide com a derivada clássica.

Definição 1.4.6 Dizemos que a α -derivada de uma distribuição T é uma função pertencente a $L^p(\Omega)$, se existe uma função $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\langle D^\alpha T, v \rangle = \int_{\Omega} g_\alpha(x)v(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.5 Espaços de Sobolev

Nesta seção, introduziremos os espaços de Sobolev e algumas de suas propriedades básicas, [1]. Estes espaços fornecem o ambiente para a teoria variacional de equações diferenciais parciais.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto não vazio.

Definição 1.5.1 Sejam k um inteiro não-negativo e $1 \leq p \leq \infty$. O **espaço de Sobolev** $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço das funções $v \in L^p(\Omega)$ tais que qualquer derivada distribucional de v , até a ordem k , é uma função do $L^p(\Omega)$. Isto é,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

Notamos que, para cada p , $1 \leq p \leq \infty$, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e $W^{k_2,p}(\Omega) \subset W^{k_1,p}(\Omega)$, quando $k_1 \leq k_2$.

Para $1 \leq p < \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com respeito a norma

$$\|v\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Além disso, definimos a seminorma sobre $W^{k,p}(\Omega)$ dada por

$$|v|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Por outro lado, $W^{\infty,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com respeito a norma

$$\|v\|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)},$$

e a correspondente seminorma dada por

$$|v|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em particular, quando $p = 2$, escrevemos $H^k(\Omega)$, $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ e $|\cdot|_{k,\Omega}$, ao invés de $W^{k,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{k,2,\Omega}$

e $|\cdot|_{k,2,\Omega}$, respectivamente. Além disso, os espaços $H^k(\Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto interno natural definido por

$$\langle u, v \rangle_{k,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx.$$

Definição 1.5.2 Denotemos por $W_o^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_o^{\infty}(\Omega)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ e $W^{-k,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_o^{k,p}(\Omega)$.

De forma análoga, para $p = 2$, escrevemos $H_o^k(\Omega)$ e $H^{-k}(\Omega)$, ao invés de $W_o^{k,2}(\Omega)$ e $W^{-k,2}(\Omega)$, respectivamente.

Também, podemos mostrar que $W_o^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e que, se Ω tem fronteira Lipschitz contínua, $W^{k,p}(\Omega)$ é o fecho de $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ na norma $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$. Em outras palavras, $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.

Agora, definiremos os espaços $W^{s,p}$ para s real e $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 1.5.3 Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $0 < s < 1$.

$$W^{s,p} = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s+(d/p)}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\},$$

com a norma natural associada.

Seja $s = m + \sigma$ com $m = 0, 1, 2, \dots$ e $0 < \sigma < 1$.

Definição 1.5.4

$$W^{s,p}(\Omega) = \{ u \in W^{m,p}(\Omega) : D^{\alpha} u \in W^{s,p}(\Omega), \forall \alpha = m \}.$$

Ademais, $W_o^{s,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{s,p}(\Omega)}$ e $W^{-s,p'}(\Omega)$ é o dual de $W_o^{s,p}(\Omega)$.

Novamente, quando $p = 2$, escrevemos $H^s(\Omega)$.

Agora, apresentaremos as propriedades mais relevantes dos espaços $W^{s,p}(\Omega)$, principalmente $H^s(\Omega)$. Demonstrações e mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [1], [19].

Iniciaremos com o teorema do traço. O traço sobre a fronteira $\partial\Omega$ de uma função $v \in H^s(\Omega)$ é, no sentido mais preciso, o valor de v restrito a $\partial\Omega$.

Teorema 1.5.5 (Traço) Sejam Ω um conjunto aberto, limitado do \mathbb{R}^d com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz contínua e $s > 1/2$.

(a) Existe uma única aplicação linear contínua $\gamma_o : H^s(\Omega) \longrightarrow H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ tal que $\gamma_o v = v|_{\partial\Omega}$ para cada $v \in H^s(\Omega) \cap C^o(\bar{\Omega})$.

(b) Existe uma aplicação linear contínua $\mathcal{R}_o : H^{s-1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^s(\Omega)$ tal que $\gamma_o \mathcal{R}_o \varphi = \varphi$, para cada $\varphi \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$.

Obtemos resultados análogos se consideramos o traço γ_Σ sobre um subconjunto Lipschitz contínuo Σ da fronteira $\partial\Omega$.

Através dos operadores de traço, temos outra forma de caracterizar os espaços $H_o^1(\Omega)$, com Ω um conjunto com fronteira Lipschitz contínua:

$$H_o^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_o v = 0\}.$$

Também, definimos $H_\Sigma^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_\Sigma v = 0\}$.

Teorema 1.5.6 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um conjunto aberto, conexo, limitado do \mathbb{R}^d . Seja Σ (não-vazio) subconjunto Lipschitz contínuo da fronteira $\partial\Omega$. Então, existe uma constante $C_\Omega > 0$ tal que*

$$\int_\Omega v^2(x) dx \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx,$$

para cada $v \in H_\Sigma^1(\Omega)$.

Como consequência da densidade de $C^\infty(\overline{\Omega})$ em $H^1(\Omega)$ (sob a hipótese que $\partial\Omega$ é Lipschitz contínuo), temos para cada $u, v \in H^1(\Omega)$ a seguinte **fórmula de Green**:

$$\int_\Omega (D_j u)v dx = - \int_\Omega u(D_j v) dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_o u \gamma_o v \eta_j d\gamma, \quad j = 1, \dots, d, \quad (1.6)$$

em que $d\gamma$ denota a medida sobre $\partial\Omega$.

Teorema 1.5.7 *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$, então $H^{s_2}(\Omega) \subseteq H^{s_1}(\Omega)$ com imersão contínua.*

Teorema 1.5.8 (Imersões de Sobolev) *Sejam Ω um conjunto aberto do \mathbb{R}^d com fronteira Lipschitz contínua e $1 \leq p < \infty$. As seguintes imersões são contínuas:*

- (a) *Se $0 \leq sp < d$, então $W^{s,p}(\Omega) \subset L^{p^*}$ para $p^* = dp/(d - sp)$;*
- (b) *Se $sp = d$, então $W^{s,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para qualquer q com $p \leq q < \infty$.*
- (c) *Se $sp > d$, então $W^{s,p}(\Omega) \subset C^o(\overline{\Omega})$.*

Teorema 1.5.9 (Compacidade de imersões de Kondrasov) *Seja Ω um conjunto aberto limitado em \mathbb{R}^d . Então:*

- (i) *Se $p \leq d$ e $1 \leq q < \frac{dp}{d-p}$, então $W_o^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ é uma imersão compacta.*
- (ii) *Se $p > d$, então $W_o^{1,p} \subset C(\overline{\Omega})$ é uma imersão compacta.*

Corolário 1.5.10 (Rellich) *Se Ω é um conjunto aberto limitado de \mathbb{R}^d , então $H_o^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é uma imersão compacta.*

Historicamente, esse último resultado de F. Rellich foi obtido antes do resultado mais geral de V. Kondrasov.

Teorema 1.5.11 (Compacidade de imersões, Rellich-Kondrasov) *Seja Ω um conjunto aberto, limitado do \mathbb{R}^d com fronteira Lipschitz contínua. Para $1 \leq p < \infty$, as seguintes imersões são compactas:*

(a) *Se $0 \leq sp < d$, então $W^{s,p}(\Omega) \subset L^q$ para qualquer q com $1 \leq q < p^*$, em que $p^* = dp/(d - sp)$.*

(b) *Se $sp = d$, então $W^{s,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para qualquer q com $1 \leq q < \infty$.*

(c) *Se $sp > d$, então $W^{s,p}(\Omega) \subset C^o(\bar{\Omega})$.*

(d) *Se $p > 2d/(d + 2)$, então $L^p(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. Em particular, $H^k(\Omega)$ está imerso compactamente em $H^{k-1}(\Omega)$, k um inteiro não-negativo.*

Teorema 1.5.12 (Interpolação) *Seja Ω um conjunto aberto do \mathbb{R}^d com fronteira Lipschitz contínua. Sejam $s_1 < s_2$ dois números reais e $\tau = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2$, $0 \leq \theta \leq 1$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|v\|_\tau \leq C \cdot \|v\|_{s_1}^{1-\theta} \cdot \|v\|_{s_2}^\theta, \quad \forall v \in H^{s_2}(\Omega).$$

1.6 Espaços de Sobolev com peso

Definiremos os espaços de Sobolev com uma função peso, os quais serão usados, a partir do capítulo 3, para métodos espectrais baseados nos polinômios de Chebyshev.

Dada uma função w sobre $\Omega = (-1, 1)^d \subset \mathbb{R}^d$, satisfazendo $w \in L^1(\Omega)$, $w(x) > 0$ em Ω , da mesma forma como feito na seção 1.3, definimos

$$L_w^2(\Omega) = \left\{ \phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid \phi \text{ é mensurável e } \langle \phi, \phi \rangle_w < \infty \right\},$$

em que $\langle \phi, \psi \rangle_w = \int_\Omega \phi(x) \overline{\psi(x)} w(x) dx$. A norma sobre $L_w^2(\Omega)$ provém deste produto interno, ou seja, $\|\phi\|_{o,w} = \int_\Omega |\phi(x)|^2 w(x) dx$.

Para $k \geq 0$ inteiro, definimos

$$H_w^k(\Omega) = \left\{ \phi \in L_w^2(\Omega) : D^\alpha \phi \in L_w^2(\Omega), |\alpha| \leq k \right\},$$

em que D^α é no sentido das distribuições (seção 1.4). Equipamos $H_w^k(\Omega)$ com o produto interno e norma

$$\begin{aligned} \langle \phi, \psi \rangle_{k,w} &= \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^d \\ |m| \leq k}} \langle D^m \phi, D^m \psi \rangle_w \\ \|\phi\|_{k,w} &= \left\{ \langle \phi, \phi \rangle_{k,w} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Para $s > 0$ real, definimos $H_w^s(\Omega)$ analogamente como definimos os espaços $H^s(\Omega)$.

É importante observarmos que todos os resultados citados para os espaços de Sobolev $H^s(\Omega)$ são válidos para os espaços de Sobolev com peso $H_w^s(\Omega)$.

1.7 Os espaços $L^p(0, T; X)$

Em problemas de evolução, quando precisamos usar o operador $\frac{\partial}{\partial t} + L$, em que L é um operador elíptico, então é conveniente definirmos os espaços $L^p(0, T; X)$ que levam em conta as variáveis temporal e espacial.

Para cada $t \in [0, T]$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x, t)$ como um elemento do espaço X . Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$. Agora, considerando $t \in [0, T]$, obtemos a função $t \mapsto u(t)$ com valores no espaço X .

Definição 1.7.1 *Sejam X um espaço de Banach, $a, b \in \mathbb{R}$.*

- O espaço $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < \infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis $u : (a, b) \rightarrow X$ tais que

$$\|u\|_{L^p(a, b; X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty. \quad (1.7)$$

- O espaço $L^\infty(a, b; X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis $u : (a, b) \rightarrow X$ limitadas quase sempre em (a, b) . A norma neste espaço é dada por

$$\|f\|_{L^\infty(a, b; X)} := \text{Sup Ess}_{[a, b]} \|f(t)\|_X. \quad (1.8)$$

- O espaço $C^m([a, b]; X)$, $m = 0, 1, \dots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a, b] \rightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a, b]$. A norma é dada por:

$$\|u\| = \sum_{i=0}^m \max_{t \in [a, b]} |u^{(i)}(t)|. \quad (1.9)$$

Citamos algumas propriedades destes espaços, [31].

Proposição 1.7.2 *Sejam $m = 0, 1, \dots$, $1 \leq p < \infty$, X e Y espaços de Banach.*

- $C^m([a, b]; X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} com a norma definida em (1.9).
- $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < \infty$, é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} com a norma definida em (1.7). $L^\infty(a, b; X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} com a norma (1.8).
- O conjunto de todas as funções degrau é denso em $L^p(a, b; X)$.
- $C([a, b]; X)$ é denso em $L^p(a, b; X)$ e a imersão $C([a, b]; X) \subset L^p(a, b; X)$ é contínua.

- (e) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, então $L^2(a, b; X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar $\langle u, v \rangle_{L^2(a, b; X)} = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle_X dt$.
- (f) $L^p(a, b; X)$ é separável, se X é separável e $1 \leq p < \infty$.
- (g) Se a imersão $X \subseteq Y$ é contínua, então a imersão $L^r(a, b; X) \subseteq L^r(a, b; Y)$, $1 \leq r \leq \infty$ também é contínua.

Definição 1.7.3 $\mathcal{D}'((a, b); X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a, b); X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e limitadas de $\mathcal{D}(a, b)$ em X . Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a, b) com valores no espaço de Banach X .

Definição 1.7.4 $L^1_{loc}(a, b; X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a, b)$, $\chi_K u \in L^1(a, b; X)$, em que χ_K denota a função característica de K .

Definição 1.7.5 Seja $J \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tal que $J \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} J(t) dt = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, definimos

$$J_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} J(t/\varepsilon) \quad e \quad (J_\varepsilon * u)(t) = \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(t-s) u(s) ds,$$

para as funções u em que o lado direito desta última igualdade faz sentido.

Proposição 1.7.6 Seja u uma função definida sobre \mathbb{R} , que anula-se fora de um intervalo I .

- (a) Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; X) = L^1_{loc}(-\infty, +\infty; X)$, então $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}; X)$.
- (b) Se $u \in L^2(\mathbb{R}; X)$, então $J_\varepsilon * u \in L^2(\mathbb{R}; X)$. Além disso, $\|J_\varepsilon * u\|_{L^2(\mathbb{R}; X)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}; X)}$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|J_\varepsilon * u\|_{L^2(\mathbb{R}; X)} = 0$.

Fazendo as devidas adaptações, encontramos a demonstração desta proposição, por exemplo, em [16] e [31].

1.8 O espaço dual de $L^p(a, b; X)$

Seja $Y = L^p(a, b; X)$. Temos a importante relação de dualidade $Y' = L^q(a, b; X')$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Isso se deve ao seguinte teorema, [31].

Teorema 1.8.1 Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- (a) Cada função $v \in L^q(a, b; X')$ corresponde a um único funcional $\bar{v} \in Y'$ dado por

$$\langle \bar{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt, \quad \forall u \in Y. \quad (1.10)$$

Reciprocamente, cada $\bar{v} \in Y'$ corresponde a exatamente uma função $v \in L^q(a, b; X')$ dada por (1.10).

Além disso,

$$\|\bar{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a, b; X')}. \quad (1.11)$$

(b) O espaço de Banach $L^p(a, b; X)$ é reflexivo e separável.

Assim, podemos identificar Y' com $L^q(a, b; X')$, pois, pelo teorema acima, existe um isomorfismo isométrico de $L^q(a, b; X')$ em Y' dado por $J(v) = \bar{v}$. Reescrevemos (1.10) e (1.11) como

$$\langle v, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt, \quad \|v\|_{Y'} = \left(\int_a^b \|v(t)\|_{X'}^q dt \right)^{1/q}, \quad \forall u \in Y, \forall v \in Y'.$$

Proposição 1.8.2 *Sejam V espaço de Hilbert e $g \in L^p(0, T; V')$ com $1 \leq p < \infty$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $g = 0$ em $L^p(0, T; V')$
- (ii) $\forall v \in V, \langle g(t), v \rangle = 0, q.s. t \in [0, T]$.

1.9 O espaço $W(a, b; V, V')$

Consideramos dois espaços de Hilbert reais separáveis V e H , com $V \subset H$ e V denso em H . Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle_H, \langle \cdot, \cdot \rangle_V, \|\cdot\|_H, \|\cdot\|_V$ denotando o produto interno e a norma em H e V , respectivamente. Também, H' e V' denotam os duais desses espaços, J a aplicação identidade (linear e contínua) de V em H . Por resultados de Análise Funcional, o operador adjunto J^* é linear e contínuo de H' em V' . Além disso, J^* é injetor, visto que $J(V) = V$ é denso em H e $J^*(H')$ é denso em V' , pois J é injetor. Portanto, H' pode ser identificado como um subespaço denso em V' . Por outro lado, pelo Teorema de Representação de Riesz, podemos identificar H com o seu dual H' , obtendo as seguintes imersões densas e contínuas:

$$V \subset H \equiv H' \subset V'. \quad (1.12)$$

Como consequência desta identificação, o produto escalar em H de $f \in H, u \in V$ é o mesmo que o produto interno de f e u na dualidade entre V e V' , ou seja,

$$f(u) = \langle f, u \rangle = \langle f, u \rangle_H, \quad \forall f \in H, \forall u \in V.$$

Introduzimos o espaço $W(a, b; V, V')$ para dar sentido ao problema de valor inicial a

equação

$$\frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ em } (0, T),$$

onde $A \in \mathcal{L}(V, V')$, sendo válidas as imersões (1.12). Para Au ter significado, é razoável que u assumira valores em V , isto é, $u \in L^p(0, T; V)$, $1 \leq p \leq \infty$. Então, $\frac{\partial u}{\partial t} = -Au \in L^p(0, T; V')$. Se, além disso, queremos resgatar a estrutura de espaço de Hilbert, devemos escolher $p = 2$ e então surge $W(a, b; V, V')$. Assim, temos a estrutura de um espaço de Hilbert com significado para a expressão " $u = u_0$ em $t = 0$ " (com uma aplicação contínua $u \rightarrow u(0) \in H$).

Definição 1.9.1 *Sejam $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

$$W(a, b; V, V') = \{u \in L^2(a, b; V) : u' \in L^2(a, b; V')\} \quad (1.13)$$

Notemos que a derivada com relação a t é no sentido das distribuições.

Proposição 1.9.2 *O espaço $W(a, b; V, V')$ equipado com a norma*

$$\|u\|_W = \left(\|u\|_{L^2(a, b; V)}^2 + \|u'\|_{L^2(a, b; V')}^2 \right)^{1/2} = \left(\int_a^b [\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2] dt \right)^{1/2}$$

é um espaço de Hilbert.

O próximo teorema será muito importante na formulação fraca das equações parabólicas, quando derivamos com relação ao tempo sob o sinal da integral. Para auxiliar na demonstração deste teorema, necessitaremos dos dois lemas seguintes.

Lema 1.9.3 *Para $a, b \in \mathbb{R}$ finitos ou não, seja $\mathcal{D}((a, b); V)$ o espaço das restrições em $[a, b]$ de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}; V)$. Então, $\mathcal{D}((a, b); V)$ é denso em $W(a, b; V, V')$.*

Demonstração. Será feita em três etapas.

Primeira etapa. Restringiremos ao caso em que a ou b é infinito.

Primeiro, se $[a, b] \subset \mathbb{R}$, introduzimos $\theta_i \in \mathcal{D}([a, b])$, $i = 1, 2$, com $\theta_1(t) + \theta_2(t) = 1$, $\forall t \in [a, b]$, e θ_1 nula em uma vizinhança de b e θ_2 nula em uma vizinhança de a . Então, $\forall u \in W(a, b; V, V')$, temos $u = \theta_1 u + \theta_2 u$. Introduzimos

$$u_1 = \begin{cases} \theta_1 u, & t \in [a, b] \\ 0, & t > b \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} \theta_2 u, & t \in [a, b] \\ 0, & t < a \end{cases}$$

e obtemos que $u_1 \in W(a, +\infty; V, V')$ e $u_2 \in W(-\infty, b; V, V')$.

Segunda etapa. Restringiremos ao caso em que $a = -\infty$ e $b = +\infty$.

Seja $u \in W(a, +\infty; V, V')$ e $h > 0$, definimos $u_h(t) = u(t + h)$ q.s. para $t \geq a$. Então, segue

que $u'_h(t) = u'(t+h)$ q.s. para $t \geq a$ e $u_h \in W(a, +\infty; V, V')$. Além disso, pela continuidade das translações em L^2 ([12], pág. 303),

$$\begin{aligned} u_h &\longrightarrow u \text{ em } L^2(a, +\infty; V) \text{ quando } h \longrightarrow 0 \\ u'_h &\longrightarrow u' \text{ em } L^2(a, +\infty; V') \text{ quando } h \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u_h \longrightarrow u \text{ em } W(a, +\infty; V, V') \text{ quando } h \longrightarrow 0.$$

Seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \psi(t) \leq 1$; $\psi(t) = 1$, se $t \geq a - \frac{h}{2}$ e $\psi(t) = 0$, se $t \leq a - h$. Fazendo,

$$v_h(t) = \begin{cases} \psi(t) u_h(t) & \text{se } t \geq a - h \\ 0, & \text{se } t \leq a - h, \end{cases}$$

temos que $v_h = u_h$ q.s. $t \geq a$ e $v_h \in W(-\infty, +\infty; V, V')$.

Terceira etapa. Mostraremos que $\mathcal{D}(\mathbb{R}; V)$ é denso em $W(-\infty, +\infty; V, V')$.

Seja $u \in W(-\infty, +\infty; V, V')$. Iniciaremos regularizando u , isto é, aproximaremos u por $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}; V)$. Para isso, seja $J \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $J \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} J(t) dt = 1$. Definimos, para cada $\varepsilon > 0$, $J_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} J\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ e $u_\varepsilon(t) = J_\varepsilon * u(t) = \int_{\mathbb{R}} J_\varepsilon(t - \sigma) u(\sigma) d\sigma$. Pela proposição 1.7.6, $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}; V)$ e quando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\longrightarrow u \text{ em } L^2(\mathbb{R}; V) \\ u'_\varepsilon = u' * J_\varepsilon &\longrightarrow u' \text{ em } L^2(\mathbb{R}; V'). \end{aligned}$$

Agora, é suficiente aproximar u_ε por elementos de $\mathcal{D}(\mathbb{R}; V)$. Para tanto, usaremos um processo de truncamento. Seja $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\rho(t) = 1$ para $|t| \leq 1$ e $\rho(t) = 0$ para $|t| \geq 2$. Definimos $\rho_n(t) = \rho(t/n)$ e obtemos que

$$\rho_n u_\varepsilon \longrightarrow u_\varepsilon \text{ em } W(-\infty, +\infty; V, V'),$$

quando $n \rightarrow \infty$. \square

Lema 1.9.4 Para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, existe um operador de extensão contínuo de $W(a, b; V, V')$ em $W(-\infty, +\infty; V, V')$.

Demonstração. Procederemos em duas etapas.

Primeira etapa. Restringiremos ao caso em que $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com a ou b infinito.

Para isto, usamos o mesmo método da primeira etapa do lema 1.9.3. Assim, o operador de extensão é dado por

$$Pu(t) = \begin{cases} u_1, & t < a \\ u, & a \leq t \leq b \\ u_2, & t > b \end{cases}$$

Segunda etapa. Supomos, por exemplo, que $b = +\infty$.

Pela translação sobre a variável h , podemos reduzir ao espaço $W(0, +\infty; V, V')$. Seja $u \in \mathcal{D}([0, +\infty); V)$. Definimos

$$Pu(t) = \begin{cases} u(t) & t \geq 0, \\ u(-t) & t < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Então, $Pu \in L^2(0, +\infty; V)$ e

$$(Pu(t))' = \begin{cases} u'(t), & t > 0 \\ -u'(-t), & t < 0. \end{cases}$$

Como $Pu(t)$ é contínuo (pois $u \in \mathcal{D}([0, \infty); V)$) em $t = 0$, segue que $Pu \in W(-\infty, +\infty; V, V')$ e $\|Pu\|_{W(-\infty, +\infty; V, V')} \leq 2\|u\|_{W(0, +\infty; V, V')}$. Do lema 1.9.3, $\mathcal{D}([0, +\infty); V)$ é denso em $W(0, +\infty; V, V')$. Assim, P pode ser prolongado a uma aplicação linear contínua \tilde{P} de $W(0, +\infty; V, V')$ em $W(-\infty, +\infty; V, V')$. Como $\tilde{P}u = Pu$ q.s. (Pu dado por (1.14)), temos que $Pu = u$ q.s. para $t \in (0, +\infty)$ e a prova do lema está completa. \square

Teorema 1.9.5 *Para $a, b \in \mathbb{R}$, $u \in W(a, b; V, V')$ é quase sempre igual a uma função contínua de $[a, b]$ em H . Além disso, $W(a, b; V, V')$ está imerso continuamente em $C^o([a, b]; H)$.*

Demonstração. Seja $u \in W(a, b; V, V')$ e P o operador de extensão de $W(a, b; V, V')$ em $W(-\infty, +\infty; V, V')$. Do lema 1.9.3, existe uma sequência $\{\psi_n\}$, $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}; V)$ satisfazendo

$$Pu = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \text{ em } W(-\infty, +\infty; V, V').$$

Além disso, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotando a dualidade entre V e V' , temos:

$$\begin{aligned} |\psi_n(t)|^2 &= \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\sigma} |\psi_n(\sigma)|^2 d\sigma = \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\sigma} \langle \psi_n(\sigma), \psi_n(\sigma) \rangle_V d\sigma \\ &= 2 \int_{-\infty}^t \langle \psi_n(\sigma), \psi_n'(\sigma) \rangle_V d\sigma = 2 \int_{-\infty}^t \langle \psi_n(\sigma), \psi_n'(\sigma) \rangle d\sigma \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^t \|\psi_n(\sigma)\|_V \cdot \|\psi_n'(\sigma)\|_{V'} d\sigma. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, segue

$$|\psi_n(t)|^2 \leq \int_{-\infty}^t \|\psi_n(\sigma)\|_V^2 d\sigma + \int_{-\infty}^t \|\psi_n'(\sigma)\|_{V'}^2 d\sigma.$$

Logo,

$$\sup_t \|\psi_n(t)\| \leq \|\psi_n\|_W. \quad (1.15)$$

Agora, trocando ψ_n por $(\psi_n - \psi_m)$ em (1.15) e usando o fato que $\{\psi_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $W(-\infty, +\infty; V, V')$, deduzimos que $\{\psi_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $B^o(\mathbb{R}; V)$, o espaço das funções contínuas limitadas de \mathbb{R} em V , munido com a topologia da convergência uniforme. Então, existe $v \in B^o(\mathbb{R}; V)$ tal que

$$\psi_n \longrightarrow v \text{ em } B^o(\mathbb{R}; V).$$

Mas, $\psi_n \longrightarrow Pu$ em $W(-\infty, +\infty; V, V')$. Logo, $Pu = v$ q.s. e $u = v$ q.s. em $[a, b]$. Agora, passando limite em (1.15), obtemos

$$\|u\|_{C^o([a,b]; V)} \leq C\|u\|_W,$$

pois, como P é um operador linear limitado, $\|Pu\|_W \leq C\|u\|_W$. \square

Observação 1.9.1 Como consequência do teorema acima, para $u \in W(a, b; V, V')$ com $[a, b] \subset \mathbb{R}$, podemos falar no traço $u(a), u(b) \in H$.

Teorema 1.9.6 (Integração por partes) *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $u, v \in W(a, b; V, V')$. Então,*

$$\int_a^b \langle u'(t), v(t) \rangle dt + \int_a^b \langle v'(t), u(t) \rangle dt = \langle u(b), v(b) \rangle_H - \langle u(a), v(a) \rangle_H. \quad (1.16)$$

Demonstração. Da observação acima, a igualdade (1.16) faz sentido. Como (1.16) é válida para $u, v \in \mathcal{D}([a, b]; V)$, ela permanece válida para $u, v \in W(a, b; V, V')$ em virtude do lema 1.9.3 e do teorema 1.9.5. \square

Corolário 1.9.7 Para $u \in W(a, b; V, V')$, $v \in V$ temos

$$\langle u'(\cdot), v \rangle = \frac{d}{dt} (u(\cdot), v) \quad \text{em } \mathcal{D}'((a, b)). \quad (1.17)$$

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{D}((a, b))$. Escolhemos $u \in W(a, b; V, V')$ da forma $\varphi \otimes v$, $v \in V$ (ie, $u(t) = \varphi(t)v$) em (1.16). Como $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, obtemos

$$\int_a^b \langle u'(t), v \varphi(t) \rangle dt + \int_a^b \langle \varphi'(t)v, u(t) \rangle dt = 0.$$

Como $\forall t \in (a, b)$, $\varphi(t)$ é um escalar, temos novamente

$$\int_a^b \langle u'(t), v \rangle \varphi(t) dt = - \int_a^b \langle v, u(t) \rangle \varphi'(t) dt.$$

Agora, observamos que $u(t), v \in V \subset H$ e que a dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é compatível com a identificação de H com o seu dual (o que implica que se $f \in H$ e $v \in V$ temos $\langle f, v \rangle = (f, v) = (v, f)$). Então, $\forall \varphi \in \mathcal{D}((a, b))$,

$$\int_a^b \langle u'(t), v \rangle \varphi(t) dt = - \int_a^b (u(t), v) \varphi'(t) dt,$$

ou seja, $\frac{d}{dt} (u(t), v) = \langle u'(t), v \rangle$ em $\mathcal{D}'((a, b))$. \square

1.10 Algumas desigualdades

Seja $z = x + iy$, então $|1 - i \cot z| \leq \coth y - 1$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b \geq 0$. Temos a **desigualdade da raiz**

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Para $a, b \in \mathbb{R}$, a **desigualdade algébrica** é dada por

$$2 \cdot a \cdot b \leq a^2 + b^2.$$

Seja $\varepsilon > 0$, a **ε -desigualdade** é dada por

$$a \cdot b \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{b^2}{2\varepsilon}.$$

Sejam $u, v \in H$, H espaço de Hilbert, temos a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Os dois lemas de Gronwall abaixo serão muito utilizados na análise da estabilidade e convergência dos métodos espectrais. Podemos encontrar a demonstração de ambos, por exemplo, em [22].

Lema 1.10.1 (Gronwall) *Seja $f \in L^1(t_o, T)$ uma função não-negativa, g e φ funções contínuas sobre $[t_o, T]$. Se φ satisfaz*

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_{t_o}^t f(\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [t_o, T],$$

então

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_{t_o}^t f(s) g(s) \exp\left(\int_s^t f(\tau) d\tau\right) ds, \quad \forall t \in [t_o, T].$$

Se, além disso, g é não-decrescente, então

$$\varphi(t) \leq g(t) \exp\left(\int_{t_o}^t f(\tau) d\tau\right), \quad \forall t \in [t_o, T].$$

Demonstração. Seja $R(t) = \int_{t_o}^t f(\tau) \varphi(\tau) d\tau$. Então, por hipótese,

$$\frac{dR}{dt}(t) = f(t) \varphi(t) \leq f(t) [g(t) + R(t)].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[R(t) \exp\left(-\int_{t_o}^t f(\tau) d\tau\right) \right] &= \left[\frac{dR}{dt}(t) - R(t) f(t) \right] \exp\left(-\int_{t_o}^t f(\tau) d\tau\right) \\ &\leq f(t) g(t) \exp\left(-\int_{t_o}^t f(\tau) d\tau\right). \end{aligned}$$

Integrando de t_o até t , temos que

$$R(t) \exp\left(-\int_{t_o}^t f(\tau) d\tau\right) \leq \int_{t_o}^t f(s) g(s) \exp\left(-\int_{t_o}^s f(\tau) d\tau\right) ds.$$

Então,

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(s)g(s) \exp\left(\int_s^t f(\tau)d\tau\right) ds, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Se g é não-decrescente,

$$\varphi(t) \leq g(t) \left[1 + \int_{t_0}^t f(s) \exp\left(\int_s^t f(\tau)d\tau\right) ds\right] = g(t) \left[1 + \int_{t_0}^t \left(-\frac{d}{ds} \exp\left(\int_s^t f(\tau)d\tau\right)\right) ds\right].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq g(t) \left\{1 - \left[\exp\left(\int_s^t f(\tau)d\tau\right)\right]_{s=t_0}^{s=t}\right\} = g(t) \left[1 - 1 + \exp\left(\int_s^t f(\tau)d\tau\right)\right] \\ &= g(t) \exp\left(\int_s^t f(\tau)d\tau\right). \quad \square \end{aligned}$$

Segue do lema acima a seguinte versão do lema de Gronwall.

Lema 1.10.2 (Gronwall) *Seja $\varphi \in C[0, t^*]$ e diferenciável em $(0, t^*)$. Se existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e g função contínua tal que, para $0 \leq t \leq t^*$, φ satisfaz $\varphi'(t) \leq \alpha \varphi(t) + g(t)$, então*

$$\varphi(t) \leq e^{\alpha t} \varphi(0) + \int_0^t g(s) e^{\alpha(t-s)} ds.$$

Lema 1.10.3 (Gronwall discreto) *Sejam $\{k_n\}$ uma seqüência de termos não-negativos, $g_0 \in \mathbb{R}$, $p_s \in \mathbb{R}$ e $\{\phi_n\}$ uma seqüência de números reais satisfazendo*

$$\begin{aligned} \phi_0 &\leq g_0 \\ \phi_n &\leq g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} k_s \phi_s, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Então, ϕ_n satisfaz

$$\begin{aligned} \phi_1 &\leq g_0(1 + k_0) + p_0 \\ \phi_n &\leq g_0 \prod_{s=0}^{n-1} (1 + k_s) + \sum_{s=0}^{n-2} p_s \prod_{\tau=s+1}^{n-1} (1 + k_\tau) + p_{n-1}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Além disso, se $g_0 \geq 0$ e $p_n \geq 0$ para $n \geq 0$, segue que

$$\phi_n \leq \left(g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s\right) \exp\left(\sum_{s=0}^{n-1} k_s\right), \quad n \geq 1.$$

Capítulo 2

O método Fourier Espectral

Neste capítulo, introduziremos uma classe de "funções generalizadas" periódicas, que apresentem derivadas num sentido mais amplo que a derivada clássica. Tais funções serão chamadas de distribuições periódicas. Através destas funções, definiremos os espaços de Sobolev periódicos. Estes espaços são importantes para a teoria de aproximação dos métodos Fourier-Espectrais. Tais métodos são empregados na resolução aproximada de equações diferenciais com dados e condições de fronteira periódicos.

Para apresentar a teoria de aproximação Fourier-Espectral, definimos inicialmente o operador de projeção, $P_N : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow S_N = \text{span}\{e^{inx}; |n| \leq N\}$, que é caracterizado pela série de Fourier da função truncada até o N -ésimo termo. Os coeficientes de Fourier são obtidos através da transformada de Fourier contínua. Em seguida, definimos o operador de interpolação, $I_N : C[-\pi, \pi] \rightarrow S_N$, caracterizado pelo fato que $I_N u$ coincide com a função u em pontos igualmente espaçados. Neste caso, os coeficientes de Fourier são obtidos através da transformada discreta de Fourier.

Além disso, apresentaremos estimativas para os erros de projeção e erros de interpolação entre a função e seu aproximante em determinada norma de um espaço de Sobolev periódico. Os resultados mostrarão uma característica marcante dos métodos espectrais: as estimativas para o erro dependerão unicamente da regularidade da função a ser aproximada. Caso esta função seja infinitamente diferenciável, o erro decai a zero mais rapidamente que qualquer potência de $\frac{1}{N}$, em que N é o número de termos na expansão. Essa convergência é denominada convergência espectral, termo cunhado por Orszag (1969). Ademais, veremos que tais estimativas serão importantes na obtenção de resultados nos capítulos subsequentes

Trabalharemos no caso unidimensional, pois os resultados para dimensões maiores são análogos, [5].

2.1 Distribuições periódicas

Esta seção é dedicada às distribuições periódicas e sua relação com as séries de Fourier. Em geral, uma distribuição é um funcional linear contínuo sobre certos espaços de funções suaves.

Definição 2.1.1 $C_{per}^{\infty}[-\pi, \pi]$ é o espaço das funções 2π -periódicas contínuas que possuem todas as suas derivadas contínuas e 2π -periódicas.

Observação 2.1.1 O espaço $C_{per}^{\infty}[-\pi, \pi]$ tem **coeficientes de Fourier** com decaimento rápido, isto é, se $u \in C_{per}^{\infty}[-\pi, \pi]$, então $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, existe c_{α} constante positiva tal que

$$|\hat{u}_n| \leq \frac{c_{\alpha}}{|n|^{\alpha}},$$

em que \hat{u}_n são os coeficientes de Fourier de u . Em outras palavras, se $u \in C_{per}^{\infty}[-\pi, \pi]$, $\forall \beta \in \mathbb{N}$, $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\hat{u}_n| \cdot |n|^{\beta} = 0$, pois podemos escolher $\alpha = \beta + 1$ na desigualdade anterior.

É necessário introduzirmos uma topologia adequada em $C_{per}^{\infty}[-\pi, \pi]$, que considere a proximidade entre a função e todas as suas derivadas. Desta forma, dizemos que a seqüência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_{per}^{\infty}[-\pi, \pi]$ converge a u no sentido de $C_{per}^{\infty}[-\pi, \pi]$, se u_n e cada derivada de u_n converge uniformemente à u e a cada derivada de u correspondente. Assim, o espaço $C_{per}^{\infty}[-\pi, \pi]$ munido com a esta topologia é denotado por $D_{per}[-\pi, \pi]$.

Observamos que o espaço D_{per} não é completo com relação à norma $\|f\|_{\infty, k} = \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_{\infty}$, $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aliás, podemos mostrar que não existe uma norma em relação a qual D_{per} é um espaço de Banach. Ademais, não existe uma forma de escolher uma norma sobre D_{per} de modo que a convergência através desta norma seja equivalente à convergência definida no sentido de D_{per} (maiores detalhes em [2] ou [29]). Entretanto, existe uma distância natural em relação a qual D_{per} é completo.

Definição 2.1.2 Uma seqüência de funções $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma **seqüência de Cauchy** no sentido de D_{per} , se para cada $k = 0, 1, 2, \dots$, $\{D^k u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $(C_{per}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_{\infty})$, isto é,

$$\|D^k u_n - D^k u_m\|_{\infty} \longrightarrow 0,$$

quando $m, n \longrightarrow \infty$ para cada k , em que $D^0 u = u$.

Proposição 2.1.3 Se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy no sentido de D_{per} , então ela converge a uma função $u \in D_{per}$.

Introduzindo a métrica d' sobre D_{per} , definida por

$$d'(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|D^k u - D^k v\|_{\infty}}{1 + \|D^k u - D^k v\|_{\infty}}$$

obtemos que

Teorema 2.1.4 *Uma seqüência de funções $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy no sentido de D_{per} se e, somente se, for uma seqüência de Cauchy no sentido da métrica d' . (D_{per}, d') é um espaço métrico completo.*

Definição 2.1.5 *Uma **distribuição periódica** é um funcional linear e contínuo sob o espaço $D_{per}^{\infty}[-\pi, \pi]$, ou seja,*

$$(i) T(\alpha u) = \alpha T(u) \text{ e } T(u + v) = T(u) + T(v).$$

$$(ii) \text{ Se } u_n \longrightarrow u \text{ no sentido de } D_{per}[-\pi, \pi], \text{ então } T(u_n) \longrightarrow T(u).$$

Além disso, o espaço dual de $D_{per}[-\pi, \pi]$, denotado por $D'_{per}[-\pi, \pi]$, é o espaço formado por todas as distribuições 2π -periódicas.

Definição 2.1.6 *Se $f \in D'_{per}[-\pi, \pi]$, definimos os **coeficientes de Fourier** $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por*

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \langle f, e^{inx} \rangle_{(D'_{per}, D_{per})}.$$

Definição 2.1.7 *As derivadas de $f \in D'_{per}[-\pi, \pi]$ são definidas por*

$$f^{(\alpha)}(\phi) = (-1)^{\alpha} f(\phi^{(\alpha)}), \quad \forall \phi \in D_{per}.$$

Observamos que $g = f^{(\alpha)}$ pertence a D'_{per} e os coeficientes de Fourier de g são dados por $\hat{g}_n = (in)^{\alpha} \hat{f}_n$.

Definição 2.1.8 $L^2[-\pi, \pi]$ *é a coleção das distribuições $f \in D'_{per}$, que são limites no sentido de D'_{per} , de seqüências $\{\varphi_n\} \subset D_{per}$ de Cauchy com relação à norma L^2 . Nesse caso, dizemos que $\{\varphi_n\}_n$ converge a f no sentido de $L^2[-\pi, \pi]$ e escrevemos $\varphi_n \xrightarrow{L^2} f$.*

Em outras palavras, a definição acima pode ser escrita como $L^2[-\pi, \pi] = \{f \in D'_{per}; \exists \varphi_n \subset D_{per} \text{ Cauchy com relação a norma } \|\cdot\|_2 \text{ tal que } \varphi_n \xrightarrow{D'_{per}} f\}$. Observamos que a definição do $L^2[-\pi, \pi]$ acima é equivalente a definição feita na seção 1.3.

Agora, apresentaremos a convergência em D'_{per} da série de Fourier para $f: \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{inx}$.

Proposição 2.1.9 *A série de Fourier para δ converge em $D'_{per}[-\pi, \pi]$.*

Demonstração. Temos que $\delta(\phi) = \overline{\phi(0)}$, $\forall \phi \in D_{per}$. Logo, $\hat{\delta}_n = \frac{1}{2\pi}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Então, a série de Fourier truncada $P_N\delta = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} e^{inx}$. Mostraremos que $P_N\delta \rightarrow \delta$ em D'_{per} quando $N \rightarrow \infty$. De fato, seja $\phi \in D_{per}$, através do eorema de representação de Riesz 1.1.1,

$$\begin{aligned} P_N\delta(\phi) &= \langle P_N\delta, \phi \rangle_{D'_{per}, D_{per}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} e^{inx} \overline{\phi(x)} dx = \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} e^{inx}, \phi \right)_{L^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} (e^{inx}, \phi)_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \leq N} \widehat{\phi}_n = \overline{P_N\phi(0)}. \end{aligned}$$

Como $P_N\phi$ converge uniformemente para ϕ , segue que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N\delta(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{P_N\phi(0)} = \overline{\phi(0)} = \delta(\phi),$$

ou seja, obtemos a convergência em D'_{per} . \square

Teorema 2.1.10 *A série de Fourier de uma distribuição $f \in D'_{per}$ converge para f em D'_{per} .*

Demonstração. Seja $f_N = P_N f = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikx}$ pertencente a D_{per} . Então, $\hat{f}_N(k) = \hat{f}_k$, se $|k| \leq N$; $\hat{f}_N(k) = 0$, se $|k| > N$. Como $f_N \in L^2[-\pi, \pi]$, pelo teorema da representação de Riesz, identidade de Parseval e definição dos coeficientes de Fourier de f , segue que, $\forall \phi \in D_{per}$,

$$\begin{aligned} f_N(\phi) &= (f_N, \phi)_{L^2} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_N(k) \overline{\hat{\phi}_k} = 2\pi \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k \overline{\hat{\phi}_k} = \sum_{k=-N}^N f(e^{ikx}) \overline{\hat{\phi}_k} \\ &= f \left(\sum_{k=-N}^N \hat{\phi}_k e^{ikx} \right) = f(P_N\phi). \end{aligned}$$

Como $P_N\phi \rightarrow \phi$ em D_{per} quando $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(P_N\phi) = f \left(\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(\phi) \right) = f(\phi),$$

para qualquer $\phi \in D_{per}$. \square

Observação 2.1.2 *Dado $\phi \in D_{per}$,*

$$f(\phi) = f \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_n e^{inx} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\hat{\phi}_n} f(e^{inx}) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \overline{\hat{\phi}_n}.$$

Isso mostra que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \overline{\hat{\phi}_n}$ converge $\forall \phi \in D_{per}$.

Lema 2.1.11 *Se $f \in D'_{per}$, então existem constantes $c > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que*

$$|f(\phi)| \leq c \sum_{n=0}^k \|\phi^{(n)}\|_{\infty}, \quad \forall \phi \in D_{per}.$$

Demonstração. Como $f : D_{per} \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear e contínuo, $f^{-1}(\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\})$ é um conjunto aberto em D_{per} contendo a origem. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\phi \in D_{per}$ e $d'(\phi, 0) < \varepsilon$ implicam que $|f(\phi)| < 1$. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\frac{1}{2^k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad \gamma \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixemos $\phi \in D_{per}$. O resultado é trivial se $\phi = 0$. Supomos $\phi \neq 0$ e definimos $\psi \in D_{per}$ por

$$\psi = \frac{\gamma \phi}{\sum_{n=0}^k \|\phi^{(n)}\|_{\infty}}.$$

Claro que $\forall j \in \{0, 1, \dots, k\}$, $\|\psi^{(j)}\|_{\infty} \leq \gamma$. Então,

$$d'(\psi, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|\psi^{(n)}\|_{\infty}}{1 + \|\psi^{(n)}\|_{\infty}} \leq \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^n} \|\psi^{(n)}\|_{\infty} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

o que implica $|f(\psi)| < 1$. Por outro lado,

$$f(\phi) = \left(\sum_{n=0}^k \|\phi^{(n)}\|_{\infty} \right) \frac{1}{\gamma} f(\psi),$$

e, desta forma, $|f(\phi)| \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{n=0}^k \|\phi^{(n)}\|_{\infty}$. \square

Agora, vamos caracterizar as distribuições periódicas através da transformada de Fourier.

