

GUILHERME HOLSBACH COSTA

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO
ALGORITMO LMS APLICADO À
RECONSTRUÇÃO DE VÍDEO COM
SUPER-RESOLUÇÃO**

**FLORIANÓPOLIS
2007**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO
ALGORITMO LMS APLICADO À
RECONSTRUÇÃO DE VÍDEO COM
SUPER-RESOLUÇÃO**

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

GUILHERME HOLSBACH COSTA

Florianópolis, julho de 2007.

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO ALGORITMO LMS APLICADO À RECONSTRUÇÃO DE VÍDEO COM SUPER-RESOLUÇÃO

Guilherme Holsbach Costa

‘Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de *Doutor em Engenharia Elétrica*, área de concentração em *Comunicações e Processamento de Sinais*, sendo aprovada em sua forma final pelo programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

Prof. José Carlos Moreira Bermudez, Ph.D.
Orientador

Prof^a. Kátia Campos de Almeida, Ph.D.
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Banca Examinadora

Prof. José Carlos Moreira Bermudez, Ph.D.
Presidente

Prof. Joceli Mayer, Ph.D.

Prof. Leonardo Silva Resende, D.Sc.

Prof. Marcelo Ricardo Stemmer, Dr.

Nelson Delfino D’Ávila Mascarenhas, Ph.D.

Vitor Heloiz Nascimento, Ph.D.

*Esta tese, em seu sentido
mais amplo, é dedicada à
Clarissa Giuliani Scherer.*

Agradecimentos

Ao Prof. José Carlos Moreira Bermudez, pela orientação impecável a qual atribuo a minha formação de pesquisador e o sucesso deste trabalho.

Aos colegas do LPDS, pelo excelente relacionamento e pelas discussões que muito contribuíram para o andamento desta tese.

Aos colegas Cássio Lopes, Luís Cléber Marques, Orlando Tobias, e Paulo Borges, pelo incentivo profissional, pela amizade e pelo companheirismo.

Às minhas mãe e irmã, e ao meu irmão, sem necessidade de listar razões.

À Elena, por tanto que a quero bem.

Aos amigos Kelerson Lopes e Lisandre Pontes, mais uma vez.

A Alessandro Lima, Felipe Santos e Leandro Sobreiro, por tanto que me têm ensinado; pelo exemplo de pessoa e de comportamento que me foram durante estes quatro anos de doutorado.

Aos amigos Felipe Oliveira e Verônica Kemmelmeier, pelo carinho.

Ao Ivanoi e à Carmem, e às famílias Giuliani e Scherer, pelo acolhimento e incentivo.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DO ALGORITMO LMS APLICADO À RECONSTRUÇÃO DE VÍDEO COM SUPER-RESOLUÇÃO

Guilherme Holsbach Costa

Julho/2007

Orientador: José Carlos Moreira Bermudez, Ph.D.

Área de concentração: comunicações e processamento de sinais.

Palavras-chave: processamento de imagens, filtragem adaptativa, super-resolução, LMS, erros de registro.

Número de Páginas: 97.

RESUMO:

A reconstrução com super-resolução (SRR) de imagens consiste basicamente em combinar diversas imagens de baixa-resolução de uma mesma cena para formar uma imagem com resolução mais alta. Para isso, a posição relativa entre as imagens precisa ser geralmente estimada (registro). As principais características dessa técnica são a elevada sensibilidade a erros de registro, a dificuldade de modelagem dos sinais de imagem, o mau condicionamento do problema de SRR, e o elevado custo computacional. Dentre os algoritmos existentes na literatura, o LMS-SRR oferece grande vantagem computacional, uma qualidade importante para processamento em tempo-real. Entretanto, algoritmos adaptativos como os da família LMS carecem de modelos teóricos de comportamento quando aplicados a SRR, um requisito para que seus parâmetros possam ser projetados de forma eficiente. Neste trabalho, um modelo analítico para o comportamento estocástico do LMS-SRR é proposto. Equações recursivas são derivadas para os erros médio e quadrático médio de reconstrução, como funções dos erros de registro. Diretrizes específicas para o projeto dos parâmetros do algoritmo são propostas. Importantes conclusões acerca do efeito do passo de convergência no desempenho do algoritmo são apresentadas. Por fim, contrário ao que é tradicionalmente assumido em SRR, é mostrado que um nível moderado de erro de registro pode ser benéfico ao desempenho do algoritmo, dependendo da implementação. Nesses casos, os erros de registro podem contribuir para a redução da complexidade computacional, evitando a necessidade de um termo de regularização.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

STUDY OF THE BEHAVIOR OF THE LMS ALGORITHM APPLIED TO SUPER-RESOLUTION VIDEO RECONSTRUCTION

Guilherme Holsbach Costa

July/2007

Advisor: José Carlos Moreira Bermudez, Ph.D.

Area of concentration: communications and signal processing.

Keywords: image processing, adaptive filtering, super-resolution, LMS, registration errors.

Number of pages: 97.

ABSTRACT:

The super-resolution image reconstruction (SRR) consists basically of combining multiple low resolution images of the same scene to form a higher resolution image. To achieve the SRR, the relative position between the images has usually to be estimated (registration). The main characteristics of this technique are the high sensitivity to the registration errors, the difficulty in modeling the image signals, the ill-posed characteristic of the SRR problem, and the high computational cost. Among the algorithms available in the literature, the LMS-SRR offers great computational advantage, an important quality for real time signal processing. However, adaptive algorithms from the LMS family lack theoretical behavior models when applied to SRR, a requirement for a proper design of their parameters. In this work an analytical model for the stochastic behavior of the LMS-SRR is proposed. Recursive equations are derived for the mean and mean square reconstruction errors, as functions of the registration errors. Specific guidelines to the design of the algorithm parameters are proposed. Important conclusions about the effect of the step-size on the algorithm performance are presented. Finally, contrary to what is traditionally assumed in SRR, it is shown that a moderate level of registration error may be beneficial for the performance of the LMS-SRR algorithm, depending on the implementation. In these cases, the registration errors can contribute for reducing even more the computational complexity of this algorithm by avoiding the need for regularization.

Sumário

| | |
|---|-------------|
| Lista de Figuras | x |
| Lista de Tabelas | xiii |
| Lista de Símbolos | xiv |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Princípio Básico | 3 |
| 1.2 Reconstrução de Vídeo <i>versus</i> Erros de Modelagem | 4 |
| 1.3 Organização do Trabalho | 7 |
| 2 O Algoritmo LMS Aplicado à Super-Resolução | 8 |
| 2.1 Nomenclatura e Notação | 8 |
| 2.2 A Reconstrução com Super-Resolução | 9 |
| 2.2.1 Modelo de aquisição | 9 |
| 2.2.2 Modelo da dinâmica do sinal | 10 |
| 2.2.3 A matriz de registro e as <i>condições de fronteira</i> | 11 |
| 2.2.4 Caracterização da matriz de registro | 12 |
| 2.2.5 A reconstrução | 16 |
| 2.3 A Função Custo | 17 |
| 2.4 Método do Gradiente (<i>Steepest Descent</i>) | 19 |
| 2.5 O Algoritmo LMS-SRR | 20 |
| 2.6 Resumo | 20 |
| 3 Análise do Algoritmo LMS-SRR | 21 |
| 3.1 O Erro de Reconstrução | 22 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.2 | Hipóteses e Aproximações Estatísticas | 23 |
| 3.3 | Comportamento do Erro Médio de Reconstrução | 25 |
| 3.4 | Comportamento do Erro Quadrático Médio de Reconstrução | 25 |
| 3.4.1 | Caracterização estatística da matriz de registro estimada | 28 |
| 3.4.2 | Implementação do modelo | 32 |
| 3.5 | Resultados | 34 |
| 3.5.1 | Condições gerais | 35 |
| 3.5.2 | Exemplo 1 | 36 |
| 3.5.3 | Exemplo 2 | 37 |
| 3.5.4 | Exemplo 3 | 39 |
| 3.6 | Resumo | 44 |
| 4 | Projeto do Algoritmo LMS-SRR | 45 |
| 4.1 | Análise Estatística | 45 |
| 4.1.1 | Hipóteses e aproximações estatísticas | 45 |
| 4.1.2 | Comportamento do erro quadrático médio de reconstrução | 46 |
| 4.2 | Escolha dos Parâmetros do Algoritmo LMS-SRR | 47 |
| 4.2.1 | Escolha de μ e K | 49 |
| 4.3 | Resultados | 50 |
| 4.3.1 | Condições gerais | 51 |
| 4.3.2 | Exemplo 1: avaliação da análise teórica | 51 |
| 4.3.3 | Exemplo 2: robustez às inovações | 52 |
| 4.3.4 | Exemplo 3: robustez ao erro de registro | 55 |
| 4.3.5 | Exemplo 4: seqüências reais | 55 |
| 4.4 | Resumo | 58 |
| 5 | Regularização via Erros de Registro | 59 |
| 5.1 | O Algoritmo LMS-SRR Regularizado | 59 |
| 5.1.1 | Custo computacional | 60 |
| 5.2 | Estudo do Comportamento do R-LMS-SRR | 61 |
| 5.2.1 | Hipóteses e aproximações estatísticas | 61 |
| 5.2.2 | Comportamento do erro quadrático médio de reconstrução | 62 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.3 | Análise | 62 |
| 5.4 | Resultados | 65 |
| 5.4.1 | Exemplo 1 | 66 |
| 5.4.2 | Exemplo 2 | 67 |
| 5.5 | Resumo | 69 |
| 6 | Conclusão | 70 |
| 6.1 | Principais Conclusões | 70 |
| 6.2 | Outras Contribuições | 71 |
| 6.3 | Artigos Gerados por esta Tese | 72 |
| 6.4 | Trabalhos Futuros | 73 |
| A | Momentos Estatísticos de $\hat{\mathbf{G}}(t)$: Deduções Matemáticas | 76 |
| A.1 | Definição 1 | 76 |
| A.2 | Definição 2 | 78 |
| B | Comportamento de $\mathbf{A}(t)$ | 81 |
| B.1 | Efeito de $\mu\mathbf{C}^T\mathbf{C}$: | 81 |
| B.2 | Efeito de $\mu\mathbf{H}^T(t)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{H}(t)$: | 85 |
| B.3 | Efeito de $\mathbf{A}(t)$: | 87 |
| C | Efeito dos Erros de Registro no Algoritmo R-LMS-SRR | 89 |
| | Glossário | 91 |
| | Referências Bibliográficas | 92 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Modelo básico de reconstrução com super-resolução. | 4 |
| 1.2 | Exemplos de resultados de reconstrução. | 5 |
| 1.3 | Exemplos de resultados de reconstrução. | 6 |
| 2.1 | Exemplo da dinâmica do sinal. | 11 |
| 2.2 | Exemplos de uma imagem deslocada por uma matriz de registro, considerando diferentes condições de fronteira. | 13 |
| 2.3 | Exemplo de movimento global considerando deslocamento em passos inteiros. | 14 |
| 2.4 | Exemplo de movimento global considerando deslocamento com passos fracionários. | 15 |
| 2.5 | Função $h[d, \Delta(t)]$ | 16 |
| 2.6 | Representação do valor esperado. | 19 |
| 3.1 | Histograma de $\mathbf{r}(t)$ | 24 |
| 3.2 | Matriz de correlação $\mathbf{R}_r(t)$ | 24 |
| 3.3 | Regiões de uma cena (assumida com periodicidade circular), no instante de tempo $t - 1$, que pode (regiões A e B) ou não (região C) conter pixels de $\mathbf{X}(t)$. | 31 |
| 3.4 | Evolução do MSRE. Imagens HR com 32×32 pixels, $K = 4$, $\mu = 0, 1$ | 37 |
| 3.5 | Evolução do MSRE. Imagens HR com 64×64 pixels, $K = 4$, $\mu = 0, 1$ | 38 |
| 3.6 | Erro médio de reconstrução. Imagens HR com 32×32 pixels, $K = 4$, $\mu = 0, 1$. | 40 |
| 3.7 | Evolução do MSRE. Imagens HR com 32×32 pixels, $K = 4$, $\mu = 0, 1$ | 40 |
| 3.8 | Exemplos de resultados de reconstrução usando imagens HR com 32×32 pixels. | 41 |
| 3.9 | Evolução do MSRE. Imagens HR com 64×64 HR pixels, $K = 4$, $\mu = 0, 1$ | 42 |
| 3.10 | Exemplos de reconstrução com imagens de 64×64 pixels. | 42 |
| 3.11 | Evolução do MSRE. $\mathbf{D}(t) = \mathbf{I}$, $K = 4$, $\mu = 0, 5$ | 43 |

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Problema <i>minimax</i> | 50 |
| 4.2 | Resultados do Exemplo 1. (a) MSRE para diferentes passos de convergência. (b) Aproximação das curvas de (a) em regime transitório. (c) Aproximação das curvas de (a) em regime permanente. (d) MSRE para $\mu = 4$ e diferentes números de iterações do algoritmo por amostra de entrada. | 53 |
| 4.3 | 200 ^o quadro de uma das seqüências consideradas no Exemplo 1, para $K = 1$. (a) Imagem original (HR). Imagem reconstruída com: (b) $\mu = 1$; (c) $\mu = 4$; (d) $\mu = 7$ | 53 |
| 4.4 | MSRE considerando <i>blurring</i> gaussiano. | 54 |
| 4.5 | Ampliação do MSRE apresentado na Fig. 4.4, para (a) regime transitório e (b) regime permanente. | 54 |
| 4.6 | MSRE considerando erros de registro. (a) Regime transitório. (b) Regime permanente. | 56 |
| 4.7 | MSRE (espacial) considerando a seqüência <i>hand</i> | 57 |
| 4.8 | Exemplos de resultados para seqüência <i>Hand</i> | 58 |
| 5.1 | Efeito passa-altas causado pelos erros de registro. | 64 |
| 5.2 | Resposta em freqüência do filtro implementado por: (a) $\beta \mathbf{S}^T \mathbf{S}$; (b) $\mathbf{A}(t) \{E[\tilde{\mathbf{G}}(t)] - \mathbf{I}\}$ (aproximado). | 65 |
| 5.3 | Comparação do MSRE dos algoritmos LMS-SRR e R-LMS-SRR. | 67 |
| 5.4 | Resultados de reconstrução dos algoritmos LMS-SRR e R-LMS-SRR. | 68 |
| 5.5 | Comparação do MSRE dos algoritmos LMS-SRR e R-LMS-SRR para o caso de resultados suavizados. | 69 |
| B.1 | Processamento por $\mu \mathbf{C}^T \mathbf{C}$. (a) Imagem original. (b) Resultado com $D = 2$. (c) Resultado com $D = 4$ | 83 |
| B.2 | Resposta em freqüência das imagens processadas por $\mu \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ | 84 |
| B.3 | Processamento por $\mu \mathbf{H}^T(t) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{H}(t)$. (a) $D = 2$. (b) $D = 4$ | 85 |
| B.4 | Resposta em freqüência das imagens processadas por $\mu \mathbf{H}^T(t) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{H}(t)$ | 86 |
| B.5 | Processamento por $\mathbf{A}(t)$, condiderando: (a) $D = 2$; (b) $D = 4$ | 87 |
| B.6 | Resposta em freqüência das imagens processadas por $\mathbf{A}(t)$. $D = 2$: (a) escala linear; (b) escala logarítmica. $D = 4$: (c) escala linear; (d) escala logarítmica. | 88 |

| | | |
|-----|--|----|
| C.1 | Evolução temporal do MSRE (<i>zoom</i> em regime permanente) para os algoritmos LMS-SRR e R-LMS-SRR. | 90 |
|-----|--|----|

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Algoritmo LMS aplicado à SRR | 20 |
| 3.1 | Estimação recursiva de $\mathbf{K}(t)$ | 33 |
| 3.2 | Custo computacional | 34 |

Lista de Símbolos

- M — número de linhas/colunas das imagens de alta-resolução.
- N — número de linhas/colunas das imagens de baixa-resolução.
- t — tempo (discreto).
- D — fator de subamostragem.
- μ — passo de adaptação do algoritmo.
- α — fator de regularização.
- β — $\beta = -\mu\alpha$.
- K — número de iterações do algoritmo por amostra (imagem) de entrada.
- $\mathbf{X}(t)$ — representação matricial da imagem desejada (HR) no instante t .
- $\mathbf{x}(t)$ — representação lexicográfica (vetorial) de $\mathbf{X}(t)$.
- $x_i(t)$ — elementos de $\mathbf{x}(t)$.
- $\hat{\mathbf{x}}(t)$ — representação lexicográfica (vetorial) da imagem reconstruída (estimada) no instante t .
- $\mathbf{Y}(t)$ — representação matricial da imagem observada (LR) no instante t .
- $\mathbf{y}(t)$ — representação lexicográfica (vetorial) de $\mathbf{Y}(t)$.
- $\mathbf{e}(t)$ — vetor de ruído de observação (aditivo).
- $\mathbf{s}(t)$ — vetor de inovações.
- $s_i(t)$ — elementos de $\mathbf{s}(t)$.
- $\mathbf{v}(t)$ — erro de reconstrução no instante t .
- $\mathbf{r}(t)$ — vetor de ruído de registro.

| | | |
|----------------------------|---|---|
| $\epsilon(t)$ | — | estimativa do ruído de observação para o LMS-SRR. |
| $\epsilon_r(t)$ | — | estimativa do ruído de observação para o R-LMS-SRR. |
| $\mathbf{R}_x(t)$ | — | matriz de correlação das imagens desejadas. |
| $\mathbf{R}_{\hat{x}}(t)$ | — | matriz de correlação das imagens reconstruídas. |
| $\mathbf{R}_{x\hat{x}}(t)$ | — | matriz de correlação-cruzada entre as imagens desejadas e as imagens reconstruídas. |
| $\mathbf{R}_e(t)$ | — | matriz de correlação do ruído de observação. |
| $\mathbf{R}_s(t)$ | — | matriz de correlação das inovações. |
| $\mathbf{R}_r(t)$ | — | matriz de correlação do ruído de registro. |
| $\mathbf{K}(t)$ | — | matriz de correlação do erro de reconstrução. |
| \mathbf{I} | — | matriz identidade. |
| $\mathbf{D}(t)$ | — | matriz de degradação. |
| \mathbf{C} | — | matriz de subamostragem (impulsiva). |
| $\mathbf{H}(t)$ | — | matriz de distorções ópticas (<i>blurring</i>). |
| $\mathbf{G}(t)$ | — | matriz de registro. |
| $g_{i,j}(t)$ | — | elemento (i, j) de $\mathbf{G}(t)$. |
| $\hat{\mathbf{G}}(t)$ | — | matriz de registro estimada. |
| $\hat{g}_{i,j}$ | — | elemento (i, j) de $\hat{\mathbf{G}}(t)$. |
| $\Delta\mathbf{G}(t)$ | — | matriz de erro de registro (aditiva). |
| $\tilde{\mathbf{G}}(t)$ | — | matriz de erro de registro (multiplicativa). |
| \mathbf{S} | — | matriz de convolução passa-altas. |
| $l(t)$ | — | índice da linha de determinado pixel da imagem $\mathbf{X}(t)$. |
| $c(t)$ | — | índice da coluna de determinado pixel da imagem $\mathbf{X}(t)$. |
| i | — | índice de determinado elemento do vetor $\mathbf{x}(t)$. |
| j | — | índice de determinado elemento do vetor $\mathbf{x}(t-1)$. |
| $\Delta(t)$ | — | vetor de deslocamento (global) entre os instantes $t-1$ e t . |
| $\Delta_l(t)$ | — | deslocamento na direção das linhas. |
| $\Delta_c(t)$ | — | deslocamento na direção das colunas. |
| $\hat{\Delta}(t)$ | — | vetor de deslocamento estimado (global). |
| $\hat{\Delta}_l(t)$ | — | deslocamento estimado na direção das linhas. |

- $\hat{\Delta}_c(t)$ — deslocamento estimado na direção das colunas.
- $\epsilon_l(t)$ — erro de estimação de movimento na direção das linhas.
- $\epsilon_c(t)$ — erro de estimação de movimento na direção das colunas.
- σ_l^2 — variância do erro de registro na direção das linhas.
- σ_c^2 — variância do erro de registro na direção das colunas.
- $\mathbf{A}(t)$ — sistema de matrizes da equação recursiva do (R-)LMS-SRR.
- $\mathbf{\Gamma}(t)$ — matriz de autovalores de $\mathbf{A}(t)$.
- $\mathbf{Q}(t)$ — matriz de autovetores de $\mathbf{A}(t)$.
- $\mathbf{\Lambda}(t)$ — matriz de autovalores de $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)$.
- λ_i — autovalores de $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)$.
- γ_i — autovalores de $\mathbf{A}(t)$.
- $\mathbf{J}_{\text{MS}}(t)$ — superfície de desempenho (MSE) no instante t .

Capítulo 1

Introdução

A qualidade de uma imagem digital é afetada por uma série de fatores como, por exemplo, a distância entre o sistema de aquisição e o objeto de interesse, as condições do ambiente em que a cena é adquirida e, evidentemente, a resolução do sensor de imagens utilizado. Assim, em determinadas aplicações, obter imagens com alta qualidade é muitas vezes uma tarefa difícil, dado que não se possui controle sobre os fatores supracitados. Áreas como meteorologia e engenharias florestal e agrônoma fazem uso freqüente de imagens adquiridas por satélites. Nesse caso, a distância entre a câmera e a Terra não pode ser reduzida, e nem mesmo as condições climáticas (atmosféricas) podem ser controladas. Além disso, existem limitações físicas e econômicas para a construção de lentes e sensores¹ que forneçam a resolução muitas vezes desejada. Problemas semelhantes ocorrem quando as imagens precisam ser adquiridas com sensores de infra-vermelho. Esses sensores geralmente fornecem sinais com forte recobrimento espectral, uma vez que não podem ser produzidos com a mesma densidade dos CCDs (*Charge-Coupled Devices*) tradicionais [2]. Mesmo no caso de CCDs convencionais, a produção de sensores densos implica em células com áreas sensíveis muito pequenas. Sensores com células menores capturam menos fótons, o que pode levar o ruído de aquisição do sinal a níveis elevados.

Dentro desse contexto, uma solução que tem sido crescentemente utilizada para o melhoramento da qualidade de imagens é a reconstrução com super-resolução (SRR — *super-resolution reconstruction*). Esse é um tema de pesquisa que tem despertado bastante interesse na comunidade científica. Na SRR, as imagens são processadas após a aquisição para que um aumento da resolução seja obtido, indo além dos limites convencionais do sistema de imagens utilizado. A SRR consiste basicamente em combinar múltiplas imagens de baixa resolução para formar uma imagem de alta (maior) resolução. Dessa forma, é então possível aumentar efetivamente a resolução dessas imagens sem, por exemplo, diminuir o tamanho físico dos sensores. Em [1], é apresentada uma visão geral dos trabalhos propostos em torno deste tema nos últimos anos.

Alguns exemplos cotidianos podem ilustrar os benefícios dessa técnica:

- Redução de custos para produção de câmeras fotográficas digitais — Um grande número de câmeras digitais possui três CCDs (um para cada componente de cor). Portanto,

¹ Limitações físicas da construção de sensores são listadas em [1]

cada cena fotografada é adquirida por três sensores dispostos em posições diferentes. Geralmente, apenas a informação de cor oriunda desses sensores é tratada de forma discriminada. A informação de resolução não é usualmente aproveitada. Entretanto, como será visto, essas três imagens adquiridas de posições diferentes podem ser utilizadas para melhorar a resolução da imagem obtida.

Note ainda que o tempo de exposição típico de uma aquisição de imagem fotográfica varia entre 1/30 e 1/2000 segundo. Portanto, mesmo em câmeras que possuam apenas um sensor, a imagem pode ser capturada diversas vezes em uma fração de segundo (mediante um único disparo do usuário), de forma a obter a informação necessária ao aumento da resolução, aproveitando o próprio movimento (involuntário) do usuário ou mesmo o movimento da cena;

- Aumento da confiabilidade de sistemas de vigilância — Atualmente existem diversos sistemas comerciais de vigilância eletrônica baseados em imagens de vídeo. Em tais sistemas, imagens são adquiridas através de câmeras digitais de vídeo (em casos mais específicos, através de câmeras dedicadas à Internet — *webcams*). Os dados de vídeo geralmente são interpretados por um computador, disparando algum tipo de alarme mediante eventos considerados suspeitos. Em seguida, esses dados são armazenados, com ou sem compressão, em arquivos digitais, permitindo uma futura análise humana. Alguns sistemas, incluindo os que utilizam *webcams*, fornecem ainda a possibilidade de acompanhamento remoto, em tempo-real, da seqüência de vídeo (por exemplo, via Internet). Assim, tanto por razões de armazenamento e de transmissão de vídeo quanto por razões econômicas (custo de equipamento), a resolução das imagens deve ser relativamente baixa. Entretanto, sistemas de vigilância por vídeo descrevem uma das aplicações em que imagens de alta resolução são cruciais, uma vez que essas imagens devem fornecer uma quantidade razoável de detalhes das cenas adquiridas. Dentro desse contexto, as técnicas de SRR permitem que se tenham sistemas de vigilância mais confiáveis, a baixo custo, e, mais do que isso, preservando toda a estrutura de *hardware* já instalada nos sistemas existentes. Mais detalhes (técnicos) sobre esses sistemas, incluindo sobre a aplicação de SRR, são apresentados em [3, 4, 5, 6];
- Países em desenvolvimento carecem de sistemas automáticos de controle de qualidade de baixo custo e aplicáveis às linhas de produção de suas indústrias. No Brasil, diversas empresas já desenvolvem esse tipo de sistema. Entretanto, esse ainda é um mercado pouco explorado, dado o custo do *hardware* envolvido. Com o uso da SRR, soluções mais baratas podem ser oferecidas, contribuindo para o desenvolvimento econômico da nação;
- Sistemas de reconhecimento de padrões de baixo custo — Tanto em sistemas de controle de qualidade quanto em sistemas de vigilância eletrônica, muitas vezes busca-se reconhecer algum objeto presente na cena. Nesses casos, a SRR pode ser implementada com eficiência computacional superior às aplicações mais gerais, uma vez que se destina a melhorar a resolução apenas de uma determinada região da imagem. Além disso,

métodos consagrados de reconhecimento de padrões analisam as imagens em um espaço com dimensão reduzida, diminuindo consideravelmente a quantidade de dados submetidos à análise [7]. Dessa forma, a SRR pode ser aplicada sobre um conjunto reduzido de dados, sendo mais facilmente implementada em tempo-real. Exemplos de aplicação são os sistemas de detecção e reconhecimento facial. Em [8], é apresentado um método que agrupa reconhecimento facial e super-resolução. Nesse trabalho, a super-resolução é obtida diretamente em um espaço de dimensão reduzida (chamado espaço de faces), acarretando considerável ganho computacional;

- Sistemas de comunicação de baixo custo — A exploração da telefonia via Internet é uma tendência do mercado de telecomunicações. Conhecido como Voz Sobre Protocolo de Internet (VoIP — *Voice Over Internet Protocol*), esse serviço oferece diversas vantagens como, por exemplo, integração de voz com outros tipos de dados, redução de preços (principalmente para ligações de longa distância), utilização de *Intranets* desempenhando a função dos atuais PBXs, dentre outras. Uma extensão já prevista para o serviço de VoIP é a transmissão de vídeo [9, 10]. Estudos sobre a qualidade de transmissões de vídeo têm sido desenvolvidos [10, 11], apontando a viabilidade e as limitações dessa aplicação. A SRR de seqüências de vídeo pode melhorar a qualidade dos serviços de VoIP, uma vez que, em função da largura de banda do canal de transmissão, as imagens transmitidas via Internet devem possuir uma resolução relativamente baixa.

1.1 Princípio Básico

Mas como conseguir uma imagem de alta resolução a partir de imagens de baixa resolução? Inicialmente, é necessário que as imagens sejam de uma mesma cena; por exemplo, de um mesmo objeto. Além do mais, as imagens devem estar desalinhadas² (deve haver deslocamento relativo entre a posição do objeto nas diferentes imagens). Esse deslocamento relativo entre as imagens deve ainda ser de fração de pixel, e pode ser um movimento induzido (conhecido), como no caso de imagens de satélite, ou mesmo oriundo da vibração do sistema de aquisição (como no caso de imagens fotográficas). Quando o movimento é conhecido, ou estimado com precisão suficiente, a SRR pode ser obtida como ilustrado na Figura 1.1, em que os pixels das imagens observadas (em uma grade de baixa resolução) são reorganizados em uma grade de resolução mais alta. Uma descrição mais detalhada sobre a SRR será apresentada no próximo capítulo.

De acordo com o que foi exposto, o processo de SRR pode ser dividido em dois estágios. O primeiro estágio consiste em registrar, ou alinhar, as imagens. Isto é, determinar a posição que cada um dos pixels (objetos) de uma imagem ocupa nas demais. O segundo estágio consiste em combinar as múltiplas imagens de baixa resolução (depois de alinhadas) formando uma única imagem de alta resolução.

² Existem métodos de reconstrução com super-resolução que dispensam o deslocamento relativo entre as imagens (ver [12] e referências em [1]), entretanto, tal abordagem não será estudada neste trabalho.

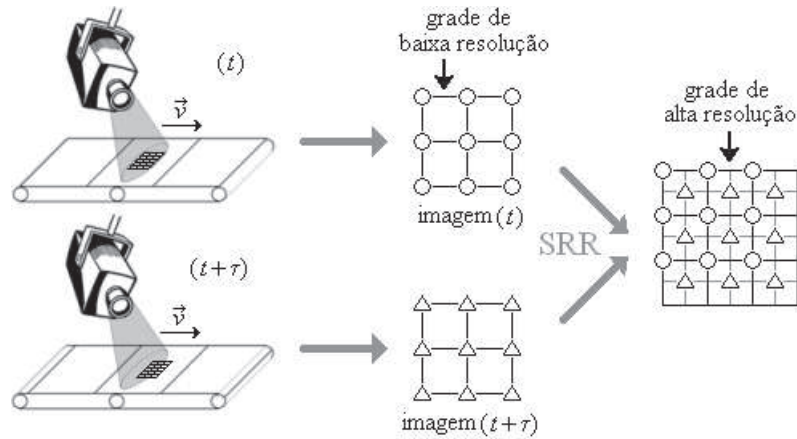


Figura 1.1: Modelo básico de reconstrução com super-resolução.

1.2 Reconstrução de Vídeo *versus* Erros de Modelagem

As técnicas de SRR podem ser divididas em dois grupos: super-resolução de uma única imagem (a partir de várias outras), e super-resolução de seqüências de vídeo. Em aplicações de reconstrução de vídeo (seqüências de imagens), geralmente existe o requisito de processamento em tempo-real. Por este motivo, diversos algoritmos recursivos têm sido propostos ([1, 13, 14, 15] e referências em [1]).

Um dos maiores problemas em SRR é a sensibilidade dos algoritmos a erros de modelagem [16]. *Outliers* são definidos como dados cuja distribuição não segue a assumida na modelagem do problema. Sendo assim, os *outliers* podem ocorrer devido aos mais variados problemas de modelagem, como por exemplo, modelagem inadequada do sistema óptico, da cena filmada, ou mesmo do erro de registro (erro de estimação da posição relativa entre as imagens consideradas). Este último é, provavelmente, a maior causa de baixo desempenho nos algoritmos de SRR em geral. Sabe-se que um registro acurado é crucial para que bons resultados de SRR sejam alcançados [17, 18, 19]. Quando o movimento entre as imagens é estimado de forma inexata, o algoritmo tende a degradar ainda mais as imagens observadas, ao invés de melhorá-las. Essa degradação é chamada ruído de erro de registro.

A título ilustrativo, na Figura 1.2 são apresentados alguns resultados de reconstrução de imagens utilizando uma implementação no domínio espacial [20] de um algoritmo clássico de SRR [21]. Como pode ser observado, na presença do ruído de erro de registro a conveniência do uso de técnicas de SRR deve ser verificada com cuidado. As características da Figura 1.2(c) são geralmente preferíveis, em relação à Figura 1.2(e). Entretanto, não há dúvidas de que o melhor resultado de reconstrução corresponde à Figura 1.2(d), situação em que não existem erros de registro.

Quando a aplicação não impõe a necessidade de processamento em tempo-real, o ruído de erro de registro pode ser processado com mais eficiência. Quando se trata de SRR de seqüências de vídeo, entretanto, o problema é geralmente agravado pelas restrições de tempo de processamento que a aplicação impõe. Nesses casos, a necessidade de um registro acurado é, portanto, mais eminente. Todavia, a qualidade da estimação de movimento não depende

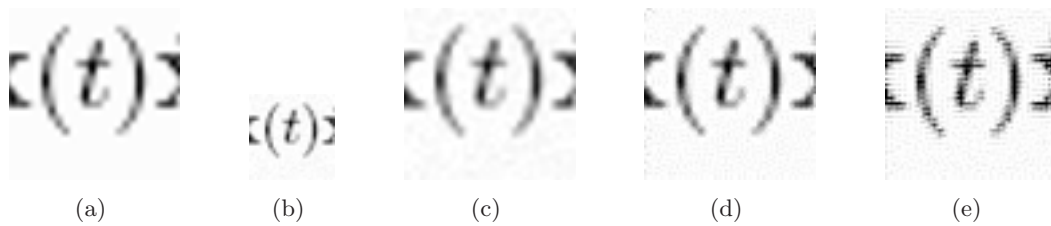


Figura 1.2: Exemplos de resultados de reconstrução. (a) Imagem original. (b) Imagem degradada. (c) Interpolação bicúbica de (b). (d) SRR sem erros de registro. (e) SRR com erros de registro.

apenas do método de estimação utilizado. As características da aplicação e dos sinais de imagem tornam o registro de imagens um problema mal condicionado [22]. Por este motivo, muitos trabalhos têm procurado por algoritmos de SRR mais robustos ao erro de registro.

Em [18], Wang e Qi propõem um algoritmo de reconstrução de seqüências de vídeo baseado no filtro de Kalman. Nesse trabalho, as incertezas de registro são incluídas (previstas) nas equações do filtro. Embora os resultados obtidos em [18] sejam promissores, a análise de convergência e de complexidade computacional são tópicos que ainda precisam ser abordados. Em [19], Lee e Kang definem um problema de SRR como um problema de mínimos quadrados regularizado, em que a função de regularização depende do sinal de entrada e é função dos erros de registro. O algoritmo do gradiente é então utilizado para minimizar a função custo resultante. A complexidade computacional é compatível com algoritmos tradicionais de SRR.

Em [13, 23, 24] foram propostos dois algoritmos baseados na filtragem de Kalman. Uma das soluções apresentadas consiste em um estimador no sentido quadrático (*Least Squares*) e a outra em um estimador no sentido quadrático médio (*Least Mean Square*). Em ambas as soluções, a imagem de alta resolução é reconstruída sem a necessidade da inversão de matrizes (ao contrário do algoritmo de Kalman tradicional). Esses algoritmos são ditos pertencentes à abordagem de filtragem adaptativa (embora não se tratem de algoritmos de filtragem e sim de estimação) [1, 23]. Devido à sua reduzida complexidade computacional e conseqüente aplicabilidade em tempo-real, torna-se importante investigar o desempenho de tais algoritmos adaptativos. Entretanto, diferentemente dos tradicionais algoritmos de filtragem adaptativa, existe pouca informação disponível sobre o comportamento desses algoritmos de SRR [13, 24].

Apesar da reconhecida importância da influência dos erros de registro na SRR, pouco tem sido feito para quantificar teoricamente os efeitos desses erros sobre as imagens reconstruídas. Na maioria dos trabalhos citados acima ([8, 14, 15, 18, 19]), a proposição e a comparação de soluções são geralmente feitas de uma forma *ad hoc*; pela observação dos resultados ou pela comparação do escopo de aplicação de cada uma das soluções. Embora muitos atentem para o problema do erro de registro, apenas em [13] é apresentada uma análise, ainda que bastante simplificada, do desempenho da solução proposta frente a erros de registro. Essa análise é limitada a condições de convergência e considera condições de operação bastante restritivas. Os resultados apresentados trazem pouca informação sobre o comportamento dos algoritmos em situações práticas de aplicação.

