Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Técnicas de Regularização para o Problema de Diferenciação Numérica

Dirlei Ruscheinsky
Orientador: Prof. Dr. Antônio Leitão

Florianópolis
Abril de 2006

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Técnicas de Regularização para o Problema de Diferenciação Numérica

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Dirlei Ruscheinsky
Florianópolis
Abril de 2006

Técnicas de Regularização para o Problema de Diferenciação Numérica

por

Dirlei Ruscheinsky

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Matemática Aplicada, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Igor Mozolevski
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Antônio Carlos Gardel Leitão (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Antônio Silva Neto (Inst. Politécnico do RJ)

Prof. Dr. Igor Mozolevski (UFSC)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger (UFSC)

Florianópolis,
Abril de 2006.

A Deus.
A minha família.

Agradecimento

Agradeço os meus pais Pio e Yone, que mesmo distantes incentivaram e proporcionaram as condições necessárias para que eu pudesse chegar até aqui.

Agradeço aos meus irmãos Dirceu, Nirse, Nelise e Neize pelos incentivos, apoio e compreensão, em especial ao Dirceu, muito obrigado pelas horas trabalhadas para poder sustentar os meus estudos.

Agradeço a todos os amigos e colegas desde o tempo do ensino médio pela amizade e carinho recebidos, pois como diria meu amigo Maicon, vocês formam uma lista quase não enumerável. Em especial, agradeço àqueles que se fizeram presentes nos melhores momentos, jogos de futebol, churrascos e nos exercícios de levantamento de copo.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina pela acolhida e principalmente aos professores Clovis, Eliezer, Igor, Joel, Mário, Nereu, Pinho e Ruy Exel.

Agradeço ao Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal do Rio Grande pelos incentivos recebidos durante a graduação.

Agradeço a todos os membros da PU, pelos momentos alegres que passamos juntos, em especial à Andreia que me auxiliou na elaboração deste trabalho.

Agradeço ao professor Antonio Leitão por todos os ensinamentos transmitidos neste período, pela paciência, dedicação e pela amizade o meu muito obrigado.

Agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro e à Elisa por solucionar sempre os entraves burocráticos.

Enfim, a todos muito obrigado, pois com certeza valeu a pena.

Resumo

Esta dissertação trata do problema inverso da diferenciação numérica. Esse problema é mal-posto no sentido de Hadamard (a solução não depende continuamente dos dados). Nesse sentido, alguma técnica de regularização deve ser usada para obter uma solução aproximada que seja ao mesmo tempo estável e convergente. Utilizamos como método de regularização a regularização de Tikhonov, com escolha *a priori* do parâmetro da forma: $\alpha = \delta^2$. Com essa escolha conseguimos obter unicidade de solução e taxas de convergência quase ótimas quando a solução exata pertencer a H^2, e em um caso mais geral, quando a solução exata pertencer a H^k. Além disso, apresenta-se um exemplo em que a solução regularizada não converge quando a função não pertencer a H^2.

Abstract

We consider the inverse problem of numerical differentiation. This is an ill-posed problem in the sense of Hadamard (the solution does not continuously depend on the data).

This fact motivates the introduction of a regularization strategy in order to obtain approximate solutions which are both stable and robust. We use Tikhonov regularization with an *a priori* parameter choice of the type $\alpha = \delta^2$. We are able to prove uniqueness of the corresponding least square functional. Under smoothness assumptions (H^2 or, more general, H^k) we also prove optimal convergence rates.

In order to verify the sharpness of these assumptions, we show an example of non-convergence of the regularized solutions for the case when the solution is not in H^2.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação, desenvolvemos o problema de diferenciação numérica, que é a determinação da derivada de uma função a partir dos valores discretos da mesma. Esse problema surge de muitos modelos matemáticos e problemas práticos como, por exemplo, identificação dos pontos de descontinuidade em processamento de imagem (ver [13]); solução do problema da equação integral de Abel [11]; problema de determinação do pico de espectroscopia química [10]; problemas inversos em equações físico-matemáticas [6, 15, 16], etc.

Há vários caminhos que podem ser usados para tratar o problema de diferenciação numérica. O caminho mais comum e simples, que na maioria das vezes é usado pelos engenheiros, é o de diferenças finitas. Uma das desvantagens deste método é que não se aplica quando a quantidade de dados é muito grande. Essa desvantagem é devida ao fato de o problema ser mal-posto no sentido de Hadamard (ver Definição 1.4). Para suprir essa dificuldade, diversos métodos têm sido propostos como, por exemplo, o método de regularização de Tikhonov [1], o método de molificação [4], entre outros.

Recentemente, Cheng e Yamamoto [8] usaram uma nova estratégia e provaram taxas de convergência para o funcional de Tikhonov com termo penalizante igual a $\|f\|$. Além disso, Hanke e Scherzer [9] provaram uma análise muito eficiente para o tratamento do problema de diferenciação, para problemas mal-postos, através da escolha *a posteriori* do parâmetro α (Princípio da Discrepância).

Motivados pelos resultados obtidos nos trabalhos acima, abordamos o problema de diferenciação numérica utilizando regularização de Tikhonov. As principais diferenças entre este trabalho e o de [9] são as seguintes:

1. No caso em que se trabalha com derivadas de baixa ordem, consideramos o problema de diferenciação numérica em uma partição irregular, diferentemente de [9].

2. Utiliza-se uma estratégia simples para escolha do parâmetro de regularização o qual é diferente do princípio da discrepância (ver Apêndice B) usado em [9].

Entretanto, provamos estimativas de erro semelhantes a [9]. A idéia da estratégia de escolha vem de resultados em [8] que é baseada na estabilidade condicional (ver [8]) de problemas inversos e mal-postos;

3. Também consideramos o caso onde a solução exata não tem regularidade suficiente. Mostramos que as propriedades da solução regularizada podem ser usadas para determinar os pontos de descontinuidade da solução exata.

Na literatura atual, é possível encontrar vários trabalhos que tratam do problema de diferenciação numérica como, por exemplo M. Hanke e O. Scherzer [9], Engl *et al.* [6], Wang, *et al.* [16] que tratam da técnica de regularização para reconstruir derivadas de ordem baixa (1 e 2) e R. S. Anderssen e M. Helgland [12], Y. B. Wang e J. Cheng [15] que trabalham a técnica da regularização para reconstruir derivadas de alta ordem.

No Capítulo 1, apresentamos a formulação do problema e enunciamos os resultados principais. No Capítulo 2, apresentamos técnicas de regularização para problemas inversos e mal-postos. São introduzidos os operadores de regularização e escolhas *a priori* e *a posteriori* do parâmetro de regularização. No Capítulo 3, demonstramos os resultados principais do trabalho, apresentados no Capítulo 1 e apresentamos alguns resultados auxiliares.

Capítulo 1

Formulação do Problema e Principais Resultados

Na matemática existem vários problemas em que um é o inverso do outro (adição e subtração, multiplicação e divisão, diferenciação e integração, entre outros). A princípio, não está bem claro qual desses é o problema direto e qual é o problema inverso. Entretanto, como pode ser visto no exemplo a seguir, o problema de diferenciação (como oposto do problema de integração) tem a propriedade de ser um problema mal posto[1]. Note que, como muitos problemas inversos envolvem algum passo de diferenciação em seus dados, o problema de diferenciação é tido como um "problema inverso" clássico.

Exemplo 1.1 *Seja $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ uma função qualquer, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$ arbitrário e defina*

$$f_n^\delta := f(x) + \delta sen\frac{nx}{\delta} \qquad x \in [0,1]. \tag{1.1}$$

Então

$$(f_n^\delta)' := f'(x) + ncos\frac{nx}{\delta} \qquad x \in [0,1]. \tag{1.2}$$

Logo, na norma uniforme temos

$$\|f - f_n^\delta\|_\infty = \delta$$

mas

$$\|f' - (f_n^\delta)'\|_\infty = n.$$

Dessa forma, se considerarmos f como a função exata e f_n^δ como a função com dados perturbados, temos que para um erro δ arbitrariamente pequeno nos dados, a

[1] Ver Definição 1.4.

derivada pode ser arbitrariamente grande (da ordem de n). Assim a derivada não depende continuamente dos dados com respeito à norma uniforme.

A seguir apresentamos o problema principal desta dissertação, envolvendo o operador de diferenciação e sua composição (o problema pode envolver várias derivadas).

1.1 Formulação do Problema de Diferenciação Numérica

Seja $y = y(x)$ uma função definida em $[0,1]$ tal que $y \in H^2(0,1)$, n um número natural e Δ uma partição do intervalo $[0,1]$, ou seja, $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = 1\}$.

Considere o seguinte problema:

Dados valores $y_i^\delta := y^\delta(x_i)$ aproximados da função $y(x_i)$ nos pontos $x = x_i$ satisfazendo

$$|y_i^\delta - y(x_i)| \leqslant \delta, \qquad i = 0, 1, 2, ..., n,$$

desejamos encontrar uma função $f_\delta(x)$ de modo que a sua derivada f'_δ aproxima-se da derivada da função $y(x)$.

O valor $\delta > 0$ introduzido acima é chamado de *nível de ruído*, e pode ser interpretado como imprecisão dos aparelhos usados na medição, incertezas do modelo, etc.

A partição, que foi citada acima, pode ter uma distribuição uniforme dos pontos ou não. Caso a distribuição não seja uniforme, definimos o tamanho de cada intervalo da partição e o maior intervalo da seguinte forma.

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2, ..., n \quad e \quad h = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $y_0^\delta = y(0)$, $y_n^\delta = y(1)$, pois do contrário definimos a função

$$Y(x) = y(x) + y_0^\delta - y(0) + (y_n^\delta - y(1) + y(0) - y_0^\delta)x$$

e com isso temos

$$Y(1) = y(1) + y_0^\delta - y(0) + y_n^\delta - y(1) + y(0) - y_0^\delta = y_n^\delta$$
$$Y(0) = y(0) + y_0^\delta - y(0) = y_0^\delta.$$

E ainda

$$Y'(x) = y'(x) + y_n^\delta - y(1) + y(0) - y_0^\delta.$$

Como a idéia original é encontrar uma função f tal que $f' = y'$, o problema passa a ser o de encontrar uma $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}' = Y'$ e como $Y' = y' + c$, logo, temos $\tilde{f}' = f' + c$, ou seja, a derivada das funções apresentadas no problema original e neste diferem apenas por uma constante.

O próximo passo é escolher o espaço no qual a função y será considerada. A seguir introduziremos os espaços L^p e os espaços de Sobolev.

Definição 1.1 *Seja f uma função e $1 \leqslant p < \infty$. Então $f \in L^p(0,1)$ se:*

$$\left(\int_0^1 f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Este é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_{L^p(0,1)} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.2 *Seja f uma função, $1 \leqslant p < \infty$ e $l \in \mathbb{N}$. Então $f \in W^{l,p}$ se:*

$$f \ \in \ L^p(0,1), \ f^{(l)} \ \in \ L^p(0,1).$$

Este é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_{W^{l,p}(0,1)} = \left(\|f\|^p_{L^p(0,1)} + \|f^{(l)}\|^p_{L^p(0,1)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aqui o expoente (l) denota a l-ésima derivada de f.

Para facilitar a notação abreviamos: $\|f\|_{W^{l,p}(0,1)} = \|f\|_{l,p}$

Essa é a definição geral de espaços de Sobolev e nesta dissertação trabalhamos com os espaços de Sobolev H^l, que correspondem aos espaços $W^{l,p}$ com $p = 2$.

Definimos ainda um outro conjunto, o qual facilitará a notação dos espaços.

Definição 1.3 *Seja $k > 1$ um número inteiro tal que $k < n$, em que n é o número de elementos da partição definida anteriormente. Então denotamos:*

$$\mathcal{H}^k = \{f | f \in H^k(0,1), f(0) = y(0), f(1) = y(1)\}.$$

Uma formulação funcional analítica para o problema de diferenciação numérica é a seguinte: seja T o operador de diferenciação e P o operador de anti-derivada [2]. Definimos agora o operador $F := P \circ T$:

$$\begin{aligned} F : Q \subseteq H^2(0,1) &\mapsto H^2(0,1). \\ y \quad &\longrightarrow \quad f \end{aligned} \tag{1.3}$$

O problema inverso de diferenciação numérica se deixa formular como $F(y) = f$.

Um exemplo desse problema é o seguinte:

Exemplo 1.2 *Seja $y = x^2$ e $\delta > 0$. Queremos encontrar uma função f tal que $f' = y'$.*

Como $y = x^2$, logo segue que $y' = 2x$. Agora, escolhemos a seqüência de funções f_n da forma: $f_n(x) = x^2 + n$. Assim, quando calculamos a distância entre f_n e f_1 na norma L^2 temos que:

$$\|f_n - f_1\| = \|x^2 + n - x^2 - 1\| = n - 1.$$

Ou seja, embora as derivadas das funções f_n sejam iguais, a distância entre essas funções pode ser arbitrariamente grande.

Logo, existem inúmeras funções que satisfazem $f' = y'$ e com isso é necessário escolher uma "melhor" solução do problema. Para isso definimos um problema de mínimos quadrados, ou seja, desejamos encontrar uma função f_δ, tal que:

$$F(f_\delta) = y \tag{1.4}$$

e

$$\|f_\delta - y_i^\delta\| = \min\{\|f - y_i^\delta\| \; ; \; F(f) = y\}. \tag{1.5}$$

Uma formulação equivalente é a seguinte: encontre f_δ tal que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(y_i^\delta - f_\delta(x_i)\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(y_i^\delta - f(x_i)\right)^2, \quad \forall \; f \; \in H^2(0,1). \tag{1.6}$$

Observe que estamos trabalhando com problemas que envolvem o operador de diferenciação, que é mal-posto no sentido de Hadamard.

[2] Dada uma função h, $P(h)$ corresponde a uma função g tal que $g' = h$.

Definição 1.4 *Segundo Hadamard, um problema matemático é bem posto se para todos os dados admissíveis:*
(i) existe uma solução para o problema (existência),
(ii) a solução é única (unicidade) e
(iii) a solução depende continuamente dos dados (estabilidade).

Se uma destas condições não é satisfeita, o problema é chamado de mal-posto. Com relação às três condições a mais difícil de contornar é a terceira. Podemos nas duas primeiras, fazendo uma escolha adequada dos espaços $D(F)$ e $R(F)$, garantir existência e unicidade da solução. Para superar a dificuldade de ter estabilidade da solução, como função dos dados, definimos como solução os mínimos dos funcionais de Tikhonov com termos penalizantes especiais. A seguir definimos estes funcionais.

Quando se tem uma partição qualquer do intervalo $[0, 1]$

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \Big(y_i^\delta - f(x_i) \Big)^2 + \alpha \|f''\|^2_{L^2(0,1)} \tag{1.7}$$

e quando se tem uma partição uniforme do intervalo $[0, 1]$

$$\Psi(f) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Big(y_i^\delta - f(x_i) \Big)^2 + \alpha \|f^{(k)}\|^2_{L^2(0,1)}. \tag{1.8}$$

O coeficiente α é chamado *parâmetro de regularização* do funcional.

Observação 1.1 *Vale ressaltar que a escolha do parâmetro α no segundo termo é muito importante, pois se for um valor "grande" a função que minimiza o funcional será facilmente encontrada, mas não estará próxima de y_i^δ. Por outro lado, se a escolha do parâmetro α for um valor "pequeno", o mínimo estará próximo de y_i^δ, mas o problema não terá estabilidade. Assim a escolha de α deverá ser ponderada entre a estabilidade e a exatidão da solução aproximada.*

Com a definição destes funcionais obtemos quatro problemas de mínimos quadrados.