Definição 2.1.12 *Uma seqüência complexa $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é dita de **crescimento lento**, se existem constantes $c > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $|\alpha_k| \leq c|k|^N$, $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Teorema 2.1.13 *Se $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é uma seqüência complexa de crescimento lento, então existe uma única $f \in D'_{per}$ tal que $\hat{f} = \alpha$. Reciprocamente, se $f \in D'_{per}$, então \hat{f} é de crescimento lento.*

2.2 Espaços de Sobolev Periódicos

Seja $I = [-\pi, \pi]$. Dado $u \in L^2(I)$, definimos

$$\|u\|_r = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} (1 + m^2)^r |\hat{u}_m|^2 \right)^{1/2},$$

em que \hat{u}_m são os coeficientes de Fourier de u .

Definição 2.2.1 $H_{per}^r(I) = \{u \in L^2(I); u^{(\alpha)} \in L^2(I), \alpha = 1, \dots, r\}$, em que as derivadas denotadas por $u^{(\alpha)}$ são consideradas no sentido das distribuições periódicas, isto é,

$$u^{(\alpha)}(\varphi) = (-1)^\alpha u(\varphi^{(\alpha)}), \quad \forall \varphi \in C_{per}^\infty(I).$$

Consideramos o espaço $H_{per}^r(I)$ munido com a seguinte norma

$$\| \|u\| \|_r = \left(\sum_{\alpha=0}^r \binom{r}{\alpha} \|u^{(\alpha)}\|^2 \right)^{1/2},$$

em que $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{L^2(I)}$.

Lema 2.2.2 C_{per}^∞ é denso em $H_{per}^r(I)$.

Demonstração. Seja $u \in H_{per}^r(I)$. Temos que $u_N = P_N u \xrightarrow{L^2} u$ quando $N \rightarrow \infty$. Mas,

$$(P_N u)^{(\alpha)} = \sum_{|n| \leq N} (in)^\alpha \hat{u}_n e^{inx} = P_N(u^{(\alpha)}),$$

Logo, $u_N^{(\alpha)} \xrightarrow{L^2} u^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, r$. Portanto, $\| \|u - u_N\| \|_r \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. \square

Definição 2.2.3 $H_o^r(I) = \{u \in L^2(I) : \|u\|_r < +\infty\}$, em que a norma $\| \cdot \|_r$ é a norma induzida pelo produto interno $\langle u, v \rangle_r = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (1 + m^2)^r \hat{u}_m \overline{\hat{v}_m}$.

Podemos provar que $(H_o^r(I), \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ é um espaço de Hilbert ([2] ou [29]) e que os espaços $H_o^r(I)$ e $H_{per}^r(I)$ são iguais, bem como a norma $\| \| \cdot \| \|_r$ é equivalente a $\| \cdot \|_r$.

2.3 Estimativas de erro para o operador de projeção

Seja

$$P_N : H_{per}^r(I) \rightarrow S_N = \text{ger} \{e^{inx}; |n| \leq N\}, \quad u \mapsto \sum_{|n| \leq N} \hat{u}_n e^{inx},$$

em que \hat{u}_n são os coeficientes de Fourier exatos de u

Teorema 2.3.1 *Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ com $0 \leq s \leq r$. Então,*

$$\|u - P_N u\|_s \leq (1 + N^2)^{\frac{s-r}{2}} \cdot \|u\|_r, \quad \forall u \in H_{per}^r(I). \quad (2.1)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|u - P_N u\|_s^2 &= \sum_{|m|>N} (1 + m^2)^s |\hat{u}_m|^2 = \sum_{|m|>N} (1 + m^2)^{s-r+r} |\hat{u}_m|^2 \\ &= \sum_{|m|>N} (1 + m^2)^{s-r} (1 + m^2)^r |\hat{u}_m|^2 \\ &\leq (1 + N^2)^{s-r} \sum_{|m|>N} (1 + m^2)^r |\hat{u}_m|^2 \leq (1 + N^2)^{s-r} \|u\|_r^2, \end{aligned}$$

ou seja, a estimativa (2.1). \square

Este resultado mostra que quanto mais regular for u , melhor é a aproximação de u por $P_N u$. Mais precisamente, se $u \in H_{per}^r(I)$, então o erro é $\mathcal{O}(N^{-r})$ na norma $L_{per}^2(I)$, $\mathcal{O}(N^{-(r-1)})$ na norma H_{per}^1 e assim sucessivamente.

Lema 2.3.2 (Desigualdade de Sobolev) *Existe uma constante C tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)}^2 \leq C \cdot \|u\|_0 \cdot \|u\|_1, \quad \forall u \in H_{per}^1(I).$$

Em particular, $H_{per}^1 \subset L^\infty(I)$ com imersão contínua.

Demonstração. Seja $u \in C_{per}^\infty(I)$. Sabemos que \hat{u}_o é a média de u sobre I . Pelo teorema do valor médio, existe $x_o \in I$ tal que $\hat{u}_o = u(x_o)$.

Seja $v(x) = u(x) - \hat{u}_o$. Assim, temos que $v \in C_{per}^\infty(I)$ e $v(x_o) = 0$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{1}{2} |v(x)|^2 = \int_{x_o}^x v(y) v'(y) dy \leq \left(\int_{x_o}^x |v(y)|^2 dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{x_o}^x |v'(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq \|v\|_o \cdot \|v'\|_o.$$

Assim, como, por Cauchy-Schwarz, $|\hat{u}_o| = \left| \int_I \frac{1}{2\pi} u(x) dx \right| \leq \|u\|_o$ e, pela desigualdade triangular, $\|v\|_o \leq \|u\|_o + \|\hat{u}_o\|_o \leq (1 + 2\pi)\|u\|_o$, segue que

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |\hat{u}_o| + |v(x)| \leq |\hat{u}_o| + \sqrt{2} \cdot \|v\|_o^{1/2} \cdot \|v'\|_o^{1/2} \\ &\leq \|u\|_o^{1/2} \cdot \|u\|_o^{1/2} + (1 + 2\pi)^{1/2} \cdot \sqrt{2} \cdot \|u\|_o^{1/2} \cdot \|u'\|_o^{1/2} \\ &\leq \|u\|_o^{1/2} \cdot \|u\|_1^{1/2} + (1 + 2\pi)^{1/2} \cdot \sqrt{2} \cdot \|u\|_o^{1/2} \cdot \|u\|_1^{1/2} \\ &\leq \left(1 + (1 + 2\pi)^{1/2} \sqrt{2} \right) \cdot \|u\|_o^{1/2} \cdot \|u\|_1^{1/2}. \end{aligned}$$

Então, $|u(x)|^2 \leq C\|u\|_0 \cdot \|u\|_1$, $\forall x \in I$. Logo, $\|u\|_{L^\infty(I)}^2 \leq C\|u\|_0 \cdot \|u\|_1$. Como C_{per}^∞ é denso em $H_{per}^1(I)$, lema 2.2.2, o resultado é válido para $u \in H_{per}^1(I)$. \square

Proposição 2.3.3 $\|u - P_N u\|_{L^\infty(I)} \leq C \cdot N^{\frac{1}{2}-r} \cdot \|u\|_r$, $\forall u \in H_{per}^r(I)$, $r \geq 1$.

Demonstração. Primeiro, notemos que u é uma função contínua, devido à imersão de Sobolev. Pelo lema 2.3.2 e pela desigualdade (2.1), temos

$$\begin{aligned} \|u - P_N u\|_{L^\infty(I)}^2 &\leq C_1 \|u - P_N u\|_0 \cdot \|u - P_N u\|_1 \leq C_1 (1 + N^2)^{-\frac{r}{2}} \|u\|_r \cdot (1 + N^2)^{\frac{1-r}{2}} \cdot \|u\|_r \\ &\leq C_1 (1 + N^2)^{\frac{1}{2}-r} \cdot \|u\|_r^2 \leq C_1 (2N^2)^{\frac{1}{2}-r} \cdot \|u\|_r^2 \leq C_1 2^{\frac{1}{2}-r} \cdot N^{(\frac{1}{2}-r)2} \cdot \|u\|_r^2. \end{aligned}$$

Portanto, fazemos $C^2 = C_1 2^{\frac{1}{2}-r}$ e obtemos a desigualdade. \square

2.4 Estimativas de erro para o operador de interpolação

Na prática, se $u \in C_{per}^o(I)$, não é possível calcular exatamente os coeficientes de Fourier (\hat{u}_n) de u . Portanto, geralmente não conhecemos $P_N u$, que é a melhor aproximação de u em S_N (para a norma de $L^2(I)$). Veremos, agora, que é fácil determinar uma função $v \in S_N$, denominada de **interpolante** de u , tal que $v = u$ em $2N + 1$ pontos $(x_j)_{|j| \leq N}$ definidos por $x_j = jh$, $|j| \leq N$, em que $h = \frac{2\pi}{2N+1}$.

Definição 2.4.1 A aplicação $I_N : C_{per}^o \rightarrow S_N$ que associa cada u ao seu interpolante $v \in S_N$, com relação aos pontos $x_j = jh$, $h = \frac{2\pi}{2N+1}$, $|j| \leq N$, $j \in \mathbb{Z}$, é denominado **Operador de Interpolação**.

Definição 2.4.2 Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ a forma sesquilinear sobre $C_{per}^o(I)$ definida por

$$\langle u, v \rangle_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{|j| \leq N} u(x_j) \overline{v(x_j)}.$$

Proposição 2.4.3 $\langle u - I_N u, w \rangle_N = 0$, $\forall w \in S_N$.

Demonstração. Dado $w \in S_N$,

$$\langle u - I_N u, w \rangle_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{|j| \leq N} (u(x_j) - I_N u(x_j)) \overline{w(x_j)} = 0. \quad \square$$

Proposição 2.4.4 $\langle u, v \rangle_N = \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in S_N$.

Demonstração. Seja $f \in S_{2N}$. Então,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2N+1} \sum_{|j| \leq N} f(x_j). \quad (2.2)$$

De fato, temos que

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{|j| \leq 2N} e^{ikx_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \text{ mod } (2N+1) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\frac{1}{2\pi} \int_I e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ se $k \neq 0$, segue que

$\frac{1}{2N+1} \sum_{|j| \leq 2N} e^{ikx_j} = \frac{1}{2\pi} \int_I e^{ikx} dx$. Além disso, uma vez que $f \in S_{2N}$, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{|k| \leq 2N} c_k e^{ikx}. \text{ Então,}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \sum c_k \int_I e^{ikx} dx = \sum c_k \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{|j| \leq 2N} e^{ikx_j} \right) \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{|j| \leq 2N} \left(\sum c_k e^{ikx_j} \right) = \frac{1}{2N+1} \sum_{|j| \leq 2N} f(x_j). \end{aligned}$$

Quando fazemos $f = u\bar{v}$ em (2.2), com $u, v \in S_N$, o resultado está provado. \square

Corolário 2.4.5 *Seja $u \in S_N$, então $I_N u = u$.*

Demonstração. Escolhendo $w = u - I_N u$ na proposição 2.4.3, o resultado segue da proposição 2.4.4. \square

A relação entre os coeficientes de Fourier de uma função e os coeficientes de Fourier do interpolante desta função é dada pelo seguinte lema.

Lema 2.4.6 *Seja $u \in C_{per}^o(I)$ com coeficientes de Fourier $(\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e \tilde{u}_n os coeficientes de Fourier do interpolante $I_N u$. Então, $\tilde{u}_n = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{u}_{n+lM}$, onde $M = 2N+1$.*

Observação 2.4.1 *A diferença $A_N v = I_N v - P_N v$, denominada erro de alcunha ou distorção, satisfaz o "teorema de Pitágoras" em $L^2[-\pi, \pi]$, isto é, o erro de alcunha é ortogonal ao erro de projeção ([6]),*

$$\|v - I_N v\|^2 = \|v - P_N v\|^2 + \|A_N v\|^2.$$

O erro de alcunha é caracterizado pela relação entre os coeficientes \hat{v}_n e \tilde{v}_n :

$$\tilde{v}_n = \hat{v}_n + \sum_{0 \neq m = -\infty}^{\infty} \hat{v}_{n+Mm},$$

ou seja, \tilde{v}_n difere de \hat{v}_n por uma soma de harmônicas distintas da enésima por múltiplos de M . Como $e^{inx_j} = e^{i(n+Mm)x_j}$, estes modos são indistinguíveis e as frequências destas harmônicas sobrepõe-se à enésima frequência. Estes erros são conhecidos por causarem instabilidade numérica em problemas não-lineares. Por outro lado, os erros de alcinha não são relevantes se os coeficientes de Fourier apresentam decaimento rápido a zero (isso ocorre se a função periódica é suave).

Teorema 2.4.7 *Seja $r > \frac{1}{2}$. Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u - I_N u\|_o \leq C \cdot N^{-r} \cdot \|u\|_r, \quad \forall u \in H_{per}^r(I). \quad (2.3)$$

Demonstração. Notemos primeiramente que, como $r > \frac{1}{2}$, u é uma função contínua pela imersão de Sobolev (teorema 1.5.8), assim faz sentido aplicar I_N em u . Agora, pelo corolário 2.4.5, temos que

$$\begin{aligned} u - I_N u &= u - P_N u + P_N u - I_N u = u - P_N u + I_N P_N u - I_N u \\ &= u - P_N u + I_N [(P_N - I)u]. \end{aligned}$$

Seja $v = (I - P_N)u$. Pela desigualdade (2.1),

$$\|u - I_N u\|_o \leq \|u - P_N u\|_o + \|I_N v\|_o \leq C_1 \cdot N^{-r} \cdot \|u\|_r + \|I_N v\|_o.$$

Assim, é suficiente mostrar que $\|I_N v\|_o \leq C_2 \cdot N^{-r} \cdot \|u\|_r$, para alguma constante C_2 . Pelo lema 2.4.6, temos $\tilde{a}_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{v}_{k+l \cdot M}$, com $M = 2N + 1$, em que \hat{v}_k são os coeficientes de Fourier de v

que satisfazem $\hat{v}_k = \begin{cases} 0, & \text{se } |k| \leq N, \\ \hat{u}_k, & \text{se } |k| > N. \end{cases}$

Seja $Y(k) = \{n \in \mathbb{Z} : n = k + l \cdot M, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Como \tilde{a}_k são os coeficientes de $I_N v \in S_N$, implica que $\tilde{a}_k = 0$ para $|k| > N$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que, para $|k| \leq N$,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= \sum_{n \in Y(k)} \hat{v}_n = \sum_{n \in Y(k)} \hat{v}_n (1+n^2)^{r/2} \cdot (1+n^2)^{-r/2} \\ &\leq \left(\sum_{n \in Y(k)} |\hat{v}_n|^2 (1+n^2)^r \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n \in Y(k)} (1+n^2)^{-r} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Mas,

$$\sum_{n \in Y(k)} (1 + n^2)^{-r} = N^{-2r} \sum_{n \in Y(k)} \left(\frac{1}{N^2} + \frac{n^2}{N^2} \right)^{-r} = N^{-2r} \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{b_l^r},$$

onde $b_l = \frac{1}{N^2} + \frac{(k + lM)^2}{N^2}$. Agora, como $k \geq -N$,

$$\begin{aligned} b_l &= \frac{1}{N^2} + \frac{(k + lM)^2}{N^2} \geq \frac{(k + lM)^2}{N^2} \geq \frac{(k + l(2N + 1))^2}{N^2} \geq \frac{(k + l \cdot 2N)^2}{N^2} \\ &\geq \frac{(-N + 2N \cdot l)^2}{N^2} \geq (2l - 1)^2 \geq l^2. \end{aligned}$$

Então, $\frac{1}{b_l^r} \leq \frac{1}{l^{2r}}$. Como $r > \frac{1}{2}$, segue que $\sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{b_l^r} \leq \sum_{l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{l^{2r}} < \infty$. Desta forma,

$\sum_{n \in Y(k)} (1 + n^2)^{-r} \leq CN^{-2r}$, onde C é uma constante que depende de r . Retornando à desigualdade (2.4), temos $|\tilde{a}_k|^2 \leq CN^{-2r} \sum_{n \in Y(k)} (1 + n^2)^r |\hat{v}_n|^2$. Pela identidade de Parseval e como

$v \in H_{per}^r(I)$,

$$\begin{aligned} \|I_N v\|_o^2 &= \sum_{|k| \leq N} |\tilde{a}_k|^2 \leq CN^{-2r} \sum_{|k| \leq N} \sum_{n \in Y(k)} (1 + n^2)^r |\hat{v}_n|^2 \leq CN^{-2r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{v}_n|^2 (1 + n^2)^r \\ &\leq CN^{-2r} \sum_{|n| > N} (1 + n^2)^r |\hat{u}_n|^2 \leq CN^{-2r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^r |\hat{u}_n|^2. \end{aligned}$$

Logo, $\|I_N v\|_o \leq C \cdot N^{-r} \|u\|_r$. \square

Proposição 2.4.8 (Desigualdade Inversa) Para $\sigma \leq s$, para qualquer $v \in S_N$,

$$\|v\|_s \leq (1 + N^2)^{\frac{s-\sigma}{2}} \|v\|_\sigma.$$

Demonstração. Dado $v \in S_N$,

$$\begin{aligned} \|v\|_s^2 &= \sum_{|m| \leq N} (1 + m^2)^s |\hat{v}_m|^2 = \sum_{|m| \leq N} (1 + m^2)^s (1 + m^2)^\sigma (1 + m^2)^{-\sigma} |\hat{v}_m|^2 \\ &= \sum_{|m| \leq N} (1 + m^2)^{s-\sigma} (1 + m^2)^\sigma |\hat{v}_m|^2 \leq \sum_{|m| \leq N} (1 + N^2)^{s-\sigma} (1 + m^2)^\sigma |\hat{v}_m|^2 \\ &= (1 + N^2)^{s-\sigma} \sum_{|m| \leq N} (1 + m^2)^\sigma |\hat{v}_m|^2 = (1 + N^2)^{s-\sigma} \|v\|_\sigma^2. \end{aligned}$$

Logo, $\|v\|_s \leq (1 + N^2)^{\frac{s-\sigma}{2}} \|v\|_\sigma$. \square

Teorema 2.4.9 *Seja $0 \leq s \leq r$, $r > \frac{1}{2}$. Dado $u \in H_{per}^r(I)$, existe constante $C > 0$ tal que*

$$\|u - I_N u\|_s \leq C(1 + N^2)^{\frac{s-r}{2}} \|u\|_r.$$

Demonstração. Pela desigualdade (2.1),

$$\|u - I_N u\|_s \leq \|u - P_N u\|_s + \|P_N u - I_N u\|_s \leq C(1 + N^2)^{\frac{s-r}{2}} \|u\|_r + \|I_N v\|_s.$$

Segue da proposição 2.4.8 com $\sigma = 0$, da demonstração do teorema 2.4.7, que

$$\begin{aligned} \|I_N v\|_s &\leq C(1 + N^2)^{s/2} \|I_N v\|_0 \leq C N^{-r} \|u\|_r (1 + N^2)^{s/2} \\ &\leq C(1 + N^2)^{s/2} (1 + N^2)^{-r/2} \|u\|_r \leq C(1 + N^2)^{\frac{s-r}{2}}, \end{aligned}$$

pois temos que $1 \cdot k^{2s} \leq 1 + k^{2s} \leq (1 + k^2)^s \leq 2^s \cdot k^{2s}$. \square

Se g é uma função analítica, 2π -periódica, obtemos uma cota superior $\mathcal{O}(e^{-Ns})$ para a norma do máximo do erro de interpolação, como mostramos no teorema a seguir.

Teorema 2.4.10 *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica 2π -periódica. Então, existe uma região $D = \mathbb{R} \times (-s, s) \subset \mathbb{C}$, com $s > 0$, tal que g pode ser estendida para uma função $G : D \rightarrow \mathbb{C}$ limitada, holomórfica e 2π -periódica. Além disso,*

$$\|I_N g - g\|_\infty \leq \frac{M \coth(s/2)}{\sinh(Ns)},$$

em que M é cota superior para $|G|$ sobre D .

Demonstração. Como g é analítica em cada $t \in \mathbb{R}$, a expansão em série de Taylor fornece uma extensão holomórfica de g em um certo disco aberto no plano complexo de raio $\rho(t) > 0$ e centro em t . A função estendida tem período 2π , pois os coeficientes da série de Taylor em t e $t + 2\pi$ coincidem para $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periódicas.

Os discos correspondentes aos pontos do intervalo $[0, 2\pi]$ formam uma cobertura aberta de $[0, 2\pi]$. Assim um número finito destes discos é suficiente para cobrir o intervalo todo. Então, obtemos uma extensão em uma faixa D de comprimento finito $2s$ contida na união do número finito de discos.

Sem perda de generalidade, assumimos que G é limitada sobre D (restringindo D , se necessário, caso $G \rightarrow \infty$, quando $z \rightarrow z_o \in \partial D$).

Sejam $t_j = \frac{j\pi}{n}$, $j = 0, \dots, 2n-1$. Dados g_0, \dots, g_{2n-1} , existe um único polinômio trigonométrico da forma

$$I_n g(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \cos(jt) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \sin(jt),$$

onde $I_n g(t_j) = g(t_j) = g_j$, $j = 0, \dots, 2n - 1$ e

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k, & \alpha_n &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k g_k \\ \alpha_j &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k \cos(jt_k) & \beta_j &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k \sin(jt_k), \quad j = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Afirmação 1: Para $0 < t < 2\pi$, com $I = \sqrt{-1}$,

$$1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} e^{Ijt} + e^{Int} = I(1 - e^{Int}) \cot\left(\frac{t}{2}\right).$$

De fato,

$$\sum_{j=1}^{n-1} e^{Ijt} = e^{It} \cdot \frac{e^{It(n-1)} - 1}{e^{It} - 1} = \frac{e^{nIt} - e^{It}}{e^{It} - 1}.$$

Então,

$$\begin{aligned}2 \sum_{j=1}^{n-1} e^{Ijt} + e^{Int} + 1 &= \frac{2(e^{nIt} - e^{It})}{e^{It} - 1} + e^{Int} + 1 = \frac{2(e^{Int} - e^{It}) + e^{It} + e^{I(n+1)t} - e^{Int} - 1}{e^{It} - 1} \\ &= \frac{e^{Int} - e^{It} + e^{I(n+1)t} - 1}{e^{It} - 1} = \frac{e^{Int}(e^{It} + 1) - (e^{It} + 1)}{e^{It} - 1} \\ &= \frac{(e^{Int} - 1) \cdot (e^{It} + 1)}{e^{It} - 1} = (e^{Int} - 1) \cdot \left(\frac{e^{It/2} + e^{-It/2}}{e^{It/2} - e^{-It/2}}\right) \\ &= (e^{Int} - 1) \cdot \frac{\cos(t/2) + I \sin(t/2) + \cos(t/2) - I \sin(t/2)}{\cos(t/2) + I \sin(t/2) - \cos(t/2) + I \sin(t/2)} \\ &= (e^{Int} - 1) \cdot \frac{\cos(t/2)}{I \sin(t/2)} = I(1 - e^{Int}) \cot(t/2).\end{aligned}$$

Afirmação 2: Para $0 \leq t \leq 2\pi$, $t \neq t_j$, $j = 0, \dots, 2n - 1$, temos

$$(I_n g)(t) = \frac{1}{2n} \sin(nt) \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k g(t_k) \cot\left(\frac{t - t_k}{2}\right).$$

Substituindo os coeficientes α_j e β_j na definição de $I_n g$,

$$\begin{aligned}
I_n g &= \alpha_o + \alpha_n \cos(nt) + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k \cos(jt_k) \cos(jt) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k \sin(jt_k) \sin(jt) \right] \\
&= \alpha_o + \alpha_n \cos(nt) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k \cos[j(t_k - t)] \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k g_k \cos(nt) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k \cos[j(t_k - t)] \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k \left(1 + (-1)^k \cos(nt) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos[j(t_k - t)] \right)
\end{aligned}$$

Agora, pela parte real da afirmação 1, $t_k = \frac{k\pi}{n}$

$$\begin{aligned}
1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos[j(t_k - t)] &= \sin[n(t_k - t)] \cot\left(\frac{t_k - t}{2}\right) - \cos[n(t_k - t)] \\
&= [\sin(nt_k) \cos(nt) - \sin(nt) \cos(nt_k)] \cot\left(\frac{t_k - t}{2}\right) \\
&\quad - [\cos(nt_k) \cos(nt) + \sin(nt_k) \sin(nt)] \\
&= \sin(nt)(-1)^k \cot\left(\frac{t - t_k}{2}\right) - (-1)^k \cos(nt).
\end{aligned}$$

Logo, $(I_n g)(t) = \frac{1}{2n} \sin(nt) \sum_{k=0}^{2n-1} g_k \left[(-1)^k \cot\left(\frac{t - t_k}{2}\right) \right]$.

Afirmação 3: A base Lagrangeana para a interpolação trigonométrica é dada por:

$$\begin{aligned}
L_j(t) &= \frac{1}{2n} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos[k(t - t_j)] + \cos[n(t - t_j)] \right\} \\
&= \frac{1}{2n} \sin[n(t - t_j)] \cot\left(\frac{t - t_j}{2}\right), \quad t \neq t_j, \quad j = 0, \dots, 2n - 1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

De fato, como $\sin[n(t - t_j)] = \sin(nt) \cos(nt_j) + \sin(nt_j) \cos(nt)$, pela afirmação 2, temos

$$(I_n g)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2n} \sin[n(t - t_k)] \cot\left(\frac{t - t_k}{2}\right) g(t_k).$$

Ainda, $L_j(t_j) = 1$ e $L_j(t_k) = 0$, se $k \neq j$.

Sejam $\sigma \in (0, s)$ e Γ a fronteira do retângulo $\left[\frac{\pi}{2n}, 2\pi + \frac{\pi}{2n}\right] \times [-\sigma, \sigma]$ orientado no sentido anti-horário.

Afirmação 4: Para $0 \leq t < 2\pi$, $t \neq t_j$, $j = 0, \dots, 2n - 1$, temos

$$\frac{1}{2\pi I} \oint_{\Gamma} \frac{\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right)}{\sin(n\tau)} G(\tau) d\tau = \frac{2g(t)}{\sin(nt)} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k g(t_k) \cot\left(\frac{t-t_k}{2}\right).$$

De fato, como o integrando f tem pólos simples em $\tau = t_k$, $k = 0, \dots, 2n - 1$ e em $\tau = t$ (zeros da cotangente), seu resíduo é $Res_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$. Logo, segue do Teorema do Resíduo 1.2.1 e depois aplicando a Regra de H'Lopital,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi I} \oint_{\Gamma} \frac{\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right)}{\sin(n\tau)} G(\tau) d\tau &= \sum_{k=0}^{2n-1} \lim_{z \rightarrow t_k} \left[\frac{(z - t_k) \cot\left(\frac{z-t}{2}\right)}{\sin(nz)} G(z) \right] + \lim_{z \rightarrow t} \frac{(z - t) \cot\left(\frac{z-t}{2}\right)}{\sin(nz)} G(z) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \lim_{z \rightarrow t_k} \left(\frac{\cot\left(\frac{t_k-t}{2}\right) G(t_k)}{n \cos(nz)} \right) + \frac{G(t)}{\sin(nt)} \lim_{z \rightarrow t} \left(\frac{2}{\sec^2\left(\frac{z-t}{2}\right)} \right) \\ &= \frac{2g(t)}{\sin(nt)} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cot\left(\frac{t-t_k}{2}\right) g(t_k), \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem do fato de G ser analítica. Agora, das afirmações 2 e 4, obtemos que

$$g(t) - (I_n g)(t) = \frac{\sin(nt)}{4\pi I} \oint_{\Gamma} \frac{\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right)}{\sin(n\tau)} G(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

pois esta identidade também é válida nos pontos $t = t_j$, $j = 0, \dots, 2n - 1$.

Afirmação 5:

$$g(t) - (I_n g)(t) = \frac{1}{2\pi} \sin(nt) \Re e \left\{ \int_{I\sigma}^{I\sigma+2\pi} \frac{I \cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right)}{\sin(n\tau)} G(\tau) d\tau, \right\}$$

com $0 < \sigma < s$.

Integrando, em $\Gamma_1 = \left[\frac{\pi}{2n}, 2\pi + \frac{\pi}{2n}\right] \times \{-\sigma\}$, $\Gamma_2 = \left\{2\pi + \frac{\pi}{2n}\right\} \times [-\sigma, \sigma]$,

$\Gamma_3 = \left[\frac{\pi}{2n}, 2\pi + \frac{\pi}{2n}\right] \times \{\sigma\}$ e $\Gamma_4 = \left\{\frac{\pi}{2n}\right\} \times [-\sigma, \sigma]$, pelo fato da cotangente ter período π e G

ser 2π -periódica, utilizando o Princípio da Reflexão de Schwarz 1.2.2, temos que

$$\begin{aligned}
g(t) - (I_n g)(t) &= \frac{1}{4\pi} \sin(nt) \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{(-I) \cot \left[\left(\frac{\pi}{2n} + r - \sigma I - t \right) / 2 \right]}{\sin \left[n \left(\frac{\pi}{2n} + r - I\sigma \right) \right]} \cdot G \left(\frac{\pi}{2n} + r - I\sigma \right) dr \right. \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \frac{(-I) \cot \left[\left(\frac{\pi}{2n} + r + \sigma I - t \right) / 2 \right]}{\sin \left[n \left(\frac{\pi}{2n} + r + I\sigma \right) \right]} \cdot G \left(\frac{\pi}{2n} + r + I\sigma \right) dr \\
&\quad + I \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{(-I) \cot \left[\left(2\pi + \frac{\pi}{2n} + Ir - t \right) / 2 \right]}{\sin \left[n \left(2\pi + \frac{\pi}{2n} + Ir \right) \right]} \cdot G \left(2\pi + \frac{\pi}{2n} + Ir \right) dr \\
&\quad \left. - I \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{(-I) \cot \left[\left(\frac{\pi}{2n} + Ir - t \right) / 2 \right]}{\sin \left[n \left(\frac{\pi}{2n} + Ir \right) \right]} \cdot G \left(\frac{\pi}{2n} + Ir \right) dr \right\} \\
&= \frac{\sin(nt)}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{I \cot \left[\left(\frac{\pi}{2n} + r + \sigma I - t \right) / 2 \right]}{\sin \left[n \left(\frac{\pi}{2n} + r + I\sigma \right) \right]} \cdot G \left(\frac{\pi}{2n} + r + I\sigma \right) dr \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi} \frac{I \cot \left[\left(\frac{\pi}{2n} + r + \sigma I - t \right) / 2 \right]}{\sin \left[n \left(\frac{\pi}{2n} + r + I\sigma \right) \right]} \cdot G \left(\frac{\pi}{2n} + r + I\sigma \right) dr \right\} \\
&= \frac{\sin(nt)}{4\pi} 2 \Re e \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{I \cot \left[\left(\frac{\pi}{2n} + r + \sigma I - t \right) / 2 \right]}{\sin \left[n \left(\frac{\pi}{2n} + r + I\sigma \right) \right]} \cdot G \left(\frac{\pi}{2n} + r + I\sigma \right) dr \right\}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = r + I\sigma$,

$$g(t) - (I_n g)(t) = \frac{\sin(nt)}{2\pi} \Re e \left\{ \int_{I\sigma}^{I\sigma+2\pi} \frac{I \cot \left[\left(\frac{\pi}{2n} + \tau - t \right) / 2 \right]}{\sin \left[n \left(\frac{\pi}{2n} + \tau \right) \right]} \cdot G \left(\frac{\pi}{2n} + \tau \right) d\tau \right\}$$

Novamente, agora fazendo $z = \frac{\pi}{2n} + \tau$, temos

$$\begin{aligned}
g(t) - (I_n g)(t) &= \frac{\sin(nt)}{2\pi} \Re e \left\{ \int_{\frac{\pi}{2n} + I\sigma}^{\frac{\pi}{2n} + I\sigma + 2\pi} \frac{I \cot \left[(z - t) / 2 \right]}{\sin(nz)} \cdot G(z) dz \right\} \\
&= \frac{\sin(nt)}{2\pi} \Re e \left\{ \int_{I\sigma}^{I\sigma+2\pi} \frac{I \cot \left[(z - t) / 2 \right]}{\sin(nz)} \cdot G(z) dz \right\},
\end{aligned}$$

em que a última igualdade ocorre devido ao período das funções acima.

Agora, se $z = x + Iy$ temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
|\sinh(y)| &\leq |\sin(z)| \leq |\cosh(y)| \\
|\sinh(y)| &\leq |\cos(z)| \leq |\cosh(y)|.
\end{aligned}$$

Destas, segue que $|\cot(z)| \leq |\coth(y)|$. Então,

$$|g(t) - (I_n g)(t)| \leq M \frac{|\coth(\sigma/2)|}{|\sinh(n\sigma)|}, \quad \forall \sigma \in (0, s),$$

sendo M a cota superior para $|G|$ sobre $D = \mathbb{R} \times [-s, s]$. Passando ao limite quando $\sigma \rightarrow s$, obtemos o resultado enunciado. \square

Teorema 2.4.11 (P.J. Davis (1959)) *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica 2π -periódica. Então, o erro*

$$R_T(g) = \int_0^{2\pi} g(t) dt - \frac{2\pi}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} g\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

para a regra trapezoidal pode ser estimado por

$$|R_T| \leq M(\coth(ns) - 1).$$

Demonstração. Sejam s e G como na prova do teorema anterior. Notamos que,

$$R_T(g) = \int_0^{2\pi} [g(t) - (I_n g)(t)] dt,$$

pois, como $I_n g(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \cos(jt) + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \sin(jt)$, temos

$$\int_0^{2\pi} I_n g = 2\pi\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^{2\pi} \cos(jt) dt + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \int_0^{2\pi} \sin(jt) dt = 2\pi\alpha_0 = \frac{2\pi}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} g_k.$$

Então, pelo Teorema (2.4.10),

$$\begin{aligned} R_T(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \operatorname{Re} \left\{ \int_{I\sigma}^{I\sigma+2\pi} \frac{I \cot[(\tau-t)/2]}{\sin(n\tau)} G(\tau) d\tau \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{I\sigma}^{I\sigma+2\pi} \frac{(-I)e^{In\tau}}{\sin(n\tau)} G(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{I\sigma}^{I\sigma+2\pi} [1 - I \cot(n\tau)] G(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

pois $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \cot[(\tau-t)/2] dt = -e^{In\tau}$, $\operatorname{Im} \tau > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Agora, pela desigualdade $|1 - I \cot(z)| \leq \coth(y) - 1$, fazendo $\sigma \rightarrow s$, segue que $|R_T g| \leq M(\coth(ns) - 1)$. \square

Capítulo 3

Aproximação polinomial: polinômios de Chebyshev

A resolução aproximada de equações diferenciais, em domínios limitados, com condições de fronteira não periódicas, através de métodos espectrais, geralmente envolve a escolha de expansões em polinômios de Chebyshev ou Legendre. Se empregarmos os métodos Fourier-espectrais para problemas não-periódicos, ocorre o conhecido fenômeno de Gibbs.

Neste capítulo, inicialmente definimos os polinômios de Chebyshev e apresentamos algumas de suas propriedades. Ressaltamos a fórmula de integração de Gauss e igualdade do produto interno contínuo e discreto, ambos sobre \mathbb{P}_{2N-1} , polinômios de grau menor ou igual a $2N - 1$ em cada variável.

Em seguida, consideramos as aproximações baseadas na expansão polinomial de Chebyshev. Faremos estimativas, nas normas dos espaços H_w^s , para o erro de projeção/interpolação, em que w é uma função peso positiva associada à construção de polinômios de Chebyshev via processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Na norma L_w^2 , tais estimativas serão provadas através do auxílio das estimativas de erro do operador de projeção/interpolação de Fourier (capítulo 2). Para normas de Sobolev de ordem maior, além do auxílio dos operadores de Fourier, é necessária a diferença de erro entre $P_N D_j$ e $D_j P_N$. Isso ocorre, pois no caso de Chebyshev, o operador de projeção não comuta com o operador de diferenciação ($P_N D_j \neq D_j P_N$).

Os resultados acima serão úteis na análise de estabilidade e convergência de soluções aproximadas de equações diferenciais via métodos Chebyshev-espectrais.

3.1 Introdução aos polinômios de Chebyshev

Seja $I = (-1, 1)$. Consideramos a função peso $\tilde{w}(\xi) = (1 - \xi^2)^{-1/2}$, $\tilde{w} \in L^1(I)$, $\tilde{w} > 0$ em I .

Definição 3.1.1 Os *polinômios de Chebyshev de primeira espécie* são dados por

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Observamos que, via indução matemática, T_k pode ser representado por um polinômio (em x) de grau k . Estes polinômios são ortogonais com relação ao seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle_{\tilde{w}} = \int_I f(x) \overline{g(x)} \tilde{w}(x) dx,$$

ou seja, $\langle T_n, T_m \rangle_{\tilde{w}} = \frac{\pi}{2} c_n \delta_{n,m}$, em que $c_0 = 2$, $c_n = 1$, $\forall n \geq 1$, e $\delta_{n,m}$ denota o delta de Kronecker. Além disso, o sistema ortonormal associado com a função \tilde{w} é dado por $\{\tilde{\phi}_k = \tau_k T_k\}_{k=0}^{\infty}$, com $\tau_0 = \pi^{-1/2}$, $\tau_k = (2/\pi)^{1/2}$, para $k \geq 1$.

A expansão em série de polinômios de Chebyshev de uma função $u \in L^2_{\tilde{w}}(I)$ é

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x), \quad \hat{u}_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_I u(x) T_k(x) \tilde{w}(x) dx.$$

Se definimos a função periódica par $u^*(\theta) = u(\cos(\theta))$, então $u^*(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k \cos(k\theta)$. Portanto, a série de Chebyshev para u corresponde a uma série de cossenos para u^* . Se u é infinitamente diferenciável sobre I , então $u^*(\theta)$ é infinitamente diferenciável e periódica sobre $[0, 2\pi]$, sendo todas as suas derivadas também periódicas sobre $[0, 2\pi]$. Através de um argumento de integração por partes, usado em séries de Fourier, podemos mostrar que os coeficientes da expansão em polinômios de Chebyshev de uma função infinitamente diferenciável decaem a zero a uma taxa mais rápida que a algébrica.

Agora, apresentaremos algumas das propriedades dos polinômios de Chebyshev.

Proposição 3.1.2 Os *polinômios de Chebyshev de primeira espécie* satisfazem:

- (i) $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$, $x \in (-1, 1)$, $n = 0, 1, \dots$
- (ii) $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- (iii) $|T_n(x)| \leq 1$, $-1 < x < 1$.
- (iv) $\|T_n\|_{o, \tilde{w}}^2 = c_k \frac{\pi}{2}$, em que $\|\cdot\|_{o, \tilde{w}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{w}}^{1/2}$.
- (v) $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, $n = 2, 3, \dots$, com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.
- (vi) $2T_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x)$, $n \geq 2$.
- (vii) $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$ são autofunções do seguinte problema de Sturm-Liouville singular:

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{1-x^2} \frac{dv}{dx} \right) + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} v = 0.$$

(viii) $T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \cdot (1-x^2)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-(1/2)}$, conhecida como a fórmula de Rodrigues.

Temos a seguinte fórmula de integração sobre I

$$\int_I \phi(x) \tilde{w}(x) dx \simeq \sum_{m=0}^N \phi(x_m) \tilde{w}_m, \quad x_o < x_1 < \dots < x_N,$$

e denotaremos por $f_{\tilde{w},N} = \{(x_m, \tilde{w}_m) | 0 \leq m \leq N\}$, em que os pontos de colocação de Chebyshev são da forma $x_m = \cos(\theta_m)$, $0 \leq m \leq N$, onde

$$\theta_m = \theta_o + m h \in \tilde{I} = (-\pi, \pi), \quad m = 0, \dots, M, \quad h = \frac{2\pi}{M+1}, \quad (3.1)$$

para um dado $\theta_o \in \tilde{I}$ e $M \in \mathbb{N}$.

Para o conjunto de fórmulas $\mathcal{F}_{\tilde{w},N} = \{f_{\tilde{w},N}^G, f_{\tilde{w},N}^{GR}, f_{\tilde{w},N}^{GL}\}$, temos :

- $f_{\tilde{w},N}^G$ é a fórmula de integração de Chebyshev-Gauss (G), $-1 < x_o < x_N < 1$; θ_m é definido por (3.1), com $\theta_o = -\frac{2N+1}{2N+2}\pi$, $M = 2N+1$ e $\tilde{w}_m = \frac{\pi}{N+1}$, $\forall m$.
- $f_{\tilde{w},N}^{GR}$ é a fórmula de integração de Chebyshev-Gauss-Radau (GR), $-1 = x_o < x_N < 1$; θ_m é definido por (3.1), com $\theta_o = -\pi$, $M = 2N$, $\tilde{w}_o = \frac{\pi}{2N+1}$, $\tilde{w}_m = \frac{2\pi}{2N+1}$ para $m \geq 1$.
- $f_{\tilde{w},N}^{GL}$ é a fórmula de integração de Chebyshev-Gauss-Lobatto (GL), $-1 = x_o < x_N = 1$. θ_m é dada por (3.1), com $\theta_o = -\pi$, $M = 2N-1$, $\tilde{w}_o = w_N = \frac{\pi}{2N}$, $\tilde{w}_m = \frac{\pi}{N}$ para $1 \leq m \leq N-1$

Cada $f_{\tilde{w},N}$ pertencente a $\mathcal{F}_{\tilde{w},N}$ satisfaz:

- (i) $x_m \in \tilde{I}$, $\tilde{w}_m > 0$ para $0 \leq m \leq N$.
- (ii) A fórmula de integração é exata se ϕ é um polinômio de grau menor ou igual a $2N-1$.

A fórmula de integração de Chebyshev-Gauss-Lobatto será utilizada nos capítulos 5 e 6, por isso daremos atenção especial à ela.

Definição 3.1.3 Para qualquer $f_{\tilde{w},N}$ associamos o pseudo-produto interno discreto sob $C^o(\tilde{I})$ dado por

$$\langle u, v \rangle_{N, \tilde{w}} = \sum_{m=0}^N u(x_m) v(x_m) \tilde{w}_m, \quad (3.2)$$

e, conseqüentemente, a pseudo-norma associada é dada por $\|\cdot\|_{N, \tilde{w}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{N, \tilde{w}}^{1/2}$.

Proposição 3.1.4 Para quaisquer ϕ, ψ tais que $\psi \cdot \phi \in \mathbb{P}_{2N-1}$, temos

$$\langle \phi, \psi \rangle_{N, \tilde{w}} = \langle \phi, \psi \rangle_{\tilde{w}}. \quad (3.3)$$

Proposição 3.1.5 *As normas $\|\cdot\|_{o,\tilde{w}}$ e $\|\cdot\|_{N,\tilde{w}}$, com peso de Chebyshev \tilde{w} , são equivalentes sobre \mathbb{P}_N , isto é, existem constantes positivas C_1 e C_2 , independentes de N , tais que*

$$C_1\|u\|_{o,\tilde{w}} \leq \|u\|_{N,\tilde{w}} \leq C_2\|u\|_{o,\tilde{w}}, \quad \forall u \in \mathbb{P}_N.$$

Demonstração. Faremos a prova relativa à quadratura de Chebyshev-Gauss-Lobatto. Mostremos que $\|u\|_{o,\tilde{w}} \leq \|u\|_{N,\tilde{w}} \leq 2\|u\|_{o,\tilde{w}}$.

Dado $u \in \mathbb{P}_N$, $u = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k T_k(x)$ e $\|u\|_{o,\tilde{w}}^2 = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^2 \|T_k\|_{o,\tilde{w}}^2 = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^2 c_k \frac{\pi}{2}$. Agora, via proposição 3.1.4,

$$\|u\|_{N,\tilde{w}}^2 = \left\langle \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k T_k(x), \sum_{j=0}^N \tilde{u}_j T_j(x) \right\rangle_{N,\tilde{w}} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{u}_k^2 \|T_k\|_{o,\tilde{w}}^2 + \tilde{u}_N^2 \langle T_N, T_N \rangle_{N,\tilde{w}}.$$

Definindo $\tilde{c}_k = 2$, se $k = 0$ ou $k = N$; $\tilde{c}_k = 1$, $1 \leq k \leq N - 1$, temos que

$$\langle T_N, T_N \rangle_{N,\tilde{w}} = \sum_{j=0}^N \cos^2(j\pi) \frac{\pi}{\tilde{c}_j N} = \frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{N} + \cdots + \frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{2N} = (N-1) \frac{\pi}{N} + \frac{2\pi}{2N} = \pi.$$

Assim,

$$\|u\|_{N,\tilde{w}}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{u}_k^2 c_k \frac{\pi}{2} + \tilde{u}_N^2 \pi \geq \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{u}_k^2 c_k \frac{\pi}{2} + \tilde{u}_N^2 \frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^2 c_k \frac{\pi}{2} = \|u\|_{o,\tilde{w}}^2.$$

Logo, $\|u\|_{o,\tilde{w}} \leq \|u\|_{N,\tilde{w}}$. Por outro lado,

$$4\|u\|_{o,\tilde{w}}^2 = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^2 2\pi c_k \geq \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^2 \pi \tilde{c}_k \geq \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^2 \frac{\pi}{2} \tilde{c}_k = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{u}_k^2 \frac{\pi}{2} c_k + \tilde{u}_N^2 \pi = \|u\|_{N,\tilde{w}}^2,$$

ou seja, $\|u\|_{N,\tilde{w}} \leq 2\|u\|_{o,\tilde{w}}$. \square

Observação 3.1.1 *Vimos que:*

(a) $\|T_k\|_{N,\tilde{w}}^2 = c_k \frac{\pi}{2}$, se $0 \leq k \leq N - 1$ e $\|T_N\|_{N,\tilde{w}}^2 = \pi$.

