

**JAVIER ERNESTO KOLODZIEJ**

**MODELAGEM ESTATÍSTICA DE ALGORITMOS  
ADAPTATIVOS EM SUB-BANDAS**

**FLORIANÓPOLIS**

**2006**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA**

**MODELAGEM ESTATÍSTICA DE ALGORITMOS  
ADAPTATIVOS EM SUB-BANDAS**

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**JAVIER ERNESTO KOLODZIEJ**

Florianópolis, Maio de 2006

# MODELAGEM ESTATÍSTICA DE ALGORITMOS ADAPTATIVOS EM SUB-BANDAS

Javier Ernesto Kolodziej

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração *Comunicações e Processamento de Sinais*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

---

Rui Seara, Dr.  
Orientador

---

Prof. Nelson Sadowski, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Rui Seara, Dr.  
Presidente

---

Orlando José Tobias, Dr.

---

Hans Helmut Zürn, Ph.D.

---

Carlos Aurélio Faria da Rocha, Dr.

---

Walter Pereira Carpes Jr., Dr.

*Dedico este trabalho à minha mulher,  
Nancy, pelo seu imenso amor e pela dedicação e incentivos  
constantemente.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre me guiar pelos caminhos certos.

A meus pais, Carlos e Laura, imprescindíveis para o alcance de mais esta conquista.

A minha mulher, Nancy, pelas horas de maravilhoso convívio.

A Orlando José Tobias pela amizade, dedicação, profissionalismo, e por todo o que me ensinou.

Ao Prof. Dr. Rui Seara, pela preciosa orientação.

Aos membros da banca na leitura e crítica deste trabalho e pelas valiosas sugestões. Minha admiração e gratidão.

Aos meus colegas e amigos da *Facultad de Ingeniería* da *Universidad Nacional de Misiones*, pelo apoio e motivação.

À *Facultad de Ingeniería* da *Universidad Nacional de Misiones*, pelo apoio financeiro, fundamental na realização deste trabalho.

A todos os amigos e companheiros de pesquisa do LINSE, companhias que tornaram esta etapa mais feliz, especialmente a Juan Rodrigo.

Às amigas cujos nomes não foram mencionados, mas com certeza muito contribuíram em minha trajetória.

*“Vivir no es sólo existir,  
sino existir y crear,  
saber gozar y sufrir  
y no dormir sin soñar.  
Descansar, es empezar a morir”.*

(Gregorio Marañón)

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

## **MODELAGEM ESTATÍSTICA DE ALGORITMOS ADAPTATIVOS EM SUB-BANDAS**

**Javier Ernesto Kolodziej**

Maio/2006

Orientador: Rui Seara, Dr.

Co-orientador: Orlando J. Tobias, Dr.

Área de Concentração: Comunicações e Processamento de Sinais.

Palavras-chave: Modelagem estatística, algoritmo NLMS, algoritmo NSAF, estruturas sub-banda, decomposição em sub-bandas, adaptação lenta.

Número de Páginas: 68.

Neste trabalho, são apresentados modelos estatísticos que descrevem o comportamento de dois algoritmos adaptativos com estrutura em sub-bandas: o algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*) aplicado a uma estrutura em sub-bandas com decomposição generalizada (GSD-NLMS) e o algoritmo de filtragem adaptativa em sub-bandas normalizado (*normalized subband adaptive filtering* - NSAF). Para tais algoritmos, são considerados sinais de entrada Gaussianos e hipótese de adaptação lenta. Esses algoritmos são utilizados como uma alternativa ao algoritmo LMS convencional, visando melhorar a velocidade de convergência para sinais de entrada fortemente correlacionados. Os dois algoritmos aqui considerados realizam um processamento paralelo do sinal de entrada e utilizam um passo de adaptação variável no tempo. Tal processamento é baseado em uma decomposição em sub-bandas. Modelos analíticos para o momento de primeira ordem do vetor de coeficientes do filtro adaptativo bem como para a curva de aprendizagem são obtidos. Para isso, são levadas em conta a natureza variante no tempo do passo de adaptação como também um parâmetro de regularização, o qual é adicionado à estimativa de potência média requerida pelo algoritmo. Através de simulações numéricas, a precisão dos modelos aqui obtidos é avaliada.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

## **ESTATISTIC MODELING OF ADAPTIVE SUB-BAND ALGORITHMS**

**Javier Ernesto Kolodziej**

May/2006

Advisor: Rui Seara, Dr.

Co-advisor: Orlando J. Tobias, Dr.

Area of Concentration: Communication and Signal Processing.

Keywords: Analytical model, NLMS algorithm, NSAF algorithm, subband-filtering structure, subband decomposition, slow adaptation.

Number of Pages: 68.

This work presents stochastic models for the normalized least-mean-square algorithm using a structure with generalized subband decomposition (GSD-NLMS) and for the normalized subband adaptive filtering (NSAF) algorithm, considering Gaussian input signal and slow adaptation. Such algorithms are used as an alternative to the standard LMS to overcome the convergence problems under correlated input signals. Both the studied algorithms make use of a parallel processing of the input signal, based on a subband decomposition, as well as consider a time-varying step-size parameter. Analytical models for the first moment of the filter weight vector and the learning curve for the discussed algorithms are presented. The used analysis takes into account the time-varying nature of the step-size parameter as well as a regularization parameter (added to the power estimate), which prevents division by zero in the power normalization phase. Through simulation results the accuracy of the model here derived is assessed.



## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 ESTRUTURA ADAPTATIVA NA FORMA DIRETA.....	1
1.2 ESTRUTURA ADAPTATIVA EM SUB-BANDAS.....	3
1.3 ESTRUTURA GSD ADAPTATIVA.....	7
1.4 ESTRUTURA NSAF ADAPTATIVA.....	8
1.5 MODELAGEM ESTATÍSTICA DE ALGORITMOS ADAPTATIVOS: SUA IMPORTÂNCIA EM PROJETOS.....	10
1.6 ESTADO DA ARTE NA MODELAGEM ESTATÍSTICA DE ALGORITMOS ADAPTATIVOS EM SUB-BANDA.....	11
<b>2. MODELAGEM ESTATÍSTICA DO ALGORITMO GSD-<math>\epsilon</math>NLMS.....</b>	<b>14</b>
2.1 ESTRUTURA COM DECOMPOSIÇÃO EM SUB-BANDAS GENERALIZADA.....	15
2.2 EQUACIONAMENTO DO ALGORITMO GSD-NLMS.....	19
2.3 MOMENTO DE PRIMEIRA ORDEM DO VETOR DE COEFICIENTES.....	23
2.4 VALORES ÓTIMOS E VALORES DE REGIME PERMANENTE DO VETOR DE COEFICIENTES.....	26
2.5 CURVA DE APRENDIZAGEM E MOMENTO DE SEGUNDA ORDEM DO VETOR DE ERRO.....	31
2.6 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO.....	33
2.6.1 GRUPO DE EXEMPLOS 1: SINAL DE ENTRADA NÃO CORRELACIONADO.....	34
2.6.2 GRUPO DE EXEMPLOS 2: SINAL DE ENTRADA CORRELACIONADO.....	40
2.7 CONCLUSÕES.....	46
<b>3. MODELAGEM ESTATÍSTICA DO ALGORITMO NSAF.....</b>	<b>47</b>
3.1 ESTRUTURA DO ALGORITMO NSAF.....	47
3.2 EQUACIONAMENTO DO ALGORITMO NSAF.....	49
3.3 MOMENTO DE PRIMEIRA ORDEM DO VETOR DE COEFICIENTES.....	52
3.4 VALORES DE REGIME PERMANENTE DO VETOR DE $w(k)$ .....	53
3.5 CURVA DE APRENDIZAGEM.....	54
3.6 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO.....	56
3.7 COMPARAÇÃO NSAF <i>versus</i> GSD-NLMS.....	58
3.8 CONCLUSÕES.....	60
<b>4. CONCLUSÕES FINAIS.....</b>	<b>62</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>64</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Diagrama em blocos de um filtro adaptativo usando o algoritmo LMS.....	2
Figura 1.2. Diagrama em blocos de uma estrutura SAF com erro global.....	4
Figura 1.3. Diagrama em blocos de uma estrutura SAF com erro local.....	6
Figura 1.4. Diagrama em blocos de uma estrutura SAF com erro local criticamente amostrado.....	7
Figura 1.5. Estrutura do algoritmo GSD-NLMS.....	8
Figura 1.6. Diagrama em blocos do algoritmo NSAF.....	9
Figura 1.7. Separação do sinal de entrada em sub-bandas antes de ser processado pelo filtro $\mathbf{w}(k)$ .....	10
Figura 2.1. Estrutura de realização da decomposição polifásica.....	16
Figura 2.2. Decomposição em sub-bandas estrutural.....	18
Figura 2.3. Estrutura do algoritmo GSD-NLMS.....	20
Figura 2.4. Interpretação gráfica para a expressão do momento de primeira ordem.....	28
Figura 2.5. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS para um sinal de entrada branco e $\mu = 0,1\mu_{\max}$ .....	35
Figura 2.6. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS para um sinal de entrada branco e $\mu = 0,5\mu_{\max}$ .....	36
Figura 2.7. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS para um sinal de entrada branco e $\mu = 0,8\mu_{\max}$ .....	37
Figura 2.8. Comportamento médio dos coeficientes do filtro de banda completa equivalente ao algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS para um sinal de entrada branco e $\mu = 0,8\mu_{\max}$ ..	39
Figura 2.9. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS considerando sinal de entrada correlacionado e $\mu = 0,05\mu_{\max}$ .....	42
Figura 2.10. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS considerando sinal de entrada correlacionado e $\mu = 0,5\mu_{\max}$ .....	43
Figura 2.11. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS considerando sinal de entrada correlacionado e $\mu = 0,7\mu_{\max}$ .....	45
Figura 3.1. Diagrama em blocos da estrutura do algoritmo NSAF.....	48
Figura 3.2. Separação do sinal de entrada em sub-bandas antes de ser processados pelo	

filtro $\mathbf{w}(k)$ .....	49
Figura 3.3. Comportamento médio do vetor de coeficientes $E[\mathbf{w}(k)]$ .....	57
Figura 3.4. Comparação do comportamento do modelo para a curva de aprendizagem do algoritmo NSAF e da simulação MC.....	58
Figura 3.5. Comparação das curvas de aprendizagem dos algoritmos NSAF e GSD-NLMS para o mesmo erro em regime permanente.....	59
Figura 3.6. Comparação das curvas de aprendizagem dos algoritmos NSAF e GSD-NLMS para igual velocidade de convergência.....	60

## INTRODUÇÃO

As técnicas de processamento digital de sinais vêm sendo extensivamente aplicadas com sucesso há algumas décadas. Particularmente, o filtro digital com coeficientes fixos já faz parte do nosso cotidiano, sendo amplamente utilizado em diversas aplicações, tais como os populares sistemas de som digitais, telefones celulares, equipamentos e instrumentos médicos, só para citar algumas aplicações da atualidade.

No entanto, em algumas situações práticas, para se obter um melhor aproveitamento do filtro digital, seus coeficientes devem ser modificados ao longo do tempo. Um desses casos é nas comunicações telefônicas, em que o canal de comunicação envolvido muda suas características, na melhor das hipóteses, a cada ligação efetuada. Assim, para tais situações, o uso de filtros adaptativos faz-se necessário. Um filtro adaptativo é um sistema variante no tempo, provido de um mecanismo de ajuste dos coeficientes de acordo com algum critério especificado [1], [2]. Outros exemplos de aplicações usuais de técnicas de filtragem adaptativa são: antenas adaptativas, equalização de canais, cancelamento de eco em telefonia de longa distância, cancelamento de interferências, estimação espectral e, dentre os mais recentes, podemos destacar cancelamento de eco acústico e de vibrações em estruturas, necessários às mais diferentes áreas de aplicação.

### 1.1 ESTRUTURA ADAPTATIVA NA FORMA DIRETA

A estrutura FIR (*finite impulse response*) com ajuste de seus coeficientes através de um algoritmo baseado no erro quadrático médio, como por exemplo o algoritmo LMS (*least-mean-square*), é um dos sistemas adaptativos mais usados desde sua introdução na década de 60 [1]. Tal estrutura é denominada filtro LMS-AFIR (estrutura FIR adaptativa usando o algoritmo LMS). A forma em que geralmente se implementa tal filtro adaptativo é a forma direta I ou forma transversal, como ilustrado na Figura 1.1. Nessa figura,  $x(n)$  representa o sinal de entrada,  $d(n)$  é o sinal desejado,  $y(n)$  caracteriza o sinal de saída,  $e(n)$  é o sinal erro de estimação e  $w_i(n)$  são os coeficientes do filtro adaptativo.

A principal vantagem de uma estrutura LMS-AFIR é a sua reduzida complexidade computacional quando comparada com a de outros algoritmos adaptativos [algoritmo dos mínimos quadrados recursivo (*recursive least-squares* - RLS) e projeções afins (*afine projections* - AP), dentre outros], considerando estruturas de filtros com o mesmo número de coeficientes. Em geral, a complexidade computacional dos filtros adaptativos está diretamente relacionada com a quantidade de coeficientes. Por sua vez, esse número é condicionado à aplicação específica de filtragem considerada [1]-[19]. Dessa forma, em aplicações que requerem um grande número de coeficientes, a complexidade computacional dos filtros adaptativos pode se tornar uma questão bastante crítica. A eficiência computacional de uma estrutura adaptativa é um aspecto relevante quando da implementação de algoritmos adaptativos visando operação em tempo real, como é o caso em controle ativo de ruído acústico e vibrações.

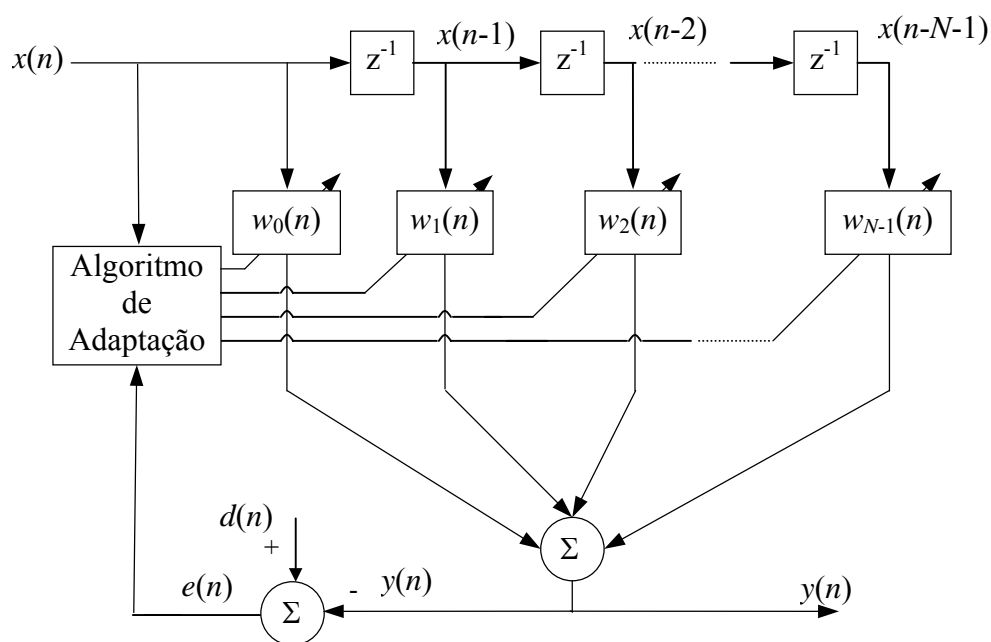


Figura 1.1. Diagrama em blocos de um filtro adaptativo usando o algoritmo LMS.

Um importante problema de uma estrutura adaptativa FIR é que a convergência do filtro adaptativo (quando considerado o algoritmo LMS convencional) torna-se muito afetada (degradada) para sinais de entrada correlacionados. Para mitigar tal problema, a literatura da área apresenta duas opções: utilizar um outro tipo de algoritmo de adaptação com melhor desempenho para essa classe de sinais [por exemplo, o algoritmo LMS

normalizado (NLMS) ou o algoritmo RLS]; ou uma outra estrutura de filtragem, em vez da usual forma transversal, que seja mais adequada para tratar com sinais correlacionados. Entretanto, qualquer uma dessas alternativas levará a um aumento de complexidade computacional.

## 1.2 ESTRUTURA ADAPTATIVA EM SUB-BANDAS

A implementação de filtros adaptativos utilizando estruturas em sub-bandas [20] é uma opção freqüentemente considerada para contornar o problema de velocidade de convergência das estruturas LMS-AFIR, especialmente em aplicações tais como controle ativo de ruído acústico e vibrações [12]-[15], cancelamento de eco acústico [3]-[9] e equalização de canais de comunicação [10], [11].

Diferentes estruturas considerando decomposição em sub-bandas têm sido propostas visando formas alternativas de implementar os filtros LMS-AFIR, originando a conhecida família de filtros adaptativos em sub-bandas (*subband adaptive filter* - SAF). Todas as estruturas de filtragem em sub-bandas se caracterizam por apresentar uma decomposição do sinal de entrada em sub-bandas, seguida de uma redução da taxa de amostragem. Tal procedimento visa principalmente dois aspectos: o tratamento independente de sinais pelas diferentes sub-bandas e a redução da carga computacional exigida dos processadores.

Uma estrutura em sub-bandas é geralmente caracterizada por três blocos: o bloco de análise (ou filtro dizimador), o bloco de subfiltros e o bloco de síntese (ou filtro interpolador) [2]. O bloco de análise é formado por dois sub-blocos: o banco de filtros de análise (que decompõe o sinal de entrada em  $M$  sub-bandas), composto por  $M$  filtros, denotados por  $H_i(z)$  na Figura 1.2, e o dizimador (operador que subamostra o sinal por um fator  $L$ , onde  $L$  é um valor inteiro denominado fator de dizimação). Esse último torna-se viável devido à limitação em frequência decorrente do processo de filtragem. O bloco de subfiltros é encarregado de modificar o conteúdo harmônico do sinal de cada sub-banda e, geralmente, é a parte adaptativa do sistema. Cada subfiltro é representado por  $W_i(z)$  (ver Figura 1.2). O bloco de síntese é também formado por dois sub-blocos: o interpolador (que

eleva a taxa de amostragem por um fator  $I$ , chamado fator de interpolação) e, finalmente, o banco de filtros de síntese  $G_i(z)$  (cujas funções são: filtrar as réplicas indesejáveis do espectro de frequência criadas no processo de dizimação e interpolação, e reagrupar as sub-bandas para formar um sinal único de saída).

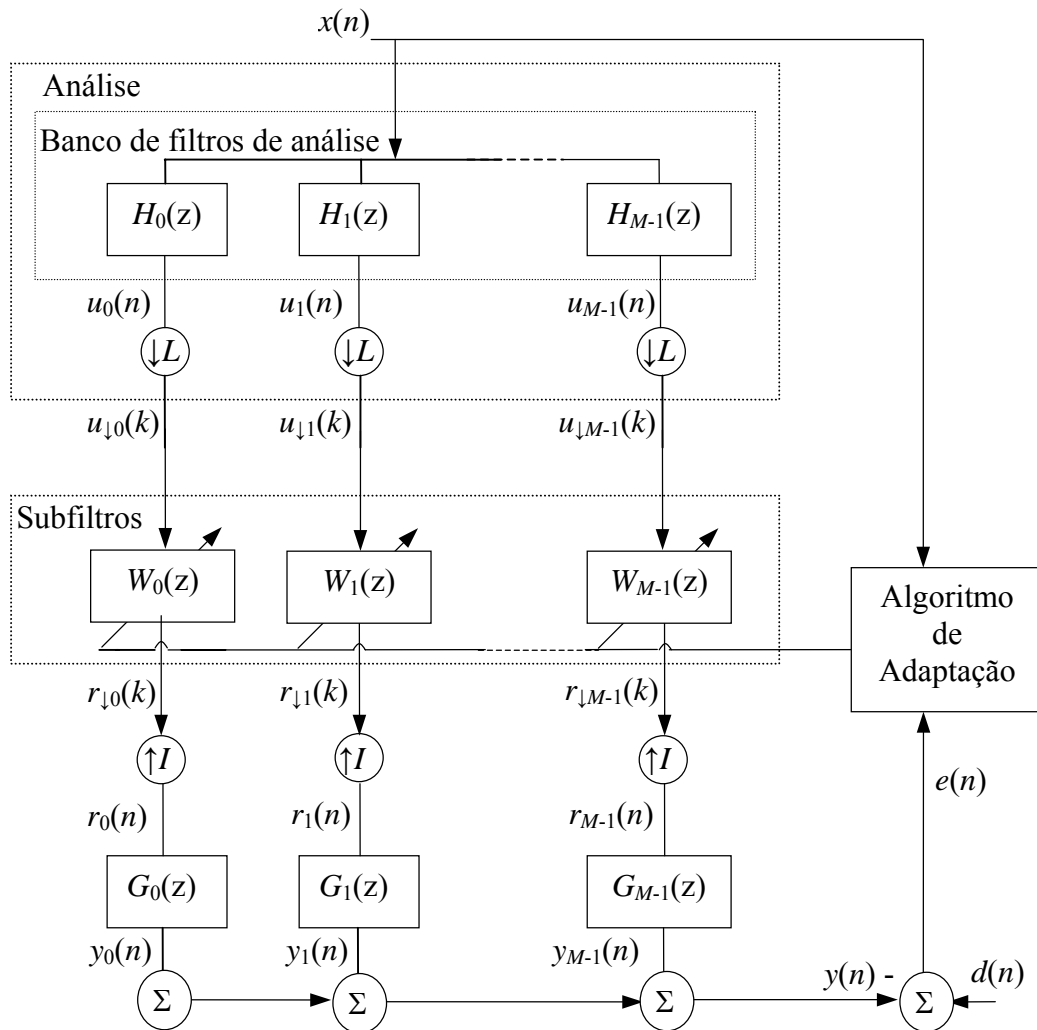


Figura 1.2. Diagrama em blocos de uma estrutura SAF com erro global.