Problema 1.1 *Dada uma partição qualquer Δ do intervalo $[0, 1]$, queremos encontrar uma função $f_{\delta,\alpha} \in \mathcal{H}^2$ tal que*

$$\Phi(f_{\delta,\alpha}) \leqslant \Phi(f)$$

para toda função $f \in \mathcal{H}^2$.

Problema 1.2 *De que modo podemos escolher o parâmetro de regularização α como função de δ, de modo a obter taxas de convergência da ordem de $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$* [3] *entre $f'_\delta(x)$ e $y'(x)$?*

Problema 1.3 *Dada uma partição uniforme Δ do intervalo $[0,1]$, queremos encontrar uma função $f_{\delta,\alpha} \in \mathcal{H}^k$ tal que*

$$\Psi(f_{\delta,\alpha}) \leqslant \Psi(f)$$

para toda função $f \in \mathcal{H}^k$, onde $k < n$.

Problema 1.4 *Suponha $k < n$. De que modo podemos escolher o parâmetro de regularização α como função de δ, de modo a obter taxas de convergência da ordem de $\mathcal{O}(\delta^{\frac{k-j}{k}})$ entre $f^{(j)}_{\delta,\alpha}(x)$ e $y^{(j)}(x)$ para $0 \leqslant j \leqslant k-1$?*

Observação 1.2 *A forma clássica de escolha do parâmetro de regularização α nos funcionais acima é da forma $\alpha = \delta^2$ (a priori). Em M. Hanke e O. Scherzer [9], a escolha do parâmetro de regularização é feita através do princípio da discrepância, o que acarreta em um custo computacional superior em relação à escolha anterior, embora as taxas de convergência sejam similares.*

1.2 Principais Resultados

A seguir apresentaremos os principais resultados desenvolvidos nesta dissertação. Os Teoremas 1.1 e 1.2 tratam do bom condicionamento dos funcionais (1.7) e (1.8).

Teorema 1.1 *Para qualquer $\alpha > 0$ existe uma única solução $f_{\delta,\alpha}$ do Problema 1.1.*

Teorema 1.2 *Para qualquer $\alpha > 0$ existe uma única solução $f_{\delta,\alpha}$ do Problema 1.3.*

Os Teoremas 1.3 e 1.4 fornecem taxas de convergência para as soluções de mínimos quadrados tratadas nos teoremas anteriores.

Teorema 1.3 *Suponha que $f_{\delta,\alpha}$ é a solução do Problema 1.1, então temos:*

$$\|f'_{\delta,\alpha} - y'\|_{L^2(0,1)} \leqslant \left(2h + 4\sqrt[4]{\alpha} + \frac{h}{\pi}\right)\|y''\|_{L^2(0,1)} + h\sqrt{\frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{2\delta}{\sqrt[4]{\alpha}}}. \tag{1.9}$$

[3] Dizer que uma função $f(\delta)$ converge para zero quando $\delta \to 0$ com ordem $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ significa que: $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{f(\delta)}{\sqrt{\delta}} = C$ em que C é uma constante qualquer. A escolha dessa ordem em particular é motivada por um resultado clássico em problemas inversos (veja Teorema 2.2)

Escolhendo $\alpha = \delta^2$ temos o caso particular

$$\|f'_{\delta,\alpha} - y'\|_{L^2(0,1)} \leqslant \left(2h + 4\sqrt{\delta} + \frac{h}{\pi}\right)\|y''\|_{L^2(0,1)} + h + 2\sqrt{\delta}. \tag{1.10}$$

Em [9] Hanke *et al.* é utilizada uma estratégia de escolha *a posteriori* do parâmetro α (Princípio da Discrepância), naquele trabalho foi obtida uma taxa de convergência semelhante a (1.10), a saber:

$$\|f'_{\delta,\alpha} - y'\| \leqslant \sqrt{8}\left(h\|y''\| + \sqrt{\delta}\|y''\|^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1.11}$$

Teorema 1.4 *Suponha que $f_{\delta,\alpha}$ é o minimizador do funcional Ψ e $\alpha = \delta^2$. Se $y \in H^k(0,1)$, então temos:*

$$\|f^{(j)}_{\delta,\alpha} - y^{(j)}\|_{L^2(0,1)} \leqslant K_{1j}h^{k-j} + K_{2j}\delta^{\frac{k-j}{k}} \tag{1.12}$$

para $0 \leqslant j \leqslant k-1$, onde K_{1j} e K_{2j} são constantes.

O Teorema 1.5 trata da não convergência da segunda derivada de $f_{\delta,\alpha}$ caso y não seja suficientemente regular.

Teorema 1.5 *Suponha que $f_{\delta,\alpha}$ é a solução do Problema 1.1. Tomando $\alpha = \delta^2$, se $y \in C[0,1]\backslash H^2(0,1)$, então:*

$$\|f''_{\delta,\alpha}\|_{L^2(0,1)} \quad \longrightarrow \quad \infty \qquad \textit{quando} \quad \delta, h \to 0.$$

Observação 1.3 *É possível demonstrar que para uma função $f \in L^\infty[0,1]$ a conclusão do Teorema 1.5 também é verdadeira, como demonstrado no Corolário 3.1.*

Observação 1.4 *Apesar de no Teorema 1.5 ser discutido o caso em que a solução exata satisfaz $y \in C[0,1]\backslash H^2(0,1)$, este resultado também pode ser usado para determinar os pontos de descontinuidade a partir dos valores da função em alguns pontos discretos.*

Capítulo 2

Regularização de Problemas Inversos

Este capítulo apresenta uma abordagem geral de problemas inversos, lineares e não lineares, métodos de regularização, em especial a regularização de Tikhonov. e escolha *a posteriori* do parâmetro de regularização.

2.1 Problemas Inversos e Mal-postos

Desde os anos 80, a área da matemática na qual os problemas inversos são enquadrados tem sido uma das mais estudadas dentro da Matemática Aplicada. Isto pode ser explicado devido ao grande número de aplicações em outras áreas, como por exemplo, Geofísica (prospecção de petróleo), Medicina (tomografia computadorizada ou por impedância), Engenharia, Indústria, entre outras. De acordo com Engl *et al.* [6], são entendidos como *problemas inversos* aqueles que aparecem na tentativa de determinar causas a partir de efeitos observados. Mas, quando se fala em *problemas inversos*, é necessário perguntar: " inverso do que? ". Segundo J.B. Keller [7], dois problemas são inversos um do outro se a formulação de um deles envolve toda a, ou parte da solução do outro. Entre os dois geralmente escolhemos para ser o *problema direto* aquele que é mais simples ou que foi estudado primeiro.

Problemas inversos são geralmente descritos por uma equação do tipo:

$$F(q) = y, \tag{2.1}$$

em que F é um operador definido entre espaços de Hilbert X e Y, que pode ser linear ou não. Existem problemas interessantes em que F é linear, por exemplo, quando o modelo é descrito explicitamente por uma equação integral de primeira espécie (ver [2]). Em termos de (2.1), o critério de Hadamard pode ser interpretado como: (2.1) é bem-posto se o operador F é uma bijeção com inversa contínua.

Como mencionado no Capítulo 1, em aplicações práticas não são conhecidos precisamente os dados y, mas somente uma aproximação y^δ (não necessariamente pertencente à imagem de F) com

$$\|y - y^\delta\| \leqslant \delta \tag{2.2}$$

no qual $\delta > 0$ é denominado *nível de ruído.*

Em geral, temos que o problema (2.1) é mal-posto, ou mal-condicionado, por exemplo, se o operador F é compacto (e não degenerado), não podendo assim ter inversa contínua. No caso de problemas não lineares, este mal condicionamento é definido localmente (ver [6] para detalhes). A existência e unicidade de solução para (2.1) não podem, em geral, ser garantidos no caso não linear. No caso em que a solução de (2.1) existe, isto quando as condições *i* e *ii* na Definição 1.4 são satisfeitas, a violação do terceiro ítem na definição 1.4 é de especial importância, visto que a não dependência contínua dos dados, associada ao mal condicionamento do problema, podem causar sérias dificuldades numéricas.

Para contornar essas instabilidades, é necessário fazer uso de algum método de regularização, a fim de obter uma aproximação estável e convergente para a solução do problema inverso.

2.2 Operadores de Regularização

De acordo com Engl *et al.* [6], regularização, em linhas gerais, é a aproximação de um problema mal-posto por uma família de problemas bem-postos. Uma definição mais específica é a seguinte.

Definição 2.1 *Seja $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ um operador linear limitado entre os espaços de Hilbert $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ e $\alpha_0 \in (0, +\infty]$. Para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, seja*

$$R_\alpha : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$$

um operador contínuo (não necessariamente linear). A família $\{R_\alpha\}$ é chamada família de operadores de regularização para $F^\dagger$[1] *se, para todo $y \in D(F^\dagger)$, existe uma*

[1] A nossa equação original é $F(q) = y$. Mas como F não necessariamente tem um operador inverso limitado, definimos o operador inverso generalizado a partir da equação normal $F^*F(q) = F^*(y)$. Assim a inversa generalizada é dada por $F^\dagger := (F^*F)^{-1}F^*$ se (F^*F) for inversível e por $(F^*F)^\dagger F^*$

regra de escolha do parâmetro $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$ *tal que*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup \; \{\|R_{\alpha(\delta,y^\delta)} y^\delta - F^\dagger y\| \mid \; y^\delta \in \mathcal{Y}, \; \|y^\delta - y\| \leqslant \; \delta\} = 0 \tag{2.3}$$

é satisfeito. Aqui a função

$$\alpha : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{Y} \to (0, \alpha_0) \tag{2.4}$$

é tal que

$$\lim_{\delta \to 0} \sup \; \{\alpha(\delta, y^\delta) \mid y^\delta \in \mathcal{Y}, \; \|y^\delta - y\| \leqslant \; \delta\} = 0. \tag{2.5}$$

Para um $y \in D(F^\dagger)$ *específico, o par* (R_α, α) *é chamado um método de regularização convergente (para a solução* $Fx = y$*) se (2.3) e (2.5) são satisfeitos.*

Sendo assim, um método de regularização consiste em: uma família de operadores de regularização e uma regra de escolha de parâmetros. O método é convergente no sentido que, se o parâmetro de regularização for escolhido de acordo com tal regra, então a solução regularizada converge (na norma) quando o nível de ruído tende a zero.

Também pode ser considerada a convergência da solução regularizada na topologia fraca (ver [5] para resultados sobre a não convergência dos métodos de regularização na topologia fraca).

Como pode ser observado na definição acima, não foi imposta nenhuma condição a respeito da linearidade da família $\{R_\alpha\}$, mas se os operadores $\{R_\alpha\}$ forem lineares, então o correspondente método é chamado de um método de regularização linear, e a família $\{R_\alpha\}$ de operador de regularização linear.

Além disso, é possível separar em dois tipos as regras de escolha do parâmetro, *a priori* e *a posteriori*, como definido a seguir.

Definição 2.2 *Seja* α *uma regra de escolha do parâmetro como na Definição 2.1. Se* α *não depender de* y^δ*, mas somente de* δ*, então chamamos* α *uma* regra de escolha *a priori* do parâmetro *e escrevemos* $\alpha = \alpha(\delta)$*. Do contrário, chamamos* α *uma* regra de escolha *a posteriori* do parâmetro *e escrevemos* $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$*.*

Para que o método de regularização aplicado a problemas mal postos seja convergente no sentido da Definição 2.1, é necessário que a regra de escolha do parâmetro dependa do nível de ruído δ como pode ser observado no teorema a seguir.

Teorema 2.1 *Seja* $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *um operador linear limitado e assuma que existe uma regularização* $\{R_\alpha\}$ *para* $F^\dagger$ *com a regra de escolha do parâmetro* α *dependendo*

no caso geral.

somente de y^δ (e não de δ) tal que o método de regularização (R_α, α) é convergente para todo $y \in D(F^\dagger)$. Então $F^\dagger$ é limitado.

A demonstração pode ser encontrada em [6].

A maior dificuldade do cálculo de uma solução da equação (2.1), que chamamos de q^*[2], sendo disponíveis somente dados com ruído y^δ, é que este cálculo pode produzir soluções inadequadas devido à instabilidade do problema. Nesse sentido, procuramos uma aproximação de q^*, que chamamos de q_α^δ, que possa ser calculada de maneira estável, isto é, que dependa continuamente dos dados perturbados y^δ. Por outro lado, é desejável que q_α^δ tenda para q^* se o nível de ruído tende para zero e o parâmetro de regularização $\alpha = \alpha(\delta)$ é escolhido de maneira adequada. Em [6] encontramos escolhas *a priori* ($\alpha = \alpha(\delta)$) e *a posteriori* ($\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$) do parâmetro de regularização.

Dessa forma, a escolha de α determina um balanço entre estabilidade e precisão para a solução regularizada q_α^δ. Nesse sentido, é indispensável para qualquer método de regularização um conhecimento da "qualidade" dos dados, isto é, de um limitante para o nível de ruído δ em (2.2). De outro modo, aproximações adequadas para a solução de (2.1) não podem ser encontradas (veja Engl [6]).

Em geral, a convergência de um método de regularização para resolver o problema mal posto (2.1) pode ser arbitrariamente lenta. Portanto, taxas de convergência podem somente ser dadas em subconjuntos de X, isto é, sob informações *a priori* na solução exata q^*, ou equivalentemente nos dados y. Estas informações *a priori* são formuladas em termos das chamadas *condições de fonte*. Quando é falado em taxas de convergência para um método de regularização, é tido em mente a taxa com que

$$\|q_\alpha^\delta - q^*\| \to 0, \quad \textit{quando} \;\; \delta \to 0.$$

Uma vez que tais taxas são interessantes tanto do ponto de vista teórico como do prático, é muito freqüente a busca de um enfraquecimento dessas condições de fonte.

A próxima seção trata do método de regularização de Tikhonov, certamente uma das estratégias mais conhecidas de regularização.

2.2.1 Regularização de Tikhonov

Seja $F : D(F) \subseteq X \to Y$ um operador, onde X e Y são espaços de Hilbert e $D(F) \subseteq X$ um conjunto de parâmetros admissíveis. Supomos que:

- F é contínuo;

[2] q^* é a solução da equação $F(q) = y^\delta$.

- F é fracamente fechado[3].

Para um fixo lado direito $y \in Y$, o objetivo é encontrar uma q_0-solução de norma mínima[4], denotada por $q^\dagger$, da equação (2.1). Por definição, $q^\dagger$ satisfaz

$$F(q^\dagger) = y$$

e

$$\|q^\dagger - q_0\| = \min\{\|q^* - q_0\| \ ; \ F(q^*) = y\}.$$

Aqui, q_0 é uma aproximação qualquer para a solução $q^\dagger$. Assumimos ainda que existe pelo menos uma q_0-solução de norma mínima, isto é, que z pertence à imagem de F. No caso de múltiplas soluções $q^\dagger$, q_0 pode ser usado como critério de seleção. Essa escolha geralmente depende de alguma(s) informação(ões) *a priori* nas soluções $q^\dagger$, se disponíveis. Na situação em que são conhecidos somente dados com ruído y^δ satisfazendo,

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta,$$

procuramos por uma aproximação q_α^δ, de $q^\dagger$, como o mínimo do funcional de Tikhonov,

$$J_\alpha(u) = \|F(q) - y^\delta\|^2 + \alpha\|q - q_0\|^2, \quad q \in D(F) \tag{2.6}$$

sendo $\alpha > 0$ e $q_0 \in X$ uma aproximação inicial para a solução (desconhecida) q^* de (2.1). As hipóteses estabelecidas sobre F garantem a existência de pelo menos um mínimo para o funcional de Tikhonov (2.6). Além disso, com estas hipóteses temos:

- Estabilidade para um α fixo:
  Para seqüências y_k e q_k, em que $y_k \to y^\delta$ e q_k é um mínimo de (2.6) com y^δ substituído por y_k, existe uma subseqüência convergente de q_k, e o limite de qualquer subseqüência convergente é um mínimo de (2.6).