(b) $\|u\|_{o,\tilde{w}} \leq \|u\|_{N,\tilde{w}} \leq 2\|u\|_{o,\tilde{w}}$ no caso dos pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto.

3.1.1 Diferenciação no espaço de frequência

Proposição 3.1.6 *Temos as seguintes propriedades para T'_n e T''_n :*

(i) $|T'_n(x)| \leq n^2$, $-1 < x < 1$.

(ii) $T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n+1} n^2$

$$(iii) T'_n(x) = 2n \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ impar}}}^{n-1} \frac{1}{\tilde{c}_k} T_k(x).$$

$$(iv) \text{ Se } x \in (-1, 1), \text{ então } T'_n(x) = \frac{n T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)}{2(1-x^2)}, n \geq 1.$$

$$(v) \text{ Se } x \in (-1, 1), n > 1, T''_n(x) = \frac{n(n+1)T_{n-2}(x) - 2nT_n(x) + (n-1)T_{n+2}(x)}{4(1-x^2)^2}.$$

$$(vi) T''_n(1) = \frac{1}{3}n^2(n^2-1) \text{ e } T''_n(-1) = \frac{1}{3}(-1)^n n^2(n^2-1).$$

(vii) Para $\hat{w}(x) = (1-x^2)\tilde{w}(x)$, $\{T'_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2_{\tilde{w}}(I)$ é uma seqüência de polinômios ortogonais.

Proposição 3.1.7 Dado $u \in \mathbb{P}_N$, $u = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k T_k(x)$, a derivada de u pode ser escrita como

$$u'(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k^{(1)} T_k(x), \text{ onde os coeficientes } \{\hat{u}_k^{(1)}\} \text{ de } u' \text{ são determinados por}$$

$$\hat{u}_N^{(1)} = 0$$

$$\hat{u}_{N-1}^{(1)} = 2N \hat{u}_N$$

$$\hat{u}_{k-1}^{(1)} = \frac{2k \hat{u}_k + \hat{u}_{k+1}^{(1)}}{c_{k-1}}, \quad k = N-1, N-2, \dots, 1.$$

Além disso, as derivadas de ordem superior podem ser obtidas aplicando essa a fórmula de recorrência inversa repetidas vezes, ou seja, $c_k \hat{u}_k^{(q)} = \hat{u}_{k+2}^{(q)} + 2(k+1) \hat{u}_{k+1}^{(q-1)}$, $k \geq 0$.

3.1.2 Diferenciação do espaço físico

Sejam $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)$, $j = 0, \dots, N$ os pontos de Gauss-Lobatto. Dado $u \in \mathbb{P}_N$, conhecemos $u_j = u(x_j)$, $j = 0, \dots, N$. Podemos mostrar que os polinômios de Lagrange, relativos aos pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto, são dados por

$$L_j(x) = \frac{(-1)^{j+1} (1-x^2) T'_N(x)}{\tilde{c}_j N^2 (x-x_j)}.$$

Desta forma, $u^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^N u^{(m-1)}(x_j) L'_j(x)$, $m \geq 1$. Definindo $d_{k,j} = L'_j(x_k)$, a matriz

$D = (d_{(k,j)})$, $k, j = 0, 1, \dots, N$, e $\bar{u}^{(m)} = (u^{(m)}(x_0), \dots, u^{(m)}(x_N))^T$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos $u^{(m)} = \sum_{j=0}^N L'_j(x_k) u^{(m-1)}(x_j)$, ou seja, $\bar{u}^{(m)} = D^m \bar{u}^{(0)}$, pois $\bar{u}^{(m)} = D \bar{u}^{(m-1)}$.

Proposição 3.1.8 Sejam $\{x_j\}$ e $\{L_j\}$, $j = 0, \dots, N$, os pontos e polinômios de Lagrange relativos a Chebyshev-Gauss-Lobatto, respectivamente. A matriz de diferenciação $d_{k,j} = L'_j(x_k)$

é dada por

$$\begin{aligned} d_{k,j} &= \frac{\tilde{c}_k}{\tilde{c}_j} \cdot \frac{(-1)^{k+j}}{x_k - x_j}, \quad j \neq k. \\ d_{k,k} &= -\frac{x_k}{2(1-x_k^2)}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \\ d_{0,0} &= -d_{N,N} = \frac{2N^2 + 1}{6}. \end{aligned}$$

3.2 O operador de projeção

Seja $\Omega = (-1, 1)^d$ com $d \geq 1$. Definimos $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = \prod_{j=1}^d \tilde{w}(x_j)$, em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$.

Definição 3.2.1 O produto interno em $L_w^2(\Omega)$ é dado por

$$\langle f, g \rangle_w = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} w(x) dx.$$

Assim, o sistema $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}_*^d}$, em que $\mathbb{N}_* = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\phi_k(x) = \prod_{j=1}^d \tilde{\phi}_j(x_j)$ é ortonormal e completo em $L_w^2(\Omega)$, pois $\{\tilde{\phi}_p\}_{p \in \mathbb{N}_*}$ é um sistema ortonormal e completo em $L_{\tilde{w}}^2(-1, 1)$.

Observação 3.2.1 Para $d \geq 1$, $f_{w,N} = \left(f_{\tilde{w},N}^{(1)} \times f_{\tilde{w},N}^{(2)} \times \dots \times f_{\tilde{w},N}^{(d)} \right)$ em que cada $f_{\tilde{w},N}^{(j)}$ pertencem a $(\mathcal{F}_{\tilde{w},N})$, define a fórmula de integração sobre Ω :

$$\int_{\Omega} \phi(x) w(x) dx \simeq \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_*^d \\ |m|_{\infty} \leq N}} \phi(x_m) w_m,$$

em que $x_m = \left(x_{m_j}^{(j)} \right)_{j=1}^d$, $w_m = \prod_{j=1}^d \tilde{w}_{m_j}^{(j)}$, onde o subscrito (j) se refere a $f_{\tilde{w},N}^{(j)}$ que está sendo usada. Assim, introduzimos o produto interno discreto sobre $C^o(\bar{\Omega})$:

$$\langle u, v \rangle_{N,w} = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_*^d \\ |m|_{\infty} \leq N}} u(x_m) v(x_m) w_m,$$

o qual da origem a norma discreta $\|\cdot\|_{N,w} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{N,w}^{1/2}$.

Como no caso unidimensional, é válida a equivalência entre as normas $\|\cdot\|_{o,w}$ e $\|\cdot\|_{N,w}$, bem como a igualdade do produto interno contínuo e discreto sobre \mathbb{P}_{2N-1} .

Definição 3.2.2 $S_N = S_N(\Omega) = \text{span}\{\phi_k : k \in \mathbb{N}_*^d, |k|_\infty \leq N\}$, isto é, o conjunto dos polinômios de grau $\leq N$ em cada variável. O **operador de projeção** de $L_w^2(\Omega)$ em S_N , $P_N : L_w^2(\Omega) \rightarrow S_N$, é definido por

$$\langle u - P_N u, v \rangle_w = 0, \quad \forall v \in S_N.$$

Notemos que para qualquer $u \in L_w^2(\Omega)$, $u = \sum_{k \in \mathbb{N}_*^d} \hat{u}_k \phi_k$, $\hat{u}_k = \langle u, \phi_k \rangle_w$. Então,

$$\left\langle \sum_{k \in \mathbb{N}_*^d} \hat{u}_k \phi_k, v \right\rangle_w = \langle P_N u, v \rangle_w, \quad \forall v \in S_N. \text{ Em particular, } v = \phi_l \ (|l|_\infty \leq N), \ \hat{u}_l = \langle P_N u, \phi_l \rangle_w.$$

Desta forma, temos que $P_N u = \sum_{\substack{|k| \leq N \\ k \in \mathbb{N}_*^d}} \langle P_N u, \phi_k \rangle_w \phi_k = \sum_{\substack{|k| \leq N \\ k \in \mathbb{N}_*^d}} \hat{u}_k \phi_k$.

Agora, para cada função $v = v(x)$ sobre Ω , associamos a função

$$\tilde{v}(\theta) = v(\cos(\theta)), \quad \cos(\theta) = (\cos(\theta^1), \dots, \cos(\theta^d)),$$

em que \tilde{v} é uma função 2π -periódica sobre $\tilde{\Omega} = (-\pi, \pi)^d$. Como

$$\int_{\Omega} v(x) w(x) dx = 2^{-d} \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{v}(\theta) d\theta \text{ e } \frac{d\theta}{dx} = w \geq 1, \text{ temos que}$$

$$v \longrightarrow \tilde{v} \tag{3.4}$$

é uma injeção contínua de $H_w^s(\Omega)$ em $H_{per}^s(\tilde{\Omega})$. Também, esta injeção aplica S_N em $\tilde{S}_N = \{\psi_k : |k|_\infty \leq N\} \subset L^2(\tilde{\Omega})$, em que $\psi_k(\theta) = (2\pi)^{-d/2} \exp(ik \cdot \theta)$. Em particular,

$$\widetilde{P_N v} = \tilde{P}_N \tilde{v}, \quad \forall v \in L_w^2(\Omega), \tag{3.5}$$

em que $\tilde{P}_N : L^2(\tilde{\Omega}) \rightarrow \tilde{S}_N$. De fato, faremos a demonstração para o caso em que $d = 1$, pois é análogo para outras dimensões.

$$\begin{aligned} \tilde{P}_N \tilde{v}(\theta) &= \sum_{|k| \leq N} \langle \tilde{v}, \psi_k \rangle_w \psi_k(\theta) = \sum_{k=0}^N \langle \tilde{v}, \psi_k \rangle_w \psi_k + \sum_{k=-N}^{-1} \langle \tilde{v}, \psi_k \rangle_w \psi_k \\ &= \langle \tilde{v}, \psi_0 \rangle_w \psi_0 + \sum_{k=1}^N [\langle \tilde{v}, \psi_k \rangle_w \psi_k + \overline{\langle \tilde{v}, \psi_k \rangle_w} \psi_{-k}] \\ &= \langle \tilde{v}, \psi_0 \rangle_w \psi_0 + \sum_{k=1}^N [c_k \psi_k + \overline{c_k} \psi_k] = \langle \tilde{v}, \psi_0 \rangle_w \psi_0 + \sum_{k=1}^N 2\text{Re}(c_k \psi_k) \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{v}(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\theta \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^N 2\text{Re}(c_k \psi_k), \end{aligned}$$

em que $c_k = \langle \tilde{v}, \psi_k \rangle_w$ e $\psi_{-k} = \overline{\psi_k}$. Pela mudança de variável $x = \cos(\theta)$, temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{v}(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\theta \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v(\cos(\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-1}^1 \frac{v(x)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} dx \right) = \frac{T_o(x)}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-1}^1 v(x) w(x) \frac{T_o(x)}{\sqrt{\pi}} dx \right) \\ &= \langle v, \phi_o \rangle_w \phi_o. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} c_k \psi_k &= \langle \tilde{v}, \psi_k \rangle_w \psi_k = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{v}(\theta) \psi(\theta) d\theta \right) \psi_k(\theta) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} v(\cos(\theta)) \psi(\theta) d\theta \right) \psi_k(\theta) \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} v(\cos(\theta)) \frac{[\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)]}{\sqrt{2\pi}} d\theta \right) \psi_k(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} v(\cos(\theta)) \cos(k\theta) d\theta \right) \psi_k(\theta) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^1 \frac{v(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) \psi_k(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1}^1 \frac{v(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) \frac{[\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)]}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Assim, considerando a parte real acima desta igualdade, obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_N \tilde{v}(\theta) &= \langle v, \phi_o \rangle_w \phi_o + 2 \sum_{k=1}^N \frac{2}{(\sqrt{2\pi})^2} \left(\int_{-1}^1 \frac{v(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) T_k(x) \\ &= \langle v, \phi_o \rangle_w \phi_o + \sum_{k=1}^N \left(\int_{-1}^1 \frac{v(x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{2} T_k(x)}{\sqrt{\pi}} dx \right) \frac{\sqrt{2} T_k(x)}{\sqrt{\pi}} \\ &= \sum_{k=0}^N \langle v, \phi_k \rangle_w \phi_k = P_N v(\cos(\theta)) = \widetilde{P}_N v(\theta). \end{aligned}$$

Agora, obteremos a taxa de convergência, com respeito a N , para o erro de projeção $u - P_N u$ nas normas de Sobolev. A estimativa na norma L_w^2 é uma consequência da estimativa para o erro de projeção de Fourier.

Teorema 3.2.3 *Para qualquer real $\sigma \geq 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u - P_N u\|_{\sigma, w} \leq C \cdot N^{-\sigma} \cdot \|u\|_{\sigma, w}, \quad \forall u \in H_w^\sigma(\Omega). \quad (3.6)$$

Demonstração. Por (3.5),(2.1) e (3.4)

$$\begin{aligned}
\|u - P_N u\|_{\sigma,w}^2 &= \int_{\Omega} (u - P_N u)^2(x) w(x) dx = 2^{-d/2} \int_{\tilde{\Omega}} (u - P_N u)^2(\cos(\theta)) d\theta \\
&= 2^{-d/2} \int_{\tilde{\Omega}} (u - \widetilde{P_N u})^2(\theta) d\theta = 2^{-d/2} \|\tilde{u} - \widetilde{P_N u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&= 2^{-d/2} \|\tilde{u} - \tilde{P}_N \tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq 2^{-d/2} \tilde{C} N^{-\sigma} \|\tilde{u}\|_{\sigma} \\
&\leq C N^{-\sigma} \|u\|_{\sigma,w},
\end{aligned}$$

ou seja, a desigualdade (3.6). \square

Agora, consideraremos as normas de Sobolev de ordem maior. Para isto, temos a seguinte expansão formal da derivada da função $v = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{v}_k \phi_k$,

$$Dv = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \left(\sum_{k=l+1}^{\infty'} k \hat{v}_k \right) \phi_l, \quad (3.7)$$

em que $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\gamma_l = 1$ para $l \geq 1$. O símbolo $\sum_{k=p}^{q'}$, q podendo ser infinito, denota a soma sobre todos os inteiros k tais que $p \leq k \leq q$ e $k - p$ é par. Observamos que esta expansão pode ser rigorosamente justificada quando v é regular suficientemente regular.

Lema 3.2.4 (Desigualdade Inversa) *Dados μ, ν com $0 \leq \nu \leq \mu$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{\mu,w} \leq C \cdot N^{2(\mu-\nu)} \|u\|_{\nu,w}, \quad \forall u \in S_N. \quad (3.8)$$

Demonstração.

Para $v = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_*^d \\ |k|_{\infty} \leq N}} \hat{v}_k \phi_k$ em (3.7), temos

$$D_1 v = \sum_{|l|_{\infty} \leq N} \gamma_{l_1} \left(\sum_{k_1=l_1+1}^{N'} k_1 \hat{v}_{(k_1, l')} \right) \phi_l,$$

em que $l' = (l_2, \dots, l_d)$. Pela identidade de Parseval e, em seguida, a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|D_1 v\|_{o,w}^2 &= \sum_{\substack{|l'|_\infty \leq N \\ l_1 < N}} \gamma_{l_1}^2 \left(\sum_{k_1=l_1+1}^{N'} k_1 \hat{v}_{(k_1, l')} \right)^2 \leq 2 \sum_{l_1=0}^{N-1} \sum_{|l'|_\infty \leq N} \left(\sum_{k_1=l_1+1}^N k_1^2 \right) \left(\sum_{k_1=l_1+1}^N |\hat{v}_{(k_1, l')}|^2 \right) \\ &\leq \frac{N(N+1)(2N+3)}{3} \sum_{l_1=0}^{N-1} \sum_{k_1=1}^N \sum_{|l'|_\infty \leq N} |\hat{v}_{(k_1, l')}|^2 \\ &\leq \frac{N(N+1)(2N+3)}{3} N \sum_{k_1=1}^N \sum_{|l'|_\infty \leq N} |\hat{v}_{(k_1, l')}|^2 \leq CN^4 \|v\|_{o,w}^2, \end{aligned}$$

e, similarmente, para as outras derivadas de primeira ordem de v . A aplicação repetida desta estimativa assegura que

$$\|u\|_{m,w} \leq CN^{2m} \|u\|_{o,w}, \quad \forall u \in S_N, \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Para μ real, usaremos a interpolação de espaços. Seja S_N^σ o espaço S_N equipado com a norma H_w^σ . Então, o operador identidade $i : S_N^0 \rightarrow S_N^m$ tem norma $\leq CN^{2m}$, enquanto $i : S_N^0 \rightarrow S_N^0$ tem norma 1. Pelo teorema 1.5.12 obtemos que $i : S_N^0 \rightarrow (S_N^m, S_N^0)_{[\theta]} =: S_N^{\theta m}$ tem norma $\leq CN^{2m}$, $0 < \theta < 1$. Finalmente, para μ não nulo, interpolamos entre $i : S_N^0 \rightarrow S_N^\mu$ e $i : S_N^\mu \rightarrow S_N^\mu$ e, usando novamente o teorema 1.5.12, obtemos a estimativa do lema. \square

Através da expansão formal da derivada de uma função dada em (3.7), podemos perceber que P_N não comuta com o operador de diferenciação ($P_N u_x \neq (P_N u)_x$) como ocorre no sistema de Fourier. Portanto, nos próximos dois lemas, vamos estimar a diferença $P_N D_j - D_j P_N$, $j = 1, \dots, d$. Por simplicidade, somente deduziremos o caso $j = 1$, pois os demais casos são análogos.

Lema 3.2.5 *Seja $u \in H_w^1(\Omega)$ e $D_1 u = \sum_{k \in \mathbb{N}_*^d} \hat{z}_k \phi_k$. Então,*

$$P_N D_1 u - D_1 P_N u = \begin{cases} z^{(N)} \cdot \phi_o^{(N)} + z^{(N+1)} \cdot \phi_1^{(N)}, & N \text{ par} \\ z^{(N)} \cdot \phi_1^{(N)} + z^{(N+1)} \cdot \phi_o^{(N)}, & N \text{ ímpar,} \end{cases} \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{aligned} z^{(N)} &= \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'|_\infty \leq N}} \hat{z}_{(N, k')} \phi_{k'}, & z^{(N+1)} &= \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'|_\infty \leq N}} \hat{z}_{(N+1, k')} \phi_{k'} \\ \phi_o^{(N)} &= \sum_{l_1=0}^{N'} \gamma_{l_1} \phi_{l_1}, & \phi_1^{(N)} &= \sum_{l_1=1}^{N'} \gamma_{l_1} \phi_{l_1}. \end{aligned}$$

Demonstração. Assumimos primeiro que u é regular o suficiente. Por (3.7),

$$\hat{z}_k = \gamma_{k_1} \cdot \sum_{m=k_1+1}^{\infty'} m \hat{u}_{(m,k')}, \quad (3.11)$$

em que $k' = (k_2, \dots, k_d)$. Por exemplo, por (3.6), obtemos

$$|\hat{u}_l| \leq \|u - P_L u\|_{o,w} \leq CL^{-\sigma} \|u\|_{\sigma,w}, \quad L = |l_\infty| - 1$$

para qualquer $l \in \mathbb{N}_*^d$ e $u \in H_w^\sigma(\Omega)$, em que escolhemos σ suficientemente grande tal que a série do lado direito de (3.11) é absolutamente convergente e igual ao k -ésimo coeficiente de Chebyshev da função $z \in L_w^2(\Omega)$, a qual necessariamente coincide com $D_1 u$. Então, usando (3.7),

$$\begin{aligned} D_1 u &= D_1 \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_*^d} \hat{u}_k \phi_k \right) = D_1 \left[\sum_{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1}} \phi_{k'} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \hat{u}_{(k_1,k')} \phi_{k_1} \right) \right] \\ &= \sum_{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1}} \phi_{k'} \left[\sum_{l_1}^{\infty} \gamma_{l_1} \left(\sum_{k_1=l_1+1}^{\infty'} k_1 \hat{u}_k \right) \phi_{l_1} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_N D_1 u = \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \left[\sum_{l_1=0}^N \gamma_{l_1} \left(\sum_{k_1=l_1+1}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1,k')} \right) \phi_{l_1} \right]. \quad (3.12)$$

Por outro lado,

$$P_N u = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_*^d \\ |k|_\infty \leq N}} \hat{u}_k \phi_k = \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'|_\infty \leq N}} \phi_{k'} \left[\sum_{k_1=0}^N \hat{u}_{(k_1,k')} \phi_{k_1} \right].$$

Assim,

$$D_1 P_N u = \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'|_\infty \leq N}} \phi_{k'} D_1 \left[\sum_{k_1=0}^N \hat{u}_k \phi_{k_1} \right] = \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'|_\infty \leq N}} \phi_{k'} \left[\sum_{l_1=0}^{N-1} \gamma_{l_1} \left(\sum_{k_1=l_1+1}^{N'} k_1 \hat{u}_{(k_1,k')} \right) \phi_{l_1} \right]. \quad (3.13)$$

A última igualdade segue de (3.7), pois se $v = \sum_{k=0}^N \hat{v}_k \phi_k$, temos $\hat{v}_k = 0$ se $k \geq N+1$. Então,

$$Dv = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_l \left(\sum_{k=l+1}^{N'} k \hat{v}_k \right) \phi_l. \text{ Agora, subtraindo a equação (3.13) da equação (3.12), supondo}$$

N par, temos que

$$\begin{aligned}
P_N D_1 u - D_1 P_N u &= \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \sum_{l_1=0}^N \gamma_{l_1} \left(\sum_{k_1=l_1+1}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \phi_{l_1} \\
&\quad - \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \sum_{l_1=0}^{N-1} \gamma_{l_1} \left(\sum_{k_1=l_1+1}^{N'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \phi_{l_1} \\
&= \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \sum_{l_1=0}^{N-1} \gamma_{l_1} \phi_{l_1} \left(\sum_{k_1=l_1+1}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} - \sum_{k_1=l_1+1}^{N'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \gamma_N \left(\sum_{k_1=N+1}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \phi_N.
\end{aligned}$$

Lembramos que o símbolo $\sum_{k=p}^{q'}$ denota a soma dos índices inteiros k entre p e q tais que $k - p$ é par, assim:

$$\begin{aligned}
P_N D_1 u - D_1 P_N u &= \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \left[\sum_{l_1=0}^{N-1'} \gamma_{l_1} \phi_{l_1} \left(\sum_{k_1=N+1}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l_1=1}^{N-1'} \gamma_{l_1} \phi_{l_1} \left(\sum_{k_1=N+2}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \right] + \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \gamma_N \left(\sum_{k_1=N+1}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \phi_N \\
&= \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \sum_{l_1=0}^{N'} \gamma_{l_1} \phi_{l_1} \left(\sum_{k_1=N+1}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) + \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \sum_{l_1=0}^{N'} \gamma_{l_1} \phi_{l_1} \left(\sum_{k_1=N+2}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \\
&= \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \left(\sum_{k_1=N+1}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \left(\sum_{l_1=0}^{N'} \gamma_{l_1} \phi_{l_1} \right) + \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \left(\sum_{k_1=N+2}^{\infty'} k_1 \hat{u}_{(k_1, k')} \right) \left(\sum_{l_1=1}^{N'} \gamma_{l_1} \phi_{l_1} \right) \\
&= \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \cdot \hat{z}_{(N, k')} \cdot \phi_o^{(N)} + \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} \phi_{k'} \cdot \hat{z}_{(N+1, k')} \cdot \phi_1^{(N)} \\
&= z^{(N)} \cdot \phi_o^{(N)} + z^{(N+1)} \cdot \phi_1^{(N)},
\end{aligned}$$

que é (3.10). Como cada lado de (3.10) pertence ao subespaço de dimensão finita S_N e depende continuamente de u na topologia de $H_w^1(\Omega)$, através de argumentos de densidade, mostramos que o resultado é válido para qualquer $u \in H_w^1(\Omega)$. \square

Lema 3.2.6 *Para quaisquer números reais ρ e σ com $0 \leq \rho \leq \sigma - 1$, existe uma constante*

$C > 0$ tal que, para $j = 1, \dots, d$,

$$\|(P_N D_j - D_j P_N)u\|_{\rho, w} \leq C \cdot N^{2\rho - \sigma + \frac{3}{2}} \cdot \|u\|_{\sigma, w}, \quad \forall u \in H_w^\sigma(\Omega). \quad (3.14)$$

Demonstração. Novamente, consideraremos o caso $j = 1$. Observamos que $z^{(N)}$ e $z^{(N+1)}$ somente dependem de $x' = (x_2, \dots, x_d)$ e pertencem ao subespaço S_N (de dimensão $d - 1$). Por outro lado, $\phi_o^{(N)}$ e $\phi_1^{(N)}$ dependem somente de x_1 e são ortogonais em $L_w^2(I)$. Portando, quando N é par,

$$\begin{aligned} \|P_N D_1 u - D_1 P_N u\|_{o, w}^2 &= \|z^{(N)} \phi_o^{(N)} + z^{(N+1)} \phi_1^{(N)}\|_{o, w}^2 = \int_{\Omega} |z^{(N)} \phi_o^{(N)} + z^{(N+1)} \phi_1^{(N)}|^2 w \, dx \\ &= \int_{\Omega'} w' \left(\int_{-1}^1 |z^{(N)}(x') \phi_o^{(N)}(x_1) + z^{(N+1)}(x') \phi_1^{(N)}(x_1)|^2 w_1 \, dx_1 \right) dx' \\ &= \int_{\Omega'} \left(\int_{-1}^1 [z^{(N)}(x')^2 \phi_o^{(N)}(x_1)^2 + z^{(N+1)}(x')^2 \phi_1^{(N)}(x_1)^2] w_1 \, dx_1 \right) dx' \\ &= \left(\int_{\Omega'} z^{(N)}(x')^2 w' \, dx' \right) \left(\int_{-1}^1 \phi_o^{(N)}(x_1)^2 w_1 \, dx_1 \right) \\ &\quad + \left(\int_{\Omega'} z^{(N+1)}(x')^2 w' \, dx' \right) \left(\int_{-1}^1 \phi_1^{(N)}(x_1)^2 w_1 \, dx_1 \right) \\ &= \|z^{(N)}\|_{o, w'}^2 \cdot \|\phi_o^{(N)}\|_{o, \bar{w}}^2 + \|z^{(N+1)}\|_{o, w'}^2 \cdot \|\phi_1^{(N)}\|_{o, \bar{w}}^2. \end{aligned}$$

Analogamente, temos uma igualdade semelhante quando N é ímpar. Pela identidade de Parseval e desigualdade (3.6), obtemos:

$$\begin{aligned} \|z^{(N)}\|_{o, w'}^2 &= \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k'| \leq N}} |\hat{z}_{(N, k_2, \dots, k_d)}|^2 \leq \sum_{\substack{k' \in \mathbb{N}_*^{d-1} \\ |k_1| \geq N}} |\hat{z}_k|^2 \\ &\leq \sum_{|k_i| \geq N, \forall i} |\hat{z}_k|^2 = \|D_1 u - P_{N-1} D_1 u\|_{o, w}^2 \leq C \cdot N^{2(1-s)} \cdot \|u\|_{s, w}^2. \end{aligned}$$

Da mesma forma, limitamos $\|z^{(N+1)}\|_{o, w'}^2$. Também, temos que $\|\phi_o^{(N)}\|_{o, \bar{w}}^2 \sim N$ e $\|\phi_1^{(N)}\|_{o, \bar{w}}^2 \sim N$. Assim, obtemos a desigualdade (3.14) para $\rho = 0$.

Para $\rho > 0$, concluímos (3.14) pela desigualdade inversa (3.8). De fato, $P_N D_j u$ e $D_j P_N u$ pertencem a S_N , escolhendo $\nu = 0$ e $\mu = \rho > 0$ em (3.8),

$$\|P_N D_j u - D_j P_N u\|_{\rho, w} \leq C N^{2\rho} \|P_N D_j u - D_j P_N u\|_{o, w} \leq C N^{2\rho - \sigma + \frac{3}{2}} \|u\|_{\sigma, w},$$

ou seja, obtemos a desigualdade (3.14). \square

No próximo teorema, provaremos a principal estimativa para o erro de projeção $u - P_N u$.

Teorema 3.2.7 *Para quaisquer $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq \mu \leq \sigma$, existe uma constante $C > 0$ tal*

que

$$\|u - P_N u\|_{\mu,w} \leq C \cdot N^{e(\mu,\sigma)} \cdot \|u\|_{\sigma,w} \quad \forall u \in H_w^\sigma(\Omega), \quad (3.15)$$

em que

$$e(\mu,\sigma) = \begin{cases} 2\mu - \sigma - \frac{1}{2}, & \mu \geq 1, \\ \frac{3\mu}{2} - \sigma, & 0 \leq \mu \leq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Provaremos o resultado para μ natural por indução, uma vez que para e e para $\mu = 0$, a desigualdade (3.15) se reduz a desigualdade (3.6). Em seguida, usaremos o teorema 1.5.12 de interpolação para obtermos o resultado para $\mu \in \mathbb{R}$.

Assumimos que (3.15) é válida para qualquer natural $\mu \leq m - 1$, vamos provar que também é válida para $\mu = m$. De fato,

$$\begin{aligned} \|u - P_N u\|_{m,w}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(u - P_N u)\|_{o,w}^2 \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m, \alpha_1 \neq 0} \|D^\alpha(u - P_N u)\|_{o,w}^2 + \cdots + \sum_{|\alpha| \leq m, \alpha_d \neq 0} \|D^\alpha(u - P_N u)\|_{o,w}^2 \\ &= \sum_{|\beta| \leq m-1} \|D_1 D^\beta(u - P_N u)\|_{o,w}^2 + \cdots + \sum_{|\beta| \leq m-1} \|D_d D^\beta(u - P_N u)\|_{o,w}^2 \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|D_j D^\alpha(u - P_N u)\|_{o,w}^2 = \sum_{j=1}^d \|D_j(u - P_N u)\|_{m-1,w}^2. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade da raiz, segue que

$$\begin{aligned} \|u - P_N u\|_{m,w} &\leq \sum_{j=1}^d \|D_j(u - P_N u)\|_{m-1,w} \\ &\leq \sum_{j=1}^d \|D_j u - P_N D_j u\|_{m-1,w} + \sum_{j=1}^d \|P_N D_j u - D_j P_N u\|_{m-1,w} \\ &\leq C_1 N^{e(m-1,\sigma-1)} \sum_{j=1}^d \|D_j u\|_{\sigma-1,w} + C_2 N^{e(m,\sigma)} \|u\|_{\sigma,w}, \end{aligned}$$

em que, na última desigualdade acima, aplicamos a hipótese de indução para cada $D_j u \in H_w^{\sigma-1}(\Omega)$ e a desigualdade (3.14). Como $e(m-1, \sigma-1) \leq e(m, \sigma)$, segue o resultado para $\mu = m$. \square

3.3 O Operador de Interpolação de Chebyshev

Definimos $P_c : C^o(\bar{\Omega}) \longrightarrow S_N$

$$\langle P_c v, \phi \rangle_{N,w} = \langle v, \phi \rangle_{N,w}, \quad \forall \phi \in S_N. \quad (3.16)$$

Como, para qualquer x_m , existe única $\phi \in S_N$ satisfazendo $\phi(x_l) = \delta_{ml}$ (precisamente, $\phi = \prod_{j=1}^d \tilde{\phi}_j$, com $\tilde{\phi}_j(x_l^{(j)}) = \delta_{m_j, l}$), vemos que $P_c v$ é o polinômio de S_N o qual interpola v nos pontos de colocação de Chebyshev, isto é,

$$P_c v(x_j) = v(x_j), \quad j = 0, \dots, N. \quad (3.17)$$

Da mesma forma como fizemos com o operador de projeção, podemos associar o operador de interpolação P_c sobre Ω com o operador de interpolação de Fourier \tilde{I}_N sobre $\tilde{\Omega}$. De fato, definimos a partição $\{J(G), J(GR), J(GL)\}$ de $\mathcal{D} = \{1, \dots, d\}$ por $j \in J(G)$ (respec. $J(GR)$ ou $J(GL)$) sempre que a fórmula de integração de Chebyshev-Gauss (Chebyshev-Gauss-Radau ou Chebyshev-Gauss-Lobatto) é usada.

Lema 3.3.1 *Para quaisquer $v \in C(\bar{\Omega})$,*

$$\widetilde{P_c v} = \tilde{I}_N \tilde{v}. \quad (3.18)$$

Demonstração. Pela relação $\cos(k\theta) = \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2}$ e o fato que $P_c \in S_N$, obtemos $\widetilde{P_c v} \in \tilde{E}_N(\tilde{\Omega})$ que é o produto tensorial de espaços de dimensão finita. Além disso, temos que $\widetilde{P_c v}$ é igual a \tilde{v} nos pontos θ_m , com $0 \leq m_j \leq N$, $\forall j \in \mathcal{D}$. Como os pontos de interpolação do tipo (G), (GR) e (GL) são igualmente espaçados com relação a origem $\widetilde{P_c v}$ e \tilde{v} são iguais em cada coordenada, elas são iguais em θ_m . O resultado segue pela unicidade do operador de interpolação. \square

Teorema 3.3.2 *Para todo $\sigma > d/2$ e μ real com $0 \leq \mu \leq \sigma$, existe uma constante C tal que*

$$\|u - P_c u\|_{\mu,w} \leq C \cdot N^{2\mu-\sigma} \cdot \|u\|_{\sigma,w}, \quad \forall u \in H_w^\sigma(\Omega). \quad (3.19)$$

Demonstração. Temos que

$$\|u - P_c u\|_{o,w}^2 = 2^{-d} \|\tilde{u} - \tilde{I}_N \tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2.$$

Então, (3.19) é válida para $\mu = 0$ por (2.3) e pelo fato de existir uma injeção contínua de $H_w^s(\Omega)$

em $H_{per}^s(\tilde{\Omega})$. Para $\mu > 0$, usaremos a desigualdade inversa (3.8). De fato, como $P_N u - P_c u \in S_N$,

$$\begin{aligned}
\|u - P_c u\|_{\mu,w} &\leq \|u - P_N u\|_{\mu,w} + \|P_N u - P_c u\|_{\mu,w} \leq CN^{e(\mu,\sigma)} \|u\|_{\sigma,w} + CN^{2\mu} \|P_N u - P_c u\|_{o,w} \\
&\leq CN^{e(\mu,\sigma)} \|u\|_{\sigma,w} + CN^{2\mu} \|P_N u - u\|_{o,w} + CN^{2\mu} \|P_c u - u\|_{o,w} \\
&\leq CN^{e(\mu,\sigma)} \|u\|_{\sigma,w} + CN^{2\mu} N^{e(\mu,\sigma)} \|u\|_{\sigma,w} + CN^{2\mu} N^{-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} \\
&\leq CN^{2\mu-\sigma} \|u\|_{\sigma,w},
\end{aligned}$$

sendo que usamos a estimativa (3.15) e o caso em que $\mu = 0$. \square

Capítulo 4

Existência e unicidade

Para obtermos a existência e unicidade de equações diferenciais parciais parabólicas lineares usaremos o método de Faedo-Galerkin. Denotaremos como P o problema exato, para o qual pretendemos provar a existência de uma única solução sobre um espaço de Hilbert separável V . Inicialmente, mostraremos que há no máximo uma solução. Em seguida, construiremos problemas aproximados P_m sobre espaços de dimensão finita V_m . Usando a teoria de EDO's, garantimos uma única solução u_m de P_m . Tendo u_m , estabeleceremos algumas estimativas para mostrar que a seqüência $\{u_m\}$ das soluções é limitada. Através dos resultados da seção 1.1, em especial o teorema de compacidade de Alaoglu, obteremos uma função u , a qual mostraremos ser a solução do problema exato.

Sejam V e H espaços de Hilbert reais separáveis, de acordo com (1.12).

4.1 O problema exato

Seja $T > 0$. Para cada $t \in [0, T]$, seja $a(t; u, v)$ uma forma bilinear sobre $V \times V$. Supomos que $\forall u, v \in V$, a função $t \rightarrow a(t; u, v)$ é mensurável e existe uma constante $M = M(T) > 0$ (independente de $t \in (0, T), u, v \in V$) tal que $|a(t; u, v)| \leq M \cdot \|u\|_V \cdot \|v\|_V$. Segue que, para cada $t \in [0, T]$, a forma bilinear $a(t; u, v)$ define um operador linear contínuo $A(t)$ de $V \rightarrow V'$ com

$$\sup_{t \in (0, T)} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(V, V')} \leq M. \quad (4.1)$$

Adicionamos ainda a hipótese que $a(t; u, v)$ seja coerciva, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(t; u, v) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall t \in [0, T], \forall u \in V. \quad (4.2)$$

Se X é um espaço de Banach, denotamos por $L^p(X)$ o espaço $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Sejam $u_o \in H$, $f \in L^2(V')$.

Problema P: Encontrar u satisfazendo

$$u \in W(0, T; V, V') \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt} \langle u(\cdot), v \rangle + a(\cdot; u(\cdot), v) = \langle f(\cdot), v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (4.4)$$

$$u(0) = u_o. \quad (4.5)$$

Observação 4.1.1 *Do teorema 1.9.5, (4.5) faz sentido. A equação (4.4) é no sentido das distribuições, $\mathcal{D}'(0, T)$.*

Observação 4.1.2 *Podemos reescrever (4.4) na forma vetorial*

$$\frac{d}{dt} u(\cdot) + A(\cdot)u(\cdot) = f(\cdot),$$

no sentido de $L^2(V')$, devido à proposição 1.9.7 e à construção de A .

4.2 Unicidade

Teorema 4.2.1 *Supomos V, H espaços dados que satisfazem (1.12); $a(t; u, v)$ satisfazendo as hipóteses acima; u_o e f dadas tais que $u_o \in H, f \in L^2(V')$. Então, a solução do **Problema P**, se existe, é única.*

Demonstração. Sejam u_1 e u_2 duas soluções do Problema P. Então, $w = u_1 - u_2$ satisfaz $w \in W(0, T; V, V')$ e

$$\left\langle \frac{dw}{dt}(\cdot), v \right\rangle + a(t; w(\cdot), v) = 0, \quad \forall v \in V \quad (4.6)$$

$$w(0) = 0.$$

Escolhendo $v = w(t)$ na equação (4.6) e integrando de 0 até t ,

$$\frac{1}{2} \|w(t)\|_H^2 + \int_0^t a(\sigma; w(\sigma), w(\sigma)) d\sigma = 0.$$

Pela coercividade de a , temos

$$\frac{1}{2} \|w(t)\|_H^2 \leq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

ou seja,

$$w(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Logo, $u_1 = u_2$. \square

4.3 Existência de uma solução para o Problema P

Teorema 4.3.1 *Sob as hipóteses do teorema 4.2.1, existe uma solução para o Problema P*

Demonstração.

Etapa 1: Problema aproximado (P_m).

Seja $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma família de subespaços vetoriais de dimensão finita satisfazendo:

(i) $V_m \subset V$.

(ii) $V_m \rightarrow V$ quando $m \rightarrow \infty$ no seguinte sentido: existe \mathcal{V} subespaço denso em V , tal que $\forall v \in \mathcal{V}$, podemos encontrar uma seqüência $\{v_m\}$ tal que, $\forall m$, $v_m \in V_m$ e $v_m \rightarrow v$ em V quando $m \rightarrow \infty$.

Como V é denso em H e do item (ii) acima, segue que para $u_o \in H$, existe uma seqüência $\{u_{om}\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u_{om} \in V_m, \forall m, \text{ e } u_{om} \rightarrow u_o \text{ em } H. \quad (4.7)$$

Denotamos por $d_m = \dim V_m$, $\{w_{jm}\}$, $j = 1, \dots, d_m$ uma base de V_m . Isso define uma seqüência de problemas P_m em espaços de dimensão finita: Encontrar

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{d_m} g_{jm}(t) w_{jm} \quad (4.8)$$

satisfazendo

$$\left\langle \frac{d}{dt} u_m(t), w_{jm} \right\rangle + a(t; u_m(t), w_{jm}) = \langle f(t), w_{jm} \rangle, \quad 1 \leq j \leq d_m \quad (4.9)$$

$$u_m(0) = u_{om}.$$

O sistema (4.9) é equivalente ao sistema de equações diferenciais de primeira ordem em \mathbb{R}^{d_m} da forma:

$$B_m \frac{dg_m}{dt} + \mathcal{A}_m(t) g_m = C_m(t), \quad (4.10)$$

em que B_m e $\mathcal{A}_m(t)$ são matrizes $d_m \times d_m$, as quais possuem elementos β_{ijm} , $\alpha_{ijm}(t)$, respectivamente, que são definidos por:

$$\beta_{ijm} = \langle w_{im}, w_{jm} \rangle, \quad \alpha_{ijm}(t) = a(t; w_{im}, w_{jm}), \quad 1 \leq i, j \leq d_m.$$

Ainda, C é um vetor $d_m \times 1$ com componentes $C_{mj}(t) = \langle f(t), w_{jm} \rangle$. Notemos que, como w_{jm}

são linearmente independentes, $\det B_m \neq 0$. Logo, a equação (4.10) é equivalente à:

$$\frac{dg_m}{dt} + B_m^{-1} A_m(t) g_m = B_m^{-1} C_m(t).$$

Da teoria de existência e unicidade de EDO's, obtemos o seguinte lema.

Lema 4.3.2 *Existe uma única solução u_m para o problema P_m satisfazendo:*

$$u_m \in C([0, T]; V_m), \quad u'_m \in L^2(0, T; V_m).$$

Etapa 2: Estimativas a priori

Multiplicamos a equação (4.9) por $g_{jm}(t)$ e somamos de 1 até d_m , obtendo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_H^2 + a(t; u_m(t), u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t) \rangle, \quad (4.11)$$

pela qual, por integração sobre $(0, t)$,

$$\frac{1}{2} \|u_m(t)\|_H^2 + \int_0^t a(s; u_m, u_m) ds = \int_0^t \langle f(s), u_m(s) \rangle ds + \frac{1}{2} \|u_{om}\|_H^2. \quad (4.12)$$

Pela coercividade de a e desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{1}{2} \|u_m(t)\|_H^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds \leq \int_0^t \|f\|_{V'} \cdot \|u_m(s)\|_V ds + \frac{1}{2} \|u_{om}\|_H^2. \quad (4.13)$$

Por outro lado,

$$\|u_{om}\|_H \leq C \|u_o\|_H \quad (4.14)$$

$$\int_0^t \|f\|_{V'} \cdot \|u_m(s)\|_V ds \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 ds. \quad (4.15)$$

Assm, pelas desigualdades (4.13), (4.14) e (4.15),

$$\frac{1}{2} \|u_m(t)\|_H^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds \leq C \left\{ \|u_o\|_H^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{V'}^2 ds \right\}, \quad (4.16)$$

com $t \in [0, T]$ e C uma constante independente de t, m . Através da desigualdade (4.16), obtemos o seguinte lema.

Lema 4.3.3 *As funções u_m , soluções de P_m , pertencem a um conjunto limitado de $L^\infty(H)$ e de $L^2(V)$.*

Etapa 3: Passagem ao limite para $m \rightarrow \infty$.

Do lema 4.3.3 e da desigualdade (4.1), deduzimos que $A(\cdot)u_m$ pertence a um conjunto limitado de $L^2(V')$. Pelos teoremas 1.1.3 e 1.1.9, obtemos o seguinte lema:

Lema 4.3.4 *Podemos extrair da seqüência $\{u_m\}$ uma subseqüência $\{u_{ml}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tendo as seguintes propriedades:*

- (i) $u_{ml} \rightharpoonup u$ fraco em $L^2(V)$.
- (ii) $u_{ml} \rightharpoonup u$ fraco* em $L^\infty(H)$.
- (iii) $A(\cdot)u_{ml} \rightharpoonup A(\cdot)u$ fraco em $L^2(V')$.

Observação 4.3.1 *O item (iii) do lema acima segue de:*

$$\begin{aligned} \|A(\cdot)u_{ml}\|_{L^2(V')} &= \left(\int_0^T \|A(\cdot)u_{ml}\|_{V'}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^T \|A\|_{\mathcal{L}(V, V')} \cdot \|u_{ml}\|_V^2 \right)^{1/2} \\ &\leq M \cdot \|u_{ml}\|_{L^2(V)} \leq k, \end{aligned}$$

pois $u_{ml} \rightharpoonup u$ em $L^2(V)$, o que implica $\|u_{ml}\|_{L^2(V)}$ limitada.

