

---

**Universidade Federal de Santa Catarina**  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

---

# **Método de Galerkin Descontínuo com Penalização de Fluxos para Problemas Elípticos**

**Luciane Inês Assmann Schuh**

**Orientador: Prof. Dr. Igor Mozolevski**

**Florianópolis**  
**Fevereiro de 2007**

**Universidade Federal de Santa Catarina**

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

**Método de Galerkin Descontínuo com Penalização de  
Fluxos para Problemas Elípticos**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Luciane Inês Assmann Schuh  
Florianópolis  
Fevereiro de 2007

# Método de Galerkin Descontínuo com Penalização de Fluxos para Problemas Elípticos

por

**Luciane Inês Assmann Schuh**

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”,  
Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma  
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica.

---

Clóvis Caesar Gonzaga  
Coordenador

Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Igor Mozolevski (UFSC-Orientador)

---

Prof. Dr. Saulo Rabello M. de Barros (USP)

---

Prof. Dr. Fermín S. V. Bazán (UFSC)

---

Prof. Dr. Daniel Kozakevich UFSC

**Florianópolis, Fevereiro de 2007.**

## **Agradecimentos**

A meus pais Roque e Geni, pelos preciosos ensinamentos a mim repassados.

A meu esposo Mauro, pelo apoio e incentivo desde o início desta jornada e que sempre me fez acreditar que poderia ser possível a concretização deste sonho. Agradeço ainda pelo companheirismo, amizade e amor com o qual sempre pude contar, e por tornar meus dias mais felizes.

Aos meus colegas e amigos, que de uma forma ou de outra, contribuíram com sua amizade e com sugestões efetivas para a realização deste trabalho.

À Elisa Amaral, pela sua presteza, atenção e disposição com que sempre nos atendeu na secretaria da Pós-Graduação.

Aos professores Fermín Bazán, Celso Doria, Joel Souza e Ruy Charão pelo conhecimento transmitido.

Ao amigo Paulo Bösing, pelo auxílio com a programação no PZ.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Finalmente, agradeço de forma especial ao meu orientador, professor Igor Mozolevski pelo constante incentivo, sempre indicando a direção a ser tomada nos momentos de maior dificuldade. Agradeço principalmente, pela dedicação, paciência e confiança depositada neste trabalho de dissertação.

Ainda quero agradecer à banca examinadora, pelo valioso tempo dedicado à leitura deste trabalho.

# Resumo

Os métodos de Galerkin descontínuo desenvolvidos recentemente para equações elípticas de segunda ordem envolvem a idéia de penalizar o salto da solução nas interfaces dos elementos. Esta idéia permite impor a suavidade da solução numérica do problema de maneira fraca e ao mesmo tempo estabilizar a forma bilinear garantindo sua coercividade e consequentemente, a estabilidade da solução numérica. Entretanto, a introdução do termo de penalização que envolve o salto da solução torna o método não conservativo, o que prejudica possíveis aplicações do método, na dinâmica de fluídos computacional, por exemplo. Este trabalho estuda inovadoras técnicas de estabilização de fluxos da solução numérica que foram introduzidas, com o objetivo de resolver o problema acima exposto, por A. Romkes, J. Oden e S. Prudhomme (2003) para problemas elípticos e por E. Burman e A. Ern (2005) para problemas com advecção predominante. Com base em recentes resultados de aproximação polinomial para funções em espaços de Sobolev particionado e usando a estabilização de fluxos, são apresentadas estimativas *a priori* do erro para os métodos, que são ótimas em  $h$  (parâmetro de discretização da malha) e subótimas em  $p$  (ordem de aproximação polinomial). Uma série de experiências numéricas são realizadas para comprovar as taxas de convergência teóricas e para demonstrar possíveis aplicações à problemas práticos.

# Abstract

The discontinuous Galerkin methods developed recently for elliptic equations of second order involve the idea of penalizing the jump of the solution at the elements interfaces. This idea allows to impose the smoothness of the numeric solution of the problem in a weak way and at the same time to stabilize the bilinear form guaranteeing its coerciveness and, consequently, the stability of the numeric solution. However, the penalization of the jump of the numerical solution turns the method non conservative, and, consequently, complicates its possible applications to the computational fluid dynamics, for example. In this work innovators techniques of stabilization of the fluxes of the numeric solution is studied. This techniques were introduced for elliptic problems by A. Romkes, J. Oden and S. Prudhomme (2003) and by E. Burman and A. Ern (2005) for advection-dominated problems. Using the recent results of polynomial approximations of functions from piecewise Sobolev space and the fluxes stabilization, the *a priori* error analysis of the discontinuous Galerkin method is developed. The error estimates that are optimal in  $h$  (parameter of mesh discretization) and suboptimal in  $p$  (order of polynomial approximation) are presented. Several numeric experiments are realized to confirm the theoretical rates of convergency and to demonstrate a possible applications to practical problems.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Notações</b>	<b>3</b>
<b>1 Resultados e conceitos básicos</b>	<b>4</b>
1.1 Espaços de elementos finitos . . . . .	4
1.2 Alguns resultados da análise . . . . .	7
1.3 Propriedades de aproximação . . . . .	9
<b>2 Método de Elementos Finitos contínuo com penalização interior</b>	<b>13</b>
2.1 Problema modelo . . . . .	13
2.2 Resultados técnicos . . . . .	15
2.2.1 Desigualdade do traço-hp . . . . .	15
2.2.2 Interpolação hp contínua: . . . . .	18
2.2.3 Estimativa de erro hp para projeções ortogonais contínuas . . . . .	24
2.3 Análise de convergência . . . . .	26
2.4 Extensão para elementos <i>simplices</i> . . . . .	33
2.4.1 As desigualdades do traço e traço inversa para <i>simplices</i> . . . . .	33
2.4.2 Interpolação <i>hp</i> e projeção sobre triângulos . . . . .	36
2.4.3 Análise de Convergência sobre triângulos . . . . .	37
2.5 Problemas de advecção-difusão . . . . .	39
<b>3 Método de Galerkin descontínuo para a equação reação-difusão</b>	<b>46</b>
3.1 O problema modelo e a formulação variacional . . . . .	46
3.1.1 A formulação de Baumann-Oden . . . . .	46
3.1.2 A nova formulação fraca . . . . .	47
3.2 Formulação variacional bem posta . . . . .	50
3.2.1 Continuidade da forma bilinear . . . . .	52
3.2.2 A Condição Inf-Sup . . . . .	53
3.2.3 Existência e Unicidade de Soluções . . . . .	61

3.2.4	Estabilidade . . . . .	62
3.3	Estimativa de erro <i>a priori</i> . . . . .	63
3.3.1	Erro de interpolação na norma $\  \cdot \ $ . . . . .	64
3.3.2	Estimativa de erro na norma $\  \cdot \ $ . . . . .	65
3.3.3	Estimativa de erro na norma $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Método de Galerkin descontínuo com penalização de fluxos para a equação reação-difusão</b>	<b>71</b>
4.1	Métodos GSIPG e GNIPG . . . . .	71
4.1.1	Continuidade da forma bilinear . . . . .	72
4.1.2	Coercividade da forma bilinear . . . . .	73
4.2	Estimativa de erros <i>a priori</i> . . . . .	76
4.3	Resultados numéricos . . . . .	77
4.3.1	Exemplos em um domínio unidimensional . . . . .	78
4.3.2	Problema em um domínio bidimensional . . . . .	83
4.3.3	Resultados numéricos para a equação reação-advecção-difusão . . . . .	84
	<b>Conclusões</b>	<b>90</b>
<b>A</b>	<b>Espaços de funções</b>	<b>91</b>
A.1	Espaços de funções contínuas . . . . .	91
A.2	Espaços de funções integráveis . . . . .	92
A.3	Espaços de Sobolev . . . . .	92
A.3.1	Espaços de Sobolev fracionários . . . . .	93
A.4	Fronteira Lipschitz . . . . .	94



# Lista de Figuras

1.1	$\mathcal{F}_\kappa : \hat{\kappa} \rightarrow \kappa$ , $\mathcal{F}_\kappa$ - aplicação afim, $\hat{\kappa}$ - elemento mestre, $d = 2$ . . . . .	5
4.1	Ordens de convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG. . . . .	78
4.2	Ordens de convergência em $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG. . . . .	79
4.3	Ordens de convergência em $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG. . . . .	79
4.4	Erro em $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ versus aproximação polinomial $p$ para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG. . . . .	79
4.5	Erro em $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ versus aproximação polinomial $p$ para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG. . . . .	80
4.6	Erro em $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ versus aproximação polinomial $p$ para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG. . . . .	80
4.7	Comparação entre a solução exata e soluções numéricas obtidas com as formulações (a) GNIPG e GSIPG quando $K = 1.e - 4$ e $K = 1.e + 4$ em todo domínio. (b) GNIPG e GSIPG quando $K = 1.e - 4$ para região de zoom indicada em (a). . . . .	81
4.8	Comparação entre a solução exata e solução numérica obtida com a formulação (a) GSIPG, com $K = 1.e + 4$ para região de zoom indicada em 4.7(a). (b) GNIPG, com $K = 1.e + 4$ para região de zoom indicada em 4.7(a). . . . .	82
4.9	Comparação entre a solução exata e solução numérica obtida com o método GSIPG com penalização de fluxos ( $K = 1.e - 4$ ) para (a) $p = 2$ , (b) $p = 3$ , com malha $2^6$ . . . . .	82
4.10	Comparação entre a solução exata e solução numérica obtida com o método GSIPG com penalização de fluxos ( $K = 1.e - 4$ ) para (a) $p = 4$ , (b) $p = 5$ , com malha $2^6$ . . . . .	82
4.11	Soluções numéricas obtidas em domínio bidimensional com a ordem de aproximação $p = 2$ (esquerda) e $p = 3$ (direita) usando a formulação GSIPG. . . . .	84
4.12	Soluções numéricas obtidas em domínio bidimensional com a ordem de aproximação $p = 4$ (esquerda) e $p = 5$ (direita) usando a formulação GSIPG. . . . .	85
4.13	Erro absoluto da solução numérica obtida com $p = 2$ e $l = 5$ usando a formulação do método de (a) Baumann (b) GSIPG com $K=1e+4$ . . . . .	85
4.14	Erro absoluto da solução numérica obtida com $p = 2$ e $l = 5$ usando a formulação do método (a) GNIPG com $K=1e+4$ (b) GNIPG com $K=1e-4$ . . . . .	85

# Introdução

Vários fenômenos naturais nas áreas de Física, Química, Biologia, dinâmica de fluídos, eletromagnetismo, entre outras, podem ser modelados por equações diferenciais parciais. Em geral, para tais problemas, não é conhecida a solução analítica e uma alternativa para resolvê-los é encontrar uma solução numérica que aproxime a solução exata do problema. O método de Elementos Finitos é uma classe de métodos numéricos muito usada para aproximar tais soluções, dentre os quais o método de Galerkin descontínuo vem obtendo destaque pelas suas ótimas propriedades de precisão, aproximação e estabilidade.

O método de Galerkin descontínuo possui várias vantagens, dentre as quais podemos destacar que o método fornece uma aproximação conservativa em cada elemento, apresenta altas taxas de convergência e também permite aproximação local de alta ordem, gerando assim métodos *hp* - adaptativos. A forma bilinear obtida na formulação variacional gera uma matriz positiva definida e bem condicionada, o que permite o uso de métodos iterativos na implementação numérica, mesmo para altos valores de ordem de aproximação polinomial  $p$ .

Nos primeiros artigos sobre o método de Galerkin descontínuo de elementos finitos (em Inglês Discontinuous Galerkin Finite Element Method ou DGFEM) para equações elípticas de segunda ordem foram introduzidos termos na forma bilinear, que penalizam saltos da descontinuidade da solução numérica nas interfaces entre elementos e impõe de maneira fraca as condições de fronteira ([19], [35] e [3]). Além destas propriedades, uma escolha correta no parâmetro de penalização pode garantir a coercividade da forma bilinear e portanto a estabilidade do método. Recentemente vários autores desenvolveram DGFEMs para problemas elípticos de segunda ordem, dentre os quais podemos destacar métodos não-simétricos com penalização interna que foram introduzidos por Rivière, Wheeler, Girault ([28], [29]), Houston, Schwab e Süli ([33], [17]) e métodos simétricos de Galerkin descontínuo com penalização interna introduzidos por Arnold [3] and Wheeler [35]. Entretanto, a inserção do termo de penalização que envolve o salto da solução torna o método não conservativo, o que prejudica possíveis aplicações do método à problemas de advecção-difusão e à sistemas de equações de Navier-Stokes.

Já nos trabalhos de Baumann and Oden ([6], [20]) foi introduzido o método de Galerkin descontínuo sem penalização interna, que produz uma forma bilinear definida positiva, localmente conservativa. Recentemente no trabalho de Romkes, Oden e Prudhomme [30]

foi introduzido um método de Galerkin descontínuo com a penalização de fluxos para a equação reação-difusão, que também é localmente conservativo. Para este método, em um par de espaços funcionais, tipo espaços de Sobolev particionado, foi demonstrada a propriedade inf – sup, garantindo assim a existência e unicidade de solução para formulação fraca descontínua do problema.

Uma outra linha de pesquisa, dedicada ao estudo de estabilização de fluxos nas arestas para métodos de elementos finitos contínuos e descontínuos para problemas elípticos e hiperbólicos, foi desenvolvida nos trabalhos [12] e [11]. Para obtenção da estimativa de erro *a priori* para estes métodos foram necessários alguns resultados técnicos como a desigualdade do traço inversa-hp, resultados de interpolação-hp local contínua e descontínua e estimativas de erro-hp para projeções ortogonais em  $L^2$ .

Neste trabalho estudamos estas técnicas de estabilização de fluxos da solução numérica para problemas elípticos e para problemas com advecção predominante introduzidas nos trabalhos [30, 11]. Além disso, estaremos propondo um novo método de Galerkin descontínuo estabilizado, onde incluímos simultaneamente termos de penalização na solução e no fluxo da solução numérica. A estrutura deste trabalho é a seguinte:

No capítulo 1 apresentamos notações, definições e alguns resultados necessários no decorrer do trabalho. Dentre os resultados, vale ressaltar o teorema do traço, o teorema de Lax-Milgram e alguns teoremas de aproximação polinomial em espaços de Sobolev.

No capítulo 2 efetuamos um estudo da formulação do método de Galerkin contínuo com penalização interior para a equação reação-advecção introduzida por Burman e Ern [11]. Apresentamos alguns resultados técnicos utilizados para obter uma análise de convergência do método. Efetuamos também a extensão dos resultados de acordo com Burman e Ern para a equação reação-advecção para elementos finitos *simplices* e para a equação reação-advecção-difusão.

Já o capítulo 3 dedicamos à apresentação do método de Galerkin descontínuo introduzido por Romkes, Prudhomme e Oden em [30] para a equação reação-difusão. Para este método é necessário provar a condição inf-sup da forma bilinear para garantir existência e unicidade de solução do problema fraco.

Inspirados nos métodos estudados nos capítulos 2 e 3, no capítulo 4 introduzimos um novo método de Galerkin descontínuo estabilizado para a equação reação-difusão, onde penalizamos o salto da solução e o salto do fluxo da solução numérica. Uma análise de estimativas *a priori* do erro para o método na norma de energia é desenvolvida. Resultados numéricos, que confirmam as taxas de convergência teóricas para soluções suaves são apresentadas em uma e duas dimensões e também estudamos o comportamento do método para casos com presença de descontinuidades. Na seção 4.3.3 apresentamos os resultados numéricos obtidos com o método de Galerkin descontínuo introduzido para a equação reação-advecção-difusão. Todos os resultados numéricos apresentados neste capítulo foram realizados no ambiente de programação de elementos finitos PZ [14].

# Notações

$\Omega$  - domínio limitado e aberto em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , com fronteira  $\partial\Omega$  Lipschitz.

$\mathcal{T}_h$  - partição regular de  $\Omega$  formada por elementos  $\kappa$ .

$h_\kappa$  - diâmetro do elemento  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ .

$\hat{\kappa}$  - elemento mestre fixo.

$\mathcal{E}_h$  - conjunto de todas as  $(d-1)$ -faces abertas  $e$  de todos os elementos  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ .

$\mathcal{E}_h^\circ = \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \Omega\}$ .

$\mathcal{E}_h^\partial = \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \partial\Omega\}$ , dividimos  $\mathcal{E}_h^\partial$  de maneira que  $\mathcal{E}_h^\partial = \mathcal{E}_h^D \cup \mathcal{E}_h^N$ , onde:

$\mathcal{E}_h^D$  - refere-se à parte da  $\partial\Omega$  em que a condição de Dirichlet é satisfeita,

$\mathcal{E}_h^N$  - refere-se à parte da  $\partial\Omega$  na qual a condição de Neumann é satisfeita.

$[\cdot]$  - salto da função na interface do elemento.

$\{\cdot\}$  - valor médio da função na interface do elemento.

$\mathcal{F}_\kappa$  - aplicação afim tal que  $\kappa = \mathcal{F}_\kappa(\hat{\kappa})$ .

$p_\kappa$  - grau de aproximação polinomial local.

$s_\kappa$  - índice de Sobolev local.

$\mathbf{p} = \{p_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$ ,  $\mathbf{s} = \{s_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$  e  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$ .

$Q_p(\hat{\kappa}_c) = \text{span}\{\hat{x}^\alpha : 0 \leq \alpha_i \leq p, 1 \leq i \leq d\}$ , onde  $\hat{\kappa}_c = (-1, 1)^d$  - hipercubo aberto.

$P_p(\hat{\kappa}_s) = \text{span}\{\hat{x}^\alpha : 0 \leq |\alpha| \leq p\}$ , onde  $\hat{\kappa}_s$  é um simplex unitário aberto.

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lebesgue mensurável}\}$ .

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lebesgue mensurável, } \text{ess.sup}|f| < \infty\}$ .

$W_p^k(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $W_p^k(\Omega)$  - espaço de Sobolev.

$H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega)$  - espaço de Hilbert.

$$S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \begin{array}{l} v|_\kappa \circ \mathcal{F}_\kappa \in Q_{p_\kappa}(\hat{\kappa}) \text{ se } \mathcal{F}_\kappa^{-1}(\kappa) = \hat{\kappa}_c; \\ v|_\kappa \circ \mathcal{F}_\kappa \in P_{p_\kappa}(\hat{\kappa}) \text{ se } \mathcal{F}_\kappa^{-1}(\kappa) = \hat{\kappa}_s; \end{array} \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

$H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_\kappa \in H^{s_\kappa}(\kappa), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\}$ .

Equipamos  $H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$  com a seguinte norma:  $\|v\|_{\mathbf{s}, \mathcal{T}_h} = \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^{s_\kappa}(\kappa)}^2 \right)^{1/2}$ .

$V_h^p = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, v_h|_\kappa \circ \mathcal{F}_\kappa \in Q_{p_\kappa}(\hat{\kappa})\}$ .

$H(\Delta, \kappa) = \{v \in L^2(\kappa) : \nabla \cdot \nabla v \in L^2(\kappa)\} \subset H^1(\kappa)$ .

$M(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_\kappa \in H(\Delta, \kappa), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, [\nabla v] \in L^2(\mathcal{E}_h^\circ)\}$ .

$V^{hp} = \{v \in L^2(\Omega) : v|_\kappa = \hat{v} \circ \mathcal{F}_\kappa^{-1}, \hat{v} \in P_{p_\kappa}(\hat{\kappa}), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\}$ .

# Capítulo 1

## Resultados e conceitos básicos

Neste Capítulo apresentamos notações, definições e resultados preliminares necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Inicialmente abordamos os tópicos relacionados com a construção dos espaços de elementos finitos de Galerkin descontínuos e, consideramos definições características destes métodos, como salto e média de funções e fronteira interna da malha. Em seguida, na seção 1.2, relembramos alguns resultados importantes da análise como o teorema do traço e o teorema de Lax-Milgram, sendo que este último é usado para garantir a existência e unicidade de solução dos métodos de Galerkin descontínuos aqui abordados. Enfim na seção 1.3 apresentamos alguns resultados teóricos sobre aproximação polinomial em espaços de Sobolev, os quais serão necessários para estabelecer estimativas de erro *a priori* para o método de Galerkin descontínuo.

### 1.1 Espaços de elementos finitos

Seja  $\Omega$  um domínio limitado e aberto em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$  com fronteira  $\partial\Omega$  Lipschitz (ver definição A.4.1 no apêndice A) . Seja  $\{\mathcal{T}_h\}$  ( $h > 0$ ) uma família de partições de  $\Omega$  composta por elementos  $\kappa_i$ , abertos, disjuntos e convexos tal que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \bar{\kappa}.$$

Consideramos como  $h_\kappa$  o diâmetro do elemento  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , e designamos por  $h$  o máximo dos  $h_\kappa$ ,  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ . Desse modo, uma partição  $\mathcal{T}_h$  é regular se existe uma constante  $\varrho$ , tal que,

$$\frac{h_\kappa}{\rho_\kappa} \leq \varrho, \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h,$$

em que,  $\rho_\kappa = \sup\{\text{diam}(S) : S \text{ é uma bola/esfera contida em } \kappa\}$ .

Assumimos que cada elemento  $\kappa \in \mathcal{T}_h$  é imagem de um elemento mestre fixo  $\hat{\kappa}$  por uma

aplicação afim (figura 1.1), isto é,  $\kappa = \mathcal{F}_\kappa(\hat{\kappa})$ , em que  $\hat{\kappa}$  é, ou o simplex unitário aberto

$$\hat{\kappa}_s = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d) \in \mathbb{R}^d : 0 < \hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_d < 1, \hat{x}_i > 0, i = 1, \dots, d\},$$

ou o hipercubo aberto  $\hat{\kappa}_c = (-1, 1)^d$  em  $\mathbb{R}^d$ . Sobre  $\hat{\kappa}$  definimos os espaços de polinômios de grau  $p \geq 1$  como segue:

$$\begin{aligned} Q_p(\hat{\kappa}_c) &= \text{span}\{\hat{x}^\alpha : 0 \leq \alpha_i \leq p, 1 \leq i \leq d\}, \\ P_p(\hat{\kappa}_s) &= \text{span}\{\hat{x}^\alpha : 0 \leq |\alpha| \leq p\}, \end{aligned}$$

em que,  $\hat{x}^\alpha = \hat{x}_1^{\alpha_1} \cdot \hat{x}_2^{\alpha_2} \dots \hat{x}_d^{\alpha_d}$  e  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ .

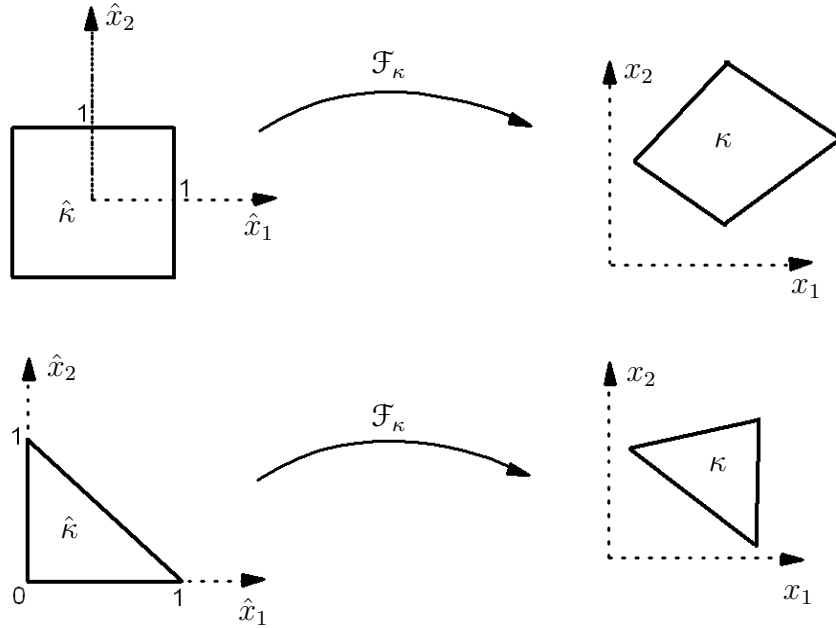


Figura 1.1:  $\mathcal{F}_\kappa : \hat{\kappa} \rightarrow \kappa$ ,  $\mathcal{F}_\kappa$  - aplicação afim,  $\hat{\kappa}$  - elemento mestre,  $d = 2$ .

Denotaremos o espaço de Hilbert de ordem real  $t$  de funções de valores reais sobre  $\Omega$  por  $H^t(\Omega)$ . Seu produto interno e norma, serão denotados por  $(\cdot, \cdot)_{H^t(\Omega)}$  e  $\|\cdot\|_{H^t(\Omega)}$  respectivamente. No entanto, adotaremos uma notação mais compacta  $(\cdot, \cdot)_{t,\Omega}$  e  $\|\cdot\|_{t,\Omega}$ , respectivamente. Para o espaço de Lebesgue  $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ , usaremos a notação equivalente para o produto interno e para a norma, isto é,  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)} = (\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ ,  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = \|\cdot\|_{0,\Omega}$ . Consideremos também o espaço de Sobolev  $W_p^s(\Omega)$ , definido no apêndice A, ao qual associamos o índice de Sobolev  $s$ .

Assim, para  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , associamos os valores do grau de aproximação polinomial local  $p_\kappa$  e o índice de Sobolev local  $s_\kappa$ . Armazenando  $p_\kappa$ ,  $s_\kappa$  e  $\mathcal{F}_\kappa$  em vetores  $\mathbf{p} = \{p_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$ ,  $\mathbf{s} = \{s_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$  e  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\kappa : \kappa \in \mathcal{T}_h\}$ , podemos definir os seguintes espaços:

$$S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \begin{array}{l} v|_\kappa \circ \mathcal{F}_\kappa \in Q_{p_\kappa}(\hat{\kappa}) \text{ se } \mathcal{F}_\kappa^{-1}(\kappa) = \hat{\kappa}_c; \\ v|_\kappa \circ \mathcal{F}_\kappa \in P_{p_\kappa}(\hat{\kappa}) \text{ se } \mathcal{F}_\kappa^{-1}(\kappa) = \hat{\kappa}_s \end{array} ; \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \right\}, \quad (1.1)$$

e

$$H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_\kappa \in H^{s_\kappa}(\kappa), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\}. \quad (1.2)$$

O espaço  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  é o espaço de elementos finitos de funções polinomiais por partes que podem ser descontínuas nas interfaces entre elementos da malha.  $H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$  é o espaço de Sobolev particionado, o qual é equipado com a seguinte norma:

$$\|v\|_{s, \mathcal{T}_h} = \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^{s_\kappa}(\kappa)}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Particularmente vamos estar considerando os valores escalares  $p$  e  $s$  como sendo o grau de aproximação polinomial e o índice de Sobolev, respectivamente, definidos de maneira uniforme na malha.

Seja  $\mathcal{E}_h$  o conjunto de todas as  $(d-1)$ -faces abertas  $e$  de todos os elementos  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ . Para cada  $e \in \mathcal{E}_h$ , denotamos  $h_e = \text{diam}(e)$ . O conjunto  $\mathcal{E}_h$  será dividido em dois subconjuntos,  $\mathcal{E}_h^\circ$  e  $\mathcal{E}_h^\partial$ , definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^\circ &= \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \Omega\}, \\ \mathcal{E}_h^\partial &= \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Vamos dividir o conjunto  $\mathcal{E}_h^\partial$  de maneira que  $\mathcal{E}_h^\partial = \mathcal{E}_h^D \cup \mathcal{E}_h^N$ , onde  $\mathcal{E}_h^D$  refere-se à parte da  $\partial\Omega$  em que a condição de Dirichlet é satisfeita e  $\mathcal{E}_h^N$  à parte na qual a condição de Neumann é satisfeita.

A fim de construir aproximações de elementos finitos descontínuos, vamos introduzir alguns operadores de traço para manipular os fluxos numéricos, para tanto, seguiremos a notação apresentada em [2]. Para qualquer face  $e \in \mathcal{E}_h^\circ$  seja  $\kappa_L$  e  $\kappa_R$  os elementos que compartilham a face  $e$  (isto é,  $\overline{\kappa_L} \cap \overline{\kappa_R} = \bar{e}$ ), assim, definimos os vetores normais unitários  $\mathbf{n}_L$  e  $\mathbf{n}_R$  sobre  $e$  como sendo os vetores exteriores para  $\kappa_L$  e  $\kappa_R$ , respectivamente. Já o vetor normal  $\mathbf{n}$  é definido externo a cada elemento individualmente.

Desse modo, para quaisquer funções  $\phi$  e  $\tau$ , tal que,

$$\phi \in H^s(\kappa_L) \times H^s(\kappa_R), \quad s > 1/2,$$

e

$$\tau \in (H^s(\kappa_L))^2 \times (H^s(\kappa_R))^2, \quad s > 1/2,$$

usando a notação  $\phi_i = (\phi|_{\kappa_i})|_e$  (análogo para  $\tau$ ), definimos o salto através de  $e$  e o valor médio sobre  $e$  por

$$[\phi] = \phi_L \mathbf{n}_L + \phi_R \mathbf{n}_R, \quad \{\phi\} = \frac{1}{2} (\phi_L + \phi_R)$$

e

$$[\tau] = \tau_L \cdot \mathbf{n}_L + \tau_R \cdot \mathbf{n}_R, \quad \{\tau\} = \frac{1}{2} (\tau_L + \tau_R).$$

onde  $\tau_L \cdot \mathbf{n}_L$  representa o produto escalar entre  $\tau_L$  e  $\mathbf{n}_L$ , análogo para  $\tau_R \cdot \mathbf{n}_R$ . Por conveniência estendemos as definições de salto e de valor médio para as faces  $e \in \mathcal{E}_h^\partial$  por

$$[\phi] = \phi|_e \mathbf{n}, \quad \{\phi\} = \phi|_e,$$

e

$$[\tau] = \tau|_e \cdot \mathbf{n}, \quad \{\tau\} = \tau|_e.$$

## 1.2 Alguns resultados da análise

**Lema 1.2.1** (*Desigualdade de Poincaré-Friedrich's*) *Seja  $\Omega$  um domínio aberto e limitado em  $\mathbb{R}^2$ , com fronteira  $\partial\Omega$  Lipschitz. Seja  $\psi \in H^1(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} \psi dx = 0,$$

Então,

$$\|\psi\|_{0,\Omega} \leq C \|\nabla\psi\|_{0,\Omega}, \quad (1.4)$$

onde  $C = C(\Omega)$  é uma constante positiva.

Demonstração: Ver Schwab [32].

□

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada em [25].

**Lema 1.2.2** *Sejam  $\varphi \in P_{p_\kappa}(\kappa)$  e  $\bar{\varphi}$  a média de  $\varphi$  sobre  $\kappa$ ,  $\bar{\varphi} = (\int_{\kappa} \varphi dx) / |\kappa|$ . Então*

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{0,\kappa} \leq Ch_\kappa \|\nabla\varphi\|_{0,\kappa}, \quad (1.5)$$

onde  $C$  é uma constante positiva independente de  $\kappa$  e  $\varphi$ .

Agora, para  $m$  inteiro,  $0 \leq k < m$  e para  $\forall \psi \in C^m(\bar{\Omega})$ , definimos o operador do traço  $\gamma_k$  por

$$\gamma_k \psi = \left( \frac{\partial^k \psi}{\partial \nu^k} \right) \Big|_{\partial\Omega}, \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

**Teorema 1.2.3** (*Teorema do traço*) *Seja  $\Omega$  um domínio aberto, limitado em  $\mathbb{R}^n$  e a fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente lisa. Então o operador do traço  $\gamma_k$ ,  $0 \leq k \leq m - 1$ , pode ser estendido*



para um operador linear contínuo descrito de  $H^m(\Omega)$  em  $H^{m-k-1/2}(\partial\Omega)$ . Além disso o operador  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1})$  é uma aplicação linear contínua de  $H^m(\Omega)$  em  $\prod_{k=0}^{m-1} H^{m-k-1/2}(\partial\Omega)$ . Também existe uma aplicação inversa (à direita)  $\gamma^{-1}$ , linear contínua de  $\prod_{k=0}^{m-1} H^{m-k-1/2}(\partial\Omega)$  em  $H^m(\Omega)$ .

E além disso, existem constantes  $C_1$  e  $C_2$  tal que

$$C_1 \|\psi\|_{m,\Omega} \leq \|\gamma_k \psi\|_{m-k-1/2,\partial\Omega} \leq C_2 \|\psi\|_{m,\Omega}. \quad (1.6)$$

Demonstração: A demonstração do teorema do traço pode ser encontrada em [23].

□

A demonstração dos próximos dois teoremas pode ser encontrada em [22].

**Teorema 1.2.4** (*Lax-Milgram generalizado*) Sejam  $H_1$  e  $H_2$  espaços de Hilbert reais e seja  $B(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear em  $H_1 \times H_2$  com as seguintes propriedades:

(i)  $B(\cdot, \cdot)$  é contínua, isto é,  $\exists \beta > 0$  tal que

$$|B(u, v)| \leq \beta \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2}, \quad \forall u \in H_1, \quad \forall v \in H_2,$$

(ii)  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva, no sentido que  $\exists \alpha$  tal que

$$\inf_{\substack{u \in H_1 \\ \|u\|_{H_1} = 1}} \sup_{\substack{v \in H_2 \\ \|v\|_{H_2} \leq 1}} B(u, v) \geq \alpha > 0,$$

(iii) Para todo  $v \neq 0$  em  $H_2$ ,

$$\sup_{u \in H_1} B(u, v) \geq 0.$$

Então, existe único  $u^* \in H_1$  tal que,

$$B(u^*, v) = L(v), \quad \forall v \in H_2,$$

onde  $L \in H_2'$ . Além disso,

$$\|u^*\|_{H_1} \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{H_2'}.$$

**Teorema 1.2.5** (*Lax-Milgram*) Seja  $H$  um espaço de Hilbert,  $B(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear em  $H$  e  $L(\cdot)$  um funcional linear em  $H$ . Suponha que:

(i)  $B(\cdot, \cdot)$  é contínua em  $H$ , isto é,

$$\exists \beta \geq 0; \quad |B(u, v)| \leq \beta \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

(ii)  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva em  $H$ , ou seja,  $\exists \alpha > 0$  tal que

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H,$$

(iii)  $L(\cdot)$  é contínua em  $H$ , ou seja,  $\exists \gamma \geq 0$  tal que,

$$L(v) \leq \gamma \|v\|_H, \quad \forall v \in H.$$

Então  $\exists! u \in H$ :

$$B(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

### 1.3 Propriedades de aproximação

Apresentamos nesta seção alguns resultados clássicos da teoria de aproximação que serão usados no decorrer deste trabalho. Daqui em diante, denotaremos  $C$  uma constante genérica, independente do grau de aproximação polinomial  $p$  e do diâmetro da malha  $h$ , mas que pode depender da dimensão do espaço  $d$  e do parâmetro de regularidade da malha  $\varrho$ . Seu valor pode mudar de uma desigualdade para outra.

Inicialmente apresentamos duas desigualdades conhecidas como desigualdades múltiplas de traço, que estimam normas sobre a fronteira de um elemento  $\kappa$ , por normas sobre o elemento  $\kappa$ . A demonstração da primeira pode ser encontrada em [25], e a segunda em [31].

**Lema 1.3.1** *Seja  $\kappa$  um triângulo ou um quadrilátero tal que  $h_\kappa \leq \varrho \rho_\kappa$  (forma regular). Então, para todo  $\psi \in H^1(\kappa)$ ,*

$$\|\psi\|_{0, \partial\kappa}^2 \leq C \left( \frac{1}{h_\kappa} \|\psi\|_{0, \kappa}^2 + \|\psi\|_{0, \kappa} \|\nabla \psi\|_{0, \kappa} \right), \quad (1.7)$$

em que  $C$  é uma constante positiva independente de  $h_\kappa$ .

