

**Aplicação do Método de Galerkin ao
Problema de Condução Estocástica
de Calor**

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Aplicação do Método de Galerkin ao Problema de
Condução Estocástica de Calor**

Dissertação Submetida à Universidade Federal de Santa
Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de
mestre em Engenharia Mecânica

Maura Pauletto Taschetto

Florianópolis, Agosto de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Aplicação do Método de Galerkin ao Problema de Condução
Estocástica de Calor**

Maura Pauletto Taschetto

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia
Especialidade Engenharia Mecânica, sendo aprovada em sua forma final

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Orientador

Cláudio Roberto A. Silva Junior, Dr.

Co-Orientador

Fernando Cabral, Ph.D.

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora

Hanz Helmutz Zürn, Ph.D.

Membro da banca examinadora

Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D.

Membro da banca examinadora

José Carlos Pereira, Dr.

Membro da banca examinadora

Paulo César Philippi, Dr.

Presidente da banca examinadora

*"Nascemos príncipes. A educação faz de nós sapos."
Eric Berne*

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus queridos pais Fabio e Marcelina ...

Agradecimentos

Ao professor, orientador e amigo Marcelo Krajnc Alves por sua capacidade científica incomparável, pelas lições de como enfrentar as grandes adversidades com coragem e confiança. Obrigada por tudo;

Ao co-orientador Cláudio Roberto Ávila, por toda sua disposição, ajuda e apoio que contribuíram para a realização deste trabalho;

Ao meu companheiro Flavio Boscatto por todo carinho e paciência nestes dois últimos anos, sem teu apoio emocional esta jornada seria mais difícil;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- CAPES pelo fomento concedido;

Aos meus colegas e amigos de laboratório pelos bons momentos que passamos juntos, Marcus, Wesley, Ivan, Guilherme, Hilbeth, Miguel e as gurias do GMAC Lindaura e Fernanda, vocês tornaram esta jornada mais agradável

E por fim, a minha querida família, pai, mãe e Fer, que mesmo longe sempre me apoiaram. Amo vocês;

Conteúdo

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	vi
Nomenclatura	vii
Resumo	ix
Abstract	x
Apresentação do trabalho	xi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos e Contribuições	3
1.2 Revisão Bibliográfica	3
2 Conceitos em Processos Estocásticos	9
2.1 σ -Álgebra e Espaço Mensurável	9
2.2 Espaços de probabilidade	10
2.3 Variável Randômica, Expectância e Independência	12
2.4 Processo Estocástico	15
2.5 Modelo Matemático	16
2.6 Representação de um Processo Estocástico	17
2.6.1 Série de Karhunen-Loève	18
2.7 Polinômios de Caos e o Esquema Askey-Wiener	23

3	Métodos de Simulação	28
3.1	Monte Carlo	28
3.2	Série de Neumann	29
3.2.1	Normas no \mathbb{R}^n e suas Equivalências	32
3.3	Momentos Estatísticos de uma Variável Randômica	33
3.4	Estimativas dos Momentos Estatísticos	34
4	Problema de Condução Estocástica de Calor	40
4.1	Introdução	40
4.1.1	Problema Estocástico de Valor de Contorno	45
4.1.2	Problema Variacional Estocástico	46
4.1.3	Representação da Incerteza	47
4.1.4	Método de Galerkin	51
4.1.5	Determinação dos termos do sistema linear	51
4.2	Exemplos	54
4.2.1	Exemplo 1	55
4.2.2	Exemplo 2	59
4.2.3	Conclusão	66
5	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	68
A	Espaços de Sobolev	77
A.1	Notação	77
A.2	Espaços de Sobolev	77
B	Espaço Métrico	79
C	Espaço de Hilbert	82
C.1	Espaços produto interno e de Hilbert	82
C.2	Espaços de Hilbert Isomorfos	84

<i>CONTEÚDO</i>	iii
D Teoremas	86
D.1 Teorema de Cameron-Martin	86
D.2 Teorema de Mercer	86

Lista de Figuras

2.1	Representação de uma variável randômica.	13
2.2	Comportamento da função de covariância com relação ao comprimento de correlação b	23
2.3	Relação entre os polinômios do esquema Askey-Wiener.	26
4.1	Representação do problema proposto.	43
4.2	Representação diferencial do problema.	43
4.3	Distribuição de Temperatura.	55
4.4	Função Covariância para $m = 2$	56
4.5	Aproximação espectral de Karhunen-Loève para $m = 2$	56
4.6	Erro na aproximação da função de covariância para $m = 2$	57
4.7	Distribuição da Temperatura obtida por Monte Carlo-KL e Askey-caos para $m = 2$ e $p = 2$	58
4.8	Distribuição da variância obtida por Monte Carlo e Askey-caos para $m = 2$	58
4.9	(A) e (B) Representação da condutividade térmica gerada por Monte Carlo - KL.	59
4.10	Autofunções da função covariância.	60
4.11	Função de Covariância exata para $m = 3$	60
4.12	Aproximação espectral de Karhunen-Loève para $m = 3$	61
4.13	Erro na aproximação da função de covariância para $m = 3$	61
4.14	Distribuição de Temperatura obtida por Monte Carlo e Askey-caos, para $m = 3$	62
4.15	Distribuição da variância obtida por Monte Carlo e Askey-caos para $m = 3$	63

4.16 (A) Distribuição da temperatura obtida por Askey-caos; (B) Distribuição da temperatura obtida por Monte Carlo.	63
4.17 (A) Variância obtida por Monte Carlo; (B) Variância obtida por Askey-caos	64
4.18 Função de Covariância exata.	64
4.19 Variância para polinômios Askey de ordem 3 através de Monte Carlo. . . .	65
4.20 Variância para polinômios de ordem 3 através da simulação Galerkin-Caos.	66

Lista de Tabelas

Nomenclatura

κ	Condutividade térmica
σ	Desvio padrão
u, ξ	Variável randômica
Θ, Ω	Espaço amostral
Γ	Fronteira regular
$\langle \cdot \rangle$	Operador valor esperado
$ \cdot $	Função módulo
P	Medida de probabilidade de Hilbert
V	Espaço linear
\mathbf{D}	Espaço físico em que o problema é definido
K	Matriz de rigidez
μ_u^k	Variância
$\hat{\eta}_u, \hat{\sigma}_u$	Estimativas para o momento estatístico
χ_{Ω_i}	Função característica
λ_n	Autovalores
f_n	Autofunções
$C(\cdot)$	Matriz de covariância
δ	delta de Kronecker
$f_{\xi}(\cdot)$	Densidade da distribuição da probabilidade conjunta
$L(\cdot)$	Operador diferencial
Γ_p	Conjunto de polinômios

\langle, \rangle	Produto interno
P_S^\perp	Projeção ortogonal de f sobre S
$\langle; \rangle$	Média
W	Função peso
ρr	Geração de calor
Γ_T	Fronteira com temperatura prescrita
Γ_q	fronteira com fluxo de calor prescrito
\vec{q}	Fluxo de calor por unidade de área
T	Campo de temperatura
Ψ	Polinômio de Caos

Resumo

O objetivo deste trabalho é propôr um procedimento numérico para a solução de problemas estocásticos de condução de calor em regime permanente. Considera-se a condutividade térmica como sendo um processo estocástico de segunda ordem não Gaussiano cuja função de covariância é conhecida. A série de Neumann é aplicada para obter a solução de um sistema linear de equações, cuja matriz de coeficientes apresenta entradas randômicas. O método de simulação de Monte Carlo e a série de Neumann são utilizados para determinar as estimativas de primeira e segunda ordem de problema com entradas randômica. Para a representação da incerteza são utilizadas as séries de Karhunen-Loève ou de polinômios de Caos. A eficiência do método proposto é avaliada com relação ao método de simulação de Monte Carlo através da comparação entre as estatísticas da solução do campo de temperaturas geradas por ambos os métodos. A distribuição de temperatura é obtida através do Método de projeções de Galekin juntamente com as extensões dos polinômios de Wiener-Askey. A fim de validar o procedimento proposto resolve-se um problema linear 1D de condução do calor, onde pode-se observar que os resultados obtidos através da simulação Galerkin-Caos apresentam uma melhor aproximação.

Palavras-chave: Processo estocástico, expansão de Karhunen-Loève, polinômios de Wiener-Askey.

Abstract

The objective of this work is to propose a numerical procedure for the solution of linear steady state heat conduction problems. One considers the thermal conductivity to be a non Gaussian second order stochastic processes with a known covariance function. The series of Neumann is applied to get the solution of a linear system of equations, whose matrix of coefficients has random values. The method of simulation of Monte Carlo and the series of Neumann are used to determine the estimates the first and second order of problem with random inputs. For the representation of the uncertainty the series of Karhunen-Loève or polynomials of Chaos are used. The efficiency of the considered method is evaluated with regard to the method of simulation of Monte Carlo through the comparison of the solution statistics for field of temperatures generated by both methods. The temperature distribution is obtained through the Method of projections Galerkin together with the extensions of the polynomials of Wiener-Askey. In order to validate the procedure considered a linear problem in 1D of heat conduction is presented, which can be observed that the results obtained through simulation Galerkin-Chaos have a better approximation.

Key-Words: Stochastic Processes, Expansion of Karhunen-Loève, polynomials of Wiener-Askey.

Apresentação do trabalho

Buscando facilitar o entendimento deste trabalho, o texto desta dissertação está organizado em 5 capítulos principais e alguns apêndices. A seguir é apresentado um pequeno resumo de cada um dos capítulos desta dissertação.

No **Capítulo 1** são apresentadas a introdução e a motivação que impulsionou o desenvolvimento do trabalho, uma breve revisão bibliográfica e os objetivos definidos para o trabalho aqui desenvolvido.

No **Capítulo 2**, as definições mais significantes ao desenvolvimento dos capítulos posteriores são apresentadas. Inicialmente, são apresentadas as principais definições matemáticas da forma mais geral possível, dando ao leitor uma ampla base sobre os espaços e propriedades necessárias para definir-se espaço mensurável, espaço de probabilidade, variáveis randômicas, campos randômicos, processos estocásticos¹, entre outros; sem perder o formalismo matemático. Neste capítulo são apresentadas as expansões mais usuais para processos randômicos: a série Karhunen-Loève (KL) e o Polinômio de Caos.

No **Capítulo 3**, são apresentados os métodos de simulação de Monte Carlo e a série de Neumann, que consiste na aproximação da inversa de um operador através de uma série convergente e alguns dos resultados já publicados sobre as aplicações destes métodos. Neste capítulo são determinadas corolários que fornecem um filtro para os momentos de primeira e segunda ordem.

No **Capítulo 4**, através da discretização do problema térmico são determinadas as expressões da condutividade térmica e do campo de temperaturas pelos métodos KL e Polinômio de Caos, a fim de que se possa obter a solução do problema de valor de contorno

¹Um processo estocástico é aquele regido pela imprevisibilidade. É aleatório (randômico). Um processo assim produz resultados diferentes e imprevisíveis a cada vez em que é executado. O contrário disso seria um processo determinístico.

estocástico proposto

Finalmente, as conclusões são apresentadas no **Capítulo 5**, com intuito de resumir os principais resultados apresentados e definir as perspectivas de continuação desta linha de pesquisa, no domínio do Laboratório de Mecânica Aplicada e Computacional, GMAC-UFSC.

Os apêndices estão reservados para outros detalhes referentes à determinação de alguns resultados matemáticos que requerem maiores detalhes.

Capítulo 1

Introdução

A modelagem matemática de sistemas dinâmicos preocupa-se basicamente com a tradução dos fenômenos observados na natureza para uma linguagem clara e universal, para um melhor entendimento dos padrões governantes contidos nestes fenômenos. Muitas vezes, o modelo obtido, geralmente representado por sistemas de equações diferenciais ordinárias ou parciais, mesmo com um excelente grau de precisão, quando comparado com dados experimentais, pode ser muito complexo. Além disso, no caso de equações diferenciais parciais, que possuem solução analítica para poucos problemas, os métodos aproximados comumente empregados, tais como o método dos elementos finitos, resultam em sistemas com um número elevado de graus de liberdade. Nestes casos, faz-se necessário o emprego de alguma estratégia para a redução da ordem destes modelos. Desta forma, o modelo reduzido deve reproduzir, adequadamente, o comportamento espacial e temporal do sistema dinâmico original, o que não é diferente nos problemas em que a solução é não determinística.

Ao longo dos últimos anos e, em decorrência dos trabalhos de ITO (1984) e KUNITA (1984) a teoria do cálculo estocástico consolidou-se, sendo atualmente um dos ramos de pesquisa em ativo desenvolvimento. Este trabalho surgiu do interesse em estudar essa teoria com vistas às suas diferentes aplicações. Muitas destas aplicações estão presentes em áreas da engenharia como sistemas térmicos, mecânica dos sólidos e fluidos. Tal modelagem é aplicada devido à presença de fatores ambientais, cargas externas, propriedades

dos materiais ou na geometria do domínio físico do problema. Por exemplo, os problemas térmicos possuem uma vasta bibliografia no que diz respeito a soluções analíticas, no entanto, mais recentemente, estes problemas estão sendo abordados do ponto de vista estocástico, considerando, como randômicas as propriedades termo-físicas.

A teoria e os métodos de quantificação da incerteza avançaram significativamente durante os últimos 30 anos. Este avanço decorre, em grande parte, do aumento da eficiência e capacidade computacional atual. Observou-se uma grande evolução na área teórica e aplicada à análise de sistemas estocásticos. Na classe dos métodos baseados em simulação de Monte Carlo houve o desenvolvimento de novos métodos, entre eles pode-se destacar os métodos de amostragem estratificada, Latin Hipercube, amostragem por importância e outros. Neste trabalho os métodos baseados em simulação de Monte Carlo serão referidos como métodos com amostragem. Na classe dos métodos aproximados, métodos sem amostragem, destaca-se o método dos elementos finitos estocásticos espectrais. Esta nova abordagem permitiu, de certa forma, trazer o problema de sistemas estocásticos para a forma convencional na qual são tratados os problemas com sistemas determinísticos.

Até o início dos anos setenta havia poucos registros sobre problemas mecânicos com uma representação estocástica. Após isso observa-se um grande crescimento da abordagem estocástica, não apenas na engenharia, como em áreas onde este tema estava consolidado. A economia e o mercado de investidores foram os campos em que ocorreram expressivos desenvolvimentos nos métodos estocásticos. Atualmente, grande parte dos grupos de investidores possuem analistas em suas equipes de trabalho que fazem "previsões" de investimentos com opções reais, ou seja, pode-se ver uma previsão como um valor esperado adicionado a uma variação dada por um processo estocástico.

O problema mais comum de sistemas estocásticos em engenharia mecânica envolve uma equação diferencial linear com coeficientes randômicos. Estes coeficientes representam as propriedades do sistema em investigação podendo ser modelados como variáveis randômicas ou, com um nível crescente de complexidade, como processos estocásticos. O estado atual do conhecimento a respeito das equações diferenciais estocásticas impossibilita soluções exatas exceto em alguns exemplos simples.

1.1 Objetivos e Contribuições

Este trabalho propõe o desenvolvimento de um procedimento numérico para obter uma solução aproximada para o problema de condução estocástica de calor em regime permanente. Para obter as soluções aproximadas é utilizado o método de Galerkin e um esquema de discretização com funções de base com suporte em todo o domínio físico do problema. A incerteza está na propriedade de condutividade térmica sendo modelada através de variável randômica ou processo estocástico. Para a representação da incerteza são utilizadas as séries de Karhunen-Loève ou de polinômios de Caos. A partir da solução numérica são obtidos os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem do processo estocástico do campo de temperatura. A eficiência do método proposto é avaliada com relação ao método de simulação de Monte Carlo através da comparação entre as estatísticas da solução do campo de temperaturas geradas por ambos os métodos. São apresentados alguns desenvolvimentos teóricos realizados na série de Neumann. Além disso, o trabalho apresenta um conjunto de citações bibliográficas, resultados teóricos e algoritmos que servirão como uma referência importante a ser consultada para trabalhos futuros na linha de análise estocástica aplicada a problemas de engenharia.

1.2 Revisão Bibliográfica

O objetivo desta seção é apresentar e comentar brevemente as principais referências bibliográficas do método de Galerkin-Caos. As citações feitas a seguir permitem traçar a linha dos conhecimentos e aplicações utilizados neste trabalho. As referências bibliográficas citadas na metodologia utilizada podem ser divididas, mais didaticamente de acordo com os capítulos desta dissertação. Por este motivo, é apresentada, nesta etapa, uma revisão bibliográfica mais abrangente, deixando para a introdução do Capítulo 3 uma revisão mais específica em relação aos conceitos e aos métodos utilizados.

GHANEM & SPANOS (1989) apresentam uma aproximação não estatística, chamada de polinômio de Caos, baseada na teoria homogênea de Caos-Wiener. São obtidas soluções

aproximadas para os problemas de flexão de viga Euler-Bernoulli e estado plano de tensões, ambos com incerteza sobre o módulo de Young. Os métodos de Galerkin-Caos e elementos finitos são aplicados para a construção do espaço de aproximação. A série Karhunen-Loève (KL) é empregada para representar a incerteza nas propriedades do sistema. Os polinômios de caos são utilizados para aproximar a parte randômica da solução. Este trabalho foi extremamente relevante por apresentar uma nova metodologia na análise de engenharia aplicada a sistemas estocásticos. As idéias primordiais, que são utilizadas até os dias de hoje, foram apresentadas neste trabalho. O livro de GHANEM & SPANOS (1991) ajudou a difundir o método de Galerkin-Caos na comunidade de pesquisadores da área de modelagem computacional de sistemas estocásticos em engenharia. Neste trabalho detalha-se a utilização da série KL na representação da incerteza e apresentam-se relações de recorrência para a obtenção dos polinômios de caos. Até este momento o método dos elementos finitos com perturbação era o principal método para análise de sistemas estocásticos.

O trabalho de XIU & KARNIADAKIS (2002) apresenta o esquema de Askey-Wiener, que é constituído de classes de polinômios de Caos definidas em termos do tipo de variável randômica a ser aproximada. Neste trabalho são apresentadas soluções aproximadas para o campo de velocidades para o escoamento de fluidos incompressíveis. Em XIU & KARNIADAKIS (2002-a), o polinômio de Caos foi aplicado para modelar a incerteza nas aplicações da dinâmica dos fluidos. Em XIU & KARNIADAKIS (2002-b) é feita uma ampla revisão da teoria dos polinômios de Caos-Wiener e são apresentadas soluções numéricas. A principal contribuição dos trabalhos de Xiu e Karniadakis, além das aplicações em problemas de engenharia, foi a apresentação de uma estrutura formada por classes de polinômios chamada esquema Askey-Wiener. Este esquema apresenta sistemas ortogonais completos em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, baseados em polinômios. Tal fato ampliou, em termos práticos, as possibilidades de aproximações de variáveis randômicas com suporte limitado em \mathbb{R} .

No trabalho de AVILA & ROSA (2005) o método de Galerkin-Caos é aplicado ao problema de flexão de placas de Kirchhoff em apoios simples e fundação de Winkler. Neste trabalho é utilizado a série KL e os polinômios de Caos para obter soluções aproximadas

para o campo randômico de deslocamento transversal da placa. Neste trabalho salienta-se a importância da escolha adequada para o campo randômico que modela a incerteza nas propriedades elásticas do material da placa. Em conformidade com os resultados teóricos apresentados em TEMPONE et al (2000) sobre as condições necessárias para existência de soluções para problemas elípticos estocásticos. Em AVILA (2005) o problema de flexão de vigas Euler-Bernoulli é estudado utilizando-se o esquema Askey-Wiener. Neste trabalho a incerteza sobre o módulo de Young é modelada por variáveis randômicas do tipo uniforme e beta.

Em HOVER & TRIANTAFYLLOU (2006) o método do polinômio de Caos foi utilizado para avaliar a resposta transiente e estabilidade a longo prazo em problemas de controle. Usando uma expansão particular, no caso, Hermite/Gaussiana, não obtiveram resposta para o comportamento a longo prazo para o ganho ou os ganhos escolhidos, porque o projeto para minimizar um custo a curto prazo com uma série truncada não prova a estabilidade.