Consideramos $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$ e $v \in \mathcal{V}$. Temos que, existe $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $v_m \in V_m$, $\forall m$, tal que $v_m \rightarrow v$ forte em V . Introduzimos,

$$\begin{aligned} \psi_m &= \varphi \otimes v_m \text{ (ie, } \psi_m(t) = \varphi(t)v_m) \\ \psi &= \varphi \otimes v. \end{aligned}$$

Particularmente, temos que

$$\psi_{ml} \rightarrow \psi \text{ em } L^2(0, T; V) \text{ forte, } l \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

$$\psi'_{ml} = \frac{d}{dt} \psi'_{ml} \rightarrow \psi' \text{ em } L^2(0, T; H) \text{ forte, } l \rightarrow \infty. \quad (4.18)$$

Da equação (4.9), deduzimos

$$- \int_0^T \langle u_{ml}(t), \psi'_{ml}(t) \rangle dt + \int_0^T a(t; u_{ml}(t), \phi_{ml}(t)) dt = \int_0^T \langle f(t), \psi_{ml}(t) \rangle dt, \quad (4.19)$$

em que $\psi_m = \varphi \otimes v_m$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$.

Agora, vamos passar ao limite cada um dos termos da igualdade acima separadamente. Primeiramente,

$$\int_0^T \langle f(t), \psi_{ml}(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle f(t), \psi \rangle dt, \quad l \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

De fato, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, do fato que $f \in L^2(V')$ e de (4.17),

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \langle f(t), \psi_{ml}(t) \rangle dt - \int_0^T \langle f(t), \psi \rangle dt \right| \leq \int_0^T |\langle f(t), \psi_{ml}(t) - \psi(t) \rangle| dt \\ & \leq \int_0^T \|f(t)\|_{V'} \cdot \|\psi_{ml}(t) - \psi(t)\|_V dt \\ & \leq \left(\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 dt \right) \cdot \left(\int_0^T \|\psi_{ml}(t) - \psi(t)\|_V^2 dt \right) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $l \longrightarrow \infty$. Também,

$$\int_0^T \langle u_{ml}(t), \psi'_{ml}(t) \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle u(t), \psi'(t) \rangle dt, \quad l \longrightarrow \infty. \quad (4.21)$$

De fato, do lema 4.3.4 (ii), temos que $u_{ml} \longrightarrow u$ fraco* em $L^\infty(H)$, isto é, vemos $L^\infty(H) = [L^1(H)]'$, então, $\forall \phi \in L^1(H)$, $\int_0^T |(u_{ml}(\phi) - u(\phi))| dt \longrightarrow 0$, quando $l \longrightarrow \infty$. Da convergência (4.18), $\int_0^T \|\psi'_{ml} - \psi'\|_H^2 dt \longrightarrow 0$, quando $l \longrightarrow \infty$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, do fato de $\{u_m\}$ ser limitada e das convergências acima,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \langle u_{ml}(t), \psi'_{ml}(t) \rangle dt - \int_0^T \langle u(t), \psi'(t) \rangle dt \right| \leq \int_0^T |\langle u_{ml}(t), \psi'_{ml}(t) \rangle - \langle u(t), \psi'(t) \rangle| dt \\ & \leq \int_0^T |\langle u_{ml}(t), \psi'_{ml}(t) \rangle - \langle u_{ml}(t), \psi'(t) \rangle| dt + \int_0^T |\langle u_{ml}(t), \psi'(t) \rangle - \langle u(t), \psi'(t) \rangle| dt \\ & \leq \int_0^T |\langle u_{ml}(t), \psi'_{ml}(t) - \psi'(t) \rangle| dt + \int_0^T |\langle u_{ml}(t) - u(t), \psi'(t) \rangle| dt \\ & \leq \int_0^T \|u_{ml}\|_V \cdot \|\psi'_{ml}(t) - \psi'(t)\|_H dt + \int_0^T |\langle u_{ml}(t) - u(t), \psi'(t) \rangle| dt \\ & \leq C \int_0^T \|\psi'_{ml}(t) - \psi'(t)\|_H^2 dt + \int_0^T (u_{ml}(t) - u(t))(\psi'(t)) dt \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $l \longrightarrow \infty$, pois $\psi' \in L^1(H)$.

Finalmente,

$$\int_0^T a(t; u_{ml}(t), \psi_{ml}(t)) dt = \int_0^T (A(t)u_{ml}, \psi_{ml}) dt \longrightarrow \int_0^T a(t; u(t), \psi(t)) dt, \quad l \longrightarrow \infty. \quad (4.22)$$

De fato, por 4.3.4 (iii), $A(\cdot)u_{ml} \longrightarrow A(\cdot)u$ fraco em $L^2(V')$, isto é,

$\int_0^T (A(\cdot)u_{ml}, \phi) dt \longrightarrow \int_0^T (A(\cdot)u, \phi) dt, \quad \forall \phi \in L^2(V);$ por (4.17), segue que

$$\begin{aligned} & \int_0^T |(A(t)u_{ml}, \psi_{ml}) - (A(t)u, \psi)| dt \leq \int_0^T |(A(t)u_{ml}, \psi_{ml}) - (A(t)u_{ml}, \psi)| dt \\ & \quad + \int_0^T |(A(t)u_{ml}, \psi) - (A(t)u, \psi)| dt \\ & \leq \int_0^T \|A(t)u_{ml}\|_{L^2(V')} \cdot \|\psi_{ml} - \psi\|_V dt + \int_0^T |(A(t)u_{ml} - A(t)u, \psi)| dt \\ & \leq C \int_0^T \|\psi_{ml} - \psi\|_V^2 dt + \int_0^T |(A(t)u_{ml} - A(t)u, \psi)| dt \longrightarrow 0, \quad l \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Assim, passando limite em (4.19), quando $l \longrightarrow \infty$, temos $\forall v \in \mathcal{V}, \forall \phi \in \mathcal{D}(]0, T[)$,

$$- \int_0^T \langle u(t), v \rangle \phi'(t) dt + \int_0^T a(t; u(t), v) \phi(t) dt = \int_0^T \langle f(t), v \rangle \phi(t) dt. \quad (4.23)$$

Como \mathcal{V} é denso em V , a equação (4.23) permanece verdadeira $\forall v \in V$, se mostrarmos que u satisfaz (4.4).

Etapa 4: u é solução de (P)

Para mostrarmos que u é solução do problema (P), precisamos mostrar que (4.3) e (4.4) são satisfeitas. Iniciemos por (4.3). Da equação (4.23), deduzimos que

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle u(t), v \rangle \phi'(t) dt &= \int_0^T \langle f(t), v \rangle \phi(t) dt - \int_0^T a(t; u(t), v) \phi(t) dt \\ &= \int_0^T \langle f(t) - A(t)u(t), v \rangle \phi(t) dt. \end{aligned}$$

Como $f \in L^2(V')$ e $A(\cdot)u(\cdot) \in L^2(V')$, temos $g = f - A(\cdot)u \in L^2(V')$ e

$$- \int_0^T \langle u(t), v \rangle \phi'(t) dt = \int_0^T \langle g(t), v \rangle \phi(t) dt, \quad \forall v \in V, \forall \phi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

implicando que, pela definição 1.4.6,

$$u' = \frac{du}{dt} \in L^2(V'). \quad (4.24)$$

Assim, do teorema 1.9.5, $u \in W(V)$ é uma função contínua de $[0, T] \longrightarrow H$.

Agora, verificaremos (4.5). Seja $\phi \in C^\infty[0, T]$ a valores reais, nula em uma vizinhança de T e tal que $\phi(0) \neq 0$. Então, $\psi = \phi \otimes v, v \in V$, está em $W(V)$ e, pela fórmula de integração por

partes (1.16), temos que

$$\int_0^T \langle u'(t), \phi(t)v \rangle dt = - \int_0^T \langle u(t), v \rangle \phi'(t) dt - \langle u(0), v \rangle \phi(0). \quad (4.25)$$

Das equações (4.4) e (4.24), temos também

$$\int_0^T \langle u'(t), \phi(t)v \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), v \rangle \phi(t) dt - \int_0^T a(t; u(t), v) \phi(t) dt. \quad (4.26)$$

Da equação (4.10), segue

$$\int_0^T \langle u'_{ml}(t), v_{ml} \rangle \phi(t) dt = \int_0^T \langle f(t), v_{ml} \rangle \phi(t) dt - \int_0^T a(t; u_{ml}(t), v_{ml}) \phi(t) dt \quad (4.27)$$

e também,

$$\int_0^T \langle u'_{ml}(t), v_{ml} \rangle \phi(t) dt = - \int_0^T \langle u_{ml}(t), v_{ml} \rangle \phi'(t) dt - \langle u_{o_{ml}}, v_{ml} \rangle \phi(0). \quad (4.28)$$

Passando ao limite nas equações (4.27) e (4.28), quando $l \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^T \langle u'_{ml}(t), v_{ml} \rangle \phi(t) dt &= \int_0^T \langle f(t), v \rangle \phi(t) dt - \int_0^T a(t; u(t), v) \phi(t) dt \\ &= \int_0^T \langle u'(t), v \rangle \phi(t) dt, \end{aligned} \quad (4.29)$$

em que a última igualdade acima vem da equação (4.26). Além disso,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^T \langle u'_{ml}(t), v_{ml} \rangle \phi(t) dt = - \int_0^T \langle u(t), v \rangle \phi'(t) dt - \langle u_o, v \rangle \phi(0). \quad (4.30)$$

Agora, comparando a equação (4.25) com (4.30), levando em consideração (4.29), obtemos

$$\langle u(0), v \rangle = \langle u_o, v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad (4.31)$$

Da densidade de V em H , a equação (4.31) permanece verdadeira $\forall v \in H$ e, portanto, $u(0) = u_o$. Logo, temos o lema abaixo.

Lema 4.3.5 *A função u é solução do problema P.*

4.4 Solução forte para o problema P

Graças à unicidade de soluções do Problema P, é desnecessário extrair uma subsequência de $\{u_m\}$ e temos que $u_m \rightarrow u$ em $L^2(V)$ fraco e em $L^\infty(H)$ fraco*.

Introduzimos

$$X_m(T) = \frac{1}{2} \|u_m(T) - u(T)\|_H^2 + \int_0^T a(t; u_m(t) - u(t), u_m(t) - u(t)) dt \quad (4.32)$$

Da desigualdade (4.16), $u_m(T)$ permanece limitada em H e podemos extrair $\{u_{m_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ no lema 4.3.4 com

$$u_{m_l}(T) \longrightarrow \chi_1 \text{ fraco em } H.$$

Além disso, escolhemos $\phi \in \mathcal{D}[0, T]$, nula em uma vizinhança de zero, com $\phi(T) \neq 0$. Raciocinando analogamente como feito para mostrar que $u(0) = u_o$, obtemos $\langle u(T), v \rangle = \langle \chi_1, v \rangle$, $\forall v \in V$ e, desta forma, $u(T) = \chi_1$. Agora, pelo lema (4.3.4) e teorema 1.1.5, segue que

$$u_m(T) \longrightarrow u(T) \text{ fraco em } H. \quad (4.33)$$

Então, podemos escrever

$$X_m(T) = \frac{1}{2} \|u_m(T)\|_H^2 + \int_0^T a(t; u_m(t), u_m(t)) dt + Y_m(T)$$

Pelo lema 4.3.4 e por (4.33), deduzimos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m(T) = -\frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 - \int_0^T a(t; u(t), u(t)) dt. \quad (4.34)$$

Integrando a equação (4.11) de 0 a T ,

$$\frac{1}{2} \|u_m(T)\|_H^2 + \int_0^T a(t; u_m(t), u_m(t)) dt = \frac{1}{2} \|u_{o_m}\|_H^2 + \int_0^T \langle f(t), u_m(t) \rangle dt,$$

de onde inferimos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \|u_m(T)\|_H^2 + \int_0^T a(t; u_m, u_m) dt \right] = \frac{1}{2} \|u_o\|_H^2 + \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle dt. \quad (4.35)$$

Por outro lado, da equação (4.4), temos

$$\frac{1}{2} \|u_o\|_H^2 + \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle dt = \frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 + \int_0^T a(t; u(t), u(t)) dt. \quad (4.36)$$

Então, os limites (4.34), (4.35) e (4.36) implicam que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m(T) = 0. \quad (4.37)$$

Agora, pela coercividade da forma bilinear a ,

$$0 \leq \alpha \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|_V^2 dt \leq X_m(T). \quad (4.38)$$

Portanto, de (4.37) e (4.38), deduzimos a seguinte proposição.

Proposição 4.4.1 *Quando $m \rightarrow \infty$, $u_m \rightarrow u$ forte em $L^2(V)$.*

Observação 4.4.1 *O limite (4.37) também implica que $u_m(T) \rightarrow u(T)$ forte em H . De forma mais geral, $\forall t \in [0, T]$,*

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \text{ forte em } H. \quad (4.39)$$

De fato, é suficiente observarmos que para $t_o \in (0, T)$, fixo, $L^2(0, t_o; V)$ pode ser identificado como um subespaço de $L^2(0, T; V)$. Assim, $\forall v \in L^2(V)$, define, por restrição a $(0, t_o)$, um elemento de $L^2(0, t_o; V)$ e (4.39) resulta da proposição 4.4.1, considerando

$$X_m(t_o) = \frac{1}{2} \|u_m(t_o) - u(t_o)\|_H^2 + \int_0^{t_o} a(s; u_m(s) - u(s), u_m(s) - u(s)) ds.$$

Capítulo 5

Métodos de Chebyshev-espectral para equações parabólicas unidimensionais

Analisaremos o método espectral e pseudo-espectral para a equação de advecção-difusão unidimensional submetida às condições de fronteira de Dirichlet no intervalo $I = (-1, 1)$. O método pseudo-espectral é essencialmente o método de colocação nos pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Resultados de estabilidade dos métodos pseudo-espectral e espectral de Chebyshev na norma de energia são obtidos. Além disso, estimativas de erro nas normas de H_w^s serão apresentadas. Tais estimativas aparecem em termos dos parâmetros de discretização (grau do polinômio) e da regularidade da função aproximada.

Algumas das ferramentas essenciais, utilizadas neste capítulo, são a equivalência entre as normas discreta e contínua sobre \mathbb{P}_{2N} , o fato da fórmula de integração de Chebyshev-Gauss-Lobatto ser exata sobre \mathbb{P}_{2N-1} e a definição dos operadores de projeção e interpolação.

Além dos operadores de projeção e interpolação do capítulo 3, definiremos o operador de projeção ortogonal Π_N de $H_w^1(I)$ em V_N . Estes operadores auxiliarão na análise de convergência dos métodos espectrais de Chebyshev.

Observamos que, mesmo enfatizando a dependência de ν nas estimativas de erro, o caso em que $\nu \rightarrow 0$ não é explicitamente investigado.

5.1 Equação de advecção-difusão

Seja $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, $x \in I$, a função peso de Chebyshev.

Sejam $\nu > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$ e as funções $b \in W^{1,\infty}(I)$ e $b_o \in L^\infty(I)$ dadas. Para qualquer

$u_o = u_o(x) \in L_w^2(I)$ e $f \in L^2(0, T; L_w^2(I))$, consideremos o problema parabólico ($T > 0$):

$$\begin{aligned} u_t - \nu u_{xx} + (bu)_x + b_o u &= f \text{ em } (0, T] \times I, \\ u(x, t) &= 0 \text{ sobre } (0, T] \times \Gamma, \\ u(x, 0) &= u_o(x) \text{ em } I. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Por simplicidade (referente a observação 5.1.1), assumiremos que

$$\frac{1}{2}b_x + b_o - \frac{1}{2}b\frac{w_x}{w} > 0 \text{ em } I. \quad (5.2)$$

Definimos $a_w : H_w^1(I) \times H_w^1(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, a forma bilinear sobre $H_w^1(I)$, por

$$a_w(u, v) = \int_I u_x (v w)_x dx.$$

Lema 5.1.1 Para qualquer $u \in H_{o,w}^1(I)$,

$$\int_I u^2(x)(1+x^2)w(x)^5 dx \leq \|u_x\|_{o,w}^2.$$

Demonstração. Seja $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Integrando por partes, via teorema 1.6,

$$2 \int_I u_x u x w^3 dx = \int_I (u^2)_x x w^3 dx = - \int_I u^2 (xw^3)_x dx. \text{ Agora, como } w_x = xw^3,$$

$$\begin{aligned} (xw^3)_x &= w^3 + 3xw^2w_x = w^3 + 3x^2w^5 = (w^3 + x^2w^5) + 2x^2w^5 = w^3(1+x^2w^2) + 2x^2w^5 \\ &= w^3(1+x^2(1-x^2)^{-1}) + 2x^2w^5 = w^3 \left(\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2} \right) + 2x^2w^5 \\ &= w^5 + 2x^2w^5 = w^5(1+2x^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$2 \int_I u_x u x w^3 dx = - \int_I u^2 (1+2x^2)w^5 dx. \quad (5.3)$$

Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_I (u_x + uxw^2)^2 w dx = \int_I (u_x)^2 w dx + \int_I u^2 x^2 w^5 dx + 2 \int_I u_x u x w^3 dx \\ &= \int_I (u_x)^2 w dx + \int_I u^2 x^2 w^5 dx - \int_I u^2 (1+2x^2)w^5 dx \\ &= \int_I (u_x)^2 w dx - \int_I u^2 (1+x^2)w^5 dx. \end{aligned}$$

ou seja, obtemos a desigualdade do lema. \square

No lema a seguir, deduziremos a desigualdade de Poincaré para $L_w^2(I)$ e estabeleceremos a continuidade da forma bilinear $a_w(\cdot, \cdot)$. Estas desigualdades são fundamentais para o restante desse capítulo.

Lema 5.1.2 *Existem constantes positivas β, γ, δ tais que para qualquer $v \in H_{o,w}^1$ e $u \in H_w^1$, temos:*

$$\|v\|_{o,w} \leq \beta \|v_x\|_{o,w}, \quad (5.4)$$

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|_{1,w}^2, \quad (5.5)$$

$$|a_w(u, v)| \leq \delta \|u_x\|_{o,w} \cdot \|v_x\|_{o,w}. \quad (5.6)$$

Demonstração. A desigualdade de Poincaré (5.4) segue diretamente do lema 5.1.1, tendo em vista que $w(x) > 1, \forall x \in I$. Para a continuidade de a_w , desigualdade (5.6), usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e novamente o lema 5.1.1. De fato,

$$\begin{aligned} a_w(u, v) &= \int_I u_x (vw)_x dx = \int_I u_x (v_x w + v w_x) dx = \int_I u_x (v_x w + v x w^3) dx \\ &= \int_I u_x (v_x + v x w^2) w dx \leq \|u_x\|_{o,w} \cdot \|v_x\|_{o,w} + \|u_x\|_{o,w} \cdot \left(\int_I v^2 x^2 w^5 dx \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \|u_x\|_{o,w} \cdot \|v_x\|_{o,w}. \end{aligned}$$

Agora, para a desigualdade (5.5), como na prova do lema 5.1.1, usando que $1 + 2x^2 \leq \frac{3}{2}(1 + x^2), \forall x \in I$,

$$\begin{aligned} a_w(v, v) &= \int_I (v_x)^2 w dx + \int_I v v_x x w^3 dx = \|v_x\|_{o,w}^2 - \frac{1}{2} \int_I v^2 (1 + 2x^2) w^5 dx \\ &\geq \|v\|_{o,w}^2 - \frac{3}{4} \int_I v^2 (1 + x^2) w^5 dx \geq \frac{1}{4} \|v_x\|_{o,w}^2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Poincaré, a norma e semi-norma são equivalentes, isto é,

$$\|v\|_{1,w}^2 = \|v\|_{o,w}^2 + \|v_x\|_{o,w}^2 \leq \beta^2 \|v_x\|_{o,w}^2 + \|v_x\|_{o,w}^2 = (1 + \beta^2) \|v_x\|_{o,w}^2,$$

o que implica $\frac{1}{4} \|v_x\|_{o,w}^2 \geq \frac{1}{4(1 + \beta^2)} \|v\|_{1,w}^2$ e, assim, obtemos a desigualdade (5.5). \square

Seja $V = H_{o,w}^1(I)$. Pelo lema 5.1.2, deduzimos que a_w é contínua e coerciva em V . Como mostrado no capítulo anterior, existe solução única para a equação (5.1). Desta forma temos $u \in L^2(0, T; V)$ e $u_t \in L^2(0, T; L_w^2)$. Denotaremos $L^p(0, T; X)$ por $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Consideremos a formulação fraca de (5.1),

$$\begin{aligned} u(t) \in V, \quad u(0) = u_o \\ \langle u_t, \phi \rangle_w + \nu a_w(u, \phi) + \langle (bu)_x + b_o u, \phi \rangle_w = \langle f, \phi \rangle_w, \quad \forall \phi \in V. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Proposição 5.1.3 *Existe uma constante $C > 0$, independente de ν , tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|u\|_{L^2(H_w^1)} \leq C (\|u_o\|_{o,w} + \|f\|_{L^2(L_w^2)}). \quad (5.8)$$

Demonstração. Escolhendo $\phi = u \in V$ na equação (5.7),

$$\langle u_t, u \rangle_w + \nu a_w(u, u) + \langle (bu)_x + b_o u, u \rangle_w = \langle f, u \rangle_w,$$

ou seja, temos

$$\begin{aligned} \int_I \frac{\partial u}{\partial t} u(x) w(x) dx + \nu a_w(u, u) + \langle (bu)_x + b_o u, u \rangle_w &= \langle f, u \rangle_w. \\ \frac{1}{2} \int_I \frac{\partial}{\partial t} (u^2) w(x) dx + \nu a_w(u, u) + \langle (bu)_x + b_o u, u \rangle_w &= \langle f, u \rangle_w \end{aligned}$$

Para a derivada de u com relação ao tempo, usamos a proposição (1.9.7), e derivamos sob sinal de integração (daqui em diante, esta passagem será sempre justificada pela proposição (1.9.7) e não será mais comentada), como segue:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_I u^2 w dx + \nu a_w(u, u) + \langle (bu)_x + b_o u, u \rangle_w = \langle f, u \rangle_w,$$

ou seja, $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{o,w}^2 + \nu a_w(u, u) + \langle (bu)_x + b_o u, u \rangle_w = \langle f, u \rangle_w$. Pela coercividade de a_w (5.5) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{o,w}^2 + \gamma \nu \|u\|_{1,w}^2 + \langle (bu)_x + b_o u, u \rangle_w \leq \|f\|_{o,w} \cdot \|u\|_{o,w}. \quad (5.9)$$

Por outro lado, com a integração por partes, feita a seguir, sendo justificada pelo teorema de Green 1.6, obtemos

$$\begin{aligned} \langle (bu)_x + b_o u, u \rangle_w &= \int_I (bu)_x u(x) w(x) dx + \int_I b_o u(x)^2 w(x) dx \\ &= - \int_I (bu)(uw)_x dx + \int_I b_o u^2 w dx = - \int_I [bu^2 w_x + buu_x w] dx + \int_I b_o u^2 w dx \\ &= \int_I \left(b_o - \frac{bw_x}{w} \right) u^2 w dx - \int_I buwu_x dx. \end{aligned}$$

Agora,

$$\int_I buwu_x = \int_I \frac{1}{2} bw \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dx = -\frac{1}{2} \int_I (bw)_x u^2 dx = -\frac{1}{2} \int_I [b_x w u^2 + b w_x u^2] dx.$$

Portanto, pela hipótese (5.2),

$$\langle (bu)_x + b_o u, u \rangle_w = \int_I \left(b_o - \frac{1}{2} \frac{b w_x}{w} + \frac{1}{2} b_x \right) u^2 w dx > 0. \quad (5.10)$$

Então, pela desigualdade algébrica, segue

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{o,w}^2 + \nu \gamma \|u\|_{1,w}^2 \leq \|f\|_{o,w}^2 + \|u\|_{o,w}^2.$$

Aplicando o Lema de Gronwall 1.10.2, temos

$$\|u\|_{o,w}^2 \leq e^t \|u(x, 0)\|_{o,w}^2 + \int_0^t \|f\|_{o,w}^2(s) e^{t-s} ds - 2\nu\gamma \int_0^t \|u\|_{1,w}^2 e^{t-s} ds.$$

Agora, $0 \leq s \leq t \leq T$; $0 \leq t - s \leq T - s \leq T$; $1 \leq e^{t-s} \leq e^T$. Logo,

$$\|u\|_{o,w}^2 + \nu\gamma \int_0^t \|u\|_{1,w}^2 ds \leq e^T \left(\|u_o\|_{o,w}^2 + \int_0^T \|f\|_{o,w}^2 ds \right), \quad \forall t.$$

A desigualdade acima vale $\forall t \in [0, T]$. Em particular, é válida para $t = T$, isto é,

$$\|u\|_{o,w}^2 + \nu\gamma \int_0^T \|u\|_{1,w}^2 ds \leq e^T \left(\|u_o\|_{o,w}^2 + \int_0^T \|f\|_{o,w}^2 ds \right).$$

Através da desigualdade da raiz, segue

$$\begin{aligned} \|u\|_{o,w} &\leq e^{T/2} \{ \|u_o\|_{o,w} + \|f\|_{L^2(L_w^2)} \}, \\ \sqrt{\nu} \|u\|_{L^2(H_w^1)} &\leq \frac{e^{T/2}}{\sqrt{\gamma}} \{ \|u_o\|_{o,w} + \|f\|_{L^2(L_w^2)} \}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Tomando o supremo essencial de (5.11),

$$\|u\|_{L^\infty(L_w^2)} \leq e^{T/2} \{ \|u_o\|_{o,w} + \|f\|_{L^2(L_w^2)} \}.$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|u\|_{L^2(H_w^1)} \leq C \{ \|u_o\|_{o,w} + \|f\|_{L^2(L_w^2)} \},$$

ou seja, obtemos a estimativa da proposição. \square

Observação 5.1.1 (i) A condição (5.2) é desnecessária para obtermos (5.8), pois de (5.9),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|u\|_{o,w}^2 + 2\gamma\nu \|u\|_{1,w}^2 &\leq 2\|f\|_{o,w} \cdot \|u\|_{o,w} - 2\langle (bu)_x, u \rangle_w - 2\langle b_o u, u \rangle_w \\
&\leq 2\|f\|_{o,w} \cdot \|u\|_{o,w} + 2|\langle (bu)_x, u \rangle_w| + 2|\langle b_o u, u \rangle_w| \\
&\leq \|f\|_{o,w}^2 + \|u\|_{o,w}^2 + 2(|\langle b_x u + bu_x, u \rangle_w| + |\langle b_o u, u \rangle_w|) \\
&\leq \|f\|_{o,w}^2 + \|u\|_{o,w}^2 + 2\|b_x\|_\infty \|u\|_{o,w}^2 + 2\|b\|_\infty \|u_x\|_{o,w} \cdot \|u\|_{o,w} + \|b_o\|_\infty \|u\|_{o,w}^2.
\end{aligned}$$

Agora, usando a ε -desigualdade, com $\varepsilon = \frac{\gamma\nu}{\|b\|_\infty}$,

$$\begin{aligned}
2\|b\|_\infty \|u_x\|_{o,w} \cdot \|u\|_{o,w} &\leq 2\|b\|_\infty \left\{ \frac{\gamma\nu \|u_x\|_{o,w}^2}{2\|b\|_\infty} + \frac{\|b\|_\infty}{2\gamma\nu} \|u\|_{o,w}^2 \right\} = \gamma\nu \|u_x\|_{o,w}^2 + \frac{\|b\|_\infty^2}{\gamma\nu} \|u\|_{o,w}^2 \\
&\leq \|u\|_{1,w}^2 \gamma\nu + \frac{\|b\|_\infty^2}{\gamma\nu} \|u\|_{o,w}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|u\|_{o,w}^2 + 2\gamma\nu \|u\|_{1,w}^2 &\leq \|f\|_{o,w}^2 + \left(1 + 2\|b_x\|_\infty + 2\|b_o\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty^2}{\gamma\nu} \right) \|u\|_{o,w}^2 + \gamma\nu \|u\|_{1,w}^2 \\
&= \|f\|_{o,w}^2 + C_1 \|u\|_{o,w}^2 + \gamma\nu \|u\|_{1,w}^2,
\end{aligned}$$

em que C_1 depende de ν . Logo, temos

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{o,w}^2 + \gamma\nu \|u\|_{1,w}^2 \leq \|f\|_{o,w}^2 + C_1 \|u\|_{o,w}^2,$$

e aplicamos o Lema de Gronwall 1.10.2 como feito anteriormente. Notamos que a constante final C agora depende de ν . \square

(ii) A condição (5.2) não é restritiva, pois caso tenhamos $\frac{1}{2}b_x + b_o \leq \frac{1}{2}b \frac{w_x}{w}$, podemos encontrar $\lambda > 0$ conveniente tal que (5.2) pode ser alcançada fazendo a mudança de variável $v(t) = e^{-\lambda t} u(t)$. De fato,

$$\begin{aligned}
v_t &= -\lambda e^{-\lambda t} u(t) + e^{-\lambda t} u_t = -\lambda e^{-\lambda t} u(t) + e^{-\lambda t} (\nu u_{xx} - (bu)_x - b_o u + f) \\
&= -\lambda v + \nu v_{xx} - (bv)_x - b_o v + f e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $v_t - \nu v_{xx} + (bv)_x + B_o v = F$, em que $B_o = b_o + \lambda$ e $F = f e^{-\lambda t}$. Para λ suficientemente grande, obtemos $\frac{1}{2}b_x + B_o \geq \frac{1}{2}b \frac{w_x}{w}$. \square

5.2 Métodos Chebyshev-espectrais para aproximar (5.1)

Seja $p_n = \tau_n T_n$, $\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\tau_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\forall n \geq 1$, T_n é o polinômio de Chebyshev de primeira espécie com $T_n(1) = 1$, família de polinômios ortonormais com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$. Sabemos que $\forall u \in L_w^2(I)$, $u = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n p_n$ em que $\hat{u}_n = \langle u, p_n \rangle_w$.

Para qualquer inteiro $N \geq 0$, o conjunto gerado por $\{p_n\}_{n=0}^N$ coincide com o espaço \mathbb{P}_N dos polinômios de grau menor ou igual a N sobre I .

Definimos $V_N = \{\phi \in \mathbb{P}_N : \phi(-1) = \phi(1) = 0\}$. Notamos que a dimensão de V_N é $(N - 1)$.

Seja $u_{0N} \in V_N$, a conveniente aproximação de u_o em V_N . A aproximação espectral do problema (5.1) é dada por:

Encontrar $u_N \in H^1(V_N)$ tal que:

$$\langle u_{N,t}, \phi \rangle_w + \nu a_w(u_N, \phi) + \langle (bu_N)_x + b_o u_N, \phi \rangle_w = \langle f, \phi \rangle_w, \quad \forall \phi \in V_N, \quad q.s \quad (5.12)$$

$$u_N(0) = u_{0N}$$

Argumentando como na proposição 5.1.3, obtemos o seguinte resultado de estabilidade.

Proposição 5.2.1 *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u_N\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|u_N\|_{L^2(H_w^1)} \leq C (\|u_{0N}\|_{o,w} + \|f\|_{L^2(L_w^2)}). \quad (5.13)$$

Para auxiliar na demonstração de convergência do método espectral para a solução exata, introduzimos o operador de projeção Π_N , definido por

$$\Pi_N : H_{o,w}^1 \longrightarrow V_N, \quad a_w(u - \Pi_N u, \phi) = 0, \quad \forall \phi \in V_N. \quad (5.14)$$

Obteremos, a seguir, um resultado fundamental de aproximação polinomial, estimando o erro de projeção em normas de Sobolev.

Teorema 5.2.2 *Seja $u \in H_w^\sigma \cap H_{o,w}^1$, $\sigma \geq 1$,*

$$\|u - \Pi_N u\|_{\mu,w} \leq C \cdot \|u\|_{\sigma,w} \cdot \begin{cases} N^{\mu-\sigma} & 0 \leq \mu \leq 1. \\ N^{\frac{3\mu-1}{2}-\sigma} & 1 < \mu \leq \min(2, \sigma). \end{cases} \quad (5.15)$$

Demonstração. Para provarmos (5.15) seguiremos a seguinte estratégia: primeiro, provaremos para $\mu = 0$, na sequência, para $\mu = 1$, pela técnica de dualidade, e para $0 < \mu < 1$ por

interpolação. Para auxiliar na demonstração definimos o operador $\tilde{\Pi}_N : H_{\sigma,w}^1 \longrightarrow V_N$, por

$$\left\langle (u - \tilde{\Pi}_N u)_x, \phi_x \right\rangle_w = 0, \quad \forall \phi \in V_N. \quad (5.16)$$

Dado $\xi \in \bar{I}$, definimos, também,

$$H_N(\xi) = \int_{-1}^{\xi} P_{N-1} u_x dx. \quad (5.17)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\forall \xi \in \bar{I}$,

$$\begin{aligned} |u(\xi) - H_N(\xi)| &= \left| u(\xi) - \int_{-1}^{\xi} P_{N-1} u_x dx \right| = \left| \int_{-1}^{\xi} (u_x - P_{N-1} u_x) dx \right| \\ &\leq \left(\int_{-1}^{\xi} w^{-1} dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-1}^{\xi} |u_x - P_{N-1} u_x|^2 w dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \cdot \|u_x - P_{N-1} u_x\|_{\sigma,w}. \end{aligned}$$

Pela estimativa (3.15) aplicada na desigualdade acima, obtemos que, $\forall \xi \in \bar{I}$, $\sigma \geq 1$

$$|u(\xi) - H_N(\xi)| \leq CN^{1-\sigma} \|u_x\|_{\sigma-1,w} \leq CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w}, \quad (5.18)$$

a última desigualdade devido ao teorema 1.5.7. Além disso, pelas definições do operador de projeção P_N 3.2.2 e do operador auxiliar $\tilde{\Pi}_N$, temos

$$\left\langle P_{N-1} u_x - (\tilde{\Pi}_N u)_x, \phi_x \right\rangle_w = 0, \quad \forall \phi \in V_N. \quad (5.19)$$

Agora, definimos

$$R_N(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \left[P_{N-1} u_x - \frac{H_N(1)}{2} \right] dx$$

e observemos que $R_N \in V_N$. Então, por (5.19),

$$\begin{aligned} \left| \left\langle (\tilde{\Pi}_N u - R_N)_x, \phi_x \right\rangle_w \right| &= \left| \left\langle (\tilde{\Pi}_N u)_x - \left(P_{N-1} u_x - \frac{H_N(1)}{2} \right), \phi_x \right\rangle_w \right| \\ &= \left| \left\langle (\tilde{\Pi}_N u)_x - P_{N-1} u_x, \phi_x \right\rangle_w - \frac{1}{2} \langle H_N(1), \phi_x \rangle_w \right| \\ &= \frac{1}{2} |\langle H_N(1), \phi_x \rangle_w|, \quad \forall \phi \in V_N. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Poincaré (5.4), e escolhendo $\phi = \tilde{\Pi}_N u - R_N \in V_N$ na identidade acima,

temos que

$$\begin{aligned} \tilde{C} \|\tilde{\Pi}_N u - R_N\|_{1,w}^2 &\leq \|(\tilde{\Pi}_N u - R_N)_x\|_{o,w}^2 = \frac{1}{2} \left| \left\langle H_N(1), (\tilde{\Pi}_N u - R_N)_x \right\rangle_w \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |H_N(1)| \cdot \|(\tilde{\Pi}_N u - R_N)_x\|_{o,w} \leq \frac{1}{2} |H_N(1)| \cdot \|(\tilde{\Pi}_N u - R_N)\|_{1,w}. \end{aligned}$$

Então, pela estimativa (5.18) (com $\xi = 1$),

$$\|\tilde{\Pi}_N u - R_N\|_{1,w} \leq C |H_N(1)| \leq CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w}.$$

Desta forma, obteremos que

$$\|u - \tilde{\Pi}_N u\|_{1,w} \leq CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w}. \quad (5.20)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{\Pi}_N u\|_{1,w} &\leq \|u - R_N\|_{1,w} + \|R_N - \tilde{\Pi}_N u\|_{1,w} \\ &\leq \|u - R_N\|_{1,w} + CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w}. \end{aligned}$$

Para estimar o primeiro termo do segundo membro da desigualdade acima, usaremos a estimativa (3.15) e, novamente, a estimativa (5.18), como segue:

$$\begin{aligned} \|u - R_N\|_{1,w} &= \left\| \int_{-1}^{\xi} u_x dx - \int_{-1}^{\xi} \left[P_{N-1} u_x - \frac{H_N(1)}{2} \right] dx \right\|_{1,w} \\ &= \left\| \int_{-1}^{\xi} [u_x - P_{N-1} u_x] dx + \int_{-1}^{\xi} \frac{H(1)}{2} dx \right\|_{1,w} \\ &\leq \int_{-1}^1 \|u_x - P_{N-1} u_x\|_{1,w} dx + \int_{-1}^1 \left\| \frac{H(1)}{2} \right\|_{1,w} dx \\ &\leq CN^{\frac{1}{2}-\sigma-1} \|u_x\|_{\sigma-1,w} + CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} \\ &\leq CN^{-\frac{1}{2}-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} + CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} \\ &\leq CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} + CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} \leq CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w}. \end{aligned}$$

Agora, pela coercividade (5.5), continuidade (5.6) e definição do operador Π_N , pois $\tilde{\Pi}_N u - \Pi_N u \in V_N$,

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_N u\|_{1,w}^2 &\leq \gamma^{-1} a_w(u - \Pi_N u, u - \Pi_N u) = \gamma^{-1} a_w(u - \Pi_N u, u - \tilde{\Pi}_N u + \tilde{\Pi}_N u - \Pi_N u) \\ &= \gamma^{-1} a_w(u - \Pi_N u, u - \tilde{\Pi}_N u) + \gamma^{-1} a_w(u - \Pi_N u, \tilde{\Pi}_N u - \Pi_N u) \\ &= \gamma^{-1} a_w(u - \Pi_N u, u - \tilde{\Pi}_N u) \\ &\leq \gamma^{-1} \delta \|u - \Pi_N u\|_{1,w} \cdot \|u - \tilde{\Pi}_N u\|_{1,w} \end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade (5.20), segue que

$$\|u - \Pi_N u\|_{1,w} \leq \gamma^{-1} \delta \|u - \tilde{\Pi}_N u\|_{1,w} \leq CN^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w}, \quad \forall \sigma \geq 1, \quad (5.21)$$

e, desta forma, (5.15) está provada para $\mu = 1$.

Para obtermos (5.15) para $\mu = 0$, identificamos $L^2(I)$ com o seu dual.

$$\|u - \Pi_N u\|_{o,w} = \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{\langle u - \Pi_N u, \psi \rangle}{\|\psi\|_{o,w}} = \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{\langle \psi, u - \Pi_N u \rangle}{\|\psi\|_{o,w}}.$$

Definimos o operador $T : (H_{o,w}^1(I))' \longrightarrow H_{o,w}^1(I)$ por

$$a_w(Tg, \phi) = \langle g, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in H_{o,w}^1(I). \quad (5.22)$$

Segue de (5.5) que T é um operador limitado, pois,

$$a_w(T(g_1 - g_2), T(g_1 - g_2)) \geq \gamma \|T(g_1 - g_2)\|_{1,w}^2.$$

Por outro lado,

$$a_w(T(g_1 - g_2), T(g_1 - g_2)) = \langle g_1 - g_2, T(g_1 - g_2) \rangle \leq \|g_1 - g_2\|_{(H_{o,w}^1)'} \cdot \|T(g_1 - g_2)\|_{1,w}.$$

Portanto, $\|T(g_1 - g_2)\|_{1,w} \leq \frac{1}{\gamma} \|g_1 - g_2\|_{(H_{o,w}^1)'}$. Também, T é linear, pois

$$\begin{aligned} a_w(T(g_1 + \lambda g_2), \phi) &= \langle g_1 + \lambda g_2, \phi \rangle = \langle g_1, \phi \rangle + \lambda \langle g_2, \phi \rangle \\ &= a_w(Tg_1, \phi) + \lambda a_w(Tg_2, \phi) \\ &= a_w(Tg_1 + \lambda Tg_2, \phi). \end{aligned}$$

Por (5.22), definição de a_w (5.14) e continuidade (5.6), obtemos

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_N u\|_{o,w} &= \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{\langle u - \Pi_N u, \psi \rangle}{\|\psi\|_{o,w}} = \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{\langle \psi, u - \Pi_N u \rangle}{\|\psi\|_{o,w}} \\ &= \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{a_w(T\psi, u - \Pi_N u)}{\|\psi\|_{o,w}} \\ &= \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{a_w(u - \Pi_N u, T\psi)}{\|\psi\|_{o,w}} \\ &= \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{a_w(u - \Pi_N u, T\psi - \Pi_N(T\psi))}{\|\psi\|_{o,w}} \\ &\leq \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{\delta \|(u - \Pi_N u)_x\|_{o,w} \cdot \|(T\psi - \Pi_N(T\psi))_x\|_{o,w}}{\|\psi\|_{o,w}}. \end{aligned}$$

Portanto, por (5.21) (com $\sigma = 2$),

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_N u\|_{o,w} &\leq \delta \|u - \Pi_N u\|_{1,w} \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{\|T\psi - \Pi_N(T\psi)\|_{1,w}}{\|\psi\|_{o,w}} \\ &\leq \delta \|u - \Pi_N u\|_{1,w} N^{-1} \sup_{\psi \in L^2(I)} \frac{\|T\psi\|_{2,w}}{\|\psi\|_{o,w}} \leq C\delta N^{-1} \|u - \Pi_N u\|_{1,w}, \end{aligned}$$

a última desigualdade acima vem do fato de T ser um operador linear contínuo de $H_w^s(I)$ em $H_{o,w}^1(I) \cap H_w^{s+2}(I)$, $\forall s \geq 0$. De fato, sejam $s \in \mathbb{N}$, $g \in H_w^s(I)$ e $\varphi \in C_o^\infty(I)$. Por (5.22), temos que $\int_I (Tg)_x (\varphi w)_x dx = \langle g, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in C_o^\infty(I)$. Integrando por partes e usando o teorema de Representação de Riesz, $-\int_I (Tg)_{xx} \varphi w dx = \int_I v_g \varphi w dx$, $\forall \varphi \in C_o^\infty(I)$, ou seja, $-(Tg)_{xx} = v_g$ em $\mathcal{D}'(I)$, pois $v_g \in H_w^s(I)$ (usaremos a identificação $(-Tg)_{xx} = g$ em I). Então, $(Tg)_x \in H_w^{s+1}(I)$ e $Tg \in H_w^{s+2}(I)$. Agora,

$$\begin{aligned} \|D^{s+2}(Tg)\|_{o,w}^2 &= \langle D^{s+2}(Tg), D^{s+2}(Tg) \rangle_w = \langle D^s(D^2Tg), D^s(D^2Tg) \rangle_w \\ &= \langle -D^s g, -D^s g \rangle_w = \|D^s g\|_{o,w}^2. \end{aligned}$$

Analogamente, $\|D^{s+1}(Tg)\|_{o,w}^2 = \|D^{s-1}g\|_{o,w}^2$. Então,

$$\begin{aligned} \|Tg\|_{s+2,w}^2 &= \sum_{k=0}^s \|D^k(Tg)\|_{o,w}^2 + \|D^{s+1}(Tg)\|_{o,w}^2 + \|D^{s+2}(Tg)\|_{o,w}^2 \\ &= \|Tg\|_{s,w}^2 + \|D^s g\|_{o,w}^2 + \|D^{s-1}g\|_{o,w}^2 \leq \|T\|^2 \cdot \|g\|_{s,w}^2 + \|g\|_{s,w}^2 + \|g\|_{s,w}^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\gamma^2} + 2\right) \cdot \|g\|_{s,w}^2 \leq C\|g\|_{s,w}^2. \end{aligned}$$

Para $s > 0$ real, o resultado segue por interpolação.

Então, novamente por (5.21),

$$\|u - \Pi_N u\|_{o,w} \leq CN^{-1} \|u - \Pi_N u\|_{1,w} \leq CN^{-1} N^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} \leq CN^{-\sigma} \|u\|_{\sigma,w}. \quad (5.23)$$

Agora, (5.15) é válida para $\mu \in (0, 1)$ por interpolação de (5.23) e (5.21), pelo teorema 1.5.12. Logo, se $\mu \in [0, 1]$,

$$\|u - \Pi_N u\|_{\mu,w} \leq CN^{\mu-\sigma} \|u\|_{\sigma,w}, \quad \sigma \geq 1,$$

e o teorema está demonstrado. \square

No seguinte teorema usaremos a notação: $\tilde{u} = \Pi_N u$, $e = \tilde{u} - u_N$ e $\rho = \tilde{u} - u$. Neste teorema, obtemos uma primeira estimativa, na norma $L^\infty(L_w^2)$, para o erro entre a solução exata do problema discreto (5.12) e a solução exata da EDP (5.1). Como já temos uma

estimativa para $u - \Pi_N u$ nessa norma, derivamos uma equação variacional para $e = \Pi_N u - u_N$, que resulta em estimativa para $\|e\|_{L^\infty(L_w^2)}$. Obtemos, então, $\|u - u_N\|_{L^\infty(L_w^2)}$ via desigualdade triangular.