Outro tipo de problema de modelagem, ainda no contexto do movimento presente em

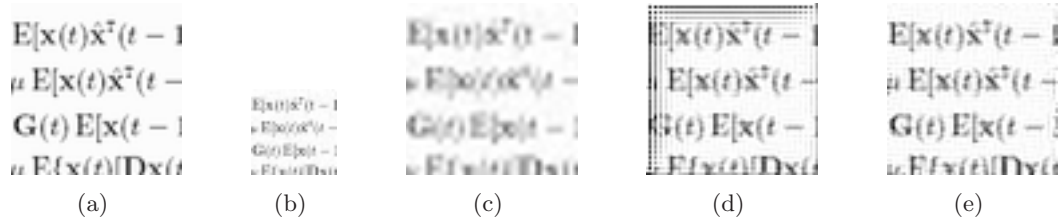


Figura 1.3: Exemplos de resultados de reconstrução. (a) Imagem original. (b) Imagem degradada. (c) Interpolação bicúbica de (b). (d) SRR sem tratamento de inovações. (e) SRR com tratamento especial para as inovações.

seqüências de vídeo, são os *outliers* causados por regiões que aparecem ou desaparecem repentinamente de uma cena, i.e., as inovações causadas pelo movimento (conhecido) de objetos que ocorrem de um quadro para o outro. Essas inovações ocorrem muitas vezes por causa da sobreposição de dois objetos, ou por causa do movimento da câmera, que altera a região da cena adquirida pelo sensor, de um quadro em relação ao anterior. Uma descrição mais detalhada sobre as inovações pode ser encontrada na Seção 2.2.2.

Na Figura 1.3 são ilustrados alguns resultados de reconstrução (utilizando o mesmo algoritmo do exemplo anterior). Esses resultados mostram claramente o efeito dos *outliers* causados pelas inovações entre as imagens da seqüência. Neste exemplo o movimento relativo entre as imagens é translacional (diagonal), causado por um deslocamento do sensor de aquisição. Como pode ser observado na Figura 1.3(d), as inovações (que neste caso não são modeladas corretamente) concentram-se nas regiões próximas aos limites superior e esquerdo das imagens. Nessas regiões a qualidade perceptual pode ser julgada como bastante inferior até mesmo àquela obtida com algumas técnicas de interpolação, como por exemplo a interpolação bicúbica (Figura 1.3(c)). Quando as inovações são adequadamente modeladas, entretanto, seu efeito sobre o resultado de reconstrução tende a ser reduzido (Figura 1.3(e)).

Diversos trabalhos têm abordado o problema das inovações causadas pelo movimento na SRR [16, 25, 26, 27, 28]. Na Ref. [25], é proposto um algoritmo robusto a *outliers* causados por erros de registro, de modelagem do sistema óptico (*blurring*) e de modelagem do ruído, assim como a *outliers* causados pelo deslocamento de objetos (inovações) nas cenas. Nesse algoritmo, o estimador de média, tradicionalmente utilizado para calcular o gradiente em algoritmos de super-resolução, é substituído por um estimador de mediana, mais robusto a *outliers*. Na Ref. [26] é proposto um algoritmo de reconstrução simultânea (que reconstrói simultaneamente todas as imagens da seqüência), robusto, e com complexidade computacional reduzida. Em [16, 27, 28], o problema de *outliers* em SRR é discutido e um algoritmo robusto é proposto, baseado na norma L_1 .

Mais uma vez, quando a aplicação de interesse requer processamento em tempo-real, a complexidade computacional precisa ser considerada. O algoritmo robusto a *outliers* proposto recentemente em [27, 28] permite uma implementação rápida para movimentos translacionais e globais entre as imagens. Entretanto, mesmo sob tais condições, o custo computacional e os requisitos de memória desse algoritmo não são competitivos com [23, 24].

Também com relação à robustez às inovações, nenhum trabalho de análise dos algoritmos propostos em [13, 23, 24] foi encontrado na literatura. Em geral, os diversos algoritmos são comparados através da avaliação de alguns de seus resultados.

1.3 Organização do Trabalho

Dado o que foi discutido na seção anterior, este trabalho avança o estado-da-arte no que diz respeito ao estudo do desempenho de algoritmos de SRR. Este estudo concentra-se em algoritmos aplicáveis a processos em tempo-real; mais precisamente, destina-se ao estudo do algoritmo LMS aplicado à SRR (chamado neste trabalho LMS-SRR) [13, 23, 24].

Neste capítulo foi definido o processo de reconstrução com super-resolução (SRR). Justificativas e aplicações importantes da SRR foram apresentadas. O estado-da-arte em reconstrução de seqüências de imagens foi discutido, assim como a importância da análise de algoritmos de SRR, considerando o erro de registro e o erro causado pelas inovações entre as imagens.

No Capítulo 2 são apresentadas a nomenclatura e a notação adotadas durante este trabalho. Uma formulação matemática do problema de super-resolução é discutida. O algoritmo LMS-SRR é derivado com uma formulação alternativa à existente na literatura, de forma a introduzir conceitos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

No Capítulo 3 é apresentada uma análise do comportamento do algoritmo LMS-SRR, evidenciando a influência do erro de registro no resultado da reconstrução das imagens. Nessa análise é proposto um modelo analítico para o comportamento estocástico do algoritmo.

O modelo proposto no Capítulo 3 serve de base para um segundo estudo, que considera o comportamento do algoritmo na presença de *outliers*. No Capítulo 4 é apresentada uma análise estatística alternativa para o comportamento do algoritmo, que leva a novas conclusões sobre o comportamento do algoritmo LMS sob essas condições de aplicação. Com base nessa nova análise, são propostas diretrizes específicas para o projeto dos parâmetros do algoritmo LMS-SRR.

No Capítulo 5, é estudado o comportamento do algoritmo LMS-SRR em situações específicas de implementação. Como será mostrado, em situações de interesse prático, o LMS-SRR apresenta uma desejável robustez aos erros de registro. Mais do que isso, é mostrado que níveis moderados de erros de registro podem contribuir com o desempenho desse algoritmo, contrariando, de certa forma, o já estabelecido [17, 18, 19] conceito de que os erros de registro são absolutamente prejudiciais à SRR.

Por fim, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões. Algumas possibilidades de trabalhos futuros também são discutidas.

Capítulo 2

O Algoritmo LMS Aplicado à Super-Resolução

Em [13, 23] foi proposta uma solução para o problema de reconstrução com super-resolução (SRR), baseada na teoria de filtragem de Kalman. Em circunstâncias particulares, essa solução resulta em uma aproximação estocástica do Método do Gradiente — o algoritmo *Least Mean Square* (LMS). Tal solução é apresentada neste capítulo através de uma formulação alternativa que deduz o algoritmo de forma mais direta, a partir do conceito de gradiente estocástico [29].

Certamente por estar baseada na teoria de filtragem de Kalman, e pelas equações de sua implementação recursiva serem bastante similares às do filtro LMS tradicional, essa solução é conhecida na literatura [1, 23] como uma abordagem de filtragem adaptativa. Entretanto, é importante observar que não é aparente a interpretação de um processo de filtragem nas equações deste algoritmo. O método proposto em [13, 23], de fato, caracteriza um processo de estimação.

Na seção seguinte, são apresentadas a modelagem e a notação adotadas para descrever os sinais envolvidos neste trabalho. Nas seções posteriores, é contextualizado, apresentado e discutido o algoritmo LMS aplicado à SRR.

2.1 Nomenclatura e Notação

De forma a diferenciar o algoritmo LMS de filtragem adaptativa [29] do algoritmo estudado neste trabalho, a solução proposta em [13, 23] é aqui denominada de LMS-SRR. Em relação às imagens envolvidas em um processo de SRR, define-se como “baixa resolução” (LR — *low resolution*) a dimensão das imagens observadas, e como “alta resolução” (HR — *high resolution*) a dimensão das imagens desejadas (reconstruídas). O termo “grade de alta (baixa) resolução” é tratado como sinônimo do espaço de alta (baixa) resolução. Os termos “imagens de alta (baixa) resolução” serão abreviados por “imagens HR (LR)”. De forma geral, todas as siglas neste trabalho serão mantidas abreviando-se os respectivos termos no idioma inglês, de forma a facilitar ao leitor familiarizado com a área.

No decorrer deste trabalho, pouca referência é feita às características dos sinais de imagem

envolvidos no processo de SRR. Assim, o termo “bordas da imagem” é utilizado para descrever os limites de uma imagem, e não as regiões com alta frequência espacial. O termo “fronteira” é usado como sinônimo de “bordas”.

Conforme discutido no Capítulo 1, a técnica de SRR estudada neste trabalho baseia-se no movimento relativo entre as imagens adquiridas. Esse movimento será chamado “movimento global” quando consistir no mesmo movimento para todos os pixels da imagem. A estimação da posição relativa entre as imagens é conhecida como *registro*. Como será visto, esse deslocamento relativo pode ser descrito por uma matriz. Essa matriz será chamada matriz de registro ou matriz de movimento.

Vetores são representados com letras minúsculas em negrito, e matrizes são representadas por letras maiúsculas em negrito. A variável t é discreta e inteira, e representa a escala de evolução temporal das imagens e dos operadores. A norma de um vetor, denotada por $\|\cdot\|$, exceto quando especificada, é considerada como sendo a norma L_2 .

2.2 A Reconstrução com Super-Resolução

A SRR de seqüências de imagens pode ser realizada com base em duas equações [1, 23, 18, 24]. A primeira consiste no modelo de degradação das imagens adquiridas, e modela a relação entre as imagens desejada (HR) e observada (LR). A segunda, consiste no modelo da dinâmica do sinal de entrada, ou seja, modela a relação entre as imagens que compõem a seqüência. Tais modelos serão apresentados e discutidos a seguir. Posteriormente, serão introduzidas algumas formulações típicas do problema de SRR encontradas na literatura.

2.2.1 Modelo de aquisição

Dadas as representações matriciais de uma imagem digital de baixa resolução (observada), $\mathbf{Y}(t)$, de tamanho $N \times N$, e de uma imagem digital de alta resolução, $\mathbf{X}(t)$, de tamanho $M \times M$, em que $M > N$, o modelo adotado para a aquisição das imagens de alta resolução é

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t), \quad (2.1)$$

em que $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ são, respectivamente, as representações lexicográficas da imagem observada (degradada) e da imagem original (que se deseja reconstruir), no instante de tempo t . Assim, $\mathbf{y}(t)$ tem dimensão $N^2 \times 1$ e $\mathbf{x}(t)$ tem dimensão $M^2 \times 1$. A matriz $\mathbf{D}(t)$ modela a degradação (subamostragem e distorções ópticas), e possui dimensão $N^2 \times M^2$. Em aplicações típicas de SRR de vídeo, o efeito de subamostragem é geralmente invariante no tempo, visto que, via de regra, é oriundo de um único sensor de imagem. Entretanto, as distorções ópticas, causadas pelo conjunto óptico do sistema de aquisição, podem ser variantes no tempo. De forma geral, pode existir ajuste no conjunto óptico, por exemplo, com a finalidade de manutenção do foco ante a deslocamentos relativos entre o objeto de interesse e o sistema de aquisição. Por esse motivo, a matriz de degradação, $\mathbf{D}(t)$, é modelada como uma função do tempo. Neste caso,

$\mathbf{D}(t)$ pode então ser modelada como

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{C}\mathbf{H}(t), \quad (2.2)$$

em que \mathbf{C} modela a subamostragem desempenhada pelo sensor, e $\mathbf{H}(t)$ modela as distorções causadas pelo sistema de lentes. Informações detalhadas sobre as características de \mathbf{C} e de $\mathbf{H}(t)$ podem ser encontradas em [30, pg.180]. Outras modelagens para a matriz $\mathbf{D}(t)$ podem ser encontradas na literatura [31]. De uma forma geral, diferenças de modelagem não afetam os resultados das análises apresentadas neste trabalho. Casos específicos em que isso pode ocorrer serão comentados oportunamente.

Modelos de aquisição definidos através da consideração de imagens contínuas também podem ser definidos. Porém, o modelo de aquisição utilizado neste trabalho obedece ao adotado na maioria dos trabalhos [1, 13, 18, 23], de forma a obter-se um tratamento matemático mais simples. Esse modelo corresponde à hipótese de que as imagens referentes a $\mathbf{X}(t)$ são (ou podem ser aproximadas por) limitadas em banda e amostradas obedecendo a taxa de Nyquist.

O vetor $\mathbf{e}(t)$, de dimensão $N^2 \times 1$, modela o ruído de observação (ruído eletrônico), considerado independente de $\mathbf{y}(t)$ e de $\mathbf{x}(t)$, branco, gaussiano, de média zero e matriz de correlação $\mathbf{R}_e = E[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)] = \sigma_e^2\mathbf{I}$. A hipótese de independência é utilizada uma vez que o ruído eletrônico, em diferentes elementos de um sensor de imagem, é, geralmente, i.i.d. Uma análise mais detalhada das características do ruído em sensores pode ser encontrada em [32].

2.2.2 Modelo da dinâmica do sinal

A dinâmica do sinal de entrada é modelada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{s}(t), \quad (2.3)$$

em que $\mathbf{G}(t)$ é a matriz de registro, que descreve o movimento relativo entre $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}(t-1)$, e $\mathbf{s}(t)$ modela as inovações em $\mathbf{x}(t)$.

Uma dinâmica de sinal de entrada típica, descrita por (2.3), é ilustrada na Figura 2.1. A Figura 2.1(a) representa uma cena estática a qual é adquirida entre os instantes de tempo $t-2$ (Figura 2.1(b)) e t (Figura 2.1(d)). A Figura 2.1(e) mostra a representação matricial (imagem) do vetor $\mathbf{x}(t-1)$, em (2.3). A Figura 2.1(f) ilustra a representação matricial do vetor resultante do produto $\mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t-1)$, em que $\mathbf{G}(t)$ assume preenchimento com zeros (*zero padding*) para determinar os pixels das regiões de fronteira da imagem resultante, após mover a imagem $\mathbf{x}(t-1)$. Por fim, nas figuras 2.1(g) e 2.1(h) são apresentados, respectivamente, a imagem adquirida no instante de tempo t e as inovações entre $t-1$ e t . Note que, ao considerar iluminação constante e movimento translacional e global entre os quadros da seqüência, as inovações estarão concentradas nas regiões de fronteira das imagens.

Um aspecto importante na caracterização do processo de super-resolução é a construção da matriz de registro $\mathbf{G}(t)$. Na próxima seção são fornecidos alguns detalhes sobre a construção dessa matriz.



Figura 2.1: Exemplo da dinâmica do sinal (ver Eq.(2.3)), considerando movimento translacional da câmera e iluminação constante. (a) Cena original. (b)-(d) Imagens nos instantes de tempo $t - 2$ até t (imagem HR $\mathbf{x}(t - l)$, $l = 0, 1, 2$). Representações matriciais de: (e) $\mathbf{x}(t - 1)$; (f) $\mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t - 1)$; (g) $\mathbf{x}(t)$; (h) $\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t - 1)$ (inovações).

2.2.3 A matriz de registro e as condições de fronteira

A matriz de registro pode ser construída a partir do conhecimento dos deslocamentos referentes a cada pixel da imagem. No caso de movimento translacional e global, como o representado na Figura 2.1, o deslocamento pode ser caracterizado por um único vetor $\mathbf{\Delta}(t) = [\Delta_l(t), \Delta_c(t)]$, em que $\Delta_l(t)$ e $\Delta_c(t)$ são respectivamente os deslocamentos nas direções das linhas e das colunas da imagem. Nesse caso, a matriz $\mathbf{G}(t)$ é então construída de forma a assumir as características de uma matriz de permutação, exceto pelas condições de fronteira, conforme será explicado a seguir.

A construção da matriz de registro está atrelada às hipóteses feitas sobre a estrutura das imagens observadas. Por exemplo, considere a imagem $\mathbf{x}(t - 1)$, de 3×3 pixels, representada pelos pixels $x_i(t - 1)$, $i = 1, \dots, 9$, na Figura 2.2(a). Um deslocamento global de um pixel para a esquerda, implementado pelo produto $\mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t - 1)$ no lado direito de (2.3), leva à situação ilustrada na Figura 2.2(b), em que os pixels da coluna à direita da imagem (chamados inovações) podem ser determinados de diversas maneiras. Assumir que esses pixels têm valores nulos, por exemplo, equivale à hipótese de que todos os pixels externos à cena observada no instante t são pretos. Esse tipo de implementação é chamado de *preenchimento com zeros* (*zero padding*), também conhecido como condição de fronteira de Dirichlet. Essa condição de fronteira geralmente produz um efeito indesejável nas regiões próximas às bordas da imagem reconstruída (ver Figura 1.3(d)).

É importante notar que o preenchimento dos pixels referentes às inovações é resultante de uma combinação linear dos pixels da imagem $\mathbf{x}(t - 1)$, em que o combinador é a própria matriz $\mathbf{G}(t)$ (ver Eq.(2.3)). Logo, a hipótese assumida para determinar a natureza das inovações é incluída na construção de $\mathbf{G}(t)$.

Outra hipótese que pode ser assumida na construção de $\mathbf{G}(t)$ é a de que as imagens apresentem periodicidade circular, i.e., a última coluna de $\mathbf{x}(t)$, no exemplo acima, é preenchida

com os valores da primeira coluna de $\mathbf{x}(t-1)$, (ver Figura 2.2(c)). Como será visto, essa não é a hipótese que fornece o melhor resultado perceptual. Entretanto, para fins de estudo do comportamento de algoritmos de SRR, assumir imagens periódicas pode levar a simplificações matemáticas consideráveis.

Imagens naturais geralmente apresentam alta correlação espacial, ou seja, na maioria das aplicações, regiões vizinhas em uma imagem são bastante similares entre si. Por este motivo, os melhores resultados de reconstrução em torno das bordas das imagens são alcançados assumindo-se que as imagens apresentam periodicidade linear [33]. Isto equivale a construir uma matriz de registro que preencha a última coluna da imagem na Figura 2.2(b) com os mesmos valores da penúltima coluna. Essa construção é chamada condição de fronteira de Neumann, e equivale à hipótese de que os pixels externos à cena observada são idênticos aos pixels internos à cena, espelhados em relação às bordas da imagem [32, 34] (conforme ilustrado na Figura 2.2(d)). Durante este trabalho, salvo quando especificado, a condição de Neumann é assumida na implementação do algoritmo de reconstrução.

Embora a implementação do algoritmo de SRR utilize a condição de Neumann, assumir a hipótese de imagens periódicas pode acarretar simplificações significativas na implementação do modelo teórico. No decorrer deste trabalho será visto que o erro na avaliação do comportamento, causado pela diferença na implementação das matrizes de registro do modelo teórico e do algoritmo de reconstrução, não é significativo.

Para casos em que o movimento entre as imagens não se restringe a um deslocamento translacional e global, as condições de fronteira podem ser definidas de maneira similar. Nessas situações, repetir pixels vizinhos, utilizar os mesmos valores da respectiva região da imagem do instante anterior, ou usar as condições de Dirichlet, são decisões que devem ser tomadas de acordo com cada aplicação.

2.2.4 Caracterização da matriz de registro

Embora a análise teórica desenvolvida neste trabalho não se restrinja a movimentos translacionais globais, apenas para esses casos será necessária uma caracterização analítica da matriz de registro. Sendo assim, nesta seção é definida uma função para descrever os elementos $g_{i,j}(t)$ de $\mathbf{G}(t)$, dada a ocorrência de um movimento translacional e global.

Na derivação que se segue, $l(t-t_0)$ e $c(t-t_0)$ são números inteiros referentes aos índices de linhas e colunas, respectivamente, das imagens de alta resolução $\mathbf{X}(t-t_0)$, em que $t_0 = 0, 1$. As variáveis i e j são índices de elementos dos vetores (representações lexicográficas) $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}(t-1)$, respectivamente. Definindo que a organização dos pixels de $\mathbf{X}(t-t_0)$ é feita em $\mathbf{x}(t-t_0)$ na ordem das colunas de $\mathbf{X}(t-t_0)$, colocadas as linhas lado-a-lado, os índices i e j podem ser relacionados com $l(t-t_0)$ e $c(t-t_0)$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} i = c(t) + C[l(t) - 1] \\ j = c(t-1) + C[l(t-1) - 1], \end{cases} \quad (2.4)$$

| | | |
|------------|------------|------------|
| $x_1(t-1)$ | $x_2(t-1)$ | $x_3(t-1)$ |
| $x_4(t-1)$ | $x_5(t-1)$ | $x_6(t-1)$ |
| $x_7(t-1)$ | $x_8(t-1)$ | $x_9(t-1)$ |

(a)

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|---|------------|------------|---|
| $x_1(t)$ | $x_2(t)$ | $x_3(t)$ | = | $x_2(t-1)$ | $x_3(t-1)$ | ? |
| $x_4(t)$ | $x_5(t)$ | $x_6(t)$ | | $x_5(t-1)$ | $x_6(t-1)$ | ? |
| $x_7(t)$ | $x_8(t)$ | $x_9(t)$ | | $x_8(t-1)$ | $x_9(t-1)$ | ? |

(b)

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|---|------------|------------|------------|
| $x_1(t)$ | $x_2(t)$ | $x_3(t)$ | = | $x_2(t-1)$ | $x_3(t-1)$ | $x_1(t-1)$ |
| $x_4(t)$ | $x_5(t)$ | $x_6(t)$ | | $x_5(t-1)$ | $x_6(t-1)$ | $x_4(t-1)$ |
| $x_7(t)$ | $x_8(t)$ | $x_9(t)$ | | $x_8(t-1)$ | $x_9(t-1)$ | $x_7(t-1)$ |

(c)

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|---|------------|------------|------------|
| $x_1(t)$ | $x_2(t)$ | $x_3(t)$ | = | $x_2(t-1)$ | $x_3(t-1)$ | $x_3(t-1)$ |
| $x_4(t)$ | $x_5(t)$ | $x_6(t)$ | | $x_5(t-1)$ | $x_6(t-1)$ | $x_6(t-1)$ |
| $x_7(t)$ | $x_8(t)$ | $x_9(t)$ | | $x_8(t-1)$ | $x_9(t-1)$ | $x_9(t-1)$ |

(d)

Figura 2.2: Exemplos de uma imagem $\mathbf{x}(t-1)$ (3×3) deslocada para uma imagem $\mathbf{x}(t)$ por uma matriz de registro, considerando diferentes condições de fronteira. (a) Imagem original $\mathbf{x}(t-1)$. (b) Movimento de 1 pixel para a esquerda. (c) Imagem $\mathbf{x}(t)$, assumindo periodicidade circular. (d) Imagem $\mathbf{x}(t)$, assumindo as condição de fronteira de Neumann.

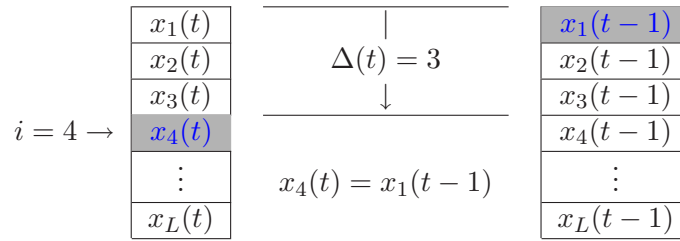


Figura 2.3: Exemplo de movimento global considerando deslocamento em passos inteiros.

em que $\{l(t-1), l(t)\} \in \{1, \dots, L\}$, $\{c(t-1), c(t)\} \in \{1, \dots, C\}$, e $\{i, j\} \in \{1, \dots, LC\}$ ¹.

Para fins didáticos, inicialmente as imagens HR serão assumidas como tendo apenas uma coluna ($C = 1$). Desta forma, $c(t-1) = c(t) = 1$ e (2.4) implica em $i = l(t)$ e $j = l(t-1)$. Os elementos de $\mathbf{G}(t)$ em (2.3) são então $g_{i,j}(t) = g_{l(t),l(t-1)}(t)$. Lembrando que o vetor de deslocamento global entre as imagens $\mathbf{X}(t-1)$ e $\mathbf{X}(t)$ é definido por $\mathbf{\Delta}(t) = [\Delta_l(t), \Delta_c(t)]$, neste caso o vetor de deslocamento $\mathbf{\Delta}(t)$ se reduz a um escalar $\Delta(t) = \Delta_l(t)$.

Inicialmente, o deslocamento será considerado inteiro, ou seja $\Delta(t) \in \mathbb{Z}$. Este caso é ilustrado na Figura 2.3, onde $\Delta(t) = 3$ e apenas o movimento do elemento $x_1(t-1)$ é destacado. Assim, exceto para os pixels próximos à fronteira da imagem ($x_1(t)$ a $x_3(t)$ na Figura 2.3), tem-se $x_i(t) = x_{i-\Delta(t)}(t-1) = x_j(t-1)$, em que $i-j = \Delta(t)$. Para este exemplo, a equação da dinâmica do sinal de entrada, assumindo a condição de fronteira de Neumann, corresponde a

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ \vdots \\ x_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \\ x_4(t-1) \\ x_5(t-1) \\ \vdots \\ x_L(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \\ s_5(t) \\ \vdots \\ s_L(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Por inspeção de (2.5) e da Figura 2.3, é possível ver que, exceto para os pixels de fronteira,

$$g_{i,j}(t) = \begin{cases} 0, & |i-j-\Delta(t)| \geq 1 \\ 1, & |i-j-\Delta(t)| = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

para todo $\Delta(t) \in \mathbb{Z}$.

Considere agora o caso geral em que $\Delta(t) \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $x_i(t)$ será uma combinação linear² de pixels em uma vizinhança de $\mathbf{X}(t-1)$. A dinâmica descrita na Eq.(2.8) e a Figura 2.4 ilustram essa situação para $\Delta(t) = 1.6$ e para condição de fronteira assumindo imagens com periodicidade circular. Por inspeção de (2.8), é possível observar que, exceto

¹ Note que, no contexto deste trabalho, $L = C = M$. A diferenciação apresentada nesta seção deve-se apenas ao melhor entendimento da formulação proposta. ² Neste exemplo é assumido um sensor com fotossensibilidade uniforme e sem distância interpixel.

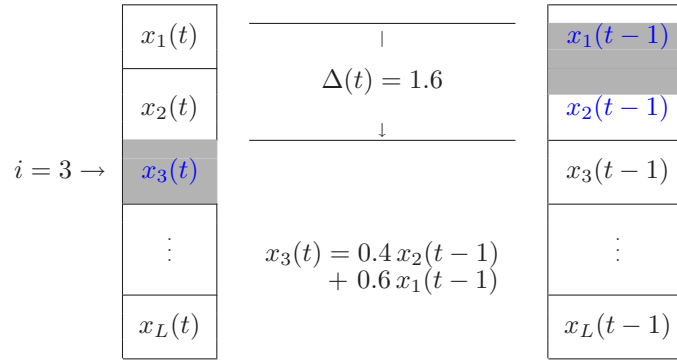


Figura 2.4: Exemplo de movimento global considerando deslocamento com passos fracionários.

para os pixels de fronteira,

$$g_{i,j}(t) = \begin{cases} 0, & |i - j - \Delta(t)| \geq 1 \\ 1 - |i - j - \Delta(t)|, & |i - j - \Delta(t)| < 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

para todo $\Delta(t) \in \mathbb{R}$. A equação dinâmica assumindo a condição de fronteira acima fica então:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ \vdots \\ x_{L-1}(t) \\ x_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \\ x_4(t-1) \\ x_5(t-1) \\ \vdots \\ x_{L-1}(t-1) \\ x_L(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \\ s_5(t) \\ \vdots \\ s_{L-1}(t) \\ s_L(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

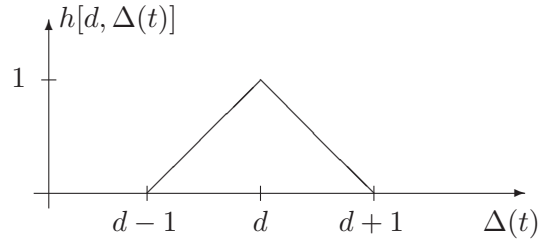
De forma a simplificar a notação no restante deste trabalho, os elementos da matriz de registro podem ser definidos como $g_{i,j}(t) = h[d, \Delta(t)]$, em que $d = i - j$, $\{i, j\} \in \mathbb{Z}$ e $\Delta(t) \in \mathbb{R}$, sendo

$$h[d, \Delta(t)] = \begin{cases} 1 - |d - \Delta(t)|, & |d - \Delta(t)| < 1 \\ 0, & |d - \Delta(t)| \geq 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

A função em (2.9) é ilustrada na Figura 2.5, em uma forma conveniente para futuros cálculos.

Generalizando agora para o caso que considera deslocamentos em ambas as direções, a expressão para $g_{i,j}(t)$ pode ser facilmente estendida para:

$$g_{i,j}(t) = h[d_c(t), \Delta_c(t)] h[d_l(t), \Delta_l(t)], \quad (2.10)$$

Figura 2.5: Função $h[d, \Delta(t)]$.

em que os subíndices l e c correspondem às linhas e às colunas, respectivamente, e $d_c(t) = c(t) - c(t-1)$ e $d_l(t) = l(t) - l(t-1)$. Por fim, usando a Eq.(2.10), é possível determinar todos os elementos de $\mathbf{G}(t)$ para um dado vetor de deslocamento $\Delta(t)$.

2.2.5 A reconstrução

Diversas são as técnicas que podem ser aplicadas à SRR. Em [1], Park *at al* discutem os principais algoritmos, listando características, vantagens e desvantagens de cada um deles. Nesse trabalho, as técnicas de SRR são separadas em:

- Interpolação não-uniforme;
- Abordagem no domínio da frequência;
- SRR regularizada;
 - Abordagem determinística;
 - Abordagem estocástica;
- Projeção em conjuntos convexos (POCS — *projection onto convex sets*);
- Híbridas (*Maximum Likelihood* - POCS);
- Retroprojeção iterativa (IBP — *iterative back-projection*);
- Filtragem adaptativa;
- Reconstrução livre de movimento.

O algoritmo estudado neste trabalho é citado como uma técnica de filtragem adaptativa, mas utiliza os mesmos conceitos em que se baseiam as técnicas regularizadas.

De um ponto de vista determinístico, as técnicas regularizadas buscam resolver o problema inverso referente ao modelo de aquisição descrito por (2.1). A formulação do problema inverso geralmente recai em um problema de minimização semelhante a:

$$\begin{cases} \text{minimizar} & \|\mathbf{y}(t-k) - \mathbf{M}(t-k)\hat{\mathbf{x}}(t)\|^2 \quad \forall \text{ observação } t-k \text{ disponível} \\ \text{sujeito a} & \|\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(t)\|^2 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.11)$$

em que $\hat{\mathbf{x}}(t)$ é a variável a ser determinada (imagem reconstruída), $\mathbf{M}(t - k)$ modela a degradação causada pela aquisição e a relação de movimento entre $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t - k)$. A matriz \mathbf{S} modela a informação *a priori* sobre as imagens $\mathbf{x}(t)$, para todo instante de tempo t , e geralmente tem por objetivo regularizar o problema inverso. \mathbf{S} consiste, tradicionalmente, em um filtro passa-altas (laplaciano) que insere uma restrição de suavidade na solução (imagens naturais são, geralmente, suaves) [1]. O problema em (2.11) pode ser formulado, por exemplo, como

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \arg \min_{\mathbf{x}(t)} \sum_k \|\mathbf{y}(t - k) - \mathbf{M}(t - k)\mathbf{x}(t)\|^2 + \alpha_k \|\mathbf{S}\mathbf{x}(t)\|^2, \quad (2.12)$$

em que α_k atua como ponderador da parcela de restrição. De acordo com cada algoritmo e com cada aplicação é então definida uma norma específica, quadrática ou não, ponderada ou não, assim como a natureza da restrição desejada e outras particularidades do problema de otimização descrito em (2.11).

Quando o problema de reconstrução é formulado de um ponto de vista estocástico, geralmente recai-se em um problema de estimação Bayesiano. Quando o erro entre as imagens é considerado gaussiano, de média zero, e i.i.d., e a restrição pode ser descrita por uma parcela também gaussiana, a estimação recai na mesma formulação apresentada em (2.12). Mais detalhes sobre ambas as formulações são encontrados em [1].

A breve introdução dos métodos regularizados apresentada até aqui tem as finalidades de definir o problema a ser resolvido e de salientar algumas considerações geralmente feitas em estudos sobre SRR. Uma característica do processamento de sinais de imagem é a dificuldade em se caracterizar estatisticamente os sinais envolvidos. Essa característica geralmente afeta os algoritmos de SRR em dois aspectos: na função de restrição escolhida (distribuição *a priori*); e no tratamento das bordas das imagens.

Modelos de informação *a priori* típicos são baseados em distribuições gaussianas [23], e no modelo de Huber-Markov Random Fields [35, 36], dentre outros. A escolha desses modelos varia basicamente com a aplicação a que se destina o algoritmo.

O tratamento de inovações, por exemplo, baseia-se em hipóteses sobre as imagens de alta resolução. As mais comuns dentre essas hipóteses foram discutidas na Seção 2.2.3. Outro tratamento geralmente adotado, uma vez que é bastante difícil prever as características das inovações, é desconsiderar as regiões em que elas ocorrem. Essa abordagem evita a necessidade de hipóteses sobre as características das inovações. Dessa forma, tais regiões (pixels) são identificadas e excluídas do processo de otimização descrito em (2.11). Diversos trabalhos usam esse tipo de tratamento, mesmo em algoritmos de outras técnicas que não as regularizadas [13, 23, 37, 38].

2.3 A Função Custo

Como foi discutido, muitas abordagens de SRR são baseadas na minimização de uma norma do tipo [1, 13, 23, 39]

$$\|\boldsymbol{\epsilon}(t)\| = \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\|, \quad (2.13)$$

em que $\hat{\mathbf{x}}(t)$ é a imagem estimada (reconstruída) e $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ é o vetor estimativa do ruído de observação. Tal minimização é então feita em um determinado sentido (por exemplo, quadrático médio, mínimos quadrados, etc.) e, por vezes, submetida a restrições. A modelagem dos sinais também é associada à função custo escolhida. Por exemplo, quando a minimização é feita no sentido quadrático médio, $\mathbf{y}(t)$ e $\hat{\mathbf{x}}(t)$ são modelados como vetores aleatórios, enquanto $\mathbf{D}(t)$ é determinística.

O algoritmo LMS-SRR busca minimizar o erro quadrático médio (MSE — *Mean-Square Error*) $E[\|\boldsymbol{\epsilon}(t)\|^2]$ [23], em que $E[\cdot]$ denota a esperança matemática, ou o valor esperado, de uma grandeza aleatória. Muito embora o MSE seja tradicionalmente evitado em processamento de imagens, em razão de sua pouca relação com a qualidade perceptual das imagens digitais, este não é o caso em aplicações de SRR. Isto porque o MSE na SRR é utilizado como uma medida de similaridade para comparar sinais quase idênticos. O uso do MSE como figura de mérito em aplicações similares foi estudado em [40]. Nesse estudo é concluído que, nesses casos, o MSE pode ser usado como uma boa medida de qualidade perceptual.

Considerando a minimização do erro quadrático médio, em (2.13), a superfície de desempenho é definida por

$$\mathbf{J}_{\text{MS}}(t) = E\{\|\boldsymbol{\epsilon}(t)\|^2 \mid \hat{\mathbf{x}}(t)\} = E\{\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\|^2 \mid \hat{\mathbf{x}}(t)\}. \quad (2.14)$$

O ajuste promovido pelo algoritmo de minimização sobre a superfície de desempenho determinada em (2.14) se dá via ajuste de $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

É importante ainda ressaltar que:

- A estimativa do erro de observação dada a estimativa $\hat{\mathbf{x}}(t)$ é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}(t) &= \mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &= [\mathbf{D}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t)] - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{e}(t) + \mathbf{D}(t)[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] \\ &= \boldsymbol{\epsilon}_{\text{min}}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{v}(t), \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \boldsymbol{\epsilon}_{\text{min}}(t)$ é a estimativa do erro de observação para $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ é o vetor erro de estimação da imagem $\mathbf{x}(t)$;

- O valor esperado em (2.14) representa o valor médio no sentido do *ensemble*, conforme é ilustrado na Figura 2.6, e não a média temporal;
- A superfície de erro $\mathbf{J}_{\text{MS}}(t) = E\{\|\boldsymbol{\epsilon}(t)\|^2 \mid \hat{\mathbf{x}}(t)\}$ é definida para cada instante de tempo t .

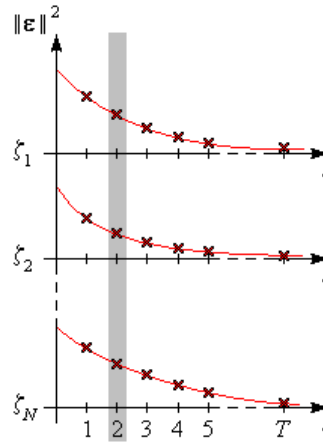


Figura 2.6: Representação do valor esperado ($\zeta_i =$ realizações, $t =$ tempo).