**Lema 1.3.2** *Seja  $\kappa \in \mathcal{T}_h$  caracterizado por uma aplicação afim  $\mathcal{F}_\kappa$  e  $\psi \in H^2(\kappa)$ , então existe uma constante  $C > 0$ , independente de  $h_\kappa$ , tal que:*

$$\|\nabla \psi \cdot \mathbf{n}\|_{0, \partial\kappa}^2 \leq C \left( \frac{1}{h_\kappa} \|\nabla \psi\|_{0, \kappa}^2 + \|\nabla \psi\|_{0, \kappa} \|\nabla^2 \psi\|_{0, \kappa} \right). \quad (1.8)$$

A seguir apresentamos a desigualdade inversa, cuja demonstração pode ser encontrada em Schwab [32].

**Lema 1.3.3** *Seja  $\varphi \in P_{p_\kappa}(\kappa)$  (ou  $\varphi \in Q_p(\kappa)$ ),  $p_\kappa \geq 1$ . Então*

$$\|\nabla \varphi\|_{0, \kappa} \leq C \frac{p_\kappa^2}{h_\kappa} \|\varphi\|_{0, \kappa}. \quad (1.9)$$

**Corolário 1.3.4** Dada  $\varphi \in P_{p_\kappa}(\kappa)$ , um polinômio de grau  $\leq p_\kappa$  e qualquer  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , tal que existe uma aplicação afim entre  $\kappa$  e  $\hat{\kappa}$ , então podemos afirmar:

$$\exists C > 0 : \|\nabla\varphi\|_{0,\kappa}^2 \geq C \frac{h_\kappa}{p_\kappa^2} \|\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa}^2,$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $\kappa$ .

A demonstração deste corolário pode ser encontrada em [30].

No decorrer deste trabalho estaremos utilizando os interpoladores  $\pi_{hp}$  e  $\tilde{\pi}_{hp}$ . Onde  $\pi_{hp}$  corresponde ao interpolador de Babuška e Suri [4] e  $\tilde{\pi}_{hp}$  refere-se ao interpolador proposto por Riviere et al [27, 29].

Primeiramente, consideramos uma família de interpoladores de Babuška e Suri  $\{\pi_{hp}^\kappa\}$ , tal que:

$$\begin{aligned} \pi_{hp}^\kappa : H^{s_\kappa}(\kappa) &\rightarrow P_{p_\kappa}(\kappa) \\ \pi_{hp}^\kappa(\varphi) &= \varphi, \quad \forall \varphi \in P_{p_\kappa}(\kappa). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Necessitamos o seguinte resultado para a estimativa do erro do interpolador de Babuška e Suri [4, 5], ótima em  $h$  e em  $p$ .

**Teorema 1.3.5** (Teorema de interpolação) Sejam  $\kappa$  um triângulo ou um quadrilátero da partição  $\mathcal{T}_h$  e  $\psi \in H^{s_\kappa}(\kappa)$ . Então existe uma constante  $C > 0$ , independente de  $\psi$ ,  $p_\kappa$  e  $s_\kappa$ , e uma sequência  $\pi_{hp}^\kappa(\psi) \in P_{p_\kappa}(\kappa)$ ,  $p_\kappa = 1, 2, \dots$ , tal que para todo  $q$ ,  $0 \leq q \leq s_\kappa$ ,

$$\|\psi - \pi_{hp}^\kappa(\psi)\|_{q,\kappa} \leq C \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa - q}}{p_\kappa^{s_\kappa - q}} \|\psi\|_{s_\kappa,\kappa}, \quad s_\kappa \geq 0, \quad (1.11)$$

e

$$\|\psi - \pi_{hp}^\kappa(\psi)\|_{0,e} \leq C \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa - \frac{1}{2}}}{p_\kappa^{s_\kappa - \frac{1}{2}}} \|\psi\|_{s_\kappa,\kappa}, \quad s_\kappa \geq \frac{1}{2}, \quad (1.12)$$

onde  $\mu_\kappa = \min(p_\kappa + 1, s_\kappa)$  e  $e \subset \partial\kappa$ .

Extendendo o interpolador local  $\pi_{hp}^\kappa(\cdot)$  como sendo zero fora de  $\kappa$ , para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , podemos definir o seguinte interpolador global  $\pi_{hp}$ :

$$\pi_{hp} : V \rightarrow V^{hp}, \quad \pi_{hp}(u) = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \pi_{hp}^\kappa(u|_\kappa), \quad u \in V, \quad (1.13)$$

onde os espaços  $V$  e  $V^{hp}$  são definidos no Capítulo 3.

Similarmente para o interpolador  $\tilde{\pi}_{hp}$  de Riviere et al [27, 29] precisamos o seguinte Teorema para o erro de interpolação:

**Teorema 1.3.6** (Teorema de interpolação) *Seja  $\psi \in H^{s_\kappa}(\kappa)$ ,  $s_\kappa \geq 2$ , então existe  $C > 0$ , independente de  $\psi$ ,  $p_\kappa$  e  $s_\kappa$  e um interpolador  $\tilde{\pi}_{hp}^\kappa \psi \in P_{p_\kappa}(\kappa)$ , tal que*

$$\int_{e \in \partial\kappa} \nabla(\psi - \tilde{\pi}_{hp}^\kappa \psi) \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (1.14)$$

e

$$\begin{aligned} \|\psi - \tilde{\pi}_{hp}^\kappa \psi\|_{0,\kappa} &\leq C \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa}}{p_\kappa^{s_\kappa-3/2}} \|\psi\|_{s_\kappa,\kappa}, \\ \|\nabla\psi - \nabla\tilde{\pi}_{hp}^\kappa \psi\|_{0,\kappa} &\leq C \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa-1}}{p_\kappa^{s_\kappa-3/2}} \|\psi\|_{s_\kappa,\kappa}, \quad p_\kappa \geq 2 \\ \|\nabla^2\psi - \nabla^2\tilde{\pi}_{hp}^\kappa \psi\|_{0,\kappa} &\leq C \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{s_\kappa-2}} \|\psi\|_{s_\kappa,\kappa}, \end{aligned}$$

onde  $\mu_\kappa = \min(p_\kappa + 1, s_\kappa)$ .

Novamente, extendendo o interpolador local correspondente  $\tilde{\pi}_{hp}^\kappa(\cdot)$  como sendo zero fora de cada  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , podemos definir um interpolador global sobre  $V$ :

$$\tilde{\pi}_{hp} : V \rightarrow V^{hp}, \quad \tilde{\pi}_{hp}(u) = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \tilde{\pi}_{hp}^\kappa(u|_\kappa), \quad \forall u \in V. \quad (1.15)$$

A seguir, apresentamos um lema provado em [5], que garante a existência de um projetor em  $L^2(\Omega)$  de  $H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$  sobre  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ , e apresenta  $hp$  estimativas de erro (que são ótimas) para o mesmo, sobre o elemento e sobre as faces do elemento.

**Lema 1.3.7** *Seja  $\mathcal{T}_h$  uma partição regular de  $\Omega$  formada por  $d$ -paralelepípedos. Então, para qualquer  $\psi \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $\mathbf{s} = (s_\kappa, \kappa \in \mathcal{T}_h)$ , e para cada  $\mathbf{p} = (p_\kappa, \kappa \in \mathcal{T}_h)$ ,  $p_\kappa \in \mathbb{N}$  existe um projetor*

$$\begin{aligned} \pi_p^h : H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) &\longrightarrow S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}) \\ \psi &\longmapsto (\pi_p^h \psi)|_\kappa = \pi_p^h(\psi|_\kappa), \end{aligned}$$

tal que, para  $0 \leq q \leq s_\kappa$ ,

$$\|\psi - \pi_p^h \psi\|_{q,\kappa} \leq C \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa-q}}{p_\kappa^{s_\kappa-q}} \|\psi\|_{s_\kappa,\kappa}, \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \text{ e } s_\kappa \geq 0 \quad (1.16)$$

e

$$\|\psi - \pi_p^h \psi\|_{q,e} \leq C \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa-1/2-q}}{p_\kappa^{s_\kappa-1/2-q}} \|\psi\|_{s_\kappa,\kappa}, \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \text{ e } s_\kappa \geq \frac{1}{2} + q \quad (1.17)$$

em que  $\mu_\kappa = \min(p_\kappa + 1, s_\kappa)$ ,  $h_\kappa = \text{diam}(\kappa)$ ,  $e \subset \partial\kappa$  e  $C$  é uma constante independente de  $\psi$ ,  $h_\kappa$ ,  $p_\kappa$  mas dependente de  $\Omega$  e  $\varrho$ .

# Capítulo 2

## Método de Elementos Finitos contínuo com penalização interior

O propósito deste capítulo é o estudo de uma formulação do método de Galerkin contínuo com penalização interior para a equação reação-advecção introduzida por Burman e Ern [11]. Este método é conservativo pois penaliza somente o salto do fluxo da solução nas interfaces da malha.

Primeiramente apresentamos o método de Galerkin contínuo com penalização interior para aproximar a solução do problema de reação-advecção. Em seguida demonstramos alguns resultados técnicos para elementos finitos produto tensorial como a desigualdade do traço-hp, um resultado de interpolação-hp local para os casos contínuo e descontínuo e uma estimativa de erro-hp para projeções ortogonais contínuas em  $L^2$ . Com base nesses resultados é efetuada uma análise de convergência do método na seção 2.3. Na seção 2.4 apresentamos a extensão dos resultados para elementos finitos *simplices* e na seção 2.5 discutimos a extensão dos resultados para elementos finitos produto tensorial para a equação reação-advecção-difusão.

### 2.1 Problema modelo

Sejam  $\beta \in [W_\infty^1(\Omega)]^d$  um campo vetorial,  $\varsigma \in L^\infty(\Omega)$  e  $f \in L^2(\Omega)$ , onde  $W_\infty^1(\Omega)$  é o espaço de Sobolev definido no apêndice A. Dividimos  $\partial\Omega$  em:

$$\partial\Omega^+ = \{x \in \partial\Omega; \beta(x) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\}, \quad (2.1)$$

$$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega; -\beta(x) \cdot \mathbf{n}(x) > 0\}, \quad (2.2)$$

onde  $\partial\Omega^+$  corresponde à parte da fronteira de  $\Omega$  onde ocorre a saída de fluxo e  $\partial\Omega^-$  refere-se à parte de entrada de fluxo.

Consideremos o seguinte problema de valor na fronteira:

$$\begin{cases} \varsigma u + \beta \cdot \nabla u = f, \\ u|_{\partial\Omega^-} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $\beta \cdot \nabla u$  representa o produto escalar entre  $\beta$  e  $\nabla u$ .

Defina  $W = \{\omega \in L^2(\Omega); \beta \cdot \nabla \omega \in L^2(\Omega)\}$  e observe que as funções de  $W$  possuem traços em  $L^2(\partial\Omega)$ . Considere o operador  $A : W \rightarrow L^2(\Omega)$ , definido por:  $A\omega = \varsigma\omega + \beta \cdot \nabla \omega$ .

Assumimos que existe  $\varsigma_0 > 0$  tal que:

$$\varsigma - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \varsigma_0, \quad q.s. \text{ em } \Omega. \quad (2.4)$$

Seja  $V = \{\omega \in W; \omega|_{\partial\Omega^-} = 0\}$ , então  $A : V \rightarrow L^2(\Omega)$  é um isomorfismo, ou seja, (2.3) é bem posto de acordo com [15].

Neste capítulo vamos trabalhar com  $\mathcal{T}_h$  sendo uma partição de  $\Omega$  em elementos retangulares  $\kappa$ . Consideremos o espaço de Elementos Finitos contínuo:

$$V_h^p = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, v_h|_{\kappa} \circ \mathcal{F}_{\kappa} \in Q_{p_{\kappa}}(\hat{\kappa})\}, \quad (2.5)$$

e o espaço de Elementos Finitos descontínuo  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  definido em (1.1).

Sobre  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  definimos a forma bilinear de Galerkin:

$$a(v, \omega) = ((\varsigma - \nabla \cdot \beta)v, \omega)_{\Omega} - (v, \beta \cdot \nabla \omega)_{\Omega} + (\beta \cdot \mathbf{n}v, \omega)_{\partial\Omega^+}, \quad (2.6)$$

e sobre  $H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) \times H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $s > \frac{1}{2}$ , definimos a forma bilinear de penalização interior contínua:

$$j(v, \omega) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{\circ}} \frac{h_e^2}{p^{\alpha}} |\beta \cdot \mathbf{n}|_e ([\nabla v], [\nabla \omega])_{0,e}, \quad (2.7)$$

onde  $|\beta \cdot \mathbf{n}|_e = \|\beta \cdot \mathbf{n}\|_{\infty, e}$ . O expoente  $\alpha$  será determinado pela análise de convergência na seção 2.3.

Desde que  $W_{\infty}^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ , segue que o campo  $\beta$  é contínuo por hipótese e então,  $\beta \cdot \mathbf{n}$  é unicamente determinado sobre todas as faces  $e \in \mathcal{E}_h^{\circ}$ .

A aproximação de elementos finitos para (2.3) consiste em buscar  $u_h \in V_h^p$  tal que

$$a(u_h, v_h) + j(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega}, \quad \forall v_h \in V_h^p. \quad (2.8)$$

Para  $v \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $s > \frac{3}{2}$ , definimos a norma

$$\|v\|_{a,j}^2 = \|\varsigma_0^{\frac{1}{2}} v\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\beta \cdot \mathbf{n}\|^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,\partial\Omega}^2 + j(v, v). \quad (2.9)$$

**Lema 2.1.1** (Coercividade) Para todo  $v \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $s > \frac{3}{2}$  asseguramos,

$$a(v, v) + j(v, v) \geq \|v\|_{a,j}^2.$$

Demonstração: Segue da fórmula da Divergência de Gauss:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v^2 dx = - \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla v^2 dx + \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot \mathbf{n}) v^2 ds.$$

Considerando que  $(\nabla v^2) = 2v \nabla v$ , temos:

$$- \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v) v dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot \mathbf{n}) v^2 ds.$$

Disso segue que:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \varsigma v^2 dx - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v^2 dx - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v) v dx + \int_{\partial\Omega^+} (\beta \cdot \mathbf{n}) v^2 ds \\ &= \int_{\Omega} \left( \varsigma - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \right) v^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\beta \cdot \mathbf{n}) v^2 ds + \int_{\partial\Omega^+} (\beta \cdot \mathbf{n}) v^2 ds \\ &\geq \int_{\Omega} \varsigma_0 v^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^-} (\beta \cdot \mathbf{n}) v^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^+} (\beta \cdot \mathbf{n}) v^2 ds \\ &= \int_{\Omega} \varsigma_0 v^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^-} |\beta \cdot \mathbf{n}| v^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^+} |\beta \cdot \mathbf{n}| v^2 ds. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a(v, v) + j(v, v) \geq \|\varsigma_0^{\frac{1}{2}} v\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\beta \cdot \mathbf{n}^{\frac{1}{2}} v\|_{0,\partial\Omega}^2 + j(v, v) = \|v\|_{a,j}^2.$$

□

Então pelo teorema de Lax-Milgram 1.2.5, o problema de aproximação (2.8) é bem posto, ou seja, possui única solução em  $V_h^p$ .

## 2.2 Resultados técnicos

### 2.2.1 Desigualdade do traço-hp

Seja  $\{g_j\}_{0 \leq j \leq p}$  o conjunto de nós Gauss-Lobatto no intervalo unitário  $[-1, 1]$ , definidos por:  $g_j = \cos\left(\frac{\pi j}{p}\right)$ ,  $j = 0, \dots, p$ . Seja  $I_{p,d} = \{0, \dots, p\}^d$  e  $I_{p,d}^0 = \{1, \dots, p-1\}^d$ . Para um multi-índice  $(i) = (i_1, \dots, i_d) \in I_{p,d}$  o produto tensorial  $a_{\hat{\kappa},(i)}$  no nó Gauss-Lobatto no hipercubo unitário  $\hat{\kappa}$  é o ponto com coordenadas igual a  $(g_{i_1}, \dots, g_{i_d})$ .

Para  $\kappa \in \mathcal{T}_h$  introduzimos o produto tensorial no nó Gauss-Lobatto em  $\kappa$  tal que  $a_{\kappa,(i)} =$



$\mathcal{F}_\kappa(a_{\hat{\kappa},(i)})$ , para todo  $(i) \in I_{p,d}$  e definimos o espaço:

$$Q_{p,d}^0(\kappa) = \{v \in Q_p(\kappa); \forall (i) \in I_{p,d}, v(a_{\kappa,(i)}) = 0\}. \quad (2.10)$$

Em outras palavras,  $Q_{p,d}^0(\kappa)$  é um subespaço de  $Q_p(\kappa)$  gerado pelos polinômios que zeram no produto tensorial aplicado aos nós Gauss-Lobatto interiores em  $\kappa$ .

**Lema 2.2.1** *As seguintes desigualdades do traço e desigualdade do traço inversa são asseguradas:*

$$\forall v \in Q_p(\kappa), \|v\|_{0,\partial\kappa} \leq \left( \frac{p(p+1)}{2} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^d \frac{\text{med}(\partial\kappa)}{\text{med}(\kappa)} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,\kappa}, \quad (2.11)$$

$$\forall v \in Q_{p,d}^0(\kappa), \|v\|_{0,\kappa} \leq \left( \frac{2d}{p(p+1)} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^{d-1} \frac{\text{med}(\kappa)}{\text{med}(\partial\kappa)} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,\partial\kappa}, \quad (2.12)$$

onde  $\text{med}(\kappa) = \int_\kappa dx$ , além disso  $\text{med}(\partial\kappa) = 1$  se  $d = 1$ .

Demonstração: Seja  $\{\bar{\omega}\}_{0 \leq j \leq p}$  o peso associado com o nó Gauss-Lobatto unidimensional, de maneira que (ver [26]):

$$\bar{\omega}_j = \frac{2}{p(p+1)} \frac{1}{\ell_p^2(g_j)}, \quad j \in \{0, \dots, p\}, \quad (2.13)$$

onde  $\ell_p$  é o polinômio de Legendre de grau  $p$ . Para um multi-índice  $(i) = (i_1, \dots, i_d) \in I_{p,d}$ , obtemos o conjunto  $\bar{\omega}_{(i)} = \prod_{l=1}^d \bar{\omega}_{i_l}$ .

Temos também de [26],

$$\forall v \in Q_p(\hat{\kappa}), \|v\|_{0,\hat{\kappa}} \leq \left( \sum_{(i) \in I_{p,d}} \bar{\omega}_{(i)} v(a_{\hat{\kappa},(i)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2 + \frac{1}{p}\right)^{\frac{d}{2}} \|v\|_{0,\hat{\kappa}}. \quad (2.14)$$

(1) **Prova de 2.11:** Sejam  $\hat{v} \in Q_p(\hat{\kappa})$  e  $\hat{F}_\pm = \{x_1 = \pm 1\}$ , usando a primeira desigualdade de (2.14) em dimensão  $(d-1)$  sobre  $\hat{F}_\pm$  temos:

$$\|\hat{v}\|_{0,\hat{F}_+ \cup \hat{F}_-}^2 \leq \sum_{(i') \in I_{p,d-1}} \bar{\omega}_{(i')} \hat{v}(a_{\hat{F}_+,(i')})^2 + \sum_{(i') \in I_{p,d-1}} \bar{\omega}_{(i')} \hat{v}(a_{\hat{F}_-,(i')})^2,$$

onde  $a_{\hat{F}_\pm,(i')}$ , é o produto tensorial no nó Gauss-Lobatto sobre  $\hat{F}_\pm$ . Temos:  $\bar{\omega}_0 = \frac{2}{p(p+1)} \frac{1}{\ell_p^2(g_0)}$  e  $\bar{\omega}_p = \frac{2}{p(p+1)} \frac{1}{\ell_p^2(g_p)}$ . Onde  $\ell_p^2(g_0) = \ell_p^2(g_p) = 1$ , pois  $\ell_p$  é polinômio de Legendre. Usando este fato obtemos  $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_p = \frac{2}{p(p+1)}$ , consequentemente:

$$\|\hat{v}\|_{0,\hat{F}_+ \cup \hat{F}_-}^2 \leq \frac{p(p+1)}{2} \sum_{\substack{(i) \in I_{p,d} \\ i_1 \in \{0,p\}}} \bar{\omega}_{(i)} \hat{v}(a_{\hat{\kappa},(i)})^2.$$

Então, devido a segunda desigualdade de (2.14) em dimensão  $d$ , deduzimos que:

$$\|\hat{v}\|_{0, \hat{F}_+ \cup \hat{F}_-}^2 \leq \frac{p(p+1)}{2} \sum_{(i) \in I_{p,d}} \bar{\omega}_{(i)} \hat{v}(a_{\hat{\kappa},(i)})^2 \leq \frac{p(p+1)}{2} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^d \|\hat{v}\|_{0, \hat{\kappa}}^2.$$

Somando sobre todas as faces temos:

$$\|\hat{v}\|_{0, \partial \hat{\kappa}}^2 \leq d \frac{p(p+1)}{2} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^d \|\hat{v}\|_{0, \hat{\kappa}}^2. \quad (2.15)$$

Usando (2.15) e o fato de que  $\text{med}(\hat{\kappa}) = \frac{1}{d} \text{med}(\partial \hat{\kappa})$  deduzimos

$$\|\hat{v}\|_{0, \partial \hat{\kappa}}^2 \leq \frac{\text{med}(\partial \hat{\kappa})}{\text{med}(\hat{\kappa})} \frac{p(p+1)}{2} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^d \|\hat{v}\|_{0, \hat{\kappa}}^2.$$

Seja  $v \in Q_p(\kappa)$ . Então  $v \circ \mathcal{F}_\kappa \in Q_p(\hat{\kappa})$ . Sabemos que:

$$\begin{aligned} \text{med}(\kappa) &= h^d \text{med}(\hat{\kappa}), & \text{med}(\partial \kappa) &= h^{d-1} \text{med}(\partial \hat{\kappa}), \\ \|v\|_{0, \kappa}^2 &= h^d \|v\|_{0, \hat{\kappa}}^2 & \text{e} & \quad \|v\|_{0, \partial \kappa}^2 = h^{d-1} \|v\|_{0, \partial \hat{\kappa}}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Disso segue o resultado desejado:

$$\begin{aligned} \|v\|_{0, \partial \kappa}^2 &\leq h^{d-1} \|v\|_{0, \partial \hat{\kappa}}^2 \\ &\leq h^{d-1} \frac{\text{med}(\partial \kappa)}{\text{med}(\kappa)} \frac{h^d}{h^{d-1}} \frac{p(p+1)}{2} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^d \frac{\|v\|_{0, \kappa}^2}{h^d} \\ &\leq \frac{\text{med}(\partial \kappa)}{\text{med}(\kappa)} \frac{p(p+1)}{2} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^d \|v\|_{0, \kappa}^2. \end{aligned}$$

(2) **Prova de 2.12:** Seja  $\hat{v} \in Q_{p,d}^0(\hat{\kappa})$ . Usando a primeira desigualdade de (2.14) em dimensão  $d$  e a segunda desigualdade em dimensão  $(d-1)$  temos:

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|_{0, \hat{\kappa}}^2 &\leq \sum_{(i) \in I_{p,d}} \bar{\omega}_{(i)} \hat{v}(a_{\hat{\kappa},(i)})^2 \leq \sum_{l=1}^d \sum_{\substack{(i) \in I_{p,d} \\ i_l \in \{0,p\}}} \bar{\omega}_{(i)} \hat{v}(a_{\hat{\kappa},(i)})^2 \\ &\leq \sum_{l=1}^d \frac{2}{p(p+1)} \sum_{\substack{(i) \in I_{p,d} \\ i_l \in \{0,p\}}} (\bar{\omega}_{i_1} \cdots \bar{\omega}_{i_{l-1}} \bar{\omega}_{i_{l+1}} \cdots \bar{\omega}_{i_d}) \hat{v}(a_{\hat{\kappa},(i)})^2 \\ \|\hat{v}\|_{0, \hat{\kappa}}^2 &\leq \sum_{l=1}^d \frac{2}{p(p+1)} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^{d-1} \|\hat{v}\|_{0, \{x_l = \pm 1\}}^2 \\ &= \frac{2}{p(p+1)} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^{d-1} \|\hat{v}\|_{0, \partial \hat{\kappa}}^2. \end{aligned}$$

Usando o fato de que  $\text{med}(\hat{\kappa}) = \frac{1}{d}\text{med}(\partial\hat{\kappa})$  na desigualdade acima deduzimos:

$$\|\hat{v}\|_{0,\hat{\kappa}}^2 \leq \frac{2d}{p(p+1)} \left(2 + \frac{1}{p}\right)^{d-1} \frac{\text{med}(\hat{\kappa})}{\text{med}(\partial\hat{\kappa})} \|\hat{v}\|_{0,\partial\hat{\kappa}}^2.$$

Seja  $v \in Q_{p,d}^0(\kappa)$ . Então  $v \circ \mathcal{F}_\kappa \in Q_{p,d}^0(\hat{\kappa})$ . A conclusão segue aplicando as igualdades de (2.16) no resultado acima.

□

As desigualdades do traço do Lema 2.2.1 são válidas para  $p$  e  $d$  arbitrariamente grandes, mas o nosso estudo é direcionado para o caso em que  $d$  não é grande com relação a  $p$ . (por exemplo  $d \leq 3$  ou, mais genericamente  $d \leq Cp$ ). Isto nos permite simplificar as constantes na desigualdade do traço e desigualdade do traço inversa como segue:

$$\forall v \in Q_p(\kappa), \quad \|v\|_{0,\partial\kappa} \leq C \left(\frac{p^2}{h_\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,\kappa}, \quad (2.17)$$

$$\forall v \in Q_{p,d}^0(\kappa), \quad \|v\|_{0,\kappa} \leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,\partial\kappa}. \quad (2.18)$$

É importante observar que a desigualdade do traço inversa (2.18) é ótima (assintoticamente em  $p$ ) em relação a desigualdade do traço (2.17).

## 2.2.2 Interpolação hp contínua:

O objetivo nesta seção é construir um operador  $I_{O_s} : S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}) \rightarrow V_h^p$  que satisfaça propriedades de interpolação local.

Seja  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ . Para um nó  $\nu \in \kappa$ , seja  $\mathcal{K}_\nu = \{\kappa' \in \mathcal{T}_h; \nu \in \kappa'\}$ ; então, para  $\omega_h \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ , defina  $I_{O_s}\omega_h$  localmente em  $\kappa$  com os valores do produto tensorial nos nós Gauss-Lobatto por:

$$I_{O_s}\omega_h(\nu) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{K}_\nu)} \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\nu} \omega_h|_{\kappa'}(\nu), \quad (2.19)$$

onde  $\text{card}(\mathcal{K}_\nu)$  é a cardinalidade do conjunto  $\mathcal{K}_\nu$ .

Desta forma  $I_{O_s}\omega_h \in V_h^p$ , pois  $I_{O_s}\omega_h$  é um interpolador. O operador  $I_{O_s}$  é conhecido como operador de interpolação Oswald.

**Lema 2.2.2** *Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , a seguinte estimativa é assegurada:*

$$\forall \omega_h \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}), \quad \|\omega_h - I_{O_s}\omega_h\|_{0,\kappa} \leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \|[\omega_h]\|_{0,e}, \quad (2.20)$$

onde  $\mathcal{E}_h^\circ(\kappa) = \{e \in \mathcal{E}_h^\circ; e \cap \kappa \neq \emptyset\}$ .

Demonstração: Sejam  $\omega_h \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  e  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ . Consideremos  $\delta_h = (\omega_h - I_{Os}\omega_h)|_\kappa$ . Para cada produto tensorial no nó Gauss-Lobatto  $\nu \in \kappa$ , denotamos  $\varphi_\nu$  como a função de base nodal associada. Por construção,  $\delta_h$  zera em todos os nós localizados no interior de  $\kappa$ , pois  $I_{Os}\omega_h|_{\nu \in \text{int}(\kappa)} = \omega_h$ . Consequentemente,

$$\delta_h = \sum_{\nu \in \partial\kappa} \delta_h(\nu) \varphi_\nu.$$

- (1) Definimos  $\partial\kappa_{d-1}$  como sendo o conjunto de dimensão  $(d-1)$  em  $\partial\kappa$  e para  $m \in \{d-2, \dots, 0\}$ , definimos  $\partial\kappa_m$  como o conjunto obtido tomando a intersecção de quaisquer dois elementos em  $\partial\kappa_{m+1}$ . Por exemplo para  $d=3$ ,  $\partial\kappa_2$ ,  $\partial\kappa_1$  e  $\partial\kappa_0$  são respectivamente, o conjunto das faces, arestas e vértices da  $\partial\kappa$ .

Particionamos os nós da fronteira de  $\kappa$  como segue. Para  $m \in \{0, \dots, d-1\}$ , denotamos por  $\mathcal{V}_m$  o conjunto dos nós no interior de  $\partial\kappa_m$ ; então,  $\bigcup_{m=0}^{d-1} \mathcal{V}_m$  forma uma partição dos nós da fronteira de  $\kappa$ . Consequentemente:

$$\delta_h = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_{d-1}} \delta_h(\nu) \varphi_\nu + \sum_{m=0}^{d-2} r_m,$$

onde,

$$r_m = \sum_{\nu \in \mathcal{V}_m} \delta_h(\nu) \varphi_\nu.$$

Observe que para todo  $m \in \{0, \dots, d-2\}$ ,  $r_m \in Q_{p,d}^0(\kappa)$  e  $r_m \in Q_{p,l}^0(\partial\kappa_l)$ ,  $\forall l \in \{m+1, \dots, d-1\}$ .

- (2) Para cada face  $e \subset \partial\kappa$  e para cada nó  $\nu$  localizado no interior de  $e$ , equacionamos (2.19) e obtemos:  $\delta_h(\nu) = \mathbf{n}_e \cdot [\omega_h]_e(\nu)$ .

Consequentemente,

$$\sum_{\nu \in \mathcal{V}_{d-1}} \delta_h(\nu) \varphi_\nu = \sum_{e \subset \partial\kappa} \psi_e,$$

onde

$$\psi_e = \sum_{\nu \in \text{int}(e)} \mathbf{n}_e \cdot [\omega_h]_e(\nu) \varphi_\nu.$$

Desde que  $\psi_e \in Q_{p,d}^0$  e  $\psi_e$  zera sobre  $\partial\kappa \setminus e$ , pois para cada nó tenho uma função de base associada diferente de zero nesse nó e igual a zero nos demais nós, então a desigualdade do traço inversa (2.18) assegura:

$$\|\psi_e\|_{0,\kappa} \leq C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\psi_e\|_{0,\partial\kappa} = C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|\psi_e\|_{0,e}.$$

Logo,

$$\|\delta_h\|_{0,\kappa} \leq C \sum_{e \subset \partial\kappa} \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\psi_e\|_{0,e} + \sum_{m=0}^{d-2} \|r_m\|_{0,\kappa} := (I) + (II). \quad (2.21)$$

O restante da prova consiste em estimar os termos do lado direito de (2.21).

(3) Se  $d = 1$ , o termo (II) zera pois  $\sum_{m=0}^{-1} \|r_m\|_{0,\kappa} = 0$  e  $\psi_{e|e} = \mathbf{n}_e \cdot [\omega_h]_e$ , consequentemente (2.21) assegura (2.20).

(4) Assuma  $d = 2$ .

(4.a) Considere o termo (I)  $= \sum_{e \subset \partial\kappa} \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\psi_e\|_{0,e}$ . Seja  $e \subset \partial\kappa$ . Desde que  $\psi_e - \mathbf{n}_e \cdot [\omega_h]_e \in Q_{p,1}^0(e)$ , a desigualdade do traço inversa (2.18) assegura:

$$\|\psi_e - \mathbf{n}_e \cdot [\omega_h]_e\|_{0,e} \leq C \left(\frac{h_e}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]_e\|_{0,\partial e}, \quad (2.22)$$

pois  $\psi_e$  zera sobre  $\partial\kappa \setminus e$ .

Devido a desigualdade do traço (2.17):

$$\|[\omega_h]_e\|_{0,\partial e} \leq C \left(\frac{p^2}{h_e}\right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]_e\|_{0,e}. \quad (2.23)$$

As desigualdades (2.22) e (2.23) implicam:

$$\|\psi_e - \mathbf{n}_e \cdot [\omega_h]_e\|_{0,e} \leq C \|[\omega_h]_e\|_{0,e}.$$

Recorrendo as estimativas acima e usando a desigualdade triangular temos:

$$\begin{aligned} \|\psi_e\|_{0,e} &\leq \|[\omega_h]_e\|_{0,e} + \|\psi_e - \mathbf{n}_e \cdot [\omega_h]_e\|_{0,e} \\ &\leq \|[\omega_h]_e\|_{0,e}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

(4.b) Consideremos agora o termo (II)  $= \|r_0\|_{0,\kappa}$ . Desde que  $r_0 \in Q_{p,2}^0(\kappa)$  e  $r_0 \in Q_{p,1}^0(e)$  para todo  $e \subset \partial\kappa$  e usando a desigualdade do traço inversa (2.18) duas vezes obtemos:

$$\|r_0\|_{0,\kappa} \leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial\kappa} \|r_0\|_{0,e} \leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial\kappa} \left(\frac{h_e}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|r_0\|_{0,\partial e}.$$

Observe que  $\partial e$  consiste de dois nós (pois  $d=2$ ) e que para  $\nu \in \partial e$ ,

$$r_0(\nu) = \sum_{e' \in \mathcal{E}_h^\circ(\nu)} \eta_{e,e'} \cdot [\omega_h]_{e'}(\nu),$$

onde  $\mathcal{E}_{h(\nu)}^\circ$  denota o conjunto de faces da malha que contém o nó  $\nu$  e os coeficientes do vetor  $\eta_{e,e'}$  podem ser limitados independentemente de  $p$  e  $h$ .

Então, para todo  $e \subset \partial\kappa$ , usando (2.23) asseguramos:

$$\begin{aligned} \|r_0\|_{0,\partial e} &\leq C \sum_{\nu \in \partial e} \sum_{e' \in \mathcal{E}_{h(\nu)}^\circ} |[\omega_h]_{e'}(\nu)| \\ &\leq C \sum_{\nu \in \partial e} \sum_{e' \in \mathcal{E}_{h(\nu)}^\circ} \left(\frac{p^2}{h_{e'}}\right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]_{e'}\|_{0,e'} \\ &\leq C \sum_{e'; e \cap e' \neq \emptyset} \left(\frac{p^2}{h_{e'}}\right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]_{e'}\|_{0,e'}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \|r_0\|_{0,\kappa} &\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial\kappa} \left(\frac{h_e}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e'; e \cap e' \neq \emptyset} \left(\frac{p^2}{h_{e'}}\right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]_{e'}\|_{0,e'} \\ &\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \|[\omega_h]_e\|_{0,e}. \end{aligned}$$

E desta forma concluímos a demonstração para  $d = 2$ .

- (5) Para  $d \geq 3$ , a prova procede-se similarmente. O termo (I) é estimado da mesma forma como foi feito para  $d = 2$ , pois na demonstração acima não consideramos a dimensão. Então basta estimar o outro termo:  $(II) = \sum_{m=0}^1 \|r_m\|_{0,\kappa} = \|r_0\|_{0,\kappa} + \|r_1\|_{0,\kappa}$

Para  $d = 3$  vamos estimar o termo  $\|r_0\|_{0,\kappa}$  usando a desigualdade do traço inversa (2.18) três vezes e a desigualdade do traço (2.17) duas vezes.