Teorema 5.2.3 *Sejam $u \in L^\infty(H_w^\sigma)$, $u_t \in L^2(H_w^\sigma)$ para algum $\sigma \geq 1$ e $u_{0N} = \Pi_N u_o$. Então,*

$$\|u - u_N\|_{L^\infty(L_w^2)} \leq C \cdot N^{-\sigma} \{ \|u\|_{L^\infty(H_w^\sigma)} + \|u_t\|_{L^2(H_w^\sigma)} \}. \quad (5.24)$$

Demonstração. Pela formulação fraca (5.7) e pela definição 5.14, segue que

$$\langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_w + \nu a_w(\tilde{u}, \phi) + \langle (b\tilde{u})_x + b_o\tilde{u}, \phi \rangle_w = \langle f, \phi \rangle_w + \langle \rho_t + (b\rho)_x + b_o\rho, \phi \rangle_w, \quad \forall \phi \in V_N. \quad (5.25)$$

De fato, $A(\tilde{u}) = \tilde{u}_t - \nu \tilde{u}_{xx} + (b\tilde{u})_x + b_o\tilde{u}$, então

$$\begin{aligned} A(\tilde{u}) &= u_t - \nu u_{xx} + (bu)_x + b_o u + \tilde{u}_t - u_t - \nu \tilde{u}_{xx} + \nu u_{xx} - (bu)_x + b_o\tilde{u} - b_o u + (b\tilde{u})_x \\ &= f + \rho_t - \nu \tilde{u}_{xx} + \nu u_{xx} - (bu)_x + b_o\rho + (b\tilde{u})_x \\ &= f + \rho_t + b_o\rho - bu_x - b_x u + b_x \tilde{u} + \tilde{u}_x b - \nu (\tilde{u}_{xx} - u_{xx}) \\ &= f + \rho_t + b_o\rho + b(\tilde{u}_x - u_x) + b_x(\tilde{u} - u) - \nu (\tilde{u}_{xx} - u_{xx}) \\ &= f + \rho_t + b_o\rho + b\rho_x + b_x\rho - \nu (\tilde{u}_{xx} - u_{xx}) \\ &= f + \rho_t + b_o\rho + (b\rho)_x - \nu (\tilde{u}_{xx} - u_{xx}). \end{aligned}$$

Seja $\phi \in V_N$, multiplicando por $\phi \cdot w$ e integrando sobre I , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_w - \nu \int_I \tilde{u}_{xx} \phi w \, dx + \langle (b\tilde{u})_x + b_o\tilde{u}, \phi \rangle_w &= \langle f, \phi \rangle_w \\ &+ \langle \rho_t + (b\rho)_x + b_o\rho, \phi \rangle_w - \nu \int_I \rho_{xx} w \phi \, dx \end{aligned}$$

Integrando por partes o segundo termo do primeiro membro da igualdade acima, temos

$-\nu \int_I \tilde{u}_{xx} \phi w \, dx = \nu a_w(\tilde{u}, \phi)$. Novamente, integrando por partes o último termo do segundo membro da igualdade acima, usando a definição (5.14), pois $\rho_{xx} \in V_N$, obtemos equação (5.25).

Agora, subtraímos a equação (5.25) da equação (5.12), obtemos

$$\begin{aligned} \langle e_t, \phi \rangle_w + \nu a_w(e, \phi) + \langle (be)_x + b_o e, \phi \rangle_w &= \langle \rho_t + (b\rho)_x + b_o\rho, \phi \rangle_w, \quad \forall \phi \in V_N \\ e(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Escolhendo $\phi = e \in V_N$ na equação (5.26), temos

$$\langle e_t, e \rangle_w + \nu a_w(e, e) + \langle (be)_x + b_o e, e \rangle_w = \langle \rho_t + (b\rho)_x + b_o\rho, e \rangle_w$$

Aplicando a desigualdade (5.5), Cauchy-Schwarz e de maneira análoga como em (5.10),

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e\|_{o,w}^2 + \gamma\nu \|e_x\|_{1,w}^2 \leq \|\rho_t\|_{o,w} \cdot \|e\|_{o,w} + \langle (b\rho)_x, e \rangle_w + \|b_o\rho\|_{o,w} \cdot \|e\|_{o,w}. \quad (5.27)$$

Agora, seja $u = \int_{-1}^x (b\rho)(\xi)d\xi$ e $v = e$ em (5.6). Então, $|a_w(u, v)| \leq \delta \|b\rho\|_{o,w} \cdot \|e_x\|_{o,w}$. Mas, por outro lado,

$$|a_w(u, e)| = \left| \int_I u_x (ew)_x dx \right| = \left| \int_I (b\rho)(ew)_x dx \right| = \left| \int_I (b\rho)_x (ew) dx \right| = |\langle (b\rho)_x, e \rangle_w|.$$

Logo, através da ε -desigualdade com $\varepsilon = \gamma\nu$,

$$\langle (b\rho)_x, e \rangle_w \leq |\langle (b\rho)_x, e \rangle_w| = |a_w(u, e)| \leq \delta \|b\rho\|_{o,w} \cdot \|e_x\|_{o,w} \leq \frac{\delta^2}{2\gamma\nu} \|b\rho\|_{o,w}^2 + \frac{\nu\gamma}{2} \|e_x\|_{o,w}^2, \quad (5.28)$$

Substituindo (5.28) em (5.27), segue

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e\|_{o,w}^2 + \gamma\nu \|e_x\|_{1,w}^2 \leq \|\rho_t\|_{o,w} \cdot \|e\|_{o,w} + \frac{\delta^2}{2\nu\gamma} \|b\rho\|_{o,w}^2 + \frac{\nu\gamma}{2} \|e_x\|_{o,w}^2 + \|b_o\rho\|_{o,w} \cdot \|e\|_{o,w}.$$

Usando a desigualdade algébrica, $C_1 = \frac{2\delta^2}{\gamma}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e\|_{o,w}^2 + \gamma\nu \|e_x\|_{o,w}^2 &\leq \|\rho_t\|_{o,w}^2 + \|e\|_{o,w}^2 + \frac{C_1}{\nu} \|b\rho\|_{o,w}^2 + \|b_o\rho\|_{o,w}^2 + \|e\|_{o,w}^2 \\ &\leq \left\{ \|\rho_t\|_{o,w}^2 + \frac{C_1}{\nu} \|b\rho\|_{o,w}^2 + \|b_o\rho\|_{o,w}^2 \right\} + 2\|e\|_{o,w}^2. \end{aligned}$$

Aplicando o lema de Gronwall 1.10.2,

$$\|e\|_{o,w}^2 \leq \int_0^t \left[\|\rho_t\|_{o,w}^2 + \frac{C_1}{\nu} \|b\rho\|_{o,w}^2 + \|b_o\rho\|_{o,w}^2 - \gamma\nu \|e_x\|_{o,w}^2 \right] e^{2(t-s)} ds.$$

Então, $\forall t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|e\|_{o,w}^2 + \gamma\nu \int_0^t \|e_x\|_{o,w}^2 ds &\leq e^{2T} \left\{ \int_0^T \left[\|\rho_t\|_{o,w}^2 + \frac{C_1}{\nu} \|b\rho\|_{o,w}^2 + \|b_o\rho\|_{o,w}^2 \right] ds \right\} \\ &\leq e^{2T} \left\{ \int_0^T \left[\|\rho_t\|_{o,w}^2 + \frac{C_1}{\nu} \|b\|_\infty \|\rho\|_{o,w}^2 + \|b_o\|_\infty \|\rho\|_{o,w}^2 \right] ds \right\} \\ &= e^{2T} \left\{ \int_0^T \left[\|\rho_t\|_{o,w}^2 + \left(\frac{C_1}{\nu} \|b\|_\infty + \|b_o\|_\infty \right) \|\rho\|_{o,w}^2 \right] ds \right\} \\ &= \frac{e^{2T}}{\nu} \int_0^T [\nu \|\rho_t\|_{o,w}^2 + \tilde{c} \|\rho\|_{o,w}^2] ds, \quad C_2 = \max(\nu, \tilde{c}) \\ &\leq \frac{C_2 e^{2T}}{\nu} \{ \|\rho_t\|_{o,w}^2 + \|\rho\|_{o,w}^2 \}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|e\|_{o,w} + \sqrt{\nu} \left(\int_0^t \|e_x\|_{o,w}^2 ds \right)^{1/2} \leq \frac{C_3 e^T}{\sqrt{\nu}} \{ \|\rho_t\|_{L^2(L_w^2)} + \|\rho\|_{L^2(L_w^2)} \}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.29)$$

Notamos que o lado direito da desigualdade acima não depende de t , tomando o supremo essencial, temos:

$$\|e\|_{L^\infty(L_w^2)} \leq \frac{C_3 e^T}{\sqrt{\nu}} \{ \|\rho_t\|_{L^2(L_w^2)} + \|\rho\|_{L^2(L_w^2)} \}. \quad (5.30)$$

Assim, através da estimativa (5.15) e desigualdade triangular obtemos (5.24). De fato,

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_{L^\infty(L_w^2)} &= \|u - \Pi_N u + \Pi_N u - u_N\|_{L^\infty(L_w^2)} \\ &\leq \|u - \Pi_N u\|_{L^\infty(L_w^2)} + \|\Pi_N u - u_N\|_{L^\infty(L_w^2)} \\ &= \|\rho\|_{L^\infty(L_w^2)} + \|e\|_{L^\infty(L_w^2)} \\ &\leq \|\rho\|_{L^\infty(L_w^2)} + \tilde{C}_3 \|\rho_t\|_{L^2(L_w^2)} + \tilde{C}_3 \|\rho\|_{L^2(L_w^2)} \\ &\leq \|\rho\|_{L^\infty(L_w^2)} + \tilde{C}_3 \|\rho_t\|_{L^2(L_w^2)} + C_4 \|\rho\|_{L^\infty(L_w^2)} \\ &\leq C_5 \|\rho\|_{L^\infty(L_w^2)} + \tilde{C}_3 \|\rho_t\|_{L^2(L_w^2)} \\ &\leq C_6 N^{-\sigma} \|u\|_{L^\infty(H_w^\sigma)} + C_7 N^{-\sigma} \|u_t\|_{L^2(H_w^\sigma)} \\ &\leq CN^{-\sigma} \{ \|u\|_{L^\infty(H_w^\sigma)} + \|u_t\|_{L^2(H_w^\sigma)} \}, \end{aligned}$$

pois, como $u \in L^\infty(H_w^\sigma)$, $\|u - \Pi_N u\|_{L^2(L_w^2)} \leq \|u - \Pi_N u\|_{L^\infty(L_w^2)}$. \square

Estimaremos, a seguir, o erro na derivada espacial de u_N na norma de $L^2(L_w^2)$. A estimativa é uma consequência imediata de (5.29), (5.15) e da desigualdade triangular

$$\|(u - u_N)_x\|_{L^2(L_w^2)} \leq \|\rho\|_{L^2(H_w^1)} + \left(\int_0^t \|e_x\|_{o,w}^2 ds \right)^{1/2}.$$

Teorema 5.2.4 *Sob as hipóteses do teorema anterior,*

$$\sqrt{\nu} \|(u - u_N)_x\|_{L^2(L_w^2)} \leq CN^{1-\sigma} \{ \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)} + \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} \}. \quad (5.31)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|(u - u_N)_x\|_{L^2(L_w^2)} &\leq \|\rho\|_{L^2(H_w^1)} + \left(\int_0^t \|e_x\|_{o,w}^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq C_8 (\|\rho_t\|_{L^2(L_w^2)} + \|\rho\|_{L^2(L_w^2)}) + \|\rho\|_{L^2(H_w^1)} \\ &\leq C_9 (\|(\Pi_N u - u)_t\|_{L^2(L_w^2)} + \|\Pi_N u - u\|_{L^2(H_w^1)}) \\ &\leq CN^{1-\sigma} (\|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)}), \end{aligned}$$

ou seja, a desigualdade (5.31). \square

Observação 5.2.1 Notamos que o operador Π_N comuta com o operador derivada em relação ao tempo, isto é, $\frac{\partial}{\partial t}\Pi_N u = \Pi_N u_t$. De fato, seja $\{\psi_k\}_{k=2}^N$ uma base para V_N ortonormalizada pelo processo de Gram-Schmidt, são ortogonais em relação a a_w . Temos que $\Pi_N u_t \in V_N$. Então,

$$\Pi_N u_t = \sum_{k=2}^N c_k(t)\psi_k(x). \text{ Da mesma forma, } \Pi_N u = \sum_{k=2}^N b_k(t)\psi_k(x) \text{ e } \frac{\partial}{\partial t}(\Pi_N u) = \sum_{k=2}^N b'_k(t)\psi_k(x).$$

Por outro lado, $a_w(\Pi_N u_t, \psi_l) = \sum_{k=2}^N c_k(t)a_w(\psi_k, \psi_l) = \sum_{k=2}^N c_k(t)\delta_{k,l} = c_l(t)$. Analogamente, $a_w(\Pi_N u, \psi_l) = b_l(t)$. Assim, usando a definição de Π_N , o teorema 1.9.7,

$$\begin{aligned} c_l(t) &= a_w(\Pi_N u_t, \psi_l) = a_w(u_t, \psi_l) = \int_I (u_t)_x (\psi_l w)_x dx = \int_I (u_x)_t (\psi_l w)_x dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_I u_x (\psi_l w)_x dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} a_w(u, \psi_l) = \frac{\partial}{\partial t} a_w(\Pi_N u, \psi_l) = \frac{\partial}{\partial t} b_l(t) = b'_l(t). \end{aligned}$$

Na igualdade acima usamos o fato que $(u_t)_x = (u_x)_t$ no sentido das distribuições. Pois, sejam $u \in L^2(0, T; H^1_{o,w})$, $u_t \in L^2(0, T; H^1_{o,w})$, $\{\varphi_n\} \subset C^\infty_0((0, T) \times I)$ seqüência que aproxima u em $L^2(0, T; H^1_{o,w})$, via densidade. Logo,

$$\int_0^T \|u - \varphi_n\|_{1,w}^2 dt \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Como $(\varphi_n)_{xt} = (\varphi_n)_{tx}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, basta mostrarmos que:

(a) $(\varphi_n)_{xt} \longrightarrow (u_x)_t$ em $L^2(0, T; L^2_w)$,

(b) $(\varphi_n)_{tx} \longrightarrow (u_t)_x$ em $L^2(0, T; L^2_w)$.

É suficiente mostrarmos que se $\varphi_n \longrightarrow u \in L^2_w(I)$, $\varphi_n \in C^\infty_0(I)$, então $(\varphi_n)_x \longrightarrow u_x$. De fato, se $\varphi_n \longrightarrow u$, $T\varphi_n \longrightarrow Tu$, isto é, $T\varphi_n(\xi) \longrightarrow Tu(\xi)$, $\forall \xi \in C^\infty_0(I)$. Então,

$DT_u(\psi) = (-1)T_u(\psi') = (-1)\lim T_{\varphi_n}(\psi') = \lim DT_{\varphi_n}(\psi)$, ou seja, $u_x = \lim(\varphi_n)_x$. \square

5.3 Métodos pseudo-espectrais para aproximar (5.1)

Sejam $b_o \in C^o(\bar{I})$, $b \in C^1(\bar{I})$, $u_o \in C^o(\bar{I})$ e $f \in C^o([0, T] \times \bar{I})$. A aproximação pseudo-espectral de (5.1) é dada pelo problema de colocação:

Encontrar $u_c \in C^1(\mathbb{P}_N)$ tal que:

$$\begin{aligned} u_{c,t}(x_j) - \nu u_{c,xx}(x_j) + (bu_c)_x(x_j) + b_o u_c(x_j) &= f(x_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_c(x_o) &= u_c(x_N) = 0, \\ u(x_j, 0) &= u_o(x_j), \quad j = 0, \dots, N. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Através da definição de produto interno discreto e pela identidade (3.3), o problema (5.32) poder ser reescrito, equivalentemente, como:

Encontrar $u_c \in C^1(V_N)$ tal que:

$$\langle u_{c,t}, \phi \rangle_{N,w} - \nu \langle u_{c,xx}, \phi \rangle_{N,w} + \langle (bu_c)_x + b_o u_c, \phi \rangle_{N,w} = \langle f, \phi \rangle_{N,w}, \quad \forall \phi \in V_N \quad (5.33)$$

$$u_c(0) = P_c u_o.$$

De fato, para a condição necessária da equivalência, basta multiplicarmos (5.32) pelo peso da fórmula de integração w_j , também por $\phi(x_j)$, $j = 0, \dots, N$, com $\phi \in V_N$. Então, somamos em j de 0 a N , aplicando, na seqüência a definição de produto interno discreto. A condição suficiente vem do fato que (5.33) é válida para toda $\phi \in V_N$, basta escolhermos ϕ como sendo o Lagrangeano interno, isto é, $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

Teorema 5.3.1 *O problema pseudo-espectral (5.33) é estável, a saber,*

$$\|u_c\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|u_{c,x}\|_{L^2(L_w^2)} \leq C \cdot \left\{ \|u_o\|_{N,w} + \left(\int_0^T \|f(t)\|_{N,w}^2 dt \right)^{1/2} \right\}. \quad (5.34)$$

Demonstração. Escolhendo $\phi = u_c \in V_N$ na equação (5.33), obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_c\|_{N,w}^2 - \nu \langle u_{c,xx}, u_c \rangle_{N,w} = \langle f, u_c \rangle_{N,w} - \langle (bu_c)_x + b_o u_c, u_c \rangle_{N,w} \quad (5.35)$$

Agora, da igualdade (3.3), pois $u_{c,xx} \cdot u_c \in \mathbb{P}_{2N-1}$, integrando por partes e da coercividade de a_w (5.5), segue

$$\begin{aligned} -\nu \langle u_{c,xx}, u_c \rangle_{N,w} &= -\nu \langle u_{c,xx}, u_c \rangle_w = -\nu \int_I u_{c,xx} u_c w dx = \nu \int_I u_{c,x} (u_c w)_x dx \\ &= \nu a_w(u_c, u_c) \geq \nu \gamma \|u_c\|_{1,w}^2 \geq \nu \gamma \|u_{c,x}\|_{o,w}^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Além disso, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e algébrica,

$$|\langle f, u_c \rangle_{N,w}| \leq \|f\|_{N,w} \cdot \|u_c\|_{N,w} \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{N,w}^2 + \|u_c\|_{N,w}^2) \quad (5.37)$$

$$|\langle b_o u_c, u_c \rangle_{N,w}| \leq \|b_o\|_\infty \cdot \|u_c\|_{N,w}^2. \quad (5.38)$$

Também, pela ε -desigualdade, com $\varepsilon = \frac{\gamma\nu}{\|b\|_\infty}$

$$\begin{aligned}
\left| \langle (bu_c)_x, u_c \rangle_{N,w} \right| &\leq \left| \langle b_x u_c, u_c \rangle_{N,w} \right| + \left| \langle bu_{c,x}, u_c \rangle_{N,w} \right| \\
&\leq \|b\|_{W^{1,\infty}(I)} \cdot \|u_c\|_{N,w}^2 + \|b\|_\infty \|u_{c,x}\|_{N,w} \cdot \|u_c\|_{N,w} \\
&\leq \|b\|_{W^{1,\infty}(I)} \cdot \|u_c\|_{N,w}^2 + \|b\|_\infty \left(\frac{\gamma\nu}{2\|b\|_\infty} \|u_{c,x}\|_{N,w}^2 + \frac{\|b\|_\infty}{2\gamma\nu} \|u_c\|_{N,w}^2 \right) \\
&\leq \|b\|_{W^{1,\infty}(I)} \cdot \|u_c\|_{N,w}^2 + \frac{\|b\|_\infty^2}{2\gamma\nu} \|u_c\|_{N,w}^2 + \frac{\gamma\nu}{2} \|u_{c,x}\|_{N,w}^2. \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo (5.36)-(5.39) em (5.35), segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_c\|_{N,w}^2 + \nu\gamma \|u_{c,x}\|_{N,w}^2 &\leq \left| \langle f, u_c \rangle_{N,w} \right| + \left| \langle (bu_c)_x, u_c \rangle_{N,w} \right| + \left| \langle b_o u_c, u_c \rangle_{N,w} \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \|f\|_{N,w}^2 + \frac{1}{2} \|u_c\|_{N,w}^2 + (\|b_o\|_\infty + \|b\|_{W^{1,\infty}}) \cdot \|u_c\|_{N,w}^2 + \frac{\|b\|_\infty^2}{2\gamma\nu} \|u_c\|_{N,w}^2 + \frac{\gamma\nu}{2} \|u_{c,x}\|_{N,w}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|f\|_{N,w}^2 + \left(\frac{1}{2} + \|b_o\|_\infty + \|b\|_{W^{1,\infty}} + \frac{\|b\|_\infty^2}{2\gamma\nu} \right) \|u_c\|_{N,w}^2 + \frac{\gamma\nu}{2} \|u_{c,x}\|_{N,w}^2.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|u_c\|_{N,w}^2 + \nu \|u_{c,x}\|_{N,w}^2 &\leq \|f\|_{N,w}^2 + 2 \left(\frac{1}{2} + \|b_o\|_\infty + \|b\|_{W^{1,\infty}} + \frac{\|b\|_\infty^2}{2\gamma\nu} \right) \|u_c\|_{N,w}^2 \\
&\leq \|f\|_{N,w}^2 + C_1 \|u_c\|_{N,w}^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando o Lema de Gronwall 1.10.2, temos

$$\|u_c\|_{N,w}^2 \leq e^t \|u_c(0)\|_{N,w}^2 + \int_0^t \|f\|_{N,w}^2 e^{2C_1(t-s)} ds - \nu\gamma \int_0^t \|u_{c,x}\|_{N,w}^2 e^{C_1(t-s)} ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u_c\|_{N,w}^2 + \gamma\nu \int_0^t \|u_{c,x}\|_{N,w}^2 ds &\leq e^T \|u_o\|_{N,w}^2 + e^{2C_1 T} \int_0^t \|f\|_{N,w}^2 ds \\
&\leq C_2 \left(\|u_o\|_{N,w}^2 + \int_0^T \|f\|_{N,w}^2 ds \right), \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

A desigualdade acima é válida para qualquer $t \in [0, T]$, em particular, é válida para $t = T$. Na seqüência, aplicamos o supremo essencial e obtemos

$$\|u_c\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|u_{c,x}\|_{L^2(L_w^2)} \leq C_3 \left\{ \|u_o\|_{N,w}^2 + \left(\int_0^T \|f\|_{N,w}^2 ds \right)^{1/2} \right\},$$

ou seja, a desigualdade (5.34). \square

Observamos que, devido à formulação variacional (5.33) para o problema de colocação (5.32) e a possibilidade de usar (3.3), foi possível obtermos a estabilidade diretamente de (5.33). Essa é a grande vantagem desse método de colocação variacional. No entanto, veremos que a prova de convergência é laboriosa, tendo em vista que não desejamos apenas provar convergência, mas obter uma taxa de convergência espectral.

Lema 5.3.2 *Para qualquer $\phi = \sum_{N=0}^{\infty} \hat{\phi}_N p_N \in L_w^2(I)$, em que $\hat{\phi}_N = \langle \phi, p_N \rangle_w$ são os coeficientes de Chebyshev, temos*

$$|\hat{\phi}_N| \leq \|\phi - P_{N-1}\phi\|_{o,w}, \quad \forall N \geq 1. \quad (5.40)$$

Além disso, definindo

$$E_w(\phi, \psi) = \langle \phi, \psi \rangle_{N,w} - \langle \phi, \psi \rangle_w, \quad \forall \phi, \psi \in C^o(\bar{I}), \quad (5.41)$$

temos

$$|E_w(\phi, \psi)| = |\hat{\phi}_N| \cdot |\hat{\psi}_N|, \quad \forall \phi, \psi \in \mathbb{P}_N. \quad (5.42)$$

$$|E_w(g, \phi)| \leq C (\|g - P_c g\|_{o,w}^2 + \|g - P_{N-1}g\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2), \quad \forall g \in C^o(\bar{I}), \forall \phi \in \mathbb{P}_N. \quad (5.43)$$

Demonstração. (i) A desigualdade (5.40) segue diretamente da identidade de Parseval, pois como $\|\phi\|_{o,w}^2 = \sum_{N=0}^{\infty} |\hat{\phi}_N|^2$ e $\|\phi - P_{N-1}\phi\|_{o,w}^2 = \sum_{n \geq N} |\hat{\phi}_n|^2 \geq |\hat{\phi}_N|^2$.

(ii) Sejam $\phi, \psi \in \mathbb{P}_N$. Então, $\phi(x) = \sum_{k=0}^N \hat{\phi}_k p_k(x)$ e $\psi(x) = \sum_{k=0}^N \hat{\psi}_k p_k(x)$. Por um lado, por (3.3), temos que

$$\begin{aligned} \langle \phi, \psi \rangle_{N,w} &= \left\langle \sum_{k=0}^N \hat{\phi}_k p_k, \sum_{k=0}^N \hat{\psi}_k p_k \right\rangle_{N,w} = \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\phi}_k p_k + \hat{\phi}_N p_N, \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\psi}_k p_k + \hat{\psi}_N p_N \right\rangle_{N,w} \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\phi}_k p_k, \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\psi}_k p_k \right\rangle_{N,w} + \left\langle \hat{\phi}_N p_N, \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\psi}_k p_k \right\rangle_{N,w} \\ &\quad + \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\phi}_k p_k, \hat{\psi}_N p_N \right\rangle_{N,w} + \left\langle \hat{\psi}_N p_N, \hat{\phi}_N p_N \right\rangle_{N,w} \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\phi}_k p_k, \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\psi}_k p_k \right\rangle_w + \left\langle \hat{\phi}_N p_N, \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\psi}_k p_k \right\rangle_w \\ &\quad + \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\phi}_k p_k, \hat{\psi}_N p_N \right\rangle_w + \left\langle \hat{\psi}_N p_N, \hat{\phi}_N p_N \right\rangle_{N,w}. \end{aligned}$$

Pela ortonormalidade do sistema $\{p_k\}_{k=0}^N$ e identidade de Parseval, segue que

$$\langle \phi, \psi \rangle_{N,w} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\phi}_k \hat{\psi}_k + \langle \hat{\psi}_N p_N, \hat{\phi}_N p_N \rangle_{N,w}.$$

Então, novamente pela identidade de Parseval, do fato que $p_N = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_N$ e $\langle T_N, T_N \rangle_{N,w} = \pi$, segue que

$$\begin{aligned} E_w(\psi, \phi) &= \langle \psi, \phi \rangle_{N,w} - \langle \psi, \phi \rangle_w \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\phi}_k \hat{\psi}_k + \langle \hat{\psi}_N p_N, \hat{\phi}_N p_N \rangle_{N,w} - \sum_{k=0}^N \hat{\psi}_k \hat{\phi}_k \\ &= \langle \hat{\psi}_N p_N, \hat{\phi}_N p_N \rangle_{N,w} - \hat{\psi}_N \hat{\phi}_N \\ &= \hat{\psi}_N \hat{\phi}_N \left(\langle p_N, p_N \rangle_{N,w} - 1 \right) \\ &= \hat{\psi}_N \hat{\phi}_N \left(\frac{2}{\pi} \langle T_N, T_N \rangle_{N,w} - 1 \right) = \hat{\psi}_N \hat{\phi}_N. \end{aligned}$$

(iii) Como $\langle u - P_c u, \phi \rangle_{N,w} = 0$ e $\langle u - P_N u, \phi \rangle_w = 0, \forall \phi \in \mathbb{P}_N$, então

$$\begin{aligned} |E_w(g, \phi)| &= \left| \langle g, \phi \rangle_{N,w} - \langle g, \phi \rangle_w \right| \\ &= \left| \langle P_c g, \phi \rangle_{N,w} - \langle P_N g, \phi \rangle_w \right| \\ &= \left| \langle P_c g, \phi \rangle_{N,w} - \langle P_N g, \phi \rangle_w + \langle P_N g, \phi \rangle_{N,w} - \langle P_N g, \phi \rangle_{N,w} \right| \\ &\leq |E_w(P_N g, \phi)| + \left| \langle (P_c - P_N)g, \phi \rangle_{N,w} \right| \\ &\leq |E_w(P_N g, \phi)| + \|(P_c - P_N)g\|_{N,w} \cdot \|\phi\|_{N,w}, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N. \end{aligned}$$

Por (5.40) e (5.42), segue que

$$\begin{aligned} |E_w(P_N g, \phi)| &= |\hat{g}_N| \cdot |\hat{\phi}_N| \leq \|g - P_{N-1}g\|_{o,w} \cdot \|\phi\|_{o,w} \\ &\leq \frac{1}{2} (\|g - P_{N-1}g\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2). \end{aligned}$$

Pela equivalência entre a norma discreta e contínua em \mathbb{P}_N ,

$$\begin{aligned} \|(P_c - P_N)g\|_{N,w} \cdot \|\phi\|_{N,w} &\leq \frac{1}{C_1} \|(P_c - P_N)g\|_{o,w} \cdot \|\phi\|_{o,w} \\ &\leq \frac{1}{2C_1} (\|(P_c - P_N)g\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2) \\ &\leq \frac{1}{2C_1} (2\|P_c g - g\|_{o,w}^2 + 2\|P_N g - g\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2). \end{aligned}$$

Assim, $\forall \phi \in \mathbb{P}_N$, $g \in C^o(\bar{I})$,

$$\begin{aligned}
|E_w(g, \phi)| &\leq |E_w(P_N g, \phi)| + \|(P_c - P_N)g\|_{N,w} \cdot \|\phi\|_{N,w} \\
&\leq \frac{1}{2} (\|g - P_{N-1}g\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2) + \frac{1}{2C_1} (2\|P_c g - g\|_{o,w}^2 + 2\|P_N g - g\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2) \\
&\leq \frac{1}{2} \|g - P_{N-1}g\|_{o,w}^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{C_1}\right) \|\phi\|_{o,w}^2 + \frac{1}{C_1} \|P_c g - g\|_{o,w}^2 + \frac{1}{C_1} \|P_N g - g\|_{o,w}^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{C_1}\right) \|g - P_{N-1}g\|_{o,w}^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{C_1}\right) \|\phi\|_{o,w}^2 + \frac{1}{C_1} \|P_c g - g\|_{o,w}^2 \\
&\leq C \cdot \{ \|g - P_{N-1}g\|_{o,w}^2 + \|P_c g - g\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2 \},
\end{aligned}$$

pois $\|P_N g - g\|_{o,w}^2 \leq \|P_{N-1}g - g\|_{o,w}^2$ e, desta forma, obtemos a desigualdade (5.43). \square

Agora, provaremos um lema que auxiliará na demonstração de convergência do método pseudo-espectral (colocação).

Lema 5.3.3 *Temos a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned}
\|u - u_c\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|(u - u_c)_x\|_{L^2(L_w^2)} &\leq C \cdot \left\{ \|u_o - \Pi_N u_o\|_{o,w} + \|u_o - P_c u_o\|_{o,w} \right. \\
&+ \|u - \Pi_N u\|_{L^\infty(L_w^2)} + \|u - \Pi_N u\|_{L^2(H_w^1)} + \|u_t - \Pi_N u_t\|_{L^2(L_w^2)} \\
&\left. + \|u_t - P_{N-1}u_t\|_{L^2(L_w^2)} + \|f - P_c f\|_{L^2(L_w^2)} + \|f - P_{N-1}f\|_{L^2(L_w^2)} + R(u) \right\},
\end{aligned} \tag{5.44}$$

em que

$$\begin{aligned}
R(u) &= \|u - P_{N-1}u\|_{L^2(L_w^2)} + \|(bu)_x - P_{N-1}(bu)_x\|_{L^2(L_w^2)}, \quad \text{se } b_o \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{P}_1. \\
R(u) &= \|(b_o u) - P_{N-1}(b_o u)\|_{L^2(L_w^2)} + \|(b_o u) - P_c(b_o u)\|_{L^2(L_w^2)} \\
&+ \|(I_d - P_c)[b_o(u - \Pi_N u)]\|_{L^2(L_w^2)} + \|(bu)_x - P_{N-1}(bu)_x\|_{L^2(L_w^2)} \\
&+ \|(bu)_x - P_c(bu)_x\|_{L^2(L_w^2)} + \|(I_d - P_c)[b(u - \Pi_N u)]_x\|_{L^2(L_w^2)}, \quad \text{se } b_o \in C^o(\bar{I}), b \in C^1(\bar{I}).
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Demonstração. Sejam $\tilde{u} = \Pi_N u$, $e = \tilde{u} - u_c$, $\rho = \tilde{u} - u$ e $G(\rho) = \rho_t + (b\rho)_x + b_o\rho$. Notamos que, pela igualdade (3.3),

$$-\nu \langle u_{c,xx}, \phi \rangle_{N,w} = \nu a_w(u_c, \phi), \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N.$$

Substituindo na equação (5.33),

$$\langle u_{c,t}, \phi \rangle_{N,w} + \nu a_w(u_c, \phi) + \langle (bu_c)_x + b_o u_c, \phi \rangle_{N,w} = \langle f, \phi \rangle_{N,w}.$$

Agora, através da equação (5.25) e da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle e_t, \phi \rangle_{N,w} + a_w(e, \phi) + \langle (be)_x + b_o e, \phi \rangle_{N,w} &= \langle G(\rho), \phi \rangle_w + E_w(\tilde{u}_t, \phi) \\ &+ E_w(b_o \tilde{u} + (b\tilde{u})_x, \phi) - E_w(f, \phi), \quad \forall \phi \in V_N. \\ e(0) &= (\Pi_N - P_c)u_o. \end{aligned} \quad (5.47)$$

De fato, sejam $B(e, \phi) = \langle e_t, \phi \rangle_{N,w} + a_w(e, \phi) + \langle (be)_x + b_o e, \phi \rangle_{N,w}$, $\phi \in V_N$,

$$\begin{aligned} B(e, \phi) &= \langle \tilde{u}_t - u_{c,t}, \phi \rangle_{N,w} + \nu a_w(\tilde{u} - u_c, \phi) + \langle [b(\tilde{u} - u_c)]_x + b_o(\tilde{u} - u_c), \phi \rangle_{N,w} \\ &= \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_{N,w} + \nu a_w(\tilde{u}, \phi) + \langle (b\tilde{u})_x + b_o \tilde{u}, \phi \rangle_{N,w} \\ &\quad - \left[\langle u_{c,t}, \phi \rangle_{N,w} + \nu a_w(u_c, \phi) + \langle (bu_c)_x + b_o u_c, \phi \rangle_{N,w} \right] \\ &= \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_w + \nu a_w(\tilde{u}, \phi) + \langle (b\tilde{u})_x + b_o \tilde{u}, \phi \rangle_w - \langle f, \phi \rangle_{N,w} \\ &\quad + \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_{N,w} + \langle (b\tilde{u})_x + b_o \tilde{u}, \phi \rangle_{N,w} - \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_w - \langle (b\tilde{u})_x + b_o \tilde{u}, \phi \rangle_w \\ &= \langle f, \phi \rangle_w + \langle \rho_t + (b\rho)_x + b_o \rho, \phi \rangle_w + \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_{N,w} + \langle (b\tilde{u})_x + b_o \tilde{u}, \phi \rangle_{N,w} \\ &\quad - \langle f, \phi \rangle_{N,w} - \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_w - \langle (b\tilde{u})_x + b_o \tilde{u}, \phi \rangle_w \\ &= -E_w(f, \phi) + \langle G(\rho), \phi \rangle_w + E_w(\tilde{u}, \phi) + E_w((b\tilde{u})_x + b_o \tilde{u}, \phi). \end{aligned}$$

Estimaremos separadamente os termos do lado direito da equação (5.47).

(i) Estimativa para $\|G(\rho)\|_{o,w}$.

Como Π_N comuta com o operador de diferenciação, temos que

$$\begin{aligned} G(\rho) &= \rho_t + (b\rho)_x + b_o \rho \\ &= (\Pi_N u)_t - u_t + [b(\Pi_N u - u)]_x + b_o(\Pi_N u - u) \\ &= \Pi_N u_t - u_t + [b(\Pi_N u - u)]_x + b_o(\Pi_N u - u). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \|G(\rho)\|_{o,w} &= \|\Pi_N u_t - u_t + [b(\Pi_N u - u)]_x + b_o(\Pi_N u - u)\|_{o,w} \\ &\leq \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w} + \|b_x(\Pi_N u - u)\|_{o,w} + \|b(\Pi_N u - u)_x\|_{o,w} + \|b_o(\Pi_N u - u)\|_{o,w} \\ &\leq \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w} + C_1 \|\Pi_N u - u\|_{o,w} + C_2 \|(\Pi_N u - u)_x\|_{o,w} + C_3 \|\Pi_N u - u\|_{o,w} \\ &\leq \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w} + C_4 \|\Pi_N u - u\|_{1,w}, \end{aligned}$$

em que $C_1 = \|b\|_{W^{1,\infty}}$, $C_2 = \|b\|_\infty$, $C_3 = \|b_o\|_\infty$ e $C_4 = \max\{C_1, C_2, C_3\}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\|G(\rho)\|_{o,w}^2 &\leq \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + 2 \cdot \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w} \cdot C_4 \|\Pi_N u - u\|_{1,w} + C_4^2 \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 \\
&\leq \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + C_4^2 \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 + C_4^2 \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 \\
&= 2\|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + 2C_4^2 \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2
\end{aligned} \tag{5.48}$$

(ii) Estimativa para o termo $E_w(f, \phi)$.

Por hipótese, temos $f \in C^o([0, T] \times \bar{I})$, então, pela desigualdade (5.43),

$$|E_w(f, \phi)| \leq C_5 (\|f - P_C f\|_{o,w}^2 + \|f - P_{N-1} f\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2). \tag{5.49}$$

(iii) Estimativa para o termo $|E_w(\tilde{u}_t, \phi)|$.

Como $\tilde{u}_t \in \mathbb{P}_N$, pela identidade (5.42), temos que $|E_w(\tilde{u}_t, \phi)| = |\hat{\chi}_N| \cdot |\hat{\phi}_N|$, em que $\hat{\chi}_N = \langle \tilde{u}_t, p_N \rangle_w$. Pela desigualdade (5.40) e Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|\hat{\chi}_N| &\leq |\langle \tilde{u}_t - u_t, p_N \rangle_w| + |\langle u_t, p_N \rangle_w| \leq \|\tilde{u}_t - u_t\|_{o,w} + \|u_t - P_{N-1} u_t\|_{o,w} \\
&= \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w} + \|u_t - P_{N-1} u_t\|_{o,w}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
|E_w(\tilde{u}_t, \phi)| &= |\hat{\chi}_N| \cdot |\hat{\phi}_N| \leq \frac{1}{2} |\hat{\chi}_N|^2 + \frac{1}{2} |\hat{\phi}_N|^2 \\
&\leq \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + \|u_t - P_{N-1} u_t\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

(iv) Estimativa para o termo $|E_w(b_o \tilde{u} + (b\tilde{u})_x, \phi)|$.

Para este termo, faremos a estimativa dividindo em dois casos. Primeiramente, sejam $b_o \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{P}_1$. Desta forma, $b_o \tilde{u} \in \mathbb{P}_N$ e $(b\tilde{u})_x \in \mathbb{P}_N$. Então, por (5.42),

$$|E_w(b_o \tilde{u} + (b\tilde{u})_x, \phi)| = |\hat{Y}_N + \hat{Z}_N| \cdot |\hat{\phi}_N|,$$

em que $\hat{Y}_N = \langle b_o \tilde{u}, p_N \rangle_w$ e $\hat{Z}_N = \langle (b\tilde{u})_x, p_N \rangle_w$. Pela desigualdade (5.40),

$$\begin{aligned}
|\hat{Y}_N| &\leq \|b_o \Pi_N u - P_{N-1}(b_o \Pi_N u)\|_{o,w} = |b_o| \cdot \|\Pi_N u - u + u - P_{N-1}(\Pi_N u)\|_{o,w} \\
&\leq |b_o| \cdot \{\|\Pi_N u - u\|_{o,w} + \|u - P_{N-1}(\Pi_N u)\|_{o,w}\} \\
&\leq |b_o| \cdot \{\|\Pi_N u - u\|_{o,w} + \|u - P_{N-1} u + P_{N-1} u - P_{N-1}(\Pi_N u)\|_{o,w}\} \\
&\leq |b_o| \cdot \{\|\Pi_N u - u\|_{o,w} + \|u - P_{N-1} u\|_{o,w} + \|P_{N-1} u - P_{N-1}(\Pi_N u)\|_{o,w}\} \\
&\leq |b_o| \cdot \{\|\Pi_N u - u\|_{o,w} + \|u - P_{N-1} u\|_{o,w} + \|u - (\Pi_N u)\|_{o,w}\} \\
&= |b_o| \cdot \{2\|\Pi_N u - u\|_{o,w} + \|u - P_{N-1} u\|_{o,w}\}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} |\hat{Y}_N|^2 &\leq |b_o|^2 \cdot \{2 \|\Pi_N u - u\|_{o,w} + \|u - P_{N-1} u\|_{o,w}\}^2 \\ &\leq |b_o|^2 \cdot \{5 \|\Pi_N u - u\|_{o,w}^2 + 2 \|u - P_{N-1} u\|_{o,w}^2\} \end{aligned}$$

Também, pela desigualdade (5.40) e pela estimativa (3.15) com $\sigma = \mu = 0$,

$$\begin{aligned} |\hat{Z}_N| &\leq \|(b\tilde{u})_x - P_{N-1}(b\tilde{u})_x\|_{o,w} = \|(b\Pi_N u)_x - P_{N-1}(b\Pi_N u)_x\|_{o,w} = \|(I_d - P_{N-1})[(b\Pi_N u)_x]\|_{o,w} \\ &= \|(I_d - P_{N-1})(b\Pi_N u)_x + (bu)_x - (bu)_x + P_{N-1}(bu)_x - P_{N-1}(bu)_x\|_{o,w} \\ &\leq \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w} + \|(I_d - P_{N-1})(bu - b\Pi_N u)_x\|_{o,w} \\ &\leq \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w} + C_6 \|(bu - b\Pi_N u)_x\|_{o,w} \\ &\leq \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w} + C_6 \|bu - b\Pi_N u\|_{1,w}. \end{aligned}$$

Então,

$$|\hat{Z}_N|^2 \leq 2 \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2 + 2 C_6^2 \|bu - b\Pi_N u\|_{1,w}^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |E_w(b_o \tilde{u} + (b\tilde{u})_x, \phi)| &\leq C \cdot \left\{ \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 + \|u - P_{N-1} u\|_{o,w}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2 \right\} + \|\phi\|_{o,w}^2 \end{aligned} \quad (5.51)$$

De fato, fazendo as substituições das estimativas para $|\hat{Y}_N|$ e $|\hat{Z}_N|$,

$$\begin{aligned} |E_w(b_o \tilde{u} + (b\tilde{u})_x, \phi)| &\leq (|\hat{Y}_N| + |\hat{Z}_N|) \cdot |\hat{\phi}_N| \leq \frac{1}{4} (|\hat{Y}_N| + |\hat{Z}_N|)^2 + |\hat{\phi}_N|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} |\hat{Y}_N|^2 + \frac{1}{2} |\hat{Z}_N|^2 + |\hat{\phi}_N|^2 \\ &\leq |b_o|^2 \cdot \left\{ \frac{5}{2} \|\Pi_N u - u\|_{o,w}^2 + \|u - P_{N-1} u\|_{o,w}^2 \right\} \\ &\quad + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2 + C_6^2 \|bu - b\Pi_N u\|_{1,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2. \\ &\leq C_7 \cdot \left\{ \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 + \|u - P_{N-1} u\|_{o,w}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2 \right\} + \|\phi\|_{o,w}^2, \end{aligned} \quad (5.52)$$

em que $C_7 = \max \left\{ \frac{5|b_o|^2}{2}, 1, C_6^2 \|b\|_{W^{1,\infty}}^2 \right\}$.