2.4 Método do Gradiente (*Steepest Descent*)

De acordo com o Método do Gradiente [29], a atualização de $\hat{\mathbf{x}}(t)$, de forma a minimizar a função custo, deve se dar no sentido contrário ao do gradiente dessa função. Assim, sendo a superfície de desempenho

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{MS}}(t) &= \text{E} \{ \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\|^2 \mid \hat{\mathbf{x}}(t) \} \\ &= \text{E} \{ [\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)]^T [\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \mid \hat{\mathbf{x}}(t) \} \\ &= \text{E} [\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)] - 2 \text{E} [\mathbf{y}^T(t)] \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

seu gradiente é dado por

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{J}_{\text{MS}}(t) &= \frac{\partial \mathbf{J}_{\text{MS}}(t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(t)} \\ &= -2\mathbf{D}^T(t) \text{E} [\mathbf{y}(t)] + 2\mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &= -2\mathbf{D}^T(t) \{ \text{E} [\mathbf{y}(t)] - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) \}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Portanto, a equação de atualização recursiva de $\hat{\mathbf{x}}(t)$ pelo Método do Gradiente é dada por

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}(t) = \hat{\mathbf{x}}_k(t) - \mu \frac{1}{2} \nabla \mathbf{J}_{\text{MS}}(t) \quad (2.18)$$

$$= \hat{\mathbf{x}}_k(t) + \mu \mathbf{D}^T(t) \{ \text{E} [\mathbf{y}(t)] - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}_k(t) \}. \quad (2.19)$$

Note que a recursão de $\hat{\mathbf{x}}(t)$, i.e., o deslocamento sobre a superfície de desempenho $\mathbf{J}_{\text{MS}}(t)$, se dá em k e não em t . Note também que (2.19) é uma equação determinística.

Tabela 2.1: Algoritmo LMS aplicado à SRR

Inicialização:

- Inicializar K (número de iterações para cada amostra temporal)
- $\hat{\mathbf{x}}_0(0) =$ interpolação de $\mathbf{y}(0)$

Algoritmo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Laço em } t = 0, 1, 2, \dots \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Laço em } k = 0, 1, \dots, K - 1 \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}(t) = \hat{\mathbf{x}}_k(t) + \mu \mathbf{D}^T(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t) \hat{\mathbf{x}}_k(t)] \\ \hat{\mathbf{x}}_0(t+1) = \mathbf{G}(t+1) \hat{\mathbf{x}}_K(t) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

2.5 O Algoritmo LMS-SRR

O algoritmo LMS é uma aproximação estocástica do Algoritmo do Gradiente, em que $\nabla \mathbf{J}_{\text{MS}}(t)$ é aproximado por sua estimativa instantânea [29]. Portanto, fazendo-se

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{J}_{\text{MS}}(t) &= -2\mathbf{D}^T(t) \{E[\mathbf{y}(t)] - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\} \\ &\simeq -2\mathbf{D}^T(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] = \hat{\nabla} \mathbf{J}_{\text{MS}}(t), \end{aligned} \quad (2.20)$$

tem-se diretamente de (2.19) que

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}(t) = \hat{\mathbf{x}}_k(t) + \mu \mathbf{D}^T(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}_k(t)], \quad (2.21)$$

que é a equação recursiva estocástica do algoritmo LMS-SRR.

A atualização em t , por sua vez, é baseada na equação da dinâmica do sinal (2.3), cuja evolução é determinada pela matriz de registro $\mathbf{G}(t)$. O algoritmo LMS-SRR completo é apresentado na Tabela 2.1. Note que esse algoritmo é composto de um laço interno para a atualização em k (para um dado t fixo), e de outro laço para a atualização em t . Esta última atualização ajusta a estimativa em função do movimento temporal da imagem $\mathbf{x}(t)$. Para cada amostra temporal (t), são feitas K atualizações da estimativa do sinal desejado.

2.6 Resumo

Neste capítulo foi apresentada uma breve revisão sobre reconstrução com super-resolução (SRR) e sobre a modelagem dos sinais e processos envolvidos. O algoritmo LMS-SRR foi apresentado a partir de uma formulação alternativa à proposta em [13, 23, 24], sendo derivado diretamente como uma aproximação estocástica do Algoritmo do Gradiente. Uma caracterização matemática da matriz de registro foi também proposta.

Nos capítulos seguintes, o comportamento do LMS-SRR é estudado, resultando importantes conclusões acerca do desempenho do algoritmo ante às mais diversas condições de aplicação. Já no próximo capítulo, um modelo determinístico para o comportamento estatístico desse algoritmo é proposto, com ênfase na influência dos erros de registro.

Capítulo 3

Análise do Algoritmo LMS-SRR

Neste capítulo são propostos modelos analíticos para o comportamento do erro médio de reconstrução (MRE — *Mean Reconstruction Error*) e do erro quadrático médio de reconstrução (MSRE — *Mean-Square Reconstruction Error*) de imagens, resultantes do uso do algoritmo LMS-SRR. Para isso, o erro de reconstrução é definido como função de erros ocorridos no processo de registro das imagens.

A partir deste ponto, $\mathbf{G}(t)$ será considerada conhecida (determinística) e irá representar a matriz de registro exata (livre de erros de estimação de movimento). A matriz $\hat{\mathbf{G}}(t)$ representará a matriz de registro estimada (com erros), construída a partir do resultado da aplicação de algoritmos de estimação de movimento.

Considerando então que apenas $\hat{\mathbf{G}}(t)$ esteja disponível no processo de reconstrução, as equações do algoritmo LMS-SRR (ver Tabela 2.1) passam a ser dadas por (2.21) e por:

$$\hat{\mathbf{x}}_0(t+1) = \hat{\mathbf{G}}(t+1)\hat{\mathbf{x}}_K(t), \quad (3.1)$$

em que $\hat{\mathbf{G}}(t)$ pode ser modelada como [19, 13, 24]

$$\hat{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{G}(t) + \mathbf{\Delta}\mathbf{G}(t), \quad (3.2)$$

em que $\mathbf{\Delta}\mathbf{G}(t)$ é uma matriz aleatória com propriedades determinadas pelas características do método de registro e da seqüência de imagens considerada.

Agrupando-se os termos contendo $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$ em (2.21), tem-se

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}_k(t) + \mu\mathbf{D}^T(t)\mathbf{y}(t), \quad (3.3)$$

em que, de forma a simplificar a notação das equações que se seguem, $\mathbf{A}(t)$ é definida como

$$\mathbf{A}(t) = [\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)], \quad (3.4)$$

em que \mathbf{I} corresponde a uma matriz identidade com dimensões $M^2 \times M^2$.

Resolvendo-se (3.3) em função de $\hat{\mathbf{x}}_k(t)$ tem-se [41]¹:

$$\hat{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{A}^k(t)\hat{\mathbf{x}}_0(t) + \mu \sum_{n=0}^{k-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{y}(t). \quad (3.5)$$

Então, de (3.1) e (3.5), é possível definir uma única equação recursiva que descreve o algoritmo LMS-SRR com K iterações por amostra temporal:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^K(t)\hat{\mathbf{G}}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mu \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{y}(t). \quad (3.6)$$

A Eq.(3.6) será usada no estudo do comportamento do algoritmo LMS-SRR, nas seções que se seguem.

3.1 O Erro de Reconstrução

Seja o erro de reconstrução definido como

$$\mathbf{v}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t). \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) em (3.7), tem-se

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}^K(t)\hat{\mathbf{G}}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mu \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t). \quad (3.8)$$

Substituindo (2.1) e (3.2) em (3.8),

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}^K(t)[\mathbf{G}(t) + \Delta\mathbf{G}(t)]\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mu \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)[\mathbf{D}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t)] - \mathbf{x}(t) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{A}^K(t)\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mathbf{A}^K(t)\Delta\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1) \\ &\quad - \left\{ \mathbf{I} - \mu \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t) \right\} \mathbf{x}(t) + \mu \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por fim, substituindo (2.3) em (3.10),

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{A}^K(t)\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mathbf{A}^K(t)\Delta\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1) \\ &\quad - \left\{ \mathbf{I} - \mu \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t) \right\} \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t-1) \\ &\quad - \left\{ \mathbf{I} - \mu \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t) \right\} \mathbf{s}(t) + \mu \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

¹ Note que a matriz $[\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)]$ é constante para um valor fixo de t .

A matriz $\mathbf{A}^K(t)$ pode ser escrita como

$$[\mathbf{I} - \mu \mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t)]^K = [\mathbf{I} - \mu \mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t)]^{K-1} - \mu \mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t) [\mathbf{I} - \mu \mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t)]^{K-1}. \quad (3.12)$$

Expandindo de forma recursiva o primeiro termo no lado direito de (3.12), é fácil mostrar que

$$\mathbf{I} - \mu \sum_{n=0}^{K-1} [\mathbf{I} - \mu \mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t)]^n \mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t) = [\mathbf{I} - \mu \mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t)]^K. \quad (3.13)$$

Finalmente, substituindo (2.3) e (3.13) em (3.11), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) = & \mathbf{A}^K(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{v}(t-1) + \mathbf{A}^K(t) \Delta \mathbf{G}(t) \hat{\mathbf{x}}(t-1) \\ & - \mathbf{A}^K(t) \mathbf{s}(t) + \mu \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t) \mathbf{D}^T(t) \mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

A Eq.(3.14) pode então ser utilizada para determinar os comportamentos médio e quadrático médio do erro de reconstrução $\mathbf{v}(t)$.

3.2 Hipóteses e Aproximações Estatísticas

O estudo das propriedades estatísticas de $\mathbf{v}(t)$ a partir de (3.14) requer simplificações de forma a tornar o problema matematicamente tratável. As seguintes aproximações e hipóteses são usadas na análise estatística do algoritmo:

- A1 O vetor $\mathbf{r}(t) = \Delta \mathbf{G}(t) \hat{\mathbf{x}}(t-1)$, chamado ruído de erro de registro, é assumido de média zero, com elementos estatisticamente independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), com matriz de correlação $\mathbf{R}_r(t) = E[\mathbf{r}(t) \mathbf{r}^T(t)] = \sigma_r^2 \mathbf{I}$, e estatisticamente independente do vetor de ruído de observação $\mathbf{e}(t)$.

A hipótese A1 significa que o erro de registro é modelado como uma variável aleatória i.i.d. de média zero. Esse modelo é razoável para a maioria dos algoritmos de registro e é usado em [18] e em [13, pg.97] com bons resultados. Nas figuras 3.1 e 3.2 são mostrados histogramas de $\mathbf{r}(t)$ e suas respectivas matrizes de autocorrelação $\mathbf{R}_r(t)$ obtidas a partir de dois diferentes algoritmos de registro [42, 22].

Para essas simulações foi considerado um conjunto de 300 imagens distintas (Lena, Camera man, Baboon, etc.). A partir de cada uma dessas imagens, foram gerados dois quadros de alta resolução, com 32×32 pixels, $\mathbf{x}(t-1)$ e $\mathbf{x}(t)$, conforme a dinâmica descrita na Seção 2.2.2. Foram considerados deslocamentos entre quadros de um único pixel em cada uma das direções, horizontal e vertical. A partir disso, vetores $\mathbf{r}(t)$ foram obtidos a partir da estimativa de $\Delta \mathbf{G}(t)$, assumindo que as imagens reconstruídas $\hat{\mathbf{x}}(t)$ em regime permanente podem ser aproximadas pelas imagens originais (desejadas);

- A2 As inovações $\mathbf{s}(t)$ são assumidas com média zero, com matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_s(t)$ de dimensões $M^2 \times M^2$, e descorrelacionadas de $\mathbf{x}(t-1)$. Esta hipótese é usada em [18].

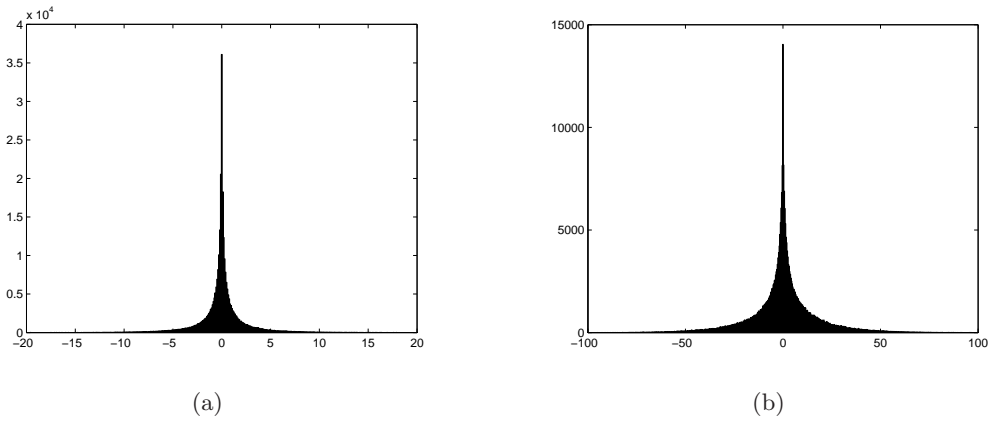


Figura 3.1: Histograma de $\mathbf{r}(t)$, para imagens HR 32×32 , considerando os algoritmos: (a) Lucas e Kanade [42]; (b) Mester e Hotter [22].

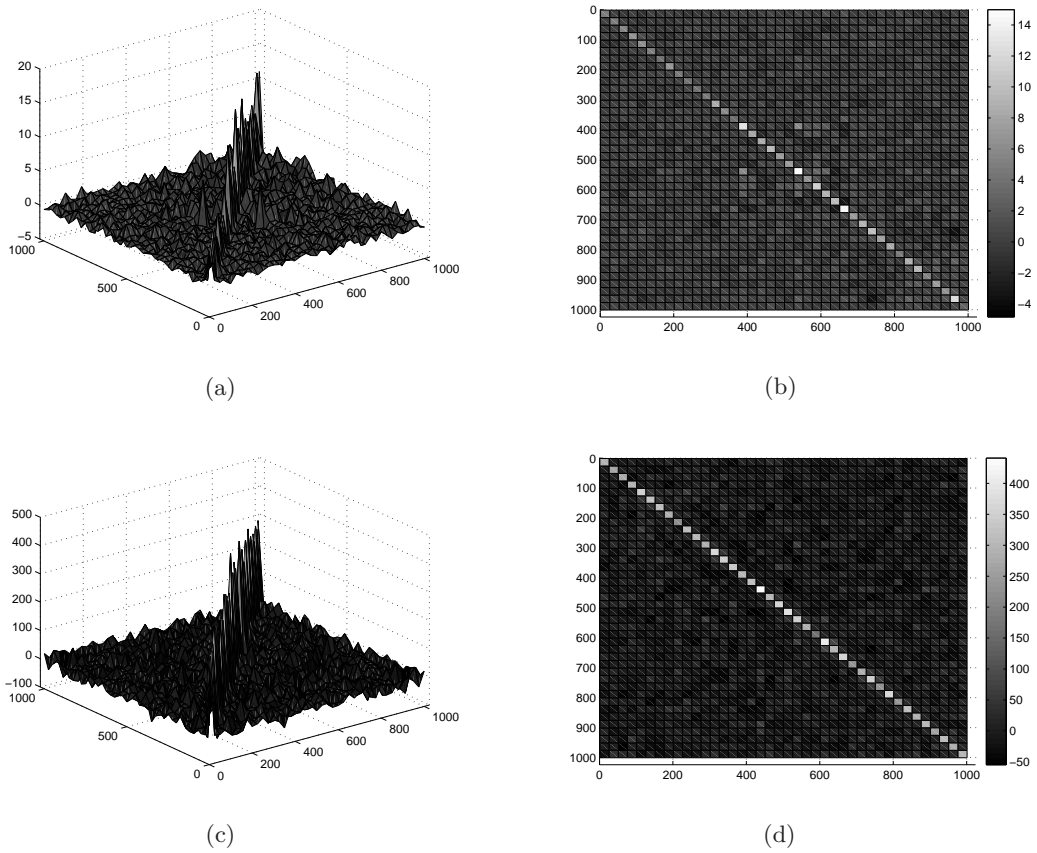


Figura 3.2: Matriz de correlação $\mathbf{R}_r(t)$, para imagens HR 32×32 , considerando os algoritmos: (a) Lucas and Kanade [42]; (b) Lucas and Kanade (vista superior); (c) Mester and Hotter [22]; (d) Mester and Hotter (vista superior).

O vetor $\mathbf{s}(t)$ é também assumido estatisticamente independente dos erros de registro $\Delta\mathbf{G}(t)$.

A3 Os efeitos da dependência estatística entre a matriz de erro de registro $\Delta\mathbf{G}(t)$ e as imagens HR $\mathbf{x}(t-1)$ e $\hat{\mathbf{x}}(t-1)$ podem ser desprezados.

O impacto desta hipótese na validade do modelo analítico irá depender das características específicas da implementação do algoritmo de registro utilizado. Neste trabalho será assumido que $\hat{\mathbf{G}}(t)$, e portanto também $\Delta\mathbf{G}(t)$, é determinado a partir de $\mathbf{y}(t)$ e de $\mathbf{y}(t-1)$. Em geral, A3 será mais válida para pequenos valores de μ . A partir da Eq.(3.6) é possível observar que valores menores de μ tendem a reduzir a correlação entre $\mathbf{y}(t-1)$ e $\hat{\mathbf{x}}(t-1)$;

A4 O vetor de ruído de observação $\mathbf{e}(t)$ é assumido estatisticamente independente dos erros de registro $\Delta\mathbf{G}(t)$ e de qualquer outro sinal no sistema.

3.3 Comportamento do Erro Médio de Reconstrução

Tirando o valor esperado em ambos os lados de (3.14) e usando as hipóteses A1 – A4, chega-se em um modelo para o comportamento médio do erro de reconstrução.

$$E[\mathbf{v}(t)] = [\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)]^K \mathbf{G}(t) E[\mathbf{v}(t-1)]. \quad (3.15)$$

3.4 Comportamento do Erro Quadrático Médio de Reconstrução

Para estudar o comportamento das flutuações do erro de reconstrução em torno da sua média, é definido o erro quadrático médio de reconstrução (MSRE — *Mean-Square Reconstruction Error*) como

$$\text{MSRE} = E[\mathbf{v}^T(t)\mathbf{v}(t)]/M^2, \quad (3.16)$$

em que M^2 é o número de pixels das imagens de alta resolução. Note que o MSRE corresponde à média estatística do vetor quadrático médio amostral do erro de reconstrução para um determinado instante de tempo.

O valor da norma quadrática de $\mathbf{v}(t)$ em (3.16) corresponde a $\text{tr}\{E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)]\} = \text{tr}[\mathbf{K}(t)]$, em que $\mathbf{K}(t)$ é a matriz de autocorrelação de $\mathbf{v}(t)$ e $\text{tr}\{\cdot\}$ denota o traço de uma matriz.

Pós-multiplicando (3.14) pela sua transposta, tirando o valor esperado e usando A1 – A4

e (3.2) tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(t) &= \mathbf{A}^K(t) \left\{ \mathbf{G}(t)\mathbf{K}(t-1)\mathbf{G}^T(t) + \mathbf{G}(t) \mathbb{E}[\mathbf{v}(t-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-1)] \left\{ \mathbb{E}[\hat{\mathbf{G}}^T(t)] - \mathbf{G}^T(t) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \mathbb{E}[\hat{\mathbf{G}}(t)] - \mathbf{G}(t) \right\} \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}(t-1)\mathbf{v}^T(t-1)] \mathbf{G}^T(t) + \mathbf{R}_r(t) + \mathbf{R}_s(t) \right\} \mathbf{A}^K(t) \\
&\quad + \mu^2 \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{R}_e\mathbf{D}(t) \sum_{m=0}^{K-1} \mathbf{A}^m(t). \tag{3.17}
\end{aligned}$$

A avaliação do comportamento do MSRE requer a determinação de uma série de valores esperados em (3.17).

Assumindo que a taxa de aquisição é alta quando comparada com a velocidade dos movimentos presentes na cena (sejam eles movimentos dos objetos ou movimento da câmera), a diferença entre dois quadros consecutivos é quase imperceptível. Assim, as flutuações provenientes de $\mathbf{s}(t)$ podem ser assumidas desprezíveis quando comparadas com as flutuações provenientes de $\mathbf{r}(t)$ (oriundas dos erros de registro). Sob tais condições, a contribuição de $\mathbf{R}_s(t)$ em (3.17) pode ser desprezada quando comparada com a de $\mathbf{R}_r(t)$. Com os resultados da Seção 3.5 será mostrado que esta é uma aproximação razoável em situações práticas, e que sua validade aumenta com o tamanho da imagem.

Para determinar a matriz de correlação $\mathbf{R}_e(t)$ em (3.17), é assumido que o sensor está disponível *a priori* e que a variância do ruído de aquisição possa ser estimada a partir de testes feitos com a câmera a ser utilizada [43].

A avaliação de (3.17) requer ainda a determinação de $\mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}(t-1)\mathbf{v}^T(t-1)]$. Segue de (3.7) que essa esperança pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}(t-1)\mathbf{v}^T(t-1)] &= \mathbb{E}\{[\mathbf{v}(t-1) + \mathbf{x}(t-1)]\mathbf{v}^T(t-1)\} \\
&= \mathbb{E}[\mathbf{v}(t-1)\mathbf{v}^T(t-1)] + \mathbb{E}[\mathbf{x}(t-1)\mathbf{v}^T(t-1)] \\
&= \mathbf{K}(t-1) + \mathbb{E}\{\mathbf{x}(t-1)[\hat{\mathbf{x}}(t-1) - \mathbf{x}(t-1)]^T\} \\
&= \mathbf{K}(t-1) + \mathbb{E}[\mathbf{x}(t-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-1)] - \mathbf{R}_x(t-1) \\
&= \mathbf{K}(t-1) + \mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(t-1) - \mathbf{R}_x(t-1), \tag{3.18}
\end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{x}}^T(t)] \tag{3.19}$$

$$\mathbf{R}_x(t) = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)]. \tag{3.20}$$

A matriz $\mathbf{R}_x(t)$ é função da imagem de alta resolução a ser estimada. A matriz de correlação cruzada $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(t-1)$ pode ser determinada de forma recursiva. Substituindo (3.6) em (3.19) tem-se

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{x}}^T(t-1)\hat{\mathbf{G}}^T(t)]\mathbf{A}^K(t) + \mu \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{y}^T(t)]\mathbf{D}(t) \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t). \tag{3.21}$$

Agora, substituindo (2.1) e (2.3) em (3.21), usando A2 – A4 e usando o fato do $\mathbf{e}(t)$ possuir

média zero,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(t-1)E[\hat{\mathbf{G}}^T(t)]\mathbf{A}^K(t) + \mu\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)\sum_{n=0}^{K-1}\mathbf{A}^n(t). \quad (3.22)$$

Uma expressão para a matriz de correlação $\mathbf{R}_{\mathbf{r}}(t)$ também é necessária na avaliação de (3.17). Considerando A1,

$$\sigma_r^2(t) = \frac{\text{tr}[\mathbf{R}_{\mathbf{r}}(t)]}{M^2}. \quad (3.23)$$

Usando A3 e a propriedade comutativa do traço de um produto de matrizes, tem-se

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{R}_{\mathbf{r}}(t)] &= \text{tr}\{E[\Delta\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-1)\Delta\mathbf{G}^T(t)]\} \\ &= \text{tr}\{E[\hat{\mathbf{x}}(t-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-1)\Delta\mathbf{G}^T(t)\Delta\mathbf{G}(t)]\} \\ &= \text{tr}\{\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}}(t-1)E[\Delta\mathbf{G}^T(t)\Delta\mathbf{G}(t)]\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

em que $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}}(t) = E[\hat{\mathbf{x}}(t)\hat{\mathbf{x}}^T(t)]$. Manipulando algebricamente a expressão de $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}}(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= E[\hat{\mathbf{x}}(t)\hat{\mathbf{x}}^T(t)] \\ &= E\{[\mathbf{v}(t) + \mathbf{x}(t)][\mathbf{v}(t) + \mathbf{x}(t)]^T\} \\ &= E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(t)^T] + E[\mathbf{v}(t)\mathbf{x}(t)^T] + E[\mathbf{x}(t)\mathbf{v}(t)^T] + E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T] \\ &= \mathbf{K}(t) + E[\mathbf{v}(t)\mathbf{x}(t)^T] + E[\mathbf{x}(t)\mathbf{v}(t)^T] + \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{K}(t) + E\{[\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)]\mathbf{x}(t)^T\} + E\{\mathbf{x}(t)[\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)]^T\} + \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{K}(t) + E[\hat{\mathbf{x}}(t)\mathbf{x}(t)^T] - E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T] + E[\mathbf{x}(t)\hat{\mathbf{x}}^T(t)] - E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)] + \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t) \\ &= \mathbf{K}(t) + \mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}^T(t) + \mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(t) - \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

O valor esperado $E[\Delta\mathbf{G}^T(t)\Delta\mathbf{G}(t)]$ em (3.24) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} E[\Delta\mathbf{G}^T(t)\Delta\mathbf{G}(t)] &= E\left\{\left[\hat{\mathbf{G}}(t) - \mathbf{G}(t)\right]^T\left[\hat{\mathbf{G}}(t) - \mathbf{G}(t)\right]\right\} \\ &= E\left[\hat{\mathbf{G}}^T(t)\hat{\mathbf{G}}(t)\right] - E\left[\hat{\mathbf{G}}^T(t)\right]\mathbf{G}(t) - \mathbf{G}^T(t)E\left[\hat{\mathbf{G}}(t)\right] + \mathbf{G}^T(t)\mathbf{G}(t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Por fim, os valores esperados $E[\hat{\mathbf{G}}(t)]$ e $E[\hat{\mathbf{G}}^T(t)\hat{\mathbf{G}}(t)]$, que aparecem em (3.17)–(3.26), devem ser determinados a partir das características do algoritmo de registro utilizado e das propriedades estatísticas da seqüência de imagens.

Na seção que se segue, uma modelagem analítica desses valores esperados é proposta, permitindo que seja obtido um modelo totalmente analítico para o comportamento quadrático médio do algoritmo LMS-SRR. Entretanto, como a determinação desses valores esperados pode apresentar uma elevada complexidade computacional, a Seção 3.4.2 discute a determinação desses momentos por métodos numéricos, o que pode poupar significativamente recursos computacionais.

3.4.1 Caracterização estatística da matriz de registro estimada

Considere que apenas uma estimativa $\hat{\Delta}(t)$ do vetor de deslocamento esteja disponível. Escrevendo

$$\hat{\Delta}(t) = [\hat{\Delta}_l(t), \hat{\Delta}_c(t)] = [\Delta_l(t) + \epsilon_l(t), \Delta_c(t) + \epsilon_c(t)], \quad (3.27)$$

em que $\epsilon_l(t)$ e $\epsilon_c(t)$ são os erros de estimação de movimento na direção das linhas e das colunas da imagem, respectivamente, segue direto de (2.10) a expressão que define os elementos da matriz de registro estimada $\hat{\mathbf{G}}(t)$:

$$\hat{g}_{i,j}(t) = h[d_c(t), \hat{\Delta}_c(t)] h[d_l(t), \hat{\Delta}_l(t)]. \quad (3.28)$$

Neste trabalho, $\Delta_l(t)$ e $\Delta_c(t)$ são assumidos determinísticos, enquanto os erros de estimação $\epsilon_l(t)$ e $\epsilon_c(t)$ em (3.27) são assumidos gaussianos com média zero, estatisticamente independentes entre si, e com variâncias $\sigma_l^2(t)$ e $\sigma_c^2(t)$, respectivamente. Como será visto na Seção 3.5, essa hipótese leva a uma boa predição do comportamento do algoritmo LMS-SRR mesmo quando, em situações práticas, os erros de registros não são gaussianos.

Momento de primeira ordem

Sendo $\epsilon_l(t)$ e $\epsilon_c(t)$ assumidos independentes entre si, o valor esperado de (3.28) resulta em

$$\mathbb{E}[\hat{g}_{i,j}(t)] = \mathbb{E} \left\{ h[d_c(t), \hat{\Delta}_c(t)] \right\} \mathbb{E} \left\{ h[d_l(t), \hat{\Delta}_l(t)] \right\}. \quad (3.29)$$

De forma a simplificar a dedução que se segue, ambas esperanças em (3.29) podem ser escritas, em uma forma geral, como:

$$\mathbb{E} \left\{ h[d, \hat{\Delta}(t)] \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h[d, \hat{\Delta}(t)] f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t), \quad (3.30)$$

em que $f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)]$ é a função densidade de probabilidade assumida para $\hat{\Delta}(t)$. Considerando a modelagem de $\hat{\Delta}(t)$ e as distribuições assumidas para o erro de registro (gaussianas), e considerando os limites de integração que podem ser obtidos da Figura 2.5, segue de (3.30) que (ver Apêndice A)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ h[d, \hat{\Delta}(t)] \right\} &= \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d-1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d+1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] + \frac{d-1-\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{d-1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \\ &- [d-\Delta(t)] \operatorname{erf} \left(\frac{d-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) + \frac{d+1-\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{d+1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que σ^2 é a variância de $\hat{\Delta}(t)$. Usando (3.31) em (3.29), chega-se ao modelo para o comportamento médio de $\hat{\mathbf{G}}(t)$.

Momento de segunda ordem

Considerando movimento global, descrito pelo vetor definido em (3.27), e assumindo erros de estimação $\epsilon_l(t)$ e $\epsilon_c(t)$ independentes entre si, o momento de segunda ordem de (3.28) pode ser avaliado por meio de:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{g}_{i,j}(t)\hat{g}_{m,n}(t)] &= \mathbb{E}\left\{h[d_{c_{i,j}}(t), \hat{\Delta}_c(t)]h[d_{c_{m,n}}(t), \hat{\Delta}_c(t)]\right\} \\ &\quad \times \mathbb{E}\left\{h[d_{l_{i,j}}(t), \hat{\Delta}_l(t)]h[d_{l_{m,n}}(t), \hat{\Delta}_l(t)]\right\}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

em que $d_{c_{i,j}}(t) = c_i(t) - c_j(t - 1)$, $c_i(t)$ é o índice da coluna para o pixel i de $\mathbf{x}(t)$ e $c_j(t - 1)$ é o índice da coluna para o pixel j de $\mathbf{x}(t - 1)$. A mesma analogia deve ser feita para definir as variáveis $d_{l_{i,j}}(t)$, $d_{c_{m,n}}(t)$ e $d_{l_{m,n}}(t)$.

Assim como na seção anterior, escrevendo as esperanças em (3.32) com uma notação genérica, e observando os intervalos não-nulos da função $h(\cdot)$, é possível mostrar que (ver Apêndice A)

$$\mathbb{E}\left\{h[d_{i,j}, \hat{\Delta}(t)]h[d_{m,n}, \hat{\Delta}(t)]\right\} = \sum_{k=1}^4 f_k, \quad (3.33)$$

em que $d_{i,j} = i - j$, $d_{m,n} = m - n$,

$$f_k = \begin{cases} p_k & \text{se } a_k < b_k \\ 0 & \text{se } a_k \geq b_k \end{cases} \quad (3.34)$$

com

$$a_k = \max(d_{i,j} + \kappa_{i,j_k}, d_{m,n} + \kappa_{m,n_k}) \quad (3.35)$$

$$b_k = \min(d_{i,j} + \kappa_{i,j_k} + 1, d_{m,n} + \kappa_{m,n_k} + 1), \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
p_k = & \left[(-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{i,j} d_{m,n} + (-1)^{\kappa_{i,jk}} d_{i,j} + (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{m,n} + 1 \right] \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right]_{a_k}^{b_k} \\
& + \left[-(-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{i,j} - (-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{m,n} - (-1)^{\kappa_{i,jk}} - (-1)^{\kappa_{m,nk}} \right] \\
& \times \left\{ \frac{\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \right\}_{a_k}^{b_k} \\
& + (-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} \left\{ \frac{\sigma^2 + \Delta^2(t)}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] \right. \\
& \left. - \frac{\hat{\Delta}(t) + \Delta(t)}{2} \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \right\}_{a_k}^{b_k}, \tag{3.37}
\end{aligned}$$

e

$$\kappa_{i,j_1} = \kappa_{i,j_3} = \kappa_{m,n_1} = \kappa_{m,n_4} = -1 \tag{3.38}$$

$$\kappa_{i,j_2} = \kappa_{i,j_4} = \kappa_{m,n_2} = \kappa_{m,n_3} = 0. \tag{3.39}$$

Usando (3.32)-(3.39), os elementos $r_{i,j}(t)$ de $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{G}}}(t) = \mathbf{E}[\hat{\mathbf{G}}^T(t)\hat{\mathbf{G}}(t)]$ podem ser determinados via

$$r_{i,j} = \sum_{k=1}^{M^2} \mathbf{E}[\hat{g}_{k,i}(t)\hat{g}_{k,j}(t)]. \tag{3.40}$$

A determinação dos momentos de segunda ordem requer uma grande carga computacional, principalmente devido ao somatório em (3.40). Entretanto, essa carga pode ser consideravelmente reduzida se forem utilizadas rotinas numéricas que considerem a esparsidade das matrizes $\mathbf{E}[\hat{\mathbf{G}}(t)]$ e $\mathbf{E}[\hat{\mathbf{G}}^T(t)\hat{\mathbf{G}}(t)]$. Por exemplo, uma vez que os elementos de $\hat{\mathbf{G}}(t)$ são não-negativos, eles possuem média maior ou igual a zero. Assim, se $\mathbf{E}[\hat{g}_{i,j}(t)] = 0$ para algum i e j , isto significa que $\hat{g}_{ij}(t) = 0$, e $\mathbf{E}[\hat{g}_{ij}(t)\hat{g}_{mn}(t)]$ será igual a zero para quaisquer valores de m e n . Desta forma, o cálculo da maioria das esperanças em (3.40) pode ser evitado, baseado no comportamento do momento de primeira ordem.

Consideração de diferentes condições de fronteira

A função $h(\cdot)$ em (2.9) descreve a condição de fronteira de Dirichlet, a qual assume que os pixels fora da área da imagem possuem valores nulos. Embora bastante intuitiva, a consideração de outras condições de fronteira merece alguns comentários.

Quando as imagens são consideradas com periodicidade circular, $h(\cdot)$ deve apresentar a mesma periodicidade. Uma versão de $h(\cdot)$ com periodicidade circular e com período M pode ser definida como:

$$h_p[i, j, \Delta(t), M] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h\{[i - (j + kM)], \Delta(t)\}. \tag{3.41}$$

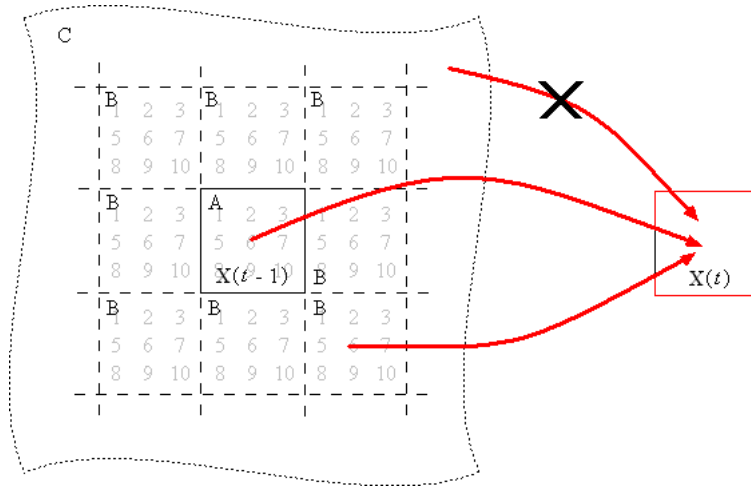


Figura 3.3: Regiões de uma cena (assumida com periodicidade circular), no instante de tempo $t - 1$, que pode (regiões A e B) ou não (região C) conter pixels de $\mathbf{X}(t)$.

Para fins práticos, $h_p(\cdot)$ não precisa ser avaliada para $-\infty < k < +\infty$, como definido em (3.41). Apenas três períodos de $h_p(\cdot)$ precisam ser considerados na determinação dos momentos da matriz de registro estimada.

Note que, de acordo com a definição do problema de SRR, apenas há sentido em super-resolver regiões da cena que apareçam em ambas as imagens da seqüência, $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{X}(t - 1)$. Tratando-se de movimentos translacionais e globais, isto implica em o movimento relativo entre dois quadros de uma seqüência ser limitado ao tamanho das imagens em questão. Uma ilustração desse caso é apresentada na Figura 3.3, em que dado um movimento pequeno relativamente ao tamanho da imagem, pixels que estão presentes em $\mathbf{X}(t)$ devem ser originados da própria imagem no instante $t - 1$ (região A), ou de regiões vizinhas à ela (região B). Fica claro, a partir dessa figura, que apenas três períodos de $h_p(\cdot)$ são necessários para o cálculo dos momentos de $\hat{g}_{i,j}(t)$. Sendo os pixels de $\mathbf{X}(t)$ originados de regiões mais distantes (região C), a magnitude do deslocamento relativo entre as imagens implicaria a impossibilidade de se obter super-resolução.

Quando apenas três períodos da imagem são então considerados, (3.41) se reduz a

$$h_P[i, j, \Delta(t), M] = h\{[i - (j + M)], \Delta(t)\} + h\{[i - j], \Delta(t)\} + h\{[i - (j - M)], \Delta(t)\}, \quad (3.42)$$

em que o subscrito maiúsculo P (em vez de p) é utilizado para distinguir a versão truncada (em 3 períodos) de $h_p(\cdot)$.