Desde que  $r_0 \in Q_{p,3}^0(\kappa)$ ,  $r_0 \in Q_{p,2}^0(e)$  e  $r_0 \in Q_{p,1}^0(e)$  para todo  $e \subset \partial\kappa$ , usamos a desigualdade do traço inversa (2.18) três vezes:

$$\begin{aligned} \|r_0\|_{0,\kappa} &\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial\kappa} \|r_0\|_{0,e} \leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial\kappa} \left(\frac{h_e}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a \subset \partial e} \|r_0\|_{0,a} \\ &\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial\kappa} \left(\frac{h_e}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a \subset \partial e} \left(\frac{h_a}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \|r_0\|_{0,\partial a}. \end{aligned}$$

Temos que  $\partial a$  consiste de 2 nós e para  $\nu \in \partial a$  temos:

$$r_0(\nu) = \sum_{a' \in \mathcal{E}_h^\circ(\nu)} \eta_{a,a'} \cdot [\omega_h]_{a'}(\nu),$$

onde  $\mathcal{E}_h^\circ(\nu)$ , denota o conjunto de arestas  $a$  da malha que contém o nó  $\nu$  e os coeficientes do vetor  $\eta_{a,a'}$  podem ser limitados independentemente de  $p$  e  $h$ .

Então para todo  $e \subset \partial\kappa$  e  $a \subset \partial e$ , temos:

$$\begin{aligned} \|r_0\|_{0,\partial a} &\leq C \sum_{\nu \in \partial a} \sum_{a' \in \mathcal{E}_h^\circ(\nu)} |[\omega_h]_{a'}(\nu)| \\ &\leq C \sum_{\nu \in \partial a} \sum_{a' \in \mathcal{E}_h^\circ(\nu)} \left(\frac{p^2}{h_{a'}}\right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]_{a'}\|_{0,a'} \\ &\leq C \sum_{a'; a \cap a' \neq \emptyset} \left(\frac{p^2}{h_{a'}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^2}{h_e}\right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]_e\|_{0,e}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|r_0\|_{0,\kappa} &\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial\kappa} \left(\frac{h_e}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a \subset \partial e} \left(\frac{h_a}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a', a \cap a' \neq \emptyset} \left(\frac{p^2}{h_{a'}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^2}{h_e}\right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]_e\|_{0,e} \\ &\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \|[\omega_h]_e\|_{0,e}. \end{aligned}$$

Para estimar  $\|r_1\|_{0,\kappa}$ , usamos 2 vezes a desigualdade do traço (2.18):

$$\begin{aligned} \|r_1\|_{0,\kappa} &\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial\kappa} \|r_1\|_{0,e} \\ &\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial\kappa} \left(\frac{h_e}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a \subset \partial e} \|r_1\|_{0,a}. \end{aligned}$$

Além disso temos:

$$r_1|_a = \sum_{\nu \in \text{int}(a)} \delta_h(\nu) \varphi_\nu = \sum_{\nu \in \text{int}(a)} \sum_{e' \in \mathcal{E}_h^\circ(\nu)} \eta_{e,e'} \cdot [\omega_h]_{e'}(\nu) \varphi_\nu.$$

Os coeficientes de  $\eta_{e,e'}$  não dependem do nó  $\nu$ . Então, considerando  $\mathcal{E}_h^\circ(a)$  como o conjunto de faces na malha que contém  $a$ , podemos reescrever a igualdade acima como:

$$r_1|_a = \sum_{e' \in \mathcal{E}_h^\circ(a)} \sum_{\nu \in \text{int}(a)} \eta_{e,e'} \cdot [\omega_h]_{e'}(\nu) \varphi_\nu.$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\|r_1\|_{0,a} &\leq C \sum_{e' \in \mathcal{E}_h^\circ(a)} \left\| \sum_{\nu \in \text{int}(a)} [\omega_h]_{e'}(\nu) \varphi_\nu \right\|_{0,a} \\
&\leq C \sum_{e' \in \mathcal{E}_h^\circ(a)} \left( \left\| \sum_{\nu \in \text{int}(a)} [\omega_h]_{e'}(\nu) \varphi_\nu - [\omega_h]_{e'} \right\|_{0,a} + \|[\omega_h]_{e'}\|_{0,a} \right) \\
&= C \sum_{e' \in \mathcal{E}_h^\circ(a)} (\|\zeta_{h,e'}\|_{0,a} + \|[\omega_h]_{e'}\|_{0,a}),
\end{aligned}$$

onde  $\zeta_{h,e'} = \sum_{\nu \in \text{int}(a)} [\omega_h]_{e'}(\nu) \varphi_\nu - [\omega_h]_{e'}$ . Desde que  $\zeta_{h,e'} \in Q_{p,1}^0(a)$  a desigualdade do traço (2.17) assegura:

$$\|\zeta_{h,e}\|_{0,a} \leq C \left( \frac{p^2}{h_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left( \sum_{\nu \in \text{int}(a)} [\omega_h]_e(\nu) \varphi_\nu \right) - [\omega_h]_e \right\|_{0,e} \leq C \left( \frac{p^2}{h_e} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu \in \partial a} \|[\omega_h](\nu)|_e,$$

pois  $[\omega_h]_e(\nu) \varphi_\nu = [\omega_h]_e$  para  $\nu \in \text{int}(a)$ .

Consequentemente obtemos:

$$\begin{aligned}
\|r_1\|_{0,a} &\leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(a)} \left( \left( \frac{p^2}{h_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\nu \in \partial a} \|[\omega_h](\nu)|_e + \|[\omega_h]\|_{0,e} \right) \right) \\
&\leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(a)} \left( \frac{p^2}{h_e} \right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]\|_{0,e}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|r_1\|_{0,\kappa} &\leq C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial \kappa} \left( \frac{h_e}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{a \subset \partial e} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(a)} \left( \frac{p^2}{h_e} \right)^{\frac{1}{2}} \|[\omega_h]\|_{0,e} \\
&\leq C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial \kappa} \|[\omega_h]\|_{0,e}.
\end{aligned}$$

Juntando as estimativas acima podemos concluir a prova:

$$\begin{aligned}
\|\delta_h\|_{0,\kappa} &\leq C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \partial \kappa} \|[\omega_h]\|_{0,e} + \|r_0\|_{0,\kappa} + \|r_1\|_{0,\kappa} \\
&\leq C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \subset \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \|[\omega_h]\|_{0,e}.
\end{aligned}$$

□



### 2.2.3 Estimativa de erro hp para projeções ortogonais contínuas

Seja  $\Pi_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h^p$  projeção ortogonal. O objetivo desta seção é investigar as propriedades de aproximação de  $\Pi_h$  em  $L^2$  na norma  $H^1$ .

Utilizaremos propriedades de aproximação local hp dadas em [13, 17] para a projeção ortogonal  $\Pi_h^* : L^2(\Omega) \rightarrow S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  tais como: existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$  e todo  $\omega \in H^q(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $q \geq 1$ ,

$$\|\omega - \Pi_h^* \omega\|_{0,\kappa} \leq C \left(\frac{h}{p}\right)^s \|\omega\|_{s,\kappa}, \quad (2.25)$$

$$\|\nabla(\omega - \Pi_h^* \omega)\|_{0,\kappa} \leq Cp^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|\omega\|_{s,\kappa}, \quad (2.26)$$

com  $s = \min(p+1, q)$ . Em contrapartida com (2.25)-(2.26) a projeção ortogonal contínua  $\Pi_h$  satisfaz a estimativa global:

**Lema 2.2.3** *Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $\omega \in H^q(\Omega)$ ,  $q \geq 1$*

$$\|\omega - \Pi_h \omega\|_{0,\Omega} \leq C \left(\frac{h}{p}\right)^s \|\omega\|_{s,\Omega}, \quad (2.27)$$

$$\|\nabla(\omega - \Pi_h \omega)\|_{0,\Omega} \leq Cp^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|\omega\|_{s,\Omega}, \quad (2.28)$$

onde  $s = \min\{p+1, q\}$ .

Demonstração: Seja  $\omega \in H^q(\Omega)$ ,  $q \geq 1$

(1) **Prova de (2.27):** Desde que  $V_h^p \subset S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ , a definição de  $\Pi_h$  e  $\Pi_h^*$  garante:

$$(\Pi_h \omega - \omega, v_h)_{0,\Omega} = 0, \quad \forall v_h \in V_h^p \quad \text{e} \quad (\Pi_h^* \omega - \omega, v_h)_{0,\Omega} = 0, \quad \forall v_h \in V_h^p \subset W_h^p.$$

Logo:

$$(\Pi_h \omega - \Pi_h^* \omega, v_h)_{0,\Omega} = 0, \quad \forall v_h \in V_h^p.$$

Consequentemente  $\Pi_h(\Pi_h \omega - \Pi_h^* \omega) = 0 \Rightarrow \Pi_h \omega = \Pi_h \Pi_h^* \omega$ . Usando o fato que  $I_{Os}(\Pi_h^* \omega) \in V_h^p$ , obtemos:

$$\|\Pi_h \omega - \Pi_h^* \omega\|_{0,\Omega} = \|\Pi_h(\Pi_h^* \omega) - \Pi_h^* \omega\|_{0,\Omega} \leq \|I_{Os}(\Pi_h^* \omega) - \Pi_h^* \omega\|_{0,\Omega}.$$

Usando os lemas 2.2.2 e 3.2.1, deduzimos para  $\forall \kappa \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\begin{aligned} \|I_{O_s}(\Pi_h^* \omega) - \Pi_h^* \omega\|_{0,\kappa} &\leq C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \|[\Pi_h^* \omega]_e\|_{0,e} \\ &\leq C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \|[\Pi_h^* \omega - \omega]_e\|_{0,e}. \end{aligned}$$

De acordo com [17], o operador  $\Pi_h^*$  satisfaz: existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\|\omega - \Pi_h^* \omega\|_{0,\partial\kappa} \leq C \left( \frac{h_\kappa}{p} \right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\kappa}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\Pi_h \omega - \Pi_h^* \omega\|_{0,\kappa} &\leq C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \|[\Pi_h^* \omega - \omega]_e\|_{0,e} \\ &\leq C \left( \frac{h_\kappa}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \|\Pi_h^* \omega - \omega\|_{0,e} \\ &\leq Cp^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{h_\kappa}{p} \right)^s \|\omega\|_{s,\kappa}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\Pi_h \omega - \Pi_h^* \omega\|_{0,\Omega} \leq Cp^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{h}{p} \right)^s \|\omega\|_{s,\Omega}. \quad (2.29)$$

Concluimos usando a desigualdade triangular e as desigualdades (2.25) e (2.29) :

$$\begin{aligned} \|\omega - \Pi_h \omega\|_{0,\Omega} &\leq \|\omega - \Pi_h^* \omega\|_{0,\Omega} + \|\Pi_h^* \omega - \Pi_h \omega\|_{0,\Omega} \\ &\leq C \left( \frac{h}{p} \right)^s \|\omega\|_{s,\Omega} + Cp^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{h}{p} \right)^s \|\omega\|_{s,\Omega} \\ &\leq C \left( \frac{h}{p} \right)^s \|\omega\|_{s,\Omega}. \end{aligned}$$

(2) **Prova de (2.28):** Seja  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ . Usando (1.9) e (2.29), deduzimos que:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\Pi_h^* \omega - \Pi_h \omega)\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} C \frac{p^4}{h_\kappa^2} \|\Pi_h^* \omega - \Pi_h \omega\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} p \left( \frac{h_\kappa}{p} \right)^{2s-2} \|\omega\|_{s,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\nabla(\Pi_h^* \omega - \Pi_h \omega)\|_{0,\Omega} \leq Cp^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h}{p} \right)^{s-1} \|\omega\|_{s,\Omega}. \quad (2.30)$$

A conclusão segue usando desigualdade triangular e as equações (2.26) e (2.30):

$$\begin{aligned} \|\nabla(\omega - \Pi_h\omega)\|_{0,\Omega} &\leq \|\nabla(\omega - \Pi_h^*\omega)\|_{0,\Omega} + \|\nabla(\Pi_h^*\omega - \Pi_h\omega)\|_{0,\Omega} \\ &\leq Cp^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|\omega\|_{s,\Omega}. \end{aligned}$$

□

**Observação 2.2.1** *A equação (2.29) mostra que  $\Pi_h\omega$  super converge para  $\Pi_h^*\omega$  pelo fator de  $p^{-\frac{1}{2}}$ . Esta propriedade permite compensar a perda da potência de  $p$  na desigualdade inversa (1.9) e recuperar um fator sub-ótimo de  $p^{\frac{1}{2}}$  em (2.28), obtendo um resultado similar a (2.26).*

## 2.3 Análise de convergência

O objetivo desta seção é mostrar como os resultados estabelecidos na seção anterior, isto é, a desigualdade do traço inversa-hp, o resultado de interpolação local hp e a estimativa de erro-hp para projeções ortogonais em  $L^2(\Omega)$  podem ser usados para analisar a convergência do método elemento finito-hp com penalização interior contínuo introduzido na seção 2.1.

Seja  $u$  solução de (2.3) e  $u_h$  solução de (2.8). Daqui em diante assumimos que a solução exata  $u$  é suficientemente lisa, isto é,  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ . Supomos que o conjunto discretizado satisfaz as propriedades de estabilidade fixadas no lema 2.1.(Coercividade).

**Lema 2.3.1** (*Consistência*) *Seja  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , solução de (2.3) e  $u_h$  solução de (2.8). Então,  $\forall v_h \in V_h^p$ ,*

$$a(u - u_h, v_h) + j(u - u_h, v_h) = 0. \quad (2.31)$$

Demonstração: Desde que  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , do lema 3.2.1 temos que  $[\nabla u]_e = 0$ ,  $\forall e \in \mathcal{E}_h^\circ$ . Consequentemente  $j(u, v_h) = 0$ ,  $\forall v_h \in V_h^p$ .

Primeiramente vamos provar que  $a(u, v_h) = (f, v_h)$ ,  $\forall v_h \in V_h^p$  onde  $u$  é solução de (2.3). Multiplicando a primeira equação de (2.3) por  $v_h \in V_h^p$  e integrando sobre  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} f v_h dx = \int_{\Omega} (\varsigma u v_h + (\beta \cdot \nabla u) v_h) dx. \quad (2.32)$$

Temos:  $\beta \cdot \nabla u = \nabla(\beta u) - (\nabla\beta)u$ . Então integrando por partes (2.32) e utilizando a segunda equação de (2.3) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v_h dx &= \int_{\Omega} \nabla(\beta u) v_h dx - \int_{\Omega} (\nabla\beta) u v_h dx \\ &= - \int_{\Omega} u (\beta \cdot \nabla v_h) dx + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \beta) u v_h ds - \int_{\Omega} (\nabla\beta) u v_h dx \\ &= -(u, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega} + ((\mathbf{n} \cdot \beta) u, v_h)_{0,\partial\Omega^+} - ((\nabla\beta) u, v_h)_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (2.32) temos:

$$\begin{aligned} (f, v_h)_{0,\Omega} &= ((\varsigma - \nabla\beta)u, v_h)_{0,\Omega} - (u, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega} + ((\mathbf{n} \cdot \beta)u, v_h)_{0,\partial\Omega^+} \\ &= a(u, v_h). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v_h) + j(u - u_h, v_h) &= a(u, v_h) - a(u_h, v_h) + j(u, v_h) - j(u_h, v_h) \\ &= (f, v_h)_{0,\Omega} - (f, v_h)_{0,\Omega} = 0. \end{aligned}$$

□

Para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , seja  $\beta_{\kappa,\infty} := \|\beta\|_{\infty,\Delta_\kappa}$  onde  $\Delta_\kappa = \{\kappa' \in \mathcal{T}_h; \kappa \cap \kappa' \neq \emptyset\}$ . Consideremos a seguinte semi-norma:

$$\|v\|_{h,\frac{1}{2}} = \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^{-1} \beta_{\kappa,\infty} \|v\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.33)$$

**Lema 2.3.2** (*Limitante*) *Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $z \in H^q(\Omega, \mathcal{T}_h) \cap (V_h^p)^\perp$ ,  $q > \frac{3}{2}$ ,*

$$\sup_{v_h \in V_h^p} \frac{a(z, v_h) + j(z, v_h)}{\|v_h\|_{a,j}} \leq C \|z\|_{a,j} + C(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{q}{2}-1}) \|z\|_{h,\frac{1}{2}}. \quad (2.34)$$

Demonstração: Seja  $\beta_h$  a projeção ortogonal em  $L^2(\Omega)$  de  $\beta$  sobre  $S^0(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ . Considere  $\omega_h = \beta_h \cdot \nabla v_h$ , logo,

$$\begin{aligned} (z, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega} &= (z, (\beta - \beta_h) \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega} + (z, \beta_h \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega} \\ &= (z, (\beta - \beta_h) \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega} + (z, \omega_h)_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

(1) Como  $\beta \in [W_\infty^1(\Omega)]^d$  e  $\beta_h = (\int_\kappa \beta dx) / |\kappa|$ , ou seja,  $\beta_h = \bar{\beta}$ , segue do lema 1.2.2,

$$\|\beta - \beta_h\|_{0,\kappa} \leq Ch_\kappa \|\nabla\beta\|_{0,\kappa} \leq Ch_\kappa \|\beta\|_{W_\infty^1(\kappa)}.$$

Consequentemente, usando a desigualdade inversa (1.9), o primeiro termo do lado direito de (2.35) pode ser estimado como:

$$\begin{aligned} (z, (\beta - \beta_h) \nabla v_h)_{0,\Omega} &\leq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \int_\kappa (\beta_{\kappa,\infty} h_\kappa^{-1} |z|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\kappa \beta_{\kappa,\infty}^{-1} h_\kappa |\beta - \beta_h|^2 |\nabla v_h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^{-1} \beta_{\kappa,\infty} \|z\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^3 \beta_{\kappa,\infty}^{-1} \|\beta\|_{W_\infty^1(\kappa)}^2 \|\nabla v_h\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z, (\beta - \beta_h) \nabla v_h)_{0,\Omega} &\leq C \|z\|_{h,\frac{1}{2}} \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^3 \left( \frac{p^2}{h_\kappa} \right)^2 \|v_h\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C h^{\frac{1}{2}} p^2 \|z\|_{h,\frac{1}{2}} \|v_h\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

(2) Vamos estimar o segundo termo do lado direito de (2.35). Usando o fato que  $z \in (V_h^p)^\perp$  e o lema 2.2.2,

$$\begin{aligned}
(z, \omega_h)_{0,\Omega} &= (z, \omega_h - I_{O_s} \omega_h)_{0,\Omega} \\
&\leq \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^{-1} \beta_{\kappa,\infty} \|z\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa \beta_{\kappa,\infty}^{-1} \|\omega_h - I_{O_s} \omega_h\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|z\|_{h,\frac{1}{2}} \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \beta_{\kappa,\infty}^{-1} \left( \frac{h_\kappa}{p} \right)^2 \|[\omega_h]_e\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Observe que:

$$\|[\omega_h]_e\|_{0,e} = \|[\beta_h \cdot \nabla v_h]_e\|_{0,e} \leq \|[(\beta - \beta_h) \cdot \nabla v_h]_e\|_{0,e} + \|[\beta \cdot \nabla v_h]_e\|_{0,e}. \quad (2.36)$$

(2.a) Usando o fato que  $\beta \in [W_\infty^1(\Omega)]^d$  e a desigualdade (2.17), o primeiro termo do lado direito de (2.36) é estimado como segue:

$$\begin{aligned}
\|[(\beta - \beta_h) \cdot \nabla v_h]_e\|_{0,e} &\leq C \sum_{\kappa \supset e} h_\kappa \|\beta\|_{W_\infty^1(\kappa)} \|\nabla v_h|_\kappa\|_{0,e} \\
&\leq C \sum_{\kappa \supset e} h_\kappa \|\beta\|_{W_\infty^1(\kappa)} \left( \frac{p^2}{h_\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_h\|_{0,\kappa}.
\end{aligned}$$

Da desigualdade (1.9) temos

$$\begin{aligned}
\|[(\beta - \beta_h) \cdot \nabla v_h]_e\|_{0,e} &\leq C \sum_{\kappa \supset e} h_\kappa \|\beta\|_{W_\infty^1(\kappa)} \left( \frac{p^2}{h_\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{p^2}{h_\kappa} \|v_h\|_{0,\kappa} \\
&\leq C \sum_{\kappa \supset e} \|\beta\|_{W_\infty^1(\kappa)} \frac{p^3}{h_\kappa^{\frac{1}{2}}} \|v_h\|_{0,\kappa},
\end{aligned}$$

onde a notação  $\kappa \supset e$  refere-se aos elementos que compartilham a face  $e$ .

(2.b) Para estimar o segundo termo do lado direito de (2.36), note que  $\|[\beta \cdot \nabla v_h]_e\|_{0,e} =$

$|\beta \cdot \mathbf{n}|_e \|[\nabla v_h \cdot \mathbf{n}]\|_e$  devido a continuidade de  $\beta$  e  $v_h$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \beta_{\kappa, \infty}^{-1} \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^2 \|[\beta \cdot \nabla v_h]_e\|_{0,e}^2 &\leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} \left(\frac{h_e}{p}\right)^2 |\beta \cdot \mathbf{n}|_e \|[\nabla v_h \cdot \mathbf{n}]_e\|_{0,e}^2 \\ &\leq Cp^{\alpha-2} j(v_h, v_h). \end{aligned}$$

(2.c) Juntando as estimativas obtidas nos passos (2.a) e (2.b) temos:

$$\begin{aligned} (z, \omega_h)_{0,\Omega} &\leq C \|z\|_{h, \frac{1}{2}} \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \beta_{\kappa, \infty}^{-1} \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^2 (\|[(\beta - \beta_h) \cdot \nabla v_h]_e\|_{0,e}^2 + \|[\beta \cdot \nabla v_h]\|_{0,e}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|z\|_{h, \frac{1}{2}} \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} h_\kappa p^4 \left( \sum_{\kappa \supset e} \|\beta\|_{W_\infty^1(\kappa)} \|v_h\|_{0,\kappa} \right)^2 + p^{\alpha-2} j(v_h, v_h) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|z\|_{h, \frac{1}{2}} \left( p^2 h^{\frac{1}{2}} \|v_h\|_{0,\Omega} + p^{\frac{\alpha}{2}-1} j(v_h, v_h)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq C \|z\|_{h, \frac{1}{2}} (p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1}) \|v_h\|_{a,j}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} (z, \beta \cdot \nabla v_h)_\Omega &= (z, (\beta - \beta_h) \cdot \nabla v_h)_\Omega + (z, \omega_h)_\Omega \\ &\leq Ch^{\frac{1}{2}} p^2 \|z\|_{h, \frac{1}{2}} \|v_h\|_\Omega + C \|z\|_{h, \frac{1}{2}} (p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1}) \|v_h\|_{a,j} \\ &\leq C \|z\|_{h, \frac{1}{2}} (p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\alpha/2-1}) \|v_h\|_{a,j}. \end{aligned}$$

(3) Como  $z \in H^q(\Omega, \mathcal{T}_h) \cap (V_h^p)^\perp$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , seque que  $[\nabla z]_e = 0$ , logo  $j(z, v_h) = 0$ . Além disso  $((\zeta - \nabla \cdot \beta)z, v_h)_{0,\Omega} = 0$ , pois  $v_h \in V_h^p$ . O outro termo é estimado como segue:

$$\begin{aligned} ((\beta \cdot \mathbf{n})z, v_h)_{0,\partial\Omega^+} &\leq \| |\beta \cdot \mathbf{n}|^{\frac{1}{2}} z \|_{0,\partial\Omega} \| |\beta \cdot \mathbf{n}|^{\frac{1}{2}} v_h \|_{0,\partial\Omega} \\ &\leq C \|z\|_{a,j} \|v_h\|_{a,j}. \end{aligned}$$

Logo,

$$a(z, v_h) + j(z, v_h) \leq C \|z\|_{a,j} \|v_h\|_{a,j} + C (p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1}) \|z\|_{h, \frac{1}{2}} \|v_h\|_{a,j}.$$

□

**Lema 2.3.3** *Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que*

$$\|u - u_h\|_{a,j} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{a,j} + C (p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1}) \|u - \Pi_h u\|_{h, \frac{1}{2}}. \quad (2.37)$$

Demonstração: Devido aos lemas (2.1.1) e (2.3.1) temos:

$$\begin{aligned} \|\Pi_h u - u_h\|_{a,j}^2 &\leq a(\Pi_h u - u_h, \Pi_h u - u_h) + j(\Pi_h u - u_h, \Pi_h u - u_h) \\ &= a(\Pi_h u - u + u - u_h, \Pi_h u - u_h) + j(\Pi_h u - u + u - u_h, \Pi_h u - u_h) \\ &= a(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h) + j(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h), \end{aligned}$$

pois  $\Pi_h u - u_h \in V_h^p$ .

Desde que  $\Pi_h u - u \in (V_h^p)^\perp$ , o lema 2.3.2 garante:

$$\begin{aligned} \|\Pi_h u - u_h\|_{a,j} &\leq \frac{1}{\|\Pi_h u - u_h\|_{a,j}} (a(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h) + j(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h)) \\ &\leq \|\Pi_h u - u\|_{a,j} + C(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1}) \|\Pi_h u - u\|_{h,\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Concluimos usando a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{a,j} &\leq \|u - \Pi_h u\|_{a,j} + \|\Pi_h u - u_h\|_{a,j} \\ &\leq C\|\Pi_h u - u\|_{a,j} + C(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1}) \|\Pi_h u - u\|_{h,\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.3.4** *Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para  $\omega \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ ,*

$$\|\omega - \Pi_h \omega\|_{h,\frac{1}{2}} \leq Cp^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega}, \quad (2.38)$$

$$\|\omega - \Pi_h \omega\|_{a,j} \leq C(p^{\frac{1}{4}} + p^{2-\frac{\alpha}{2}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega}, \quad (2.39)$$

com  $s = \min(p+1, q)$ .

Demonstração: (2.38) é estimado usando (2.27):

$$\begin{aligned} \|\omega - \Pi_h \omega\|_{h,\frac{1}{2}} &= \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^{-1} \beta_{\kappa,\infty} \|\omega - \Pi_h \omega\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^{-1} \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^{2s} \|\omega\|_{s,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Cp^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega}. \end{aligned}$$

Para provar (2.39), primeiro destacamos a seguinte desigualdade do traço, cujo esboço

da demonstração pode ser encontrado em [8]:

$$\|v\|_{0,\partial\Omega} \leq C \|v\|_{0,\Omega}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{0,\Omega}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Utilizando a desigualdade acima e o lema 2.2.3 obtemos:

$$\begin{aligned} \|\omega - \Pi_h \omega\|_{0,\partial\Omega} &\leq C \|\omega - \Pi_h \omega\|_{0,\Omega}^{\frac{1}{2}} \|\nabla(\omega - \Pi_h \omega)\|_{0,\Omega}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{s}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega}^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{4}} \left(\frac{h}{p}\right)^{\frac{s-1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Cp^{\frac{1}{4}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Para estimar  $j(\omega - \Pi_h \omega, \omega - \Pi_h \omega)$ , observamos que para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ :

$$\begin{aligned} \|\nabla(\omega - \Pi_h \omega)\|_{0,\partial\kappa} &\leq \|\nabla(\omega - \Pi_h^* \omega)\|_{0,\partial\kappa} + \|\nabla(\Pi_h \omega - \Pi_h^* \omega)\|_{0,\partial\kappa} \\ &\leq \|\nabla(\omega - \Pi_h^* \omega)\|_{0,\partial\kappa} + Cph\kappa^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(\Pi_h \omega - \Pi_h^* \omega)\|_{0,\kappa}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde utilizamos a desigualdade triangular e a desigualdade (2.17). De [17] temos que existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\|\nabla(\omega - \Pi_h^* \omega)\|_{0,\partial\kappa} \leq Cp \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^{s-\frac{3}{2}} \|\omega\|_{s,\kappa}. \quad (2.42)$$

Juntando as estimativas acima e usando (2.30) obtemos:

$$\begin{aligned} j(\omega - \Pi_h \omega, \omega - \Pi_h \omega) &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h^o} h_e^2 p^{-\alpha} |\beta \cdot \mathbf{n}|_e \|\nabla(\omega - \Pi_h \omega)\|_e^2 \\ &\stackrel{(2.41)}{\leq} C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (h_\kappa^2 p^{-\alpha} \|\nabla(\omega - \Pi_h^* \omega)\|_{0,\partial\kappa}^2 + h_\kappa p^{2-\alpha} \|\nabla(\Pi_h \omega - \Pi_h^* \omega)\|_{0,\kappa}^2) \\ &\stackrel{(2.42)}{\leq} Ch^2 p^{-\alpha} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} p^2 \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^{2s-3} \|\omega\|_{s,\kappa}^2 + Chp^{2-\alpha} p \left(\frac{h}{p}\right)^{2(s-1)} \|\omega\|_{s,\Omega}^2 \\ &\leq Cp^{4-\alpha} \left(\frac{h}{p}\right)^{2s-1} \|\omega\|_{s,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Logo, do lema 2.2.3 e das estimativas (2.40) e (2.43) segue,

$$\begin{aligned} \|\omega - \Pi_h \omega\|_{a,j}^2 &\leq C \|\omega - \Pi_h \omega\|_{\Omega}^2 + C \|\omega - \Pi_h \omega\|_{\partial\Omega}^2 + j(\omega - \Pi_h \omega, \omega - \Pi_h \omega) \\ &\leq C \left(\frac{h}{p}\right)^{2s} \|\omega\|_{s,\Omega}^2 + Cp^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{2s-1} \|\omega\|_{s,\Omega}^2 + Cp^{4-\alpha} \left(\frac{h}{p}\right)^{2s-1} \|\omega\|_{s,\Omega}^2 \\ &\leq C(p^{\frac{1}{2}} + p^{4-\alpha}) \left(\frac{h}{p}\right)^{2s-1} \|\omega\|_{s,\Omega}^2. \end{aligned}$$



Consequentemente,

$$\|\omega - \Pi_h \omega\|_{a,j} \leq C(p^{\frac{1}{4}} + p^{2-\frac{\alpha}{2}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega}.$$

□

**Teorema 2.3.5** *Seja  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , solução de (2.3) e seja  $u_h$  solução de (2.8). Tome  $\alpha = \frac{7}{2}$ . Então, existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que*

$$\|u - u_h\|_{a,j} \leq C(p^{\frac{1}{4}} + p^{\frac{3}{2}}h^{\frac{1}{2}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}, \quad (2.44)$$

onde  $s = \min(p+1, q)$ . Consequentemente, se  $h \leq p^{-\frac{5}{2}}$ , podemos assegurar,

$$\|u - u_h\|_{a,j} \leq Cp^{\frac{1}{4}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}. \quad (2.45)$$

Demonstração: Desde que  $\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{3}{4}$ , o lema 2.3.3 garante:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{a,j} &\leq C\|u - \Pi_h u\|_{a,j} + C(p^2h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{3}{4}})\|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(2.38)}{\leq} C\|u - \Pi_h u\|_{a,j} + c(p^{\frac{3}{2}}h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}. \end{aligned}$$

Desde que  $2 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ , temos de (2.39):

$$\|u - \Pi_h u\|_{a,j} \leq Cp^{\frac{1}{4}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{a,j} &\leq Cp^{\frac{1}{4}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega} + C(p^{\frac{3}{2}}h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega} \\ &\leq C(p^{\frac{1}{4}} + p^{\frac{3}{2}}h^{\frac{1}{2}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}. \end{aligned}$$

A desigualdade (2.45) segue diretamente de (2.44) quando consideramos  $h \leq p^{-\frac{5}{2}}$ .

□

A estimativa de erro dada pelo teorema 2.3.5 é subótima pelo fator  $p^{\frac{1}{4}}$ .

## 2.4 Extensão para elementos *simplices*

A meta nesta seção é discutir a extensão da análise das seções 2.2, 2.3 e 2.4 para elementos finitos *simplices*. A maior parte das demonstrações dos resultados enunciados nesta seção são facilmente adaptados das apresentadas acima, devido a isso somente apresentamos um esboço. Consideramos então  $\mathcal{T}_h$  uma partição de  $\Omega$  em elementos *simplices* afim  $\kappa$ .

Consideremos o espaço de elementos finitos contínuo:

$$V_h^p = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, v_h|_\kappa \in P_p(\kappa)\}. \quad (2.46)$$

### 2.4.1 As desigualdades do traço e traço inversa para *simplices*

Inicialmente consideramos a seguinte desigualdade do traço dada no trabalho de Warburton e Hesthaven [34].

**Lema 2.4.1** *Para  $\kappa \in \mathcal{T}_h$  é válida a seguinte desigualdade:*

$$\forall v \in P_p(\kappa), \|v\|_{0,\partial\kappa} \leq \left( \frac{(p+1)(p+d)}{d} \frac{\text{med}(\partial\kappa)}{\text{med}(\kappa)} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0,\kappa}. \quad (2.47)$$

Para estimar a desigualdade do traço inversa em  $P_p(\kappa)$ , sejam  $n_{p,d} = \dim(P_p(\kappa))$  e  $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n_{p,d}}$  a base canônica de  $P_p(\kappa)$ . Consideremos o conjunto dos nós em  $\kappa$  dado por  $\mathcal{A} = \{a_i\}_{1 \leq i \leq n_{p,d}}$ .

O conjunto  $\mathcal{A}$  é dito ser unisolvente em  $P_p(\kappa)$  se a matriz com coeficientes  $(\phi_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n_{p,d}}$  é inversível. E esse conjunto é admissível se  $\mathcal{A}$  é unisolvente em  $P_p(\kappa)$  e se para qualquer dimensão  $d' < d$  e qualquer *simplex*  $\kappa' \subset \partial\kappa$  de dimensão  $d'$ , o conjunto de nós em  $\kappa'$  é unisolvente em  $P_p(\kappa')$ .

Dado um conjunto de nós unisolvente  $\mathcal{A}$ , definimos:

$$P_p^{\mathcal{A}}(\kappa) = \{v \in P_p(\kappa); \forall a_i \in \mathcal{A}, v(a_i) = 0 \text{ se } a_i \notin \partial\kappa\}. \quad (2.48)$$

**Lema 2.4.2** *Para um conjunto de nós unisolvente  $\mathcal{A}$  em  $P_p(\kappa)$ , é válida a desigualdade:*

$$\inf_{v \in P_p^{\mathcal{A}}(\kappa) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{0,\partial\kappa}}{\|v\|_{0,\kappa}} \leq \left( \frac{(2p+d)}{d} \frac{\text{med}(\partial\kappa)}{\text{med}(\kappa)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.49)$$

Demonstração: Estabelecemos a estimativa (2.49) para um *simplex* fixo, e estendemos para um elemento arbitrário em  $\mathcal{T}_h$ .

(1) Escolhemos a base ortonormal em  $L^2(\hat{\kappa})$  para  $P_p(\hat{\kappa})$  conforme considerada em [34]. Também definimos de acordo com [34] a matriz  $\hat{F}$  de ordem  $n_{p,d}$  tal que  $(\hat{V}, \hat{F}\hat{V})_{\mathbb{R}^{n_{p,d}}} =$

$\|\hat{v}\|_{0,\partial\hat{\kappa}}^2$ , para todo  $\hat{v} \in P_p(\hat{\kappa})$ , onde  $\hat{V}$  é um vetor, com as respectivas coordenadas de  $\hat{v}$  na base ortonormal escolhida e  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^{n_{p,d}}}$  denota o produto escalar Euclidiano em  $\mathbb{R}^{n_{p,d}}$ .

Desta forma,  $\hat{F}$  é simétrica e semi-definida positiva. A vantagem na escolha desta base deve-se ao fato que a matriz  $\hat{F}$  possui uma estrutura de blocos, onde cada bloco tem posto 1.