- Convergência:
  Para $\alpha(\delta) \to 0$ com $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0$, quando $\delta \to 0$, qualquer seqüência $\{q_{\alpha_k}^{\delta_k}\}$, em que $\delta_k \to 0$, $\alpha_k = \alpha(\delta_k) \to 0$, e $\{q_{\alpha_k}^{\delta_k}\}$ é uma solução de (2.6), tem uma subseqüência convergente, e o limite de qualquer subseqüência convergente é uma q_0-solução de norma mínima.

[3] F é fracamente fechado quando para qualquer seqüência $(q_n) \subset D(F)$, $q_n \rightharpoonup u$ em X e $F(q_n) \rightharpoonup y$ em Y implica que $u \in D(F)$ e $F(q) = y$.

[4] $q^\dagger$ é uma q_0-solução de norma mínima se: $F(q^\dagger) = y$ e $\|q^\dagger - q_0\| = \min\{\|q - q_0\| \mid F(q) = y\}$.

Com isso obtemos os resultados abaixo relativos a taxa de convergência.

Teorema 2.2 *Seja $D(F)$ convexo, $y^\delta \in \mathcal{Y}$ com $\|y - y^\delta\| \leqslant \delta$ e $q^\dagger$ uma q^*-solução de norma mínima. Além disso, suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *F é Fréchet diferenciável.*

2. *Existe $\gamma \geq 0$ tal que $\|F'(q^\dagger) - F'(q)\| \leq \gamma\|q^\dagger - q\|$, para todo $q \in Q$ em uma bola de raio suficientemente grande centrada em $q^\dagger$.*

3. *Existe $w \in Y$ satisfazendo a condição de fonte:*

$$q^\dagger - q_0 = (F'(q^\dagger)^* F'(q^\dagger))^\nu w. \tag{2.7}$$

4. *$\gamma\|w\| < 1$.*

Escolhendo $\alpha \sim \delta$, obtemos as seguintes taxas:

$$\|q_\alpha^\delta - q^\dagger\| = \mathcal{O}(\sqrt{\delta}) \qquad e \qquad \|F(q_\alpha^\delta) - \tilde{y}_i\| = \mathcal{O}(\delta).$$

A demonstração pode ser encontrada em [6].

Observação 2.1 *Mesmo que a q^*-solução de norma mínima não seja única, segue das hipóteses feitas que somente uma q^*-solução de norma mínima pode satisfazer as condições 2 a 4 do Teorema.*

Observação 2.2 *Segue da demonstração do Teorema 2.2 que o raio ρ da bola suficientemente grande em torno de $q^\dagger$ tem de ser maior que $2\|q^\dagger - q^*\|$. Se $q^\dagger$ é única, então a condição $\rho > 2\|q^\dagger - q^*\|$ pode ser relaxada para qualquer $\rho > 0$.*

Observação 2.3 *Note que o fechamento fraco do operador F não é necessário para obter as taxas de convergência, mas é usado para obter existência, estabilidade e convergência da solução regularizada.*

Observação 2.4 *Se F é duas vezes Fréchet diferenciável, as condições 2 e 4 podem ser substituídas pela condição fraca*

$$2'. \qquad 2\langle w, \int_0^1 (1-t)F''[q^\dagger + t(q_\alpha^\delta - q^\dagger)](q_\alpha^\delta - q^\dagger)^2 dt\rangle \leqslant \gamma\|(q_\alpha^\delta - q^\dagger)\|^2 \tag{2.8}$$

com $\gamma < 1$.

No caso linear, a melhor taxa de convergência que é possível obter para $\|q_\alpha^\delta - q^\dagger\|$ é $\mathcal{O}(\delta^{\frac{2}{3}})$ e esta taxa é obtida mediante a condição $x^\dagger - x^* \in R(F^*F)$. É mostrado a seguir que a mesma taxa pode ser obtida no caso não linear se substituímos $R(F^*F)$ por $R(F'(x^\dagger)^*F'(x^\dagger))^\mu$ com $\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Teorema 2.3 *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, se $x^\dagger$ é um elemento do interior de $D(F)$ e $q^\dagger - q^* = (F'(q^\dagger)^*F'(q^\dagger))^\mu v$ para algum $\mu \in [1/2, 1]$. Então, escolhendo $\alpha \sim \delta^{\frac{2}{2\nu+1}}$ obtemos:*

$$\|q_\alpha^\delta - q^\dagger\| = \mathcal{O}(\delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}). \tag{2.9}$$

A demonstração pode ser encontrada em [6].

No teorema acima, o operador $F'(q^\dagger)^*$ denota o operador adjunto Hilbertiano da derivada de Fréchet de F.

Até o momento consideramos o caso em que α depende apenas do nível de ruído δ, mas como nem sempre é aconselhável confiar somente na "qualidade"do nível de ruído, foi desenvolvida uma regra de escolha do parâmetro que depende não apenas de δ, mas também dos valores da função y^δ, que é chamada de escolha *a posteriori* do parâmetro e é apresentada a seguir.

2.3 Escolha *a posteriori* do Parâmetro de Regularização

Desejamos escolher um parâmetro de regularização α tal que o erro $\|q_\alpha^\delta - q^\dagger\|$ seja o menor possível. Infelizmente, na estratégia *a priori* de seleção de parâmetros sugerida anteriormente, o parâmetro de regularização depende muito da "qualidade" da informação sobre a solução exata $q^\dagger$. Como em geral essa informação não está disponível, na prática estas estratégias são pouco usadas. Por isso foi desenvolvida uma regra de escolha do parâmetro que não levasse apenas em conta o nível de ruído δ, mas que também considerasse os valores de y^δ.

Segue da demonstração do Teorema 2.2, que o princípio da discrepância de Morozov[5], no qual $\alpha(\delta)$ é determinado como a solução de

$$\|F(q_\alpha^\delta) - y^\delta\| = \delta, \tag{2.10}$$

[5]O princípio da discrepância é um método de regularização a posteriori em que o parâmetro α é escolhido por $\alpha(\delta, \tilde{y}_i) := sup\{\alpha > 0; \|F(q_\alpha^\delta) - \tilde{y}_i\| \leqslant \tau\delta\}$. Maiores detalhes podem ser encontrados no Apêndice B.

produz a taxa $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ sob a suposição de que no teorema este $\alpha(\delta)$ existe. Entretanto, para problemas não lineares, (2.10) tem somente uma solução sob suposição muito restrita na solução regularizada (ver [3]). Uma justificativa é que, sob certas condições, o problema:

$$\|q - q^*\| \;\rightarrow\; \min, \qquad q \in \mathcal{M}^\delta := \{q \in D(F) \;|\|F(q) - y^\delta\| \leqslant \delta\} \tag{2.11}$$

tem uma solução estável q^δ e que sob as condições do Teorema 2.2 obtemos a taxa $\|q^\delta - q^\dagger\| = \mathcal{O}(\sqrt{\delta})$. Contudo, este problema é ainda complicado de resolver. Uma alternativa é considerar a formulação via multiplicadores de Lagrange na abordagem do problema de otimização (2.11), que conduz para a seguinte modificação na regularização de Tikhonov:

$$(\|F(q) - y^\delta\| - \delta)^2 + \alpha\|q - q^*\| \;\rightarrow\; \min, \qquad q \in D(F) \tag{2.12}$$

Além disso, é possível mostrar que, se a escolha do parâmetro $\alpha(\delta) = \mathcal{O}(\delta^2)$ é feita *a priori*, a taxa $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ é obtida se as condições do Teorema 2.2 forem satisfeitas. Como pode ser observado, para esta escolha de parâmetro não há necessariamente informações sobre a solução exata $q^\dagger$ e somente um problema não linear precisa ser resolvido.

Lema 2.1 *Seja $D(F)$ convexo, $y^\delta \in \mathcal{Y}$ com $\|y - y^\delta\| \leqslant \delta$ e assuma que $q^* \in D(F)$ com $F(q^*) \neq y$. Então o problema (2.11) tem uma solução q^δ com*

$$\|F(q^\delta) - y^\delta\| = \delta$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

A suposição $q^* \in D(F)$ é natural, pois q^* é uma aproximação inicial para $q^\dagger \in D(F)$ com $F(q^*) \neq y$.

Teorema 2.4 *Sejam todas as condições do Teorema 2.2 satisfeitas e assuma que $q^* \in D(F)$ com $F(q^*) \neq y$. Se q_α^δ é uma solução do problema (2.12), então para a escolha $\alpha = \alpha(\delta) = \mathcal{O}(\delta^2)$ temos*

$$\|q_\alpha^\delta - q^\dagger\| = \mathcal{O}(\sqrt{\delta}) \quad e \quad \|F(q_\alpha^\delta) - y^\delta\| = \mathcal{O}(\delta).$$

A demonstração do lema e do teorema podem ser encontrados em [6].

Percebemos que não é preciso fazer nenhuma limitação inferior no parâmetro α, como é necessário na regularização de Tikhonov normal.

Para problemas não lineares, nos quais há interesse especial nesta dissertação, num primeiro instante a desvantagem da regularização de Tikhonov é a existência de mínimos locais, isto é, não há unicidade de solução para o problema (2.6). Tal fato é acarretado pela não convexidade do funcional de Tikhonov. Em vista disso, métodos iterativos podem ser uma alternativa interessante.

Capítulo 3

Demonstração dos Resultados Principais

Neste capítulo apresentamos as demonstrações dos resultados enunciados na Seção 1.2 e alguns lemas complementares necessários para a demonstração dos mesmos.

Na Seção 3.1 tratamos os teoremas referentes à unicidade de soluções. Na Seção 3.2 apresentamos os resultados referentes a taxas de convergência, e na Seção 3.3 apresentamos os teoremas que tratam da não convergência das soluções aproximadas.

3.1 Unicidade de Solução

Primeiramente, enunciamos alguns resultados complementares necessários para a compreensão da demonstração. Estes resultados tratam de estimativas, para interpolação de funções por *splines* cúbicos naturais [1].

Lema 3.1 *Suponha que* y *é uma função suave em* $(0,1)$ *e* s *é um* spline *cúbico natural sobre a partição* $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ *tal que* $s(x_i) = y(x_i), i = 0, 1, 2, ..., n$.
Então, temos

$$\|s'' - y''\|^2_{L^2(0,1)} + \|s''\|^2_{L^2(0,1)} = \|y''\|^2_{L^2(0,1)}.$$

Demonstração: Note que:

$$\|s'' - y''\|^2_{L^2(0,1)} + \|s''\|^2_{L^2(0,1)} = 2\|s''\|^2_{L^2(0,1)} + \|y''\|^2_{L^2(0,1)} - \langle s'', y''\rangle - \langle y'', s''\rangle$$

[1]Uma função $h(x)$ é chamada de *spline* cúbico natural em $[0,1]$ se é duas vezes diferenciável em $[0,1]$ e: *(i)* $h(x)$ é um polinômio cúbico em $[x_i, x_{i+1}]$; *(ii)* $h''(0) = h''(1) = 0$. Maiores detalhes no Apêndice A.

$$
\begin{aligned}
&= \|y''\|^2_{L^2(0,1)} + \langle s'', s''-y''\rangle + \langle s''-y'', s''\rangle \\
&= \|y''\|^2_{L^2(0,1)} + 2\langle s'', s''-y''\rangle.
\end{aligned}
$$

Pela definicão de splines *cúbicos* temos que $s''(0) = s''(1) = 0$ e assim concluímos que

$$
\begin{aligned}
\langle s''-y'', s''\rangle &= \int_0^1 (s''-y'')s''dx \\
&= \Big[(s'-y').s''\Big]_0^1 - \int_0^1 (s'-y').s'''dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (s'-y').s'''dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n} s'''(x_i-) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (s'(x)-y'(x))dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} s'''(x_i-)\Big[s(x)-y(x)\Big]_{x_{i-1}}^{x_i} = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|s''-y''\|^2_{L^2(0,1)} + \|s''\|^2_{L^2(0,1)} = \|y''\|^2_{L^2(0,1)}.
$$

□

Lema 3.2 *Suponha que y é uma função suave em $(0,1)$ e s um* spline *cúbico natural sobre Δ tal que $s(x_i) = y(x_i)$ e $s'(x_i) = y'(x_i)$, $i = 0,1,2,...,n$. Então temos*

$$
\|s'-y'\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{h}{\pi}\|y''\|_{L^2(0,1)}.
$$

Demonstração: Sem perda de generalidade consideramos apenas o intervalo h_1. Definimos uma função auxiliar $g(x) := y(x) - s(x)$. A função g é representada por uma série de Fourier de senos, assim temos:

$$
g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 sen \frac{2n\pi x}{h_1}.
$$

Por um cálculo direto, segue que:

$$
\int_0^{x_1} (g')^2 dx = \frac{h_1}{2} \sum \left(\frac{n\pi x}{h_1}\right)^2 (a_n^1)^2,
$$

$$\int_0^{x_1} (g'')^2 dx = \frac{h_1}{2} \sum \left(\frac{n\pi x}{h_1} \right)^4 (a_n^1)^2.$$

Como $n \geqslant 1$,

$$\left(\frac{n\pi}{h_1} \right)^2 (a_n^1)^2 \;\leqslant\; \frac{h_1^2}{\pi^2} \left(\frac{n\pi}{h_1} \right)^4 (a_n^1)^2.$$

Portanto, somando em n,

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} (g')^2 dx &\leqslant \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^{x_1} (g'')^2 dx = \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^{x_1} (y'' - s'')^2 dx \\ &= \frac{h^2}{\pi^2} \left(\int_0^{x_1} (y'')^2 dx + 2 \underbrace{\int_0^{x_1} (s'' - y'') s'' dx}_{I} - \int_0^{x_1} (s'')^2 dx \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Logo, integrando por partes em I concluímos que:

$$I \;=\; (s' - y') s'' \Big|_0^{x_1} - \int_0^{x_1} (s' - y') s''' dx = s''' \int_0^{x_1} s' - y' dx = 0.$$

Desta forma temos,

$$\int_0^{x_1} (y' - s')^2 dx \leqslant \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^{x_1} (y'')^2 dx - \int_0^{x_1} (s'')^2 dx \leqslant \int_0^{x_1} (y'')^2 dx.$$

Somando sobre todos os intervalos h_i, segue que:

$$\int_0^1 (y' - s')^2 dx \leqslant \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^1 (y'')^2 dx.$$

$\square$

Lema 3.3 *Seja $g \in H^2(0,1)$ e χ a função constante por partes χ definida como:*

$$\chi|_{[x_{i-1}, x_i]} = \chi_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx.$$

Então, temos

$$\|g - \chi\|_{L^2(0,1)} \leqslant h \|g'\|_{L^2(0,1)}.$$

Demonstração: Percebemos que pelo Teorema do valor médio para integrais existe ξ_i tal que $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ e para $t \in (x_i, x_{i+1})$, segue que:

$$|g(t) - \chi(t)| \;=\; \left| g(t) - \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx \right| dt = |g(t) - g(\xi_i)|$$

$$\leqslant \int_{\xi_i}^{t} |g'(r)|dr \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(r)|dr. \tag{3.2}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em (3.2), concluímos que:

$$|g(t) - \chi(t)| \leqslant h_i^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(x)|^2 dx \right)^2, \qquad t \in (x_{i-1}, x_i).$$

Com isso, temos que:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(t) - \chi(t)|^2 dx \leqslant h \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(x)|^2 dx$$

onde $h = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i$.

