

**SÉRGIO JOSÉ MELO DE ALMEIDA**

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DO  
COMPORTAMENTO DE UMA  
CLASSE DE ALGORITMOS DE  
PROJEÇÕES AFINS**

**FLORIANÓPOLIS**

**2004**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DO  
COMPORTAMENTO DE UMA  
CLASSE DE ALGORITMOS DE  
PROJEÇÕES AFINS**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como requisito parcial à obtenção do grau de  
Doutor em Engenharia Elétrica

**Sérgio José Melo de Almeida**

Florianópolis, Abril de 2004.

---

*Este trabalho é dedicado ao meu filho  
Lucas*

---

## AGRADECIMENTOS

*Ao professor José Carlos Moreira Bermudez, pela orientação, empenho e amizade ao longo destes anos.*

*Ao professor Neil Bershad pela ajuda e disposição ao longo de todo trabalho.*

*Aos professores do programa de pós-graduação em engenharia elétrica pelo ambiente de aprendizado.*

*Aos funcionários da UFSC: Wilson Silva Costa e Marcelo Manoel Siqueira.*

*À Universidade Católica de Pelotas pela oportunidade, incentivo e financiamento.*

*Aos colegas Márcio Costa, Pedro Inácio Hübsher, João Neto, Augusto Loureiro, Eduardo Costa, Delmar Carvalho, Ubirajara Moreno e Carlos Montez pelas instigantes discussões e contribuições.*

*Finalmente, agradeço a todos àqueles que de alguma forma contribuíram na realização deste trabalho com sua amizade e atenção.*

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

# **ANÁLISE ESTATÍSTICA DO COMPORTAMENTO DE UMA CLASSE DE ALGORITMOS DE PROJEÇÕES AFINS**

**Sérgio José Melo de Almeida**

Abril/2004

Orientador: José Carlos Moreira Bermudez, Ph.D.

Área de concentração: Comunicações e Processamento de Sinais.

Palavras-chave: algoritmos adaptativos, identificação de sistemas, análise estatística.

Número de páginas: 182.

**RESUMO:** O presente trabalho reflete os estudos de um projeto de pesquisa com vistas à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica na área de Sistemas de Informação, sub-área de processamento de sinais.

O enfoque da pesquisa é em sistemas adaptativos, especificamente na análise estatística de uma classe de algoritmos adaptativos baseados no algoritmo de Projeções Afins (AP). A motivação para análise destes algoritmos deve-se as suas crescentes aplicações em sistemas de comunicações, e em particular, no problema do cancelamento do eco acústico. Apresenta-se neste trabalho uma explanação do problema de cancelamento do eco acústico, onde a implementação de filtros adaptativos são discutidas.

O algoritmo AP apesar de já ser bastante utilizado em aplicações onde necessita-se de um algoritmo que seja rápido e imune a algumas propriedades do sinal de entrada, ainda carece de uma análise mais profunda de seu comportamento. Dessa forma, este trabalho busca preencher esta lacuna com o objetivo de oferecer uma ferramenta de auxílio no projeto de filtros adaptativos.

O pseudo algoritmo AP pode ser entendido como uma extensão do algoritmo AP para uma taxa de adaptação diferente de 1. O interesse no desenvolvimento de um modelo determinístico para seu comportamento deve-se ao surgimento de uma grande quantidade de estratégias aplicadas no cancelamento de eco acústico, onde o passo de adaptação é variável, caracterizando neste sentido, a distinção entre este algoritmo e o algoritmo AP.

Ao longo deste trabalho são determinadas equações recursivas para a modelagem do comportamento médio quadrático dos coeficientes e dos momentos de segunda ordem, assim como, para o erro médio quadrático, operando em ambiente estacionário e não estacionário. Estas equações permitem inferências sobre o comportamento do sistema para diversos parâmetros. Os algoritmos são analisados para sinais de entrada autoregressivos (AR).

São apresentadas simulações com o intuito de comprovar a funcionalidade dos modelos analíticos, bem como suas limitações.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

# STATISTICAL ANALYSIS OF THE PERFORMANCE OF A CLASS OF AFFINE PROJECTION ALGORITHMS

Sérgio José Melo de Almeida

April/2004

Advisor: José Carlos Moreira Bermudez, Ph.D.

Area of concentration: communications and signal processing.

Keywords: adaptive algorithms, system identification, statistical analysis.

Number of pages: 182.

ABSTRACT: This work presents a statistical analysis of a class of adaptive algorithms based on the Affine Projection algorithm. The Affine Projection (AP) and the Pseudo AP algorithms are studied. The analysis of these algorithms is motivated by their increased in use applications such as echo cancellation, channel equalization and noise cancellation.

Analytical models for predicting the stochastic behavior of the Affine Projection (AP) and Pseudo AP algorithms are derived for autoregressive (AR) inputs. The analysis of the AP algorithm considers a unit step size (fastest convergence). The Pseudo algorithm is obtained by introducing a step size control parameter in a simplified update equation of the Affine Projection (AP) algorithm (valid only for unit step size). An analytical model is derived for predicting the stochastic behavior of the new algorithm for any step size  $\alpha < 1$ .

Deterministic recursive equations are presented for the mean weight and mean square error (MSE) for a large number of adaptive taps  $N$ , as compared to the algorithm order  $P$ , for operating in both stationary and nonstationary environments.

Monte Carlo simulations illustrate the accuracy of the theoretical models in predicting the behavior of the algorithms.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Filtragem Adaptativa e sua Aplicação no Cancelamento de Eco Acústico</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Filtragem Adaptativa . . . . .	1
1.3 Sistemas Adaptativos . . . . .	3
1.3.1 Estruturas de Filtragem . . . . .	7
1.4 O Eco Acústico e a Estratégia de Cancelamento Aplicando Filtragem Adaptativa . . . . .	11
1.4.1 Descrição do Problema . . . . .	11
1.4.2 Estrutura para o Controle do Eco Acústico . . . . .	14
1.4.3 Algoritmos Adaptativos . . . . .	18
1.4.4 Algoritmos Adaptativos Aplicados ao Cancelamento de Eco Acústico . . . . .	21
1.5 Objetivos do Trabalho . . . . .	25
1.6 Estrutura do Trabalho . . . . .	26
1.7 Trabalhos Publicados e Submetidos . . . . .	28
<b>2 O Algoritmo de Projeções Afins</b>	<b>30</b>
2.1 Introdução . . . . .	30
2.2 Solução de um Sistema Linear Subdeterminado . . . . .	30
2.2.1 Uma Interpretação Alternativa do Algoritmo AP . . . . .	36
2.3 Interpretação Geométrica do Algoritmo AP . . . . .	38
2.4 Conclusão . . . . .	47
<b>3 Análise Estatística do Algoritmo de Projeções Afins com Entrada Autoregressiva - Em Ambiente Estacionário</b>	<b>48</b>
3.1 Introdução . . . . .	48
3.2 Modelo do Sinal de Entrada e Equações do Algoritmo AP . . . . .	49
3.3 Hipóteses Simplificadoras . . . . .	52
3.4 Propriedades - Entrada Autoregressiva . . . . .	54
3.5 Propriedades Vetoriais e Estatísticas . . . . .	59
3.6 Análise do Comportamento Médio dos Coeficientes . . . . .	62
3.7 Resultados de Simulações . . . . .	66
3.7.1 Exemplo 1: . . . . .	66
3.8 O Erro Médio Quadrático - EMQ . . . . .	69

3.8.1	Análise dos Momentos de Segunda Ordem . . . . .	74
3.9	Comportamento do Algoritmo AP em Regime Permanente . . . . .	82
3.10	Resultados de Simulações . . . . .	84
3.10.1	Exemplo 1: . . . . .	85
3.10.2	Exemplo 2: . . . . .	91
3.10.3	Exemplo 3: . . . . .	94
3.11	Conclusão . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Análise Estatística do Algoritmo de Projeções Afins com Entrada Au- toregressiva - Em Ambiente Não Estacionário</b>	<b>97</b>
4.1	Introdução . . . . .	97
4.2	Um Modelo de Dados Não Estacionário . . . . .	98
4.3	Análise do Vetor de Erro dos Coeficientes do Algoritmo AP Operando em um Meio Não Estacionário . . . . .	101
4.4	Análise do Comportamento Médio dos Coeficientes . . . . .	108
4.5	Erro Médio Quadrático . . . . .	109
4.5.1	Análise dos Momentos de Segunda Ordem . . . . .	109
4.6	Resultados de Simulações . . . . .	116
4.6.1	Exemplo 1: . . . . .	117
4.6.2	Exemplo 2: . . . . .	122
4.7	Algoritmo AP em Regime Permanente . . . . .	123
4.8	Conclusão . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Análise Estatística do Pseudo Algoritmo de Projeções Afins com En- trada Autoregressiva - Em Ambiente Estacionário</b>	<b>130</b>
5.1	Introdução . . . . .	130
5.2	Análise do Vetor de Erro dos Coeficientes . . . . .	131
5.3	Análise do Comportamento Médio dos Coeficientes . . . . .	140
5.4	Resultados de Simulações . . . . .	141
5.4.1	Exemplo 1: . . . . .	141
5.5	Erro Médio Quadrático - EMQ do Pseudo Algoritmo AP . . . . .	144
5.5.1	Análise dos Momentos de Segunda Ordem . . . . .	145
5.5.2	Comportamento Médio do Pseudo APA em Regime Permanente	146
5.6	Resultados de Simulações . . . . .	147
5.6.1	Exemplo 1: . . . . .	148
5.6.2	Exemplo 2: . . . . .	149
5.7	Conclusão . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Análise Estatística do Pseudo Algoritmo de Projeções Afins com En- trada Autoregressiva - Em Ambiente Não Estacionário</b>	<b>153</b>
6.1	Introdução . . . . .	153
6.2	Análise do Vetor de Erro dos Coeficientes . . . . .	154
6.3	Análise do Comportamento Médio dos Coeficientes . . . . .	161
6.4	Erro Médio Quadrático . . . . .	162
6.5	Resultados de Simulações . . . . .	165
6.5.1	Exemplo 1: . . . . .	165

---

6.5.2 Exemplo 2: . . . . .	169
6.6 Conclusão . . . . .	171
<b>7 Conclusões</b>	<b>172</b>
<b>A Símbolos e Abreviaturas</b>	<b>176</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>178</b>

# Lista de Figuras

1.1	<i>Diagrama de blocos de um filtro adaptativo.</i>	4
1.2	<i>Predição adaptativa.</i>	6
1.3	<i>Sistema de identificação.</i>	6
1.4	<i>Estrutura adaptativa aplicada na equalização de canais.</i>	7
1.5	<i>Estrutura adaptativa aplicada ao cancelamento de interferência.</i>	7
1.6	<i>Estrutura de um filtro transversal.</i>	8
1.7	<i>Caminho do Eco Acústico.</i>	12
1.8	<i>Modelo do sistema.</i>	13
1.9	<i>Cancelamento de eco acústico usando filtro adaptativo.</i>	14
1.10	<i>Diagrama em blocos do AEC.</i>	15
2.1	<i>Estimação linear.</i>	31
2.2	<i>Ilustração geométrica do algoritmo NLMS.</i>	39
2.3	<i>Ilustração geométrica do novo algoritmo.</i>	40
3.1	<i>Comportamento do EMQ do algoritmo AP para diferentes valores de <math>P</math>.</i>	54
3.2	<i>Diagrama de blocos do sistema adaptativo.</i>	55
3.3	<i>Projeção do vetor de entrada <math>\mathbf{u}(n)</math> no subespaço <math>\mathbf{U}(n)</math> (<math>P = 2</math>).</i>	56
3.4	<i>Verificação da condição de estabilidade. (a) <math>E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\}</math> para <math>N=64</math> e <math>P=61</math>, estável; (b) <math>E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\}</math> para <math>N=64</math> e <math>P=63</math>, instável.</i>	65
3.5	<i>Verificação da condição de estabilidade. (a) EMQ para o caso 3.4(a); (b) EMQ para o caso 3.4(b).</i>	66
3.6	<i>Comportamento médio dos coeficientes – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(5), <math>N = 64</math>. Simulação (a)<math>w_{64}</math>; (b)<math>w_{32}</math>; (c)<math>w_{16}</math>; (d)<math>w_8</math> e modelo teórico (e)<math>w_{64}</math>; (f)<math>w_{32}</math>; (g)<math>w_{16}</math>; (h)<math>w_8</math></i>	67
3.7	<i>Comportamento médio dos coeficientes – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(2), <math>N = 128</math>. Simulação (a)<math>w_{128}</math>; (b)<math>w_{64}</math>; (c)<math>w_{32}</math>; (d)<math>w_8</math> e modelo teórico (e)<math>w_{128}</math>; (f)<math>w_{64}</math>; (g)<math>w_{32}</math>; (h)<math>w_8</math></i>	68
3.8	<i>Resposta impulsiva <math>\mathbf{w}^o</math> usada em todos os exemplos. Em cada exemplo as <math>N</math> primeiras amostras desta resposta são os elementos de <math>\mathbf{w}^o</math></i>	85
3.9	<i>EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(2), <math>N = 64</math>, <math>SNR = 60dB</math>. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) Modelo em [4]; (d) Modelo em [2]; (e) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)</i>	87

3.10	<i>EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(5), <math>N = 64</math>, <math>SNR = 60dB</math>. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) Modelo em [4]; (d) Modelo em [2]; (e) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97) . . . . .</i>	88
3.11	<i>EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(2), <math>N = 128</math>, <math>SNR = 60dB</math>. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) Modelo em [4]; (d) Modelo em [2]; (e) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97) . . . . .</i>	89
3.12	<i>EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(9), <math>N = 128</math>, <math>SNR = 60dB</math>. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) Modelo em [4]; (d) Modelo em [2]; (e) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97) . . . . .</i>	90
3.13	<i>EMQ – Entrada AR(2) Gaussiana, algoritmo AP(9), <math>N = 64</math>, <math>SNR = 60dB</math>. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97) . . . . .</i>	91
3.14	<i>EMQ – Entrada AR(2) Gaussiana, algoritmo AP(9), <math>N = 64</math>, <math>SNR = 60dB</math>. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97) . . . . .</i>	92
3.15	<i>EMQ – Entrada AR(3) Gaussiana, algoritmo AP(9), <math>N = 64</math>, <math>SNR = 60dB</math>. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97) . . . . .</i>	93
3.16	<i>EMQ – Entrada Binária Correlacionada, <math>a_1 = 0,7</math>, algoritmo AP(2), <math>N = 64</math>, <math>SNR = 60dB</math>. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Comportamento previsto pelo modelo proposto; (c) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97) . . . . .</i>	94
3.17	<i>EMQ – Entrada Binária Correlacionada, <math>a_1 = 0,7</math>, algoritmo AP(5), <math>N = 64</math>, <math>SNR = 60dB</math>. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Comportamento previsto pelo modelo proposto; (c) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97) . . . . .</i>	95
4.1	<i>Identificação de um processo não estacionário usando filtragem adaptativa.</i>	99
4.2	<i>Modelagem de um sistema desconhecido variante no tempo. . . . .</i>	100
4.3	<i>EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(3), <math>N = 64</math>, <math>S = 1</math>, <math>\sigma_q^2 = 1,562 \times 10^{-8}</math>, <math>\sigma_u^2 = 1</math>. (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto. . . . .</i>	118
4.4	<i>EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(3), <math>N = 64</math>, <math>S = 2</math>, <math>\sigma_q^2 = 6,25 \times 10^{-8}</math>, <math>\sigma_u^2 = 1</math>. (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto. . . . .</i>	119
4.5	<i>EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(3), <math>N = 64</math>, <math>S = 10</math>, <math>\sigma_q^2 = 1,6 \times 10^{-6}</math>, <math>\sigma_u^2 = 1</math>. (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto. . . . .</i>	120
4.6	<i>EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(5), <math>N = 64</math>, <math>S = 2</math>, <math>\sigma_q^2 = 6,25 \times 10^{-8}</math>, <math>\sigma_u^2 = 1</math>. (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto. . . . .</i>	121

4.7	<i>EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(9), <math>N = 64</math>, <math>S = 2</math>, <math>\sigma_q^2 = 6,25 \times 10^{-8}</math>, <math>\sigma_u^2 = 1</math>. (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.</i>	121
4.8	<i>EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(3), <math>N = 128</math>, <math>S = 1</math>, <math>\sigma_q^2 = 7,812 \times 10^{-9}</math>, <math>\sigma_u^2 = 1</math>. (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.</i>	122
4.9	<i>EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(3), <math>N = 128</math>, <math>S = 10</math>, <math>\sigma_q^2 = 7,812 \times 10^{-7}</math>, <math>\sigma_u^2 = 1</math>. (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.</i>	123
4.10	<i>EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(3), <math>N = 256</math>, <math>S = 1</math>, <math>\sigma_q^2 = 3,906 \times 10^{-9}</math>, <math>\sigma_u^2 = 1</math>. (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.</i>	123
4.11	<i>Desajuste devido a não-estacionaridade para (a) <math>N = 64</math> e (b) <math>N = 128</math>, com <math>P = 2</math>.</i>	127
4.12	<i>Desajuste: (a) algoritmo AP, (b) LMS com <math>\mu = \mu_{min}</math> e (c) LMS com <math>\mu = \mu_{max}</math></i>	128
5.1	<i>Comportamento do Pseudo-APA para alguns valores de <math>\alpha</math>.</i>	132
5.2	<i>Avaliação gráfica da aproximação assumida na análise</i>	139
5.3	<i>Comportamento médio dos coeficientes - Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(3), <math>N = 64</math>, <math>SNR = 60dB</math> com passo de adaptação <math>\alpha = 0,8</math>. simulação (a)<math>w_{64}</math>; (b)<math>w_{40}</math>; (c)<math>w_{20}</math> e modelo teórico (d)<math>w_{64}</math>; (e)<math>w_{40}</math>; (f)<math>w_{20}</math> (100 realizações).</i>	142
5.4	<i>Comportamento médio dos coeficientes - Entrada AR(1) Gaussiana, <math>a_1 = -0,9</math>, algoritmo AP(3), <math>N = 64</math>, <math>SNR = 60dB</math> com passo de adaptação <math>\alpha = 0,8</math>. simulação (a)<math>w_{128}</math>; (b)<math>w_{80}</math>; (c)<math>w_{40}</math> e modelo teórico (d)<math>w_{128}</math>; (e)<math>w_{80}</math>; (f)<math>w_{40}</math> (100 realizações).</i>	143
5.5	<i>EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50). <math>\alpha = 0,2</math>, <math>N=64</math> e <math>P=2</math></i>	149
5.6	<i>EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50). <math>\alpha = 0,2</math>, <math>N=64</math> e <math>P=8</math></i>	150
5.7	<i>EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50). <math>\alpha = 0,5</math>, <math>N=128</math> e <math>P=2</math>.</i>	150
5.8	<i>EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50). <math>\alpha = 0,5</math>, <math>N=128</math> e <math>P=8</math>.</i>	151
5.9	<i>EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50). <math>\alpha = 0,8</math>, <math>N=64</math> e <math>P=8</math></i>	151
5.10	<i>EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50). <math>\alpha = 0,1</math>, <math>N=64</math> e <math>P=8</math></i>	152

- 6.1 *EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo AP(3),  $N = 64$ ,  $S = 1$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\sigma_q^2 = 2,876 \times 10^{-9}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto. . . . . 166*
- 6.2 *EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo AP(3),  $N = 64$ ,  $S = 2$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\sigma_q^2 = 1,150E \times 10^{-8}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto. . . . . 167*
- 6.3 *EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo AP(3),  $N = 64$ ,  $S = 10$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\sigma_q^2 = 2,876 \times 10^{-7}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto. . . . . 168*
- 6.4 *EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo AP(5),  $N = 128$ ,  $S = 2$ ,  $\alpha = 0,4$ ,  $\sigma_q^2 = 5,752 \times 10^{-9}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto. . . . . 169*
- 6.5 *EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo AP(5),  $N = 128$ ,  $S = 2$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\sigma_q^2 = 5,752 \times 10^{-9}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto. . . . . 170*

# Capítulo 1

## Filtragem Adaptativa e sua Aplicação no Cancelamento de Eco Acústico

### 1.1 Introdução

Neste capítulo são introduzidos os conceitos iniciais para melhor compreensão do trabalho e apresentados os objetivos principais e sua relevância. Basicamente são abordados os seguintes tópicos: filtragem adaptativa, cancelamento de eco acústico e algoritmos adaptativos aplicados na estratégia de cancelamento do eco acústico.

### 1.2 Filtragem Adaptativa

A filtragem adaptativa é aplicada atualmente em um grande número de problemas de engenharia. Por exemplo, a técnica tem sido explorada com sucesso em diversos sistemas de comunicação, tais como adaptação de antenas, equalização de canais para transmissão de dados, cancelamento de eco em telefonia de longa distância, cancelamento de interferência, estimação espectral, análise e síntese de voz e, dentre as aplicações mais recentes, no cancelamento de eco acústico.

Uma inspeção mais detalhada das aplicações da filtragem adaptativa pode ser encontrada nas referências [40, 16, 12, 21, 36, 32]. Em [16], é apresentado um breve histórico



do desenvolvimento da teoria de estimação linear, filtragem adaptativa e aplicações do processamento adaptativo de sinais. Diversas referências são citadas numa seqüência cronológica correspondente à evolução da pesquisa nesta área.

O estudo da filtragem adaptativa, que teve grande impulso com o desenvolvimento do algoritmo *Least Mean-Square* (LMS) por Widrow e Hopf em 1959, tem recebido considerável atenção de muitos pesquisadores nas últimas décadas. Este interesse deve-se ao fato de muitos problemas práticos não poderem ser resolvidos satisfatoriamente utilizando-se filtros digitais fixos. Em algumas aplicações os coeficientes do filtro digital devem ser determinados em cada utilização específica. Este é o caso de equalizadores de canal usados em comunicações telefônicas, já que o canal é diferente a cada ligação. Em outras aplicações, as variações do sistema físico envolvido ou das propriedades dos sinais são rápidas. Neste caso, os coeficientes do filtro devem acompanhar as variações do sistema em operação. Dessa forma, a aplicação de filtros adaptativos justifica-se por estes não necessitarem de informações *a priori* sobre a estatística do sinal a ser processado. Estes sistemas caracterizam-se por apresentarem coeficientes que são alteráveis ou ajustáveis, de tal modo que sua ação ou desempenho melhore através do contato com o próprio ambiente.

Segundo Widrow e Stearns [40], os sistemas adaptativos possuem todas ou algumas das seguintes características:

1. Adaptação automática à medida em que ocorre a modificação do ambiente e/ou mudança das necessidades do sistema (auto-otimização);
2. Podem ser treinados para desenvolver uma tarefa específica de filtragem ou decisão, ou seja, podem ser programados através de um processo de treinamento (auto-programáveis);

3. Em decorrência do item anterior, não precisam de procedimentos elaborados de síntese (são basicamente auto-programáveis);
4. Podem extrapolar o espaço de conhecimento e lidar com novas situações após o treinamento com um pequeno conjunto de padrões de entrada (auto-aprendizado);
5. Até certo ponto podem reparar a si mesmos, ou seja, podem adaptar-se em regiões próximas da ótima mesmo quando sujeitos a certos tipos de defeitos ou limitações;
6. Geralmente são mais complexos e difíceis de analisar que sistemas não adaptativos, mas oferecem a possibilidade de um desempenho substancialmente melhor quando as características do ambiente são desconhecidas ou variantes no tempo.

O rápido aumento no campo de aplicações dos filtros adaptativos deve-se aos recentes progressos no desenvolvimento de microcircuitos, o que tornou disponível processadores de sinais (*DSP-Digital Signal Processors*) mais velozes. Esse aumento na utilização de filtros adaptativos e a implementação de algoritmos em tempo real tornou necessário o desenvolvimento de modelos analíticos que sejam capazes de prever o comportamento dos algoritmos em condições de operação, ou o mais próximo possível disso.

Motivado pelos benefícios evidenciados nesta seção, procura-se neste trabalho estudar aspectos importantes na solução utilizando a filtragem adaptativa quando aplicada ao problema de cancelamento de eco acústico.

### 1.3 Sistemas Adaptativos

Os sistemas adaptativos são essencialmente filtros com coeficientes variantes no tempo e que são modificados periodicamente na tentativa de satisfazer a algum critério de desempenho estabelecido. Este critério de desempenho é normalmente uma função do erro do processo de adaptação, a qual deve ser minimizada.

A operação de um sistema de filtragem adaptativa envolve dois processos básicos: um processo de filtragem com o objetivo de produzir uma saída em resposta a uma seqüência de entrada, e um processo adaptativo. O propósito é fornecer um mecanismo para ajuste de um conjunto de parâmetros utilizado no processo de filtragem.

Na Figura 1.1, tem-se a configuração genérica de um filtro adaptativo. O sinal  $d(n)$  representa uma resposta desejada, do qual é subtraída a saída atual  $y(n)$  de um filtro digital. O objetivo é que  $y(n)$  seja uma estimativa de  $d(n)$ . O erro na saída  $e(n)$  é a diferença entre o sinal desejado  $d(n)$  e a estimativa  $y(n)$ , ou seja,  $e(n) = d(n) - y(n)$ . Este sinal de erro é utilizado no bloco de adaptação com a finalidade de forçar o sistema adaptativo a corrigir os coeficientes do filtro. Frequentemente, essa correção baseia-se na minimização de uma função do erro  $e(n)$ .

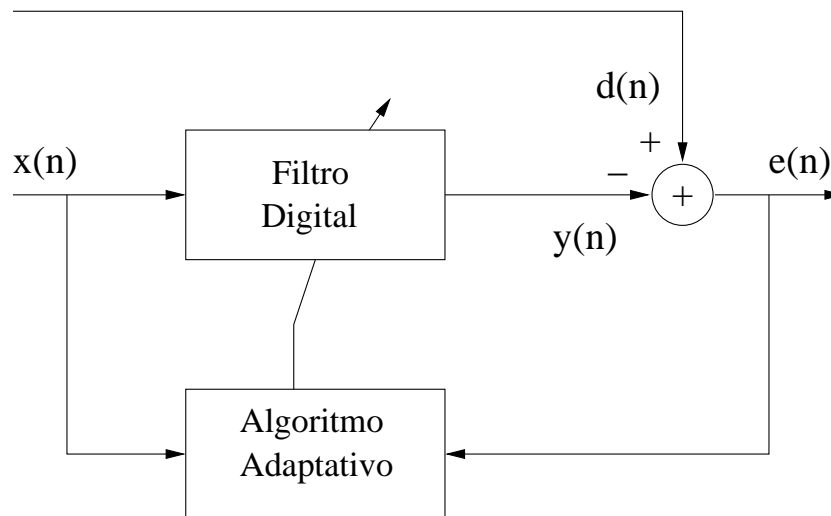


Figura 1.1: *Diagrama de blocos de um filtro adaptativo.*

A avaliação do desempenho do sistema adaptativo pode ser feita utilizando os mais variados critérios. Entretanto, o critério mais aplicado a este propósito é baseado no erro médio quadrático (EMQ) expresso matematicamente pela equação:

$$\xi(n) = E\{e^2(n)\} = E\{(d(n) - y(n))^2\} \quad (1.1)$$

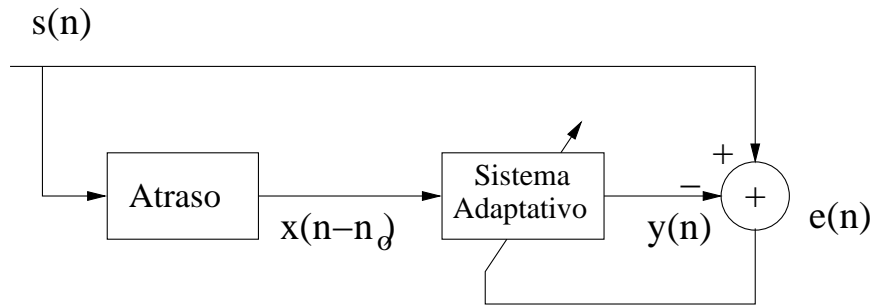
onde  $E\{\cdot\}$  corresponde ao valor esperado (esperança estatística) do erro quadrático.

De acordo com a teoria de filtros de Wiener, que é proveniente de uma base estatística, os coeficientes ótimos de um filtro linear são obtidos da minimização do erro médio quadrático. Esta função custo é escolhida em virtude de permitir uma manipulação matemática mais fácil, além de apresentar apenas um único ponto de mínimo, no caso um hiperparabolóide, que pode ser calculado facilmente utilizando-se a estatística de segunda-ordem do processo aleatório implícito.

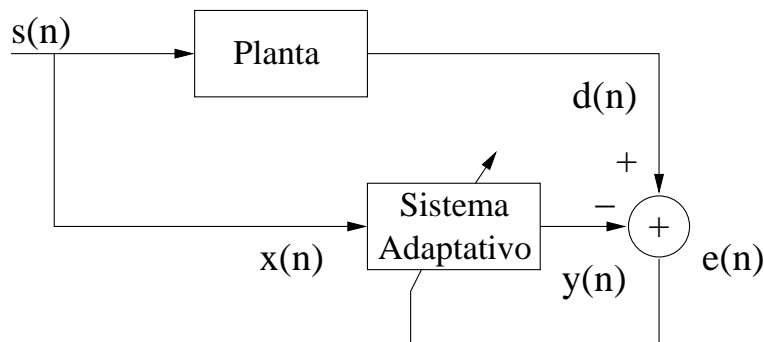
A avaliação de  $\xi(n)$  requer certa estatística que é obtida através da média de um conjunto de medições (*ensemble*), que pode não ser possível em aplicações práticas. O problema é resolvido assumindo a propriedade de ergodicidade do sinal de entrada, isto é, toma-se a média temporal ao invés da média de um conjunto de medições ou *ensemble* [12].

Existem diversas aplicações que se beneficiam da solução adaptativa. A maioria dessas aplicações recai em uma das seguintes classes de problemas: predição, identificação de sistemas, modelagem inversa e cancelamento de interferência [40, 16].

A aplicação de um sistema adaptativo na operação de predição, apresentada na Fig. 1.2, consiste na utilização de  $M$  amostras passadas de um sinal  $\{x(n), n_1 \leq n \leq n_2\}$ , para estimar a amostra corrente de um sinal aleatório  $x(n_0)$ . Existem três casos de interesse: (1) predição regressiva (*forward*), quando  $n_0 > n_2$ ; (2) predição progressiva (*backward*), quando  $n_0 < n_1$ ; e (3) interpolação, quando  $n_1 < n_0 < n_2$ . Nesse último caso, o valor de  $n = n_0$  não é utilizado no cálculo da estimação. Dos casos citados, o mais aplicado é a predição linear *forward*, onde a estimação é feita usando uma combinação linear das amostras de  $x(n)$  passadas [21].

Figura 1.2: *Predição adaptativa.*

Na Figura 1.3 apresenta-se uma estrutura adaptativa utilizada na identificação de sistemas ou modelamento. Nesta configuração, tanto a planta quanto o filtro adaptativo são alimentados pela mesma entrada. O filtro adaptativo irá ajustar-se com o objetivo de tornar sua saída igual ou próxima à saída da planta. Sistemas de identificação são utilizados no modelamento de sistemas que variam lentamente no tempo, comparativamente à velocidade do processamento digital empregado.

Figura 1.3: *Sistema de identificação.*

A configuração da Fig. 1.4 é utilizada em diversas aplicações, como modelamento inverso, processamento de voz, síntese de filtros digitais, sistemas de controle, equalização de canais telefônicos, entre outras.

Conforme [40], a inclusão do atraso de amostras do sinal de entrada permite reduzir o valor do erro médio quadrático mínimo. Esse atrasador procura compensar o retardo ocasionado pela planta no sinal  $s(n)$ . Em muitas aplicações, este procedimento torna

desnecessária a utilização de um preditor no sistema adaptativo.

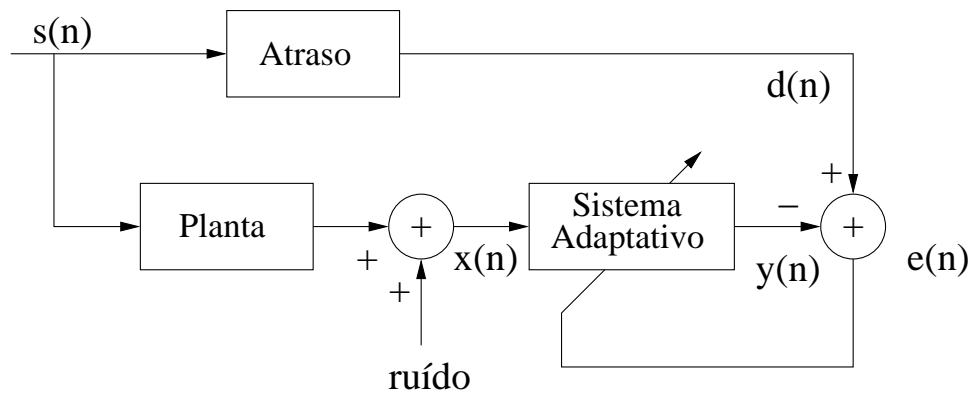


Figura 1.4: *Estrutura adaptativa aplicada na equalização de canais.*

Outra configuração adaptativa bastante utilizada é apresentada na Fig. 1.5. Neste diagrama, apresenta-se um sinal de entrada  $s(n)$  somado a um ruído  $r_a(n)$ . O objetivo do sistema adaptativo é produzir uma saída  $y(n)$  que se assemelhe a  $r_a(n)$ , de forma a obter-se  $e(n) = s(n)$ , ou seja, o sinal de entrada  $s(n)$  sem a degradação gerada pelo ruído  $r_a(n)$ .

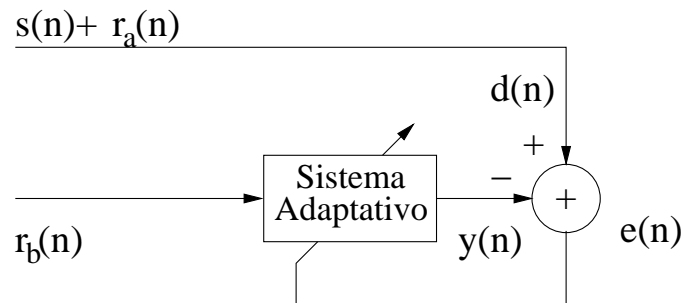


Figura 1.5: *Estrutura adaptativa aplicada ao cancelamento de interferência.*

### 1.3.1 Estruturas de Filtragem

Quanto à duração das respostas impulsivas dos filtros adaptativos, existem dois tipos de filtro digital que podem ser usados, que são: resposta ao impulso de duração finita (FIR) e resposta ao impulso de duração infinita (IIR). Filtros FIR incorporam

apenas zeros de transmissão (todos os seus pólos estão na origem do plano  $z$ ). Conseqüentemente, são sempre estáveis e possibilitam respostas de fase linear. É a estrutura mais utilizada para filtros adaptativos em tempo real, devido à estabilidade inerente e simplicidade de implementação.

Filtros IIR possuem melhor capacidade de modelamento do que os filtros FIR para sistemas com resposta em frequência bem comportada. Permitem que os sistemas físicos possam ser melhor descritos através de equações de diferenças envolvendo tanto a entrada como a saída do processo. Estas equações conduzem, por sua vez, a funções de transferência racionais. Entretanto, estruturas IIR apresentam problemas de estabilidade. Além disso, alguns trabalhos recentes mostram que o modelo IIR não oferece bom desempenho em algumas aplicações como, por exemplo, no cancelamento do eco acústico [18, 36].

A estrutura utilizada neste trabalho para o filtro adaptativo é a estrutura transversal mostrada na Fig. 1.6. O número de elementos de atraso determina a duração finita de sua resposta ao impulso, ou seja, a ordem do filtro. O elemento de atraso é identificado pelo operador  $z^{-1}$ , e os elementos  $w_k$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$  representam os coeficientes do filtro adaptativo.