(2) Para determinar esta estrutura, definimos  $J_{p,d} = \{(i) \in I_{p,d}; \sum_{l=1}^d i_l \leq p\}$ . A matriz  $\hat{F}$  é então indexada por multi-índices  $(i)$  e  $(j)$  em  $J_{p,d}$  e suas entradas são dadas por:

$$\hat{F}_{(i)(j)} = \prod_{l=1}^{d-1} \delta_{i_l j_l} (-1)^{i_d} \left( \frac{2N_d(i) + d}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (-1)^{j_d} \left( \frac{2N_d(j) + d}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

onde  $N_d(i) = \sum_{l=1}^d i_l$ . Seja  $r \in \{0, \dots, p\}$ . Para qualquer  $(i') \in I_{p,d-1}$  tal que  $\sum_{l=1}^d i'_l = r$ , podemos associar um bloco  $\hat{F}_{r,(i')}$  de  $\hat{F}$  correspondente ao multi-índice  $(i) = (i'_1, \dots, i'_{d-1}, i_d)$ . Em [34], é provado que o bloco  $\hat{F}_{r,(i')}$  é de tamanho  $(p - r + 1)$  com posto 1, e seu traço é igual a:

$$\text{tr}(\hat{F}_{r,(i')}) = \sum_{i_d=0}^{p-r} \frac{1}{2}(2r + 2i_d + d) = \frac{1}{2}(p - r + 1)(p + r + d).$$

(3) Em [34] é estimado o maior autovalor de  $\hat{F}$ , mas nesta demonstração estamos interessados no menor autovalor não-nulo. Desde que os blocos  $\hat{F}_{r,(i')}$  tem posto 1, o espectro de  $\hat{F}$  é dado por:

$$\varsigma(\hat{F}) = \left\{ \frac{1}{2}(p - r + 1)(p + r + d) \right\}_{0 \leq r \leq p} \cup \{0\}.$$

Desde que o produto  $(p - r + 1)(p + r + d) = p^2 + dp - r^2 - rd + p + r + d$ , então derivando essa expressão em relação a  $r$  obtemos  $-2r - d + 1 \leq 0, \forall r$ . Consequentemente  $(p - r + 1)(p + r + d)$  é monótona decrescente em  $r$ . Então o menor autovalor não-nulo de  $\hat{F}$  é  $\lambda_{\min \hat{F}} = \frac{2p+d}{2}$ .

(4)  $\hat{F}$  tem  $p$  blocos, onde cada bloco tem posto 1, ou seja, cada bloco tem um autovalor não nulo. Sejam  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  esses autovalores não nulos de  $\hat{F}$ , e  $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$  respectivos autovetores ortonormais associados. Considere

$$\psi = \{\psi_i; \psi_i \text{ autovetor do } N(\hat{F}), \forall 1 \leq i \leq n_{p,d} - p\},$$

tal que  $V_0 = \varphi \cup \psi$  seja um conjunto ortonormal. Aqui  $N(\hat{F})$  representa o núcleo de  $\hat{F}$

Logo, para  $\forall v \in P_p^A(\hat{\kappa})$ ,  $V = \sum_j (V, \psi_j) \psi_j + \sum_i (V, \varphi_i) \varphi_i$ . Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\|v\|_{0,\partial\hat{\kappa}}^2 &= (V, \hat{F}V)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \\
&= \left( \sum_j (V, \psi_j)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \psi_j + \sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \varphi_i, \sum_j \lambda_j (V, \varphi_j)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \varphi_j \right)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \\
&= \sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \|\varphi_i\|_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \lambda_i \\
&= \sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \lambda_i.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|v\|_{0,\hat{\kappa}}^2 &= \left( \sum_j (V, \psi_j)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \psi_j + \sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \varphi_i, \sum_j (V, \psi_j)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \psi_j + \sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \varphi_i \right)_{\mathbb{R}^{n_p,d}} \\
&= \sum_j (V, \psi_j)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \|\psi_j\|_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 + \sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \|\varphi_i\|_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \\
&= \sum_j (V, \psi_j)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 + \sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\|v\|_{0,\partial\hat{\kappa}}^2}{\|v\|_{0,\hat{\kappa}}^2} = \frac{\sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \lambda_i}{\sum_j (V, \psi_j)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 + \sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2} \leq \frac{\sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \lambda_i}{\sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in P_p^A(\hat{\kappa}) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{0,\partial\hat{\kappa}}^2}{\|v\|_{0,\hat{\kappa}}^2} &\leq \inf_{v \in P_p^A(\kappa) \setminus \{0\}} \frac{\sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \lambda_i}{\sum_i (V, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2} \\
&\leq \frac{\sum_i (\varphi_{\min}, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2 \lambda_i}{\sum_i (\varphi_{\min}, \varphi_i)_{\mathbb{R}^{n_p,d}}^2} \\
&= \lambda_{\min \hat{F}} = \frac{2p+d}{2}.
\end{aligned}$$

onde  $\varphi_{\min}$  é o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_{\min \hat{F}}$ .

Então, usando que  $\text{med}(\hat{\kappa}) = \frac{1}{d} \text{med}(\partial\hat{\kappa})$  e as igualdades de (2.16), temos,

$$\begin{aligned} \inf_{v \in P_p^A(\kappa) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{0, \partial \kappa}}{\|v\|_{0, \kappa}} &\leq \left( \frac{(2p+d) \operatorname{med}(\partial \kappa)}{2d \operatorname{med}(\kappa)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \frac{(2p+d) \operatorname{med}(\partial \kappa)}{d \operatorname{med}(\kappa)} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

O lema 2.4.2 mostra que em qualquer *simplex* de dimensão  $d \geq 2$ , a desigualdade do traço inversa não pode ser ótima em relação a desigualdade do traço, ou seja, o fator  $p^{\frac{1}{2}}$  é perdido. O restante da análise apresentada nesta seção restrita para *simplices* é baseada na seguinte hipótese:

**Hipótese 2.4.1** *Existe um conjunto de nós admissível  $\mathcal{A}^*$  em  $P_p(\hat{\kappa})$  tal que:*

$$\forall v \in P_p^{\mathcal{A}^*}(\hat{\kappa}), \|v\|_{0, \hat{\kappa}} \leq Cp^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \partial \hat{\kappa}}. \quad (2.50)$$

Daqui em diante, para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ ,  $P_p^0(\kappa)$  denota o conjunto polinomial  $P_p^{\mathcal{A}^*}(\kappa)$ , onde  $\mathcal{A}^*$  é a imagem do conjunto  $\mathcal{A}^*$  pela transformação de  $\hat{\kappa}$  em  $\kappa$ . Se  $d$  não é grande com relação a  $p$ , a estimativa (2.47) e a Hipótese 2.4.1 conduzem as seguintes desigualdades do traço e traço inversa sobre *simplices*:

$$\forall v \in P_p(\kappa), \|v\|_{0, \partial \kappa} \leq C \left( \frac{p^2}{h_\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \kappa}, \quad (2.51)$$

$$\forall v \in P_p^0(\kappa), \|v\|_{0, \kappa} \leq C \left( \frac{h_\kappa}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \partial \kappa}. \quad (2.52)$$

## 2.4.2 Interpolação $hp$ e projeção sobre triângulos

Seja  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ . Para um nó  $\nu \in \mathcal{A}_\kappa^*$ , seja  $\mathcal{K}_\nu = \{\kappa' \in \mathcal{T}_h; \nu \in \kappa'\}$ ; então, para  $\omega_h \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ , definimos  $I_{Os}\omega_h$  localmente em  $\kappa$  pelo seu valor em todos os nós de  $\mathcal{A}_\kappa^*$  fixando:

$$I_{Os}\omega_h(\nu) = \frac{1}{\operatorname{card}(\mathcal{K}_\nu)} \sum_{\kappa \in \mathcal{K}_\nu} \omega_h|_\kappa(\nu). \quad (2.53)$$

Desta forma  $I_{Os}\omega_h \in V_h^p$ .

**Lema 2.4.3** *Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que, para todo  $\kappa \in \mathcal{K}$ , a seguinte estimativa é assegurada:*

$$\forall \omega_h \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}), \|\omega_h - I_{Os}\omega_h\|_{0, \kappa} \leq C \left( \frac{h_\kappa}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \|[\omega_h]\|_{0, e}, \quad (2.54)$$

onde  $\mathcal{E}_h^\circ(k) = \{e \in \mathcal{E}_h; e \cap \kappa \neq \emptyset\}$

Demonstração: A demonstração é semelhante à efetuada no Lema 2.2.2 exceto que aqui usamos as desigualdades do traço e traço inversa (2.51) e (2.52) ao invés de usar (2.17) e (2.18). Outro fato importante observar para  $d = 2$ , a desigualdade do traço inversa (2.52) é usada somente uma vez, pois necessitamos ir somente até  $e$ , enquanto para quadriláteros aplicamos a desigualdade (2.18) até chegar em  $\partial e$ . Isso ocorre pois os conjuntos  $P_p^0(\kappa)$  e  $Q_p^0(\kappa)$  estão definidos de forma diferente. Como consequência aparece o fator  $p^{-\frac{1}{2}}$  na desigualdade acima, enquanto para quadriláteros esse fator era  $p^{-1}$ .

□

**Lema 2.4.4** *Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $\omega \in H^q(\Omega)$ ,  $q \geq 1$ ,*

$$\|\omega - \Pi_h \omega\|_{0,\Omega} \leq C \left(\frac{h}{p}\right)^s \|\omega\|_{s,\Omega}, \quad (2.55)$$

$$\|\nabla(\omega - \Pi_h \omega)\|_{0,\Omega} \leq Cp \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|\omega\|_{s,\Omega}, \quad (2.56)$$

onde  $s = \min(p + 1, q)$ .

Demonstração: A demonstração é análoga à efetuada no Lema 2.2.3, sendo que na demonstração de (2.55) usamos a estimativa (2.54) ao invés de usar (2.20).

□

**Observação 2.4.1** *A superconvergência de  $\Pi_h \omega$  para  $\Pi_h^* \omega$  é perdida sobre simplices desde que:*

$$\|\Pi_h \omega - \Pi_h^* \omega\|_{0,\Omega} \leq C \left(\frac{h}{p}\right)^s \|\omega\|_{s,\Omega}.$$

Como consequência, a estimativa (2.56) é subótima pelo fator  $p$ , mas a estimativa (2.55) permanece ótima.

### 2.4.3 Análise de Convergência sobre triângulos

Seja  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , solução de (2.3) e seja  $u_h$  solução de (2.8). A análise de convergência é efetuada de maneira semelhante a efetuada na seção 2.3.

**Lema 2.4.5** *(limitante) Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $z \in H^q(\Omega, \mathcal{T}_h) \cap (V_h^p)^\perp$ ,  $q > \frac{3}{2}$ ,*

$$\sup_{v_h \in V_h^p} \frac{a(z, v_h) + j(z, v_h)}{\|v_h\|_{a,j}} \leq \|z\|_{a,j} + C(p^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} + p^2 h^{\frac{1}{2}}) \|z\|_{h, \frac{1}{2}}. \quad (2.57)$$

Demonstração: A demonstração segue a mesma idéia à usada para o lema 2.3.2. Mas para *simplices*, podemos escolher  $\beta_h$  em  $V_h^1$ , e conseqüentemente não precisamos efetuar a estimativa (2.36) e obtemos a seguinte desigualdade:

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ(\kappa)} \beta_{\kappa, \infty}^{-1} \left( \frac{h_\kappa}{p} \right)^2 \|\llbracket \beta_h \cdot \nabla v_h \rrbracket_e\|_{0,e}^2 \leq Cp^{\alpha-2} j(v_h, v_h).$$

□

**Lema 2.4.6** *Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $\omega \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ ,*

$$\|\omega - \Pi_h \omega\|_{h, \frac{1}{2}} \leq Cp^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{h}{p} \right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s, \Omega}, \quad (2.58)$$

$$\|\omega - \Pi_h \omega\|_{a,j} \leq C(p^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{5}{2}-\frac{\alpha}{2}}) \left( \frac{h}{p} \right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s, \Omega}, \quad (2.59)$$

onde  $s = \min(p+1, q)$

Demonstração: Esta demonstração é análoga à efetuada no lema 2.3.4.

□

Baseado nesses resultados, apresentamos o principal resultado desta seção.

**Teorema 2.4.7** *Seja  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , solução de (2.3) e seja  $u_h$  solução de (2.8). Tome  $\alpha = \frac{7}{2}$ . Então, sob as condições da hipótese 2.4.1, existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que*

$$\|u - u_h\|_{a,j} \leq C(p^{\frac{3}{4}} + p^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}}) \left( \frac{h}{p} \right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s, \Omega}, \quad (2.60)$$

onde  $s = \min(p+1, q)$ . Conseqüentemente, se  $h \leq p^{-\frac{3}{2}}$ , asseguramos:

$$\|u - u_h\|_{a,j} \leq Cp^{\frac{3}{4}} \left( \frac{h}{p} \right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s, \Omega}. \quad (2.61)$$

Demonstração: Reformulando o resultado do lema 2.3.3 para *simplices*, obtemos:

$$\|u - u_h\|_{a,j} \leq C \|\Pi_h u - u\|_{a,j} + C \left( p^{\frac{\alpha-1}{2}} + p^2 h^{\frac{1}{2}} \right) \|\Pi_h u - u\|_{h, \frac{1}{2}}. \quad (2.62)$$

Desde que  $\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ ,  $\frac{5}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}$ , então usando as desigualdades (2.62), (2.58) e (2.59) temos:

$$\|u - u_h\|_{a,j} \leq C \left( p^{3/4} + p^{3/2} h^{1/2} \right) \left( \frac{h}{p} \right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s, \Omega}.$$

□

## 2.5 Problemas de advecção-difusão

O objetivo desta seção é mostrar que a forma bilinear com penalização interior contínua definida pela equação (2.7) também pode ser usada para aproximar problemas advecção-difusão em ambos os casos: advecção dominante e difusão dominante. Vamos limitar a teoria apresentada aqui somente para aproximações elementos finitos sobre malhas produto-tensorial.

Considere o seguinte problema de equações diferenciais parciais com condições de fronteira mistas Neumann-Robin:

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \varsigma u & = f, \\ (\beta u - \varepsilon \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega^-} & = 0, \\ \varepsilon \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega^-} & = 0, \end{cases} \quad (2.63)$$

onde  $\varepsilon > 0$  é um parâmetro real e  $f$ ,  $\beta$  e  $\varsigma$  satisfazem as hipóteses afixadas na seção 2.1, ou seja,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\beta \in [W_\infty^1(\Omega)]^d$ ,  $\varsigma \in L^\infty(\Omega)$ . As condições de fronteira Neumann e Robin são condições naturais de saída e entrada de fluxo, respectivamente, para problemas advecção-difusão.

Sobre  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  definimos a forma bilinear Galerkin:

$$a_\varepsilon(u, v) = \varepsilon(\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + ((\varsigma - \nabla \cdot \beta)u, v)_{0,\Omega} - (u, \beta \cdot \nabla v)_{0,\Omega} + (\beta \cdot \mathbf{n}u, v)_{0,\partial\Omega^+}. \quad (2.64)$$

A aproximação elementos finitos de (2.63) consiste em encontrar  $u_h \in V_h^p$  tal que:

$$a_\varepsilon(u_h, v_h) + j(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega}, \quad \forall v_h \in V_h^p. \quad (2.65)$$

Para  $v \in H^q(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , consideremos a norma:

$$\|v\|_{\varepsilon,j}^2 = \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \|\varsigma_0^{\frac{1}{2}} v\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\beta \cdot \eta^{\frac{1}{2}} v\|_{0,\partial\Omega}^2 + j(v, v). \quad (2.66)$$

O problema discreto (2.65) é dotado com as propriedades de estabilidade e consistência, conforme mostraremos a seguir:

**Lema 2.5.1** (*Coercividade*) Para todo  $v \in H^q(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ ,

$$a_\varepsilon(v, v) + j(v, v) \geq \|v\|_{\varepsilon,j}^2.$$

Demonstração:  $\forall v \in H^q(\Omega, \mathcal{T}_h)$ , temos:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(v, v) + j(v, v) &= \varepsilon(\nabla v, \nabla v)_{0,\Omega} + a(v, v) + j(v, v) \\ &\geq \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{a,j}^2 \\ &= \|v\|_{\varepsilon,j}^2. \end{aligned}$$



□

**Lema 2.5.2** (*Consistência*) *Seja  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , solução de (2.63) e seja  $u_h$  solução de (2.65). Então para todo  $v_h \in V_h^p$ ,*

$$a_\varepsilon(u - u_h, v_h) + j(u - u_h, v_h) = 0. \quad (2.67)$$

Demonstração: Como  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , do Lema 3.2.1 segue que  $[\nabla u]_e = 0$ ,  $\forall e \in \mathcal{E}_h^\circ$ . Consequentemente  $j(u, v_h) = 0$ ,  $\forall v_h \in V_h^p$ .

Mostraremos que  $a_\varepsilon(u, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega}$ ,  $\forall v_h \in V_h^p$ , onde  $u$  satisfaz (2.63).

Multiplicando a primeira equação de (2.63) por  $v_h \in V_h^p$  e integrando sobre  $\Omega$  obtemos:

$$\int_{\Omega} f v_h dx = -\varepsilon \int_{\Omega} \Delta u v_h dx + \int_{\Omega} (\zeta u v_h + \beta \cdot \nabla u v_h) dx. \quad (2.68)$$

Do mesmo modo como foi visto na demonstração do lema 2.3.1 temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla u v_h dx &= \int_{\Omega} \nabla(\beta u) v_h dx - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u v_h dx \\ &= - \int_{\Omega} u \beta \cdot \nabla v_h dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \beta u v_h ds - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u v_h dx. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \varepsilon \Delta u v_h dx &= \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v_h dx - \int_{\partial\Omega} \varepsilon \mathbf{n} \cdot \nabla u v_h ds \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v_h dx - \int_{\partial\Omega^-} \beta \cdot \mathbf{n} u v_h ds. \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (2.68) temos:

$$\begin{aligned} (f, v_h)_{0,\Omega} &= \varepsilon(\nabla u, \nabla v_h)_{0,\Omega} - (\beta \cdot \mathbf{n} u, v_h)_{0,\partial\Omega^-} + (\zeta u, v_h)_{0,\Omega} - (u, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega} \\ &\quad + (\beta \cdot \mathbf{n} u, v_h)_{0,\partial\Omega} - ((\nabla \cdot \beta) u, v_h)_{0,\Omega} \\ &= \varepsilon(\nabla u, \nabla v_h)_{0,\Omega} + ((\zeta - \nabla \cdot \beta) u, v_h)_{0,\Omega} - (u, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega} + (\beta \cdot \mathbf{n} u, v_h)_{0,\partial\Omega^+} \\ &= a_\varepsilon(u, v_h). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u - u_h, v_h) + j(u - u_h, v_h) &= a_\varepsilon(u, v_h) - a_\varepsilon(u_h, v_h) + j(u, v_h) - j(u_h, v_h) \\ &= (f, v_h)_{0,\Omega} - (f, v_h)_{0,\Omega} = 0. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.5.3** (*Limitante*) Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para todo  $z \in H^q(\Omega, \mathcal{T}_h) \cap (V_h^p)^\perp$ ,  $q > \frac{3}{2}$ ,

$$\sup_{v_h \in V_h^p} \frac{a_\varepsilon(z, v_h) + j(z, v_h)}{\|v_h\|_{\varepsilon, j}} \leq C\|z\|_{\varepsilon, j} + C(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1})\|z\|_{h, \frac{1}{2}}. \quad (2.69)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{a_\varepsilon(z, v_h) + j(z, v_h)}{\|v_h\|_{\varepsilon, j}} &= \frac{\varepsilon(\nabla z, \nabla v_h)_{0, \Omega} + a(z, v_h) + j(z, v_h)}{\left(\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \nabla v_h\|_{0, \Omega}^2 + \|v_h\|_{a, j}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\nabla z\|_{0, \Omega} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_h\|_{0, \Omega} + a(z, v_h) + j(z, v_h)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_h\|_{0, \Omega} + \|v_h\|_{a, j}}. \end{aligned}$$

Usando ao lema 2.3.2, temos:

$$\begin{aligned} \frac{a_\varepsilon(z, v_h) + j(z, v_h)}{\|v_h\|_{\varepsilon, j}} &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\nabla z\|_{0, \Omega} + C\|z\|_{a, j} + C(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1})\|z\|_{h, \frac{1}{2}} \\ &\leq C\|z\|_{\varepsilon, j} + C(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1})\|z\|_{h, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.5.4** Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que,

$$\|u - u_h\|_{\varepsilon, j} \leq C\|u - \Pi_h u\|_{\varepsilon, j} + C(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1})\|u - \Pi_h u\|_{h, \frac{1}{2}}. \quad (2.70)$$

Demonstração: Dos lemas 2.5.1 e 2.5.2 segue,

$$\begin{aligned} \|\Pi_h u - u_h\|_{\varepsilon, j}^2 &\leq a_\varepsilon(\Pi_h u - u_h, \Pi_h u - u_h) + j(\Pi_h u - u_h, \Pi_h u - u_h) \\ &= a_\varepsilon(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h) + j(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h), \end{aligned}$$

pois  $\Pi_h u - u_h \in V_h^p$ . Desde que  $\Pi_h u - u \in (V_h^p)^\perp$ , pelo lema 2.5.3 temos:

$$\|\Pi_h u - u_h\|_{\varepsilon, j} \leq C\|\Pi_h u - u\|_{\varepsilon, j} + C(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1})\|\Pi_h u - u\|_{h, \frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\varepsilon, j} &\leq \|u - \Pi_h u\|_{\varepsilon, j} + \|\Pi_h u - u_h\|_{\varepsilon, j} \\ &\leq C\|\Pi_h u - u\|_{\varepsilon, j} + C(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{\alpha}{2}-1})\|\Pi_h u - u\|_{h, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.5.5** *Existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que para  $\omega \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ ,*

$$\|\omega - \Pi_h \omega\|_{\varepsilon,j} \leq C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} p h^{-\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}} + p^{2-\frac{\alpha}{2}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega}. \quad (2.71)$$

Demonstração: De (2.28) temos:

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\nabla(\omega - \Pi_h \omega)\|_{0,\Omega} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|\omega\|_{s,\Omega}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|\omega - \Pi_h \omega\|_{\varepsilon,j} &\leq \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(\omega - \Pi_h \omega)\|_{0,\Omega} + \|\omega - \Pi_h \omega\|_{a,j} \\ &\stackrel{(2.39)}{\leq} C \varepsilon^{\frac{1}{2}} p h^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega} + C(p^{\frac{1}{4}} + p^{2-\frac{\alpha}{2}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega} \\ &\leq C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} p h^{-\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}} + p^{2-\frac{\alpha}{2}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|\omega\|_{s,\Omega}. \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.5.6** (*Advecção dominante*) *Seja  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q > \frac{3}{2}$ , solução de (2.63) e seja  $u_h$  solução de (2.65). Tome  $\alpha = \frac{7}{2}$ . Assuma que  $h \leq p^{-\frac{5}{2}}$ . Então, existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$  tal que,*

$$\|u - u_h\|_{\varepsilon,j} \leq C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} p h^{-\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}, \quad (2.72)$$

onde  $s = \min(p+1, q)$ . Conseqüentemente, se  $\varepsilon \leq h p^{-\frac{3}{2}}$ , asseguramos:

$$\|u - u_h\|_{\varepsilon,j} \leq c p^{\frac{1}{4}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}. \quad (2.73)$$

Demonstração: Temos que  $\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{3}{4}$ , então do lema 2.5.4 segue,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\varepsilon,j} &\leq C \|u - \Pi_h u\|_{\varepsilon,j} + C \left(p^2 h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{3}{4}}\right) \|u - \Pi_h u\|_{h,\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(2.38)}{\leq} C \|u - \Pi_h u\|_{\varepsilon,j} + C \left(p^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}. \end{aligned}$$

Desde que  $2 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ , segue do lema 2.5.5,

$$\|u - \Pi_h u\|_{\varepsilon,j} \leq C \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} p h^{-\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}\right) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\varepsilon,j} &\leq C \left( \varepsilon^{\frac{1}{2}} p h^{-\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}} + p^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}} \right) \left( \frac{h}{p} \right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega} \\ &\leq C \left( \varepsilon^{\frac{1}{2}} p h^{-\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}} \right) \left( \frac{h}{p} \right)^{s-\frac{1}{2}} \|u\|_{s,\Omega}. \end{aligned}$$

□

A proposição 2.5.6 fornece uma estimativa de erro subótima pelo fator  $p^{\frac{1}{4}}$  para problemas com advecção dominante.

**Proposição 2.5.7** (*Difusão dominante*) *Seja  $u \in H^q(\Omega)$ ,  $q \geq 2$  solução de (2.63) e seja  $u_h$ , solução de (2.65). Tome  $\alpha = \frac{7}{2}$ . Assuma que  $h \leq p^{-\frac{3}{2}}$ . Então existe  $C$ , independente de  $p$  e  $h$  tal que:*

$$\|u - u_h\|_{\varepsilon,j} \leq C(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}})(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + 1 + h^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{3}{4}}) \left( \frac{h}{p} \right)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}, \quad (2.74)$$

onde  $s = \min(p+1, q)$ . Consequentemente, se  $\varepsilon \geq \max(1, hp^{-\frac{3}{2}})$  temos:

$$\|u - u_h\|_{\varepsilon,j} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h}{p} \right)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}. \quad (2.75)$$

Demonstração: Considere o seguinte resultado de interpolação de [4]: Existe  $u_h^* \in V_h^p$  tal que,

$$\|u - u_h^*\|_{1,\Omega} \leq C \left( \frac{h}{p} \right)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}. \quad (2.76)$$

(1) Inicialmente iremos provar:

$$j(u - u_h^*, u - u_h^*)^{\frac{1}{2}} \leq C h^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{3}{4}} \left( \frac{h}{p} \right)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}.$$

Seja  $\Pi_{h,2}^* : H^2(\Omega) \rightarrow S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  projeção ortogonal. De fato  $\Pi_{h,2}^* = \Pi_{h|_{H^2(\Omega)}}^*$ . Considere o operador de projeção  $\Pi_{h,2}^*$  de maneira que satisfaça as propriedades de aproximação ótimas nas normas em  $L^2$ ,  $H^1$  e  $H^2$ , de acordo com [13]. Seja  $\kappa \in \mathcal{T}_h$  e  $e \subset \partial\kappa$ . Devido ao

lema 1.3.7 e a desigualdade do traço (2.17) temos:

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u - u_h^*)|_\kappa\|_{0,e} &\leq \|\nabla(u - \Pi_{h,2}^* u)|_\kappa\|_{0,e} + \|\nabla(\Pi_{h,2}^* u - u_h^*)|_\kappa\|_{0,e} \\
&\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^{s-\frac{3}{2}} \|u\|_{s,\kappa} + C p h_\kappa^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(\Pi_{h,2}^* u - u_h^*)\|_{0,\kappa} \\
&\leq C \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^{s-\frac{3}{2}} \|u\|_{s,\kappa} + C p h_\kappa^{-\frac{1}{2}} (\|\nabla(u - \Pi_{h,2}^* u)\|_{0,\kappa} + \|\nabla(u - u_h^*)\|_{0,\kappa}) \\
&\leq C p^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^{s-\frac{3}{2}} \|u\|_{s,\kappa} + C p h_\kappa^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_h^*)\|_{0,\kappa}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
J(u - u_h^*, u - u_h^*) &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} \left(\frac{h_e^2}{p^2}\right) |\beta \cdot \mathbf{n}|_e \|\nabla(u - u_h^*)\|_{0,e}^2 \\
&\leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} \left(\frac{h_\kappa^2}{p^2}\right) \left( p \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^{2s-3} \|u\|_{s,\kappa}^2 + p^2 h_\kappa^{-1} \|\nabla(u - u_h^*)\|_{0,\kappa}^2 \right) \\
&\stackrel{(2.76)}{\leq} C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^\circ} \left(\frac{h_\kappa^2}{p^2}\right) \left( p \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^{2s-3} \|u\|_{s,\kappa}^2 + p^2 h_\kappa^{-1} \left(\frac{h_\kappa}{p}\right)^{2s-2} \|u\|_{s,\kappa}^2 \right). \\
&\Rightarrow J(u - u_h^*, u - u_h^*) \leq C h p^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{2s-2} \|u\|_{s,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

Usando (2.76) para estimar os demais termos, temos:

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u - u_h^*)\|_{0,\Omega} &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}. \\
\|\varsigma_0^{\frac{1}{2}}(u - u_h^*)\|_{0,\Omega} &\leq C \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}. \\
\|\beta \cdot \mathbf{n}|^{\frac{1}{2}}(u - u_h^*)\|_{0,\partial\Omega} &\leq C \|u - u_h^*\|_{1,\Omega} \leq C \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|u - u_h^*\|_{\varepsilon,j}^2 &\leq \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \nabla(u - u_h^*)\|_{0,\Omega} + \|\varsigma_0^{\frac{1}{2}}(u - u_h^*)\|_{0,\Omega} + C \|\beta \cdot \mathbf{n}|^{\frac{1}{2}}(u - u_h^*)\|_{0,\partial\Omega} \\
&\quad + j(u - u_h^*, u - u_h^*)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + 1 + h^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{3}{4}}\right) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}.
\end{aligned}$$

Devido aos lemas 2.5.1 e 2.5.2 temos:

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{\varepsilon,j}^2 &\leq a_\varepsilon(u - u_h, u - u_h) + j(u - u_h, u - u_h) \\
 &= a_\varepsilon(u - u_h, u - u_h^*) + j(u - u_h, u - u_h^*) \\
 &\leq \left(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \|u - u_h\|_{\varepsilon,j} \|u - u_h^*\|_{\varepsilon,j}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{\varepsilon,j} &\leq \left(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \|u - u_h^*\|_{\varepsilon,j} \\
 &\leq C \left(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + 1 + h^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{3}{4}}\right) \left(\frac{h}{p}\right)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega}.
 \end{aligned}$$

□

Podemos notar que é recuperada a otimalidade da estimativa de erro para problemas com difusão dominante.

# Capítulo 3

## Método de Galerkin descontínuo para a equação reação-difusão

Neste capítulo efetuamos um estudo da formulação variacional descontínua apresentada por Romkes, Prudhomme e Oden em [30] para o problema reação-difusão. O método apresentado neste trabalho é um método conservativo pois penaliza somente o salto do fluxo da solução.

Inicialmente apresentamos o problema modelo e introduzimos a formulação variacional associada de acordo com [30], em seguida asseguramos que a mesma é bem posta. Na seção 3.2 mostramos que a solução do problema de equação diferencial parcial é também uma solução do problema fraco. As condições de continuidade e inf-sup da forma bilinear que são provadas nas seções 3.2.1 e 3.2.2, respectivamente, são resultados essenciais para garantir existência e unicidade de solução do problema fraco na seção 3.2.3. E finalmente, agrupando os resultados obtidos nas seções 3.1 e 3.2, obtemos a estimativa de erro *a priori* na seção 3.3 para método introduzido.

### 3.1 O problema modelo e a formulação variacional

Consideremos o seguinte problema de reação-difusão:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $f$  é uma função de valor real em  $L^2(\Omega)$ .

#### 3.1.1 A formulação de Baumann-Oden

A formulação variacional descontínua, alvo de estudo deste capítulo, é em princípio uma extensão do Método de Galerkin Descontínuo (DGM) de Oden, Babuška e Baumann [21]. Devido a isso, reservamos esta seção para abordar esta formulação para o problema elíptico

(3.1) . Essa formulação usa como espaço de funções teste,  $W(\mathcal{T}_h)$ , como sendo o completamento do seguinte espaço Sobolev Particionado:

$$H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\kappa} \in H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\kappa), \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\}, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.2)$$

com relação a seguinte norma:

$$\|v\|^2 = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{1,\kappa}^2 + h^\alpha \|\{\nabla v\}\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2 + h^{-\alpha} \|[v]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2 + h^\alpha \|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial\Omega}^2 + h^{-\alpha} \|v\|_{0,\partial\Omega}^2, \quad (3.3)$$

onde  $\alpha \geq 0$  representa a dependência da norma em relação a malha.

Então, usando esse espaço de funções, a formulação variacional é:

$$\text{encontre } \omega \in W(\mathcal{T}_h) : B_{DGM}(\omega, v) = L(v), \quad \forall v \in W(\mathcal{T}_h), \quad (3.4)$$

onde a forma bilinear  $B_{DGM}(\omega, v)$  e a forma linear  $L(v)$  são definidas como segue:

$$\begin{aligned} B_{DGM} & : W(\mathcal{T}_h) \times W(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}, \\ L & : W(\mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \\ B_{DGM}(\omega, v) & = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\nabla \omega \cdot \nabla v + \omega v) dx - \int_{\mathcal{E}_h^\circ} ([v] \cdot \{\nabla \omega\} - [\omega] \cdot \{\nabla v\}) ds, \\ & - \int_{\partial\Omega} (v(\nabla \omega \cdot \mathbf{n}) - \omega(\nabla v \cdot \mathbf{n})) ds \\ L(v) & = \int_{\Omega} f v dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde a integral sobre a aresta da interface  $\mathcal{E}_h^\circ$  deve ser interpretada da seguinte maneira:

$$\int_{\mathcal{E}_h^\circ} f(s) ds = \sum_{e \subset \mathcal{E}_h^\circ} \int_e f(s) ds.$$

A continuidade de  $B_{DGM}$  sobre  $W(\mathcal{T}_h) \times W(\mathcal{T}_h)$  com relação a norma dada em (3.3) pode ser provada sem grandes dificuldades. Porém para o problema unidimensional, nenhuma condição inf-sup da forma bilinear com relação a essa norma foi provada.

### 3.1.2 A nova formulação fraca

Para superar o problema mencionado na seção anterior, é proposto em [30] usar uma aproximação similar ao usado por Baumann e Oden, mas que difere na escolha do espaço de funções teste e ligeiramente difere na formulação do problema variacional. Primeiramente



introduzimos o seguinte espaço particionado:

$$M(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_\kappa \in H(\Delta, \kappa), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, [\nabla v] \in L^2(\mathcal{E}_h^\circ)\}, \quad (3.6)$$

onde:

$$H(\Delta, \kappa) = \{v \in L^2(\kappa) : \nabla \cdot \nabla v \in L^2(\kappa)\} \subset H^1(\kappa).$$

Note que se  $v \in H(\Delta, \kappa)$ , então  $\nabla v \cdot \mathbf{n} \in H^{-1/2}(\partial\kappa)$  (ver [9, 23]). Também consideremos uma nova norma  $\|\cdot\|$  sobre  $M(\mathcal{T}_h)$ , definida como:

$$\|v\|^2 = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left\{ \|v\|_{1,\kappa}^2 + \frac{h^\nu}{p^\theta} \|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa}^2 \right\} + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla v]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2. \quad (3.7)$$

Os parâmetros  $\nu, \lambda, \theta, \zeta$  são maiores ou iguais a zero e as normas utilizadas em (3.7) são definidas como:

$$\begin{aligned} \|g\|_{-1/2,\partial\kappa} &= \sup_{\varphi \in H^{1/2}(\partial\kappa)} \frac{|(g,\varphi)_{-1/2 \times 1/2,\partial\kappa}|}{\|\varphi\|_{1/2,\partial\kappa}}, \\ \|\varphi\|_{1/2,\partial\kappa} &= \inf_{\substack{\omega \in H^1(\kappa) \\ \gamma_0 \omega = \varphi}} \|\omega\|_{1,\kappa}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $(\cdot, \cdot)_{-1/2 \times 1/2,\partial\kappa}$  denota o par dual em  $H^{-1/2}(\partial\kappa) \times H^{1/2}(\partial\kappa)$  e onde  $\gamma_0$  denota o operador do traço:

$$\gamma_0 : H^1(\kappa) \rightarrow H^{1/2}(\partial\kappa).$$

Agora, o espaço de funções teste  $V$  para a nova formulação fraca é escolhido como o completamento de  $M(\mathcal{T}_h)$  com relação a norma  $\|\cdot\|$ . A nova formulação variacional descontínua, nesse espaço de funções, é dada por:

$$\text{encontre } \omega \in V : B(\omega, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (3.9)$$

onde a forma bilinear  $B(\omega, v)$ , e a forma linear  $L(v)$  são definidas como segue:

$$\begin{aligned} B(\omega, v) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \int_\kappa (\nabla \omega \cdot \nabla v + \omega v) dx - \int_{\partial\kappa} (v(\nabla \omega \cdot \mathbf{n}) - (\nabla v \cdot \mathbf{n})\omega) ds \right) \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} (\{v\}[\nabla \omega] - \{\omega\}[\nabla v]) ds + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} [\nabla \omega][\nabla v] ds, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$L(v) = \int_\Omega f v dx. \quad (3.11)$$

A paridade dual em  $H^{-1/2}(\partial\kappa) \times H^{1/2}(\partial\kappa)$  será denotada por:

$$\int_{\partial\kappa} (\nabla\omega \cdot \mathbf{n})v ds = (\nabla\omega \cdot \mathbf{n}, v)_{-1/2 \times 1/2, \partial\kappa}$$

Esta formulação é semelhante à formulação DGM de Oden, Babuška e Baumann [21], pois se escolhermos o subespaço  $W(\mathcal{T}_h)$  de  $V$  das funções com fluxos  $\nabla v \cdot \mathbf{n} \in L^2(\partial\kappa)$ , então usando as seguintes identidades:

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial\kappa} v(\nabla\omega \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\mathcal{E}_h^\circ} [v(\nabla\omega)] ds + \int_{\partial\Omega} v(\nabla\omega \cdot \mathbf{n}) ds \quad (3.12)$$

e

$$[v(\nabla\omega)] = [\omega] \cdot \{\nabla v\} + \{\omega\} [\nabla v], \quad (3.13)$$

recuperamos a formulação DGM de Oden, Babuška e Baumann. A única diferença é a adição do último termo em (3.10). Este termo já foi adicionado nos trabalhos de Percell e Wheeler [24] e Hughes et al [18], onde também é adicionado outro termo de penalização sobre os saltos das funções  $[v]$  através dos elementos da interface. A motivação para somente impor um termo de estabilização no salto do fluxo da solução entre elementos deve-se ao fato que adicionando somente este termo, pode-se provar as propriedades de continuidade e inf-sup da forma bilinear com relação ao espaço  $V$ , na norma  $\|\cdot\|$ . Além disso, a propriedade de conservação local é mantida de maneira fraca, já no caso onde é adicionado o termo de penalização sobre os saltos da solução nas interfaces, esta propriedade é eliminada.