As Figuras 1.2 e 1.3 ilustram o diagrama em blocos de duas estruturas sub-bandas. Para cada sub-banda  $i$  têm-se os seguintes sinais: o sinal de saída do filtro de análise  $u_i(n)$ , o sinal de entrada dos subfiltros  $u_{\downarrow i}(k)$ , o sinal de saída dos subfiltros  $r_{\downarrow i}(k)$ , o sinal de entrada do filtro de síntese  $r_i(n)$  e o sinal de saída do filtro de síntese  $y_i(n)$ . O símbolo  $\downarrow$  indica a operação de dizimação. Outros sinais envolvidos no sistema são: o sinal de entrada  $x(n)$ , o sinal desejado  $d(n)$ , o erro de estimação  $e(n)$  e o sinal de saída  $y(n)$ . O algoritmo

de atualização dos coeficientes pode utilizar o erro de estimação global  $e(n)$ , como mostrado na Figura 1.2 ou pode ainda considerar os erros locais  $e_{\downarrow i}(n)$ , como ilustrado na Figura 1.3. Essa última estrutura é a mais utilizada visto que ela é menos suscetível a problemas de estabilidade [2]. Nesse caso é preciso separar o sinal desejado em sub-bandas usando um outro bloco de análise, obtendo assim, os sinais  $d_{\downarrow i}(k)$ .

Se o fator de dizimação  $L$  e o fator de interpolação  $I$  fossem iguais ao número de sub-bandas teríamos uma estrutura denominada esquema criticamente amostrado (*critically-sampled scheme*). Esse esquema apresenta um efeito indesejável de recobrimento de espectro. Assim, é preciso incluir filtros, conhecidos por filtros cruzados  $W_{ij}(z)$  (com  $i \neq j$ ), que têm como entrada o sinal de uma sub-banda mas atuam em uma outra sub-banda [21]-[23]. A Figura 1.4 ilustra o caso para  $M = 2$ . Um importante resultado, mencionado em [22], é que o esquema criticamente amostrado, considerando filtros cruzados, quando aplicado a um problema de identificação de sistemas apresenta um pior comportamento de convergência do que um filtro em banda completa.

Se o fator de dizimação e o fator de interpolação são menores do que o número de sub-bandas, a estrutura em sub-bandas resultante é denominada esquema sobre-amostrado (*oversampled scheme*). Nesse caso, os sinais das sub-bandas apresentam um menor conteúdo harmônico próximo aos limites das sub-bandas, resultando em valores menores de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada de cada sub-banda, degradando sobremaneira a taxa de convergência global do sistema [23]-[24].

Dois algoritmos que não apresentam tais problemas estruturais e, portanto, exibem um melhor comportamento de convergência, são: o algoritmo NLMS, aplicado a uma estrutura em sub-bandas com decomposição generalizada (GSD-NLMS) [25], e o algoritmo de filtragem adaptativa em sub-bandas normalizado (NSAF) [27], [28].



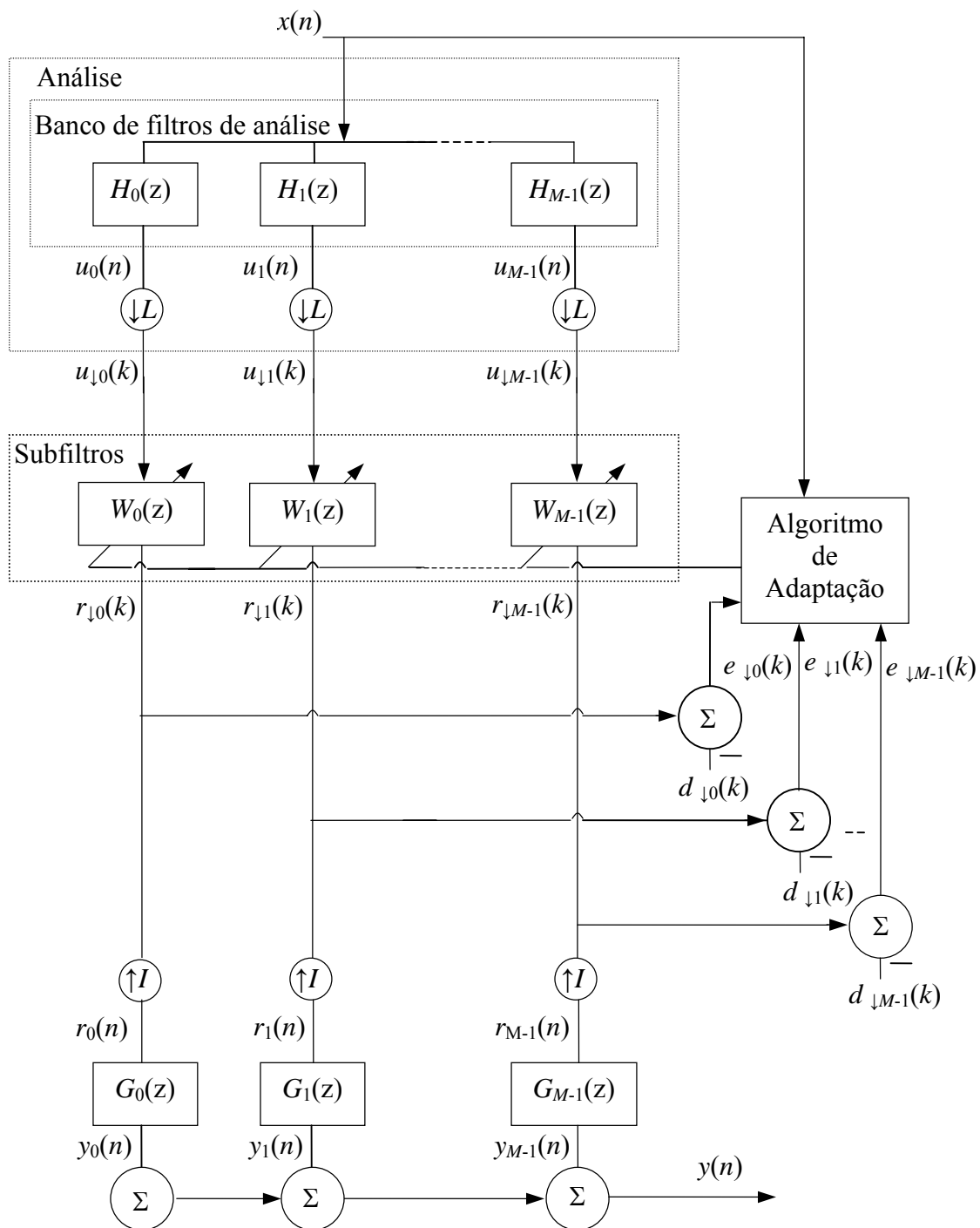


Figura 1.3. Diagrama em blocos de uma estrutura SAF com erro local.

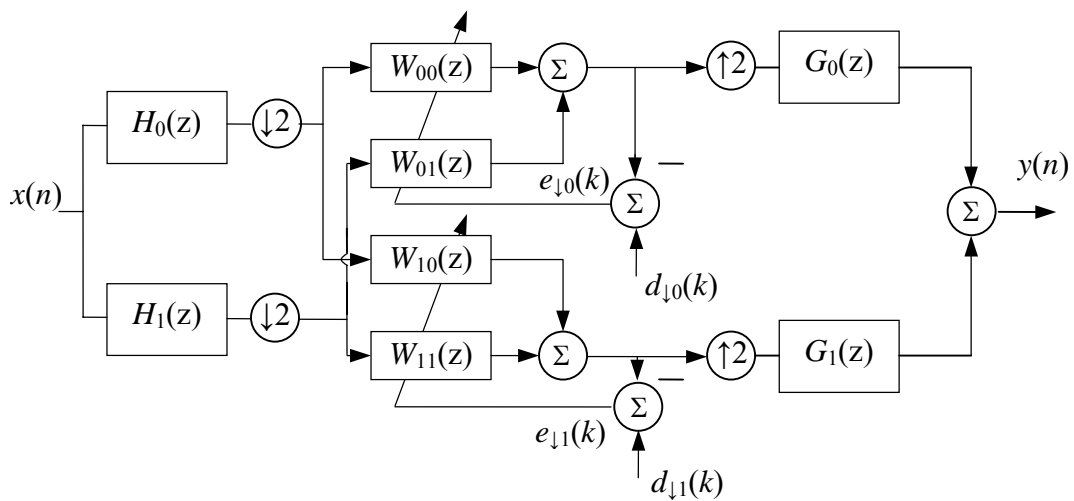


Figura 1.4. Diagrama em blocos de uma estrutura SAF com erro local criticamente amostrado

### 1.3 ESTRUTURA GSD ADAPTATIVA

A estrutura básica do algoritmo GSD-NLMS foi introduzida por Mitra *et. al.* em [25]. Tal procedimento consiste em implementar um filtro FIR com  $N$  coeficientes fixos através da conexão em paralelo de  $M$  ramos, com  $1 \leq M \leq N$ ; cada ramo, por sua vez, é composto pela cascata de um filtro interpolador e um filtro esparso. O filtro esparso tem pelo menos  $N/M$  coeficientes não-nulos. Note que essa estrutura mantém inalterada a taxa de amostragem dos sinais. Internamente são utilizados filtros esparsos que reduzem a complexidade computacional, sem causar problemas de recobrimento de espectro dos sinais envolvidos.

Na versão adaptativa da estrutura considerada, o bloco interpolador é mantido fixo [implementado através de uma transformação ortogonal, como por exemplo, uma transformada do cosseno discreta (DCT) ou uma transformada de Fourier discreta (DFT)] e o filtro esparso, por sua vez, caracteriza a parte adaptativa da estrutura [26]. Desse modo, a atuação de cada filtro esparso sobre uma determinada faixa de frequências resultará, para a estrutura adaptativa global, em um aumento da velocidade de convergência. Além do mais, em algumas aplicações, as sub-bandas que contribuem pouco para a resposta em frequência total podem ser desconsideradas; assim, pode ser reduzido o número de operações necessárias para implementar o algoritmo. Adicionalmente, a convergência de

cada filtro esparsos é melhorada através do uso do algoritmo NLMS [26]. O algoritmo resultante pode ser visto como uma generalização do algoritmo NLMS no domínio transformado (TD-NLMS), apresentando ainda uma vantagem adicional: uma transformação ortogonal de menor dimensão [26].

Na Figura 1.5, é mostrado o diagrama em blocos da estrutura GSD-NLMS. Comparando a estrutura desse algoritmo com a estrutura geral SAF, mostrada na Figura 1.2, pode-se concluir que os filtros de análise da estrutura SAF correspondem à transformação ortogonal da estrutura GSD-NLMS, os filtros de síntese têm função de transferência unitária e o processo de dizimação/interpolação é substituído pelos sub-filtros esparsos.

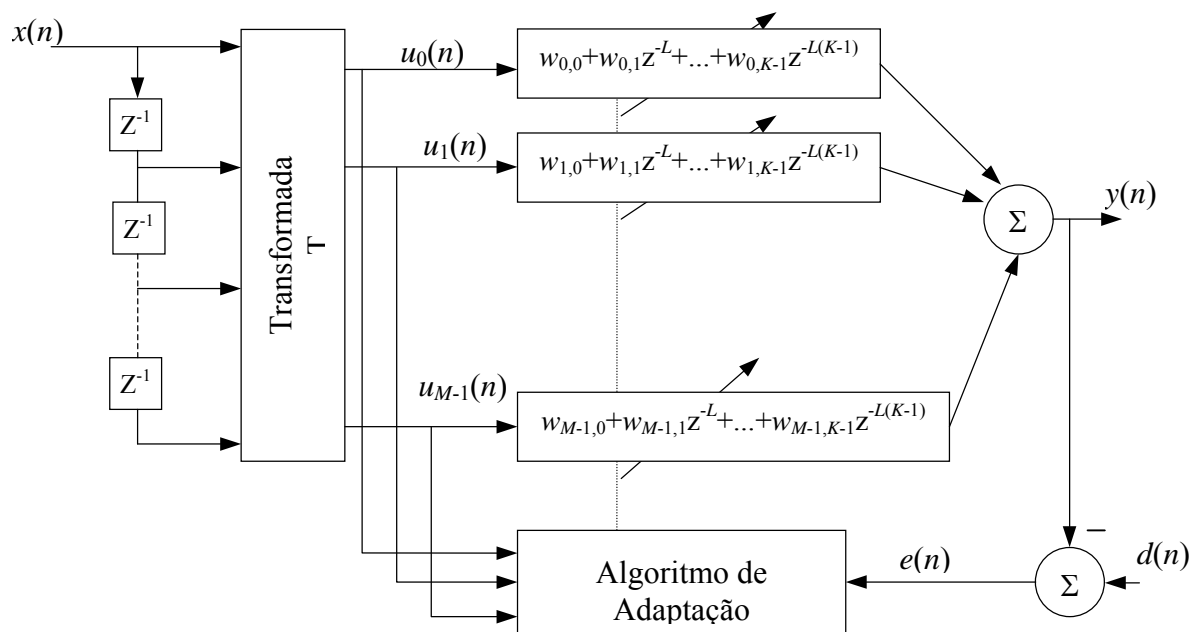


Figura 1.5. Estrutura do algoritmo GSD-NLMS.

#### 1.4 ESTRUTURA NSAF ADAPTATIVA

O algoritmo de filtragem adaptativa em sub-bandas normalizado (NSAF) foi proposto por Lee *et. al.* em [27] e [28]. Esse algoritmo é uma variante dos algoritmos adaptativos em sub-bandas. Nesse caso, o sinal de erro é decomposto em sub-bandas e os

coeficientes da estrutura operam em banda completa. O diagrama em blocos desse algoritmo é ilustrado na Figura 1.6. Assumindo que a adaptação seja suficientemente lenta, o banco de filtros de análise pode ser deslocado de sua posição original [27], [28], tal como ilustrado pela Figura 1.7; desse modo, a estrutura NSAF pode também ser enquadrada como uma estrutura SAF convencional.

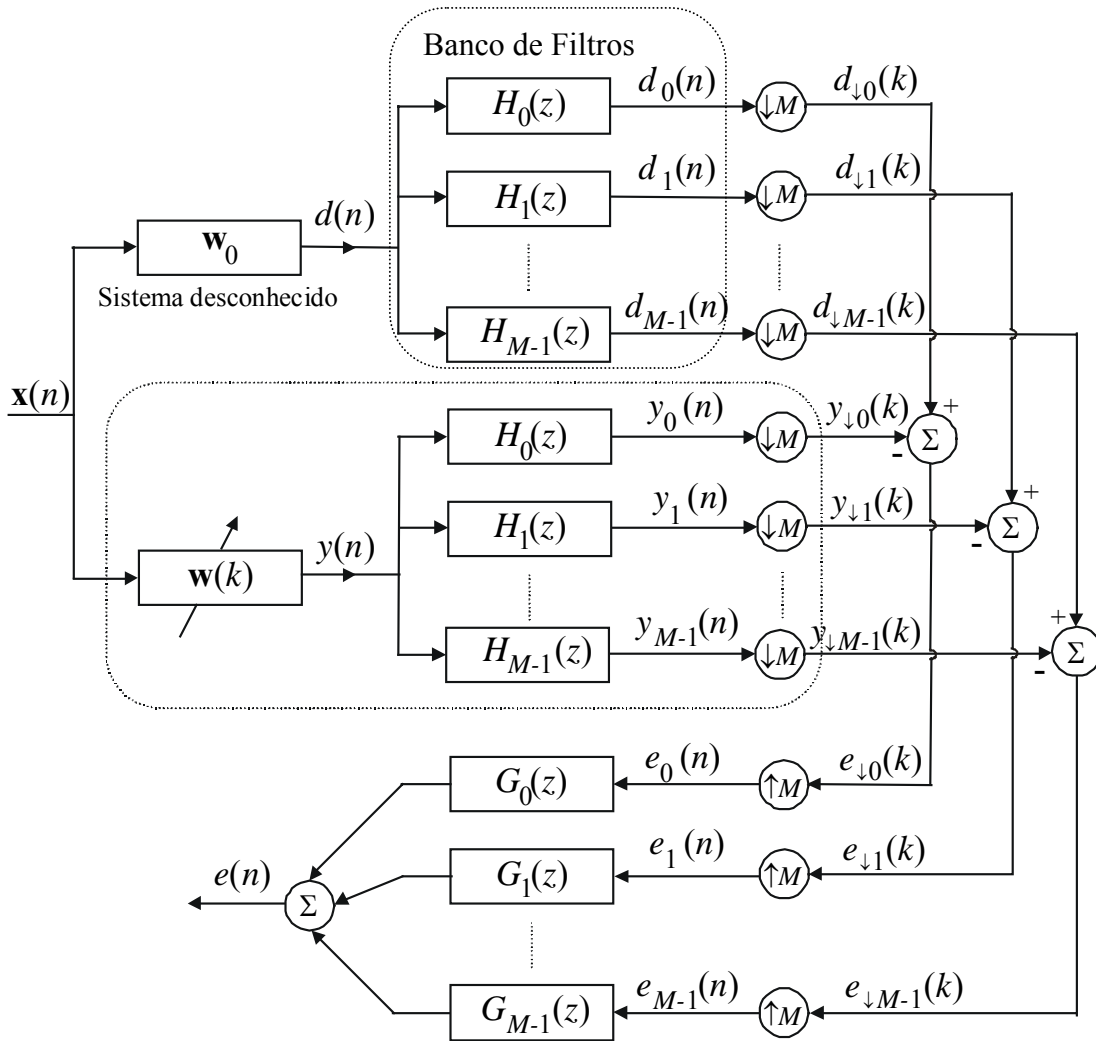


Figura 1.6. Diagrama em blocos do algoritmo NSAF.

É interessante notar que comutando o filtro  $w(k)$  com o banco de filtros de análise na estrutura NSAF, a estrutura resultante ainda apresenta uma diferença com respeito à estrutura SAF convencional: os subfiltros precedem ao dizimador.

A maior vantagem da estrutura NSAF é a sua velocidade de convergência. Entretanto, tal estrutura não permite o uso de estratégias de redução de complexidade computacional como no caso da estrutura SAF convencional.

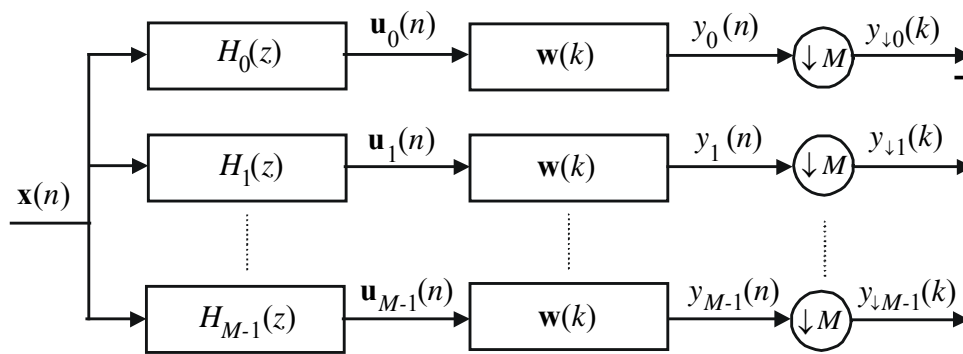


Figura 1.7. Separação do sinal de entrada em sub-bandas antes de ser processado pelo filtro  $w(k)$ .

## 1.5 MODELAGEM ESTATÍSTICA DE ALGORITMOS ADAPTATIVOS: SUA IMPORTÂNCIA EM PROJETOS

Ao começar o projeto de um sistema adaptativo, o projetista recebe um conjunto de características que o sistema deve cumprir. As especificações de projeto podem estabelecer limites, tais como velocidade de convergência, erro quadrático médio em regime permanente, complexidade computacional, dentre outros parâmetros do sistema. O sucesso do projeto dependerá se suas especificações são eficazmente cumpridas.

Uma forma de determinar se o sistema cumpre tais especificações é implementar o algoritmo e executá-lo numerosas vezes para cada uma das condições de operação definidas. Uma outra forma de avaliar seu desempenho é através do uso de modelos matemáticos dos algoritmos. Essa última proporciona uma considerável economia em tempo. Os modelos, alimentados com informações referentes às condições de operação, podem prever com vantagem o comportamento do sistema em estudo. Também, podem ser determinados, qualitativa e quantitativamente, os parâmetros que influenciam o funcionamento do sistema. Com tais informações, o projetista pode realizar ajustes ou ainda comparar o desempenho de diferentes algoritmos para julgar a adequação de cada um deles com a aplicação considerada.

A modelagem de sistemas adaptativos é uma tarefa difícil e delicada, requerendo um amplo conhecimento de diversas ferramentas matemáticas e de análise de sinais. Os algoritmos adaptativos são sistemas com comportamentos estocásticos e variantes no

tempo. Modelar um sistema que apresente apenas um desses comportamentos já é trabalhoso; se um sistema apresenta a conjugação dos dois comportamentos, a complexidade da modelagem é ainda maior. Em consequência, o estabelecimento de considerações simplificativas é constantemente requerido na modelagem de tais algoritmos. Ressalta-se aqui que as considerações simplificativas tornam o tratamento matemático e as expressões do modelo mais simples, mas ao mesmo tempo restringem sua abrangência. Então, no campo da modelagem, é sempre necessário estabelecer um compromisso entre a precisão do modelo e sua complexidade. Dessa forma o projetista não terá de lidar com expressões complexas, geralmente, difíceis de manusear. No entanto, vislumbra-se a possibilidade de se dispor de aplicativos (programas computacionais) de projeto de filtros adaptativos incluindo as expressões dos modelos dos algoritmos considerados. Esse último facilitará o trabalho do projetista e incentivará os pesquisadores a aprimorar tanto os algoritmos quanto os modelos dos sistemas adaptativos.

Sendo tais algoritmos sistemas estocásticos, os modelos devem descrever o comportamento de alguns parâmetros de forma estatística. Os mais utilizados são o valor quadrático médio do erro de estimação, o valor médio da norma L2 do vetor de coeficientes do filtro adaptativo e o valor médio desses coeficientes. Os modelos desses parâmetros permitem inferir os valores dos parâmetros do algoritmo que garantam a estabilidade, determinar expressões para figuras de mérito, tais como o desajuste e a velocidade de convergência, dentre outras informações relevantes. Dispor de tais expressões matemáticas possibilita otimizar algumas características do sistema adaptativo. Em decorrência disso, novos algoritmos com melhores características podem também ser desenvolvidos.

## **1.6 ESTADO DA ARTE DA MODELAGEM ESTATÍSTICA DE ALGORITMOS ADAPTATIVOS EM SUB-BANDA**

Apesar de existir várias abordagens para a análise do comportamento dos filtros adaptativos em sub-bandas [29]-[34], sua modelagem continua sendo um tema aberto na literatura técnica da área. Em particular, para o algoritmo GSD-NLMS se tem apenas um modelo para o momento de primeira ordem dos coeficientes do filtro adaptativo,

apresentado em [26]. Além disso, tal análise é ainda obtida sob algumas considerações restritivas não reproduzindo com fidelidade as reais condições de operação do algoritmo.