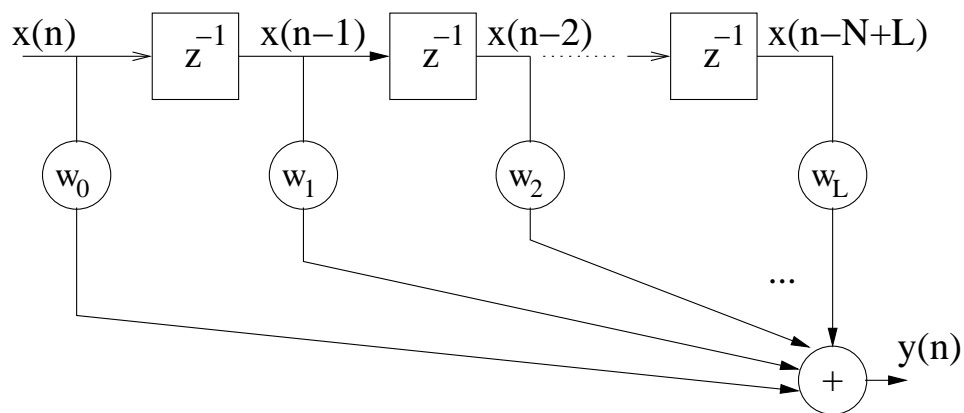


Figura 1.6: *Estrutura de um filtro transversal.*

Usando a estrutura de filtragem da Fig. 1.6, a função erro médio quadrático referente ao diagrama em blocos da Fig. 1.1 é dada por:

$$\begin{aligned}\xi(n) &= E\{e^2(n)\} = E\{[d(n) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}]^2\} \\ &= E\{d^2(n)\} - 2\mathbf{p}^T(n)\mathbf{w} + \mathbf{w}^T\mathbf{R}(n)\mathbf{w}\end{aligned}\quad (1.2)$$

onde  $d(n)$  é o sinal desejado,  $\mathbf{p}(n) = E\{d(n)\mathbf{x}(n)\}$  é definido como o vetor de correlações-cruzadas entre  $d(n)$  e  $\mathbf{x}(n)$ ,  $\mathbf{x}(n)$  é o vetor de observações do sinal de entrada,  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$  e  $\mathbf{w}$  é o vetor de coeficientes do filtro. A matriz  $\mathbf{R}(n) = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\}$  é a matriz de autocorrelação do vetor de entrada  $\mathbf{x}(n)$ .

Para sinais estacionários,  $\mathbf{p}(n)$  e  $\mathbf{R}(n)$  são invariantes no tempo, ou seja,  $\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}$  e  $\mathbf{R}(n) = \mathbf{R}$ . A matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}$  desempenha uma função chave no projeto e na análise de filtros adaptativos. Em particular, são bastante úteis as seguintes propriedades da matriz  $\mathbf{R}$  de um processo estacionário [40, 16, 21]:

1. A matriz de autocorrelação de um processo estocástico estacionário é simétrica, isto é,  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$ .
2. A matriz  $\mathbf{R}$  de um processo estocástico estacionário é *toeplitz*, isto significa que todos os elementos em qualquer diagonal paralela à diagonal principal são iguais.
3. A matriz  $\mathbf{R}$  é semi-definida positiva. Na prática, pode-se geralmente considerar  $\mathbf{R}$  definida positiva [16]

Neste trabalho consideram-se sistemas adaptativos com sinais de entrada  $x(n)$  estacionários.

A finalidade do algoritmo adaptativo, como já mencionado, é ajustar o filtro para minimizar o valor médio quadrático de  $e(n)$ . O sistema de adaptação irá continuamente ajustando os coeficientes do filtro, buscando minimizar o erro. Da equação (1.2)



pode-se observar que o erro médio quadrático é uma função quadrática do vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$  com um mínimo global, já que corresponde a uma superfície quadrática convexa onde a matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}$  é definida positiva. Dessa forma, para obter o conjunto de elementos do vetor  $\mathbf{w}(n)$  que minimize a função  $\xi(n)$ , também conhecida como superfície de desempenho, é necessário resolver um conjunto de equações que resulta deste problema de minimização de função. Para esta finalidade, o método do gradiente descendente - *steepest descent* - [40, 16, 21] pode ser utilizado.

Este método utiliza o gradiente da superfície de desempenho, procurando seu ponto mínimo. O gradiente em qualquer ponto da superfície pode ser obtido diferenciando a equação (1.2) em relação ao vetor dos coeficientes do filtro adaptativo.

$$\nabla \xi(n) = \frac{\partial \xi(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w} \quad (1.3)$$

Igualando a equação (1.3) a zero, encontra-se o valor ótimo do vetor de coeficientes e, conseqüentemente, chega-se a :

$$\mathbf{w}^o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (1.4)$$

A equação (1.4) é a solução ótima de Wiener para um filtro digital cuja resposta ao impulso tem comprimento finito (FIR). Obviamente, essa resposta requer que  $\mathbf{R}$  seja inversível [40, 16, 21].

No caso de sistemas adaptativos,  $\mathbf{w}$  torna-se  $\mathbf{w}(n)$ . O algoritmo adaptativo ajusta  $\mathbf{w}(n)$  a cada iteração de forma a aproximá-lo o máximo possível de  $\mathbf{w}^o$ .

## 1.4 O Eco Acústico e a Estratégia de Cancelamento Aplicando Filtragem Adaptativa

No contexto de abrangência da filtragem adaptativa encontra-se o problema de cancelamento do eco acústico. Diversos trabalhos disponíveis na literatura tratam desse problema buscando variadas estratégias para solucioná-lo ou amenizá-lo [7, 8, 33, 44, 20, 45, 37, 10, 15]. Esta seção apresenta uma breve introdução ao problema do eco acústico e à estrutura mais comumente utilizada para o seu cancelamento, a qual é baseada na estratégia de filtragem adaptativa. Também são apresentados os requisitos necessários para a escolha de um determinado algoritmo adaptativo a ser utilizado no filtro cancelador do eco acústico.

### 1.4.1 Descrição do Problema

O cancelamento do eco acústico (AEC - *Acoustic Echo Cancellation*) é um problema de identificação de sistemas, pois busca-se medir as alterações produzidas por um sistema em sinais aplicados ao mesmo e usá-las para a construção de um modelo matemático. No caso do eco acústico, o sistema a ser identificado é representado pelo conjunto formado por um microfone e um alto-falante, que é denominado por LEM, da tradução do inglês *Loudspeaker-Enclosure-Microphone* [7]. No sistema LEM, o microfone capta o sinal emitido pelo alto-falante diretamente ou como resultado de reflexões deste mesmo sinal nos limites de um determinado ambiente (paredes, piso, teto e etc.) [7, 8]. Quando o sinal refletido sofre um atraso da ordem de um quarto de segundo, uma conversação entre os locutores A e B pode se tornar impraticável. Atrasos da ordem de 10 milisegundos são definidos como reverberações. Atrasos nesta ordem geralmente acontecem em virtude de raramente ocorrerem conversações em ambientes anecóicos (sem reflexões) [14]. Na Figura 1.7 é mostrado como o sinal de voz do locutor A é refletido no ambiente onde encontra-se o locutor B, sendo captado pelo microfone juntamente com a voz do locutor B. Esta situação, como já comentado, configura a

influência do sistema LEM.

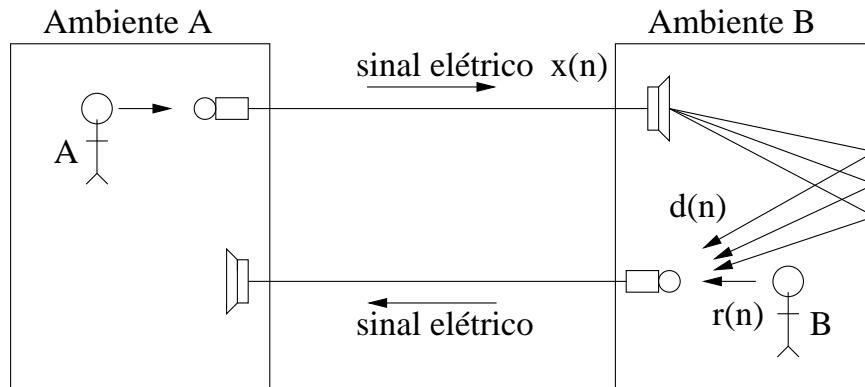


Figura 1.7: *Caminho do Eco Acústico.*

Entre os principais sistemas onde normalmente o problema do eco acústico surge, pode-se citar:

- sistemas de teleconferência;
- telefones *hands-free*;
- sistemas controlados por voz;
- sistemas públicos de sonorização;
- aparelhos de surdez.

Na Figura 1.8 apresenta-se o diagrama em blocos ilustrando o modelo do sistema LEM acrescentado do sinal de voz local  $s(n)$  e ruído  $m(n)$ . Na figura pode-se identificar todas as prováveis fontes de sinal que estão presentes no ambiente B da Figura 1.7.

Assumindo que a resposta ao impulso do sistema LEM tenha duração finita, o sinal de eco  $d(n)$  pode ser expresso por:

$$d(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(n)x(n-i) = \mathbf{h}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (1.5)$$

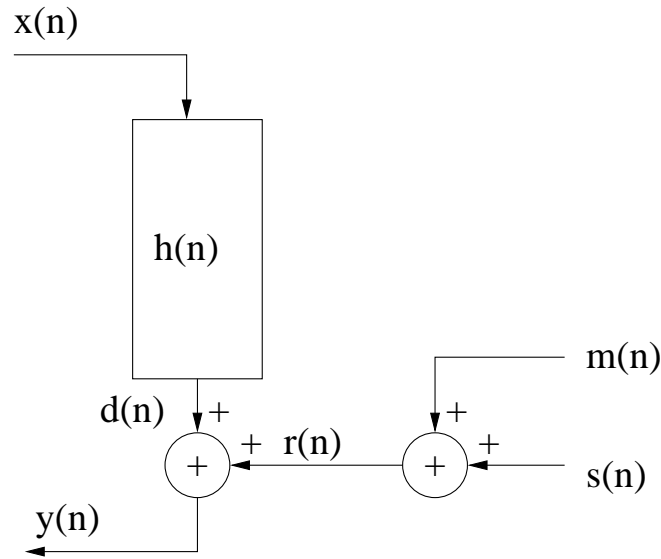


Figura 1.8: Modelo do sistema.

onde o vetor  $\mathbf{x}(n)$ , correspondente ao sinal de voz gerado pelo locutor A na Fig. 1.7, consiste das  $N$  últimas amostras do sinal de excitação:

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T \quad (1.6)$$

O vetor  $\mathbf{h}(n)$  representa a resposta impulsiva do sistema LEM, ou seja:

$$\mathbf{h}(n) = [h_0(n) \ h_1(n) \ \dots \ h_{N-1}(n)]^T \quad (1.7)$$

O sistema é completado com a adição do sinal  $r(n)$  gerado no ambiente B. Este sinal pode ser expresso como:

$$r(n) = s(n) + m(n) \quad (1.8)$$

onde  $m(n)$  é um ruído de fundo que é responsável pela degradação do sinal de voz local, e  $s(n)$  é o sinal de voz gerado localmente.

E, finalmente, a equação do sinal total na saída do processo pode ser escrita como:

$$y(n) = d(n) + r(n) \quad (1.9)$$

### 1.4.2 Estrutura para o Controle do Eco Acústico

O cancelamento do eco acústico é um problema crítico nos mais variados sistemas acústicos de comunicação. Este fato provocou o surgimento de uma variedade de técnicas onde procura-se estabelecer um equilíbrio entre o desempenho e a complexidade computacional do sistema a ser utilizado no controle do eco acústico [7, 20, 33, 15].

Na Figura 1.9 apresenta-se a estrutura de um sistema para cancelamento do eco acústico, onde um filtro cancelador de eco (FCE) é colocado em paralelo com o sistema LEM, com o objetivo de identificar seu comportamento. Em virtude de variações de temperatura, movimentação dos interlocutores, modificações nas posições dos objetos no ambiente, entre outras perturbações, a resposta impulsiva do sistema LEM torna-se variante no tempo. Dessa forma, o filtro cancelador de eco (FCE) deve ser adaptativo, ou seja, o filtro deve ser capaz de acompanhar as variações na resposta impulsiva do sistema LEM.

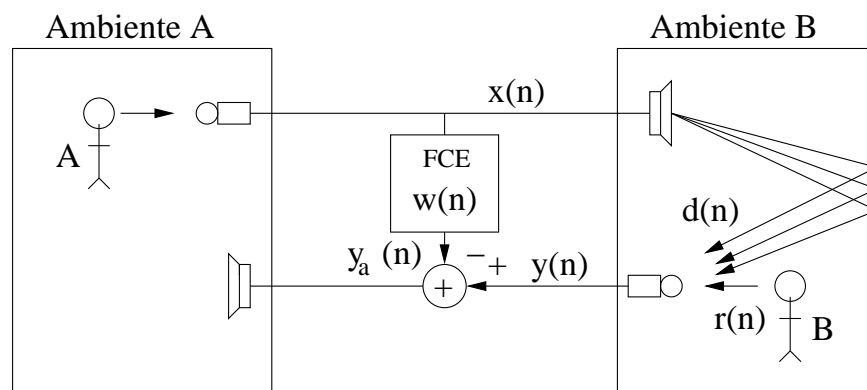


Figura 1.9: *Cancelamento de eco acústico usando filtro adaptativo.*

A Figura 1.10 mostra em diagrama de blocos o detalhamento das fontes de sinal

presentes no processo de cancelamento do eco acústico.

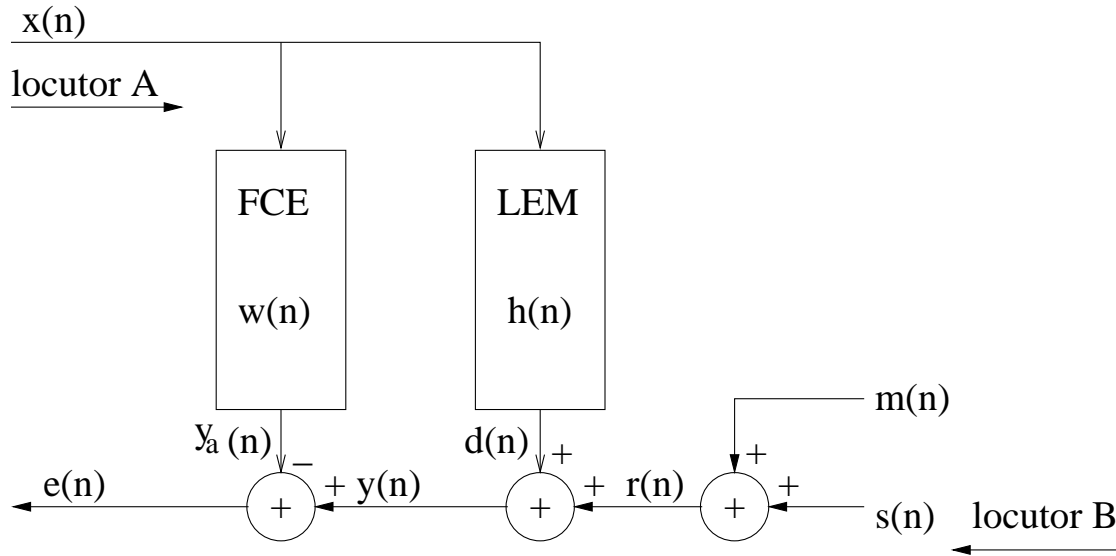


Figura 1.10: Diagrama em blocos do AEC.

A saída estimada pelo FCE é dada por:

$$y_a(n) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (1.10)$$

onde  $\mathbf{x}(n)$  é o sinal de excitação, e  $\mathbf{w}(n)$  é o vetor de coeficientes que representa a resposta impulsiva do FCE, formado por:

$$\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]^T \quad (1.11)$$

O filtro adaptativo deve fazer com que os coeficientes converjam para a resposta impulsiva  $\mathbf{h}(n)$  do sistema LEM, isto é, deve tornar o erro  $e(n)$  o menor possível. O erro medido na saída do sistema para cancelamento do eco acústico é dado por:

$$e(n) = y(n) - y_a(n) = \mathbf{x}^T(n)[\mathbf{h}(n) - \mathbf{w}(n)] + r(n) \quad (1.12)$$

onde  $y(n) = d(n) + r(n) = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{h}(n) + r(n)$ .

É importante observar que, normalmente, a resposta impulsiva do sistema LEM tem ordem infinita e, por este motivo, apenas os  $N$  primeiros coeficientes são considerados dentro do vetor  $\mathbf{h}(n)$ . Se os  $N$  primeiros coeficientes do filtro adaptativo se ajustarem com os  $N$  primeiros coeficientes da resposta impulsiva do sistema LEM, o desempenho do cancelamento máximo obtido com um número finito de coeficientes pode ser medido através da atenuação, em decibéis, do eco, gerando a medida conhecida como *ERLE* (*Echo Return Loss Enhancement*) [7]. A medida desta atenuação é calculada pela expressão:

$$ERLE = 10 \cdot \log \frac{E\{d^2(n)\}}{E\{(d(n) - y_a(n))^2\}} \quad (1.13)$$

onde  $d(n)$  é o sinal na saída do sistema LEM, que corresponde ao sinal gerado pelo locutor A e processado pelo sistema LEM, e  $y_a(n)$  a saída do FCE. Este último também operando com o sinal do locutor A como entrada.

Assumindo  $x(n)$  branco e estacionário e nenhuma distorção local, a atenuação máxima será dada por:

$$ERLE = 10 \cdot \log \frac{E\left\{\left[\sum_{i=0}^{\infty} h_i(n)x(n-i)\right]^2\right\}}{E\left\{\left[\sum_{i=0}^{\infty} h_i(n)x(n-i) - \sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i)\right]^2\right\}} \quad (1.14)$$

onde  $N - 1$  é a ordem do FCE.

Para facilitar a análise na avaliação do desempenho do FCE, a expressão (1.14) pode ser re-escrita como:

$$ERLE = 10 \cdot \log \frac{E\left\{\left[\sum_{i=0}^{\infty} h_i(n)x(n-i)\right]^2\right\}}{E\left\{\left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(h_i(n) - w_i(n)\right)x(n-i) + \sum_{i=N}^{\infty} h_i(n)x(n-i)\right]^2\right\}} \quad (1.15)$$

Da equação (1.15) é fácil observar que quando  $w_i(n) = h_i(n)$  para  $0 \leq i < N - 1$ ,

o *ERLE* terá o seguinte valor:

$$ERLE = 10 \cdot \log \frac{\sum_{i=0}^{\infty} h_i^2(n)}{\sum_{i=N}^{\infty} h_i^2(n)} \quad (1.16)$$

Este resultado mostra que o máximo *ERLE* obtido depende linearmente da ordem do filtro cancelador de eco [7, 33].

Segundo Schmidt [33], medições em tempo-real mostram que tanto o modelo linear como os utilizados para representar o sistema de cancelamento do eco acústico ( FCE, sistema LEM e sinais adicionais) têm suas limitações. Estas limitações são provenientes das não-linearidades dos alto-falantes comuns, de amplificadores analógicos e de microfones de baixa qualidade. Dessa forma, modelos lineares são apenas uma aproximação razoável do sistema real.

O bom desempenho de uma estratégia para o cancelamento do eco acústico está ligado diretamente à eficiência do filtro adaptativo. Conforme observado na Fig. 1.1, a sua estrutura é composta de um filtro digital que incorpora um algoritmo adaptativo cujo propósito é ajustar automaticamente os parâmetros para minimizar alguma função do erro (normalmente o EMQ). Dessa forma, o algoritmo a ser utilizado é de fundamental importância no desempenho do sistema. Nas seções ulteriores, serão abordadas as características para avaliação de desempenho de um algoritmo adaptativo, bem como alguns algoritmos freqüentemente utilizados em aplicações práticas. Em seguida, discute-se em mais detalhes a aplicação desses algoritmos adaptativos no controle do eco acústico.



### 1.4.3 Algoritmos Adaptativos

O desempenho de um algoritmo adaptativo pode ser avaliado por um conjunto de características. As principais são [16]:

1. Taxa de convergência: Define o número de iterações necessárias para o algoritmo levar os coeficientes do filtro para um valor em torno da solução ótima de Wiener, no sentido médio quadrático.
2. Desajuste: É uma medida quantitativa da diferença entre o erro médio quadrático residual devido ao algoritmo e o erro médio quadrático mínimo, que é produzido pelo filtro de Wiener.
3. Tracking: Capacidade do algoritmo de acompanhar as variações das características estatísticas dos sinais em um meio não-estacionário. O desempenho de rastreamento (*tracking*) é influenciado pela taxa de convergência e pelas flutuações em regime permanente.
4. Robustez: Capacidade do algoritmo operar satisfatoriamente com sinal de entrada mal condicionado.
5. Complexidade computacional: Número de operações por iteração do algoritmo. Este fator pode determinar a viabilidade de implementação em tempo real.
6. Estrutura: O filtro adaptativo pode ser implementado utilizando-se diversas estruturas, tais como treliças, forma transversal e outras.
7. Estabilidade numérica: Filtros adaptativos freqüentemente precisam ser implementados em processadores digitais de sinal (DSP's), os quais operam com aritmética de precisão finita. Um algoritmo é considerado numericamente estável se o vetor de erro nos coeficientes do filtro permanece limitado ao longo do processamento com precisão finita.

Existem na literatura vários algoritmos recursivos que podem ser utilizados na solução do problema de filtragem adaptativa. Basicamente, pode-se identificar três teorias distintas nas quais baseia-se a maioria dos algoritmos adaptativos [16]:

- Teoria da Filtragem de Wiener - Algoritmos do gradiente estocástico
- Teoria da Filtragem de Kalman - Algoritmos baseados no filtro de Kalman
- Teoria dos Mínimos Quadrados - Algoritmos da família RLS (*Recursive Least-Squares*)

**Filtragem de Wiener:** Utiliza-se um filtro transversal como base estrutural para implementação do filtro adaptativo. A resposta ao impulso finita é definida pelo conjunto de pesos, para sinais de entrada estacionários. O erro médio quadrático é uma função de segunda ordem dos coeficientes do filtro transversal. A dependência do EMQ em relação aos pesos desconhecidos é vista na forma de um parabolóide multidimensional, com um único ponto de mínimo. Refere-se a este parabolóide como a *superfície de desempenho do erro*. O vetor de coeficientes que corresponde ao ponto mínimo desta superfície é definido como a solução ótima de Wiener.

Os algoritmos baseados no gradiente estocástico apresentam baixa complexidade computacional e pequeno desajuste. Um exemplo destes algoritmos é o largamente conhecido algoritmo LMS (Least Mean-Squares), que foi desenvolvido por Widrow e Hoff em 1959 na Universidade de Stanford. Sua principal limitação é uma baixa taxa de convergência, principalmente para sinais de entrada correlacionados. Suas principais vantagens são a baixa complexidade computacional, a estabilidade numérica e a robustez a defeitos de implementação.

**Filtro de Kalman:** Independentemente da operação em um meio estacionário ou não estacionário, pode-se explorar o filtro de Kalman como base para derivar um algo-

ritmo de filtragem adaptativa apropriado à uma dada situação [16]. O filtro de Kalman é formulado usando a aproximação por espaço de estado, onde um sistema dinâmico é descrito por um conjunto de variáveis de estado.

O problema de filtragem de Kalman para um sistema linear dinâmico é formulado em torno de duas equações básicas:

- Equação da planta - descreve a dinâmica do sistema em termos do vetor de estado.
- Equação de medição - descreve a dinâmica do sinal observado em função dos parâmetros do sistema e do erro de medição do sistema.

A solução do problema é expressa como um conjunto de recursões de atualização, que apresenta-se de forma matricial. Para aplicar esta recursão, a teoria requer que defina-se um modelo das condições de operação ótima, que servirá como estrutura de referência para o filtro de Kalman rastrear e encontrar a solução. Estes modelos são definidos em função do meio de operação, seja ele estacionário ou não estacionário. Conforme o modelo utilizado, é possível obter-se diferentes algoritmos recursivos. Estes algoritmos têm a característica de possibilitar rápida convergência, quando comparados ao algoritmo LMS, assim como grande robustez. Entretanto, os algoritmos baseados no filtro de Kalman geralmente requerem uma grande carga computacional.

**Mínimos Quadrados** O algoritmo RLS (*Recursive Least Squares*) é o algoritmo clássico, baseado no método dos mínimos quadrados. O mesmo pode ser visto também como uma versão determinística da teoria dos filtros de Kalman.

Uma importante característica do algoritmo RLS é que ele utiliza as informações contidas nos dados de entrada, estendendo-se até o instante de inicialização do sistema. Ele apresenta alta robustez e velocidade de convergência. Entretanto, este bom desempenho do algoritmo RLS é obtido às custas de um grande aumento na complexidade

computacional, quando comparado aos algoritmos estocásticos. Um outro problema apresentado por este algoritmo é sua tendência a tornar-se numericamente instável.

As limitações apresentadas pelo algoritmo RLS levaram ao desenvolvimento de outros algoritmos, tais como o algoritmo RLS por raiz quadrada (QR-RLS), e o algoritmo RLS rápido (FRLS) [16]. O algoritmo QR-RLS é baseado na decomposição QR da matriz correspondente aos dados de entrada, tornando o algoritmo estável. Entretanto, o problema da complexidade computacional persiste. Essa complexidade aumenta com o quadrado do número de coeficientes, assim como no algoritmo RLS padrão. Objetivando sanar este problema, surgiu o algoritmo FRLS, que utiliza um conjunto de rotinas que explora a redundância inerente na estrutura *Toeplitz* da matriz correspondente aos dados de entrada, combinando as características desejadas de complexidade reduzida com o método dos mínimos quadrados. O problema que o algoritmo FRLS apresenta é de estabilidade numérica. Dessa forma, é necessário prever uma possível reinicialização durante sua operação.

#### 1.4.4 Algoritmos Adaptativos Aplicados ao Cancelamento de Eco Acústico

O desempenho de um algoritmo adaptativo depende fundamentalmente das propriedades do sinal de entrada. No caso do controle do eco acústico, o sinal de voz, que é utilizado como excitação, apresenta uma alta correlação entre amostras consecutivas, tornando a escolha do algoritmo adaptativo a ser utilizado no ajuste dos coeficientes do FCE uma missão bastante criteriosa. Vários algoritmos adaptativos estão disponíveis na literatura, cada com suas vantagens e limitações.

Entre os diversos algoritmos implementados para a filtragem adaptativa, o algoritmo LMS é indiscutivelmente o mais comumente utilizado, em virtude de sua baixa

complexidade computacional. Entretanto, uma deficiência importante apresentada por ele é o fato de sua velocidade de convergência depender das propriedades do sinal de entrada. Assim, em aplicações onde a amplitude do sinal de excitação apresenta grande excursão ou é muito correlacionado, como por exemplo no sinal de voz, o seu desempenho diminui drasticamente. Em virtude de tais deficiências, o algoritmo NLMS (*Normalized LMS*), por ser robusto a variações da potência do sinal de entrada surge como uma alternativa para substituir o algoritmo LMS em diversas aplicações.

Outro fator que tem despertado bastante interesse na utilização do algoritmo NLMS deve-se ao fato dele ter sido analisado exhaustivamente pelos pesquisadores nos últimos anos [5, 38, 35, 10], permitindo assim a obtenção de bons modelos que representam seu comportamento em regime transitório e em regime permanente. Em virtude disso, tornou-se um dos algoritmos mais utilizados no cancelamento do eco acústico [7, 33, 44].

Um outro algoritmo adaptativo bastante pesquisado e utilizado é o algoritmo RLS. Este algoritmo apresenta, para sinais estacionários, velocidade de convergência superior aos algoritmos LMS e NLMS, embora sua complexidade computacional seja maior que a de ambos. O algoritmo RLS também apresenta robustez à dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Ele não sofre modificação em sua velocidade de convergência quando o sinal de entrada apresenta um grande grau de correlação. Entretanto, apesar dessas vantagens, o algoritmo RLS apresenta instabilidade numérica, ou seja, apresenta uma propagação numérica que gera erros de arredondamento e outros distúrbios numéricos [16].

Conforme analisado até agora, a vantagem apresentada pelo algoritmo NLMS em relação ao algoritmo LMS deve-se ao fato de sua velocidade de convergência não depender da potência do sinal de entrada. Isto o coloca como um algoritmo bastante útil em sistemas onde o sinal de excitação apresenta grande excursão na amplitude, como

por exemplo em sinais de voz. Entretanto, o algoritmo NLMS apresenta um problema em comum com o algoritmo LMS. Sua velocidade de convergência também é degradada quando o sinal de entrada é bastante correlacionado. Em virtude desta deficiência, o algoritmo de projeções afins (Algoritmo AP) [26, 28] surge como uma alternativa mais eficiente que os algoritmos NLMS e LMS, pois além de ter um excelente desempenho para sinais de entrada muito correlacionados, sua velocidade de convergência independe da variância do sinal de entrada, tornando-se uma excelente alternativa em aplicações que utilizam filtros adaptativos em sistemas acústicos de comunicação.

Embora as características de operação do algoritmo AP mostrem-se bastante interessantes, sua complexidade computacional pode ser maior que a dos demais algoritmos mencionados até o momento. Por este motivo, este algoritmo não foi ainda tão estudado quanto os demais. Entretanto, em decorrência da crescente evolução na área da microeletrônica, o algoritmo AP tornou-se uma solução viável para diversas aplicações, dada a velocidade dos novos processadores digitais de sinais (DSP), permitindo projetos e implementações de estruturas de *hardware e software* que possibilitam a utilização de algoritmos que antes não eram viáveis em função de sua complexidade computacional.

Em [7], apresenta-se um estudo detalhado sobre a aplicação da filtragem adaptativa no controle do eco acústico. Comparações gráficas mostrando o desempenho dos algoritmos LMS, NLMS, RLS e AP são apresentadas, considerando sinais de excitação estacionários. São utilizados sinais brancos e correlacionados; e sinais de voz. Neste estudo comparativo, observou-se que os algoritmos NLMS e AP apresentam desempenhos comparáveis para sinais de excitação brancos. No caso dos sinais de excitação correlacionados, como já comentado, o desempenho do algoritmo AP é muito superior quanto à velocidade de convergência. Para o caso do sinal de excitação do sistema ser um sinal de voz, o algoritmo NLMS manteve sua velocidade de convergência comparável à encontrada para uma excitação colorida. Quanto ao algoritmo AP, sua adaptação

apresentou-se muito mais lenta quando comparada ao caso de excitação colorida geral, embora fosse mais rápida que a do algoritmo NLMS. Em relação ao algoritmo RLS, para um sinal de voz, comparativamente o algoritmo AP também apresentou um melhor desempenho que este, em termos de velocidade de convergência.

Comparando o algoritmo AP para diferentes ordens, verifica-se em [7] que o aumento de sua ordem acarreta um aumento da sua velocidade de convergência, embora este ganho se torne menos perceptível a partir de uma determinada ordem. O ganho na velocidade de convergência do algoritmo AP, com o aumento de sua ordem, torna-se ainda mais representativo quando o sistema é excitado com um sinal de voz, conforme gráficos apresentados na referência [7].

Uma outra característica importante a ser observada em um algoritmo adaptativo é sua capacidade de *tracking*. Para os algoritmos NLMS e AP não foi observada nenhuma diferença considerável entre a ação de *tracking* e a convergência inicial. No caso do algoritmo RLS, sua capacidade de *tracking* é consideravelmente pior do que a convergência inicial [7, 11]. Resumindo, o algoritmo AP apresenta um desempenho superior ao do algoritmo NLMS para sinais correlacionados. E em relação ao algoritmo RLS, embora este tenha uma rápida convergência inicial, sua capacidade de *tracking* é inferior à do algoritmo AP, principalmente quando a ordem deste último é aumentada. Dessa forma, o algoritmo AP surge como uma boa opção para aplicação em um sistema adaptativo para o cancelamento de eco acústico.

Em virtude da utilização crescente do algoritmo AP, análises estatísticas deste algoritmo têm surgido na literatura com mais frequência, buscando-se modelos que permitam prever seu comportamento em regimes transitório e permanente. Na referência [31], apresenta-se uma análise quantitativa do algoritmo AP. A análise é baseada em um modelo de sinal de entrada independente, originalmente proposto em [35]. Con-

tudo, o modelo de sinal independente não lhe permite verificar propriedades de pré-branqueamento do algoritmo AP. Em [4] foi apresentada uma análise quantitativa para um processo de entrada gaussiana autoregressivo. Esta análise segue o trabalho [28] obtendo a solução de uma recursão para a variância do vetor de erro dos coeficientes do filtro adaptativo. A solução utiliza resultados prévios para o algoritmo NLMS com entrada branca [5].

Mais recentemente, [34] apresentou uma análise da ação transitória de uma classe de algoritmos AP. A análise é baseada no argumento da conservação da energia. Os resultados obtidos em [34] são generalistas, pois neles não é assumido nenhum modelo do sinal de entrada. As expressões resultantes são em termos da estatística do sinal de entrada. Assim, um modelo geral pode ser usado para a variação de modelos mais específicos no futuro. Entretanto, a utilização direta desse modelo em projetos de sistemas adaptativos requer a estimação numérica da estatística do sinal de entrada aplicado. Concluindo, nenhuma forma fechada do modelo é dada em [34].

## 1.5 Objetivos do Trabalho

Este trabalho teve como objetivo principal estudar o comportamento estatístico do algoritmo de Projeções Afins (APA), utilizando uma metodologia de análise que permita obter-se modelos analíticos que possam prever o comportamento de sistemas reais tanto em regime transitório como permanente. A análise desse algoritmo é restrita para o caso onde o passo de adaptação é unitário. Este passo unitário corresponde à mais rápida convergência do algoritmo. Conseqüentemente, o caso do passo de adaptação igual a 1 na equação de ajuste do algoritmo corresponde ao denominado algoritmo de Projeções Afins. Na análise do algoritmo AP são assumidos processos estacionários e não estacionários, buscando-se prever situações o mais próxima do real.



A técnica de análise desenvolvida para o algoritmo AP permitiu também a determinação de modelos para um algoritmo derivado deste, onde o passo de adaptação assume valores diferentes da unidade. Dessa forma, o algoritmo denominado de Pseudo-AP é obtido introduzindo um passo de adaptação diferente de 1 na equação de ajuste dos coeficientes [1].

Na análise do algoritmo AP e do pseudo AP, o sinal de entrada é modelado por um processo autorregressivo (AR). A utilização deste modelo de sinal de entrada deve-se ao fato deste processo representar de forma satisfatória sinais encontrados em muitas aplicações práticas. Assim, modelos analíticos especializados para entradas AR encontram grande aplicabilidade prática.

Figuras de mérito são utilizadas com o objetivo de qualificar e quantificar o desempenho dos sistemas em condições determinadas, com o objetivo de auxiliar o projetista de sistemas adaptativos. O estudo do algoritmo AP e do Pseudo AP deve-se a estes apresentarem, em diversas aplicações, um desempenho superior aos algoritmos geralmente utilizados, como por exemplo, o LMS e o NLMS.

## 1.6 Estrutura do Trabalho

No Capítulo 2 apresenta-se uma análise do algoritmo AP sob o aspecto de uma solução de um sistema subdeterminado e como solução de um problema geométrico.

No Capítulo 3 avaliam-se os modelos para descrever o comportamento dos momentos de primeira e de segunda ordens, para sinais de entrada autoregressivos e estacionários. Também é apresentado um estudo sobre o comportamento do algoritmo AP em regime permanente.

No Capítulo 4 estuda-se o algoritmo AP quando submetido a operação em um meio não estacionário. São desenvolvidos modelos que permitem avaliar o comportamento médio dos coeficientes, bem como o erro médio quadrático. Apresenta-se também uma análise comparativa, baseada em simulações, do desajuste provocado pelo efeito da não-estacionaridade entre os algoritmos LMS e AP.

O Capítulo 5 apresenta o pseudo algoritmo AP como uma extensão do algoritmo AP( neste último, a taxa de adaptação é fixa e igual à unidade). No caso do pseudo AP, o passo de adaptação pode assumir valores diferentes de 1. Como será visto, esta modificação conduz a implicações algébricas distintas entre os dois algoritmos. Modelos analíticos são desenvolvidos para os momentos de primeira e segunda ordem.