Somando sobre i segue que:

$$\|g - \chi\|_{L^2(0,1)} \leqslant h \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |g'(x)|^2 dx \right) \right]^{\frac{1}{2}} = h\|g'\|_{L^2(0,1)}$$

$\square$

A seguir apresentamos a demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2 que tratam do bom condicionamento dos funcionais (1.7) e (1.8).

Demonstração do Teorema 1.1

A demonstração é feita em dois passos: existência e unicidade de solução.

Passo 1: Existência de solução.

Inicialmente construímos uma função $f_{\delta,\alpha} \in \mathcal{H}^2$ e mostramos que esta satisfaz

$$\Phi(f_{\delta,\alpha}) \leqslant \Phi(f)$$

para toda $f \in \mathcal{H}^2$.

As condições impostas sobre f são as seguintes:

1. $f_{\delta,\alpha}$ é um spline cúbico natural em Δ que é duas vezes diferenciável, isto é:

$$\begin{aligned} f_{\delta,\alpha}(x_i^+) &= f_{\delta,\alpha}(x_i^-), \qquad & f'_{\delta,\alpha}(x_i^+) &= f'_{\delta,\alpha}(x_i^-), \\ f''_{\delta,\alpha}(x_i^+) &= f''_{\delta,\alpha}(x_i^-), \qquad & i &= 1, 2, ..., n-1 \end{aligned}$$

na qual $f_{\delta,\alpha}(x_i^+) = \lim\limits_{x \to x_i+} f(x)$ e $f_{\delta,\alpha}(x_i^-) = \lim\limits_{x \to x_i-} f(x)$.

2. $f''_{\delta,\alpha}(0) = f''_{\delta,\alpha}(1) = 0$.

3. Para $x_i,\ i = 1, 2, ..., n-1$, a terceira derivada da função $f_{\delta,\alpha}$ satisfaz a seguinte condição:

$$f'''_{\delta,\alpha}(x_i^+) - f'''_{\delta,\alpha}(x_i^-) = \frac{1}{\alpha}\frac{h_i + h_{i+1}}{2}(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)), \qquad i = 1, 2, ..., n-1 \quad (3.3)$$

Pela definição de *spline* cúbico temos que $f'''_{\delta,\alpha}$ é uma função constante por partes. Usando a integração por partes, podemos provar o lema a seguir.

Lema 3.4 *Suponha que $g \in H^2(0,1)$, $g(0) = g(1) = 0$ e $f_{\delta,\alpha}$ satisfazendo as condições impostas acima. Então temos:*

$$\int_0^1 g'' f''_{\delta,\alpha} dx = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i + h_{i+1}}{2} g(x_i)\left(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)\right).$$

De fato pela condição 2 acima e integrando por partes temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g''(x) f''_{\delta,\alpha}(x) dx &= g'(x) f''_{\delta,\alpha}(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 g'(x) f'''_{\delta,\alpha}(x) dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x) f'''_{\delta,\alpha}(x) dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g''(x) f''_{\delta,\alpha}(x) dx &= -\sum_{i=1}^{n} f'''(x_i^-)\int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x) dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n} f'''(x_i^-)\left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\left(f(x_i^-) - f(x_{i+1}^-)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\left(f'''(x_i^+) - f'''(x_i^-)\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i + h_{i+1}}{2} g(x_i)\left(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)
\end{aligned}$$

□

Portanto, usando a definição do funcional (1.7) temos:

$$\begin{aligned}\Phi(f)-\Phi(f_{\delta,\alpha}) &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i+h_{i+1}}{2}\Big(\underbrace{\big(y_i^\delta-f(x_i)\big)^2-\big(y_i^\delta-f_{\delta,\alpha}(x_i)\big)^2}_{I_1}\Big)\\ &\quad+\underbrace{\alpha(\|f''\|^2_{L^2(0,1)}-\|f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)})}_{I_2},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= (y_i^\delta)^2-2y_i^\delta f(x_i)+f^2(x_i)-(y_i^\delta)^2+2y_i^\delta f_{\delta,\alpha}(x_i)-f^2_{\delta,\alpha}(x_i)\\ &= -2y_i^\delta\left(f(x_i)-f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)+\left(f(x_i)-f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)\left(f(x_i)+f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)\\ &= \left(f(x_i)-f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)\left(f(x_i)+f_{\delta,\alpha}(x_i)-2y_i^\delta\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \alpha\Big(\|f''\|^2_{L^2(0,1)}+\|f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)}-2\langle f'',f''_{\delta,\alpha}\rangle-2\|f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)}+2\langle f'',f''_{\delta,\alpha}\rangle\Big)\\ &= \alpha\Big(\|f''-f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)}-2\langle f''_{\delta,\alpha},f''_{\delta,\alpha}\rangle+2\langle f'',f''_{\delta,\alpha}\rangle\Big)\\ &= \alpha\Big(\|f''-f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)}+2\langle f''-f''_{\delta,\alpha},f''_{\delta,\alpha}\rangle\Big)\\ &= \alpha\left(\|f''-f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)}+2\int_0^1(f''-f''_{\delta,\alpha})f''_{\delta,\alpha}dx\right).\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.4 obtemos:

$$2\alpha\int_0^1(f''-f''_{\delta,\alpha})f''_{\delta,\alpha}dx=2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i+h_{i+1}}{2}\left(f(x_i)-f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)\left(y_i^\delta-f_{\delta,\alpha}(x_i)\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Phi(f)-\Phi(f_{\delta,\alpha}) &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i+h_{i+1}}{2}\left(f(x_i)-f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)\left(f(x_i)+f_{\delta,\alpha}(x_i)-2y_i^\delta\right)\\ &\quad+2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i+h_{i+1}}{2}\left(f(x_i)-f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)\left(y_i^\delta-f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)\\ &\quad+\alpha\|f''-f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)}\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i+h_{i+1}}{2}\left(f(x_i)-f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)^2+\alpha\|f''-f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)}\geqslant 0. \quad (3.4)\end{aligned}$$

Assim provamos que a função $f_{\delta,\alpha}$ minimiza o funcional Φ em $\mathcal{H}^2$.

Passo 2: Unicidade de solução.

Suponha que existe uma outra função $f \in \mathcal{H}^2$ tal que $\Phi(f) = \Phi(f_{\delta,\alpha})$. Então, temos:

$$\|f'' - f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)} = 0, \qquad f(x_i) = f_{\delta,\alpha}(x_i), \qquad i = 1, 2, ..., n-1.$$

Logo, $f'' = f''_{\delta,\alpha}$, isto é $f - f_{\delta,\alpha} = ax + b$.

Como $f(0) = f_{\delta,\alpha}(0)$ implica que $b = 0$ e como $f(1) = f_{\delta,\alpha}(1)$ concluímos que $a = 0$, e assim temos que $f = f_{\delta,\alpha}$.

□

Demonstração do Teorema 1.2

A demonstração deste teorema novamente é feita em dois passos: existência e unicidade de solução.

Passo 1: Existência de solução.

Primeiramente assumimos a existência de um minimizador $f_{\delta,\alpha} \in \mathcal{H}^k$.

Definimos uma função auxiliar $F(\lambda) = \Psi(f_{\delta,\alpha} + \lambda g)$ onde $g(x) \in H^k_0(0,1)$. Como $f_{\delta,\alpha}$ é o minimizador do funcional $\Psi(f)$, temos $F'(0) = 0$. Note que:

$$\begin{aligned}
\Psi(f_{\delta,\alpha} + \lambda g) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i) - \lambda g(x_i)\right)^2 + \alpha\|f^{(k)}_{\delta,\alpha} + \lambda g^{(k)}\|^2_{L^2(0,1)} \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)g(x_i)\right) \\
&\quad + \frac{1}{n-1}\left(\lambda^2\sum_{i=1}^{n-1} g^2(x_i)\right) \\
&\quad + \alpha\left(\|f^{(k)}_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)} + \lambda^2\|g^{(k)}\|^2_{L^2(0,1)} + 2\lambda\int_0^1 f^{(k)}_{\delta,\alpha} g^{(k)} dx\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
F'(\lambda) &= \frac{-2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)g(x_i) + \frac{2\lambda}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} g^2(x_i) \\
&\quad + \alpha\left(2\lambda\|g^{(k)}\|^2_{L^2(0,1)} + 2\int_0^1 f^{(k)}_{\delta,\alpha} g^{(k)} dx\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F'(0) &= \frac{-2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)g(x_i) + 2\alpha\int_0^1 f_{\delta,\alpha}^{(k)} g^{(k)} dx \\
&= \frac{-2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)g(x_i) \\
&\quad +2\alpha\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i f_{\delta,\alpha}^{(k+i)} g^{(k-1-i)}\Big|_0^1 + (-1)^k\int_0^1 f_{\delta,\alpha}^{(2k)} g dx\right) \\
&= \frac{-2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1 \delta(x-x_i)\left(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x)\right)g(x)dx \\
&\quad +2\alpha(-1)^k\int_0^1 f_{\delta,\alpha}^{(2k)} g dx \\
&\quad +2\alpha\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i f_{\delta,\alpha}^{(k+i)}(1) g^{(k-1-i)}(1) - f_{\delta,\alpha}^{(k+i)}(0) g^{(k-1-i)}(0).
\end{aligned}$$

Como $g \in H_0^k(0,1)$ é uma função qualquer, podemos supor que $g \in \mathcal{D}(0,1)$ [2] e assim temos que:

$$2\alpha\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i f_{\delta,\alpha}^{(k+i)}(1) g^{(k-1-i)}(1) - f_{\delta,\alpha}^{(k+i)}(0) g^{(k-1-i)}(0) = 0. \tag{3.6}$$

Logo,

$$F'(0) = 2\int_0^1 g(x)\left(-\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\delta(x-x_i)(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x)) + \alpha(-1)^k f^{(2k)}\right)dx = 0$$

em que $\delta(x)$ é a distribuição de Dirac.

Como $\mathcal{D}(0,1)$ é denso em $H_0^k(0,1)$ concluímos que a equação (3.6) é satisfeita. Portanto, segue que $f_{\delta,\alpha}^{k+i}$ satisfaz as seguintes condições de fronteira:

$$f_{\delta,\alpha}^{(k+i)}(1) = 0 \qquad i = 0,1,2,...,k-2 \tag{3.7}$$

e

$$f_{\delta,\alpha}^{(k+i)}(0) = 0 \qquad i = 0,1,2,...,k-2 \tag{3.8}$$

pois para $k=2$ temos $f''_{\delta,\alpha}(1) = f''_{\delta,\alpha}(0) = 0$, para $k=3$ temos $f_{\delta,\alpha}^{(3)}(1) = f_{\delta,\alpha}^{(3)}(0) = 0$ e assim sucessivamente.

[2] Uma função $f \in \mathcal{D}(0,1)$ se for $C^\infty(0,1)$ e tiver suporte compacto.

Com isso, segue que:

$$-\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\delta(x-x_i)(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x)) + \alpha(-1)^k f^{(2k)} = 0. \tag{3.9}$$

Isto é, quando $x \neq x_i$, $f_{\delta,\alpha}$ satisfaz:

$$f_{\delta,\alpha}^{(2k)} = 0 \tag{3.10}$$

e, quando $x = x_i$, $f_{\delta,\alpha}$ satisfaz:

$$(-1)^k f^{(2k)} = \frac{1}{\alpha(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\delta(0)(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x)). \tag{3.11}$$

Assim concluímos que $f_{\delta,\alpha}^{(2k)}$ é uma distribuição.

Para qualquer função $g(x) \in H_0^k(0,1)$ que satisfaz:

$$g(x)\begin{cases} \neq 0, & x \in (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon), \\ = 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.12}$$

segue que:

$$F'(0) = -\frac{1}{n-1}\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon}\delta(x-x_i)(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x))g(x)dx + \alpha(-1)^k\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f_{\delta,\alpha}^{(2k)}(x)g(x)dx = 0.$$

Portanto,

$$\frac{-1}{n-1}(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i))g(x_i) + \alpha(-1)^k(f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_i+\varepsilon) - f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_i-\varepsilon))g(x) =$$
$$\frac{-1}{n-1}(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i))g(x_i) + \alpha(-1)^k(f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_i^+) - f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_i^-))g(x) = 0$$

para toda $g \in H_0^k(0,1)$ e que satisfaz (3.12). Com isso temos:

$$\frac{1}{n-1}(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)) = \alpha(-1)^k(f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_i+) - f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_i-)) \tag{3.13}$$

para $i = 1, 2, ..., n-1$.

A solução de (3.10) é dada por:

$$f_{\delta,\alpha}(x) = c_1 + c_2x + ... + c_{2k}x^{2k-1}, \qquad x \in (x_i, x_{i+1}), \qquad i = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{3.14}$$

onde os $2kn$ parâmetros são determinados pela solução das seguintes $2kn$ equações lineares.

$$
\begin{aligned}
&f_{\delta,\alpha}^{(j)}(x_i^+) - f_{\delta,\alpha}^{(j)}(x_i^-) = 0 \quad j = 0,1,...,2k-2, \quad i = 1,2,...,n-1,\\
&f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_i^+) - f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_i^-) = \frac{y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i)}{\alpha(-1)^k(n-1)}, \quad i = 1,2,...,n-1,\\
&f_{\delta,\alpha}^{(k+j)}(1) = f_{\delta,\alpha}^{(k+j)}(0) = 0 \quad j = 0,1,..,k-2,\\
&f_{\delta,\alpha}(0) = y(0), \quad f_{\delta,\alpha}(1) = y(1).
\end{aligned}
$$

Para provar que o sistema de equações é unicamente solúvel, basta provar que as equações homogêneas têm somente a solução trivial.

Se for escolhido $y_i^\delta = 0,\ i = 0,1,...,n$, podemos pelo mesmo passo usado anteriormente obter as equações homogêneas.

Da definição do funcional Ψ sabemos que $f_{\delta,\alpha} = 0$ é a única solução que minimiza o funcional Ψ para o caso homogêneo. Portanto, existe uma única solução para o sistema de equações acima.

Passo 2: Unicidade de solução.

A função $f_{\delta,\alpha}$ é o único minimizador do funcional Ψ.