Em MATTHIES & KEESE (2004) sistemas estacionários modelados por equações diferenciais elípticas lineares parciais como também não-lineares, com coeficientes estocásticos (campos randômicos) são estudados. Em relação à parte estocástica investigaram, no que se relaciona a estabilidade, as mais diferentes e crescentes aproximações computacionais sofisticadas envolvendo os polinômios de Wiener-Caos e a expansão de Karhunen-Loève que são tratadas junto com procedimentos de Galerkin estocástico. As semelhanças e diferenças com o método de Monte Carlo são exibidas, como também alternativas para integração em espaços dimensionais altos. Em XU (2007) o método dos elementos finitos estocásticos multi-escalar foi desenvolvido para resolver os problemas elípticos estocásticos de acoplamento-escalar. Empregaram expansões dos polinômios de caos e polinômios de Lagrange, o método de Galerkin e o método da colocação estocástica foram introduzidos e combinados com métodos determinísticos multi-escalar, isto é, o método multi-escalar variacional e método dos elementos finitos multi-escalar. SACHDEVA et al (2005) propõem a técnica da decomposição dos polinômios de Caos para representar os vetores estocásticos da base em termos dos polinômios multidimensionais de Hermite. A projeção de Galerkin foi empregada para obter os coeficientes indeterminados na aproximação de

base reduzida. Um estudo numérico em um problema estrutural linear onde o módulo de Young é representado através de modelos Gaussinos como também lognormal para ilustrar o desempenho do esquema reduzido híbrido estocástico da projeção da base foi analisado.

Em GHOSH et al (2005) foi utilizada a técnica da projeção de Galerkin para a derivação de um conjunto finito de equações diferenciais ordinárias cuja ordem depende do número das funções de forma escolhidas. Os resultados foram obtidos diretamente da simulação numérica do sistema prolongado e também transformando a EDP em um sistema de EDO pela técnica de projeção de Galerkin.

Na engenharia mecânica, a expansão em Karhunen-Loève (KL) foi inicialmente empregada por LUMLEY, em 1971 e, posteriormente por SIROVICH, em 1987, no estudo de escoamentos turbulentos, onde se buscava a existência de estruturas coerentes em meio a uma dinâmica problemática. Turbulência é um fenômeno extremamente complexo, normalmente abordado sob o ponto de vista estocástico e cujo estudo por métodos tradicionais, até agora, não foi possível. Desde então, a expansão vem sendo exaustivamente usada em problemas na área de Termociências. Sua aplicação a problemas de dinâmica estrutural é recente, CINLAR (1975). Outras linhas de pesquisa utilizam a KL como ferramenta. Uma delas diz respeito à detecção de falhas em um sistema qualquer, através do monitoramento de um determinado sinal característico. Como exemplo, podemos citar os artigos de TUMER(2000), nos quais estuda-se como a decomposição pode fornecer informações a respeito de problemas em processos de fabricação, em especial em operações de torneamento mecânico.

Em WILLIAMS (2006) a expansão em Karhunen-Loève associada ao polinômio de Chaos é empregada para resolver uma equação diferencial estocástica de primeira ordem simples que é típica em problemas de transporte. Provaram que a convergência é muito rápida em alguns casos, mas que a complexidade aumenta quando associada a muitas variáveis aleatórias podendo levar a tempos computacionais muito longos. A conclusão geral é que o método é promissor, mas requeria um estudo mais detalhado da sua aplicação a um problema prático na teoria de transportes.

Em SAMPAIO & WOLTER (2001) foi dada especial atenção à relação entre modos

empíricos (autofunções) e os modos de vibração de estruturas lineares e discutidos alguns aspectos relativos à análise modal feita através da Expansão de Karhunen-Loève. Observou-se que uma questão importante foi o tempo de amostragem a ser usado o que pode causar problemas em um caso experimental, visto que o primeiro modo de vibração da estrutura não é conhecido *a priori*. Além disso, não é possível diferenciar modos de mesma frequência. Entretanto, uma importante vantagem da expansão de Karhunen-Loève foi o fato de fornecer claramente a contribuição energética de cada modo, o que pode se tornar uma importante informação na escolha das bases a serem usadas numa redução modal para, por exemplo, o projeto de um controlador para determinada estrutura.

A expansão de Karhunen-Loève surgiu na literatura de análise e processamento de sinais, onde também é conhecida como análise de componentes principais. É uma ferramenta usada na compressão de sinais e logo sua aplicação foi estendida para o processamento de imagens.

As primeiras aplicações da Karhunen-Loève, no âmbito da engenharia mecânica, surgiram no estudo de escoamentos turbulentos, onde ela também se tornou conhecida como decomposição ortogonal própria. Entretanto, anos de observação serviram para detectar a existência de estruturas coerentes nestes escoamentos, de forma que a Karhunen-Loève tornou-se uma poderosa ferramenta nas pesquisas sobre turbulência, através da determinação e posterior análise da interação destas estruturas, WOLTER (2001).

Em PARK (1998) o procedimento de Karhunen-Loève-Galerkin converte um sistema dado em um modelo com grau de liberdade menor, e o número das equações a ser resolvidas na análise inversa é minimizado conseqüentemente, tendo por resultado uma redução drástica do tempo de computação.

Vários métodos numéricos para resolver equações diferenciais parciais estocásticas (EDPES) têm sido propostos na literatura. Os trabalhos de GHANEM (1999) e GHANEM & SPANOS (1991) defendem uma aproximação por elementos finitos espectral, enquanto que KLEIBER & HIEN (1992) utilizam uma aproximação por perturbação. ELISHAKOFF & REN (1999) checam o método dos elementos finitos para estruturas com grande variação estocástica e pontos limites para algumas aproximações. As equações analíticas de sistemas estocásticos existem para poucos casos sendo que na maioria das vezes

obtém-se apenas uma solução aproximada, pela aplicação de algum método numérico. A equação diferencial com coeficientes randômicos é o caso mais complexo para o tratamento analítico.

De modo geral, o cálculo estocástico está em constante avanço, seja nas diferentes áreas em que seu uso está sendo cada vez mais difundido, sejam no domínio e aprofundamento das técnicas utilizadas para se obter respostas sobre sistemas que apresentam algum tipo de incerteza.

Capítulo 2

Conceitos em Processos Estocásticos

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições da teoria de probabilidade e processos estocásticos necessários ao desenvolvimento dos capítulos posteriores. Para definir a notação a ser utilizada no texto serão apresentados os princípios matemáticos mais importantes da teoria de probabilidade e processos estocásticos.

2.1 σ -Álgebra e Espaço Mensurável

Uma família de subconjuntos de Ω é chamada de σ -álgebra \mathcal{F} se possuir as seguintes propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. Se $F \in \mathcal{F}$, então $F^c = \{\omega \mid \omega \notin F\} \in \mathcal{F}$;
3. Se $F_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$ então $(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \in \mathcal{F}$.

A propriedade 3 pode ser estendida para intersecções enumeráveis, com efeito, das leis de Morgan e das propriedades 2 e 3 tem-se que

$$\cap_{i=1}^{\infty} F_i = (\cup_{i=1}^{\infty} F_i^c)^c \in \mathcal{F}. \quad (2.1)$$

O par ordenado (Ω, \mathcal{F}) é chamado de **espaço mensurável**.

2.2 Espaços de probabilidade

Um **espaço de probabilidade** (Ω, \mathcal{F}, P) é uma tripla onde Ω é um conjunto arbitrário não vazio, \mathcal{F} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , e P é uma medida de probabilidade definida em um σ -álgebra; isto é, $P(F)$ fixa um número real para todo elemento F de \mathcal{F} de modo a satisfazer as seguintes condições:

- Não negatividade:

$$P(F) \geq 0 \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad (2.2)$$

- Normalização:

$$P(\Omega) = 1 \quad (2.3)$$

- Aditividade enumerável

$$\begin{aligned} &\text{Se } F_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots \text{ são disjuntos, então} \\ P(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se o conjunto de funções P satisfaz apenas Eq.(2.2) e Eq.(2.4) e não necessariamente Eq.(2.3) é então chamado de medida, e a tripla (Ω, \mathcal{F}, P) é chamada de espaço de medida. Desde que a medida de probabilidade é definida em uma σ -álgebra, tais uniões contáveis dos subconjuntos de Ω na σ -álgebra são eventos na σ -álgebra. Um conjunto de funções que satisfaz somente Eq.(2.4) para seqüências finitas de eventos separados é dita ser aditiva ou aditiva finita. Um exercício direto fornece uma caracterização alternativa de uma medida da probabilidade que envolve somente a aditiva finita, mas requer a adição de uma exigência da continuidade: uma função P do conjunto definido em eventos na σ -álgebra de um espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é uma medida de probabilidade se Eq.(2.2) e Eq.(2.3) forem asseguradas, e se as seguintes condições forem satisfeitas:

- Soma Finita:

Se $F_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots, n$, são disjuntos, então (2.5)

$$P(\cup_{i=1}^n F_i) = \sum_{i=1}^n P(F_i). \quad (2.6)$$

- Continuidade em \emptyset :

Se $G_n \downarrow \emptyset$ (conjunto vazio ou nulo), isto é, se $G_{n+1} \subset G_n$, para todo n , e $\cap_{i=1}^{\infty} G_n = \emptyset$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(G_n) = 0 \quad (2.7)$$

A equivalência da continuidade e da aditividade enumerável é vista facilmente fazendo a correspondência $F_n = G_n - G_{n-1}$ e observando que a aditividade enumerável para F_n tenderá se e somente se a relação da continuidade tende para o G_n .

Também se pode ver que a condição Eq.(2.7) é equivalente para duas outras formas de continuidade:

- Continuidade inferior:

$$\text{Se } F_n \uparrow F \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} P(F_n) = P(F) \quad (2.8)$$

- Continuidade superior:

$$\text{Se } F_n \downarrow F \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} P(F_n) = P(F) \quad (2.9)$$

Assim uma medida de probabilidade é uma função aditiva, não negativa, normalizada em uma σ -álgebra ou espaço de evento com a propriedade adicional que se uma seqüência dos conjuntos convergir a um conjunto limitado então as probabilidades correspondentes devem também convergir.

Para demonstrar que uma função P do conjunto é certamente uma medida de probabilidade, deve-se mostrar que satisfaz às propriedades precedentes Eq.(2.2), Eq.(2.3), e

também Eq.(2.4) ou Eq.(2.5) e uma dessas Eq.(2.7) ou Eq.(2.8).

Observe que se a função satisfaz Eq.(2.2), Eq.(2.3), e Eq.(2.5), então para algumas seqüências de eventos disjuntos $\{F_i\}$ e todo n

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = P(\cup_{i=1}^n F_i) + P(\cup_{i=n+1}^{\infty} F_i) \geq P(\cup_{i=1}^n F_i) = \sum_{i=1}^n P(F_i),$$

determinando o limite com $n \rightarrow \infty$ tem-se

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i). \quad (2.10)$$

Assim para provar que P é uma medida de probabilidade deve-se mostrar que a desigualdade precedente é de fato uma igualdade.

2.3 Variável Randômica, Expectância e Independência

Definição (*Variável Randômica*): Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço completo de probabilidade. Uma variável randômica α é uma função \mathcal{F} -mensurável $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Cada variável randômica induz uma medida da probabilidade P_α em \mathbb{R}^n , definida por

$$P_\alpha(U) = P(\alpha^{-1}(U)). \quad (2.11)$$

P_α é chamada de distribuição de α .

O nome variável randômica é comumente associado com o caso em que Ω é \mathbb{R}^n e \mathcal{B} o campo de Borel induzido por \mathbb{R}^n .

Neste caso específico, uma variável randômica ou função mensurável definida em (Ω, \mathcal{F}) e que assume valores em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ é um mapeamento ou função $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, i.e. $\alpha : \theta \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, com a propriedade que

$$\text{Se } U \in \mathcal{B}, \text{ então } \alpha^{-1}(U) = \{\theta \in \Omega \mid \alpha(\theta) \in U\} \in \mathcal{F}$$

Uma variável randômica é apenas uma função ou mapeamento com a propriedade que a inversa da imagem de um evento de entrada determinado por variável randômica representam eventos no espaço mensurável original, ver Fig. (2.1). Esta propriedade simples assegura que a saída da variável randômica herda sua própria medida de probabilidade.

Por exemplo, como a medida de probabilidade definida por Eq.(2.11)

$$P_\alpha(U) = P(\alpha^{-1}(U)) = P(\{\theta \in \Omega \mid \alpha(\theta) \in U\}); U \in \mathcal{B}. \quad (2.12)$$

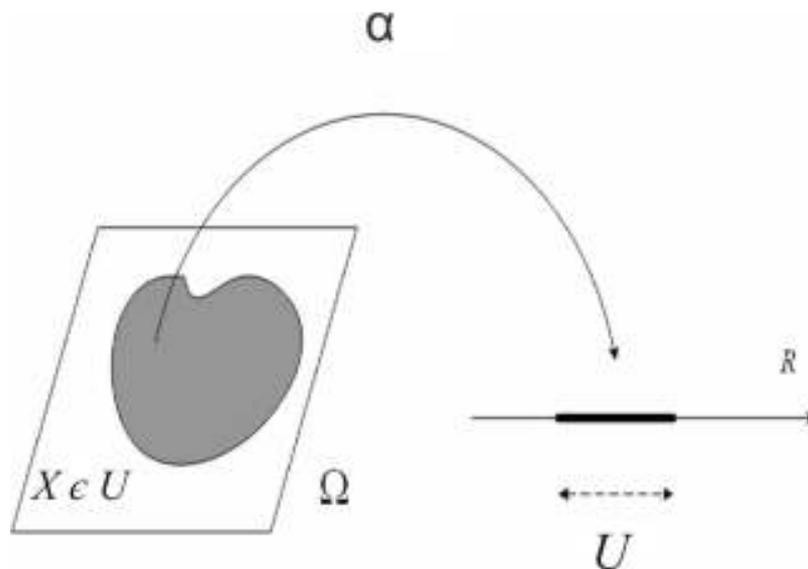


Figura 2.1: Representação de uma variável randômica.

Definição (*Expectância¹ de uma Variável Randômica*): Se $\int_{\Omega} |\zeta(\omega)| dP(\omega) < \infty$ então

$$\langle \zeta \rangle := \int_{\Omega} \zeta(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \zeta dP_{\zeta}(\zeta) \quad (2.13)$$

é chamado de expectância de ζ (com relação a P). Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Borel mensurável e

$\int_{\Omega} |f(\zeta(\omega))| dP(\omega) < \infty$ então tem-se

$$\langle f(\zeta) \rangle := \int_{\Omega} f(\zeta(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta) dP_{\zeta}(\zeta). \quad (2.14)$$

a Eq. (2.14) representa o importante resultado apresentado no teorema de Doob-Dinkin, OSKENDALL (2000).

Definição (*Conjuntos Independentes*): Dois subconjuntos A e $B \in F$ são chamados independentes se

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Definição (*Variáveis Randômicas Independentes*): Uma coleção de variáveis randômicas $\{\zeta_i, i \in I\}$ é independente se a coleção de σ -álgebras geradas H_{ζ_i} é independente.

Sejam $\alpha, \beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas variáveis randômicas independentes, então

$$\langle \alpha\beta \rangle = \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle, \quad (2.15)$$

com $\langle |\alpha| \rangle < \infty$ e $\langle |\beta| \rangle < \infty$.

¹Também chamada esperança ou valor esperado.

2.4 Processo Estocástico

Um processo estocástico possui uma estrutura matemática mais complexa que uma variável randômica. Em geral, nos problemas de engenharia não se conhece todas as estatísticas de um processo estocástico.

Definição (Processo Estocástico): Um processo estocástico $u(x, \omega)$ é uma coleção de variáveis randômicas parametrizadas $\{u(x, \theta)\}_{x \in D}$, definidas em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e assumindo valores em \mathbb{k} (\mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n).

Quando o processo estocástico assumir valores reais será chamado de processo estocástico real. Em um processo estocástico real para cada $x \in D$, fixo, tem-se a função $u : x \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\omega \rightarrow u(x), \quad (2.16)$$

sendo chamada de **variável randômica** $u(x)$. Fixando-se $\omega \in \Omega$ define-se a função $u : D \times \omega \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$x \rightarrow u(\omega), \quad (2.17)$$

sendo chamada de **trajeto** $u(\omega)$. Pode ser útil pensar em x como a "posição geométrica" e cada ω como uma "partícula individual" ou "experiência". Assim $u(x)$ representaria, por exemplo, o deslocamento (ou resultado) em $x \in D$ da partícula (experiência) ω . Pode-se considerar o processo estocástico $u(x, \omega)$ como uma função de duas variáveis definida em $D \times \Omega$

$$(x, \omega) \rightarrow u(x, \omega). \quad (2.18)$$

Este é frequentemente um ponto de vista natural na análise estocástica, pois é crucial ter $u(x, \omega)$ conjuntamente mensurável em (x, ω) . É importante mencionar que se o espaço de parâmetros de $u(x, \omega)$, estiver associado a coordenadas espaciais o processo estocástico $u(x, \omega)$ será chamado de **campo randômico**, ver PANCHEV (1971).

2.5 Modelo Matemático

É instrutivo introduzir neste momento os conceitos matemáticos que serão usados na sequência. Neste trabalho, $H^1(D) = \left\{ h : D \rightarrow \mathbb{R} \left| \int_D h^2(x) dx < \infty \right. \right\}$, sendo $D \subset \mathbb{R}^n$, com $|D| < \infty$. Dado (Ω, \mathcal{F}, P) denota um espaço da probabilidade que consiste em um espaço de amostra Ω , um σ -álgebra \mathcal{F} dos subconjuntos de Ω , e a probabilidade mensurável P definida em um σ -álgebra. Dado $x \in D$ e ω sendo um elemento de Ω . Então, o espaço das funções que mapeiam Ω em \mathbb{R} é denotado por Θ . Cada mapeamento $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ define uma variável randômica. Os produtos internos em $L^2(D)$ e em Ω são definidos usando a medida de Lebesgue e a medida da probabilidade respectivamente. Isto é, para dois elementos $h_i(x)$ e $h_j(x)$ em $L^2(D)$, o produto interno entre $(\cdot, \cdot) : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ é definido como

$$(h_i, h_j) = \int_D h_i(x) h_j(x) dx. \quad (2.19)$$

O domínio D representa o espaço físico em que o problema é definido. Similarmente, dado dois elementos $\alpha(\omega), \beta(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{\Omega} \alpha(\omega) \beta(\omega) dP(\omega), \quad (2.20)$$

sendo $dP(\omega)$ a medida da probabilidade. Considere o caso particular em que $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\omega \mapsto (\alpha(\omega), \beta(\omega))$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função Borel mensurável, definida como

$$g(\zeta(\omega)) = \alpha(\omega) \beta(\omega). \quad (2.21)$$

Então tem-se

$$\langle g(\zeta) \rangle = \int_{\Omega} g(\zeta(\omega)) dP(\omega) = \int_{\Omega} \alpha(\omega) \beta(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\zeta) dP_{\zeta}(\zeta).$$

Além disso, se $f_{\zeta}(\zeta)$ é a densidade da distribuição conjunta da probabilidade, então

$$dP_{\zeta}(\zeta) = f_{\zeta}(\zeta) d\zeta, \quad (2.22)$$

resultando

$$\langle g(\zeta) \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} g(\zeta) f_{\zeta}(\zeta) d\zeta. \quad (2.23)$$

Sob circunstâncias completamente gerais, a integral Eq.(2.20) é equivalente à média do integrando em relação ao $dP(\omega)$ da medida da probabilidade.

2.6 Representação de um Processo Estocástico

Neste trabalho serão utilizadas duas séries de funções para representar um processo estocástico, são elas

- (1) Série de Karhunen-Loève (KL)²;
- (2) Série em polinômios de Caos.

Nas próximas seções são apresentados os detalhes matemáticos das séries de Karhunen-Loève e polinômios de Caos.

²A expansão de Karhunen-Loève surgiu na literatura de análise e processamento de sinais, onde também é conhecida como análise de componentes principais (principal components analysis ou PCA)

2.6.1 Série de Karhunen-Loève

As primeiras aplicações da KL, no âmbito da engenharia mecânica, surgiram no estudo de escoamentos turbulentos, onde ela se tornou conhecida como decomposição ortogonal própria. A turbulência é conhecida como um fenômeno complexo, normalmente abordado sob o ponto de vista estocástico. Entretanto, vários anos de observação serviram para detectar a existência de estruturas coerentes nestes escoamentos, de forma que a KL tornou-se uma ferramenta poderosa nas pesquisas sobre turbulência, SAMPAIO (2001).

Dado D como sendo um subconjunto compacto em \mathbb{R}^n e $\{\kappa(x, \omega)\}_{x \in D}$ um processo estocástico real definido no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Este campo randômico é um conjunto de valores reais $\kappa(x, \omega), \forall (x, \omega) \in D \times \Omega$.