Para a condição de fronteira de Neumann, os pixels da região B (ver Figura 3.3) devem ser espelhados em relação ao limite da imagem. Assim, seguindo o mesmo raciocínio acima,

a nova função periódica, considerando apenas três períodos, pode ser definida como:

$$\begin{aligned} h_N[i, j, \Delta(t), M] = & h\{i - [M + 1 - (j + M)], \Delta(t)\} \\ & + h\{i - [M + 1 - (j - M)], \Delta(t)\} \\ & + h[(i - j), \Delta(t)]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

As funções (3.42) e (3.43) devem ser usadas no lugar de (2.9) quando as condições de fronteira de periodicidade circular ou de Neumann forem assumidas.

3.4.2 Implementação do modelo

O modelo do erro quadrático médio derivado na Seção 3.3 é função de dois valores esperados avaliados na seção anterior: $E[\hat{\mathbf{G}}(t)]$ e $E[\hat{\mathbf{G}}^T(t)\hat{\mathbf{G}}(t)]$. Nesta seção é mostrado que em situações de interesse prático tais valores esperados podem ser determinados com custo computacional relativamente baixo quando:

1. O movimento relativo entre as imagens é translacional, global, e com passos inteiros na grade de alta resolução. Este caso corresponde, por exemplo, a movimentos translacionais da câmera durante a aquisição, como ocorre em escaneamento de imagens, aquisição aérea de imagens, inspeção visual (*machine vision*), dentre outras aplicações.
2. $\mathbf{G}(t)$ é construída assumindo a periodicidade circular das imagens para determinar os pixels das regiões de fronteira após o deslocamento.

Um movimento global em uma imagem pode ser modelado através de um processo de convolução. Por exemplo, mover uma imagem um pixel para a esquerda corresponde a convolver a imagem com uma máscara $[0 \ 0 \ 1]$. Portanto, neste caso a matriz $\mathbf{G}(t)$ implementa o processo de convolução. Dentro das duas condições acima enumeradas, o vetor $\mathbf{x}(t-1)$ tem os mesmos elementos de $\mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t-1)$ em (2.3), apenas rearranjados em ordem diferente. Assim, $\mathbf{G}(t)$ opera como uma matriz de permutação nas linhas de $\mathbf{x}(t-1)$ e possui posto completo. Então, é possível mostrar que a matriz de registro estimada $\hat{\mathbf{G}}(t)$ pode ser também representada por um produto de matrizes:

$$\hat{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{G}(t) + \Delta\mathbf{G}(t) = \tilde{\mathbf{G}}(t)\mathbf{G}(t). \quad (3.44)$$

Uma vez que $\mathbf{G}(t)$ possui posto completo, haverá sempre uma solução única $\tilde{\mathbf{G}}(t) = [\mathbf{G}(t) + \Delta\mathbf{G}(t)]\mathbf{G}^{-1}(t)$ que satisfaz (3.44) para qualquer $\Delta\mathbf{G}(t)$. Em (3.44), o movimento estimado $\hat{\mathbf{G}}(t)$ pode ser interpretado como o movimento correto $\mathbf{G}(t)$ seguido por um erro de movimento $\tilde{\mathbf{G}}(t)$.

Tirando o valor esperado de $\hat{\mathbf{G}}(t)$ e de $\hat{\mathbf{G}}^T(t)\hat{\mathbf{G}}(t)$, segue de (3.44) que

$$E[\hat{\mathbf{G}}(t)] = E[\tilde{\mathbf{G}}(t)]\mathbf{G}(t) \quad (3.45)$$

Tabela 3.1: Estimação recursiva de $\mathbf{K}(t)$

Inicialização:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(0) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(1) = \text{interpolação de } \mathbf{y}(1)$$

$$\mathbf{v}(1) = \hat{\mathbf{x}}(1) - \mathbf{x}(1)$$

$$\mathbf{K}(1) = \mathbf{v}(1)\mathbf{v}^T(1)$$

$$L = \text{número de iterações para as simulações de Monte Carlo}$$

$$E[\tilde{\mathbf{G}}(t)] \simeq \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tilde{\mathbf{G}}(i)^\dagger$$

$$E[\tilde{\mathbf{G}}^T(t)\tilde{\mathbf{G}}(t)] \simeq \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tilde{\mathbf{G}}^T(i)\tilde{\mathbf{G}}(i)$$

$$E[\hat{\mathbf{G}}(1)] = E[\tilde{\mathbf{G}}(1)]\mathbf{G}(1)$$

Algoritmo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Laço em } t = 2, 3, 4, \dots \\ \text{Determinar } \mathbf{R}_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(t-1) \text{ via Eq.(3.22)} \\ \text{Determinar } E[\Delta\mathbf{G}^T(t)\Delta\mathbf{G}(t)] \text{ via Eq.(3.26)} \\ \text{Determinar } \sigma_r^2(t) = \text{tr}[\mathbf{R}_r(t)]/M^2 \text{ via Eq.(3.24)} \\ \text{Determinar } \mathbf{R}_r(t) = \sigma_r^2(t)\mathbf{I} \\ \text{Determinar } E[\hat{\mathbf{x}}(t-1)\mathbf{v}^T(t-1)] \text{ via Eq.(3.18)} \\ \text{Determinar } \mathbf{K}(t) \text{ via Eq.(3.17)} \end{array} \right.$$

$^\dagger \tilde{\mathbf{G}}(i)$ é construída a partir dos erros de registro, modelados como variáveis aleatórias i.i.d. com propriedades estatísticas estimadas a partir do algoritmo de registro.

e

$$E[\hat{\mathbf{G}}^T(t)\hat{\mathbf{G}}(t)] = \mathbf{G}^T(t) E[\tilde{\mathbf{G}}^T(t)\tilde{\mathbf{G}}(t)]\mathbf{G}(t). \quad (3.46)$$

Assumindo que a seqüência de imagens a ser reconstruída é estacionária, é razoável esperar que o erro de registro seja também estacionário. Situações típicas em que isso ocorre correspondem a aplicações em que existe movimento da câmera em torno de um objeto e em inspeção visual (*machine vision*). Uma vez que a estacionaridade é assumida, os valores esperados em (3.45) e em (3.46) são invariantes em t , e podem ser determinados *a priori* a partir do conhecimento das características do erro de registro.

Baseado exatamente nas mesmas hipóteses assumidas na seção anterior, é ainda possível determinar (3.45) e (3.46) numericamente. A determinação numérica é considerada na implementação apresentada nesta seção, assim como na próxima, por motivos de custo computacional. Entretanto, a determinação analítica pode ser facilmente substituída no algoritmo que se segue.

O algoritmo final para determinar $\mathbf{K}(t)$ é detalhado na Tabela 3.1.

Tabela 3.2: Custo computacional

| Equação | Custo (flops) |
|--------------------------------------|-------------------------|
| (3.15) | $2M^4 - M^2$ |
| (3.22) | $6M^6 - 2M^4$ |
| (3.26) | $M^4 + M^2$ |
| (3.18) | $2M^4$ |
| $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}}(t-1)$ | M^4 |
| $\mathbf{R}_{\mathbf{r}}(t)$ | $2M^6 - M^4 + 2M^2 + 1$ |
| (3.17) | $6M^6 + 2M^2$ |
| $\text{tr}[\mathbf{K}(t)]$ | $M^2 - 1$ |

Complexidade computacional

A complexidade computacional requerida para implementar o modelo teórico proposto depende de diversos fatores, incluindo as técnicas empregadas para lidar com as operações com matrizes esparsas e a otimização do código. Visto que a otimização da implementação dos modelos não está no escopo deste trabalho, apenas uma estimativa bastante simplificada da ordem de magnitude esperada para a carga computacional do modelo de segunda ordem é avaliada.

Nos cálculos apresentados, a etapa de inicialização do algoritmo (ver Tabela 3.1 para maiores detalhes) é desconsiderada. Também, $\mathbf{D}(t)$ é assumida invariante no tempo. Além disso, todas as matrizes que são independentes de t e seus produtos podem ser determinados *a priori*, não contribuindo para o aumento do custo computacional. Por fim, $\mathbf{G}(t)$ é uma matriz de permutação. Sendo assim, pré- e pós-multiplicações por $\mathbf{G}(t)$ não envolvem operações de ponto flutuante (flops — *float point operations*).

Na Tabela 3.2 é apresentado o custo computacional para os modelos propostos, considerando (3.15) e (3.17) (seguindo a seqüência especificada na Tabela 3.1), usando as considerações acima e desprezando as características de esparcidade das matrizes envolvidas. Assim, assumindo imagens de alta resolução com dimensão $M \times M$, o custo computacional total é $14M^6 + 3M^4 + 5M^2$ flops. Considerando que todos os produtos de matrizes envolvem pelo menos uma matriz esparsa, é possível presumir que uma estimativa de custo computacional mais realista seria em torno de $\mathcal{O}(M^4)$ flops, dependendo da implementação adotada.

3.5 Resultados

Nesta seção são apresentados resultados de simulações utilizando os modelos propostos neste capítulo. O objetivo de tais simulações é comparar o comportamento desses modelos com simulações de Monte Carlo (MC), verificando assim as suas acurácias e validando as hipóteses usadas na análise. Inicialmente serão descritas algumas condições gerais de simulação e serão fornecidos os detalhes de modelagem comuns a todos os exemplos a serem apresentados. As especificidades de cada exemplo e os resultados obtidos serão então descritos em subseções distintas.

3.5.1 Condições gerais

Em todas as simulações, a matriz de degradação $\mathbf{D}(t)$ é assumida determinística e invariante no tempo. Sendo assim, $\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}$. A subamostragem desempenhada por \mathbf{D} modela a integração espacial que ocorre em sensores do tipo CCD, com área quadrada e fotossensibilidade uniforme, desprezando a distância interpixel [44]. É considerado um fator de subamostragem de 2:1, de forma que as imagens HR são duas vezes maiores do que as imagens LR. A subamostragem é implementada por um processo de convolução com uma máscara 2×2 uniforme com ganho unitário, seguido de uma subamostragem ideal (impulsiva) com fator 2:1. Outras distorções ópticas (*blurring*) não são consideradas, mas poderiam ser incorporadas na matriz \mathbf{D} sem conseqüências para a análise.

Os vetores de deslocamento global (livres de erros de estimação) $\mathbf{\Delta}(t) = [\Delta_l(t), \Delta_c(t)]$, são gerados a partir de um processo aleatório bi-dimensional com passos i.i.d. de magnitude zero ou ± 1 nas direções das linhas e/ou das colunas da imagem [19, 22, 45]. O vetor de deslocamento estimado é modelado conforme

$$\hat{\mathbf{\Delta}}(t) = \mathbf{\Delta}(t) + \mathbf{\Delta}_\epsilon(t), \quad (3.47)$$

em que $\mathbf{\Delta}_\epsilon(t) = [\epsilon_l(t), \epsilon_c(t)]$ é o erro de registro, modelado como um ruído branco gaussiano de média zero. Esta hipótese alcança resultados muito bons mesmo para algoritmos de registro para os quais $\mathbf{\Delta}_\epsilon(t)$ é sabidamente não-gaussiano [22]. Os erros de registro $\epsilon_l(t)$ e $\epsilon_c(t)$ em ambas as direções são assumidos ser independentes entre si, com variâncias σ_l^2 e σ_c^2 , respectivamente. Para os experimentos que se seguem, σ_l^2 e σ_c^2 foram estimados numericamente durante as simulações de MC (*online*). Essas variâncias poderiam ser estimadas *a priori* em simulações mais genéricas, considerando cada um dos algoritmos de registro a serem utilizados. Elas podem ainda ser obtidas, no futuro, a partir de modelos estocásticos de tais algoritmos, à medida em que tais modelos se tornem disponíveis.

De forma a ser possível verificar a acurácia do modelo teórico proposto frente às simulações de MC, é necessário que a matriz de registro $\mathbf{G}(t)$ seja conhecida. Assim, para fins de simulação, as seqüências de imagens HR foram geradas a partir de imagens maiores de acordo com a dinâmica descrita na Figura 2.1, considerando movimento conhecido. As seqüências usadas nas simulações de MC foram então sinteticamente geradas a partir de vetores $\mathbf{\Delta}(t)$ pré-definidos e de imagens comuns em processamento de sinais, como por exemplo Lena, Camera man e Baboon, dentre outras (cenas bastante distintas entre si). Por fim, as seqüências geradas foram redimensionadas (em geral, reduzidas) para as dimensões consideradas para a alta resolução de cada simulação específica.

A matriz $\tilde{\mathbf{G}}(t)$ é gerada a partir do erro aleatório $\mathbf{\Delta}_\epsilon(t)$, seguindo os mesmos passos descritos na Seção 2.2.4 para gerar $\mathbf{G}(t)$ a partir de um vetor de deslocamento. Os momentos de primeira e segunda ordens da matriz de registro estimada, em (3.45) e (3.46), quando determinados numericamente, o foram por meio de 500 realizações ($L = 500$ na Tabela 3.1).

Por simplicidade matemática, a análise assume a periodicidade circular das imagens para definir a estrutura da matriz $\mathbf{G}(t)$. Entretanto, é conhecido que os melhores resultado per-

ceptuais são geralmente alcançados assumindo periodicidade linear, conhecida como condição de fronteira de Neumann [33].

Para verificar a aplicabilidade do modelo proposto em situações práticas, as predições do modelo teórico derivado utilizando periodicidade circular são verificadas contra simulações de MC implementadas com a condição de fronteira Neumann. Os resultados das simulações mostram que o impacto desta simplificação na estimação do comportamento do algoritmo em condições reais de aplicação é mínimo. Essa simplificação tende a ser mais válida em diversas aplicações típicas, em que os *outliers* representam apenas uma pequena fração do total de pixels da imagem. Note, entretanto, que esta análise não foca a influência das inovações no desempenho do algoritmo. Tipicamente, regiões de fronteira e outros tipos de *outliers* tendem a ser descartados [37, 38, 46] ou penalizados [13] quando novos algoritmos são propostos para resolver o problema de SRR. As simulações de MC do algoritmo são realizadas considerando 100 realizações, para todos os exemplos abaixo.

A matriz $\mathbf{R}_x(t)$ é estimada a partir das imagens HR originais, para cada instante de tempo t . A variância do ruído aditivo em (2.1) é assumida $\sigma_e^2 = 10$, o que leva a valores médios² de Relação Sinal-Ruído de Pico (PSNR — *Peak Signal-to-Noise Ratio*) $\simeq 38dB$ e Relação Sinal-Ruído (SNR — *Signal-to-Noise Ratio*) $\simeq 23dB$, para

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{255^2 N^2}{[\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}\mathbf{x}(t)]^T [\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}\mathbf{x}(t)]} \quad (3.48)$$

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{[\mathbf{D}\mathbf{x}(t) - \phi]^T [\mathbf{D}\mathbf{x}(t) - \phi]}{\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t)}, \quad (3.49)$$

em que N é o número de pixels das imagens de baixa resolução e ϕ é a média espacial do vetor $\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$.

3.5.2 Exemplo 1

Ao simplificar (3.17), os efeitos de $\mathbf{R}_s(t)$ foram desprezados, quando comparados com os efeitos de $\mathbf{R}_r(t)$ definida na Seção 3.2. Essa aproximação desconsidera os efeitos das regiões de fronteira das imagens, quando comparados aos efeitos dos erros de registro. As simulações a seguir mostram que essa aproximação é válida uma vez que os erros de registro realmente dominam os erros de estimação do algoritmo para tamanhos de imagens condizentes com aplicações reais. Este experimento, entretanto, é proposto para verificar dois importantes aspectos do modelo: (i) O modelo torna-se mais acurado quando o efeito dos pixels próximos às fronteiras das imagens é desconsiderado na avaliação do erro de reconstrução; (ii) A acurácia do modelo aumenta à medida em que o tamanho das imagens aumenta.

Para evidenciar esses dois efeitos, é apresentada uma simulação que representa uma situação em que $\mathbf{R}_r(t) = \mathbf{0}$, ou seja, em que não existe erro de registro. Na Figura 3.4 é mostrado o resultado obtido usando-se imagens de alta resolução com 32×32 pixels. Note que a qualidade do modelo melhora quando os pixels das fronteiras são desconsiderados na avaliação do erro de reconstrução simulado. Na Figura 3.5 é mostrado o resultado sob as

² Promediado sobre o conjunto completo de imagens usado nas simulações.

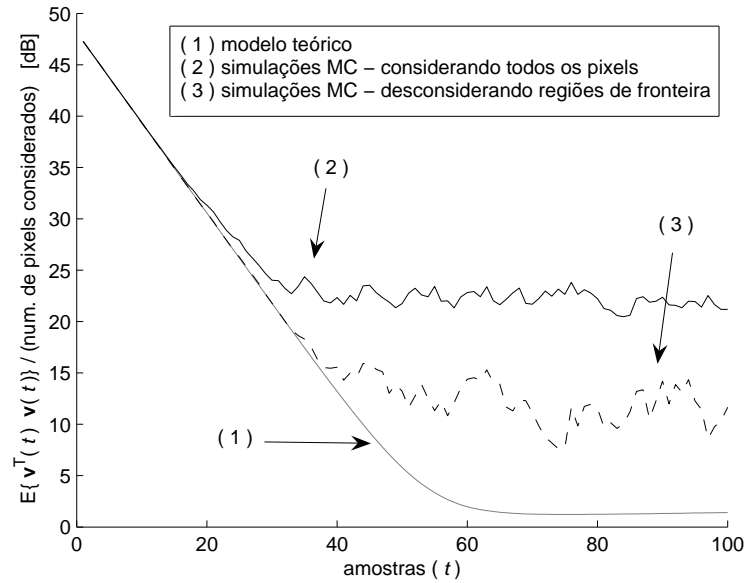


Figura 3.4: Evolução do MSRE. Imagens HR com 32×32 pixels, $K = 4$, $\mu = 0,1$.

mesmas condições da simulação anterior, porém para imagens de alta resolução com 64×64 pixels. A comparação das figuras 3.4 e 3.5 mostra claramente que a qualidade do modelo melhora à medida que o tamanho das imagens aumenta. Como comentário final, note que os efeitos mostrados nessas simulações serão significativos para o desempenho do modelo proposto apenas nos casos em que o erro de registro tende a zero. Para algoritmos de registros tipicamente usados em SRR, esses efeitos tentem a ser mascarados pelos efeitos dos erros de registro, como pode ser verificado nos exemplos seguintes.

3.5.3 Exemplo 2

Este exemplo é proposto com os seguintes objetivos:

- Verificar a acurácia dos modelos do erro médio e quadrático médio de reconstrução para dois algoritmos de registro tipicamente usados em aplicações de SRR;
- Ilustrar a utilidade do modelo proposto no estudo do desempenho do algoritmo LMS-SRR com o uso de diferentes técnicas de registro;
- Discutir o uso do MSRE na avaliação de técnicas de SRR.

Para este exemplo, foram selecionados dois algoritmos de registro bastante conhecidos, com diferentes características. Um deles é o algoritmo proposto por Lucas e Kanade [42], que se baseia na técnica de *fluxo óptico* (*optical flow*), operando sobre os vetores de velocidade de cada pixel, individualmente. O segundo algoritmo foi proposto por Mester e Hotter [22], e assume movimentos translacionais e globais.

Uma vez que o modelo teórico assume movimentos translacionais e globais e o algoritmo de registro em [42] fornece um vetor de velocidades para cada pixel da imagem, a média entre

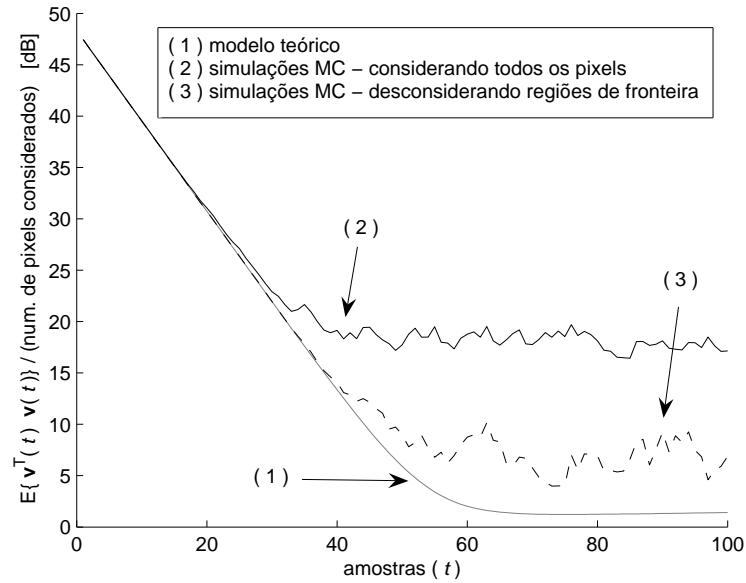


Figura 3.5: Evolução do MSRE. Imagens HR com 64×64 pixels, $K = 4$, $\mu = 0,1$.

esses vetores é assumida como a velocidade global durante a modelagem do desempenho do algoritmo LMS-SRR.

Em situações práticas, o registro entre $\mathbf{x}(t-1)$ e $\mathbf{x}(t)$ precisa ser estimado a partir das observações de baixa resolução. Uma estimação mais acurada é obtida se o registro é efetuado na grade de alta resolução [22]. Nos exemplos que se seguem, os sinais de entrada utilizados em ambos os algoritmos de registro [22, 42] são interpolações bicúbicas de $\mathbf{y}(t-1)$ e $\mathbf{y}(t)$.

A reconstrução baseada apenas na interpolação bicúbica das imagens observadas (LR) é também avaliada. Com base nos resultados de interpolação, o uso do erro quadrático médio como figura de mérito para comparação de desempenho entre algoritmos será discutido.

Na Figura 3.6 é mostrada a evolução do erro médio de reconstrução para o pixel central da imagem, para casos em que movimento conhecido e erros de registro são considerados. As imagens de alta e baixa resolução possuem dimensões 32×32 e 16×16 , respectivamente. A partir dos dois gráficos inferiores é possível notar que o modelo prediz de forma acurada o comportamento médio do erro na presença de erros de registro. O gráfico superior corresponde ao caso em que $\Delta \mathbf{G}(t) = 0$, discutido no Exemplo 1, e o descasamento entre a teoria e a simulação deve-se aos erros de modelagem dos efeitos de fronteira, os quais ficam evidenciados na ausência de erro de registro.

Na Figura 3.7 é mostrada a evolução do MSRE, também para imagens de alta e baixa resolução com tamanhos 32×32 e 16×16 , respectivamente. Como pode ser observado nessas curvas, existe um bom casamento entre os resultados das predições teóricas e das simulações de MC para os diferentes algoritmos de registro. As curvas também indicam que o algoritmo de registro em [42] pode levar a melhores resultados de reconstrução do que o algoritmo em [22].

A linha horizontal (5) na Fig. 3.7 mostra o MSRE obtido via interpolação bicúbica³. A julgar por esses resultados, a interpolação bicúbica seria competitiva com a SRR usando o algoritmo LMS-SRR. Entretanto, esta informação foi incluída para chamar a atenção para o fato de que tal comparação pode levar a interpretações errôneas. É necessário estar atento ao fato de que o MSRE não deve ser usado para comparações entre técnicas de reconstrução estruturalmente diferentes, pois nesses casos valores próximos do erro quadrático médio podem corresponder a diferenças na qualidade perceptual bastante grandes. Este é exatamente o caso que ocorre neste exemplo, em que este efeito é ainda realçado pelo fato de estarem sendo consideradas imagens de tamanho bastante pequeno.

Para verificar algumas das informações oriundas do modelo teórico, a Figura 3.8 apresenta a 100^a imagem da seqüência gerada a partir da imagem Lena, assim como as versões degradada e reconstruída dessa imagem. Essa seqüência corresponde a uma das realizações da simulação estatística. Nas figuras (a) até (e) são mostradas as imagens em tamanho real. Nas figuras (f) até (j) são mostradas versões ampliadas dessas imagens. Comparando as imagens (d) e (e) (ou (i) e (j)), pode ser facilmente confirmado que o melhor resultado de reconstrução, anteriormente previsto pela Figura 3.7, foi o alcançado com o uso da técnica proposta em [42]. A comparação das imagens (c) e (d) (ou (h) e (i)) confirmam que, contrário à conclusão que pode ser tirada a partir dos resultados na Figura 3.7, a reconstrução da imagem usando a interpolação bicúbica leva a um resultado pior do que o alcançado via algoritmo LMS-SRR, usando o algoritmo proposto em [42].

Nas figuras 3.9 e 3.10 são mostrados os resultados obtidos com imagens de 64×64 pixels. Mais uma vez, o modelo teórico prediz muito bem o comportamento do algoritmo. Neste caso, o erro quadrático médio para o LMS-SRR é menor do que para o uso de interpolação bicúbica. Entretanto, como foi discutido, diferenças no erro quadrático médio fornecido por diferentes técnicas de reconstrução nem sempre são coerentes com as respectivas diferenças entre suas qualidades perceptuais. Por fim, na Figura 3.10 é mostrado claramente que o algoritmo LMS-SRR em conjunto com a técnica de registro proposta em [42] fornece resultados de reconstrução bastante satisfatórios.

3.5.4 Exemplo 3

Este exemplo compara os resultados obtidos usando o modelo desenvolvido neste capítulo com um modelo bastante simples proposto em [13], o qual corresponde apenas ao caso particular em que $\mathbf{D}(t) = \mathbf{I}$ no modelo proposto neste trabalho. Note que, neste caso, a resolução é a mesma tanto em alta como em baixa resolução. Assim, todos os vetores em (2.1) têm a dimensão da alta resolução.⁴ As imagens HR utilizadas possuem 32×32 pixels e o algoritmo de registro considerado é o proposto em [42]. Os resultados obtidos podem ser comparados na Figura 3.11. Note que o novo modelo fornece uma estimação bastante superior do comportamento do algoritmo. A rápida convergência e a característica plana das curvas de

³ Este erro é aproximadamente o mesmo para todos os instantes de tempo devido ao modelo de movimento assumido (*random walk* com passos unitários). ⁴ Este caso simples é usado para comparação com o modelo proposto em [13] apenas porque esse é o único modelo encontrado na literatura.

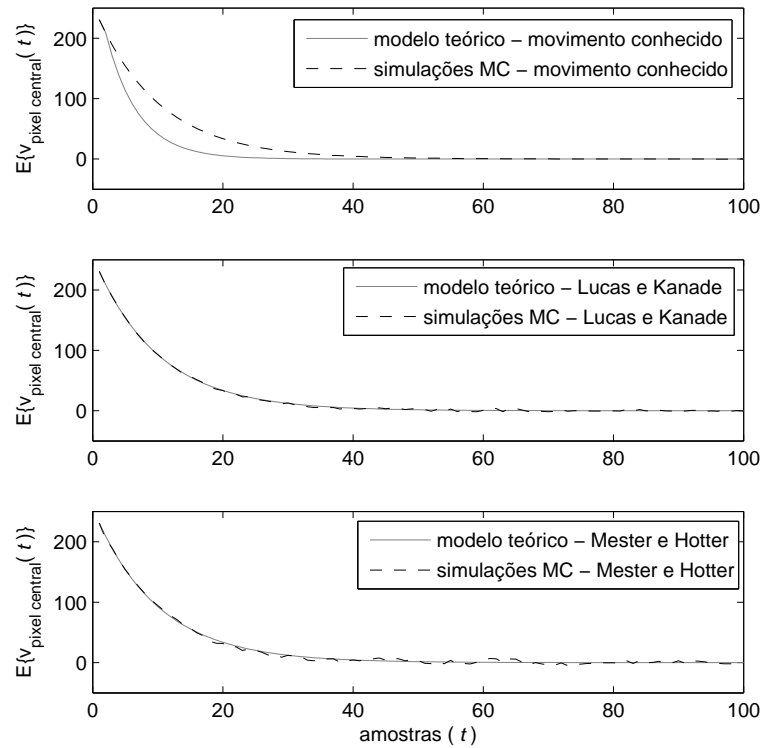


Figura 3.6: Erro médio de reconstrução. Imagens HR com 32×32 pixels, $K = 4$, $\mu = 0, 1$.

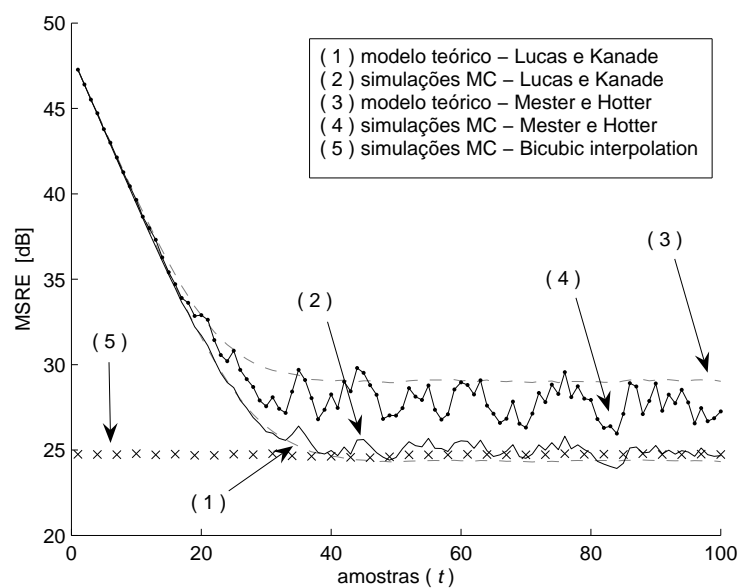


Figura 3.7: Evolução do MSRE. Imagens HR com 32×32 pixels, $K = 4$, $\mu = 0, 1$.

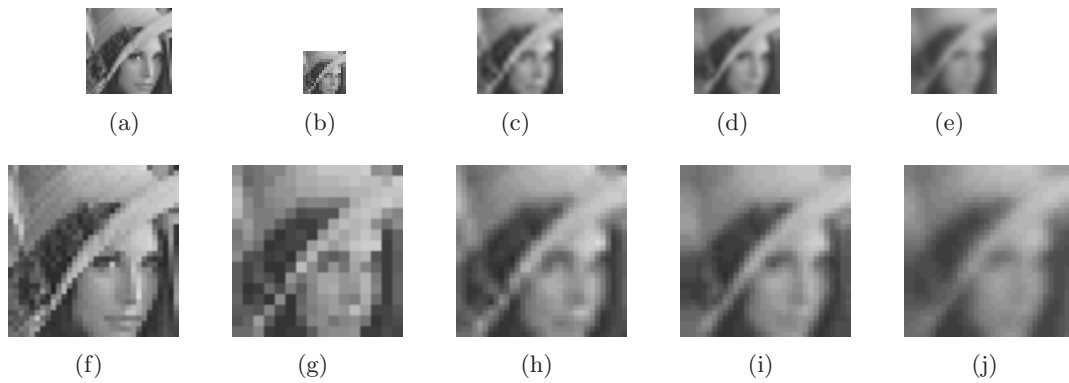


Figura 3.8: Exemplos de resultados de reconstrução usando imagens HR com 32×32 pixels: (a) imagem original (HR); (b) imagem degradada (LR, com 16×16 pixels); (c) reconstrução (HR) via interpolação bicúbica; (d) reconstrução (HR) usando algoritmo de Lucas e Kanade; (e) reconstrução (HR) usando algoritmo de Mester and Hotter; (f)—(j) ampliação de $4\times$ das imagens (a)–(e), respectivamente.

aprendizagem ocorrem porque, dadas às simplificações excessivas feitas neste caso, $\hat{\mathbf{x}}(t) \sim \mathbf{y}(t)$ (ver Eq.(3.6)).

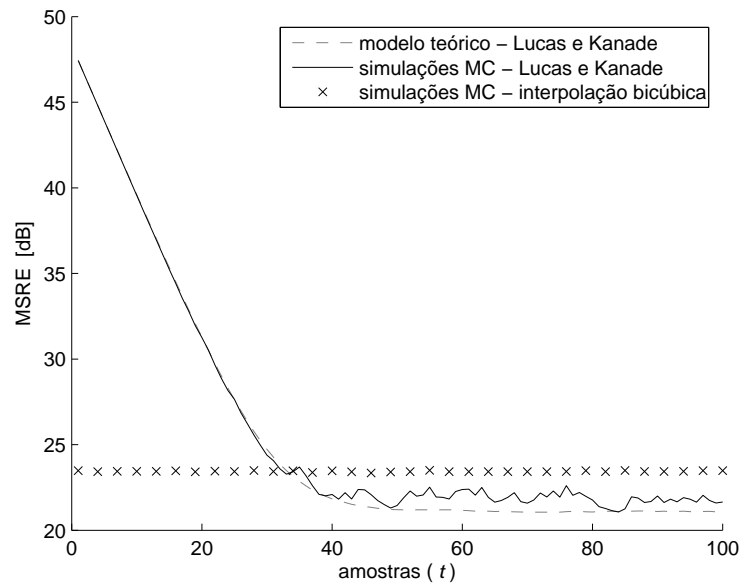


Figura 3.9: Evolução do MSRE. Imagens HR com 64×64 HR pixels, $K = 4$, $\mu = 0,1$.

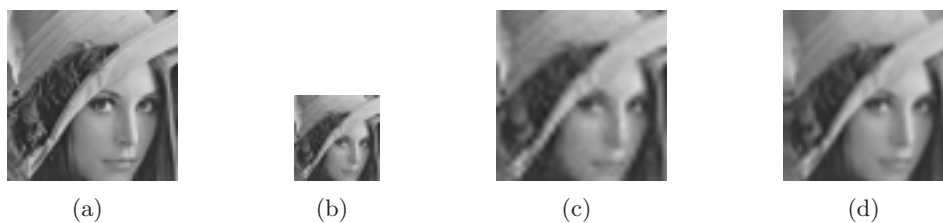


Figura 3.10: Exemplos de reconstrução com imagens de 64×64 pixels: (a) imagem original (HR); (b) imagem degradada (LR) com 32×32 pixels; (c) imagem reconstruída (HR) via interpolação bicúbica; (d) imagem reconstruída (HR) usando o algoritmo de Lucas and Kanade.

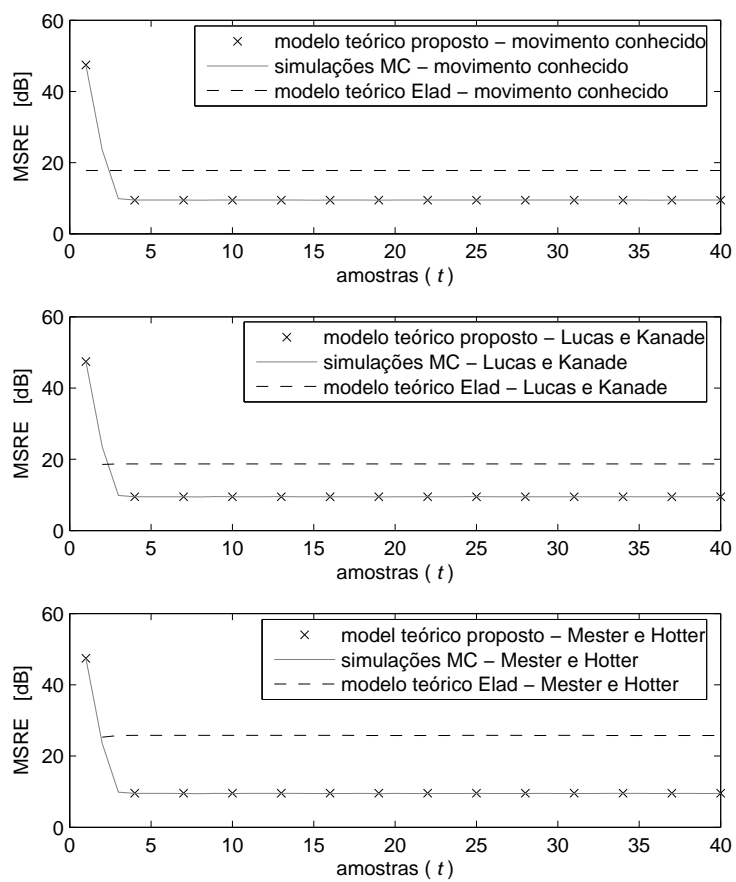


Figura 3.11: Evolução do MSRE. $\mathbf{D}(t) = \mathbf{I}$, $K = 4$, $\mu = 0,5$.

3.6 Resumo

Neste capítulo foi apresentada uma análise estatística para o comportamento do algoritmo LMS-SRR. Foram propostos modelos teóricos para o comportamento médio e quadrático médio do erro de reconstrução, como função dos erros de registro. A implementação e a complexidade dos modelos propostos foram discutidas. Resultados de simulações ilustraram a aplicabilidade dos modelos teóricos na previsão do comportamento real do algoritmo. O comportamento previsto pelo modelo aproxima de forma acurada os resultados de simulações de Monte Carlo.