Para qualquer função $f \in \mathcal{H}^k$ denotamos $g(x) = f(x) - f_{\delta,\alpha}(x)$. É fácil ver que $g(0) = g(1) = 0$ e

$$
\begin{aligned}
\Psi(f) - \Psi(f_{\delta,\alpha}) \;=\; & \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(2y_i^\delta - f(x_i) - f_{\delta,\alpha}(x_i)\right)\left(f_{\delta,\alpha}(x_i) - f(x_i)\right)\\
&+\alpha(\|f^{(k)}\|_{L^2(0,1)}^2 - \|f_{\delta,\alpha}^{(k)}\|_{L^2(0,1)}^2).
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Portanto, podemos estimar o segundo termo da igualdade acima por:

$$
\alpha(\|f^{(k)}\|_{L^2(0,1)}^2 - \|f_{\delta,\alpha}^{(k)}\|_{L^2(0,1)}^2) = \alpha\|f^{(k)} - f_{\delta,\alpha}^{(k)}\|_{L^2(0,1)}^2 + \underbrace{2\alpha\int_0^1 \left(f^{(k)} - f_{\delta,\alpha}^{(k)}\right) f_{\delta,\alpha}^{(k)} dx}_{I_3} \tag{3.16}
$$

Integrando por partes $k-1$ vezes em I_3, considerando que $f_{\delta,\alpha}^{(k+j)}(1) = f_{\delta,\alpha}^{(k+j)}(0) = 0,\ j = 0,1,..,k-2$, e usando (3.13), segue que:

$$
I_3 \;=\; 2\alpha\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j f_{\delta,\alpha}^{(k+j)} g^{(k-1-j)}\Big|_0^1 + 2(-1)^k\int_0^1 f_{\delta,\alpha}^{(2k)} g dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\alpha \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^k \left(f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_j+) - f_{\delta,\alpha}^{(2k-1)}(x_j-) \right) g(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2}{(n-1)} \left(y_j^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_j) \right) \left(f(x_j) - f_{\delta,\alpha}(x_j) \right). \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Logo, usando (3.15), (3.16) e (3.17) segue que:

$$
\begin{aligned}
\Psi(f) - \Psi(f_{\delta,\alpha}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left(2y_i^\delta - f(x_i) - f_{\delta,\alpha}(x_i) \right) \left(f_{\delta,\alpha}(x_i) - f(x_i) \right) \\
&\quad + 2\alpha \| g^{(k)} \|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{2}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(y_j^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_j) \right) \left(f(x_j) - f_{\delta,\alpha}(x_j) \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(f_{\delta,\alpha}(x_j) - f(x_j) \right)^2 + 2\alpha \| g^{(k)} \|_{L^2(0,1)}^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Com isso mostramos que a função $f_{\delta,\alpha}$ é um minimizador do funcional $\Psi(f)$.

Se existir uma outra função f_1 tal que $\Psi(f_1) = \Psi(f_{\delta,\alpha})$, então do passo 1 temos que $f_1^{(k)} = f_{\delta,\alpha}^{(k)}$ e, assim, $f_1 - f_{\delta,\alpha}$ é um polinômio de grau $k-1$. Como $f_1(x_j) - f_{\delta,\alpha}(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n-1$ e $n > k$, o polinômio $f_1 - f_{\delta,\alpha}$ tem mais do que $k-1$ raízes o que é uma contradição. Assim temos que $f_1 = f_{\delta,\alpha}$. Portanto, o minimizador é único.

□

3.2 Taxas de Convergência

A seguir apresentamos a demonstração dos teoremas que tratam da convergência das soluções.

Demonstração do Teorema 1.3

Suponha que s é um *spline* cúbico natural que interpola os dados exatos $y(x_i),\ i = 0, ..., n$.

Definimos uma função auxiliar $e(x) := f_{\delta,\alpha}(x) - s(x)$. É fácil ver que $e(1) = e(0) = 0$, pois $f(0) = y(0) = s(0)$ e $f(1) = y(1) = s(1)$.

Considere a função constante por partes $\chi \in L^2(0,1)$:

$$
\chi(x) = \frac{e(x_i) - e(x_{i-1})}{h_i} = \chi_i \qquad x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1, 2, ..., n. \qquad (3.18)
$$

Por (3.18) temos:

$$\begin{aligned}
\|e''\|^2_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 (e'(x))^2 dx \\
&= \int_0^1 \left((e')^2 - e'\chi + e'\chi\right) dx \\
&= \int_0^1 e'(e'-\chi)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e'\chi_i dx \\
&= \int_0^1 e'(e'-\chi)dx + \sum_{i=1}^{n} \chi_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} e'(x)dx \\
&= \int_0^1 e'(e'-\chi)dx + \sum_{i=1}^{n} \chi_i e(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \\
&= \int_0^1 e'(e'-\chi)dx + \sum_{i=1}^{n} \chi_i (e(x_i) - e(x_{i-1})) \\
&= \underbrace{\int_0^1 e'(e'-\chi)dx}_{I_4} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} e(x_i)(\chi_i - \chi_{i+1})}_{I_5} \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Para a expressão I_4 obtemos:

$$I_4 = \int_0^1 e'(e'-\chi)dx = \langle e', e'-\chi\rangle \leqslant \|e'\|_{L^2(0,1)}\|e'-\chi\|_{L^2(0,1)}.$$

Pelo Lema 3.3 segue que $\|e'-\chi\|_{L^2(0,1)} \leqslant h\|e''\|_{L^2(0,1)}$ e, portanto,

$$I_4 \leqslant \|e'\|_{L^2(0,1)}\|e'-\chi\|_{L^2(0,1)} \leqslant h\|e'\|_{L^2(0,1)}\|e''\|_{L^2(0,1)}. \qquad (3.20)$$

Da definição do funcional (1.7) e como $f_{\delta,\alpha}$ é o minimizador do mesmo, segue que:

$$\begin{aligned}
\alpha\|f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)} &\leqslant \Phi(f_{\delta,\alpha}) \leqslant \Phi(y) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(y_i^\delta - y(x_i)\right)^2 + \alpha\|y''\|^2_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2}\delta^2 + \alpha\|y''\|^2_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant \delta^2 + \alpha\|y''\|^2_{L^2(0,1)}, \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

pois $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i+h_{i+1}}{2} < 1$.

Portanto,

$$\|f''_{\delta,\alpha}\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{\delta^2}{\alpha} + \|y''\|^2_{L^2(0,1)}.$$

Logo, pelo Lema 3.1,

$$\begin{aligned}
\|e''\|_{L^2(0,1)} &= \|f''_{\delta,\alpha} - s''\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|f''_{\delta,\alpha}\|_{L^2(0,1)} + \|s''\|_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant \left(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|y''\|^2_{L^2(0,1)}\right)^{\frac{1}{2}} + \|s''\|_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant \left(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|y''\|^2_{L^2(0,1)}\right)^{\frac{1}{2}} + \|y''\|_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{\alpha}} + 2\|y''\|_{L^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

Com isso concluímos que:

$$I_4 \leqslant h\|e''\|_{L^2(0,1)} \left(\frac{\delta^2}{\alpha} + \|y''\|^2_{L^2(0,1)}\right).$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para I_5, segue que:

$$\begin{aligned}
I_5^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} e(x_i)(\chi_i - \chi_{i+1})\right)^2 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e(x_i) \left(\frac{2}{h_i + h_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} (\chi_i - \chi_{i+1})\right]^2 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2}\right) e^2(x_i)\right] \left[\left(\frac{2}{h_i + h_{i+1}}\right) (\chi_i - \chi_{i+1})^2\right]^2. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Da definição de χ, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\chi_i - \chi_{i-1} &= \frac{1}{h_i}\left(e(x_i) - e(x_{i-1})\right) - \frac{1}{h_{i+1}}\left(e(x_{i+1}) - e(x_i)\right) \\
&= \frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} e'(x)dx - \frac{1}{h_{i+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} e'(x)dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $x \to h_i\tau + x_{i-1}$ temos:

$$\begin{aligned}
\chi_i - \chi_{i-1} &= \frac{1}{h_i}\int_0^1 e'(h_i\tau + x_{i-1})h_i d\tau - \frac{1}{h_{i+1}}\int_0^1 e(h_{i+1}\tau + x_i)h_{i+1} d\tau \\
&= \int_0^1 e'(h_i\tau + x_{i-1})d\tau - \int_0^1 e(h_{i+1}\tau + x_i)d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 e'(h_i\tau + x_{i-1})d\tau - e(h_{i+1}\tau + x_i)d\tau \\
&= \int_0^1 \int_{h_{i+1}\tau+x_i}^{h_i\tau+x_{i-1}} e''(x)dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Assim, segue que:

$$
\begin{aligned}
|\chi_i - \chi_{i-1}| &= \left| \int_0^1 \int_{h_{i+1}\tau+x_i}^{h_i\tau+x_{i-1}} e''(x)dxd\tau \right| \leqslant \int_0^1 \int_{h_i\tau+x_{i-1}}^{h_{i+1}\tau+x_i} |e''(x)|dxd\tau \\
&= \int_{h_i\tau+x_{i-1}}^{h_{i+1}\tau+x_i} 1.|e''(x)|dx \ \leqslant \int_{x_{i_1}}^{x_{i+1}} 1.|e''(x)|dx \\
&\leqslant \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |e''(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant (x_{i+1} - x_{i-1})^{\frac{1}{2}} \|e''(x)\|_{L^2_{(x_{i-1},x_{i+1})}} \\
&= (h_i + h_{i+1})^{\frac{1}{2}} \|e''(x)\|_{L^2_{(x_{i-1},x_{i+1})}}.
\end{aligned}
$$

Como $f_{\delta,\alpha}$ é o minimizador de Φ, temos:

$$
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(f_{\delta,\alpha}(x_i) - y_i^\delta \right)^2 \leqslant \Phi(f_{\delta,\alpha}) \leqslant \Phi(y) \leqslant \delta^2 + \alpha \|y''\|^2_{L^2_{(0,1)}},
$$

pois, pelas condições impostas em y_i^δ, verificamos que:

$$
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(y(x_i) - y_i^\delta \right)^2 \ \leqslant \ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{+1}}{2} \delta^2 \ \leqslant \ \delta^2.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} e^2(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(f_{\delta,\alpha}(x_i) - y(x_i) \right)^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} (h_i + h_{i+1}) \left(\left(f_{\delta,\alpha}(x_i) - y_i^\delta \right)^2 + \left(y_i^\delta - y(x_i) \right)^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (h_i + h_{i+1}) \left(f_{\delta,\alpha}(x_i) - y_i^\delta \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (h_i + h_{i+1}) \left(y_i^\delta - y(x_i) \right)^2 \\
&\leqslant 2\Phi(y) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(h_i + h_{i+1})}{2} \left(y_i^\delta - y(x_i) \right)^2 \\
&\leqslant 2 \left(\delta^2 + \alpha \|y''\|^2_{L^2(0,1)} \right) + 2\delta^2
\end{aligned}
$$

$$= \quad 2\delta^2\left(2+\frac{\alpha}{\delta^2}\|y''\|^2_{L^2(0,1)}\right).$$

Portanto, da igualdade (3.22) concluímos que:

$$\begin{aligned}
I_5^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(h_i+h_{i+1})}{2}e^2(x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{(h_i+h_{i+1})}(h_i+h_{i+1})^2\|e''(x)\|^2_{L^2_{(x_{i-1},x_{i+1})}}\right)\\
&\leqslant 2\delta^2\Big(2+\frac{\alpha}{\delta^2}\|y''\|^2_{L^2(0,1)}\Big)2\|e''(x)\|^2_{L^2_{(x_{i-1},x_{i+1})}}\\
&\leqslant 4\delta^2\Big(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{\alpha}{\delta^2}}\|y''\|^2_{L^2(0,1)}\Big)^2\Big(\sqrt{\frac{\delta^2}{\alpha}}+2\|y''\|^2_{L^2(0,1)}\Big)^2\\
&\leqslant 4\delta^2\Big(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{\alpha}{\delta^2}}\|y''\|^2_{L^2(0,1)}\Big)\Big(\sqrt{\frac{\delta^2}{\alpha}}+2\|y''\|^2_{L^2(0,1)}\Big)^2\\
&= 4\delta^2\Big(\sqrt{2}\sqrt{\frac{\delta^2}{\alpha}}+2\sqrt{2}\|y''\|_{L^2(0,1)}+\|y''\|_{L^2(0,1)}+2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta^2}}\|y''\|^2_{L^2(0,1)}\Big)^2\\
&= 4\delta^2\Bigg(\Big(\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\frac{\delta^2}{\alpha}}+2\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\delta^2}}\|y''\|_{L^2(0,1)}\Big)^2\\
&\quad -2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta^2}}\|y''\|^2_{L^2(0,1)}+(1+2\sqrt{2}-4\sqrt[4]{2})\|y''\|_{L^2(0,1)}\Bigg)^2\\
&\leqslant 4\delta^2\Big(\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\frac{\delta^2}{\alpha}}+2\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\delta^2}}\|y''\|_{L^2(0,1)}\Big)^4, \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

pois $4\sqrt[4]{2} > 4 > 2\sqrt{2}+1$.

De (3.19) temos que $\|e'\|^2_{L^2(0,1)} = I_4 + I_5$ e assim concluímos que:

$$\begin{aligned}
\|e'\|_{L^2(0,1)} &= \frac{I_4+I_5}{\|e'\|_{L^2(0,1)}} = \frac{I_4}{\|e'\|_{L^2(0,1)}} + \frac{I_5}{(I_4+I_5)^{\frac{1}{2}}}\\
&\leqslant \frac{I_4}{\|e'\|_{L^2(0,1)}} + \frac{I_5}{(I_5)^{\frac{1}{2}}} = \frac{I_4}{\|e'\|_{L^2(0,1)}} + (I_5)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Agora, da desigualdade acima e de (3.20) e (3.23) segue que:

$$\begin{aligned}
\|e'\|_{L^2(0,1)} &\leqslant 2h\|y''\|_{L^2(0,1)} + h\sqrt{\frac{\delta^2}{\alpha}} + 2\sqrt{\alpha}\sqrt[4]{\frac{\delta^2}{\alpha}} + 4\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\delta^2}}\sqrt{\delta}\|y''\|_{L^2(0,1)}\\
&= \left(2h+4\sqrt[4]{\alpha}\right)\|y''\|_{L^2(0,1)} + h\sqrt{\frac{\delta^2}{\alpha}} + \frac{2\delta}{\sqrt[4]{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e o Lema 3.2, segue que:

$$\|f'_{\delta,\alpha} - y'\|_{L^2(0,1)} = \|f'_{\delta,\alpha} - s' + s' - y'\|_{L^2(0,1)}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \|e'\|_{L^2(0,1)} + \|s' - y'\|_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant \left(2h + 4\sqrt[4]{\alpha} + \frac{h}{\pi}\right)\|y''\|_{L^2(0,1)} + h\sqrt{\frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{2\delta}{\sqrt[4]{\alpha}}}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha = \delta^2$ concluímos que:

$$\|f'_{\delta,\alpha} - y'\|_{L^2(0,1)} = \left(2h + 4\sqrt{\delta} + \frac{h}{\pi}\right)\|y''\|_{L^2(0,1)} + h + 2\sqrt{\delta}.$$

$\square$

Observação 3.1 *Como podemos observar, a taxa de convergência obtida é da ordem $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ escolhendo $\alpha = \delta^2$, enquanto que na teoria clássica a ordem é de $\mathcal{O}(\delta)$, se escolhemos $\alpha = \delta$.*

Observação 3.2 *Embora Hanke et al. [9] tenham utilizado uma escolha a posteriori do parâmetro α, a taxa encontrada por eles é semelhante àquela encontrada neste trabalho, a saber:*

$$\|f'_{*,\alpha} - y'\| \leqslant \sqrt{8}\left(h\|y''\| + \sqrt{\delta}\|y''\|^{\frac{1}{2}}\right).$$

A seguir são enunciados alguns resultados auxiliares. Esses serão utilizados na demonstração do próximo teorema.

O lema a seguir trata da limitação da norma em L^p da derivada de f em termos da função f e da segunda derivada de f.

Lema 3.5 *Seja $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $0 < \varepsilon_0 < \infty$. Existe uma constante positiva $K = K(\varepsilon_0, p, b-a)$, dependendo continuamente de $b-a$ para $0 < b-a \leqslant \infty$ tal que para todo ε satisfazendo $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ e para toda função f duas vezes continuamente diferenciável no intervalo aberto (a,b), que satisfaz*

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt \leqslant K\varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p dt + K\varepsilon^{-1}\int_a^b |f(t)|^p dt. \tag{3.24}$$

No caso particular $b - a = \infty$, então $K = K(p)$ pode ser encontrado de modo que (3.24) é satisfeita $\forall\, \varepsilon > 0$.