- Hipótese I

Considera-se que $\{u(x, \omega)\}_{x \in D}$ é um processo estocástico de segunda ordem, i.e.,

$$\langle \|\kappa(x)\|^2 \rangle < \infty, \forall x \in D. \quad (2.24)$$

- Hipótese II

Considerando que $\{\kappa(x, \omega)\}_{x \in D}$ seja contínuo em média quadrática, i.e.,

$$\langle (\kappa(x+h) - \kappa(x))^2 \rangle \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

Sob hipóteses I e II, a função auto-covariância $C(x_1, x_2)$ do processo estocástico $\{\kappa(x, \omega)\}_{x \in D}$ define um operador auto adjunto e contínuo $Q : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$, dado por

$$(Qf)(x_2) = \int_D C(x_1, x_2) f(x_1) dx_1, \forall f \in L^2(D). \quad (2.26)$$

Este operador tem um número contável de autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \lambda_n \geq \dots$, e autofunções associadas, as quais são solução da equação integral

$$(Qf_n)(x_2) = \lambda_n f_n(x_2). \quad (2.27)$$

As autofunções $\{f_n\}$ constituem uma base ortonormal de um subespaço denso em $L^2(D)$,

i.e.,

$$(f_n, f_m) = \delta_{nm}. \quad (2.28)$$

O processo estocástico $\kappa(x, \omega)$ pode ser representado através de uma série em termos das autofunções, f_n , como

$$\kappa(x, \omega) - \langle \kappa(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\omega) f_n(x), \quad (2.29)$$

sendo $\langle \kappa(x) \rangle$ a expectância do processo estocástico e $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \xi_3(\omega), \dots, \xi_n(\omega), \dots$, variáveis randômicas não correlacionadas. Por definição, a função covariância é limitada, simétrica e positiva definida, então do teorema de Mercer a função covariância admite a seguinte representação,

$$C(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x_1) f_n(x_2), \quad (2.30)$$

sendo λ_n e $f_n(x)$ os autovalores e autofunções normalizadas do núcleo da covariância, respectivamente. A Eq. (2.30) representa a decomposição espectral da função covariância. Devido ao núcleo da covariância ser simétrico e positivo definido, suas autofunções são ortogonais e formam um conjunto completo. Normalizando temos que,

$$\int_D f_n(x) f_m(x) dx = \delta_{nm}, \quad (2.31)$$

sendo δ_{nm} o delta de Kronecker. Da Eq. (2.29) o processo estocástico, $\kappa(x, \omega)$ pode ser escrito como

$$\kappa(x, \omega) = \bar{\kappa}(x) + \alpha(x, \omega), \quad (2.32)$$

sendo $\bar{\kappa}(x)$ a função expectância do processo estocástico, i.e.,

$$\bar{\kappa}(x) = \langle \kappa(x) \rangle, \quad (2.33)$$

e $\alpha(x, \omega)$ um processo estocástico com expectância zero e covariância $C(x_1, x_2)$. O

processo $\alpha(x, \omega)$ pode ser representado em termos das autofunções $f_n(x)$ como

$$\alpha(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\omega) f_n(x). \quad (2.34)$$

As propriedades de segunda ordem das variáveis aleatórias $\xi_n(\omega)$ podem ser determinadas multiplicando ambos os lados da Eq.(2.34) por $\alpha(x_2, \omega)$ e calculando a expectância em ambos os lados, i.e.,

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2) &= \langle \alpha(x_1), \alpha(x_2) \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n \lambda_m} \langle \xi_n, \xi_m \rangle f_n(x_1) f_m(x_2). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Então, multiplicando ambos os lados da Eq.(2.35) por $f_k(x_2)$, integrando sobre o domínio D , e fazendo uso da ortonormalidade das autofunções, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_D C(x_1, x_2) f_k(x_2) dx_2 &= \lambda_k f_k(x_1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n \lambda_k} \langle \xi_n, \xi_k \rangle f_n(x_1). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Multiplicando uma vez mais por $f_l(x_1)$ e integrando em D , tem-se

$$\lambda_k \int_D f_k(x_1) f_l(x_1) dx_1 = \lambda_k \delta_{lk}. \quad (2.37)$$

Por outro lado,

$$\lambda_k \int_D f_k(x_1) f_l(x_1) dx_1 = \sqrt{\lambda_l \lambda_k} \langle \xi_l, \xi_k \rangle, \quad (2.38)$$

o que implica

$$\lambda_k \delta_{lk} = \sqrt{\lambda_l \lambda_k} \langle \xi_l, \xi_k \rangle. \quad (2.39)$$

Assim, para λ_l e λ_k não nulos e distintos, tem-se

$$\langle \xi_l, \xi_k \rangle = \delta_{lk}, \quad (2.40)$$

o que mostra que $\xi_l(\omega)$ e $\xi_k(\omega)$ são não correlacionados. Desta forma o processo estocástico $\kappa(x, \omega)$ pode ser escrito como

$$\kappa(x, \omega) = \bar{\kappa}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\omega) f_n(x) \quad (2.41)$$

com,

$$\langle \xi_n, \xi_k \rangle = \delta_{nk}, \quad (2.42)$$

e $\{\lambda_n, f_n(x)\}$ o autovalor e a autofunção da n -ésima solução da equação integral

$$\int_D C(x_1, x_2) f_n(x_1) dx_1 = \lambda_n f_n(x_2). \quad (2.43)$$

Uma expressão explícita para $\xi_n(\omega)$ pode ser obtida multiplicando Eq.(2.43) por $f_n(x)$ e integrando em D . Isto é,

$$\xi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_D \alpha(x, \omega) f_n(x) dx. \quad (2.44)$$

Uma função típica de covariância $C(x_1, x_2)$ é dada por

$$C(x_1, x_2) = \exp(-b|x_2 - x_1|), \quad (2.45)$$

sendo b o comprimento da correlação. Uma função de covariância $C(x_1, x_2)$ é dita homogênea e isotrópica se

$$C(x_1, x_2) = C(r),$$

com

$$r = |x_2 - x_1|.$$

Alguns valores típicos de b são: $b = 0.5$ (curva superior), $b = 1$ (curva do meio) and $b = 10$ (curva inferior), ver Fig.(2.2).

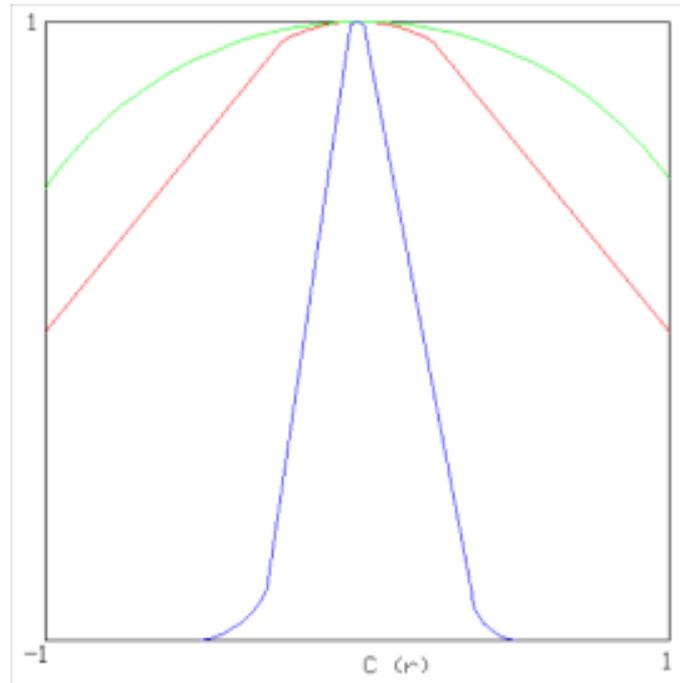


Figura 2.2: Comportamento da função de covariância com relação ao comprimento de correlação b .

Observe que o operador transformada de Fourier produz uma representação espectral, pode-se concluir que quanto mais rapidamente a função de autocorrelação tende a zero, isto é, quanto maior é b , mais larga é a densidade espectral correspondente, e maior o número de termos necessários para representar o processo randômico subjacente pela série KL.

2.7 Polinômios de Caos e o Esquema Askey-Wiener

A representação de um processo estocástico através da série KL requer que a função covariância do processo seja conhecida. Desta forma, não pode ser usada para a solução $u(x, \omega)$, pois, a princípio, sua função de covariância e conseqüentemente os autovalores e autofunções correspondentes não são conhecidas. Uma representação alternativa é necessária para contornar este problema. Tal representação pode envolver uma base de funções randômicas conhecidas com os coeficientes determinísticos a serem encontrados pela minimização da norma do erro resultando uma representação finita. Isto deve

ser construído de forma similar à solução da série de Fourier de equações diferenciais determinísticas.

Dado $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ como sendo um conjunto de variáveis randômicas. Considere $\hat{\Gamma}_p$ como sendo o espaço de todos os polinômios em $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$, com grau não excedente a p . O conjunto Γ_p dos polinômios em $\hat{\Gamma}_p$ ortogonais a $\hat{\Gamma}_{p-1}$ é chamado de polinômio de Caos de ordem p . O conjunto dos polinômios de Caos é um subespaço linear do espaço das variáveis randômicas quadrado integráveis Θ . Além disso, é um anel com respeito à multiplicação funcional $\Gamma_p(\xi(\omega)) \cdot \Gamma_l(\xi(\omega)) = \Gamma_l(\xi(\omega)) \cdot \Gamma_p(\xi(\omega))$. A integrabilidade quadrática deve ser construída em relação à medida de probabilidade que define as variáveis randômicas. Denotando o espaço de Hilbert gerado pelo conjunto $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ por $W(\xi)$, o anel resultante é denotado por $\Phi_{W(\xi)}$, sendo chamado de anel das funções geradas por $W(\xi)$. Então, pode-se mostrar que sob algumas circunstâncias gerais, o anel $\Phi_{\Theta(\xi)}$ é denso no espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, KAKUTANI (1961). Isto significa que toda a função randômica quadrado integrável pode ser aproximada, arbitrariamente, por elementos de $\Phi_{W(\xi)}$. Assim, todo o elemento $\beta(\omega)$ do espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ admite a seguinte representação,

$$\beta(\omega) = \sum_{p \geq 0} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r=p} \sum_{\rho_1, \dots, \rho_p} a_{\rho_1, \dots, \rho_p}^{n_1, \dots, n_r} \Gamma_p(\xi_{\rho_1}(\omega), \dots, \xi_{\rho_p}(\omega)) \quad (2.46)$$

sendo $\Gamma_p(\cdot)$ o polinômio de caos de ordem p . O subscrito n_i refere-se ao número das ocorrências de $\xi_{\rho_i}(\omega)$ na lista do argumento de $\Gamma_p(\cdot)$. Fazendo-se um reordenamento dos coeficientes da Eq. (2.46) a mesma pode ser reescrita como

$$\beta(\omega) = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\omega)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) + \dots \quad (2.47)$$

nesta equação, o símbolo $\Gamma_n(\xi_i(\omega))$ denota o polinômio de Caos de ordem n nas variáveis $(\xi_{i_1}(\omega), \dots, \xi_{i_n}(\omega))$. Os limites superiores das somas em Eq.(2.47) refletem a simetria do polinômio de Caos com respeito a seus argumentos. Da enumerabilidade dos polinômios de caos pode-se propor uma correspondência bijetiva entre os funcionais Ψ e Γ , e também entre os coeficientes \hat{a}_j e $a_{i_1 i_2} \dots$ mostrados na Eq.(2.47). Desta forma, a Eq. (2.47) é dada

por

$$\beta(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{a}_j \Psi_j(\boldsymbol{\xi}(\omega)). \quad (2.48)$$

Do ponto de vista computacional, entretanto, este conjunto infinito tem que ser substituído por um finito. Isto é realizado através de duas aproximações. A primeira aproximação é feita quando define-se o polinômio de Caos m -dimensional como sendo o subconjunto dos polinômios de Caos em m variáveis randômicas $\xi_i(\omega)$ não correlacionadas. Neste caso, tem-se

$$\beta(\omega) \simeq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{a}_j \Psi_j(\boldsymbol{\xi}(\omega)), \text{ com } \boldsymbol{\xi}(\omega) \in \mathbb{R}^m. \quad (2.49)$$

Observe que

$$\overline{\{\Theta^m\}}^{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (2.50)$$

Entretanto, desde que Θ^m é um subconjunto formado por polinômios nas variáveis randômicas $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^m$ de todos os graus, conclui-se que $\dim \{\Theta^m\} = \infty$. Em conseqüência, a fim de torná-lo computável, a segunda aproximação é realizada quando se trunca na ordem p os polinômios de Caos. O subespaço $\Theta^{m,p}$ é formado por todos os polinômios de ordem menor ou igual a p , nas variáveis randômicas $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^m$. Conseqüentemente $\dim \{\Theta^{m,p}\} < \infty$ e

$$\overline{\{\Theta^{m,p}\}}^{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (2.51)$$

O **esquema de Askey-Wiener** é uma generalização dos polinômios de Caos, que também são conhecidos como os polinômios de Wiener-Caos. O teorema de Cameron-

Martin (1947), ver apêndice, demonstra que estes polinômios formam uma base, para um subespaço denso de variáveis randômicas de segunda ordem, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

O esquema de Askey-Wiener constitui-se de uma família de subespaços gerados por polinômios ortogonais obtidos, em geral, por equações diferenciais ordinárias. Entre eles podem-se citar os polinômios de Hermite, Laguerre, Jacobi e Legendre. Através da passagem ao limite de determinados parâmetros o esquema Askey estabelece relações entre estes subespaços de polinômios ortogonais. Cada um dos subespaços gerados por estes polinômios constitui-se em um sistema completo em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A Fig.(2.3) ilustra a relação entre os polinômios pertencentes ao esquema Askey-Wiener.

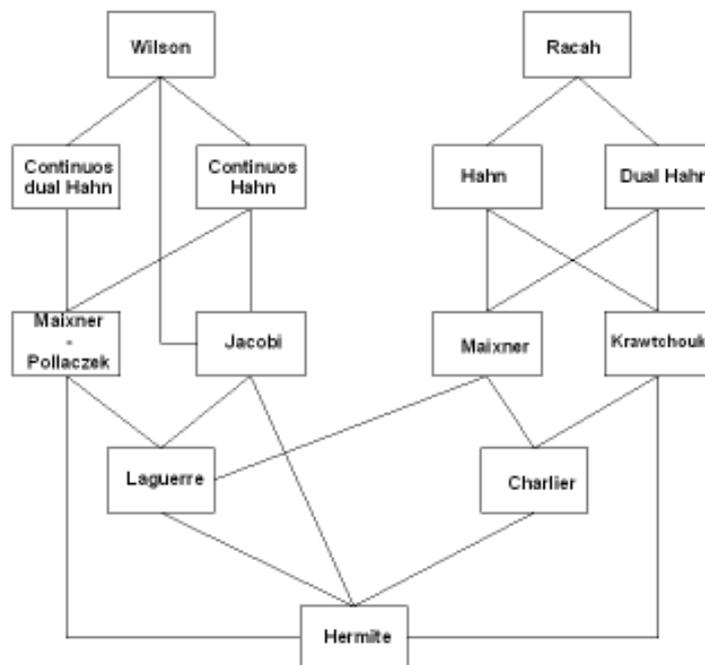


Figura 2.3: Relação entre os polinômios do esquema Askey-Wiener.

A Tab.(2.1) mostra a correspondência entre os subconjuntos de polinômios do esquema Askey-Wiener e o tipo de função densidade de probabilidade.

Tabela 2.1: Correspondência entre o tipo de variável randômica e os polinômios do esquema Askey-Wiener.

Variável Randômica	Polinômio	Suporte
Gaussiana	Hermite	$(-\infty, \infty)$
Gama	Laguerre	$[0, \infty)$
Beta	Jacobi	$[a, b]$
Uniforme	Legendre	$[a, b]$

A ortogonalidade dos polinômios é definida em relação a uma função peso. Esta função é idêntica à função densidade de probabilidade da variável randômica considerada. Por exemplo, a função densidade de probabilidade Gaussiana deve ser utilizada como função peso para obter a ortogonalidade entre os polinômios de Hermite.

Capítulo 3

Métodos de Simulação

3.1 Monte Carlo

O surgimento do método de Monte Carlo data, aproximadamente, de 1944, embora de modo assistemático e não nominado, a teoria estivesse sido empregada em casos isolados de resolução de problemas determinísticos e não determinísticos. O nome do método deve-se a analogia feita entre os procedimentos pertinentes a formulação matemática do método e o comportamento fortuito observado nos jogos de azar praticados nas casas de jogos da cidade de Monte Carlo, Mônaco. Em 1970 com o desenvolvimento dos computadores o método recebeu, novamente, a atenção e o interesse da comunidade científica. Em termos gerais o método de Monte Carlo possui as seguintes etapas: discretização do campo randômico do problema; geração da amostra estrutural; realização do sistema; obtenção das estatísticas a partir do conjunto das realizações do sistema. É um método exigente em termos computacionais, porém é robusto em virtude da sua flexibilidade na simulação de situações reais.

Com o aumento da velocidade computacional, a simulação via método de Monte Carlo está se transformando numa ferramenta viável para o projeto e a análise de engenharia. A limitação decorrente do elevado tempo de computação foi atenuada pelo desenvolvimento de métodos de redução de amostra tais como amostragem por importância, amostragem estratificada, Latin Hipercube entre outros. Além disso, a utilização de técnicas para aceleração da convergência, computação paralela, e os avanços percebidos na potência de

cálculo dos modernos computadores reduziu exponencialmente o tempo de computação. Isso aumentou a diversidade das aplicações da simulação de Monte Carlo ao ponto da comunidade de Confiabilidade de Sistemas, para muitos problemas, substituir os modelos analíticos por modelos de simulação.

As técnicas de simulação de Monte Carlo são robustas o suficiente para agregar a um problema uma série de fenômenos e efeitos que, em muitas vezes, são de difícil modelagem analítica. Todavia, o método de Monte Carlo apresenta as seguintes desvantagens:

- Apresenta uma correlação espúria entre os parâmetros estocásticos do sistema;
- Em geral, apresenta um alto custo computacional em decorrência do número elevado de realizações do sistema.

Por outro lado, devido à simplicidade dos conceitos envolvidos o método de Monte Carlo possui as seguintes vantagens:

- Por apresentar uma formulação matemática simples e não intrusiva, oferece grande portabilidade, pois pode ser facilmente utilizado conjuntamente com códigos computacionais comerciais;
- Possui capacidade de capturar com grande precisão as caudas da densidade de probabilidade da resposta do sistema.

O trabalho de OLSSON & SANDBERG (2002) incluíram uma redução artificial na correlação nos dados de entrada, porém tal artifício conduziu a um aumento das realizações do sistema. Para diminuir o esforço computacional provocado pelo uso deste artifício, utilizou-se a decomposição ortogonal própria para reduzir o número de variáveis randômicas.

3.2 Série de Neumann

As contribuições de John VonNeumann à computação científica e, em particular, à análise numérica moderna são atestadas por vários trabalhos. De acordo com GLIMM

(2002), Neumann é o fundador desta área. Desde o início do seu envolvimento com os computadores, Neumann notou que os métodos tradicionais para solução numérica de problemas matemáticos teriam que ser reformulados e novos métodos teriam que ser elaborados em função das características destas máquinas. Em análise numérica propriamente dita, seus trabalhos incluem problemas de estabilidade numérica, acumulação de erros, solução de sistemas lineares de grande dimensão, inversão de matrizes, solução de equações diferenciais parciais, utilização de métodos do tipo Monte Carlo e outros. As aplicações de computação científica incluem hidrodinâmica, difusão de nêutrons, meteorologia, etc. Neumann introduziu a utilização de computadores como uma ferramenta de pesquisa, iniciando o que poderia ser chamado de matemática experimental.

A série de Neumann que será apresentada nesta seção é dirigida a operadores lineares definidos em espaços de Banach com dimensão finita. São apresentados dois resultados teóricos na forma de corolários que fornecem filtros para a utilização da série de Neumann. Em relação às últimas décadas pode-se citar alguns trabalhos que utilizam a série de Neumann em problemas de engenharia com incerteza nas propriedades do sistema, entre eles citam-se YAMAZAKI et al (1988) que introduziram a técnica na área de análise estrutural para obter a solução de um problema de estado plano de tensões, com módulo de Young modelado por um campo randômico; SHINOZUKA & DEODATIS (1988) utilizaram para determinar a função de variabilidade de resposta para problemas de vigas e pórticos; GHANEM & SPANOS (1989) utilizaram a expansão de Neumann juntamente com a série de KL para propor uma nova formulação de elementos finitos estocásticos; ARAÚJO & AWRUCH (1994) aplicaram a técnica para solução de problemas estáticos, dinâmicos e não lineares; o trabalho de ADHIKARI (1999) utilizou o método de Galerkin e a série de Neumann para obter soluções para o problema de vibrações livres com amortecimento; LEI & QIU (1999) obtiveram a resposta dinâmica de estruturas do tipo viga e pórtico, assumindo como campo randômico a rigidez do sistema e o carregamento externo; CHAKRABORTY & SARKAR (2000) estudaram o comportamento de uma viga curva apoiada em fundação elástica, utilizando o modelo de Winkler para descrever as forças reativas da fundação; em CHAKRABORTY & BHATTACHARYYA (2002) o método dos elementos finitos e a série de Neumann são utilizados para modelar o comportamento

estrutural de pórticos espaciais com incerteza sobre as propriedades elásticas dos materiais. Nos trabalhos citados a série de Neumann é utilizada juntamente com o método de simulação de Monte Carlo.