No Capítulo 6 repete-se o procedimento efetuado no Capítulo 4, onde, submete-se o pseudo algoritmo AP a operar em um ambiente não estacionário. Figuras de mérito são utilizadas buscando evidenciar as características de operação do algoritmo, bem como a acurácia dos modelos analíticos desenvolvidos para o algoritmo quando submetido a esse ambiente de operação.

Finalizando, no Capítulo 7, são discutidas as conclusões mais relevantes deste trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

A seguir, são apresentadas de forma sintética, as contribuições resultantes do desenvolvimento deste trabalho.

- Estudo detalhado das hipóteses estatísticas possibilitando obter-se um modelo que permite verificar com precisão o comportamento do erro médio quadrático do algoritmo AP na fase transiente de adaptação e em regime permanente.

- Desenvolvimento dos momentos de primeira e segunda ordem resultando no modelo do erro médio quadrático do algoritmo AP quando submetido à operação em meio estacionário.
- Desenvolvimento do modelo do comportamento do erro médio quadrático do algoritmo AP em regime permanente.
- Desenvolvimento dos momentos de primeira e segunda ordem, resultando no modelo do erro médio quadrático do algoritmo AP quando submetido a operação em meio não estacionário.
- Modelo determinístico para avaliação do desajuste decorrente da variação do grau de não-estacionaridade imposto ao meio de operação.
- Desenvolvimento do modelo dos momentos de primeira e segunda ordem para avaliação do comportamento dos coeficientes e do erro médio quadrático do pseudo algoritmo AP operando em meio estacionário.
- Desenvolvimento do modelo dos momentos de primeira e segunda ordens para avaliação do comportamento dos coeficientes e do erro médio quadrático do pseudo algoritmo AP operando em meio não estacionário.

## 1.7 Trabalhos Publicados e Submetidos

A seguir são elencadas as publicações em congressos nacionais e internacionais resultantes deste trabalho de pesquisa. Também é apresentada a proposta de submissão de artigo no IEEE Transactions on Signal Processing, com revisão já enviada para avaliação.

1. Almeida, S. J. M.; Bermudez, J. C. M.; Bershad, N. J.; 2004. A Stochastic Model for the Affine Projection Algorithm Operating in Nonstationary Environment. Aceito para publicação *In Proc. ICASSP 2004*, Montreal, Canada.

2. Almeida, S. J. M.; Bermudez, J. C. M.; Bershada, N. J.; Costa, M. H.; 2003. Stochastic Model for the Convergence Behavior of the Affine Projection Algorithm for Gaussian Inputs. *In Proc. ICASSP 2003*, pp. VI-313-316, Hong Kong, China.
3. Almeida, S. J. M.; Bermudez, J. C. M.; Bershada, N. J.; 2003. Statistical Analysis of a Pseudo Affine Projection Adaptive Algorithm. *XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, SBT'03*, Rio de Janeiro, Brazil.
4. Almeida, S. J. M.; Bermudez, J. C. M.; 2002. A New Stochastic Analysis of the Affine Projection Algorithm for Gaussian Inputs and Large Number of Coefficients. *International Telecommunications Symposium-ITS2002*, Natal, Brazil.
5. Almeida, S. J. M.; Bermudez, J. C. M.; Bershada, N. J.; Costa, M. H.- A New Statistical Analysis of the Affine Projection Algorithm for Autorregressive Inputs. Artigo submetido para IEEE Transactions on Signal Processing. Paper: T-SP-01305-2003-revisado.

# Capítulo 2

## O Algoritmo de Projeções Afins

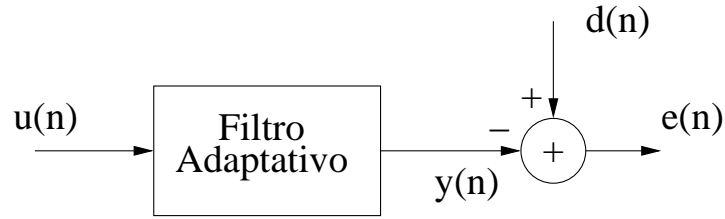
### 2.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma análise do princípio de operação do algoritmo AP. Esse algoritmo corresponde à solução de um sistema subdeterminado de equações. A interpretação geométrica desta solução também é apresentada, uma vez que facilita o entendimento da solução.

### 2.2 Solução de um Sistema Linear Subdeterminado

A idéia inicial desta seção é apresentar o algoritmo de projeções afins (AP) como uma solução de um sistema subdeterminado. Esta demonstração permitirá observar que o algoritmo de projeções afins pode ser visto como uma extensão do algoritmo NLMS. Comparado ao algoritmo NLMS que utiliza apenas um vetor de entrada  $\mathbf{u}(n) = [u(n) \ u(n-1) \ \dots \ u(n-N+1)]^T$ , o algoritmo AP emprega  $P+1$  vetores de entrada, ou seja,  $\mathbf{u}(n) \ \dots \ \mathbf{u}(n-P)$ , para o cálculo de atualização dos elementos do vetor de coeficientes do filtro adaptativo.

A Figura 2.1 apresenta um diagrama em blocos de um problema de estimação utilizando um filtro adaptativo, onde

Figura 2.1: *Estimação linear.*

$$d(n) = \mathbf{w}^{oT} \mathbf{u}(n) + r(n) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^o u(n-i) + r(n). \quad (2.1)$$

Assume-se, por enquanto, o caso sem ruído de medição ( $r(n)=0$ ).

O filtro adaptativo, considerado também como um sistema linear FIR, tem sua saída determinada por:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i(n) u(n-i) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{u}(n) \quad (2.2)$$

O erro de estimação é dado por:

$$e(n) = \mathbf{w}^{oT} \mathbf{u}(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{u}(n) \quad (2.3)$$

Deseja-se determinar o vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n+1)$  para que o erro de estimação seja anulado. Assim, deve-se satisfazer

$$\mathbf{w}^T(n+1) \mathbf{u}(n) = \mathbf{w}^{oT} \mathbf{u}(n) = d(n) \quad (2.4)$$

Este é um sistema de uma única equação com  $N$  incógnitas  $w_0(n+1), w_1(n+1), \dots, w_{N-1}(n+1)$ . Tal sistema tem obviamente infinitas soluções, caracterizando um sistema subdeterminado.

Para determinar-se um único vetor  $\mathbf{w}(n+1)$  que otimize o comportamento do sis-

tema, é necessário acrescentar novas restrições ao problema. Considere a utilização de uma base de informação composta de  $P + 1$  vetores de entrada, onde  $N > P + 1$ . Além disso, considere a minimização da norma da variação do vetor de coeficientes. Assim, a avaliação do vetor  $\mathbf{w}(n + 1)$  ótimo, que irá corrigir o erro causado por  $\mathbf{w}(n)$ , pode ser obtida da solução do seguinte problema de otimização com restrições:

Minimize  $\|\mathbf{w}(n + 1) - \mathbf{w}(n)\|^2$  (princípio do mínimo distúrbio [39])

Sujeito às  $P + 1$  restrições:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n + 1) &= d(n) \\ \mathbf{u}^T(n - 1)\mathbf{w}(n + 1) &= d(n - 1) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{u}^T(n - P)\mathbf{w}(n + 1) &= d(n - P) \end{aligned}$$

O algoritmo NLMS corresponde a esta minimização com  $P=0$ .

Definindo  $\mathbf{U}_u(n) = [\mathbf{u}(n) \ \mathbf{u}(n - 1) \ \dots \ \mathbf{u}(n - P)]$  como a matriz formada por vetores de entrada, e  $\mathbf{d}(n) = [d(n) \ d(n - 1) \ \dots \ d(n - P)]^T$ , tem-se as restrições expressas por:

$$\mathbf{d}(n) = \mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{w}(n + 1) \quad (2.5)$$

onde o vetor de erros  $\mathbf{e}(n) = [e(n) \ e(n - 1) \ \dots \ e(n - P)]^T$  é dado por:

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{w}(n) \quad (2.6)$$

Este problema de otimização pode ser resolvido utilizando-se o método dos multiplicadores de Lagrange [3]. Assim, definindo o vetor de erros *a-posteriori*  $\mathbf{e}_p(n)$

$$\mathbf{e}_p(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

deve-se minimizar a função:

$$f(\mathbf{w}(n+1)) = [\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)]^T [\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] \quad (2.8)$$

sob a restrição dada por  $\mathbf{e}_p(n) = \mathbf{0}$ .

Construindo a função Lagrangeana  $L(w, \lambda) = f(w) + \boldsymbol{\lambda}g(w)$  para minimização em função do vetor  $\mathbf{w}(n+1)$ , obtém-se:

$$L(\mathbf{w}(n+1)) = f(\mathbf{w}(n+1)) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{e}_p(n) \quad (2.9)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \dots \ \lambda_{N-1}]^T$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

O primeiro passo é minimizar  $L(\mathbf{w}(n+1))$  na direção  $\mathbf{w}(n+1)$ , onde o valor do multiplicador  $\boldsymbol{\lambda}$  é fixado.

Fazendo:

$$\frac{\partial L(\mathbf{w}(n+1))}{\partial \mathbf{w}(n+1)} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

obtém-se:

$$\frac{\partial f(\mathbf{w}(n+1))}{\partial \mathbf{w}(n+1)} = 2[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] \quad (2.11)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{e}_p(n)}{\partial \mathbf{w}(n+1)} = -\mathbf{U}_u(n) \quad (2.12)$$

Assim, o ponto de mínimo da função definida pela função Lagrangeana (2.9) é dado



por:

$$\frac{\partial L(\mathbf{w}(n+1))}{\partial \mathbf{w}(n+1)} = 2[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] - \mathbf{U}_u(n)\boldsymbol{\lambda} \quad (2.13)$$

A seguir, é necessário resolver o sistema definido pelas equações:

$$\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{d}(n) \quad (2.14)$$

$$2\mathbf{w}(n+1) - 2\mathbf{w}(n) = \mathbf{U}_u(n)\boldsymbol{\lambda} \quad (2.15)$$

A solução de (2.15) pode ser subdividida em duas partes. Inicialmente, nota-se que o vetor  $\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)$  deve estar no subspaço formado pelas colunas de  $\mathbf{U}_u(n)$ . Em segundo lugar, as projeções de  $\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)$  e de  $\mathbf{U}_u(n)\boldsymbol{\lambda}$  nas direções de cada coluna  $\mathbf{u}(n-k)$  de  $\mathbf{U}_u(n)$  devem ser iguais. Os valores de  $\lambda_k$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  que satisfazem essa condição são obtidos pré-multiplicando (2.15) por  $\mathbf{U}_u^T(n)$  e resolvendo para  $\boldsymbol{\lambda}$ . Assim

$$2\mathbf{U}_u^T(n)[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] = \mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)\boldsymbol{\lambda} \quad (2.16)$$

Assumindo que  $\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)$  é de posto  $P$ , chega-se à solução:

$$\boldsymbol{\lambda} = 2[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{U}_u^T(n)[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] \quad (2.17)$$

Aplicando (2.15) em (2.17) e observando que:

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{U}_u^T(n)[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] \quad (2.18)$$

obtém-se:

$$\boldsymbol{\lambda} = 2[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{e}(n) \quad (2.19)$$

E, finalmente, aplicando (2.19) na equação (2.15) obtém-se a equação de ajuste dos elementos do vetor  $\mathbf{w}(n+1)$  do algoritmo de projeções afins, que é dada por:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{e}(n) \quad (2.20)$$

Adicionando uma constante de adaptação  $\alpha$ , tem-se a expressão:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \alpha\mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{e}(n) \quad (2.21)$$

Como mencionado anteriormente, o algoritmo NLMS pode ser considerado um caso particular do algoritmo AP, caso utilize-se apenas um vetor de entrada ( $P = 0$ ). Por este motivo, se  $\mathbf{U}_u(n) = [\mathbf{u}(n)]$ , chega-se à equação de ajuste dos elementos do vetor de coeficientes do algoritmo NLMS, a qual é dada pela expressão:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \alpha \frac{\mathbf{e}(n)}{\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)} \mathbf{u}(n) \quad (2.22)$$

No algoritmo AP, a convergência deve ser mais rápida do que a do algoritmo NLMS para sinais de entrada correlacionados, pois, neste caso, quanto mais vetores passados são utilizados mais informações são fornecidas ao algoritmo, melhorando seu processo de ajuste. Entretanto, este aumento de informação, que representa maior quantidade de dados de entrada, aumenta também a complexidade computacional do algoritmo. Quanto à possibilidade da variância do sinal de entrada aumentar, nem o algoritmo AP, nem o algoritmo NLMS teriam suas velocidades de convergência degradadas, uma vez que trabalham com a versão normalizada do vetor de entrada.

No que segue, a notação  $AP(P+1)$  será utilizada para referenciar o algoritmo AP utilizando  $P$  vetores passados de entrada. A ordem do algoritmo (dimensão de  $\mathbf{U}_u(n)$ ) será  $P+1$ .

### 2.2.1 Uma Interpretação Alternativa do Algoritmo AP

Nesta subsecção, apresenta-se uma interpretação alternativa para o mecanismo de operação do algoritmo AP, utilizando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt [25] para obtenção da equação de ajuste dos elementos do vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n+1)$ .

Seja  $\mathbf{w}^o$  o vetor ótimo de coeficientes no sentido médio quadrático. Definindo  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o$  como o vetor de erros dos coeficientes e aplicando na equação (2.6), obtém-se:

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{U}_u^T(n)[\mathbf{v}(n) + \mathbf{w}^o] \quad (2.23)$$

Lembrando que  $\mathbf{d}(n) = \mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{w}^o$  :

$$\mathbf{e}(n) = -\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{v}(n) \quad (2.24)$$

Assim, anular o vetor erro  $\mathbf{e}(n)$  corresponde a fazer com que  $\mathbf{v}(n)$  seja ortogonal ao subespaço formado pelos vetores coluna de entrada que constituem a matriz  $\mathbf{U}_u(n)$ . Assim,  $\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{v}(n) = \mathbf{0}$  e, conseqüentemente,  $\mathbf{e}(n) = \mathbf{0}$ . Como dispõe-se de uma matriz  $\mathbf{U}_u(n)$  a cada iteração, o que pode-se fazer é a cada passo subtrair de  $\mathbf{v}(n)$  sua componente projetada no subespaço definido pela matriz  $\mathbf{U}_u(n)$  disponível. Assim, caso  $\mathbf{U}_u(n)$  tenha uma única coluna (algoritmo NLMS), o algoritmo convergirá ( $\mathbf{v}(n) \rightarrow 0$ ) em exatamente  $N$  iterações se ocorrerem  $N$  vetores de entrada  $\mathbf{u}(n)$  ortogonais consecutivos. No caso de vários vetores de entrada compondo a matriz  $\mathbf{U}_u(n)$ , o processo de ortogonalização tende a ser acelerado. O processo de redução de  $\mathbf{v}(n)$  pode ser visto como um processo de ortogonalização de Gram-Schmidt [25]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(1) &= \mathbf{v}(0) - \text{proj. } \mathbf{v}(0) \text{ em } \mathbf{U}_u(0) \\
\mathbf{v}(2) &= \mathbf{v}(1) - \text{proj. } \mathbf{v}(1) \text{ em } \mathbf{U}_u(1) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{v}(n) - \text{proj. } \mathbf{v}(n) \text{ em } \mathbf{U}_u(n)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

No processo de ortogonalização, é necessário calcular o vetor  $\hat{\mathbf{a}}(n)$  tal que  $\mathbf{v}(n) - \mathbf{U}_u(n)\hat{\mathbf{a}}(n)$  seja ortogonal a um vetor genérico  $\mathbf{U}_u(n)\mathbf{k}$  no subespaço  $\mathbf{U}_u(n)$ .

Fazendo

$$[\mathbf{U}_u(n)\mathbf{k}]^T[\mathbf{v}(n) - \mathbf{U}_u(n)\hat{\mathbf{a}}(n)] = 0$$

Assumindo  $\mathbf{U}_u(n)$  não singular, chega-se a:

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = [\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{v}(n) \tag{2.26}$$

Logo

$$\mathbf{v}(n) - \mathbf{U}_u(n)\hat{\mathbf{a}}(n) = \mathbf{v}(n) - \mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{v}(n), \tag{2.27}$$

onde  $\mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{U}_u^T(n)$  é a matriz de projeção no subespaço definido pelas colunas de  $\mathbf{U}_u(n)$ .

Fazendo  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o$ , e lembrando que  $\mathbf{e}(n) = -\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{v}(n)$ , retorna-se à expressão final em (2.25) e obtém-se:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{e}(n) \quad (2.28)$$

que é a mesma expressão encontrada em (2.20).

Conforme pôde-se observar nas demonstrações apresentadas nesta seção, o algoritmo de projeções afins, embora apresente uma melhora na velocidade de ajuste dos elementos do vetor de coeficientes em relação ao algoritmo NLMS, permanece com o problema de ter sua velocidade degradada quando o sinal de entrada é correlacionado, isto é, quando a matriz de autocorrelação do sinal de entrada é mal condicionada.

Na próxima seção, é feita uma interpretação geométrica do algoritmo AP baseada no trabalho apresentado por UMEDA e OZEKI [26], onde busca-se evidenciar o problema que o algoritmo apresentado tem em relação ao sinal de entrada correlacionado e a solução para este problema.

### 2.3 Interpretação Geométrica do Algoritmo AP

Com o objetivo de tornar a explanação mais clara, esboça-se primeiro o algoritmo NLMS que, como já foi visto, é um caso particular do algoritmo AP, utilizando apenas um vetor de dados de entrada, conforme mostra a equação (2.22).

Na Figura 2.2 apresenta-se uma ilustração geométrica do comportamento do vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$  no algoritmo NLMS, mostrando seu traçado até atingir o valor ótimo  $\mathbf{w}^o$ .

O conjunto definido por  $\Psi(n)$  representa o conjunto de todos os vetores de coeficientes que produzem a saída  $y(n)$  igual a  $d(n)$  na Fig. 2.1 para uma entrada  $\mathbf{u}(n)$ , e forma um hiperplano no espaço Euclidiano N-dimensional. Note que o vetor ótimo  $\mathbf{w}^o$  pertence necessariamente a este hiperplano. Da mesma forma,  $\mathbf{w}^o$  pertencerá a todos

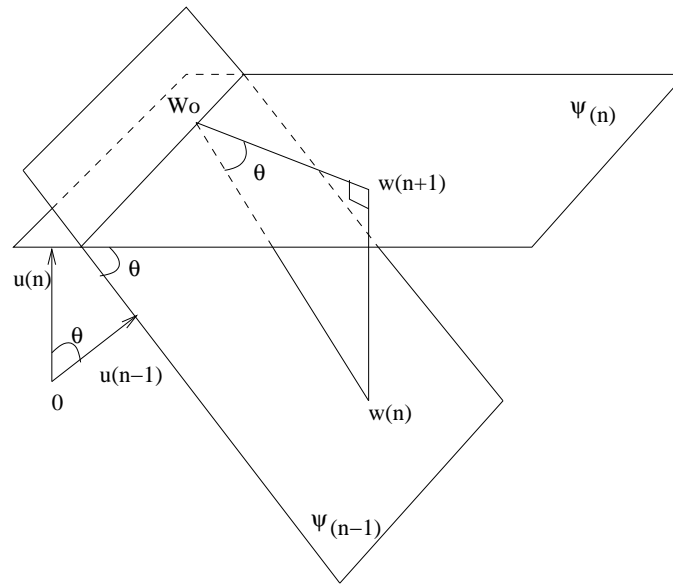


Figura 2.2: *Ilustração geométrica do algoritmo NLMS.*

os hiperplanos  $\Psi(n-k)$  associados a cada vetor de entrada  $\mathbf{u}(n-k)$ . Assim,  $\mathbf{w}^o$  pertence à intersecção de todos os hiperplanos  $\Psi(n-k)$ ,  $\forall k$ . Formalmente, o hiperplano  $\Psi(n-k)$  é definido por

$$\Psi(n-k) = \{\mathbf{w}; \mathbf{w} \in \mathfrak{R}^n, \mathbf{u}^T(n-k)\mathbf{w} = d(n-k)\} \quad (2.29)$$

A equação de atualização de  $\mathbf{w}(n)$  é dada por:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \Delta\mathbf{w}(n) \quad (2.30)$$

em que  $\Delta\mathbf{w}(n)$  é função da entrada  $\mathbf{u}(n)$ , e saídas  $d(n)$  e  $y(n)$ , conforme as equações (2.1) e (2.2).

Assim,

$$\Delta\mathbf{w}(n) = f(u(n), \dots, u(n-M+1), d(n), \dots, d(n-M+1), y(n), \dots, y(n-M+1)) \quad (2.31)$$

Como visto na seção anterior e apresentado nesta seção mediante ilustração na Fig.

2.2, o algoritmo NLMS ajusta o vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$  adicionando um fator de correção  $\Delta\mathbf{w}(n)$ . Como o ajuste de  $\mathbf{w}(n)$  é feito de forma a minimizar a norma de  $\Delta\mathbf{w}(n)$ , a direção de  $\Delta\mathbf{w}(n)$  deve ser ortogonal ao subespaço  $\Psi(n)$ , conforme mostrado na Fig. 2.2. Assim, este ajuste depende diretamente do ângulo formado por  $\Psi(n)$  e  $\Psi(n-1)$  (ângulo  $\theta$  na Fig.2.2) . Isto permite observar que, dado o vetor  $\mathbf{w}(n)$ , a velocidade de convergência estará diminuindo quando o ângulo  $\theta$  aproximar-se de 0 ou  $\pi_{rad}$ , contrário ao caso de quando  $\theta$  aproximar-se de  $(\pi/2)_{rad}$  ou  $(3\pi/2)_{rad}$ .

Verifica-se da Fig. 2.2 que:

$$|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}^o| = |\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o| \cos \theta \quad (2.32)$$

Assim, uma redução do ângulo  $\theta$  leva a uma maior distância entre  $\mathbf{w}(n+1)$  e  $\mathbf{w}^o$  para o mesmo valor de  $[\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o]$ . A situação é mostrada graficamente de perfil na Fig. 2.3.

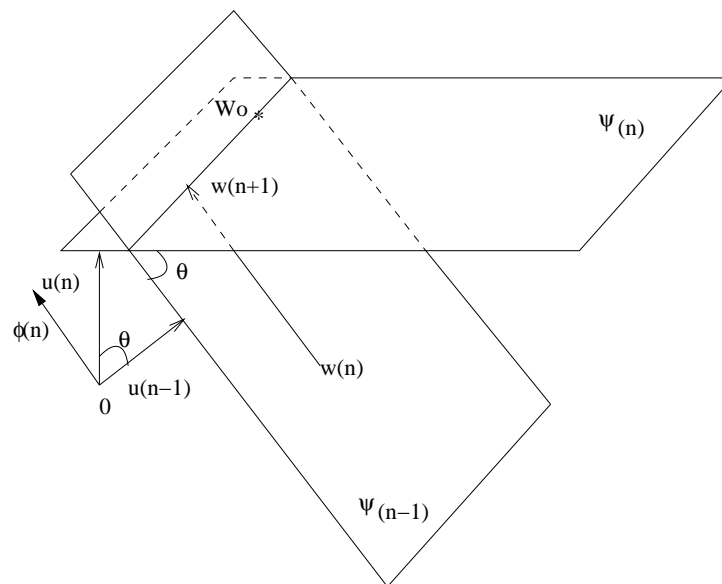


Figura 2.3: *Ilustração geométrica do novo algoritmo.*

Assim, a velocidade de convergência do algoritmo tende a aumentar quando o ângulo entre  $\Psi(n)$  e  $\Psi(n-1)$  se aproxima de  $(\pi/2)_{rad}$  ou  $(3\pi/2)_{rad}$ .

Outro ponto importante é a relação entre o ângulo  $\theta$  e o ângulo entre  $\mathbf{u}(n-1)$  e  $\mathbf{u}(n)$ . Pela definição (2.29),  $\Psi(n-1)$  é caracterizado pela expressão  $\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{w}(n) = d(n-1)$  e  $\Psi(n)$  pela expressão  $\mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n+1) = d(n)$ . Assim  $\Psi(n-1)$  é o subespaço formado pelas extremidades de todos os vetores em  $\mathfrak{R}^N$  cuja projeção ortogonal em  $\mathbf{u}(n-1)$  é igual ao mesmo valor  $d(n-1)$ . Assim,  $\mathbf{u}(n-1)$  é perpendicular a  $\Psi(n-1)$ . Da mesma forma,  $\mathbf{u}(n)$  é perpendicular a  $\Psi(n)$ . Logo, o ângulo  $\theta$  entre  $\Psi(n)$  e  $\Psi(n-1)$  é também o ângulo entre  $\mathbf{u}(n)$  e  $\mathbf{u}(n-1)$ .

Este fenômeno resulta em virtude da direção de ajuste do vetor de coeficientes ser função da direção imposta pelo vetor de entrada  $\mathbf{u}(n)$ . Para melhorar a situação, a direção de modificação do vetor dos coeficientes precisa ser reconsiderada.

Baseado na Fig. 2.2, fica evidente que para manter a velocidade de convergência independente do ângulo entre  $\mathbf{u}(n)$  e  $\mathbf{u}(n-1)$ , a linha que vai de  $\mathbf{w}(n)$  para  $\mathbf{w}(n+1)$  deve ser traçada diretamente de  $\mathbf{w}(n)$  para  $\Psi(n) \cap \Psi(n-1)$  conforme a ilustração na Fig. 2.3 e não perpendicularmente a  $\Psi(n)$  como na Fig. 2.2.

No algoritmo proposto em [26], apresenta-se uma inovação em relação ao algoritmo NLMS, onde a direção do vetor de coeficientes é modificada subtraindo-se do vetor de entrada  $\mathbf{u}(n)$  sua projeção no vetor de entrada anterior  $\mathbf{u}(n-1)$ , gerando o vetor  $\Phi(n)$  que é ortogonal a  $\mathbf{u}(n-1)$  e dado pela expressão:

$$\Phi(n) = \mathbf{u}(n) - \mathbf{P}_u(n)\mathbf{u}(n) \quad (2.33)$$

onde  $\mathbf{P}_u(n)$  é a matriz de projeção no subespaço formado pelo vetor  $\mathbf{u}(n-1)$ .

$$\mathbf{P}_u(n) = \frac{\mathbf{u}(n-1)\mathbf{u}^T(n-1)}{\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{u}(n-1)} \quad (2.34)$$



Assim, o ajuste  $\Delta \mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)$  será feito na direção do vetor  $\Phi(n)$ , e não mais na direção de  $\mathbf{u}(n)$  (ver Fig.2.3).

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n+1) = d(n) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n) = k\Phi(n) \quad (2.36)$$

Multiplicando (2.36) por  $\Phi^T(n)$  e tirando o valor de  $k$ , obtém-se:

$$k = \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] \quad (2.37)$$

Pré-multiplicando a transposta (2.33) pelos vetores  $\mathbf{w}(n+1)$  e  $\mathbf{w}(n)$ , respectivamente, tem-se:

$$\Phi^T(n)\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{P}_u(n)\mathbf{w}(n+1) \quad (2.38)$$

e

$$\Phi^T(n)\mathbf{w}(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{P}_u(n)\mathbf{w}(n) \quad (2.39)$$

Utilizando os resultados em (2.38) e (2.39), calcula-se o produto  $\Phi^T(n)[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)]$ , e aplica-se na equação (2.37), obtendo a expressão:

$$k = \frac{\mathbf{u}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] \quad (2.40)$$

Na obtenção de 2.40 foi utilizado o fato de que  $\mathbf{P}_u(n)[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] = k\mathbf{P}_u(n)\Phi(n) = 0$ .

Considerando que  $\mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n+1) = d(n)$  e  $d(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) = e(n)$ , a equação de  $k$  será:

$$k = \frac{e(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \quad (2.41)$$

Finalmente, aplicando (2.41) em (2.36) obtém-se a equação de ajuste dos coeficientes do vetor  $\mathbf{w}(n+1)$ :

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}e(n) \quad (2.42)$$

A seguir, faz-se a generalização do procedimento desenvolvido até a equação (2.42), de tal forma que o vetor  $\Phi(n)$  seja ortogonal não apenas a um vetor passado de entrada, mas a  $P$  vetores passados do sinal de entrada, ou seja,  $\mathbf{u}(n-1)$ ,  $\mathbf{u}(n-2)$ , ...,  $\mathbf{u}(n-P)$ . Assim, definindo a matriz formada pelos vetores coluna  $\mathbf{u}(n-k)$  para  $k \geq 1$ , tem-se:

$$\mathbf{U}(n) = [\mathbf{u}(n-1) \ \mathbf{u}(n-2) \ \dots \ \mathbf{u}(n-P)] \quad (2.43)$$

a qual corresponde a matriz  $\mathbf{U}_u(n)$  sem a primeira coluna.

Considerando agora  $\mathbf{P}_u(n)$  como sendo a matriz de projeção no subespaço formado pelas colunas da matriz  $\mathbf{U}(n)$ , tem-se:

$$\mathbf{P}_u(n) = \mathbf{U}(n)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n) \quad (2.44)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n+1) &= d(n) \\ \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{w}(n+1) &= d(n-1) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{w}(n+1) &= d(n-P) \end{aligned} \quad (2.45)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{d}(n) \quad (2.46)$$

Utilizando a equação (2.33) e aplicando o mesmo procedimento utilizado na dedução da equação (2.42), chega-se mais uma vez à expressão de ajuste dos coeficientes do vetor  $\mathbf{w}(n+1)$ :

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}e(n) \quad (2.47)$$

Para mostrar que a equação (2.47) é a mesma encontrada em (2.28), mas com a propriedade de decorrelacionar o sinal de entrada, procede-se da seguinte forma:

Da equação (2.46) tem-se que

$$\mathbf{d}(n) - \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n) \\ \mathbf{U}^T(n) \end{bmatrix} \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

então

$$\mathbf{d}(n-1) - \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n-1) \\ \mathbf{U}^T(n-1) \end{bmatrix} \mathbf{w}(n) = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

Assim, verifica-se que:

$$\mathbf{d}(n) - \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n) \\ \mathbf{U}^T(n) \end{bmatrix} \mathbf{w}(n) = \begin{bmatrix} d(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{e}(n) \quad (2.50)$$

Em seguida, define-se que:

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{u}(n) \quad (2.51)$$

Assim, da equação (2.33) obtém-se:

$$\Phi(n) = \mathbf{u}(n) - \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n) = \begin{bmatrix} I & \mathbf{U}(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(n) \\ -\hat{\mathbf{a}}(n) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Observa-se que:

$$\mathbf{U}_u^T(n)\Phi(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n) \\ \mathbf{U}^T(n) \end{bmatrix} \Phi(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n)\Phi(n) \\ \mathbf{U}^T(n)\Phi(n) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Mas

$$\mathbf{u}^T(n)\Phi(n) = [\Phi^T(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)]\Phi(n) = \Phi^T(n)\Phi(n) \quad (2.54)$$

já que  $\mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n)$  é ortogonal a  $\Phi(n)$ , ou ainda,  $\mathbf{U}^T(n)\Phi(n) = 0$  porque  $\Phi(n)$  é ortogonal a todos os vetores coluna de  $\mathbf{U}(n)$ .

Dessa forma:

$$\mathbf{U}_u^T(n)\Phi(n) = \begin{bmatrix} \Phi^T(n)\Phi(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Pré-multiplicando-se esta expressão por  $\mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}$ , tem-se:

$$\mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{U}_u^T(n)\Phi(n) = \mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1} \begin{bmatrix} \Phi^T(n)\Phi(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

A matriz  $\mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{U}_u^T(n)$  é a matriz de projeção no espaço das colunas de  $\mathbf{U}_u(n)$ , que é composta pelos vetores coluna  $\mathbf{u}(n)$ ,  $\mathbf{u}(n-1)$ , ...  $\mathbf{u}(n-P)$ . Como  $\Phi(n)$  está no espaço das colunas de  $\mathbf{U}_u(n)$ , o lado esquerdo da equação é igual a  $\Phi(n)$ . Assim,

$$\Phi(n) = \Phi^T(n)\Phi(n)\mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

logo,

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} = \mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Como

$$\mathbf{e}(n) = \begin{bmatrix} e(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

tem-se que:

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}e(n) = \mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u^T(n)\mathbf{U}_u(n)]^{-1}\mathbf{e}(n) \quad (2.60)$$

o que leva à equação:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{U}_u(n)[\mathbf{U}_u(n)\mathbf{U}_u^T(n)]^{-1}\mathbf{e}(n) \quad (2.61)$$

Observar aqui que a igualdade de (2.47) e (2.61) só é válida para passo unitário ( $\alpha = 1$ ). Este é o único caso do algoritmo AP em que  $\mathbf{e}(n) = [e(n) \ 0 \dots 0]^T$  (o erro é escalar).

## 2.4 Conclusão

Neste capítulo apresentou-se o algoritmo de Projeções Afins como solução de um sistema linear subdeterminado, assim como uma interpretação geométrica do comportamento do algoritmo no processo de adaptação algoritmo.

No próximo capítulo, são apresentados os resultados obtidos em uma nova proposta de análise do algoritmo AP. São desenvolvidas as análises do comportamento médio dos coeficientes e dos momentos de segunda ordem. Também é analisado o comportamento do erro médio quadrático do algoritmo AP para sua ação em regime permanente. A análise estatística é desenvolvida para uma entrada autoregressiva.

## Capítulo 3

# Análise Estatística do Algoritmo de Projeções Afins com Entrada Autoregressiva - Em Ambiente Estacionário

### 3.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se uma análise estatística do desempenho do algoritmo AP para sinais de entrada estacionários e autoregressivos. São determinadas equações recursivas para os momentos de primeira e segunda ordem e do erro médio quadrático em regime permanente do algoritmo de Projeções Afins - AP ( $\alpha = 1$ ), com objetivo de permitir-se uma análise quantitativa e qualitativa de seu comportamento durante o processo de filtragem. É apresentado o conjunto de operações executadas pelo algoritmo AP, bem como o modelo do sinal de entrada utilizado na análise desenvolvida em todo o trabalho. Também são apresentadas simulações referentes ao comportamento médio dos elementos do vetor de coeficientes, assim como do erro médio quadrático, buscando-se verificar a acuidade do modelo proposto.

## 3.2 Modelo do Sinal de Entrada e Equações do Algoritmo AP

Em [28], apresenta-se uma interpretação do algoritmo AP na qual destacam-se duas propriedades importantes:

- O algoritmo descorrelaciona as amostras do sinal de entrada (propriedade de pré-branqueamento);
- O ruído de medição é modificado através de uma filtragem linear e, dessa forma, pode ter sua potência aumentada.

A partir do que foi estudado no capítulo anterior, a operação do algoritmo AP pode ser decomposta em quatro etapas:

1. Cálculo do vetor  $\mathbf{a}(n)$  ;
2. Descorrelação da seqüência dos dados de entrada  $\Phi(n)$ ;
3. Convolução do sinal de entrada  $\mathbf{u}(n)$  e a resposta impulsional do filtro  $\mathbf{w}(n)$ ;
4. Ajuste do filtro  $\mathbf{w}(n)$  utilizando o sinal de entrada descorrelacionado.

Antes do detalhamento do conjunto de operações do algoritmo AP, discute-se o modelo do sinal de entrada que é utilizado na análise do algoritmo. Esta apresentação torna-se importante, como é destacado em [28], em virtude do ajuste do vetor de coeficientes do algoritmo depender diretamente do tipo de processo que gera o sinal de entrada.

Os modelos mais comumente empregados para a geração de sinais aleatórios utilizados são autoregressivo (AR), média móvel (MA), e a combinação destes dois, que é o ARMA [28].