Partindo do momento de segunda ordem do erro de reconstrução proposto neste capítulo, no próximo capítulo será apresentada outra análise do LMS-SRR, mais direcionada, que leva a uma metodologia de projeto para esse algoritmo. Diretivas de projeto serão definidas, considerando a influência de erros de registro e de inovações no resultado de reconstrução.

Capítulo 4

Projeto do Algoritmo LMS-SRR

O comportamento do algoritmo LMS-SRR foi estudado no capítulo anterior com relação à sensibilidade aos erros no processo de registro. Naquela análise foi assumido que as flutuações no erro de reconstrução causadas pela ocorrência de inovações poderiam ser desprezadas quando comparadas aos efeitos dos erros de registro. Essa hipótese torna o problema matematicamente tratável e, como foi visto, permite a modelagem de importantes propriedades do algoritmo. O modelo teórico proposto abre caminho para uma nova análise estatística do LMS-SRR, buscando uma estratégia de projeto para os parâmetros desse algoritmo.

Como foi discutido no Capítulo 1, a técnica de reconstrução com super-resolução é bastante dependente da qualidade da modelagem adotada. Neste capítulo é apresentado um estudo sobre o projeto do LMS-SRR considerando tanto os erros ocorridos durante a etapa de registro quanto a ocorrência de *outliers* causados pelas inovações entre quadros de uma seqüência. Esse estudo fornece importantes contribuições para o entendimento do comportamento do algoritmo LMS na aplicação de SRR, em relação a como seus parâmetros de projeto influenciam o desempenho do algoritmo.

4.1 Análise Estatística

O presente estudo é direcionado no sentido de definir uma estratégia de projeto que aumente a robustez do processo de reconstrução a *outliers*. Exceto pelos passos iniciais, a análise que se segue possui uma abordagem completamente diferente da proposta no capítulo anterior.

4.1.1 Hipóteses e aproximações estatísticas

Assim como na análise anterior, o estudo das propriedades estatísticas do erro de reconstrução $\mathbf{v}(t)$ a partir de (3.14) requer simplificações que tornem o problema matematicamente tratável. Neste caso, as simplificações necessárias são bastante similares às feitas na Seção 3.2, porém um pouco menos restritivas. Por este motivo, serão novamente listadas e discutidas a seguir:

A1: As inovações $\mathbf{s}(t)$ são assumidas com média zero, com matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_s(t)$

de dimensões $M^2 \times M^2$, e não correlacionadas com $\mathbf{x}(t-1)$.

Esta hipótese é válida, por exemplo, quando as inovações devem-se ao movimento (translacional e global) relativo entre as imagens, e quando a condição de fronteira de Neumann é adotada na construção de $\mathbf{G}(t)$. Este é um caso relevante, uma vez que a condição de Neumann é a que fornece resultados com a melhor qualidade perceptual [33]. Essa hipótese não será válida, por exemplo, quando a condição de fronteira de Dirichlet (*zero padding*) for adotada. O preenchimento das regiões de fronteira com zeros faz com que $\mathbf{s}(t)$ seja sempre não-negativo. Nesse caso, dadas as características espaciais das imagens, $\mathbf{s}(t)$ também será correlacionado com $\mathbf{x}(t-1)$.

Note-se ainda que A1 está relacionada à forma como as inovações (regiões de fronteira) são modeladas. O exemplo acima assume movimento global, por razões didáticas, mas a hipótese não se restringe apenas a esse tipo de movimento.

A2: As inovações $\mathbf{s}(t)$ são assumidas estatisticamente independentes dos erros de registro $\Delta\mathbf{G}(t)$.

A3: O vetor de ruído de observação $\mathbf{e}(t)$ é assumido estatisticamente independente dos erros de registro $\Delta\mathbf{G}(t)$ e de qualquer outro sinal no sistema.

4.1.2 Comportamento do erro quadrático médio de reconstrução

Nesta seção o estudo do desempenho do algoritmo será mais uma vez baseado no erro quadrático médio de reconstrução (MSRE) definido em (3.16). Como foi visto, o MSRE pode ser avaliado via $\text{tr}\{\mathbf{K}(t)\} = \text{tr}\{E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)]\}$, em que $\mathbf{K}(t)$ é a matriz de autocorrelação do erro de reconstrução $\mathbf{v}(t)$ e $\text{tr}\{\cdot\}$ denota o traço de uma matriz.

Pós-multiplicando o vetor de erro de reconstrução (3.14) pelo seu transposto, tirando o valor esperado, e usando A1, A2 e A3, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) = & \mathbf{A}^K(t) E\{[\mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t-1) + \Delta\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)][\mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t-1) + \Delta\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)]^T\} \mathbf{A}^K(t) \\ & + \mathbf{A}^K(t)\mathbf{R}_s(t)\mathbf{A}^K(t) + \mu^2 \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{A}^n(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{R}_e(t)\mathbf{D}(t) \sum_{m=0}^{K-1} \mathbf{A}^m(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que

$$\mathbf{A}(t) = [\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)]. \quad (4.2)$$

Segue de (4.2) que a matriz $\mathbf{A}(t)$ é simétrica e, portanto, pode ser decomposta como

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{Q}^T(t), \quad (4.3)$$

em que $\mathbf{Q}(t)$ é a matriz (ortogonal) de autovetores de $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{\Gamma}(t)$ é a matriz (real e diagonal) de autovalores de $\mathbf{A}(t)$. Além disso, $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)$ tem os mesmos autovetores de $\mathbf{A}(t)$. Da mesma forma, a decomposição de $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)$ em autovalores e autovetores pode ser definida

como

$$\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{\Lambda}(t)\mathbf{Q}^T(t), \quad (4.4)$$

em que $\mathbf{\Lambda}(t)$ é a matriz de autovalores, diagonal e real. Usando (4.2) e (4.4), chega-se em [47]

$$\mathbf{\Gamma}(t) = [\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}(t)]. \quad (4.5)$$

Pré- e pós-multiplicando-se (4.1) por $\mathbf{Q}^T(t)$ e $\mathbf{Q}(t)$, respectivamente, e substituindo (4.3) na equação resultante, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{Q}(t) &= \mathbf{\Gamma}^K(t)\mathbf{Q}^T(t) \mathbb{E}\left\{[\mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t-1) + \mathbf{\Delta}\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)]\right. \\ &\quad \left. \times [\mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t-1) + \mathbf{\Delta}\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)]^T\right\}\mathbf{Q}(t)\mathbf{\Gamma}^K(t) \\ &+ \mathbf{\Gamma}^K(t)\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{R}_s(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{\Gamma}^K(t) \\ &+ \mu^2 \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{\Gamma}^n(t)\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{R}_e(t)\mathbf{D}(t)\mathbf{Q}(t) \sum_{m=0}^{K-1} \mathbf{\Gamma}^m(t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tirando o valor esperado de (4.6), notando que $\text{tr}[\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{Q}(t)] = \text{tr}[\mathbf{K}(t)]$ e usando a propriedade comutativa do produto do traço de matrizes, chega-se no seguinte modelo para o comportamento do MSRE:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{K}(t)] &= \text{tr}\left\{\mathbf{\Gamma}^{2K}(t)\mathbf{Q}^T(t) \mathbb{E}\{[\mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t-1) + \mathbf{\Delta}\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)]\right. \\ &\quad \left. \times [\mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t-1) + \mathbf{\Delta}\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)]^T\right\}\mathbf{Q}(t)\left. \right\} + \text{tr}\left\{\mathbf{\Gamma}^{2K}(t)\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{R}_s(t)\mathbf{Q}(t)\right\} \\ &+ \text{tr}\left\{\mu^2 \sum_{m=0}^{K-1} \mathbf{\Gamma}^m(t) \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{\Gamma}^n(t)\mathbf{Q}^T(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{R}_e(t)\mathbf{D}(t)\mathbf{Q}(t)\right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Interpretações acerca do modelo em (4.7) irão permitir, na próxima seção, que os parâmetros μ e K sejam definidos de forma a melhorar o desempenho do algoritmo na presença de *outliers*.

4.2 Escolha dos Parâmetros do Algoritmo LMS-SRR

Para determinar a escolha dos parâmetros μ e K em (3.6) de forma a reduzir os efeitos de *outliers* nas imagens reconstruídas, cabe lembrar que o vetor $\mathbf{s}(t)$ é responsável pela introdução das inovações no modelo da dinâmica do sinal (2.3), enquanto $\mathbf{\Delta}\mathbf{G}(t)$, em (3.2), modela o efeito dos erros de registro no comportamento do algoritmo.

Por simplicidade de notação, a Eq.(4.7) pode ser escrita como

$$\text{tr}[\mathbf{K}(t)] = \text{tr}[\mathbf{\Gamma}^{2K}(t)\mathbf{M}_1(t)] + \text{tr}[\mathbf{\Gamma}^{2K}(t)\mathbf{M}_2(t)] + \mathbf{T}[\mathbf{e}(t)], \quad (4.8)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(t) &= \mathbf{Q}^T(t) \mathbb{E} \left\{ [\mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t-1) + \Delta\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)] \right. \\ &\quad \left. \times [\mathbf{G}(t)\mathbf{v}(t-1) + \Delta\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)]^T \right\} \mathbf{Q}(t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{M}_2(t) = \mathbf{Q}^T(t) \mathbf{R}_s(t) \mathbf{Q}(t) \quad (4.10)$$

e

$$\mathbf{T}[\mathbf{e}(t)] = \text{tr} \left\{ \mu^2 \sum_{m=0}^{K-1} \mathbf{\Gamma}^m(t) \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{\Gamma}^n(t) \mathbf{Q}^T(t) \mathbf{D}^T(t) \mathbf{R}_e(t) \mathbf{D}(t) \mathbf{Q}(t) \right\}. \quad (4.11)$$

Em (4.8), $\mathbf{M}_1(t)$ é o termo responsável por introduzir o efeito dos erros de registro, enquanto $\mathbf{M}_2(t)$ introduz o efeito das inovações. Além disso, $\mathbf{M}_1(t)$ afeta o comportamento do MSRE em regime transitório, uma vez que depende de $\mathbf{v}(t-1)$. $\mathbf{T}[\mathbf{e}(t)]$ é a parcela referente à contribuição do ruído de observação $\mathbf{e}(t)$.

A análise a seguir concentra-se na redução dos dois primeiros termos de (4.8), uma vez que estes são responsáveis pelas influências mais significativas em aplicações práticas¹. Note também que as matrizes $\mathbf{M}_1(t)$ e $\mathbf{M}_2(t)$ dependem da natureza das imagens consideradas, do algoritmo de registro utilizado, e do movimento entre as imagens. Portanto, a impossibilidade de extrair informação suficiente sobre as relações entre $\mathbf{M}_1(t)$, $\mathbf{M}_2(t)$ e $\mathbf{R}_e(t)$ impede que $\mathbf{T}[\mathbf{e}(t)]$ seja incluído na estratégia de otimização.

A fim de, inicialmente, reduzir a influência das inovações no resultado de reconstrução, uma possível estratégia é escolher um valor para μ e K de forma a reduzir o efeito sobre o traço de $\mathbf{K}(t)$ do termo em (4.8) envolvendo $\mathbf{M}_2(t)$. Como será mostrado, $\mathbf{M}_1(t)$ e $\mathbf{M}_2(t)$ possuem propriedades similares. Assim, a estratégia proposta também irá reduzir o efeito do termo envolvendo $\mathbf{M}_1(t)$, o qual afeta tanto a taxa de convergência quanto o efeito dos erros de registro no desempenho do algoritmo. Uma vez que as matrizes $\mathbf{M}_1(t)$ e $\mathbf{M}_2(t)$ em (4.9) e (4.10), respectivamente, não podem ser diretamente controladas por μ ou K , tal estratégia concentra-se em reduzir os dois primeiros termos em (4.8) pelo ajuste de $\mathbf{\Gamma}^{2K}(t)$.

As seguintes propriedades são importantes para a estratégia de projeto proposta na próxima seção:

- a) Ambas as matrizes $\mathbf{M}_1(t)$ e $\mathbf{M}_2(t)$ ($\mathbf{R}_s(t)$ é semi-definida positiva) podem ser decompostas como produtos de matrizes reais por suas transpostas. Portanto, ambas são matrizes semi-definidas positivas [48, p.558];
- b) Sendo $\mathbf{\Gamma}^{2K}(t)$ uma matriz diagonal, seus elementos atuam como ponderadores das linhas de $\mathbf{M}_1(t)$ e $\mathbf{M}_2(t)$ em (4.9);
- c) Os elementos de $\mathbf{\Gamma}^{2K}(t)$ são não-negativos para quaisquer valores de K e μ ;

¹ A influência do ruído de observação $\mathbf{e}(t)$ pode ser desprezada quando comparada a outras fontes de erro como, por exemplo, registro inacurado e problemas de modelagem das inovações, na maioria das aplicações práticas [1].

- d) Uma vez que $\mathbf{M}_1(t)$ e $\mathbf{M}_2(t)$ são matrizes semi-definidas positivas, os elementos de suas diagonais são não-negativos.

4.2.1 Escolha de μ e K

Em aplicações práticas, informações precisas sobre os elementos de $\mathbf{M}_1(t)$ e de $\mathbf{M}_2(t)$ não estão disponíveis. Entretanto, é razoável assumir o conhecimento de $\mathbf{D}(t)$, o qual pode ser obtido uma vez que se conheça detalhes sobre a implementação do sistema. Assim, é possível escolher μ e K de forma a minimizar os autovalores de $\mathbf{A}^{2K}(t)$ (os quais são os elementos de $\mathbf{\Gamma}^{2K}(t)$) em algum sentido, dado que $\mathbf{D}(t)$ é conhecido, e respeitando o limite de estabilidade do algoritmo [24].

Desprezando o último termo $\mathbf{T}[\mathbf{e}(t)]$ e considerando (4.5), a Eq.(4.8) pode ser reescrita como

$$\text{tr}[\mathbf{K}(t)] \simeq \sum_{i=1}^{M^2} [1 - \mu\lambda_i(t)]^{2K} [m_{2,i,i}(t) + m_{1,i,i}(t)], \quad (4.12)$$

em que M^2 é o número de pixels das imagens HR, e $m_{1,i,i}(t)$ e $m_{2,i,i}(t)$ são, respectivamente, os (i, i) -ésimos elementos de $\mathbf{M}_1(t)$ e $\mathbf{M}_2(t)$. Uma vez que nenhuma informação precisa sobre esses elementos pode ser obtida *a priori* (sabe-se apenas que eles são não-negativos), resta a possibilidade de reduzir $\text{tr}[\mathbf{K}(t)]$ por meio da minimização do máximo valor de $[1 - \mu\lambda_i(t)]^{2K}$.

O passo de convergência do LMS-SRR deve ser positivo e o seu limite de estabilidade é dado por [24]

$$\mu < \frac{2}{\lambda_{\max}(t)}, \quad (4.13)$$

em que $\lambda_{\max}(t)$ é o máximo autovalor de $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)$. Portanto, é fácil mostrar que $[1 - \mu\lambda_i(t)]^2 < 1$ para todos os valores válidos de μ e para todos os valores de i e t . Assim,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} [1 - \mu\lambda_i(t)]^{2K} \rightarrow 0 \quad (4.14)$$

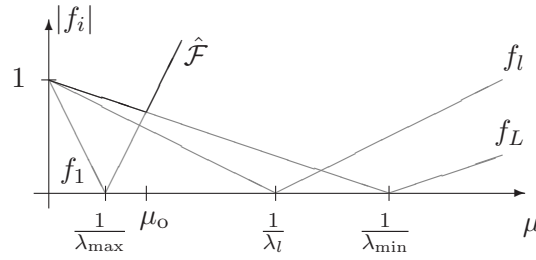
para todos $\lambda_i(t) \neq 0$. Então, exceto sob as circunstâncias bastante especiais que serão discutidas no Exemplo 1 da Seção 4.3, a escolha natural de K é o maior número possível de iterações, limitado apenas pelo custo computacional, pelo *hardware* disponível, e por outros possíveis requisitos da aplicação de tempo-real em questão.

Assumindo um valor pré-determinado (fixo) para K , a escolha do passo de convergência μ pode ser formulada de acordo com o seguinte problema de otimização *minimax*

$$\mu_o = \min_{\mu} \{ \mathcal{F} \}, \quad \text{em que} \quad \mathcal{F} = \max_i f_i^{2K}, \quad \text{sujeito a} \quad |f_i| < 1, \quad (4.15)$$

com $f_i = 1 - \mu\lambda_i(t)$. Este problema pode ser simplificado como:

$$\mu_o = \min_{\mu} \{ \hat{\mathcal{F}} \}, \quad \text{em que} \quad \hat{\mathcal{F}} = \max_i |f_i|, \quad \text{sujeito a} \quad |f_i| < 1. \quad (4.16)$$


 Figura 4.1: Problema *minimax*.

Deste ponto em diante, apenas os valores positivos (maiores do que zero) de $\lambda_i(t)$ serão considerados. Uma vez que f_i não é função de μ para valores de $\lambda_i(t) = 0$, não faz sentido que esses autovalores sejam incluídos na minimização. Em implementações reais, podem ser considerados no problema de otimização apenas os autovalores mais significativos. Por exemplo, pode-se considerar os L maiores autovalores tais que sua soma represente uma porcentagem representativa da soma de todos os autovalores.

Na Figura 4.1 é mostrado o valor absoluto dos valores de f_i e \mathcal{F} , assumindo que $\lambda_1(t) > \lambda_l(t) > \lambda_L(t)$ [49]. O mínimo de $\hat{\mathcal{F}}$ ocorre para

$$-[1 - \mu\lambda_{\max}(t)] = [1 - \mu\lambda_{\min}(t)]. \quad (4.17)$$

Resolvendo (4.17) para μ , tem-se

$$\mu_o = \frac{2}{\lambda_{\max}(t) + \lambda_{\min}(t)}. \quad (4.18)$$

O ponto $\mu = \mu_o$ também é mostrado na Figura 4.1, e leva a

$$[1 - \mu_o\lambda_{\max}(t)]^{2K} = [1 - \mu_o\lambda_{\min}(t)]^{2K}. \quad (4.19)$$

Na maioria das aplicações práticas, $\mathbf{D}(t)$ é invariante no tempo. Sendo assim, o problema acima define um passo ótimo (no sentido do problema de otimização formulado) válido para qualquer instante t .

4.3 Resultados

Nesta seção são apresentados resultados de simulações considerando a estratégia proposta para a escolha dos parâmetros do algoritmo LMS-SRR. O objetivo principal dos exemplos apresentados é verificar a validade da análise apresentada neste capítulo, e mostrar que o passo de convergência recomendado encontra-se na região do ótimo, mesmo quando condições reais de SRR são consideradas.

4.3.1 Condições gerais

Quando o algoritmo LMS é aplicado à SRR, uma boa inicialização pode ser obtida, por exemplo, a partir da interpolação bicúbica da imagem observada (LR) no instante inicial. Entretanto, nos exemplos a seguir o algoritmo é inicializado longe do ótimo, de forma que se possa avaliar o seu comportamento durante o regime transitório de adaptação, e não apenas durante o regime permanente. Com este fim, o algoritmo LMS-SRR é inicializado em todas as simulações com imagens sintéticas construídas a partir de uma única realização de um processo WGN(0, 1), com amplitudes dos pixels normalizadas para se adequarem à escala dinâmica das imagens [0, 255].

A matriz $\mathbf{D}(t)$ é assumida invariante no tempo ($\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}$). Para a determinação do passo de convergência ótimo, é considerado o conjunto dos maiores autovalores de $\mathbf{D}^T\mathbf{D}$ tal que a soma de seus elementos seja igual ou maior do que noventa por cento da soma de todos os autovalores.

Exceto quando devidamente especificadas, são consideradas imagens HR com 64×64 pixels, imagens LR com 32×32 pixels, e apenas uma iteração do algoritmo por amostra temporal do sinal de entrada ($K = 1$). Para construir a matriz de registro $\mathbf{G}(t)$ e a sua estimativa $\hat{\mathbf{G}}(t)$, a condição de fronteira de Neumann é utilizada. Tal opção é adotada por ser esta a condição mais empregada em situações práticas.

Nos Exemplos 1 – 3, as simulações de Monte Carlo (MC) correspondem à promediação de 100 realizações, utilizando diferentes seqüências de imagens. De forma a isolar os diferentes efeitos que serão discutidos em cada um desses exemplos, tais seqüências de imagens foram sinteticamente geradas, considerando movimento global e translacional, de acordo com a dinâmica do sinal descrita no Capítulo 2. As imagens utilizadas para gerar cada seqüência correspondem a imagens típicas, como Lena, Cameraman e Baboon, entre outras (cenas completamente diferentes entre si). As especificidades de geração de cada seqüência (tipo de vetor de deslocamento considerado) serão descritas em cada exemplo, de acordo com os objetivos de cada simulação.

Nos exemplos 1 e 2, os vetores de deslocamento são assumidos conhecidos. Nos exemplos 3 e 4, os vetores de deslocamento são estimados utilizando algoritmos de registro. Neste caso, o registro entre $\mathbf{x}(t-1)$ e $\mathbf{x}(t)$ é estimado a partir das observações de baixa resolução disponíveis, $\mathbf{y}(t-1)$ e $\mathbf{y}(t)$. Os sinais de entrada usados para cada algoritmo de registro são, então, interpolações bicúbicas de $\mathbf{y}(t-1)$ e $\mathbf{y}(t)$.

4.3.2 Exemplo 1: avaliação da análise teórica

O objetivo deste exemplo é verificar, usando condições de simulação bastante simplificadas, a validade do estudo teórico sobre a influência das inovações. Sob as condições assumidas neste exemplo, é possível determinar o passo de convergência que elimina completamente os fatores de ponderação de $\mathbf{M}_1(t)$ e de $\mathbf{M}_2(t)$ em (4.8).

Os vetores de deslocamento global usados para gerar a seqüência são assumidos conhecidos para cada instante de tempo t (erros de registro não são considerados). O ruído aditivo também não é considerado ($\sigma_e^2(t) = 0$). Essas duas condições têm o objetivo de isolar o efeito

das inovações. Os vetores de deslocamento global são gerados a partir de incrementos (passos) unitários em ambas as direções, vertical e horizontal (simulando um movimento diagonal da câmera), na grade de alta resolução, a cada instante de tempo t .

A subamostragem implementada por $\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}$ modela a integração espacial que ocorre em CCDs com elementos de área quadrada e fotossensibilidade uniforme, não considerando distâncias interpixel. Desse modelo, resulta que cada pixel da grade de baixa resolução corresponde à média de quatro pixels adjacentes da grade de alta resolução. Neste caso, cada autovalor de $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ assume um de dois possíveis valores: $\lambda = 0$ e $\lambda = 0,25$. Para todo $\lambda = 0$, os respectivos autovalores de $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ tornam-se $\gamma = 1$, e não podem ser afetados pela escolha de μ . Para todo $\lambda = 0,25$, $\gamma = (1 - 0,25\mu)$. Assim, $\mu = 4$ deve ser escolhido para que os fatores de ponderação de $\mathbf{M}_2(t)$, em (4.8), sejam anulados. Neste caso particular, em que os elementos de $\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{\Gamma}$ são iguais a 0 ou 1, apenas uma iteração do algoritmo LMS-SRR por amostra temporal é necessária, uma vez que fazendo-se $K > 1$ não irá acarretar melhora no desempenho do algoritmo ($\mathbf{\Gamma}^{2K} = \mathbf{\Gamma}$).

Na Figura 4.2 é mostrada a evolução temporal do MSRE para diferentes valores de μ e K . É possível observar nas figuras 4.2(a)–(c) que o passo de convergência proposto leva ao menor MSRE em regime permanente, com a taxa de convergência mais rápida. Na Figura 4.2(d) é possível observar que um valor $K > 1$, com $\mu = 4$, neste exemplo, não acarretará em melhora no resultado da reconstrução.

Note que os resultados apresentados mostram que o compromisso usual entre taxa de convergência e desempenho em regime permanente do algoritmo LMS, como função do passo de convergência, não é válido para o caso de aplicação em SRR. Na Figura 4.2 é mostrado claramente que diminuir o passo de adaptação não leva necessariamente a um melhor desempenho em regime permanente. Igualmente, aumentar o passo de adaptação não leva necessariamente a uma taxa de convergência mais rápida.

Nas Figuras 4.3 (b)–(d) é possível observar a qualidade das imagens reconstruídas para o 200º quadro obtido usando três conjuntos de parâmetros distintos. A imagem HR é mostrada na Figura 4.3(a). Claramente, neste caso, o passo ótimo leva ao melhor resultado perceptual, assim como ao menor MSRE. Isto pode ser constatado especialmente nas regiões de fronteira, nas quais, neste exemplo, estão concentradas as inovações.

4.3.3 Exemplo 2: robustez às inovações

O objetivo deste exemplo é verificar a validade da proposta de escolha para o passo de adaptação em (4.18) quando *blurring* gaussiano é considerado. Exceto por esse tipo de distorção óptica, as condições de simulação são exatamente as mesmas do Exemplo 1. Neste exemplo, o *blurring* é simulado através de um filtro espacial passa-baixas. Esse filtro é implementado por uma máscara gaussiana de tamanho 6×6 , com variância 1,0 (aplicada previamente a uma subamostragem impulsiva).

Neste caso, diferente do Exemplo 1 (em que os autovalores de $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ assumem apenas dois valores distintos), os λ_i assumem diversos valores distintos. Os maiores, tais que a soma é maior ou igual a noventa por cento da soma de todos os autovalores, variam de $\lambda_{\min} = 0,0422$

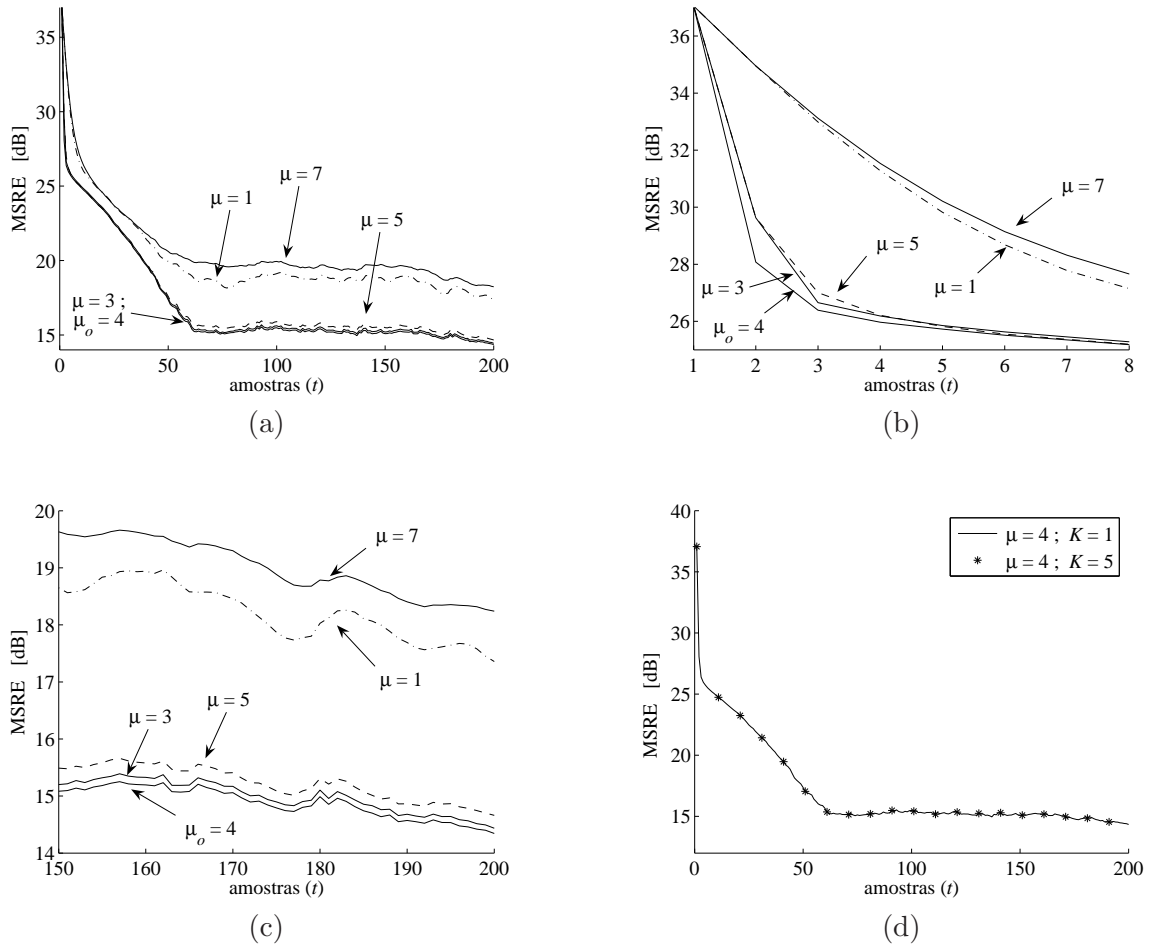


Figura 4.2: Resultados do Exemplo 1. (a) MSRE para diferentes passos de convergência. (b) Aproximação das curvas de (a) em regime transitório. (c) Aproximação das curvas de (a) em regime permanente. (d) MSRE para $\mu = 4$ e diferentes números de iterações do algoritmo por amostra de entrada.

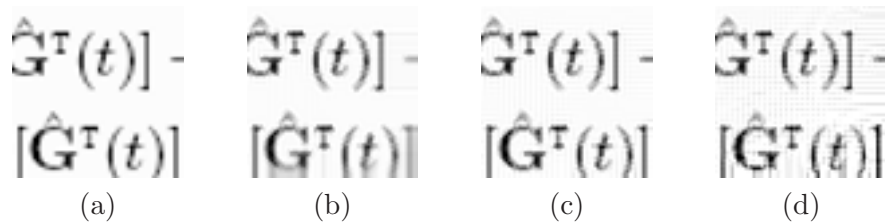


Figura 4.3: 200^o quadro de uma das seqüências consideradas no Exemplo 1, para $K = 1$. (a) Imagem original (HR). Imagem reconstruída com: (b) $\mu = 1$; (c) $\mu = 4$; (d) $\mu = 7$.

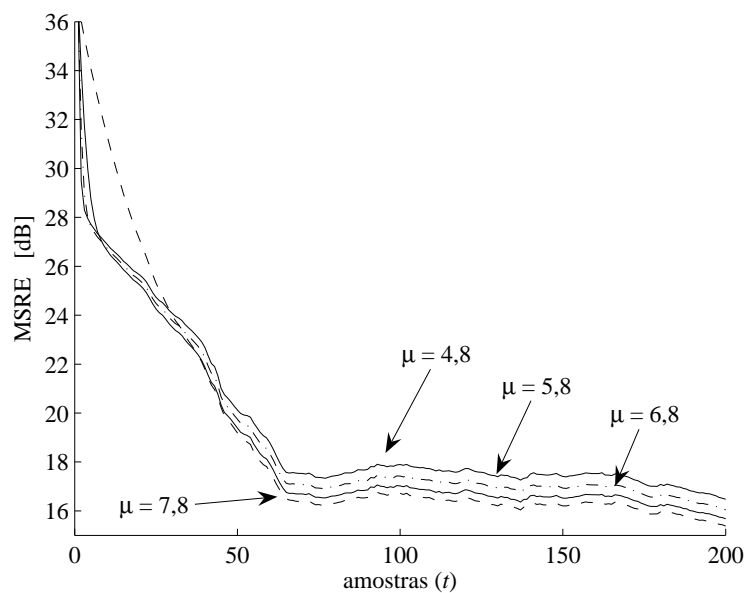


Figura 4.4: MSRE considerando *blurring* gaussiano.

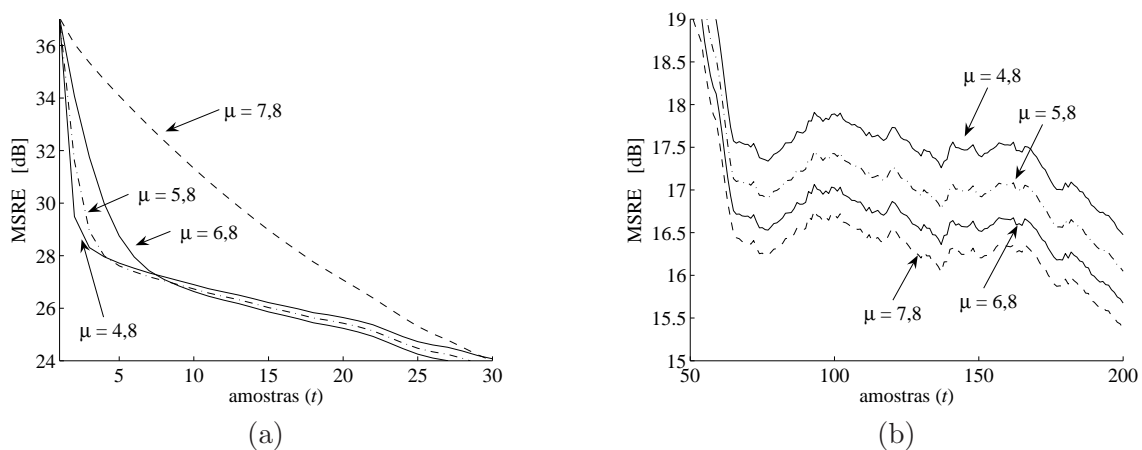


Figura 4.5: Ampliação do MSRE apresentado na Fig. 4.4, para (a) regime transitório e (b) regime permanente.

a $\lambda_{\max} = 0,25$. Assim, uma vez que os elementos γ_i de $\mathbf{\Gamma}$ são distintos entre si, e uma vez que não se possui conhecimento sobre as matrizes $\mathbf{M}_1(t)$ e $\mathbf{M}_2(t)$, não é possível determinar um passo ótimo. Sendo assim, é adotado o método de escolha do passo de convergência μ_o proposto em (4.18), usando-se os valores de λ_{\min} e λ_{\max} dados acima. De acordo com (4.13), o máximo passo de convergência é $\mu_{\max} = 8$, e de (4.18) o passo proposto é $\mu_o \simeq 6,8$.

Nas figuras 4.4 e 4.5 são mostrados os resultados obtidos para diferentes valores de μ . Note que, embora μ_o não seja o valor ótimo de μ ,² ele leva a um desempenho do algoritmo que está muito próximo do desempenho ótimo. O passo proposto leva a uma taxa de convergência muito próxima da taxa mais rápida, alcançada com $\mu = 5,8$, assim como leva a um erro em regime permanente muito próximo do mínimo erro obtido, alcançado com $\mu = 7,8$.

4.3.4 Exemplo 3: robustez ao erro de registro

O objetivo deste exemplo é verificar a validade da escolha proposta para o passo de adaptação em (4.18) na presença de erros de registro. Note que, conforme (4.8), o passo que atenua o efeito das inovações ($\mathbf{M}_2(t)$) no processo de SRR deve também atenuar o efeito dos erros de registro ($\mathbf{M}_1(t)$).

Neste exemplo, os vetores de deslocamento global utilizados para gerar a seqüência de imagens HR foram obtidos a partir de um processo *random walk* com passos unitários (ou nulos) nas direções vertical e/ou horizontal. O algoritmo de registro utilizado para estimar esses vetores foi o proposto em [22]. Cabe ressaltar, entretanto, que a escolha do algoritmo de registro tem pouca relevância para o objetivo deste exemplo. Um algoritmo de registro com melhor (pior) desempenho iria apenas atenuar (acentuar) os efeitos do erro de estimação de movimento observados. O ruído aditivo é assumido WGN($0, \sigma_e^2$), em que $\sigma_e^2 = 10$. As distorções ópticas (*blurring*) e a subamostragem são implementadas exatamente como no Exemplo 2.

Na Figura 4.6 é mostrada a evolução do MSRE para proposta de escolha do passo de convergência ($\mu = 6,8$) e para diferentes valores em torno desse passo. Como pode ser observado, o passo proposto leva ao mínimo MSRE, considerando os valores testados de μ . A velocidade de convergência alcançada é muito próxima daquelas obtidas usando outros passos (mais rápidos), como $\mu = 5,8$ e $\mu = 3$, e as diferenças entre elas parecem não ser relevantes em aplicações práticas.

4.3.5 Exemplo 4: seqüências reais

O objetivo deste exemplo é verificar o desempenho do algoritmo LMS-SRR quando aplicado à seqüências de imagens reais, usando a metodologia de projeto proposta. Nesses casos, têm-se presentes tanto *outliers* resultantes de inovações entre as imagens quanto resultantes do erro de registro.

Além disso, a seqüência de imagens utilizada neste exemplo inclui movimentos que são mais complexos do que os modelados pelo movimento translacional e global, considerado

² O valor ótimo para o passo de convergência apenas poderia ser determinado através do conhecimento das matrizes $\mathbf{M}_1(t)$ e $\mathbf{M}_2(t)$, o que não é viável em aplicações práticas.