Nestes trabalhos a série de Neumann foi utilizada para evitar, em cada realização, a determinação da inversa do sistema de equações gerado por algum método aproximativo. Isto permitiu diminuir o número total das computações necessárias para estimar as estatísticas da resposta do sistema. O trabalho de ÁVILA & ZAMBALDI (2005) propôs a utilização da série de Neumann e o método de Monte Carlo para obter limites para os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem de uma variável randômica gerada pelo campo randômico de solução. Estes limites foram comparados com as estimativas obtidas pelo método de Monte Carlo-Neumann. Com os resultados obtidos em ÁVILA & TASCETTO (2006-b) foi possível estimar os momentos estatísticos da solução de um sistema linear cuja matriz dos coeficientes apresenta propriedades randômicas. Este é um resultado importante, pois fornece um filtro para as amostras geradas através dos métodos de simulação. Com exceção deste último trabalho, não se obteve registro nas referências pesquisadas, sobre a obtenção e utilização destes resultados.

A série de Neumann é aplicada para obter a solução de um sistema linear de equações, cuja matriz de coeficientes apresenta entradas randômicas e o termo de excitação é determinístico. A matriz de coeficientes relativa à m -ésima realização do sistema linear $(Ku)(\omega) = F$ admite a seguinte decomposição

$$K(\omega) = K_0 + \Delta K(\omega). \quad (3.1)$$

sendo K_0 a matriz de coeficientes avaliada nos valores esperados das propriedades do sistema e $\Delta K(\omega)$ a matriz de coeficientes gerada pela dispersão nas propriedades do sistema. Substituindo Eq.(3.1) no sistema linear e definido-se $P(\omega) = K_0^{-1}\Delta K(\omega)$ tem-se

$$(I + P(\omega))u(\omega) = F, \quad (3.2)$$

A matriz $P(\omega)$ possui variáveis randômicas nas suas entradas. Supondo-se que a matriz

$(I + P(\omega))$ é não-singular, então a solução do sistema linear definido na Eq.(3.2) é dada por

$$u(\omega) = (I + P(\omega))^{-1} u_0, \quad (3.3)$$

com $u_0 = K_0^{-1}F$. A série de Neumann é aplicada para obter a solução de um sistema linear de equações, cuja matriz de coeficientes apresenta entradas randômicas. Em dimensão finita a série de Neumann é apresentada como um dos resultados do lema sobre a perturbação da identidade.

Lema: *Seja $P \in M_n(\mathbb{R})$ e $\|\cdot\|$ uma norma satisfazendo a propriedade submultiplicativa. Se $\|P\| < 1$, então a matriz $I - P$ é não singular e*

$$(I - P)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k, \quad (3.4)$$

com

$$\|(I - P)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|P\|}. \quad (3.5)$$

Prova: Ver GOLUB (1983).

A série expressa na Eq.(3.4) é conhecida como série de Neumann; existem versões deste resultado para operadores definidos em espaços de dimensão infinita, ver TRICOMI (1957). Os trabalhos que utilizaram a série de Neumann para obter a solução de problemas com incerteza sobre as propriedades do sistema, não apresentaram o resultado referente à estimativa para norma da matriz $(I - P)^{-1}$. Neste capítulo, este resultado será utilizado para obter estimativas para os momentos estatísticos da solução de um sistema linear de equações em que a matriz de coeficientes apresenta entradas randômicas.

3.2.1 Normas no \mathbb{R}^n e suas Equivalências

Aqui, são obtidas estimativas a partir da equivalência entre normas no \mathbb{R}^n . A equivalência entre normas é um resultado clássico de análise, que mostra que em espaços de

Banach de dimensão finita, neste caso o \mathbb{R}^n , todas as normas são equivalentes, ver RUDIM (1987). Seja $u \in \mathbb{R}^n$ definem-se as seguintes normas

$$|u|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|, \quad |u|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2} \quad \text{e} \quad |u|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$$

sendo $|\cdot|$ a função módulo. Para $u \in \mathbb{R}^n$ são válidas as seguintes equivalências entre as normas $|\cdot|_1$, $|\cdot|_2$ e $|\cdot|_\infty$,

$$\frac{1}{n(n-1)} |u|_1^2 \leq |u|_2^2 \leq \frac{1}{n-1} |u|_1^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{n-1} |u|_\infty^2 \leq |u|_2^2 \leq \frac{n}{n-1} |u|_\infty^2 \quad (3.6)$$

sendo $n = \dim(\mathbb{R}^n)$. Em particular a equivalência entre as normas $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_\infty$ com a norma $|\cdot|_2$ fornecerá limites inferiores e superiores para a variância de uma variável randômica gerada pelo campo randômico de solução.

3.3 Momentos Estatísticos de uma Variável Randômica

O momento estatístico central de ordem k de uma variável randômica u é definido como

$$\mu_u^k = E[(u - \eta_u)^k] = \int_{\mathbb{R}^n} (u - \eta_u)^k f_u(u) du,$$

sendo η_u a média da variável randômica u . Em geral não se possui informação sobre a função densidade de probabilidade da variável randômica u . Isto impossibilita a determinação dos momentos estatísticos centrais da variável u . Esta dificuldade é contornada através da utilização de métodos de simulação do tipo Monte Carlo. Nestes métodos os momentos estatísticos são estimados a partir do conjunto de realizações do sistema. O estimador para o momento estatístico amostral de ordem k é dado por

$$\hat{\mu}_u^k = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} (u_j - \hat{\eta}_u)^k, \quad (3.7)$$

sendo u_j e $N_s \in \mathbb{N}$ a j -ésima realização do sistema e o número total de amostras realizadas, respectivamente. A média amostral $\hat{\eta}_u$ é estimada por

$$\hat{\eta}_u = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} u_j. \quad (3.8)$$

Na próxima seção são apresentadas as estimativas para os momentos estatísticos amostrais.

3.4 Estimativas dos Momentos Estatísticos

As estimativas que serão apresentadas nesta seção referem-se a um sistema linear de equações com incerteza na matriz de coeficientes. De particular interesse para este trabalho, este sistema de equações é obtido pela aplicação de um método numérico tal como método dos elementos finitos, diferenças finitas ou elementos de contorno.

A Eq.(3.5) será utilizada para obter estimativas para os momentos estatísticos amostrais da solução do sistema linear de equações. O campo de solução referente à m -ésima realização do sistema linear é dado por

$$u_N(x) = \sum_{m=1}^{N_s} u_{mn} \phi_n(x) = (U_m, \Phi(x)),$$

sendo $U_m = \{u_{mn}\}_{n=1}^N$ e $\Phi(x) = \{\phi_n(x)\}_{n=1}^N$ o vetor solução relativo à m -ésima realização

do sistema e o vetor de funções base avaliado em $x \in \Omega$. O momento de primeira ordem da variável randômica gerada pelo campo randômico de solução é estimado a partir das realizações do sistema

$$\hat{\eta}_u(x) = \frac{1}{N_s} \sum_{m=1}^{N_s} (U_m, \Phi(x)). \quad (3.9)$$

A primeira estimativa a ser apresentada é para a média da variável randômica $u(x)$. Usando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky no termo geral da série expressa na Eq.(3.9), obtém-se

$$\hat{\eta}_u(x) \leq \frac{1}{N_s} \sum_{m=1}^{N_s} \frac{1}{1 - \|P\|} |U_0|_2 |\Phi(x)|_2. \quad (3.10)$$

Definido-se $C_m = \frac{1}{1 - \|P\|}$ pode-se reescrever a estimativa dada na Eq.(3.10) como,

$$\hat{\eta}_u(x) \leq \hat{\eta}_C |U_0|_2 |\Phi(x)|_2. \quad (3.11)$$

A próxima estimativa é obtida para o momento estatístico amostral de segunda ordem.

Das Eq.(3.7) e Eq.(3.8) tem-se que,

$$\hat{\mu}_u^2(x) = \frac{1}{N_s - 1} \sum_{m=1}^{N_s} [(U_m, \Phi(x))^2 - \hat{\eta}_u^2(x)]. \quad (3.12)$$

Para o termo geral da série definida na Eq.(3.12) tem-se a seguinte estimativa

$$(U_m, \Phi(x))^2 - \hat{\eta}_u^2(x) \leq (C_m |U_0|_2 |\Phi(x)|_2)^2 - \hat{\eta}_u^2(x). \quad (3.13)$$

Colocando-se a estimativa dada em Eq.(3.13) na Eq.(3.12) obtém-se

$$\hat{\mu}_u^2(x) \leq (|U_0|_2 |\Phi(x)|_2)^2 \sum_{m=1}^{N_s} \frac{C_m^2}{N_s - 1} - \frac{N_s}{N_s - 1} \hat{\eta}_u^2(x). \quad (3.14)$$

Analogamente, tem-se para

$$\hat{\mu}_C^2(x) = \frac{1}{N_s - 1} \sum_{m=1}^{N_s} (C_m^2 - \hat{\eta}_u^2(x)). \quad (3.15)$$

Isolando-se $\frac{1}{N_s - 1} \sum_{m=1}^{N_s} C_m^2$ na Eq.(3.15) e substituindo-se na desigualdade Eq.(3.14) tem-se

$$\frac{N_s}{N_s - 1} \hat{\eta}_u^2(x) + \hat{\mu}_u^2(x) \leq \left(\frac{N_s}{N_s - 1} \hat{\eta}_C^2 + \hat{\mu}_C^2 \right) (|U_0|_2 |\Phi(x)|_2)^2. \quad (3.16)$$

O momento estatístico amostral de terceira ordem é dado por

$$\hat{\eta}_u^3(x) = \frac{1}{N_s} \sum_{m=1}^{N_s} ((U_m, \Phi(x)) - \hat{\eta}_u)^3. \quad (3.17)$$

Novamente, avaliando-se separadamente o termo geral da Eq.(3.17) obtém-se

$$((U_m, \Phi(x)) - \hat{\eta}_u)^3 \leq (C_m |U_0|_2 |\Phi(x)|_2)^3 - 3(U_m, \Phi(x))^2 \hat{\eta}_u(x) + 3(U_m, \Phi(x)) \hat{\eta}_u^2(x) - \hat{\eta}_u^3(x). \quad (3.18)$$

Colocando-se a desigualdade Eq.(3.18) na Eq.(3.17)

$$\hat{\eta}_u^3(x) + 3 \frac{N_s - 1}{N_s} \hat{\eta}_u \hat{\mu}_u^2(x) + \hat{\mu}_u^3(x) \leq \left[\hat{\eta}_C^3 + 3 \frac{N_s - 1}{N_s} \hat{\eta}_C \hat{\mu}_C^2 + \hat{\mu}_C^3 \right] (|U_0|_2 |\Phi(x)|_2)^3. \quad (3.19)$$

As desigualdades apresentadas nas Eq.(3.11), (3.16) e (3.19) podem ser expressas como

$$f(x, \hat{\eta}_u, \hat{\mu}_u^2, \dots, \hat{\mu}_u^k) \leq f(\hat{\eta}_C, \hat{\mu}_C^2, \dots, \hat{\mu}_C^k) (|U_0|_2 |\Phi(x)|_2)^K, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.20)$$

sendo que,

$$k = 1 \Rightarrow f(x, \hat{\eta}_u) = \hat{\eta}_u(x) \text{ e } f(\hat{\eta}_C) = \hat{\eta}_C;$$

$$k = 2 \Rightarrow f(x, \hat{\eta}_u, \hat{\mu}_u^2) = \frac{N_s}{N_s-1} \hat{\eta}_u^2(x) + \hat{\mu}_u^2(x) \text{ e } f(\hat{\eta}_C, \hat{\mu}_C^2) = \frac{N_s}{N_s-1} \hat{\eta}_C^2 + \hat{\mu}_C^2;$$

$$k = 3 \Rightarrow f(x, \hat{\eta}_u, \hat{\mu}_u^2, \hat{\mu}_u^3) = \hat{\eta}_u^3(x) + 3 \frac{N_s-1}{N_s} \hat{\eta}_u \hat{\mu}_u^2(x) + \hat{\mu}_u^3(x) \text{ e } f(\hat{\eta}_C, \hat{\mu}_C^2, \hat{\mu}_C^3) = \hat{\eta}_C^3 + 3 \frac{N_s-1}{N_s} \hat{\eta}_C \hat{\mu}_C^2 + \hat{\mu}_C^3.$$

A desigualdade Eq.(3.20) fornece um limitante para os momentos estatísticos de uma variável randômica gerada pelo campo randômico de solução e a variável randômica que define o limitante da norma da matriz $(I - P)^{-1}$. A seguir são apresentados dois resultados teóricos na forma de corolários para sistemas estocásticos. São analisados dois tipos de sistemas lineares estocásticos, no primeiro a incerteza é modelada por uma variável randômica, enquanto que no segundo o sistema linear é dado por uma seqüência de variáveis randômicas. A matriz de coeficientes para o primeiro caso é definida como

$$K(\alpha(\omega)) = \alpha(\omega) K_0. \quad (3.21)$$

A incerteza presente na matriz de coeficientes é modelada por uma variável randômica

$\alpha(\omega)$ definida por

$$\alpha(\omega) = \mu + \sigma \xi(\omega),$$

sendo μ, σ constantes e $\xi(\omega)$ uma variável randômica. Para este caso tem-se o seguinte

corolário:

Corolário 1: *Sejam $\mu \geq \sigma > 0$, $P = \frac{\sigma}{\mu}\xi(\omega)I$, $\xi(\omega)$ uma variável randômica e o sistema linear $\alpha(\omega)K_0U = F$, tal que $|\xi(\omega)| < \frac{\mu}{\sigma}$ e K_0 não singular, então $\|P(\omega)\| < 1$.*

Prova: Colocando-se a matriz de coeficientes definida na Eq.(3.21) no sistema linear estocástico dado por $K(\omega)u = F$ tem-se

$$\alpha(\omega)K_0U = F.$$

A solução do sistema linear pode ser expressa como na Eq.(3.5) com $P(\omega) = \frac{\sigma}{\mu}\xi(\omega)I$. A norma da matriz $P(\omega)$ pode ser estimada como,

$$\|P(\omega)\| = \frac{\sigma}{\mu} |\xi(\omega)| \|I\| < 1$$

No segundo caso a matriz de coeficientes é definida como

$$K(\alpha_1(\omega), \dots, \alpha_n(\omega)) = K_0 + \alpha_1(\omega)K_1 + \dots + \alpha_n(\omega)K_n, \quad (3.22)$$

sendo $\alpha_1(\omega), \dots, \alpha_n(\omega)$ variáveis randômicas. O corolário 2 assegura, a aplicação da série de Neumann ao sistema linear estocástico associado à matriz de coeficientes definida na Eq.(3.22).

Corolário 2: *Seja $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ um vetor de variáveis randômicas e $K(\alpha_1(\omega), \dots, \alpha_n(\omega))$ definido na Eq.(3.5), K_0 não singular, $\|K_1\|, \dots, \|K_n\| > 0$ e $\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i(\omega)| < \frac{1}{n \|K_0^{-1}\| \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|K_j\| \right)}$, então $\|P(\omega)\| < 1$.*

Prova: A inversa da matriz de coeficientes definida na Eq.(3.22) pode ser expressa como

$$K^{-1}(\omega) = (I + P(\omega))^{-1}K_0^{-1},$$

sendo $P(\omega) = K_0^{-1}(\alpha_1(\omega)K_1 + \dots + \alpha_n(\omega)K_n)$. A norma desta matriz pode ser estimada

como

$$\begin{aligned} \|P(\omega)\| &\leq \|K_0^{-1}\| (|\alpha_1(\omega)| \|K_1\| + \dots + |\alpha_n(\omega)| \|K_n\|) \leq \\ &n \|K_0^{-1}\| \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i(\omega)| \right) \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|K_j\| \right). \end{aligned}$$

Por hipótese, tem-se que $\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i(\omega)| < \frac{1}{n \|K_0^{-1}\| \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|K_j\| \right)}$ obtém-se

$$\|P(\omega)\| \leq n \|K_0^{-1}\| \frac{1}{n \|K_0^{-1}\| \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|K_j\| \right)} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|K_j\| \right) < 1 \quad \square$$

Os corolários 1 e 2 definem as condições necessárias e suficientes sobre as variáveis randômicas para que se tenha $\|P\| < 1$. Em termos práticos, as hipóteses sobre as variáveis randômicas de ambos os corolários definem filtros que serão aplicados sobre as amostras geradas por simulação de Monte Carlo.

Capítulo 4

Problema de Condução Estocástica de Calor

4.1 Introdução

Neste capítulo o método de Galerkin é aplicado para obter soluções numéricas para os problemas linear e não linear de condução estocástica de calor. Em ambos os casos a incerteza está presente nas propriedades de condutividade térmica sendo modelada através de variáveis randômicas ou processos estocásticos. As soluções aproximadas são obtidas em um espaço produto gerado a partir do produto tensorial entre o espaço de funções cinematicamente admissíveis e um espaço de medida em probabilidade com variância finita. Para o caso em que a modelagem matemática da incerteza é feita através de um processo estocástico a representação da incerteza é feita através da série KL. As funções de base utilizadas para gerar o espaço das funções cinematicamente admissíveis possuem suporte definido em todo o domínio físico do problema. Desta forma não foi necessária a discretização espacial através de métodos como elementos finitos, elementos de contorno ou diferenças finitas. O problema de condução estocástica de calor foi estudado por alguns pesquisadores podendo-se destacar os trabalhos de KAST (2004) que considera que a fonte de energia de um sistema depende do tempo de maneira estocástica. Foi mostrado pela comparação com cálculos analíticos que o método prolongado de Duhamel pode ser usado calculando as distribuições da temperatura e os fluxos de calor em todo os casos

de variações transientes da fonte ou da temperatura do sistema. O método conduz a uma série longa de erro ou de funções trigonométricas. Em NICOLAI & BAERDEMAEKER (1999) um algoritmo da propagação da variação é obtido para a computação de problemas de condução de calor com parâmetros estocásticos. Em CHANTASIRIWAN (2006) o erro e a variação da solução do problema de condução de calor com condições iniciais e limite estocásticas são determinados por uma formulação baseada no método de malhas. Esta formulação expressa a solução nos termos das condições iniciais e de limite. Não se tem registro na literatura pesquisada sobre a obtenção de soluções numéricas para o problema não linear de condução estocástica de calor.

Para o problema não-linear assume-se que a condutividade térmica é uma função do campo randômico de temperaturas. A modelagem matemática da incerteza é feita através de variáveis randômicas e processos estocásticos. Para o problema linear a incerteza é modelada através de processos estocásticos de fenômenos físicos, para a previsão do comportamento de modelos matemáticos determinísticos constitui-se de uma prática comum em engenharia. Entretanto, estes modelos nem sempre são adequados para modelar fenômenos físicos. Atualmente a necessidade de incorporar incertezas é claramente reconhecida, acarretando em um interesse crescente nas aplicações de métodos estocásticos, MANAS et al (2001), CHOI et al (2004), BABUSKA et al (2002) e ELMAN et al (2005). Os métodos probabilísticos na engenharia podem ser classificados em duas categorias principais: métodos que usam uma aproximação estatística e métodos que usam uma aproximação não-estatística. A aproximação estatística inclui uma família de métodos baseados em simulação de Monte Carlo, entre eles podemos citar Monte Carlo Direto, Neumann-Monte Carlo, KL-Monte Carlo, entre outros. Estes métodos requerem a amostragem e a estimativa e em geral são simples de aplicar. Entretanto, como a precisão dos resultados obtidos pelas técnicas de amostragem depende do tamanho da amostra, o número de simulações do sistema (realizações) pode tornar-se elevado. Isto está diretamente relacionado com o custo e eficiência computacional. Assim, estes métodos são usados como o último recurso. Tal fato é agente motivador no desenvolvimento de pesquisa em métodos não-estatísticos.