A geração de processos aleatórios a partir destes modelos dá-se através de operações de filtragem de um ruído branco  $z(n)$ , de acordo com as seguintes expressões [28]:

- Processo Autoregressivo de ordem  $P$ :

$$u(n) = \sum_{i=1}^P a_i u(n-i) + z(n)$$

- Processo de Média Móvel de ordem  $Q$ :

$$u(n) = \sum_{i=1}^Q b_i z(n-i) + z(n)$$

- Processo de Média Móvel Autoregressivo de ordem  $(P, Q)$ :

$$u(n) = \sum_{i=1}^P a_i u(n-i) + \sum_{i=1}^Q b_i z(n-i) + z(n)$$

Entre os modelos de processos apresentados, o processo autoregressivo destaca-se por ter a característica de representar de forma satisfatória sinais encontrados em muitas aplicações práticas. Por este motivo, todas as análises estatísticas desenvolvidas neste trabalho assumem como entrada um processo autoregressivo.

Assim, definindo  $u(n)$  como um processo AR de ordem  $P$ , e  $z(n)$  como uma seqüência gaussiana branca e de variância unitária, tem-se:

$$u(n) = \sum_{i=1}^P a_i u(n-i) + z(n) \tag{3.1}$$

A eq. (3.1) pode ser expressa na forma vetorial, considerando-se as  $N$  últimas amostras do sinal  $u(n)$ . Assim, o processo autoregressivo  $AR(P)$  pode ser descrito como

$$\mathbf{u}(n) = \sum_{i=1}^P a_i \mathbf{u}(n-i) + \mathbf{z}(n) = \mathbf{U}(n)\mathbf{a} + \mathbf{z}(n) \tag{3.2}$$

em que

$$\mathbf{u}(n) = [u(n)u(n-1)\dots u(n-N+1)]^T. \quad (3.3)$$

$\mathbf{U}(n)$  é uma coleção de vetores passados,

$$\mathbf{U}(n) = [\mathbf{u}(n-1)\mathbf{u}(n-2)\dots\mathbf{u}(n-P)] \quad (3.4)$$

e  $\mathbf{z}(n)$  é um vetor coluna de dimensão  $N$  composto por uma sequência gaussianas branca aleatória

$$\mathbf{z}(n) = [z(n)z(n-1)\dots z(n-N+1)] \quad (3.5)$$

A estrutura de mínimo erro quadrático de  $\mathbf{a}$  é dada por [28]:

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{u}(n) \quad (3.6)$$

em que  $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)$  é assumido de posto  $P$ .

Assim, para sinais de entrada AR, o algoritmo AP pode ser decomposto da seguinte forma:

1.  $\mathbf{U}(n) = [\mathbf{u}(n-1)\mathbf{u}(n-2)\dots\mathbf{u}(n-P)]$
2.  $\hat{\mathbf{a}}(n) = [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{u}(n)$
3.  $\Phi(n) = \mathbf{u}(n) - \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n) = [I - \mathbf{U}(n)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)]\mathbf{u}(n) = [I - \mathbf{P}_u(n)]\mathbf{u}(n)$
4.  $e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n) = \mathbf{w}^{oT}\mathbf{u}(n) + r(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n)$
5.  $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \left[ \Phi(n) / \Phi^T(n)\Phi(n) \right] e(n)$

onde  $d(n) = \mathbf{w}^{oT}\mathbf{u}(n) + r(n)$  é a saída desejada e  $r(n)$  é o ruído aditivo, o qual é estacionário, branco, gaussiano, de variância  $\sigma_r^2$ , de média zero e independente de  $\mathbf{z}(n)$  e de  $\mathbf{w}(n)$ .  $\mathbf{P}_u(n) = \mathbf{U}(n)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)$  é a matriz de projeção no subespaço

formado pelas colunas da matriz  $\mathbf{U}(n)$ .

### 3.3 Hipóteses Simplificadoras

No decorrer deste trabalho, são utilizadas as seguintes hipóteses simplificadoras, que facilitam o trabalho matemático de análise estatística:

1. O sinal de excitação  $z(n)$  é estacionário, branco, gaussiano, com variância  $\sigma_z^2$  e média zero.
2. O sinal autoregressivo  $u(n)$  é estacionário, gaussiano, com variância  $\sigma_u^2$  e média zero.
3. Assume-se que os vetores  $\mathbf{z}(n-k)$  e  $\mathbf{w}(n-p)$  são estatisticamente independentes para quaisquer  $k$  e  $p$ .
4. Assume-se que os vetores  $\mathbf{z}(n-k)$  e  $\mathbf{z}(n-p)$  são estatisticamente independentes para  $k$  diferente de  $p$ .
5. Assume-se que os vetores de direção  $\Phi(n-k)$  e  $\Phi(n-p)$  são independentes para  $k$  diferente de  $p$ .

A hipótese de número quatro é freqüentemente utilizada na análise estatística de algoritmos adaptativos, na forma da teoria da independência [22]. Na teoria da independência considera-se que os vetores de entrada (regressores) são independentes, o que não é verdadeiro em aplicações que utilizam estruturas com linha de retardo. Nestes casos, o vetor de entrada é preenchido amostra a amostra, existindo apenas a diferença de um elemento entre dois vetores consecutivos. Entretanto, a teoria da independência leva a resultados satisfatórios em diversas situações de aplicação prática dos algoritmos estocásticos.

A utilização de um sinal de excitação  $z(n)$  gaussiano em (3.2) justifica-se pelo *teorema do limite central* [27] e também por proporcionar uma excitação com espectro contendo todas as frequências.

Na Fig. 3.1, apresentam-se algumas curvas de simulações do erro médio quadrático do algoritmo AP, onde utilizam-se diferentes números de vetores passados na formação da matriz  $\mathbf{U}(n)$ . As curvas (a), (b), (c) e (d) referem-se a utilização de  $P$  vetores passados do sinal de entrada, com  $P = 16, 8, 4$  e  $1$  vetores respectivamente, para um filtro adaptativo com  $N = 64$  coeficientes. Pode-se observar claramente que o acréscimo de vetores aumenta a velocidade de convergência do algoritmo. Entretanto, este aumento de vetores acarreta uma maior complexidade computacional. De qualquer modo, a rápida evolução da capacidade de processamento de novos processadores de sinais permite que abordagens para análise do algoritmo AP levando em consideração elevados valores de  $P$  sejam de interesse. Aplicações práticas do algoritmo AP para  $P = 2$ , ou seja, utilizando dois vetores passados, já são encontradas em, por exemplo, projetos de canceladores de eco acústico e equalização de canais.

A seguir, são deduzidas diversas propriedades envolvendo o vetor de erro dos coeficientes do algoritmo AP para entradas AR. Dentre essas propriedades, incluem-se os efeitos do aumento da potência do ruído, citados no início desta seção. Essas propriedades serão utilizadas nos próximos capítulos para a análise estatística do comportamento do algoritmo.

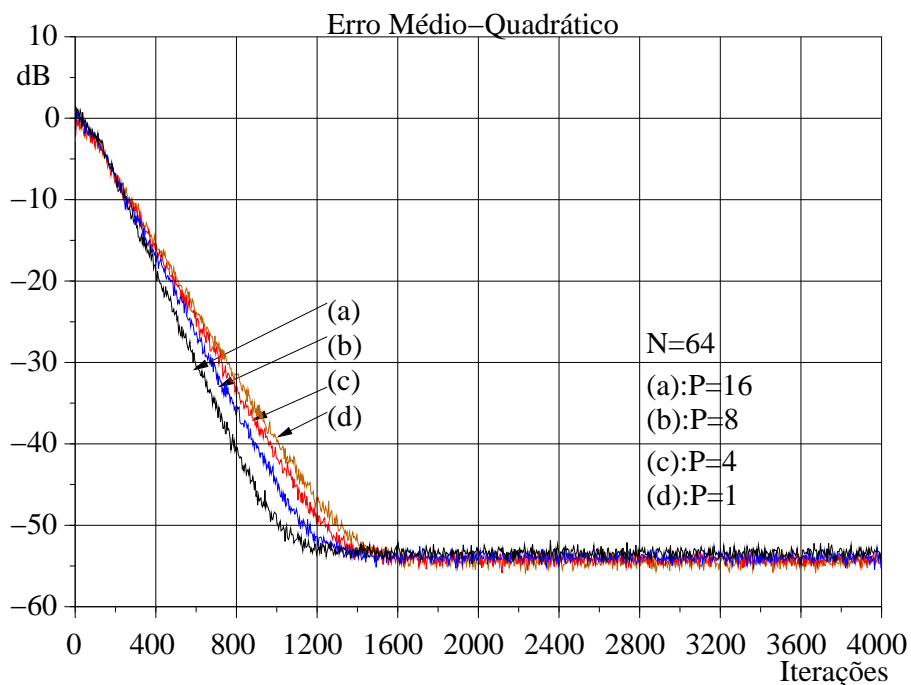


Figura 3.1: Comportamento do EMQ do algoritmo AP para diferentes valores de  $P$ .

### 3.4 Propriedades - Entrada Autoregressiva

Na maioria dos problemas de processamento de sinais, tais como cancelamento de ruído, identificação de sistemas, etc, pode-se utilizar o esquema em diagrama de blocos mostrado na Fig. 3.2. Dessa forma, toda análise desenvolvida neste trabalho abordando a utilização do algoritmo AP para ajuste dos coeficientes do filtro adaptativo será baseada nesta estrutura.

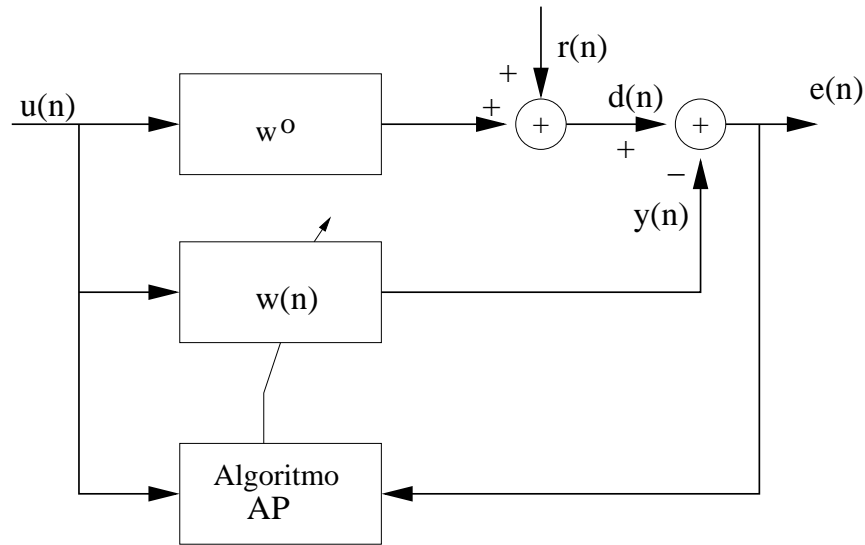


Figura 3.2: Diagrama de blocos do sistema adaptativo.

Como na maior parte dos algoritmos de filtragem adaptativa, um esquema recursivo de atualização de parâmetros é utilizado. Dessa forma, para determinar uma nova estimativa  $\mathbf{w}(n+1)$  do vetor  $\mathbf{w}^o$  de dimensão  $N$  e desconhecido, utilizam-se os valores dos coeficientes calculados na iteração anterior, acrescentados de um termo de correção. No caso do algoritmo de projeções afins a atualização é dada pela expressão:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}e(n) \quad (3.7)$$

em que:

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n) \quad (3.8)$$

A constante de adaptação  $\alpha = 1$  é assumida. Este valor de  $\alpha = 1$  corresponde à máxima velocidade do algoritmo [26].

Na Figura 3.3 apresentam-se para  $P = 2$ , os vetores envolvidos na operação de ortogonalização do vetor  $\Phi(n)$  que determina a direção de atualização do vetor de coeficientes do algoritmo AP, o qual é avaliado pela expressão:

$$\Phi(n) = \mathbf{u}(n) - \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n) \quad (3.9)$$

Dessa forma, o vetor  $\Phi(n)$  é a componente do vetor  $\mathbf{u}(n)$  projetado no plano ortogonal ao subespaço  $\mathbf{U}(n)$  definido por  $P$  vetores coluna passados de  $\mathbf{u}(n)$ .

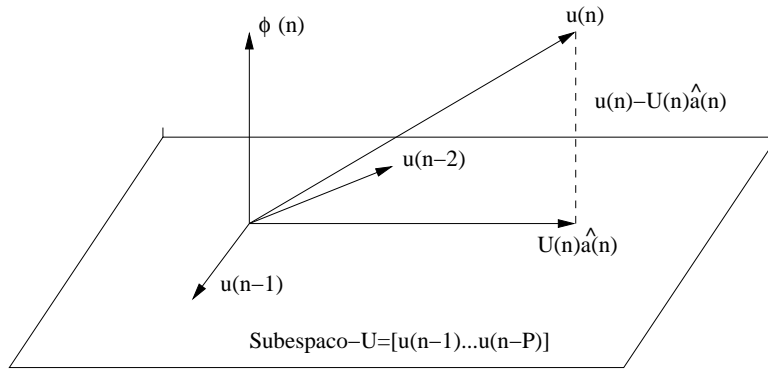


Figura 3.3: *Projeção do vetor de entrada  $\mathbf{u}(n)$  no subespaço  $\mathbf{U}(n)$  ( $P = 2$ ).*

Definindo o vetor erro dos coeficientes como  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o$ , tem-se:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}e(n) \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.8) na equação (3.10):

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n)] \quad (3.11)$$

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[\mathbf{w}^{oT}\mathbf{u}(n) + r(n) - [\mathbf{w}^{oT} + \mathbf{v}^T(n)]\mathbf{u}(n)]$$

E, finalmente, chega-se à expressão:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\mathbf{u}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)r(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \quad (3.12)$$

Substituindo (3.9) em (3.12), obtém-se:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)[\Phi(n) + \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n)]^T}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)r(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \quad (3.13)$$

Expandindo (3.13),

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)r(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \quad (3.14)$$

As seguintes propriedades são obtidas quando pré-multiplica-se (3.12) por  $\Phi^T(n)$ ,  $\mathbf{u}^T(n)$  e  $\mathbf{U}^T(n)$  [28]:

**Propriedade.1:**

Pré-multiplicando-se a equação (3.12) pelo vetor  $\Phi^T(n)$ :

$$\Phi^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \Phi^T(n)\mathbf{v}(n) - \frac{\Phi^T(n)\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - r(n)]$$

obtém-se:

$$\Phi^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \Phi^T(n)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + r(n) \quad (3.15)$$

**Propriedade.2:**

Pré-multiplicando-se a equação (3.12) pelo vetor  $\mathbf{u}^T(n)$ :

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \frac{\mathbf{u}^T(n)\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - r(n)]$$

Sabendo que  $\mathbf{u}(n) = \Phi(n) + \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n)$ , tem-se:

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \frac{[\Phi(n) + \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n)]^T\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - r(n)]$$

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \frac{[\Phi^T(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)]\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - r(n)]$$

Como o vetor  $\Phi(n)$  é ortogonal ao subespaço  $\mathbf{U}(n)$ , ou seja,  $\mathbf{U}^T(n)\Phi(n) = \mathbf{0}$ ,



chega-se a:

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + r(n)$$

e finalmente:

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = r(n) \quad (3.16)$$

**Propriedade.3:**

Pré-multiplicando-se a equação (3.12) pela matriz  $\mathbf{U}^T(n)$ :

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) - \frac{\mathbf{U}^T(n)\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - r(n)]$$

Como  $\mathbf{U}^T(n)\Phi(n) = 0$ , obtém-se:

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) \quad (3.17)$$

Além dessas propriedades, também pode-se verificar uma outra relacionada às variáveis  $\Phi(n)$  e  $\mathbf{u}(n)$ . Multiplicando-se  $\Phi^T(n)$  por  $\mathbf{u}(n)$  obtém-se:

$$\Phi^T(n)\mathbf{u}(n) = \Phi^T(n)[\Phi(n) + \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n)] = \Phi^T(n)\Phi(n) + \Phi^T(n)\mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n) \quad (3.18)$$

Como  $\Phi(n)$  é ortogonal às colunas de  $\mathbf{U}(n)$ , chega-se a:

$$\Phi^T(n)\mathbf{u}(n) = \Phi^T(n)\Phi(n) \quad (3.19)$$

Utilizando-se a Propriedade 2 recursivamente na expressão da Propriedade 3, verifica-se que:

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{r}(n-1)$$

onde:

$$\mathbf{r}(n-1) = [r(n-1)r(n-2)\dots r(n-P)]^T \quad (3.20)$$

Retornando à expressão da Propriedade 3 e à expressão da equação (3.20), e

aplicando-se na equação (3.14), tem-se a seguinte expressão para o vetor erro dos coeficientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) = & + \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) \\ & - \frac{\Phi(n)\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{r}(n-1)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} + \frac{\Phi(n)r(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Manipulando a equação (3.21):

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}[r(n) - \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{r}(n-1)] \quad (3.22)$$

Definindo  $r_a(n) = r(n) - \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{r}(n-1)$ , tem-se:

$$r_a(n) = r(n) - \sum_{i=1}^P \hat{a}_i(n)r(n-i) \quad (3.23)$$

que é a sequência filtrada do ruído  $r(n)$ .

Substituindo a equação (3.23) na equação (3.22), chega-se à expressão de atualização do vetor de erro dos coeficientes em função de  $r_a(n)$ :

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r_a(n) \quad (3.24)$$

### 3.5 Propriedades Vetoriais e Estatísticas

Nesta seção, são apresentadas hipóteses e propriedades estatísticas que serão aplicadas na análise do algoritmo AP. As propriedades de convergência do algoritmo AP dependem sobretudo da matriz de correlação  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = E\{\Phi(n)\Phi^T(n)\}$ . A estrutura e as propriedades de  $\mathbf{R}_{\phi\phi}$  dependem do vetor  $\Phi(n)$  e de suas propriedades estatísticas. A seguinte análise utiliza hipóteses similares à *hipótese da independência* [16], que tem sido utilizada na análise de vários algoritmos adaptativos.

**Hipótese A1:** Assume-se que a dependência estatística entre o vetor  $\mathbf{z}(n)$  e a matriz  $\mathbf{U}(n)$  pode ser desprezada. Esta hipótese é mais realista quando o número de elementos no vetor é muito maior que o número de vetores passados que formam a matriz  $\mathbf{U}(n)$ , ou seja,  $N \gg P$ . Isto pode ser melhor compreendido observando-se a equação (3.2), onde se mostra que  $\mathbf{z}(n)$  tem uma dependência algébrica com os  $P$  vetores  $\mathbf{u}(n-1)\dots\mathbf{u}(n-P)$ .

Aplicando-se a equação (3.2) na equação (3.6), e substituindo a resultante desta operação na expressão de  $\Phi(n)$ , obtém-se:

$$\Phi(n) = [\mathbf{I} - \mathbf{P}_U(n)] \cdot \mathbf{z}(n) = \mathbf{P}_\perp(n)\mathbf{z}(n) = \mathbf{z}_\perp(n) \quad (3.25)$$

onde  $\mathbf{P}_U(n) = \mathbf{U}(n)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)$  é a matriz de projeção no subespaço formado pelas colunas de  $\mathbf{U}(n)$  e  $\mathbf{P}_\perp(n) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_U(n)$  é a matriz de projeção no subespaço ortogonal complementar. Assim, o vetor  $\mathbf{z}(n)$  pode ser decomposto como  $\mathbf{z}_U(n) + \mathbf{z}_\perp(n)$ , onde  $\mathbf{z}_U(n) = \mathbf{P}_U(n)\mathbf{z}(n)$  e  $\mathbf{z}_\perp(n) = \mathbf{P}_\perp(n)\mathbf{z}(n)$ . Dessa forma, apenas  $\mathbf{z}_U(n)$  é algebricamente dependente de  $\mathbf{U}(n)$ . Além disso, desde que  $\{\mathbf{z}(n)\}$  seja uma seqüência de ruído branco, a potência de  $\mathbf{z}(n)$  é igualmente distribuída por suas  $N$  dimensões. Assim, apenas a potência da parcela de  $\mathbf{z}(n)$  que é projetada no subespaço  $P$ -dimensional definido por  $\mathbf{U}(n)$  é responsável pela dependência entre  $\mathbf{z}(n)$  e  $\mathbf{U}(n)$ . Esta dependência pode ser desprezada se  $N \gg P$ . Este é normalmente o caso em sistemas com resposta ao impulso longa, já que  $P$  tende a assumir um valor limitado para controle da complexidade do algoritmo.

**Hipótese A2:** Os vetores  $\Phi(n)$  e  $\mathbf{w}(n)$  são estatisticamente independentes. Esta hipótese é similar à *hipótese da independência*, quando aplicada a sinal de entrada branco utilizando filtro adaptativo com linha de retardo. O vetor  $\Phi(n)$  pode ser interpretado como um vetor cujos elementos são estimativas de uma seqüência de ruído branco  $\{\mathbf{z}(n)\}$ .

A equação (3.25) mostra que  $\Phi(n)$  é ortogonal às colunas de  $\mathbf{U}(n)$ . Esta é uma ortogonalidade vetorial e é válida para todo  $n$  e para qualquer realização do processo de entrada.

Para determinar-se as propriedades estatísticas de  $\Phi(n)$ , observa-se que  $\mathbf{z}_\perp(n)$  é um vetor com energia apenas em  $(N - P)$  dimensões do espaço  $N$ -dimensional. O vetor  $\mathbf{z}_U(n)$  contribui com a energia nas  $P$  dimensões restantes. Considera-se uma dada iteração, isto é, um valor fixo para  $n$ .

Em geral, as dimensões excitadas pelo vetor  $\mathbf{z}_\perp(n)$  são diferentes para cada função amostra do processo adaptativo em virtude da aleatoriedade de  $u(n)$ . Isto é equivalente, na média, à excitação de cada dimensão (para um dado valor de  $n$ ) com uma fração igual a  $(N - P)/N$  da potência em  $\mathbf{z}(n)$ . Assim, usando (3.25) e distribuindo a potência igualmente dentre todas as dimensões, a matriz de correlação de  $\Phi(n)$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{R}_{\phi\phi} = E\{\Phi(n)\Phi^T(n)\} = E\{\mathbf{z}_\perp(n)\mathbf{z}_\perp^T(n)\} = \sigma_\phi^2 \mathbf{I} = \left(\frac{N - P}{P}\right) \sigma_z^2 \mathbf{I} \quad (3.26)$$

As equações (3.7) e (3.26) mostram que o algoritmo AP com suficiente ordem ( $P$  maior ou igual à ordem do processo AR de entrada) e  $N$  coeficientes tem um comportamento transitório similar ao algoritmo NLMS com  $N - P$  coeficientes e uma entrada branca.

**Hipótese A3:**  $\Phi(n)$  é um vetor aleatório Gaussiano e de média zero. A equação (3.25) mostra que cada componente  $\phi(n - i)$  do vetor  $\Phi(n)$  é determinada pela expressão  $\sum_{j=1}^N P_{\perp ij} z(n - j + 1)$ . Da hipótese **A1** e sendo  $z(n)$  um ruído branco, as variáveis aleatórias deste somatório são independentes. Desta forma, pelo *Teorema do Limite Central* a distribuição de  $\Phi(n)$  tende para uma Gaussiana para valores elevados de  $N$ . Como  $z(n)$  é de média zero,  $\Phi(n)$  também terá média zero.

### 3.6 Análise do Comportamento Médio dos Coeficientes

Sendo o vetor erro dos coeficientes definido por  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o$ , o comportamento médio dos coeficientes do algoritmo AP é avaliado tomando-se o valor esperado da equação (3.24). Inicialmente utilizando a hipótese **A2** tem-se a expressão:

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = E\{\mathbf{v}(n)\} - E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\}E\{\mathbf{v}(n)\} + E\left\{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r_a(n)\right\} \quad (3.27)$$

Cada elemento do valor esperado no segundo termo do lado direito da equação (3.27) tem um numerador dado pelo produto  $\phi(n-i)\phi(n-j)$  e um denominador dado pelo somatório  $\sum_{k=0}^{N-1} \phi^2(n-k)$ . Os componentes de  $\Phi(n)$  no numerador afetam apenas dois dos  $N$  termos no denominador. Por conseqüência, numerador e denominador podem ser assumidos fracamente correlacionados para valores grandes de  $N$ . Para entradas ergódicas, esta hipótese é equivalente a aplicar o princípio das médias [29]. O denominador  $\Phi^T(n)\Phi(n)$  tende a variar no tempo lentamente quando comparado com o numerador  $\phi(n-i)\phi(n-j)$  para elevados valores de  $N$ . Dessa forma, a seguinte aproximação é usada:

$$E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-1}\Phi(n)\Phi^T(n)\} \approx E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-1}\}\mathbf{R}_{\phi\phi} \quad (3.28)$$

com  $\mathbf{R}_{\phi\phi}$  dado por (3.26).

O valor esperado  $E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-1}\}$  é calculado assumindo que  $\Phi(n)$  é um vetor com função de distribuição conjunta Gaussiana com dependência estatística desprezada entre seus componentes, pois são estimados de uma seqüência de ruído branco. Dessa forma, é assumido que  $y = \Phi^T(n)\Phi(n)$  tem uma distribuição chi-quadrada com  $G = N - P$  graus de liberdade. Assim, conforme [27], a função densidade de probabilidade

de  $y$  é dada por:

$$f_y(y) = \frac{1}{2^{G/2} \sigma_\phi^G \Gamma(\frac{G}{2})} y^{(G/2)-1} e^{-y/2\sigma_\phi^2} u(y) \quad (3.29)$$

Calculando o valor esperado de  $[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-1} = y^{-1}$

$$\begin{aligned} E\{y^{-1}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^{-1} \cdot f_y(y) \cdot dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^{G/2} \sigma_\phi^G \Gamma(\frac{G}{2})} y^{(G/2)-1} \cdot e^{-y/2\sigma_\phi^2} \cdot y^{-1} \cdot f_y(y) \cdot dy \\ &= \frac{1}{2^{G/2} \sigma_\phi^G \Gamma(\frac{G}{2})} \int_0^{+\infty} y^{(G/2)-2} \cdot e^{-y/2\sigma_\phi^2} \cdot dy \end{aligned} \quad (3.30)$$

Esta integral pode ser resolvida utilizando-se diretamente a equação:

$$\int_0^{+\infty} x^{m-1} \cdot e^{-(a+1)x} \cdot dx = \frac{\Gamma(m)}{(a+1)^m} \quad (3.31)$$

Fazendo a transformação de variáveis:

$$\begin{cases} x = y \\ m - 1 = \frac{G}{2} - 2 \\ a + 1 = \frac{1}{2\sigma_\phi^2} \end{cases}$$

e resolvendo a integral em (3.30), resulta em:

$$E\{y^{-1}\} = E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-1}\} = \frac{1}{2\sigma_\phi^2} \frac{\Gamma(G/2 - 1)}{\Gamma(G/2)} \quad (3.32)$$

Aplicando a propriedade da função gama  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ , chega-se a:

$$E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-1}\} = \frac{1}{\sigma_\phi^2(G-2)} \quad (3.33)$$

em que  $\sigma_\phi^2 = (N - P)/N \sigma_z^2$ .

Retornando à equação (3.27) para avaliação do valor esperado do terceiro termo do lado direito da expressão, tem-se:

$$E\{\Phi(n)r_a(n)\} = E\{\Phi(n)r(n)\} - \sum_{i=1}^P E\{\Phi(n)\hat{a}_i(n)r(n-i)\} = 0 \quad (3.34)$$

Como  $r(n)$  é independente e de média zero,

$$\begin{aligned} E\left\{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r_a(n)\right\} &= E\left\{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\}E\{r(n)\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^P \left[E\left\{\frac{\Phi(n)\hat{a}_i(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\}E\{r(n-i)\}\right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Substituindo os valores encontrados em (3.33) e (3.35) e aplicando o resultado em (3.27), resulta na expressão:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(n+1)\} &= \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\sigma_\phi^2(G-2)}\mathbf{R}_{\phi\phi}\right)E\{\mathbf{v}(n)\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{G-2}\right)E\{\mathbf{v}(n)\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

na qual a simplificação foi obtida usando  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sigma_\phi^2\mathbf{I}$ , como determinado em (3.26).

A equação (3.36) representa de forma recursiva a evolução do valor médio do vetor de erro dos coeficientes. Observa-se que (3.36) estabelece uma condição de convergência como uma função de  $G = N - P$ . O comportamento médio do vetor de erro dos coeficientes irá convergir para zero se  $|1 - 1/(G - 2)| < 1$ , que conduz para a condição  $G > 5/2$ . Desde que  $G$  é um inteiro, a convergência do valor médio do vetor de erro dos coeficientes requer que:

$$G = N - P \geq 3. \quad (3.37)$$

A condição de estabilidade (3.37) é verificada nas Figs. 3.4 e 3.5. Os comporta-

mentos médios dos coeficientes e do erro médio quadrático (EMQ) são mostrados para  $N = 64$  e para  $P = 61$  (Figs. 3.4(a) and 3.5(a)), dentro da região de estabilidade, e para  $N = 64$  e  $P = 63$  (Figs. 3.4(b) and 3.5(b)), que viola a condição de estabilidade apresentada em (3.37). As figuras mostram claramente que o algoritmo torna-se instável no segundo caso, confirmando a equação (3.37). Felizmente, esta condição de estabilidade não representa um problema para a maioria das aplicações, desde que geralmente  $N \gg P$  em projetos práticos.

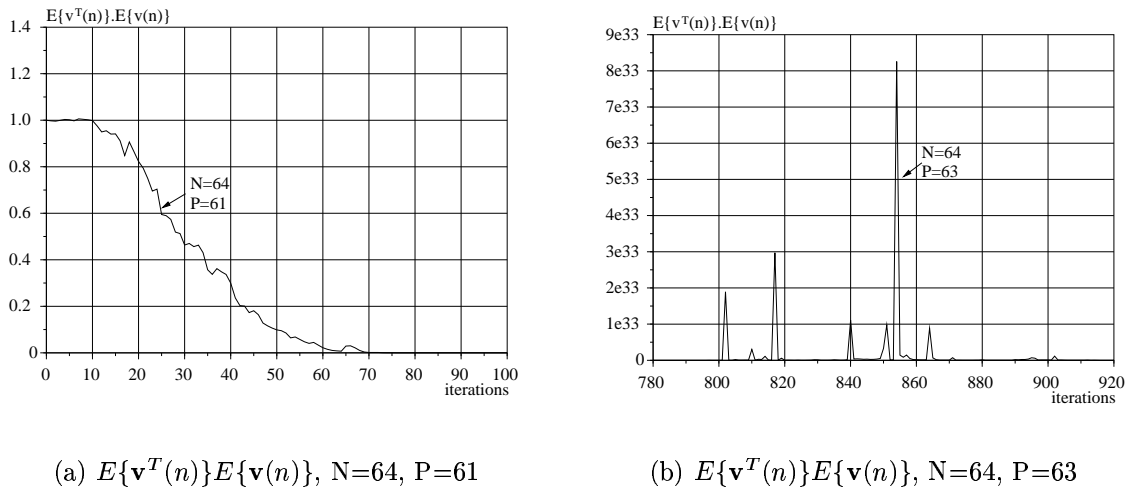
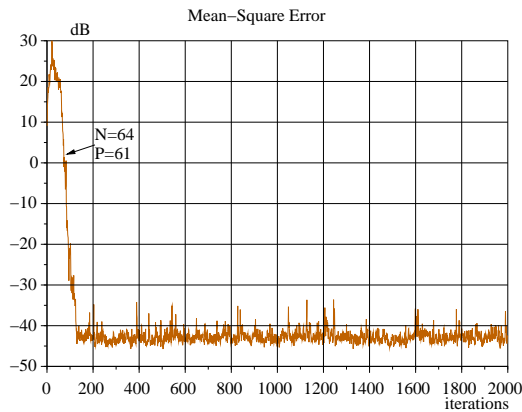


Figura 3.4: Verificação da condição de estabilidade. (a)  $E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\}$  para  $N=64$  e  $P=61$ , estável; (b)  $E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\}$  para  $N=64$  e  $P=63$ , instável.

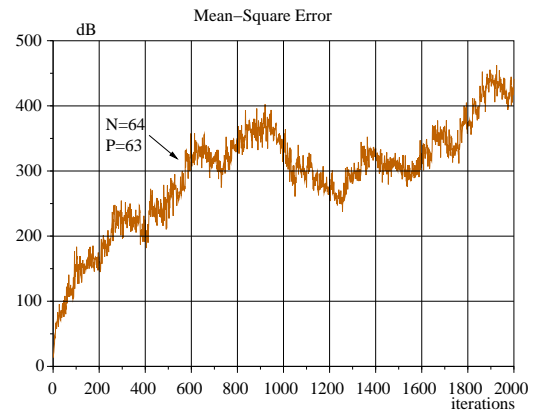
A seguir, substituindo  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o$  em (3.36), obtém-se o modelo do comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo AP:

$$E\{\mathbf{w}(n + 1)\} = \left( I - \frac{1}{\sigma_\phi^2(G - 2)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \right) E\{\mathbf{w}(n)\} + \frac{1}{\sigma_\phi^2(G - 2)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \mathbf{w}^o \quad (3.38)$$





(a) EMQ para  $N=64$ ,  $P=61$



(b) EMQ para  $N=64$ ,  $P=63$

Figura 3.5: Verificação da condição de estabilidade. (a) EMQ para o caso 3.4(a) ; (b) EMQ para o caso 3.4(b).

### 3.7 Resultados de Simulações

O modelo analítico dado pela equação (3.38) tem sido testado em várias situações diferentes. Nesta seção, apresenta-se uma amostra destes resultados para ilustrar a acurácia do modelo. No exemplo apresentado aqui, a variância  $\sigma_z^2$  é ajustada de tal modo que resulte em  $\sigma_\phi^2 = 1$ . A relação sinal-ruído é dado por  $SNR = 10 \log_{10}(\sigma_\phi^2/\sigma_r^2)$ dB.

#### 3.7.1 Exemplo 1:

A entrada é um processo autoregressivo de primeira ordem AR(1) Gaussiano definido pela expressão  $u(n) = -0,9u(n-1) + z(n)$ , com  $z(n)$  sendo uma seqüência de ruído branco e Gaussiano. A relação sinal-ruído é de  $SNR = 60$ dB. As simulações executadas são para  $N = 64$  e  $P = 4$  e  $N = 128$  e  $P = 1$ . Os comportamentos do valor médio dos coeficientes são mostrados nas Figs. 3.6 e 3.7, respectivamente. Essas figuras mostram os resultados das simulações Monte Carlo e o comportamento médio dos coeficientes previsto por (3.38). Pode-se observar que existe grande semelhança entre a simulação e o modelo teórico derivado.