Com respeito ao algoritmo NSAF, recentemente foi analisado o comportamento de sua convergência sob o ponto de vista de desvio quadrático médio. [27], [28]. No entanto, essa análise não descreve o comportamento do momento de primeira ordem do vetor de coeficientes do filtro adaptativo nem de sua curva de aprendizagem.

Neste trabalho apresentamos uma modelagem estatística dos algoritmos adaptativos GSD-NLMS e NSAF, permitindo prever o comportamento desses algoritmos para diversas condições de operação.

A análise dos algoritmos GSD-NLMS e NSAF apresentada nesta dissertação leva em consideração alguns importantes aspectos, a saber, a natureza variante do passo de adaptação e um parâmetro de regularização, o qual é adicionado à estimativa de potência média requerida pelo algoritmo adaptativo, evitando, assim, um mau condicionamento desse último. Isso representa não só um avanço na modelagem do algoritmo, mas também um aprimoramento da estrutura do ponto de vista prático. Entretanto, os modelos obtidos estão restritos à condição de adaptação lenta. Assim, são apresentados modelos estatísticos que descrevem os momentos de primeira e segunda ordens e da curva de aprendizagem dos algoritmos em questão, sendo tais contribuições, em nosso conhecimento, inéditas.

Em suma, esta dissertação de mestrado objetiva contribuir com o entendimento e a implementação dos sistemas adaptativos aplicados a estruturas em sub-bandas, dirigindo nosso foco à modelagem estatística destes dois importantes algoritmos: o NLMS aplicado a uma estrutura em sub-bandas com decomposição generalizada (NLMS-GSD) e o algoritmo de filtragem adaptativa em sub-bandas normalizado (NSAF).

Este trabalho de dissertação está organizado como segue. Nos Capítulos 2 e 3, são abordadas, respectivamente, a modelagem estatística do algoritmo GSD-NLMS e a do algoritmo NSAF. Em cada capítulo são incluídas a determinação dos momentos de primeira e segunda ordens dos coeficientes do filtro, como também a correspondente curva de aprendizagem. Ao fim desses capítulos, são apresentados resultados de simulação que

permitem avaliar a precisão dos modelos propostos. Finalmente, o Capítulo 4 apresenta os comentários e conclusões finais deste trabalho de dissertação.



## MODELAGEM ESTATÍSTICA DO ALGORITMO GSD- $\epsilon$ NLMS

Este capítulo apresenta um modelo estatístico para o algoritmo  $\epsilon$ NLMS aplicado a uma estrutura em sub-bandas com decomposição generalizada (GSD- $\epsilon$ NLMS). O algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS está baseado no procedimento de decomposição em sub-bandas introduzido por Mitra *et. al.* em 1993 [25]. Tal procedimento consiste em implementar um filtro FIR, com  $N$  coeficientes fixos, através da conexão em paralelo de  $M$  ramos, com  $1 \leq M \leq N$ , na qual cada ramo é composto pela cascata de um filtro interpolador e um filtro esparsos. Na versão adaptativa da estrutura considerada [26], o interpolador é mantido fixo e o filtro esparsos, por sua vez, caracteriza a parte adaptativa da estrutura. A principal vantagem do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS é sua muito boa velocidade de convergência para sinais de entrada correlacionados.

O modelo analítico aqui proposto descreve os momentos de primeira e segunda ordens do vetor de coeficientes e a curva de aprendizagem da estrutura adaptativa em questão. O modelo está restrito a sinais de entrada Gaussianos e passo de adaptação pequeno, sendo que esse último pressupõe uma adaptação lenta. Além do mais, a análise usada leva em consideração a natureza variante do passo de adaptação, decorrente da normalização de potência do algoritmo, como também um parâmetro de regularização  $\epsilon$ , o qual é adicionado à estimativa de potência média, que impede divisão por zero na operação de normalização, permitindo, assim, que o modelo seja mais próximo das condições reais de implementação do algoritmo.

No final deste capítulo, são apresentados resultados de simulação para diversos valores do passo de adaptação e sinais de entrada (correlacionados e não-correlacionados) permitindo-se avaliar dessa forma a qualidade de predição obtida pelo modelo aqui proposto.

## 2.1 ESTRUTURA COM DECOMPOSIÇÃO EM SUB-BANDAS GENERALIZADA

Esta seção apresenta a estrutura do filtro com decomposição em sub-bandas generalizada, considerando-a como uma generalização da decomposição polifásica de seqüências numéricas.

Qualquer seqüência numérica  $\{f(n)\}$ , seja de duração finita ou infinita, com transformada Z denotada pela função  $F(z)$ , pode ser expressa da seguinte forma:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{k=0}^{M-1} W_k(z^M)z^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0(z^M) \\ W_1(z^M) \\ \vdots \\ W_{M-1}(z^M) \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde

$$W_k(z^M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_k(n)z^{-nM}, \quad 0 \leq k \leq M-1. \quad (2.2)$$

O lado direito de (2.1) é denominado decomposição polifásica e as funções  $W_k(z^M)$  são chamadas componentes polifásicas de  $F(z)$  [35]. Se  $w_k(n)$  denota a transformada Z inversa de  $W_k(z^M)$ , então pode-se escrever a seguinte relação:

$$w_k(n) = f(nM + k), \quad 0 \leq k \leq M-1. \quad (2.3)$$

A expressão (2.3) indica que a seqüência  $w_k(n)$  é obtida subamostrando  $f(n)$  por um fator  $M$ ; o fator  $k$  indica a fase do processo de subamostragem. A Figura 2.1 ilustra o processo de decomposição polifásica de  $F(z)$ .

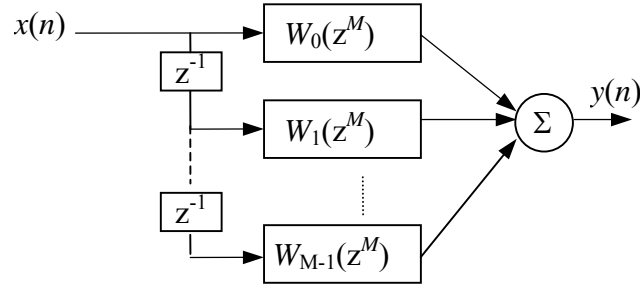


Figura 2.1. Estrutura de realização da decomposição polifásica.

A partir de uma primeira generalização da decomposição polifásica é obtida a decomposição sub-banda estrutural (STD), dada por [36]:

$$F(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} W_0(z^M) \\ W_1(z^M) \\ \vdots \\ W_{M-1}(z^M) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

na qual se tem

$$W_k(z^M) = \sum_{l=0}^{M-1} w_{k,l} z^{-lM}, \quad (2.5)$$

onde a matriz  $\mathbf{T}$  é uma matriz não-singular de dimensão  $M \times M$ . Sendo a relação entre os coeficientes  $f_i$  do filtro  $F(z)$ , considerado FIR, e  $w_{k,l}$  dada pela expressão

$$\begin{bmatrix} f_0 & f_M & \dots & f_{(K-1)M} \\ f_1 & f_{M+1} & \dots & f_{(K-1)M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M-1} & f_{2M-1} & \dots & f_{KM-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \dots & w_{0,K-1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \dots & w_{1,K-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{M-1,0} & w_{M-1,1} & \dots & w_{M-1,K-1} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

A matriz  $\mathbf{T}$  pode ser implementada através de diferentes tipos de transformação ortogonais, como DFT, DCT, Hadamard, dentre outros.

Como exemplo, consideremos uma decomposição em sub-bandas estrutural com  $M = 2$  e  $\mathbf{T}$  sendo uma transformação de Hadamard. A transformação Hadamard é dada por:

$$\mathbf{T}_L = \underbrace{\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{T}_2}_{u \text{ termos}} \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  e  $\otimes$  denota o produto de Kronecker. A dimensão  $L$  deve ser uma potência de 2, de forma tal que  $L = 2^u$ . Assim, (2.4) resulta na seguinte expressão:

$$F(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0(z^2) \\ W_1(z^2) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

A partir de (2.8),  $F(z)$  pode ser rescrito como

$$F(z) = (1 + z^{-1})W_0(z^2) + (1 - z^{-1})W_1(z^2). \quad (2.9)$$

Considerando que o comprimento do filtro  $N$  seja par, temos que, nesse caso, (2.5) pode ser representada por

$$W_0(z^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N/2-1} \{f_{2i} + f_{2i+1}\} z^{-2i}, \quad (2.10)$$

e

$$W_1(z^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N/2-1} \{f_{2i} - f_{2i+1}\} z^{-2i}. \quad (2.11)$$

A Figura 2.2 ilustra a realização de  $F(z)$  segundo a decomposição exemplificada. Nessa figura, evidencia-se a configuração em sub-bandas da estrutura em questão. As funções  $W_0(z^2)$  e  $W_1(z^2)$  são chamadas subfiltros. Note-se que a resposta ao impulso desses filtros é esparsa; as funções  $(1 + z^{-1})$  e  $(1 - z^{-1})$  são chamadas interpoladores, nome esse utilizado devido ao fato de essas funções interpolar a resposta ao impulso dos sub-filtros esparsos. O interpolador  $(1 + z^{-1})$  tem uma resposta em frequência tipo passa-baixas, enquanto o interpolador  $(1 - z^{-1})$  apresenta uma resposta tipo passa-altas. Cada um dos ramos contribui à resposta total do sistema, essencialmente, dentro da sub-banda associada com o seu correspondente interpolador.

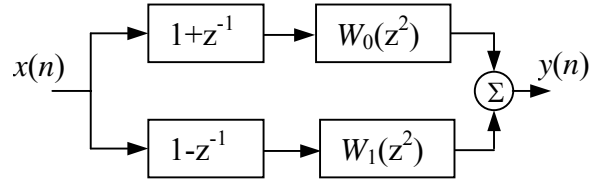


Figura 2.2. Decomposição em sub-bandas estrutural.

No caso geral de um fator de dizimação ou subamostragem  $M$ , a matriz  $\mathbf{T}$  tem dimensão  $M \times M$  e o interpolador, um comprimento  $M$ , sendo dado pela seguinte expressão:

$$G_k(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \mathbf{t}_k, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{t}_k$  é a  $k$ -ésima coluna de  $\mathbf{T}^T$ .

A decomposição em sub-bandas estrutural anteriormente descrita pode ser generalizada, observando que os subfiltros possam ter um fator de esparsidade  $L$  diferente do valor  $M$  da transformação. A estrutura assim obtida é chamada decomposição em sub-bandas generalizada (GSD) [25].

Assim, pode-se escrever

$$F(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} W_0(z^L) \\ W_1(z^L) \\ \vdots \\ W_{M-1}(z^L) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde

$$W_k(z^L) = \sum_{l=0}^{K-1} w_{k,l} z^{-lL}. \quad (2.14)$$

A relação existente entre o fator de esparsidade  $L$ , a dimensão da transformação  $M$  (equivalente ao número de ramos da decomposição), o número de coeficientes de cada filtro esparsa  $K$  e o número de coeficientes da resposta ao impulso  $N$ , é dada por

$$N = (K - 1)L + M . \quad (2.15)$$

Através da análise de (2.13), vemos que ela representa um sistema de  $N$  equações e  $K \times M$  incógnitas. Portanto, para  $L < M$ , o sistema é subdeterminado, o que significa que os coeficientes da estrutura em sub-bandas não são únicos, podendo ser escolhidos a partir de um conjunto infinito de soluções [26].

Na decomposição em sub-bandas generalizada, os coeficientes  $f_i$  do filtro  $F(z)$  estão relacionados com os coeficientes  $w_{k,l}$  dos sub-filtros pela seguinte expressão:

$$f_i = f_{\langle i \rangle_L, \lfloor i/L \rfloor} + f_{\langle i \rangle_L + L, \lfloor i/L \rfloor - 1}, \quad (2.16)$$

onde  $\langle i \rangle_L = i$  módulo  $L$ , quer dizer, o resto da divisão  $i/L$ , e  $\lfloor i/L \rfloor$  é a parte inteira do cociente  $i/L$ . Os coeficientes  $f_{k,l}$ , para  $0 \leq l \leq (K - 1)$ , são determinados por

$$\begin{bmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} & \cdots & f_{0,K-1} \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \cdots & f_{1,K-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M-1,0} & f_{M-1,1} & \cdots & f_{M-1,K-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \cdots & w_{0,K-1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,K-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{M-1,0} & w_{M-1,1} & \cdots & w_{M-1,K-1} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

sendo  $f_{k,l} = 0$  para  $l < 0$  ou  $l > (K - 1)$ .

## 2.2 EQUACIONAMENTO DO ALGORITMO GSD-NLMS

Aqui são apresentadas as expressões básicas utilizadas na implementação do algoritmo GSD-NLMS [26]. Essa estrutura de filtragem adaptativa foi mostrada na Seção 1.2 e é novamente apresentada aqui por conveniência.

Na estrutura GSD (Figura 2.3), o sinal de entrada  $x(n)$  é processado, primeiramente, pela transformação unitária  $\mathbf{T}$  de dimensão  $M$ , gerando os sinais  $u_i(n)$ ,

com  $i = 0, 1, \dots, M - 1$ . Esses sinais são utilizados como entradas para o algoritmo de adaptação, que em nosso caso é o algoritmo NLMS.

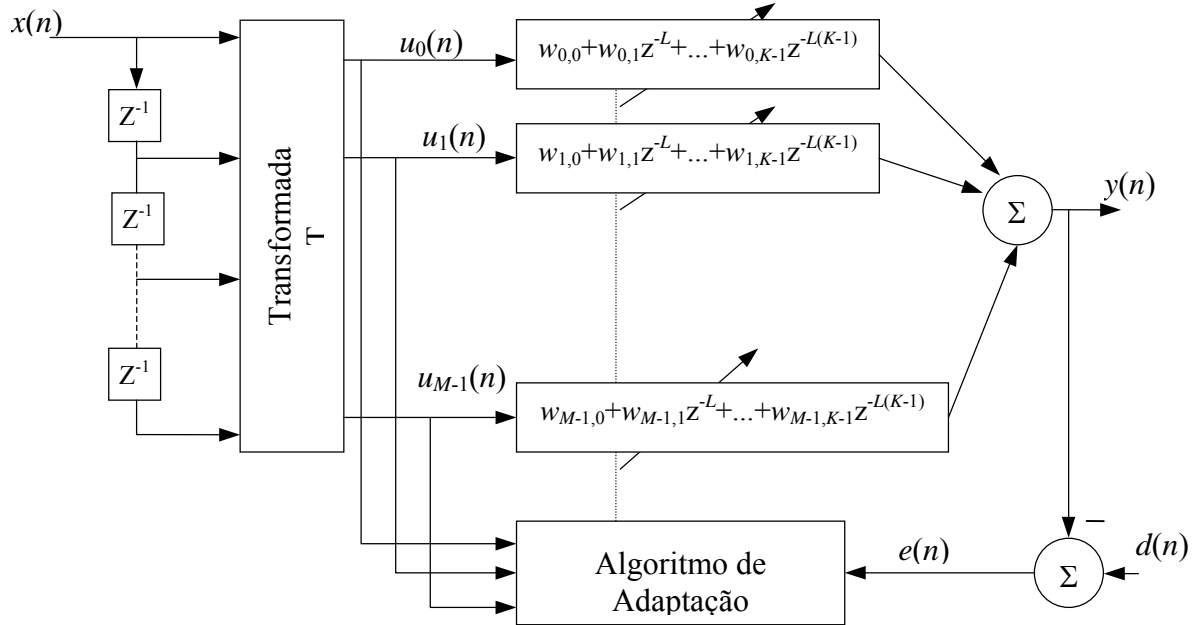


Figura 2.3. Estrutura do algoritmo GSD-NLMS.

A equação de atualização dos coeficientes é escrita como [26]

$$\mathbf{w}_\ell(n+1) = \mathbf{w}_\ell(n) + 2\mu \mathbf{D}^{-1} e(n) \mathbf{u}^*(n - \ell L), \quad \ell = 0, 1, \dots, K - 1. \quad (2.18)$$

Em (2.18),  $\mu$  representa o passo de adaptação e “\*” denota a operação de complexo conjugado. O vetor  $\mathbf{u}(n) \in \mathbb{C}^M$  agrupa os sinais transformados, descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(n) = [u_0(n) \quad u_1(n) \quad \dots \quad u_{M-1}(n)]^T, \quad (2.19)$$

onde  $\mathbf{u}(n)$  está relacionado com o sinal de entrada através da expressão

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{T} \mathbf{x}(n), \quad (2.20)$$

sendo  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \cdots x(n-M+1)]^T$  o vetor de entrada.

O vetor  $\mathbf{w}_\ell(n) \in \mathbb{C}^M$  é o vetor de coeficientes que contém o  $\ell$ -ésimo coeficiente de cada subfiltro esparso, denotado por

$$\mathbf{w}_\ell(n) = [w_{0,\ell}(n) \ w_{1,\ell}(n) \ \dots \ w_{M-1,\ell}(n)]^T, \quad \ell = 0, 1, \dots, K-1. \quad (2.21)$$

Assim, a saída do filtro  $y(n)$  é determinada a partir dos  $K$  vetores  $\mathbf{w}_\ell(n)$  segundo a expressão

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{K-1} \mathbf{u}^T(n - \ell L) \mathbf{w}_\ell(n). \quad (2.22)$$

O sinal  $e(n)$  em (2.18) representa o erro de estimação, obtido como segue:

$$e(n) = d(n) - y(n), \quad (2.23)$$

onde  $d(n)$  representa o sinal desejado.

A operação de multiplicar  $\mu$  pela inversa da matriz diagonal  $\mathbf{D}$  em (2.18) resulta num passo de adaptação variável no tempo, e representa uma normalização de potência visto que os elementos da matriz  $\mathbf{D}$  são as variâncias dos sinais  $u_k(n)$ , representadas por  $\sigma_k^2$ . Assim, a estrutura de  $\mathbf{D}$  é dada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{M-1}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Note que para implementar o algoritmo GSD-NLMS é necessário conhecer as variâncias  $\sigma_k^2$  [26]. Porém, em uma implementação real pode-se obter apenas uma estimativa de tais variâncias. Esta estimativa é variante no tempo. Portanto, a matriz  $\mathbf{D}$  é



substituída por sua versão variante no tempo, denotada por  $\mathbf{D}(n)$ . Essa última matriz, também diagonal, tem como elementos  $\hat{\sigma}_k^2(n)$ , os quais são obtidos a partir da seguinte expressão [37]:

$$\hat{\sigma}_k^2(n) = \frac{1}{M_w} \sum_{i=0}^{M_w-1} |u_k(n-i)|^2, \quad (2.25)$$

onde  $u_k(n)$ , para  $k=0,1,\dots,M-1$ , representa a  $n$ -ésima amostra do  $k$ -ésimo sinal transformado e  $M_w$  é a dimensão da janela de observação. Para reduzir a quantidade de memória necessária, pode-se manipular (2.25) para implementá-la de forma recursiva. Assim,

$$\hat{\sigma}_k^2(n) = \frac{1}{M_w} \sum_{i=0}^{M_w-1} |u_k(n-i)|^2 = \frac{1}{M_w} |u_k(n)|^2 + \frac{1}{M_w} \sum_{i=1}^{M_w-1} |u_k(n-i)|^2. \quad (2.26)$$

Supondo que  $M_w \gg 1$ , tem-se a seguinte aproximação para (2.26):

$$\hat{\sigma}_k^2(n-1) = \frac{1}{M_w} \sum_{i=1}^{M_w} |u_k(n-i)|^2 \cong \frac{1}{M_w-1} \sum_{i=1}^{M_w-1} |u_k(n-i)|^2. \quad (2.27)$$

Combinando então (2.26) e (2.27), obtém-se

$$\hat{\sigma}_k^2(n) = \hat{\sigma}_k^2(n-1) + \frac{1}{M_w} \left[ |u_k(n)|^2 - \hat{\sigma}_k^2(n-1) \right], \quad k=0,1,\dots,M-1. \quad (2.28)$$

Finalmente, para prevenir uma possível divisão por zero na determinação da inversa  $\mathbf{D}^{-1}(n)$ , uma prática comum é adicionar uma constante positiva  $\varepsilon$ , geralmente  $0 < \varepsilon \ll 1$ , em cada elemento da diagonal. Tal constante é denominada parâmetro de regularização, e com a sua inclusão em (2.18) obtém-se o algoritmo GSD- $\varepsilon$ NLMS. Neste trabalho, tal parâmetro é também considerado na derivação do modelo, resultando na seguinte estrutura para a matriz de normalização  $\mathbf{D}(n)$ :

$$\mathbf{D}(n) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_0^2(n) + \epsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{\sigma}_{M-1}^2(n) + \epsilon \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

### 2.3. MOMENTO DE PRIMEIRA ORDEM DO VETOR DE COEFICIENTES

Nesta seção, determina-se o momento de primeira ordem do vetor de coeficientes da estrutura em sub-bandas. Para tal, define-se o vetor  $\mathbf{w}(n) \in \mathbb{C}^{K \times M}$  de forma que ele contenha todos os coeficientes dos filtros esparsos. Assim,

$$\mathbf{w}(n) = [\mathbf{w}_0^T(n) \mathbf{w}_1^T(n) \dots \mathbf{w}_{K-1}^T(n)]^T. \quad (2.30)$$

É também definido o vetor de entrada transformado ampliado  $\mathbf{u}_a(n) \in \mathbb{C}^{K \times M}$  como sendo

$$\mathbf{u}_a(n) = \{\mathbf{u}^T(n) \mathbf{u}^T(n-L) \dots \mathbf{u}^T[n-(K-1)L]\}^T. \quad (2.31)$$

Desta forma, podemos reescrever a expressão do sinal de saída, dado em (2.22), como

$$y(n) = \mathbf{u}_a^T(n) \mathbf{w}(n). \quad (2.32)$$

Considerando que os sinais transformados  $u_k(n)$  estão vinculados ao sinal de entrada através de (2.20), o vetor definido em (2.31) e o vetor de entrada ampliado

$$\mathbf{x}_a(n) = [x(n) x(n-1) \dots x(n-N+1)]^T \quad (2.33)$$

estão relacionados pela expressão

$$\mathbf{u}_a(n) = \mathbf{A}^T \mathbf{x}_a(n), \quad (2.34)$$

onde  $\mathbf{A}^T$  é uma matriz retangular de dimensão  $KM \times N$ , dada por

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

$\underbrace{\begin{matrix} M \times M & M \times (N-M) \\ M \times L & M \times (N-(L+M)) \\ & \vdots \\ M \times ((K-1)L) & M \times (N-(L+M)) \end{matrix}}_{KM \times ((K-1)L+M)}$

onde  $\mathbf{0}$  representa matrizes de zeros com suas dimensões indicadas em (2.34).