O método não-estatístico mais popular é o método de perturbação. Uma limitação

inerente do método da perturbação é que as incertezas não podem ser grandes, isto é, as dispersões observadas nos processos estocásticos inerentes ao problema não podem ser grandes quando comparados com seus valores médios, por exemplo tipicamente menor que 10% . Recentemente, uma nova aproximação não estatística foi proposta por Ghanem & Spanos (1989) que consiste na representação do processo estocástico por uma série em polinômios, conhecidos como polinômios de Caos. Tal metodologia foi aplicada com sucesso a vários problemas mecânicos, GHANEM (1999), GHANEM e KRUGER (1996) e SPANOS & GHANEM (1989).

A expansão por polinômio de caos é baseada na teoria homogênea de caos de Wiener, WIENER (1938), e é essencialmente uma expansão espectral das variáveis randômicas. Permite uma representação de alta ordem e assegura uma convergência rápida. Acoplado com decomposição de Karhunen-Loève para a entrada e a projeção de Galerkin no espaço aleatório, resulta em algoritmos computacionalmente tratáveis para grandes sistemas da engenharia. Mais eficientes, tornam-se os algoritmos de Monte Carlo quando combinados com a técnica da expansão de caos.

A expansão clássica do polinômio de caos é baseada nos polinômios de Hermite, os quais são adequados para o tratamento de variáveis randômicas Gaussianas. Uma estrutura mais geral, chamada “polinômio de caos generalizado” ou “Askey-Caos”, foi proposta em XIU e KARNIADAKIS (2001) e aplicada também por SILVA (2006). Os polinômios são escolhidos do esquema de polinômios de Askey-Wiener, e podem ser aplicados a qualquer tipo de variáveis randômicas. Além disso, o tipo de variáveis aleatórias é escolhido de acordo com a entrada estocástica, e a função peso destas variáveis randômicas determina o tipo de polinômios ortogonais a serem usados como base no espaço aleatório. As propriedades da convergência com o uso de diferentes bases foram estudadas em XIU e KARNIADAKIS (2002), e a taxa de convergência exponencial foi demonstrada para os problemas modelo.

A Fig.(4.1) representa o problema a ser estudado

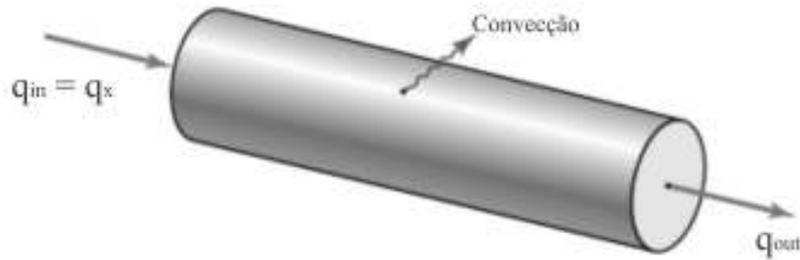


Figura 4.1: Representação do problema proposto.

admite-se que o eixo x é o eixo longitudinal da barra. Considera-se que em $x = 0$ a barra está sujeita a uma temperatura prescrita \bar{T} ,

$$T(0) = \bar{T}, \tag{4.1}$$

que em $x = L$, sua seção esteja isolada termicamente,

$$q(L) = 0. \tag{4.2}$$

A fim de derivar a equação diferencial que governa o problema, se faz uso do princípio da conservação da energia. Assim, considera-se o elemento diferencial ilustrado na Fig. (4.2)

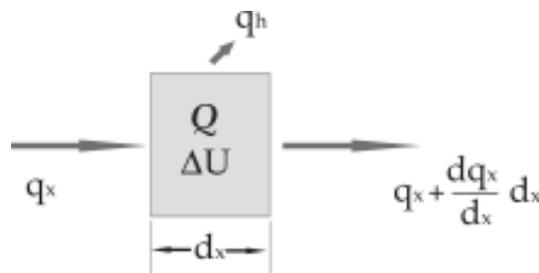


Figura 4.2: Representação diferencial do problema.

Na ausência do transporte de massa, $q_m = 0$, e fonte de calor por unidade de massa, $Q = 0$, tem-se:

$$\rho c_p \dot{T} A \Delta x = q(x)A - q(x + \Delta x)A + q_h P_e \Delta x, \quad (4.3)$$

sendo A a área da secção transversal da barra, P_e o perímetro da secção transversal, ρ a densidade do sólido e c_p a capacidade térmica do sólido a pressão constante. O fluxo de calor q_h é devido a um mecanismo de convecção, que troca calor entre o sólido e um fluido de temperatura T_f , longe da camada limite. Dividindo-se a Eq. (4.3) por Δx e fazendo-se $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se

$$\rho c_p \dot{T} + \frac{dq}{dx} + \frac{q_h P_e}{A} = 0$$

Como fluxo de convecção de calor q_h é dado por

$$q_h = -h(T - T_f), \quad (4.4)$$

deriva-se

$$\rho c_p \dot{T} = -\frac{dq}{dx} - \frac{hP_e}{A}(T - T_f). \quad (4.5)$$

Da Lei de Fourier tem-se que

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx}, \quad (4.6)$$

sendo κ a condutividade térmica do material. Substituindo (4.6) em (4.5) determina-se

$$\rho c_p \dot{T} = \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) - \frac{hP_e}{A}(T - T_f). \quad (4.7)$$

No caso particular de regime permanente, (4.7) reduz-se a ,

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) = \frac{hP_e}{A}(T - T_f). \quad (4.8)$$

Da Eq.(4.8) e com as condições de contorno o problema de condução de calor em um domínio unidimensional em regime permanente define-se o seguinte problema de valor de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } T : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \\ \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) (x) = \left[\frac{hP_e}{A} (T - T_f) \right] (x), \quad \forall x \in (0, L), \\ \\ T(0) = \bar{T}, \\ \\ q(L) = -\kappa \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

A seguir o problema condução estocástica de calor é apresentado

4.1.1 Problema Estocástico de Valor de Contorno

Permitindo que os dados do problema de valor de contorno Eq.(4.9), por exemplo a condutividade térmica $\kappa(x, \omega)$ seja um campo randômico, obtém-se um problema estocástico de valor de contorno (PEVC), cuja solução é um campo randômico. O problema linear de condução estocástica de calor é definido como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } T : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ \\ \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) (x, \omega) = \left[\frac{hP_e}{A} (T - T_f) \right] (x, \omega), \quad q.s. \quad \forall (x, \omega) \in (0, L) \times \Omega, \\ \\ T(0, \omega) = \bar{T}, \\ \\ q(L, \omega) = -\kappa \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Para assegurar a existência do problema elíptico definido na Eq.(4.10) é necessário que $\exists \kappa^{\text{inf}}, \kappa^{\text{sup}} > 0$, tal que

$$P(\omega \in \Omega | \kappa(x, \omega) \in [\kappa^{\text{inf}}, \kappa^{\text{sup}}], \forall x \in D) = 1. \quad (4.11)$$

Define-se \mathbf{K}_T como o conjunto de campos admissíveis de temperaturas, para dado $\omega \in \Omega$, i.e.,

$$\mathbf{K}_T = \{T(\cdot, \omega) \in H^1(D) \mid T(0, \omega) = \bar{T}\}. \quad (4.12)$$

O subespaço da variação de temperatura admissível \mathbf{Var}_T é definido como

$$\mathbf{Var}_T = \{T(\cdot, \omega) \in H^1(D) \mid T(0, \omega) = 0\} = \{T(\cdot, \omega) \in H_0^1(D)\},$$

para cada $x \in D$, fixo, assume-se $T(x, \cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Como neste trabalho serão obtidas soluções aproximadas define-se, a contento,

$$\mathbf{Var}_T^n = \text{span} [\{\phi_i \in C_0(D) \cap C^1(D), i = 1, 2, \dots, n\}].$$

4.1.2 Problema Variacional Estocástico

O problema variacional estocástico (PVE), associado ao problema estocástico de valor de contorno, definido sobre $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H_0^1(D))$ é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } T : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \forall v \in V \text{ tem-se} \\ a(T, v) = \langle l(v) \rangle, \\ T(x, \omega) = \bar{T}, \quad \forall (x, \omega) \in \partial D \times \Omega. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Utilizando-se o princípio da superposição pode-se reescrever o problema variacional estocástico,

$$T(x, \omega) = \bar{T} + T_0(x, \omega).$$

Além disso, propõe-se utilizar o espaço produto $\tilde{V} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes H_0^1(D)$, com $\tilde{V} \simeq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; H_0^1(D))$. Esta passagem deve-se ao fato de que as soluções aproximadas que serão obtidas através do método de Galerkin pertencerem a espaços sequencialmente densos em \tilde{V} . Desta forma o problema variacional estocástico é reformulado como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } T_0 : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \forall v \in \tilde{V} \text{ tem-se} \\ a(T_0, v) = \langle l^*(v) \rangle, \forall v \in \tilde{V}. \end{array} \right.$$

O funcional linear $l^* : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é definido como

$$\langle l^*(v) \rangle = \int_{\Omega} \int_D \left[\frac{hP_e}{A} (T_f - \bar{T}) v \right] (x, \omega) dx dP(\omega).$$

É importante salientar antes de aplicar o método de Galerkin a fim de obter as soluções numéricas, deve-se ainda realizar a discretização da incerteza sobre o coeficiente de condutividade térmica. Na próxima seção, o método de Rayleigh-Ritz é utilizado para obter aproximações para as autofunções do problema integral de autovalores necessário para a representação da incerteza através da série KL.

4.1.3 Representação da Incerteza

Neste trabalho a representação da incerteza sobre o coeficiente de condutividade térmica é feita através da série KL, que consiste em representar a incerteza através de uma combinação linear de variáveis randômicas e funções provenientes da decomposição espectral da função covariância do processo estocástico condutividade térmica. O problema de determinar as autofunções é equivalente a maximizar a variância da projeção do processo estocástico em $L^2(D)$ sujeita à restrição de ortonormalidade das autofunções:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \phi \in L^2(D) \text{ tal que} \\ \lambda = \text{máx} \frac{\langle (\kappa, \phi), \overline{(\kappa, \phi)} \rangle}{(\phi, \phi)}, \\ \text{sujeito a } (\phi, \phi) = 1. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

É importante observar que

$$\begin{aligned} \langle (\kappa, \phi), \overline{(\kappa, \phi)} \rangle &= \int_{\Omega} \left[\left(\int_D \kappa(x, \omega) \phi(x) dx \right) \left(\int_D \overline{\kappa(y, \omega) \phi(y)} dx \right) \right] dP(\omega) \\ &= \int_D \left[\int_D \left(\int_{\Omega} \kappa(x, \omega) \overline{\kappa(y, \omega)} dP(\omega) \right) \phi(x) dx \right] \overline{\phi(y)} dy \\ &= \int_D \int_D C(x, y) \phi(x) \overline{\phi(y)} dx dy. \end{aligned}$$

O problema de maximização apresentado na Eq.(4.14) pode ser formulado como um problema variacional para tal define-se o seguinte funcional $J : L^2(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$J(\phi) = b(\phi, \phi) - \lambda((\phi, \phi) - 1)$$

sendo $b : L^2(D) \times L^2(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear dada por

$$b(\phi, \phi) = \int_D \int_D C(x, y) \phi(x) \overline{\phi(y)} dx dy.$$

A condição necessária de extremo é que a primeira variação do funcional para todas as variações $\delta\phi$,

$$\left. \frac{dJ(\phi + \delta\phi)}{d\delta\phi} \right|_{\delta\phi=0} = 0 \quad \implies \quad \int_D \int_D C(x, y) \phi(x) \overline{\phi(y)} \, dx dy = \lambda \int_D \phi(y) \overline{\phi(y)} \, dy.$$

Como pode-se observar a determinação das autofunções depende da função covariância do processo estocástico a ser representado. As autofunções provenientes da decomposição espectral da função covariância não são conhecidas explicitamente. Somente para poucos casos, em geral em domínios simples, se conhece formalmente as autofunções do problema integral de autovalores. Das propriedades da função covariância pode-se aplicar o método de Rayleigh-Ritz para obter uma aproximação para cada autofunção do problema integral de autovalores. O espaço onde estão definidas as aproximações para as autofunções é $\mathbb{V}^m = span [\{\phi_i\}_{i=1}^n]$. A autofunção $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ é aproximada por

$$\phi_m(x) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x),$$

e

$$\hat{\phi}_m(x) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x),$$

sendo $\hat{\phi}_m \in \mathbb{V}^m$ uma função arbitrária. O problema variacional aproximado, associado ao problema integral de autovalores, é definido como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m, \text{ não nulo, tal que } \exists \lambda \in \mathbb{R}, \text{ que seja solução} \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\int_D \int_D C(x, y) \varphi_i(y) \varphi_j(x) \, dx dy \right] a_j b_i = \lambda \sum_{i=1}^m \left[\int_D \varphi_i(y) \varphi_j(y) \, dy \right] a_j b_i, \forall \varphi_i \in \mathbb{V}^m. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

O problema apresentado na Eq.(4.15) pode ser colocado na forma vetor-matriz como

$$[\mathbb{P}] \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \lambda [\mathbb{M}] \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \quad \Rightarrow \quad [[\mathbb{P}] - \lambda [\mathbb{M}]] \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

com

$$[\mathbb{P}]_{ij} = \int_D \int_D C(x, y) \varphi_i(y) \varphi_j(x) dx dy \quad \text{e} \quad [\mathbb{M}]_{ij} = \int_D \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy. \quad (4.17)$$

A Eq.(4.16) representa o problema generalizado de autovalores, em \mathbb{R}^m . A solução da Eq.(4.16) é o par $\{\lambda^{(n)}, \mathbf{a}^{(n)}\}$ formado pelo n -ésimo autovalor e o seu autovetor associado. Conforme a Eq.(4.16) os autovalores e as autofunções resultantes são dados por

$$\lambda_n = \lambda^{(n)} \quad \text{e} \quad \phi_{mn}(x) = \sum_{j=1}^m a_j^{(n)} \varphi_j(x). \quad (4.18)$$

A aproximação do processo estocástico de condutividade térmica será feita através do truncamento da série KL e da aproximação das autofunções da decomposição espectral da função covariância,

$$\kappa_m(x, \omega) = \bar{\kappa}(x) + \sum_{n=1}^m \sqrt{\lambda_n} f_n(x) \xi_n(\omega). \quad (4.19)$$

Colocando-se a aproximação proposta em Eq.(4.18) na Eq.(4.19) tem-se

$$\kappa_{mn}(x, \omega) = \bar{\kappa}(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{jn} \sqrt{\lambda_i} \varphi_j(x) \xi_i(\omega). \quad (4.20)$$

A partir das aproximações para o processo estocástico de condutividade térmica pode-se definir o problema variacional estocástico aproximado.

4.1.4 Método de Galerkin

O método de Galerkin é aplicado sobre o problema variacional estocástico aproximado para obter soluções numéricas através de aproximações da solução em espaços separáveis sequencialmente densos em \tilde{V} . Dos resultados teóricos apresentados no Capítulo 3 e da teoria de espaços de Sobolev, ADAMS (1975), tem-se que $\overline{\Theta^{m,p}}^{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $\overline{\mathbf{Var}_T^n}^{H_0^1(D)} = H_0^1(D)$, respectivamente. Além disso, ambos os espaços $\Theta^{m,p}$ e \mathbf{Var}_T^n são separáveis. Propõe-se que sejam obtidas soluções aproximadas para o campo randômico de temperaturas na seguinte forma

$$T^{mp}(x, \omega) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p u_{ij} \phi_j(x) \psi_i(\boldsymbol{\xi}(\omega)), \quad (4.21)$$

com $\psi_i \in \Theta^{m,p}$ os polinômios pertencentes ao esquema Askey-Wiener, $\phi_j \in \mathbf{Var}_T^n$ e u_{ij}

coeficientes a determinar. O problema variacional estocástico aproximado é definido em $\tilde{V}^{mp} = \Theta^{m,p} \otimes \mathbf{Var}_T^n$,

$$\begin{cases} \text{Determinar } T_0^{mp} : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \forall v \in \tilde{V}^{mp} \text{ tem-se} \\ a(T_0^{mp}, v) = \langle l^*(v) \rangle, \forall v \in \tilde{V}^{mp}. \end{cases} \quad (4.22)$$

sendo $\Theta^{m,p}$ o subespaço gerado por todos os polinômios de \mathbb{R}^M de grau $n \leq p$, com

$$\dim(\Theta^{m,p}) = q.$$

4.1.5 Determinação dos termos do sistema linear

O problema variacional estocástico aproximado definido na Eq.(4.22) consiste na determinação dos coeficientes $\{u_{sj}\} \in \mathbb{R}^{n,q}$ da combinação linear na Eq.(4.21). O problema aproximado é definido,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \{u_{sj}\} \in \mathbb{R}^{n \cdot q} \text{ tal que} \\ \sum_{s=1}^q \sum_{j=1}^n u_{sj} a(\psi_s \phi_j, \psi_k \phi_i) = \langle l^*(\psi_k \phi_i) \rangle, \quad \forall (k, l) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, n\}. \end{array} \right.$$

com

$$a(\psi_s \phi_j, \psi_k \phi_i) = \int_{\Omega} \int_D \left(\kappa \psi_s \frac{d\phi_j}{dx} \psi_k \frac{d\phi_i}{dx} + \frac{hP_e}{A} \psi_s \phi_j \psi_k \phi_i \right) (x, \omega) dx dP(\omega),$$

e

$$\langle l^*(\psi_k \phi_i) \rangle = \int_{\Omega} \int_D \left[\frac{hP_e}{A} (T_f - \bar{T}) \psi_k \phi_i \right] (x, \omega) dx dP(\omega).$$

Denominando

$$K_{kij} = \int_{\Omega} \int_D \left(\kappa \psi_k \frac{d\phi_i}{dx} \psi_s \frac{d\phi_j}{dx} + \frac{hP_e}{A} \psi_k \phi_i \psi_s \phi_j \right) (x, \omega) dx dP(\omega), \quad (4.23)$$

$$F_{ki} = \int_{\Omega} \int_D \left[\frac{hP_e}{A} (T_f - \bar{T}) \psi_k \phi_i \right] (x, \omega) dx dP(\omega). \quad (4.24)$$

Seja $\{\mathbf{e}_l\}_{l=1}^n$ a base canônica em \mathbb{R}^n , pode-se obter uma representação para o vetor força como sendo

$$\mathbf{F}_k = \sum_{i=1}^n F_{ki} \mathbf{e}_i, \quad U_s = \sum_{j=1}^n u_{sj} \mathbf{e}_j \quad \text{e} \quad [\mathbf{K}_{ks}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{kij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \quad (4.25)$$

A representação em termos de matriz-vetor da equação de equilíbrio é dada por

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] & [\mathbf{K}_{13}] & \dots & [\mathbf{K}_{1q}] \\ & [\mathbf{K}_{22}] & [\mathbf{K}_{23}] & \dots & [\mathbf{K}_{2q}] \\ & & [\mathbf{K}_{33}] & \dots & [\mathbf{K}_{3q}] \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & [\mathbf{K}_{qq}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \dots \\ \mathbf{F}_q \end{Bmatrix}. \quad (4.26)$$

Definindo-se

$$\alpha_k = \langle \psi_k \rangle, \quad \gamma_{ks} = \gamma_{sk} = \langle \psi_s, \psi_k \rangle \quad \text{e} \quad \beta_{ks}^r = \beta_{sk}^r = \langle \xi_r \psi_s, \psi_k \rangle,$$

pode-se reescrever o termo (i, j) da matriz $[\mathbf{K}_{ks}]$, para k e s fixos

$$[\mathbf{K}_{ks}]_{ij} = \gamma_{ks} \int_D \left(\bar{\kappa} \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} + \frac{hP_e}{A} \phi_i \phi_j \right) (x) dx + \sum_{r=1}^m \sqrt{\lambda_r} \beta_{ks}^r \int_D \left(f_r \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} \right) (x) dx,$$

Analogamente pode-se fazer o mesmo para a i -ésima componente do vetor \mathbf{F}_k , para um k fixo, como

$$F_{ki} = \frac{h P_e \alpha_k}{A} (T_f - \bar{T}) \int_D \phi_i(x) dx.$$

A matriz de rigidez do sistema definido na Eq.(4.23) é uma matriz quadrada com $\dim(K) = n.q$ sendo formada por blocos de matrizes $K_{ij} \in M_{n.q}(\mathbb{R})$. Observa-se que as matrizes K_{ii} são obtidas com base no valor esperado da condutividade térmica, enquanto que as matrizes K_{ij} com $i \neq j$ referem-se à influência de natureza randômica da condutividade térmica. É importante mencionar que o número de polinômios de caos depende fortemente do número de termos utilizados na série KL. Conseqüentemente a dimensão do sistema linear definido na Eq.(4.26) é influenciado pelo número de polinômios de caos que pode ser determinado por

$$q = 1 + \sum_{s=1}^p \frac{1}{s!} \prod_{r=0}^{s-1} (m+r),$$

sendo m o número de termos da série KL e p o grau dos polinômios de caos.