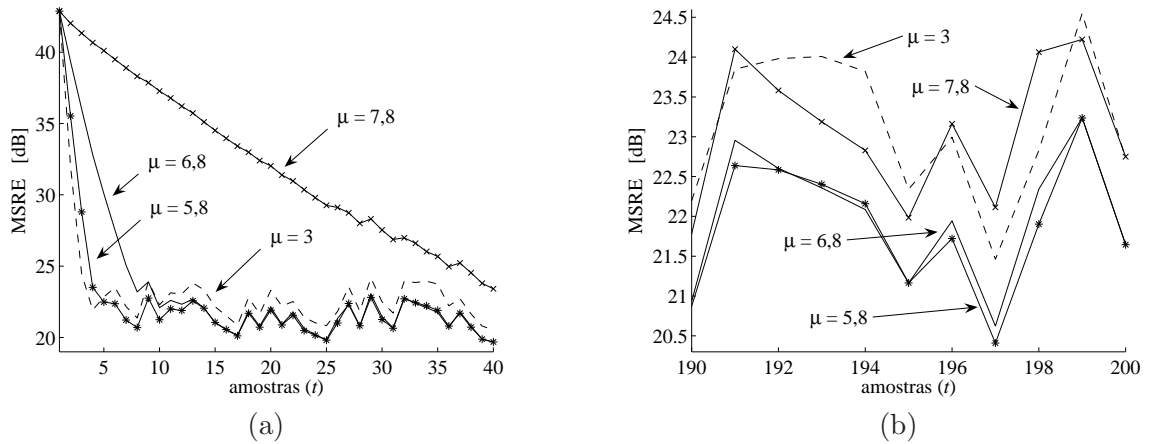


Figura 4.6: MSRE considerando erros de registro. (a) Regime transitório. (b) Regime permanente.

nos exemplos anteriores. A seqüência utilizada é a chamada *Hand*³. Nessa seqüência, uma mão segura um objeto, rotacionando-o. Existe o movimento de rotação desempenhado pela mão, o movimento de translação desempenhado pelo braço, e o movimento de vibração da câmera. Os quadros originais dessa seqüência foram redimensionados para 128×128 pixels, via interpolação bicúbica. As imagens de baixa resolução são assumidas como tendo 64×64 pixels.

Embora o movimento considerado não seja mais translacional, ainda existem regiões em $\mathbf{X}(t)$ que não estão presentes em $\mathbf{X}(t-1)$. A inicialização de tais regiões, desempenhada pela matriz de registro na Eq.(2.3), deve ser especificada. Pela mesma razão que as condições de Dirichlet são evitadas nos exemplos anteriores, os pixels desconhecidos de $\mathbf{X}(t)$ são inicializados com os valores dos pixels das mesmas coordenadas em $\mathbf{X}(t-1)$.

O algoritmo de registro utilizado é o proposto em [50]. O ruído aditivo é assumido $\text{WGN}(0, \sigma_e^2)$, com $\sigma_e^2 = 10$. As distorções ópticas (*blurring*) e a subamostragem são implementadas exatamente como no Exemplo 2.

Na Figura 4.7 é mostrada a evolução do erro quadrático médio de reconstrução (considerando média espacial)⁴ para diferentes passos de adaptação. Por se tratar de uma única realização, as curvas de erro não são tão suaves quanto nos exemplos anteriores, cruzando-se por diversas vezes. Entretanto, cabe destacar que este gráfico não tem a intenção de verificar a validade da análise estatística apresentada. Destina-se apenas a identificar que, mais uma vez, o uso do passo proposto $\mu = \mu_o$ leva a um desempenho próximo do ótimo.

Resultados de reconstrução do 200^o quadro da seqüência, considerando diferentes passos de convergência, são mostrados na Figura 4.8. Para fins de comparação da qualidade obtida, também é mostrado o resultado da reconstrução por interpolação bicúbica. Pode ser verificado que o passo proposto $\mu = 6,8$ leva, de fato, a um resultado perceptual próximo do ótimo, como

³ Base de dados do Vision and Autonomous Systems Center;

<http://vasc.ri.cmu.edu/idb/html/motion/hand/index.html> (acessado em 12 de março de 2007).

⁴ Média dos quadrados dos erros de reconstrução em todos os pixels da imagem no instante t . Média estatística não é possível, visto que uma única realização está sendo considerada – seqüência *Hand*.

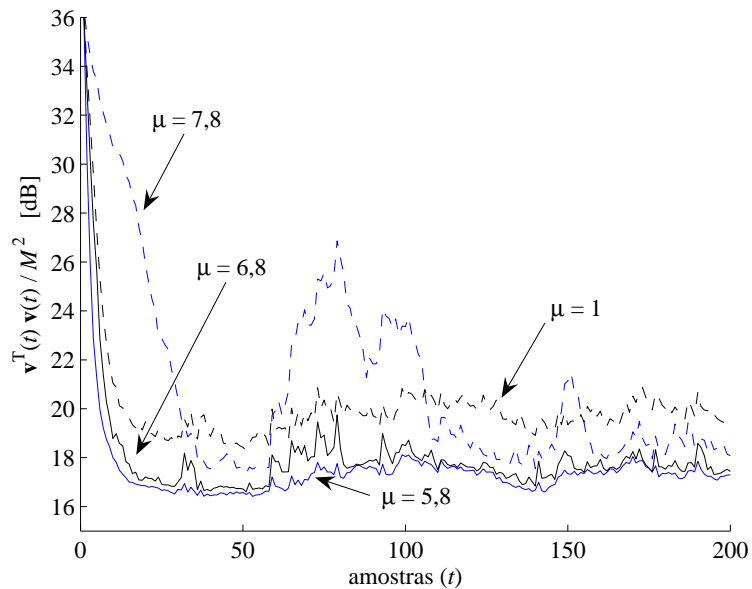


Figura 4.7: MSRE (espacial) considerando a seqüência *hand*.

previsto pelos resultados ilustrados na Figura 4.7. Nas figuras 4.8(a) e (b) são mostradas a imagem original (HR) e a interpolação bicúbica da imagem observada (LR), respectivamente. A imagem na Figura 4.8(c) ($\mu = 1,0$) é excessivamente suave (alisada). Nas figuras 4.8(d) ($\mu = 5,8$) e 4.8(e) ($\mu = 6,8$) as imagens apresentam qualidades bastante similares. Por fim, na Figura 4.8(f) ($\mu = 7,8$) a imagem é visivelmente mais ruidosa.

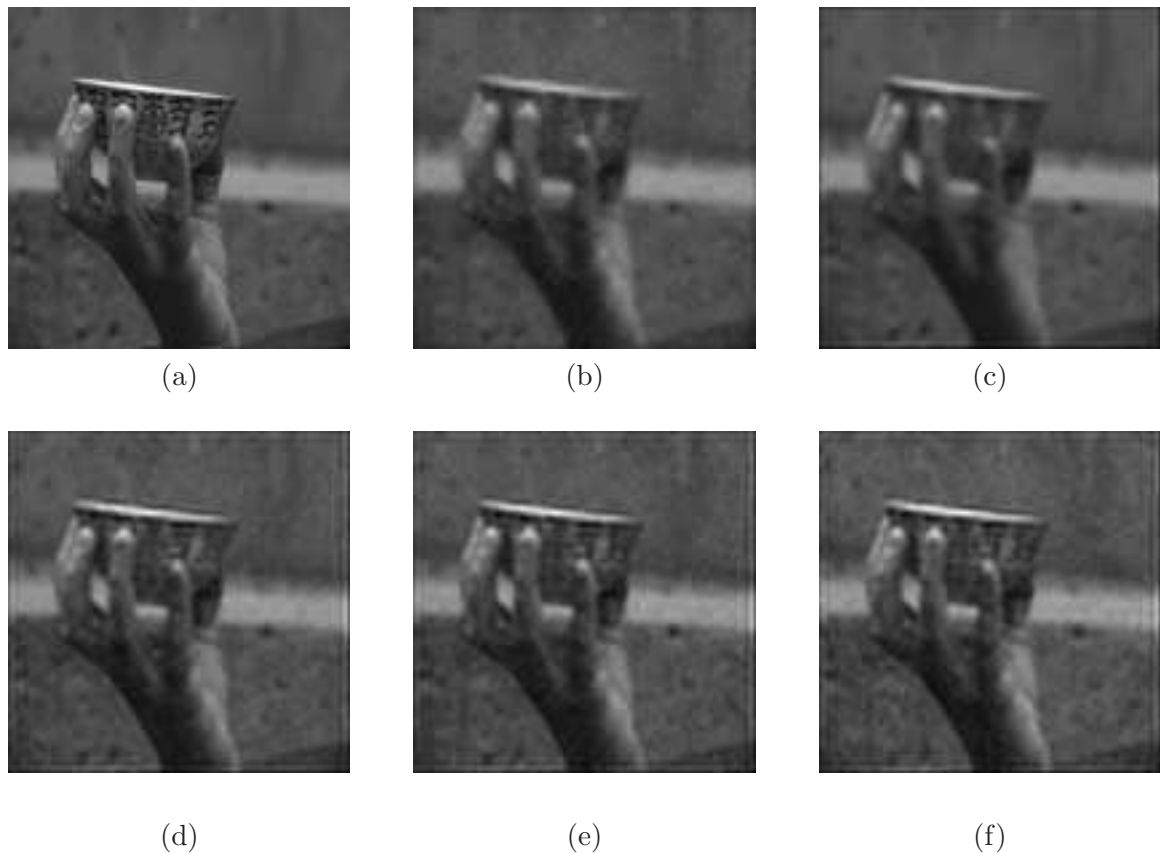


Figura 4.8: Exemplos de resultados para seqüência *Hand*. (a) Imagem original (200^o quadro). (b) Interpolação bicúbica da imagem LR. Reconstruções com: (c) $\mu = 1$; (d) $\mu = 5, 8$; (e) $\mu = 6, 8$; (f) $\mu = 7, 8$.

4.4 Resumo

Partindo da equação recursiva que foi proposta no capítulo anterior para a avaliação do MSRE, neste capítulo foi proposta uma metodologia de projeto para os parâmetros do algoritmo LMS-SRR, visando reduzir o efeito dos erros de registro e das inovações entre as imagens da seqüência. A influência dos parâmetros no comportamento do algoritmo foi estudada. Foi constatado que, diferente do comportamento do algoritmo LMS tradicional com passos de adaptação reduzidos [29], em condições práticas de aplicação um passo pequeno não leva, necessariamente, a um melhor desempenho em regime permanente. Da mesma forma, um passo grande não leva o algoritmo, necessariamente, a uma alta velocidade de convergência. Resultados baseados em seqüências de imagens sintéticas e reais corroboram com os resultados teóricos. No próximo capítulo, novamente partindo da mesma equação para avaliação do MSRE, uma nova análise estatística é proposta com o objetivo de comparar os efeitos do erro de registro com os efeitos da regularização geralmente empregada em algoritmos de SRR. Essa comparação evidencia uma robustez natural do LMS-SRR aos erros de registro.

Capítulo 5

Regularização via Erros de Registro

Erros de registro: serão eles sempre prejudiciais para a reconstrução com super-resolução? Esta é a sentença tese de que trata este capítulo.

A reconstrução com super-resolução (SRR) de imagens é um problema mal condicionado. Tradicionalmente, a solução para esse problema é buscada através de um processo de minimização com restrições [1]. A inclusão de informação *a priori* com o intuito de encontrar uma solução única ou de melhor condicionar o problema é conhecida na comunidade de processamento de imagens como regularização [1, 16, 19, 23, 24, 51].

Como foi visto, um dos maiores problemas em SRR é a dependência de um registro acurado entre as imagens. Neste capítulo é estudado o efeito que o erro de registro exerce sobre a regularização do problema, quando o algoritmo LMS-SRR é utilizado. Nesse estudo é mostrado que realizando-se apenas uma iteração por amostra temporal ($K = 1$), diferente do que é tradicionalmente assumido, um nível moderado de erro de registro pode, de fato, ser benéfico para o desempenho do algoritmo. Sendo assim, o termo de regularização pode ser evitado e o custo computacional pode ser reduzido, o que pode trazer importantes vantagens em aplicações de SRR em tempo-real.

Casos em que $K = 1$ são de interesse prático, uma vez que o uso do LMS em aplicações de SRR justifica-se justamente em função do custo computacional. Pelo mesmo motivo, a possibilidade de evitar o uso da parcela de regularização torna-se de grande interesse. É conveniente lembrar, ainda, que a escolha adequada do passo de convergência, conforme estudado no Capítulo 4, pode reduzir o prejuízo com a redução de K , considerando a metodologia de projeto existente na literatura [13].

5.1 O Algoritmo LMS-SRR Regularizado

A versão regularizada do LMS-SRR, o R-LMS-SRR (*Regularized-LMS-SRR*), pode ser deduzida seguindo-se os mesmos passos apresentados para deduzir o LMS-SRR, no Capítulo 2. Para o caso regularizado, a seguinte função custo pode ser definida:

$$\mathbf{J}_{\text{MSR}}(t) = \text{E}\{\|\epsilon_r(t)\|^2 | \hat{\mathbf{x}}(t)\}, \quad (5.1)$$

em que

$$\epsilon_r(t) = \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)\|^2 + \alpha\|\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(t)\|^2, \quad (5.2)$$

α é chamado fator de regularização, e a matriz \mathbf{S} implementa uma filtragem passa-altas [13, 23, 24]. \mathbf{S} é tradicionalmente um filtro Laplaciano, e tem por finalidade penalizar as altas frequências da solução, evitando a amplificação de ruído [13, 51]. Minimizando (5.1) no sentido quadrático médio e usando o método do gradiente estocástico chega-se na equação recursiva para o R-LMS-SRR [13, 23, 24] (para maiores detalhes, ver Capítulo 2):

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) + \beta\mathbf{S}^T\mathbf{S}]^K\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mu\sum_{n=0}^{K-1}[\mathbf{A}(t) + \beta\mathbf{S}^T\mathbf{S}]^n\mathbf{D}^T(t)\mathbf{y}(t), \quad (5.3)$$

em que $\beta = -\mu\alpha$ ¹.

5.1.1 Custo computacional

A avaliação da vantagem computacional do algoritmo LMS-SRR frente aos demais algoritmos existentes certamente é uma contribuição importante nesta área de pesquisa, e vem a justificar ainda mais os problemas investigados nesta tese. Diversos trabalhos têm apresentado estimativas para o custo computacional de algoritmos de super-resolução [23, 52, 53]. Entretanto, uma comparação entre a complexidade de diferentes algoritmos requer a padronização da metodologia empregada nessas estimativas. Como isso foge ao escopo deste trabalho, nesta seção é apresentada a avaliação da diferença computacional entre os algoritmos LMS-SRR e R-LMS-SRR, uma vez que a complexidade deste último não é avaliada na literatura.

Uma análise sobre o custo computacional do algoritmo LMS-SRR é apresentada em [23]. O número de multiplicações nesse algoritmo é estimado em

$$C_{\text{LMS-SRR}} = (2p^2 + 1)N^2K, \quad (5.4)$$

em que N^2 é o número de pixels das imagens de baixa-resolução, K é o número de iterações do algoritmo LMS a ser executado por amostra de entrada, e p é o tamanho (lado) da máscara espacial capaz de modelar as distorções ópticas (*blurring*). Em termos práticos, o número de multiplicações do LMS-SRR corresponde a duas convoluções entre a imagem de baixa-resolução e uma máscara de lado p .

Seguindo-se os mesmos passos de [23], é possível verificar que o R-LMS-SRR apresenta um acréscimo no número de multiplicações por iteração (em relação à versão não-regularizada do algoritmo) equivalente à implementação da filtragem representada por $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$, em (5.3). Como essa filtragem dá-se na grade de alta-resolução, o número de multiplicações é de:

$$C_{\text{R-LMS-SRR}} = C_{\text{LMS-SRR}} + (2q^2 + 1)M^2K, \quad (5.5)$$

¹ A troca de sinal na definição de β visa apenas facilitar a comparação que será apresentada nas próximas seções.

em que q é o tamanho necessário para modelar a informação *a priori*, tradicionalmente implementada por uma máscara laplaciana. O acréscimo no custo computacional corresponde, então, a duas convoluções entre a imagem de alta-resolução (com M^2 pixels) e uma máscara de lado q .

Seguindo essa mesma metodologia, quando, por exemplo, as distorções ópticas e a restrição de suavidade podem ser modeladas por filtros espaciais com $p = q = 3$, e quando o fator de super-resolução considerado obedece a $M = 2N$, o algoritmo LMS-SRR possui um custo computacional cerca de 5 vezes inferior ao R-LMS-SRR.

5.2 Estudo do Comportamento do R-LMS-SRR

Como foi discutido, este estudo se limita ao caso em que apenas uma iteração do algoritmo é efetuada por amostra temporal. Portanto, fazendo-se $K = 1$, (5.3) pode ser escrita como

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) + \beta \mathbf{S}^T \mathbf{S}] \mathbf{G}(t) \hat{\mathbf{x}}(t-1) + \mu \mathbf{D}^T(t) \mathbf{y}(t). \quad (5.6)$$

Substituindo (5.6) na definição do erro de reconstrução,

$$\mathbf{v}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t), \quad (5.7)$$

chega-se a uma equação recursiva para o erro de reconstrução do algoritmo regularizado com uma iteração por amostra:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{v}(t-1) + \beta \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{G}(t) \hat{\mathbf{x}}(t-1) - \mathbf{A}(t) \mathbf{s}(t) + \mu \mathbf{D}(t) \mathbf{e}(t). \quad (5.8)$$

A Eq.(5.8) será usada para avaliar o comportamento do algoritmo, conforme feito para o LMS-SRR no Capítulo 3. O estudo das propriedades estatísticas de $\mathbf{v}(t)$ a partir desta equação requer simplificações, de forma a tornar o problema matematicamente tratável. Essas simplificações serão discutidas na próxima seção.

5.2.1 Hipóteses e aproximações estatísticas

Uma vez que no presente estudo não está sendo considerada a ocorrência de erros de registro, apenas hipóteses bastante tradicionais necessitam ser assumidas. Cabe ressaltar que, dentre outras, as mesmas hipóteses aqui assumidas são consideradas e discutidas nas seções 3.2 e 4.1.1. Para maiores detalhes sobre a validade dessas simplificações, os capítulos anteriores devem ser consultados. Na análise que se segue:

A1 As inovações $\mathbf{s}(t)$ são assumidas com média zero, com matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_{\mathbf{s}}(t)$ de dimensões $M^2 \times M^2$, e descorrelacionadas de $\mathbf{x}(t-1)$.

A2 O vetor de ruído de observação $\mathbf{e}(t)$ é assumido estatisticamente independente de qualquer outro sinal no sistema, com matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_{\mathbf{e}}(t) = \sigma_e^2 \mathbf{I}$.

5.2.2 Comportamento do erro quadrático médio de reconstrução

O desempenho do algoritmo pode ser avaliado através do MSRE, (3.16):

$$\text{MSRE} = \frac{1}{M^2} \text{E} [\mathbf{v}^T(t)\mathbf{v}(t)] = \frac{1}{M^2} \text{tr} \{ \text{E} [\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)] \} = \frac{1}{M^2} \text{tr} \{ \mathbf{K}(t) \}, \quad (5.9)$$

em que $\mathbf{K}(t) = \text{E} [\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)]$.

Multiplicando-se (5.8) pela sua transposta, tirando-se o valor esperado em ambos os lados da equação resultante, e considerando A1 e A2, chega-se em uma equação recursiva para o comportamento de $\mathbf{K}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{R-LMS}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{K}_{\text{R-LMS}}(t-1)\mathbf{G}^T(t)\mathbf{A}(t) \\ &\quad + \beta \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t) \text{E}[\mathbf{v}(t-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-1)]\mathbf{G}^T(t)\mathbf{S}^T\mathbf{S} \\ &\quad + \beta \mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{G}(t) \text{E}[\hat{\mathbf{x}}(t-1)\mathbf{v}^T(t-1)]\mathbf{G}^T(t)\mathbf{A}(t) \\ &\quad + \beta^2 \mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{G}(t) \text{E}[\hat{\mathbf{x}}(t-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-1)]\mathbf{G}^T(t)\mathbf{S}^T\mathbf{S} \\ &\quad + \mathbf{A}(t)\mathbf{R}_s(t)\mathbf{A}(t) + \mu^2\mathbf{D}^T(t)\mathbf{R}_e\mathbf{D}(t). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Essa equação apresenta propriedades bastante similares à sua equivalente para o algoritmo LMS-SRR sem regularização. Na próxima seção, essas similaridades serão evidenciadas e discutidas.

5.3 Análise

O objetivo desta seção é comparar o efeito dos erros de registro com o efeito do termo de regularização no algoritmo LMS-SRR. Para isso, o comportamento do MSRE do algoritmo LMS-SRR é avaliado em duas situações: (i) na presença de erros de registros (sem regularização); (ii) quando a regularização é incluída e o movimento é assumido conhecido (sem erro de registro).

Para $K = 1$, a equação do algoritmo LMS-SRR recursiva em $\mathbf{K}(t)$, (3.17), considerando a ocorrência de erros de registro, torna-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{LMS}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{K}_{\text{LMS}}(t-1)\mathbf{G}^T(t)\mathbf{A}(t) \\ &\quad + \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t) \text{E}[\mathbf{v}(t-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-1)] \text{E}[\Delta\mathbf{G}^T(t)]\mathbf{A}(t) \\ &\quad + \mathbf{A}(t) \text{E}[\Delta\mathbf{G}(t)] \text{E}[\hat{\mathbf{x}}(t-1)\mathbf{v}^T(t-1)]\mathbf{G}^T(t)\mathbf{A}(t) \\ &\quad + \mathbf{A}(t) \text{E}[\Delta\mathbf{G}(t)\hat{\mathbf{x}}(t-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-1)\Delta\mathbf{G}^T(t)]\mathbf{A}(t) \\ &\quad + \mathbf{A}(t)\mathbf{R}_s(t)\mathbf{A}(t) + \mu^2\mathbf{D}^T(t)\mathbf{R}_e\mathbf{D}(t). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Comparando (5.11) e (5.10), é possível observar que a primeira e as duas últimas parcelas são idênticas. Nas demais parcelas, os termos centrais também o são.

Como será discutido, $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$, $\mathbf{A}(t)$ e $\Delta\mathbf{G}(t)$ podem ser interpretadas como filtros passa-altas.

Portanto, seja inicialmente assumido que:

$$\beta \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{G}(t) \simeq \mathbf{A}(t) \Delta \mathbf{G}(t). \quad (5.12)$$

De acordo com o que foi visto no Capítulo 3, o fato de considerar, no modelo teórico, matrizes de registro que assumam a periodicidade circular das imagens não traz conseqüências significativas à previsão teórica do comportamento do algoritmo. Fazendo-se uso de tal condição de fronteira, e quando for possível assumir que o movimento entre as imagens ocorre em passos inteiros na grade de alta resolução, segue de (3.44) que a matriz de erros de registro pode ser modelada por $\Delta \mathbf{G}(t) = \tilde{\mathbf{G}}(t) \mathbf{G}(t) - \mathbf{G}(t)$. Nesse caso, (5.12) pode ser escrita como

$$\beta \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{G}(t) \simeq \mathbf{A}(t) \left[\tilde{\mathbf{G}}(t) - \mathbf{I} \right] \mathbf{G}(t), \quad (5.13)$$

e, portanto, é possível assumir que

$$\beta \mathbf{S}^T \mathbf{S} \simeq \mathbf{A}(t) \left[\tilde{\mathbf{G}}(t) - \mathbf{I} \right]. \quad (5.14)$$

Movendo as matrizes determinísticas $\mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{G}(t)$ para dentro dos valores esperados em (5.10), e usando (5.14) na expressão resultante, é fácil mostrar que (5.10) e (5.11) se tornam idênticas para $\mathbf{K}_{\text{R-LMS}}(0) = \mathbf{K}_{\text{LMS}}(0)$.

Por fim, para comprovar a equivalência de ambas recursões, é necessário comprovar a hipótese inicial de que ambos os lados de (5.12) comportam-se como filtros passa-altas. Note que, quando (5.14) é usada em (5.10), a hipótese de similaridade passa a ter valor em termos do comportamento médio. Assim, a validação da hipótese inicial faz mais sentido considerando-se

$$\beta \mathbf{S}^T \mathbf{S} \simeq \mathbf{A}(t) \left\{ \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbf{G}}(t) \right] - \mathbf{I} \right\}. \quad (5.15)$$

No lado esquerdo de (5.15), \mathbf{S} é uma matriz de convolução que implementa uma filtragem passa-altas (ver Seção 5.1). A matriz $\mathbf{D}(t)$ pode ser modelada como uma filtragem passa-baixas seguida de uma subamostragem ideal, conforme a Seção 2.2.1. Portanto, $\mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t)$ atua como um filtro passa-baixas. Dessa forma, $\mathbf{A}(t) = [\mathbf{I} - \mu \mathbf{D}^T(t) \mathbf{D}(t)]$, no lado direito de (5.15), também atua como um filtro passa-altas para valores apropriados de μ (ver Apêndice B). A matriz de registro $\tilde{\mathbf{G}}(t)$ pós-multiplicada por uma imagem (vetorizada) desempenha um deslocamento (geralmente pequeno, dado que essa matriz representa o erro de registro) sobre essa imagem. Portanto, o efeito de $[\tilde{\mathbf{G}}(t) - \mathbf{I}]$ também pode ser interpretado como uma operação de filtragem passa-altas. Esses argumentos mostram que ambos os lados de (5.15) desempenham processamentos qualitativamente similares. Assim, é razoável esperar que seus efeitos sobre o desempenho dos algoritmos também sejam similares.

As conclusões acima podem ser ilustradas pelas figuras a seguir. Na Figura 5.1 é ilustrado o efeito passa-altas gerado pelo erro de registro, no lado direito de (5.15). Na Figura 5.1(b) é mostrada a diferença entre a imagem *house* (Figura 5.1(a)) e uma versão dessa mesma imagem



Figura 5.1: Efeito passa-altas causado pelos erros de registro. (a) Imagem *house*. (b) Efeito de uma realização. (c) Efeito de 100 realizações.

deslocada um pixel para a direita. O resultado equivale a uma detecção de bordas² verticais. Portanto, assumindo que o erro de registro desloque a imagem em diferentes direções, ao longo de diferentes realizações, é razoável esperar que a matriz $\{E[\tilde{\mathbf{G}}(t)] - \mathbf{I}\}$ desempenhe a detecção de bordas em todas as direções. Na Figura 5.1(c) é mostrada a média das diferenças entre a imagem *house* e versões deslocadas dessa imagem. Esse resultado foi obtido a partir de simulações de Monte Carlo, com 100 realizações, de diferentes matrizes $\tilde{\mathbf{G}}(t)$ construídas a partir de deslocamentos em ambas as direções, vertical e horizontal, modelados como processos aleatórios WGN(0, 0,5) independentes entre si. Essa modelagem para o erro de registro foi discutida no Capítulo 3. As figuras 5.1(b) e (c) tiveram seus tons de cinza invertidos e o contraste realçado, para fins de impressão.

Na Figura 5.2 é apresentada a magnitude da resposta em frequência de ambos os lados de (5.15). A Figura 5.2(a) representa a resposta do lado esquerdo de (5.15), em que a máscara laplaciana

$$\begin{bmatrix} 0.1667 & 0.6667 & 0.1667 \\ 0.6667 & -3.3333 & 0.6667 \\ 0.1667 & 0.6667 & 0.1667 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

foi utilizada na construção de \mathbf{S} . Os demais parâmetros utilizados foram $\mu = 4$ e $\alpha = 0.01$. A matriz $\mathbf{A}(t)$ não pode ser implementada via convolução, visto que $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)$ inclui uma operação de subamostragem seguida de uma sobreamostragem. A análise matemática do seu efeito sobre uma imagem é descrita no Apêndice B. Entretanto, de forma a possibilitar uma comparação da resposta em frequência de ambos os lados de (5.15), na Figura 5.2(b) é mostrada uma aproximação da resposta de $\mathbf{A}(t)$, para o mesmo passo de convergência usado na simulação da Figura 5.2(a). A máscara correspondente ao filtro avaliado na Figura 5.2(b) foi estimada de uma linha de $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)$ (a linha que determina o pixel central da imagem processada). A matriz $\mathbf{D}(t)$ foi implementada considerando que cada pixel na grade de baixa

² Neste caso, obviamente, o termo bordas refere-se às altas-freqüências espaciais.

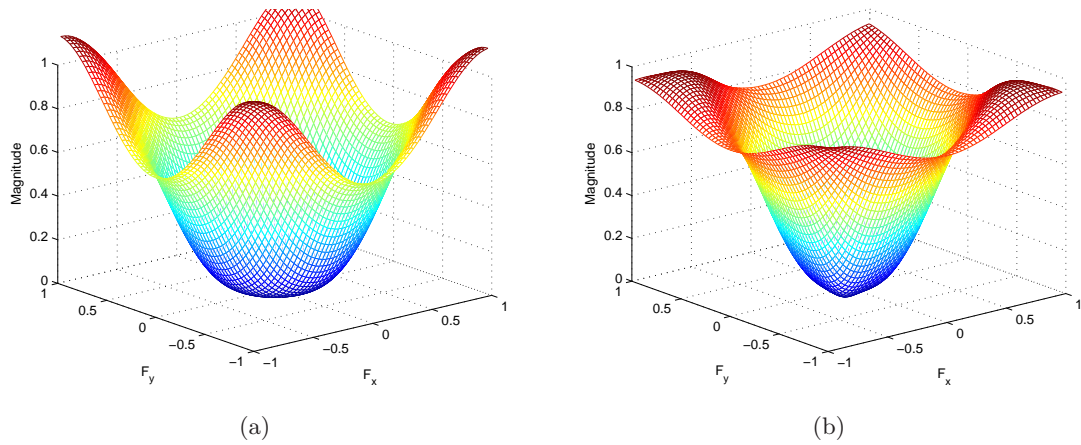


Figura 5.2: Resposta em frequência do filtro implementado por: (a) $\beta \mathbf{S}^T \mathbf{S}$; (b) $\mathbf{A}(t) \{ \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{G}}(t)] - \mathbf{I} \}$ (aproximado).

resolução corresponde à média de 4 pixels vizinhos da grade de alta resolução³. $\tilde{\mathbf{G}}$ foi gerada a partir de deslocamentos aleatórios nas direções vertical e horizontal, modelados como WGN(0, 0,5). A partir dessas figuras, fica claro que as respostas de ambos sistemas são muito similares, exatamente como previsto.

5.4 Resultados

Com a finalidade de ilustrar a equivalência entre os efeitos do erro de registro e da parcela de regularização no algoritmo LMS-SRR, esta seção é dividida em dois exemplos. O primeiro ilustra um caso típico em que a regularização é necessária. O segundo, ilustra um caso em que o resultado fornecido pelo LMS-SRR é naturalmente suavizado, e uma restrição de suavidade tende a piorar o resultado da reconstrução.

Em ambos os exemplos é considerado movimento translacional e global, gerado a partir de incrementos unitários em ambas as direções, vertical e horizontal, na grade de alta resolução, para cada instante de tempo t . Essa implementação simula um movimento diagonal da câmera. Nas simulações do algoritmo R-LMS-SRR, o movimento relativo entre os quadros das seqüências é assumido conhecido (sem erros de registro), enquanto nas simulações do algoritmo LMS-SRR, o movimento é estimado através dos algoritmos propostos em [42] e [50]. Uma vez que as seqüências de imagens assumem movimentos translacionais e globais e os algoritmos de registro considerados fornecem um vetor de velocidades para cada pixel da imagem, a média desses vetores foi assumida como a velocidade global na implementação do algoritmo LMS-SRR.

Para construir a matriz de registro $\mathbf{G}(t)$ e a sua estimativa $\hat{\mathbf{G}}(t)$, a condição de fronteira de Neumann é utilizada. Como no capítulo anterior, tal opção é adotada por ser esta a condição mais empregada em situações práticas. Como pode ser observado, a análise teórica

³ Esta configuração modela um sensor de aquisição com área quadrada e fotossensibilidade uniforme, desconsiderando distância interpixel.

neste capítulo considera que a matriz de registro assume uma condição de fronteira diferente da utilizada na implementação do algoritmo. Entretanto, pelos mesmos motivos discutidos no Capítulo 3, pode ser observado através das simulações apresentadas a seguir que essa aproximação feita na análise teórica não traz conseqüências significativas à estimativa do comportamento do algoritmo.

As simulações de Monte Carlo (MC) apresentadas correspondem à promediação de 50 realizações, utilizando diferentes seqüências de imagens. Tais seqüências foram sinteticamente geradas, de acordo com o movimento descrito acima e com a dinâmica do sinal descrita no Capítulo 2, assumindo imagens HR com 64×64 pixels e imagens LR com 32×32 pixels. As imagens utilizadas para gerar cada seqüência correspondem a imagens típicas, como Lena, Cameraman e Baboon, entre outras (cenas completamente diferentes entre si).

A matriz $\mathbf{D}(t)$ é assumida invariante no tempo ($\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}$). A subamostragem desempenhada por essa matriz é implementada por um processo de convolução com uma máscara 2×2 uniforme com ganho unitário, seguido de uma subamostragem ideal (impulsiva) com fator $2 : 1$. Conforme a análise apresentada, apenas uma iteração do algoritmo é realizada por amostra temporal do sinal de entrada ($K = 1$). O ruído aditivo é modelado como um processo WGN(0, 10).

5.4.1 Exemplo 1

Este exemplo descreve uma situação de reconstrução em que a regularização melhora o desempenho do algoritmo. Neste caso, o passo de adaptação é escolhido como sendo o passo ótimo $\mu = 4$ (para maiores detalhes, ver Capítulo 4).

Na Figura 5.3 é apresentada a evolução temporal do MSRE do algoritmo R-LMS-SRR para valores de $\beta = -0,02$ e $\beta = -0,05$, assim como do algoritmo LMS-SRR para os casos de movimento conhecido e de movimento estimado via [42] e [50]. É possível observar que o algoritmo R-LMS-SRR com $\beta = -0,02$ apresenta um desempenho melhor do que o LMS-SRR com movimento conhecido. Esta é uma situação típica em que o uso do R-LMS-SRR (i.e., o uso de uma parcela de regularização) é julgado necessário. Entretanto, quando o LMS-SRR é implementado em conjunto com o algoritmo de registro de [42], que fornece um nível moderado de erros de registro, é possível verificar que o desempenho do algoritmo é, mesmo sem o uso de restrição de suavidade, bastante similar ao do R-LMS-SRR com $\beta = -0,02$.

Quando o algoritmo de registro fornece níveis mais elevados de erro de registro, o comportamento do algoritmo LMS-SRR aproxima-se do comportamento do algoritmo regularizado com um fator de regularização (α) mais elevado. Como pode ser observado, ainda na Figura 5.3, o comportamento do LMS-SRR, quando usado em conjunto do algoritmo de [50], é similar ao do R-LMS-SRR com $\beta = -0,05$ (excessivamente regularizado).

Na Figura 5.4 são ilustrados alguns resultados de reconstrução obtidos de uma das realizações da simulação de Monte Carlo deste exemplo. As imagens ilustradas correspondem ao 50^o quadro da seqüência gerada. Nas figuras 5.4(a) e (b) são mostradas a imagem original (HR) e a imagem observada (LR), respectivamente. Apenas para definir um padrão de qualidade perceptual para efetuar comparações entre os resultados, na Figura 5.4(c) é mostrada

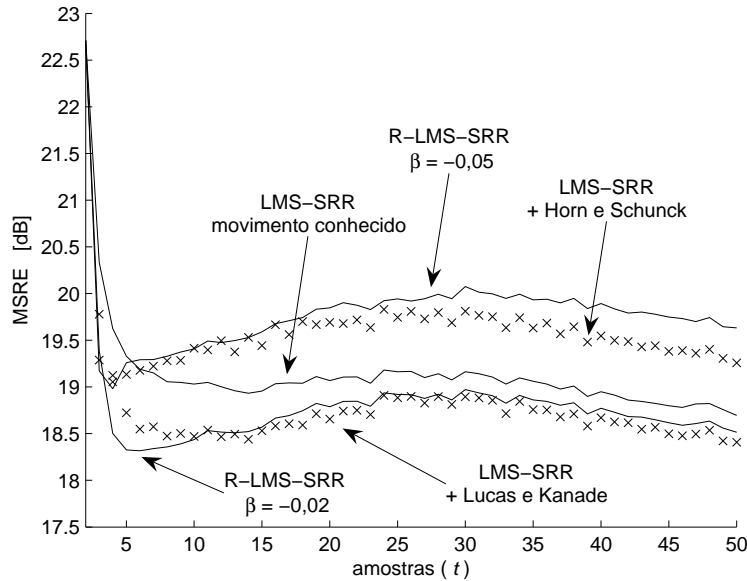


Figura 5.3: Comparação do MSRE dos algoritmos LMS-SRR e R-LMS-SRR.

a reconstrução da imagem observada via interpolação bicúbica. Na Figura 5.4(d) é mostrado o resultado obtido do algoritmo LMS-SRR, considerando-se movimento conhecido. Nessa figura é possível observar que existe a formação de artefatos em torno das altas-freqüências espaciais, o que sugere o uso de regularização. Nas figuras 5.4(e) e (f) são mostrados, respectivamente, os resultados da reconstrução via R-LMS-SRR com $\beta = -0,02$ e via LMS-SRR com o registro efetuado por [42]. Como pode ser verificado, esses dois resultados são praticamente idênticos. A mesma similaridade pode ser verificada entre os resultados mostrados nas figuras 5.4(g) e (h), que mostram respectivamente as reconstruções obtidas do R-LMS-SRR com $\beta = -0,05$ e do LMS-SRR com o registro efetuado por [50]. Note que, neste último caso, o resultado obtido pelo LMS-SRR é sutilmente menos regularizado, por assim dizer, do que o resultado do R-LMS-SRR, exatamente de acordo com o MSRE mostrado na Figura 5.3.