**Observação 3.1.1** *A formulação Galerkin descontínuo (3.9) satisfaz uma lei de equilíbrio de conservação local no sentido médio. Tomando  $v = 1$  em (3.10) sobre um elemento  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , obtemos:*

$$\int_{\kappa} \omega dx - \int_{\partial\kappa} \{\nabla\omega \cdot \mathbf{n}\} ds = \int_{\kappa} f dx.$$

*Seja  $\omega$  uma solução de (3.9), então a função  $\omega = \omega(x)$  é o termo de reação na equação de equilíbrio e  $\{\nabla\omega \cdot \mathbf{n}\}$  é o fluxo médio de  $\omega$  através da fronteira do elemento. A força interna total por elemento deve ser equilibrada pelo termo de fonte  $f$ .*

Na modelagem computacional, um espaço de dimensão finita de funções polinomiais por partes de valor real de grau  $\leq p_\kappa$  é introduzido, tal que:

$$V^{hp} = \{v \in L^2(\Omega) : v|_\kappa = \hat{v} \circ \mathcal{F}_\kappa^{-1}, \hat{v} \in P_{p_\kappa}(\hat{\kappa}), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.14)$$

Note que  $V^{hp}$  é um subespaço de  $V$ . Agora buscamos uma aproximação  $u_h$  para  $u$  como solução do seguinte problema discreto:

$$\text{encontrar } u_h \in V^{hp} : B(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V^{hp}. \quad (3.15)$$

## 3.2 Formulação variacional bem posta

Antes de abordar a relação entre a equação diferencial parcial (3.1) e a formulação variacional descontínua (3.9), introduzimos o seguinte lema.

**Lema 3.2.1** *Se  $u \in H(\Delta, \Omega)$ , então  $u$  e  $(\nabla u \cdot \mathbf{n})$  são fracamente contínuos através da interface dos elementos  $\mathcal{E}_h^\circ$ , de maneira que,*

$$\int_{e_\kappa} [u] \varphi ds = 0, \quad \int_{e_\kappa} [\nabla u] \varphi ds = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(e_\kappa),$$

onde,

$$e_\kappa = \text{int}(\partial\kappa_i \cap \partial\kappa_j) \subset \mathcal{E}_h^\circ.$$

Demonstração: Considere dois elementos vizinhos  $\kappa_i$  e  $\kappa_j$  na partição  $\mathcal{T}_h$  e  $\tilde{\kappa} = \text{int}(\overline{\kappa_i \cup \kappa_j})$ . Para provar a continuidade de  $u$ , tomamos uma função teste arbitrária  $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\kappa})$  e analisamos o produto interno em  $L^2$ .

Separando o produto interno em dois termos sobre  $\kappa_i$  e  $\kappa_j$  e integrando por partes obtemos:

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla \varphi)_{0, \tilde{\kappa}} &= \int_{\kappa_i} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\kappa_j} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \\ &= - \int_{\kappa_i} u \nabla(\nabla \varphi) dx + \int_{\partial\kappa_i} u \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\kappa_j} u \nabla(\nabla \varphi) dx + \int_{\partial\kappa_j} u \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} ds \\ &= - \int_{\tilde{\kappa}} u \Delta \varphi dx + \int_e [u] \cdot \nabla \varphi ds \\ &= (\nabla u, \nabla \varphi)_{0, \tilde{\kappa}} + \int_e [u] \cdot \nabla \varphi ds. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_e [u] \cdot \nabla \varphi ds = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\tilde{\kappa}).$$

Repetindo este mesmo processo para todo  $e \in \mathcal{E}_h^\circ$ , concluímos a demonstração da continuidade fraca de  $u$  através da interface dos elementos  $\mathcal{E}_h^\circ$ . Para provar a continuidade de  $(\nabla u \cdot \mathbf{n})$ , segue o mesmo raciocínio:

$$\begin{aligned} (\Delta u, \varphi)_{0, \tilde{\kappa}} &= \int_{\kappa_i} \Delta u \varphi dx + \int_{\kappa_j} \Delta u \varphi dx \\ &= - \int_{\kappa_i} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\partial\kappa_i} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi ds - \int_{\kappa_j} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\partial\kappa_j} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi ds \\ &= - \int_{\tilde{\kappa}} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_e [\nabla u] \varphi ds \\ &= (\Delta u, \varphi)_{0, \tilde{\kappa}} + \int_e [\nabla u] \varphi ds, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\tilde{\kappa}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_e [\nabla u] \varphi ds = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\tilde{\kappa}).$$

Ou seja,  $(\nabla u \cdot \mathbf{n})$  é fracamente contínuo através da interface dos elementos  $\mathcal{E}_h^\circ$ .

□

**Teorema 3.2.2** *Seja  $u \in H(\Delta, \Omega)$  solução de (3.1). Então  $u$  é solução do problema variacional descontínuo (3.9).*

Demonstração: Restringimos (3.1) a um elemento  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , multiplicamos esta equação local por uma função teste  $\varphi_\kappa \in H^2(\kappa)$ , integramos sobre o elemento  $\kappa$  e aplicamos a identidade de Green:

$$\int_\kappa (\nabla u \cdot \nabla \varphi_\kappa + u \varphi_\kappa) dx - \int_{\partial\kappa} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi_\kappa ds = \int_\kappa f \varphi_\kappa dx.$$

Repetindo esse processo para todos os elementos  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , extendendo cada  $\varphi_\kappa$  para todo  $\Omega$  de maneira que  $\varphi \equiv 0$ , em  $\Omega \setminus \kappa$  e tomando a soma, obtemos:

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \int_\kappa (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx - \int_{\partial\kappa} \varphi (\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds \right) = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_\kappa f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h),$$

onde  $\varphi = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \varphi_\kappa$ .

Desde que  $u$  é solução de (3.1), então  $u$  satisfaz a condição de fronteira de Dirichlet sobre a fronteira de  $\Omega$ . Além disso  $u \in H(\Delta, \Omega)$ , então de acordo com o lema 3.2.1,  $u$  e  $(\nabla u \cdot \mathbf{n})$  são fracamente contínuos através da interface dos elementos. Consequentemente, essas condições de fronteira e continuidade da formulação variacional no sentido fraco podem ser adicionadas, o que permite assegurar:

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \int_\kappa (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx - \int_{\partial\kappa} \varphi (\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds \right) + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \{\varphi\} [\nabla u] ds + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} [u] \cdot \{\nabla \varphi\} ds \\ + \int_{\partial\Omega} u (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) ds + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} [\nabla u] [\nabla \varphi] ds = \int_\Omega f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \end{aligned}$$

Agora utilizando as identidades (3.12) e (3.13) obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \int_\kappa (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx - \int_{\partial\kappa} \varphi (\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds \right) + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \{\varphi\} [\nabla u] ds + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} [u (\nabla \varphi)] ds \\ - \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \{u\} [\nabla \varphi] ds + \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial\Omega} u (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) ds - \int_{\mathcal{E}_h^\circ} [u (\nabla \varphi)] ds \\ + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} [\nabla u] [\nabla \varphi] ds = \int_\Omega f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \int_{\kappa} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \varphi) dx - \int_{\partial \kappa} (\varphi (\nabla u \cdot \mathbf{n}) - u (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n})) ds \right) + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \{\varphi\} [\nabla u] ds \\ - \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \{u\} [\nabla \varphi] ds + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} [\nabla u] [\nabla \varphi] ds = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \end{aligned}$$

Aplicando a densidade de  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  em  $V$ , concluimos a prova.

□

### 3.2.1 Continuidade da forma bilinear

**Teorema 3.2.3** *Seja  $B(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear definida em (3.10). Se  $\epsilon > 0$ , então*

$$\exists M > 0 : |B(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V,$$

onde  $M = C \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{p^\theta}{h^\nu}}, \sqrt{\frac{p^\zeta}{2\epsilon h^\lambda}} \right\}$ ,  $C$  é uma constante independente de  $p$  e  $h$ .

Demonstração: Da definição de  $B(\cdot, \cdot)$  e observando que para  $u, v \in V$  podemos escrever:

$$\int_{\mathcal{E}_h^\circ} \{v\} [\nabla u] ds = \frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial \kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} v [\nabla u] ds, \quad (3.16)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} B(u, v) = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \int_{\kappa} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx - \int_{\partial \kappa} v (\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds + \int_{\partial \kappa} u (\nabla v \cdot \mathbf{n}) ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\partial \kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} v [\nabla u] ds - \frac{1}{2} \int_{\partial \kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} u [\nabla v] ds \right) + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \int [\nabla u] [\nabla v] ds. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz, obtemos:

$$\begin{aligned} |B(u, v)| \leq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u\|_{1, \kappa} \|v\|_{1, \kappa} + \left( \frac{p^\theta}{h^\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\frac{1}{2}, \partial \kappa} \left( \frac{h^\nu}{p^\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2}, \partial \kappa} \right. \\ + \left( \frac{p^\theta}{h^\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\frac{1}{2}, \partial \kappa} \left( \frac{h^\nu}{p^\theta} \right)^{1/2} \|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2}, \partial \kappa} \\ + \left( \frac{p^\zeta}{2\epsilon h^\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{0, \partial \kappa} \left( \frac{\epsilon h^\lambda}{2p^\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} \|[\nabla u]\|_{0, \partial \kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} \\ \left. + \left( \frac{p^\zeta}{2\epsilon h^\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{0, \partial \kappa} \left( \frac{\epsilon h^\lambda}{2p^\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} \|[\nabla v]\|_{0, \partial \kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} \right) + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla u]\|_{0, \mathcal{E}_h^\circ} \|[\nabla v]\|_{0, \mathcal{E}_h^\circ}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade do traço (1.6) e a definição de norma (3.8), temos:

$$\|v\|_{0,\partial\kappa} \leq \|v\|_{\frac{1}{2},\partial\kappa} \leq \|v\|_{1,\kappa}.$$

Desta forma podemos reescrever a expressão acima como:

$$\begin{aligned} |B(u, v)| \leq & \max \left\{ 1, \frac{p^\theta}{h^\nu}, \frac{p^\zeta}{2\epsilon h^\lambda} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u\|_{1,\kappa} \|v\|_{1,\kappa} + \|v\|_{1,\kappa} \left( \frac{h^\nu}{p^\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2},\partial\kappa} \right. \right. \\ & + \|u\|_{1,\kappa} \left( \frac{h^\nu}{p^\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2},\partial\kappa} + \|v\|_{1,\kappa} \left( \frac{\epsilon h^\lambda}{2p^\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} 2\|[\nabla u]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ} \\ & \left. \left. + \|u\|_{1,\kappa} \left( \frac{\epsilon h^\lambda}{2p^\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} 2\|[\nabla v]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ} \right) + \sqrt{\epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta}} \|[\nabla u]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ} \sqrt{\epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta}} \|[\nabla v]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ} \right\} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |B(u, v)| & \leq \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{p^\theta}{h^\nu}}, \sqrt{\frac{p^\zeta}{2\epsilon h^\lambda}} \right\} \left\{ \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( 3\|u\|_{1,\kappa} + \frac{h^\nu}{p^\theta} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2},\partial\kappa} \right) \right. \\ & + 3\epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla u]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2 \left. \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( 3\|v\|_{1,\kappa} + \frac{h^\nu}{p^\theta} \|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2},\partial\kappa} \right) \right. \\ & \left. + 3\epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla v]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 3 \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{p^\theta}{h^\nu}}, \sqrt{\frac{p^\zeta}{2\epsilon h^\lambda}} \right\} \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

□

**Observação 3.2.1** *O funcional linear  $L(v)$  dado em (3.10) é contínuo em  $V$ :*

$$\exists C > 0 : |L(v)| \leq C \|v\|, \quad \forall v \in V,$$

onde,  $C = \|f\|_{0,\Omega}$ . Este resultado segue da definição de  $L(\cdot)$ :

$$|L(v)| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|.$$

### 3.2.2 A Condição Inf-Sup

#### Problemas auxiliares

Dado  $u \in V$  arbitrário, encontrar para todo  $\kappa \in \mathcal{T}_h$  a função  $z_\kappa$ , tal que:

$$\begin{cases} -\Delta z_\kappa + z_\kappa = 0, & \text{em } \kappa, \\ \nabla z_\kappa \cdot \mathbf{n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}, & \text{sobre } \partial\kappa. \end{cases} \quad (3.17)$$

A formulação variacional equivalente é:

Dado  $u \in V$ , encontrar  $z_\kappa \in H^1(\kappa)$ :

$$(z_\kappa, v)_{1,\kappa} = \int_{\partial\kappa} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \gamma_0 v ds, \quad \forall v \in H^1(\kappa). \quad (3.18)$$

O Teorema de Lax-Milgram 1.2.5 garante que o problema variacional acima tem única solução  $z_\kappa \in H^1(\kappa)$ . A observação a seguir é consequência de (3.18), a mesma é mencionada aqui porque lista duas importantes identidades que são usadas na demonstração da condição Inf-Sup.

**Observação 3.2.2** *Substituindo  $v$  por  $u$  e  $z_\kappa$  em (3.18) obtemos as duas seguintes identidades:*

$$\begin{aligned} \|z_\kappa\|_{1,\kappa}^2 &= \int_{\partial\kappa} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \gamma_0 z_\kappa ds, \\ (z_\kappa, u)_{1,\kappa} &= \int_{\partial\kappa} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \gamma_0 u ds. \end{aligned}$$

**Teorema 3.2.4** *Dado  $u \in V$ , seja  $z_\kappa = z_\kappa(u)$ , a única solução para (3.18), então a seguinte relação é assegurada:*

$$\|z_\kappa\|_{1,\kappa} = \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa}.$$

Demonstração: Da observação 3.2.2 temos:

$$\begin{aligned} \|z_\kappa\|_{1,\kappa}^2 &= \int_{\partial\kappa} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \gamma_0 z_\kappa ds \\ &\leq \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa} \|\gamma_0 z_\kappa\|_{1/2,\partial\kappa}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema do traço 1.2.3 segue,

$$\|z_\kappa\|_{1,\kappa} \leq \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa}.$$

Pela definição de norma para  $\nabla u \cdot \mathbf{n}$  em  $H^{-1/2}(\partial\kappa)$  temos:

$$\|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa} = \sup_{\varphi \in H^{1/2}(\partial\kappa)} \frac{|(\nabla u \cdot \mathbf{n}, \varphi)_{-1/2 \times 1/2, \partial\kappa}|}{\|\varphi\|_{1/2,\partial\kappa}}. \quad (3.19)$$

O teorema 1.2.3 garante que o operador do traço  $\gamma_0 : H^1(\kappa) \rightarrow H^{1/2}(\partial\kappa)$  é sobrejetivo e

existe um operador inverso à direita  $\gamma_0^{-1}$ , tal que:

$$\begin{aligned}\gamma_0^{-1} : H^{1/2}(\partial\kappa) &\rightarrow H^1(\kappa), \\ \varphi &\mapsto [\omega]_\varphi,\end{aligned}$$

onde  $[\omega]_\varphi$  denota a classe de equivalência das funções em  $H^1(\kappa)$  talque  $\gamma_0\omega = \varphi$ . Usando o operador inverso do traço podemos reformular a definição de norma em  $H^{1/2}(\partial\kappa)$ :

$$\|\varphi\|_{1/2,\partial\kappa} = \inf_{\substack{v \in H^1(\kappa) \\ \gamma_0 v = \varphi}} \|v\|_{1,\kappa} = \inf_{v \in [\omega]_\varphi} \|v\|_{1,\kappa}.$$

Seja  $\omega_\varphi \in [\omega]_\varphi$  a função que minimiza a expressão acima (existe pelo menos uma função que satisfaz esta condição, pois  $[\omega]_\varphi$  é um conjunto fechado) e substituimos em (3.18):

$$(z_\kappa, \omega_\varphi)_{1,\kappa} = \int_{\partial\kappa} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \gamma_0 \omega_\varphi ds = (\nabla u \cdot \mathbf{n}, \varphi)_{-1/2 \times 1/2, \partial\kappa}$$

Substituindo em (3.19), concluimos:

$$\begin{aligned}\|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa} &= \sup_{\varphi \in H^{1/2}(\partial\kappa)} \frac{|(z_\kappa, \omega_\varphi)_{1,\kappa}|}{\|\varphi\|_{1/2,\partial\kappa}} \\ &\leq \|z_\kappa\|_{1,\kappa} \sup_{\varphi \in H^{1/2}(\partial\kappa)} \frac{\|\omega_\varphi\|_{1,\kappa}}{\|\varphi\|_{1/2,\partial\kappa}} \\ &= \|z_\kappa\|_{1,\kappa} \sup_{\varphi \in H^{1/2}(\partial\kappa)} \frac{\|\varphi\|_{1/2,\partial\kappa}}{\|\varphi\|_{1/2,\partial\kappa}} = \|z_\kappa\|_{1,\kappa}.\end{aligned}$$

□

### Condição Inf-Sup sobre o espaço $V$

Provaremos que a forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$  satisfaz a condição Inf-Sup em relação a norma  $\|\cdot\|$ , definida em (3.7). Começamos introduzindo a extensão de operadores  $\psi_\kappa$ :

$$\psi_\kappa : H^1(\bar{\kappa}) \rightarrow V,$$

$$\psi_\kappa(v_\kappa) = \begin{cases} v_\kappa, & \text{em } \bar{\kappa}, \\ 0, & \text{em } \Omega \setminus \bar{\kappa}. \end{cases}$$

Consequentemente, dada uma função  $u \in V$ , podemos resolver (3.18) obtendo um conjunto de funções  $z_\kappa(u)$  e construir uma função  $\hat{u} \in V$ , tal que

$$\hat{u} = u + \beta \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \psi_\kappa(z_\kappa), \quad (3.20)$$



onde  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**Lema 3.2.5** *Dada  $u \in V$ , então para todo  $\beta \in \mathbb{R}$ , existe  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(h, p)$  estritamente positivo tal que:*

$$\|\hat{u}\| \leq \varepsilon_1 \|u\|.$$

Demonstração: Substituindo a definição de  $\hat{u}$  em (3.7) e lembrando de (3.17) que  $(\nabla z_\kappa \cdot \mathbf{n}) = (\nabla u \cdot \mathbf{n})$  sobre  $\partial\kappa$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|^2 &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u + \beta z_\kappa\|_{1,\kappa}^2 + \frac{h^\nu}{p^\theta} \|\nabla(u + \beta z_\kappa) \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2, \partial\kappa}^2 \right) + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla(u + \beta z_\kappa)]\|_{0, \mathcal{E}_h^\circ}^2 \\ &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u\|_{1,\kappa}^2 + 2(u, \beta z_\kappa)_{1,\kappa} + \|\beta z_\kappa\|_{1,\kappa}^2 + (1 + \beta)^2 \frac{h^\nu}{p^\theta} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2, \partial\kappa}^2 \right) \\ &\quad + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} (1 + \beta)^2 \|[\nabla u]\|_{0, \mathcal{E}_h^\circ}^2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular, a desigualdade de Schwartz e lembrando o Teorema 3.2.4, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|^2 &\leq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( 2(\|u\|_{1,\kappa}^2 + \beta^2 \|z_\kappa\|_{1,\kappa}^2) + (1 + \beta)^2 \frac{h^\nu}{p^\theta} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2, \partial\kappa}^2 \right) + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} (1 + \beta)^2 \|[\nabla u]\|_{0, \mathcal{E}_h^\circ}^2 \\ &\leq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( 2\|u\|_{1,\kappa}^2 + \left( (1 + \beta)^2 + 2\beta^2 \frac{p^\theta}{h^\nu} \right) \frac{h^\nu}{p^\theta} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2, \partial\kappa}^2 \right) + (1 + \beta)^2 \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla u]\|_{0, \mathcal{E}_h^\circ}^2 \\ &\leq \varepsilon_1^2 \|u\|^2, \end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\max \left( 2, (1 + \beta)^2 + 2\beta^2 \frac{p^\theta}{h^\nu} \right)}. \quad (3.21)$$

□

**Lema 3.2.6** *Dada  $u \in V$ , então existem  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\epsilon, h, p) > 0$  e  $\hat{u} \in V$  tal que*

$$B(u, \hat{u}) \geq \varepsilon_2 \|u\|^2.$$

Demonstração: Da definição de  $B(u, \hat{u})$  e do fato que  $(\nabla z_\kappa \cdot \mathbf{n}) = (\nabla u \cdot \mathbf{n})$  sobre  $\partial\kappa$ , segue que:

$$\begin{aligned}
B(u, \hat{u}) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \int_{\kappa} (\nabla u \cdot \nabla(u + \beta z_{\kappa}) + u(u + \beta z_{\kappa})) dx - \int_{\partial\kappa} (u + \beta z_{\kappa})(\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial\kappa} (\nabla(u + \beta z_{\kappa}) \cdot \mathbf{n}) u ds \right) + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{u + \beta z_{\kappa}\} [\nabla u] ds - \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{u\} [\nabla(u + \beta z_{\kappa})] ds \\
&\quad + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \epsilon \frac{h^{\lambda}}{p^{\zeta}} [\nabla u] [\nabla(u + \beta z_{\kappa})] ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(u, \hat{u}) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u\|_{1,\kappa}^2 + \beta(u, z_{\kappa})_{1,\kappa} - \int_{\partial\kappa} u(\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds - \beta \int_{\partial\kappa} z_{\kappa}(\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial\kappa} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) u ds + \beta \int_{\partial\kappa} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) u ds \right) + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{u\} [\nabla u] ds + \beta \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{z_{\kappa}\} [\nabla u] ds \\
&\quad - \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{u\} [\nabla u] ds - \beta \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{u\} [\nabla u] ds + (1 + \beta) \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \epsilon \frac{h^{\lambda}}{p^{\zeta}} [\nabla u]^2 ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
B(u, \hat{u}) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u\|_{1,\kappa}^2 + \beta(u, z_{\kappa})_{1,\kappa} - \beta \int_{\partial\kappa} z_{\kappa}(\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds + \beta \int_{\partial\kappa} u(\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds \right) \\
&\quad + \beta \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{z_{\kappa}\} [\nabla u] ds - \beta \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{u\} [\nabla u] ds + \epsilon(1 + \beta) \frac{h^{\lambda}}{p^{\zeta}} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{E}_h^{\circ}}^2.
\end{aligned}$$

É importante notar que os traços  $\gamma_0 z_{\kappa}$  e  $\gamma_0 u$  foram denotados como  $z_{\kappa}$  e  $u$ , respectivamente. Agora usando as identidades dadas na observação 3.2.2 podemos reescrever a expressão acima como:

$$\begin{aligned}
B(u, \hat{u}) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\|u\|_{1,\kappa}^2 + 2\beta(u, z_{\kappa})_{1,\kappa} - \beta \|z_{\kappa}\|_{1,\kappa}^2) + \beta \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{z_{\kappa}\} [\nabla u] ds \\
&\quad - \beta \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{u\} [\nabla u] ds + \epsilon(1 + \beta) \frac{h^{\lambda}}{p^{\zeta}} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{E}_h^{\circ}}^2. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Estimando separadamente os termos com integral sobre  $\mathcal{E}_h^{\circ}$ ,

$$\begin{aligned}
\beta \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \{z_{\kappa}\} [\nabla u] ds &= \frac{\beta}{2} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^{\circ}} z_{\kappa} [\nabla u] ds \\
&\geq -\frac{|\beta|}{2} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|z_{\kappa}\|_{0,\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^{\circ}} \|\nabla u\|_{0,\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^{\circ}} \\
&\geq -\frac{|\beta|}{2} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|z_{\kappa}\|_{1/2,\partial\kappa} \|\nabla u\|_{0,\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^{\circ}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \{z_\kappa\} [\nabla u] ds &\geq -\frac{|\beta|}{4} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|z_\kappa\|_{1,\kappa}^2 + \|\nabla u\|_{0,\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ}^2 \right) \\
&\geq -\frac{|\beta|}{4} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|z_\kappa\|_{1,\kappa}^2 - \frac{|\beta|}{2} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-\beta \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \{u\} [\nabla u] ds &= -\frac{\beta}{2} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} u [\nabla u] ds \\
&\geq -\frac{|\beta|}{2} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{0,\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} \|\nabla u\|_{0,\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} \\
&\geq -\frac{|\beta|}{2} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{1/2,\partial\kappa} \|\nabla u\|_{0,\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} \\
&\geq -\frac{|\beta|}{4} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u\|_{1,\kappa}^2 + \|\nabla u\|_{0,\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ}^2 \right) \\
&\geq -\frac{|\beta|}{4} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{1,\kappa}^2 - \frac{|\beta|}{2} \|\nabla u\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2.
\end{aligned}$$

Substituindo essas estimativas em (3.22) obtemos:

$$\begin{aligned}
B(u, \hat{u}) &\geq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \left(1 - \frac{|\beta|}{4}\right) \|u\|_{1,\kappa}^2 + 2\beta(u, z_\kappa)_{1,\kappa} - \left(\beta + \frac{|\beta|}{4}\right) \|z_\kappa\|_{1,\kappa}^2 \right) \\
&\quad + \left( \epsilon(1 + \beta) \frac{h^\lambda}{p^\zeta} - |\beta| \right) \|\nabla u\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Yong:

$$2(u, z_\kappa)_{1,\kappa} \leq \epsilon \|u\|_{1,\kappa}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|z_\kappa\|_{1,\kappa}^2, \quad \epsilon > 0,$$

e aplicando a desigualdade de Schwartz e o Teorema 3.2.4, finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
B(u, \hat{u}) &\geq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \left(1 - \frac{|\beta|}{4} - \epsilon|\beta|\right) \|u\|_{1,\kappa}^2 - \left(\beta + \frac{|\beta|}{4} + \frac{|\beta|}{\epsilon}\right) \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa}^2 \right) \\
&\quad + \left( \epsilon(1 + \beta) \frac{h^\lambda}{p^\zeta} - |\beta| \right) \|\nabla u\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2.
\end{aligned}$$

Se  $\beta < 0$ , temos:

$$\begin{aligned}
B(u, \hat{u}) \geq & \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \left( 1 - \varepsilon |\beta| - \frac{|\beta|}{4} \right) \|u\|_{1,\kappa}^2 + \left( \frac{3|\beta|}{4} - \frac{|\beta|}{\varepsilon} \right) \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa}^2 \right) \\
& + \left( \varepsilon(1 - |\beta|) \frac{h^\lambda}{p^\zeta} - |\beta| \right) \|[\nabla u]\|_{0,\varepsilon_h^\circ}^2.
\end{aligned}$$

O segundo termo do lado direito é positivo se  $\varepsilon > \frac{4}{3}$ . Se tomamos  $\varepsilon = 2$ , então dados os parâmetros  $\epsilon, \lambda, \zeta, \nu$  e  $\theta$ , sempre podemos encontrar um coeficiente  $\beta$  tal que existe  $\varepsilon_2(h, p) > 0$ , definido por:

$$\varepsilon_2 = \min \left( 1 - \frac{9}{4}|\beta|, \frac{|\beta|p^\theta}{4h^\nu}, 1 - |\beta| - \frac{|\beta|p^\zeta}{\epsilon h^\lambda} \right), \quad (3.23)$$

que satisfaz a seguinte desigualdade:

$$B(u, \hat{u}) \geq \varepsilon_2 \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u\|_{1,\kappa}^2 + \frac{h^\nu}{p^\theta} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa}^2 \right) + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla u]\|_{0,\varepsilon_h^\circ}^2 \right) = \varepsilon \|u\|^2.$$

□

**Teorema 3.2.7** (*Condição Inf-Sup*) Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\gamma = \gamma(\epsilon, h, p) > 0$  tal que:

$$\sup_{v \in V/\{0\}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|} \geq \gamma \|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Demonstração: Da definição de supremo temos:

$$\sup_{v \in V/\{0\}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|} \geq \frac{|B(u, \hat{u})|}{\|\hat{u}\|},$$

onde  $\hat{u}$  é definido por (3.20). Aplicando os lemas 3.2.6 e 3.2.5, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sup_{v \in V/\{0\}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|} & \geq \frac{\varepsilon_2(\epsilon, h, p) \|u\|^2}{\|\hat{u}\|} \\
& \geq \frac{\varepsilon_2(\epsilon, h, p) \|u\| \|\hat{u}\|}{\varepsilon_1(h, p) \|\hat{u}\|} \\
& = \frac{\varepsilon_2(\epsilon, h, p)}{\varepsilon_1(h, p)} \|u\|, \quad \forall u \in V.
\end{aligned}$$

Então,  $\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ .

□

**Corolário 3.2.8** Se  $\lambda = \nu = \theta = \zeta = 0$ , ou seja, a norma  $\|\cdot\|$  e o termo de estabilização não dependem de  $p$  e  $h$ , então o coeficiente Inf-Sup  $\gamma$  é uma constante.

Demonstração: Para simplificar, consideramos  $\epsilon = 1$ . Escolha  $\beta = \frac{4}{10}$ , por exemplo, logo (3.21) e (3.23) asseguram:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\max\left(2, \left(\frac{14}{10}\right)^2 + 2\left(\frac{4}{10}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{228}}{10}$$

e

$$\varepsilon_2 = \min\left(1 - \frac{9}{10}, \frac{1}{10}, 1 - \frac{4}{10} - \frac{4}{10}\right) = \frac{1}{10}.$$

Então,

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\sqrt{228}}.$$

□

**Corolário 3.2.9** *Se  $\lambda = \nu$  e  $\theta = \zeta$ , isto é, o termo de estabilização e a norma  $\|\cdot\|$  tem dependência de  $h$  e  $p$  idêntica. Então, para  $\frac{h^\lambda}{p^\zeta} < 1$ , o coeficiente Inf-Sup é limitado inferiormente por uma constante  $C > 0$ .*

Demonstração: Novamente consideramos  $\epsilon = 1$ , mas escolhemos  $\beta = \frac{4h^\nu}{10p^\theta}$ . Se consideramos  $\frac{h^\lambda}{p^\zeta} < 1$ , obtemos as seguintes desigualdades de (3.21) e (3.23):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{\max\left(2, \left(1 + \frac{4h^\nu}{10p^\theta}\right)^2 + 2\left(\frac{4h^\nu}{10p^\theta}\right)^2 \frac{p^\theta}{h^\nu}\right)} \\ &\leq \sqrt{\max\left(2, \left(\frac{14}{10}\right)^2 + 2\left(\frac{4}{10}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{228}}{10} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \min\left(1 - \frac{9h^\nu}{10p^\theta}, \frac{1}{10}, 1 - \frac{4h^\nu}{10p^\theta} - \frac{4p^\zeta}{10p^\theta}\right) \\ &\geq \min\left(1 - \frac{9}{10}, \frac{1}{10}, 1 - \frac{4}{10} - \frac{4}{10}\right) = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \geq \frac{1}{\sqrt{228}}.$$

□

### Condição Inf-Sup sobre o espaço discreto $V^{hp}$

**Teorema 3.2.10** *(Condição Inf-Sup para o problema discreto) Seja  $\{\mathcal{F}_\kappa\}$  definindo uma família de aplicações afim inversíveis. Se  $\epsilon > 0$ , então existe  $\gamma_h = \gamma_h(\epsilon, h, p) > 0$  tal que*

$$\sup_{v_h \in V^{hp}/\{0\}} \frac{|B(u_h, v_h)|}{\|v_h\|} \geq \gamma_h \|u_h\|, \quad \forall u_h \in V^{hp}/\{0\},$$

onde

$$\gamma_h = C \min \left\{ 1, \frac{h^{1-\nu}}{p^{2-\theta}} \right\}, \quad C > 0.$$

Demonstração: Pela definição de supremo, temos:

$$\sup_{v_h \in V^{hp}/\{0\}} \frac{|B(u_h, v_h)|}{\|v_h\|} \geq \frac{|B(u_h, u_h)|}{\|u_h\|}, \quad \forall u_h \in V^{hp}/\{0\}.$$

Da definição da forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$ , temos:

$$B(u_h, u_h) = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u_h\|_{1,\kappa}^2 + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla u_h]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2.$$

Aplicando o corolário 1.3.4, existe  $C > 0$ , tal que:

$$\begin{aligned} B(u_h, u_h) &\geq C \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u_h\|_{1,\kappa}^2 + \frac{h}{p^2} \|\nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa}^2 \right) + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla u_h]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2 \right) \\ &= C \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u_h\|_{1,\kappa}^2 + \frac{h^{1-\nu}}{p^{2-\theta}} \frac{h^\nu}{p^\theta} \|\nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2,\partial\kappa}^2 \right) + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla u_h]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2 \right) \\ &\geq \gamma_h \|u_h\|^2. \end{aligned}$$

□

### 3.2.3 Existência e Unicidade de Soluções

**Lema 3.2.11** *Se  $f \in L^2(\Omega)$ , então existe uma única solução  $\omega \in V$  para o problema variacional descontínuo (3.9) que é solução para o problema modelo (3.1) de maneira fraca.*

Demonstração: Primeiramente, consideremos a formulação variacional clássica do problema modelo (3.1) no espaço  $H_0^1(\Omega)$ .

$$\text{Encontrar } \omega \in H_0^1(\Omega) : A(\omega, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.24)$$

onde  $L(v)$  é definido como em (3.10) e o funcional bilinear  $A(\omega, v)$  é definido como segue:

$$A : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(\omega, v) = \int_{\Omega} (\nabla \omega \cdot \nabla v + \omega v) dx.$$

Pelo Teorema de Lax-Milgram 1.2.5 e pela equivalência dessa formulação com o problema modelo (3.1), sabemos que se  $f \in L^2(\Omega)$ , então existe uma única solução  $\omega \in H_0^1(\Omega) \cap H(\Delta, \Omega) \subset V$  de (3.24) que satisfaz o problema modelo de maneira fraca. Consequentemente, pelo Teorema 3.2.2 segue que  $\omega \in V$  é também uma solução para o problema variacional descontínuo (3.9).

A solução é única porque a forma bilinear é definida positiva, ou seja:

$$B(v, v) = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{1,\kappa} + \epsilon \frac{h^\lambda}{p^\zeta} \|[\nabla v]\|_{0,\mathcal{E}_h^\circ}^2 > 0, \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

□

### 3.2.4 Estabilidade

Na seção anterior, foi estabelecida a equivalência entre a formulação fraca e a formulação forte e a existência de única solução para a formulação fraca. Nesta seção veremos que a formulação fraca é estável, ou seja, a solução depende continuamente dos dados de entrada.