Agora, consideraremos o caso geral no qual nenhuma hipótese adicional é feita sobre os coeficientes b_o e b . Pela desigualdade (5.43), pois $b_o \in C^o(\bar{I})$ e $b \in C^1(\bar{I})$, e pelo fato de E_w ser

linear,

$$|E_w(b_o\tilde{u} + (b\tilde{u})_x, \phi)| \leq C_5 \left\{ \begin{aligned} & \|(I_d - P_c)(b_o\tilde{u})\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_c)(b\tilde{u})_x\|_{o,w}^2 \\ & + \|(I_d - P_{N-1})(b_o\tilde{u})\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_{N-1})(b\tilde{u})_x\|_{o,w}^2 + \|\phi\|_{o,w}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (5.53)$$

Pela estimativa (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} \|(I_d - P_{N-1})(b_o\tilde{u})\|_{o,w} &= \|(I_d - P_{N-1})(b_o\Pi_N u) + (I_d - P_{N-1})(b_o u) - (I_d - P_{N-1})(b_o u)\|_{o,w} \\ &\leq \|(I_d - P_{N-1})(b_o u - b_o\Pi_N u)\|_{o,w} + \|(I_d - P_{N-1})(b_o u)\|_{o,w} \\ &\leq \|b_o\|_\infty \|u - \Pi_N u\|_{o,w} + \|(I_d - P_{N-1})(b_o u)\|_{o,w} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \|(I_d - P_{N-1})(b\tilde{u})_x\|_{o,w} &= \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x - (I_d - P_{N-1})(bu)_x + (I_d - P_{N-1})(b\tilde{u})_x\|_{o,w} \\ &\leq \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w} + \|(I_d - P_{N-1})(b\Pi_N u - bu)_x\|_{o,w} \\ &\leq \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w} + \|b\Pi_N u - bu\|_{1,w} \\ &\leq \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w} + \|b\|_{W^{1,\infty}} \|\Pi_N u - u\|_{1,w}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|(I_d - P_c)(b_o\tilde{u})\|_{o,w} &= \|b_o\tilde{u} - P_c(b_o\tilde{u}) + b_o u - b_o u + P_c(b_o u) - P_c(b_o u)\|_{o,w} \\ &\leq \|(I_d - P_c)(b_o u)\|_{o,w} + \|(I_d - P_c)[b_o(\Pi_N u - u)]\|_{o,w}, \end{aligned}$$

e

$$\|(I_d - P_c)(b\tilde{u})_x\|_{o,w} \leq \|(I_d - P_c)(bu)_x\|_{o,w} + \|(I_d - P_c)[b(u - \Pi_N u)]_x\|_{o,w}.$$

Elevando ao quadrado, temos

$$\|(I_d - P_{N-1})(b_o\tilde{u})\|_{o,w}^2 \leq 2 \|b_o\|_\infty^2 \|u - \Pi_N u\|_{o,w}^2 + 2 \|(I_d - P_{N-1})(b_o u)\|_{o,w}^2 \quad (5.54)$$

$$\|(I_d - P_{N-1})(b\tilde{u})_x\|_{o,w}^2 \leq 2 \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2 + 2 \|b\|_{W^{1,\infty}}^2 \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 \quad (5.55)$$

$$\|(I_d - P_c)(b_o\tilde{u})\|_{o,w}^2 \leq 2 \|(I_d - P_c)(b_o u)\|_{o,w}^2 + 2 \|(I_d - P_c)[b_o(\Pi_N u - u)]\|_{o,w}^2 \quad (5.56)$$

$$\|(I_d - P_c)(b\tilde{u})_x\|_{o,w}^2 \leq 2 \|(I_d - P_c)(bu)_x\|_{o,w}^2 + 2 \|(I_d - P_c)[b(u - \Pi_N u)]_x\|_{o,w}^2. \quad (5.57)$$

Substituindo as desigualdades (5.54)-(5.57) em (5.53), obtemos

$$|E_w(b_o\tilde{u} + (b\tilde{u})_x, \phi)| \leq C_9 \left\{ \begin{aligned} & \|(I_d - P_{N-1})(b_o u)\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2 \\ & + \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 + \|(I_d - P_c)(b_o u)\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_c)[b_o(\Pi_N u - u)]\|_{o,w}^2 \\ & + \|(I_d - P_c)(bu)_x\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_c)[b(u - \Pi_N u)]_x\|_{o,w}^2 \end{aligned} \right\} + \|\phi\|_{o,w}^2, \quad (5.58)$$

em que $C_9 = \max\{2C_5, 2, C_5 \|b\|_{W^{1,\infty}}^2, C_5 \|b_o\|_\infty^2\}$.

Agora, escolhemos $\phi = e \in V_N$ na equação (5.47).

Seja $B(e) = \langle e_t, e \rangle_{N,w} + a_w(e, e) + \langle (be)_x + b_o e, e \rangle_{N,w}$. Então,

$$B(e) \leq \frac{1}{2} \|G(\rho)\|_{o,w}^2 + \frac{1}{2} \|e\|_{o,w}^2 + |E_w(\tilde{u}_t, e)| + |E_w(b_o\tilde{u} + (b\tilde{u})_x, e)| + |E_w(f, e)|.$$

(v) Pelas desigualdades (5.48), (5.49), (5.50), (5.52) e (5.58), obtemos

$$\begin{aligned} B(e) &\leq \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + C_4^2 \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 + \frac{1}{2} \|e\|_{o,w}^2 \\ &+ \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + \|u_t - P_{N-1} u_t\|_{o,w}^2 \\ &+ \|\phi\|_{o,w}^2 + C_5 (\|f - P_c f\|_{o,w}^2 + \|f - P_{N-1} f\|_{o,w}^2 + \|e\|_{o,w}^2) \\ &+ \|e\|_{o,w}^2 + H_1(t), \end{aligned}$$

em que

$$H_1(t) = \begin{cases} C_8 \cdot \left\{ \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 + \|u - P_{N-1} u\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2 \right\}, & b_o \in \mathbb{R}, b_1 \in \mathbb{P}_1 \\ C_9 \cdot \left\{ \begin{aligned} & \|(I_d - P_{N-1})(b_o u)\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2 \\ & + \|\Pi_N u - u\|_{1,w}^2 + \|(I_d - P_c)(b_o u)\|_{o,w}^2 \\ & + \|(I_d - P_c)[b_o(\Pi_N u - u)]\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_c)(bu)_x\|_{o,w}^2 \\ & + \|(I_d - P_c)[b(u - \Pi_N u)]_x\|_{o,w}^2 \end{aligned} \right\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} B(e) &\leq C \left\{ \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + \|u - \Pi_N u\|_{1,w}^2 + \|u_t - P_{N-1} u_t\|_{o,w}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|f - P_c f\|_{o,w}^2 + \|f - P_{N-1} f\|_{o,w}^2 + H(t) \right\} + \alpha \|e\|_{o,w}^2 \end{aligned}$$

em que

$$H(t) = \begin{cases} \|u - P_{N-1}u\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2, & b_o \in \mathbb{R}, b_1 \in \mathbb{P}_1 \\ \|(I_d - P_{N-1})(b_o u)\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{o,w}^2 \\ + \|(I_d - P_c)(b_o u)\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_c)[b_o(\Pi_N u - u)]\|_{o,w}^2 \\ + \|(I_d - P_c)(bu)_x\|_{o,w}^2 + \|(I_d - P_c)[b(u - \Pi_N u)]_x\|_{o,w}^2 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, pela coercividade de a_w (5.5), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e\|_{N,w} + \gamma \nu \|e_x\|_{o,w}^2 &\leq C \left\{ \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + \|u - \Pi_N u\|_{1,w}^2 + \|u_t - P_{N-1}u_t\|_{o,w}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|f - P_c f\|_{o,w}^2 + \|f - P_{N-1}f\|_{o,w}^2 + H(t) \right\} + \alpha \|e\|_{o,w}^2. \end{aligned}$$

Seja $g(t) = C \left\{ \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w}^2 + \|u - \Pi_N u\|_{1,w}^2 + \|u_t - P_{N-1}u_t\|_{o,w}^2 + \|f - P_c f\|_{o,w}^2 \right. \\ \left. + \|f - P_{N-1}f\|_{o,w}^2 + H(t) \right\}$. Usando a equivalência entre as normas discreta e contínua e aplicando o lema de Gronwall 1.10.2, obtemos

$$\begin{aligned} \|e\|_{N,w}^2 &\leq e^t \|e(0)\|_{N,w}^2 + \int_0^t g(s) e^{\alpha(t-s)} ds - \nu \gamma \int_0^t \|e_x\|_{o,w}^2 e^{\alpha(t-s)} ds \\ &\leq e^T \|(\Pi_N - P_c)u_o\|_{N,w}^2 + e^{\alpha T} \int_0^T g(s) ds - \nu \gamma \int_0^t \|e_x\|_{o,w}^2 e^{\alpha(t-s)} ds. \end{aligned}$$

Então,

$$\|e\|_{N,w}^2 + \nu \gamma \int_0^t \|e_x\|_{o,w}^2 ds \leq C \left\{ \|(\Pi_N - P_c)u_o\|_{N,w}^2 + \int_0^T g(s) ds \right\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Novamente, pela equivalência das normas,

$$\|e\|_{o,w}^2 + \nu \gamma \int_0^t \|e_x\|_{o,w}^2 ds \leq C \left\{ \|(\Pi_N - P_c)u_o\|_{N,w}^2 + \int_0^T g(s) ds \right\}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.59)$$

Agora, $u - u_c = u - \Pi_N u + e$, então

$$\begin{aligned} \|u - u_c\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|(u - u_c)_x\|_{L^2(L_w^2)} &\leq \|e\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|e_x\|_{L^2(L_w^2)} + \|u - \Pi_N u\|_{L^\infty(L_w^2)} \\ &\quad + \sqrt{\nu} \|(u - \Pi_N u)_x\|_{L^2(L_w^2)} \\ &\leq \|u - \Pi_N u\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|u - \Pi_N u\|_{L^2(H_w^1)} + \|u_t - \Pi_N u_t\|_{L^2(L_w^2)} + \|u - \Pi_N u\|_{L^2(H_w^1)} \\ &\quad + \|u_t - P_{N-1}u_t\|_{L^2(L_w^2)} + \|f - P_c f\|_{L^2(L_w^2)} + \|f - P_{N-1}f\|_{L^2(L_w^2)} \\ &\quad + \|H(u)\|_{L^2(L_w^2)} + 2\|e\|_{L^\infty(L_w^2)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, de (5.59),

$$\|e\|_{o,w} \leq C \left\{ \|(\Pi_N - P_c)u_o\|_{o,w}^2 + \left(\int_0^T g(s)ds \right)^{1/2} \right\}.$$

Como o lado direito da desigualdade acima indepente de t , tomando o supremo essencial,

$$\|e\|_{L^\infty(L_w^2)} \leq C \left\{ \|(\Pi_N - P_c)u_o\|_{o,w} + \left(\int_0^T g(s)ds \right)^{1/2} \right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \|u - u_c\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|(u - u_c)_x\|_{L^2(L_w^2)} \leq C \cdot \left\{ \|\Pi_N u_o - u_o\|_{o,w} + \|P_c u_o - u_o\|_{o,w} \right. \\ & \quad + \|u - \Pi_N u\|_{L^\infty(L_w^2)} + \|u - \Pi_N u\|_{L^2(H_w^1)} + \|u_t - \Pi_N u_t\|_{L^2(L_w^2)} + \|f - P_c f\|_{L^2(L_w^2)} \\ & \quad \left. + \|u_t - P_{N-1} u_t\|_{L^2(L_w^2)} + \|f - P_{N-1} f\|_{L^2(L_w^2)} + \|H(u)\|_{L^2(L_w^2)} \right\} \end{aligned}$$

em que

$$\|H(u)\|_{L^2(L_w^2)} = \begin{cases} \|u - P_{N-1} u\|_{L^2(L_w^2)} + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{L^2(L_w^2)}, & b_o \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{P}_1 \\ \|(I_d - P_c)(b_o u)\|_{L^2(L_w^2)} + \|(I_d - P_c)(b_o(\Pi_N u - u))\|_{L^2(L_w^2)} \\ \quad + \|(I_d - P_c)(bu_x)\|_{L^2(L_w^2)} + \|(I_d - P_c)[b(u - \Pi_N u)]_x\|_{L^2(L_w^2)} \\ \quad + \|(I_d - P_{N-1})(bu)_x\|_{L^2(L_w^2)} + \|(I_d - P_{N-1})(b_o u)\|_{L^2(L_w^2)}, \end{cases}$$

ou seja, a desigualdade (5.44). \square

Obteremos, agora, um dos resultados principais deste capítulo, provando o teorema de convergência do método pseudo-espectral. Notamos que precisamos dos dados iniciais $f \in L^2(H_w^{\sigma-1})$ e $u_o \in H_w^{\sigma-1}(I)$ pois vamos utilizar as estimativas (3.15), (3.19) e (5.15) para mostrarmos a convergência.

Teorema 5.3.4 *Para $\sigma > 1$, sejam $b_o \in W^{\sigma,\infty}(I)$, $b \in W^{\sigma,\infty}(I)$, $u_o \in H_w^{\sigma-1}(I)$, $f \in L^2(H_w^{\sigma-1})$, $u \in L^\infty(H_w^{\sigma-1}) \cap L^2(H_w^\sigma)$, $u_t \in L^2(H_w^{\sigma-1})$. Então, $\forall \varepsilon > 0$,*

$$\begin{aligned} & \|u - u_c\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|(u - u_c)_x\|_{L^2(L_w^2)} \\ & \leq C \begin{cases} N^{1-\sigma} \cdot K(u_o, f, u, u_t), & b_o \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{P}_1, \\ N^{1-\sigma} \cdot K(u_o, f, u, u_t) + N^{\frac{5}{4}+\varepsilon-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.60)$$

em que

$$K(u_o, f, u, u_t) = \|u_o\|_{\sigma-1,w} + \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u\|_{L^\infty(H_w^{\sigma-1})} + \|u\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})}, \quad (5.61)$$

onde C é uma constante que depende de T , ε , $\|b_o\|_{W^{\sigma,\infty}}$ e $\|b\|_{W^{\sigma,\infty}}$.

Demonstração. Para mostrarmos a convergência, usaremos o lema anterior com as estimativas (3.15), (3.19) e (5.15). De fato, notamos que, para $N > 1$,

$$\frac{1}{(N-1)^{\sigma-1}} = \frac{1}{N^{\sigma-1}} \cdot \frac{N^{\sigma-1}}{(N-1)^{\sigma-1}} = \frac{1}{N^{\sigma-1}} \left(1 + \frac{1}{N-1}\right)^{\sigma-1} \leq \frac{1}{N^{\sigma-1}} 2^{\sigma-1}.$$

$$\begin{aligned} \|u - u_c\|_{L^\infty(L_w^2)} + \sqrt{\nu} \|(u - u_c)_x\|_{L^2(L_w^2)} &\leq C \left\{ C_1 N^{1-\sigma} \|u_o\|_{\sigma-1,w} + C_2 N^{1-\sigma} \|u_o\|_{\sigma-1,w} \right. \\ &\quad + C_1 N^{1-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)} + C_1 N^{1-\sigma} \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} \\ &\quad + \tilde{C}_3 N^{1-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + C_2 N^{1-\sigma} \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} \\ &\quad \left. + \tilde{C}_3 N^{1-\sigma} \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + R(u) \right\}. \end{aligned}$$

Para o termo $R(u)$, primeiramente, sejam $b_o \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{P}_1$. Por (5.45),

$$\begin{aligned} R(u) &\leq C_3 (N-1)^{-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)} + C_3 (N-1)^{1-\sigma} \|(bu)_x\|_{L^2(H_w^\sigma)} \\ &\leq \tilde{C}_3 N^{1-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)} + \tilde{C}_3 N^{1-\sigma} \|b\|_{W^{\sigma,\infty}} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)} \end{aligned}$$

Agora, para (5.46), como $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|(b_o u) - P_{N-1}(b_o u)\|_{L^2(L_w^2)} &\leq C_3 N^{-\sigma} \|b_o u\|_{L^2(H_w^\sigma)} \leq C_3 \|b_o\|_{W^{\sigma,\infty}} N^{1-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)}. \\ \|(b_o u) - Pc(b_o u)\|_{L^2(L_w^2)} &\leq C_2 N^{-\sigma} \|b_o u\|_{L^2(H_w^\sigma)} \leq C_2 \|b_o\|_{W^{\sigma,\infty}} N^{1-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(I_d - Pc)[b_o(u - \Pi_N u)]\|_{L^2(L_w^2)} &\leq C_2 N^{-1/2-\varepsilon} \|b_o(u - \Pi_N u)\|_{L^2(H_w^{1/2+\varepsilon})} \\ &\leq C_2 N^{-1/2-\varepsilon} \|b_o\|_{W^{1/2+\varepsilon,\infty}} \|u - \Pi_N u\|_{L^2(H_w^{1/2+\varepsilon})} \\ &\leq C_2 N^{-1/2-\varepsilon} \|b_o\|_{W^{1/2+\varepsilon,\infty}} C_1 N^{1/2+\varepsilon-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)} \\ &\leq C \|b_o\|_{W^{1/2+\varepsilon,\infty}} N^{1-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)} \end{aligned}$$

Também,

$$\|(bu)_x - P_N(bu)_x\|_{L^2(L_w^2)} \leq C_3 N^{1-\sigma} \|(bu)_x\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} \leq \tilde{C}_3 \|b\|_{W^{\sigma,\infty}} N^{1-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)}$$

$$\|(bu)_x - Pc[(bu)_x]\|_{L^2(L_w^2)} \leq C_2 \|b\|_{W^{\sigma,\infty}} N^{1-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} \leq \tilde{C}_2 \|b\|_{W^{\sigma,\infty}} N^{1-\sigma} \|u\|_{L^2(H_w^\sigma)}.$$

$$\begin{aligned}
\|(I_d - Pc)[b(u - \Pi_N u)]_x\|_{L^2(L_w^2)} &\leq C_2 N^{-1/2-\varepsilon} \| [b(u - \Pi_N u)]_x \|_{L^2(H_w^{1/2+\varepsilon})} \\
&\leq C_2 N^{-1/2-\varepsilon} \| b(u - \Pi_N u) \|_{L^2(H_w^{3/2+\varepsilon})} \\
&\leq C_2 N^{-1/2-\varepsilon} \| b \|_{W^{3/2+\varepsilon, \infty}} C_1 N^{7/4+(3/2)\varepsilon-\sigma} \| u \|_{L^2(H_w^\sigma)} \\
&\leq C \| b \|_{W^{3/2+\varepsilon, \infty}} N^{5/4+\varepsilon-\sigma} \| u \|_{L^2(H_w^\sigma)},
\end{aligned}$$

ou seja, obtemos a estimativa de convergência do método pseudo-espectral (colocação). \square

Capítulo 6

Métodos de Chebyshev-espectral para equações parabólicas bidimensionais

Na primeira seção, apresentamos e discretizamos no espaço a equação do calor sobre $\Omega \times (0, T)$, em que $\Omega = (-1, 1)^2$ e $T > 0$. O método pseudo-espectral é utilizado nos pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto, e permitem alcançar alta precisão para funções suaves. Provamos resultados de estabilidade incondicional e convergência nas normas dos espaços de Sobolev com peso w (como feito no capítulo anterior). Estes resultados dependem do passo no tempo Δt , do grau N do polinômio, o qual aproxima a solução no espaço, e da regularidade da solução. Em seguida, discretizamos a equação do calor completamente, ou seja, no espaço e no tempo. Utilizamos o método de diferenças finitas tratando o termo difusivo de forma implícita, através do método- θ , com $1/2 \leq \theta \leq 1$.

Na segunda seção, apresentamos a equação de advecção -difusão bidimensional, também sobre $\Omega \times (0, T)$. Novamente, o termo difusivo para avançar no tempo é tratado de forma implícita via método- θ , mas o termo advectivo é deixado de forma explícita. Analogamente, como nas outras seções, resultados de estabilidade são obtidos. Para $\theta = 1$, obtemos também a convergência do método de Chebyshev pseudo-espectral.

6.1 Equação do calor

Seja $\Omega = (-1, 1)^2$. Para $u_o : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $u_o \in L_w^2(\Omega)$ e $f \in L^2(0, T; L_w^2(\Omega))$, consideremos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f, \text{ em } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(u, 0) &= u_o(x) \text{ em } \Omega, \end{aligned} \tag{6.1}$$

em que Δ denota o operador Laplaciano. Definimos a forma bilinear sobre $H_w^1(\Omega)$ como

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(vw) \, dx, \quad \forall u, v \in H_w^1(\Omega). \quad (6.2)$$

Proposição 6.1.1 (i) *Existe uma constante positiva β tal que $\forall v \in H_{o,w}^1(\Omega)$ e $u \in H_w^1(\Omega)$,*

$$|a(u, v)| \leq \beta \|\nabla u\|_{o,w} \cdot \|\nabla v\|_{o,w}. \quad (6.3)$$

(ii) $\forall v \in H_{o,w}^1(\Omega)$

$$\frac{1}{4} \|\nabla v\|_{o,w}^2 \leq a(v, v). \quad (6.4)$$

(iii) *Existe γ tal que*

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|_{1,w}^2, \quad \forall v \in H_{o,w}^1. \quad (6.5)$$

Demonstração. (i) Continuidade da forma bilinear. Sejam $u \in H_w^1(\Omega)$ e $v \in H_{o,w}^1(\Omega)$.

Afirmção: Existe um $\delta > 0$ tal que, $\forall v \in H_{o,w}^1(\Omega)$,

$$\left\| \frac{\nabla(vw)}{w} \right\|_{o,w} \leq \delta \|\nabla v\|_{o,w}. \quad (6.6)$$

De fato, temos que $\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x_i} = x_i (\tilde{w}(x_i))^2$, $i = 1, 2$, em que $\tilde{w}(\xi) = (1 - \xi^2)^{-1/2}$, $\xi \in (-1, 1)$ e $w(x) = \tilde{w}(x_1)\tilde{w}(x_2)$, $x \in \Omega$. Assim,

$$\int_{\Omega} v^2 \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 w \, dx \leq \int_{\Omega} v^2 (\tilde{w}(x_i))^4 w \, dx,$$

para $i = 1, 2$. Pelo lema (5.1.1), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^2 (\tilde{w}(x_1))^4 w \, dx &= \int_{\Omega} v^2 \tilde{w}(x_1)^5 \tilde{w}(x_2) \, dx \\ &= \int_I \tilde{w}(x_2) \left[\int_I v^2 \tilde{w}(x_1)^5 \, dx_1 \right] \, dx_2 \\ &\leq \alpha \int_I \tilde{w}(x_2) \left[\int_I \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 \tilde{w}(x_1) \, dx_1 \right] \, dx_2 \\ &\leq \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 \tilde{w}(x_1) \tilde{w}(x_2) \, dx_1 \, dx_2 \\ &= \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 w \, dx. \end{aligned}$$

Analogamente para $i = 2$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\| v \frac{\nabla w}{w} \right\|_{o,w}^2 &= \int_{\Omega} v^2 \left[\left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] w \, dx \\
&\leq \int_{\Omega} v^2 (\tilde{w}(x_1))^4 w \, dx + \int_{\Omega} v^2 (\tilde{w}(x_2))^4 w \, dx \\
&\leq \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 w \, dx + \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 w \, dx \\
&= \alpha \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 \right] w \, dx = \alpha \|\nabla v\|_{o,w}^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\nabla(vw)}{w} = \nabla v + v \frac{\nabla w}{w}. \quad (6.7)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\nabla(vw)}{w} \right\|_{o,w} &\leq \|\nabla v\|_{o,w} + \left\| v \frac{\nabla w}{w} \right\|_{o,w} \\
&\leq (1 + \sqrt{\alpha}) \|\nabla v\|_{o,w} = \delta \|\nabla v\|_{o,w}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(vw) \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \frac{\nabla(vw)}{w} w \, dx \\
&\leq \|\nabla u\|_{o,w} \cdot \left\| \frac{\nabla(vw)}{w} \right\|_{o,w} \\
&\leq \beta \|\nabla u\|_{o,w} \cdot \|\nabla v\|_{o,w}.
\end{aligned}$$

(ii) Seja $v \in H_{o,w}^1(\Omega)$. Como $\frac{\partial w}{\partial x_1} = x_1 \tilde{w}(x_1)^3 \tilde{w}(x_2)$ e $\frac{\partial w}{\partial x_2} = x_2 \tilde{w}(x_2)^3 \tilde{w}(x_1)$, segue

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(vw) \, dx = \int_{\Omega} \nabla v \cdot (w \nabla v + v \nabla w) \, dx \\
&= \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla v) w \, dx + \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla w) v \, dx \\
&= \|\nabla v\|_{o,w}^2 + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} x_1 \tilde{w}(x_1)^3 \tilde{w}(x_2) v + \frac{\partial v}{\partial x_2} x_2 \tilde{w}(x_2)^3 \tilde{w}(x_1) v \right] dx \\
&= \|\nabla v\|_{o,w}^2 + \int_I \tilde{w}(x_2) \left[\int_I \frac{\partial v}{\partial x_1} v x_1 \tilde{w}(x_1)^3 \, dx_1 \right] dx_2 \\
&\quad + \int_I \tilde{w}(x_1) \left[\int_I \frac{\partial v}{\partial x_2} v x_2 \tilde{w}(x_2)^3 \, dx_2 \right] dx_1.
\end{aligned}$$

Pela igualdade (5.3) (demonstrada na prova do lema 5.1.1),

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \|\nabla v\|_{o,w}^2 - \frac{1}{2} \int_I \tilde{w}(x_2) \left[\int_I v^2(1 + 2x_1^2) \tilde{w}(x_1)^5 dx_1 \right] dx_2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_I \tilde{w}(x_1) \left[\int_I v^2(1 + 2x_2^2) \tilde{w}(x_2)^5 dx_2 \right] dx_1 \\
&\geq \|\nabla v\|_{o,w}^2 - \frac{3}{4} \int_I \tilde{w}(x_2) \left[\int_I v^2(1 + x_1^2) \tilde{w}(x_1)^5 dx_1 \right] dx_2 \\
&\quad - \frac{3}{4} \int_I \tilde{w}(x_1) \left[\int_I v^2(1 + x_2^2) \tilde{w}(x_2)^5 dx_2 \right] dx_1.
\end{aligned}$$

Pelo lema 5.1.1,

$$\begin{aligned}
a(v, v) &\geq \|\nabla v\|_{o,w}^2 - \frac{3}{4} \int_I \tilde{w}(x_2) \left[\int_I \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 \tilde{w}(x_1) dx_1 \right] dx_2 \\
&\quad - \frac{3}{4} \int_I \tilde{w}(x_1) \left[\int_I \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 \tilde{w}(x_2) dx_2 \right] dx_1 \\
&\geq \|\nabla v\|_{o,w}^2 - \frac{3}{4} \int_I \int_I \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 \tilde{w}(x_1) \tilde{w}(x_2) dx_1 dx_2 \\
&\quad - \frac{3}{4} \int_I \int_I \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 \tilde{w}(x_1) \tilde{w}(x_2) dx_2 dx_1 \\
&= \|\nabla v\|_{o,w}^2 - \frac{3}{4} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 \right] w dx \\
&= \|\nabla v\|_{o,w}^2 - \frac{3}{4} \|\nabla v\|_{o,w}^2 = \frac{1}{4} \|\nabla v\|_{o,w}^2.
\end{aligned}$$

(iii) Coercividade da forma bilinear. Relembramos a desigualdade de Poincaré: existe $\alpha > 0$, tal que

$$\|v\|_{o,w} \leq \alpha \|\nabla v\|_{o,w}, \quad \forall v \in H_{o,w}^1(\Omega). \quad (6.8)$$

Dela deduzimos a desigualdade (6.5). \square

Consideremos a formulação variacional de (6.1),

$$\langle u_t, \phi \rangle_w + a(u, \phi) = \langle f, \phi \rangle_w, \quad \forall \phi \in H_{o,w}^1(\Omega). \quad (6.9)$$

A equação (6.9) tem solução única, pelo teorema de existência e unicidade do capítulo 4. Ainda, a solução desta equação pertence a $L^2(0, T; H_{w,o}^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_w^2(\Omega))$.

6.1.1 Discretização espacial

Seja $\mathbb{P}_N = \tilde{\mathbb{P}}_N \times \tilde{\mathbb{P}}_N$, em que $\tilde{\mathbb{P}}_N$ é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a N em uma variável. Além disso, definimos $\mathbb{P}_N^o = \{p \in \mathbb{P}_N : p(x) = 0 \text{ se } x \in \partial\Omega\}$.

A aproximação pseudo-espectral do problema (6.1) consiste em: $\forall t \in (0, T)$,

$$\text{Encontrar } U \in C^1(\mathbb{P}_N^o) \text{ tal que:} \quad (6.10)$$

$$U_t(x_{ij}) - \Delta U(x_{ij}) = f(x_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq N-1 \quad (6.11)$$

$$U(x_{ij}, 0) = u_o(x_{ij}), \quad 0 \leq i, j \leq N$$

em que $x_{ij} = (\xi_i, \xi_j)$, $\xi_l = \cos\left(\frac{l\pi}{N}\right)$, $0 \leq l \leq N$. Neste capítulo, $(\xi_l, w_l)_{l=0}^N$, em que $w_o = w_N = \frac{\pi}{2N}$ e $w_l = \frac{\pi}{N}$, são os pontos e peso da fórmula de integração Gauss-Lobatto relativa ao peso de Chebyshev \tilde{w} . Relembramos que

$$\int_{-1}^1 p(\xi)\tilde{w}(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^N p(\xi_j)w_j, \quad \forall p \in \tilde{\mathbb{P}}_{2N-1}. \quad (6.12)$$

Para o caso bidimensional, definimos o produto interno discreto da seguinte forma: dados $\phi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $\phi, \psi \in C^o(\bar{\Omega})$,

$$\langle \phi, \psi \rangle_{N,w} = \sum_{i,j=0}^N \phi(x_{ij})\psi(x_{ij})w_iw_j.$$

Se $\psi, \phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\phi, \psi \in C^o(\bar{\Omega})$, definimos

$$\langle \phi, \psi \rangle_{N,w} = \sum_{i,j=0}^N [\phi(x_{ij}) \cdot \psi(x_{ij})]w_iw_j.$$

Usando a definição de produto interno discreto, podemos reescrever a equação (6.11) equivalentemente como:

$$\langle U_t, \phi \rangle_{N,w} - \langle \Delta U, \phi \rangle_{N,w} = \langle f, \phi \rangle_{N,w}, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N^o \quad (6.13)$$

$$U(0) = P_c u_o.$$

De uma simples aplicação da fórmula (6.12) resulta que, $\forall \phi \in \mathbb{P}_N^o$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_N$,

$$\langle \text{div } \mathbf{p}, \phi \rangle_{N,w} = - \left\langle \mathbf{p}, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_{N,w}. \quad (6.14)$$

De fato, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} \mathbf{p}, \phi \rangle_{N,w} &= \sum_{i,j=0}^N (\operatorname{div} \mathbf{p})(x_{ij}) \phi(x_{ij}) w_i w_j = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{p}) \phi w \, dx = - \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \nabla(\phi w) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \frac{\nabla(\phi w)}{w} w \, dx = - \left\langle \mathbf{p}, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_{N,w}. \end{aligned}$$

Definimos a forma bilinear discreta sobre \mathbb{P}_N^o por

$$a_N(\psi, \phi) = \left\langle \nabla \psi, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_{N,w}, \quad \forall \psi, \phi \in \mathbb{P}_N^o. \quad (6.15)$$

Proposição 6.1.2 *A forma bilinear a_N é contínua e coerciva sobre \mathbb{P}_N^o . Ou seja, existe uma constante positiva ξ tal que*

$$|a_N(\psi, \phi)| \leq \xi \|\nabla \psi\|_{N,w} \cdot \|\nabla \phi\|_{N,w}, \quad \psi, \phi \in \mathbb{P}_N^o \quad (6.16)$$

$$a_N(\phi, \phi) \geq \frac{1}{4} \|\nabla \phi\|_{N,w}^2, \quad \phi \in \mathbb{P}_N^o \quad (6.17)$$

Demonstração. Sejam $\phi, \psi \in \mathbb{P}_N^o$. Como $\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x_i} = x_i (\tilde{w}(x_i))^2$, $i = 1, 2$, temos que $\frac{\phi \nabla w}{w} \in \mathbb{P}_N$, se $\phi \in \mathbb{P}_N^o$. Por (6.7), $\frac{\nabla(\phi w)}{w} \in \mathbb{P}_N$, $\forall \phi \in \mathbb{P}_N^o$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, equivalência de normas e desigualdade (6.6), segue que

$$\begin{aligned} |a_N(\psi, \phi)| &\leq \|\nabla \psi\|_{N,w} \cdot \left\| \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\|_{N,w} \leq 2 \|\nabla \psi\|_{N,w} \cdot \left\| \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\|_{o,w} \\ &\leq 2 \delta \|\nabla \psi\|_{N,w} \cdot \|\nabla \phi\|_{N,w}. \end{aligned}$$

Agora, como $\phi \in \mathbb{P}_N^o$, implica que $\nabla \phi \in \mathbb{P}_{N-1}$. Portanto, por (3.3) e (6.4), temos que

$$\begin{aligned} a_N(\phi, \phi) &= \left\langle \nabla \phi, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_{N,w} = \left\langle \nabla \phi, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_w = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \frac{\nabla(\phi w)}{w} w \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla(\phi w) \, dx = a(\phi, \phi) \geq \frac{1}{4} \|\nabla \phi\|_{o,w}^2 = \frac{1}{4} \|\nabla \phi\|_{N,w}^2, \end{aligned}$$

ou seja, a desigualdade (6.17). \square

Através da definição da forma bilinear a_N , podemos reescrever a equação (6.13) como

$$\langle U_t, \phi \rangle_{N,w} + a_N(U, \phi) = \langle f, \phi \rangle_{N,w}, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N^o, \quad (6.18)$$

pois $a_N(U, \phi) = \left\langle \nabla u, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_{N,w} = -\langle \operatorname{div}(\nabla u), \phi \rangle_{N,w} = -\langle \Delta u, \phi \rangle_{N,w}$.

Teorema 6.1.3 *O problema pseudo-espectral semidiscreto (6.11) (ou (6.13), ou (6.18)) é estável, ou seja,*

$$\|U\|_{o,w} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^T \|\nabla U(t)\|_{o,w}^2 dt \right)^{1/2} \leq 2e^{T/2} \left\{ \|U(0)\|_{o,w} + \left(\int_0^T \|f(t)\|_{N,w}^2 dt \right)^{1/2} \right\} \quad (6.19)$$

Demonstração. Escolhemos $\phi = U \in \mathbb{P}_N^o$ na equação (6.18):

$$\langle U_t, U \rangle_{N,w} + a_N(U, U) = \langle f, U \rangle_{N,w}.$$

Agora, através da coercividade de a (6.17), temos que

$$\langle U_t, U \rangle_{N,w} + \frac{1}{4} \|\nabla U\|_{N,w}^2 \leq \langle f, U \rangle_{N,w}.$$

Então, pelas desigualdades de Cauchy-Scharwz e algébrica,

$$\frac{d}{dt} \|U\|_{N,w}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla U\|_{N,w}^2 \leq \|f\|_{N,w}^2 + \|U\|_{N,w}^2. \quad (6.20)$$

Aplicando o lema de Gronwall 1.10.2 em (6.20), segue que

$$\begin{aligned} \|U\|_{N,w}^2 &\leq e^t \|U(0)\|_{N,w}^2 + \int_0^t \left[\|f\|_{N,w}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla U\|_{N,w}^2 \right] e^{t-s} ds, \quad \forall t \in [0, T] \\ &\leq e^T \left\{ \|U(0)\|_{N,w}^2 + \int_0^T \|f\|_{N,w}^2 ds \right\} - \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla U\|_{N,w}^2 e^{t-s} ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $t \in [0, T]$, em particular, é válida para $t = T$,

$$\|U\|_{N,w}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|\nabla U\|_{N,w}^2 dt \leq e^T \left\{ \|U(0)\|_{N,w}^2 + \int_0^T \|f\|_{N,w}^2 ds \right\}.$$

Portanto, pela desigualdade da raiz,

$$\begin{aligned} \|U\|_{N,w} &\leq e^{T/2} \left\{ \|U(0)\|_{N,w} + \left(\int_0^T \|f\|_{N,w}^2 ds \right)^{1/2} \right\} \\ \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|\nabla U\|_{N,w}^2 dt \right)^{1/2} &\leq e^{T/2} \left\{ \|U(0)\|_{N,w} + \left(\int_0^T \|f\|_{N,w}^2 ds \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Somando ambas as desigualdades acima e usando a equivalência de normas, obtemos (6.19). \square

Para auxiliar na análise de convergência, no capítulo anterior, introduzimos o operador Π_N e demonstramos a estimativa (5.15) para o caso unidimensional. Agora, demonstraremos tal estimativa para o caso geral ($d \geq 1$).

Proposição 6.1.4 *Sejam $0 \leq \mu \leq \sigma$, $\sigma \geq 1$, $v \in H_w^\sigma \cap H_{o,w}^1$,*

$$\|v - \Pi_N v\|_\mu \leq C \cdot \|v\|_\sigma \cdot \begin{cases} N^{\mu-\sigma}, & \mu \leq 1 \\ N^{2\mu-1-\sigma} & \mu > 1. \end{cases} \quad (6.21)$$

Demonstração. Para demonstrar (5.21) para $d > 1$, introduzimos o operador $\tilde{\Pi}_{N,i} : C_o^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow H_w^1(-1,1) \times C_o^\infty(\bar{\Omega})$, $i = 1, \dots, d$, por

$$\|v^i(\bar{y}, x_i) - (\tilde{\Pi}_{N,i} v)^i(\bar{y}, x_i)\|_{H_w^1(-1,1)} = \inf_{\varphi \in \mathbb{P}_N^o(-1,1)} \|v^i(\bar{y}, x_i) - \varphi(x_i)\|_{H_w^1(-1,1)}, \quad \forall \bar{y} \in \bar{\Omega}_i, \quad (6.22)$$

em que $v^i(\bar{y}, x_i) = v(y_1, y_2, \dots, x_i, \dots, y_{n-1})$. Para $i = 1, \dots, d$ e um fixo $\bar{y} \in \bar{\Omega}_i$, por (5.21), temos que

$$\|v^i(\bar{y}, x_i) - (\tilde{\Pi}_{N,i} v)^i(\bar{y}, x_i)\|_{H_w^1(-1,1)} \leq C \cdot N^{1-\sigma} \|v^i(\bar{y}, x_i)\|_{H_w^\sigma(-1,1)}, \quad \forall v \in C_o^\infty, \sigma \geq 1. \quad (6.23)$$

E, então,

$$\left\langle v^i(\bar{y}, x_i) - (\tilde{\Pi}_{N,i} v)^i(\bar{y}, x_i), \varphi \right\rangle_{H_w^1(-1,1)} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathbb{P}_N^o. \quad (6.24)$$

Por (6.24) e diferenciação sob o sinal da integral, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\Pi}_{N,i} = \tilde{\Pi}_{N,i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{se } j \neq i. \quad (6.25)$$

De fato, diferenciando (6.24) com relação a x_j ,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial v^i}{\partial x_j}(\bar{y}, x_i), \varphi \right\rangle_{H_w^1(-1,1)} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\Pi}_{N,i} v)^i(\bar{y}, x_i), \varphi \right\rangle_{H_w^1(-1,1)} \\ &= \left\langle \left(\tilde{\Pi}_{N,i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^i(\bar{y}, x_i), \varphi \right\rangle_{H_w^1(-1,1)}. \end{aligned}$$

Afirmção 1: Se $v \in C_o^\infty$, temos

$$\|v - \tilde{\Pi}_{N,i} v\|_{1,w} \leq CN^{1-\sigma} \|v\|_{H_w^\sigma}, \quad i = 1, \dots, d, \quad \sigma \geq 1. \quad (6.26)$$

De fato, para $i = 1, \dots, d$, por (5.15), segue que

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{\Pi}_{N,i} v)^2 w \, dx \leq \int_{\Omega_i} \|v - \tilde{\Pi}_{N,i} v\|_{H_w^1(-1,1)}^2 \frac{w}{\tilde{w}_i} \, dx_i \leq C (\|v\|_{\sigma,w} \cdot N^{1-\sigma})^2. \quad (6.27)$$

Desta forma, ainda por (5.15),

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (v - \tilde{\Pi}_{N,i} v) \right)^2 w \, dx \leq C (\|v\|_{H_w^\sigma} \cdot N^{1-\sigma})^2. \quad (6.28)$$

Para $j \neq i$, por (6.25), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (v - \tilde{\Pi}_{N,i} v) \right)^2 w \, dx &\leq \int_{\Omega_i} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} - \tilde{\Pi}_{N,i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L_w^2(-1,1)}^2 \frac{w}{\tilde{w}_i} \, dx_i \\ &\leq C \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{H_w^{\sigma-1}} \cdot N^{1-\sigma} \right)^2 \leq C (\|v\|_{H_w^\sigma} \cdot N^{1-\sigma})^2, \end{aligned} \quad (6.29)$$

em que na penúltima desigualdade, usamos (5.23). Então, somando (6.27), (6.28) e (6.29) com $j = 1, \dots, d$ e $j \neq i$, obtemos a desigualdade (6.26). Agora, introduzimos o operador

$$\tilde{\Pi}_N^* = \tilde{\Pi}_{N,1} \cdot \dots \cdot \tilde{\Pi}_{N,i} \cdot \dots \cdot \tilde{\Pi}_{N,d}$$

para demonstrar que (5.15) é válida para $d > 1$. De fato, faremos a demonstração via indução matemática sobre d . Para $d = 1$, é exatamente (5.15). Para $d > 1$, se $v \in C_o^\infty$ e pela definição de Π_N , segue que

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_N v\|_{1,w} &\leq \|v - \tilde{\Pi}_N^* v\|_{1,w} \leq \|(v - \tilde{\Pi}_{N,1} v) - \tilde{\Pi}_{N,2} \cdot \dots \cdot \tilde{\Pi}_{N,d} (v - \tilde{\Pi}_{N,1} v)\|_{1,w} \\ &\quad + \|v - \tilde{\Pi}_{N,1} v\|_{1,w} + \|v - \tilde{\Pi}_{N,2} \cdot \dots \cdot \tilde{\Pi}_{N,d} v\|_{1,w}. \end{aligned}$$

Agora, obtemos (5.15) via hipótese de indução e (5.15) para $d = 1$, isto é,

$$\|v - \Pi_N v\|_{1,w} \leq C \cdot N^{1-\sigma} \|v\|_{\sigma,w}.$$

Como C_o^∞ é denso em H_w^1 , obtemos (5.15) para $d > 1$. \square

Como feito no capítulo anterior, definimos

$$E_w(v, \phi) = \langle v, \phi \rangle_{N,w} - \langle v, \phi \rangle_w, \quad \forall v, \phi \in C^o(\bar{\Omega}).$$

Então, analogamente como demonstramos (5.43), obtemos

$$|E_w(v, \phi)| \leq C_3 \{ \|v - P_{N-1} v\|_{o,w} + \|v - P_c v\|_{o,w} \} \cdot \|\phi\|_{o,w}, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N. \quad (6.30)$$

Pelas estimativas (3.19) e (3.15), deduzimos que

$$|E_w(v, \phi)| \leq C_4 N^{-\sigma} \|v\|_\sigma \cdot \|\phi\|_{o,w}, \quad \sigma > 1, \forall \phi \in \mathbb{P}_N. \quad (6.31)$$

De fato, $\forall \phi \in \mathbb{P}_N$ e $\sigma > 1$,

$$\begin{aligned} |E_w(v, \phi)| &\leq C_3 \{ \|v - P_{N-1}v\|_{o,w} + \|v - P_c v\|_{o,w} \} \cdot \|\phi\|_{o,w} \\ &\leq C_3 \{ C N^{-\sigma} \|v\|_\sigma + C_1 N^{-\sigma} \|v\|_\sigma \} \cdot \|\phi\|_{o,w} \\ &\leq C_4 N^{-\sigma} \|v\|_\sigma \cdot \|\phi\|_{o,w}. \end{aligned}$$

Lema 6.1.5 *Existe uma constante positiva C_5 tal que*

$$\left| E_w \left(\nabla \Pi_N v, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right) \right| \leq C_5 N^{1-\sigma} \|v\|_{\sigma,w} \cdot \|\nabla \phi\|_{o,w}, \quad (6.32)$$

para qualquer $v \in H_{o,w}^1 \cap H_w^\sigma$ com $\sigma \geq 1$ e para qualquer $\phi \in P_N^o$.