4.2 Exemplos

Os resultados numéricos, obtidos da implementação das equações vistas neste capítulo serão agora analisados. Aqui, são apresentados resultados da implementação das equações, apresentadas no início deste capítulo, particularizadas para o problema 1D de transferência de calor estocástico e comparados com o resultado analítico.

O problema linear determinístico é dado por:

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) (x) = \frac{hP_e}{A} (T - T_f) (x), \quad \forall x \in (0, L)$$

A Fig.(4.3) representa a distribuição de temperatura em uma aleta de aço sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} T(0) &= \bar{T}, \\ q(L) &= -\kappa \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned}$$

Neste exemplo o comprimento da barra também foi considerado como $L = 0.5\text{m}$.

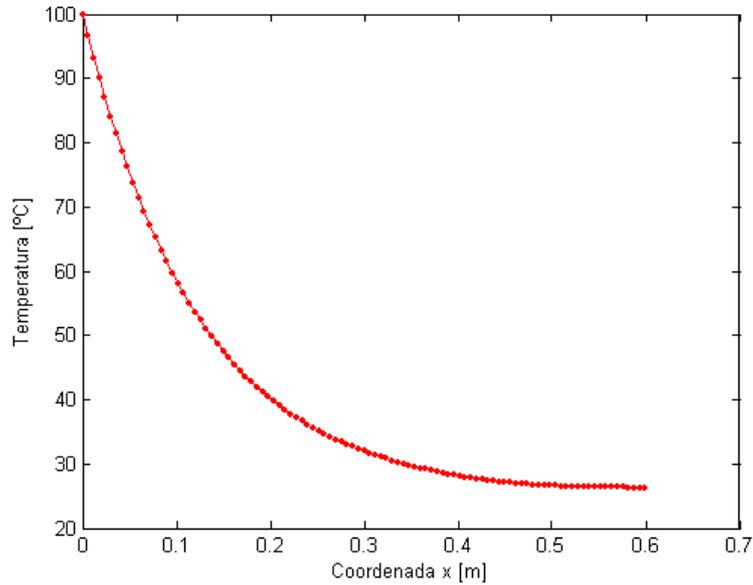


Figura 4.3: Distribuição de Temperatura.

Este resultado linear pode ser comparado com dois exemplos estocásticos, o primeiro com 2 variáveis randômicas e o segundo com 3 variáveis randômicas.

4.2.1 Exemplo 1

Aqui, se considera o problema da aleta definido na Fig.(1) em que $L = 0.5m$, $k_o = 398.0W/m^2°C$ e o coeficiente de convecção $h = 100.0W/m°C$. A temperatura prescrita $T = 100°C$ e a temperatura do fluido $T_f = 25°C$. A seção transversal da aleta é circular com um raio de $R = 0.005m$. A função de covariância da condutividade térmica é dada por Eq.(2.45), com $b = 1.0$ e $\sigma_b = 100.0$. A Fig.(4.4) descreve a função exata da covariância.

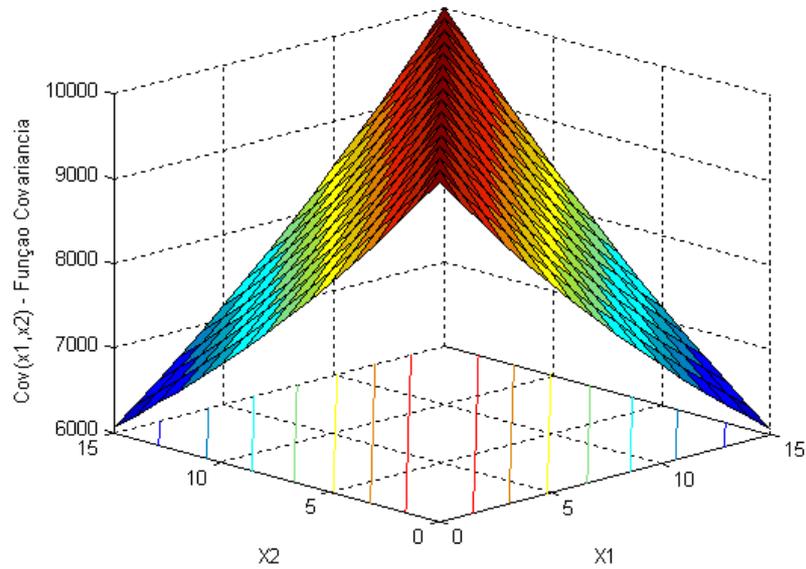


Figura 4.4: Função Covariância para $m = 2$.

A Fig.(4.5) descreve a aproximação espectral de Karhunen-Loève.

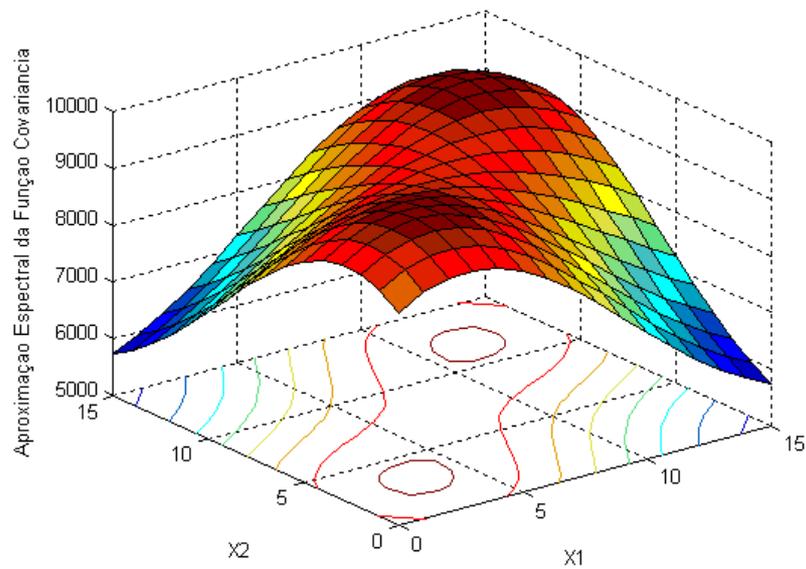


Figura 4.5: Aproximação espectral de Karhunen-Loève para $m = 2$.

Figura (4.6) descreve o erro na aproximação da função de covariância obtida por subtração dos resultados anteriores.

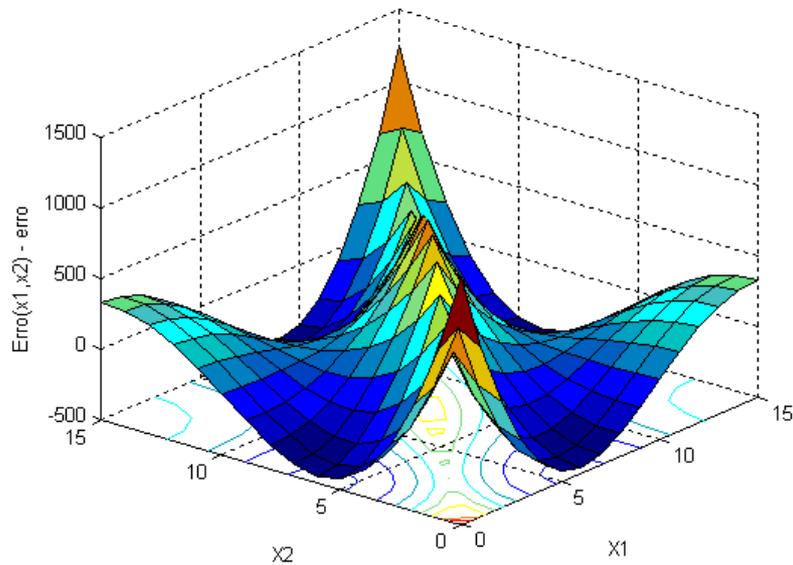


Figura 4.6: Erro na aproximação da função de covariância para $m = 2$.

Neste caso, o problema da aleta é resolvido por Monte Carlo-KL usando 100 amostras juntamente com Askey-Wiener para $m = 2$ na aproximação por KL e $p = 2$ para a ordem do polinômio de caos (Askey-caos). A simulação de Monte Carlo-KL foi validada através da determinação da condutividade térmica média e comparada com o valor exato, dado por $k_o = 398.0W/m^2C$. A Fig.(4.7) descreve as distribuições de temperaturas obtidas pela simulação de Monte Carlo e a solução de Askey-caos para $m = 2$, $p = 2$ acarretando em $q = 6$.

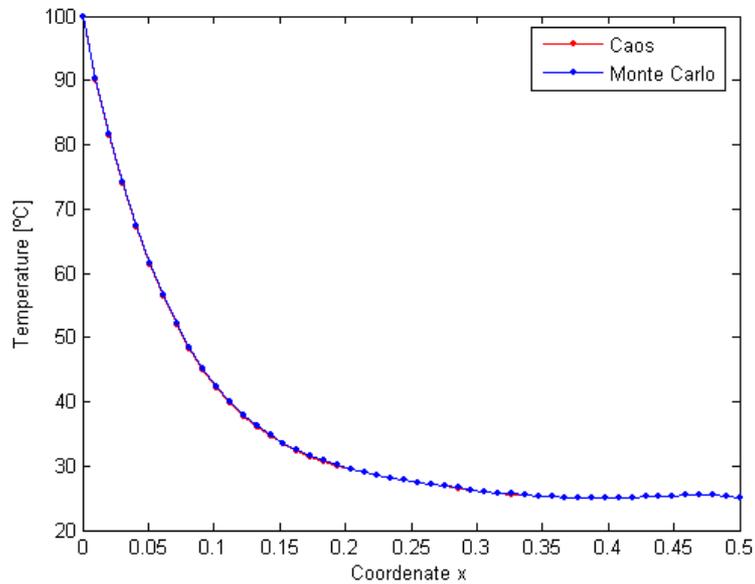


Figura 4.7: Distribuição da Temperatura obtida por Monte Carlo-KL e Askey-caos para $m = 2$ e $p = 2$.

A Fig.(4.8) descreve as distribuições da variância obtidas pela simulação de Monte Carlo e a solução de Askey-caos para $m = 2$ e $p = 2$.

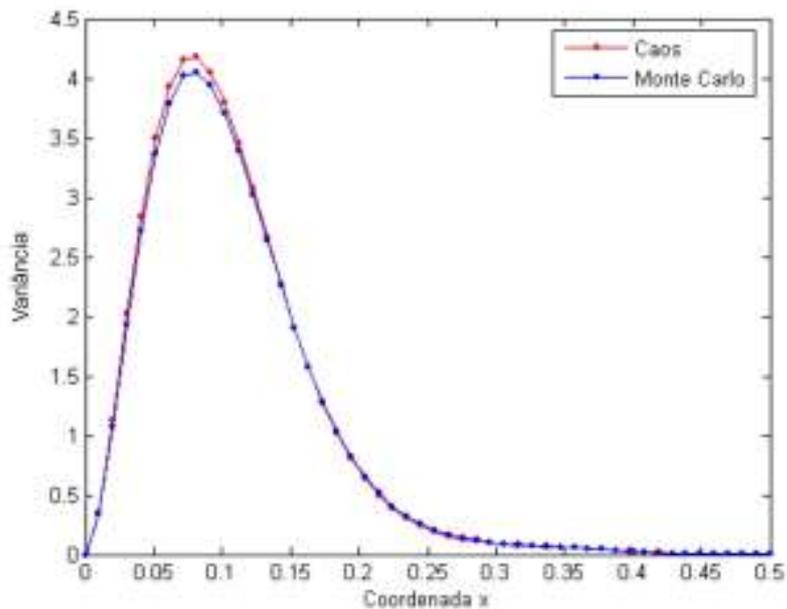


Figura 4.8: Distribuição da variância obtida por Monte Carlo e Askey-caos para $m = 2$.

A Fig.(4.9) mostra a distribuição da condutividade térmica média obtida pelas simulações Monte Carlo-KL, utilizadas como comparação com os resultados obtidos por Galerkin juntamente com os polinômios de Askey-Caos. Note que a distribuição exata é $k_o = 398.0W/m^2C$ constante. Isto mostra que o número de amostragens (100) deve ser aumentado consideravelmente se quisermos obter a solução exata.

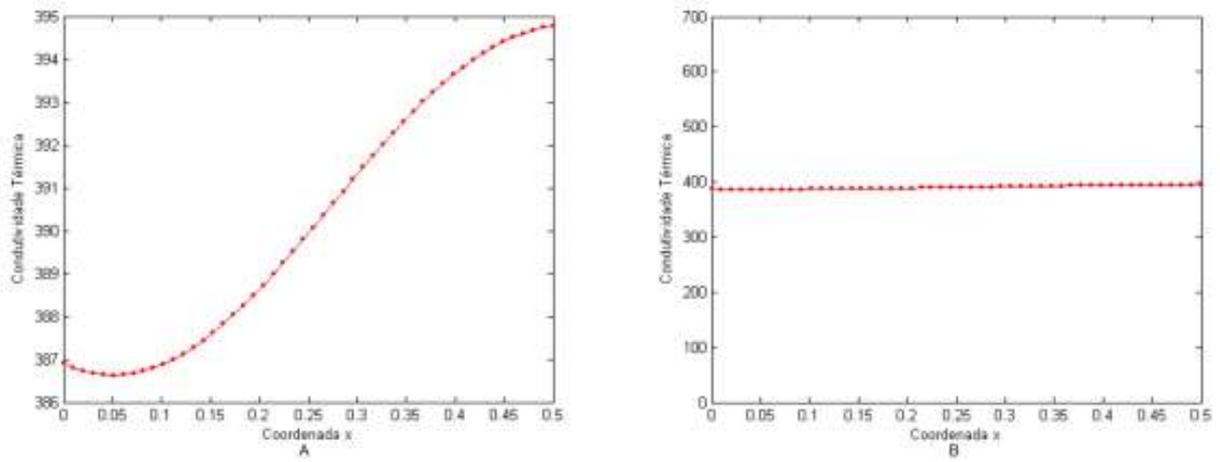


Figura 4.9: (A) e (B) Representação da condutividade térmica gerada por Monte Carlo - KL.

4.2.2 Exemplo 2

Para 3 variáveis randômicas a diferença mais visível está na função de covariância aproximada, o que ainda representa uma boa aproximação. Em relação à temperatura média ao longo da barra pouca diferença se percebe em relação ao exemplo anterior.

As autofunções obtidas através do problema do Autopar para 3 variáveis podem ser vistas na Fig.(4.10).

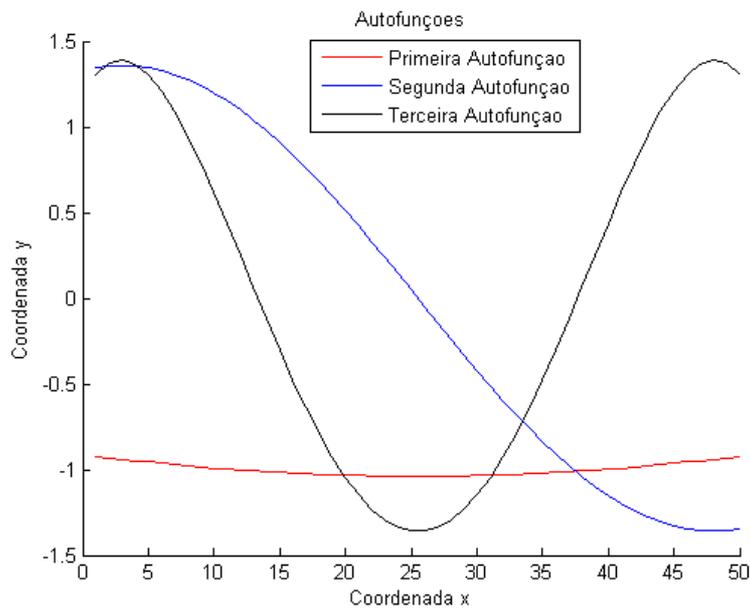


Figura 4.10: Autofunções da função covariância.

A função de covariância exata, a aproximação espectral da covariância e o erro na função na aproximação espectral são ilustrados pelas Fig.(4.11), Fig.(4.12) e Fig.(4.13), respectivamente.

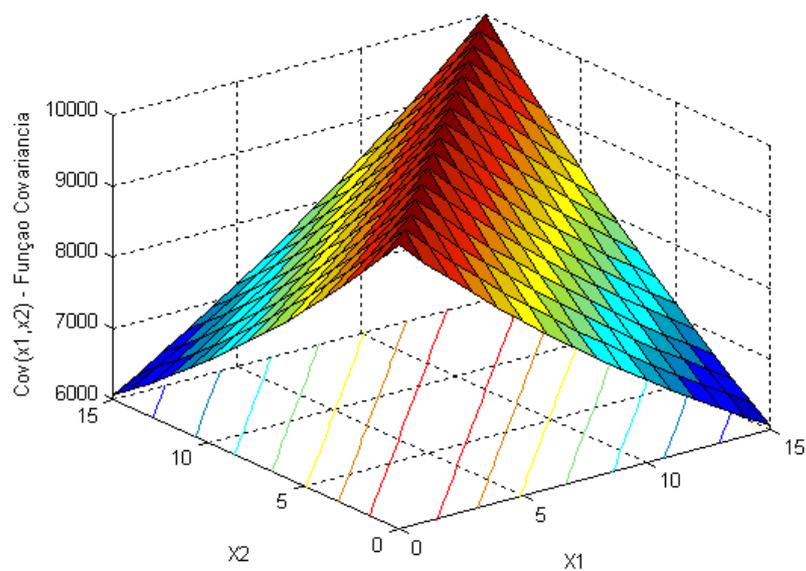
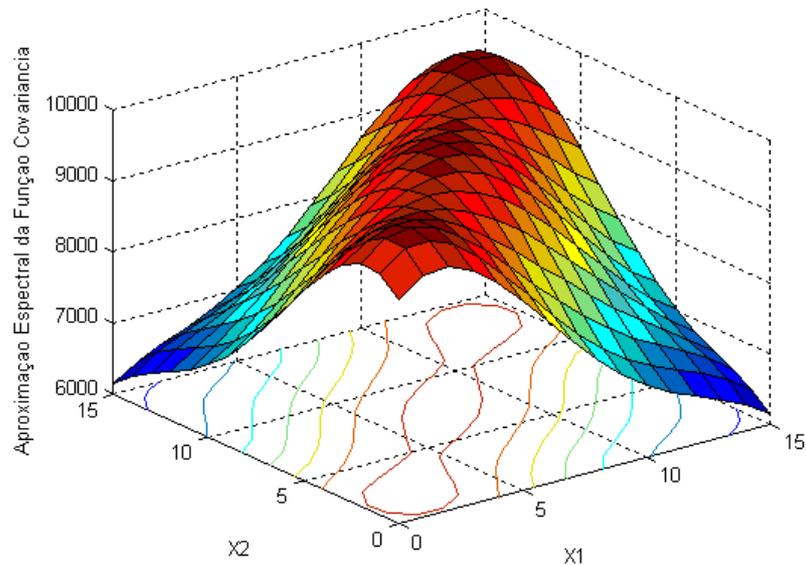
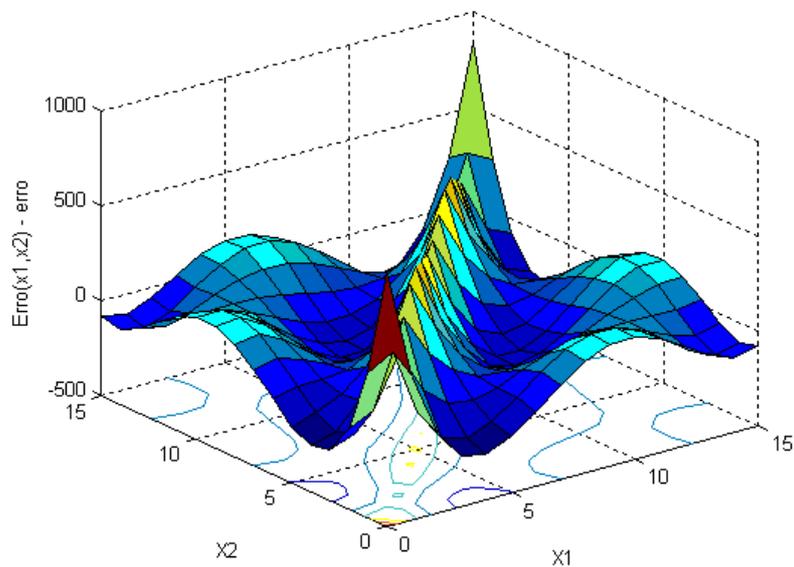


Figura 4.11: Função de Covariância exata para $m = 3$.