Demonstração: É suficiente provar (3.24) para funções reais, pois assumindo o contrário e escrevendo uma função arbitrária f na forma $f = u + iv$ com u e v funções reais, obtemos:

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt \;=\; \int_0^1 \left[(u'(t))^2 + (v'(t))^2\right]^{\frac{p}{2}} dt$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \max(1, 2^{\frac{p-2}{2}}) \int_a^b \Big[(u'(t))^p + (v'(t))^p\Big] dt \\
&\leqslant 2k \max(1, 2^{\frac{p-2}{2}}) \Big\{ \varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p dt + \varepsilon^{-1} \int_0^1 |f(t)|^p dt \Big\}.
\end{aligned}
$$

Também pode ser assumido sem perda de generalidade que $\varepsilon_0 = 1$ pois, assumindo o lema provado para este caso, obtemos (3.24) da seguinte maneira: como $0 < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \leqslant 1$, segue que:

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt \leqslant K \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \int_a^b |f''(t)|^p dt + K \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \int_a^b |f(t)|^p dt.$$

Isto implica (3.24) com uma mudança

$$K = K(\varepsilon_0, p, b-a) = K(1, p, b-a) \max(\varepsilon_0, \varepsilon_0^{-1}).$$

Assumimos, assim, que f é real e $\varepsilon_0 = 1$. Também supomos que $a = 0$ e $b = 1$. Se $0 < \xi < \frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3} < \eta < 1$, então existe $\lambda \in (\xi, \eta)$ tal que:

$$|f'(\lambda)| = \left| \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi} \right| \leqslant 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)|.$$

Segue que, para qualquer $x \in (0, 1)$,

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| &= |f'(\lambda) + \int_\lambda^x f''(t) dt| \\
&\leqslant 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)| + \int_0^1 |f''(t)| dt.
\end{aligned}
$$

Integrando essa desigualdade com respeito a ξ em $(0, \frac{1}{3})$ e com respeito a η em $(\frac{2}{3}, 1)$, concluímos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9}|f'(x)| &\leqslant \int_0^{\frac{1}{3}} |f(\xi)| d\xi + \int_{\frac{2}{3}}^1 |f(\eta)| d\eta + \frac{1}{9} \int_0^1 |f''(t)| dt \\
&\leqslant \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f''(t)| dt.
\end{aligned}
$$

Assim, pela desigualdade de Hölder segue:

$$|f'(x)|^p \leqslant 2^{p-1}.9^p \int_0^1 |f(t)|^p dt + 2^{p-1} \int_0^1 |f(t)|^p dt.$$

Logo,

$$\int_0^1 |f'(x)|^p \leqslant K_p \int_0^1 |f(t)|^p dt + K_p \int_0^1 |f(t)|^p dt$$

onde $K_p = 2^{p-1}.9^p$.

Segue de uma mudança de variáveis que, para um intervalo finito (a,b), vale a desigualdade:

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt \leqslant K_p(b-a)^p \int_a^b |f''(t)|^p dt + K_p(b-a)^{-p} \int_a^b |f(t)|^p dt. \tag{3.25}$$

Como $0 < \varepsilon \leqslant 1$, existe um número inteiro positivo n tal que:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

Seja $a_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$ para $i = 0, 1, 2, ..., n$. Segue de (3.25) que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'(t)|^p dt &= \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f'(t)|^p dt \\
&= K_p \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{b-a}{n}\right)^p \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f''(t)|^p dt + \left(\frac{n}{b-a}\right)^p \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f''(t)|^p dt \right\} \\
&\leqslant \tilde{K}(p, b-a) \left\{ \varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p dt + \varepsilon^{-1} \int_a^b |f(t)|^p dt \right\},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $\tilde{K}(p, b-a) = K_p \max\{(b-a)^p, 2^p(b-a)^{-p}\}$.

Seja

$$K(1, p, b-a) = \begin{cases} \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant 2} \tilde{K}(p, s) & se \quad b-a \geqslant 1 \\ \max\limits_{b-a \leqslant s \leqslant 2} \tilde{K}(p, s) & se \quad 0 < b-a < 1. \end{cases}$$

Então $K(1, p, b-a)$ é finito para $0 < b-a < \infty$ e depende continuamente de $b-a$.

Para $b-a < 1$, (3.24) segue diretamente de (3.26). Para $1 \leqslant b-a < \infty$, o intervalo (a, b) pode ser dividido em finitos subintervalos, cada um com comprimento entre 1 e 2. Logo, provamos (3.24) , aplicando (3.26) em cada subintervalo e somando todos.

Supondo $b - a = \infty$, assumimos aqui que a é finito e $b = \infty$, pois o outro caso é análogo. Para dado $\varepsilon > 0$ seja $a_i = a + i\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, $i = 0, 1, 2, ...$ Então $a_i - a_{i-1} = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ e, usando (3.25), temos:

$$\int_a^\infty |f'(t)|^p dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f'(t)|^p dt$$

$$= \quad K_p\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f''(t)|^p dt + K_p\varepsilon^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \infty \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(t)|^p dt$$

que corresponde a (3.24) com $K = K_p$ dependendo somente de p.

$\square$

O lema a seguir trata da limitação em L^p da norma da derivada de ordem j de f em termos da função f e de sua derivada de ordem m, na qual $j, m \in \mathbb{N}$ e $j < m$.

Lema 3.6 *Seja* $0 < \delta_0 < \infty,\ 2 \leqslant m$ *e*

$$\varepsilon_0 = min\{\delta_0, \delta_0^2, ..., \delta_0^{m-1}\}.$$

Suponha que para um p *dado,* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ *existe uma constante* $K = K(\delta_0, p, \Omega)$ *tal que para dado* δ *com* $0 < \delta \leqslant \delta_0$ *e para toda* $f \in W^{2,p}(\Omega)$*, que satisfaz:*

$$\|f\|_{1,p} \leqslant K\delta\|f\|_{2,p} + K\delta^{-1}\|f\|_{0,p}. \tag{3.27}$$

Então, existe uma constante $K = K(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$ *tal que para todo* ε *com* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$*, todo inteiro* $j,\ 0 \leqslant j \leqslant m-1$ *e toda* $f \in W^{m,p}(\Omega)$*, que satisfaz:*

$$\|f\|_{j,p} \leqslant K\delta\|f\|_{m,p} + K\delta^{\frac{-j}{m-j}}\|f\|_{0,p}. \tag{3.28}$$

Demonstração: Como (3.28) é óbvio para $j = 0$, são considerados somente os casos $1 \leqslant j \leqslant m-1$. A demonstração é feita por duas induções em m e j.

As constantes $K_1, K_2, ...$ que aparecem na argumentação podem depender de δ_0 (ou ε_0), $m,\ p$ e Ω.

Primeiro provaremos (3.28) para $j = m-1$ por indução em m, de modo que (3.27) corresponde ao caso especial $m = 2$.

Assumimos, portanto, que para algum $k,\ 2 \leqslant k \leqslant m-1$ a desigualdade:

$$\|f\|_{k-1,p} \leqslant K_1\delta\|f\|_{k,p} + K_1\delta^{k-1}\|f\|_{0,p} \tag{3.29}$$

é satisfeita para todo $\delta,\ 0 < \delta \leqslant \delta_0$ e toda $f \in W^{k,p}(\Omega)$. Se $f \in W^{k+1,p}(\Omega)$, então provaremos que (3.29) também é satisfeita com $k+1$ no lugar de k (e uma constante K_1 diferente). De (3.27) e (3.29) concluímos que para $0 < \eta \leqslant \delta_0$

$$\begin{aligned} \|f\|_{k,p} &= K_2\delta\|f\|_{k+1,p} + K_2\delta^{-1}\|f\|_{k-1,p} \\ &\leqslant K_2\delta\|f\|_{k+1,p} + K_2K_1\delta^{-1}\eta\|f\|_{k,p} + K_2K_1\delta^{-1}\eta^{1-k}\delta\|f\|_{0,p}. \end{aligned}$$

Pode ser assumido sem prejuízo que $2K_1K_2 \geqslant 1$. Logo é possível tomar $\eta = \frac{\delta}{2K_1K_2}$, obtendo assim:

$$\begin{aligned}\|f\|_{k,p} &= 2K_2\delta\|f\|_{k+1,p} + \left(\frac{\delta}{2K_1K_2}\right)^{-k}\|f\|_{0,p}\\ &\leqslant K_3\delta\|f\|_{k+1,p} + K_3\delta^{-k}\|f\|_{0,p}.\end{aligned}$$

Isso completa a indução estabelecida em (3.29) para $0 < \delta \leqslant \delta_0$ e, portanto, (3.28) é valida para $j = m-1$ e $0 < \delta \leqslant \delta_0$.

Agora provaremos por indução em j que

$$\|f\|_{j,p} \leqslant K_4\delta^{m-j}\|f\|_{m,p} + K_4\delta^{-j}\|f\|_{0,p} \tag{3.30}$$

é satisfeita para $1 \leqslant j \leqslant m-1$ e $0 < \delta \leqslant \delta_0$.

Note que (3.29) com $k = m$ corresponde ao caso especial $j = m-1$ de (3.30). Assim, assumimos que (3.30) é satisfeita para algum j, $2 \leqslant j \leqslant m-1$. Então provamos que é satisfeita com $j-1$ em lugar de j (e uma constante K_4 diferente).

De (3.29) e (3.30) obtemos:

$$\begin{aligned}\|f\|_{j-1,p} &\leqslant K_5\delta\|f\|_{j,p} + K_5\delta^{1-j}\|f\|_{0,p}\\ &\leqslant K_5\delta\left\{K-4\delta^{m-j}\|f\|_{m,p} + K_4\delta^{-j}\|f\|_{0,p}\right\} + K_5\delta^{1-j}\|f\|_{0,p}\\ &\leqslant K_6\delta^{m+1-j}\|f\|_{m,p} + K_6\delta^{-(j-1)}\|f\|_{0,p}.\end{aligned}$$

Com isso, (3.30) é satisfeito e (3.28) segue tomando $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{m-j}}$ em (3.30). Note que $\varepsilon < \varepsilon_0$ se $\delta < \delta_0$.

□

Lema 3.7 *Seja $e(x) = f_{\delta,\alpha}(x) - y(x)$ e $h = \frac{1}{n}$ o tamanho dos intervalos de uma partição uniforme. Seja ainda $\delta > 0$ o nível de ruído. Então temos:*

$$\|e\| \leqslant 2h\|e'\| + \delta\sqrt{2(2 + \|y^{(k)}\|^2)}. \tag{3.31}$$

Demonstração: Da definição de Ψ e $f_{\delta,\alpha}$, segue que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(y_i^\delta - f_{\delta,\alpha}(x_i))^2 &\leqslant \Psi(f_{\delta,\alpha}) \leqslant \Psi(y)\\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(y_i^\delta - y(x_i))^2 + \alpha\|y^{(k)}\|^2\end{aligned}$$

$$\leqslant \quad \delta^2 + \delta^2\|y^{(k)}\|^2. \tag{3.32}$$

Do teorema do valor médio para integrais segue que existe $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^2(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{e^2(\xi_i)}{n} \tag{3.33}$$

Assim, de (3.32) e (3.33), concluímos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^2(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^2(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{e^2(\xi_i)}{n}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(e^2(\xi_i) - e^2(x_i)) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^2(x_i)\\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{\xi_i} 2|e(t)e'(t)|dt + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_{\delta,\alpha}(x_i) - y_i^\delta)^2 + (y_i^\delta - y(x_i))^2\\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2|e(t)e'(t)|dt + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_{\delta,\alpha}(x_i) - y_i^\delta)^2 + (y_i^\delta - y(x_i))^2\\
&\leqslant h\int_0^1 2|e(t)e'(t)|dt + 2h\sum_{i=0}^{n-1}(f_{\delta,\alpha}(x_i) - y_i^\delta)^2 + (y_i^\delta - y(x_i))^2\\
&\leqslant h\int_0^1 2|e(t)e'(t)|dt + 2\delta^2(2 + \|y^{(k)}\|^2)\\
&\leqslant 2h\|e\|\|e'\| + 2\delta^2(2 + \|y^{(k)}\|^2).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|e\|^2 &\leqslant 2h\|e\|\|e'\| + 2\delta^2(2 + \|y^{(k)}\|^2)\\
\|e\|^2 - 2h\|e\|\|e'\| + h^2\|e'\|^2 &\leqslant h^2\|e'\|^2 + 2\delta^2(2 + \|y^{(k)}\|^2)\\
(\|e\| - h\|e'\|)^2 &\leqslant h^2\|e'\|^2 + 2\delta^2(2 + \|y^{(k)}\|^2)\\
\|e\| - h\|e'\| &\leqslant h\|e'\| + \delta\sqrt{(2 + \|y^{(k)}\|^2}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

□

Demonstração do Teorema 1.4.
Seja $e(x) := f_{\delta,\alpha}(x) - y(x)$ uma função auxiliar. Primeiramente provamos que:

$$\|e'\| \leqslant K_1 h^{k-1} + K_2\delta^{\frac{k-1}{k}}, \tag{3.36}$$

onde K_1 e K_2 são duas constantes que não dependem de h e δ.

Sem perda de generalidade, assumimos que $\|e\|^{\frac{2(k-1)}{k}} = \varepsilon \leqslant 1$. Tomando $j = 1,\ m = k,\ p = 2,\ \varepsilon_0 = 1$ e $f = e$ no Lema 3.6, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|e'\|^2 &\leqslant K\varepsilon\|e^{(k)}\|^2 + K\varepsilon^{\frac{-1}{k-1}}\|e\|^2 \\
&= K\varepsilon(\|e^{(k)}\|^2 + \varepsilon^{\frac{k}{k-1}}\|e\|^2) \\
&= K\varepsilon(\|e^{(k)}\|^2 + \|e\|^{-2}\|e\|^2) \\
&= K(\|e^{(k)}\|^2 + 1)\|e\|^{\frac{2k-1}{k}}.
\end{aligned}$$

Da definição do funcional (1.8) e como $f_{\delta,\alpha}$ é o minimizador do mesmo, concluímos que:

$$\|f_{\delta,\alpha}^{(k)}\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2}\Psi(f_{\delta,\alpha}) \leqslant \frac{1}{\delta^2}\Psi(y) \leqslant 1 + \|y^{(k)}\|^2$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\|e^{(k)}\| &= \|f_{\delta,\alpha}^{(k)} - y^{(k)}\| \leqslant \|f_{\delta,\alpha}^{(k)}\| + \|y^{(k)}\| \\
&\leqslant \sqrt{1 + \|y^{(k)}\|^2} + \|y^{(k)}\| \leqslant 1 + 2\|y^{(k)}\|.
\end{aligned}$$

Do Lema 3.7, segue que

$$\begin{aligned}
\|e'\|^k &\leqslant K^*\left(2h\|e'\| + \delta\sqrt{2(2 + \|y^{(k)}\|^2)}\right)^{k-1} \\
&\leqslant K_1h^{k-1}\|e'\|^{k-1} + K_2\delta^{k-1}. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Em seguida provamos que (3.36) pode ser obtido de (3.37). Consideramos dois casos:

<u>Caso 1:</u> $\|e'\| \leqslant K_1h^{k-1}$. Certamente (3.36) é satisfeito.

<u>Caso 2:</u> $K_1h^{k-1} < \|e'\|$. Tome $r = \|e'\| - K_1h^{k-1} > 0$.