Assim, a equação de atualização para o vetor  $\mathbf{w}(n)$  é dada por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu \mathbf{D}_a^{-1}(n)[d(n) - y(n)]\mathbf{u}_a^*(n), \quad (2.36)$$

onde

$$\mathbf{D}_a(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(n) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{D}(n) \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Substituindo (2.32) em (2.36) e determinando o valor esperado em ambos os lados da expressão resultante, tem-se

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = E[\mathbf{w}(n)] + 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)\mathbf{u}_a^*(n)d(n)] - 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{w}(n)]. \quad (2.38)$$

Para se obter os valores esperados de (2.38), são utilizadas as seguintes considerações de análise:

- (i)  $\mathbf{w}(n)$  e  $\mathbf{u}_a(n)$  são estatisticamente independentes. Essa suposição é uma aproximação, pois o vetor  $\mathbf{w}(n)$  depende das amostras passadas dos sinais de entrada transformados  $u_k(n)$  (2.19), que compõem o vetor  $\mathbf{u}_a(n)$ . Porém, quando o passo de adaptação  $\mu$  é pequeno, pode-se assumir que  $\mathbf{u}_a(n)$  e  $\mathbf{w}(n)$  são

fracamente dependentes [1]. Um valor pequeno de  $\mu$  implica uma velocidade de convergência baixa, o que limita para essa condição a abrangência dos modelos obtidos usando tal consideração.

- (ii)  $\mathbf{D}_a^{-1}(n)$  e  $\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)$  são processos conjuntamente estacionários e  $\mathbf{D}_a^{-1}(n)$  tem uma fraca correlação em relação a  $\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)$ . Dessa forma, considerando processos ergódicos, o Princípio da Média [38] pode ser invocado.

Então, para determinar  $E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)]$ , considera-se o  $k$ -ésimo elemento da diagonal da matriz  $\mathbf{D}_a^{-1}(n)\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)$ , dado por  $[u_k^2(n)][\sigma_k^2(n) + \epsilon]^{-1}$ , onde  $\sigma_k^2(n)$  é obtido a partir de (2.28). Para fins de modelagem e para obter um modelo matemático mais tratável, utiliza-se a forma equivalente não recursiva (2.25) para determinar o  $\sigma_k^2(n)$ . Assim, o  $k$ -ésimo elemento da diagonal é dado por

$$[u_k^2(n)M_w][u_k^2(n) + u_k^2(n-1) + \dots + u_k^2(n-M_w+1) + M_w\epsilon]^{-1}. \quad (2.39)$$

Em (2.39), considera-se que o segundo fator tem variação lenta quando comparado com  $u_k^2(n)$ , permitindo assim a aplicação de (ii), resultando em

$$E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)] \approx E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]E[\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)]. \quad (2.40)$$

Similarmente, para o valor esperado do segundo termo do lado esquerdo de (2.38) tem-se

$$E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)\mathbf{u}_a^*(n)d(n)] \approx E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]E[\mathbf{u}_a^*(n)d(n)]. \quad (2.41)$$

Considerando que os processos envolvidos são estacionários no sentido amplo, pode-se escrever  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a} = E[\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)]$ , representando a matriz de autocorrelação do sinal

de entrada transformado, e  $\mathbf{p}_{u_a d} = E[\mathbf{u}_a^*(n)d(n)]$ , o vetor de correlação cruzada entre o sinal de entrada transformado e o sinal desejado. Substituindo (2.40) e (2.41) em (2.38), obtém-se

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = \{\mathbf{I} - 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{R}_{u_a u_a}\}E[\mathbf{w}(n)] + 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{p}_{u_a d}. \quad (2.42)$$

A derivação do momento de primeira ordem de  $\mathbf{w}(n)$  é finalmente concluído determinando-se o valor esperado  $E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]$ . Assim, assumindo que o processo  $\{u_k^2(n)\}$  tem uma distribuição *qui*-quadrado com  $M_w$  graus de liberdade [39], o valor esperado procurado é dado por [37],[40],[41]

$$E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] = \frac{M_w}{(M_w - 2)} [\text{diag}(\mathbf{R}_{u_a u_a})]^{-1} - \epsilon \frac{M_w^2}{(M_w - 2)(M_w - 4)} [\text{diag}(\mathbf{R}_{u_a u_a}^2)]^{-1}. \quad (2.43)$$

O fato de considerar que o processo  $\{u_k^2(n)\}$  tem uma distribuição *qui*-quadrado é também uma aproximação. A distribuição *qui*-quadrado supõe que o processo  $\{u_k(n)\}$  seja independente. Como os sinais  $\{u_k(n)\}$  são obtidos a partir de transformações ortogonais, eles são correlacionados; entretanto, a utilização dessa aproximação apresenta resultados aceitáveis.

Se a expressão (2.42) é utilizada em conjunto com a (2.16) e (2.17) pode-se obter um modelo para descrever o comportamento dos coeficientes do filtro equivalente de banda completa.

## 2.4 VALORES ÓTIMOS E VALORES DE REGIME PERMANENTE DO VETOR DE COEFICIENTES

A seguinte análise é realizada considerando sinais  $\{u_k(n)\}$  reais. Posteriormente, os resultados serão generalizados para o caso complexo. Os valores ótimos dos coeficientes dos filtros esparsos são aqueles que minimizam o erro quadrático médio (EQM). Então,

substituindo a expressão (2.32) em (2.23), elevando ao quadrado e calculando o valor esperado da expressão resultante, obtém-se

$$J(n) = E[e^2(n)] = E[d^2(n) - 2\mathbf{u}_a(n)d(n)\mathbf{w}^T + \mathbf{w}^T\mathbf{u}_a(n)\mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{w}], \quad (2.44)$$

ou

$$J(n) = E[d^2(n)] - 2\mathbf{p}_{u_a d}\mathbf{w}^T + \mathbf{w}^T\mathbf{R}_{u_a u_a}\mathbf{w}. \quad (2.45)$$

Determinando o gradiente de (2.45) e fazendo seu valor igual a zero, tem-se:

$$\nabla J(n) = -2\mathbf{p}_{u_a d} + 2\mathbf{R}_{u_a u_a}\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (2.46)$$

e logo após alguns passos algébricos, obtém-se

$$\mathbf{R}_{u_a u_a}\mathbf{w} = \mathbf{p}_{u_a d} \quad (2.47)$$

Para o caso  $L < M$ , não existe um único valor ótimo para o vetor  $\mathbf{w}$  na expressão (2.47). Isto se deve ao fato que a matriz  $\mathbf{R}_{u_a u_a}$  é singular, significando que existem infinitos valores que satisfazem a relação (2.47). Agora substituindo (2.34) em (2.47), obtém-se

$$\mathbf{A}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}^T\mathbf{p}_{xd}, \quad (2.48)$$

onde  $\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{x}_a(n)\mathbf{x}_a^T(n)]$  e  $\mathbf{p}_{xd} = E[\mathbf{x}_a(n)d(n)]$ .

Multiplicando ambos os lados de (2.48) por  $\mathbf{A}$  e em seguida por  $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ , tem-se

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd}. \quad (2.49)$$

Analisando (2.49), observa-se que existe um número infinito de vetores  $\mathbf{w}$  para o caso  $L < M$ . Tais vetores estão em um hiperplano paralelo ao espaço nulo da matriz  $\mathbf{A}$ .

A seguir são determinados os valores de regime permanente dos coeficientes dos filtros esparsos. Para tal, reescreve-se a equação que representa o momento de primeira ordem dos coeficientes (2.42) em termos de (2.34). Assim,

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = E[\mathbf{w}(n)] + 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{A}^T \{\mathbf{p}_{xd} - \mathbf{R}_{xx}\mathbf{A}E[\mathbf{w}(n)]\}. \quad (2.50)$$

De (2.50), pode-se concluir que o segundo termo de (2.50) está restrito sempre ao subespaço  $\alpha$ , definido pelas colunas de  $E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{A}^T$ . Portanto,  $E[\mathbf{w}(n+1)]$  está restrito a um hiperplano  $\beta$  paralelo ao subespaço  $\alpha$ . O hiperplano  $\beta$  é determinado pelo valor inicial dos coeficientes dos filtros esparsos. A Figura 2.4 fornece uma interpretação gráfica desse processo.

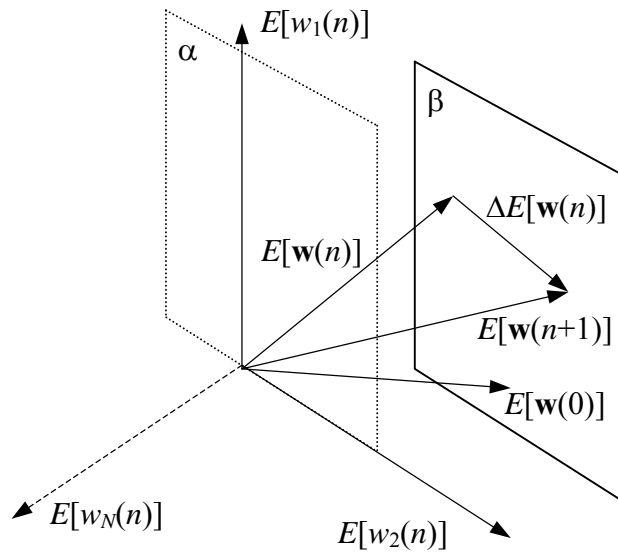


Figura 2.4. Interpretação gráfica para a expressão do momento de primeira ordem.

A interpretação gráfica de (2.50) é a seguir demonstrada analiticamente. Para tal, considere-se um novo vetor  $\mathbf{v}(n)$ , relacionado com  $E[\mathbf{w}(n)]$  pela seguinte relação:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{B}E[\mathbf{w}(n)] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} E[\mathbf{w}(n)], \quad (2.51)$$

onde a matriz  $\mathbf{B}_1$  é uma matriz de dimensão  $N \times KM$  e as suas linhas são os  $N$  vetores que geram o espaço das colunas de  $E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{A}^T$ ;  $\mathbf{B}_2$  é uma matriz de dimensão  $(KM - N) \times KM$  com suas linhas correspondendo aos vetores que geram o espaço nulo da

matriz  $\mathbf{A}E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]$ . Os vetores definidos pelas linhas da matriz  $\mathbf{B}_1$  são perpendiculares aos vetores das linhas de  $\mathbf{B}_2$ . A matriz  $\mathbf{B}$  é uma matriz de dimensão  $KM \times KM$  que agrupa as matrizes  $\mathbf{B}_1$  e  $\mathbf{B}_2$ . Além disso, é considerado que  $\mathbf{B}$  seja ortogonal. Assim,

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{I}. \quad (2.52)$$

A expressão (2.51) representa uma rotação dos eixos da Figura 2.4. Assim, os  $N$  primeiros elementos do vetor  $\mathbf{v}(n)$  correspondem aos componentes vetoriais incluídos no subespaço  $\alpha$  e as outras  $KM - N$  aos componentes perpendiculares a esse espaço.

Substituindo (2.51) em (2.50), obtém-se

$$\mathbf{B}^T \mathbf{v}(n+1) = \mathbf{B}^T \mathbf{v}(n) + 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \mathbf{A}^T [\mathbf{p}_{xd} - \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{v}(n)]. \quad (2.53)$$

Multiplicando ambos os lados de (2.53) por  $\mathbf{B}$ , tem-se então

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + 2\mu \mathbf{B} E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \mathbf{A}^T \mathbf{p}_{xd} - 2\mu \mathbf{B} E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \mathbf{A}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{v}(n). \quad (2.54)$$

Em (2.54), a matriz  $\mathbf{B} E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \mathbf{A}^T$ , de dimensão  $KM \times N$ , tem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{B} E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_N \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{N \times N}$        $\underbrace{\hspace{10em}}_{(KM-N) \times N}$

onde  $\gamma_i$  é a projeção da coluna  $i$  da matriz  $E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \mathbf{A}^T$  sobre a linha  $i$  de  $\mathbf{B}$ .

Substituindo (2.55) em (2.54), obtém-se



$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + 2\mu \begin{bmatrix} \Lambda \mathbf{p}_{xd} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - 2\mu \begin{bmatrix} \Lambda \mathbf{R}_{xx} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{B}_1^T & \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{v}(n). \quad (2.56)$$

Assim, a expressão (2.56) pode ser reescrita como segue:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + 2\mu \begin{bmatrix} \Lambda \mathbf{p}_{xd} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - 2\mu \begin{bmatrix} \Lambda \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}\mathbf{B}_1^T & \Lambda \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}(n). \quad (2.57)$$

Agrupando os  $N$  primeiros elementos de  $\mathbf{v}(n)$  no vetor  $\mathbf{v}_{//}(n)$  e os outros  $KM - N$  no vetor  $\mathbf{v}_{\perp}(n)$ , resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{//}(n+1) \\ \mathbf{v}_{\perp}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{//}(n) \\ \mathbf{v}_{\perp}(n) \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \Lambda \mathbf{p}_{xd} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - 2\mu \begin{bmatrix} \Lambda \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}\mathbf{B}_1^T \mathbf{v}_{//}(n) + \Lambda \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T \mathbf{v}_{\perp}(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

A partir de (2.58) observa-se que apenas os componentes paralelos ao subespaço  $\alpha$  são atualizados. Portanto,

$$\mathbf{v}_{//}(n+1) = \mathbf{v}_{//}(n) + 2\mu \Lambda \mathbf{p}_{xd} - 2\mu \Lambda \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}\mathbf{B}_1^T \mathbf{v}_{//}(n) - 2\mu \Lambda \mathbf{R}_{xx} \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T \mathbf{v}_{\perp}(n), \quad (2.59)$$

e

$$\mathbf{v}_{\perp}(n+1) = \mathbf{v}_{\perp}(n) \Rightarrow \mathbf{v}_{\perp}(\infty) = \mathbf{v}_{\perp}(0) = \mathbf{B}_2 E[\mathbf{w}(0)]. \quad (2.60)$$

O valor de regime permanente de  $\mathbf{v}_{//}(n)$  pode ser obtido a partir de (2.59), fazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{//}(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{//}(n) = \mathbf{v}_{//}(\infty), \text{ que resulta em [41]}$$

$$\mathbf{v}_{//}(\infty) = \left( \mathbf{A}\mathbf{B}_1^T \right)^{-1} \left[ \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} - \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T \mathbf{v}_{\perp}(0) \right]. \quad (2.61)$$

Finalmente, o valor de regime permanente do vetor  $E[\mathbf{w}(n)]$  pode ser calculado utilizando (2.61), (2.59) e (2.51). Assim,

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{//}(\infty) \\ \mathbf{v}_{\perp}(\infty) \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{B}_1^T)^{-1} [\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd} - \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T\mathbf{v}_{\perp}(0)] \\ \mathbf{v}_{\perp}(0) \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Substituindo (2.62) em (2.49) resulta em

$$\mathbf{A}E[\mathbf{w}(\infty)] = \mathbf{A}\mathbf{B}^T \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{//}(\infty) \\ \mathbf{v}_{\perp}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{B}_1^T & \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{B}_1^T)^{-1} [\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd} - \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T\mathbf{v}_{\perp}(0)] \\ \mathbf{v}_{\perp}(0) \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

e

$$[\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd} - \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T\mathbf{v}_{\perp}(0)] + \mathbf{A}\mathbf{B}_2^T\mathbf{v}_{\perp}(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd}. \quad (2.64)$$

Portanto, o vetor  $E[\mathbf{w}(\infty)]$  é um dos vetores que satisfazem (2.47).

No caso de sinais complexos, a operação de transposição  $(\cdot)^T$  deve ser substituída pela operação  $(\cdot)^H$ , onde H representa a operação de transposição complexa conjugada. As linhas de  $\mathbf{B}$  devem ser selecionadas de forma a manter as igualdades (2.52) e (2.55).

## 2.5 CURVA DE APRENDIZAGEM E MOMENTO DE SEGUNDA ORDEM DO VETOR DE ERRO

O vetor de erro nos coeficientes é definido pela expressão  $\mathbf{v}_e(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\infty}$ , onde  $\mathbf{w}_{\infty}$  é o valor em regime permanente do vetor de coeficientes da estrutura em sub-bandas. Assumindo que o algoritmo converge, tal valor é obtido a partir de (2.62). Expressando agora o sinal de erro em função do vetor de erro, tem-se

$$e(n) = d(n) - \mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{v}_e(n) - \mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{w}_{\infty} + z(n) = e_o(n) - \mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{v}_e(n), \quad (2.65)$$

onde  $z(n)$  representa o erro de medição, o qual é uma variável aleatória i.i.d<sup>1</sup> com média zero e variância  $\sigma_z^2$  e não correlacionada com qualquer outro sinal no sistema; e  $e_o(n)$  é o erro de estimação, dado por

$$e_o(n) = d(n) - \mathbf{u}_a^T(n) \mathbf{w}_\infty + z(n). \quad (2.66)$$

Multiplicando (2.65) pelo seu complexo conjugado e calculando o valor esperado em ambos os lados da expressão resultante, tem-se

$$\begin{aligned} E[|e(n)|^2] &= E[|e_o(n)|^2] - E[e_o(n) \mathbf{u}_a^H(n) \mathbf{v}_e^*(n)] - E[e_o^*(n) \mathbf{u}_a^T(n) \mathbf{v}_e(n)] \\ &\quad + E[\mathbf{v}_e^T(n) \mathbf{u}_a(n) \mathbf{u}_a^H(n) \mathbf{v}_e^*(n)]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Utilizando o Princípio da Ortogonalidade que estabelece que  $E[e_o(n) \mathbf{u}_a^*(n)] = 0$ , tem-se que o segundo e terceiro termos do lado direito de (2.66) são nulos. Além disso, lembrando que as variáveis  $\mathbf{u}_a(n)$  e  $\mathbf{w}(n)$  são consideradas estatisticamente independentes, a expressão da curva de aprendizagem pode ser escrita como segue:

$$E[e^2(n)] = e_{\min} + \text{tr}\{\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a \mathbf{u}_a}^* E[\mathbf{v}_e^*(n) \mathbf{v}_e^T(n)]\}, \quad (2.68)$$

onde  $e_{\min} = E[|e_o(n)|^2]$  é o mínimo erro atingível em regime permanente. Note que (2.68) é completamente determinada se a matriz de covariância do vetor de erro  $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}_e^*(n) \mathbf{v}_e^T(n)]$  é conhecida. Para tal, podemos subtrair  $\mathbf{w}_\infty$  de ambos os lados de (2.36), determinar o produto externo  $\mathbf{v}_e^*(n) \mathbf{v}_e^T(n)$  e tomar o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante de acordo com as condições de análise. Assim, [40], [41]

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{K}(n) - 2\mu \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{\mathbf{u}_a \mathbf{u}_a}^* E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] - 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \mathbf{R}_{\mathbf{u}_a \mathbf{u}_a}^* \mathbf{K}(n) \\ &\quad + 4\mu^2 E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \{2\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a \mathbf{u}_a}^* \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{\mathbf{u}_a \mathbf{u}_a}^* + \mathbf{R}_{\mathbf{u}_a \mathbf{u}_a}^* \text{tr}[\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a \mathbf{u}_a}^* \mathbf{K}(n)]\} E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \\ &\quad + 4\mu^2 E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \mathbf{R}_{\mathbf{u}_a \mathbf{u}_a}^* E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] e_{\min}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

<sup>1</sup> Independent Identically Distributed

## 2.6 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para verificar a precisão das expressões propostas que modelam o comportamento do momento de primeira ordem dos coeficientes do filtro adaptativo e da curva de aprendizagem, são apresentados alguns resultados de simulações numéricas, considerando um problema de identificação de sistemas. Para tal, a planta utilizada tem uma resposta ao impulso dada por uma janela de Hanning com 10 coeficientes.

Baseados nas várias simulações realizadas e nas hipóteses consideradas, concluiu-se que os fatores que mais influenciam na precisão do modelo proposto são o passo de adaptação e o grau de correlação do sinal de entrada. Dessa forma, são apresentados dois grupos de exemplos, um deles utilizando um sinal de entrada não-correlacionado e o outro para um sinal de entrada correlacionado. Em ambos os casos, são apresentadas simulações numéricas para diferentes valores do passo de adaptação. Os outros parâmetros que caracterizam a estrutura e o algoritmo de adaptação, nos diversos exemplos apresentados, sem perda de generalidade, são mantidos constantes.

Para o segundo grupo de exemplos, é utilizado um sinal de entrada correlacionado obtido a partir de um processo auto-regressivo AR(2), dado por

$$x(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + v(n), \quad (2.70)$$

onde  $v(n)$  é um sinal branco e a variância  $\sigma_x^2(n)$  é unitária. Os coeficientes do modelo auto-regressivo são:  $a_1 = 1,3214$  e  $a_2 = -0,8500$ , resultando em uma dispersão dos autovalores  $\chi = \lambda_{\max} / \lambda_{\min} = 305,9$ .

O ruído de medição  $z(n)$  utilizado tem variância  $\sigma_z^2 = 10^{-4}$  (SNR = 40dB). Os parâmetros da estrutura utilizada são:  $M = 4$ ,  $K = 4$  e  $L = 2$ . No processo de estimação da potência foi utilizado  $M_w = 32$  e  $\epsilon = 0,01$ . Essa estrutura é equivalente a um filtro FIR adaptativo implementado na forma direta I com 10 coeficientes ( $N = 10$ ). Esse valor é calculado a partir de (2.15) e coincide com o comprimento da resposta ao impulso da planta. Nos exemplos apresentados, foi utilizada uma transformação ortogonal DCT para implementar a matriz  $\mathbf{T}$ . Também, foram realizadas simulações utilizando a transformação

DFT. Essa última apresenta resultados idênticos aos obtidos usando a DCT; assim, torna-se sem utilidade mostrá-los neste documento.