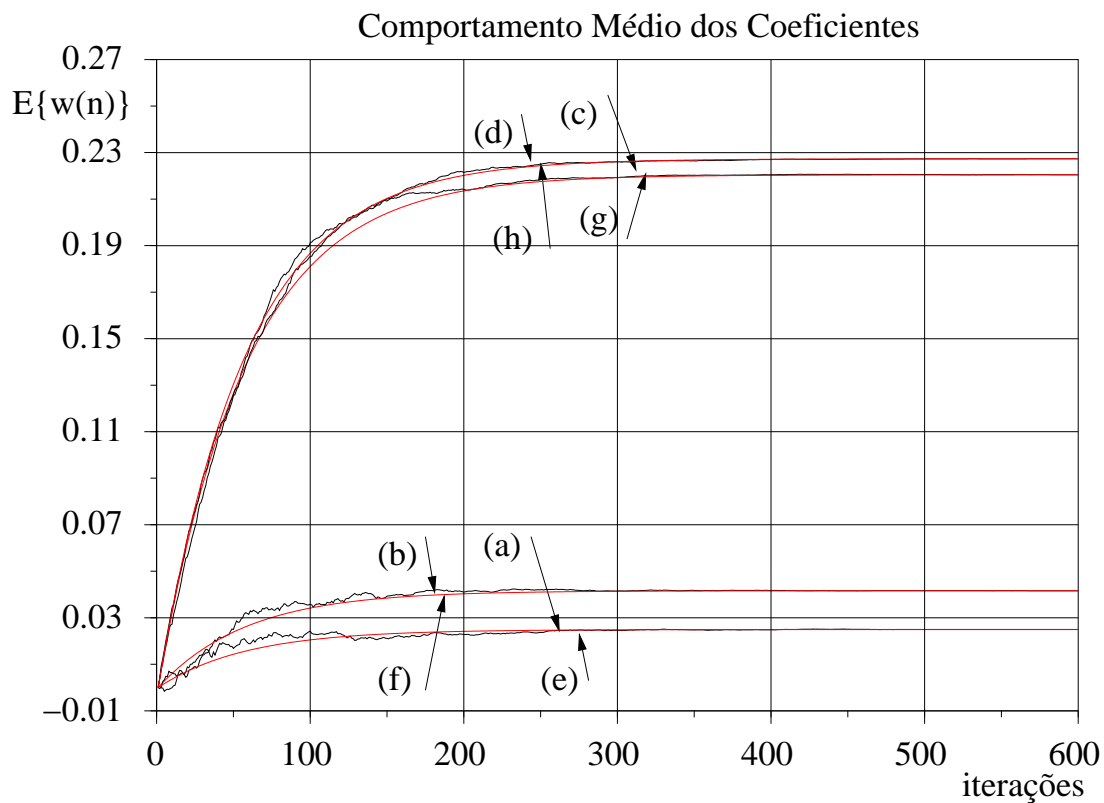


Figura 3.6: *Comportamento médio dos coeficientes - Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo AP(5),  $N = 64$ . Simulação (a) $w_{64}$  ; (b) $w_{32}$  ; (c) $w_{16}$  ; (d) $w_8$  e modelo teórico (e) $w_{64}$  ; (f) $w_{32}$  ; (g) $w_{16}$  ; (h) $w_8$*

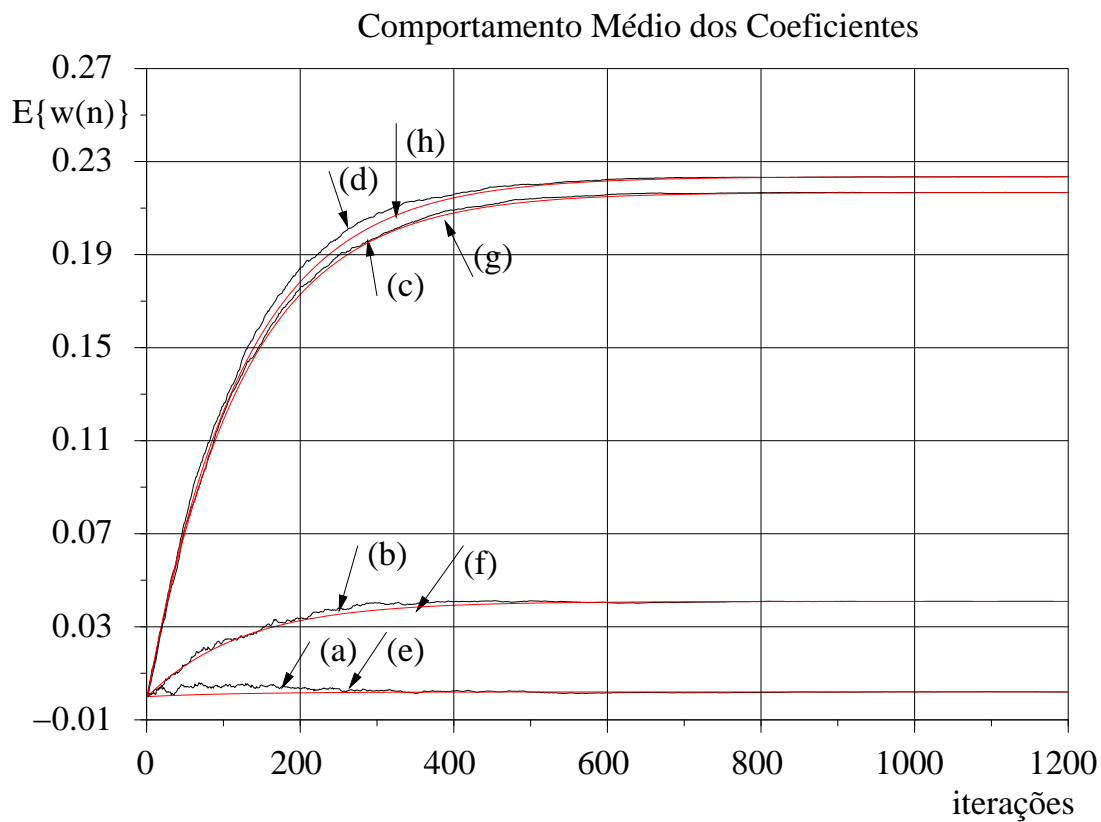


Figura 3.7: *Comportamento médio dos coeficientes - Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo AP(2),  $N = 128$ . Simulação (a) $w_{128}$  ; (b) $w_{64}$  ; (c) $w_{32}$  ; (d) $w_8$  e modelo teórico (e) $w_{128}$  ; (f) $w_{64}$  ; (g) $w_{32}$  ; (h) $w_8$*

### 3.8 O Erro Médio Quadrático - EMQ

Na avaliação do desempenho de um determinado algoritmo, estuda-se normalmente sua eficiência na minimização de uma função custo. Neste trabalho é analisado o comportamento do erro médio quadrático do sistema adaptativo apresentado na Fig.3.2, tanto durante a fase de adaptação (fase transitória) quanto em regime permanente.

São desenvolvidas equações recursivas para o erro médio quadrático em função dos momentos de primeira e segunda ordem.

A equação do sinal de erro (3.8) do sistema apresentado na Fig. 3.2 é reproduzida a seguir:

$$e(n) = d(n) - y(n) \tag{3.39}$$

em que  $d(n)$  é o sinal desejado expresso por:

$$d(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}^o + r(n), \tag{3.40}$$

em que  $r(n)$  é o sinal branco, de média zero, gaussiano e independente de  $\mathbf{u}(n)$  e  $y(n)$  é o sinal estimado expresso por:

$$y(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) \tag{3.41}$$

Nesta análise, considera-se também que  $\mathbf{u}(n)$  é um sinal autoregressivo de ordem  $P$ , definido como:

$$\mathbf{u}(n) = \sum_{i=1}^P a_i \mathbf{u}(n-i) + \mathbf{z}(n) = \mathbf{U}(n)\mathbf{a} + \mathbf{z}(n) \tag{3.42}$$

O erro médio quadrático (EMQ) é determinado elevando-se (3.39) ao quadrado e

tomando seu valor esperado, ou seja:

$$E\{e^2(n)\} = E\{[d(n) - y(n)]^2\} \quad (3.43)$$

Substituindo-se (3.40) e (3.41) em (3.43), chega-se a:

$$E\{e^2(n)\} = E\{[r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n)]^2\} \quad (3.44)$$

lembrando que o vetor de erro dos coeficientes é definido como,  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o$ .

O sinal de entrada  $\mathbf{u}(n)$  pode ser representado, conforme já observado, pela soma vetorial entre sua projeção no subespaço definido pelos vetores coluna de  $\mathbf{u}(n)$  passados, isto é,  $\mathbf{U}(n) = [\mathbf{u}(n-1) \dots \mathbf{u}(n-P)]$  e por sua projeção no subespaço ortogonal (ver Fig. 3.3). Assim, da equação (3.9), tem-se que:

$$\mathbf{u}(n) = \Phi(n) + \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n) \quad (3.45)$$

Substituindo a equação (3.45) em (3.44), obtém-se:

$$E\{e^2(n)\} = E\{[r(n) - \Phi^T(n)\mathbf{v}(n) - \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n)]^2\} \quad (3.46)$$

Antes de elevar-se os termos do lado direito da equação (3.46) ao quadrado, retorna-se às propriedades apresentadas, e observa-se que, baseado nas propriedades **1** e **3**, pode-se fazer a seguinte transformação:

$$E\{e^2(n)\} = E\{[r(n) - \Phi^T(n)\mathbf{v}(n) - \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{r}(n-1)]^2\} \quad (3.47)$$

E, conforme equação (3.23), chega-se à expressão:

$$E\{e^2(n)\} = E\{[r_a(n) - \Phi^T(n)\mathbf{v}(n)]^2\} \quad (3.48)$$

onde  $r_a(n)$  é o ruído filtrado.

Elevando agora (3.48) ao quadrado, resulta em:

$$E\{e^2(n)\} = E\{r_a^2(n)\} - 2E\{r_a(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\} + E\{\mathbf{v}^T(n)\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\} \quad (3.49)$$

O segundo termo no lado direito de (3.49) pode ser desprezado em comparação com os outros dois termos como será explicado a seguir. Assumindo que o algoritmo tem ordem suficiente (maior do que  $P$ ), em umas poucas iterações  $\hat{\mathbf{a}}(n)$  tende para o vetor  $\mathbf{a}$  mais uma pequena flutuação que está correlacionada com  $u(n)$ . Isto pode ser melhor observado substituindo a eq. (3.2) em (3.6), resultando em:

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = \mathbf{a} + [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n) \quad (3.50)$$

Aplicando (3.50) em (3.23) obtém-se:

$$r_a(n) = r(n) - \mathbf{a}^T\mathbf{r}(n-1) - [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n)\mathbf{r}(n-1) \quad (3.51)$$

Dessa forma,  $r_a(n)$  pode ser considerado fracamente correlacionado com  $u(n)$ . Já que  $\Phi(n)$  é também assumido estatisticamente independente de  $\mathbf{v}(n)$ , então  $\Phi(n)$  é fracamente correlacionado com  $\mathbf{v}(n)r_a(n)$  e o valor esperado será dado por:

$$\begin{aligned} E\{\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)r_a(n)\} &= E\{\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)r(n)\} - E\{\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{a}^T\mathbf{r}(n-1)\} \\ &\quad - E\{\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n)\mathbf{r}(n-1)\} \\ &= E\{\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\} \cdot E\{r(n)\} - E\{\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{a}^T\}E\{\mathbf{r}(n-1)\} \\ &\quad - E\{\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n)\} \cdot E\{\mathbf{r}(n-1)\} = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

O valor esperado é zero em virtude de  $\Phi(n)$  ser de média zero, já que  $\{u(n)\}$  é uma

seqüência de média zero.

O terceiro termo do lado direito de (3.49) é um valor escalar, e dessa maneira a equação (3.49) pode ser expressa da seguinte forma:

$$E\{e^2(n)\} = E\{r_a^2(n)\} + E\{tr[\mathbf{v}^T(n)\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)]\} \quad (3.53)$$

A seguir, utilizando-se a propriedade algébrica onde diz que  $tr[AB]=tr[BA]$ , verifica-se que (3.53) pode ser reescrita como:

$$E\{e^2(n)\} = E\{r_a^2(n)\} + E\{tr[\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)]\} \quad (3.54)$$

Sabendo que  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = E\{\Phi(n)\Phi^T(n)\}$  é a matriz de autocorrelação de  $\Phi(n)$  e que  $\mathbf{K}(n) = E\{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\}$  é o momento de segunda ordem do vetor de erro dos coeficientes, chega-se à seguinte expressão para o erro médio quadrático:

$$E\{e^2(n)\} = E\{r_a^2(n)\} + tr[\mathbf{R}_{\phi\phi}\mathbf{K}(n)] \quad (3.55)$$

Observa-se que (3.55) mostra que o erro médio quadrático mínimo será dado por  $E\{r_a^2(n)\}$ , a potência do ruído filtrado.

O passo seguinte é calcular o valor esperado do termo  $E\{r_a^2(n)\}$ .

Retornando-se à equação (3.23), elevando ao quadrado e tomando o valor esperado,

tem-se:

$$\begin{aligned}
 E\{r_a^2(n)\} &= E\left\{\left[r(n) - \sum_{i=1}^P \hat{a}_i(n)r(n-i)\right]^2\right\} \\
 &= E\left\{r^2(n) - 2 \sum_{i=1}^P \hat{a}_i(n)r(n)r(n-i) + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \hat{a}_i(n)\hat{a}_j(n)r(n-i)r(n-j)\right\}
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Como  $r(n)$  é branco Gaussiano de média zero,  $E\{r(n-i) \cdot r(n-j)\} = 0$  para  $i \neq j$ , e  $\hat{a}_i(n)$  é independente de  $r(n)$ , a equação (3.56) resulta em:

$$E\{r_a^2(n)\} = E\{r^2(n)\} + \sum_{i=1}^P E\{\hat{a}_i^2(n)\}E\{r^2(n-i)\} \tag{3.57}$$

Como  $E\{r^2(n-i)\} = \sigma_r^2$  para todo  $i$ , a equação (3.57) pode ser expressa por:

$$E\{r_a^2(n)\} = \sigma_r^2 \left(1 + \sum_{i=1}^P E\{\hat{a}_i^2(n)\}\right) = \sigma_r^2 \left(1 + E\{\hat{\mathbf{a}}^T(n)\hat{\mathbf{a}}(n)\}\right) \tag{3.58}$$

Para a avaliação de  $E\{\hat{\mathbf{a}}^T(n)\hat{\mathbf{a}}(n)\}$ , pré-multiplica-se a eq. (3.50) por sua transposta, e toma-se o valor esperado:

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{\mathbf{a}}^T(n)\hat{\mathbf{a}}(n)\} &= E\{\mathbf{a}^T \mathbf{a}\} \\
 &\quad + \underbrace{E\{\mathbf{a}^T [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1} \mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n)\}}_1 \\
 &\quad + \underbrace{E\{\mathbf{z}^T(n)\mathbf{U}(n)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1} \mathbf{a}\}}_2 \\
 &\quad + \underbrace{E\{\mathbf{z}^T(n)\mathbf{U}(n)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-2} \mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n)\}}_3
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Da hipótese **A1**, observa-se que os valores esperados das parcelas 1 e 2 da equação (3.59) têm valor nulo devido ao fator  $z(n)$ .



Condicionando em  $\mathbf{U}(n)$ , a parcela 3 pode ser expressa por:

$$tr\left([\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-2}\mathbf{U}^T(n)E\{\mathbf{z}(n)\mathbf{z}^T(n)\}\mathbf{U}(n)\right) \quad (3.60)$$

Como  $E\{\mathbf{z}(n)\mathbf{z}^T(n)\} = \sigma_z^2 \mathbf{I}$ , simplificando e retirando o condicionamento de (3.60), chega-se a:

$$\sigma_z^2 tr\left(E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}\right) \quad (3.61)$$

E, finalmente, (3.59) será expressa por:

$$\begin{aligned} E\{\hat{\mathbf{a}}^T(n)\hat{\mathbf{a}}(n)\} &= E\{\mathbf{a}^T\mathbf{a}\} + \sigma_z^2 tr\left(E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}\right) \\ &= \mathbf{a}^T\mathbf{a} + \sigma_z^2 tr\left(E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}\right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Aplicando (3.62) em (3.55), tem-se a seguinte expressão para o erro médio quadrático:

$$E\{e^2(n)\} = \left[1 + \mathbf{a}^T\mathbf{a} + tr\left(E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}\right)\right]\sigma_r^2 + tr[\mathbf{R}_{\phi\phi}\mathbf{K}(n)] \quad (3.63)$$

A primeira parcela em (3.63) é função da estatística da entrada. Já a matriz  $\mathbf{K}(n)$  na segunda parcela deve ser calculada. Isso é feito na próxima seção.

### 3.8.1 Análise dos Momentos de Segunda Ordem

Na equação do erro médio quadrático (3.63), o primeiro termo no lado direito é função da estatística do sinal de entrada. Já no segundo termo aparece a matriz de correlação  $\mathbf{K}(n)$ , que contém os momentos de segunda ordem do vetor de erro dos coeficientes, e que precisam ser calculados.

Fazendo-se o produto da equação (3.24) por sua transposta e tomando-se o valor esperado, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{K}(n) \\
 & - E \left\{ \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\} \\
 & + E \left\{ \mathbf{v}(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\} \\
 & - E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \right\} \\
 & + E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\} \\
 & - E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\} \\
 & + E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a(n) \mathbf{v}^T(n) \right\} \\
 & - E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\} \\
 & + E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a^2(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

O passo seguinte é calcular o valor esperado de cada termo do lado direito da equação (3.64). Os segundo e quarto termos no lado direito de (3.64) são facilmente determinados utilizando a hipótese **A2**, e as equações (3.28) e (3.33). Assim, tem-se:

$$E \left\{ \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\} = \frac{1}{2\sigma_\phi^2} \frac{\Gamma(G/2 - 1)}{\Gamma(G/2)} \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{\phi\phi} \tag{3.65}$$

$$E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \right\} = \frac{1}{2\sigma_\phi^2} \frac{\Gamma(G/2 - 1)}{\Gamma(G/2)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \mathbf{K}(n) \tag{3.66}$$

Aplicando a propriedade  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ , pode-se expressar as equações (3.65) e (3.66) respectivamente por:

$$E \left\{ \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\} = \frac{1}{\sigma_\phi^2(G-2)} \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{\phi\phi} \tag{3.67}$$

$$E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \right\} = \frac{1}{\sigma_\phi^2(G-2)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \mathbf{K}(n) \tag{3.68}$$

Assumindo  $\mathbf{v}(n)r_a(n)$  não correlacionado com  $\Phi(n)$ , o terceiro termo no lado direito de (3.64) torna-se:

$$E\left\{\mathbf{v}(n)r_a(n)\frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\} = E\{\mathbf{v}(n)r_a(n)\}E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-1}\Phi^T(n)\} \quad (3.69)$$

O segundo valor esperado em (3.69) é então determinado usando a mesma hipótese utilizada em (3.27) - (3.33):

$$E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-1}\Phi^T(n)\} \approx E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-1}\}E\{\Phi^T(n)\} = 0 \quad (3.70)$$

já que  $E\{\Phi(n)\} = 0$ . O mesmo resultado é obtido para o sétimo termo de (3.64).

O sexto termo em (3.64) pode ser calculado como:

$$E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n)\frac{r_a(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\} = E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-2}\}E\{\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)r_a(n)\Phi^T(n)\} \quad (3.71)$$

Como  $\Phi(n)$  é assumido Gaussiano de média zero (hipótese **A3**), os momentos de terceira ordem de seus elementos são iguais a zero. Assumindo também que  $\Phi(n)$  é não correlacionado com  $\mathbf{v}(n)r_a(n)$ , cálculos diretos mostram que o segundo valor esperado em (3.71) é igual a zero. A mesma conclusão também é assegurada para o oitavo termo em (3.64).

A avaliação do quinto termo no lado direito da eq. (3.64) envolve estatística de ordem superior das variáveis. Dessa forma, não é simples inferir alguma propriedade de correlação, como foi feito nos momentos de segunda ordem já calculados. Para proceder com a análise, é assumido que o numerador e o denominador possam ser

aproximados por seus valores médios. Dessa forma:

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} \approx \frac{1}{E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^2\}} \times E\{\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\Phi(n)\Phi^T(n)\}. \quad (3.72)$$

Foi verificado por simulação que essa aproximação leva a melhores resultados do que a aproximação clássica usada na análise do algoritmo LMS [16]

O primeiro valor esperado em (3.72) é calculando diretamente usando a integração feita em (3.30) mas com  $[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-2} = y^{-2}$ . Assim, chega-se a:

$$\frac{1}{E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^2\}} = \frac{1}{\sigma_\phi^4(G^2 + 2G)}. \quad (3.73)$$

O segundo fator em (3.72) pode ser escrito como:

$$E\{\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\Phi(n)\Phi^T(n)\} = E\left\{\text{tr}[\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \Phi(n)\Phi^T(n)\right\}. \quad (3.74)$$

O elemento  $(i, j)$  de (3.74) é dado por

$$E\left\{\text{tr}[\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \phi_i(n)\phi_j(n)\right\} = E\left\{\left[\sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_\ell(n)\phi_k(n)v_k(n)v_\ell(n)\right] \phi_i(n)\phi_j(n)\right\} \quad (3.75)$$

Agora, o produto  $\phi_i(n)\phi_j(n)$  pode ser assumido fracamente correlacionado com o duplo somatório em (3.75) para um valor de  $N$  grande, já que cada par  $(\phi_i(n), \phi_j(n))$  afeta no máximo  $4N - 2$  dentre os  $N^2$  termos no duplo somatório. Esta propriedade e

a Hipótese **A2** conduzem para:

$$E \left\{ \text{tr}[\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \phi_i(n)\phi_j(n) \right\} = E \left\{ \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_\ell(n)\phi_k(n) E\{v_k(n)v_\ell(n)\} \right\} \\ \times E\{\phi_i(n)\phi_j(n)\}. \quad (3.76)$$

Separando os termos  $k = l$  e  $k \neq l$ , o lado direito de (3.76) é escrito como:

$$= E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k^2(n) E\{v_k^2(n)\} \right\} E\{\phi_i(n)\phi_j(n)\} \\ + E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{N-1} \phi_\ell(n)\phi_k(n) E\{v_k(n)v_\ell(n)\} \right\} E\{\phi_i(n)\phi_j(n)\}. \quad (3.77)$$

Como de (3.26)  $E\{\phi_i(n)\phi_j(n)\} = 0$  para  $i \neq j$ , (3.76) torna-se:

$$E \left\{ \text{tr}[\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)] \phi_i(n)\phi_j(n) \right\} = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k^2(n) E\{v_k^2(n)\} \right\} E\{\phi_i(n)\phi_j(n)\}. \quad (3.78)$$

Como a distribuição de  $v(n)$  é desconhecida, uma aproximação deve ser empregada para  $E\{v_k^2(n)\}$ . Assumindo flutuações iguais sobre a média de todos os componentes de  $v_k(n)$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$  (mesma variância),  $E\{v_k^2(n)\}$  pode ser aproximada por:

$$E\{v_k^2(n)\} = E^2\{v_k(n)\} + \sigma_{v_k(n)}^2 \approx E^2\{v_k(n)\} + \frac{\text{tr}[\mathbf{C}(n)]}{N} \quad (3.79)$$

em que  $\mathbf{C}(n)$  é a matriz de covariância de  $\mathbf{v}(n)$ , e é dada por:

$$\mathbf{C}(n) = E \left\{ \left( \mathbf{v}(n) - E\{\mathbf{v}(n)\} \right) \left( \mathbf{v}^T(n) - E\{\mathbf{v}^T(n)\} \right) \right\} \\ = E\{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\} - E\{\mathbf{v}(n)\}E\{\mathbf{v}^T(n)\} \\ = \mathbf{K}(n) - E\{\mathbf{v}(n)\}E\{\mathbf{v}^T(n)\}. \quad (3.80)$$

Substituindo (3.80) em (3.79) resulta em:

$$E\{v_k^2(n)\} = \frac{1}{N} \left[ \text{tr}[\mathbf{K}(n)] - E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\} \right] + E^2\{v_k(n)\}. \quad (3.81)$$

Usando (3.81), o lado direito de (3.78) torna-se:

$$\begin{aligned} & E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k^2(n) E\{v_k^2(n)\} \right\} E\{\phi_i(n)\phi_j(n)\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{N} \left[ \text{tr}[\mathbf{K}(n)] - E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\} \right] \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k^2(n) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k^2(n) E^2\{v_k(n)\} \right\} \\ & \quad \times E\{\phi_i(n)\phi_j(n)\} \\ &= \left\{ \frac{1}{N} \left[ \text{tr}[\mathbf{K}(n)] - E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\} \right] E\{\Phi^T(n)\Phi(n)\} + E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k^2(n) E^2\{v_k(n)\} \right\} \right\} \\ & \quad \times E\{\phi_i(n)\phi_j(n)\}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Como  $\phi_k(n)$  é estacionário,  $E\{\phi_k^2(n)\} = \sigma_\phi^2$  para todo  $k = 0, \dots, N - 1$ . Dessa forma, pode-se verificar facilmente que

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k^2(n) E^2\{v_k(n)\} \right\} = \sigma_\phi^2 E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\}. \quad (3.83)$$

O valor esperado de  $\Phi^T(n)\Phi(n)$  é determinado usando a função densidade de probabilidade (3.29) e integrando. Assim,

$$E\{\Phi^T(n)\Phi(n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y)dy = G \sigma_\phi^2. \quad (3.84)$$

Substituindo (3.83) e (3.84) em (3.82), inserindo o resultado em (3.80) e observando

que  $E\{\phi_i(n)\phi_j(n)\}$  é o elemento  $(i, j)$  de  $\mathbf{R}_{\phi\phi}$  resulta na equação:

$$E\{\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\Phi(n)\Phi^T(n)\} = \sigma_\phi^2 \left[ \frac{G}{N} \text{tr}[\mathbf{K}(n)] + \left(1 - \frac{G}{N}\right) E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\} \right] \mathbf{R}_{\phi\phi}. \quad (3.85)$$

Usando (3.73) e (3.85) em (3.72), resulta em:

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} \approx \frac{1}{\sigma_\phi^2(G^2 + 2G)} \left[ \frac{G}{N} \text{tr}[\mathbf{K}(n)] + \left(1 - \frac{G}{N}\right) E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\} \right] \mathbf{R}_{\phi\phi}. \quad (3.86)$$

Finalmente, o último valor esperado em (3.86) é determinado usando novamente a hipótese de que  $r_a(n)$  não é correlacionado com  $\Phi(n)$  e que  $\Phi(n)\Phi^T(n)$  não é correlacionado com  $\Phi^T(n)\Phi(n)$ . Então,

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)r_a(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \frac{r_a(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} \approx E\{r_a^2(n)\} E \left\{ \frac{1}{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^2} \right\} E\{\Phi(n)\Phi^T(n)\}. \quad (3.87)$$

O primeiro valor esperado é definido pela eq.(3.62) e reproduzido abaixo:

$$E\{r_a^2(n)\} = \left[ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left( E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\} \right) \right] \sigma_r^2 \quad (3.88)$$

O segundo valor esperado em (3.87) é calculado diretamente integrando (3.29):

$$E \left\{ \frac{1}{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^2} \right\} = \frac{1}{\sigma_\phi^4(G-2)(G-4)} \quad (3.89)$$

O terceiro termo é simplesmente a matriz de correlação  $\mathbf{R}_{\phi\phi}$ . Dessa forma,

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)r_a(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \frac{r_a(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} \approx \left[ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left( E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\} \right) \right] \times \frac{\sigma_r^2}{\sigma_\phi^4(G-2)(G-4)} \mathbf{R}_{\phi\phi}. \quad (3.90)$$

Aplicando os resultados dos valores esperados de cada termo de (3.64) e substituindo na mesma, chega-se à seguinte equação recursiva para  $\mathbf{K}(n)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{K}(n) - \frac{1}{\sigma_\phi^2(G-2)}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\phi\phi} + \mathbf{R}_{\phi\phi}\mathbf{K}(n)] \\ & + \frac{1}{\sigma_\phi^2(G^2+2G)} \left[ \frac{G}{N} \text{tr}[\mathbf{K}(n)] + \left(1 - \frac{G}{N}\right) E\{\mathbf{v}^T(n)\} E\{\mathbf{v}(n)\} \right] \mathbf{R}_{\phi\phi} \\ & + \left[ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left( E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\} \right) \right] \frac{\sigma_r^2}{\sigma_\phi^4(G-2)(G-4)} \mathbf{R}_{\phi\phi}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

As expressões (3.91) e (3.36), com  $\mathbf{R}_{\phi\phi}$  dada em (3.26), podem ser substituídas em (3.63) para determinar recursivamente o comportamento do erro médio quadrático. Contudo, assumindo, para simplificação, que todos os elementos de  $\mathbf{U}(n)$  têm potências similares, é fácil observar que  $\sigma_z^2 \text{tr}[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}$  é aproximadamente dada por  $(P/N)(\sigma_z^2/\sigma_u^2)$ , que pode ser desprezado quando comparado à unidade para  $N \gg P$ . Neste caso,  $\sigma_z^2 \text{tr}[E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}]$  pode ser desprezado nas equações (3.91) e (3.63). O modelo resultante não requer qualquer estimação da matriz  $E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}$ , e é tão preciso quanto o modelo completo para a maioria das aplicações práticas.

Como  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sigma_\phi^2 \mathbf{I}$ , a expressão do erro médio quadrático em (3.63) é uma função de  $\text{tr}[\mathbf{K}(n)]$ . Definindo os escalares

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{G-2} \\ \beta &= \frac{G}{N(G^2+2G)} \\ \gamma &= \frac{P}{N(G^2+2G)} \\ \delta &= \left[ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left( E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\} \right) \right] \frac{\sigma_r^2}{\sigma_\phi^4(G-2)(G-4)} \end{aligned}$$



a eq. (3.91) poderá ser escrita como:

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) - \alpha\mathbf{K}(n) + \beta\text{tr}[\mathbf{K}(n)]\mathbf{I} + \gamma E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\}\mathbf{I} + \delta\mathbf{I}. \quad (3.92)$$

Tomando o traço de (3.92) e usando a solução na forma fechada de (3.36) como uma função de  $\alpha$  e  $\mathbf{v}(0)$  (valor determinístico), resulta em:

$$\text{tr}[\mathbf{K}(n+1)] = (1 - \alpha + N\beta)\text{tr}[\mathbf{K}(n)] + N\gamma \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{2n} \mathbf{v}^T(0)\mathbf{v}(0) + N\delta. \quad (3.93)$$

Como  $\mathbf{v}^T(0)\mathbf{v}(0) = \text{tr}[\mathbf{K}(0)]$ , a solução de (3.93) pode ser determinada numa forma fechada como:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{K}(n)] = & \left\{ (1 - \alpha + N\beta)^n + N\gamma \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha + N\beta)^k \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{2(n-k-1)} \right\} \text{tr}[\mathbf{K}(0)] \\ & + N\delta \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \alpha + N\beta)^k. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Usando (3.94) em (3.63) com  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sigma_\phi^2\mathbf{I}$ , chega-se à uma forma fechada para a expressão do erro médio quadrático.

### 3.9 Comportamento do Algoritmo AP em Regime Permanente

Assumindo a convergência, o comportamento do algoritmo em regime permanente pode ser determinado tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  do modelo analítico. Quando  $n \rightarrow \infty$ , pode-se dizer que  $\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) = \mathbf{K}_\infty$ . Também,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\mathbf{v}(n)\} = 0$  em (3.36). Dessa forma, tomando o  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  de (3.92) resulta em:

$$\mathbf{K}_\infty = \frac{1}{\alpha} \left( \beta\text{tr}[\mathbf{K}_\infty] + \delta \right) \mathbf{I}. \quad (3.95)$$

A equação (3.95) mostra claramente que  $\mathbf{K}_\infty$  é um múltiplo da matriz identidade. Tomando o traço de (3.95) encontra-se que  $\text{tr}[\mathbf{K}_\infty] = N\delta/(\alpha - N\beta)$  e dessa maneira

$$\mathbf{K}_\infty = \left[ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left( E \{ [\mathbf{U}^T(n) \mathbf{U}(n)]^{-1} \} \right) \right] \frac{(G+2)\sigma_r^2}{(G-4)(G+6)\sigma_\phi^2} \mathbf{I}. \quad (3.96)$$

Usando (3.96) e  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sigma_\phi^2 \mathbf{I}$  em (3.63) chega-se à expressão do erro médio quadrático em regime permanente

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E \{ e^2(n) \} = \left[ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left( E \{ [\mathbf{U}^T(n) \mathbf{U}(n)]^{-1} \} \right) \right] \left( 1 + \frac{N(G+2)}{(G-4)(G+6)} \right) \sigma_r^2. \quad (3.97)$$

A equação (3.97) define uma expressão para o erro médio quadrático (EMQ) em regime permanente do algoritmo de projeções afins. Observa-se que o fator multiplicador  $1 + \frac{N(G+2)}{(G-4)(G+6)}$  é reduzido quando  $G = N - P$  aumenta. Dessa forma, aumentando  $N - P$  reduz o erro em regime permanente. Esta é outra boa razão (além da complexidade computacional) para utilizar  $N \gg P$  em projetos práticos. Se  $N \gg P$  e  $N \gg 6$ , o erro médio quadrático em regime permanente se reduz para  $\xi \approx 2 \left[ 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left( E \{ [\mathbf{U}^T(n) \mathbf{U}(n)]^{-1} \} \right) \right] \sigma_r^2$ , onde a multiplicação por 2 representa um aumento significativo no EMQ em regime permanente, em comparação com algoritmos simples tais como o algoritmo NLMS. Usando os mesmos argumentos aplicados para (3.91), o termo  $\sigma_z^2 \text{tr} \left( E \{ [\mathbf{U}^T(n) \mathbf{U}(n)]^{-1} \} \right)$  pode ser desprezado em (3.97) quando comparado à unidade, resultando em  $\xi \approx 2(1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a})\sigma_r^2$ . Este último resultado concorda com os resultados encontrados em [28], os quais mostram aumento do ruído de medição  $\sigma_r^2$  por um termo extra igual a  $\mathbf{a}^T \mathbf{a} \sigma_r^2$ . O que não foi mostrado em nenhum outro trabalho é que no mínimo 3dB são adicionados a este aumento do ruído de fundo, em virtude do multiplicador mais à direita em (3.97).

### 3.10 Resultados de Simulações

O modelo analítico composto das equações (3.36), (3.63) e (3.91) tem sido testado em diferentes situações. Nesta seção, apresenta-se uma amostra destes resultados para ilustrar a acurácia do modelo. Estes resultados são representativos dos resultados obtidos em todos os casos testados. Em todos os exemplos apresentados aqui, a variância  $\sigma_z^2$  é ajustada de tal modo que resulte em  $\sigma_\phi^2 = 1$ . A relação sinal-ruído é dada por  $SNR = 10 \log_{10}(\sigma_\phi^2/\sigma_r^2)$  dB. Em todos os exemplos, o termo  $\sigma_z^2 \text{tr} \left( E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\} \right)$  foi desprezado em (3.63) e (3.91). Também, a resposta ideal  $\mathbf{w}^o$  usada em todos os exemplos corresponde às  $N$  primeiras amostras da resposta acústica de um ambiente, mostrada na Fig. 3.8. O modelo derivado necessita de  $N$  grande e  $N \gg P$ . Todas as simulações mostraram boa predição do comportamento do algoritmo para  $N > 40$  aproximadamente. Esta é uma condição razoável para a maioria das aplicações práticas em que o algoritmo AP é uma opção atrativa. Também,  $N \gg P$  é uma condição desejável na prática para manter a complexidade computacional e o EMQ em regime permanente o menor possível. Os parâmetros usados nos exemplos refletem estas condições.

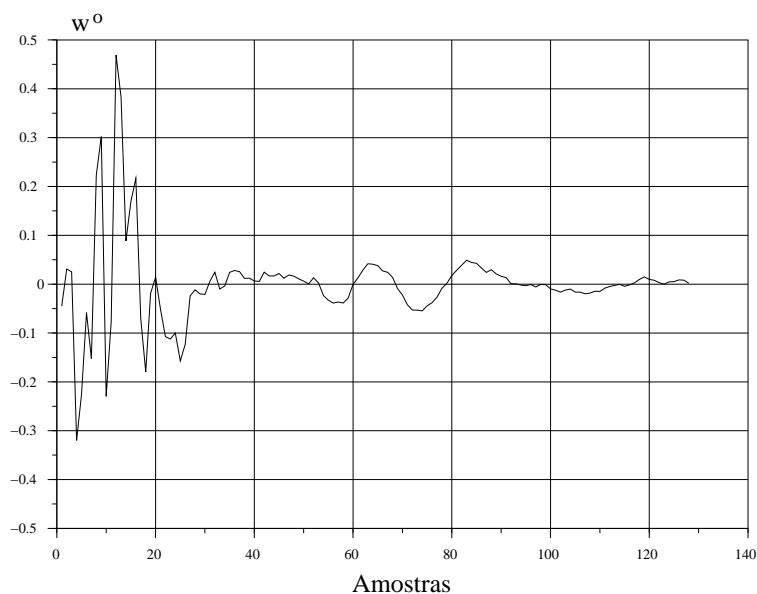


Figura 3.8: Resposta impulsiva  $w^o$  usada em todos os exemplos. Em cada exemplo as  $N$  primeiras amostras desta resposta são os elementos de  $w^o$

### 3.10.1 Exemplo 1:

A entrada é um processo autoregressivo de primeira ordem AR(1) Gaussiano definido pela expressão  $u(n) = -0,9u(n-1) + z(n)$ , com  $z(n)$  sendo uma seqüência de ruído branco e Gaussiano. A relação sinal-ruído é  $SNR = 60\text{dB}$ . As simulações executadas são para  $N = 64$  e  $P = 1$ ,  $N = 64$  e  $P = 4$ ,  $N = 128$  e  $P = 1$ , e  $N = 128$  e  $P = 8$ . Os comportamentos do erro médio quadrático são mostrados nas Figs. 3.9 – 3.12, respectivamente. As figuras mostram os resultados das simulações Monte Carlo e o comportamento do Erro Médio Quadrático (EMQ) previsto pelo modelo proposto neste capítulo. O comportamento do EMQ previsto pelos modelos em [4] e [2] são também mostrados nas figuras. Observa-se que o modelo proposto possibilita a melhor previsão do comportamento do algoritmo. Este tem sido o caso em todos os casos testados. O comportamento previsto pelo modelo proposto é claramente muito mais acurado para qualquer propósito prático. Estes gráficos confirmam o conhecimento prático que o desempenho da convergência do algoritmo AP não melhora proporcional-

mente para incrementos no valor de  $P$  além da ordem do sinal de entrada. Também observa-se que o EMQ em regime permanente previsto por (3.97) (linha horizontal) concorda muito bem com os resultados das simulações.