**Proposição 3.2.12** *Se o parâmetro de estabilização é constante, isto é,  $\epsilon = 1$ ,  $\lambda = \zeta = 0$ , e se os parâmetros da norma  $\nu = \theta = 0$ , então a solução  $u$  do problema variacional (3.9) depende continuamente dos dados de entrada, ou seja, dada uma pequena perturbação  $\delta f \in L^2(\Omega)$ , existe única perturbação  $\delta u \in V$  tal que:*

$$\exists C > 0 : \|\delta u\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \|\delta u\| \leq C \|\delta f\|_{0,\Omega},$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $h$  e  $p$ .

Demonstração: Seja  $\delta f \in L^2(\Omega)$  uma perturbação nos dados de entrada  $f$ . Consequentemente, desde que o problema considerado abaixo é linear, a perturbação  $\delta u \in V$  na solução  $u$ , satisfaz:

$$B(\delta u, v) = \int_{\Omega} \delta f v dx, \quad \forall v \in V. \quad (3.25)$$

A condição Inf-Sup do Teorema 3.2.7 garante,

$$\|\delta u\| \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{v \in V/\{0\}} \frac{|B(\delta u, v)|}{\|v\|}.$$

Usando (3.25) e a observação 3.2.1, temos:

$$\begin{aligned} \|\delta u\| &\leq \frac{1}{\gamma} \sup_{v \in V/\{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\delta f v| dx}{\|v\|} \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{v \in V/\{0\}} \frac{\|\delta f\|_{0,\Omega} \|v\|}{\|v\|} \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \|\delta f\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Desde que  $\epsilon = 1$ ,  $\lambda = \nu = \theta = \zeta = 0$ , sabemos pelo corolário 3.2.8 e pelo Teorema 3.2.7 que o parâmetro inf-sup é uma constante, mais precisamente  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{228}}$ .

□

**Proposição 3.2.13** *Se  $\lambda = \nu$  e  $\theta = \zeta$ , isto é, o termo de estabilização e a norma  $\|\cdot\|$  tem dependência de  $h$  e  $p$  idêntica. Então para  $\frac{h^\lambda}{p^\kappa} < 1$  a solução  $u$  para o problema variacional (3.9) depende continuamente dos dados de entrada, isto é, dada uma pequena perturbação  $\delta f \in L^2(\Omega)$ , existe única perturbação  $\delta u \in V$ , tal que:*

$$\exists C > 0 : \|\delta u\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \|\delta u\| \leq C\|\delta f\|_{0,\Omega},$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $h$  e  $p$ .

Demonstração: Procedendo de forma similar à demonstração da proposição anterior, temos:

$$\|\delta u\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \|\delta u\| \leq \frac{1}{\gamma}\|\delta f\|_{0,\Omega}.$$

Aplicando o Corolário 3.2.9 concluímos a prova. □

### 3.3 Estimativa de erro *a priori*

Conforme apresentado nas seções anteriores, podemos obter soluções aproximadas  $u_h$  para  $u$ , usando funções teste polinomiais por partes de grau  $\leq p_\kappa$ . Nesta seção, investigaremos as propriedades de convergência da solução aproximada  $u_h$ , obtida usando  $h$  ou  $p$  refinamento.

Primeiramente estimamos as taxas de convergência na norma  $\|\cdot\|$  e após obtemos uma taxa de convergência ótima na norma  $\|\cdot\|_{1,\mathcal{T}_h}$ , para o caso em que  $p \geq 2$ . Também assumimos, a menos que fixemos o contrário, que a família de partições  $\{\mathcal{T}_h\}$  é regular.

Desde que a forma bilinear satisfaz as condições de continuidade e Inf-Sup discreta e além disso, é coerciva sobre  $V^{hp} \times V^{hp}$ , segue do Teorema de Lax-milgram Generalizado 1.2.4, que existe uma única solução  $u_h \in V^{hp}$  para o problema variacional discreto (3.15). Seja  $u \in V$  a solução exata do problema variacional (3.9), então usando a linearidade de  $B(\cdot, \cdot)$ , segue que o erro da aproximação  $e = u - u_h$  é dado por:

$$\text{Encontrar } e \in V \text{ tal que } B(e, v) = \underbrace{L(v) - B(u_h, v)}_{R^h(v)}, \quad \forall v \in V, \quad (3.26)$$

onde  $R^h : V \rightarrow \mathbb{R}$  é referenciado como o funcional residual. Note que de (3.15) o resíduo zera sobre o espaço  $V^{hp}$  de elementos finitos discretizado. Então:

$$B(e, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V^{hp}. \quad (3.27)$$

Esta propriedade é conhecida como a propriedade de ortogonalidade para o erro.



### 3.3.1 Erro de interpolação na norma $\|\cdot\|$

Considere  $\pi_{hp}$  o interpolador de Babuška e Suri, definido em (1.13).

**Teorema 3.3.1** (Teorema de Interpolação) *Seja  $u \in V$ , sendo que  $u|_{\kappa} \in H^{s_{\kappa}}(\kappa)$ ,  $s_{\kappa} \geq 2$ . Consideremos os parâmetros de estabilização  $\epsilon > 0$  e  $\lambda, \zeta \geq 0$ , e os parâmetros da norma  $\nu, \theta \geq 0$ , então existe  $C > 0$ , independente de  $u$ ,  $h$  e  $p$  tal que o erro de interpolação  $\eta = u - \pi_{hp}u$  pode ser limitado como segue:*

$$\|\eta\| \leq C \frac{h^{\mu^*}}{p^{s^*}} \sqrt{\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_{\kappa}, \kappa}^2}, \quad s_{\kappa} \geq 2,$$

onde:

$$\begin{aligned} \mu^* &= \min \left\{ \mu - 1, \mu - \frac{3}{2} + \frac{\nu}{2}, \mu - \frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} \right\}, \\ s^* &= \min \left\{ s - 1, s - \frac{3}{2} + \frac{\theta}{2}, s - \frac{3}{2} + \frac{\zeta}{2} \right\}, \\ \mu &= \min(p + 1, s), \quad s = \min_{\kappa \in \mathcal{T}_h}(s_{\kappa}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Demonstração: Usando a desigualdade triangular na definição da norma  $\|\cdot\|$  em (3.7), temos:

$$\|\eta\|^2 \leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|\eta\|_{1, \kappa}^2 + \frac{h^{\nu}}{p^{\theta}} \|\nabla \eta \cdot \mathbf{n}\|_{-1/2, \partial \kappa}^2 + \epsilon \frac{h^{\lambda}}{p^{\zeta}} \|\nabla \eta \cdot \mathbf{n}\|_{0, \partial \kappa}^2 \right).$$

Usando o lema do traço 1.3.2, podemos reescrever como:

$$\begin{aligned} \|\eta\|^2 &\leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|\eta\|_{0, \kappa}^2 + \|\nabla \eta\|_{0, \kappa}^2 + \left( \frac{h^{\nu}}{p^{\theta}} + \epsilon \frac{h^{\lambda}}{p^{\zeta}} \right) \left( \frac{1}{h_{\kappa}} \|\nabla \eta\|_{0, \kappa}^2 + \|\nabla \eta\|_{0, \kappa} \|\nabla^2 \eta\|_{0, \kappa} \right) \right) \\ &\leq C(\epsilon) \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|\eta\|_{0, \kappa}^2 + \left( 1 + \frac{h^{\nu-1}}{p^{\theta}} + \frac{h^{\lambda-1}}{p^{\zeta}} \right) \|\nabla \eta\|_{0, \kappa}^2 + \left( \frac{h^{\nu}}{p^{\theta}} + \frac{h^{\lambda}}{p^{\zeta}} \right) \|\nabla \eta\|_{0, \kappa} \|\nabla^2 \eta\|_{0, \kappa} \right). \end{aligned}$$

Agora aplicando o Teorema 1.3.5 de interpolação, obtemos o resultado final:

$$\begin{aligned} \|\eta\|^2 &\leq C(\epsilon) \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{h^{2\mu_{\kappa}}}{p^{2s_{\kappa}}} + \left( 1 + \frac{h^{\nu-1}}{p^{\theta}} + \frac{h^{\lambda-1}}{p^{\zeta}} \right) \frac{h^{2\mu_{\kappa}-2}}{p^{2s_{\kappa}-2}} + \left( \frac{h^{\nu}}{p^{\theta}} + \frac{h^{\lambda}}{p^{\zeta}} \right) \frac{h^{2\mu_{\kappa}-3}}{p^{2s_{\kappa}-3}} \right) \|u\|_{s_{\kappa}, \kappa}^2 \\ &\leq C(\epsilon) \left( \frac{h^{2\mu-2}}{p^{2s-2}} + \frac{h^{2\mu-3+\nu}}{p^{2s-3+\theta}} + \frac{h^{2\mu-3+\lambda}}{p^{2s-3+\zeta}} \right) \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_{\kappa}, \kappa}^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\|\eta\| \leq C(\epsilon) \frac{h^{\mu^*}}{p^{s^*}} \sqrt{\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_{\kappa}, \kappa}^2},$$

onde  $\mu^*$  e  $s^*$  são dados por (3.28).

□

**Corolário 3.3.2** Para  $\lambda, \nu \leq 1$  e  $\zeta, \theta \leq 1$ , obtemos as maiores taxas de convergência para o erro de interpolação na norma  $\|\cdot\|$  e as taxas de convergência são  $\nu - 1$  e  $s - 1$  para convergência em  $h$  e  $p$ , respectivamente.

### 3.3.2 Estimativa de erro na norma $\|\cdot\|$

**Teorema 3.3.3** Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $u \in H^2(\Omega) \cap V$  a única solução para o problema variacional (3.9) e seja  $u_h \in V^{hp}$  aproximação para  $u$  dada por (3.15) e os parâmetros de estabilização e da norma são de ordem  $O(h/p^2)$ , (isto é,  $\lambda = \nu = 1$  e  $\zeta = \theta = 2$ ). Então, o erro  $e = u - u_h$  satisfaz a cota:

$$\|u - u_h\| \leq C(\epsilon) \frac{h^{\mu-3/2}}{p^{s-2}} \sqrt{\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_\kappa, \kappa}^2}, \quad p \geq 1, s_\kappa \geq 2,$$

onde  $s = \min_{\kappa \in \mathcal{T}_h}(s_\kappa)$ ,  $\mu = \min(p + 1, s)$  e  $C(\epsilon)$ - constante positiva que depende de  $\epsilon$ .

Demonstração: Introduzimos duas funções  $\eta$  e  $\xi$ , tal que o erro da aproximação  $e = \eta - \xi$ , onde  $\eta = u - \pi_{hp}u$ ,  $\xi = u_h - \pi_{hp}u$ , sendo que  $\pi_{hp}$  representa o interpolador global de (1.13). Note que  $\xi \in V^{hp}$  e que o erro de interpolação  $\eta$  está em  $H^2(\mathcal{T}_h)$ .

Consequentemente usando a desigualdade triangular,

$$\|u - u_h\| \leq \|\eta\| + \|\xi\|. \quad (3.29)$$

Aplicando a condição inf-sup discreta do Teorema 3.2.10, e tomando  $\nu = 1$  e  $\theta = 2$ , obtemos:

$$\|\xi\| \leq C \sup_{v_h \in V^{hp}/\{0\}} \frac{|B(\xi, v_h)|}{\|v_h\|}.$$

Usando a propriedade de ortogonalidade (3.27), reescrevemos a desigualdade como:

$$\|\xi\| \leq C \sup_{v_h \in V^{hp}/\{0\}} \frac{|B(\eta, v_h)|}{\|v_h\|}.$$

Tomando  $\lambda = 1$  e  $\zeta = 2$  e aplicando o Teorema 3.2.3 (continuidade) temos:

$$\|\xi\| \leq C \sup_{v_h \in V^{hp}/\{0\}} \frac{M \|\eta\| \|v_h\|}{\|v_h\|} \leq C(\epsilon) \frac{p}{\sqrt{h}} \|\eta\|.$$

Substituindo estes resultados em (3.29), podemos concluir:

$$\|u - u_h\| \leq \|\eta\| + \|\xi\| \leq \|\eta\| + C(\epsilon) \frac{p}{\sqrt{h}} \|\eta\| \leq C(\epsilon) \frac{p}{\sqrt{h}} \|\eta\|.$$

Com esta escolha de coeficientes nos parâmetros do Teorema 3.3.1 temos:

$$\begin{aligned}\mu^* &= \min \left\{ \mu - 1, \mu - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}, \mu - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right\} = \mu - 1, \\ s^* &= \min \left\{ s - 1, s - \frac{3}{2} + 1, \mu - \frac{3}{2} + 1 \right\} = s - 1.\end{aligned}$$

Então o Teorema 3.3.1 assegura:

$$\|u - u_h\| \leq C(\epsilon) \frac{p}{\sqrt{h}} \frac{h^{\mu^*}}{p^{s^*}} \sqrt{\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_\kappa, \kappa}^2} \leq C(\epsilon) \frac{h^{\mu - \frac{3}{2}}}{p^{s-2}} \sqrt{\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_\kappa, \kappa}^2}.$$

□

Desde que  $\|v\|_{1, \mathcal{T}_h} \leq \|v\|$ , o teorema acima assegura convergência subótima para o erro na norma  $\|\cdot\|_{1, \mathcal{T}_h}$ . Contudo, para o caso em que  $p \geq 2$  apresentamos a seguir uma taxa de convergência para o erro nessa mesma norma, ótima em  $h$ .

### 3.3.3 Estimativa de erro na norma $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$

Como mencionado acima, a seguir apresentamos uma taxa de convergência do erro ótima em  $h$  na norma  $\|\cdot\|_{1, \mathcal{T}_h}$ , para  $p \geq 2$ . Para obter esse resultado foi fundamental o uso dos interpoladores introduzidos por Riviere, et al [29, 27] na demonstração da estimativa. Usando esses interpoladores, obtivemos sucesso na prova da taxa de convergência em  $h$ , mas não em  $p$ , cuja taxa de convergência obtida foi na ordem de  $1/2$ .

Consideremos a seguinte norma sobre  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ :

$$\|v\|_{2, \mathcal{T}_h}^2 = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|v\|_{1, \kappa}^2 + \frac{p^\zeta}{\epsilon h^\lambda} \|v\|_{0, \partial\kappa}^2 + \frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta} \|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{0, \partial\kappa}^2 \right) \quad (3.30)$$

**Lema 3.3.4** *A forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$  é contínua sobre  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \times H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  com relação a norma  $\|\cdot\|_{2, \mathcal{T}_h}$ , ou seja,*

$$\exists K > 0 : |B(u, v)| \leq K \|u\|_{2, \mathcal{T}_h} \|v\|_{2, \mathcal{T}_h}, \quad \forall u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h),$$

onde  $K$  é uma constante independente de  $h$  e  $p$ .

Demonstração: Usando a definição de  $B(u, v)$  dada em (3.10) e seguindo raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do Teorema 3.2.3, obtemos:

$$\begin{aligned}B(u, v) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( (u, v)_{1, \kappa} - \int_{\partial\kappa} v(\nabla u \cdot \mathbf{n}) ds + \int_{\partial\kappa} u(\nabla v \cdot \mathbf{n}) ds + \frac{1}{2} \int_{\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} v[\nabla u] ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\partial\kappa \cap \mathcal{E}_h^\circ} u[\nabla v] ds \right) + \frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta} \int_{\mathcal{E}_h^\circ} [\nabla u][\nabla v] ds.\end{aligned}$$

Tomando  $u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e aplicando a desigualdade de Schwartz e a desigualdade triangular, segue:

$$\begin{aligned}
|B(u, v)| &\leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u\|_{1,\kappa} \|v\|_{1,\kappa} + \sqrt{\frac{p^\zeta}{\epsilon h^\lambda}} \|v\|_{0,\partial\kappa} \sqrt{\frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta}} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial\kappa} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{p^\zeta}{\epsilon h^\lambda}} \|u\|_{0,\partial\kappa} \sqrt{\frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta}} \|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial\kappa} + \frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial\kappa} \|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial\kappa} \right) \\
&\leq C \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|u\|_{1,\kappa}^2 + \frac{p^\zeta}{\epsilon h^\lambda} \|u\|_{0,\partial\kappa}^2 + \frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta} \|\nabla u \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial\kappa}^2 \right) \right)^{1/2} \\
&\quad \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|v\|_{1,\kappa}^2 + \frac{p^\zeta}{\epsilon h^\lambda} \|v\|_{0,\partial\kappa}^2 + \frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta} \|\nabla v \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial\kappa}^2 \right) \right)^{1/2}. \\
&\Rightarrow |B(u, v)| \leq C \|u\|_{2,\mathcal{T}_h} \|v\|_{2,\mathcal{T}_h}, \quad \forall u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \tag{3.31}
\end{aligned}$$

□

Agora, introduzimos uma importante desigualdade inversa entre os espaços  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  para funções  $v_h \in V^{hp}$ .

**Lema 3.3.5** *Considere os parâmetros da norma  $\|\cdot\|_{2,\mathcal{T}_h}$ , tal que  $\lambda = \zeta = 1$ , então a seguinte relação inversa é assegurada:*

$$\exists C > 0 : \|v_h - \bar{v}_h\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq C(\epsilon) \sqrt{p} \|v_h\|_{1,\mathcal{T}_h}, \quad \forall v_h \in V^{hp},$$

onde  $\bar{v}_h$  denota a média por partes de  $v_h$  dada por:

$$\bar{v}_h = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \bar{v}_{h|\kappa}, \quad \bar{v}_{h|\kappa} = \frac{1}{|K|} \int_{\kappa} v_h dx. \tag{3.32}$$

Demonstração: Da definição da norma  $\|\cdot\|_{2,\mathcal{T}_h}$  para  $v_h \in V^{hp}$ , segue:

$$\|v_h - \bar{v}_h\|_{2,\mathcal{T}_h}^2 = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|v_h - \bar{v}_h\|_{1,\kappa}^2 + \frac{p^\zeta}{\epsilon h^\lambda} \|v_h - \bar{v}_h\|_{0,\partial\kappa}^2 + \frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta} \|\nabla v_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial\kappa}^2 \right).$$

Temos que  $\int_{\kappa} (v_h(x) - \bar{v}_h) dx = 0$ , logo usando a desigualdade de Poincaré- Friedrich's (1.4), temos que  $\|v_h - \bar{v}_h\|_{0,\kappa} \leq C \|\nabla v_h\|_{0,\kappa}$ .

Então usando os lemas do traço 1.3.1 e 1.3.2, podemos reescrever como:

$$\begin{aligned} \|v_h - \bar{v}_h\|_{2,\mathcal{T}_h}^2 \leq & C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|v_h\|_{1,\kappa}^2 + \frac{p^\zeta}{\epsilon h^\lambda} \left( \frac{1}{h_\kappa} \|v_h - \bar{v}_h\|_{0,\kappa}^2 + \|v_h - \bar{v}_h\|_{0,\kappa} \|\nabla v_h\|_{0,\kappa} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta} \left( \frac{1}{h_\kappa} \|\nabla v_h\|_{0,\kappa}^2 + \|\nabla v_h\|_{0,\kappa} \|\nabla^2 v_h\|_{0,\kappa} \right) \right). \end{aligned}$$

Aplicando o lema 1.2.2 e a desigualdade inversa 1.9, obtemos:

$$\begin{aligned} \|v_h - \bar{v}_h\|_{2,\mathcal{T}_h}^2 \leq & C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|v_h\|_{1,\kappa}^2 + \frac{p^\zeta}{\epsilon h^{\lambda-1}} \|\nabla v_h\|_{0,\kappa}^2 + \frac{\epsilon h^{\lambda-1}}{p^{\zeta-2}} \|\nabla v_h\|_{0,\kappa}^2 \right) \\ \leq & C(\epsilon) \max \left\{ 1, \frac{h^{1-\lambda}}{p^{-\zeta}}, \frac{h^{\lambda-1}}{p^{\zeta-2}} \right\} \|v_h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2. \end{aligned}$$

Se  $\lambda = \zeta = 1$ , segue que

$$\|v_h - \bar{v}_h\|_{2,\mathcal{T}_h}^2 \leq c(\epsilon) \sqrt{p} \|v_h\|_{1,\mathcal{T}_h}.$$

□

Para obter a estimativa ótima em  $h$  consideramos o interpolador proposto por Riviere et al, dado por 1.15.

**Teorema 3.3.6** (Teorema de interpolação) *Sejam  $u \in H^2(\Omega) \cap V$  e  $\tilde{\pi}_{hp}(u) \in V^{hp}$ , onde  $\tilde{\pi}_{hp}$  é o interpolador de  $u$  como dado em (1.15) e sejam os parâmetros de estabilização  $\epsilon > 0$  e  $\lambda, \zeta \geq 0$ , então existe  $C(\epsilon) > 0$ , independente de  $u, h$  e  $p$  tal que o erro do interpolador pode ser limitado como segue:*

$$\|u - \tilde{\pi}_{hp} u\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq C(\epsilon) \frac{h^{\mu^{**}}}{p^{s^{**}}} \sqrt{\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_\kappa \kappa}^2}, \quad s_\kappa \geq 2, p \geq 2,$$

onde,

$$\begin{aligned} \mu^{**} &= \min \left\{ \mu - 1, \mu - \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}, \mu - \frac{3}{2} + \frac{\lambda}{2} \right\}, \\ s^{**} &= \min \left\{ s - \frac{3}{2}, s - \frac{3}{2} - \frac{\zeta}{2}, s - \frac{7}{4} + \frac{\zeta}{2} \right\}, \\ \mu &= \min\{p + 1, s\}, \quad s = \min_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (s_\kappa). \end{aligned}$$

Demonstração: Relembrando a definição da norma  $\|\cdot\|_{2,\mathcal{T}_h}$  de (3.30):

$$\|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h}^2 = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|\eta\|_{1,\kappa}^2 + \frac{p^\zeta}{\epsilon h^\lambda} \|\eta\|_{0,\partial\kappa}^2 + \frac{\epsilon h^\lambda}{p^\zeta} \|\nabla \eta \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial\kappa}^2 \right).$$

Os lemas 1.3.1 e 1.3.2 garantem:

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h}^2 \leq & C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \|\eta\|_{1,\kappa}^2 + \frac{h^{-\lambda-1}}{\epsilon p^{-\zeta}} (\|\eta\|_{0,\kappa}^2 + h\|\eta\|_{0,\kappa}\|\nabla\eta\|_{0,\kappa}) \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon h^{\lambda-1}}{p^\zeta} (\|\nabla\eta\|_{0,\kappa}^2 + h\|\nabla\eta\|_{0,\kappa}\|\nabla^2\eta\|_{0,\kappa}) \right). \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 1.3.6 de interpolação, concluimos:

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h}^2 & \leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{h^{2\mu_\kappa}}{p_\kappa^{2s_\kappa-3}} + \frac{h^{2\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{2s_\kappa-3}} + \frac{h^{-\lambda-1}}{\epsilon p^{-\zeta}} \left( \frac{h^{2\mu_\kappa}}{p_\kappa^{2s_\kappa-3}} + h \frac{h^{\mu_\kappa}}{p_\kappa^{s_\kappa-3/2}} \frac{h^{\mu_\kappa-1}}{p_\kappa^{s_\kappa-3/2}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\epsilon h^{\lambda-1}}{p^\zeta} \left( \frac{h^{2\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{2s_\kappa-3}} + h \frac{h^{\mu_\kappa-1}}{p_\kappa^{s_\kappa-3/2}} \frac{h^{\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{s_\kappa-2}} \right) \right) \|u\|_{s_\kappa,\kappa}^2 \\ & \leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{h^{2\mu-2}}{p^{2s-3}} + \frac{h^{2\mu-\lambda-1}}{\epsilon p^{2s-\zeta-3}} + \frac{h^{2\mu-\lambda-1}}{p^{2s-\zeta-3}} + \epsilon \frac{h^{2\mu-\lambda-3}}{p^{2s+\zeta-3}} + \epsilon \frac{h^{2\mu+\lambda-3}}{p^{2s+\zeta-7/2}} \right) \|u\|_{s_\kappa,\kappa}^2 \\ & \leq C(\epsilon) \left( \frac{h^{\mu^{**}}}{p^{s^{**}}} \right)^2 \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_\kappa,\kappa}^2. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.3.7** (*Estimativa de erro*) Dado  $\epsilon > 0$ . Sejam  $u \in H^2(\Omega) \cap V$  a solução exata para o problema variacional (3.9),  $u_h \in V^{hp}$  a aproximação discreta de (3.15) e o parâmetro de estabilização de ordem  $O(h/p)$  (isto é,  $\lambda = 1$  e  $\zeta = 1$ ), então existe  $C(\epsilon) \geq 0$  tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq C(\epsilon) \frac{h^{\mu-1}}{p^{s-5/2}} \sqrt{\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_\kappa,\kappa}^2}, \quad p \geq 2,$$

onde  $\mu = \min(p+1, s)$ ,  $s = \min_{\kappa \in \mathcal{T}_h}(s_\kappa)$ .

Demonstração: Dado o interpolador  $\tilde{\pi}_{hp}u$  de acordo com (1.15), novamente dividimos  $e$  tal que  $e = \eta - \xi$ , onde  $\eta = u - \tilde{\pi}_{hp}u$  e  $\xi = u_h - \tilde{\pi}_{hp}u$ . Usando a desigualdade triangular, obtemos:

$$\|u - u_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \|\eta\|_{1,\mathcal{T}_h} + \|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h}. \quad (3.33)$$

De (1.3) e (3.10), segue que

$$\|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 \leq B(\xi, \xi).$$

Usando a propriedade de ortogonalidade (3.27) e a linearidade de  $B(\cdot, \cdot)$ , podemos reescrever como

$$\|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 \leq B(\eta, \xi) = B(\eta, \xi - \bar{\xi}) + B(\eta, \bar{\xi}),$$

onde  $\bar{\xi}$  denota a média por partes de  $\xi$  definida em (3.32).

Agora aplicando o lema 3.3.4 para o primeiro termo do lado direito acima, obtemos:

$$\|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 \leq C \|\xi - \bar{\xi}\|_{2,\mathcal{T}_h} \|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h} + B(\eta, \bar{\xi}).$$

Podemos reescrever a desigualdade acima usando a desigualdade inversa entre os espaços  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  do lema 3.3.5 como

$$\|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 \leq C(\epsilon) \sqrt{p} \|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h} + B(\eta, \bar{\xi}). \quad (3.34)$$

Usando a propriedade do interpolador  $\tilde{\pi}_{hp}$  dada por (1.14), o termo  $B(\eta, \bar{\xi})$  também pode ser limitado em termos de  $\|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h}$ . Expandindo o termo  $B(\eta, \bar{\xi})$  e usando 3.32, obtemos:

$$B(\eta, \bar{\xi}) = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \int_{\kappa} \eta \bar{\xi} dx - \int_{\partial\kappa} \bar{\xi} (\nabla\eta \cdot \mathbf{n}) ds \right) + \int_{\mathcal{E}_h^o} \{\bar{\xi}\} [\nabla\eta] ds.$$

Agora, aplicando a propriedade (1.14), temos:

$$\begin{aligned} B(\eta, \bar{\xi}) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} \eta \bar{\xi} dx \leq \|\eta\|_{0,\Omega} \|\bar{\xi}\|_{0,\Omega} \\ &\leq C \|\eta\|_{0,\Omega} \|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h}. \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em (3.34), asseguramos:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 &\leq C(\epsilon) \sqrt{p} \|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h} \|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h} + C \|\eta\|_{0,\Omega} \|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h}. \\ \Rightarrow \|\xi\|_{1,\mathcal{T}_h} &\leq C(\epsilon) \sqrt{p} \|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h} + C \|\eta\|_{0,\Omega} \leq C(\epsilon) \sqrt{p} \|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h}. \end{aligned}$$

Então de (3.33), temos:

$$\|u - u_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \|\eta\|_{1,\mathcal{T}_h} + C(\epsilon) \sqrt{p} \|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq C(\epsilon) \sqrt{p} \|\eta\|_{2,\mathcal{T}_h}.$$

Usando o Teorema 3.3.6 de interpolação, temos:

$$\|u - u_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq C(\epsilon) \frac{h^{\mu^{**}}}{p^{s^{**}-1/2}} \sqrt{\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_{\kappa},\kappa}^2}.$$

Desde que  $\lambda = \zeta = 1$ , sabemos que  $\mu^{**} = \mu - 1$  e  $s^{**} = s - 2$ .

□

**Observação 3.3.1** *Se combinamos os resultados dos Teoremas 3.3.3 e 3.3.7, podemos concluir que para um termo de estabilização de ordem  $O(h/p^2)$  e para  $p \geq 2$ , as taxas de convergência são de ordem  $\mu - 1$  e  $s - 2$  para  $h$  e  $p$ , respectivamente.*

# Capítulo 4

## Método de Galerkin descontínuo com penalização de fluxos para a equação reação-difusão

Inspirados nos métodos de Galerkin apresentados nos capítulos 2 e 3, neste capítulo introduzimos um novo método de Galerkin descontínuo estabilizado, onde incluímos simultaneamente termos de penalização no salto da solução e no salto do fluxo da solução numérica. Na seção 4.1 apresentamos o método de Galerkin descontínuo para a equação reação-difusão e definimos a norma  $\|\cdot\|$  no espaço de Sobolev particionado  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ . Em seguida, provamos que a forma bilinear é contínua e coerciva, garantindo assim a existência e unicidade de solução para o método introduzido. Efetuamos uma análise de estimativas *a priori* do erro para o método na seção 4.2 e apresentamos resultados numéricos que confirmam as taxas de convergência teóricas para problemas com soluções suaves em domínio unidimensional e bidimensional na seção 4.3. Também analisamos o comportamento do método para problemas com “descontinuidades”, ou seja, problemas com fortes gradientes em alguma região do domínio. E para encerrar, na seção 4.3.3 apresentamos os resultados numéricos obtidos com a implementação do método de Galerkin descontínuo para a equação reação-advectação-difusão.

### 4.1 Métodos GSIPG e GNIPG

Consideremos o seguinte problema de reação-difusão:

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = u_0, & \text{sobre } \mathcal{E}_h^D, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u = g, & \text{sobre } \mathcal{E}_h^N. \end{cases} \quad (4.1)$$

Sendo  $f \in L^2(\Omega)$  e a constante  $c \geq 0$ .



Para o problema (4.1) definimos a seguinte forma bilinear de Galerkin descontínua  $B(\cdot, \cdot)$  sobre  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \times H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e o funcional linear  $L(\cdot)$  sobre  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ :

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx - \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} (\{\nabla u\} \cdot [v] + \theta \{\nabla v\} \cdot [u]) ds \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [u] \cdot [v] ds + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla u] [\nabla v] ds, \\ L(v) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} f v dx + \int_{\mathcal{E}_h^N} g \left( \frac{(\mathbf{n} \cdot \nabla v)}{\sigma} + v \right) ds - \int_{\mathcal{E}_h^D} u_0 (\theta (\mathbf{n} \cdot \nabla v) - \sigma v) ds. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se  $\theta = -1$ , temos o Método de Galerkin com Penalização Interior Não-Simétrico Generalizado (General Non-Symmetric Interior Penalty Galerkin Method ou GNIPG) e, se  $\theta = 1$ , obtemos o Método de Galerkin com Penalização Interior Simétrico Generalizado (General Symmetric Interior Penalty Galerkin Method ou GSIPG). O parâmetro  $\sigma$  é o parâmetro de penalização, o qual foi introduzido para garantir a estabilidade do método. Assim, a formulação variacional descontínua é

$$\text{encontrar } u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) : B(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (4.3)$$

Se  $u \in H^2(\Omega) \cap H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $s_\kappa \geq 2$ , solução do problema variacional (4.3), então  $u$  também é solução de (4.1), ou seja, esta formulação variacional é consistente.

Para todo  $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ , introduzimos a seguinte norma:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + c \|v\|_{0,\kappa}^2) + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [v] \cdot [v] ds + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla v]^2 ds \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{\nabla v\} \cdot \{\nabla v\} ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

O problema discreto correspondente à formulação variacional descontínua é:

$$\text{encontrar } u_h \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}) : B(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}). \quad (4.5)$$

### 4.1.1 Continuidade da forma bilinear

O resultado que apresentamos a seguir garante a continuidade da forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$  em relação a norma dada por 4.4.