Demonstração. Na prova da continuidade da forma bilinear a , mostramos que

$$\left\| \frac{\nabla(vw)}{w} \right\|_{o,w} \leq \delta \|\nabla v\|_{o,w}, \quad \forall v \in H_{o,w}^1.$$

Também, como $z - P_c z = 0$, quando $z \in \mathbb{P}_N$, da desigualdade (6.30), segue que

$$|E_w(z, \psi)| \leq C_3 \|z - P_{N-1}z\|_{o,w} \cdot \|\psi\|_{o,w}, \quad \forall z, \psi \in \mathbb{P}_N. \quad (6.33)$$

Portanto, por (6.33) e observações acima, temos que

$$\begin{aligned} \left| E_w \left(\nabla \Pi_N v, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right) \right| &\leq C_3 \|\nabla \Pi_N v - P_{N-1}(\Pi_N v)\|_{o,w} \cdot \left\| \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\|_{o,w} \\ &\leq \delta C_3 \|\nabla \Pi_N v - P_{N-1}(\Pi_N v)\|_{o,w} \cdot \|\nabla \phi\|_{o,w} \\ &\leq \delta C_3 \{ \|\nabla v - P_{N-1} \nabla v\|_{o,w} + \|(I_d - P_{N-1})(\nabla \Pi_N v - \nabla v)\|_{o,w} \} \\ &\quad \cdot \|\nabla \phi\|_{o,w} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Agora, aplicando as estimativas (3.15) e (6.21), com $\mu = 1$, em (6.34),

$$\begin{aligned} \left| E_w \left(\nabla \Pi_N v, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right) \right| &\leq \delta C_3 \{ C_1 N^{1-\sigma} \|v\|_{\sigma,w} + C_1 \|\nabla \Pi_N v - \nabla v\|_{o,w} \} \cdot \|\nabla \phi\|_{o,w} \\ &\leq \delta C_3 \{ C_1 N^{1-\sigma} \|v\|_{\sigma,w} + C_1 C_2 N^{1-\sigma} \|v\|_{\sigma,w} \} \cdot \|\nabla \phi\|_{o,w} \\ &\leq C_5 N^{1-\sigma} \|v\|_{\sigma,w} \cdot \|\nabla \phi\|_{o,w}, \end{aligned}$$

obtemos a desigualdade (6.32). \square

Teorema 6.1.6 (Convergência) *Sejam $u(t) \in H_w^\sigma(\Omega)$, para $0 \leq t \leq T$, $u_o \in H_w^{\sigma-1}(\Omega)$ e $u_t \in L^2(H_w^{\sigma-1})$ com $\sigma > 2$. Então, existe uma constante positiva K , independente de N , tal*

que

$$\|u(t) - U(t)\|_{o,w} + \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|\nabla(u - U)(s)\|_{o,w}^2 ds \right)^{1/2} \leq KN^{1-\sigma} \left\{ \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u_o\|_{\sigma-1,w} + \|u(t)\|_{\sigma,w} \right\} \quad (6.35)$$

Demonstração. Seja $\tilde{u}(t) = \Pi_N u(t)$ para qualquer $t \geq 0$. Então, \tilde{u} satisfaz a equação variacional:

$$\langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_{N,w} + a_N(\tilde{u}, \phi) = \langle \tilde{u}_t - u_t, \phi \rangle_w + E_w(\tilde{u}_t, \phi) + a_N(\tilde{u}, \phi) - a(\tilde{u}, \phi) + \langle f, \phi \rangle_w, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N^o. \quad (6.36)$$

De fato, pela equação (6.9) e usando as definições dos operadores P_N e Π_N ,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_{N,w} + a_N(\tilde{u}, \phi) &= \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_{N,w} - \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_w + \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_w + a_N(\tilde{u}, \phi) \\ &= E_w(\tilde{u}_t, \phi) + \langle \tilde{u}_t, \phi \rangle_w + a_N(\tilde{u}, \phi) + a(u, \phi) - a(u, \phi) + \langle u_t, \phi \rangle_w - \langle u_t, \phi \rangle_w \\ &= E_w(\tilde{u}_t, \phi) + \langle f, \phi \rangle_w + \langle \tilde{u}_t - u_t, \phi \rangle_w - a(u, \phi) + a_N(\tilde{u}, \phi). \end{aligned}$$

Agora, $\forall t \geq 0$, $\rho(t) = \tilde{u}(t) - U(t)$. Comparando as equações (6.18) e (6.36), deduzimos que, $\forall \phi \in \mathbb{P}_N^o$,

$$\langle \rho_t, \phi \rangle_{N,w} + a_N(\rho, \phi) = \langle \tilde{u}_t - u_t, \phi \rangle_w + E_w(\tilde{u}_t, \phi) + a_N(\tilde{u}, \phi) - a(\tilde{u}, \phi) - E_w(f, \phi). \quad (6.37)$$

Vamos estimar os diferentes termos do lado direito da equação (6.37).

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, estimativa (6.21) e lembrando que o operador Π_N comuta com o operador de diferenciação em relação ao tempo,

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{u}_t - u_t, \phi \rangle_w| &\leq \|\tilde{u}_t - u_t\|_{o,w} \cdot \|\phi\|_{o,w} = \|(\Pi_N u)_t - u_t\|_{o,w} = \|\Pi_N u_t - u_t\|_{o,w} \\ &\leq C_2 N^{1-\sigma} \|u_t\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\phi\|_{o,w}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Por hipótese $\sigma > 2$, então $\sigma - 1 > 1$. Da desigualdade (6.31), segue que

$$|E_w(f, \phi)| \leq C_4 N^{1-\sigma} \|f\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\phi\|_{o,w}. \quad (6.39)$$

Além disso,

$$|E_w(\tilde{u}_t, \phi)| \leq C_6 N^{1-\sigma} \|u_t\|_{\sigma-1} \cdot \|\phi\|_{o,w}. \quad (6.40)$$

De fato, por (6.31),

$$\begin{aligned} |E_w(\tilde{u}_t, \phi)| &\leq C_4 N^{-(\sigma-1)} \|\tilde{u}_t\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\phi\|_{o,w} \\ &\leq C_4 N^{-(\sigma-1)} (\|\Pi_N u_t - u_t\|_{\sigma-1,w} + \|u_t\|_{\sigma-1,w}) \cdot \|\phi\|_{o,w} \\ &\leq C_4 N^{-(\sigma-1)} \|u_t\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\phi\|_{o,w} + C_4 N^{-(\sigma-1)} \|\Pi_N u_t - u_t\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\phi\|_{o,w}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a estimativa (6.21), com $\mu = \sigma - 1 > 1$ e $\tilde{\sigma} = 2\sigma - 3$; e em seguida, através do teorema 1.5.7, pois $2\sigma - 3 > \sigma - 1$, tendo em vista que $\sigma > 2$, segue que

$$\begin{aligned} |E_w(\tilde{u}_t, \phi)| &\leq C_4 N^{-(\sigma-1)} \|u_t\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\phi\|_{o,w} + C_4 N^{-(\sigma-1)} \cdot N^{2\sigma-3-(2\sigma-3)} \|u_t\|_{2\sigma-3,w} \\ &\leq C_4 N^{-(\sigma-1)} \|u_t\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\phi\|_{o,w} + C_4 N^{-(\sigma-1)} \cdot \tilde{C} \|u_t\|_{\sigma-1,w} \\ &\leq C_6 N^{1-\sigma} \|u_t\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\phi\|_{o,w}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |a_N(\tilde{u}, \phi) - a(\tilde{u}, \phi)| &= \left| E_w \left(\nabla \tilde{u}, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right) \right| \\ &\leq C_5 N^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} \cdot \|\nabla \phi\|_{o,w}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

A desigualdade acima segue do lema 6.1.5, pois

$$\begin{aligned} |a_N(\tilde{u}, \phi) - a(\tilde{u}, \phi)| &= \left| \left\langle \nabla \tilde{u}, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_{N,w} - \int_{\Omega} (\nabla \tilde{u}) \cdot \nabla(\phi w) dx \right| \\ &= \left| \left\langle \nabla \tilde{u}, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_{N,w} - \int_{\Omega} (\nabla \tilde{u}) \cdot \frac{\nabla(\phi w)}{w} w dx \right| \\ &= \left| \left\langle \nabla \tilde{u}, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_{N,w} - \left\langle \nabla \tilde{u}, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right\rangle_w \right| \\ &= \left| E_w \left(\nabla \tilde{u}, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right) \right| \\ &\leq C_5 N^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} \cdot \|\nabla \phi\|_{o,w} \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $\phi = \rho \in \mathbb{P}_N^o$, $\forall t \geq 0$, na equação (6.37),

$$\langle \rho_t, \rho \rangle_{N,w} + a_N(\rho, \rho) = \langle \tilde{u}_t - u_t, \rho \rangle_w + E_w(\tilde{u}_t, \rho) + a_N(\tilde{u}, \rho) - a(\tilde{u}, \rho) - E_w(f, \rho).$$

Pelas desigualdades (6.17) e (6.38)-(6.41) e observando que

$$2C_5 N^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} \cdot \|\nabla \rho\|_{o,w} \leq (2C_5 N^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w})^2 + \frac{1}{4} \|\nabla \rho\|_{o,w}^2,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\rho\|_{N,w}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \rho\|_{N,w}^2 &\leq 2C_2 N^{1-\sigma} \|u_t\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\rho\|_{o,w} + 2C_6 N^{1-\sigma} \|u_t\|_{\sigma-1} \cdot \|\rho\|_{o,w} \\ &\quad + 2C_4 N^{1-\sigma} \|f\|_{\sigma-1,w} \cdot \|\rho\|_{o,w} + (2C_5 N^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w})^2 + \frac{1}{4} \|\nabla \rho\|_{o,w}^2. \end{aligned}$$

Então, através da desigualdade algébrica e equivalência de normas,

$$\frac{d}{dt} \|\rho\|_{N,w}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla \rho\|_{N,w}^2 \leq C_7 N^{2(1-\sigma)} \{ \|f\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u_t\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u\|_{\sigma,w}^2 \} + \|\rho\|_{N,w}^2$$

Aplicando o lema de Gronwall 1.10.2 na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{N,w}^2 + \frac{1}{4} \int_0^t \|\nabla \rho(s)\|_{o,w}^2 ds &\leq e^T \left\{ \|\rho(0)\|_{N,w}^2 \right. \\ &\quad \left. + C_7 N^{2(1-\sigma)} \int_0^T [\|f\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u_t\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u\|_{\sigma,w}^2] dt \right\}. \end{aligned}$$

Como $\rho(0) = P_c u_o - \Pi_N u_o$, segue das estimativas (6.21), (3.19), e pela equivalência das normas,

$$\begin{aligned} \|\rho(0)\|_{N,w} &\leq 2\|\rho(0)\|_{o,w} = 2\|P_c u_o - \Pi_N u_o\|_{o,w} \leq 2\|\Pi_N u_o - u_o\|_{o,w} + 2\|P_c u_o - u_o\|_{o,w} \\ &\leq 2C_2 N^{1-\sigma} \|u_o\|_{\sigma-1,w} + 2\tilde{C} N^{1-\sigma} \|u_o\|_{\sigma-1,w} \leq C N^{1-\sigma} \|u_o\|_{\sigma-1,w}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\rho\|_{o,w}^2 + \frac{1}{4} \int_0^t \|\nabla \rho(s)\|_{o,w}^2 ds \leq \tilde{C} N^{2(1-\sigma)} \left\{ \|u_o\|_{\sigma-1,w}^2 + \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})}^2 + \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})}^2 + \|u\|_{\sigma,w}^2 \right\}$$

Agora, pela desigualdade da raiz

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{o,w} &\leq C N^{1-\sigma} \left\{ \|u_o\|_{\sigma-1,w} + \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u\|_{\sigma,w} \right\} \\ \frac{1}{2} \left(\int_0^t \|\nabla \rho(s)\|_{o,w}^2 ds \right)^{1/2} &\leq C N^{1-\sigma} \left\{ \|u_o\|_{\sigma-1,w} + \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u\|_{\sigma,w} \right\} \end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade triangular e estimativa (6.21),

$$\begin{aligned} \|u(t) - U(t)\|_{o,w} &\leq \|u(t) - \Pi_N u(t)\|_{o,w} + \|\rho\|_{o,w} \\ &\leq C_2 N^{1-\sigma} \|u\|_{\sigma,w} \\ &\quad + C N^{1-\sigma} \left\{ \|u_o\|_{\sigma-1,w} + \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u\|_{\sigma,w} \right\} \\ &\leq \tilde{K} N^{1-\sigma} \left\{ \|u_o\|_{\sigma-1,w} + \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u\|_{\sigma,w} \right\} \quad (6.42) \end{aligned}$$

Analogamente, $\nabla u - \nabla U = \nabla u - \nabla(\Pi_N u) + \rho$,

$$\begin{aligned} \|\nabla u - \nabla U\|_{o,w}^2 &\leq 2\|\nabla u - \nabla(\Pi_N u)\|_{o,w}^2 + 2\|\nabla \rho\|_{o,w}^2 \leq 2\|u - \Pi_N u\|_{1,w}^2 + 2\|\nabla \rho\|_{o,w}^2 \\ &\leq \tilde{C}_2 N^{2(1-\sigma)} \|u\|_{\sigma,w}^2 + \|\nabla \rho\|_{o,w}^2. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t ,

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\nabla u - \nabla U\|_{o,w}^2 ds &\leq C N^{2(1-\sigma)} \|u\|_{\sigma,w}^2 + \int_0^t \|\nabla \rho\|_{o,w}^2 ds \\ &\leq C \left\{ \|u_o\|_{\sigma-1,w} + \|f\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})} + \|u_t\|_{L^2(H_w^{\sigma-1})}, + \|u\|_{\sigma,w} \right\} \end{aligned} \quad (6.43)$$

ou seja, somando (6.42) e (6.43), obtemos (6.35). \square

6.1.2 Discretização completa pelo método- θ

A aproximação semidiscreta (6.11) de (6.1) conduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável temporal. Podemos resolver este sistema numericamente utilizando o método de diferenças finitas. Esquemas implícitos para avançar no tempo serão considerados através do método- θ , com $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, pois esquemas explícitos nos conduziriam a fortes restrições sobre o passo no tempo. Observamos que para $\theta = 1/2$, obtemos o método conhecido como Crank-Nicolson.

Consideramos a seguinte aproximação completa de (6.1): Para todo $k \geq 0$, encontrar $U^{k+1} \in \mathbb{P}_N^o$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{U^{k+1}(x_{ij}) - U^k(x_{ij})}{\Delta t} - \Delta U_\theta^{k+1}(x_{ij}) &= f_\theta^{k+1}(x_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq N-1 \\ U^o(x_{ij}) &= u_o(x_{ij}), \quad 0 \leq i, j \leq N \end{aligned} \quad (6.44)$$

Aqui, usamos a notação $\phi_\theta^{k+1} = \theta \phi^{k+1} + (1-\theta)\phi^k$. Também, supomos que existe M inteiro tal que $M\Delta t = T$.

Teorema 6.1.7 (Estabilidade incondicional) *O esquema (6.44) é estável, a saber, para qualquer N e qualquer $\Delta t \leq 1/2$, $1 \leq m \leq M$,*

$$\|U^m\|_{o,w} + \left(\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2 \right)^{1/2} \leq 2\sqrt{2} e^T \left\{ \|U^o\|_{o,w}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \|f^k\|_{N,w}^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.45)$$

Demonstração. Reescrevemos (6.44) na forma variacional:

$$\left\langle \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} + a_N(U_\theta^{k+1}, \phi) = \langle f_\theta^{k+1}, \phi \rangle_{N,w}, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N^o. \quad (6.46)$$

Escolhemos $\phi = U_\theta^{k+1}$ na equação (6.46) e utilizando a coercividade de a_N (6.17),

$$\left\langle \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}, U_\theta^{k+1} \right\rangle_{N,w} + \frac{1}{4} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{N,w}^2 \leq \langle f_\theta^{k+1}, U_\theta^{k+1} \rangle_{N,w}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}, U_\theta^{k+1} \right\rangle_{N,w} &= \frac{1}{\Delta t} \langle U^{k+1} - U^k, \theta U^{k+1} + (1 - \theta) U^k \rangle_{N,w} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \{ \theta \|U^{k+1}\|_{N,w}^2 + (1 - 2\theta) \langle U^{k+1}, U^k \rangle_{N,w} - (1 - \theta) \|U^k\|_{N,w}^2 \}. \end{aligned}$$

Além disso, pela a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a algébrica,

$$\begin{aligned} \langle \theta f^{k+1} + (1 - \theta) f^k, \theta U^{k+1} + (1 - \theta) U^k \rangle_{N,w} &= \theta^2 \langle f^{k+1}, U^{k+1} \rangle_{N,w} + \theta(1 - \theta) \langle f^{k+1}, U^k \rangle_{N,w} \\ &\quad + \theta(1 - \theta) \langle f^k, U^{k+1} \rangle_{N,w} + (1 - \theta)^2 \langle f^k, U^k \rangle_{N,w} \\ &\leq \theta^2 \|f^{k+1}\|_{N,w} \cdot \|U^{k+1}\|_{N,w} + \theta(1 - \theta) \|f^{k+1}\|_{N,w} \cdot \|U^k\|_{N,w} \\ &\quad + \theta(1 - \theta) \|f^k\|_{N,w} \cdot \|U^{k+1}\|_{N,w} + (1 - \theta)^2 \|f^k\|_{N,w} \cdot \|U^k\|_{N,w} \\ &\leq \frac{\theta^2}{2} \|f^{k+1}\|_{N,w}^2 + \frac{\theta^2}{2} \|U^{k+1}\|_{N,w}^2 + \frac{\theta(1 - \theta)}{2} (\|f^{k+1}\|_{N,w}^2 + \|U^k\|_{N,w}^2) \\ &\quad + \frac{\theta(1 - \theta)}{2} (\|f^k\|_{N,w}^2 + \|U^{k+1}\|_{N,w}^2) + \frac{(1 - \theta)^2}{2} (\|f^k\|_{N,w}^2 + \|U^k\|_{N,w}^2) \\ &= \frac{\theta}{2} \|f^{k+1}\|_{N,w}^2 + \frac{\theta}{2} \|U^k\|_{N,w}^2 + \frac{\theta}{2} \|f^k\|_{N,w}^2 + \frac{\theta}{2} \|U^{k+1}\|_{N,w}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|f^k\|_{N,w}^2 - \theta \|f^k\|_{N,w}^2 + \frac{1}{2} \|U^k\|_{N,w}^2 - \theta \|U^k\|_{N,w}^2 \\ &= \frac{\theta}{2} (\|f^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|f^k\|_{N,w}^2) + \frac{1}{2} \|f^k\|_{N,w}^2 + \frac{\theta}{2} (\|U^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|U^k\|_{N,w}^2) + \frac{1}{2} \|U^k\|_{N,w}^2. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} \{ \theta \|U^{k+1}\|_{N,w}^2 + (1 - 2\theta) \langle U^{k+1}, U^k \rangle_{N,w} - (1 - \theta) \|U^k\|_{N,w}^2 \} + \frac{1}{4} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2 \\ &\leq \frac{\theta}{2} (\|f^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|f^k\|_{N,w}^2) + \frac{1}{2} \|f^k\|_{N,w}^2 + \frac{\theta}{2} (\|U^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|U^k\|_{N,w}^2) + \frac{1}{2} \|U^k\|_{N,w}^2 \end{aligned}$$

Ainda, podemos minorar o termo que está entre chaves do lado esquerdo da desigualdade acima por $\frac{1}{2} \{ \|U^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|U^k\|_{N,w}^2 \}$. De fato, como $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, temos que $(1 - 2\theta) \leq 0$. Por

Cauchy-Schwarz e, em seguida, a desigualdade algébrica,

$$\langle U^k, U^{k+1} \rangle_{N,w} \leq \|U^k\|_{N,w} \cdot \|U^{k+1}\|_{N,w} \leq 2^{-1} (\|U^k\|_{N,w}^2 + \|U^{k+1}\|_{N,w}^2).$$

Multiplicando por $(1 - 2\theta)$, temos que

$$(1 - 2\theta)\langle U^k, U^{k+1} \rangle_{N,w} \geq (1 - 2\theta)2^{-1} (\|U^k\|_{N,w}^2 + \|U^{k+1}\|_{N,w}^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \theta\|U^{k+1}\|_{N,w}^2 + (1 - 2\theta)\langle U^{k+1}, U^k \rangle_{N,w} - (1 - \theta)\|U^k\|_{N,w}^2 \\ & \geq \|U^{k+1}\|_{N,w}^2 + (1 - 2\theta)2^{-1} (\|U^k\|_{N,w}^2 + \|U^{k+1}\|_{N,w}^2) - (1 - \theta)\|U^k\|_{N,w}^2 \\ & = \frac{\|U^{k+1}\|_{N,w}^2}{2} - \frac{\|U^k\|_{N,w}^2}{2}. \end{aligned}$$

Logo, como $\theta \leq 1$,

$$\begin{aligned} \{ \|U^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|U^k\|_{N,w}^2 \} + \frac{\Delta t}{2} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2 & \leq \Delta t (\|f^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|f^k\|_{N,w}^2) + \Delta t \|f^k\|_{N,w}^2 \\ & \quad + \Delta t (\|U^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|U^k\|_{N,w}^2) + \Delta t \|U^k\|_{N,w}^2 \\ & \leq \Delta t \{ \|f^{k+1}\|_{N,w}^2 + \|U^{k+1}\|_{N,w}^2 \}. \end{aligned}$$

Somando a desigualdade acima de $k = 0$ até $m - 1$, com $\Delta t \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} & \|U^m\|_{N,w}^2 - \|U^o\|_{N,w}^2 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{N,w}^2 \leq \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|f^{k+1}\|_{N,w}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|U^{k+1}\|_{N,w}^2 \\ & = \Delta t \sum_{k=1}^m \|f^k\|_{N,w}^2 + \Delta t \sum_{k=1}^m \|U^k\|_{N,w}^2 \\ & \leq \Delta t \sum_{k=0}^m \|f^k\|_{N,w}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \|U^k\|_{N,w}^2 \\ & \leq \Delta t \sum_{k=0}^m \|f^k\|_{N,w}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|U^k\|_{N,w}^2 + \Delta t \|U^m\|_{N,w}^2 \\ & \leq \Delta t \sum_{k=0}^m \|f^k\|_{N,w}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|U^k\|_{N,w}^2 + \frac{1}{2} \|U^m\|_{N,w}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|U^m\|_{N,w}^2 \leq 2\|U^o\|_{N,w}^2 + 2\Delta t \sum_{k=0}^m \|f^k\|_{N,w}^2 - \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{N,w}^2 + 2\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|U^k\|_{N,w}^2.$$

Aplicando o lema de Gronwall discreto 1.10.3 (a primeira parte) na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|U^m\|_{N,w}^2 &\leq \left(2\|U^o\|_{N,w}^2 + 2\Delta t \sum_{k=0}^m \|f^k\|_{N,w}^2 \right) \exp \left(\sum_{s=0}^{m-1} (2\Delta t) \right) \\ &\quad - \Delta t \sum_{k=0}^{m-2} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{N,w}^2 \cdot \prod_{\tau=k+1}^{m-1} (1 + 2\Delta t) - \Delta t \|\nabla U_\theta^m\|_{N,w}^2 \end{aligned}$$

Como $\prod_{\tau=k+1}^{m-1} (1 + 2\Delta t) = (1 + 2\Delta t)^{m-k-2} \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \|U^m\|_{N,w} + \left(\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{N,w}^2 \right)^{1/2} &\leq \sqrt{2} \left\{ \|U^o\|_{N,w}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \|f^k\|_{N,w}^2 \right\}^{1/2} e^T \\ &\leq 2\sqrt{2} \left\{ \|U^o\|_{o,w}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \|f^k\|_{N,w}^2 \right\}^{1/2} e^T, \end{aligned}$$

ou seja, obtemos a desigualdade (6.45). \square

Observação 6.1.1 Quando $f = 0$, a norma da solução de (6.44) não cresce no tempo, pois, por (6.46), temos

$$0 = \left\langle \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}, U_\theta^{k+1} \right\rangle_{N,w} + a_N(U_\theta^{k+1}, U_\theta^{k+1}) \geq \frac{1}{2} (\|U^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|U^k\|_{N,w}^2),$$

portanto, $\|U^k\|_{N,w}^2 \leq \|U^o\|_{N,w}^2, \forall k \geq 0$.

No teorema abaixo, provaremos a convergência da solução aproximada U para a solução u de (6.9). Como notação, para qualquer função $\phi = \phi(t)$, ϕ^k significa $\phi(t^k)$, em que $t^k = k \cdot \Delta t$, $k \geq 0$.

Teorema 6.1.8 (Convergência) Existe uma constante $C > 0$, independente de N e Δt , e funções $K_1(u)$ e $K_2(u)$ tais que

$$\|u^m - U^m\|_{o,w}^2 \leq e^{4T} C \left\{ K_1(u) N^{2(1-\sigma)} + K_2(u) (\Delta t)^{\eta(\theta)} \right\}, 1 \leq m \leq M, \quad (6.47)$$

em que $\eta(1/2) = 4$ e $\eta(\theta) = 2$, se $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$.

Demonstração. Novamente, seja $\tilde{u} = \Pi_N u, \forall t \geq 0$, e relembramos que \tilde{u} satisfaz a equação (6.36). Multiplicamos a equação (6.36) por θ no tempo $t = t^{k+1}$ e, depois, por $(1 - \theta)$ no tempo

$t = t^k$. Em seguida, somamos ambas, ou seja,

$$\begin{aligned} & \theta \langle \tilde{u}_t^{k+1}, \phi \rangle_{N,w} + (1 - \theta) \langle \tilde{u}_t^k, \phi \rangle_{N,w} + \theta a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi) + (1 - \theta) a_N(\tilde{u}^k, \phi) \\ &= \theta \langle \tilde{u}_t^{k+1} - u_t^{k+1}, \phi \rangle_w + (1 - \theta) \langle \tilde{u}_t^k - u_t^k, \phi \rangle_w \\ & \quad + \theta E_w(\tilde{u}_t^{k+1}, \phi) + (1 - \theta) E_w(\tilde{u}_t^k, \phi) + \theta a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi) + (1 - \theta) a_N(\tilde{u}^k, \phi) \\ & \quad - \theta a(\tilde{u}^{k+1}, \phi) - (1 - \theta) a(\tilde{u}^k, \phi) + \theta \langle f^{k+1}, \phi \rangle_w + (1 - \theta) \langle f^k, \phi \rangle_w. \end{aligned}$$

Seja $e^k = U^k - \tilde{u}^k$, subtraindo a equação acima da equação (6.46), temos, $\forall \phi \in \mathbb{P}_N^o$,

$$\left\langle \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} - \langle (\tilde{u}_t)_{\theta}^{k+1}, \phi \rangle_{N,w} + a_N(e_{\theta}^{k+1}, \phi) = \theta \langle R^{k+1}, \phi \rangle + (1 - \theta) \langle R^k, \phi \rangle \quad (6.48)$$

em que, $\forall k \geq 0$ e $\phi \in \mathbb{P}_N^o$,

$$\langle R^k, \phi \rangle = E_w(f^k, \phi) - E_w(\tilde{u}_t^k, \phi) - \langle (\tilde{u}^k - u^k)_t, \phi \rangle_w - E_w \left(\nabla \tilde{u}^k, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right) \quad (6.49)$$

De fato,

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} - \langle (\tilde{u}_t)_{\theta}^{k+1}, \phi \rangle_{N,w} + a_N(e_{\theta}^{k+1}, \phi) \\ &= \theta \langle f^{k+1}, \phi \rangle_{N,w} + (1 - \theta) \langle f^k, \phi \rangle_{N,w} - \left[\theta \langle \tilde{u}_t^{k+1} - u_t^{k+1}, \phi \rangle_w + (1 - \theta) \langle \tilde{u}_t^k - u_t^k, \phi \rangle_w \right. \\ & \quad + \theta E_w(\tilde{u}_t^{k+1}, \phi) + (1 - \theta) E_w(\tilde{u}_t^k, \phi) + \theta a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi) + (1 - \theta) a_N(\tilde{u}^k, \phi) \\ & \quad \left. - \theta a(\tilde{u}^{k+1}, \phi) - (1 - \theta) a(\tilde{u}^k, \phi) + \theta \langle f^{k+1}, \phi \rangle_w + (1 - \theta) \langle f^k, \phi \rangle_w \right] \\ &= \theta \left(\langle f^{k+1}, \phi \rangle_{N,w} - \langle f^{k+1}, \phi \rangle_w - \langle \tilde{u}_t^{k+1} - u_t^{k+1}, \phi \rangle_w \right. \\ & \quad \left. - E_w(\tilde{u}_t^{k+1}, \phi) - a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi) + a(\tilde{u}^{k+1}, \phi) \right) \\ & \quad + (1 - \theta) \left(\langle f^k, \phi \rangle_{N,w} - \langle f^k, \phi \rangle_w - E_w(\tilde{u}_t^k, \phi) \right. \\ & \quad \left. - \langle \tilde{u}_t^k - u_t^k, \phi \rangle_w - a_N(\tilde{u}^k, \phi) + a(\tilde{u}^k, \phi) \right) \\ &= \theta \left\{ E_w(f^{k+1}, \phi) - \langle \tilde{u}_t^{k+1} - u_t^{k+1}, \phi \rangle_w - E_w(\tilde{u}_t^{k+1}, \phi) - E_w \left(\nabla \tilde{u}^{k+1}, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right) \right\} \\ & \quad + (1 - \theta) \left\{ E_w(f^k, \phi) - \langle \tilde{u}_t^k - u_t^k, \phi \rangle_w - E_w(\tilde{u}_t^k, \phi) - E_w \left(\nabla \tilde{u}^k, \frac{\nabla(\phi w)}{w} \right) \right\} \\ &= \theta \langle R^{k+1}, \phi \rangle + (1 - \theta) \langle R^k, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N^o, \end{aligned}$$

ou seja, obtemos a equação (6.48).

Definimos, $\forall k \geq 0$,

$$\varepsilon^k(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - (\tilde{u}_t)_\theta^{k+1} \quad (6.50)$$

Afirmação 1: Se $\tilde{u} \in C^2(0, T; L_w^2(\Omega))$, então

$$\varepsilon^k(\tilde{u}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \{(1 - \theta)t^{k+1} + \theta t^k - s\} \tilde{u}_{tt} ds, \quad \forall k \geq 0. \quad (6.51)$$

Provaremos a afirmação usando a fórmula de Taylor com o resto na forma integral. Ou seja,

$$\tilde{u}^{k+1} = \tilde{u}_k + \Delta t \tilde{u}_t^k + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s)(t^{k+1} - s) ds.$$

Então,

$$\frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \tilde{u}_t^k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s)(t^{k+1} - s) ds. \quad (6.52)$$

Novamente, aplicando a fórmula de Taylor,

$$\tilde{u}_t^{k+1} = \tilde{u}_t^k + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s)(t^{k+1} - s) ds = \tilde{u}_t^k + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s) ds \quad (6.53)$$

Substituindo (6.52) e (6.53) em (6.50), temos

$$\begin{aligned} \varepsilon^k(\tilde{u}) &= \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \theta \tilde{u}_t^{k+1} - (1 - \theta) \tilde{u}_t^k = \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \theta \tilde{u}_t^k - \theta \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s) ds - (1 - \theta) \tilde{u}_t^k \\ &= \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \tilde{u}_t^k - \theta \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s) ds \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s)(t^{k+1} - s) ds - \Delta t \theta \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s)(t^{k+1} - s - \theta \Delta t) ds = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s)(t^k + \Delta t - s - \theta \Delta t) ds \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{tt}(s)\{(1 - \theta)t^{k+1} + \theta t^k - s\} ds, \end{aligned}$$

a última igualdade é consequência de:

$$\theta t^k + (1 - \theta)t^{k+1} - s = \theta t^k + (1 - \theta)(t^k + \Delta t) - s = t^k + (1 - \theta)\Delta t - s,$$

o que demonstra a afirmação 1.

Então, de (6.51), temos

$$|\varepsilon^k(\tilde{u})| \leq \int_{t^k}^{t^{k+1}} |\tilde{u}_{tt}(s)| ds \quad \forall k \geq 0. \quad (6.54)$$

Afirmção 2: Se $\theta = 1/2$ e $\tilde{u} \in C^3(0, T; L_w^2(\Omega))$, então

$$\varepsilon^k(\tilde{u}) = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} (t^{k+1} - s)(t^k - s) \tilde{u}_{ttt}(s) ds \quad (6.55)$$

Novamente, usaremos a fórmula de Taylor com resto integral.

$$\tilde{u}^{k+1} = \tilde{u}^k + \Delta t \tilde{u}_t^k + \frac{\Delta t^2}{2} \tilde{u}_{tt}^k + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{\tilde{u}_{ttt}(s)}{2!} (t^{k+1} - s)^2 ds.$$

Então,

$$\frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \tilde{u}_t^k = \frac{\Delta t}{2} \tilde{u}_{tt}^k + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{\tilde{u}_{ttt}(s)}{2!} (t^{k+1} - s)^2 ds. \quad (6.56)$$

Também,

$$\tilde{u}_t^{k+1} = \tilde{u}_t^k + \Delta t \tilde{u}_{tt}^k + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{ttt}(s) (t^{k+1} - s) ds \quad (6.57)$$

Substituindo (6.56) e (6.57) em (6.50),

$$\begin{aligned} \varepsilon^k(\tilde{u}) &= \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \frac{1}{2} (\tilde{u}_t^{k+1} + \tilde{u}_t^k) \\ &= \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left[\tilde{u}_t^k + \Delta t \tilde{u}_{tt}^k + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{ttt}(s) (t^{k+1} - s) ds + \tilde{u}_t^k \right] \\ &= \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \tilde{u}_t^k - \frac{1}{2} \left[\Delta t \tilde{u}_{tt}^k + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{ttt}(s) (t^{k+1} - s) ds \right] \\ &= \frac{\Delta t}{2} \tilde{u}_{tt}^k + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{\tilde{u}_{ttt}(s)}{2} (t^{k+1} - s)^2 ds - \frac{\Delta t}{2} \tilde{u}_{tt}^k - \frac{1}{2} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \tilde{u}_{ttt}(s) (t^{k+1} - s) ds \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} [(t^{k+1} - s)^2 - \Delta t (t^{k+1} - s)] \tilde{u}_{ttt}(s) ds \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} (t^{k+1} - s)[(t^{k+1} - s) - \Delta t] \tilde{u}_{ttt}(s) ds \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} (t^{k+1} - s)(t^k - s) \tilde{u}_{ttt}(s) ds, \end{aligned}$$

o que demonstra a *afirmação 2*.

Então, por (6.55), temos

$$|\varepsilon^k(\tilde{u})| \leq \frac{\Delta t}{8} \int_{t^k}^{t^{k+1}} |\tilde{u}_{ttt}(s)| ds. \quad (6.58)$$

De fato, seja $g(s) = (t^{k+1} - s)(s - t^k)$. O valor máximo de g é $\frac{\Delta t^2}{4}$, que ocorre em $s^* = \frac{t^{k+1} + t^k}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} |\varepsilon^k(\tilde{u})| &\leq \frac{1}{2\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} |(t^{k+1} - s)(t^k - s)| \cdot |\tilde{u}_{ttt}(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{2\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} (t^{k+1} - s)(s - t^k) |\tilde{u}_{ttt}(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{2\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{\Delta t^2}{4} |\tilde{u}_{ttt}(s)| ds \leq \frac{\Delta t}{8} \int_{t^k}^{t^{k+1}} |\tilde{u}_{ttt}(s)| ds. \end{aligned}$$

Observação 6.1.2 A afirmação 2 só é válida para $\theta = 1/2$. Para $1/2 < \theta \leq 1$, expandimos na fórmula de Taylor \tilde{u} e \tilde{u}_t e, como feito acima, substituímos a expansão em (6.50). Contudo, para estes valores de θ , o termo \tilde{u}_{tt}^k não se anula, como no caso de $\theta = 1/2$.

De (6.48) e (6.50), segue que, $\forall \phi \in \mathbb{P}_N^o$,

$$\left\langle \frac{e^{k+1} - e^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} + a_N(e_\theta^{k+1}, \phi) = \langle R_\theta^{k+1}, \phi \rangle - \langle \varepsilon^k(\tilde{u}), \phi \rangle_{N,w}. \quad (6.59)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^{k+1} - e^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} + a_N(e_\theta^{k+1}, \phi) &= \left\langle \frac{(U^{k+1} - \tilde{u}^{k+1}) - (U^k - \tilde{u}^k)}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} + a_N(e_\theta^{k+1}, \phi) \\ &= \left\langle \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} - \left\langle \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} + a_N(e_\theta^{k+1}, \phi) \\ &= \langle (\tilde{u}_t)_\theta^{k+1}, \phi \rangle_{N,w} + \langle R^{k+1}, \phi \rangle + (1 - \theta) \langle R^k, \phi \rangle - \left\langle \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} \\ &= \langle R_\theta^{k+1}, \phi \rangle - \langle \varepsilon^k(\tilde{u}), \phi \rangle_{N,w}. \end{aligned}$$

Escolhemos $\phi = e_\theta^{k+1}$ na equação (6.59),

$$\left\langle \frac{e^{k+1} - e^k}{\Delta t}, e_\theta^{k+1} \right\rangle_{N,w} + a_N(e_\theta^{k+1}, e_\theta^{k+1}) = \langle R_\theta^{k+1}, e_\theta^{k+1} \rangle - \langle \varepsilon^k(\tilde{u}), e_\theta^{k+1} \rangle_{N,w}.$$

Analogamente, como feito na prova do teorema 6.1.7, temos

$$\frac{1}{2\Delta t} \{ \|e^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|e^k\|_{N,w}^2 \} + \frac{1}{4} \|\nabla e_\theta^{k+1}\|_{N,w}^2 \leq \langle R_\theta^{k+1}, e_\theta^{k+1} \rangle - \langle \varepsilon^k(\tilde{u}), e_\theta^{k+1} \rangle_{N,w}. \quad (6.60)$$

Vamos estimar o lado direito da desigualdade acima. Seja $B(e_\theta^{k+1}) = \langle R_\theta^{k+1}, e_\theta^{k+1} \rangle - \langle \varepsilon^k(\tilde{u}), e_\theta^{k+1} \rangle_{N,w}$. Utilizando as desigualdades (6.38)-(6.41), Cauchy-Schwarz e a equivalência entre as normas contínua e discreta, obtemos

$$\begin{aligned}
B(e_\theta^{k+1}) &\leq |E_w(f^{k+1}, e_\theta^{k+1})| + |E_w(f^k, e_\theta^{k+1})| + |E_w(\tilde{u}_t^{k+1}, e_\theta^{k+1})| + |E_w(\tilde{u}_t^k, e_\theta^{k+1})| \\
&\quad + \left| E_w \left(\nabla \tilde{u}^{k+1}, \frac{\nabla(e_\theta^{k+1}w)}{w} \right) \right| + \left| E_w \left(\nabla \tilde{u}^k, \frac{\nabla(e_\theta^{k+1}w)}{w} \right) \right| \\
&\quad + \left| \langle \varepsilon^k(\tilde{u}), e_\theta^{k+1} \rangle_{N,w} \right| + \left| \langle (\tilde{u}^k - u^k)_t, e_\theta^{k+1} \rangle_w \right| + \left| \langle (\tilde{u}^{k+1} - u^{k+1})_t, e_\theta^{k+1} \rangle_w \right| \\
&\leq C_4 N^{1-\sigma} \|f^{k+1}\|_{\sigma-1} \cdot \|e_\theta^{k+1}\|_{o,w} + C_4 N^{1-\sigma} \|f^k\|_{\sigma-1} \cdot \|e_\theta^{k+1}\|_{o,w} \\
&\quad + C_6 N^{1-\sigma} \|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1} \cdot \|e_\theta^{k+1}\|_{o,w} + C_6 N^{1-\sigma} \|u_t^k\|_{\sigma-1} \cdot \|e_\theta^{k+1}\|_{o,w} \\
&\quad + C_5 N^{1-\sigma} \|u^{k+1}\|_\sigma \cdot \|\nabla e_\theta^{k+1}\|_{o,w} + C_5 N^{1-\sigma} \|u^k\|_\sigma \cdot \|\nabla e_\theta^{k+1}\|_{o,w} \\
&\quad + C_2 N^{1-\sigma} \|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1} \cdot \|e_\theta^{k+1}\|_{o,w} + C_2 N^{1-\sigma} \|u_t^k\|_{\sigma-1} \cdot \|e_\theta^{k+1}\|_{o,w} \\
&\quad + 2\|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w} \cdot \|e_\theta^{k+1}\|_{o,w}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade ε -algébrica,

$$\begin{aligned}
B(e_\theta^{k+1}) &\leq \tilde{C} N^{2(1-\sigma)} \left\{ \|f^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|f^k\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u_t^k\|_{\sigma-1,w}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|u^k\|_{\sigma,w}^2 + \|u^{k+1}\|_{\sigma,w}^2 \right\} + \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla e_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2 + \frac{1}{4} \|e_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2 \\
&\leq \tilde{C} N^{2(1-\sigma)} \left\{ \|f^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|f^k\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u_t^k\|_{\sigma-1,w}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|u^k\|_{\sigma,w}^2 + \|u^{k+1}\|_{\sigma,w}^2 \right\} + \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla e_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2 + \frac{1}{2} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + \frac{1}{2} \|e^k\|_{o,w}^2,
\end{aligned}$$

em que a última desigualdade acima segue de

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \|e_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2 &= \frac{1}{4} \|\theta e^{k+1} + (1-\theta)e^k\|_{o,w}^2 \\
&\leq \frac{1}{4} (\theta^2 \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + 2\theta(1-\theta) \|e^{k+1}\|_{o,w} \cdot \|e^k\|_{o,w} + (1-\theta)^2 \|e^k\|_{o,w}^2) \\
&\leq \frac{1}{4} (\|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + \|e^k\|_{o,w}^2 + \|e^k\|_{o,w}^2) \leq \frac{1}{2} (\|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + \|e^k\|_{o,w}^2).
\end{aligned}$$

Seja $S_1^k = \|f^k\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u_t^k\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u^k\|_{\sigma,w}^2$. Substituindo a estimativa de $B(e_\theta^{k+1})$ em (6.60), temos

$$\begin{aligned}
\|e^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|e^k\|_{N,w}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\nabla e_\theta^{k+1}\|_{N,w}^2 &\leq 2\tilde{C} N^{2(1-\sigma)} \Delta t \{S_1^k + S_1^{k+1}\} + 2\Delta t \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} \|\nabla e_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2 + \Delta t \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + \Delta t \|e^k\|_{o,w}^2,
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \|e^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|e^k\|_{N,w}^2 &\leq 2\tilde{C}N^{2(1-\sigma)}\Delta t\{S_1^k + S_1^{k+1}\} + 2\Delta t\|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 \\ &\quad + \Delta t\|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + \Delta t\|e^k\|_{o,w}^2, \end{aligned}$$

Somando a desigualdade acima de $k = 0$ até $m - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|e^m\|_{N,w}^2 - \|e^o\|_{N,w}^2 &\leq 2\tilde{C}N^{2(1-\sigma)}\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} (S_1^k + S_1^{k+1}) + 2\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} \Delta t\|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + \sum_{k=0}^{m-1} \Delta t\|e^k\|_{o,w}^2 \\ &\leq 4\tilde{C}N^{2(1-\sigma)}\Delta t \sum_{k=0}^m S_1^k + 2\Delta t \sum_{k=0}^m \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w} + 2\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|_{N,w}^2 + \frac{1}{2}\|e^m\|_{N,w}^2. \end{aligned}$$

A justificativa para a última desigualdade é apresentada a seguir, onde usamos o fato que $\Delta t < 1/2$ e $\|e\|_{o,w} \leq \|e\|_{N,w}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta t\|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + \sum_{k=0}^{m-1} \Delta t\|e^k\|_{o,w}^2 &= \Delta t(\|e^1\|_{o,w}^2 + \|e^2\|_{o,w}^2 + \cdots + \|e^{m-1}\|_{o,w}^2 + \|e^m\|_{o,w}^2) \\ &\quad + \Delta t(\|e^o\|_{o,w}^2 + \|e^1\|_{o,w}^2 + \cdots + \|e^{m-1}\|_{o,w}^2) \\ &= 2\Delta t(\|e^1\|_{o,w}^2 + \|e^2\|_{o,w}^2 + \cdots + \|e^{m-1}\|_{o,w}^2) + \Delta t\|e^o\|_{o,w}^2 + \Delta t\|e^m\|_{o,w}^2 \\ &\leq 2\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|_{o,w}^2 + \Delta t\|e^m\|_{o,w}^2 \leq 2\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|_{N,w}^2 + \frac{1}{2}\|e^m\|_{N,w}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|e^m\|_{N,w}^2 - 2\|e^o\|_{N,w}^2 \leq \tilde{C}_1N^{2(1-\sigma)}\Delta t \sum_{k=0}^m S_1^k + 4\Delta t \sum_{k=0}^m \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w} + 4\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|_{N,w}^2$$

Aplicando o lema de Gronwall discreto 1.10.3 (segunda parte) e observando que $\exp\left(\sum_{k=0}^{m-1} 4\Delta t\right) = \exp(4m\Delta t) \leq \exp(4M\Delta t) = \exp(4T)$, obtemos que

$$\|e^m\|_{N,w}^2 \leq e^{4T} \left\{ \tilde{C}_1N^{2(1-\sigma)}\Delta t \sum_{k=0}^m S_1^k + 4\Delta t \sum_{k=0}^m \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w} + 2\|e^o\|_{N,w}^2 \right\}. \quad (6.61)$$

Agora, notamos que $\|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w} \leq 2\|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{o,w}$. Se $\theta = \frac{1}{2}$, pelas desigualdades (6.58) e Cauchy-

Schwarz,

$$\begin{aligned}
4\|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 &\leq 16\|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{o,w}^2 = 16 \int_{\Omega} \left(\int_{t^k}^{t^{k+1}} \frac{1}{2\Delta t} (t^{k+1} - s)(t^k - s) \tilde{u}_{ttt}(s) ds \right)^2 w dx \\
&\leq \frac{(\Delta t)^2}{4} \int_{\Omega} \left(\int_{t^k}^{t^{k+1}} |\tilde{u}_{ttt}(s)| ds \right)^2 w dx \\
&\leq \frac{(\Delta t)^2}{4} \int_{\Omega} \left(\int_{t^k}^{t^{k+1}} |\tilde{u}_{ttt}(s)|^2 ds \right) \cdot \left(\int_{t^k}^{t^{k+1}} ds \right) w dx \\
&\leq \frac{(\Delta t)^3}{4} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \int_{\Omega} |\tilde{u}_{ttt}|^2 w dx ds \leq \frac{(\Delta t)^3}{4} \int_{t^k}^{t^{k+1}} \|\tilde{u}_{ttt}\|_{o,w}^2 ds.
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Então, para $\theta = \frac{1}{2}$,

$$4\Delta t \sum_{k=0}^m \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 \leq \frac{(\Delta t)^4}{4} \|\tilde{u}_{ttt}\|_{L^2(L_w^2)}^2 \leq \frac{(\Delta t)^4}{4} \|\tilde{u}_{ttt}\|_{L^2(H_w^1)}^2 \leq \frac{(\Delta t)^4}{4} \|u_{ttt}\|_{L^2(H_w^1)}^2. \tag{6.63}$$

Da mesma forma, para $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$, mas agora utilizando a desigualdade (6.54),

$$4\Delta t \sum_{k=0}^m \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 \leq 16(\Delta t)^2 \|\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(L_w^2)}^2 \leq 16(\Delta t)^2 \|\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(H_w^1)}^2 \leq 16(\Delta t)^2 \|u_{tt}\|_{L^2(H_w^1)}^2 \tag{6.64}$$

Além disso, $U^o = P_c u_o$, então

$$\|e^o\|_{N,w} \leq 2\|e^o\|_{o,w} = 2\|U^o - \Pi_N u_o\|_{o,w} \leq C_8 N^{1-\sigma} \|u_o\|_{\sigma-1}$$

Então, por (6.61)-(6.64), segue

$$\begin{aligned}
\|e^m\|_{o,w}^2 &\leq e^{4T} \left\{ \tilde{C}_1 N^{2(1-\sigma)} \Delta t \sum_{k=0}^m S_1^k + \tilde{C}_2 N^{2(1-\sigma)} \|u_o\|_{\sigma-1,w}^2 + (\Delta t)^{\eta(\theta)} K_2(u) \right\} \\
&\leq e^{4T} \left\{ \tilde{C} N^{2(1-\sigma)} \left(\Delta t \sum_{k=0}^m S_1^k + \|u_o\|_{\sigma-1,w}^2 \right) + (\Delta t)^{\eta(\theta)} K_2(u) \right\} \\
&\leq e^{4T} \left\{ \tilde{C} N^{2(1-\sigma)} \tilde{K}_1(u) + (\Delta t)^{\eta(\theta)} K_2(u) \right\} \\
&\leq e^{4T} C \left\{ N^{2(1-\sigma)} \tilde{K}_1(u) + (\Delta t)^{\eta(\theta)} K_2(u) \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{em que } \tilde{K}_1(u) = \left(\|u_o\|_{\sigma-1}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m S_1^k \right), \quad K_2(u) = \begin{cases} \frac{1}{4} \|u_{ttt}\|_{L^2(H_w^1)} & \text{se } \theta = \frac{1}{2} \\ 16 \|u_{tt}\|_{L^2(H_w^1)} & \text{se } \frac{1}{2} < \theta \leq 1. \end{cases}$$

e $\eta(\theta) = 4$, se $\theta = 1/2$; $\eta(\theta) = 2$, se $1/2 < \theta \leq 1$.