Figura 4.12: Aproximação espectral de Karhunen-Loève para $m = 3$.Figura 4.13: Erro na aproximação da função de covariância para $m = 3$.

Aqui, novamente o problema da aleta é resolvido por Monte Carlo-KL usando 100 amostras juntamente com Askey-Wiener para $m = 3$ na aproximação por KL e $p = 2$ para a ordem do polinômio de caos (Askey-caos). A simulação de Monte Carlo foi testada

determinando a condutividade térmica média, cujo o valor exato é $k_o = 398.0W/m^2C$. A Fig.(4.14) descreve as distribuições de temperaturas obtidas pela simulação de Monte Carlo e a solução de Askey-caos para $m = 3$, $p = 2$ e $q = 10$.

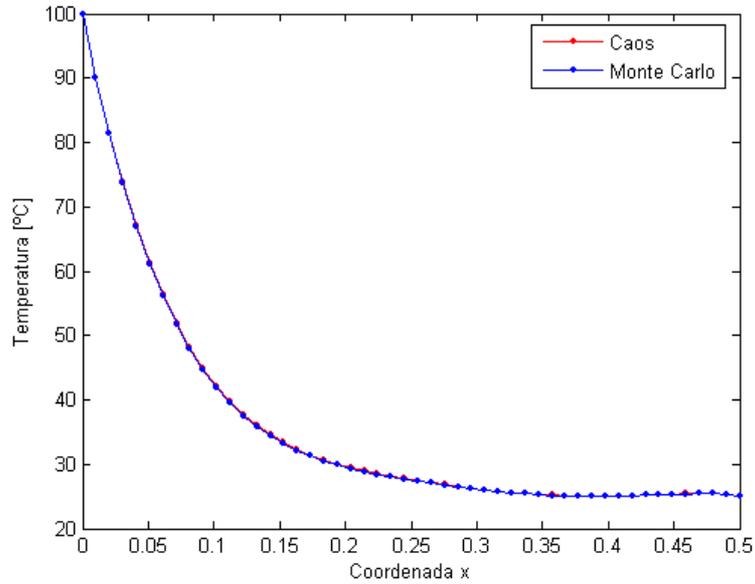


Figura 4.14: Distribuição de Temperatura obtida por Monte Carlo e Askey-caos, para $m = 3$.

A Fig.(4.15) descreve as distribuições da variância obtidas pelo simulação de Monte Carlo e Askey-caos.

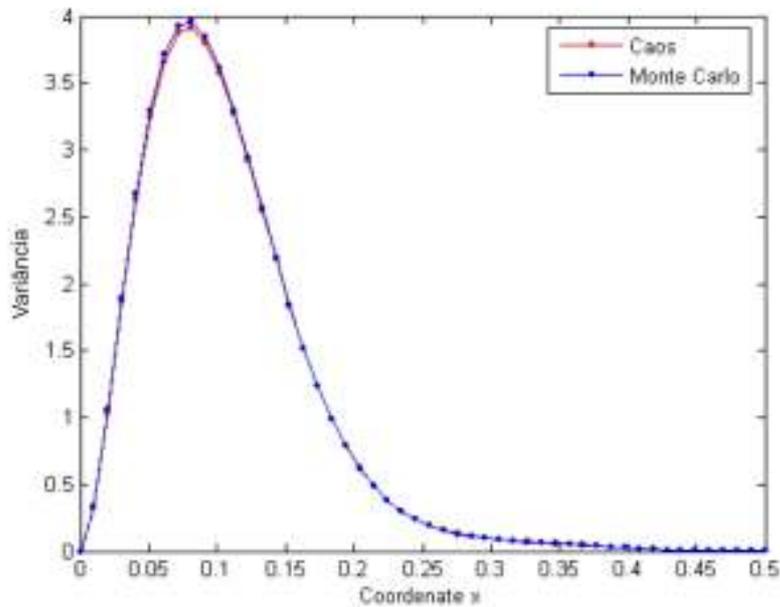


Figura 4.15: Distribuição da variância obtida por Monte Carlo e Askey-caos para $m = 3$.

As Fig.(4.16), e a Fig.(4.17), mostram que em ambos os exemplos as simulações de Monte Carlo e a solução de Askey-caos fornecem uma boa aproximação para a distribuição de temperatura.

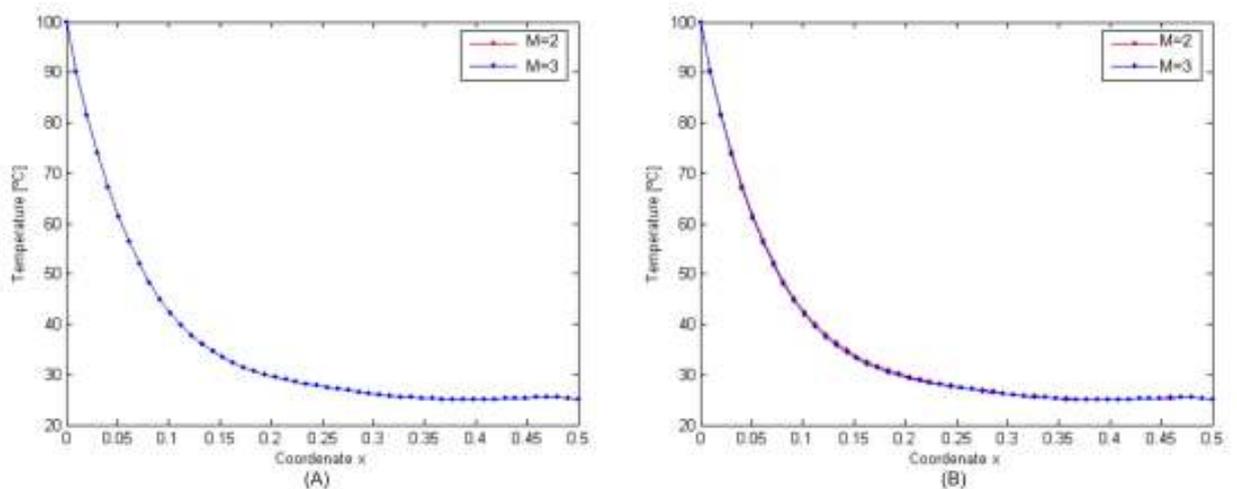


Figura 4.16: (A) Distribuição da temperatura obtida por Askey-caos; (B) Distribuição da temperatura obtida por Monte Carlo.

Os resultados obtidos para variância para os diferentes valores de m .

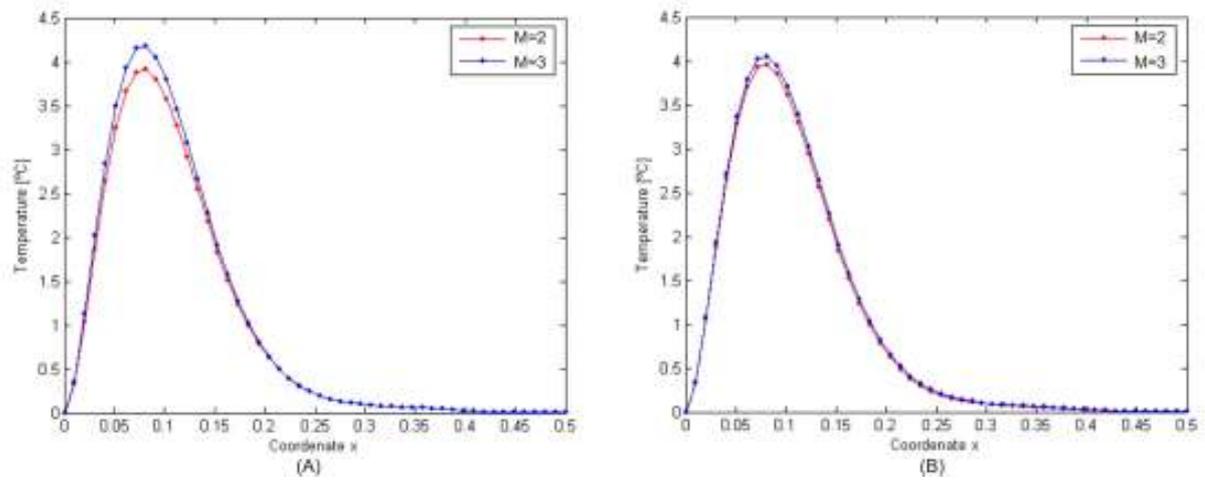


Figura 4.17: (A) Variância obtida por Monte Carlo; (B) Variância obtida por Askey-chaos

Para uma melhor visualização dos resultados obtemos as estatísticas de primeira e segunda ordem para o caso onde o problema é resolvido com quatro variáveis randômicas e polinômios de Caos de ordem dois e três.

Primeiramente plotamos a função de covariância para os diferentes números de variáveis randômicas propostos.

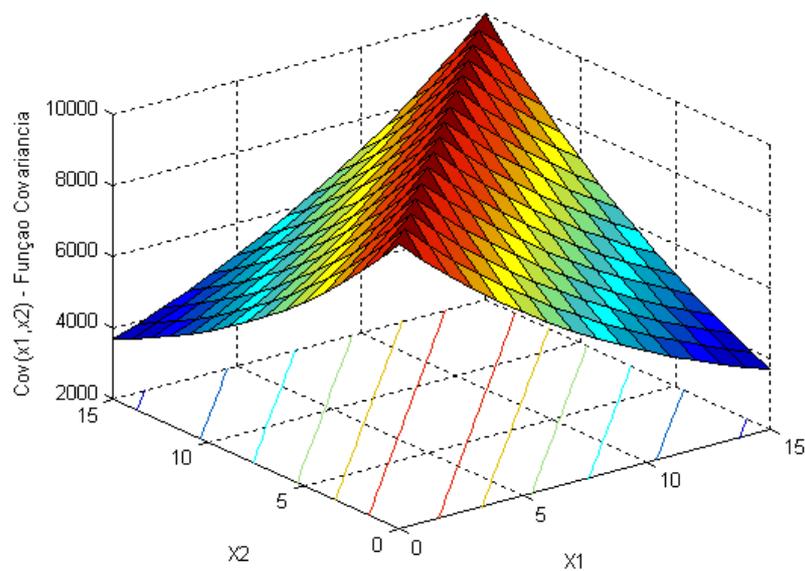


Figura 4.18: Função de Covariância exata.

Através da comparação do segundo momento dos polinômios de ordem 3 do esquema Askey obtém-se uma melhor aproximação através da simulação Galerkin-Caos. Nota-se ainda que a ordem dos polinômios não representa uma diferença significativa. Quando comparamos os tipos de simulação utilizados, Monte Carlo e Galerkin-Caos, podemos observar que as estimativas para os momentos de primeira e segunda ordem obtidos através de Galerkin-Caos fornecem os melhores resultados.

Pode-se observar a estimativa para o segundo momento obtida através de Monte Carlo, ver Fig.(4.19), e comparar como resultado obtido através de Galerkin-Caos, ver Fig.(4.20), ambos para os polinômios de ordem 3 do esquema Askey.

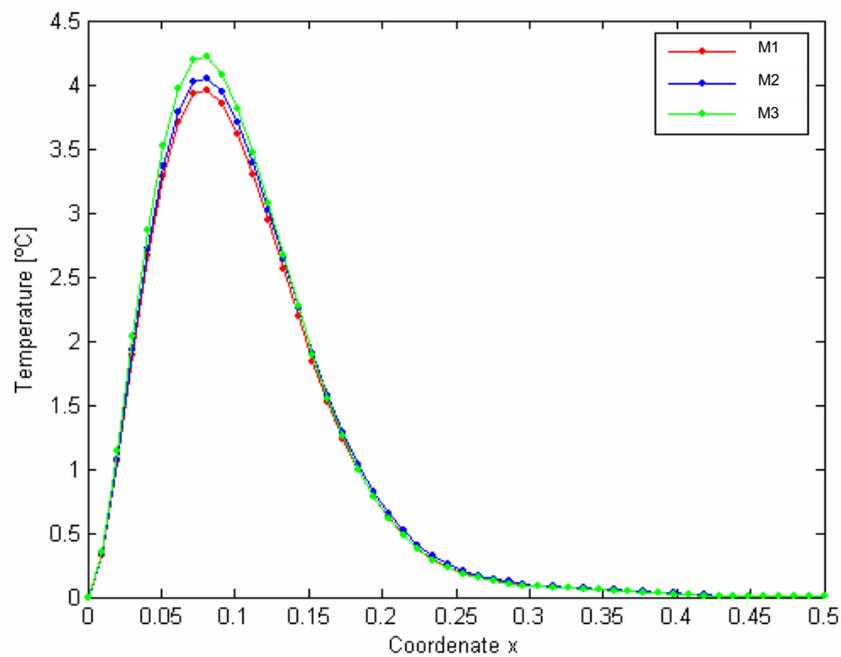


Figura 4.19: Variância para polinômios Askey de ordem 3 através de Monte Carlo.

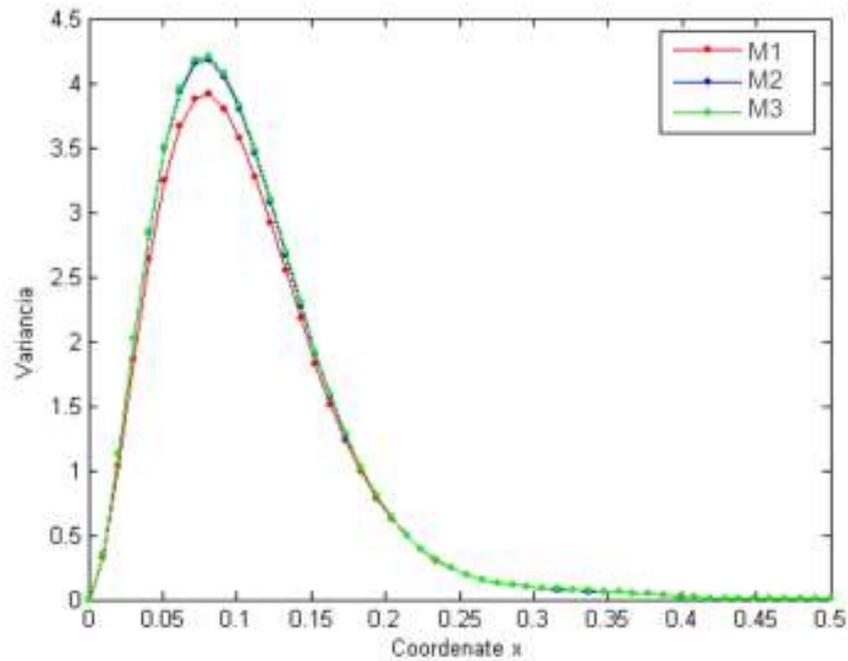


Figura 4.20: Variância para polinômios de ordem 3 através da simulação Galerkin-Caos.

4.2.3 Conclusão

Neste capítulo é feita uma análise da distribuição da temperatura em um problema estocástico de condução de calor através das teorias de Monte Carlo-KL e Galerkin Wiener-caos. Enquanto a primeira teoria possibilita determinar a distribuição de temperatura mediante um dado número de simulações, o que em alguns casos pode ser um obstáculo devido ao alto número de simulações requeridas para uma boa aproximação, a segunda gera o resultado levando em consideração o número de variáveis randômicas.

Neste capítulo os resultados obtidos para o problema unidimensional, nos quais foram incluídos um termo randômico, a condutividade térmica, para os casos em que $m = 2$, $m = 3$ e $m = 4$, foi possível obter uma boa aproximação comparando-se com o caso determinístico. A condutividade térmica, que foi suposta como randômica, também apresentou valores muito próximos das constantes usadas em problemas determinísticos.

O algoritmo proposto nesta dissertação mostrou-se bastante satisfatório tanto para o problema determinístico quanto para o problema estocástico de condução de calor em

uma aleta.

Capítulo 5

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um procedimento numérico para obter soluções aproximadas, via método de Galerkin, para o problema de condução estocástica de calor. A incerteza está sobre o coeficiente de condutividade térmica e foi modelada através de um processo estocástico. A série KL foi utilizada para representar o processo estocástico da incerteza. O problema integral de autovalores, necessário para determinar as autofunções da série KL, foi formulado à luz do cálculo das variações. Para este fim, foi utilizado o método de Rayleigh-Ritz. As soluções aproximadas foram estabelecidas em um espaço produto, construído a partir do produto tensorial entre subespaços densos em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $H_0^1(D)$. O método de Monte Carlo foi utilizado para avaliar as soluções aproximadas obtidas via método de Galerkin, através da comparação dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem do campo randômico de temperaturas. No método de Monte Carlo a série KL foi utilizada para representar o campo randômico de condutividade térmica. Para ortonormalização das variáveis randômicas geradas em cada amostra, empregou-se o processo de Gram-Schmidt. Nos exemplos numéricos resolvidos avaliou-se a aproximação das estatísticas do campo randômico de temperaturas em detrimento de diferentes níveis de discretização. Através da observação dos gráficos das Fig. 4.16-17 constata-se que a aproximação entre os momentos estatísticos obtidos via Galerkin e pelo método de Monte Carlo, para o campo randômico de temperatura,

mostrou-se satisfatória, para os padrões de engenharia.

No decorrer deste trabalho, devido as dificuldades encontradas e aos progressos realizados, sugere-se uma série de desenvolvimentos futuros. São eles:

- Uma análise de problemas térmicos para o caso não-linear 1D e 2D;
- Admitir a existência de incerteza sobre outras propriedades termofísicas e termo fonte;
- Utilizar para modelagem da incerteza outros tipos de variáveis randômicas, com suporte limitado, tais como beta, gama, entre outras;
- Investigar outras séries de funções para representação da incerteza;
- Utilizar o método dos elementos finitos para construção do espaço para soluções numéricas;
- Na representação da incerteza através de séries de funções utilizar o esquema Askey-Wiener para representar as variáveis randômicas existentes na série proposta.

É importante mencionar que os métodos e os resultados teóricos apresentados integram uma linha de pesquisa altamente promissora, do ponto de vista científico. Pode-se observar, através da revisão bibliográfica a participação de pesquisadores consolidados na área de mecânica computacional. As técnicas matemáticas empregadas neste trabalho, estão presentes nos trabalhos mais recentes na área de análise estocástica aplicada em engenharia.

Bibliografia

- [1] ADAMS, R. – **Sobolev Spaces** – New York, Academic Press, 1975
- [2] ADHIKARI, S. – Modal Analysis of Linear Asymmetric non Conservative Systems – **Journal of Engineering Mechanics**, 125, pp. 1372-1379, December, 1999.
- [3] ARAÚJO, J.M.; AWRUCH, A.M. – On Stochastic Finite Elements for structural analysis – **Computers and Structures**, v.52, n. 3, pp. 461-460, 1994.
- [4] ÁVILA, C.R. da S. – **Aplicação do Método de Galerkin em Problemas Estocásticos de Flexão de Placas de Kirckhoff** – Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- [5] ÁVILA, C. R. da S.; ZAMBALDI, M.C., – Estimativas para os Momentos Estatísticos de Primeira e Segunda Ordem da Resposta de um Sistema Estocástico – **CNMAC**, São Paulo, 2005.
- [6] ÁVILA, C. R. da S., TASCETTO, M. P., ALVES, M.K. – Utilização da série de Neumann para obtenção dos momentos estatísticos da solução de sistemas estocásticos: aplicações – **IV COMEN**, 2006.
- [7] ÁVILA, C. R. da S., TASCETTO, M. P., – Utilização da série de Neumann para obtenção dos momentos estatísticos da solução de sistemas estocásticos: estimativas – **IV COMEN**, 2006.

- [8] BABUSKA, I.M.; Tempone, R.; Zouraris, G. E. – Galerkin Finite Element Approximations of Stochastic Elliptic Differential Equations – **TICAM**, Report 02-38, November, 2002.
- [9] BAKER, G., – **The Numerical Treatment of Integral Equations** –, Oxford, England: Clarendon Press, pp. 358-360, 1977.
- [10] CAMERON, R.H.; MARTIN, W.T. – The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals – **Annals Mathematics**, n. 48, p. 385-392, 1947.
- [11] CHAKRABORTY, S.; BHATTACHARYYA, B. – An Efficient 3D Stochastic Finite Element Method – **International Journal of Solids and Structures**, **39**, pp.2465–2475, 2002.
- [12] CHANTASIRIWAN, S. – Error and variance of solution to the stochastic heat conduction problem by multiquadric collocation method – **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 33, pp.342–349, 2006.
- [13] CHANG, C.H.; TUNG, Y.K.; YANG, J.C. – Monte Carlo Simulation for Correlated Variables with Marginal Distributions – **Journal Hydr. Engrg.**, 120, pp.313-331, 1994.
- [14] CHOI, S.K., GRANDHI, R.V., CANFIELD, R.A. – Structural reliability under non-Gaussian stochastic behavior – **Computers and Structures**, Vol. 82 pp 1113–1121, 2004.
- [15] CINLAR, E. – Introduction to Stochastics Processes – New Jersey, 1975.
- [16] DEB, M.K.; BABUSKA, I.M.; ODEN, J.T. – Solution of Stochastic Partial Differential Equations Using Galerkin Finite Element Techniques – **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 190, pp.6359-6372, 2001.
- [17] ELMAN, H.C., ERNST O.G., O'LEARY, D.P. – Efficient iterative algorithms for the stochastic finite element method with application to acoustic scattering – **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** Vol. 194 pp 1037–1055, 2005.