**Teorema 4.1.1** (Continuidade) *Seja  $B(\cdot, \cdot)$  forma bilinear como definida em (4.2). Então, existe uma constante  $0 < M \leq 2$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que,*

$$|B(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (4.6)$$

Demonstração: (Para os métodos GNIPG e GSIPG). Inicialmente notemos que:

$$|B(u, v)| \leq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} |\nabla u \cdot \nabla v + cuv| dx + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} |\{\nabla u\} \cdot [v] + \{\nabla v\} \cdot [u]| ds \\ + \left| \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[u] \cdot [v] ds \right| + \left| \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla u] [\nabla v] ds \right|.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, segue,

$$|B(v, v)| \leq \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla u\|_{0,\kappa}^2 + c\|u\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + c\|v\|_{0,\kappa}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left( \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{\nabla u\} \cdot \{\nabla u\} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[v] \cdot [v] ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left( \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{\nabla v\} \cdot \{\nabla v\} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[u] \cdot [u] ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left( \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[u] \cdot [u] ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[v] \cdot [v] ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left( \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla u]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla v]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora da desigualdade de Schwartz obtemos:

$$|B(v, v)| \leq \left\{ \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla u\|_{0,\kappa}^2 + c\|u\|_{0,\kappa}^2 + 2 \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[u] \cdot [u] ds + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla u]^2 ds \right. \\ \left. + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{\nabla u\} \cdot \{\nabla u\} ds \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + c\|v\|_{0,\kappa}^2 + 2 \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[v] \cdot [v] ds \right. \\ \left. + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla v]^2 ds + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{\nabla v\} \cdot \{\nabla v\} ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 2\|u\| \|v\|.$$

□

## 4.1.2 Coercividade da forma bilinear

O problema variacional (4.3) é bem posto devido aos seguintes resultados:

**Teorema 4.1.2** (Coercividade do método GNIPG) *Seja  $\sigma = K \frac{v^2}{h}$ , então para  $\forall K > 0$ , existe uma constante positiva  $\alpha$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que,*

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}).$$

Demonstração: Sejam  $\alpha > 0$  um número real e  $v \in S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ , então:

$$\begin{aligned} B(v, v) - \alpha \|v\|^2 = & (1 - \alpha) \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + c \|v\|_{0,\kappa}^2 + \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[v] \cdot [v] ds \right. \\ & \left. + \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla v]^2 ds \right) - \alpha \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{\nabla v\} \cdot \{\nabla v\} ds. \end{aligned}$$

Seja  $e \in \mathcal{E}_h^D$ , tal que  $e \subset \partial\kappa$ ,  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ , então da definição de média, e das desigualdades (1.7) e (1.9) resulta,

$$\begin{aligned} \int_e \frac{1}{\sigma} \{\nabla v\} \cdot \{\nabla v\} ds & \leq \frac{1}{\sigma} \|\nabla v\|_{0,\partial\kappa}^2 \leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_\kappa} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + \|\nabla v\|_{0,\kappa} \|\nabla^2 v\|_{0,\kappa} \right) \\ & \leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_\kappa} + \frac{p_\kappa^2}{h_\kappa} \right) \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 \leq \frac{C}{\sigma} \frac{p_\kappa^2}{h_\kappa} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2. \end{aligned}$$

Escolhendo  $\sigma = K \frac{p_\kappa^2}{h_\kappa}$ ,  $K > 0$ , temos que:

$$- \int_e \frac{1}{\sigma} \{\nabla v\} \cdot \{\nabla v\} ds \geq - \frac{C}{K} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2. \quad (4.7)$$

Agora vamos considerar  $e_{lr} \in \mathcal{E}_h^\circ$ , onde  $\overline{e_{lr}} = \partial\kappa_l \cap \partial\kappa_r$ . Podemos observar que dependendo da malha teremos os diâmetros  $h_{\kappa_l}$  e  $h_{\kappa_r}$  e os graus polinomiais  $p_{\kappa_l}$  e  $p_{\kappa_r}$  diferentes nos elementos  $\kappa_l$  e  $\kappa_r$ . Nesse caso escolhemos  $\sigma$  como:

$$\sigma = K \frac{\max(p_{\kappa_l}^2, p_{\kappa_r}^2)}{\min(h_{\kappa_l}, h_{\kappa_r})}.$$

Então as desigualdades (1.7) e (1.9) garantem:

$$\begin{aligned} \int_{e_{lr}} \frac{1}{\sigma} \{\nabla v\} \cdot \{\nabla v\} ds & \leq \int_{e_{lr}} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{(\nabla v)_L \cdot (\nabla v)_L + (\nabla v)_R \cdot (\nabla v)_R}{2} \right) ds \\ & \leq \frac{C}{2K} (\|\nabla v\|_{0,\kappa_l}^2 + \|\nabla v\|_{0,\kappa_r}^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$- \alpha \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{\nabla v\} \cdot \{\nabla v\} ds \geq - \alpha \frac{C}{K} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2. \quad (4.8)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} B(v, v) - \alpha \|v\|^2 & \geq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( 1 - \alpha - \alpha \frac{C}{K} \right) \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + (1 - \alpha) c \|v\|_{0,\kappa}^2 \\ & \quad + (1 - \alpha) \left( \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma[v] \cdot [v] ds + \int_{\mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla v]^2 ds \right). \end{aligned}$$

Então,  $B(v, v) - \alpha \|v\|^2 \geq 0$ , se

$$\left(1 - \alpha - \alpha \frac{C}{K}\right) \geq 0 \quad \text{e} \quad (1 - \alpha) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{1 + \frac{C}{K}}.$$

□

**Teorema 4.1.3** (Coercividade do método GSIPG) *Seja  $\sigma = K \frac{p^2}{h}$ , sendo  $K$  uma constante positiva. Então, para  $K > K_0 > 0$ , existe uma constante  $\alpha > 0$ , independente de  $p$  e  $h$ , tal que,*

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}).$$

Demonstração: Sejam  $\alpha > 0$  um número real e  $v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ , então:

$$\begin{aligned} B(v, v) - \alpha \|v\|^2 &= (1 - \alpha) \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + c \|v\|_{0,\kappa}^2) + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla v]^2 ds + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [v] \cdot [v] ds \right) \\ &\quad - \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} 2 \{ \nabla v \} \cdot [v] ds - \alpha \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\sigma} \{ \nabla v \} \cdot \{ \nabla v \} ds. \end{aligned}$$

Para um número real arbitrário  $\epsilon > 0$  é válido que:  $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}$ . Usando esta desigualdade, e a desigualdade de Cauchy-Schwartz, existe um número  $\epsilon$  tal que para toda aresta  $e \in \mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D$  podemos garantir:

$$\begin{aligned} 2 \int_e \{ \nabla v \} \cdot [v] ds &\leq 2 \left( \int_e \frac{1}{\sigma} \{ \nabla v \} \cdot \{ \nabla v \} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_e \sigma [v] \cdot [v] ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \epsilon \int_e \frac{1}{\sigma} \{ \nabla v \} \cdot \{ \nabla v \} ds + \frac{1}{\epsilon} \int_e \sigma [v] \cdot [v]. \end{aligned}$$

Logo de (4.8) obtemos:

$$2 \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \{ \nabla v \} \cdot [v] ds \leq \frac{C\epsilon}{K} \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [v] \cdot [v] ds.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} B(v, v) - \alpha \|v\|^2 &\geq \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left(1 - \alpha - \epsilon \frac{C}{K} - \alpha \frac{C}{K}\right) \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + (1 - \alpha) \left( \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} c \|v\|_{0,\kappa}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^N} \frac{1}{\sigma} [\nabla v]^2 ds \right) + \left(1 - \alpha - \frac{1}{\epsilon}\right) \int_{\mathcal{E}_h^{\circ} \cup \mathcal{E}_h^D} \sigma [v] \cdot [v] ds. \end{aligned}$$

Então para que  $B(v, v) - \alpha \|v\|^2 \geq 0$ , devemos ter:

$$\left(1 - \alpha - \epsilon \frac{C}{K} - \alpha \frac{C}{K}\right) \geq 0, \quad 1 - \alpha \geq 0 \quad \text{e} \quad \left(1 - \alpha - \frac{1}{\epsilon}\right) \geq 0.$$

Da segunda e terceira equação segue:  $0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{\epsilon}$ . Como  $\alpha > 0 \Rightarrow \epsilon > 1$ . Da primeira equação temos:  $0 < \alpha \leq \frac{K-C}{K+C}$ . Tomando  $K$  suficientemente grande,  $K > K_0$ , teremos satisfeitas as duas exigências sobre  $\alpha$  (no mínimo  $K_0 > C$ ).

□

Então pelo teorema de Lax-Milgram 1.2.5, o problema discreto descontínuo (4.5) possui única solução em  $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ , ou seja,

$$\exists! u_h \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}); B(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}).$$

## 4.2 Estimativa de erros *a priori*

**Teorema 4.2.1** *Seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $s_\kappa \geq 2$ , a solução de (4.3), e seja  $u_h \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  a solução discreta descontínua de (4.5). Então escolhendo  $\sigma = K \frac{p^2}{h}$ , ( $K > 0$  para o método GNIPG e  $K \geq K_0$  para o método GSIPG), o erro  $e = u - u_h$  satisfaz a seguinte estimativa:*

$$\|e\| \leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa - 1}}{p_\kappa^{s_\kappa - \frac{3}{2}}} \|u\|_{s_\kappa, \kappa},$$

em que  $\mu_\kappa = \min(p_\kappa + 1, s_\kappa)$  e  $p_\kappa \geq 1$ .

Demonstração: Seja  $\pi_{hp}^\kappa$  o interpolador de Babuška-Suri para  $u$  em  $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ . Considere  $\eta = u - \pi_{hp}^\kappa$  e  $\xi = u_h - \pi_{hp}^\kappa$ . Então, aplicando a desigualdade triangular temos:

$$\|e\| = \|\eta - \xi\| \leq \|\eta\| + \|\xi\|.$$

É válida a propriedade de ortogonalidade de Galerkin, ou seja,

$$B(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F}).$$

Desde que  $u - u_h = \eta - \xi$ , temos  $B(\eta - \xi, v) = 0$ . Logo, como  $\xi \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ , podemos tomar  $v = \xi$ , consequentemente  $B(\eta, \xi) = B(\xi, \xi)$ .

Usando a coercividade e a continuidade de  $B(\cdot, \cdot)$ , temos,

$$\|\xi\|^2 \leq \alpha B(\xi, \xi) = \alpha B(\eta, \xi) \leq \alpha M \|\eta\| \|\xi\| \quad \Rightarrow \quad \|\xi\| \leq C \|\eta\|.$$

Usando o teorema (1.3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \|\nabla \eta\|_{0, \kappa}^2 + c \|\eta\|_{0, \kappa}^2 &\leq C \left( \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa - 1}}{p_\kappa^{s_\kappa - 1}} \right)^2 \|u\|_{s_\kappa, \kappa}^2 + C \left( \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa}}{p_\kappa^{s_\kappa}} \right)^2 \|u\|_{s_\kappa, \kappa}^2 \\ &\leq C \frac{h_\kappa^{2\mu_\kappa - 2}}{p_\kappa^{2s_\kappa - 2}} \|u\|_{s_\kappa, \kappa}^2, \quad s_\kappa \geq 1. \end{aligned}$$

Seja  $e \in \mathcal{E}_h^\circ \cup \mathcal{E}_h^D$ , onde associamos  $e$  ao elemento  $\kappa$ , conseqüentemente usando (1.7) e o teorema (1.3.5) temos:

$$\begin{aligned} \int_e \frac{1}{\sigma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \eta)^2 ds &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_\kappa} \|\nabla \eta\|_{0,\kappa}^2 + \|\nabla \eta\|_{0,\kappa} \|\nabla^2 \eta\|_{0,\kappa} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_\kappa} \|\eta\|_{1,k}^2 + \|\eta\|_{1,\kappa} \|\eta\|_{2,\kappa} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_\kappa} \frac{h_\kappa^{2\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{2s_\kappa-2}} + \frac{h_\kappa^{2\mu_\kappa-3}}{p_\kappa^{2s_\kappa-3}} \right) \|u\|_{s_\kappa,\kappa}^2 \\ &\leq \frac{C}{K} \frac{h_\kappa^{2\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{2s_\kappa-1}} \|u\|_{s_\kappa,\kappa}^2, \end{aligned}$$

na ultima desigualdade usamos a definição de  $\sigma = K \frac{p_\kappa^2}{h_\kappa}$ . Fazendo uma estimativa similar, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_e \sigma \eta^2 ds &\leq C \sigma \left( \frac{1}{h_\kappa} \|\eta\|_{0,\kappa}^2 + \|\eta\|_{0,\kappa} \|\nabla \eta\|_{0,\kappa} \right) \\ &\leq C \sigma \left( \frac{1}{h_\kappa} \|\eta\|_{0,k}^2 + \|\eta\|_{0,\kappa} \|\eta\|_{1,\kappa} \right) \\ &\leq CK \frac{h_\kappa^{2\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{2s_\kappa-3}} \|u\|_{s_\kappa,\kappa}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|e\| &\leq (1 + C) \|\eta\| \\ &\leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{h_\kappa^{2\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{2s_\kappa-2}} + \frac{h_\kappa^{2\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{2s_\kappa-3}} + \frac{h_\kappa^{2\mu_\kappa-2}}{p_\kappa^{2s_\kappa-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{s_\kappa,\kappa} \\ &\leq C \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \frac{h_\kappa^{\mu_\kappa-1}}{p_\kappa^{\frac{s_\kappa-3}{2}}} \|u\|_{s_\kappa,\kappa}. \end{aligned}$$

□

O teorema 4.2.1 fornece uma estimativa de erro ótima em  $h$  e subótima em  $p$ .

### 4.3 Resultados numéricos

Nesta seção apresentamos os resultados de algumas experiências numéricas que visam analisar o desempenho dos métodos de Galerkin descontínuos GNIPG e GSIPG, apresentados na seção 4.1.

A implementação numérica foi realizada no ambiente de programação de elementos finitos PZ [14], desenvolvido pelo LabMec - Laboratório de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da UNICAMP. O ambiente PZ é escrito em linguagem de programação C++ e segue a filosofia de orientação a objetos. Uma das maiores

qualidades desse ambiente de programação é a abstração de conceitos como o de formulação variacional, espaços de interpolação, resolução de problemas algébricos e o uso de padrões de refinamento para efetuar um particionamento geométrico do domínio.

O teorema 4.2.1 garante, para problemas com soluções suaves, que a ordem de convergência dos métodos GSIPG e GNIPG em  $h$ , na norma do espaço  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  é  $h^p$ . Estaremos avaliando através dos resultados numéricos se os métodos GSIPG e GNIPG atingem essa a ordem de convergência na prática. Também avaliamos as ordens de convergência dos métodos nas normas dos espaços  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ . A ordem de convergência é dada por:

$$\text{Ordem de convergência no espaço } E \cong \frac{\log\left(\frac{\|e_l\|_E}{\|e_{l-1}\|_E}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)},$$

onde  $l$  indica o nível de refinamento e  $\|e_l\|_E$  é o erro da solução numérica na norma do espaço  $E$ , no nível de refinamento  $l$ .

### 4.3.1 Exemplos em um domínio unidimensional

**Exemplo 4.3.1** *Inicialmente consideramos um exemplo do problema (4.1) em uma dimensão:*

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f, & \text{em } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

onde  $f = (10\pi)^2 \sin(10\pi x)$ . Desta forma a solução exata do problema acima é  $u(x) = \sin(10\pi x)$ .

Nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3 apresentamos as ordens de convergência numérica dos métodos GSIPG (a) e GNIPG (b) calculadas na norma dos espaços  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$

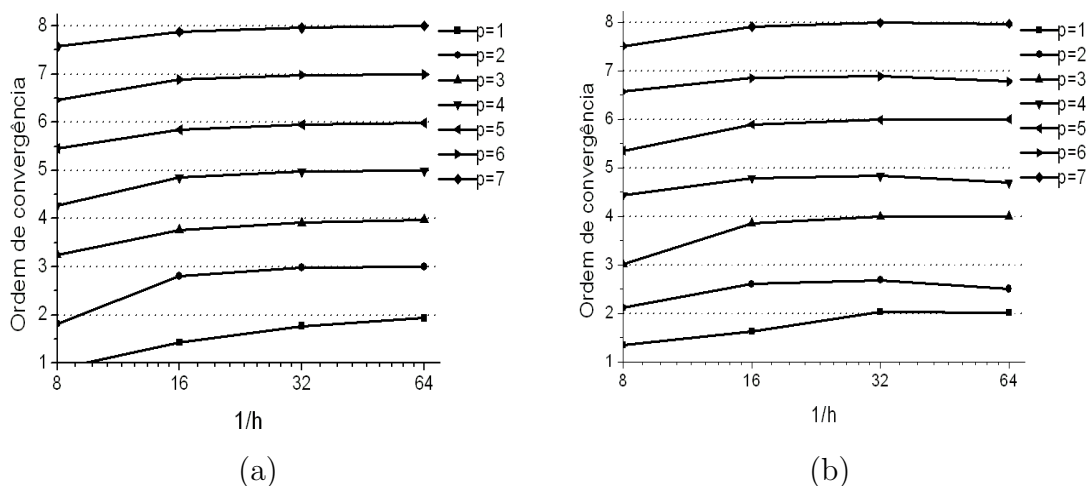


Figura 4.1: Ordens de convergência em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG.

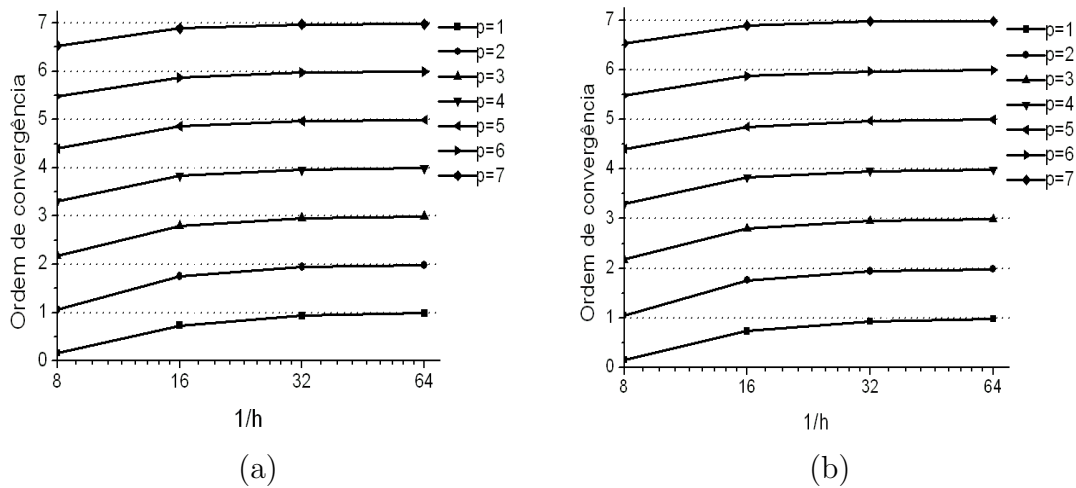


Figura 4.2: Ordens de convergência em  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG.

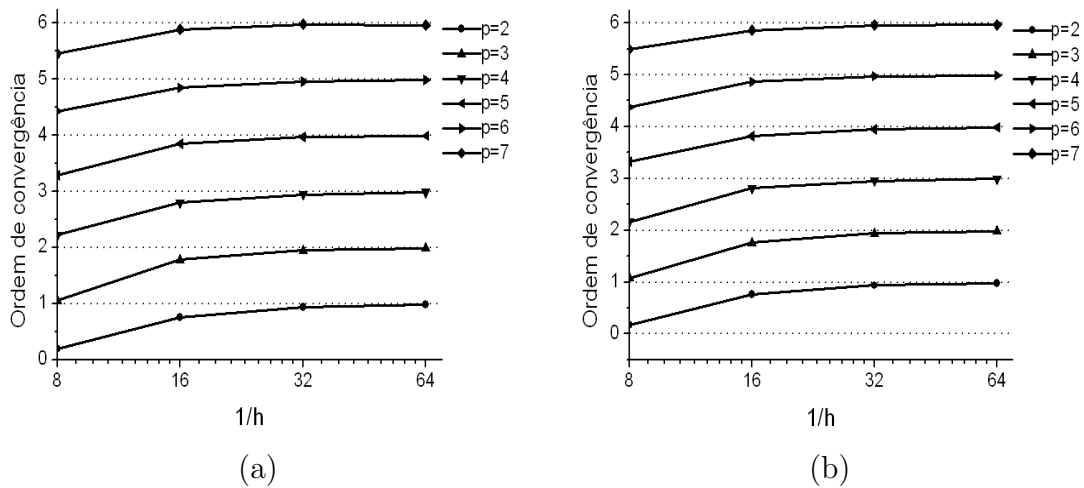


Figura 4.3: Ordens de convergência em  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG.

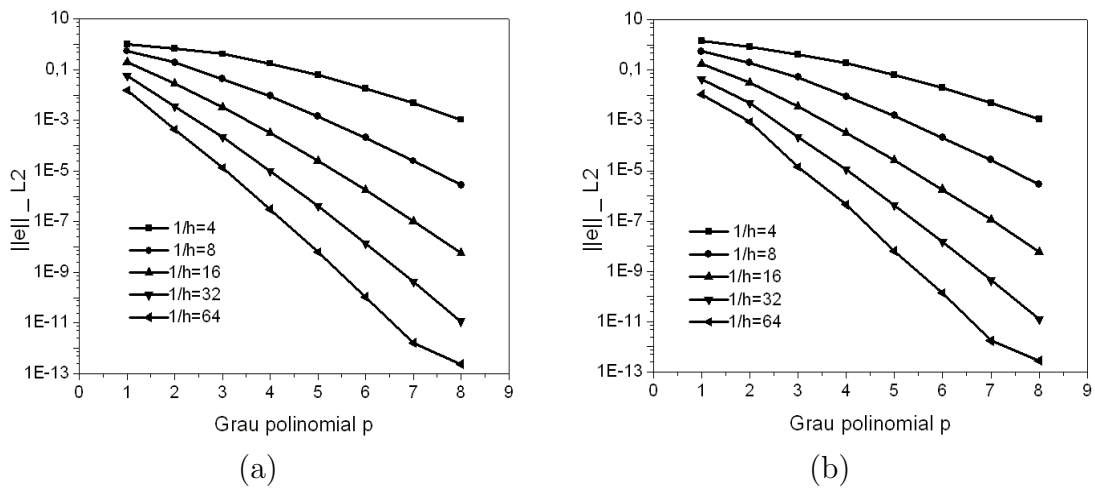


Figura 4.4: Erro em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  versus aproximação polinomial  $p$  para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG.



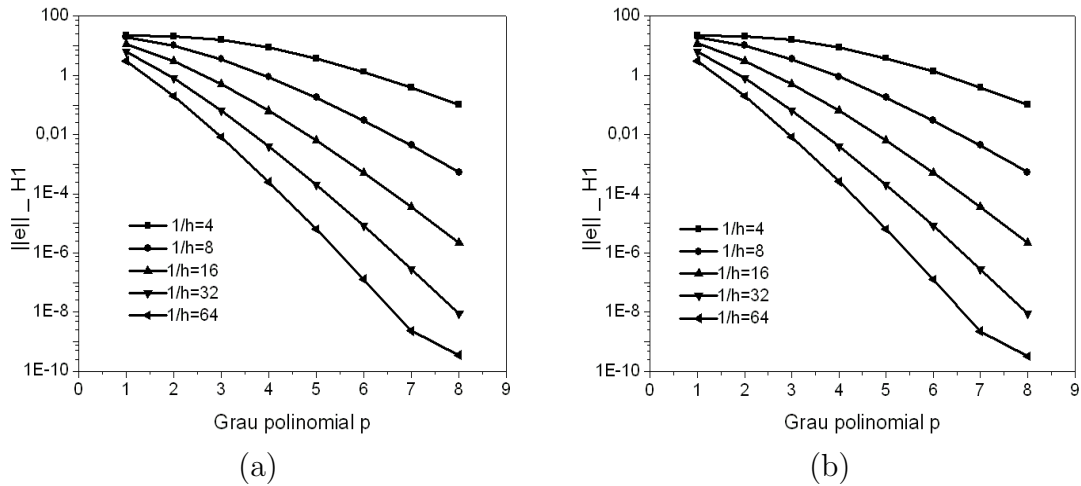


Figura 4.5: Erro em  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  versus aproximação polinomial  $p$  para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG.

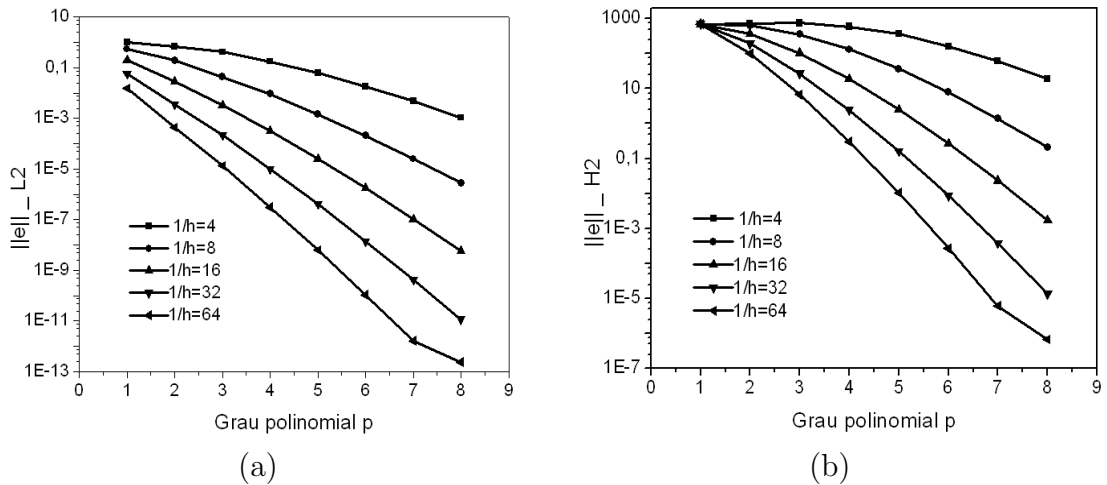


Figura 4.6: Erro em  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  versus aproximação polinomial  $p$  para o método (a)GSIPG; (b)GNIPG.

respectivamente. Pode-se observar que as ordens de convergência de ambos os métodos na norma energia (em  $H^1$ ) são próximas do valor teórico  $h^p$  conforme Teorema 4.2.1. Pode-se observar também que na norma em  $L^2$ , a ordem de convergência da formulação do método GSIPG é superior a do método GNIPG, próxima a  $h^{p+1}$ , o que já era esperado devido a dual consistência desta formulação, enquanto que para o método GNIPG obtemos convergência ótima para  $p$  ímpar e subótima para  $p$  par.

Através das figuras 4.4, 4.5 e 4.6 buscamos investigar a convergência dos métodos GSIPG e GNIPG em relação a aproximação polinomial  $p$ . Pode-se observar que na escala logarítmica o gráfico do erro plotado torna-se linear a medida que a aproximação polinomial  $p$  aumenta, o que caracteriza a convergência exponencial em  $p$  dos métodos em questão.

**Exemplo 4.3.2** *A seguir vamos estudar a aproximação dos métodos para um problema em*

que a solução é “irregular”. Consideremos:

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f, & \text{em } \Omega = (-1, 1) \\ u(-1) = u_L, & u(1) = u_R, \end{cases} \quad (4.10)$$

onde  $f, u_L$  e  $u_R$  foram escolhidos de tal maneira que a solução exata do problema seja  $u(x) = \arctan(400x)$ . Neste caso a solução exata do problema é uma aproximação da função de Heaviside que tem uma “descontinuidade”(salto) na origem.

Consideremos a aproximação desta solução com os métodos GNIPG e GSIPG usando uma malha  $2^6 \times Q_3$  e apresentamos os resultados nas figuras 4.7 e 4.8. Na figura 4.7(a) apresentamos as soluções obtidas com os métodos em todo o domínio, enquanto em 4.7(b), 4.8(a) e 4.8(b) apresentamos as soluções referente a região de zoom destacada na figura 4.7(a). Pode-se observar na figura 4.8 que quando os saltos da solução numérica são fortemente penalizados ( $K = 1.e + 4$ ), ambos os métodos GSIPG e GNIPG condizem com a solução exata nas regiões fora da “descontinuidade”, e apresentam fortes oscilações na vizinhança do ponto de “descontinuidade”, além disso esses dois métodos apresentam soluções numéricas muito semelhantes. Já quando os saltos dos fluxos são penalizados e os saltos da solução não ( $K = 1.e - 4$ ), figura 4.7(b), a solução obtida com o método GNIPG oscila fortemente no ponto de “descontinuidade” e também não aproxima bem a solução exata fora deste ponto, onde a solução é suave, e a solução do método GSIPG com penalização nos fluxos, apesar das oscilações na origem, apresentou boa aproximação, com a vantagem de ser um método conservativo.

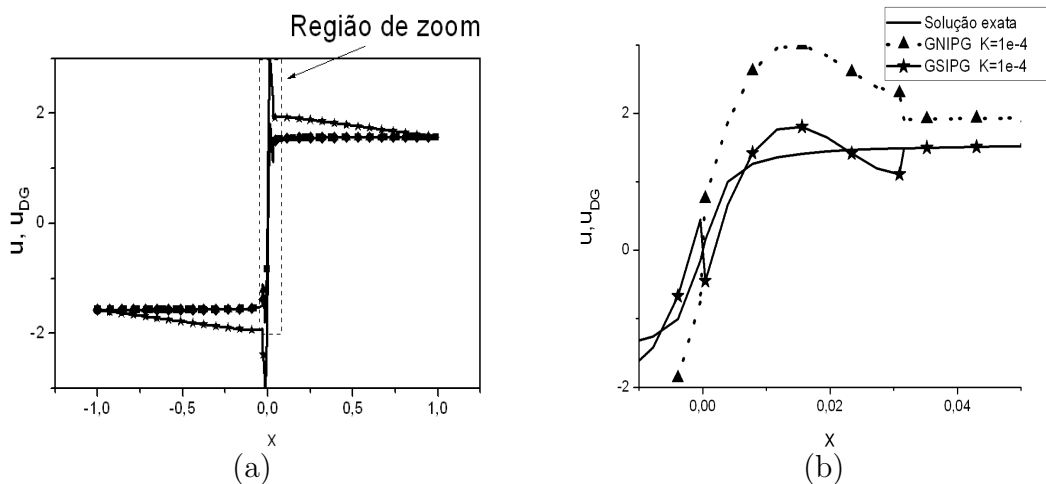


Figura 4.7: Comparação entre a solução exata e soluções numéricas obtidas com as formulações (a) GNIPG e GSIPG quando  $K = 1.e - 4$  e  $K = 1.e + 4$  em todo domínio. (b) GNIPG e GSIPG quando  $K = 1.e - 4$  para região de zoom indicada em (a).

Considerando que solução obtida com o método GSIPG com penalização de fluxos ( $K = 1.e - 4$ ) aproximou bem a solução exata fora da origem e além disso esse método é conservativo, resolvemos analisar o comportamento desse método para várias ordens de aproximação

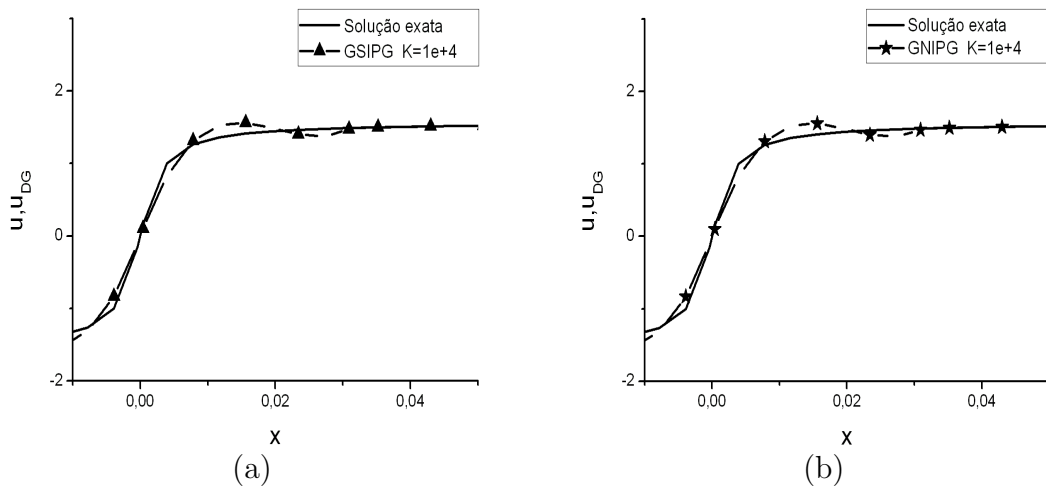


Figura 4.8: Comparação entre a solução exata e solução numérica obtida com a formulação (a) GSIPG, com  $K = 1.e + 4$  para região de zoom indicada em 4.7(a). (b) GNIPG, com  $K = 1.e + 4$  para região de zoom indicada em 4.7(a).

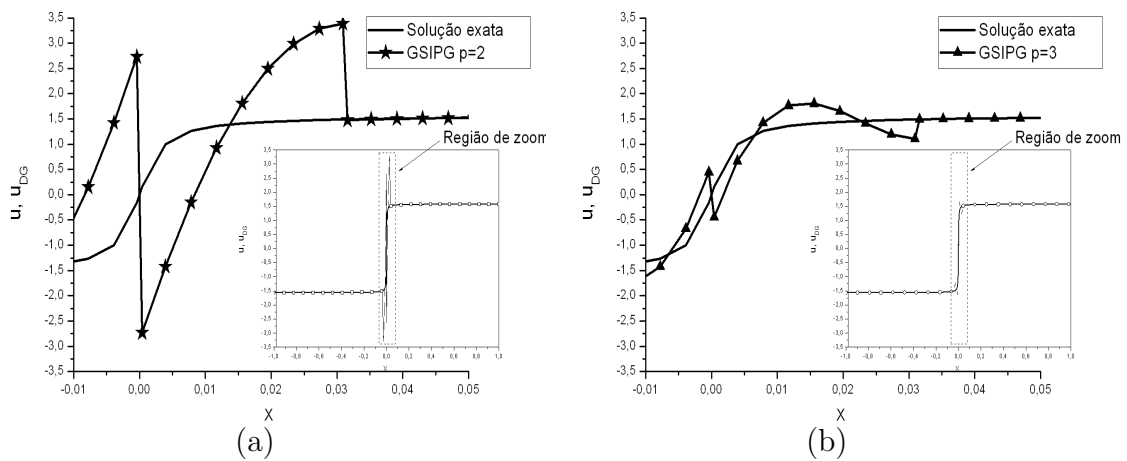


Figura 4.9: Comparação entre a solução exata e solução numérica obtida com o método GSIPG com penalização de fluxos ( $K = 1.e - 4$ ) para (a)  $p = 2$ , (b)  $p = 3$ , com malha  $2^6$ .

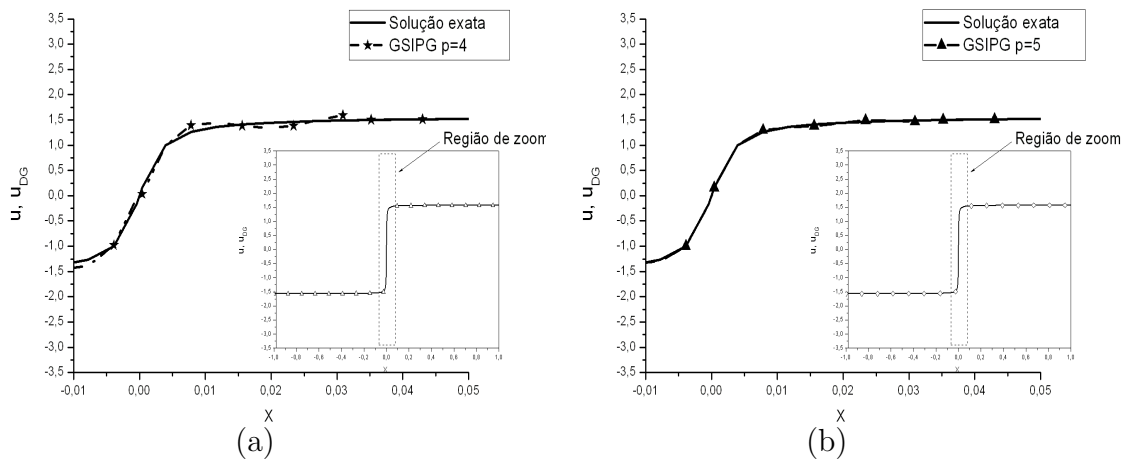


Figura 4.10: Comparação entre a solução exata e solução numérica obtida com o método GSIPG com penalização de fluxos ( $K = 1.e - 4$ ) para (a)  $p = 4$ , (b)  $p = 5$ , com malha  $2^6$ .

polinomial, com malha  $2^6 \times Q_p$ ,  $p = 2,3,4,5$ . Apresentamos esses resultados nas figuras 4.9 e 4.10. Nestas figuras podemos notar que quando a ordem de aproximação polinomial aumenta o método converge para solução exata inclusive na vizinhança do ponto de “descontinuidade”, ou seja, o método GSIPG somente com penalização no fluxo (e portanto é um método conservativo), mostra uma boa convergência espectral, inclusive na vizinhança do ponto de singularidade.

### 4.3.2 Problema em um domínio bidimensional

**Exemplo 4.3.3** *Consideremos agora um exemplo do problema (4.1) em duas dimensões:*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega = (-1, 1) \times (-1, 1), \\ u|_{\partial\Omega} = u_0, \end{cases} \quad (4.11)$$

em que  $f$  e  $u_0$  são escolhidos de tal modo que a solução exata seja  $u(x, y) = \arctan(\delta(y-x))$ , onde  $\delta$  é uma constante.

Tabela 4.1: Ordens de convergências em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  para as formulações GSIPG e GNIPG com ordem de aproximação polinomial de 1 até 5.

$\delta = 1$		Ordens em $\ e\ _{L^2}$		Ordens em $\ e\ _{H^1}$	
p	Nível	GSIPG	GNIPG	GSIPG	GNIPG
1	2	1.2492	1.5719	0.9339	0.9681
	3	1.5866	1.7891	0.9955	0.9904
	4	1.8317	1.9180	1.0125	0.9995
	5	1.9307	1.9690	1.0082	1.0004
2	2	2.8428	2.7487	1.8068	1.8135
	3	2.9804	2.8199	1.9803	1.9840
	4	3.0031	2.6328	1.9988	1.9990
	5	2.9999	2.3247	2.0006	2.0005
3	2	3.7014	3.6975	3.0110	3.0149
	3	3.8025	3.8373	3.0631	3.0505
	4	3.9226	3.9454	3.0365	3.0211
	5	3.9731	3.9826	3.0192	3.0112
4	2	4.6745	4.6815	3.7795	3.7712
	3	4.9959	4.9330	3.8540	3.8645
	4	5.0114	4.8654	3.9874	3.9930
	5	5.0081	4.6374	3.9981	3.9993
5	2	5.7659	5.7583	4.6326	4.6296
	3	5.8234	5.8545	5.1484	5.1300
	4	5.9254	5.9491	5.0377	5.0172
	5	5.9434	5.9577	4.9931	4.9871

Na Tabela 4.1 apresentamos as ordens de convergência numérica dos métodos GSIPG

e GNIPG calculadas nas normas dos espaços  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ , para aproximação polinomial variando de 1 até 5, com  $\delta = 1$ , ou seja, a solução exata do problema é suave. Os resultados obtidos em domínio bidimensional são semelhantes aos obtidos em domínio unidimensional, as ordens de convergência de ambos os métodos na norma de energia (em  $H^1$ ) são próximas do valor teórico  $h^p$  conforme Teorema 4.2.1 e as ordens de convergência da formulação GSIPG são superiores as do método GNIPG na norma em  $L^2$ , próximas de  $h^{p+1}$ .