Usando (3.37) obtemos:

$$\begin{aligned}
r^k &\leqslant (r + K_1h^{k-1})^{k-1}r \\
&= (\|e'\| - K_1h^{k-1} + K_1h^{k-1})^{k-1}(\|e'\| - K_1h^{k-1}) \\
&= \|e'\|^k - K_1h^{k-1}\|e'\|^{k-1} \leqslant K_2\delta^{k-1}. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Donde segue que:

$$r \leqslant K_2^{\frac{1}{k}}\delta^{\frac{k-1}{k}}$$

$$
\begin{aligned}
\|e'\| - K_1 h^{k-1} &\leqslant K_2^{\frac{1}{k}} \delta^{\frac{k-1}{k}} \\
\|e'\| &\leqslant K_1 h^{k-1} + K_2^{\frac{1}{k}} \delta^{\frac{k-1}{k}}.
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

Com isso a desigualdade (3.36) está provada.

De forma análoga, fazendo a escolha adequada dos índices no Lema 3.6, podemos provar que, para qualquer $0 \leqslant j < k-1$, é satisfeita a desigualdade

$$\|f_{\delta,\alpha}^{(j)} - y^{(j)}\|_{L^2(0,1)} \leqslant K_{1j} h^{k-j} + K_{2j} \delta^{\frac{k-j}{k}}.$$

□

Observação 3.3 *Como podemos observar na demonstração acima, basta considerar o caso $j = 1$. Se considerarmos o caso em que $k = 2$, concluímos que a taxa obtida é similar àquela encontrada no Teorema 1.3, isto é, da ordem de $\sqrt{\delta}$.*

Observação 3.4 *Embora a escolha do parâmetro α seja diferente da teoria clássica, dependendo da escolha de k e j a taxa de convergência é bastante similar àquela encontrada na teoria clássica, a saber: da ordem de $\delta^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}$, em que $\nu \in [1/2, 1]$.*

3.3 Não Convergência da Segunda Derivada

Nesta seção apresentamos duas situações nas quais não há a convergência da segunda derivada. Na primeira situação a função y pertence a $C[0,1] \backslash H^2(0,1)$ e na segunda situação, que pode ser vista como uma generalização da primeira, temos que a função y pertence a $L^\infty[0,1] \backslash H^k(0,1)$.

Demonstração do Teorema 1.5

A demonstração deste teorema está dividida em quatro passos.

<u>Passo 1:</u> Assumimos que a conclusão do teorema não é verdadeira. Isto significa que existem duas seqüências δ^m, Δ^m, $m = 1, 2, ...$ e uma constante C tal que:

$$\delta^m \to 0, \qquad h^m \to 0, \qquad \textit{quando} \quad m \to \infty$$

e

$$\|f_{\delta,\alpha}''\|_{L^2(0,1)} \leqslant C$$

onde h^m é o valor do maior intervalo da partição Δ^m, isto é, $h^m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i^m$.

É usada a notação $f_{\delta,\alpha}''(x; \delta^m, h^m)$ para indicar que $f_{\delta,\alpha}(x)$ depende de δ^m h^m.

Da teoria de espaços de Sobolev, existe uma função $g \in H^2(0,1)$ que satisfaz:

$$\|g''\|_{L^2(0,1)} \leqslant C \tag{3.40}$$

e

$$\lim \|f_{\delta,\alpha}(\delta^m, h^m, x) - g(x)\|_{C[0,1]} = 0. \tag{3.41}$$

De fato, temos que para toda função $f_{\delta,\alpha}(x;\delta^m,h^m) = f^m_{\delta,\alpha}$ valem as hipóteses:

$$\|f''_{\delta,\alpha}\|_{L^2(0,1)} \leqslant C, \qquad f^m_{\delta,\alpha}(0) = g(0) = a \qquad \text{e} \qquad f^m_{\delta,\alpha}(1) = g(1) = b.$$

Logo, podemos definir a função:

$$h(x) = b + (1-x)(a-b) \quad e \quad f_m = f^m_{\delta,\alpha} - h.$$

Com isso concluímos que $f_m(0) = f_m(1) = 0, \|f^{m''}_{\delta,\alpha}\|_{H^2(0,1)} = \|f''_m\|_{H^2(0,1)}$ e, portanto, existe uma função $\tilde{g} \in H^2(0,1)$, $\|g\|_{H^2(0,1)} \leqslant C$ e uma subseqüência f_{m_k}, tal que $f_{m_k} \rightharpoonup \tilde{g} \Rightarrow f_{m_k} - \tilde{g} \rightharpoonup 0$.

Como $H^2_0(0,1) \hookrightarrow C_0(0,1)$ e esta imersão é compacta, temos que $f_{m_{k_j}} = f_{m_j} \to \tilde{g}$. Assim,

$$f^m_{\delta,\alpha} - \tilde{g} = f_m + h - y^\delta \ \to h \ \in \ C_0(0,1)$$

e, portanto,

$$g = \tilde{g} - h \ \Rightarrow \ \|g''\|_{L^2(0,1)} \leqslant C \qquad e \qquad f^m_{\delta,\alpha} - g = f_m - \tilde{g} \to 0.$$

<u>Passo 2:</u> Definimos uma função auxiliar $\phi(g) := \|g - y\|_{C[0,1]}$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, desejamos encontrar uma função $\tilde{f}_\delta$ tal que:

1. $\tilde{f}_\delta(0) = y(0), \quad \tilde{f}_\delta(1) = y(1)$;
2. $\|\tilde{f}''_\delta\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta}}$;
3. $\phi(\tilde{f}_\delta) \leqslant \inf_{g \in H_\delta} \phi(g) + \delta$. Onde $H_\delta = \{g \in Y | \|g''\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta}}\}$.

Pela definição de ϕ é fácil ver que existe uma tal função.

Agora provamos que:

$$\phi(\tilde{f}_\delta) \to 0. \tag{3.42}$$

Suponha que a conclusão de (3.42) não é verdadeira. Então, existe uma constante

$C_1 > 0$ e uma seqüência $\delta_k,\ k = 1, 2, ...$ tal que $\delta_k \to 0$ quando $k \to \infty$ e

$$\phi(\tilde{f}_\delta) \geqslant C_1.$$

Seja $C_{a,b}[0,1] = \{f | f \in C[0,1] \ e \ f(0) = a,\ f(1) = b\}$. Como $\mathcal{H}^2$ é denso em $C_{a,b}[0,1]$, existe uma função $z \in \mathcal{H}^2$ tal que a função $y \in C_{a,b}[0,1] \setminus H^2(0,1)$ está bem próxima de z, ou seja,

$$\phi(z) = \|z - y\|_{C[0,1]} < \frac{C_1}{2}.$$

Denotamos $B = \|z''\|_{L^2(0,1)}$.

Como $\delta_k \to 0$ quando $k \to \infty$, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|z''\|_{L^2(0,1)} = B < \frac{1}{\sqrt{\delta_k}}, \qquad \delta_k < \frac{C_1}{2}, \qquad \text{quando } k \geqslant K.$$

Portanto, temos que $z \in H_{\delta_k}$.

Pela definição de $\tilde{f}_\delta$ segue que

$$\phi(\tilde{f}_\delta) \ \leqslant \ \inf_{g \in H_{\delta_k}} \phi(g) \ + \ \delta_k \ \leqslant \ \phi(z) + \delta_k < \frac{C_1}{2} + \frac{C_1}{2} = C_1.$$

Mas isto é uma contradição. Logo, a conclusão (3.42) está correta.

Passo 3: Neste passo provaremos que:

$$\lim_{\delta \to 0} \Phi(f_{\delta,\alpha}) = 0.$$

Primeiramente, observamos que:

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{f}_\delta) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(y_i^\delta - \tilde{f}_\delta(x_i)\right)^2 + \delta^2 \|\tilde{f}_\delta''\|^2_{L^2(0,1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(y_i^\delta - y(x_i) + y(x_i) - \tilde{f}_\delta(x_i)\right)^2 + \delta^2 \|\tilde{f}_\delta''\|^2_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} h_i + h_{i+1} \left((y_i^\delta - y(x_i))^2 + (y(x_i) - \tilde{f}_\delta(x_i))^2\right) + \delta^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^2 \\
&\leqslant 2\left((y_i^\delta - y(x_i))^2 + (y(x_i) - \tilde{f}_\delta(x_i))^2\right) + \delta \\
&\leqslant 2\delta^2 + 2(\phi(\tilde{f}_\delta))^2 + \delta
\end{aligned}$$

Como $\lim_{\delta\to 0} \phi(\tilde{f}_\delta) = 0$, concluímos que $\lim_{\delta\to 0} \Phi(\tilde{f}_\delta) = 0$ e com isso temos

$$\lim_{\delta\to 0} \Phi(f_{\delta,\alpha}) = 0. \tag{3.43}$$

<u>Passo 4:</u> Seja $\varepsilon > 0$ um número arbitrariamente pequeno. Pela definição de integral, temos:

$$\lim_{h^m\to 0} \sum_{i=1}^{n^m-1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}(g(x_i^m) - y(x_i^m))^2 = \|g-y\|^2_{L^2(0,1)}.$$

Assim, existe uma constante $M > 0$ tal que para qualquer $m > M$, é satisfeita a estimativa:

$$\|g-y\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n^m-1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}(g(x_i^m) - y(x_i^m))^2 + \varepsilon. \tag{3.44}$$

Por (3.40) e (3.41) segue que existe uma constante $M_1 > 0$ tal que, para todo $m > M_1$ são satisfeitas:

$$\|f_{\delta,\alpha}(\delta^m, h^m, x) - g(x)\|^2_{C[0,1]} < \varepsilon \tag{3.45}$$

e

$$(\delta^m)^2 < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{3.46}$$

Por (3.43), segue que existe uma constante $M_2 > 0$ tal que, para todo $m > M_2$ é satisfeito

$$|\Phi(f_{\delta,\alpha})| < \varepsilon. \tag{3.47}$$

Logo, por (3.44)-(3.47), segue que para $m > \max\{M, M_1, M_2\}$ vale

$$\begin{aligned}
\|g-y\|^2_{L^2(0,1)} &\leqslant 3\sum_{i=1}^{n^m-1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}(g(x_i^m) - f_{\delta,\alpha}(x_i^m;\delta^m, h^m))^2 \\
&\quad +3\sum_{i=1}^{n^m-1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}(f_{\delta,\alpha}(x_i^m;\delta^m, h^m n) - y^\delta(x_i^m))^2 \\
&\quad +3\sum_{i=1}^{n^m-1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}(y^\delta(x_i^m) - y(x_i^m))^2 + \varepsilon \\
&\leqslant 3\varepsilon + 3\Phi(f_{\delta,\alpha}(x_i^m;\delta^m, h^m)) + 3(\delta^m)^2 C + \varepsilon \leqslant 10\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como ε é um número positivo arbitrário, concluímos que $g = y$.

Do passo 1, sabemos que $g \in H^2(0,1)$. Isto contradiz a suposição que $y \notin H^2(0,1)$.

$\square$

Observação 3.5 *No primeiro passo mostramos que, se a segunda derivada de f é limitada, então f aproxima uma função contínua g. Já no passo 2 mostramos que f aproxima a função y. Enquanto que, no passo 3, provamos que $\Phi(f_{\delta,\alpha}) \to 0$. E por último provamos que $g = y$, o que é uma contradição pois $g \in H^2(0,1)$ e $y \notin H^2(0,1)$.*

Observação 3.6 *É possível provar que se x_0 é um ponto de descontinuidade de $y(x)$, então, para cada intervalo aberto I que contenha o ponto x_0, temos*

$$\|f''_{\delta,\alpha}\|_{L^2(I)} \quad \longrightarrow +\infty \qquad \textit{quando} \quad h, \delta \to 0.$$

Maiores detalhes sobre a verificação do fato podem ser encontrados em X. Z. Jia e Y. B. Wang [14].

Corolário 3.1 *Suponha que $f_{\delta,\alpha}$ é o minimizador do funcional ψ. Tome $\alpha = \delta^2$. Se $y \in L^\infty[0,1]\backslash H^k(0,1)$, então*

$$\|f''_{\delta,\alpha}\|_{L^2(0,1)} \quad \longrightarrow \quad \infty \qquad \textit{quando} \quad \delta, h \to 0.$$

Demonstração: A demonstração deste corolário está dividida em quatro passos.

<u>Passo 1:</u> Assumimos que a conclusão do corolário não é verdadeira. Isto significa que existem duas seqüências δ^m, Δ^m, $m = 1, 2, ...$ e uma constante c tal que:

$$\delta^m \to 0, \qquad h^m \to 0, \qquad \textit{quando} \quad m \to \infty$$

e

$$\|f''_{\delta,\alpha}\|_{L^2(0,1)} \leqslant C$$

onde h^m é o valor do maior intervalo da partição Δ^m, isto é, $h^m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i^m$.

Utilizamos a notação $f^{(k)}_{\delta,\alpha}(x; \delta^m, h^m)$ para indicar que $f_{\delta,\alpha}(x)$ depende de δ^m h^m. Da teoria de espaços de Sobolev, existe uma função $g \in H^k(0,1)$ que satisfaz:

$$\|g''\|_{L^2(0,1)} \leqslant C \tag{3.48}$$

e

$$\lim \|f_{\delta,\alpha}(\delta^m, h^m, x) - g(x)\|_{L^\infty[0,1]} = 0. \tag{3.49}$$

De fato, temos que para toda função $f_{\delta,\alpha}(x; \delta^m, h^m) = f^m_{\delta,\alpha}$ valem as hipóteses:

$$\|f''_{\delta,\alpha}\|_{L^k(0,1)} \leqslant C, \qquad f^m_{\delta,\alpha}(0) = g(0) = a \qquad \text{e} \qquad f^m_{\delta,\alpha}(1) = g(1) = b.$$

Logo, podemos definir a função:

$$h(x) = a + (b - a)x \quad e \quad f_m = f_{\delta,\alpha}^m - h.$$

Com isso, concluímos que $f_m(0) = f_m(1) = 0, \|f_{\delta,\alpha}^{m(2)}\|_{H^k(0,1)} = \|f_m''\|_{H^k(0,1)}$ e, portanto, existe uma função $\tilde{g} \in H^k(0,1),\ \|g\|_{H^k(0,1)} \leqslant C$ e uma subseqüência f_{m_n}, tal que $f_{m_n} \rightharpoonup \tilde{g} \Rightarrow f_{m_n} - \tilde{g} \rightharpoonup 0$.

Como $H_0^k(0,1) \hookrightarrow L_0^\infty(0,1)$ e esta imersão é compacta, temos que $f_{m_{n_j}} = f_{m_j} \rightarrow \tilde{g}$. Assim,

$$f_{\delta,\alpha}^m - \tilde{g} = f_m + h - y^\delta \ \rightarrow h \ \in \ L_0^\infty(0,1)$$

e, portanto,

$$g = \tilde{g} - h \ \Rightarrow \ \|g''\|_{L^2(0,1)} \leqslant C \qquad e \qquad f_{\delta,\alpha}^m - g = f_m - \tilde{g} \rightarrow 0.$$

<u>Passo 2:</u> Definimos uma função auxiliar $\phi(g) := \|g - y\|_{L^\infty[0,1]}$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, desejamos encontrar uma função $\tilde{f}_\delta$ tal que:

1. $\tilde{f}_\delta(0) = y(0), \quad \tilde{f}_\delta(1) = y(1)$;

2. $\|\tilde{f}_\delta''\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta}}$;

3. $\phi(\tilde{f}_\delta) \leqslant \inf_{g \in H_\delta} \phi(g) + \delta$, onde $H_\delta = g \in Y | \|g''\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta}}$.

Pela definição de ϕ é fácil ver que existe uma tal função.