Finalmente, usando as desigualdades (6.21) e triangular,

$$\begin{aligned} \|u^m - U^m\|_{o,w}^2 &\leq 2(\|u^m - \tilde{u}^m\|_{o,w}^2 + 2\|e^m\|_{o,w}^2) \\ &\leq e^{4T} C \{K_1(u)N^{2(1-\sigma)} + K_2(u)(\Delta t)^{\eta(\theta)}\} \end{aligned}$$

em que $K_1(u) = \tilde{K}_1 + \|u^m\|_{\sigma-1,w}^2$. \square

6.2 Equação Advecção-Difusão

Sejam $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, t)$ uma função vetorial, $b \in C^2([0, T]; C^\infty(\Omega))$ uma função de classe C^2 , $u_o \in L_w^2(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; L_w^2(\Omega))$, ν um número real positivo e $T > 0$. Consideremos a seguinte equação de advecção-difusão transiente:

$$\begin{aligned} u_t - \nu \Delta u + \operatorname{div}(\mathbf{b}u) &= f, \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_o(x), \quad \text{em } \Omega \end{aligned} \tag{6.65}$$

em que $u_o : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função inicial dada.

No capítulo anterior, analisamos uma aproximação semidiscreta, em uma dimensão, para a equação evolução de advecção-difusão baseada no método de colocação de Chebyshev. Nesta seção, apresentaremos uma aproximação discreta completa, ou seja, no tempo e no espaço, usando o método- θ , com $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, para o termo difusivo, enquanto o termo advectivo é tratado de forma explícita.

Este tipo de aproximação apresenta algumas vantagens. Primeiramente, ela é incondicionalmente estável, como provaremos no teorema a seguir. Além disso, em qualquer nível temporal, o sistema a ser resolvido possui a mesma matriz, o que permite uma fatoração conveniente. Além disso, o termo advectivo pode ser eficientemente calculado pela técnica de derivada pseudo-espectral, via transformada rápida de Fourier.

6.2.1 Discretização completa da equação de advecção-difusão

Para $\theta \in [1/2, 1]$, fixo, e qualquer nível de tempo $t^{k+1} = (k+1)\Delta t$, procuramos por uma função $U^{k+1} \in \mathbb{P}_N^o$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} - \nu \Delta U_\theta^{k+1} + \operatorname{div}(I_N(\mathbf{b}^k U^k)) &= f_\theta^{k+1} \quad \text{em } x_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N-1 \\ U^o(x_{ij}) &= u_o(x_{ij}), \quad 0 \leq i, j \leq N. \end{aligned} \tag{6.66}$$

O método de diferenciação pseudo-espectral é usado em (6.66) para calcular o termo advec-

tivo. Este método consiste em trocar a função pelo seu interpolante nos pontos de Chebyshev, antes de obter as derivadas.

Na forma variacional, a equação (6.66) é equivalente a: $\forall \phi \in \mathbb{P}_N^o$,

$$\left\langle \frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} + \nu a_N(U_\theta^{k+1}, \phi) + \langle \operatorname{div}(I_N(\mathbf{b}^k U^k)), \phi \rangle_{N,w} = \langle f_\theta^{k+1}, \phi \rangle_{N,w}. \quad (6.67)$$

Novamente, supomos que existe M inteiro tal que $M\Delta t = T$.

Teorema 6.2.1 (Estabilidade Incondicional) *Para qualquer $\Delta t < 1$ e N , existem constantes A e C , independentes de Δt e N , tais que*

$$\|U^m\|_{N,w} \leq \exp\left(\frac{A}{\nu} \cdot \frac{T}{2}\right) \left\{ \|U^o\|_{N,w}^2 + \frac{C}{\nu} \Delta t \sum_{k=1}^m \|f_\theta^k\|_{N,w}^2 \right\}^{1/2}, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (6.68)$$

Demonstração. Escolhemos $\phi = U_\theta^{k+1} \in \mathbb{P}_N^o$ na equação (6.67).

Denotamos por B_o o máximo valor de $|\mathbf{b}|$ em $\Omega \times [0, T]$. Notamos que, pela identidade (6.14), a desigualdade de Cauchy-Schwarz e equivalência de normas, segue

$$\begin{aligned} \left| \langle \operatorname{div}(I_N(\mathbf{b}^k U^k)), U_\theta^{k+1} \rangle_{N,w} \right| &= \left| \left\langle I_N(\mathbf{b}^k U^k), \frac{\nabla(U_\theta^{k+1} w)}{w} \right\rangle_{N,w} \right| \leq B_o \|U^k\|_{N,w} \cdot \left\| \frac{\nabla(U_\theta^{k+1} w)}{w} \right\|_{N,w} \\ &\leq 2B_o \|U^k\|_{N,w} \cdot \left\| \frac{\nabla(U_\theta^{k+1} w)}{w} \right\|_{o,w} \end{aligned}$$

Pelas desigualdades (6.6) e ε -algébrica, com $\varepsilon = 2/\nu$,

$$\begin{aligned} \left| \langle \operatorname{div}(I_N(\mathbf{b}^k U^k)), U_\theta^{k+1} \rangle_{N,w} \right| &\leq 2\delta B_o \|U^k\|_{N,w} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq \frac{8B_o^2 \delta^2}{\nu} \|U^k\|_{N,w}^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2. \end{aligned}$$

Agora, usando novamente a equivalência de normas, as desigualdades de Poincaré (6.8) e ε -algébrica, com $\varepsilon = 2/\nu$,

$$\begin{aligned} \langle f_\theta^{k+1}, U_\theta^{k+1} \rangle_{N,w} &\leq \|f_\theta^{k+1}\|_{N,w} \cdot \|U_\theta^{k+1}\|_{N,w} \leq 2\|f_\theta^{k+1}\|_{N,w} \cdot \|U_\theta^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq 2\alpha \|f_\theta^{k+1}\|_{N,w} \cdot \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{o,w} \leq \frac{8\alpha^2}{\nu} \|f_\theta^{k+1}\|_{N,w}^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2. \end{aligned}$$

Assim, pela coercividade de a_N (6.17), argumentos análogos aos usados na prova do teorema 6.1.7 e desigualdades acima, deduzimos que:

$$\frac{1}{2\Delta t} (\|U^{k+1}\|_{N,w} - \|U^k\|_{N,w}) + \left(\frac{\nu}{4} - \frac{\nu}{8} - \frac{\nu}{8}\right) \|\nabla U_\theta^{k+1}\|_{o,w}^2 \leq \frac{8B_o^2 \delta^2}{\nu} \|U^k\|_{N,w}^2 + \frac{8\alpha^2}{\nu} \|f_\theta^{k+1}\|_{N,w}^2$$

Sejam $A = 16B_0^2\delta^2$ e $C = 16\alpha^2$. Somando de $k = 0$ até $m - 1$, implica

$$\|U^m\|_{N,w}^2 \leq \|U^0\|_{N,w}^2 + \frac{C}{\nu}\Delta t \sum_{k=1}^m \|f_\theta^k\|_{N,w}^2 + \frac{A}{\nu}\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|U^k\|_{N,w}^2 \quad (6.69)$$

A desigualdade (6.68) segue aplicando o lema de Gronwall discreto 1.10.3 (segunda parte) em (6.69). \square

Observação 6.2.1 *Na desigualdade (6.68) temos que, para um coeficiente de viscosidade fixo $\nu > 0$, o esquema (6.66) é incondicionalmente estável. Isto resulta do fato que para qualquer escolha de N ou Δt , a norma discreta de U^m é limitada por uma constante $K(1/\nu)$, a qual independe de N ou Δt .*

Claramente, $K(1/\nu) \rightarrow \infty$, se $\nu \rightarrow 0$. Então, (6.68) fica sem sentido em tal caso. Isto é razoável, pois se $\nu = 0$, o problema (6.65) torna-se mal-posto e o esquema numérico (6.66) é incondicionalmente instável.

Teorema 6.2.2 (Convergência) *Assumimos que Δt é suficientemente pequeno, $u_o \in H_w^{\sigma-1}$ e $f \in H_w^{\sigma-1}$. Então, a solução de (6.66), com $\theta = 1$, converge para a solução do problema (6.65). Isto é, existem constante positivas A e C , independentes de N e Δt , tais que*

$$\|u^m - U^m\|_{o,w}^2 \leq C \exp\left(\frac{A}{\nu}T\right) \{K_3(\Delta t)^2 + K_4N^{2(1-\sigma)}\}, \quad 1 \leq m \leq M \quad (6.70)$$

em que

$$\begin{aligned} K_3 &= \|u_{tt}\|_{L^2(H_w^1)}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \|u_t^k\|_{o,w}^2 + (\Delta t)^2 \|u\|_{L^2(L_w^2)}^2 \\ &\quad + \Delta t \max_{0 \leq k \leq m-1} \|u^k\|_{1,w}^2 \left\{ \Delta t \int_0^T |\mathbf{b}_{tt}|^2 ds + T \max_{0 \leq k \leq m-1} |\mathbf{b}_t^{k+1}|_\infty^2 \right\} \\ K_4 &= \|u_o\|_{\sigma-1,w}^2 + \sum_{k=0}^m \Delta t (\|f^k\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u^k\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u_t^k\|_{\sigma-1,w}^2). \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\tilde{u}(t) = \Pi_N u(t)$, $\forall t \geq 0$. Para todo $k \geq 0$, a função $\tilde{u}^k = \tilde{u}(t^k) \in \mathbb{P}_N^o$ é a solução do seguinte problema, $\forall \phi \in \mathbb{P}_N^o$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} + \nu a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi) &= \langle f^{k+1}, \phi \rangle_w \\ &\quad - \langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1}u^{k+1}), \phi \rangle_w + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \end{aligned} \quad (6.71)$$

onde σ_1, σ_2 e σ_3 são definidas como:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \left\langle \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \tilde{u}_t^{k+1}, \phi \right\rangle_{N,w} \\ \sigma_2 &= \langle \tilde{u}_t^{k+1} - u_t^{k+1}, \phi \rangle_w + E_w(\tilde{u}_t^{k+1}, \phi) \\ \sigma_3 &= \nu \cdot \{a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi) - a(\tilde{u}^{k+1}, \phi)\}.\end{aligned}$$

De fato, seja $D(\phi) = \left\langle \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} + \nu a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi)$

$$\begin{aligned}D(\phi) &= \left\langle \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k}{\Delta t} - \tilde{u}_t^{k+1}, \phi \right\rangle_{N,w} + \langle \tilde{u}_t^{k+1}, \phi \rangle_{N,w} - \langle \tilde{u}_t^{k+1}, \phi \rangle_w + \langle \tilde{u}_t^{k+1}, \phi \rangle_w \\ &\quad + \nu a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi) \\ &= \sigma_1 + E_w(\tilde{u}_t^{k+1}, \phi) + \langle \tilde{u}_t^{k+1} - u_t^{k+1}, \phi \rangle_w + \langle u_t^{k+1}, \phi \rangle_w + \nu a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi) \\ &= \sigma_1 + \sigma_2 + \nu a_N(\tilde{u}^{k+1}, \phi) - \nu a(\tilde{u}^{k+1}, \phi) + \nu a(\tilde{u}^{k+1}, \phi) + \langle u_t^{k+1}, \phi \rangle_w \\ &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1} u^{k+1}), \phi \rangle_w + \langle f^{k+1}, \phi \rangle_w \\ &\quad + \nu a(\tilde{u}^{k+1}, \phi) - \langle f^{k+1}, \phi \rangle_w + \langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1} u^{k+1}), \phi \rangle_w + \langle u_t^{k+1}, \phi \rangle_w \\ &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1} u^{k+1}), \phi \rangle_w + \langle f^{k+1}, \phi \rangle_w \\ &\quad + \langle u_t^{k+1}, \phi \rangle_w + \nu a(u^{k+1}, \phi) + \langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1} u^{k+1}), \phi \rangle_w - \langle f^{k+1}, \phi \rangle_w \\ &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1} u^{k+1}), \phi \rangle_w + \langle f^{k+1}, \phi \rangle_w,\end{aligned}$$

a última igualdade segue do fato que u^{k+1} é solução exata da equação de advecção-difusão. Agora, seja $e^k = \tilde{u}^k - U^k$. Subtraindo a equação (6.71) da equação (6.67), temos

$$\left\langle \frac{e^{k+1} - e^k}{\Delta t}, \phi \right\rangle_{N,w} + \nu a_N(e^{k+1}, \phi) = \sum_{i=1}^5 \sigma_i, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_N^o, \quad (6.72)$$

em que

$$\begin{aligned}\sigma_4 &= -E_w(f^{k+1}, \phi) \\ \sigma_5 &= \langle \operatorname{div}(I_N(\mathbf{b}^k U^k)), \phi \rangle_{N,w} - \langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1} U^{k+1}), \phi \rangle_w.\end{aligned}$$

A seguir, escolhemos $\phi = e^{k+1}$ e estimaremos separadamente cada termo do lado direito da equação (6.72).

Pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e algébrica, definição (6.50) (com $\theta = 1$), temos

$$|\sigma_1| \leq \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w} \cdot \|e^{k+1}\|_{N,w} \leq \frac{1}{2} \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 + \frac{1}{2} \|e^{k+1}\|_{N,w}^2, \quad k \geq 0. \quad (6.73)$$

As desigualdades (6.38) e (6.40), com $t = t^k$, implicam

$$|\sigma_2| \leq \left| \langle \tilde{u}_t^{k+1} - u_t^{k+1}, e^{k+1} \rangle_w \right| + |E_w(\tilde{u}_t^{k+1}, e^{k+1})| \quad (6.74)$$

$$\begin{aligned} &\leq (C_2 + C_6)N^{1-\sigma} \|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1,w} \cdot \|e^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq \frac{1}{2} \tilde{C} N^{2(1-\sigma)} \|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \frac{1}{2} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Além disso, pelas desigualdades (6.41) e algébrica,

$$|\sigma_3| = \left| E_w \left(\nabla \tilde{u}^{k+1}, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right) \right| \quad (6.76)$$

$$\begin{aligned} &\leq C_5 N^{1-\sigma} \|u^{k+1}\|_{\sigma,w} \cdot \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq \frac{1}{4\nu\varepsilon^*} C_5^2 N^{2(1-\sigma)} \|u^{k+1}\|_{\sigma,o}^2 + \nu\varepsilon^* \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w}^2, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (6.77)$$

em que ε^* é um dado número real positivo a ser determinado posteriormente. Também, através das desigualdades (6.39) e algébrica,

$$\begin{aligned} |\sigma_4| &= |E_w(f^{k+1}, e^{k+1})| \leq C_4 N^{1-\sigma} \|f^{k+1}\|_{\sigma-1,w} \cdot \|e^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq \frac{C_4^2}{2} N^{2(1-\sigma)} \|f^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \frac{1}{2} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Finalmente, estimaremos o termo mais difícil, σ_5 . Para isso, primeiramente observamos que

$$\begin{aligned} \sigma_5 &= \langle \operatorname{div}(I_N(\mathbf{b}^k U^k)), e^{k+1} \rangle_{N,w} - \langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1} u^{k+1}), e^{k+1} \rangle_w \\ &= \langle \operatorname{div}(I_N(\mathbf{b}^k U^k)), e^{k+1} \rangle_{N,w} + \langle \operatorname{div}[\mathbf{b}^{k+1}(u^k - u^{k+1})], e^{k+1} \rangle_w \\ &\quad + \langle \operatorname{div}[\mathbf{b}^{k+1}(\tilde{u}^k - u^k)], e^{k+1} \rangle_w - \langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1} \tilde{u}^k), e^{k+1} \rangle_w, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Integrando por partes e através da definição de E_w , obtemos que

$$\begin{aligned} -\langle \operatorname{div}(\mathbf{b}^{k+1} \tilde{u}^k), e^{k+1} \rangle_w &= \left\langle \mathbf{b}^{k+1} \tilde{u}^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_w \\ &= \left\langle \mathbf{b}^{k+1} \tilde{u}^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_{N,w} - E_w \left(\mathbf{b}^{k+1} \tilde{u}^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Além disso, pelas identidades (6.14) e (3.16), temos que

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}(I_N(\mathbf{b}^k U^k)), e^{k+1} \rangle_{N,w} &- \left\langle I_N(\mathbf{b}^k U^k), \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_{N,w} \\ &= - \left\langle \mathbf{b}^k U^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_{N,w}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo os dois termos encontrados acima em (6.79), somando e diminuindo o termo $\left\langle \mathbf{b}^k \tilde{u}^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_{N,w}$, resulta que

$$\begin{aligned} \sigma_5 &= \langle \operatorname{div}[\mathbf{b}^{k+1}(u^k - u^{k+1})], e^{k+1} \rangle_w + \langle \operatorname{div}[\mathbf{b}^{k+1}(\tilde{u}^k - u^k)], e^{k+1} \rangle_w \\ &\quad - E_w \left(\mathbf{b}^{k+1} \tilde{u}^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right) + \left\langle \mathbf{b}^k e^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_{N,w} \\ &\quad + \left\langle (\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k) \tilde{u}^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_{N,w}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Vamos estimar cada termo da equação (6.80). Primeiro, integrando por partes, através da definição (6.50) (com u ao invés de \tilde{u}), por (6.51), desigualdades (6.6), triangular e algébrica, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \langle \operatorname{div}[\mathbf{b}^{k+1}(u^k - u^{k+1})], e^{k+1} \rangle_w \right| &= \left| \left\langle \mathbf{b}^{k+1}(u^k - u^{k+1}), \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_w \right| \\ &\leq B_o \|u^k - u^{k+1}\|_{o,w} \cdot \left\| \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\|_{o,w} \\ &\leq \Delta t \delta B_o \|\varepsilon^k(u) + u_t^{k+1}\|_{o,w} \cdot \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq \Delta t \delta B_o (\|\varepsilon^k(u)\|_{o,w} + \|u_t^{k+1}\|_{o,w}) \cdot \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq \frac{1}{2\nu\varepsilon^*} B_o^2 \delta^2 (\Delta t)^2 (\|\varepsilon^k(u)\|_{o,w}^2 + \|u_t^{k+1}\|_{o,w}^2) + \nu\varepsilon^* \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w}^2. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Agora, das desigualdades (6.21) e algébrica,

$$\left| \langle \operatorname{div}[\mathbf{b}^{k+1}(\tilde{u}^k - u^k)], e^{k+1} \rangle_w \right| \leq \frac{1}{2} C_2^2 B_1^2 N^{2(1-\sigma)} \|u^k\|_{\sigma,w}^2 + \frac{1}{2} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2, \quad (6.82)$$

em que B_1 é uma constante positiva, a qual depende do valor máximo da primeira derivada de \mathbf{b} em $\Omega \times [0, T]$. Agora, pelas desigualdades algébrica e (6.32), segue

$$\begin{aligned} \left| E_w \left(\mathbf{b}^{k+1} \tilde{u}^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right) \right| &= \left| E_w \left(\tilde{u}^k, \frac{\mathbf{b}^{k+1} \cdot \nabla(e^{k+1}w)}{w} \right) \right| \\ &\leq B_o C_5 N^{1-\sigma} \|u^k\|_{\sigma,w} \cdot \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq \frac{1}{4\nu\varepsilon^*} C_5^2 B_o^2 N^{2(1-\sigma)} \|u^k\|_{\sigma,w}^2 + \nu\varepsilon^* \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w}^2. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Além disso, através da equivalência de normas e desigualdade (6.6),

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \mathbf{b}^k e^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_{N,w} \right| &\leq 2B_o \|e^k\|_{N,w} \cdot \left\| \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\|_{o,w} \leq 2B_o \delta \|e^k\|_{N,w} \cdot \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq \frac{1}{\nu\varepsilon^*} B_o^2 \delta^2 \|e^k\|_{N,w}^2 + \nu\varepsilon^* \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w}^2. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Finalmente, como $\frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \in \mathbb{P}_N$, pois $e^{k+1} \in \mathbb{P}_N^o$, pela equivalência de normas, desigualdades (6.6), Cauchy-Schwarz e algébrica, segue que

$$\begin{aligned} \left| \left\langle (\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k)\tilde{u}^k, \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\rangle_{N,w} \right| &\leq 2\|(\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k)\tilde{u}^k\|_{N,w} \cdot \left\| \frac{\nabla(e^{k+1}w)}{w} \right\|_{o,w} \\ &\leq 2\delta\|(\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k)\tilde{u}^k\|_{N,w} \cdot \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w} \\ &\leq \frac{\delta^2}{\nu\varepsilon^*} \|(\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k)\tilde{u}^k\|_{N,w}^2 + \nu\varepsilon^* \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w}^2. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Agora, pela desigualdade (6.17), equivalência de normas e resultados prévios (6.73) - (6.85), deduzimos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} (\|e^{k+1}\|_{N,w}^2 - \|e\|_{N,w}^2) + \frac{\nu}{4} \|\nabla e^{k+1}\|_{N,w}^2 &\leq \sum_{i=1}^5 \sigma_i \leq 5\nu\varepsilon^* \|\nabla e^{k+1}\|_{o,w}^2 + \frac{7}{2} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 \\ &+ \frac{C_9}{\nu} \|e^k\|_{o,w}^2 + \frac{1}{2} \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 + \frac{C_{10}}{\nu} (\Delta t)^2 (\|u_t^{k+1}\|_{o,w}^2 + \|\varepsilon^k(u)\|_{o,w}^2) \\ &+ C_{11} N^{2(1-\sigma)} \left\{ \|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|f^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \frac{1}{\nu} (\|u^{k+1}\|_{\sigma,w}^2 + \|u^k\|_{o,w}^2) + \|u^k\|_{\sigma,w}^2 \right\} \\ &+ C_{12} \|(\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k)\tilde{u}^k\|_{N,w}^2. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Por outro lado, temos que

$$|\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k|_\infty^2 \leq 2(\Delta t)^2 \left\{ \int_{t^k}^{t^{k+1}} |\mathbf{b}_{tt}|_\infty^2 ds + |\mathbf{b}_t^{k+1}|_\infty^2 \right\}. \quad (6.87)$$

De fato, através da definição (6.50),

$$\varepsilon^k(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k}{\Delta t} - \mathbf{b}_t^{k+1}.$$

Então, pelas desigualdades (6.54) e Cauchy-Schwarz, resulta que

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k|_\infty^2 &= |\Delta t(\varepsilon^k(\mathbf{b}) + \mathbf{b}_t^{k+1})|_\infty^2 \\ &\leq 2(\Delta t)^2 |\varepsilon^k(\mathbf{b})|_\infty^2 + 2(\Delta t)^2 |\mathbf{b}_t^{k+1}|_\infty^2 \\ &\leq 2(\Delta t)^2 \left\{ \left(\int_{t^k}^{t^{k+1}} |\mathbf{b}_{tt}|_\infty ds \right)^2 + |\mathbf{b}_t^{k+1}|_\infty^2 \right\} \\ &\leq 2(\Delta t)^2 \left\{ \int_{t^k}^{t^{k+1}} |\mathbf{b}_{tt}|_\infty^2 ds + |\mathbf{b}_t^{k+1}|_\infty^2 \right\}. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|(\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k) \tilde{u}^k\|_{N,w}^2 \\ \leq C_{13}(\Delta t)^3 \max_{0 \leq k \leq m-1} \left\{ \|u^k\|_{1,w}^2 \left[\int_0^T |\mathbf{b}_{tt}|_\infty^2 ds + \frac{T}{\Delta t} \max_{0 \leq k \leq m-1} |\mathbf{b}_t^{k+1}|_\infty^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.88)$$

De fato, pela definição de produto interno discreto, equivalência de normas e desigualdade (6.21), segue que

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|(\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k) \tilde{u}^k\|_{N,w}^2 &= \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \sum_{i,j=1}^N [(\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k) \tilde{u}^k \cdot (\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k) \tilde{u}^k](x_{ij}) w_i w_j \right\} \\ &\leq \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \sum_{i,j=1}^N |\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k|_\infty^2 (\tilde{u}^k(x_{ij}))^2 w_i w_j \right\} \\ &\leq \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} |\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k|_\infty^2 \|\tilde{u}^k\|_{N,w}^2 \leq 2\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} |\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k|_\infty^2 \|\tilde{u}^k\|_{o,w}^2 \\ &\leq 4\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} |\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k|_\infty^2 (\|u^k - \Pi_N u^k\|_{o,w}^2 + \|u^k\|_{o,w}^2) \\ &\leq 4\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} |\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k|_\infty^2 (C_2^2 N^{-2} \|u^k\|_{1,w}^2 + \|u^k\|_{o,w}^2) \\ &\leq \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} |\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k|_\infty^2 4(C_2^2 + 1) \|u^k\|_{1,w}^2 \\ &\leq C_{13} \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} |\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k|_\infty^2 \|u^k\|_{1,w}^2 \end{aligned}$$

Agora, por (6.87), obtemos (6.88).

Escolhemos $\varepsilon^* \leq \frac{1}{20}$ e somamos de 0 até $(m-1)$ em (6.86),

$$\begin{aligned} \|e^m\|_{N,w}^2 - \|e^o\|_{N,w}^2 + \frac{\nu \Delta t}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \|\nabla e^{k+1}\|_{N,w}^2 &\leq \frac{5\nu}{20} 2\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|\nabla e^{k+1}\|_{N,w}^2 + 7\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 \\ &+ 2\Delta t \frac{C_9}{\nu} \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|_{o,w}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|\varepsilon^k(\tilde{u})\|_{N,w}^2 + (\Delta t)^3 \frac{2C_{10}}{\nu} \sum_{k=0}^{m-1} \{ \|u_t^{k+1}\|_{o,w}^2 + \|\varepsilon^k(u)\|_{o,w}^2 \} \\ &+ 2C_{11} \Delta t N^{2(1-\sigma)} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|f^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \frac{1}{\nu} (\|u^{k+1}\|_{\sigma,w}^2 + \|u^k\|_{o,w}^2) + \|u^k\|_{\sigma,w}^2 \right\} \\ &+ 2C_{12} \Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|(\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k) \tilde{u}^k\|_{N,w}^2 \end{aligned}$$

Logo, por (6.64) e (6.88),

$$\begin{aligned}
\|e^m\|_{N,w}^2 &\leq \|e^o\|_{N,w}^2 + 7\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + 2\Delta t \frac{C_9}{\nu} \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|_{o,w}^2 + (\Delta t)^2 \|u_{tt}\|_{L^2(H_w^1)}^2 \\
&+ (\Delta t)^4 \frac{C_{10}}{\nu} \|u_{tt}\|_{L^2(L_w^2)}^2 + 2(\Delta t)^3 \frac{C_{10}}{\nu} \sum_{k=0}^m \|u_t^k\|_{o,w}^2 \\
&+ 2C_{11}\Delta t N^{2(1-\sigma)} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|f^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \frac{1}{\nu} (\|u^{k+1}\|_{\sigma,w}^2 + \|u^k\|_{o,w}^2) + \|u^k\|_{\sigma,w}^2 \right\} \\
&+ 2C_{12}C_{13}(\Delta t)^3 \max_{0 \leq k \leq m-1} \left\{ \|u^k\|_{1,w}^2 \left[\int_0^T |\mathbf{b}_{tt}|_\infty^2 ds + \frac{T}{\Delta t} \max_{0 \leq k \leq m-1} |\mathbf{b}_t^{k+1}|_\infty^2 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|e^m\|_{N,w}^2 &\leq \|e^o\|_{N,w}^2 + \tilde{C}_1(\Delta t)^2 \left\{ \|u_{tt}\|_{L^2(H_w^1)}^2 + (\Delta t)^2 \|u_{tt}\|_{L^2(L_w^2)}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \|u_t^k\|_{o,w}^2 \right. \\
&+ \left. \Delta t \max_{0 \leq k \leq m-1} \left[\|u^k\|_{1,w}^2 \left(\int_0^T |\mathbf{b}_{tt}|_\infty^2 ds + \frac{T}{\Delta t} \max_{0 \leq k \leq m-1} |\mathbf{b}_t^{k+1}|_\infty^2 \right) \right] \right\} \\
&+ \tilde{C}_2 N^{2(1-\sigma)} \sum_{k=0}^m \left(\|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|f^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u^k\|_{o,w}^2 \right) \\
&+ 7\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + 2\Delta t \frac{C_9}{\nu} \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|_{o,w}^2.
\end{aligned}$$

Sejam,

$$\begin{aligned}
K_3 &= \|u_{tt}\|_{L^2(H_w^1)}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^m \|u_t^k\|_{o,w}^2 + (\Delta t)^2 \|u_{tt}\|_{L^2(L_w^2)}^2 \\
&+ \Delta t \max_{0 \leq k \leq m-1} \left[\|u^k\|_{1,w}^2 \left(\int_0^T |\mathbf{b}_{tt}|_\infty^2 ds + \frac{T}{\Delta t} \max_{0 \leq k \leq m-1} |\mathbf{b}_t^{k+1}|_\infty^2 \right) \right] \\
\tilde{K}_4 &= \Delta t \sum_{k=0}^m \left(\|u_t^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|f^{k+1}\|_{\sigma-1,w}^2 + \|u^k\|_{o,w}^2 \right).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|e^m\|_{o,w}^2 &\leq \|e^m\|_{N,w}^2 \leq \tilde{C}_1 \cdot (\Delta t)^2 \cdot K_3 + \tilde{C}_2 \cdot N^{2(1-\sigma)} \cdot \tilde{K}_4 + \|e^o\|_{N,w}^2 \\
&\quad + 7\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + 2\Delta t \frac{C_9}{\nu} \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|_{o,w}^2 \\
&\leq \tilde{C}_1 \cdot (\Delta t)^2 \cdot K_3 + \tilde{C}_2 N^{2(1-\sigma)} \cdot K_4 \\
&\quad + 7\Delta t \sum_{k=0}^{m-1} \|e^{k+1}\|_{o,w}^2 + 2\Delta t \frac{C_9}{\nu} \sum_{k=0}^{m-1} \|e^k\|_{o,w}^2,
\end{aligned}$$

em que $K_4 = \tilde{K}_4 + \|u_o\|_{\sigma-1,w}^2$.

Então, para Δt suficientemente pequeno, aplicando o lema de Gronwall discreto 1.10.3 na desigualdade acima e, pela desigualdade triangular $\|u^m - U^m\|_{o,w} \leq \|u^m - \tilde{u}^m\|_{o,w} + \|e^m\|_{o,w}$, obtemos a estimativa de convergência (6.70). \square

Observação 6.2.2 *Se $\theta = 1/2$ em (6.66), para alcançar precisão de segunda ordem no tempo, um método de avançar no tempo de segunda ordem deveria ser usado para o termo advectivo também. Para este propósito, o método de Adams-Bashforth de dois níveis é freqüentemente utilizado.*

6.3 Aplicação numérica

Seja

$$u(x, y, t) = \sin[(1+x)(1-x)] * (e^{y^2-1} - 1) * e^{-t} \quad (6.89)$$

Diferenciando em relação a t , duas vezes em relação a x e a y , encontramos a equação diferencial que u tem por solução.

A equação numérica a resolver será (6.44):

$$\begin{aligned}
\frac{U^{k+1}(x_{ij}) - U^k(x_{ij})}{\Delta t} - \Delta U_\theta^{k+1}(x_{ij}) &= f_\theta^{k+1}(x_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq N-1 \\
U^o(x_{ij}) &= u_o(x_{ij}), \quad 0 \leq i, j \leq N
\end{aligned}$$

Na tabela abaixo, apresentamos a evolução do máximo erro entre a solução aproximada e a solução exata.

N	θ	Δt	Erro $\ \cdot\ _\infty$	Número de condição.
4	0.5	$1 \cdot e - 3$	6.3e-3	1.01
8	0.5	$1 \cdot e - 3$	2.9e-5	1.21
16	0.5	$1 \cdot e - 3$	2.4e-8	4.21

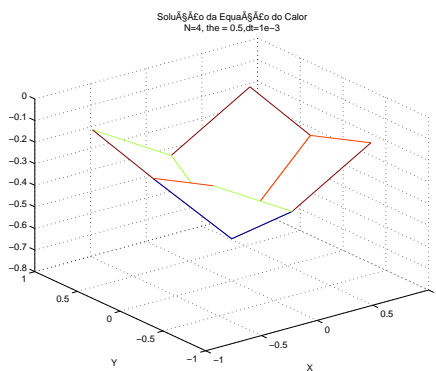


Figura 6.1: $N=4$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = e - 3$

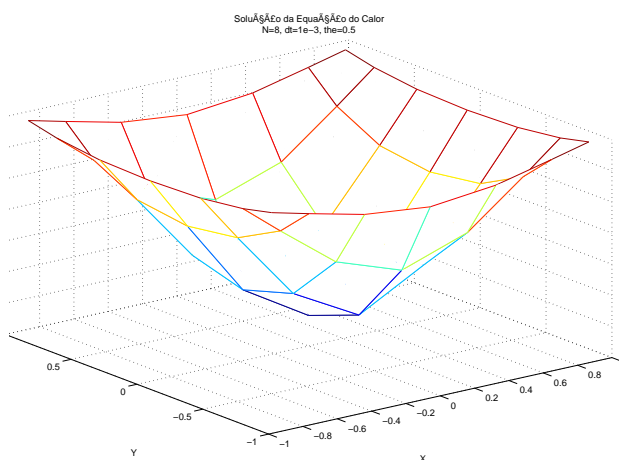


Figura 6.2: $N=8$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = e - 3$

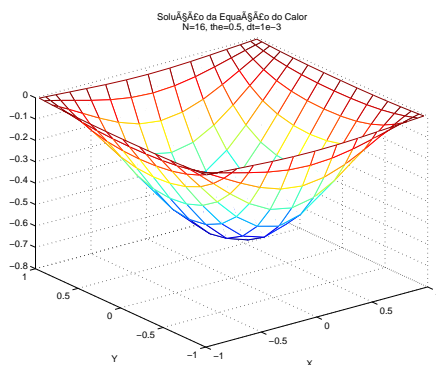


Figura 6.3: $N=16$, $\theta = 0.5$, $\Delta t = e - 3$

Na tabela abaixo, apresentamos, novamente, o erro entre a solução aproximada e a solução exata, mas agora com o passo no tempo de segunda ordem.

N	θ	Δt	Erro $\ \cdot \ _{\infty}$	Número de condição.
4	0.5	$1 \cdot e - 2$	6.3e-3	1.16
8	0.5	$1 \cdot e - 2$	2.7e-5	3.10
16	0.5	$1 \cdot e - 2$	2.4e-6	32.45
32	0.5	$1 \cdot e - 2$	2.4e-6	495.91

Observamos que não há diferença apreciável no erro quando passamos de $N = 16$ para $N = 32$. Isso se deve ao fato que na variável temporal não temos convergência espectral.

Considerações finais

- Ressaltamos a importância das estimativas ótimas dos operadores de projeção e interpolação para a análise e obtenção das estimativas de estabilidade e convergência. A análise semi-discreta do método Chebyshev-pseudo-espectral, realizada neste trabalho, é um caso particular da teoria apresentada em [6], página 353, seção 10.5. No entanto, a teoria em [6] não apresenta a taxa explícita de convergência que obtivemos no trabalho.

- Para a equação do calor, discretizada com relação ao espaço, quando a solução exata $u(t) \in H_w^\sigma(\Omega)$, $u_t \in L^2(H_w^{\sigma-1}(\Omega))$, condição inicial u_o e forçante f pertencem a $H_w^{\sigma-1}(\Omega)$, sendo $H_w^\sigma(\Omega)$ um espaço de Sobolev de ordem alta, o erro entre a solução exata e a solução aproximada decai a zero com taxa $N^{1-\sigma}$, em que N é o parâmetro de discretização espacial. Para a discretização completa da equação do calor, mostramos que em relação ao espaço a taxa de convergência é espectral, enquanto que, com relação ao tempo, a taxa é polinomial (quadrática para $1/2 < \theta \leq 1$ e de quarta ordem para $\theta = 1/2$).

- As estimativas de estabilidade (5.8), (5.13), (6.19) e (6.1.7) dependem de T , ou seja, do intervalo $(0, T)$ finito que está sendo considerado. Se $T \rightarrow \infty$, tais estimativas perdem o sentido. Xiang(2006), [30], apresenta uma alternativa para este problema. A técnica para obter a estabilidade na norma H_w^1 é, primeiramente, usar a desigualdade inversa (3.8) e uma versão não-linear do lema do Gronwall para obter uma estimativa inicial. Em seguida, adaptar tal estimativa com o lema de Gronwall contínuo 1.10.2 no intervalo $[0, T]$ e, depois, estender este resultado para $[0, \infty)$ via indução matemática.

- A teoria apresentada é o alicerce de qualquer investigação envolvendo métodos espectrais para problemas parabólicos.

- Na demonstração de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais parabólicas poderíamos ter usado a abordagem de semigrupos. Ressaltamos, porém, que a escolha do método de Faedo-Galerkin se deve a familiaridade do mesmo com o esquema espectral de Galerkin.

- Neste trabalho, apresentamos a teoria Fourier-espectral com escopo limitado ao absolutamente necessário a obtenção dos resultados referente aos métodos Chebyshev-espectrais.

Bibliografia

- [1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).
- [2] Beals, R., *Advanced mathematical analysis*, Springer-Verlag, (1973).
- [3] Bressan, N., Quarteroni, A., *Analysis of Chebyshev collocation methods for parabolic equations* SIAM J-Numer. Anal., 23, (1986), 1138-1154.
- [4] Canuto, C., Quarteroni, A., *Spectral and pseudo-spectral methods for parabolic problems with nonperiodic boundary conditions*, Calcolo, 18 (1981), 197-218.
- [5] Canuto, C., Quarteroni, A., *Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces*, Math. Comp., 38 (1982), 67-86.
- [6] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, Z., Zang, T. A., *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, (1988).
- [7] De Frutos, J., Munoz-Sola, R., *On error estimates for Galerkin spectral discretizations of parabolic problems with nonsmooth initial data*, *Mathematics of Computation*, vol. 70, no. 234 (2000), 525-531.
- [8] De Frutos, J., Munoz-Sola, R., *Chebyshev pseudospectral collocation for parabolic problems with nonconstant coefficients*, Proceedings of the third international conference on spectral and high order methods, Houston (Texas), 1996, 101-107.
- [9] Davis, P. J., *Interpolation and approximation*, Dover, (1975).
- [10] Davis, P. J., *On the numerical integration of periodic analytic functions*. In: Symposium on numerical approximation (R. Langer.ed.), The University of Wisconsin Press, Madison, (1959), 45-59.
- [11] Dautray, R., Lions, J. L., *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol.2: Functional and variational methods*, Springer-Verlag, (1988).
- [12] Dautray, R., Lions, J. L., *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol.5: Evolution problems I*, Springer-Verlag, (1992).

- [13] Eliassen, E., Machenhauer, B., Rasmussen, E., *On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields*, Rep. No. 2 (Institut for Teoretisk Meteorologi, Univ. Copanhamem), (1970).
- [14] Funaro, D., *Approssimazione Numerica di Problemi Parabolici e Iperbolici con Metodi Spettrali*, Thesis, University of Pavia, (1981).
- [15] Íório, R. Jr., Íório, V. M., *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. Rio de Janeiro, (1988).
- [16] Kesavan, S., *Topics in functional analysis and applications*, Wiley Eastern Limited, Bangalore, (1989).
- [17] Kreiss, H. O., Oliger, J., *Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations*, Tellus XXIV, 199-215, (1972).
- [18] Lanczos, C., *Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions*, J. Math. Phys, 17, 123-199, (1938).
- [19] Lions, J.L., Magenes, E., *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Volume 1, Springer-Verlag, (1972).
- [20] Maday, Y., Quarteroni, A., *Legendre and Chebyshev spectral approximations of Burgers' equation*, Numer. Math., 37 (1981), 321-332.
- [21] Marsden, J. E., Hoffmann, M.J., *Basic complex analysis*, W.H. Freeman and Company, (1987).
- [22] Quarteroni, A., Valli, A., *Numerical approximation of partial differential equations* Springer, 2 Edição, (1997).
- [23] Orszag, S. A., *Numerical methods for simulation of turbulence*, Phys. Fluid, Suppl. II, 250-257, (1969).
- [24] Orszag, S. A., *Transform method for calculation for vector sums. Application to the spectral form of the vorticity equation*, J. Atmosph. Sci. 27, 890-895, (1970).
- [25] Orszag, S. A., *Comparison of pseudospectral and spectral approximation*, Appl. Math. 51, 253-259, (1972).
- [26] Shen, J. *Introduction to Spectral methods for scientific computing*, Lectures notes, (2003).
- [27] Tadmor, E. *The exponential accuracy of Fourier and Chebyshev differencing methods*, SIAM, J. Numer. Anal. 23,1-10, (1986).

- [28] Teman, R., *Navier-Stokes equations theory and numerical analysis*, Vol 2, North-Holland Springer-Verlag, (1984).
- [29] Travessini, F. *Séries de Fourier e métodos de Fourier espectrais*, Trabalho de conclusão de curso (Graduação licenciatura em matemática), Universidade Federal de Santa Catarina, 105f, (2004).
- [30] Xiang, X., *The large time error estimation of Chebyshev pseudospectral approximation for a class of semilinear parabolic equations*, Applied Mathematics and Computation, vol. 177(2) (2006), 720-728.
- [31] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Vol 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, (1990).