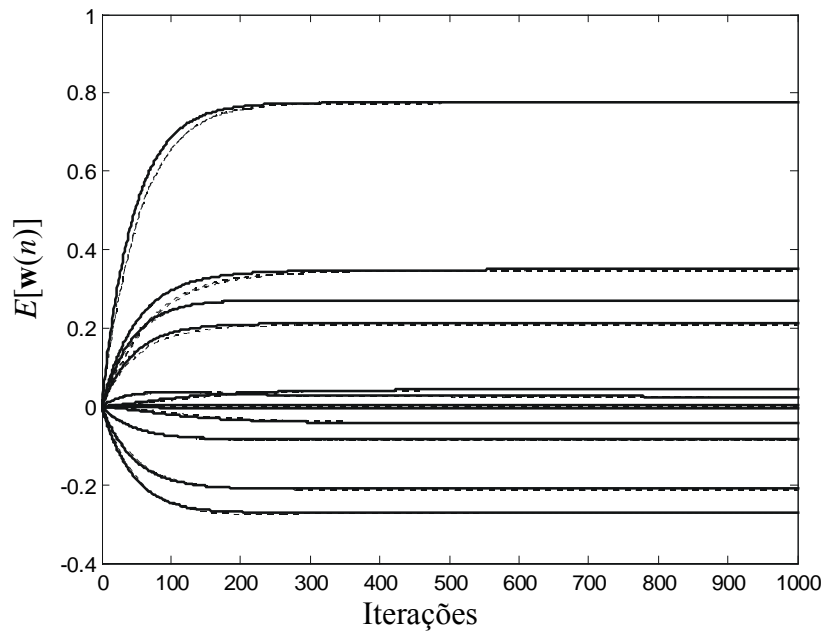
### 2.6.1 GRUPO DE EXEMPLOS 1: SINAL DE ENTRADA NÃO-CORRELACIONADO

A seguir, são apresentadas figuras ilustrando o comportamento do momento de primeira ordem dos coeficientes dos filtros esparsos e a curva de aprendizagem para os seguintes valores do passo de adaptação:  $\mu = 0,1\mu_{\max}$ ,  $\mu = 0,5\mu_{\max}$  e  $\mu = 0,8\mu_{\max}$ . O  $\mu_{\max}$  é o máximo valor de passo de adaptação antes do algoritmo tornar-se instável, neste caso  $\mu_{\max} = 0,1$ . Em cada figura, são apresentados os resultados obtidos por simulação Monte Carlo (MC) (média de 300 realizações independentes) e a partir das expressões do modelo proposto, expressões (2.42) e (2.69).

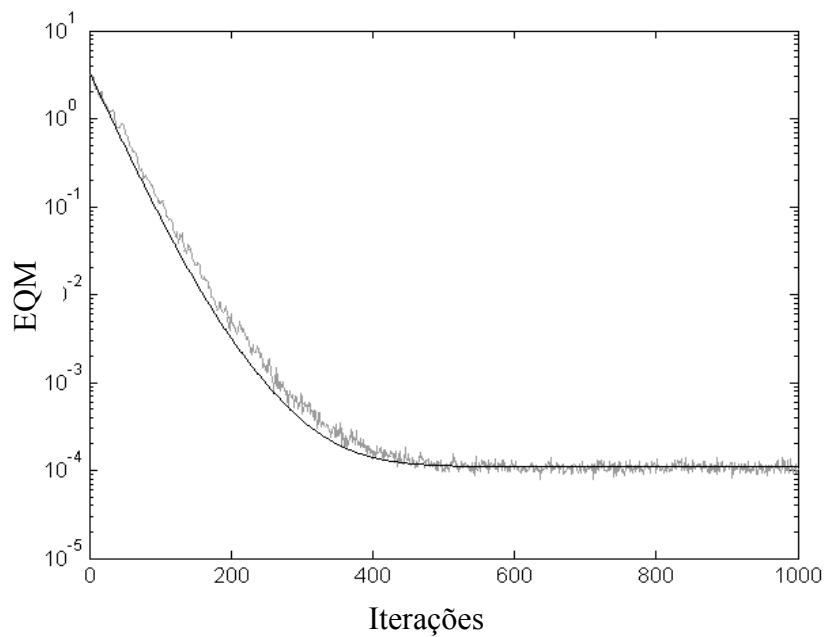
Nas Figuras 2.5(a) e 2.5(b), observa-se um bom casamento entre o comportamento predito pelo modelo proposto e o comportamento obtido por simulação MC. Devido ao fato que a condição de simulação utilizada foi a de adaptação lenta, os resultados são satisfatórios. Em outras palavras, tal condição enquadra a simulação dentro das hipóteses (i) e (ii). Para valores menores do passo de adaptação, o casamento entre o modelo e simulação é muito bom.

As Figuras 2.6(a) e 2.6(b) apresentam os resultados obtidos para um passo de adaptação maior do que o usado anteriormente,  $\mu = 0,5\mu_{\max}$ . Nesse caso, observa-se um descasamento entre a predição (modelo) e a simulação, especialmente durante a fase transiente.

Para observar o comportamento do modelo fora da condição de adaptação lenta, as Figuras 2.7(a) e 2.7(b) mostram o caso com  $\mu = 0,8\mu_{\max}$ . Nota-se agora que o modelo não mais acompanha a simulação.



(a)



(b)

Figura 2.5. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS para um sinal de entrada branco e  $\mu = 0,1\mu_{\max}$ . (a) Comportamento médio dos coeficientes: simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linha cinza), modelo proposto (linha preta). (b) Curvas de EQM: simulação MC (linha cinza); modelo proposto (linha preta).

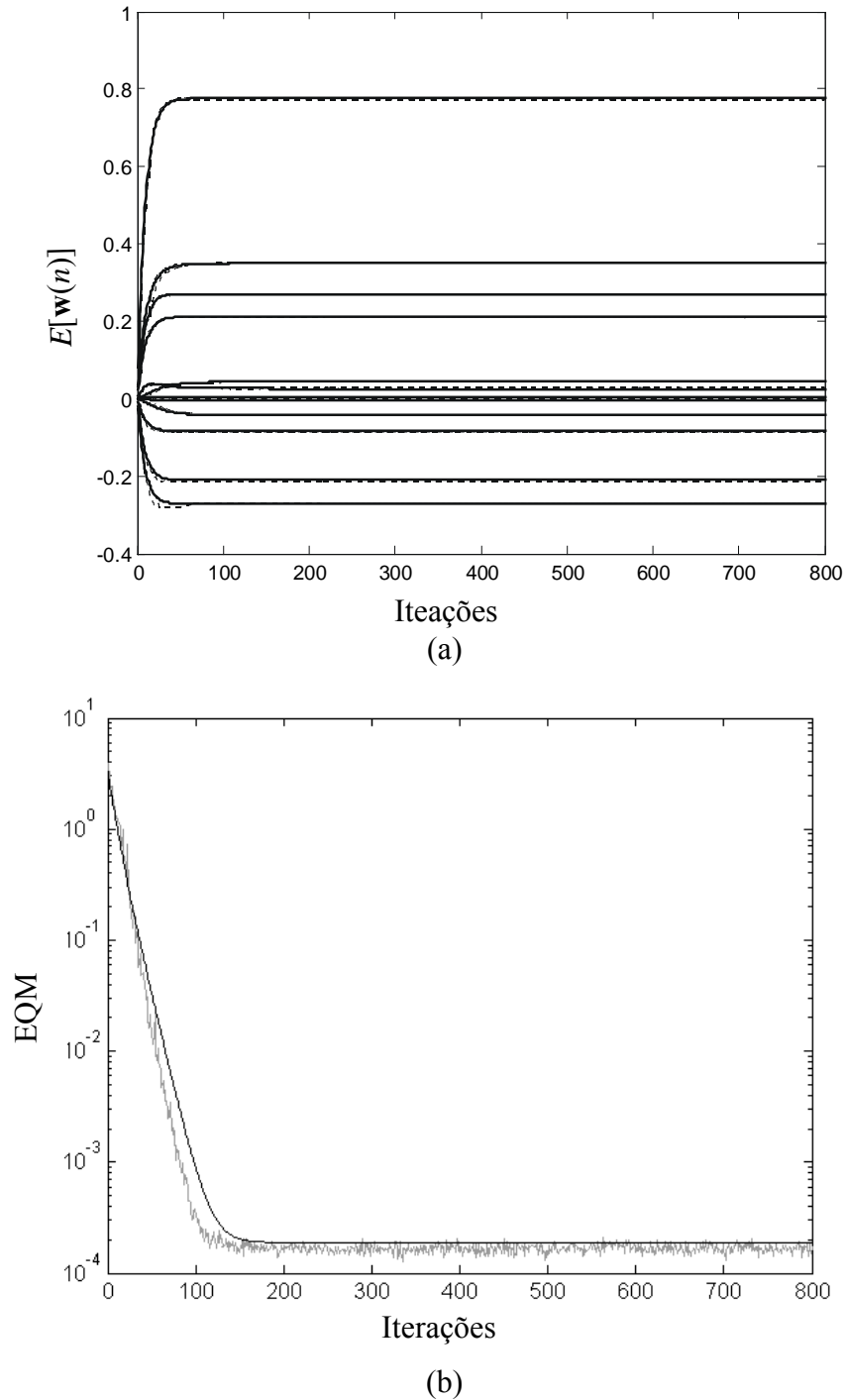
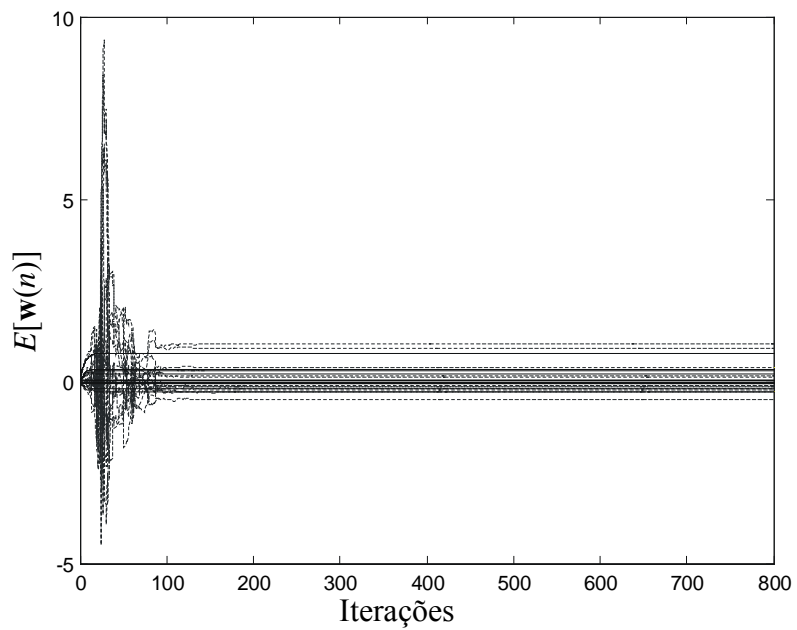
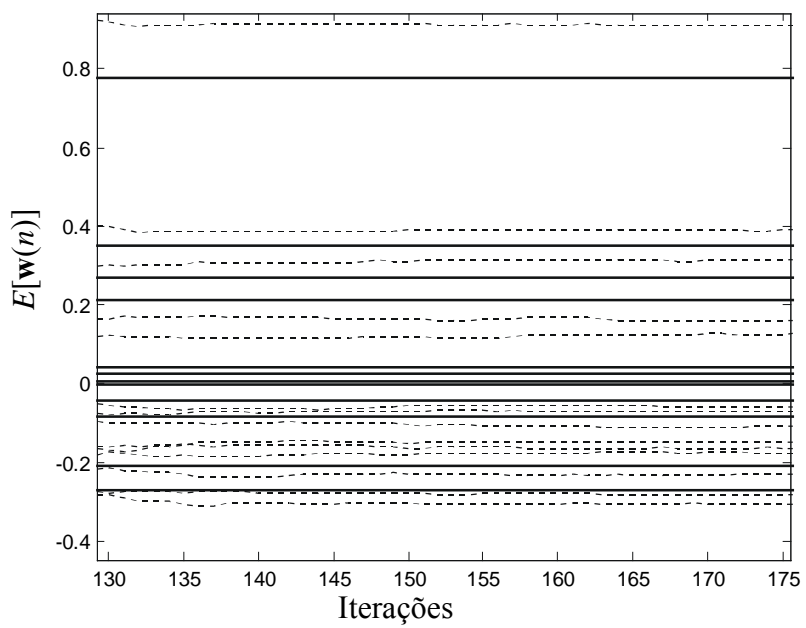


Figura 2.6. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS para um sinal de entrada branco e  $\mu = 0,5\mu_{\max}$ . (a) Comportamento médio dos coeficientes: simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linha cinza), modelo proposto (linha preta). (b) Curvas de EQM: simulação MC (linha cinza); modelo proposto (linha preta).



(a)



(b)



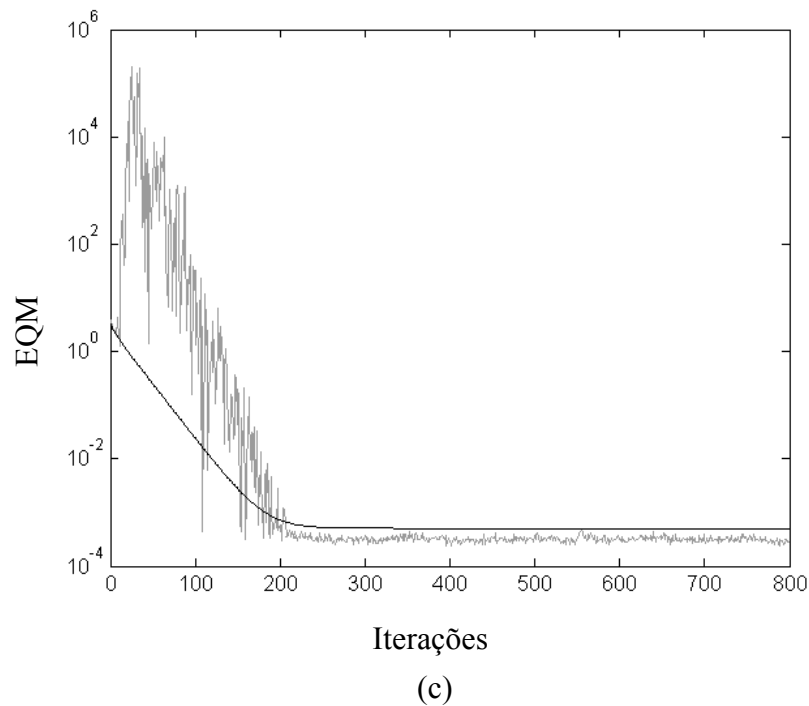
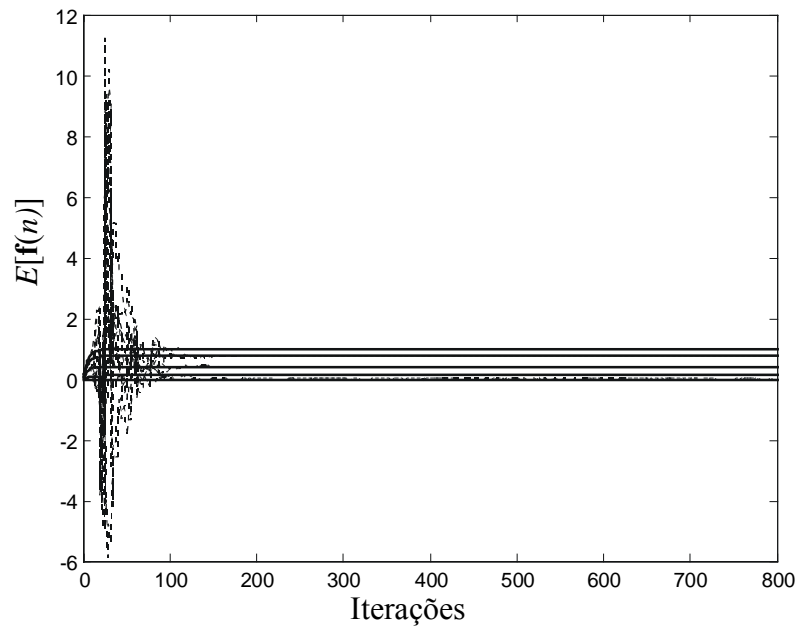
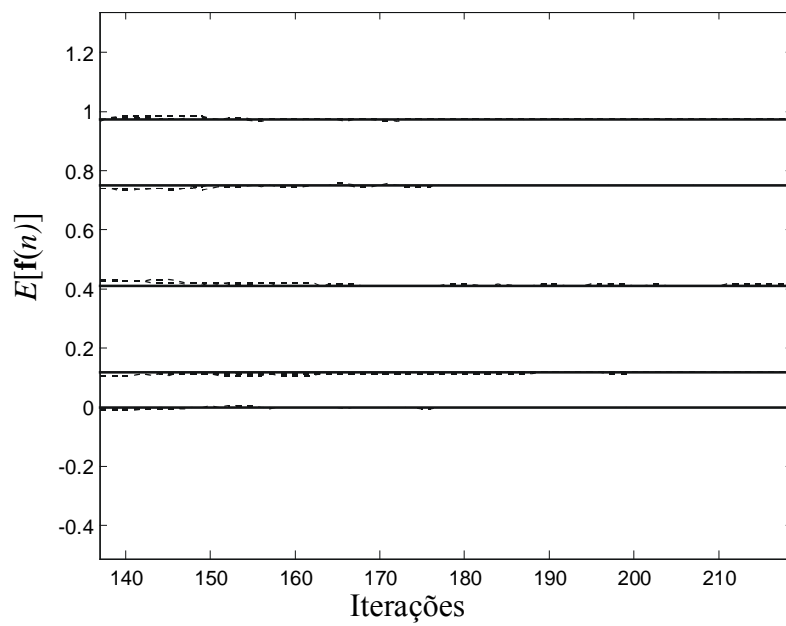


Figura 2.7. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS para um sinal de entrada branco e  $\mu = 0,8\mu_{\max}$ . (a) Comportamento médio dos coeficientes: simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linha cinza), modelo proposto (linha preta). (b) Ampliação da Figura 2.7 (a) no regime permanente. (c) Curvas de EQM: simulação MC (linha cinza); modelo proposto (linha preta).

A Figura 2.8(a) apresenta o comportamento dos coeficientes do filtro de banda completa equivalente. Nesse caso, embora apresente-se o mesmo efeito impulsivo nos coeficientes dos filtros esparsos, o modelo acompanha bem o comportamento das simulações em regime permanente, como é evidenciado na ampliação apresentada na Figura 2.8(b).



(a)



(b)

Figura 2.8(a). Comportamento médio dos coeficientes do filtro de banda completa equivalente ao algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS para um sinal de entrada branco e  $\mu = 0,8\mu_{\max}$  : simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linha cinza), modelo proposto (linha preta). (b) Ampliação do regime permanente.

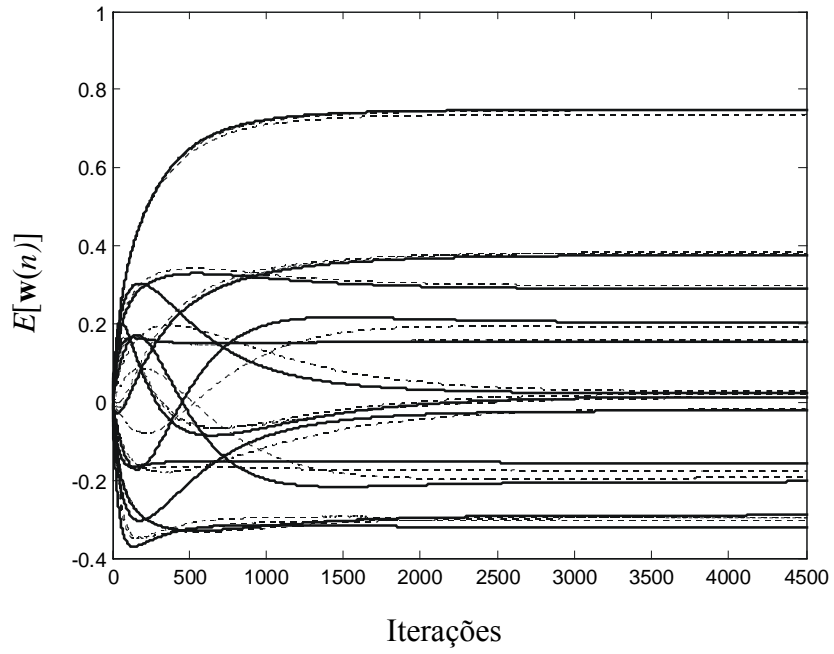
### 2.6.2 GRUPO DE EXEMPLOS 2: SINAL DE ENTRADA CORRELACIONADO

A seguir, é apresentada uma seqüência de figuras ilustrando o comportamento do momento de primeira ordem do vetor de coeficientes dos filtros esparsos e a curva de aprendizagem para um sinal de entrada correlacionado. Os valores do passo de adaptação considerados foram  $\mu = 0,05\mu_{\max}$ ,  $\mu = 0,5\mu_{\max}$  e  $\mu = 0,7\mu_{\max}$ , sendo  $\mu_{\max} = 0,1$ . Em cada figura, são apresentados os resultados obtidos por simulação Monte Carlo (MC) (média de 300 realizações independentes) e a partir do modelo proposto.

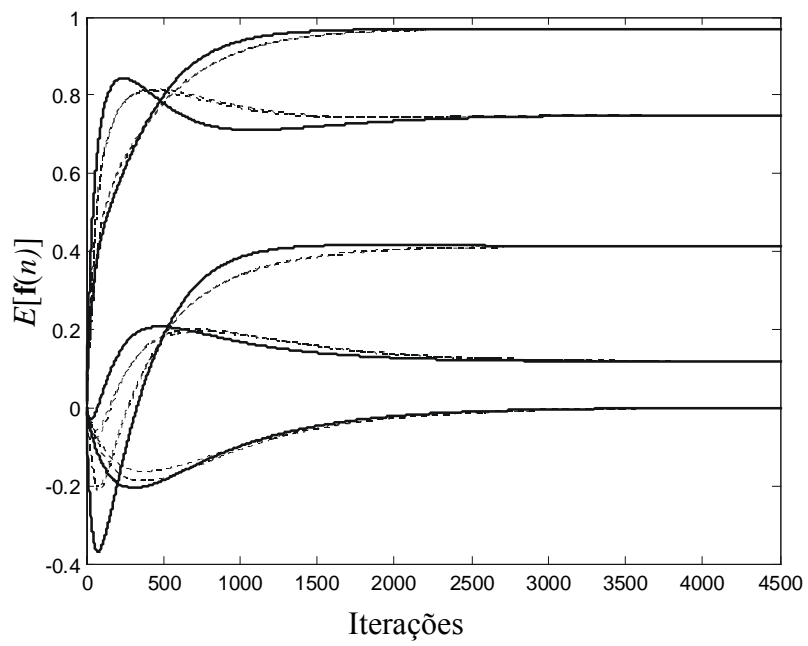
A Figura 2.9 ilustra os resultados obtidos para  $\mu = 0,05\mu_{\max}$ . Apesar de cumprir com a condição de adaptação lenta, observa-se um pequeno descasamento entre o modelo e as simulações. Esse fato é decorrente da hipótese considerada que o processo  $\{u_i^2(n)\}$  tem uma distribuição *qui*-quadrado. Essa função de distribuição é só aproximada para o caso de sinais  $u_i(n)$  correlacionados. Porém, as curvas dos coeficientes do filtro de banda completa e a curva de aprendizagem ainda apresentam bons resultados com tal consideração.