Agora provamos que

$$\phi(\tilde{f}_\delta) \rightarrow 0. \tag{3.50}$$

Suponha que a conclusão de (3.32) não é verdadeira. Então, existe uma constante $C_1 > 0$ e uma seqüência $\delta_k,\ k = 1, 2, ...$ tal que $\delta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e

$$\phi(\tilde{f}_\delta) \geqslant C_1.$$

Seja $L_{a,b}^\infty[0,1] := \{f | f \in C[0,1] \ e \ f(0) = a,\ f(1) = b\}$. Como $\mathcal{H}^k$ é denso em $C_{a,b}[0,1]$, existe uma função $z \in \mathcal{H}^k$ tal que a função $y \in L_{a,b}^\infty[0,1] \setminus H^k(0,1)$ está bem próxima de z, ou seja,

$$\phi(z) = \|z - y\|_{L^\infty[0,1]} < \frac{C_1}{2}.$$

Denotamos $B = \|z''\|_{L^2(0,1)}$.

Como $\delta_n \to 0$ quando $n \to \infty$, existe uma constante $K > 0$ tal que:

$$\|z''\|_{L^2(0,1)} = B < \frac{1}{\sqrt{\delta_n}}, \qquad \delta_n < \frac{C_1}{2}, \qquad \text{quando } \ n \geqslant K.$$

Portanto, temos que $z \in H_{\delta_k}$.

Pela definição de $\tilde{f}_\delta$ segue que

$$\phi(\tilde{f}_\delta) \ \leqslant \ \inf_{g \in H_{\delta_k}} \phi(g) \ + \ \delta_k \ \leqslant \ \phi(z) + \delta_k < \frac{C_1}{2} + \frac{C_1}{2} = C_1.$$

Mas isto é uma contradição. Logo, a conclusão (3.42) está correta.

Passo 3: Neste passo provaremos que:

$$\lim_{\delta \to 0} \Phi(f_{\delta,\alpha}) = 0.$$

Primeiramente, observamos que

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{f}_\delta) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(y_i^\delta - \tilde{f}_\delta(x_i)\right)^2 + \delta^2 \|\tilde{f}_\delta''\|^2_{L^2(0,1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(y_i^\delta - y(x_i) + y(x_i) - \tilde{f}_\delta(x_i)\right)^2 + \delta^2 \|\tilde{f}_\delta''\|^2_{L^2(0,1)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} h_i + h_{i+1} \left((y_i^\delta - y(x_i))^2 + (y(x_i) - \tilde{f}_\delta(x_i))^2\right) + \delta^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^2 \\
&\leqslant 2\left((y_i^\delta - y(x_i))^2 + (y(x_i) - \tilde{f}_\delta(x_i))^2\right) + \delta \\
&\leqslant 2\delta^2 + 2(\phi(\tilde{f}_\delta))^2 + \delta
\end{aligned}$$

Como $\lim_{\delta \to 0} \phi(\tilde{f}_\delta) = 0$, concluímos que $\lim_{\delta \to 0} \Phi(\tilde{f}_\delta) = 0$ e com isso temos

$$\lim_{\delta \to 0} \Phi(f_{\delta,\alpha}) = 0. \tag{3.51}$$

Passo 4: Seja $\varepsilon > 0$ um número arbitrariamente pequeno. Pela definição de integral, temos

$$\lim_{h^m \to 0} \sum_{i=1}^{n^m - 1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2} (g(x_i^m) - y(x_i^m))^2 = \|g - y\|^2_{L^2(0,1)}.$$

Assim, existe uma constante $M > 0$ tal que para qualquer $m > M$, é satisfeita a estimativa

$$\|g-y\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n^m-1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}(g(x_i^m) - y(x_i^m))^2 + \varepsilon \tag{3.52}$$

Por (3.48) e (3.49) segue que existe uma constante $M_1 > 0$ tal que, para todo $m > M_1$ são satisfeitas:

$$\|f_{\delta,\alpha}(\delta^m, h^m, x) - g(x)\|^2_{L^\infty[0,1]} < \varepsilon \tag{3.53}$$

e

$$(\delta^m)^2 < \frac{\varepsilon}{C}. \tag{3.54}$$

Por (3.51), segue que existe uma constante $M_2 > 0$ tal que, para todo $m > M_2$ é satisfeita

$$|\Phi(f_{\delta,\alpha})| < \varepsilon. \tag{3.55}$$

Logo, por (3.52)-(3.55), segue que para $m > \max\{M, M_1, M_2\}$ vale:

$$\begin{aligned}
\|g-y\|^2_{L^2(0,1)} &\leqslant 3\sum_{i=1}^{n^m-1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}(g(x_i^m) - f_{\delta,\alpha}(x_i^m;\delta^m,h^m))^2 \\
&\quad +3\sum_{i=1}^{n^m-1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}(f_{\delta,\alpha}(x_i^m;\delta^m,h^m n) - y^\delta(x_i^m))^2 \\
&\quad +3\sum_{i=1}^{n^m-1} \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}(y^\delta(x_i^m) - y(x_i^m))^2 + \varepsilon \\
&\leqslant 3\varepsilon + 3\Phi(f_{\delta,\alpha}(x_i^m;\delta^m,h^m)) + 3(\delta^m)^2 C + \varepsilon \leqslant 10\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como ε é um número positivo arbitrário, concluímos que $g = y$.

Do passo 1, sabemos que $g \in H^k(0,1)$. Isto contradiz a suposição que $y \notin H^k(0,1)$.

$\square$

Apêndice A

Interpolação Polinomial Por Meio de *Splines*

A interpolação usando *splines* vem sendo utilizada há muito tempo, mas só no final da década de 60 foi feita a formulação matemática desse problema.

Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$ e os pontos base $(x_i, f(x_i)), 0 \leqslant i \leqslant n$, pontos distintos.

Definição A.1 *$S(x)$ é um spline de ordem m em $(-\infty, \infty)$ se*

1. *$S(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a* m *em cada sub-intervalo $(-\infty, x_0]$, $[x_0, x_1]$, ..., $[x_n, \infty)$.*

2. *$S^r(x)$ é uma função contínua em $(-\infty, \infty)$ para $0 \leqslant r \leqslant m - 1$.*

A derivada de um *spline* de ordem m é outro *spline* de ordem $m - 1$, bem como a sua antederivada é um *spline* de ordem $m + 1$.

Freqüentemente consideramos o intervalo $[a, b]$ em vez de $(-\infty, \infty)$

A.1 *Splines* Cúbicos

Os *splines* cúbicos são os mais usados, por serem funções suaves, para o ajuste de dados, pois não produzem comportamentos com oscilações na interpolação, o que freqüentemente ocorre com as polinomiais interpoladoras de alto grau, acarretando aumento do erro de truncamento. Além disso, *splines* cúbicos são funções simples de trabalhar.

Definição A.2 *$S(x)$ é um* spline *cúbico definido em $[a, b]$ se*

1. *$S(x_i) = y_i, 0 \leqslant i \leqslant n$.*

2. *$S(x), S'(x)$ e $S''(x)$ são funções contínuas em $[a, b]$.*

3. *Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, ..., n$, $S(x)$ é um polinômio cúbico, isto é, $S(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3, \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$.*

4. *$S^{(j)}(x_i^+) = S^{(j)}(x_i^-)$, $i = 1, 2, ..., n-1$, $j = 0, 1, 2$, tendo em vista a condição de continuidade.*

Da propriedade 3 temos $4n$ coeficientes desconhecidos $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$. Da propriedade 1 temos $n + 1$ condições e da propriedade 4, $3(n - 1)$ que juntas fornecem $4n - 2$ condições. Comparando o número de condições com $4n$ que é o número de coeficientes desconhecidos, concluímos que há pelo menos dois graus de liberdade para a determinação dos coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Anteriormente fizemos referência à restrição de S em $[a, b]$, em vez de considerar S em $(-\infty, +\infty)$. Em geral, isso não é necessário, pois, uma vez expressa a S sobre $[x_0, x_n]$ é fácil construir uma extensão a $(-\infty, +\infty)$; contudo, esta não será única.

Em geral, são impostas as seguintes condições de fronteira: $S_0 = S_n = 0$. Outras condições podem ser impostas aos extremos do intervalo de interpolação, a saber, condições sobre derivadas nos pontos terminais (que é este caso) e condições de contorno do tipo periódica.

Apêndice B

Princípio da Discrepância de Morozov

Seja F como na equação (2.1) e $g_\alpha : [0, \|F\|^2] \to \mathbb{R}$ para todo $\alpha > 0$, com as seguintes hipóteses: g_α é uma função contínua por partes e existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leqslant C \tag{B.1}$$

e,

$$\lim_{\alpha\to 0} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \tag{B.2}$$

para todo $\lambda \in (0, \|F\|^2]$. Defina $r_\alpha := 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$. Além disso, seja:

$$\tau > sup\{|r_\alpha(\lambda)|; \alpha > 0,\ \lambda \in [0, \|F\|^2]\}. \tag{B.3}$$

O parâmetro de regularização definido via princípio da discrepância é:

$$\alpha(\delta, y^\delta) := sup\{\alpha > 0; \|F(q_\alpha^\delta) - y^\delta\| \leqslant \tau\delta\}. \tag{B.4}$$

Assumimos que para cada $\lambda > 0$, $\alpha \mapsto g_\alpha(\lambda)$ é contínua pelo lado esquerdo, de modo que o funcional:

$$\alpha \mapsto \|F(q_\alpha^\delta) - y^\delta\|$$

também é contínuo pelo lado esquerdo. Então, o supremo em (B.4) é alcançado, de modo que

$$\|F(q^\delta_{\alpha(\delta,y^\delta)}) - y^\delta\| \leqslant \tau\delta. \tag{B.5}$$

Se $\|F(q_\alpha^\delta) - y^\delta\| \leqslant \tau\delta$ para todo $\alpha > 0$, então $\alpha(\delta, y^\delta) = +\infty$ e $q^\delta_{\alpha(\delta,y^\delta)}$ deve ser entendido como o limite quando $\alpha \to \infty$.

Assim, o parâmetro de regularização é escolhido via comparação entre o resíduo (ou discrepância) $\|F(q_\alpha^\delta) - y\|$ e o nível de ruído δ.

Assumimos também que $y \in R(F)$. Do contrário, a discrepância $\|F(q_\alpha^\delta) - y^\delta\|$ nunca é menor que $\|y - Qy\| - \delta$, em que Q é o operador de projeção de y sobre $R(F)$, de modo que o conjunto em (B.4) pode ser vazio.

De fato, como $\|y - y^\delta\| < \delta$ e supondo que $y \notin R(F)$, então temos dois casos a analisar.

<u>Caso 1:</u> $F(q_\alpha^\delta) = Qy$. Logo,

$$\|Qy - y^\delta\| \leqslant \|F(q_\alpha^\delta) - y\| + \|y - y^\delta\|,$$

ou seja,

$$\|Qy - y\| - \delta \leqslant \|F(q_\alpha^\delta) - y^\delta\|.$$

<u>Caso 2:</u> $F(q_\alpha^\delta) \neq Qy$ como Qy é a projeção de y sobre $R(F)$, segue que Qy é o ponto mais próximo da bola $B_\delta(y)$. Portanto, usando algumas desigualdades geométricas concluímos que:

$$\|Qy - y\| - \delta \leqslant \|F(q_\alpha^\delta) - y^\delta\|.$$

Formalmente, caso y não seja atingido, pode ser considerada a equação:

$$Fq = Qy \tag{B.6}$$

ou a equação normal

$$F^*Fq = F^*y,$$

que sempre são solucionáveis se $y \in D(F^\dagger)$. Em um primeiro momento, não parece ser prático usar (B.6), visto que em geral, Q não é facilmente calculável. Entretanto, este problema desaparece quando (B.6) é aproximado por uma equação de dimensão finita em uma apropriada direção.

Definindo a família de regularização R_α como,

$$R_\alpha := \int g_\alpha dE_\lambda F^*, \tag{B.7}$$

na qual F^* é o operador adjunto de F e $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$ como

$$\mathcal{X}_{\mu,\rho} := \{x \in \mathcal{X} \mid x = (F^*F)^\mu w,\ \|w\| \leqslant \rho\}, \tag{B.8}$$

concluímos que o método de regularização (R_α, α), em que α é definido via princípio da discrepância (B.4), é convergente para todo $y \in R(F)$ e de ordem ótima em $\mathcal{X}_{\mu,\rho}$ para $\mu \in (0, \mu_0 - \frac{1}{2})$, onde $\mu_0 > \frac{1}{2}$ e $\rho > 0$.

Além disso, obtemos a seguinte taxa de convergência:

$$\|q^{\delta}_{\alpha(\delta,y^{\delta})} - q^{\dagger}\| = o(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}) \tag{B.9}$$

A demonstração pode ser encontrada em Engl *et al.* [6].

Observação B.1 *Do resultado acima podemos concluir que a convergência de ordem ótima é satisfeita para qualquer parâmetro* $\alpha = \alpha(\delta, y^{\delta})$ *escolhido, que satisfaça*

$$\|F(q^{\delta}_{\alpha}) - y^{\delta}\| \leqslant \tau\delta \leqslant \|F(q^{\delta}_{\beta}) - y^{\delta}\|$$

para algum β *com* $\alpha \leqslant \beta \leqslant 2\alpha$ *e com* τ *definido em (B.3).*

Referências Bibliográficas

[1] A.N. Tikhonov e V. Y. Arsenin, *Solutions of Ill-posed Problems*, Winston and Sons, New York, 1977.

[2] C. W. Groetsch, *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, Pitman, Boston, 1984.

[3] C. Kravaris e J. H. Seinfeld, *Identification of parameters in distributed parameter systems by regularization*, SIAM J. Control. Optim. 23 (1985), 217-241.

[4] D. A. Murio *The Molliffication Method and the Numerical Solution of Ill-posed Problems* A Wiley Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc. New York, 1993.

[5] H. W. Engl, *Necessary and sufficient conditions for convergence of regularization methods for solving linear operator equations of the first kind*, Numer. Funct. Anal. Optim. 3 (1981), 201-222.

[6] H. W. Engl, M. Hanke e A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[7] J. B. Keller, *Inverse Problems*, Am. Math. Mon., 83 (1976), 107-118.

[8] J. Cheng, M. Yamamoto, *One New Strategy for a Priori Choice of Regularizing Parameters in Tikhonov's Regularization*, Inverse Problems, 16(2000), L31-L38.

[9] M. Hanke e O. Scherzer, *Inverse Problems Light: Numerical Differentiation*, Am. Math. Mon, 108(2001), 512-521.

[10] M. Hegland *Resolution enhancement of spectra using differentiation*, Preprint Australian National University.

[11] R. Gorenflo e S Vessella, *Abel Integral Equations. Analysis and Aplications (Springer Lecture Notes in Mathematics vol 105)*, Springer, Berlin, 1991.

[12] R. S. Anderssen, M. Helgland, *For Numerical differeniation dimensionality can be a blessing!* Math. Comp. 68 (1999), no. 227, 1121-1141.

[13] S. R. Deans, *Radon Transform and its Applications*, Interscience, New York, 1983.

[14] X. Z. Jia e Y. B. Wang, *The Numerical Differentiation of the Nonsmooth Functions*, preprint Fudan University Shangai 2002.

[15] Y. B. Wang e J. Cheng, *Numerical differentiation and its application*, Preprint, Fudam University, Shanghai.

[16] Y. B. Wang, X. Z. Jia e J. Cheng, *A numerical differentiation method and its application to reconstruction of discontinuity*, Inverse Problems, 18(2002), 1461-1476.