5.4.2 Exemplo 2

Este exemplo ilustra uma situação em que o resultado da reconstrução é naturalmente suave, e portanto a adição de uma restrição de suavidade tende a piorar a qualidade da imagem reconstruída. Neste caso, o passo de convergência utilizado é $\mu = 2$, sendo, portanto, metade do passo ótimo $\mu_o = 4$.

Na Figura 5.5 é mostrada a evolução temporal do MSRE para os algoritmos LMS-SRR com movimento conhecido e com movimento estimado via [42], assim como para o algoritmo R-LMS-SRR com $\beta = -0,015$ e $\beta = -0,02$. Como pode ser observado, neste caso, o efeito da regularização e do erro de registro tende a tornar as imagens excessivamente suavizadas. Mesmo com um fator de regularização baixo, ou com um algoritmo de registro que forneça baixos níveis de erro de registro, o resultado do LMS-SRR com movimento conhecido tende a ser superior. Contudo, é possível constatar que o comportamento do algoritmo regularizado

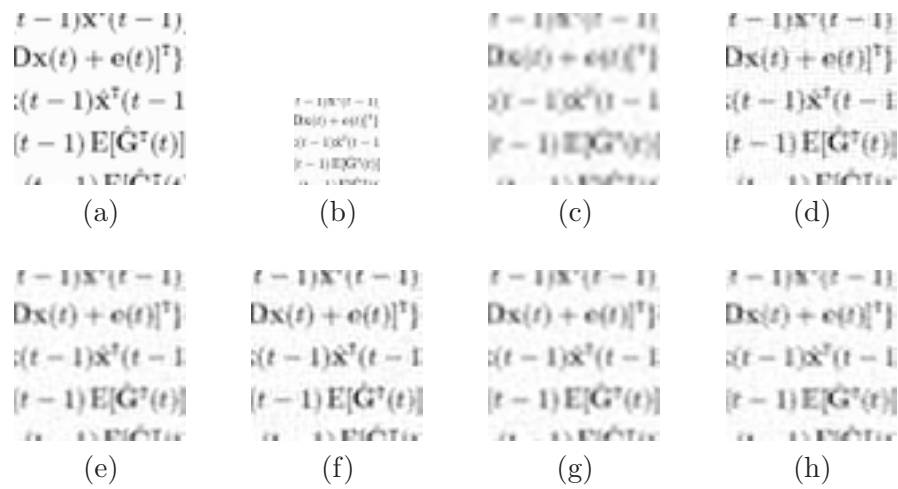


Figura 5.4: Resultados de reconstrução dos algoritmos LMS-SRR e R-LMS-SRR. (a) Imagem original (HR). (b) Imagem observada (LR). (c) Reconstrução via interpolação bicúbica. (d) Reconstrução via LMS-SRR, com movimento conhecido. (e) Reconstrução via R-LMS-SRR com $\beta = -0,02$. (f) Reconstrução via LMS-SRR com Lucas e Kanade. (g) Reconstrução via R-LMS-SRR com $\beta = -0,05$. (h) Reconstrução com LMS-SRR com Horn e Schunck.

é equivalente ao do algoritmo LMS-SRR com movimento estimado (quando considerada a ocorrência de erros de registro).

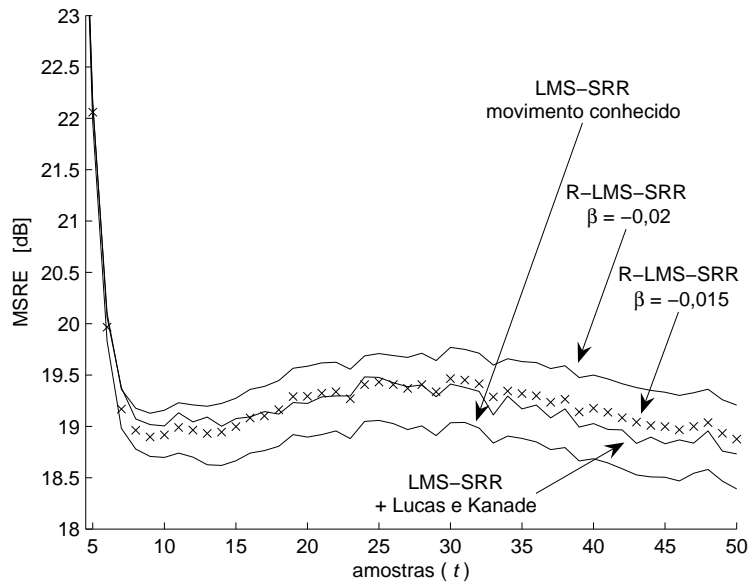


Figura 5.5: Comparação do MSRE dos algoritmos LMS-SRR e R-LMS-SRR para o caso de resultados suavizados.

5.5 Resumo

Neste capítulo foi apresentado um estudo comparativo entre o efeito da inclusão de um termo de regularização e o efeito dos erros de registro, no desempenho do algoritmo LMS aplicado à reconstrução de imagens com super-resolução. Diferente do que é tradicionalmente assumido, foi constatado que um nível moderado de erros de registro pode ser benéfico ao desempenho do algoritmo LMS-SRR, dependendo da implementação adotada.

No próximo capítulo, as principais conclusões e contribuições deste trabalho serão apresentadas. Algumas possibilidades de trabalhos futuros também serão discutidas.

Capítulo 6

Conclusão

Neste capítulo são apresentadas, primeiramente, as principais conclusões deste trabalho. Em seguida, as contribuições mais significativas são listadas e discutidas, e uma lista de artigos publicados e submetidos à publicação durante o período de doutorado é apresentada. Por fim, uma breve discussão sobre trabalhos futuros é proposta.

6.1 Principais Conclusões

As conclusões mais importantes, oriundas das análises apresentadas, são:

1. Diferentemente do algoritmo LMS tradicional, diminuir o passo de adaptação do LMS-SRR não leva necessariamente a um menor erro quadrático médio em regime permanente. Da mesma forma, aumentar o passo de adaptação não leva necessariamente a uma velocidade mais rápida de convergência;
2. Em determinadas aplicações, diferentemente do que é sugerido na literatura [24], executar mais de uma iteração do algoritmo LMS-SRR por amostra temporal (imagem de entrada) não contribui com o aumento do desempenho do algoritmo;
3. Considerando-se o algoritmo LMS-SRR, existe uma relação de equivalência entre o efeito do erro de registro e o efeito da restrição de suavidade geralmente considerada nos algoritmos de SRR;
4. Contrário ao que é tradicionalmente assumido, um nível moderado de erros de registro pode contribuir para a melhoria do desempenho do algoritmo LMS-SRR, dependendo da implementação adotada;
5. No projeto de sistemas de SRR com movimento conhecido, adicionar propositalmente um erro de registro entre as imagens pode evitar o uso de restrições de suavidade no algoritmo, reduzindo o custo computacional;
6. Durante o projeto do algoritmo, antes de determinar o uso de um termo de regularização, é necessário avaliar cuidadosamente a necessidade deste termo. Optar pelo uso do termo

de regularização em detrimento do custo computacional pode não ser uma boa escolha, dado o efeito de regularização desempenhado pelo erro de registro;

7. O LMS-SRR apresenta uma desejável robustez aos erros de registro, em situações de interesse prático.

6.2 Outras Contribuições

Dentre as principais contribuições deste trabalho, de forma geral, destacam-se:

1. A matriz de registro estimada, utilizada no estudo de um grande número de algoritmos de SRR, foi caracterizada analiticamente. Modelos para seus momentos estatísticos de primeira e segunda ordem foram propostos. Esses modelos podem ser utilizados na análise de diversos algoritmos de super-resolução;
2. Um modelo analítico para o comportamento estocástico do algoritmo LMS-SRR foi proposto, como função dos erros de registro. Equações determinísticas recursivas foram derivadas para o erro médio e quadrático médio de reconstrução. O modelo proposto atinge um excelente casamento com simulações de Monte Carlo, tanto na fase transitória quanto em regime permanente;
3. Comparado com o modelo existente [13], o novo modelo contribui com (i) a estimativa do comportamento do algoritmo considerando ocorrência de super-resolução, e com (ii) a estimativa dos erros de médio e quadrático médio de reconstrução em regime transitório e em regime permanente;
4. O novo modelo provê uma ferramenta de projeto para o algoritmo LMS-SRR bastante útil. Entende-se que o desenvolvimento de modelos analíticos como este sejam de grande valia na avaliação de desempenho e na comparação entre diferentes algoritmos de SRR;
5. O modelo proposto serve como base para futuras investigações sobre o comportamento do algoritmo LMS aplicado à reconstrução com super-resolução, assim como serviu como base para todas as análises de comportamento do LMS-SRR apresentadas neste trabalho;
6. Uma estratégia de projeto do algoritmo LMS-SRR foi proposta, buscando reduzir a influência dos *outliers* devido às inovações (occlusão de objetos). Essa estratégia é baseada em uma análise estatística do algoritmo. A análise apresentada mostrou que as diretrizes de projeto especificadas tendem, da mesma forma, a reduzir a influência dos erros de registro e a melhorar o desempenho do algoritmo em regime transitório;
7. Um estudo comparativo sobre a influência do termo de regularização e dos erros de registro no desempenho do algoritmo LMS-SRR foi apresentado. Este estudo abre um novo campo de investigação, tanto em torno deste algoritmo quanto de outros, recursivos, com implementação similar;

8. O processo de subamostragem seguida de sobreamostragem teve suas características em frequência caracterizadas analiticamente. Essa caracterização pode ser utilizada futuramente na avaliação de diversos algoritmos de SRR [19, 25, 26, 54, 55, 27];
9. Como foi discutido no início deste trabalho, pode ser notada na literatura uma tendência de proposição e comparação *ad hoc* de algoritmos de SRR. O presente trabalho vem a fortalecer a análise como uma ferramenta de suma importância para a comunidade de processamento de imagens.

Provavelmente, os dois algoritmos mais rápidos de SRR disponíveis na literatura sejam o LMS-SRR e o algoritmo *Shift-and-Add*, proposto em [27, 28]. As diferenças na estrutura desses algoritmos são aparentes. O LMS-SRR foi claramente proposto com base na teoria de processamento de sinais. O *Shift-and-Add* é um algoritmo com várias não-linearidades e tratamentos de exceções. Em uma primeira análise, tais não-linearidades parecem tornar inviável um estudo aprofundado do comportamento desse algoritmo. Sendo assim, dificilmente será possível determinar seu ponto ótimo de operação devido à falta de um modelo analítico. Além disso, o algoritmo *Shift-and-Add* apresenta uma complexidade computacional consideravelmente mais alta do que a do LMS-SRR.

Por outro lado, graças ao estudo analítico, foi possível constatar que o LMS-SRR possui características até então desconhecidas e desejadas em SRR. Esse algoritmo mostrou-se naturalmente robusto aos problemas considerados os mais críticos nessa aplicação. Frente a essas novas informações, novas aplicações podem ser exploradas para esse algoritmo, assim como comparações mais justas podem ser efetuadas.

6.3 Artigos Gerados por esta Tese

Os seguintes artigos foram gerados durante os quatro anos que decorreram na preparação deste trabalho:

Artigos em Periódicos Internacionais

1. “Statistical analysis of the LMS algorithm applied to super-resolution image reconstruction” *IEEE Trans. Signal Processing* [56];
2. “Informed Choice of the LMS Parameters in Super-Resolution Video Reconstruction Applications” [57] — Aceito para publicação na *IEEE Trans. Signal Processing*;

Artigos em Congressos Internacionais

1. “Are the registration errors always bad for super-resolution reconstruction?” *IEEE ICASSP 2007* [58];
2. “Statistical analysis of the LMS algorithm applied to super-resolution video reconstruction” *IEEE ICASSP 2006* [59];

3. “On the design of the LMS algorithm for robustness to outliers in super-resolution video reconstruction” *IEEE ICIP* 2006 [60];
4. “A Statistical Model for the Warp Matrix in Super-Resolution Reconstruction” *IEEE-SBT ITS* 2006 [61].

Artigos em Congressos Nacionais

1. “Diretrizes para o projeto do algoritmo LMS aplicado à super-resolução de vídeo” [62] — Aceito para publicação no *SBrT* 2007;
2. “Análise estatística do algoritmo LMS aplicado à reconstrução de vídeo com super-resolução” *SBrT* 2005 [63];
3. “Algoritmos Rápidos para a Implementação de Modelos Teóricos de Filtros Adaptativos” *SBrT* 2004 [64].

Artigos a serem submetidos para publicação

1. “Registration errors: are they always bad for super-resolution reconstruction?” — versão estendida de [58], com melhorias baseadas no Apêndice B, a ser submetida para publicação em periódico internacional.

6.4 Trabalhos Futuros

Diversas são as possibilidades de trabalhos futuros, na área de filtragem adaptativa aplicada à super-resolução. Naturalmente, os diferentes temas distinguem-se bastante entre si, no que diz respeito ao grau de contribuição que sugerem gerar. Algumas dessas possibilidades de investigação são listadas e discutidas a seguir:

Uma nova modelagem para o algoritmo LMS-SRR

A metodologia utilizada neste trabalho caracteriza o algoritmo LMS-SRR como um algoritmo de estimação. A imagem a ser reconstruída é modelada como um sinal (vetorial) a ser estimado. Este sinal é degradado por um sistema (matricial) gerando um sinal observado (vetorial). Como visto no Capítulo 3, tal abordagem resulta em modelos acurados. No entanto, sua complexidade matemática naturalmente limita a quantidade de informações que podem ser inferidas a respeito do desempenho do algoritmo.

Uma nova formulação do algoritmo LMS-SRR pode ser proposta, de forma similar à modelagem apresentada em [43]. Tal formulação modela a imagem a ser reconstruída como sendo o vetor de coeficientes de um filtro adaptativo, conforme a formulação tradicional do filtro LMS [29]. Estudos preliminares fornecem indícios de que com esta abordagem será possível um melhor aproveitamento das técnicas tradicionais de análise de filtros adaptativos, em relação ao problema de super-resolução.

Este trabalho foi proposto como tema de pós-doutorado, em projeto submetido ao CNPq. O julgamento dessa proposta é previsto para maio de 2007.

Estudo do comportamento do R-LMS-SRR

O algoritmo R-LMS-SRR é de interesse prático em aplicações em que o movimento entre as imagens é conhecido (ou pode ser estimado com níveis de erro muito baixos). Para esses casos, um modelo para o comportamento desse algoritmo pode ser proposto, desprezando o efeito dos erros de registro. Desconsiderando os erros de registro, o problema passa a ser facilmente tratável analiticamente. A partir desse modelo, diretrizes de projeto para os parâmetros do algoritmo, como passo de convergência e fator de regularização, podem ser propostos.

Estudo do comportamento do R-LMS-SRR considerando erros de registro

O estudo do algoritmo R-LMS-SRR considerando erros de registro permitiria, dentre outras coisas, a investigação dos efeitos da regularização e dos erros de registro, em conjunto, sobre o desempenho do algoritmo. Essa é uma investigação importante pelo seguinte fato: suponha um algoritmo R-LMS-SRR projetado com um fator de regularização ótimo, desconsiderando a ocorrência de erros de registro. Diferente do que talvez possa ser concluído a partir do Capítulo 5, a não-linearidade do problema de super-resolução não permite afirmar que os efeitos da inserção de um termo de regularização e dos erros de registro na qualidade da reconstrução sejam aditivos. Embora os erros de registro regularizem o problema, adicionar níveis moderados de ruído a um algoritmo R-LMS-SRR não irá necessariamente regularizar em excesso o problema (ver Apêndice C). O estudo desses efeitos em conjunto pode, inclusive, levar à desconsideração dos erros de registro no estudo do fator de regularização ótimo, o que facilitaria significativamente o projeto do algoritmo.

Regularização de algoritmos recursivos via erro de registro

Estudos preliminares indicam que outros algoritmos recursivos talvez possam ser regularizados pelo erro de registro, assim como no caso do LMS-SRR. Uma investigação mais detalhada deste tema pode trazer significativas contribuições ao estado-da-arte.

Estudo do comportamento do algoritmo LMS aplicado ao registro de imagens

A utilidade do estudo de desempenho de algoritmos de SRR é, em parte, dependente do avanço dos trabalhos de análise dos algoritmos de registro de imagens. Da mesma forma, a viabilidade do emprego do algoritmo LMS-SRR em aplicações tempo-real está diretamente ligada ao uso de um algoritmo de registro que também atenda aos requisitos temporais da aplicação.

A utilização do algoritmo LMS foi também proposta para o registro de imagens [13, 65]. Dado o conhecimento existente sobre a análise do LMS, tanto em aplicações unidimensionais como agora aplicado à super-resolução, e dado o sucesso dos resultados obtidos neste trabalho, a análise desse algoritmo aplicado ao registro de imagens torna-se de grande interesse. Um modelo que forneça os níveis de erro de registro obtidos pelo algoritmo pode complementar de forma significativa os avanços obtidos neste trabalho,

facilitando significativamente o projeto de soluções de SRR em tempo-real. Cabe ressaltar que, da mesma forma que ocorre para os algoritmos de super-resolução, muito poucos trabalhos podem ser encontrados sobre avaliação de desempenho de algoritmos de registro [37, 66, 67].

Análise de custo computacional do LMS-SRR

A julgar pelo equacionamento matricial do algoritmo LMS-SRR, na Eq.(3.6), pode parecer que, sendo $\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}$ invariante no tempo, as matrizes elevadas à potência K e n podem ser determinadas *a priori*. Sendo assim, realizar mais de uma iteração por amostra de entrada não geraria custo computacional adicional ao algoritmo. Entretanto, cabe ressaltar que, principalmente por motivos de alocação de memória, a implementação do algoritmo deve ser feita conforme a Tabela 2.1. Nesse caso, o custo computacional cresce com o aumento do número de iterações K . Também em função da implementação do algoritmo, a inclusão de uma parcela de regularização contribui com o acréscimo do custo computacional.

Dadas as conclusões acerca da regularização do LMS-SRR via erros de registro, uma avaliação dos ganhos e prejuízos computacionais em função das diferentes implementações é de interesse prático. Esse estudo poderia melhor justificar os diversos temas de pesquisa discutidos e abordados neste trabalho.

Determinação dos autovalores de $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)$

Como foi visto no Capítulo 4, a escolha do passo de convergência depende do conhecimento dos autovalores de $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)$. Entretanto, para imagens com dimensões elevadas e que muitas vezes são utilizadas em situações reais, a determinação desses autovalores por métodos convencionais é impraticável. Considerando as características da matriz $\mathbf{D}(t)$, seria de grande valia para fins de projeto se a determinação desses autovalores pudesse ser feita (ou estimada) a partir dos filtros (máscaras espaciais) considerados na composição de $\mathbf{D}(t)$.

Apêndice A

Momentos Estatísticos de $\hat{G}(t)$: Deduções Matemáticas

No presente apêndice são apresentadas as deduções matemáticas necessárias à dedução dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordens para a matriz de registro estimada, discutidos na Seção 3.4.1.

A.1 Definição 1

$$\begin{aligned} E \left\{ h[d, \hat{\Delta}(t)] \right\} &= \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d-1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d+1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] + \frac{d-1-\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{d-1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \\ &- [d-\Delta(t)] \operatorname{erf} \left(\frac{d-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) + \frac{d+1-\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{d+1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right). \end{aligned}$$

Demonstração:

O valor esperado $E \left\{ h[d, \hat{\Delta}(t)] \right\}$ é definido em (3.30) como

$$E \left\{ h[d, \hat{\Delta}(t)] \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h[d, \hat{\Delta}(t)] f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t). \quad (\text{A.1})$$

De acordo com os limites (valores não-nulos) da função $h[d, \hat{\Delta}(t)]$ definida na Figura 2.5, os limites de integração em (A.1) podem ser redefinidos de $(-\infty, +\infty)$ para $[d-1, d+1]$. Considerando esses limites, separando a integral em dois intervalos, e substituindo (2.9) em

(A.1), segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ h[d, \hat{\Delta}(t)] \right\} &= \int_{d-1}^d [1 - d + \hat{\Delta}(t)] f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) \\ &\quad + \int_d^{d+1} h[1 + d - \hat{\Delta}(t)] f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Manipulando algebricamente a Eq.(A.2),

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ h[d, \hat{\Delta}(t)] \right\} &= [1 - d] \int_{d-1}^d f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) + \int_{d-1}^d \hat{\Delta}(t) f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) \\ &\quad + [1 + d] \int_d^{d+1} f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) - \int_d^{d+1} \hat{\Delta}(t) f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Assumindo que $f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)]$ representa uma função gaussiana com variância σ^2 (ver Seção 3.4.1) e resolvendo as integrais em (A.3) chega-se em

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ h[d, \hat{\Delta}(t)] \right\} &= [1 - d] \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right]_{d-1}^d \\ &\quad + \left\{ \frac{\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \right\}_{d-1}^d \\ &\quad + [1 + d] \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right]_d^{d+1} \\ &\quad - \left\{ \frac{\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \right\}_d^{d+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Substituindo os limites de integração em (A.4):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ h[d, \hat{\Delta}(t)] \right\} &= \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d-1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{d+1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] + \frac{d-1-\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{d-1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \\ &\quad - [d-\Delta(t)] \operatorname{erf} \left(\frac{d-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) + \frac{d+1-\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{d+1-\Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

como queríamos demonstrar.

A.2 Definição 2

$$\mathbb{E} \left\{ h[d_{i,j}, \hat{\Delta}(t)] h[d_{m,n}, \hat{\Delta}(t)] \right\} = \sum_{k=1}^4 f_k,$$

em que $d_{i,j} = i - j$, $d_{m,n} = m - n$,

$$f_k = \begin{cases} p_k & \text{se } a_k < b_k \\ 0 & \text{se } a_k \geq b_k \end{cases}$$

$$a_k = \max(d_{i,j} + \kappa_{i,jk}, d_{m,n} + \kappa_{m,nk})$$

$$b_k = \min(d_{i,j} + \kappa_{i,jk} + 1, d_{m,n} + \kappa_{m,nk} + 1)$$

$$\kappa_{i,j_1} = \kappa_{i,j_3} = \kappa_{m,n_1} = \kappa_{m,n_4} = -1$$

$$\kappa_{i,j_2} = \kappa_{i,j_4} = \kappa_{m,n_2} = \kappa_{m,n_3} = 0$$

$$\begin{aligned} p_k = & \left[(-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{i,j} d_{m,n} + (-1)^{\kappa_{i,jk}} d_{i,j} + (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{m,n} + 1 \right] \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right]_{a_k}^{b_k} \\ & + \left[-(-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{i,j} - (-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{m,n} - (-1)^{\kappa_{i,jk}} - (-1)^{\kappa_{m,nk}} \right] \\ & \times \left\{ \frac{\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \right\}_{a_k}^{b_k} \\ & + (-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} \\ & \times \left\{ \frac{\sigma^2 + \Delta^2(t)}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] - \frac{\hat{\Delta}(t) + \Delta(t)}{2} \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \right\}_{a_k}^{b_k}. \end{aligned}$$

Demonstração:

De acordo com a função definida em (2.9), o valor esperado $\mathbb{E} \left\{ h[d_{i,j}, \hat{\Delta}(t)] h[d_{m,n}, \hat{\Delta}(t)] \right\}$, em que $d_{i,j} = i - j$, $d_{m,n} = m - n$, pode ser definido como

$$\mathbb{E} \left\{ h[d_{i,j}, \hat{\Delta}(t)] h[d_{m,n}, \hat{\Delta}(t)] \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h[d_{i,j}, \hat{\Delta}(t)] h[d_{m,n}, \hat{\Delta}(t)] f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t).$$

Observando-se os limites de integração e os possíveis produtos (cruzados ou não) entre cada

segmento contínuo de $h(\cdot)$, tem-se

$$\mathbb{E} \left\{ h[d_{i,j}, \hat{\Delta}(t)] h[d_{m,n}, \hat{\Delta}(t)] \right\} = \sum_{k=1}^4 f_k,$$

em que

$$\begin{aligned} f_1 &= \begin{cases} p_1 & \text{se } \max(d_{i,j} - 1, d_{m,n} - 1) < \min(d_{i,j}, d_{m,n}) \\ 0 & \text{se } \max(d_{i,j} - 1, d_{m,n} - 1) \geq \min(d_{i,j}, d_{m,n}) \end{cases} \\ p_1 &= \int_{\max(d_{i,j}-1, d_{m,n}-1)}^{\min(d_{i,j}, d_{m,n})} [1 - d_{i,j} + \hat{\Delta}(t)][1 - d_{m,n} + \hat{\Delta}(t)] f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) \\ f_2 &= \begin{cases} p_2 & \text{se } \max(d_{i,j}, d_{m,n}) < \min(d_{i,j} + 1, d_{m,n} + 1) \\ 0 & \text{se } \max(d_{i,j}, d_{m,n}) \geq \min(d_{i,j} + 1, d_{m,n} + 1) \end{cases} \\ p_2 &= \int_{\max(d_{i,j}, d_{m,n})}^{\min(d_{i,j}+1, d_{m,n}+1)} [1 + d_{i,j} - \hat{\Delta}(t)][1 + d_{m,n} - \hat{\Delta}(t)] f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) \\ f_3 &= \begin{cases} p_3 & \text{se } \max(d_{i,j} - 1, d_{m,n}) < \min(d_{i,j}, d_{m,n} + 1) \\ 0 & \text{se } \max(d_{i,j} - 1, d_{m,n}) \geq \min(d_{i,j}, d_{m,n} + 1) \end{cases} \\ p_3 &= \int_{\max(d_{i,j}-1, d_{m,n})}^{\min(d_{i,j}, d_{m,n}+1)} [1 - d_{i,j} + \hat{\Delta}(t)][1 + d_{m,n} - \hat{\Delta}(t)] f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) \\ f_4 &= \begin{cases} p_4 & \text{se } \max(d_{i,j}, d_{m,n} - 1) < \min(d_{i,j} + 1, d_{m,n}) \\ 0 & \text{se } \max(d_{i,j}, d_{m,n} - 1) \geq \min(d_{i,j} + 1, d_{m,n}) \end{cases} \\ p_4 &= \int_{\max(d_{i,j}, d_{m,n}-1)}^{\min(d_{i,j}+1, d_{m,n})} [1 + d_{i,j} - \hat{\Delta}(t)][1 - d_{m,n} + \hat{\Delta}(t)] f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) \end{aligned}$$

Reescrevendo-se as funções f_k e p_k , tem-se

$$\begin{aligned} f_k &= \begin{cases} p_k & \text{se } a_k < b_k \\ 0 & \text{se } a_k \geq b_k \end{cases} \\ p_k &= \int_{a_k}^{b_k} \left\{ 1 + (-1)^{\kappa_{i,jk}} [d_{i,j} - \hat{\Delta}(t)] \right\} \left\{ 1 + (-1)^{\kappa_{m,nk}} [d_{m,n} - \hat{\Delta}(t)] \right\} f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} a_k &= \max(d_{i,j} + \kappa_{i,jk}, d_{m,n} + \kappa_{m,nk}) \\ b_k &= \min(d_{i,j} + \kappa_{i,jk} + 1, d_{m,n} + \kappa_{m,nk} + 1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \kappa_{i,j_1} &= \kappa_{i,j_3} = \kappa_{m,n_1} = \kappa_{m,n_4} = -1 \\ \kappa_{i,j_2} &= \kappa_{i,j_4} = \kappa_{m,n_2} = \kappa_{m,n_3} = 0. \end{aligned}$$

Manipulando-se (A.6) algebricamente,

$$\begin{aligned}
 p_k = & \left[(-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{i,j} d_{m,n} + (-1)^{\kappa_{i,jk}} d_{i,j} + (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{m,n} + 1 \right] \int_{a_k}^{b_k} f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) \\
 & + \left[-(-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{i,j} - (-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{m,n} - (-1)^{\kappa_{i,jk}} - (-1)^{\kappa_{m,nk}} \right] \\
 & \times \int_{a_k}^{b_k} \hat{\Delta}(t) f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t) + (-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} \int_{a_k}^{b_k} \hat{\Delta}^2(t) f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)] d\hat{\Delta}(t)
 \end{aligned}$$

Assumindo que $f_{\hat{\Delta}(t)}[\hat{\Delta}(t)]$ representa uma função gaussiana com variância σ^2 (ver Seção 3.4.1) e resolvendo as integrais acima, chega-se em

$$\begin{aligned}
 p_k = & \left[(-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{i,j} d_{m,n} + (-1)^{\kappa_{i,jk}} d_{i,j} + (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{m,n} + 1 \right] \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right]_{a_k}^{b_k} \\
 & + \left[-(-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{i,j} - (-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} d_{m,n} - (-1)^{\kappa_{i,jk}} - (-1)^{\kappa_{m,nk}} \right] \\
 & \times \left\{ \frac{\Delta(t)}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \right\}_{a_k}^{b_k} + (-1)^{\kappa_{i,jk}} (-1)^{\kappa_{m,nk}} \\
 & \times \left\{ \frac{\sigma^2 + \Delta^2(t)}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right] - \frac{\hat{\Delta}(t) + \Delta(t)}{2} \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\hat{\Delta}(t) - \Delta(t)}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)^2 \right] \right\}_{a_k}^{b_k}.
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Apêndice B

Comportamento de $\mathbf{A}(t)$

Neste apêndice é apresentada a verificação da hipótese de que a matriz $\mathbf{A}(t) = [\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)]$, pós-multiplicada por uma imagem (vetorizada), comporta-se como um filtro passa altas, para valores apropriados de μ .

De acordo com o Capítulo 2, a matriz de degradação $\mathbf{D}(t)$ ($N^2 \times M^2$) pode ser decomposta como

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{C}\mathbf{H}(t), \quad (\text{B.1})$$

em que \mathbf{C} é a matriz de sub-amostragem (ideal) e $\mathbf{H}(t)$ é a matriz responsável pelas distorções ópticas no processo de aquisição. Portanto, a matriz $\mathbf{A}(t)$ pode ser reescrita como:

$$\mathbf{A}(t) = [\mathbf{I} - \mu\mathbf{H}^T(t)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{H}(t)]. \quad (\text{B.2})$$

A análise do comportamento da matriz $\mathbf{A}(t)$ pode, então, ser dividida em três etapas: (i) Efeito de $\mu\mathbf{C}^T\mathbf{C}$; (ii) Efeito de $\mu\mathbf{H}^T(t)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{H}(t)$; (iii) Efeito de $\mathbf{A}(t) = [\mathbf{I} - \mu\mathbf{H}^T(t)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{H}(t)]$.

B.1 Efeito de $\mu\mathbf{C}^T\mathbf{C}$:

A matriz \mathbf{C} , responsável pela redução de dimensão, possui dimensões $N^2 \times M^2$ e é diagonal (subamostragem ideal) com elementos da diagonal assumindo os valores zero ou um. Portanto, o produto $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ é uma matriz diagonal de dimensões $M^2 \times M^2$, com elementos da diagonal assumindo também os valores zero ou um. O efeito causado por $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ ao pré-multiplicar uma imagem (vetorizada) é o da redução de dimensão seguida de um aumento de dimensão sem utilizar interpolação, realizando *zero-padding* no domínio espacial. Portanto, filtrar uma imagem (vetorizada) usando a matriz $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ equivale a zerar determinados pixels da imagem, ou seja:

$$\psi(t) = \mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x}(t) \implies g_{l,c}(t) = \begin{cases} \psi_{l,c}(t) & \text{se } l \text{ e } c = 0, \pm D, \pm 2D, \pm 3D, \dots \\ 0 & \text{em outros casos} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

em que $D = M/N$ (assumido aqui inteiro), $g_{l,c}(t)$ e $x_{l,c}(t)$ são respectivamente os pixels correspondentes à linha l e coluna c das imagens $\mathbf{g}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$. De outra forma, é possível definir

$$\psi_{l,c}(t) = m_{l,c} x_{l,c}(t), \quad (\text{B.4})$$

em que $m_{l,c}$

$$m_{l,c} = \begin{cases} 1 & \text{se } l \text{ e } c = 0, \pm D, \pm 2D, \pm 3D, \dots \\ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

É possível mostrar que (B.5) pode ser escrita como [68]

$$m_{l,c} = \frac{1}{D^2} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{r=0}^{D-1} \exp\left(-j\frac{2\pi}{D}kc\right) \exp\left(-j\frac{2\pi}{D}rl\right). \quad (\text{B.6})$$

Pela propriedade da convolução da Transformada-Z, segue que:

$$\Psi_{z_l, z_c}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{c=-\infty}^{+\infty} m_{l,c} x_{l,c}(t) z_l^{-l} z_c^{-c} \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{1}{D^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{c=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{r=0}^{D-1} e^{-j\frac{2\pi}{D}rl} e^{-j\frac{2\pi}{D}kc} x_{l,c}(t) z_l^{-l} z_c^{-c} \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{1}{D^2} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{r=0}^{D-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{c=-\infty}^{+\infty} x_{l,c}(t) \left(e^{j\frac{2\pi}{D}r} z_l\right)^{-l} \left(e^{j\frac{2\pi}{D}k} z_c\right)^{-c} \right] \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{1}{D^2} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{r=0}^{D-1} X_{z_l e^{j2\pi r/D}, z_c e^{j2\pi k/D}}(t). \quad (\text{B.10})$$

Note que a transformada-Z é aplicada sobre o espaço (imagem) e não no eixo temporal. Note ainda que o espectro

$$X_{z_l e^{j2\pi r/D}, z_c e^{j2\pi k/D}}(t)$$

corresponde ao espectro $X_{z_l, z_c}(t)$ deslocado [69, pp.374;768]. Portanto, de acordo com (B.10), o espectro de $\psi_{l,c}(t)$ corresponde a uma soma ponderada de diferentes deslocamentos no espectro de $x_{l,c}(t)$:

$$\Psi_{e^{j\omega_l}, e^{j\omega_c}}(t) = \frac{1}{D^2} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{r=0}^{D-1} X_{e^{j(\omega_l + 2\pi r/D)}, e^{j(\omega_c + 2\pi k/D)}}(t). \quad (\text{B.11})$$

Quando, por exemplo, $D = 2$, o espectro de $\psi_{l,c}(t)$ corresponde à soma dos espectros de $x_{l,c}(t)$ deslocados em 0 e π , ponderada por 0.25. No caso de $D = 4$, o espectro de $\psi_{l,c}(t)$ corresponde à soma dos espectros de $x_{l,c}(t)$ deslocados em 0, $\pi/2$, π e $3\pi/4$, ponderada por 1/16. O mesmo raciocínio pode ser seguido para outros casos.

O passo de convergência, para fins didáticos, será assumido $\mu = D^2$. Desta forma, a

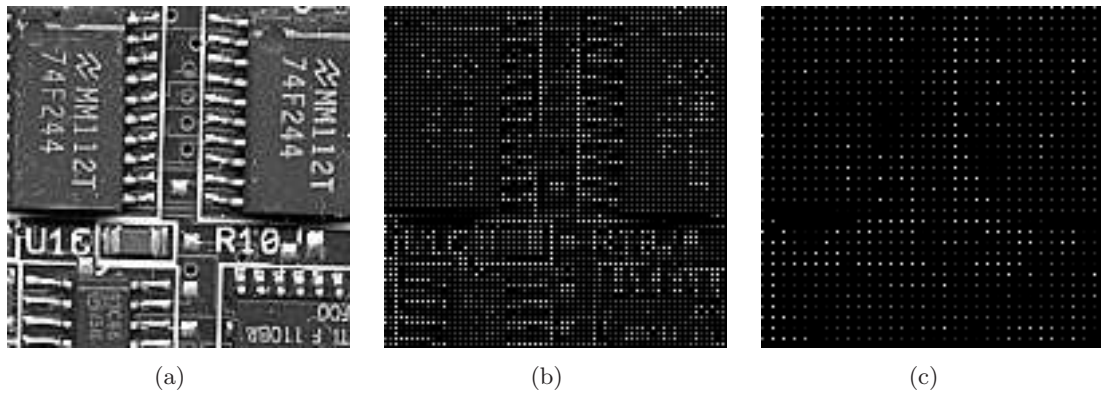


Figura B.1: Processamento por $\mu\mathbf{C}^T\mathbf{C}$. (a) Imagem original. (b) Resultado com $D = 2$. (c) Resultado com $D = 4$.

ponderação em (B.11) passa a ser $\mu/D^2 = 1$.