O comportamento dos modelos do momento de primeira ordem dos coeficientes do filtro equivalente de banda completa e da curva de aprendizagem apresentam um bom casamento até o valor de  $\mu = 0,5\mu_{\max}$ . Para um valor de passo de adaptação superior, o modelo proposto apresenta um pequeno descasamento para a curva de aprendizagem. Esse fato é ilustrado na Figura 2.10.

Para valores superiores a  $\mu = 0,7\mu_{\max}$ , aparece um comportamento impulsivo nas iterações iniciais dos coeficientes, já mostrado para o caso de sinal de entrada não correlacionado e ilustrado na Figura 2.11.



(a)



(b)

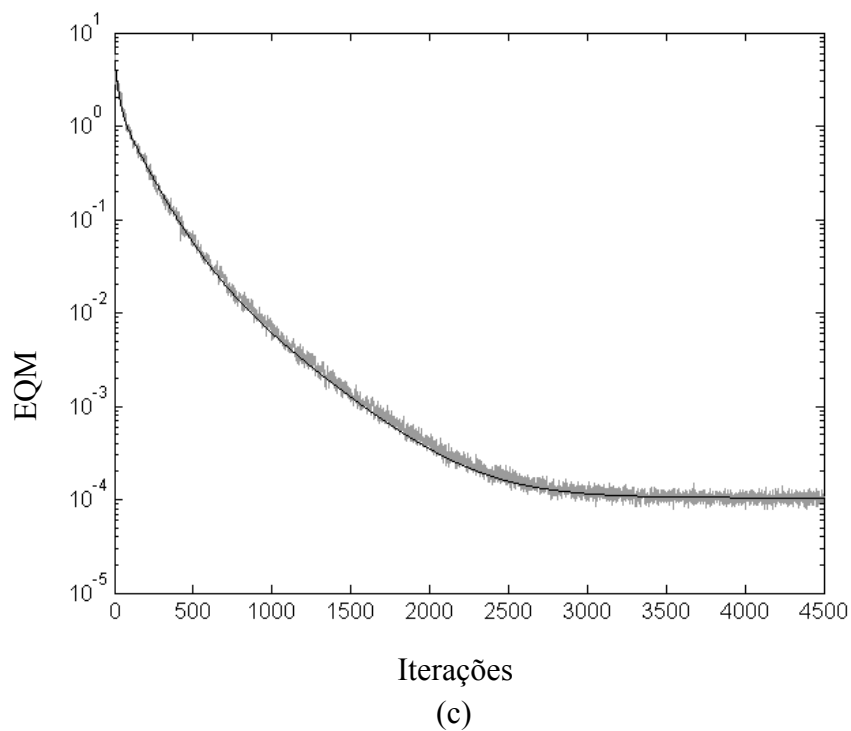
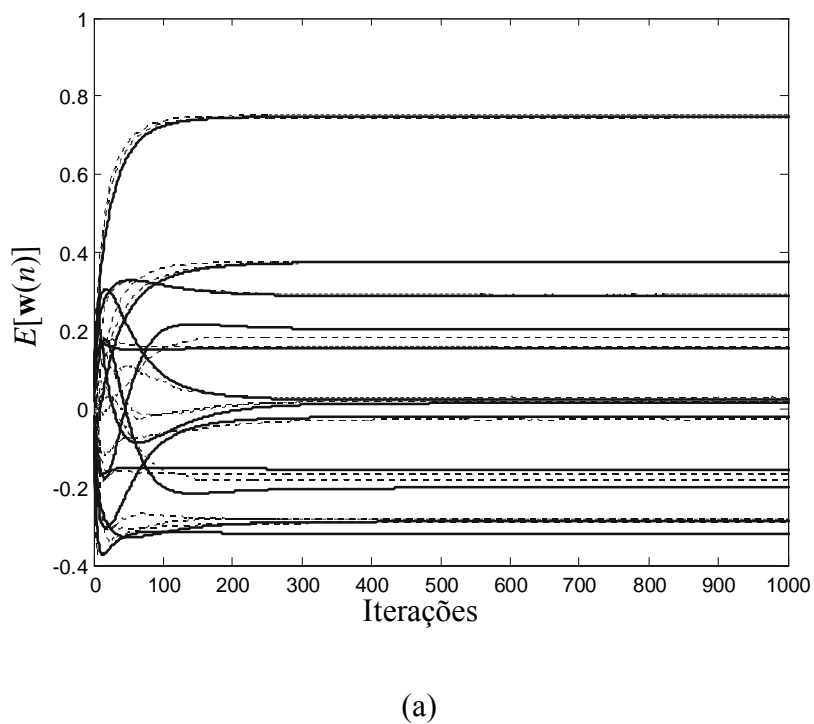


Figura 2.9. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS considerando sinal de entrada correlacionado e  $\mu = 0,05\mu_{\max}$ . (a) Comportamento médio dos coeficientes: simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linha cinza), modelo proposto (linha preta). (b) Coeficientes do filtro equivalente de banda completa: simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linha cinza), modelo proposto (linha preta). (c) Curvas de EQM: simulação MC (linha cinza); modelo proposto (linha preta).



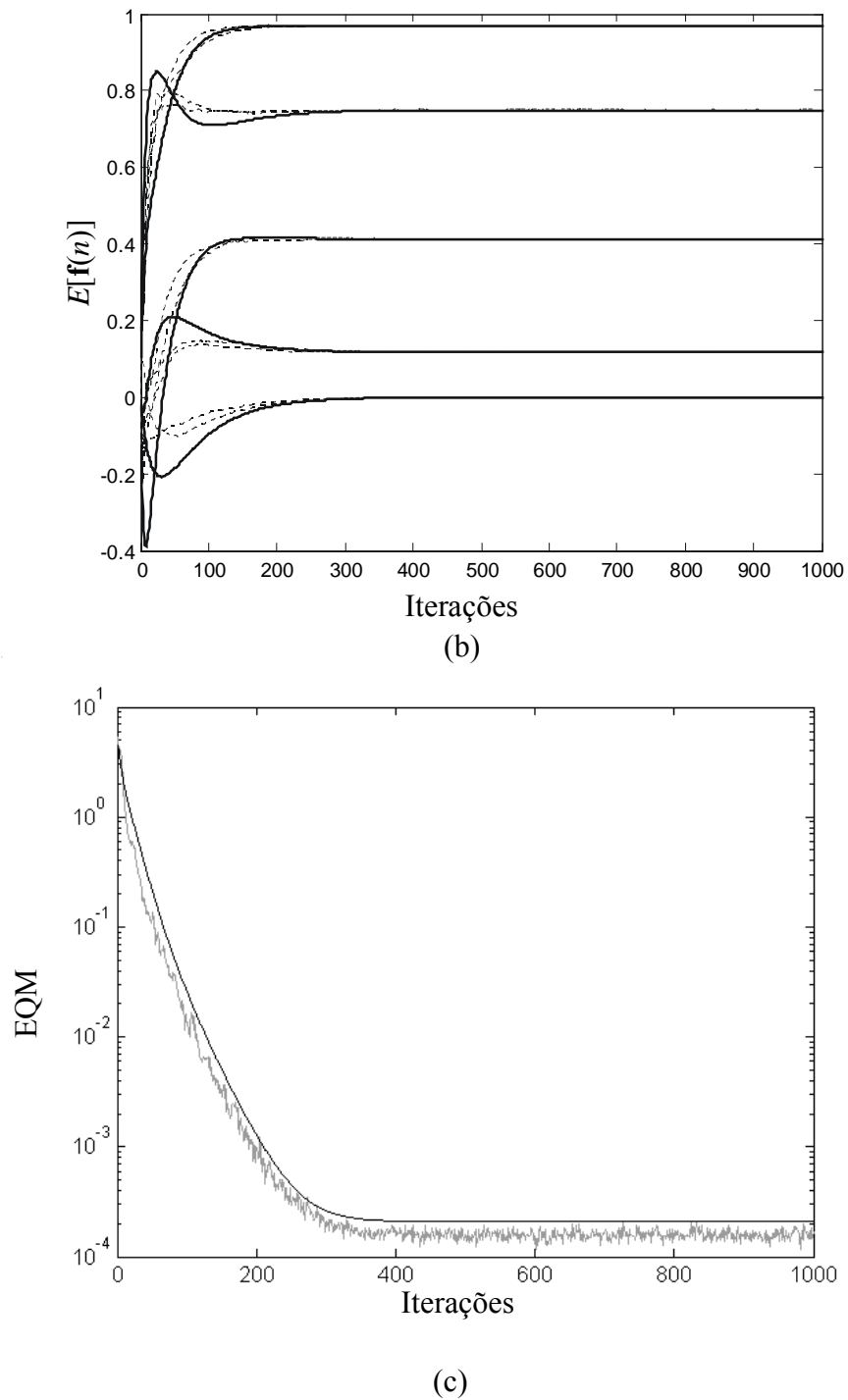
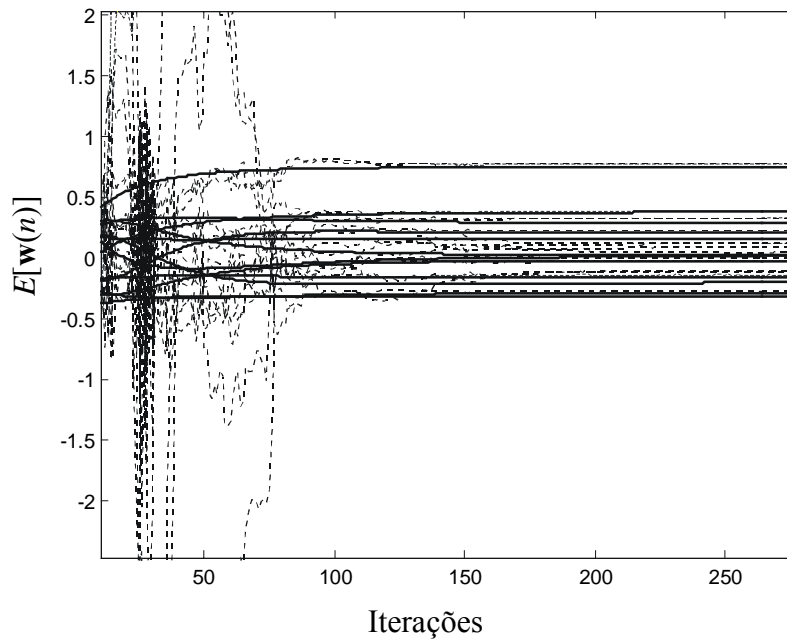
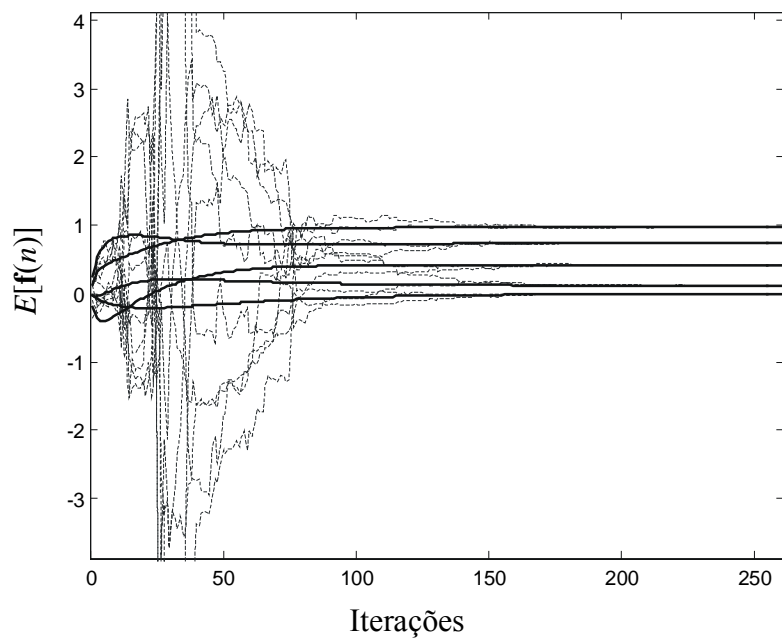


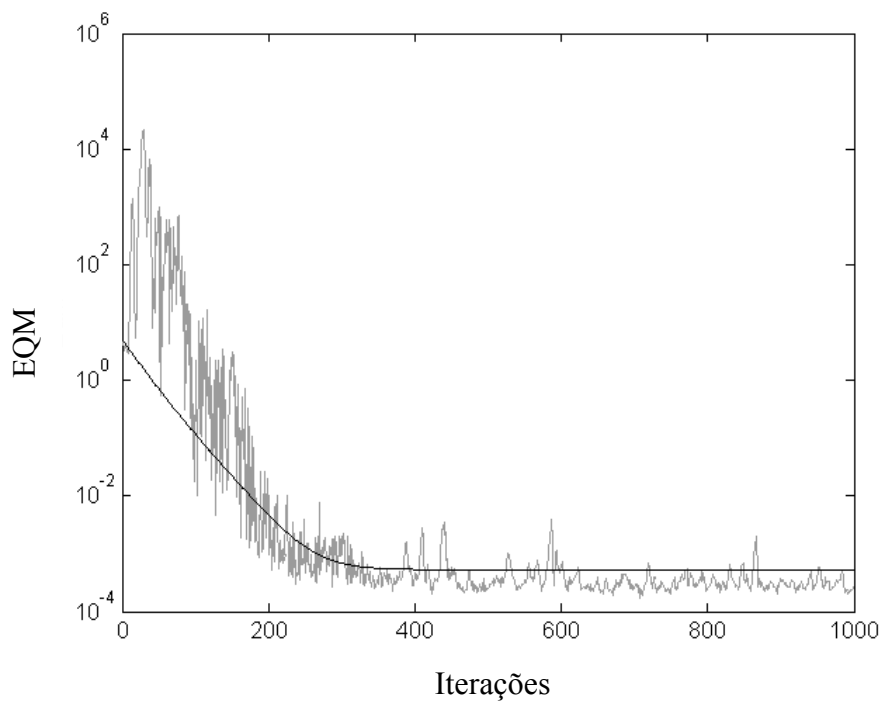
Figura 2.10. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS considerando sinal de entrada correlacionado e  $\mu = 0,5\mu_{\max}$ . (a) Comportamento médio dos coeficientes: simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linha cinza), modelo proposto (linha preta). (b) Coeficientes do filtro equivalente de banda completa: simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linha cinza), modelo proposto (linha preta). (c) Curvas de EQM: simulação MC (linha cinza); modelo proposto (linha preta).



(a)



(b)



(c)

Figura 2.11. Comportamento do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS considerando sinal de entrada correlacionado e  $\mu = 0,7\mu_{\max}$ . (a) Comportamento médio dos coeficientes: simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linhas cinzas), modelo proposto (linhas pretas). (b) Ampliação da Figura 2.11(a) no regime permanente. (c) Coeficientes do filtro equivalente de banda completa: simulação MC (média de 300 realizações independentes) (linhas cinzas), modelo proposto (linhas pretas). (d) Ampliação da Fig 2.11(c) no regime permanente. (e) Curvas de EQM: simulação MC (linha cinza); modelo proposto (linha preta).



## 2.7 CONCLUSÕES

Este capítulo apresentou a modelagem estatística do algoritmo GSD- $\epsilon$ NLMS a qual é independente da ordem do filtro adaptativo e do tipo de transformação ortogonal utilizada. São propostos modelos analíticos para os momentos de primeira e segunda ordens do vetor de coeficientes do filtro adaptativo, considerando a hipótese de adaptação lenta. No modelo desenvolvido, é também considerado um parâmetro de regularização que evita a divisão por zero na operação de normalização de potência do algoritmo.

Comparações entre os resultados de simulações e os obtidos através do modelo mostraram um bom casamento de resultados para as condições em que sejam satisfeitas as hipóteses simplificativas consideradas. Quando se violam tais condições, os resultados não são muito bons, particularmente, a condição de adaptação lenta. O comportamento do modelo do momento de primeira ordem dos coeficientes do filtro esparsos é degradado com o aumento do grau de correlação do sinal de entrada. Por outro lado, nota-se que tanto o modelo do momento de primeira ordem dos coeficientes do filtro equivalente de banda completa quanto o modelo do EQM são mais robustos a esse tipo de efeito.

## MODELAGEM ESTATÍSTICA DO ALGORITMO NSAF

Este capítulo propõe uma modelagem estatística do algoritmo de filtragem adaptativa em sub-bandas normalizado (NSAF), considerando sinais de entrada Gaussianos e hipótese de adaptação lenta.

O algoritmo NSAF foi proposto por Lee *et. al.* em [27] e [28], sendo uma variante dos algoritmos adaptativos em sub-bandas. Nesse caso, o sinal de erro é decomposto em sub-bandas e os coeficientes da estrutura operam em banda completa. Tal algoritmo é utilizado como uma alternativa ao algoritmo NLMS, visando melhorar a velocidade de convergência para sinais de entrada fortemente correlacionados. Entretanto, com a estrutura do NSAF não se obtém qualquer redução de complexidade computacional, como a que pode ser obtida com a estrutura GSD-NLMS.

Neste capítulo são derivados modelos analíticos para o momento de primeira ordem do vetor de coeficientes do filtro adaptativo e para a curva de aprendizagem. Para tal, são levados em conta a natureza variante no tempo do passo de adaptação bem como o parâmetro de regularização adicionado à estimativa de potência. Simulações numéricas permitem verificar a qualidade do modelo aqui proposto.

### 3.1 ESTRUTURA DO ALGORITMO NSAF

Na Figura 3.1 é novamente mostrado, por conveniência, o diagrama de blocos do algoritmo NSAF. Nessa estrutura, a resposta desejada  $d(n)$  e o sinal de saída do filtro  $y(n)$  são particionados em  $M$  sub-bandas pelos filtros de análise  $H_i(z)$ , dados pela expressão

$$H_i(z) = \sum_{j=0}^{J-1} h_{i,j} z^j, \quad \text{para } i = 0, \dots, M-1, \quad (3.1)$$

onde  $J$  denota o comprimento do filtro. Os sinais de cada sub-banda  $d_i(n)$  e  $y_i(n)$ , para  $i = 0, \dots, M-1$ , são criticamente amostrados, de acordo com sua largura de banda. Note que é utilizada a variável  $n$  para indexar a seqüência temporal original e  $k$  para indexar as seqüências temporais dizimadas.

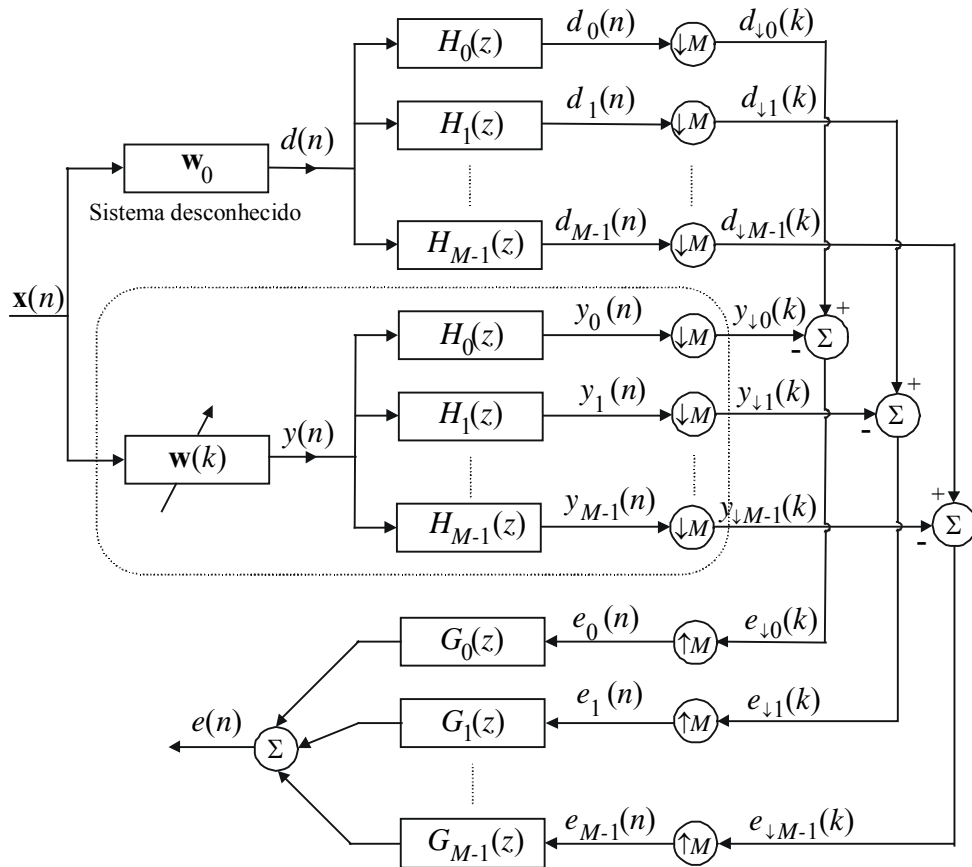


Figura 3.1. Diagrama em blocos da estrutura do algoritmo NSAF.