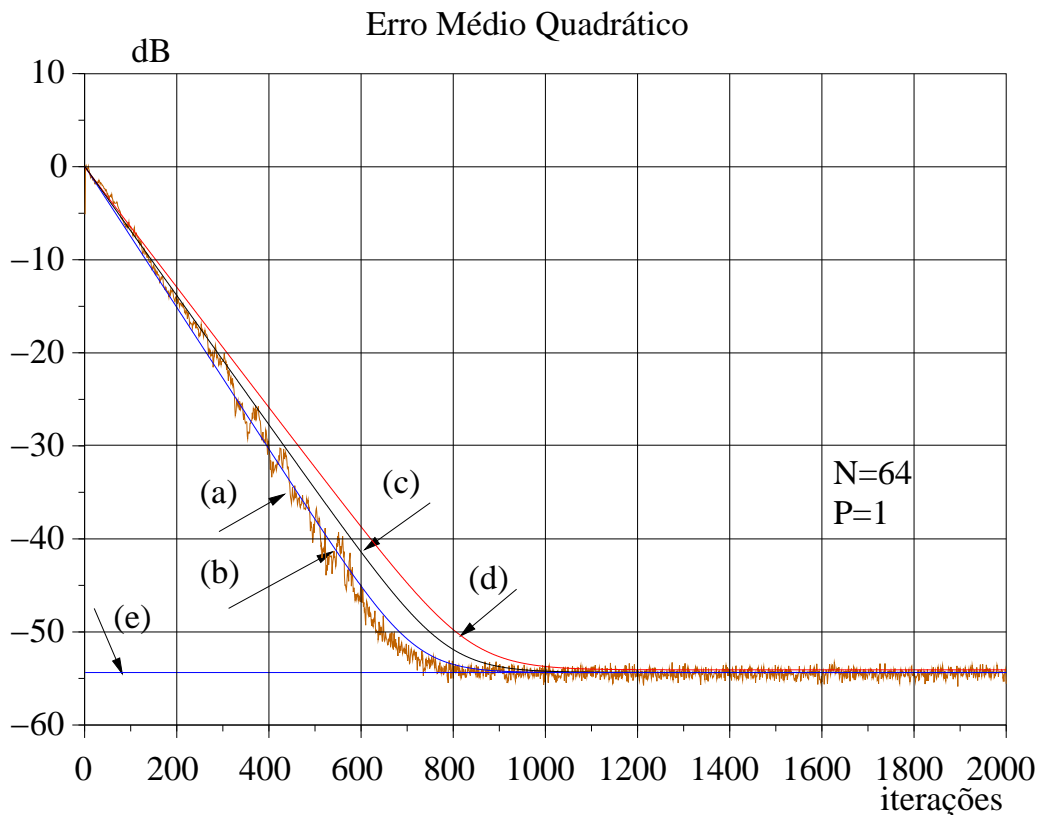


Figura 3.9: *EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo AP(2),  $N = 64$ ,  $SNR = 60dB$ . (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) Modelo em [4]; (d) Modelo em [2]; (e) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)*

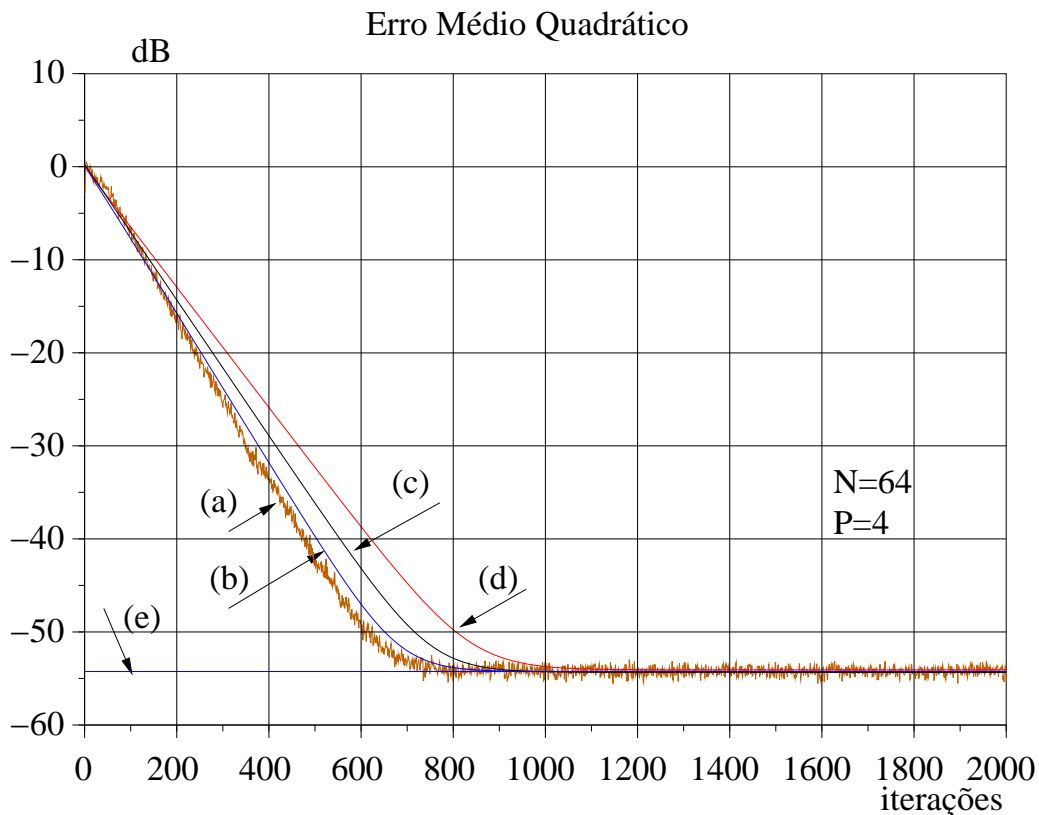


Figura 3.10: *EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo AP(5),  $N = 64$ ,  $SNR = 60dB$ . (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) Modelo em [4]; (d) Modelo em [2]; (e) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)*

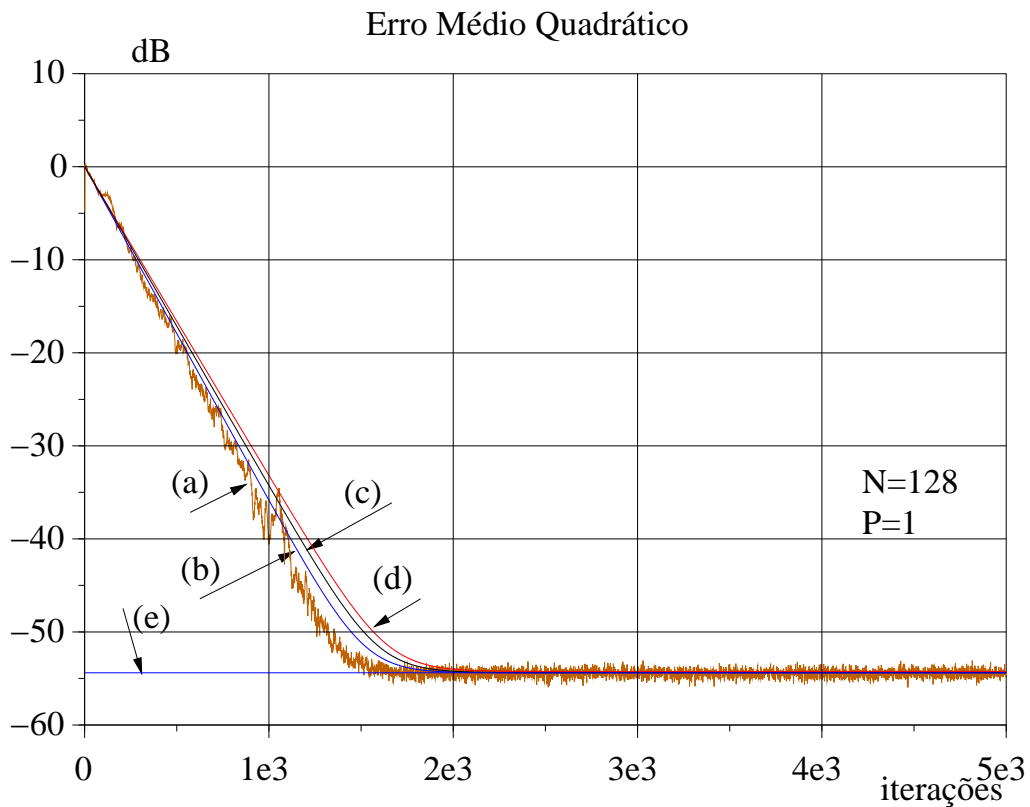


Figura 3.11: *EMQ - Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo AP(2),  $N = 128$ ,  $SNR = 60dB$ . (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) Modelo em [4]; (d) Modelo em [2]; (e) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)*



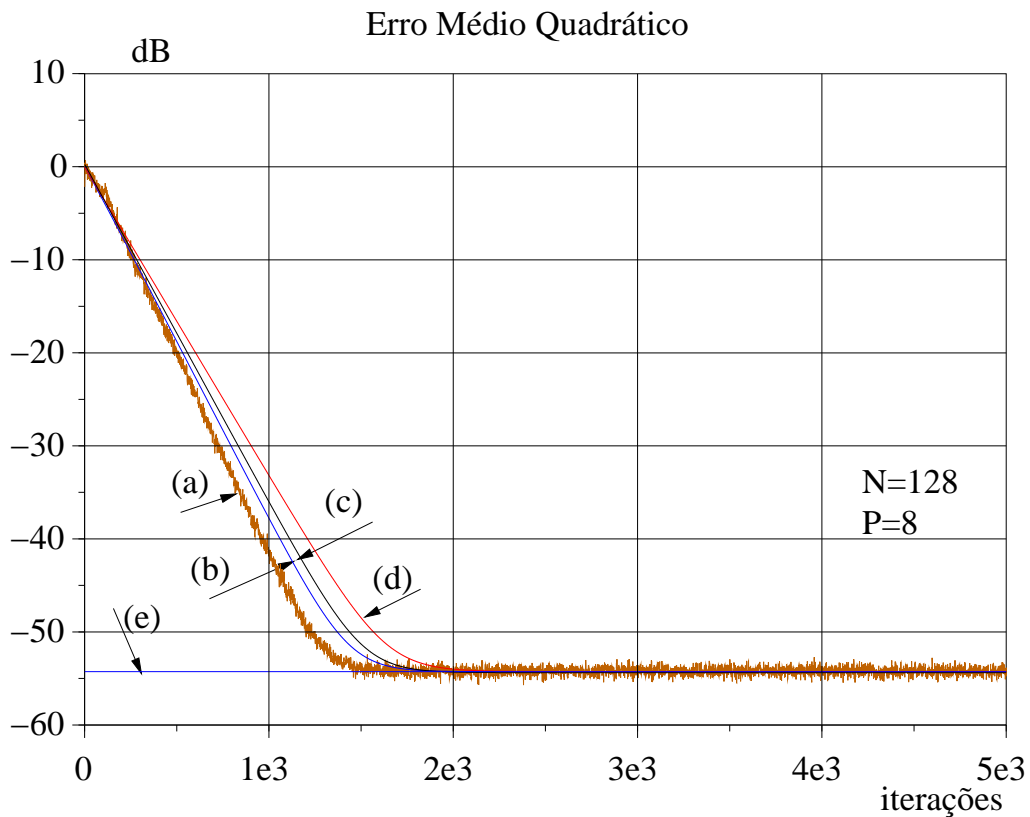


Figura 3.12: *EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0.9$ , algoritmo AP(9),  $N = 128$ ,  $SNR = 60dB$ . (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) Modelo em [4]; (d) Modelo em [2]; (e) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)*

### 3.10.2 Exemplo 2:

Estes exemplos repetem o caso  $N = 64$  e  $P = 8$  com a diferença que os processos autoregressivos são de ordem dois e três. Na Fig.3.13 o processo  $u(n)$  é gerado por filtro passa-baixas de segunda ordem definido pela equação:  $u(n) = 1,2u(n-1) - 0,45u(n-2) + z(n)$  com pólos em  $r = 0,6 \pm 0,3i$ . Na Fig 3.14, o processo é definido por um filtro passa-altas dado por:  $u(n) = -0,2u(n-1) - 0,7u(n-2) + z(n)$  com pólos em  $r = -0,1 \pm 0,83i$ . A Fig. 3.15 tem o sinal de entrada gerado por um processo de terceira ordem definido pela expressão:  $u(n) = -0,2u(n-1) - 0,179u(n-2) + 0,567u(n-3) + z(n)$ . Observa-se que em todos as simulações, o modelo teórico apresentou uma excelente previsão do comportamento do algoritmo para todos os processos autoregressivos aplicados.

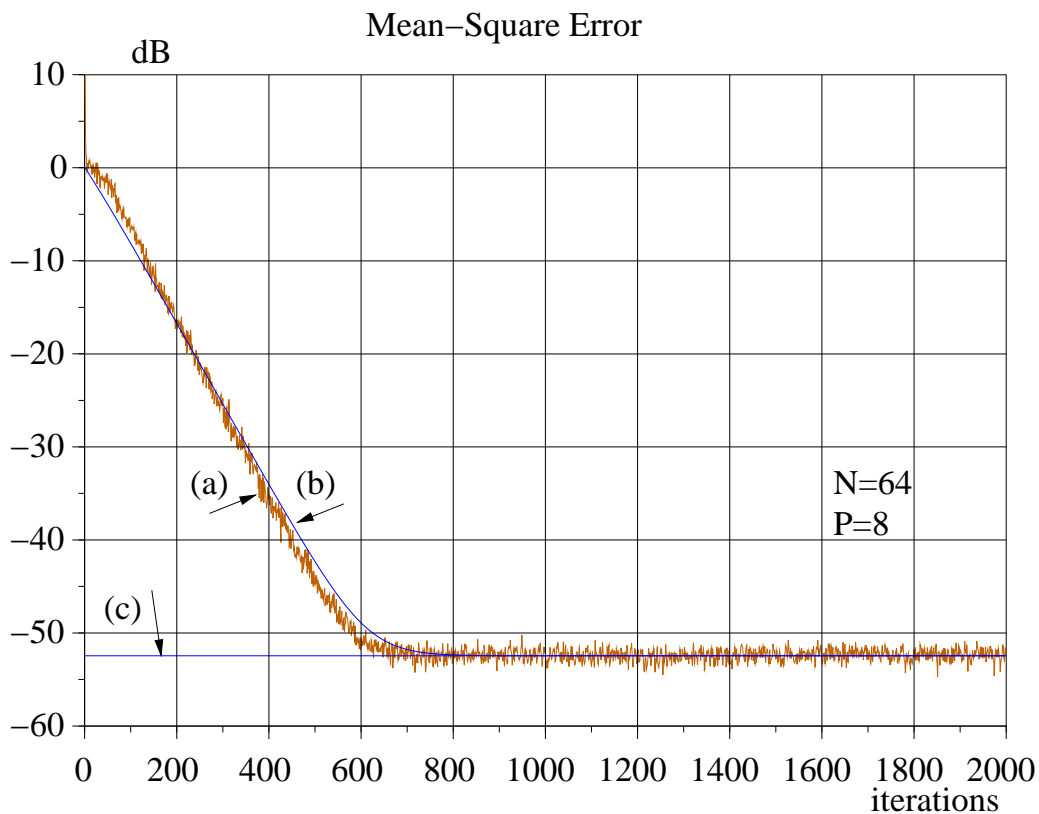


Figura 3.13: *EMQ - Entrada AR(2) Gaussiana, algoritmo AP(9), N = 64, SNR = 60dB. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)*

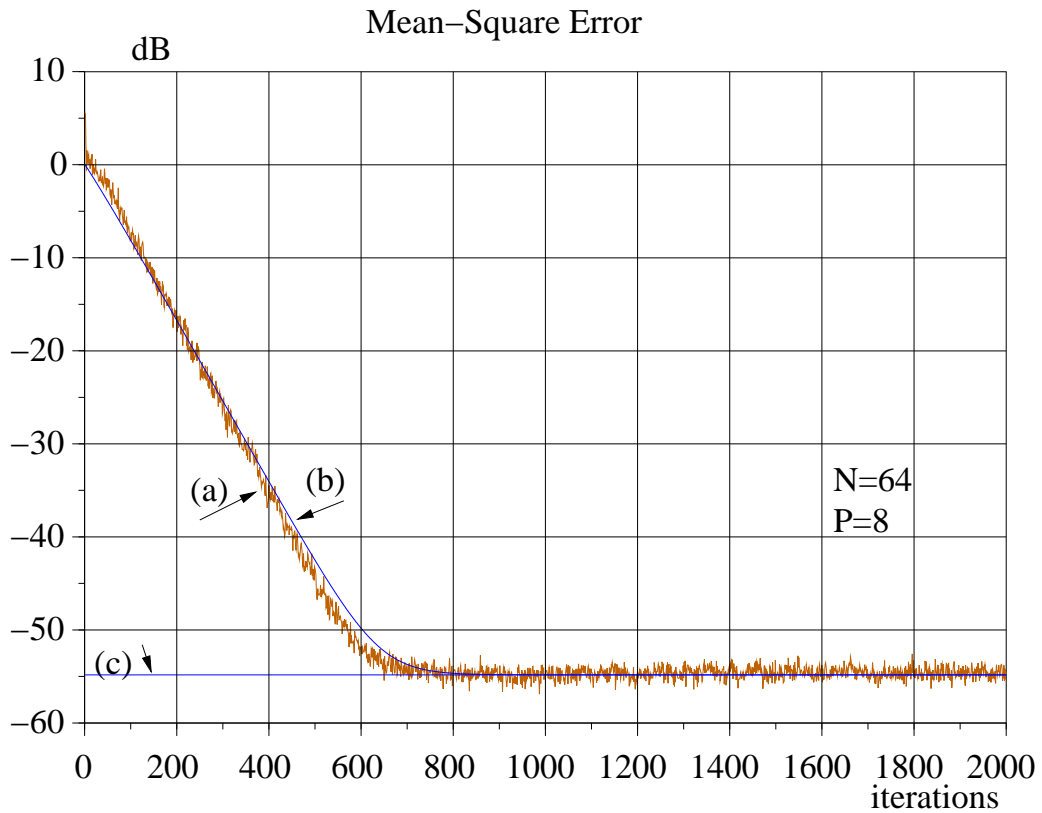


Figura 3.14: *EMQ* - *Entrada AR(2) Gaussiana*, algoritmo *AP(9)*,  $N = 64$ ,  $SNR = 60dB$ . (a) *simulações Monte Carlo (200 realizações)*; (b) *Modelo proposto*; (c) *EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)*

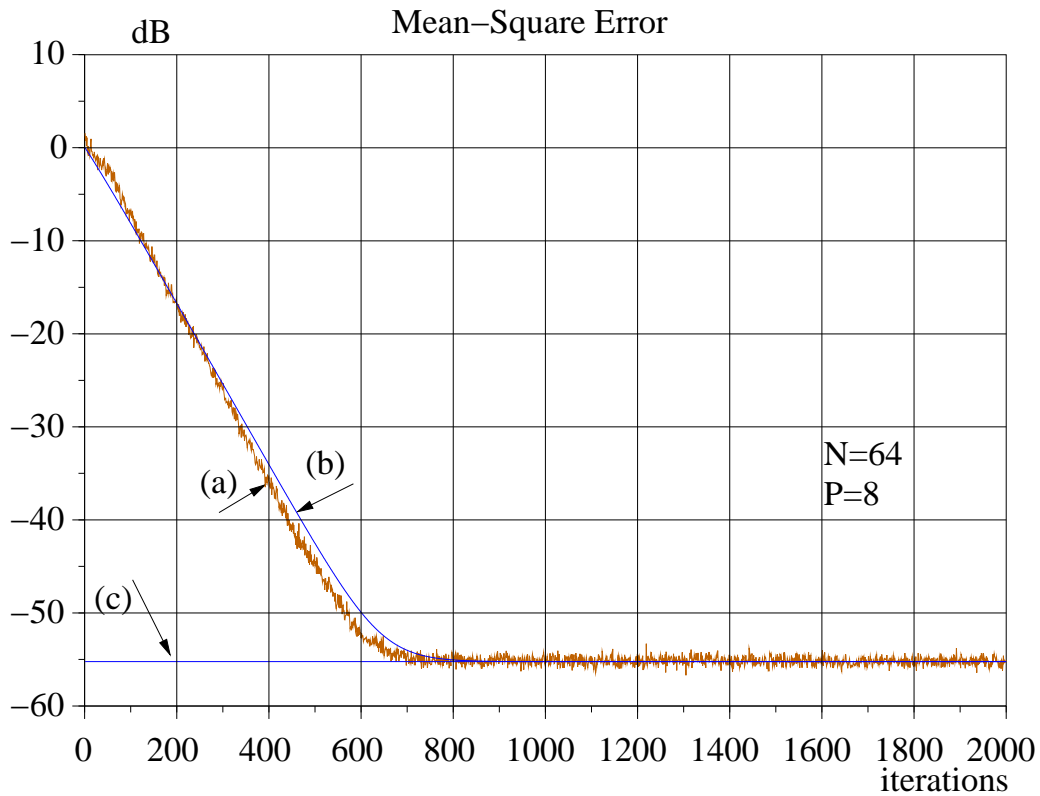


Figura 3.15: *EMQ - Entrada AR(3) Gaussiana, algoritmo AP(9), N = 64, SNR = 60dB. (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Modelo proposto; (c) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)*

### 3.10.3 Exemplo 3:

Este exemplo considera a seqüência do sinal de entrada binária correlacionada com valores entre +1 e -1. A seqüência de entrada foi obtida usando  $z(n)$  binário e branco em uma versão modificada de (3.1) dada por:

$$u(n) = \text{sign} \left[ 0,7u(n-1) + z(n) \right]. \quad (3.98)$$

As Figs.3.16 e 3.17 mostram simulações Monte Carlo do EMQ e o comportamento previsto pelo modelo proposto para  $N = 64$  e para  $P = 1$  e  $P = 4$ . Observa-se que existe também uma excelente concordância entre os resultados das simulações e a previsão teórica. Também está indicado nas figuras o EMQ em regime permanente previsto por (3.97).

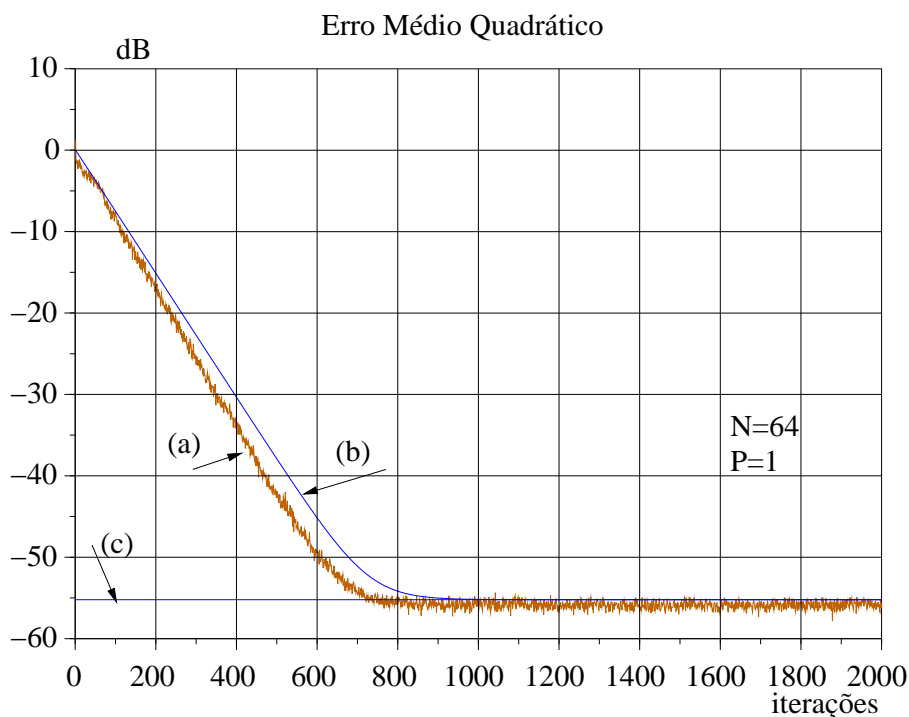


Figura 3.16: *EMQ – Entrada Binária Correlacionada,  $a_1 = 0,7$ , algoritmo AP(2),  $N = 64$ ,  $SNR = 60dB$ . (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Comportamento previsto pelo modelo proposto; (c) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)*

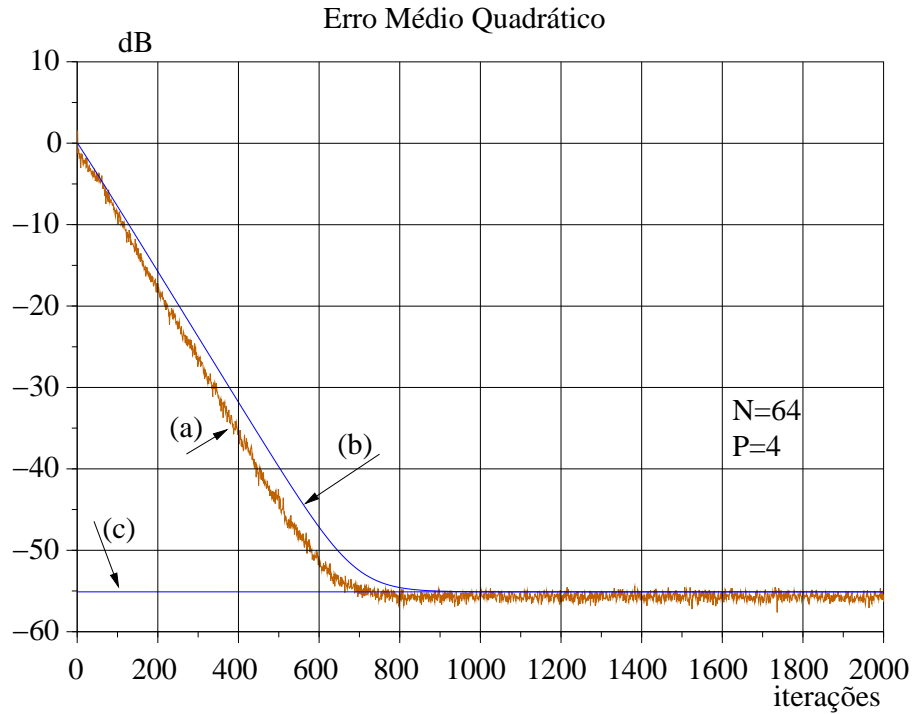


Figura 3.17: *EMQ – Entrada Binária Correlacionada,  $a_1 = 0,7$ , algoritmo  $AP(5)$ ,  $N = 64$ ,  $SNR = 60dB$ . (a) simulações Monte Carlo (200 realizações); (b) Comportamento previsto pelo modelo proposto; (c) EMQ em Regime Permanente previsto por (3.97)*

### 3.11 Conclusão

Este capítulo apresentou uma análise estatística para o comportamento do algoritmo de Projeções Afins em um meio estacionário, considerando um sinal de entrada autoregressivo de média zero. Equações recursivas determinísticas foram desenvolvidas para o comportamento médio dos coeficientes e para o erro médio quadrático. Exemplos mostram que o modelo desenvolvido descreve com bastante precisão o comportamento do algoritmo nas fases transitória e em regime permanente. O modelo é válido para um ruído aditivo branco, de média zero, e que é independente de qualquer outro sinal do sistema.

No próximo capítulo, desenvolve-se a análise estatística do comportamento do algoritmo de Projeções Afins em um meio não estacionário. Da mesma forma que neste capítulo, equações recursivas determinísticas são desenvolvidas para o comportamento médio dos coeficientes e para o erro médio quadrático.

# Capítulo 4

## Análise Estatística do Algoritmo de Projeções Afins com Entrada Autoregressiva - Em Ambiente Não Estacionário

### 4.1 Introdução

Uma característica fundamental do filtro adaptativo é sua capacidade de acompanhar variações na estatística dos sinais implícitos, ou seja, de operar em um ambiente não estacionário [32]. O acompanhamento ou, como é mais referido na literatura científica, o *tracking* de um sistema variando no tempo é um problema importante em muitas áreas de aplicação. Por definição, *tracking* é a capacidade do algoritmo adaptativo acompanhar mudanças do ponto de mínimo da função custo. Este desempenho do algoritmo é avaliado em sua operação durante o regime permanente [16]. Como exemplos de áreas de aplicações onde os filtros adaptativos são forçados a operar em um meio não estacionário podem-se citar: cancelamento de eco acústico, equalização adaptativa, predição adaptativa, cancelamento adaptativo de ruído, entre outros.

Na literatura existem diversos trabalhos abordando, em termos de análise, os algoritmos mais populares, considerando sua aplicação em meio não estacionário. Entre as várias referências pode-se citar [16, 42, 21, 32, 30]. Nesses trabalhos geralmente procura-se verificar o desajuste dos algoritmos em função do grau de não-estacionaridade



imposto ao processo. Os algoritmos mais estudados neste sentido são: LMS, LMS-normalizado e o RLS. Dessa forma, o estudo do algoritmo de projeções afins ainda representa uma lacuna em termos de análise, também considerando sua aplicação em um meio não estacionário. Na literatura, até o momento, observa-se apenas o trabalho desenvolvido por SAKARAN e BEEB [30], onde se apresenta uma análise de *tracking* do algoritmo AP assumindo um sinal de entrada independente. O modelo de *tracking* em [30] foi derivado para concordar com simulações com sinal de entrada branco e com vetor de entrada com poucos elementos. Resultados para sinal de entrada correlacionado não são apresentados em [30].

Neste capítulo apresenta-se um estudo estatístico do comportamento do algoritmo de projeções afins operando em um meio não estacionário. Propriedades e hipóteses são assumidas no desenvolvimento dos modelos de primeira e segunda ordem do vetor de erro dos coeficientes. Também é avaliado o desempenho do algoritmo AP e comparado com o algoritmo LMS para determinadas condições de operação.

## 4.2 Um Modelo de Dados Não Estacionário

Na Figura 4.1 apresenta-se um sistema de identificação em diagrama de blocos onde se utiliza um filtro adaptativo operando em um meio não estacionário  $\mathbf{w}^o(n)$ , fazendo com que a solução ótima de Wiener tome uma forma variante no tempo.

A não-estacionaridade de um meio é caracterizada quando a estatística do sinal de entrada ou a resposta impulsiva do processo sofre algum tipo variação no tempo. Dessa forma, pode-se dizer que a não-estacionaridade implica a variação no tempo dos momentos de segunda ordem  $\{\mathbf{R}_{uu}, \mathbf{p}_{du}, \sigma_d^2\}$ , isto é, variação da matriz de autocorrelação do sinal de entrada, do vetor de correlação cruzada e da variância do sinal desejado. Contudo, não é necessária a variação dos três termos, basta apenas a variação de um

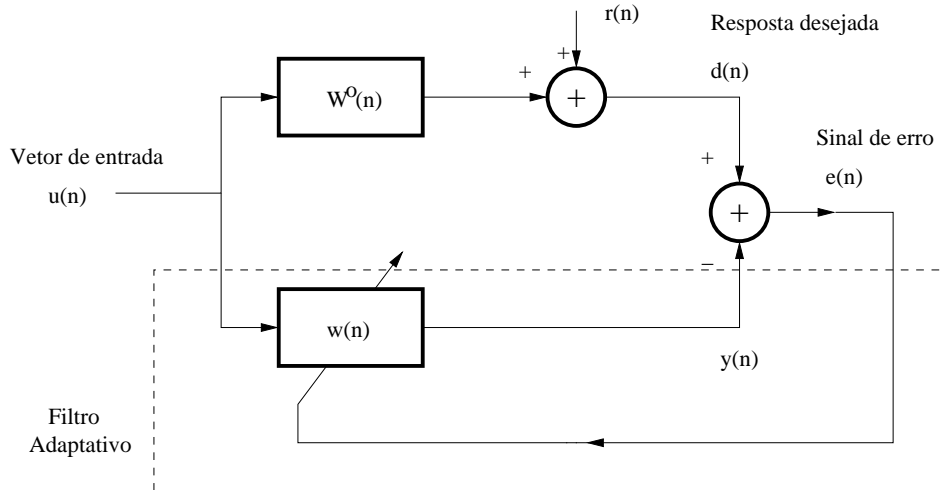


Figura 4.1: Identificação de um processo não estacionário usando filtragem adaptativa.

deles para observar-se o efeito da não-estacionaridade. Mais especificamente, o vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$  que minimiza o erro médio quadrático de uma estimativa linear de  $d(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}^o(n) + r(n)$  a partir de um conjunto de observações  $\mathbf{u}(n)$ , assumindo a variação de todos os momentos de segunda ordem é determinado pela expressão:

$$\mathbf{w}^o(n) = \mathbf{R}_{uu}^{-1}(n)\mathbf{p}_{du}(n) \quad (4.1)$$

em que  $\mathbf{p}_{du}(n) = E\{d(n)\mathbf{u}(n)\}$ .

Se a matriz  $\mathbf{R}_{uu}^{-1}(n)$  e o vetor  $\mathbf{p}_{du}(n)$  variam lentamente no tempo, é possível que um filtro adaptativo seja capaz de acompanhar as variações na estatística dos sinais envolvidos e aproximar-se do desempenho ótimo. Entretanto, se esta estatística varia rapidamente no tempo, a aplicação do filtro adaptativo pode tornar-se impraticável [32].

Neste trabalho, assume-se que a estatística varia de tal forma que permita a um filtro adaptativo acompanhar tais variações. O modelo adotado aqui assume que a matriz de autocorrelação do sinal de entrada  $\mathbf{u}(n)$  seja fixa, enquanto o vetor de correlação cruzada e a variância do sinal desejado  $\{\mathbf{p}_{du}(n), \sigma_d^2(n)\}$  variam no tempo.

De acordo com a Fig. 4.2, a variação no tempo dos coeficientes do vetor ótimo  $\mathbf{w}^o(n)$  é modelada seguindo o modelo *random walk* e expressa por:

$$\mathbf{w}^o(n + 1) = \mathbf{w}^o(n) + \mathbf{q}(n) \tag{4.2}$$

A situação de não-estacionaridade apresentada na Fig. 4.2 é bastante simples, mas contém a essência do problema que é comum para muitas situações complicadas e realistas [42, 41, 19, 30].