Nas figuras 4.11 e 4.12 apresentamos as soluções numéricas obtidas com  $p = 2, 3, 4, 5$  usando a formulação GSIPG para o problema modelo 4.11, com  $\delta = 400$ ,  $K = 1.e - 4$  e a malha é formada por  $2^5 \times 2^5$ . Nestas figuras pode-se observar que as oscilações na origem são eliminadas à medida que a aproximação polinomial  $p$  aumenta.

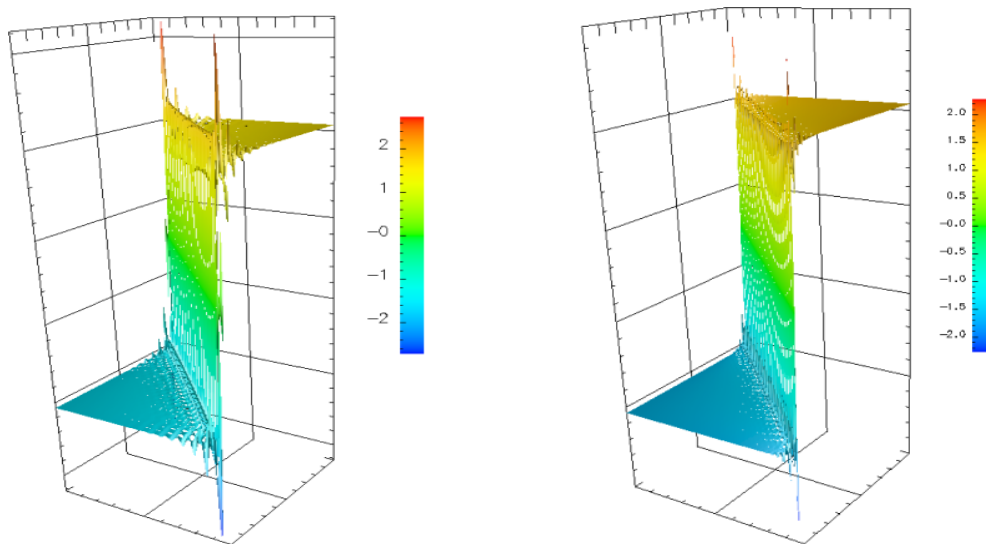


Figura 4.11: Soluções numéricas obtidas em domínio bidimensional com a ordem de aproximação  $p = 2$  (esquerda) e  $p = 3$  (direita) usando a formulação GSIPG.

Por fim, na figura 4.13 apresentamos em (a) o gráfico do erro obtido com o método de Baumann (método de Galerkin descontínuo sem penalização) e em (b) o método GSIPG com penalização no salto da solução ( $K = 1e + 4$ ), já na figura 4.14 temos o método GNIPG com penalização no salto da solução em (a) e o método GNIPG com penalização no salto do fluxo da solução em (b). Nestas podemos notar que o método de Baumann apresenta maiores oscilações na origem em relação aos métodos GSIPG e GNIPG em que é efetuada estabilização no salto da solução.

### 4.3.3 Resultados numéricos para a equação reação-advecção-difusão

Consideremos o seguinte problema de reação-advecção-difusão:

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + cu = f, & \text{em } \Omega, \\ u = u_0, & \text{sobre } \mathcal{E}_h^D \cup \partial\Omega_-, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u = g, & \text{sobre } \mathcal{E}_h^N. \end{cases} \quad (4.12)$$

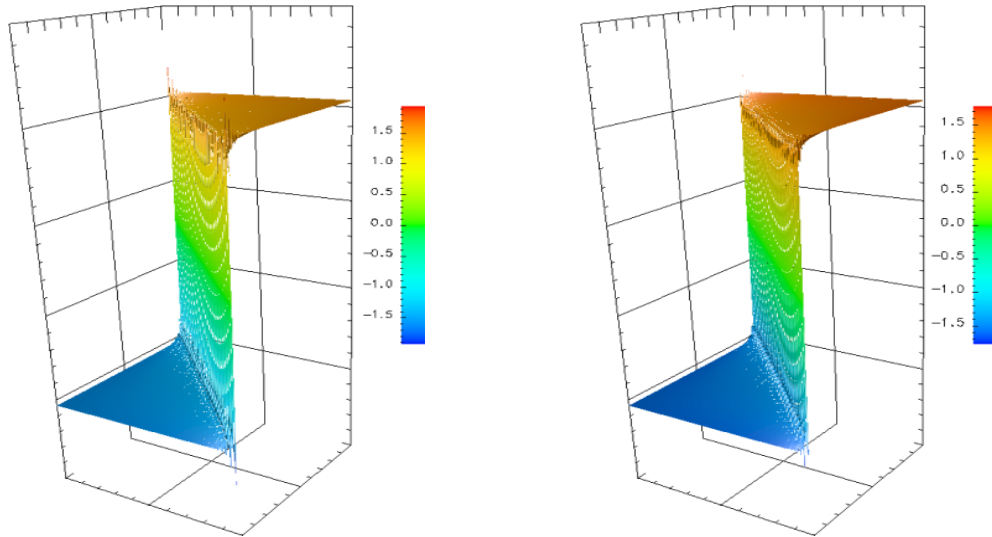


Figura 4.12: Soluções numéricas obtidas em domínio bidimensional com a ordem de aproximação  $p = 4$  (esquerda) e  $p = 5$  (direita) usando a formulação GSIPG.

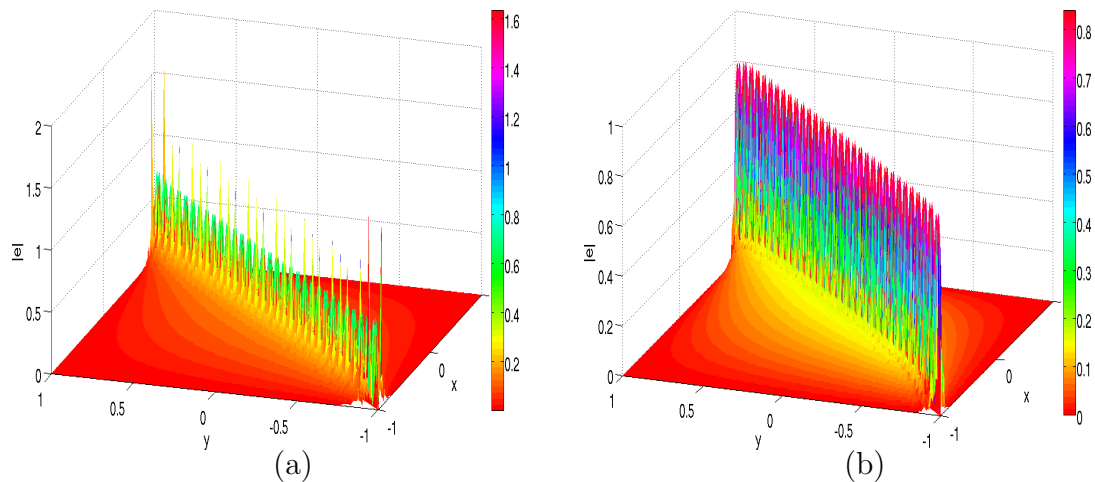


Figura 4.13: Erro absoluto da solução numérica obtida com  $p = 2$  e  $l = 5$  usando a formulação do método de (a) Baumann (b) GSIPG com  $K=1e+4$ .

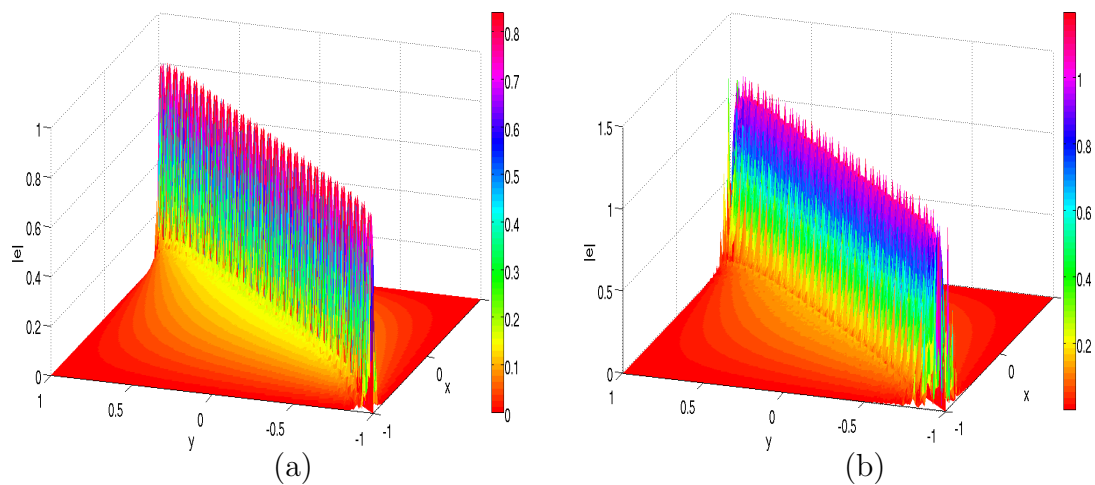


Figura 4.14: Erro absoluto da solução numérica obtida com  $p = 2$  e  $l = 5$  usando a formulação do método (a) GNIPG com  $K=1e+4$  (b) GNIPG com  $K=1e-4$ .

Sendo  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$ , a constante  $c \geq 0$  e  $\partial\Omega^-$  definido por 2.2.

O método de Galerkin descontínuo para o problema 4.12 é:

$$\text{encontrar } u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) : B_\varepsilon(u, v) = L(v), \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (4.13)$$

onde:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(u, v) = & \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\varepsilon \nabla u \cdot \nabla v + (\beta \cdot \nabla u)v + cuv) dx - \int_{\varepsilon_h^\circ \cup \varepsilon_h^D} \varepsilon (\{\nabla u\} \cdot [v] + \theta \{\nabla v\} \cdot [u]) ds \\ & + \int_{\varepsilon_h^\circ} [u] \cdot \{\beta v\} ds + \int_{\varepsilon_h^\circ \cup \partial\Omega^-} c_e [u] \cdot [v] ds \\ & + \int_{\varepsilon_h^\circ \cup \varepsilon_h^D} \varepsilon \sigma_1 [u] \cdot [v] ds + \int_{\varepsilon_h^\circ \cup \varepsilon_h^N} \varepsilon \sigma_2 [\nabla u] [\nabla v] ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(v) = & \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} f v dx + \int_{\varepsilon_h^N} \varepsilon g (\sigma_2(\mathbf{n} \cdot \nabla v) + v) ds - \int_{\varepsilon_h^D} \varepsilon u_0 (\theta(\mathbf{n} \cdot \nabla v) - \sigma_1 v) ds \\ & + \int_{\partial\Omega^-} (\beta \cdot \mathbf{n}) u_0 v ds. \end{aligned}$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $c_e$  são os parâmetros de penalização que foram introduzidos para estabilizar o método. Da mesma forma como na seção 4.1, se  $\theta = -1$ , temos o método GNIPG e se  $\theta = 1$ , obtemos o método GSIPG.

A diferença entre a forma bilinear  $B_\varepsilon(\cdot, \cdot)$  e a forma bilinear  $B(\cdot, \cdot)$  definida em 4.2 é introdução dos termos em  $B_\varepsilon(\cdot, \cdot)$  que correspondem à parte advectiva do problema. Esses termos já foram introduzidos anteriormente para aproximar soluções de problemas advectivos no trabalho de Brezzi, Marini e Süli [10].

Nesta seção apresentamos somente alguns resultados numéricos obtidos com o método de Galerkin descontínuo 4.13 para o problema de reação-advectação-difusão 4.12 e não efetuamos um estudo teórico do método utilizado. Na implementação consideramos os parâmetros de penalização da parte difusiva do método de acordo com o estudo teórico feito para o problema reação-difusão na seção 4.1, ou seja,  $\sigma_1 = K_1 \frac{p^2}{h}$ ,  $\sigma_2 = K_2 \frac{h}{p^2}$ . Já o parâmetro que estabiliza a parte advectiva do método  $c_e$  foi escolhido como:  $c_e = \frac{|\beta \cdot \mathbf{n}|}{2}$ . No trabalho [10] os autores provam que essa escolha para o parâmetro  $c_e$  é ótima.

Para  $\forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ , consideremos a seguinte norma:

$$\begin{aligned} \|v\|_\varepsilon^2 = & \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\varepsilon \|\nabla v\|_{0,\kappa}^2 + (c+1) \|v\|_{0,\kappa}^2) + \int_{\varepsilon_h^\circ \cup \varepsilon_h^D} \varepsilon \sigma_1 [v] \cdot [v] ds + \int_{\varepsilon_h^\circ \cup \varepsilon_h^N} \varepsilon \sigma_2 [\nabla v]^2 ds \\ & + \int_{\varepsilon_h^\circ \cup \varepsilon_h^D} \varepsilon \sigma_2 \{\nabla v\} \cdot \{\nabla v\} ds + \|\sqrt{c_e} [v]\|_{0,\varepsilon_h}^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Exemplo 4.3.4** *Os resultados numéricos que aqui apresentamos referem-se a um exemplo do problema 4.12, onde  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $c = 0$ , condição de fronteira de Dirichlet homogênea e o termo de fonte  $f$  foi escolhido de forma que a solução exata do problema seja  $\text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y)$ .*

O caso onde  $K_1 = 0$ , denotaremos por pf (penalização no salto do fluxo da solução) e se  $K_2 = 0$  por ps (penalização no salto da solução).

Nas tabelas 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 apresentamos as ordens de convergência numérica dos métodos GSIPG e GNIPG nas normas dos espaços  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ , para os casos ps e pf. Nas primeiras duas tabelas, onde  $\varepsilon = 10^{-8}$ , podemos observar que ambos os métodos apresentam ordens de convergência semelhantes,  $h^{p+1}$  em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $h^p$  em  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $h^{p+\frac{1}{2}}$  em  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$ . Já na tabela 4.4 consideramos o método GSIPG, em que  $\varepsilon = 1$ , também obtemos ordem de convergência  $h^{p+1}$  em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $h^p$  em  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ , mas em  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  temos convergência na ordem de  $h^{p+1}$  para  $p$  ímpar e  $h^p$  para  $p$  é par. Por fim, na tabela 4.5, notamos que a ordem de convergência do método GNIPG para  $\varepsilon = 1$  em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  é  $h^{p+1}$  para  $p$  é ímpar e  $h^p$  para  $p$  é par.

Tabela 4.2: Ordens de convergências em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  para a formulação GSIPG com ordem de aproximação polinomial de 1 até 4,  $\varepsilon = 10^{-8}$  e  $K_1 = 1$  para o caso ps e  $K_2 = 1$  para pf.

		Ordens em $\ e\ _{L^2}$		Ordens em $\ e\ _{H^1}$		Ordens em $\ e\ _\varepsilon$	
p	Nível	ps	pf	ps	pf	ps	pf
1	2	2.0960	2.0960	1.0605	1.0605	1.9000	1.9000
	3	2.2952	2.2952	1.0262	1.0262	1.6949	1.6949
	4	2.1311	2.1311	1.0021	1.0021	1.5399	1.5399
	5	2.0378	2.0378	1.0000	1.0000	1.5106	1.51061
2	2	2.5821	2.5821	2.0991	2.0991	2.6020	2.6020
	3	2.9015	2.9015	2.0732	2.0732	2.7598	2.7598
	4	2.9697	2.9697	2.0268	2.0268	2.7302	2.7302
	5	2.9900	2.9999	2.0095	2.0095	2.6612	2.6612
3	2	4.6565	4.6565	3.0821	3.0821	4.1585	4.1585
	3	4.4993	4.4993	3.0042	3.0042	3.6997	3.6997
	4	4.2308	4.2308	2.9993	2.9993	3.5359	3.5359
	5	4.0736	4.0736	2.9996	2.9996	3.5073	3.5073
4	2	4.5942	4.5942	4.0018	4.0018	4.5507	4.5507
	3	4.9002	4.9002	4.0175	4.0175	4.7537	4.7537
	4	4.9730	4.9730	4.0078	4.0078	4.7300	4.7300
	5	4.9921	4.9921	4.0030	4.0030	4.6607	4.6607



Tabela 4.3: Ordens de convergências em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  para a formulação GNIPG com ordem de aproximação polinomial de 1 até 4,  $\varepsilon = 10^{-8}$ ,  $K_1 = 1$  para o caso ps e  $K_2 = 1$  para pf.

		Ordens em $\ e\ _{L^2}$		Ordens em $\ e\ _{H^1}$		Ordens em $\ e\ _\varepsilon$	
p	Nível	ps	pf	ps	pf	ps	pf
1	2	2.0960	2.0960	1.0605	1.0605	1.9000	1.9000
	3	2.2952	2.2952	1.0262	1.0262	1.6949	1.6949
	4	2.1311	2.1311	1.0021	1.0021	1.5399	1.5399
	5	2.0378	2.0378	1.0000	1.0000	1.5106	1.5106
2	2	2.5821	2.5821	2.0991	2.0991	2.6020	2.6020
	3	2.9015	2.9015	2.0732	2.0732	2.7598	2.7598
	4	2.9697	2.9697	2.0268	2.0268	2.7302	2.7302
	5	2.9900	2.9999	2.0095	2.0095	2.6612	2.6612
3	2	4.6565	4.6565	3.0821	3.0821	4.1585	4.1585
	3	4.4993	4.4993	3.0042	3.0042	3.6997	3.6997
	4	4.2308	4.2308	2.9993	2.9993	3.5359	3.5359
	5	4.0736	4.0736	2.9996	2.99967	3.5073	3.5073
4	2	4.5942	4.5942	4.0018	4.0018	4.5507	4.5507
	3	4.9002	4.9002	4.0175	4.0175	4.7537	4.7537
	4	4.9730	4.9730	4.0078	4.0078	4.7300	4.7300
	5	4.9921	4.9921	4.0030	4.0030	4.6607	4.6607

Tabela 4.4: Ordens de convergências em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  para a formulação GSI PG com ordem de aproximação polinomial de 1 até 4,  $\varepsilon = 1$  e  $K_1 = 10$  para o caso ps e  $K_2 = 10$  para pf.

		Ordens em $\ e\ _{L^2}$		Ordens em $\ e\ _{H^1}$		Ordens em $\ e\ _\varepsilon$	
p	Nível	ps	pf	ps	pf	ps	pf
1	2	1.7801	-0.2958	0.9883	-0.4420	2.0468	-0.8737
	3	1.9561	0.5704	0.9992	0.2522	2.0996	-0.1775
	4	1.9906	-3.2064	0.9997	-3.2255	2.0748	-3.6252
	5	1.9979	-1.6635	0.9999	-1.8976	2.0444	-2.2559
2	2	2.9119	2.9665	1.9874	2.1053	2.0166	3.1198
	3	2.9605	3.0299	2.0001	2.0761	2.1020	2.9822
	4	2.9810	3.0220	2.0008	2.0348	2.0757	2.8136
	5	2.9909	3.0122	2.0005	2.0155	2.0448	2.6845
3	2	3.8979	3.9938	2.9873	3.0315	4.0932	3.6703
	3	3.9748	3.9983	2.9970	3.0079	4.1148	3.2297
	4	3.9940	3.9993	2.9992	3.0017	4.0792	3.0546
	5	3.9985	3.9998	2.9998	3.0004	4.0463	3.0121
4	2	4.9718	4.9466	3.9837	3.9631	3.9423	4.8190
	3	4.9842	4.9882	3.9970	3.9928	4.0841	4.7202
	4	4.9920	4.9982	3.9997	3.9996	4.0722	4.6325
	5	4.9922	4.9966	4.0003	3.9973	4.0425	4.4184

Tabela 4.5: Ordens de convergências em  $L^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  e  $S^p(\Omega, \mathcal{T}_h, \mathcal{F})$  para a formulação GNIPG com ordem de aproximação polinomial de 1 até 4,  $\varepsilon = 1$  e  $K_1 = 1$  para o caso ps e  $K_2 = 1$  para pf.

		Ordens em $\ e\ _{L^2}$		Ordens em $\ e\ _{H^1}$		Ordens em $\ e\ _\varepsilon$	
p	Nível	ps	pf	ps	pf	ps	pf
1	2	2.3102	1.6280	1.0229	1.0477	2.2199	1.0968
	3	2.2244	1.8160	1.0147	1.1775	2.1344	1.0440
	4	2.0689	1.8499	1.0059	1.1177	2.0486	1.0045
	5	2.0015	1.8379	1.0019	1.0617	2.0088	1.0002
2	2	2.1457	2.0611	1.9963	1.9173	1.9322	2.1141
	3	2.1733	1.8932	2.0322	1.8726	2.0301	2.0110
	4	2.0999	1.8612	2.0181	1.8706	2.0238	1.9726
	5	2.0504	1.8948	2.0087	1.9062	2.0127	1.9716
3	2	4.3934	4.4232	3.0742	3.1606	4.2402	3.6484
	3	4.1616	4.1295	3.0170	3.0365	4.0772	3.1522
	4	4.0552	4.0178	3.0037	3.0100	4.0224	3.0309
	5	4.0207	3.9958	3.0008	3.0028	4.0075	3.0067
4	2	4.4113	4.1816	3.9950	3.9294	3.8681	4.2812
	3	4.3810	4.1331	4.0147	3.9600	4.0017	4.2495
	4	4.1948	4.0256	4.0097	3.9748	4.0134	4.1387
	5	4.0840	3.99291	4.0037	3.9824	4.0074	4.0689

# Conclusões

Neste trabalho foi estudado o Método de Galerkin descontínuo com penalização nos fluxos da solução numérica para equações elípticas de segunda ordem. Esta técnica, foi recentemente introduzida para problemas elípticos e hiperbólicos, com o objetivo de assegurar a propriedade conservativa do método de Galerkin descontínuo, possibilitando assim a aplicação do método na dinâmica de fluídos computacional.

O estudo teórico sobre a convergência do DGFEM com penalização nos fluxos da solução numérica e os resultados obtidos com experiências numéricas permitem fazer as seguintes conclusões:

Para problemas elípticos de segunda ordem com soluções suaves todos os métodos (com penalização na solução ou no fluxo) apresentaram resultados numéricos que confirmam as ordens de convergência teóricas.

Em problemas elípticos que possuem uma solução exata com fortes gradientes ou descontinuidades, os métodos de Galerkin descontínuo com penalização no salto da solução numérica apresentam oscilações na vizinhança do ponto “irregular”. Entretanto os métodos com penalização nos fluxos mostraram desempenho diferente: o método GNIPG apresentou fortes oscilações no ponto “irregular” e também não aproximou bem a solução exata fora deste ponto, já o método GSIPG mostrou boa convergência espectral.

Somente realizamos um estudo numérico do método proposto para problemas de advecção-difusão. Baseados nestes dados podemos notar que ambos os métodos mostraram robustas taxas de convergência, tanto para problemas com termo elíptico predominante como para problemas com advecção dominante. Os métodos apresentaram taxas de convergência que correspondem à problemas elípticos quando  $\varepsilon = 1$  e à ordens de convergência hiperbólica quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\varepsilon = 10^{-8}$ ).

Desenvolver um estudo teórico do método de Galerkin descontínuo implementado para a equação reação-advecção-difusão deverá ser objeto de futuras investigações, bem como aplicar as técnicas de estabilização estudadas para desenvolver o método de Galerkin descontínuo de alta ordem, conservativo, para sistemas de equações de Navier-Stokes.

# Apêndice A

## Espaços de funções

O objetivo deste apêndice é apresentar alguns conceitos de espaços utilizados no decorrer do trabalho, de maneira sintetizada para possíveis esclarecimentos ao leitor.

### A.1 Espaços de funções contínuas

Seja  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números inteiros positivos. Uma  $n$ -úpla  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  em  $\mathbb{N}^n$  é chamado um multi-índice, e  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  é o comprimento de  $\alpha$ . Assim, definimos  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$  em que  $\partial_j = \partial/\partial x_j$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Seja  $\Omega$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $k \in \mathbb{N}$ , então denotamos por:

1.  $C^k(\Omega)$  o conjunto de todas as funções  $u$  definidas em  $\Omega$  com valores reais, tal que  $\partial^\alpha u$  é contínua para todo  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ .
2.  $C^\infty(\Omega)$  como  $\bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$ .
3.  $C^k(\bar{\Omega})$  o conjunto de todas as  $u \in C^k(\Omega)$ , tal que  $\partial^\alpha u$  pode ser estendida continuamente de  $\Omega$  para  $\bar{\Omega}$ , para todo  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ .
4.  $C^\infty(\bar{\Omega})$  como  $\bigcap_{k \geq 0} C^k(\bar{\Omega})$ .

Assumindo que  $\Omega$  é um conjunto aberto limitado em  $\mathbb{R}^n$ , então  $C^k(\bar{\Omega})$  equipado com a norma

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)| \right\},$$

é um espaço normado.

**Definição A.1.1** *Seja  $u$  uma função contínua definida em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Chamamos de **suporte** de  $u$  ao fecho em  $\Omega$  do conjunto  $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$ . Usamos a notação  $\text{supp } u$  para designar o suporte de  $u$ . Se  $\text{supp } u$  é um conjunto compacto e é um subconjunto do interior de  $\Omega$ , então dizemos que  $u$  tem **suporte compacto** em relação a  $\Omega$ .*

**Definição A.1.2** *Seja  $\Omega$  um domínio em  $\mathbb{R}^n$ ,  $C_0^k(\Omega)$  denota o conjunto das funções  $u \in C^k(\Omega)$  com suporte compacto em  $\Omega$ . Para o caso em que  $k = \infty$ ,  $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ .*

## A.2 Espaços de funções integráveis

Consideremos agora funções de valores reais definidas sobre um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  que são Lebesgue integráveis. Para  $1 \leq p < \infty$ , definimos o espaço de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  como o conjunto de todas as  $u$  definidas em  $\Omega$ , tal que  $|u|^p$  é integrável a Lebesgue sobre  $\Omega$ . O espaço  $L^p(\Omega)$  equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

é um espaço de Banach.

**Definição A.2.1** *O supremo essencial de  $u$  é o ínfimo do conjunto de todos os números reais  $M$  tais que  $|u| \leq M$  quase sempre em  $\Omega$ . Denotamos o supremo essencial por  $ess.\sup u(x)$ .*

Logo, quando  $p = \infty$ , o espaço  $L^\infty(\Omega)$  denota o conjunto das funções de valores reais  $u$  definidas sobre  $\Omega$  que são mensuráveis a Lebesgue, tal que,  $|u|$  tem supremo essencial finito. O espaço  $L_\infty(\Omega)$  equipado com a norma

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \underset{x \in \Omega}{ess.\sup} |u(x)|,$$

é um espaço de Banach.

## A.3 Espaços de Sobolev

**Definição A.3.1** *O conjunto das funções localmente integráveis,  $L_{loc}^1(\Omega)$  é definido por:*

$$L_{loc}^1(\Omega) = \{f : f \in L^1(K), \forall K \subset \text{int}(\Omega)\}.$$

**Definição A.3.2** *Seja  $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$  e  $\alpha$  um multi-índice. Então,  $v$  é a  $\alpha$ -ésima derivada fraca de  $u$  se, e somente se,*

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da mesma forma como nas derivadas clássicas escrevemos  $v = D^\alpha u$ . A definição de derivada fraca estende a de derivada clássica.

**Definição A.3.3** Seja  $\Omega$  um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^d$ , então para  $1 \leq p \leq \infty$ , o espaço de Sobolev  $W_p^k(\Omega)$  é definido como sendo,

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

e, equipamos esse espaço com a norma de Sobolev dada por,

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

quando  $1 \leq p < \infty$ , e por,

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)},$$

quando  $p = \infty$ .

Para cada espaço acima, define-se a semi-norma de Sobolev,

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

quando  $1 \leq p < \infty$ , e

$$|u|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)},$$

quando  $p = \infty$ .

Quando  $p = 2$ ,  $W_2^k(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$(u, v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v),$$

em que  $(\cdot, \cdot)$  é o produto interno de  $L^2(\Omega)$ . Nesse caso designamos  $W_2^k(\Omega)$  por  $H^k(\Omega)$ .

### A.3.1 Espaços de Sobolev fracionários

Dado  $s > 0$  e  $s \notin \mathbb{N}$  escrevemos  $s = m + \lambda$  sendo  $0 < \lambda < 1$  e  $m = [s]$  é a parte inteira de  $s$ . Então,  $W_p^s(\Omega)$  é o conjunto de todas as  $u \in W_p^m(\Omega)$ , tal que,

$$|u|_{W_p^s(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{n+\lambda p}} dx dy \right)^{1/p} < \infty,$$

para  $1 \leq p < \infty$  e,

$$|u|_{W_\infty^s(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \left\{ \text{ess.sup}_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda} \right\} < \infty,$$

para  $p = \infty$ .

Equipamos  $W_p^s(\Omega)$  com a norma

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = (\|u\|_{W_p^m(\Omega)}^p + |u|_{W_p^s(\Omega)}^p)^{1/p},$$

quando  $1 \leq p < \infty$ , e

$$\|u\|_{W_\infty^s(\Omega)} = \|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} + |u|_{W_\infty^s(\Omega)},$$

para  $p = \infty$ .

Maiores informações sobre esses espaços podem ser encontradas em [1].

## A.4 Fronteira Lipschitz

A seguir apresentamos uma definição que garante a regularidade da fronteira de um domínio  $\Omega$ .

**Definição A.4.1** *Supomos que  $\Omega$  é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^d$ . Vamos dizer que a sua fronteira  $\partial\Omega$  é de classe  $C^k$  ou Contínua Lipschitz, se para todo  $x \in \partial\Omega$ , existe:*

1. *um conjunto aberto  $O \subset \mathbb{R}^d$  com  $x \in O$ ;*
2. *um sistema ortogonal de coordenadas locais  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) = (\check{\zeta}, \zeta_d)$  e  $a \in \mathbb{R}^d$ , tal que,  $O = \{\zeta; -a_j < \zeta_j < a_j, 1 \leq j \leq d\}$ ;*
3. *existe uma função  $\varphi$  definida sobre*

$$\check{O} = \{\check{\zeta} \in \mathbb{R}^{d-1}; -a_j < \zeta_j < a_j, 1 \leq j \leq d-1\}$$

*tal que  $\varphi \in C^k(\check{O})$  ( $\varphi$  é contínua Lipschitz in  $\check{O}$ ),*

$$|\varphi(\check{\zeta})| \leq \frac{a_d}{2}, \quad \check{\zeta} \in \check{O},$$

$$\Omega \cap O = \{\zeta; \zeta_d < \varphi(\check{\zeta}), \check{\zeta} \in \check{O}\}$$

e

$$\partial\Omega \cap O = \{\zeta; \zeta_d = \varphi(\check{\zeta}), \check{\zeta} \in \check{O}\}.$$

# Bibliografia

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5):1749–1779, 2001.
- [3] Douglas N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(4):742–760, 1982.
- [4] I. Babuška and M. Suri. The hp version of the finite element method with quasi-uniform meshes. *RAIRO, Math. Mod. Numer. Anal.*, 21(21):199–238, 1987.
- [5] I. Babuška and M. Suri. The optimal convergence rate of the p-version of the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(4), 1987.
- [6] C. E. Baumann. *An H-P Adaptive Discontinuous Finite Element Method for Computational Fluid Dynamics*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 1997.
- [7] D. Braess. *Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Application in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, 1997.
- [8] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 1994.
- [9] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, 1991.
- [10] F. Brezzi, L.D. Marini, and E. Süli. Discontinuous Galerkin methods for first-order hyperbolic problems. *M3AS:Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.*, 14(12):1893–1903, 2004.
- [11] E. Burman and A. Ern. Continuous interior penalty hp-finite element methods for transport operators. *Math. Comp.*, Submitted, 2005.
- [12] Erik Burman and Piter Hansbo. Edge stabilization for galerkin approximations of convection-diffusion-reaction problems. *Comp. Meth. Mech. Eng.*, 193:1437–1453, 2004.
- [13] C. Canuto and A. Quarteroni. Approximation results for orthogonal polynomials in sobolev spaces. *Math. Comp.*, 38:37–86, 1982.



- [14] P.R.B. Devloo. PZ: An object oriented environment for scientific programming. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 150:133–153, 1997.
- [15] A. Ern and J. L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlang, New York, 2004.
- [16] A.C. Galeão, R.C. Almeida, S.M.C. Malta, and A.F.D. Loula. Finite element analysis of convection dominated reaction diffusion problems. *Applied Numerical Mathematics*, 48:205–222, 2004.
- [17] P. Houston, C. Schwab, and E. Süli. Discontinuous hp-finite element methods for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis.*, 39(6):2133–2163, 2002.
- [18] T. J. R. Hughes, G. Engel, L. Mazzei, and M. G. Larson. A comparison of discontinuous and continuous galerkin methods based on error estimates, conservation, robustness and efficiency. *Lecture Notes in Computacional Science and Engineering*, 11:135–146, 1999.
- [19] J. Nitsche. "Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei der Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36:9–15, 1971.
- [20] J. T. Oden, I. Babuska, and C. Baumann. The local discontinuous Galerkin finite element method for diffusion problems. *J. Comput. Phys.*, 146:491–519, 1998.
- [21] J. T. Oden, I. Babuška, and C. Baumann. The local discontinuous Galerkin finite element method for diffusion problems. *J. Comput. Phys.*, 146:491–519, 1998.
- [22] J. T. Oden and L. F. Demkowicz. *Applied Functional Analysis*. CRC Press, 1996.
- [23] J. T. Oden and J. N. Reddy. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. John Wiley & Sons, 1976.
- [24] M.F. Percell, P. smd Wheeler. A local residual finite element procedure for elliptic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(4):707–714, August 1978.
- [25] S. Prudhomme, F. Pascal, J.T. Oden, and A. Romkes. Review of a priory error estimation for discontinuous Galerkin methods. Technical Report TICAM REPORT 00-27, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, The University of Texas at Austin, 2000.
- [26] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlang, 1997.
- [27] B. Rivière. *Discontinuous Galerkin methods for solving the miscible displacement problem in porous media*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 2000.

- [28] B. Rivière and Mary F. Wheeler. *A Discontinuous Galerkin Method Applied to Non-linear Parabolic Equations*, volume 11 of *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*, pages 231–244. 1999.
- [29] B. Rivière, Mary F. Wheeler, and V. Girault. Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. part 1. *Computational Geosciences*, 3:337–360, 1999.
- [30] A. Romkes, J. T. Oden, and S. Prudhomme. A priori error analyses of a stabilized discontinuous Galerkin methods. *Computers and Mathematics with Applications*, 46:1289–1311, 2003.
- [31] A. Romkes, S. Prudhomme, and J. T. Oden. A priori error analyses of a stabilized discontinuous galerkin method. Technical Report TICAM Teport 02-28, The University of Texas at Austin, 2002.
- [32] C. Schwab. *p- and hp- Finite Element Methods. Theory and Applications to Solid and Fluid Mechanics*. Oxford University Press, 1998.
- [33] E. Süli, C. Schwab, and P. Houston. *hp-DGFEM for Partial Differential Equations with Nonegative Characteristic Form*, volume 11 of *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*, pages 221–230. Springer, Berlin, 1999.
- [34] T. Warburton and J.S. Hesthaven. On the constants in hp-finite element trace inverse inequality. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 192:2765–2773, 2003.
- [35] Mary F. Wheeler. An elliptic collocation finite element method with interior penalties. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15:152–161, 1978.