Assumindo que a adaptação seja suficientemente lenta, o filtro  $\mathbf{w}(k)$  pode ser deslocado de sua posição original, tal como ilustrado pela Figura 3.2 [27], [28]. Assim, o sinal de saída na sub-banda dizimada pode ser escrito da seguinte forma:

$$y_{\downarrow i}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} w_m(k) u_i(kM - m) = \mathbf{w}(k)^T \mathbf{u}_i(k), \quad (3.2)$$

onde

$$\mathbf{u}_i(k) = [u_i(kM) \ u_i(kM - 1) \ \dots \ u_i(kM - M + 1) \ u_i(kM - M) \ \dots \ u_i(kM - N + 1)]^T, \quad (3.3)$$

e

$$\mathbf{w}(k) = [w_0(k) w_1(k) \dots w_{N-1}(k)]^T. \quad (3.4)$$

O vetor  $\mathbf{u}_i(k)$  representa o vetor de entrada para a  $i$ -ésima sub-banda e  $\mathbf{w}(k)$  é o vetor de coeficientes de banda completa de dimensão  $N$ . O vetor  $\mathbf{w}_0$  representa a resposta ao impulso da planta. Então, o sinal de erro de cada sub-banda dizimada é dado por

$$e_{\downarrow i}(k) = d_{\downarrow i}(k) - \mathbf{w}^T(k) \mathbf{u}_i(k). \quad (3.5)$$

As equações (3.2) e (3.3) indicam que, para produzir cada amostra no instante  $k$ , cada vetor de dados  $\mathbf{u}_i(k)$  inclui  $M$  novas amostras, mantendo  $N - M$  amostras antigas. Essas definições, para os sinais em sub-bandas, facilitam a formulação da expressão recursiva para atualizar o vetor de coeficientes. Nesta seção e nas subseqüentes, assumiremos que todos os sinais bem como os coeficientes do filtro são reais.

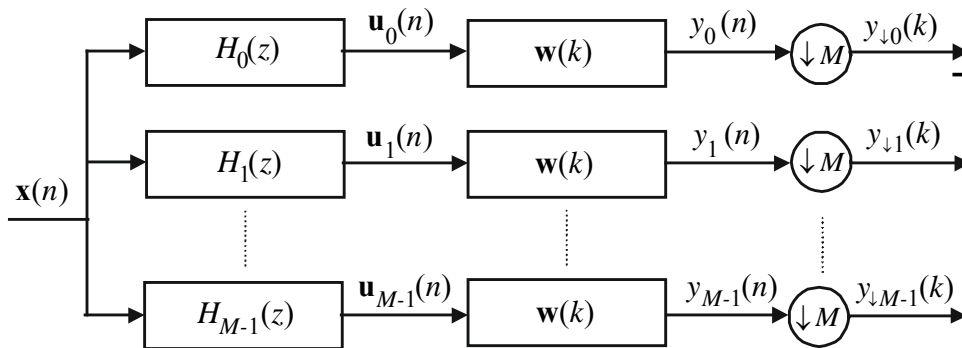


Figura 3.2. Separação do sinal de entrada em sub-bandas antes de ser processado pelo filtro  $\mathbf{w}(k)$ .

### 3.2. EQUACIONAMENTO DO ALGORITMO NSAF

Baseado no princípio do mínimo distúrbio, Lee et al. [27], [28] formularam o algoritmo NSAF como um problema de otimização com múltiplas restrições. Assim, trata-se de minimizar o quadrado da norma Euclidiana da variação do vetor de coeficientes.

Desta forma,

$$f[\mathbf{w}(k+1)] = |\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)|^2, \quad (3.6)$$

sujeito a  $M$  restrições impostas à saída dizimada do filtro

$$\mathbf{w}^T(k+1)\mathbf{u}_i(k) = d_{\downarrow i}(k), \quad i = 0, \dots, M-1. \quad (3.7)$$

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange [1], obtém-se a seguinte expressão recursiva para a adaptação dos coeficientes:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_i \mathbf{u}_i(k), \quad (3.8)$$

onde  $\lambda_i$  são os multiplicadores de Lagrange. Substituindo (3.8) em (3.7) obtém-se os multiplicadores de Lagrange. Portanto,

$$\boldsymbol{\lambda} = 2[\mathbf{U}^T(k)\mathbf{U}(k)]^{-1}\mathbf{e}_{\downarrow}(k), \quad (3.9)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}]^T$  é o vetor de multiplicadores de Lagrange de dimensão  $M \times 1$ ,  $\mathbf{U}(k) = [\mathbf{u}_0(k), \mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_{M-1}(k)]$  é a matriz de dados, de dimensão  $N \times M$ , e  $\mathbf{e}_{\downarrow}(k) = [e_{\downarrow 0}(k), e_{\downarrow 1}(k), \dots, e_{\downarrow M-1}(k)]^T$  é o vetor de erro, de dimensão  $M \times 1$ . Em [27], foi demonstrado que se os sinais de sub-banda são ortogonais, os elementos que ficam fora da diagonal principal de  $\mathbf{U}^T(k)\mathbf{U}(k)$  podem ser desconsiderados. Com essa consideração, (3.9) reduz-se a

$$\lambda_i = 2 \frac{e_{\downarrow i}(k)}{|\mathbf{u}_i(k)|^2}, \quad i = 0, \dots, M-1. \quad (3.10)$$

Finalmente, substituindo (3.10) em (3.8), obtemos a equação de atualização dos coeficientes do algoritmo NSAF.

Assim,

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\mathbf{u}_i(k)}{|\mathbf{u}_i(k)|^2} e_{\downarrow_i}(k). \quad (3.11)$$

Uma constante positiva, representada pelo fator  $\mu$ , é introduzida em (3.11) para controlar o processo de adaptação dos coeficientes. Para propósitos de implementação, o termo  $|\mathbf{u}_i(k)|^2$  pode ser aproximado pela potência média do vetor  $\mathbf{u}_i(k)$ , caracterizando a  $i$ -ésima sub-banda. Assim,

$$|\mathbf{u}_i(k)|^2 \cong N \hat{\sigma}_i^2(k), \quad i = 0, \dots, M-1, \quad (3.12)$$

onde  $\hat{\sigma}_i^2(k)$  denota a potência média estimada, dada por [37]

$$\hat{\sigma}_i^2(k) = \frac{1}{M_w} \sum_{j=0}^{M_w-1} u_i^2(k-j), \quad (3.13)$$

onde  $M_w$  representa o comprimento da janela de observação.

Para evitar a divisão por zero na implementação do algoritmo, o parâmetro de regularização  $\varepsilon$  é adicionado à estimativa de  $\hat{\sigma}_i^2(k)$ . Dessa forma, a fim de representar o efeito dessa constante, tal parâmetro também foi incluído nas expressões do modelo aqui desenvolvido. Então, o valor  $|\mathbf{u}_i(k)|^2$  é agora aproximado por  $\delta_i(k) = N[\hat{\sigma}_i^2(k) + \varepsilon]$ , para  $i = 0, \dots, M-1$ .

Desta forma, a equação de atualização dos coeficientes (3.11) pode ser reescrita em termos da potência normalizada (variante no tempo)  $\delta_i(k)$  como

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \delta_i^{-1}(k) \mathbf{u}_i(k) e_{\downarrow_i}(k). \quad (3.14)$$

### 3.3. MOMENTO DE PRIMEIRA ORDEM DO VETOR DE COEFICIENTES

As suposições realizadas para obter o modelo estatístico do algoritmo NSAF são as seguintes:

- (i) As entradas dizimadas  $u_{\downarrow i}(k)$  e as saídas desejadas dizimadas  $d_{\downarrow i}(k)$  são processos estacionários de média zero.
- (ii)  $\mathbf{w}(k)$  é estatisticamente independente de  $d_{\downarrow i}(k)$  e  $\mathbf{u}_i(k)$ , para  $i = 0, \dots, M-1$  [1], [2].
- (iii)  $\delta_i^{-1}(k)$  e  $\mathbf{u}_i^T(k)\mathbf{u}_i(k)$  são processos conjuntamente estacionários, com  $\delta_i^{-1}(k)$  tendo uma variação lenta em relação a  $\mathbf{u}_i(k)\mathbf{u}_i^T(k)$ , para  $i = 0, \dots, M-1$  [38].
- (iv) O sinal de erro dizimado é dado por

$$e_{\downarrow i}(k) = d_{\downarrow i}(k) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{u}_i(k) + z_{\downarrow i}(k), \quad (3.15)$$

onde o sinal  $z_{\downarrow i}(k)$  representa um ruído de medição. As características desse ruído são: i.i.d., média zero, variância  $\sigma_z^2$  e não correlacionado com qualquer outro sinal no sistema. Substituindo (3.15) em (3.14) e tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, obtém-se

$$E[\mathbf{w}(k+1)] = E[\mathbf{w}(k)] + \mu \sum_{i=0}^{M-1} \{E[\delta_i^{-1}(k)\mathbf{u}_i(k)d_{\downarrow i}(k)] - E[\delta_i^{-1}(k)\mathbf{u}_i(k)\mathbf{u}_i^T(k)]E[\mathbf{w}(k)]\} \quad (3.16)$$

O valor esperado  $E[\delta_i^{-1}(k)\mathbf{u}_i(k)\mathbf{u}_i^T(k)]$  em (3.16) é determinado considerando (iii), resultando na seguinte aproximação:

$$E[\delta_i^{-1}(k)\mathbf{u}_i(k)\mathbf{u}_i^T(k)] \approx E[\delta_i^{-1}(k)]E[\mathbf{u}_i(k)\mathbf{u}_i^T(k)]. \quad (3.17)$$

Finalmente, substituindo (3.17) em (3.16), tem-se

$$E[\mathbf{w}(k+1)] = \{\mathbf{I} - \mu \sum_{i=0}^{M-1} E[\delta_i^{-1}(k)]\mathbf{R}_i\}E[\mathbf{w}(k)] + \mu \sum_{i=0}^{M-1} E[\delta_i^{-1}(k)]\mathbf{p}_i, \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{R}_i = E[\mathbf{u}_i(k)\mathbf{u}_i^T(k)]$  e  $\mathbf{p}_i = E[\mathbf{u}_i(k)d_{\downarrow i}(k)]$  representam, respectivamente, a matriz de autocorrelação do vetor de entrada para cada sub-banda e o vetor de correlação cruzada entre o sinal desejado dizimado e o vetor de entrada.

Para concluir a derivação do momento de primeira ordem, deve-se determinar o valor esperado  $E[\delta_i^{-1}(k)]$ . Para tal, usamos (3.13). Assumindo que o processo  $\{|\mathbf{u}_i(k)|^2\}$  tem uma distribuição *qui-quadrado* com  $M_w$  graus de liberdade [37], [39], o valor esperado do elemento  $\delta_i^{-1}(k)$  é determinado a partir da seguinte expressão:

$$E\left\{\left[N[\hat{\sigma}_i^2(k) + \varepsilon]\right]^{-1}\right\} \approx E\left\{\left[N \frac{1}{M_w} \sum_{l=0}^{M_w-1} u_i^2(k-l)\right]^{-1}\right\} - \varepsilon E\left\{\left[N \left(\frac{1}{M_w} \sum_{l=0}^{M_w-1} u_i^2(k-l)\right)^2\right]^{-1}\right\} \quad (3.19)$$

Assim, conforme o procedimento apresentado em [37], e considerando uma notação matricial, obtém-se

$$E[\mathbf{D}^{-1}(k)] = \frac{1}{N} \left\{ \frac{M_w}{(M_w - 2)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T)]^{-1} \right\} - \varepsilon \frac{M_w^2}{(M_w - 2)(M_w - 4)} [\text{diag}(\mathbf{R}_T^2)]^{-1}, \quad (3.20)$$

onde  $E[\mathbf{D}(k)]$  é uma matriz diagonal com elementos  $E[\delta_i(k)]$  e a matriz  $\mathbf{R}_T = E[\mathbf{u}_T(k)\mathbf{u}_T^T(k)]$  é obtida a partir do vetor  $\mathbf{u}_T(k) = [u_0(k) u_1(k) \cdots u_{M-1}(k)]^T$ .

Substituindo (3.20) em (3.18), completa-se a derivação do momento de primeira ordem do vetor de coeficientes.

### 3.4 VALOR DE REGIME PERMANENTE DE $\mathbf{w}(k)$

Nesta seção, determinaremos o valor de regime permanente do vetor de coeficientes do algoritmo NSAF. Nessa condição, é válida a relação  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(k+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(k)] = \mathbf{w}_\infty$ ; assim, usando-a em (3.18), obtém-se

$$\mathbf{w}_\infty = \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} E[\delta_i^{-1}(k)] \mathbf{R}_i \right\}^{-1} \sum_{i=0}^{M-1} E[\delta_i^{-1}(k)] \mathbf{p}_i. \quad (3.21)$$



A partir de resultados de simulação numérica, mostrados na Seção 3.6, pode-se comprovar a validade de (3.21).

### 3.5 CURVA DE APRENDIZAGEM

Nesta seção, é determinada uma expressão analítica para a curva de aprendizagem, denotada por  $\xi(n) = E[e^2(n)]$ , do algoritmo NSAF. Para as derivações seguintes, são utilizadas as considerações (i), (ii) e (iii) apresentadas na Seção 3.4. A validade dessas hipóteses é justificada para uma condição de adaptação lenta, ou seja,  $\mu \ll 1$ .

O sinal de erro  $e(n)$  é o resultado da soma dos sinais  $e_i(n)$ . Assim,

$$e(n) = \sum_{i=0}^{M-1} e_i(n). \quad (3.22)$$

Por sua vez, os sinais  $e_i(n)$  resultam da interpolação e filtragem dos sinais  $e_{\downarrow_i}(k)$ ; essa operação pode então ser resumida na seguinte expressão [2]:

$$e_i(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{i,n-kM} e_{\downarrow_i}(k), \quad (3.23)$$

onde  $g_{i,j}$  é o  $j$ -ésimo coeficiente do  $i$ -ésimo filtro de síntese. Substituindo a expressão (3.23) em (3.22) resulta

$$e(n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{i,n-kM} e_{\downarrow_i}(k). \quad (3.24)$$

Considerando-se que os filtros de síntese  $G_i(z)$  são filtros FIR, os limites dos somatórios em (3.24) são agora dados por

$$e(n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=\lfloor \frac{n-J+1}{M} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} g_{i,n-kM} e_{\downarrow i}(k), \quad k \geq 0 \quad (3.25)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados de (3.25), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e considerando que

$$E[e_{\downarrow i}(k)e_{\downarrow j}(p)] = 0, \quad \forall i \neq j, \forall k \text{ e } \forall p, \quad (3.26)$$

obtem-se

$$\xi(n) = E[e^2(n)] = \sum_{k=\lfloor \frac{n-J+1}{M} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} \sum_{p=\lfloor \frac{n-J+1}{M} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} \sum_{i=0}^{M-1} g_{i,n-kM} g_{i,n-pM} E[e_{\downarrow i}(k) e_{\downarrow i}(p)]. \quad (3.27)$$

A equação (3.15) pode ser reescrita como

$$e_{\downarrow i}(k) = e_{\downarrow i}^o(k) - \hat{\mathbf{v}}^T(k) \mathbf{u}_i(k), \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{v}(k) = \mathbf{w}(k) - \mathbf{w}_\infty$  é o vetor de erro nos coeficientes e

$$e_{\downarrow i}^o(k) = d_{\downarrow i}(k) - \mathbf{w}_\infty^T \mathbf{u}_i(k) + z_{\downarrow i}(k) \quad (3.29)$$

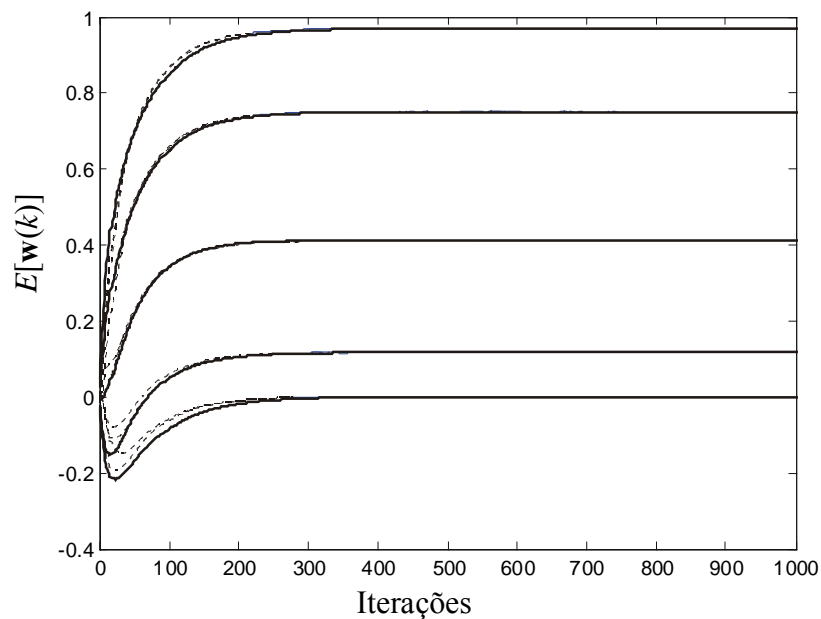
é o erro de estimação na condição ótima. Então, substituindo (3.28) em (3.27), obtém-se [43]

$$\xi(n) = \sum_{k=\lfloor \frac{n-J+1}{M} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} \sum_{p=\lfloor \frac{n-J+1}{M} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} \sum_{i=0}^{M-1} g_{i,n-kM} g_{i,n-pM} \left\{ E[e_{\downarrow i}^o(k) e_{\downarrow i}^o(p)] + \text{tr} \left\{ \mathbf{R}_i E[\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(p)] \right\} \right\}. \quad (3.30)$$

Dada a condição de adaptação lenta, pode-se considerar a aproximação  $E[\mathbf{v}(k) \mathbf{v}^T(p)] \simeq E[\mathbf{v}(k)] E[\mathbf{v}^T(p)]$  [44]. Assim, (3.30) juntamente com a (3.18) permite determinar  $\xi(n)$  para qualquer  $n$ .

### 3.6 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para avaliar o modelo proposto, são apresentados alguns exemplos aplicados a um problema de identificação de sistema. Para a estrutura em sub-bandas, são usados bancos de filtros do tipo cosseno modulado [42]. O sinal de entrada é um sinal Gaussiano correlacionado, obtido através de um processo AR(2) definido por  $x(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + v(n)$ , onde  $v(n)$  é um sinal branco, com variância  $\sigma_v^2$ . Os coeficientes do processo auto-regressivo são:  $a_1 = 1,3214$  e  $a_2 = -0,8500$  e a dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é 670. O ruído de medição  $z(n)$  tem uma variância  $\sigma_z^2 = 10^{-4}$  (SNR = 40 dB). A planta utilizada tem uma resposta ao impulso dada por uma janela de Hanning com 10 coeficientes.



(a)

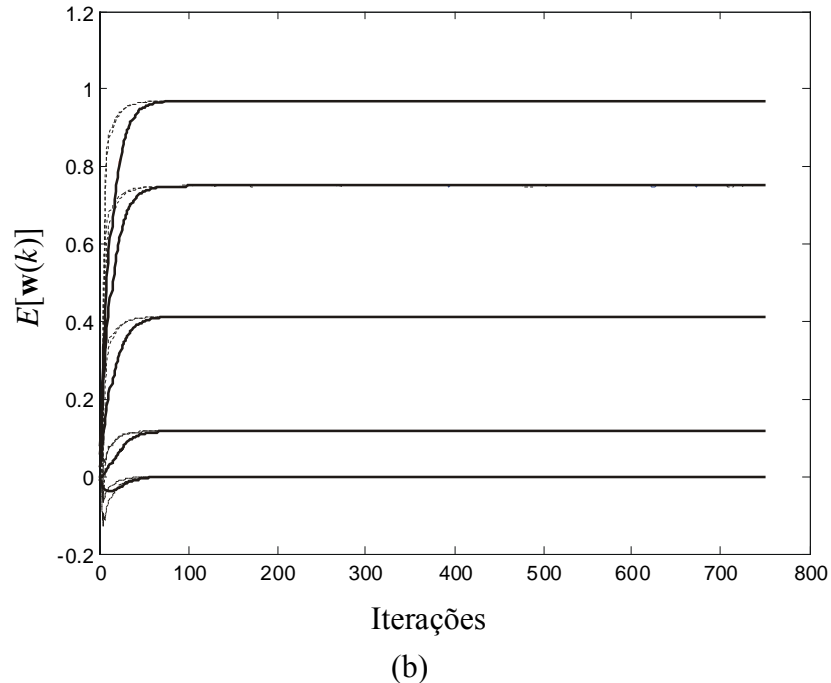


Figura 3.3. Comportamento médio do vetor de coeficientes  $E[\mathbf{w}(k)]$ . (a) Para quatro sub-bandas: simulação MC (linha cinza); modelo proposto (linha preta). (b) Para oito sub-bandas: simulação MC (linha cinza); modelo proposto (linha preta).

Dois exemplos, utilizando-se dois tamanhos de bancos de filtros tipo cosseno modulado [40] (quatro e oito sub-bandas), são considerados. O comprimento dos filtros de análise e síntese é  $J = 32$  para o caso de quatro sub-bandas e  $J = 64$  para 8 sub-bandas. Esses valores são iguais aos considerados em [27], [28]. Outros parâmetros usados são:  $\mu = 0,1\mu_{\max}$ ,  $\mu_{\max} = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$  e  $M_w = 32$ . A Figura 3.3 mostra o momento de primeira ordem do vetor de coeficientes do filtro adaptativo obtido por simulação Monte Carlo (MC) e pelo modelo proposto usando as expressões (3.18) e (3.20). Observa-se uma concordância muito boa entre as previsões obtidas pelo modelo e os resultados de simulação. O valor  $\mathbf{w}_\infty$  obtido de (3.21) coincide com o valor de regime permanente obtido das simulações.