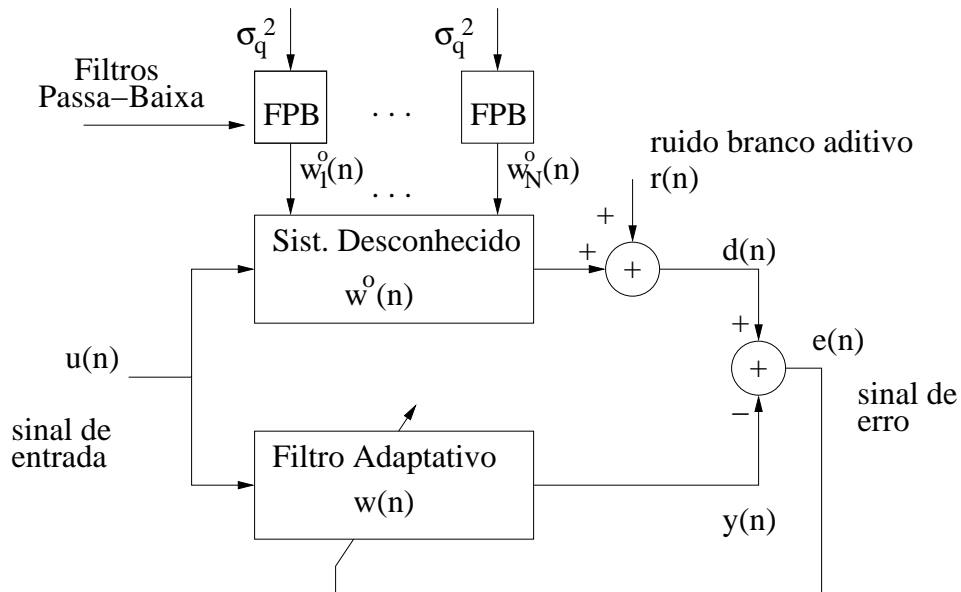


Figura 4.2: Modelagem de um sistema desconhecido variante no tempo.

O sinal de entrada  $\mathbf{u}(n)$  é assumido estacionário. O sinal ruído aditivo  $r(n)$  é estacionário, de média zero, com variância  $\sigma_r^2$  e independente de qualquer outro sinal. O sinal  $q(n)$  é uma seqüência de ruído branco Gaussiano de média zero e independente de qualquer outro sinal.

A seguir analisa-se o vetor erro dos coeficientes do algoritmo AP operando em um meio não estacionário mostrado nesta seção (Fig. 4.2).

### 4.3 Análise do Vetor de Erro dos Coeficientes do Algoritmo AP Operando em um Meio Não Estacionário

A finalidade do estudo de algoritmos adaptativos aplicados em meios não estacionários, como já discutido, é permitir que dada uma resposta desejada  $d(n)$  para um determinado sinal de entrada, seja possível projetar um filtro adaptativo que acompanhe variações estatísticas no vetor de resposta ao impulso unitário.

Nesta seção são verificadas algumas propriedades relacionadas ao vetor  $\mathbf{v}(n)$  com o intuito de facilitar a análise estatística do algoritmo AP nas seções ulteriores.

Na Figura 4.2 o sistema adaptativo tenta estimar o sinal desejado  $d(n)$ , para um processo AR definido na equação (3.2), cuja equação é dada por:

$$d(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}^o(n) + r(n) \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{w}^o(n) = [w_0^o(n) \ w_1^o(n) \ \dots \ w_{N-1}^o(n)]^T$  define o vetor dos coeficientes ótimos e é variante no tempo.

A equação de ajuste dos coeficientes do algoritmo AP conforme (3.7) é dada por:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}e(n) \quad (4.4)$$

Definindo o vetor erro dos coeficientes  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o(n)$ , a equação de ajuste do algoritmo AP resulta em:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}e(n) - \mathbf{w}^o(n+1) + \mathbf{w}^o(n) \quad (4.5)$$

Observando da eq. (4.2) que  $\mathbf{w}^o(n+1) - \mathbf{w}^o(n) = \mathbf{q}(n)$  tem-se:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}e(n) - \mathbf{q}(n) \quad (4.6)$$

Substituindo em (4.6) o sinal de erro  $e(n)$  dado por:

$$\begin{aligned} e(n) &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}^o(n) + r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) \\ &= -\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + r(n) \end{aligned} \quad (4.7)$$

chega-se à expressão:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\mathbf{u}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) - \mathbf{q}(n) \quad (4.8)$$

Explorando as propriedades mostradas na seção 3.4, definidas em [28] para ambiente estacionário, executa-se o mesmo procedimento para um ambiente não estacionário. Dessa forma, pré-multiplica-se a equação (4.8) por  $\mathbf{u}^T(n)$  e por  $\mathbf{U}^T(n)$ .

Inicialmente fazendo a pré-multiplicação de (4.8) por  $\mathbf{u}^T(n)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \frac{\mathbf{u}^T(n)\Phi(n)\mathbf{u}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\mathbf{u}^T(n)\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{q}(n) \\ &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \frac{[\Phi^T(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)]\Phi(n)\mathbf{u}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) \\ &\quad + \frac{[\Phi^T(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)]\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{q}(n) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Lembrando que o vetor  $\Phi(n)$  é ortogonal ao subespaço formado por  $\mathbf{u}(n-1), \dots, \mathbf{u}(n-P)$  tem-se  $\mathbf{U}^T(n)\Phi(n) = 0$ , e a eq.(4.9) resulta em:

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{q}(n) \quad (4.10)$$

Pré-multiplicando-se agora (4.8) por  $\mathbf{U}^T(n)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) - \frac{\mathbf{U}^T(n)\Phi(n)\mathbf{u}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\mathbf{U}^T(n)\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) - \mathbf{U}^T(n)\mathbf{q}(n) \\ &= \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) - \mathbf{U}^T(n)\mathbf{q}(n)\end{aligned}\tag{4.11}$$

Resumindo, tem-se:

- **Propriedade.1:**  $\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{q}(n)$
- **Propriedade.2:**  $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) - \mathbf{U}^T(n)\mathbf{q}(n)$

Seguindo o mesmo procedimento apresentado no Capítulo 3 na análise do vetor de erro, aplica-se na equação (4.8) o vetor  $\mathbf{u}(n)$  decomposto em suas componentes, ou seja, uma ortogonal ao subspaço definido pelas colunas de  $\mathbf{U}(n)$  formado pelos vetores passados de  $\mathbf{u}(n)$ , e por sua projeção neste subespaço, conforme mostrado na Fig. 3.3.

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)[\Phi(n) + \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n)]^T}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) - \mathbf{q}(n) \\ &= \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\hat{\mathbf{a}}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) - \mathbf{q}(n)\end{aligned}\tag{4.12}$$

Entretanto, o procedimento aqui difere daquele seguido no Capítulo 3, onde aplica-se diretamente na expressão (3.14) as propriedades encontradas. No caso da eq. (4.12) não é possível fazer o mesmo com as propriedades encontradas acima. Devido à presença dos termos em  $\mathbf{q}(n)$ , é necessário primeiramente desenvolvê-las de forma recursiva, buscando colocá-las numa forma que permita aplicá-las na equação (4.12). Da equação (4.11), será derivada uma expressão que possa ser aplicada na equação (4.12)

de forma a substituir o termo  $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n)$  como feito na Seção 3.4. Assim, explicitando (4.11) em  $P$  equações, obtém-se:

$$\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n) \quad (4.15)$$

⋮

$$\mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{q}(n) \quad (4.16)$$

Fazendo  $n = n - 1$  em (4.10) encontra-se:

$$\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n) = r(n-1) - \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n-1) \quad (4.17)$$

Substituindo agora  $n = n - 2$  na eq. (4.10) obtém-se:

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-1) = r(n-2) - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-2) \quad (4.18)$$

Do resultado obtido em (4.18), observa-se que a obtenção de uma equação equivalente para o produto  $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n)$ , requer mais manipulações algébricas para manter a estrutura desejada. Assim, Fazendo  $n = n - 1$  em (4.13):

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n) = \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-1) - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-1) \quad (4.19)$$

Observando as equações (4.18) e (4.19) chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n) &= r(n-2) - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-2) - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-1) \\ &= r(n-2) - \mathbf{u}^T(n-2)[\mathbf{q}(n-1) + \mathbf{q}(n-2)] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aplicando agora  $n = n - 3$  em (4.10):

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-2) = r(n-3) - \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n-3) \quad (4.21)$$

Da mesma forma que a eq. (4.18), a eq. (4.21) não tem a estrutura desejada. Dessa forma, conforme o último caso, necessita-se de alguns procedimentos algébricos.

Aplicando  $n=n-2$  em (4.13):

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-1) = \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-2) - \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n-2) \quad (4.22)$$

substituindo (4.21) em (4.22):

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-1) = r(n-3) - \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n-3) - \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n-2) \quad (4.23)$$

Fazendo agora  $n=n-1$  em (4.14):

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n) = \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-1) - \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n-1) \quad (4.24)$$

Aplicando (4.23) em (4.24):

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n) = r(n-3) - \mathbf{u}^T(n-3)[\mathbf{q}(n-1) + \mathbf{q}(n-2) + \mathbf{q}(n-3)] \quad (4.25)$$

Procedendo da mesma forma para todas as  $k$  linhas, e obtendo a equação na forma desejada como demonstrado acima, obtém-se a seguinte expressão genérica:

$$\mathbf{u}^T(n-k)\mathbf{v}(n) = r(n-k) - \mathbf{u}^T(n-k) \sum_{l=1}^k \mathbf{q}(n-l) \quad (4.26)$$

Para colocar a equação (4.26) de uma forma mais fácil de ser manipulada, define-se



$\mathbf{Q}(n)$  como uma matriz formada por vetores passados de  $\mathbf{q}(n - i)$ , ou seja:

$$\mathbf{Q}(n) = [ \mathbf{q}(n - 1) \ \mathbf{q}(n - 2) \ \dots \ \mathbf{q}(n - P) ] \quad (4.27)$$

onde:

$$\mathbf{q}(n - i) = [ q_1(n - i) \ q_2(n - i) \ \dots \ q_N(n - i) ]^T \quad (4.28)$$

A seguir fazendo o produto:

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{Q}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n - 1)\mathbf{q}(n - 1) & \mathbf{u}^T(n - 1)\mathbf{q}(n - 2) & \mathbf{u}^T(n - 1)\mathbf{q}(n - 3) & \dots & \mathbf{u}^T(n - 1)\mathbf{q}(n - P) \\ \mathbf{u}^T(n - 2)\mathbf{q}(n - 1) & \mathbf{u}^T(n - 2)\mathbf{q}(n - 2) & \mathbf{u}^T(n - 2)\mathbf{q}(n - 3) & \dots & \mathbf{u}^T(n - 2)\mathbf{q}(n - P) \\ \mathbf{u}^T(n - 3)\mathbf{q}(n - 1) & \mathbf{u}^T(n - 3)\mathbf{q}(n - 2) & \mathbf{u}^T(n - 3)\mathbf{q}(n - 3) & \dots & \mathbf{u}^T(n - 3)\mathbf{q}(n - P) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}^T(n - P)\mathbf{q}(n - 1) & \dots & \dots & \dots & \mathbf{u}^T(n - P)\mathbf{q}(n - P) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Observa-se que o segundo termo do lado direito de (4.26) pode ser obtido tomando os valores do produto encontrado em (4.29) e multiplicando por uma matriz triangular superior, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n - 1)\mathbf{q}(n - 1) \\ \mathbf{u}^T(n - 2) \sum_{l=1}^2 \mathbf{q}(n - l) \\ \mathbf{u}^T(n - 3) \sum_{l=1}^3 \mathbf{q}(n - l) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^T(n - P) \sum_{l=1}^P \mathbf{q}(n - l) \end{bmatrix} = \text{diag}\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{Q}(n)\mathbf{L}\} \quad (4.30)$$

onde  $\mathbf{L}$  é a matriz triangular superior ( $P \times P$ ):

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Definindo  $\mathbf{g}(n) = \text{diag}\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{Q}(n)\mathbf{L}\}$ , a eq.(4.26) pode ser escrita como:

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) = \mathbf{r}(n-1) - \mathbf{g}(n) \quad (4.32)$$

Retornando a (4.12) e aplicando (4.32), resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) = & \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{r}(n-1) \\ & + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{g}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) - \mathbf{q}(n) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Assumindo  $\hat{\mathbf{a}}(n) = \mathbf{a}$ , conforme justificado no Capítulo 3, e considerando que o erro filtrado  $r_a(n)$ , como também já visto no Capítulo 3, é dado por:

$$r_a(n) = r(n) - \sum_{i=1}^P a_i r(n-i) \quad (4.34)$$

a equação recursiva de  $\mathbf{v}(n+1)$  pode ser escrita como:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r_a(n) + \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{a}^T\mathbf{g}(n) - \mathbf{q}(n) \quad (4.35)$$

Na próxima seção é avaliado o momento de primeira ordem do vetor de erro dos coeficientes do sistema adaptativo, aplicando as propriedades vetoriais e estatísticas apresentadas no capítulo 3.

## 4.4 Análise do Comportamento Médio dos Coeficientes

Tomando o valor esperado do vetor de erro dos coeficientes, definido pela equação (4.35):

$$\begin{aligned}
 E\{\mathbf{v}(n+1)\} = E\{\mathbf{v}(n)\} - E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n)\right\} + E\left\{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r_a(n)\right\} \\
 + E\left\{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{a}^T\mathbf{g}(n)\right\} - E\{\mathbf{q}(n)\}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

A equação (4.36) apresenta apenas o quarto e o quinto termos acrescentados na equação (3.27). Dessa forma, apenas estes dois termos necessitam ser avaliados, já que os demais foram calculados no capítulo anterior.

Pode-se observar facilmente que os valores esperados do quarto e do quinto termos são nulos, pois  $q(n)$  é uma seqüência de ruído branco de média zero e independente de qualquer outro termo. Assim,  $E\{\mathbf{q}(n)\} = 0$ . O quinto termo, cujo vetor  $\mathbf{g}(n)$  apresenta apenas valores de  $\mathbf{q}(n)$  de ordem ímpar (no caso primeira ordem), faz com que todo o termo tenha média nula. Concluindo, a equação do comportamento médio dos coeficientes do algoritmo AP operando num meio não estacionário definido de acordo com 4.2 tem forma igual à de operação em um meio estacionário, que é expressa por:

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = \left(1 - \frac{1}{G-2}\right)^n \cdot \mathbf{v}_o \tag{4.37}$$

A seguir é calculado o erro médio quadrático (EMQ) do algoritmo AP quando aplicado em um ambiente não estacionário.

## 4.5 Erro Médio Quadrático

Analisa-se nesta seção o comportamento do erro médio quadrático do sistema apresentado na Fig. 4.1 para o algoritmo de projeções afins.

Como demonstrado no Capítulo 3, Seção 3.8, eq. (3.63), o erro médio quadrático do algoritmo AP é definido pela expressão:

$$E\{e^2(n)\} = \left(1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[ E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\} \right] \right) \sigma_r^2 + \text{tr}[\mathbf{R}_{\phi\phi} \mathbf{K}(n)] \quad (4.38)$$

Pode-se observar que o primeiro termo do lado direito em (4.38) é função da estatística do sinal de entrada. Entretanto, o segundo termo requer o cálculo da matriz de correlação  $\mathbf{K}(n) = E\{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\}$ , ou seja, é necessário avaliar-se os momentos de segunda ordem do vetor de erro dos coeficientes definido pela eq. (4.35).

### 4.5.1 Análise dos Momentos de Segunda Ordem

Pós-multiplicando (4.35) por sua transposta e tomando o valor esperado, obtém-se a seguinte expressão para  $\mathbf{K}(n) = E\{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{K}(n) - \underbrace{E\left\{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\}}_1 + \underbrace{E\left\{\mathbf{v}(n)r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\}}_2 \\ & + \underbrace{E\left\{\mathbf{v}(n)\mathbf{g}^T(n)\mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\}}_3 - \underbrace{E\{\mathbf{v}(n)\mathbf{q}^T(n)\}}_4 \\ & - \underbrace{E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\right\}}_5 + \underbrace{E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\}}_6 \\ & - \underbrace{E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n)r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\}}_7 - \underbrace{E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n)\mathbf{g}^T(n)\mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\}}_8 \\ & + \underbrace{E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n)\mathbf{q}^T(n)\right\}}_9 + \underbrace{E\left\{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r_a(n)\mathbf{v}^T(n)\right\}}_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - E \left\{ \underbrace{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} r_a(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}}_{11} \right\} + E \left\{ \underbrace{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} r_a(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}}_{12} \right\} \\
 & + E \left\{ \underbrace{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} r_a(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}}_{13} \right\} - E \left\{ \underbrace{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} r_a(n) \mathbf{q}^T(n)}_{14} \right\} \\
 & + E \left\{ \underbrace{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{v}^T(n)}_{15} \right\} - E \left\{ \underbrace{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}}_{16} \right\} \\
 & + E \left\{ \underbrace{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}}_{17} \right\} - E \left\{ \underbrace{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{q}^T(n)}_{18} \right\} \\
 & + E \left\{ \underbrace{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}}_{19} \right\} - E \left\{ \underbrace{\mathbf{q}(n) \mathbf{v}^T(n)}_{20} \right\} \\
 & + E \left\{ \underbrace{\mathbf{q}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}}_{21} \right\} - E \left\{ \underbrace{\mathbf{q}(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}}_{22} \right\} \\
 & - E \left\{ \underbrace{\mathbf{q}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}}_{23} \right\} + E \left\{ \underbrace{\mathbf{q}(n) \mathbf{q}^T(n)}_{24} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Em virtude do elevado número de termos em (4.39), cada parcela é referenciada por um numeral subscrito em cada chave para facilitar o acompanhamento na avaliação dos valores esperados.

Inicialmente, pode-se observar que as parcelas 1,2,5,6,7,10,11 e 13 são iguais às parcelas que aparecem na análise do algoritmo AP operando em meio estacionário, eq. (3.64), e já calculadas no Capítulo 3. Dessa forma, as demais parcelas que diferenciam as duas equações estão relacionadas ao efeito da não-estacionaridade do processo.

As parcelas 4,9,14,20,21 e 22 têm valores esperados nulos em virtude das características estatísticas da seqüência  $\{q(n)\}$ , que é independente das demais variáveis e tem média zero. Nas parcelas 14 e 22, este resultado também pode ser constatado

devido à  $r_a(n)$  ser função da seqüência  $\{r(n)\}$  que é independente e de média zero.

As parcelas 18 e 23 também têm valores nulos decorrentes da estatística do vetor  $\mathbf{q}(n)$ . Entretanto, é necessário observar com detalhe este resultado. Em ambas parcelas aparece o produto entre os vetores  $\mathbf{q}(n)$  e  $\mathbf{g}(n)$ . Lembrando que o vetor  $\mathbf{g}(n)$  é definido por:

$$\mathbf{g}(n) = \text{diag}\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{Q}(n)\mathbf{L}\}, \quad (4.40)$$

os produtos que surgem entre vetores  $\mathbf{q}(n-i)$  são sempre amostras defasadas devido à estrutura de formação da matriz  $\mathbf{Q}(n)$  (eq. (4.27)). Conseqüentemente, as correlações entre os elementos que aparecem são sempre nulas. Isto pode ser melhor observado tomando uma das parcelas e expressando este produto de forma mais explícita, conforme a expressão abaixo:

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{q}^T(n) \right\} = E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n-1) \\ \mathbf{u}^T(n-2) \sum_{l=1}^2 \mathbf{q}(n-l) \\ \mathbf{u}^T(n-3) \sum_{l=1}^3 \mathbf{q}(n-l) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^T(n-P) \sum_{l=1}^P \mathbf{q}(n-l) \end{bmatrix} \mathbf{q}^T(n) \right\} \quad (4.41)$$

Assumindo agora a fraca correlação entre  $\Phi(n)$  e  $\mathbf{U}(n)$ , toma-se o valor esperado condicionado da expressão (4.41) e obtém-se:

$$\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n-1) \\ \mathbf{u}^T(n-2) \sum_{l=1}^2 \mathbf{q}(n-l) \\ \mathbf{u}^T(n-3) \sum_{l=1}^3 \mathbf{q}(n-l) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^T(n-P) \sum_{l=1}^P \mathbf{q}(n-l) \end{bmatrix} \mathbf{q}^T(n) \right\} = 0 \quad (4.42)$$

já que a matriz de correlação  $E\{\mathbf{q}(n-i)\mathbf{q}^T(n)\} = 0$  para  $i > 0$ .

A seguir, para a parcela de número 3, assume-se novamente a fraca correlação do vetor  $\Phi(n)$  com os vetores que compõem a matriz  $\mathbf{U}(n)$ , e aplica-se a hipótese **A2**. Assim, a parcela 3 pode ser escrita como:

$$E\left\{\mathbf{v}(n)\mathbf{g}^T(n)\mathbf{a}\frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\} \approx E\{\mathbf{v}(n)\mathbf{g}^T(n)\mathbf{a}\}E\left\{\frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\} \quad (4.43)$$

Como o vetor  $\mathbf{q}(n)$  que aparece na composição do vetor  $\mathbf{g}(n)$  na primeira parcela do lado direito da expressão (4.43) é de média zero, implica que esta parcela terá valor esperado nulo. Este resultado também pode ser verificado na avaliação da segunda parcela do lado direito, onde aplicando-se o princípio das médias [29] e assumindo  $\Phi(n)$  de média zero, o resultado desta parcela também terá valor esperado igual a zero. Este resultado é assegurado da mesma forma também para a parcela 15.

Na parcela de número 8 de (4.39), aplica-se inicialmente o princípio das médias [29] deixando a equação escrita da seguinte forma:

$$E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n)\mathbf{g}^T(n)\mathbf{a}\frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\right\} \approx E\{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-2}\} \\ \times E\{\Phi(n)\Phi^T(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{g}^T(n)\mathbf{a}\Phi^T(n)\} \quad (4.44)$$

Utilizando a hipótese **A2** na segunda parcela no lado direito da expressão (4.44), ou seja,  $\Phi(n)$  de média zero Gaussiano e sendo os momentos de terceira ordem de seus elementos iguais a zero, a parcela será nula. Este resultado também é assegurado para a parcela 16. Uma outra possível abordagem para avaliar estas parcelas, seria tomando o valor esperado de  $\mathbf{q}(n)$ , o qual compõe o vetor  $\mathbf{g}(n)$ , de forma condicionada. Como  $\mathbf{q}(n)$  é independente dos demais termos e é formado por elementos de uma seqüência de ruído branco de média nula, as parcelas 8 e 16, conseqüentemente, terão valores

esperados iguais a zero.

Na parcela 12, sabendo que  $r_a(n)$  é um escalar e independente dos demais termos, a expressão do valor esperado desta parcela pode ser escrita da seguinte forma:

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} r_a(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} = E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} \times E\{r_a(n)\} \quad (4.45)$$

Como o valor médio do ruído filtrado  $r_a(n)$  é igual a zero, a parcela 12 terá valor esperado também igual a zero. E a parcela 17, da mesma forma, terá valor esperado nulo.

Uma outra forma de avaliar as parcelas 12 e 17 seria assumindo mais uma vez que  $\Phi(n)$  é fracamente correlacionado com os vetores que formam a matriz  $\mathbf{U}(n)$  e, como o produto do vetor  $\mathbf{g}^T(n)$  pelo vetor  $\mathbf{a}$  é um escalar, pode-se aproximar a primeira parcela do lado direito da equação (4.45) por:

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} \approx E \left\{ \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} E\{\mathbf{g}^T(n)\mathbf{a}\} \quad (4.46)$$

Assim, como já visto, o valor esperado da segunda parcela no lado direito será igual a zero decorrente das propriedades estatísticas da seqüência  $\{\mathbf{q}(n)\}$  onde seus elementos formam vetores que compõem a estrutura do vetor  $\mathbf{g}(n)$  conforme mostrado em (4.30). Dessa forma, tanto a parcela 12 quanto a 17 serão nulas em virtude do valor esperado do segundo termo de (4.46) e do valor médio de  $r_a(n)$ .

A parcela de número 24 é definida como a matriz de correlação  $\mathbf{R}_{qq}$ . Baseado nas propriedades estatísticas do vetor  $\mathbf{q}(n)$ , tem-se:

$$\mathbf{R}_{qq} = E\{\mathbf{q}(n)\mathbf{q}^T(n)\} = \sigma_q^2 \mathbf{I} \quad (4.47)$$



Finalmente, é necessário calcular o valor médio da parcela 19. Então, considerando a hipótese de que  $\Phi(n)$  seja pouco correlacionado com  $\mathbf{U}(n)$ , e observando que o produto central  $\mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a}$  é um escalar, a parcela 19 pode ser escrita da seguinte forma:

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\} = E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{[\Phi^T(n) \Phi(n)]^2} \right\} \times E \{ \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \} \quad (4.48)$$

Para o cálculo do valor esperado de (4.48), primeiramente avalia-se a segunda parcela colocando-se de maneira mais explícita seus termos:

$$E \{ \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \} = E \left\{ \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n-1) \mathbf{q}(n-1) \\ \mathbf{u}^T(n-2) \sum_{l=1}^2 \mathbf{q}(n-l) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^T(n-P) \sum_{l=1}^P \mathbf{q}(n-l) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T(n-1) \mathbf{u}(n-1) & \sum_{l=1}^2 \mathbf{q}^T(n-l) \mathbf{u}(n-2) & \dots & \sum_{l=1}^P \mathbf{q}^T(n-l) \mathbf{u}(n-P) \end{bmatrix} \times \mathbf{a} \right\} \quad (4.49)$$

Sendo o vetor  $\mathbf{a}$  constante e fazendo algumas operações aritméticas, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \} &= \mathbf{a}^T E \{ \mathbf{U}^T(n) \mathbf{A} \mathbf{U}(n) \} \sigma_q^2 \mathbf{a} \\ &= \sigma_q^2 \mathbf{a}^T \Psi(n) \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.50)$$

na qual  $\Psi(n) = E \{ \mathbf{U}^T(n) \mathbf{A} \mathbf{U}(n) \}$  é uma matriz  $P \times P$  e  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $N \times N$  que

tem a seguinte estrutura de formação:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & N \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Retornando para (4.48), resta agora calcular a primeira parcela no lado direito. Aplicando os mesmos procedimentos utilizados nos capítulos anteriores, esta parcela pode ser expressa como:

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^2} \right\} = E \{ [\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-2} \} \mathbf{R}_{\phi\phi} \quad (4.52)$$

Integrando a primeira parcela do lado direito de (4.52) como em (3.30), mas com  $[\Phi^T(n)\Phi(n)]^{-2} = y^{-2}$ , obtém-se:

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{[\Phi^T(n)\Phi(n)]^2} \right\} = \frac{1}{\sigma_\phi^4(G-2)(G-4)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \quad (4.53)$$

E finalmente, o valor esperado da parcela número 19 da eq. (4.39) resulta em:

$$E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} = \frac{\sigma_q^2}{\sigma_\phi^4} \frac{\mathbf{a}^T \Psi(n) \mathbf{a}}{(G-2)(G-4)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \quad (4.54)$$

Retornando a (4.39) e aplicando todos os valores esperados calculados, o compor-

tamento da matriz correlação do vetor de erro nos coeficientes será dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{K}(n) \\
 & - \frac{1}{(G-2)\sigma_\phi^2} [\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\phi\phi} + \mathbf{R}_{\phi\phi}\mathbf{K}(n)] \\
 & + \frac{1}{(G^2+2G)\sigma_\phi^2} \left[ \frac{G}{N} \text{tr}[\mathbf{K}(n)] + \left(1 - \frac{G}{N}\right) E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\} \right] \mathbf{R}_{\phi\phi} \\
 & + \frac{\sigma_r^2}{(G-2)(G-4)\sigma_\phi^4} \left[ 1 + \left( \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[ E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\} \right] \right) \right] \mathbf{R}_{\phi\phi} \\
 & + \sigma_q^2 \left( 1 + \frac{1}{\sigma_\phi^4} \frac{\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Psi}(n) \mathbf{a}}{(G-2)(G-4)} \right) \mathbf{R}_{\phi\phi}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

É interessante observar que na eq. (4.55) apenas o último termo da expressão é afetado pela não-estacionaridade, ou seja, quando  $\mathbf{q}(n) = 0$  esta expressão recai no modelo dos momentos de segunda ordem para o ambiente estacionário, conforme eq. (3.91).

## 4.6 Resultados de Simulações

Nesta seção apresenta-se uma amostra dos resultados obtidos com o modelo analítico formado das equações (4.37), (4.38) e (4.55) com o objetivo de ilustrar sua acurácia. Em todos os exemplos apresentados aqui, a variância  $\sigma_z^2$  é ajustada de tal modo que resulte em  $\sigma_u^2 = 1$ . A relação sinal-ruído é dado por  $SNR = 10 \log_{10}(\sigma_u^2/\sigma_r^2)$  dB. Em todos os exemplos, o termo  $\sigma_z^2 \text{tr}[E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}]$  é desprezado em (4.55) e (4.38). O termo  $\boldsymbol{\Psi}(n)$  é estimado numericamente se utilizando a expressão  $\boldsymbol{\Psi}(n) = E\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{A}\mathbf{U}(n)\}$ .

Para possibilitar uma definição mais clara de variações estatísticas de um modelo dinâmico linear de um meio não estacionário, utiliza-se uma noção de grau de não-

estacionaridade [19] que corresponde à seguinte relação [16]:

$$S = \sqrt{\frac{E\{|\mathbf{q}^T(n)\mathbf{u}(n)|^2\}}{E\{|r(n)|^2\}}} \quad (4.56)$$

Pela expressão (4.56) é possível observar que o grau de não-estacionaridade ( $S$ ) do processo, a partir do momento em que o ambiente de operação é não estacionário, também as potências dos sinais de entrada  $\mathbf{u}(n)$  e sinal de erro de medição  $r(n)$  terão influência direta na capacidade do algoritmo em acompanhar o processo, e dessa maneira afetar o comportamento em relação ao erro médio quadrático em regime permanente.

Calculando o valor esperado do numerador da expressão acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} E\{|\mathbf{q}^T(n)\mathbf{u}(n)|^2\} &= E\{\mathbf{q}^T(n)\mathbf{u}(n)\mathbf{q}^T(n)\mathbf{u}(n)\} \\ &= tr[\mathbf{R}_{qq}\mathbf{R}_{uu}] \end{aligned} \quad (4.57)$$

Como  $E\{|r(n)|^2\} = \sigma_r^2$  e  $\mathbf{R}_{qq} = \sigma_q^2\mathbf{I}$ , (4.57) resulta em:

$$S = \frac{\sqrt{N\sigma_q^2\sigma_u^2}}{\sigma_r} \quad (4.58)$$

Nos exemplos a seguir, o valor da variância  $\sigma_q^2$  é ajustado de tal forma que resulte no grau de não-estacionaridade desejado.

#### 4.6.1 Exemplo 1:

A entrada é um processo autoregressivo de primeira ordem AR(1) Gaussiano definido pela expressão  $u(n) = -0.9u(n-1) + z(n)$ , com  $z(n)$  sendo uma seqüência de ruído branco e Gaussiano. A relação sinal-ruído é de  $SNR = 60\text{dB}$ . As simulações executadas são para  $N = 64$  e  $P = 2$ , e para graus de não-estacionaridade  $S=1,2$  e  $10$ . Os comportamentos do erro médio quadrático são mostrados nas Figs. 4.3 – 4.5, respec-

tivamente. Observa-se, comparando as três figuras, que o aumento do grau de não-estacionaridade afeta de forma negativa no comportamento do algoritmo, em virtude de elevar o EMQ em regime permanente. As Figs. 4.6 e 4.7 mostram o comportamento do EMQ para  $N = 64$ ,  $P = 4$  e  $8$  e  $S=2$ . Observa-se que o modelo proposto possibilita uma ótima previsão do comportamento do algoritmo mesmo para valores elevados de não-estacionaridade. Verifica-se também que um elevado índice de não-estacionaridade acarreta num erro considerável em regime permanente. O grau de não-estacionaridade  $S$  para fins práticos é menor que 2 ( $S < 2$ ) [19]. Esta qualidade de previsão do modelo repetiu-se em todos os casos testados. Sendo assim, o comportamento previsto pelo modelo proposto mostra-se acurado para qualquer propósito prático.

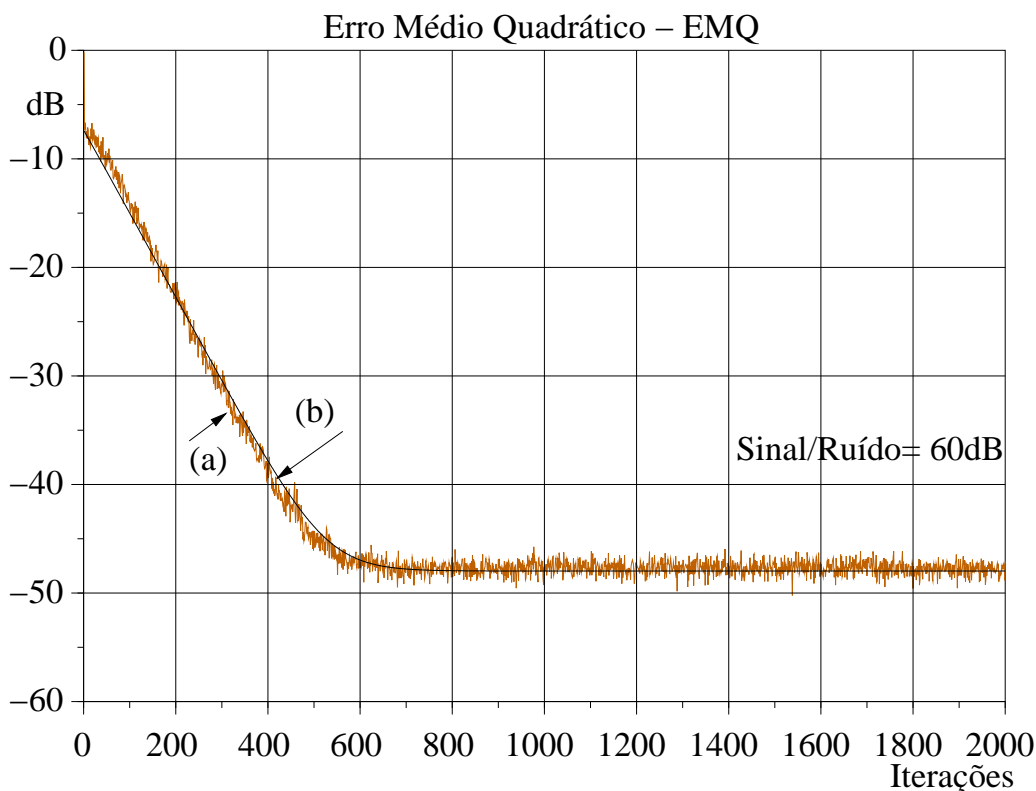


Figura 4.3: *EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo AP(3),  $N = 64$ ,  $S = 1$ ,  $\sigma_q^2 = 1,562 \times 10^{-8}$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.*

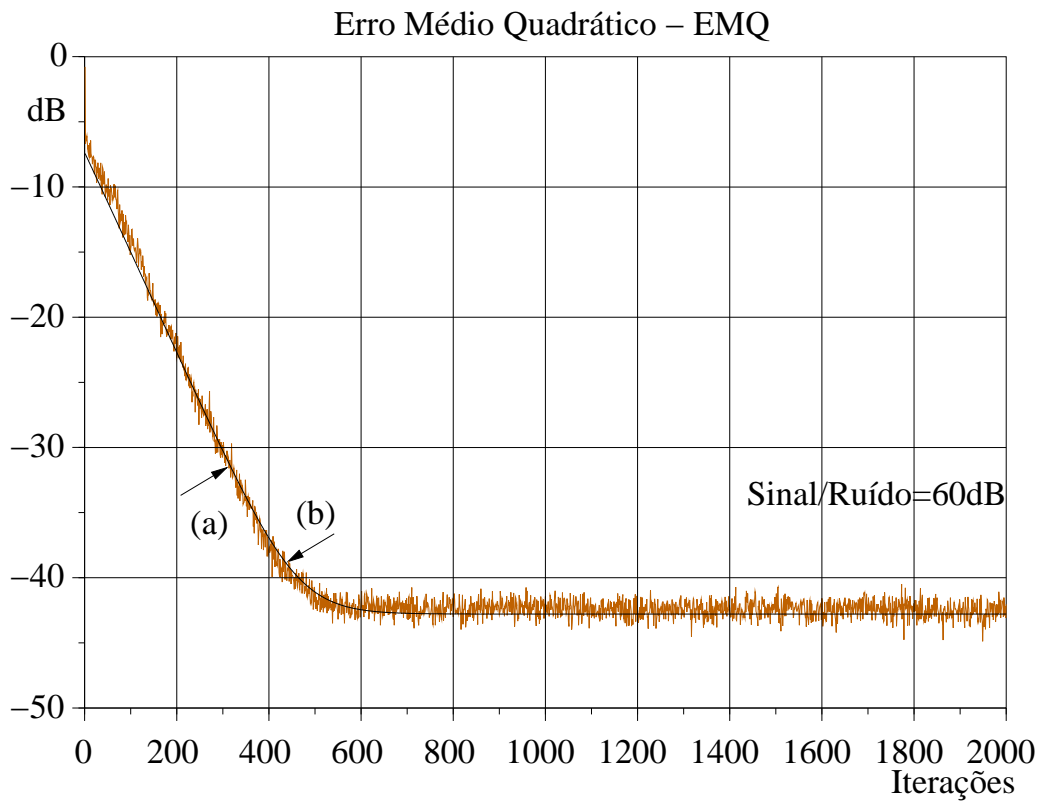


Figura 4.4: *EMQ* – Entrada *AR(1)* Gaussiana,  $a_1 = -0.9$ , algoritmo *AP(3)*,  $N = 64$ ,  $S = 2$ ,  $\sigma_q^2 = 6.25 \times 10^{-8}$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.