Na Figura B.1 é ilustrado o efeito da pré-multiplicação de uma imagem (vetorizada) por $\mu\mathbf{C}^T\mathbf{C}$. Na Figura B.1(a) é apresentada a imagem original (primeiros 128×128 pixels da imagem *Board*). Na Figura B.1(b) é apresentada a imagem processada, considerando um fator de subamostragem de 2:1 ($D = 2$). Na Figura B.1(c) é apresentada a imagem processada, considerando um fator de subamostragem de 4:1 ($D = 4$).

O espectro em frequência para estas imagens pode ser visto na Figura B.2. Para uma melhor visualização, os espectros são apresentados com a magnitude em escala linear e em escala logarítmica. Nas figuras B.2(a) e (b) é apresentado o espectro da imagem original. Nas figuras B.2(c) e (d) é apresentado o espectro da imagem processada considerando $D = 2$, e nas figuras B.2(e) e (f) considerando $D = 4$. Como pode ser visto claramente nas figuras B.2(c) e (e), o espectro original é replicado 4 e 16 vezes, respectivamente, conforme previsto em (B.11). Comparando as figuras B.2(b), (d) e (f) é possível observar que o efeito de recobrimento espectral aumenta com o acréscimo de D (subamostragem).

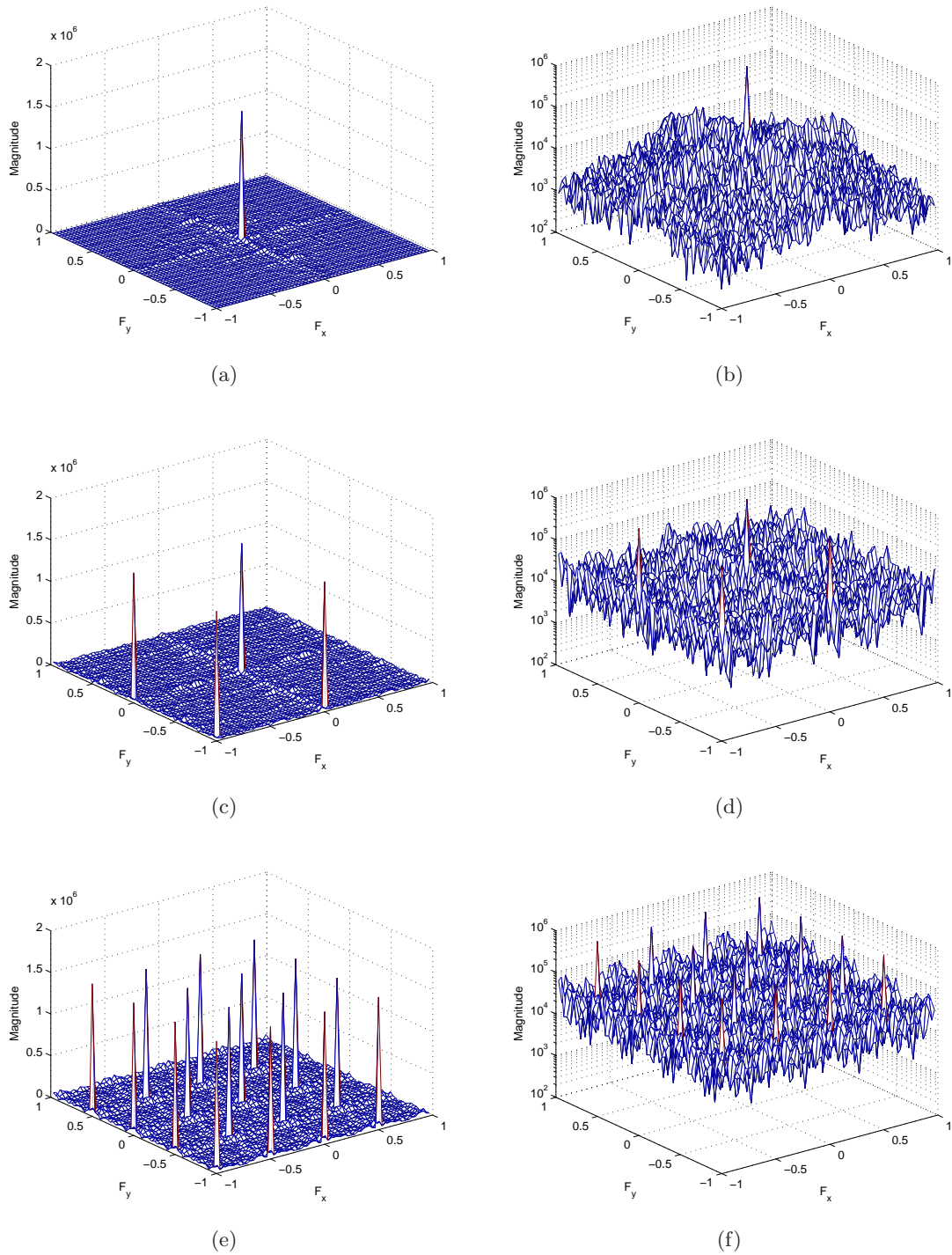


Figura B.2: Resposta em frequência das imagens processadas por $\mu C^T C$. Imagem original: (a) escala linear; (b) escala logarítmica. $D = 2$: (c) escala linear; (d) escala logarítmica. $D = 4$: (e) escala linear; (f) escala logarítmica.

B.2 Efeito de $\mu\mathbf{H}^T(t)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{H}(t)$:

A matriz $\mathbf{H}(t)$ modela as distorções ópticas no sistema de aquisição. Via de regra, $\mathbf{H}(t)$ tem um efeito passa-baixas. Portanto, pré-multiplicar uma imagem (vetorizada) por $\mu\mathbf{H}^T(t)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{H}(t)$ corresponde a fazer uma filtragem passa-baixas, processar o resultado pela matriz $\mu\mathbf{C}^T\mathbf{C}$, conforme discutido na seção anterior, e, por fim, aplicar novamente um filtro passa-baixas. O efeito esperado é, portanto, o de que a filtragem passa-baixas preserve o espectro original da imagem (Figura B.2(a)), a não ser por distorções causadas pelo recobrimento espectral, tendendo a remover os picos gerados pelo deslocamento em frequência discutido na Seção B.1.

Na figuras B.3(a) e (b) é mostrado o resultado deste processamento sobre as imagens nas figuras B.1(b) e (c). Nessas simulações o filtro passa-baixas foi assumido gaussiano. Para $D = 2$, esse filtro foi implementado com uma máscara espacial 6×6 , e para $D = 4$, com uma máscara 8×8 . Em ambos os casos o filtro foi considerado com média zero e variância 2.

Nas figuras B.4(a) e (b) é apresentado o espectro da imagem processada considerando $D = 2$ e nas figuras B.2(c) e (d) considerando $D = 4$. Nas figuras B.4(e) e (f) é apresentada uma aproximação (*zoom*) dos espectros em escala logarítmica (figuras B.2(b) e (d), respectivamente), de forma a possibilitar melhor comparação entre os resultados da Seção B.1.

Como pode ser observado ao comparar a Figura B.2(b) com as figuras B.4(e)–(f), em ambos os espectros, o pico central é preservado e os demais são atenuados. Além do efeito de recobrimento espectral causado por $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$, a aplicação dos filtros passa-baixas tende também a suprimir fortemente os componentes de altas-freqüências da imagem original.

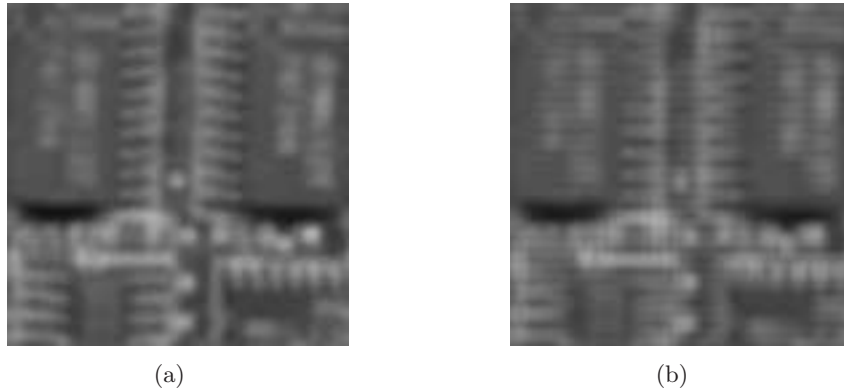


Figura B.3: Processamento por $\mu\mathbf{H}^T(t)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{H}(t)$. (a) $D = 2$. (b) $D = 4$.

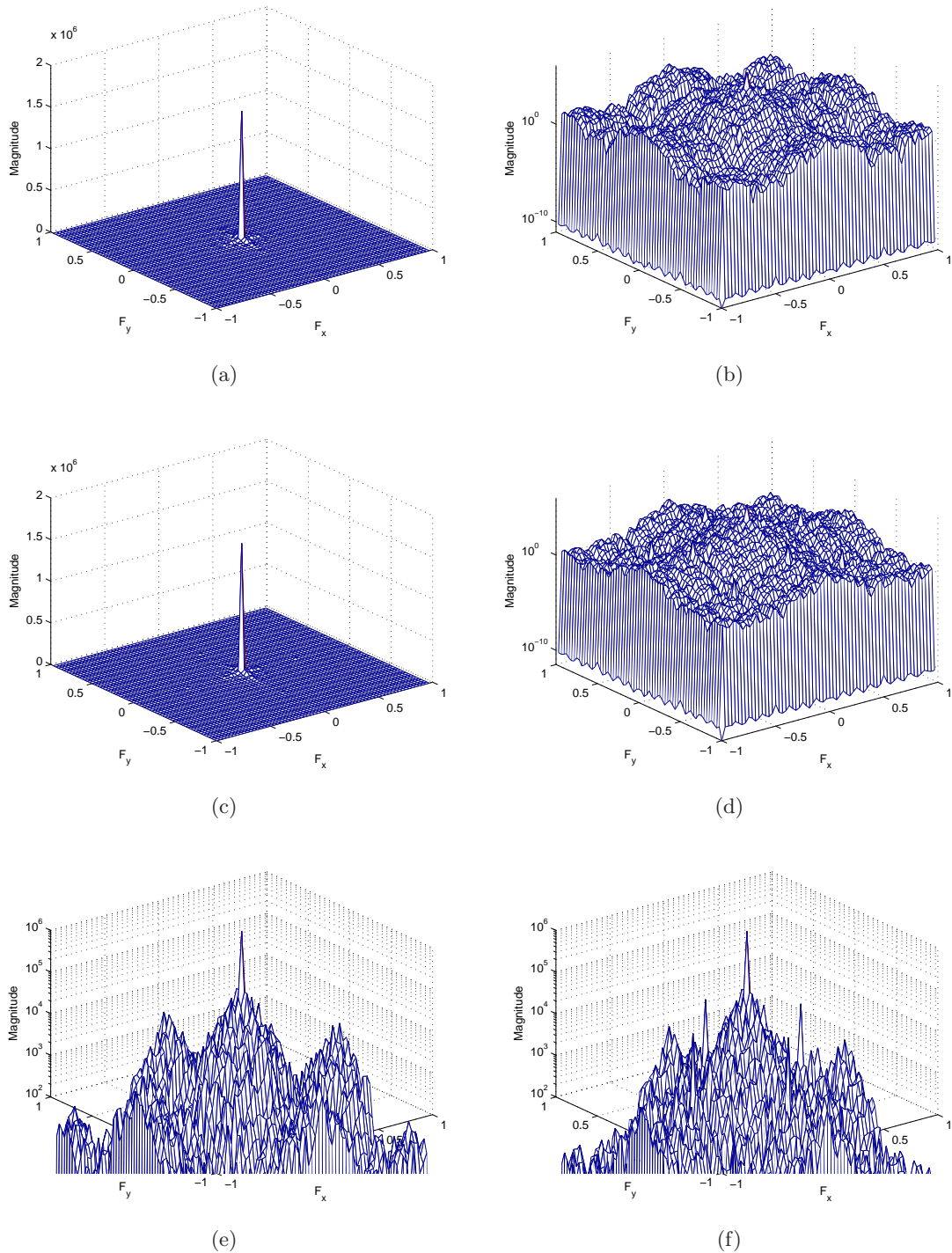


Figura B.4: Resposta em freqüência das imagens processadas por $\mu \mathbf{H}^T(t) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{H}(t)$. $D = 2$: (a) escala linear; (b) escala logarítmica. $D = 4$: (c) escala linear; (d) escala logarítmica. (e) Aproximação de (b) entre 10^2 e 10^6 . (f) Aproximação de (d) entre 10^2 e 10^6 .

B.3 Efeito de $\mathbf{A}(t)$:

Fazendo-se a diferença entre a imagem original e a imagem processada por $\mu\mathbf{H}^T(t)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{H}(t)$, cujo efeito é um passa-baixas, espera-se como resultado uma filtragem passa-altas. Como pode ser visto nas figuras B.5(a) e (b), o resultado esperado verifica-se para ambos os casos testados. Na Figura B.6 são apresentadas as magnitude da resposta em frequência das imagens processadas, em escalas que propiciam a comparação dos resultados com os espectros da imagem original, nas figuras B.2(a) e (b). Como pode ser observado, o pico central é eliminado, preservando apenas as altas-freqüências da imagem original.

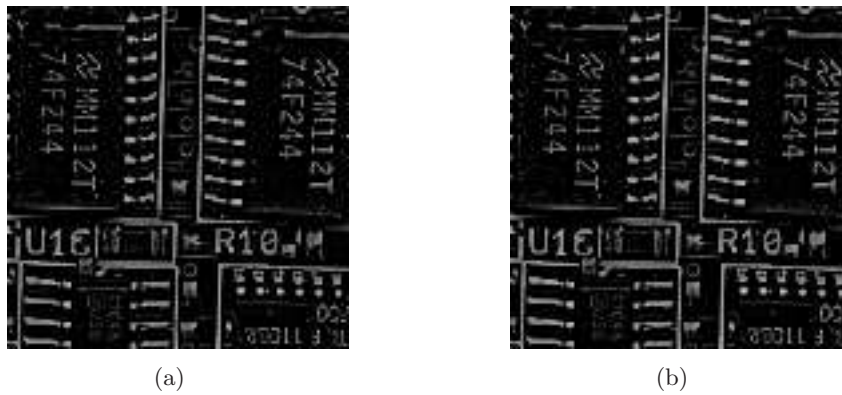


Figura B.5: Processamento por $\mathbf{A}(t)$, considerando: (a) $D = 2$; (b) $D = 4$.

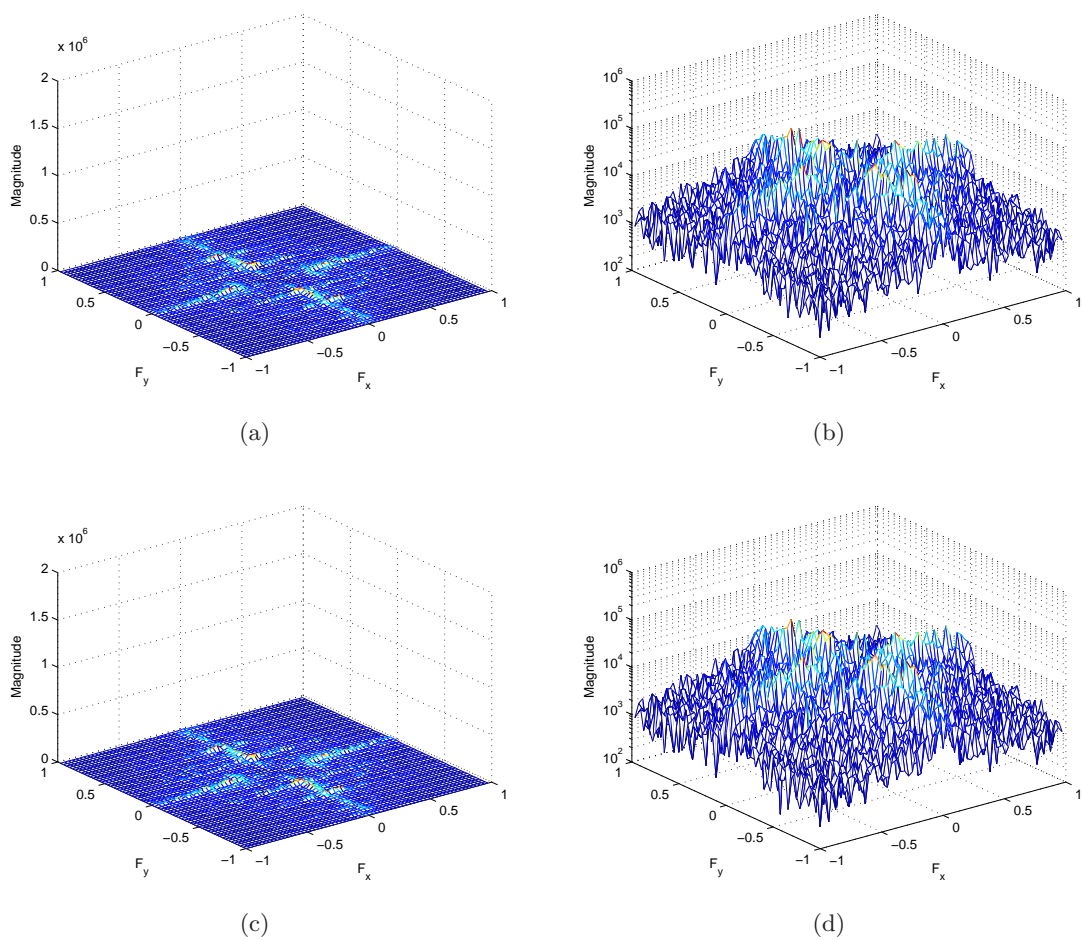


Figura B.6: Resposta em frequência das imagens processadas por $\mathbf{A}(t)$. $D = 2$: (a) escala linear; (b) escala logarítmica. $D = 4$: (c) escala linear; (d) escala logarítmica.

Apêndice C

Efeito dos Erros de Registro no Algoritmo R-LMS-SRR

Neste apêndice são mostrados alguns resultados de simulações que têm por objetivo chamar a atenção para o comportamento do algoritmo R-LMS-SRR na presença de erros de registro. Esses resultados fornecem conclusões interessantes e instigam uma investigação mais profunda acerca deste assunto.

No Capítulo 5 é mostrado que o efeito de um determinado nível de erro de registro sobre o comportamento do algoritmo LMS-SRR pode ser equivalente à inclusão de um termo de regularização (R-LMS-SRR). Supondo que, em determinada aplicação, o fator de regularização ótimo para o algoritmo R-LMS-SRR (desconsiderando a ocorrência de erros de registro) possa ser determinado (ou estimado), é razoável esperar que se possa identificar um algoritmo de registro que forneça um nível de regularização e um desempenho do algoritmo LMS-SRR similar ao do algoritmo R-LMS-SRR com o fator de regularização ótimo. Supondo que isso ocorra, a análise apresentada no Capítulo 5 pode levar à conclusão de que o uso desse algoritmo de registro em conjunto com o R-LMS-SRR projetado para movimento conhecido (sem erro de registro) pode levar a um resultado excessivamente regularizado. Entretanto, como será visto, isso não é verdade.

Antes que as simulações sejam apresentadas, alguns detalhes sobre a implementação precisam ser apresentados. O movimento entre as imagens é assumido translacional e global, gerado a partir de incrementos unitários em ambas as direções, vertical e horizontal, na grade de alta resolução, para cada instante de tempo t . Quando esse movimento precisa ser estimado, é usado o algoritmo de registro proposto em [42]. Como esse algoritmo de registro fornece um vetor de velocidades para cada pixel da imagem, a média entre esses vetores é assumida como a velocidade global na implementação do (R-)LMS-SRR.

Cada curva de MSRE apresentada a seguir corresponde a uma simulação de Monte Carlo (MC) obtida pela promediação de 50 realizações do algoritmo a ser especificado, utilizando diferentes seqüências de imagens. Tais seqüências foram sinteticamente geradas, de acordo com o movimento descrito acima e com a dinâmica do sinal descrita no Capítulo 2, assumindo imagens HR com 64×64 pixels e imagens LR com 32×32 . As imagens utilizadas para gerar cada seqüência correspondem a imagens típicas, como Lena, Cameraman e Baboon, entre

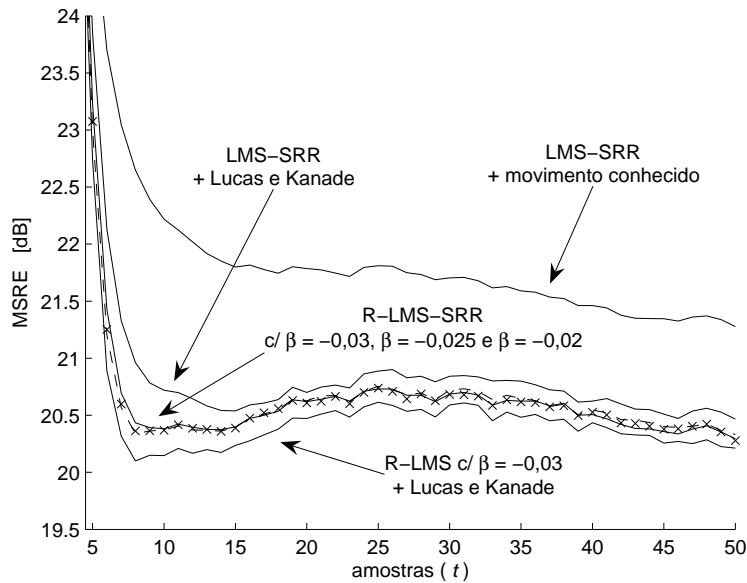


Figura C.1: Evolução temporal do MSRE (*zoom* em regime permanente) para os algoritmos LMS-SRR e R-LMS-SRR.

outras (cenas completamente diferentes entre si).

Para construir a matriz de registro $\mathbf{G}(t)$ e a sua estimativa $\hat{\mathbf{G}}(t)$, a condição de fronteira de Neumann é utilizada. A matriz $\mathbf{D}(t)$ é assumida invariante no tempo ($\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}$). A subamostragem desempenhada por essa matriz é implementada por um processo de convolução com uma máscara 2×2 uniforme com ganho unitário, seguido de uma subamostragem ideal (impulsiva) com fator $2 : 1$. Seguindo a análise apresentada no Capítulo 5, apenas uma iteração do algoritmo é realizada por amostra temporal do sinal de entrada ($K = 1$). O ruído aditivo é modelado como um processo WGN(0, 10).

O passo de convergência utilizado é único para todas as simulações: $\mu = 6$. Para esse passo, e desconsiderando a ocorrência de erros de registro, um fator de regularização ótimo foi estimado para o R-LMS-SRR, usando-se o método de bissecção. Como pode ser observado na Figura C.1, valores de β entre $-0,03 < \beta < -0,02$ levam a um desempenho semelhante (identificado como o desempenho ótimo). Um desempenho próximo a esse pode ser obtido também com o uso do LMS-SRR em conjunto com o algoritmo de registro proposto em [42]. Por fim, como pode ser verificado na Figura C.1, a ocorrência de erros de registro no algoritmo R-LMS-SRR pode contribuir ainda mais para o desempenho do algoritmo, em vez de regularizar excessivamente a solução.

Glossário

| | | |
|-----------------|---|---|
| CCD | — | <i>Charge-Coupled Device</i> . |
| i.i.d. | — | independentes e identicamente distribuídas. |
| HR | — | alta resolução (<i>high resolution</i>). |
| LR | — | baixa resolução (<i>low resolution</i>). |
| SRR | — | reconstrução com super-resolução (<i>Super-Resolution Reconstruction</i>). |
| LMS | — | (algoritmo) <i>Least Mean Square</i> . |
| LMS-SRR | — | (algoritmo) <i>Least Mean Square</i> aplicado à reconstrução com super-resolução. |
| R-LMS-SRR | — | (algoritmo) <i>Regularized Least Mean Square</i> aplicado à reconstrução com super-resolução. |
| MRE | — | erro médio de reconstrução (<i>Mean Reconstruction Error</i>). |
| MSRE | — | erro médio quadrático de reconstrução (<i>Mean Square Reconstruction Error</i>). |
| SNR | — | relação sinal-ruído (<i>Signal-to-Noise Ratio</i>). |
| PSNR | — | relação sinal-ruído de pico (<i>Peak Signal-to-Noise Ratio</i>). |
| WGN | — | ruído branco gaussiano (<i>White Gaussian Noise</i>). |
| MC | — | Monte Carlo. |
| flops | — | operações de ponto-flutuante (<i>float point operations</i>). |
| <i>outliers</i> | — | dados que não correspondem ao modelo estatístico assumido. |
| <i>blurring</i> | — | distorção óptica (borramento). |
| registro | — | estimação da posição relativa entre duas imagens de uma mesma cena. |

Referências Bibliográficas

- [1] S. C. Park, M. K. Park, and M. G. Kang, “Super-resolution image reconstruction: A technical overview,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 20, no. 3, pp. 21–36, May 2003.
- [2] E. Kaltenbacher and R. C. Hardie, “High resolution infrared image reconstruction using multiple, low resolution, aliased frames,” *IEEE National Aerospace and Electronics Conference*, vol. 2, pp. 702–709, May 1996.
- [3] S. Chaudhuri and D. R. Taur, “High-resolution slow-motion sequencing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 22, no. 2, pp. 16–24, Mar. 2005.
- [4] G. L. Foresti, C. Micheloni, L. Snidaro, P. Remagnino, and T. Ellis, “Active video-based surveillance system,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 22, no. 2, pp. 25–37, Mar. 2005.
- [5] A. Hampapur, L. Brown, J. Connel, A. Ekin, N. Haas, M. Lu, H. Merkl, S. Pankanti, A. Senior, C.-F. Shu, and Y. L. Tian, “Smart video surveillance,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 22, no. 2, pp. 38–51, Mar. 2005.
- [6] H.-M. Chen, S. Lee, R. M. Rao, M.-A. Slamani, and P. K. Varshney, “Imaging for canceled weapon detection,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 22, no. 2, pp. 52–61, Mar. 2005.
- [7] G. H. Costa, “Detecção facial: Autofaces versus antifaces,” Master’s thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Elétrica, 2003.
- [8] B. Gunturk, A. Batur, M. H. III, and R. M. Mersereau, “Eigenface-based super-resolution for face recognition,” *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 2, pp. 845–848, Sept. 2002.
- [9] J. G. Silveira, R. Balbinot, and P. L. Nunes, “Fonetchê: um sistema modular de telefonia por computador para serviços de voz sobre IP,” *News Generation: Boletim bimestral sobre tecnologia de redes produzido e publicado pela RNP - Rede Nacional de Ensino e Pesquisa*, vol. 4, no. 4, July 2000.
- [10] A. C. Viana, A. S. Jukemura, D. A. Xavier, and K. V. Cardoso, “Perspectivas sobre qualidade de serviço nos protocolos da internet - estudo de caso: Aplicações de vídeo

- sob demanda,” *News Generation: Boletim bimestral sobre tecnologia de redes produzido e publicado pela RNP - Rede Nacional de Ensino e Pesquisa*, vol. 4, no. 4, July 2000.
- [11] A. Dutta-Roy, “The cost of quality in internet-style networks,” *IEEE Spectrum*, vol. 37, no. 9, pp. 57–62, Sep. 2000.
- [12] M. Elad and A. Feuer, “Restoration of a single superresolution image from several blurred, noisy, and undersampled measured images,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 6, no. 12, pp. 1646–1658, Dec. 1997.
- [13] M. Elad, “Super-resolution reconstruction of images,” Ph.D. dissertation, Israel Institute of Technology, Dec. 1996.
- [14] Z. Jiang, T.-T. Wong, and H. Bao, “Practical super-resolution from dynamic video sequences,” *IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 2, pp. 549–554, June 2003.
- [15] H. He and L. P. Kondi, “Resolution enhancement of video sequences with adaptively weighted low-resolution images and simultaneous estimation of the regularization parameter,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 3, pp. 213–216, May 2004.
- [16] S. Farsiu, D. Robinson, M. Elad, and P. Milanfar, “Advances and challenges in super-resolution,” *Intl. Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 14, no. 2, pp. 47–57, Aug. 2004.
- [17] D. Capel and A. Zisserman, “Computer vision applied to super resolution,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 20, no. 3, pp. 75–86, May 2003.
- [18] Z. Wang and F. Qi, “Super-resolution video restoration with model uncertainties,” *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 2, pp. 853–856, Sept. 2002.
- [19] E. S. Lee and M. G. Kang, “Regularized adaptive high-resolution image reconstruction considering inaccurate subpixel registration,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 12, no. 7, pp. 826–837, July 2003.
- [20] A. Zoomet and S. Peleg, “Efficient super-resolution and applications do mosaics,” *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, vol. 1, pp. 579–583, 2000.
- [21] M. Irani and S. Peleg, “Improving resolution by image registration,” *Graphical Models and Image Processing*, pp. 231–239, 1991.
- [22] R. Mester and M. Hotter, “Robust displacement vector estimation including a statistical error analysis,” *IEE International Conference on Image Processing and its Applications*, pp. 168–172, July 1995.
- [23] M. Elad and A. Feuer, “Superresolution restoration of an image sequence: Adaptive filtering approach,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 8, no. 3, pp. 387–395, Mar. 1999.

- [24] —, “Superresolution reconstruction of an image sequence,” *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 21, no. 9, pp. 817–834, Sept. 1999.
- [25] A. Zoomet, A. Rav-Acha, and S. Peleg, “Robust super-resolution,” *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, vol. 1, pp. 645–650, Dec. 2001.
- [26] M. V. W. Zibetti and J. Mayer, “Simultaneous super-resolution for video sequences,” *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 1, pp. 887–880, Sept. 2005.
- [27] S. Farsiu, D. Robinson, M. Elad, and P. Milanfar, “Robust shift and add approach to super-resolution,” *SPIE Conference on Applications of Digital Signal and Image Processing*, pp. 1–10, 2003.
- [28] —, “Fast and robust multiframe super resolution,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 13, no. 10, pp. 1327–1344, Oct. 2004.
- [29] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [30] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Processamento Digital de Imagens*. São Paulo: Ed. Edgard Blücher LTDA, 1992.
- [31] Z. Wang and F. Qi, “On ambiguities in super-resolution modeling,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 11, no. 8, pp. 678–681, Aug. 2004.
- [32] H. H. Barrett and K. J. Myers, *Foundations of Image Science*. New Jersey: Wiley Interscience, 2004.
- [33] M. K. Ng and N. K. Bose, “Analysis of displacement errors in high-resolution image reconstruction with multisensors,” *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 49, no. 6, pp. 806–813, June 2002.
- [34] J. Modersitzki, *Numerical Methods for Image Registration*, 1st ed. Oxford University Press, 2004.
- [35] E. Gravier and Y. Yang, “Motion-compensated reconstruction of tomographic image sequences,” *IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 807–810, Sept. 2003.
- [36] H. He and L. P. Kondi, “Map based resolution of video sequences using a huber-markov random field image prior model,” *IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 933–936, Sept. 2003.
- [37] W. Y. Zhao, “Super-resolving compressed video with large artifacts,” *IEEE International Conference on Pattern Recognition*, vol. 1, pp. 516–519, Aug. 2004.
- [38] W. Y. Zhao and H. S. Sawhney, “Is super-resolution with optical flow feasible?” *Euro. Conf. Computer Vision*, vol. 1, pp. 599–613, 2002.

- [39] D. Rajan and S. Chaudhuri, “Data fusion techniques for super-resolution imaging,” *Information Fusion*, vol. 3, no. 1, pp. 25–38, Mar. 2002.
- [40] S. J. Reeves and A. C. Higdon, “Perceptual evaluation of the mean-square error choice of regularization parameter,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, no. 1, pp. 107–110, Jan. 1995.
- [41] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*. New York: Wiley, 1979.
- [42] B. Lucas and T. Kanade, “An iterative image registration technique with an application to stereo vision,” *DARPA Image Understanding Workshop*, pp. 121–130, Apr. 1981.
- [43] T. Ono, H. Hasegawa, I. Yamanda, and K. Sakaniwa, “An adaptive super-resolution of videos with noise information on camera systems,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 2, pp. 857–860, Mar. 2005.
- [44] S. Baker and T. Kanade, “Limits on super-resolution and how to break them,” *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, no. 9, pp. 1167–1183, Sept. 2002.
- [45] N. Bose, H. Kim, and B. Zhou, “Performance analysis of the tls algorithm for image reconstruction from a sequence of undersampled noisy and blurred frames,” *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 3, pp. 571–574, Nov. 1994.
- [46] M. V. W. Zibetti and J. Mayer, “Compensation of the effects caused by the outliers in multiframe iterative techniques,” *3rd Intl. Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, vol. 2, pp. 957–960, Sept. 2003.
- [47] A. D. Poularikas, *Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*. Boca Raton: CRC Press, 1999.
- [48] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Siam, 2000.
- [49] O. Macchi, *Adaptive Processing :The Least Mean Squares Approach with Applications in Transmission*. Wiley, 1995.
- [50] B. K. P. Horn and B. G. Schunck, “Determining optical flow,” *Artificial Intelligence*, vol. 17, pp. 185–203, 1981.
- [51] A. Bovik, *Handbook of Image and Video Processing*. Academic Press, 2000.
- [52] D. Zhang, H. Li, and M. Du, “Fast MAP-based multiframe super-resolution image reconstruction,” *Image and Vision Computing*, no. 23, pp. 671–679, 2005.
- [53] M. V. W. Zibetti, “Super-resolução simultânea para seqüências de imagens,” Ph.D. dissertation, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

- [54] G. Ye, M. Pickering, M. Frater, and J. Arnold, “A robust approach to super-resolution sprite generation,” *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 1, pp. 897–900, 2005.
- [55] S. Borman and R. L. Stevenson, “Simultaneous multi-frame MAP super-resolution video enhancement using spatio-temporal priors,” *IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 1–4, 1999.
- [56] G. H. Costa and J. C. M. Bermudez, “Statistical analysis of the LMS algorithm applied to super-resolution image reconstruction,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 55, no. 5, pp. 2084–2095, May 2007.
- [57] —, “Informed choice of the LMS parameters in super-resolution video reconstruction applications,” *aceito para publicação na IEEE Trans. Signal Processing*, pp. 1–21, 2007.
- [58] —, “Are the registration erros always bad for super-resolution?” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 1–4, Apr. 2007.
- [59] —, “Statistical analysis of the LMS algorithm applied to super-resolution video reconstruction,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 3, pp. 101–104, May 2006.
- [60] —, “On the design of the LMS algorithm for robustness to outliers in super-resolution video reconstruction,” *IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 1–4, Oct. 2006.
- [61] —, “A statistical model for the warp matrix in super-resolution reconstruction,” *IEEE / SBT International Telecommunication Symposium*, pp. 557–562, Sept. 2006.
- [62] —, “Diretrizes para o projeto do algoritmo LMS aplicado à super-resolução de vídeo,” *aceito para publicação no Simpósio Brasileiro De Telecomunicações*, pp. 1–6, 2007.
- [63] —, “Análise estatística do algoritmo LMS aplicado à reconstrução de vídeo com super-resolução,” *Simpósio Brasileiro De Telecomunicações*, pp. 1–6, 2005.
- [64] M. H. Costa, G. H. Costa, J. C. M. Bermudez, and F. P. Itturriet, “Algoritmos rápidos para a implementação de modelos teóricos de filtros adaptativos,” *XXI Simpósio Brasileiro De Telecomunicações*, vol. 8, no. 3, pp. 1–6, Sept. 2004.
- [65] M. Elad and A. Feuer, “Recursive optical flow estimation - adaptive filtering approach,” *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 9, no. 2, pp. 119–138, June 1998.
- [66] D. Robinson and P. Milanfar, “Fundamental performance limits in image registration,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 9, pp. 1185–1199, Sept. 2004.
- [67] J. Barron, D. Fleet, and S. Beauchemin, “Performance of optical flow techniques,” *Intl. Journal of Computer Vision*, vol. 12, no. 1, pp. 43–77, 1994.

-
- [68] S. K. Mitra, *Digital Signal Processing - A computer Based Approach*. Mc. Graw Hill, 2001.
- [69] A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, *Signals and Systems*, 2nd ed. Prentice Hall, 1997.