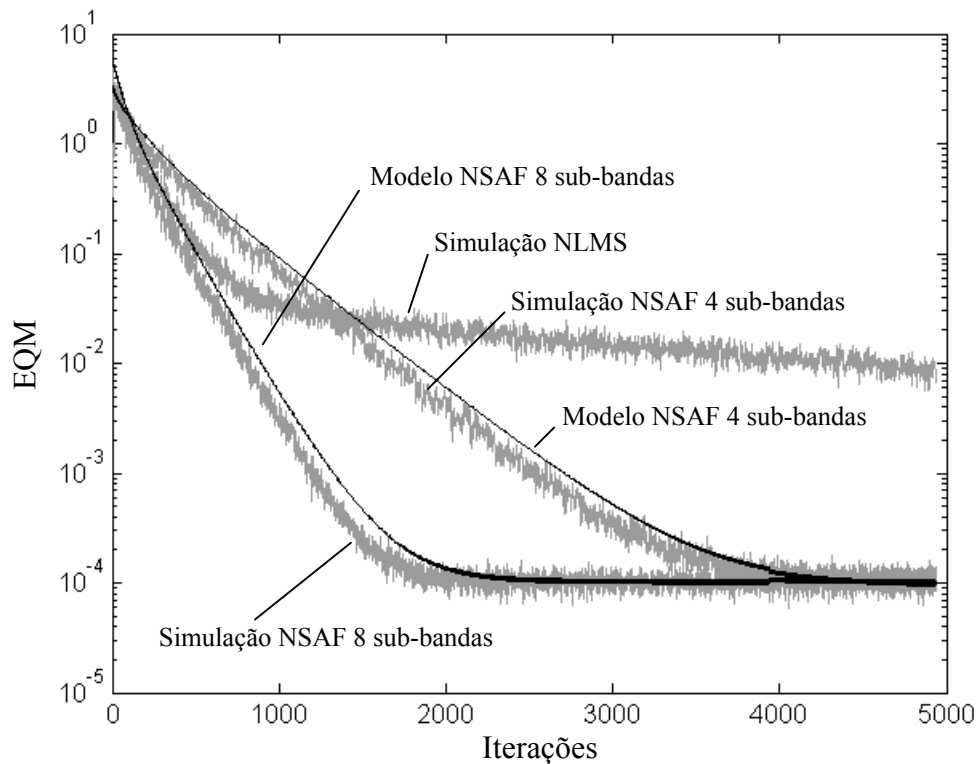


Figura 3.4. Comparação do comportamento do modelo para a curva de aprendizagem do algoritmo NSAF e da simulação MC.

Na Figura 3.4, são ilustradas as curvas de aprendizagem do algoritmo NSAF, para 4 e 8 sub-bandas, obtidas por simulação MC (média de 300 rodadas independentes) e a partir do modelo proposto, equação (3.30). Nessa mesma figura também é ilustrada a curva de aprendizagem do algoritmo NLMS, apresentada para fins de comparação. Os passos de adaptação dos diferentes algoritmos são selecionados para se obter o mesmo erro em regime permanente. Novamente, observa-se uma boa concordância entre o resultado do modelo proposto e os obtidos por simulação.

### 3.7 COMPARAÇÃO NSAF *versus* GSD-NLMS

Nesta seção, são apresentadas simulações dos algoritmos NSAF e GSD-NLMS, as quais possibilitam comparar o comportamento de ambos os algoritmos. É considerado um problema de identificação de sistema para uma planta representada por uma janela de Hanning de 10 coeficientes. As estruturas utilizadas são:

- Algoritmo NSAF: 4 sub-bandas ( $M = 4$ ), banco de filtros cosseno modulado com 4 sub-bandas e filtros de comprimento  $J = 32$ .
- Algoritmo GSD-NLMS: 4 sub-bandas implementadas por uma DCT,  $L = 2$  e  $K = 4$ .

No primeiro caso analisado é considerado que ambos algoritmos apresentem o mesmo erro em regime permanente. Para cumprir com tal condição, o passo de adaptação do NSAF é  $\mu = 0,05\mu_{\max}$  e do GSD-NLMS,  $\mu = 0,07\mu_{\max}$ . A Figura 3.5 ilustra o comportamento de ambos os algoritmos. Nesse caso, observa-se que o algoritmo GSD-NLMS apresenta uma velocidade de convergência maior.

No segundo caso, são considerados os algoritmos na condição de igual velocidade de convergência. Para tal, o passo de adaptação do NSAF é  $\mu = 0,45\mu_{\max}$  e do GSD-NLMS,  $\mu = 0,5\mu_{\max}$ . A Figura 3.6 ilustra os resultados de ambos os algoritmos. Nesse caso, o algoritmo NSAF apresentou um maior erro em regime permanente.

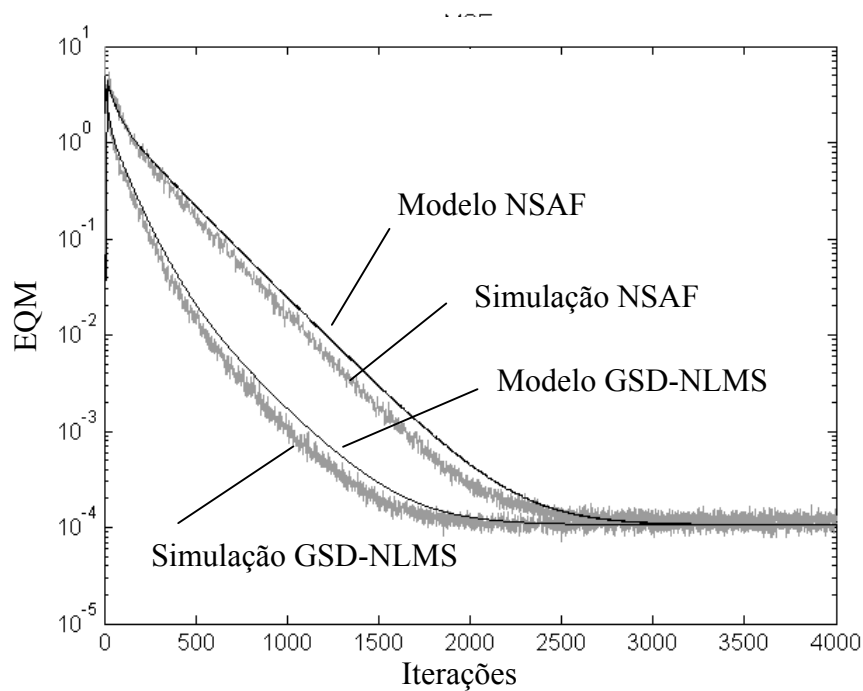


Figura 3.5. Comparação do comportamento das curvas de aprendizagem dos algoritmos NSAF e GSD-NLMS para o mesmo erro em regime permanente.

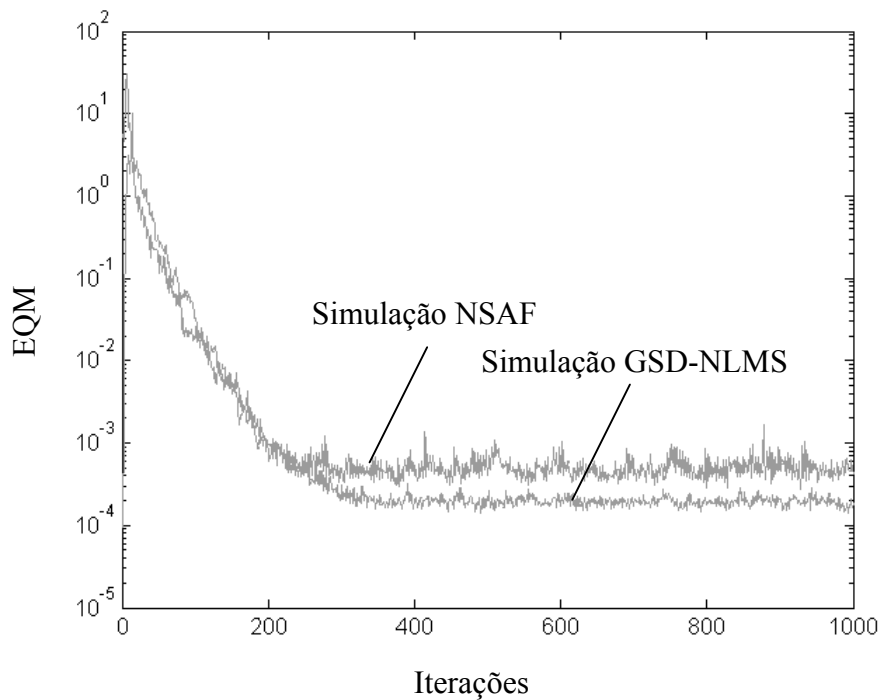


Figura 3.6. Comparação das curvas de aprendizagem dos algoritmos NSAF e GSD-NLMS para igual velocidade de convergência: simulação MC (média de 200 realizações independentes).

O algoritmo NSAF apresenta um maior erro de estimação. O custo computacional do algoritmo NSAF é  $3N + M + 3MJ$  (considerando o cálculo recursivo da potência média), enquanto para o algoritmo GSD-NLMS é  $3KM + M + M^2$  (considerando o cálculo recursivo de potência média e implementação completa da DCT). Para os exemplos apresentados (planta em 10 coeficientes), a complexidade computacional do algoritmo NSAF é muito maior do que a do algoritmo GSD-NLMS.

### 3.8 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foi apresentado um modelo estatístico para o momento de primeira ordem do vetor de coeficientes e para a curva de aprendizagem do algoritmo NSAF. O modelo proposto é independente da ordem do filtro adaptativo, como também do tipo de filtro usado nos bancos de análise e síntese. Para o modelo obtido, é considerado um parâmetro de regularização, usado na operação de estimação da potência média requerida pelo algoritmo.

Na determinação do modelo, são considerados sinais de entrada Gaussianos e passo de adaptação pequeno, o que restringe o modelo para condições de adaptação lenta. Adicionalmente, para determinar  $E[\delta_i(k)]$  é assumido que os sinais transformados são independentes e, dessa forma, resultando em uma distribuição *qui-quadrado* para o processo  $\{|\mathbf{u}_i(k)|^2\}$ . Embora essa hipótese não seja de todo verdadeira, os resultados de simulação obtidos evidenciam uma satisfatória precisão do modelo aqui proposto.



## CONCLUSÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi a modelagem estatística de dois algoritmos em sub-banda: algoritmo LMS normalizado aplicado a uma estrutura em sub-bandas generalizada (GSD-NLMS) e o algoritmo em sub-bandas normalizado (NSAF). Esses dois algoritmos não apresentam problemas estruturais usualmente encontrados nos algoritmos em sub-banda, tais como os decorrentes do recobrimento de espectros de frequência. Assim, o GSD-NLMS e o NSAF exibem um melhor comportamento de convergência.

No presente estudo foram determinados os modelos analíticos que descrevem o comportamento dos momentos de primeira e segunda ordens dos coeficientes do filtro adaptativo e da curva de aprendizagem, sendo tais contribuições, em nosso conhecimento, inéditas.

Tanto para o GSD-NLMS quanto para o NSAF, são consideradas a natureza variante no tempo do passo de adaptação como também uma constante positiva adicionada à estimativa da potência dos sinais que fornece estabilidade numérica aos algoritmos para o caso de sinais de entrada não persistentes. Dessa forma, os modelos propostos permitem prever condições reais de operação.

Para determinar os modelos propostos neste trabalho, foi preciso fazer uma série de considerações e hipóteses simplificativas. Dentre as mais restritivas, podem-se citar:

- Os vetores de coeficientes dos filtros adaptativos e os vetores de sinais são independentes. Essa hipótese permite calcular de forma separada os valores esperados dos vetores de coeficientes e de sinais, sendo uma hipótese bastante utilizada em análise de filtros adaptativos; no entanto, ela limita a abrangência do modelo ao caso de adaptação lenta (valores pequenos de passo de adaptação).
- Cálculo do valor esperado  $E[1/\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$ , onde  $\mathbf{x}(n)$  é um vetor contendo as amostras do processo de entrada. Aqui foi considerado que o processo  $\{x^2(n)\}$  tem distribuição *qui-quadrado*. Essa hipótese apenas é válida para sinais independentes.

No entanto, a utilização dessa consideração, no contexto da modelagem de sistemas adaptativos com adaptação lenta, fornece ainda resultados aceitáveis para sinais correlacionados. O modelo que se mostrou mais influenciado por tal conjectura foi o momento de primeira ordem dos coeficientes do GSD-NLMS.

- Sinais Gaussianos: essa hipótese é usualmente considerada em modelagem de estruturas adaptativas.

Em geral, os resultados obtidos, levando em conta as hipóteses estabelecidas, mostraram uma boa concordância entre os modelos propostos e as simulações MC. Essas hipóteses limitam os valores do passo de adaptação do algoritmo e o grau de correlação do sinal de entrada, como foi mostrado nas simulações. Particularmente, o modelo do momento de primeira ordem do vetor de coeficientes do algoritmo GSD-NLMS foi o mais suscetível ao grau de correlação do sinal de entrada. Em compensação, a partir desse modelo foi possível inferir que o valor esperado do vetor de coeficientes, de dimensão  $KM$ , está sempre restrito a um hiperplano de dimensão  $N$ . Aplicando essa restrição foi possível obter uma expressão para o valor em regime permanente dos coeficientes do algoritmo, sendo que antes tais valores só podiam ser determinados através de simulação.

Da comparação entre os dois algoritmos estudados, verifica-se que o algoritmo GSD-NLMS é o mais rápido. Ambos os algoritmos têm ordem de complexidade  $O(N)$ .

Como proposta para trabalhos futuros, pode-se considerar a possibilidade de se obter modelos mais precisos, aprimorando ou fazendo menos restritivas as hipóteses aqui assumidas.

Tanto o algoritmo NLMS-GSD quanto o NSAF apresentam características similares a outros algoritmos adaptativos em sub-bandas e, portanto, a experiência adquirida neste trabalho de dissertação pode também ser utilizada para obter uma análise de outros algoritmos adaptativos pertencentes à família de filtros em sub-banda.

## Referências Bibliográficas

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4<sup>th</sup> ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [2] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 1998.
- [3] A. Gilloire and M. Vetterli, "Adaptive filtering in subbands with critical sampling: analysis, experiments, and application to acoustic echo cancellation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 8, pp. 1862-1875, Aug. 1992.
- [4] H. P. Meana, M. N. Miyatake, L. O. Balbuena, A. M. Gonzales, and G. D. Sanchez, "A subband echo cancellation system," *Int. Conf. on Communication Systems*, Singapore, vol. 2, Nov. 1994, pp. 830-834.
- [5] P. Sristi, W.-S. Lu, and A. Antoniou, "A new variable-step-size LMS algorithm and its application in subband adaptive filtering for echo cancellation," *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Sydney, Australia, vol. 2, May. 2001, pp. 721-724.
- [6] W. H. Chin and B. Farhang-Boroujeny, "Subband adaptive filtering with real-value subband signals for acoustic echo cancellation," *IEE Proceedings Vision, Image, and Signal Processing*, vol. 148, pp. 283-288, Aug. 2001.
- [7] P. L. De Leon and D. M. Etter, "Experimental results of subband acoustic echo cancellers under spherically invariant random processes," *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Atlanta, USA, vol. 2, May. 1996, pp. 961-964.
- [8] F. S. Hallack and M. R. Petraglia, "Performance comparison of adaptive algorithms applied to acoustic echo canceling," *IEEE Int. Symposium on Industrial Electronics*, Rio de Janeiro, Brasil, vol. 2, Jun. 2003, pp. 1147-1150.
- [9] M. Taherzadeh, J. Liu, G. Miller, and X. Kong, "Acoustic echo cancellation using subband technique for teleconferencing application," *Global Telecommunications Conference*, San Francisco, USA, vol. 1, Dec. 1994, pp. 243-247.
- [10] R. W. Stewart, S. Weiss, D. Garcia-Alis, and G. C. Freeland, "Subband adaptive equalization of time-varying channels," *33<sup>rd</sup> Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, USA, vol. 1, Oct. 1999, pp. 534-538.

- [11] H. H. Dam, J. Nordberg, and S. Nordholm, "Non-causal delay less subband adaptive equalizer," *IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, Orlando, USA, vol. 3, May. 2002, pp. 2649-2652.
- [12] J.-H. Yun, Y.-C. Park, and D.-H. Youn, "Subband active noise control algorithm based on a delay less subband adaptive filter architecture," *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Munich, Germany, vol. 1, Apr. 1997, pp. 391-394.
- [13] S. G. Sankaran and A. A. Beex, "Acoustic echo and noise canceller improvements for hands-free telephones," *IEEE SoutheastCon 97*, Richmond, USA, Apr. 1997, pp. 148-150.
- [14] S. J. Park, J. H. Yun, Y. C. Park, and D. H. Youn, "A delay less sub band active noise control system for wideband noise control," *IEEE Trans. Speech and Audio Processing*, vol. 9, no. 8, pp. 892-899, Nov. 2001.
- [15] S. M. Kuo and D. R. Morgan, "Active noise control: a tutorial review," *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, no. 6, pp. 943-975, Jun. 1999.
- [16] C. Smith and D. R. Campbell, "The two-dimensional LMS algorithm and its application to subband filtering," *Fifth Int. Conf. on Image Processing and its Application*, Washington , USA, Jul. 1995, pp. 722-726.
- [17] C. Smith and D. R. Campbell, "An investigation into subband adaptive filtering of digital images," *IEE 6th Int. Conf. on Image Processing and its Applications*, Dublin, Ireland, Jul. 1997, pp. 322-326.
- [18] R. Oktem, O. N. Gerek, E. Cetin, L. Oktem, and K. Egiazarian, "Adaptive filter banks for lossless image compression," *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Salt Lake City, USA, vol. 3, May. 2001, pp. 1809-1812.
- [19] S. Gezici, I. Yilmaz, O. N. Gerek, and E. Cetin, "Image denoising using adaptive subband decomposition," *IEEE Int. Conf. on Image Processing*, Thessaloniki, Greece, vol. 1, Oct. 2001, pp. 261-264.
- [20] C. Zhiyuan and Y. Guangxin, "LMS algorithm based on subband decomposition," *Int. Conf. on Communication Technology*, Porto, Portugal, vol.1, Oct. 1998 , pp. 128- 133.

- [21] J. J. Shynk, "Frequency domain and multirate adaptive filtering," *IEEE Signal Processing*, vol. 9, pp. 14-37, Jan. 1992.
- [22] A. Giolliore and M. Vetterli, "Adaptive filtering in subbands with critical sampling: Analysis and application to acoustic echo cancellation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 1862-1875, Aug. 1992.
- [23] P. L. De Leon and D. M. Etter, "Acoustic echo cancellation using subband adaptive filtering," *Subband and Wavelet Transforms*, Eds. A. N. Akansu and M. J. T. Smith, Boston, MA: Kluwer, 1996.
- [24] D. R. Morgan, "Slow asymptotic convergence of LMS acoustic echo cancellers," *IEEE Trans. Speech Audio Processing*, vol. 3, pp. 126-136, Mar. 1995.
- [25] S. K. Mitra, A. M. Mahalanobis, and T. Saramäki, "A generalized structural subband decomposition of FIR filters and its applications in efficient FIR filter design and implementation," *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, vol. 40, no. 6, pp. 363-374, Jun. 1993.
- [26] M. R. Petraglia and S. K. Mitra, "Adaptive FIR filter structure based on the generalized subband decomposition of FIR filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, vol. 40, no. 6, pp. 354-362, Jun. 1993.
- [27] K. A. Lee and W. S. Gan, "Subband adaptive filtering using constrained subband updates," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 11, no. 9, pp. 736-739, Sep. 2004.
- [28] K. A. Lee, W. S. Gan, and Y. Wen, "Improving convergence of the NLMS algorithm using a multiple-constraint optimization criterion," *XII European Signal Processing Conf.*, Vienna, Austria, Sep. 2004, pp. 1825-1828.
- [29] R. A. Alves, M. R. Petraglia, and P. S. R. Diniz, "Convergence analysis of an over sampled subband adaptive filtering structure using global error," *IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, Istanbul, Turkey, vol. 1, Jun. 2000, pp. 468-471.
- [30] S. Miyagi and H. Sakai, "Convergence analysis of the delay less subband adaptive filter based on the frequency domain expression," *IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, Istanbul, Turkey, vol. 1, Jun. 2000, pp. 368-371.

- [31] S. Ohno and H. Sakai, "Spectral analysis of subband adaptive digital filters," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, no. 1, pp. 254-257, Jan. 2000.
- [32] M. R. Petraglia and R. T. B. Vasconcellos, "Steady-state analysis of a subband adaptive algorithm with critical sampling," *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Scottsdale, USA, vol. 5, May. 2002, pp. 345-348.
- [33] S. Miyagi and H. Sakai, "Convergence analysis of alias-free subband adaptive filters based on a frequency domain technique," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, no. 1, pp.79-89, Jan. 2004.
- [34] H. Mohamad, S. Weiss, and M. Rupp, "MMSE limitations for subband adaptive equalizers," 36<sup>th</sup> *Asilomar Conf. on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, USA, vol. 2, Nov. 2002, pp. 1233-1237.
- [35] M. Bellanger, G. Bonnerot, and M. Coudreuse, "Digital filtering by polyphase network: Application to sampling rate alternation and filter banks," *IEEE Trans. on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-24, pp. 109-114, Abr. 1976
- [36] S. K. Mitra, A. Mahalanobis and T. Saramäki, "A generalized structural subband decomposition of FIR filters and its application in efficient FIR filter design and implementation," *IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 40, pp. 363-374, Jun. 1993
- [37] E. M. Lobato, O. J. Tobias e R. Seara, "Modelo analítico do algoritmo  $\epsilon$ LMS no domínio transformado para sinais de entrada Gaussianos," *XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Belém, PA, CD-ROM, artigo nº 282, Set. 2004, pp. 1-6.
- [38] C. G. Samson and U. Reddy, "Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 31, no. 5, pp. 1177-1191, Oct. 1983.
- [39] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill, 1991.
- [40] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, R. Seara, "Modelo do Algoritmo NLMS Aplicado a uma Estrutura em Sub-bandas com Decomposição Generalizada," *XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Campinas, SP, CD-ROM, Set. 2005, pp. 759-764.

- [41] J. Kolodziej, O. Tobias and R. Seara, "Stochastic Model for the Generalized Subband Decomposition Epsilon-NLMS Algorithm with Gaussian Data," *IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, Toulouse, France, May. 2006, pp. 368-371.
- [42] E. Abdel-Raheem, F. El-Guibaly, and A. Antoniou, "Efficient design of cosine-modulated filter banks," *IEEE Pacific Rim Conf. Comm., Comp., and Signal Process.*, Victoria, Canada, May. 1995, pp. 387-390.
- [43] J. Kolodziej, O. Tobias and R. Seara, "Stochastic Model for NSAF Algorithm Considering Slow Adaptation and Gaussian Data," *IEEE International Telecommunications Symposium*, Fortaleza, Brazil, Set. 2006, pp. 156-160.
- [44] N. J. Bershad, P. Celka, and J. M. Vesin, "Stochastic analysis of gradient adaptive identification of nonlinear systems with memory for Gaussian data and noisy input and output measurements," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, pp. 675-689, Mar. 1999.