- [18] FELLER, W. – **Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações** – São Paulo, Edgar Blucher, 1976.
- [19] GHANEM, R. – Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation – **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 168, pp. 19-33, 1999.
- [20] GHANEM, R.; SPANOS, P. – **Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach** – Berlin, Springer, 1991.
- [21] GHANEM, R. – Stochastic Finite Elements for Heterogeneous Media with Multiple Random non-Gaussian Properties – **ASCE J. Eng. Mech.**, v. 125, pp. 26-40, 1999.
- [22] GHANEM, R. – Ingredients for a General Purpose Stochastic Finite Element Formulation – **Comp.Meth. Appl. Mech. Eng.**, v.168, pp. 19-34, 1999.
- [23] GHANEM, R.G., KRUGER, R.M. – Numerical solution of spectral stochastic finite element systems – **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** , Vol 129, pp 289-3003, 2003.
- [24] GOLUB, G.H.; VAN LOAN, C.F., – **Matrix Computation** – North Oxford Academic Publ. Co. Ltd., 1983, pp.476.
- [25] GHOSH, D.; SAHA, P.; CHOWDHURY, A.R., –On synchronization of a forced delay dynamical system via the Galerkin approximation – **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v.12, pp. 928–941, 2007.
- [26] GRAY, R.M. – **Probability, Random Processes, and Ergodic Properties** – Springer-Verlag Heidelberg New York, 2000.
- [27] HOVER, F.S.; TRIANTAFYLLOU, M.S. – **Application of Polynomial Chaos in Stability and Control** – **Automatic** 42, pp. 789-795, 2006.
- [28] HUGHES, T.J.R., – **The finite Element Method, Linear Static and Dinamic Finite element Analysis** – Prentice Hall, New Jersey, 1987.
- [29] ITÔ, K., – **Stochastic Processes** – Springer , Verlag Heidelberg New York, 2000.

- [30] KAMINSKI, M., HIEN, T. D., – Stochastic Finit Element Modeling of Transient Heat Transfer in Layered Composites – **Int. Comm. Heat Mass Transfer**, Vol.26, No. 6, pp. 801-810, 1999.
- [31] KAST, W. – Solution of heat transfer problems for stochastic boundary conditions – **International Journal of Thermal Sciences**, v. 43, pp. 1025–1036, 2004.
- [32] KLEIBER, M. Hien, T.D., – **The Stochastic Finit Element Method** – Wiley, New York, 1992.
- [33] KUNITA, H., – Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms – **Ecole d’Et’e de Prob. de Saint Flour XII**, Lecture Notes in Mathematics 1097, 143-303. Springer, Berlin 1984.
- [34] KUNITA, H., – **Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations** – Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- [35] LEI, Z., QIU, C., – Neumann Dynamic Stochastic Finite Element Method of Vibration for Structures with Stochastic Parameters to Random Excitation – **Computers and structures**, 651-657, 2000.
- [36] MANAS, K., BABUSKA, I.M. and ODEN, J.T. – Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques – **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** , Vol 190, pp 6359-6372, 2001.
- [37] MATTHIES, H.G.; KEESE, A. – Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations – **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v.194, pp.1295–1331, 2005.
- [38] MUSCOLINO, G.; RICCIARDI, G.; CACCIOLA, P. –Monte Carlo Simulation in the Stochastic Analysis of non-linear Systems under External Stationary Poisson white noise Input – **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 38 , pp. 1269 – 1283, 2003.

- [39] NARAYANAN, V.A.B, ZABARAS, N. – Stochastic Inverse Heat Conduction Using a Spectral Approach – **International journal for Numerical Methods in Engineering**, 60/7, pp 1-24, 2004.
- [40] NICOLAI, B.M; BAERDEMAEKER J.D. – A variance propagation algorithm for the computation of heat conduction under stochastic conditions – **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 31, pp.0402- 0419, 1999.
- [41] OKSENDAL, B., – **Stochastic Differential Equations** – Springer-Verlag Heidelberg New York, 2000.
- [42] OLSSON, A.M.J. ; SANDBERG, G.E., – Latin Hypercube Sampling for Stochastic Finite Element Analysis – **Journal of Engineering Mechanics**, Vol. 128, pp. 121-125, 2002.
- [43] PAPOULIS, A. – **Probability, Random Variables and Stochastic Processes** – McGraw-Hill, New York, 1976.
- [44] RUDIN,W., – **Real and Complex Analysis** –, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1987.
- [45] SACHDEVA, S.K.; NAIR, P.B; KEANE, A.J., – Hybridization of stochastic reduced basis methods with polynomial chaos expansion – **Probabilistic Engineering Mechanics**, v.21 pp. 182–192, 2006.
- [46] SAMPAIO, R.; WOLTER, C. – Bases de Karhunen-Loève: aplicações aos à Mecânica dos Sólidos – **APLICON 2001**, São Carlos, 2001.
- [47] SOONG, T.T., – **Random Differential Equations in Science and Engineering** – Academic Press, Incorporated, Jul., 1973.
- [48] SPANOS, P. D.; GHANEM, R., – Stochastic finite element expansion for media random – **Journal Engineering Mechanics**, v. 125, n. 1, p. 26-40, 1989.
- [49] TEMPONE, R.; BABUSKA, I.; ZOURARIS, G.E. – Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method: the stochastic

- formulation – **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 194, pp. 1251–1294, 2000.
- [50] TRICOMI, F.G., – **Integral Equations** – Interscience, New York, 1957.
- [51] TUMER, I.Y., – Monitoring of Manufacturing Signals Using the Karhunen-Loève Transform – **ASME Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, Vol. 122, pp. 208–213, August 2000.
- [52] WILLIAMS, M.M.R. – Polynomial Chaos Function and Stochastic Differential equations – **Annals of Nuclear Energy**, v.33, pp. 774–785, 2006.
- [53] WOLTER, C. – **Uma Introdução a Redução de Modelos Através da Expansão de Karhunen-Loève** – Dissertação de Mestrado, Dept. Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.
- [54] XIU, D.; KARNIADAKIS, G.E. – Modeling Uncertainty in Flow Simulations – **Submitted to Journal of Computational Physics**, Fevereiro, 2001.
- [55] XIU, D.; KARNIADAKIS, G.E. – Modeling Uncertainty in Fow Simulations Via Generalized Polynomial Chaos – **J. Comput. Phys.**, to appear, 2002.
- [56] XIU, D; KARNIADAKIS, G.E. – The Wiener-Askey Polynomila Chaos for Stochastic Differential Equations – **SIAM Journal on Scientific Computing**, 24, pp. 619-644, 2002.
- [57] XIU, D.; KARNIADAKIS, G.E. – A New Stochastic Approach to Transient Heat Conduction Modeling with Uncertainty – **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v.46, pp. 4681-4693, 2003.
- [58] XU, X.F. – A multiscale stochastic finite element method on elliptic problems involving uncertainties – **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, V.196, pp.2723–2736, 2007.

- [59] YAMAZAKI, F.; SHINOZUKA, M.; DASGUPTA, G., – Neumann expansion for stochastic finite element analysis – **Journal of Engineering Mechanics**, v. 114, n. 8, ago, pp. 1335-1354, 1988.

Apêndice A

Espaços de Sobolev

A.1 Notação

Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n com contorno Γ .

Seja o operador diferencial

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = D_i, (1 \leq i \leq n)$$

e se $j = (j_1, \dots, j_n)$ é um multi-índice, escreve-se o operador diferencial como

$$D^j = D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n} = \frac{\partial^{[j]}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}},$$

onde $[j] = (j_1, \dots, j_n)$.

A.2 Espaços de Sobolev

Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n . Denota-se $L^p(D)$, $1 < p < +\infty$ (ou $L^\infty(D)$), o espaço de funções reais p -ésima absolutamente integráveis definidas em Ω , para a medida de Lebesgue $dx = dx_1, \dots, dx_n$. Este é o espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(D)} = \left(\int_D |u(x)|^p \right)^{1/p} \quad \text{ou} \quad \|u\|_{L^\infty(D)} = \text{ess. sup}_D |u(x)|$$

No caso de $p = 2$, $L^2(D)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v) = \int_D u(x)v(x)dx$$

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(D)$ é o espaço de funções em $L^p(D)$ com derivadas de ordem superior ou igual à m em $L^p(D)$, sendo m um número inteiro e $1 < p < \infty$. Este é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(D)} = \left(\sum_{|j| \leq m} \|D^j u\|_{L^p(D)}^p \right)^{1/p}$$

No caso de $p = 2$, $W^{m,2}(D) = H^m(D)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$((u, v))_{H^m(D)} = \sum_{|j| \leq m} (D^j u, D^j v)$$

Seja $\mathcal{D}(D)$ ou $\mathcal{D}(\bar{D})$ o espaço de funções C^∞ com suporte compacto contido em D (ou \bar{D}). O fecho de $\mathcal{D}(D)$ em $W^{m,p}(D)$ é denotado por $W_0^{m,p}(D)$ ($H_0^m(D)$ quando $p = 2$).

Apêndice B

Espaço Métrico

Para introduzir os espaços de Hilbert, é necessário o conceito de espaços métricos, os quais admitem duas importantes classificações entre outras possíveis: eles podem ser completos ou incompletos e separáveis ou não. Além disso, serão apresentadas algumas definições básicas da teoria de conjuntos, essenciais á descrição dos espaços métricos.

Um espaço métrico é um par $(X; d)$, sendo X um conjunto e d uma métrica em X , isto é, uma função definida em $X \times X$ tal que para todos $x; y; z \in X$ temos os seguintes axiomas:

1. d é real, finita e não-negativa.
2. $d(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $d(x; y) = d(y; x)$.
4. $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$.

O último axioma também é conhecido como desigualdade triangular, uma vez que pode-se fazer uma analogia com a geometria elementar que garante que o lado de um triângulo nunca será maior que a soma dos outros dois.

O espaço Euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 com o qual estamos habituados é um espaço métrico. Dados dois elementos $x = (x_1; x_2; x_3)$ e $y = (y_1; y_2; y_3)$, temos que a métrica definida por

$$d(x; y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \quad (\text{B.1})$$

atende aos quatro axiomas.

Apresentaremos, a seguir uma série de definições necessárias para caracterização da separabilidade de um espaço métrico.

Uma ε -vizinhança de um ponto x_0 de um espaço métrico X é o conjunto aberto

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

$B(x_0; \varepsilon)$ comumente chamado de bola aberta com centro x_0 e raio ε . Uma vizinhança é qualquer subconjunto de X (aberto ou fechado) contendo uma ε -vizinhança de x_0 .

Seja M um subconjunto de um espaço métrico X . Um ponto x_0 de X (que pode ou não estar em M) é dito um ponto de acumulação de M se toda vizinhança de x_0 contiver pelo menos um ponto $y \in M$ diferente de x_0 . O conjunto de todos os pontos de acumulação de M é chamado de fecho de M e denotado por \overline{M} .

Quando $\overline{M} = X$ então M é dito denso em X . Por fim, X é dito separável se possuir um subconjunto enumerável que seja denso em X . Subconjunto enumerável, é um subconjunto finito ou, então, um subconjunto infinito sobre o qual é possível estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais \mathbb{N} .

Uma outra definição muito importante e essencial para a definição de espaços de Hilbert é a de espaço métrico completo. Para defini-lo, são necessários os conceitos de seqüências convergentes e de Cauchy.

Uma seqüência $\{x_n\}$ em um espaço métrico $X = (X; d)$ é dita convergente se existe um $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

sendo x o limite da seqüência $\{x_n\}$.

Uma seqüência $\{x_n\}$ em um espaço métrico $X = (X; d)$ é dita de Cauchy se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe um $N(\varepsilon)$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \forall m, n > N$$

O espaço X é dito completo se toda sequência de Cauchy em X converge.

Apêndice C

Espaço de Hilbert

Definição Um espaço de Hilbert é um espaço de vetores de V com um produto escalar satisfazendo 1 - 2 que é completo como um espaço normalizado (ou seja., é um espaço de Banach).

$$1. (a^1u^1 + a^2u^2, v) = a^1(u^1, v) + a^2(u^2, v),$$

$$2. (u, a^1v^1 + a^2v^2) = a^1(u, v^1) + a^2(u, v^2),$$

$$3. (u, v) = (v, u)$$

$$4. (u, u) = 0, (u, u) = 0 \implies u = 0$$

C.1 Espaços produto interno e de Hilbert

Um espaço produto interno nada mais é do que um espaço vetorial X com um produto interno definido em X . Um espaço de Hilbert \mathcal{H} é um espaço produto interno completo (na métrica induzida pelo produto interno). Um produto interno em X é um mapa com domínio $X \in X$ e contra-domínio no campo escalar K determinado por X , isto é, a cada par de vetores x e y tem-se um escalar associado o qual é escrito como $\langle x, y \rangle$ e chamado de produto interno de x e y . Para todos os vetores x, y, z e escalares α , o produto interno

$$1. \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$2. \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$3. \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$4. \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Um produto interno em X define a seguinte norma também em X

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

e uma métrica em X dada por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (\text{C.1})$$

O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é um espaço de Hilbert com produto interno (também chamado de produto escalar) definido por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

e cuja norma pode ser obtida a partir de

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

A métrica obtida a partir de (C.1) já foi mostrada em (B.1).

Um dos conceitos mais importantes obtidos da definição de espaço produto interno é o de ortogonalidade.

Um elemento x de um espaço produto interno X é dito ortogonal a um elemento $y \in X$ se

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0,$$

situação onde também escrevemos $x \perp y$. Um conjunto ortogonal Q em um espaço produto interno X é um subconjunto $Q \subset X$ cujos elementos são ortogonais aos pares. Um conjunto ortonormal $Q \subset X$ é um conjunto ortogonal cujos elementos possuem norma unitária, isto é, para os vetores $x; y \in P$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 1, & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Conjuntos ortonormais de interesse em espaços de Hilbert são aqueles que contêm um número suficiente de elementos, de maneira que todo elemento do espaço possa ser representado ou aproximado com a devida precisão através do uso deste conjunto. Para isso, define-se um conjunto ortonormal total P em um espaço de Hilbert \mathcal{H} como aquele capaz de gerar um conjunto com todas as combinações lineares de seus elementos (denotado por $\overline{\text{ger}\{P\}}$) que é denso em \mathcal{H} , ou seja,

$$\overline{\text{ger}\{P\}} = \mathcal{H}$$

C.2 Espaços de Hilbert Isomorfos

Um importante exemplo de um espaço de Hilbert é o espaço denotado por $\mathcal{L}_2^n(D)$ cujos elementos são funções vetoriais (reais ou complexas) satisfazendo

$$\mathbf{f} \in \mathcal{L}_2^n(D) \implies \int_D \|\mathbf{f}(x)\|^2 dx < \infty$$

e com produto interno definido por

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_D f_j(\mathbf{x}) \bar{g}_j(\mathbf{x}) dx$$

sendo $j = 1, \dots, \dim \mathcal{L}_2^n(D)$.

Uma variável aleatória x é dita derivada de uma operação linear sobre um processo estocástico de segunda ordem $\{X(t)\}$ se $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i X(t_i)$ ou se x é o limite na média quadrática de uma sequência de combinações lineares como esta. A coleção de todas as aleatórias derivadas desta forma de um dado processo $\{X(t)\}$ é um espaço de Hilbert de dimensão infinita que será denotado por \mathcal{H}_x e com produto interno dado por

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_x} = E[x\bar{y}]$$

A fim de definirmos o que são espaços de Hilbert isomórficos, é necessário o conceito de operadores lineares. Um operador linear \mathbf{T} é um mapeamento com as seguintes propriedades:

1. O domínio $D(\mathbf{T})$ de \mathbf{T} é um espaço vetorial e a imagem $I(\mathbf{T})$ pertence a um espaço vetorial sobre o mesmo campo.
2. Para quaisquer vetores \mathbf{x}, \mathbf{y} pertencentes a $D(\mathbf{T})$ e escalares α , temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{y} \\ \mathbf{T}(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha\mathbf{T}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Um isomorfismo de um espaço de Hilbert \mathcal{H} em um espaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$ sobre um mesmo campo é um operador linear bijetivo $\mathbf{T}:\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ tal que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$,

$$\langle \mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Como \mathbf{T} é linear, ele preserva a estrutura do espaço vetorial e, portanto, \mathbf{T} é também uma isometria (preserva distâncias). Por isso e pela bijetividade de \mathbf{T} , segue que \mathcal{H} e $\tilde{\mathcal{H}}$ são indistinguíveis tanto métrica quanto algebricamente. São o mesmo espaço, a não ser pela natureza dos seus elementos.

Apêndice D

Teoremas

D.1 Teorema de Cameron-Martin

Seja \bar{H} definido como

$$\bar{H}(t) \triangleq 2^{-\frac{n}{2}} H_n \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

Sendo H_n o n -ésimo polinômio de Hermite, $H_n \triangleq (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$, $n \geq 0$ então a coleção

$$\left\{ \xi_\alpha \triangleq \prod_{k,l} \left(\frac{\bar{H}_{\alpha_k^1}(\xi_{kl})}{\sqrt{2}} \right), \alpha \in J \right\}$$

é um sistema ortonormal em $L^2(\Theta, \mathcal{F}, P)$.

D.2 Teorema de Mercer

Teorema de Mercer: (Ávila, 2004) Seja $Cov \in L^2(\Omega)$, simétrica e contínua com autovalores positivos, então a série $\sum \lambda_i \phi_i(x) \phi_i(y)$, converge de forma absoluta e uniforme para C_v

$$Cov = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x) \phi_i(y), \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

com

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

e $\{\lambda_i, \phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ os autovalores e as autofunções, respectivamente, e δ_{ij} o delta de Kronecker.

Seja v um camo randômico estacionário com função covariância, C_v , possuindo as seguintes propriedades

1. $\mu_v = c$
2. $C_v(x, x + \tau) = C_v(\tau)$

Para $\tau \in \mathbb{R}^n$ a função covariância possui as seguintes propriedades:

3. $C_v(0) = \sigma^2$
4. $C_v(\tau) = \overline{C}_v(\tau)$

Para utilizar os resultados do teorema de Mercer, a função covariância deve atender as seguintes hipóteses do teorema.

1. A função $C_v \in L^2(\Omega)$ é simétrica;
2. A função covariância é contínua;
3. Todos os autovalores são positivos.

O teorema de Mercer é uma representação de uma função positiva definida simétrica sobre uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitada através de uma soma de uma sequência convergente de um produto de funções. Este teorema fornece um resultado importante para a teoria de espaços de Hilbert (apêndice), para processos estocásticos através da série Karhunen-Loève. Para apresentar o Teorema de Mercer, faz-se uso de um caso especial importante; veja abaixo uma formulação mais geral.

Um núcleo de funções contínuas que mapeia

$$K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$K(x, s) = K(s, x)$$

diz-se que K é não negativa definida se

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K(x_i, x_j) c_i c_j \geq 0$$

para toda sequência finita de ponto de x_1, \dots, x_n em $[a, b]$ e todo número real escolhido c_1, \dots, c_n . (Cf. positive-definite function.)

Associado ao operador linear K na função definida pela integral

$$[T_K \phi](x) = \int_a^b K(x, s) \phi(s) ds$$

Por considerações técnicas assume-se que φ é o comprimento do espaço $L_2[a, b]$ of square-integrable real-valued functions. Visto que T é um operador linear, pode-se falar sobre os autovalores e autofunções de T .

Teorema: Supondo que K é um núcleo simétrico não-negativo definido contínuo. Então existe uma base ortogonal $\{e_i\}_i$ de $L_2[a, b]$ que consiste em autofunções de T_K tal que a sequência correspondente de autovalores $\{\lambda_i\}_i$ é não-negativa. As autofunções correspondentes aos autovalores não-nulos são contínuas em $[a, b]$ e, K tem a seguinte

representação

$$K(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(s) e_j(t)$$

onde a convergência é absoluta e uniforme.