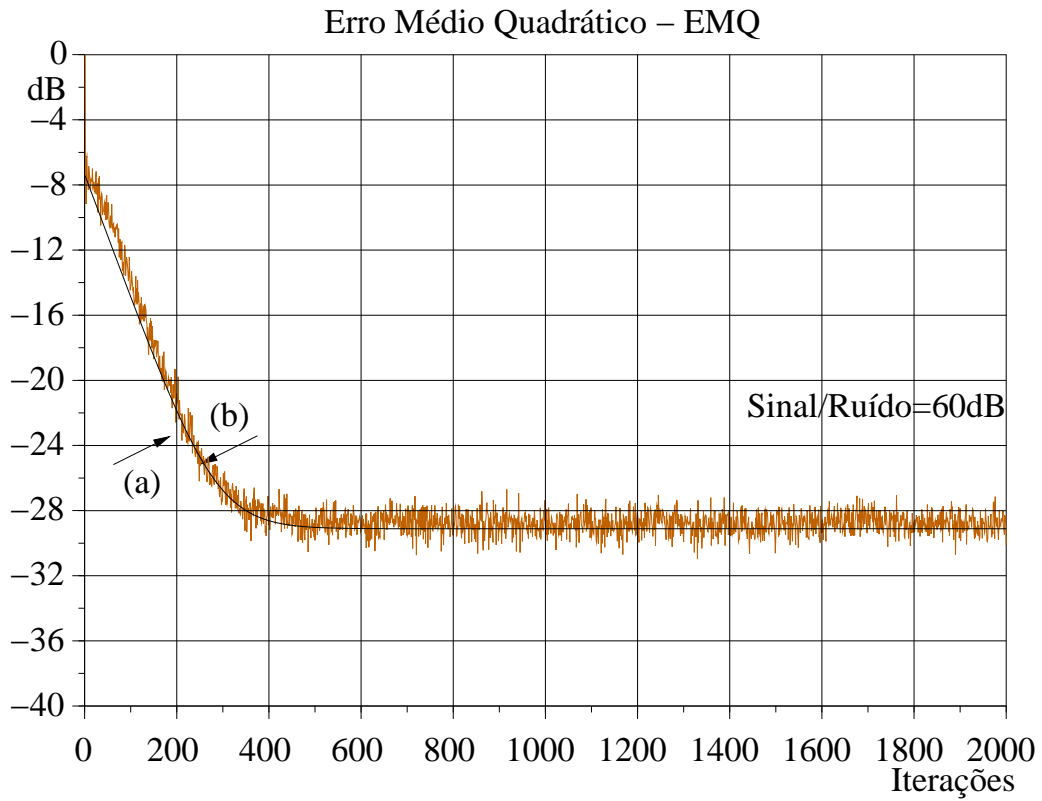


Figura 4.5: *EMQ* – Entrada *AR(1)* Gaussiana,  $a_1 = -0.9$ , algoritmo *AP(3)*,  $N = 64$ ,  $S = 10$ ,  $\sigma_q^2 = 1.6 \times 10^{-6}$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.

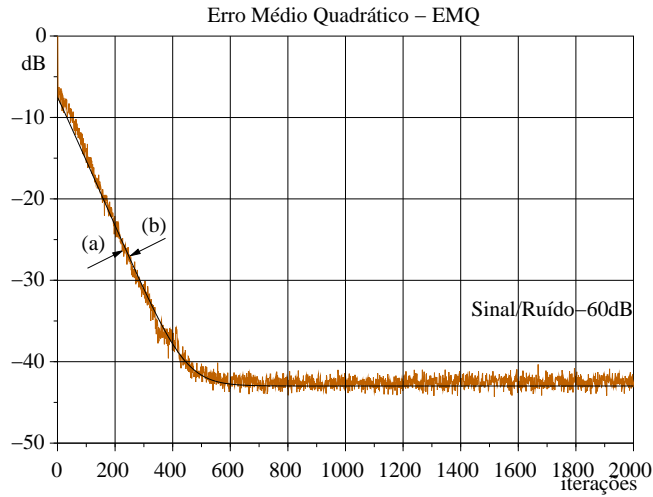


Figura 4.6: *EMQ* – Entrada  $AR(1)$  Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo  $AP(5)$ ,  $N = 64$ ,  $S = 2$ ,  $\sigma_q^2 = 6,25 \times 10^{-8}$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.

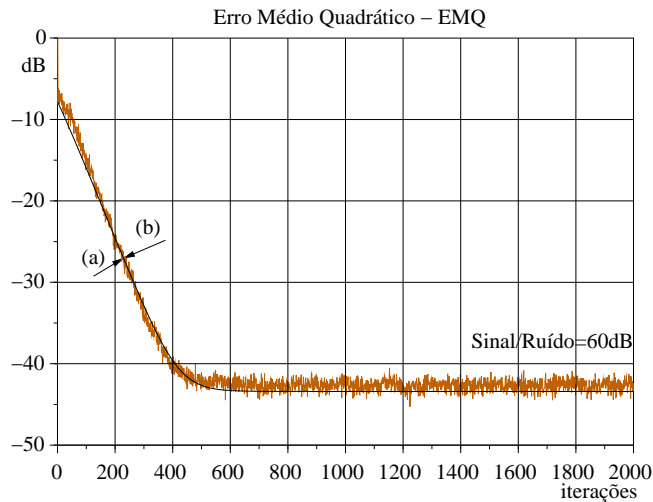


Figura 4.7: *EMQ* – Entrada  $AR(1)$  Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo  $AP(9)$ ,  $N = 64$ ,  $S = 2$ ,  $\sigma_q^2 = 6,25 \times 10^{-8}$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.



### 4.6.2 Exemplo 2:

Nestes exemplos  $N = 128$ ,  $P = 2$ . Os gráficos são mostrados para o grau de não-estacionaridade  $S=1$  e  $10$ , respectivamente. Também são apresentados neste exemplo, o comportamento do modelo proposto para  $N = 256$ ,  $P = 2$  e  $S = 1$ . Os resultados das simulações são mostrados nas Figs. 4.8–4.10. Da mesma forma que o Exemplo 1, nos resultados obtidos para uma grande variação do grau de não-estacionaridade o comportamento previsto pelo modelo proposto é muito bom. Comparando as Figs. 4.8 e 4.3, verifica-se que apenas uma variação no número de coeficientes afeta tanto a velocidade de convergência, como o valor do erro médio quadrático em regime, para um mesmo grau de não-estacionaridade.

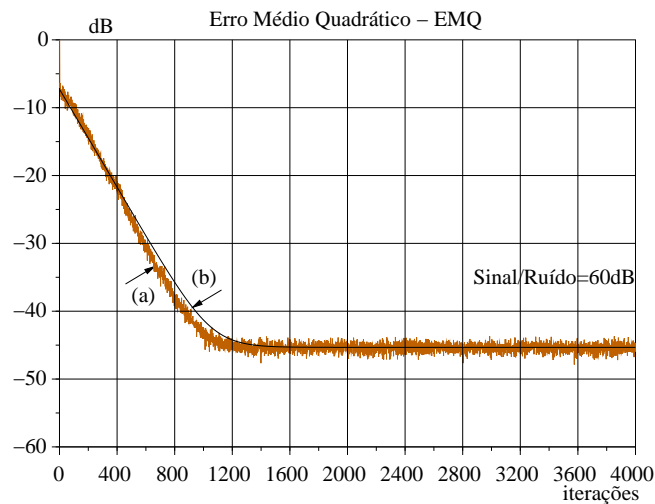


Figura 4.8: *EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo AP(3),  $N = 128$ ,  $S = 1$ ,  $\sigma_q^2 = 7,812 \times 10^{-9}$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.*

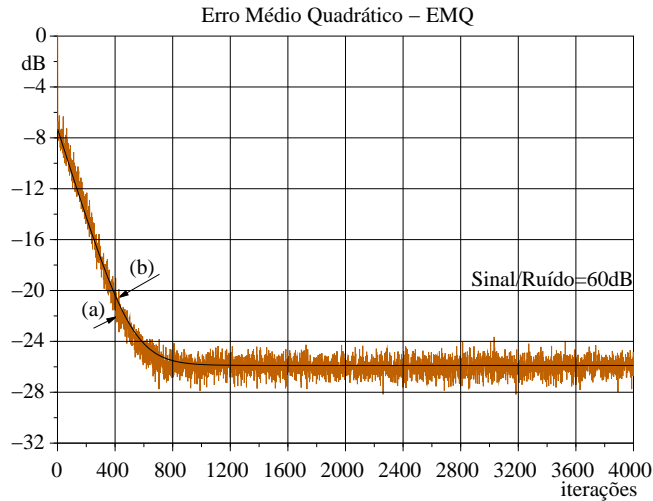


Figura 4.9: *EMQ* – Entrada  $AR(1)$  Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo  $AP(3)$ ,  $N = 128$ ,  $S = 10$ ,  $\sigma_q^2 = 7,812 \times 10^{-7}$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.

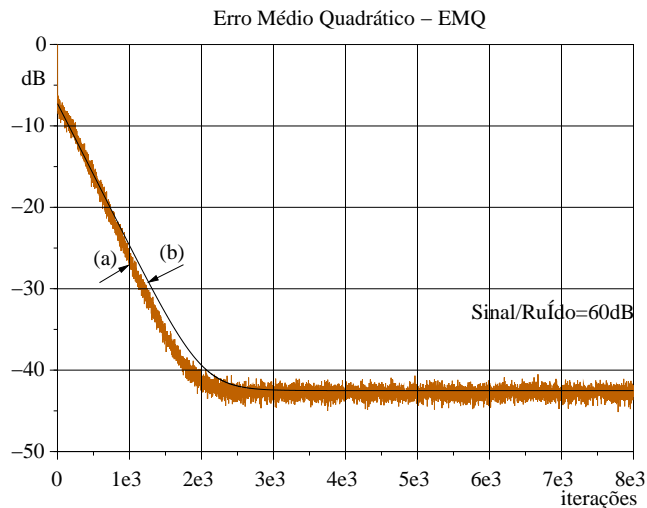


Figura 4.10: *EMQ* – Entrada  $AR(1)$  Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo  $AP(3)$ ,  $N = 256$ ,  $S = 1$ ,  $\sigma_q^2 = 3,906 \times 10^{-9}$ ,  $\sigma_u^2 = 1$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.

## 4.7 Algoritmo AP em Regime Permanente

Uma figura de mérito comumente usada para avaliar o *tracking* de um filtro adaptativo é o desajuste [43], que oferece uma medida do EMQ em excesso em relação ao

EMQ mínimo, e é definida por [16]:

$$\mathcal{M}(n) = \frac{J_{exc}(n)}{J_{min}} \quad (4.59)$$

Da expressão (4.38),  $J_{exc}(n) = tr[\mathbf{R}_{\phi\phi}\mathbf{K}(n)]$  é o erro médio quadrático em excesso e  $J_{min} = (1 + \mathbf{a}^T\mathbf{a} + \sigma_z^2 tr[E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}])\sigma_r^2$  é o erro médio quadrático mínimo, pois independe do vetor de coeficientes.

Na avaliação do erro médio quadrático em excesso, o cálculo do comportamento da matriz de correlação  $\mathbf{K}(n) = E\{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\}$  é estabelecido para  $n \rightarrow \infty$ , ou seja, em regime permanente.

A matriz  $\mathbf{K}(n)$  para  $n \rightarrow \infty$  é calculada aqui, assumindo uma operação em um meio não estacionário. Definindo o vetor de erro dos coeficientes  $\mathbf{v}(n)$  como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n) &= [\mathbf{w}(n) - E\{\mathbf{w}(n)\}] + [E\{\mathbf{w}(n)\} - \mathbf{w}^o(n)] \\ &= \mathbf{v}_1(n) + \mathbf{v}_2(n) \end{aligned} \quad (4.60)$$

em que  $\mathbf{v}_1(n)$  é a flutuação do vetor de coeficientes do filtro em relação a seu valor médio e  $\mathbf{v}_2(n)$  é o atraso (defasagem) do vetor de coeficientes do processo em relação ao vetor do valor médio dos coeficientes do filtro adaptativo. O vetor  $\mathbf{v}_2(n)$  é também denominado como vetor erro de atraso.

Aplicando (4.60) no cálculo da matriz  $\mathbf{K}(n)$  e substituindo o resultado na expressão do erro médio quadrático em excesso (EMQE), chega-se à seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_{exc}(n) &= \sigma_\phi^2 tr[\mathbf{K}_1(n) + \mathbf{K}_2(n)] \\ &= J_{exc1}(n) + J_{exc2}(n) \end{aligned} \quad (4.61)$$

em que  $\mathbf{K}_1(n) = E\{\mathbf{v}_1(n)\mathbf{v}_1^T(n)\}$  corresponde ao erro de estimação, e  $\mathbf{K}_2(n) = E\{\mathbf{v}_2(n)\mathbf{v}_2^T(n)\}$

é o erro atribuído diretamente à não-estacionaridade do meio. Observar que a matriz  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sigma_\phi^2 \mathbf{I}$ , e como o vetor  $\mathbf{w}^o(n)$  é estatisticamente independente, a correlação entre  $\mathbf{v}_1(n)$  e  $\mathbf{v}_2(n)$  é nula.

Retornando à eq. (4.59) e substituindo nela a eq. (4.61), obtém-se:

$$\mathcal{M}(n) = \mathcal{M}_1(n) + \mathcal{M}_2(n) \quad (4.62)$$

O valor de  $\mathcal{M}_1(n)$  corresponde ao desajuste provocado pelo erro de medição e é da mesma forma como em um meio estacionário. O  $\mathcal{M}_2(n)$  é o desajuste proveniente do efeito da não-estacionaridade do processo.

Para avaliar o desajuste do filtro adaptativo utilizando o algoritmo AP, assume-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\mathbf{v}(n)\} = 0$ , e em regime (4.55) torna-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \left(1 - \frac{2}{G-2}\right) \mathbf{K}(n) \\ &+ \frac{1}{N(G+2)} \text{tr}[\mathbf{K}(n)] \mathbf{I} \\ &+ \left(1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr}[E\{[\mathbf{U}^T(n) \mathbf{U}(n)]^{-1}\}]\right) \frac{\sigma_r^2}{\sigma_\phi^2 (G-2)(G-4)} \mathbf{I} \\ &+ \sigma_q^2 \left(\sigma_\phi^2 + \frac{1}{\sigma_\phi^2} \frac{\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Psi}(n) \mathbf{a}}{(G-2)(G-4)}\right) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.63)$$

lembrando que  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sigma_\phi^2 \mathbf{I}$ .

Da eq. (4.63) observa-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}(n)$  é uma matriz diagonal. Tomando o

traço de (4.63) e resolvendo para  $tr[\mathbf{K}(\infty)] = \lim_{n \rightarrow \infty} tr[\mathbf{K}(n)]$  resulta em:

$$tr[\mathbf{K}(\infty)] = tr[\mathbf{K}_1(\infty) + \mathbf{K}_2(\infty)] = \frac{N(G^2 - 4)}{G + 6} \left\{ (1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 tr[E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}]) \right. \\ \left. \times \frac{\sigma_r^2}{\sigma_\phi^2(G-2)(G-4)} + \left( \sigma_\phi^2 + \frac{1}{\sigma_\phi^2} \frac{\mathbf{a}^T \Psi(n) \mathbf{a}}{(G-2)(G-4)} \right) \sigma_q^2 \right\} \quad (4.64)$$

Aplicando (4.61) e (4.64) em (4.59), encontram-se as parcelas do desajuste, ou seja:

$$\mathcal{M}(\infty) = \frac{N(G+2)}{(G+6)(G-4)} + \frac{(G-2)(G-4)\sigma_\phi^4 + \mathbf{a}^T \Psi(n) \mathbf{a}}{1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 tr[E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}]} \frac{N(G+2)}{(G-4)(G+6)} \frac{\sigma_q^2}{\sigma_r^2} \quad (4.65)$$

onde  $\Psi(n) = E\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{A}\mathbf{U}(n)\}$ .

Assim, de acordo com a eq. (4.65), o desajuste decorrente do algoritmo AP operar em um meio não estacionário é dada por:

$$\mathcal{M}_2(\infty) = \frac{(G-2)(G-4)\sigma_\phi^4 + \mathbf{a}^T \Psi(n) \mathbf{a}}{1 + \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 tr[E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}]} \frac{N(G+2)}{(G-4)(G+6)} \frac{\sigma_q^2}{\sigma_r^2} \quad (4.66)$$

Para um bom desempenho de *tracking*, o desajuste  $\mathcal{M}(n)$  deve ser pequeno comparado com a unidade. Na Figura 4.11, apresenta-se o gráfico referente ao desajuste, eq (4.66), proveniente apenas da não-estacionaridade do processo, onde a variação é em função do grau de não-estacionaridade  $S$ , definida pela eq. (4.58). No gráfico, as curvas foram traçadas para um número de coeficientes do filtro adaptativo variável, isto é, para  $N = 64$  indicado em (a) e  $N = 128$  indicado por (b). Verifica-se que o aumento do grau de não-estacionaridade em cada caso acarreta também num rápido aumento no desajuste. Em ambos os casos, o número de vetores passados  $P$  usados pelo modelo são iguais, e dessa maneira, a variação da curva de desajuste entre as curvas (a) e (b) está relacionada diretamente ao número de coeficientes usados.

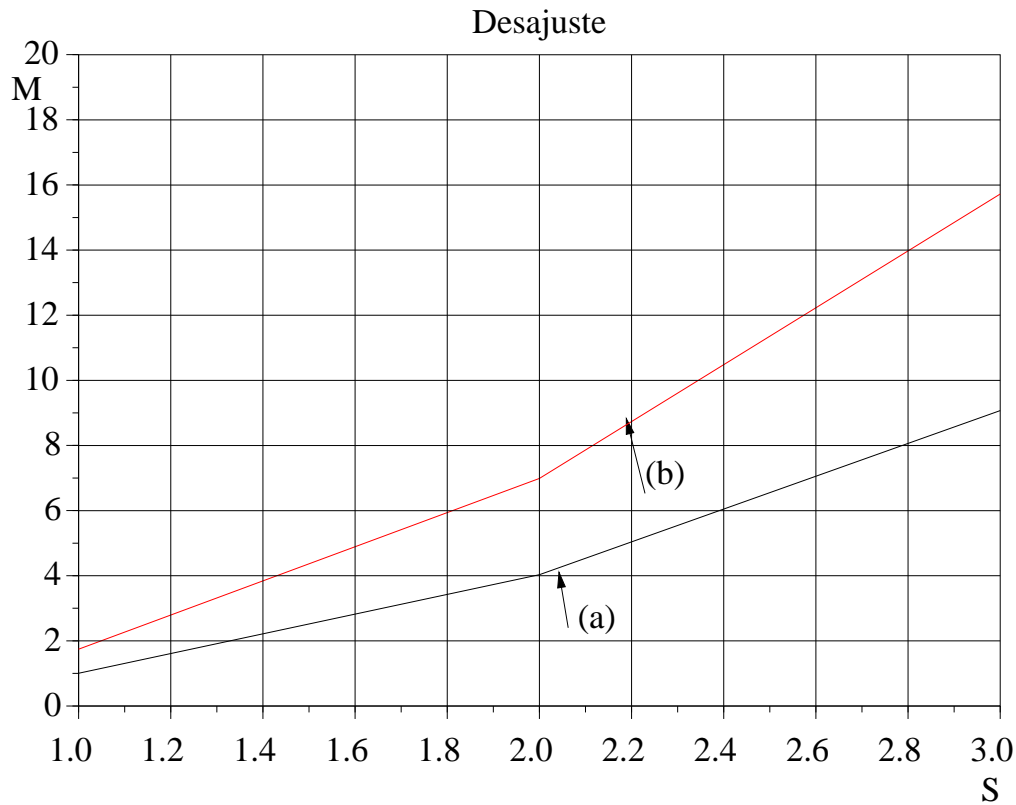


Figura 4.11: *Desajuste devido a não-estacionariedade para (a)  $N = 64$  e (b)  $N = 128$ , com  $P = 2$ .*

A seguir, apresenta-se um gráfico comparativo onde procura-se avaliar o desajuste em função do erro de atraso (*lag*), entre o algoritmo AP e o LMS. Para o algoritmo LMS, são utilizados os seguintes valores para o passo de adaptação [21]:

$$\mu_{min_{desaj}} = \frac{\sigma_q}{2\sigma_r} \sqrt{\frac{N}{tr[\mathbf{R}_u u]}}$$

$$\mu_{max_{vel}} = \frac{1}{tr[\mathbf{R}_u u]}$$

Conforme [21], o desajuste devido a não-estacionariedade do meio no caso do algoritmo LMS é dado por:

$$\mathcal{M}_{LMS} = \frac{1}{4\mu} N \frac{\sigma_q^2}{\sigma_r^2} \tag{4.67}$$

Na Figura 4.12, as letras (a), (b) e (c) representam o desajuste em relação ao grau de

não-estacionaridade para o algoritmo AP, LMS com passo de adaptação  $\mu$  de mínimo desajuste, e o LMS com  $\mu$  de máxima velocidade de convergência, respectivamente. Verifica-se que o algoritmo AP apresenta um desajuste comparável, embora menor para valores de não-estacionaridade ( $S < 2$ ) encontrados em casos práticos, ao algoritmo LMS com uma taxa de adaptação para mínimo desajuste. Neste caso, utilizam-se no modelo do algoritmo AP,  $N = 64$ ,  $P = 8$  e variância do sinal de entrada  $\sigma_u^2 = 1$ .

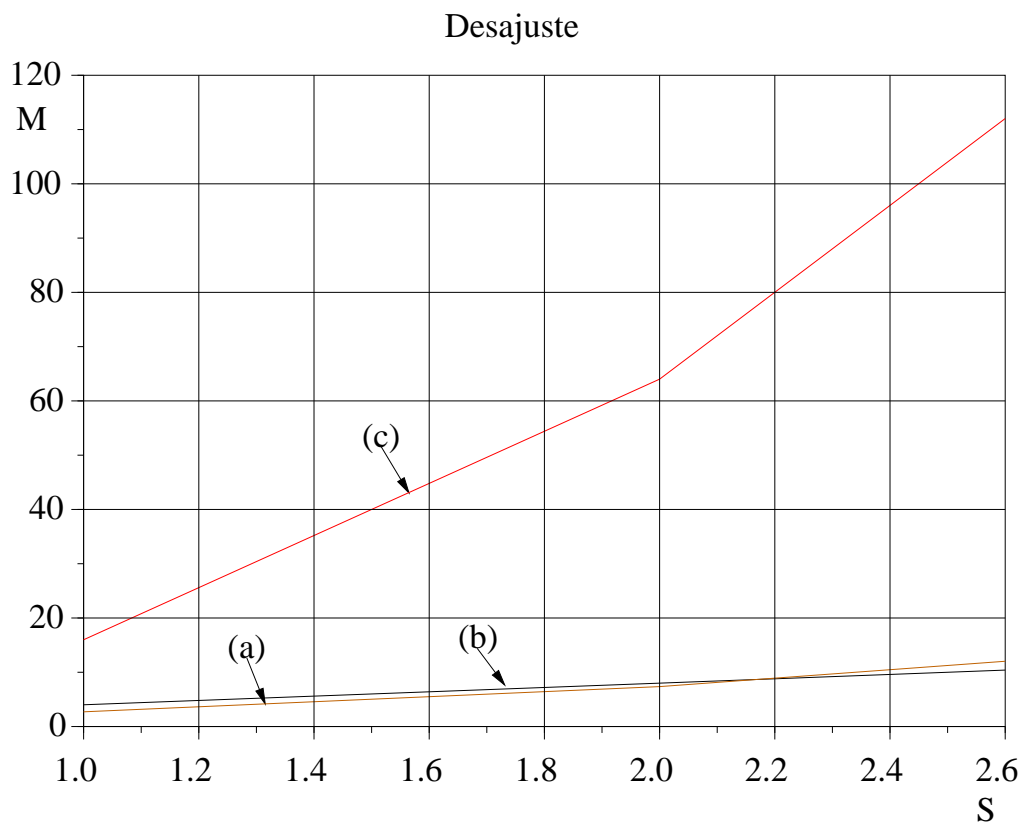


Figura 4.12: Desajuste: (a) algoritmo AP, (b) LMS com  $\mu = \mu_{min}$  e (c) LMS com  $\mu = \mu_{max}$

## 4.8 Conclusão

Apresentou-se neste capítulo, a análise estatística do algoritmo AP, considerando um sinal de entrada gaussiano de média zero e operando em um meio não estacionário. Os modelos foram estabelecidos, considerando um ruído aditivo branco de média zero e independente de qualquer outro sinal do sistema. Os modelos permitiram avaliar o desajuste do algoritmo AP e compará-lo ao do algoritmo LMS.

No próximo capítulo é apresentado uma extensão do algoritmo AP, onde o passo de adaptação  $\alpha$  assume valores menores que a unidade. Essa condição acarreta uma abordagem analítica que requer que novas propriedades sejam aplicadas para a avaliação do modelo determinístico.



# Capítulo 5

## Análise Estatística do Pseudo Algoritmo de Projeções Afins com Entrada Autoregressiva - Em Ambiente Estacionário

### 5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, a análise do algoritmo de projeções afins (AP) assume que o passo de adaptação  $\alpha$  tem valor unitário. A razão para isso deve-se à definição do algoritmo de projeções afins como solução de um sistema sub-determinado, conforme desenvolvido no Capítulo 2. Entretanto, uma extensão natural do algoritmo AP surge com a implementação do passo de adaptação diferente da unidade. Nessa situação, isto é,  $\alpha \neq 1$ , o erro de estimação não será mais um escalar. Esta característica conduz a um novo algoritmo, definido por Pseudo algoritmo de Projeções Afins, que utiliza apenas o erro presente na atualização dos coeficientes.

A análise do pseudo algoritmo AP surge como uma consequência, motivada pelo fato de diversas estratégias de cancelamento de eco acústico [8, 6, 17, 20, 37, 19] explorarem o controle da taxa de adaptação. Uma outra característica observada refere-se à diminuição do EMQ em regime permanente com a redução do passo de adaptação do algoritmo. Dessa forma, o desenvolvimento de um modelo teórico para o pseudo

algoritmo AP busca oferecer a um projetista uma verificação analítica do valor da taxa de adaptação que atenda aos critérios impostos no projeto.

Neste capítulo é realizada a análise do comportamento estatístico do pseudo algoritmo AP, buscando um modelo teórico do comportamento médio de seus coeficientes e o erro médio quadrático EMQ, quando submetido a operar em um meio estacionário. São assumidos valores para  $\alpha$  menores que 1. Conforme será observado, assumir  $\alpha < 1$  resulta na modificação das propriedades utilizadas na análise dos momentos de primeira e segunda ordens, em relação às encontradas para o algoritmo AP com  $\alpha = 1$ . Contudo, a estimação de  $\hat{\mathbf{a}}(n)$  e a construção do vetor de direção  $\Phi(n)$  não se modificam.

## 5.2 Análise do Vetor de Erro dos Coeficientes

Na Figura 5.1 apresenta-se o comportamento do algoritmo AP quando se varia o passo de adaptação para valores menores que a unidade (Pseudo-APA). Observa-se claramente que para valores de  $\alpha$  próximos do valor unitário a velocidade de convergência aumenta rapidamente. Entretanto, o erro em regime permanente aumenta com a elevação desta taxa. As simulações foram implementadas para  $N = 64$  coeficientes, utilizando dois vetores passados  $P = 2$ .

A estimação dos parâmetros  $\hat{\mathbf{a}}(n)$  do processo AR e a definição da direção do vetor  $\Phi(n)$  são iguais ao caso para  $\alpha = 1$ .

Na análise do momento de primeira ordem do pseudo-APA, a equação de ajuste dos coeficientes é acrescida do passo de adaptação  $\alpha$ :

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} e(n) \quad (5.1)$$

Retornando à figura (3.2), o sistema adaptativo tenta estimar o sinal desejado  $d(n)$

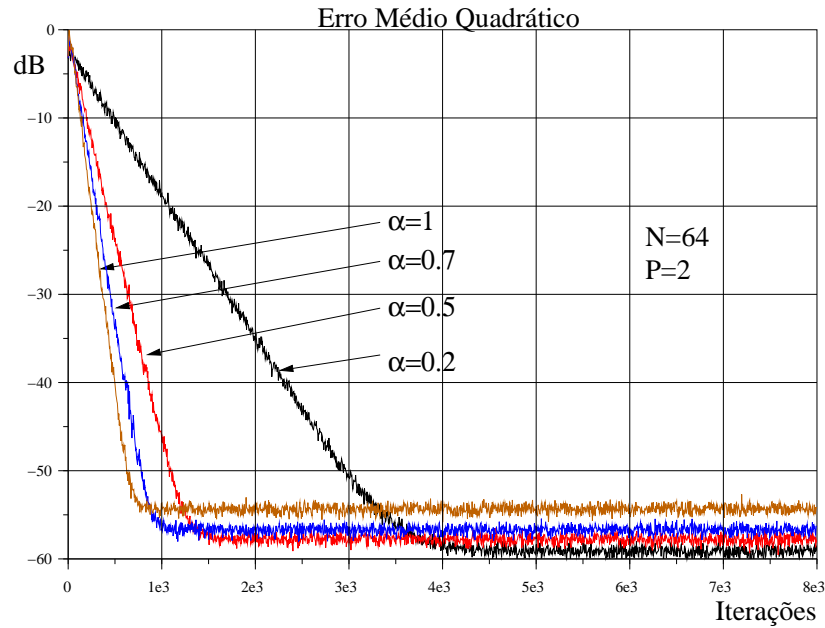


Figura 5.1: Comportamento do Pseudo-APA para alguns valores de  $\alpha$ .

para um processo AR definido em (3.2). O erro de estimação é dado pela expressão:

$$e(n) = d(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}^o + r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) \quad (5.2)$$

Sendo o vetor erro dos coeficientes por  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o$ ,

$$e(n) = -\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + r(n) \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.1), e aplicando a definição de  $\mathbf{v}(n)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} e(n) \\ &= \mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} [-\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + r(n)] \\ &= \mathbf{v}(n) - \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} r(n) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Considerando  $e_a(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n)$  como o erro instantâneo, a equação (5.4) pode

ser escrita como:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} e_a(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} r(n) \quad (5.5)$$

onde  $r(n)$  é um ruído branco independente, com função de distribuição Gaussiana e variância  $\sigma_r^2$ .

Conforme procedimento desenvolvido na Seção 3.4, quando a equação de ajuste dos coeficientes é pré-multiplicada por  $\mathbf{u}^T(n)$  e  $\mathbf{U}^T(n)$ , algumas propriedades são obtidas que auxiliam na análise do algoritmo. No caso do pseudo algoritmo AP, pré-multiplica-se a eq. (5.4) por estas variáveis.

**Propriedade.1:**

Pré-multiplicando-se a equação (5.4) pelo vetor  $\mathbf{u}^T(n)$ :

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \alpha \frac{\mathbf{u}^T(n)\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} [\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - r(n)] \quad (5.6)$$

Como  $\mathbf{u}(n) = \Phi(n) + \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n)$ , tem-se:

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \alpha \frac{[\Phi^T(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)]\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} [\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - r(n)] \quad (5.7)$$

Sendo o vetor  $\Phi(n)$  uma estimativa de  $\mathbf{z}(n)$  ( $\Phi(n) = \mathbf{z}_\perp(n)$ ), ou seja, ortogonal ao subespaço  $\mathbf{U}(n)$ , verifica-se que  $\mathbf{U}^T(n)\Phi(n) = 0$ , obtendo-se da eq. (5.7) a expressão:

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = (1 - \alpha)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + \alpha r(n) \quad (5.8)$$

**Propriedade.2:**

Pré-multiplicando-se a equação (5.4) pela matriz  $\mathbf{U}^T(n)$ :

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) - \alpha \frac{\mathbf{U}^T(n)\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} [\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - r(n)] \quad (5.9)$$

E mais uma vez observando que  $\mathbf{U}^T(n)\Phi(n) = 0$ , obtém-se:

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) \quad (5.10)$$

A seguir, retorna-se à eq. (5.5) e toma-se como passo seguinte a avaliação do erro instantâneo  $e_a(n)$ .

Sendo o erro  $e_a(n)$  dado por:

$$\begin{aligned} e_a(n) &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) \\ &= \Phi^T(n)\mathbf{v}(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Na determinação de  $e_a(n)$  faz-se necessário a avaliação do produto de  $\mathbf{U}^T(n)$  por  $\mathbf{v}(n)$ . Assim, das propriedades desenvolvidas e expressas nas equações (5.8) e (5.10), o produto  $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n)$  pode ser calculado de forma recursiva, como segue.

Inicialmente pode-se obter da equação (5.10) as seguintes equações :

$$\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n) \quad (5.12)$$

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n) \quad (5.14)$$

⋮

$$\mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{v}(n) \quad (5.15)$$

Fazendo uma troca de variáveis de  $n$  para  $n - 1$  na expressão (5.8) obtém-se:

$$\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n) = (1 - \alpha)\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n-1) + \alpha r(n-1) \quad (5.16)$$

que é equivalente à equação (5.12).

Fazendo agora  $n = n - 2$  em (5.8) obtém-se:

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-1) = (1 - \alpha)\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-1) + \alpha r(n-2) \quad (5.17)$$

Como não se observa nenhuma expressão equivalente entre as eqs. (5.12) e (5.15), faz-se outra indução. Assim, fazendo  $n = n - 1$  em (5.12) resulta em:

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n) = \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-1) \quad (5.18)$$

Das equações (5.17) e (5.18) tem-se a expressão:

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n) = (1 - \alpha)\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-1) + \alpha r(n-2) \quad (5.19)$$

que é equivalente a eq. (5.13).

Fazendo o procedimento para mais um caso, substitui-se  $n = n - 3$  em (5.8) e obtém-se:

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-2) = (1 - \alpha)\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-3) + \alpha r(n-3) \quad (5.20)$$

Da mesma forma que no último caso, não existe uma relação entre (5.12) e (5.15) onde se observa uma equivalência direta com (5.20). Dessa forma, executando o mesmo procedimento utilizado anteriormente, substitui-se  $n = n - 2$  na expressão (5.12) e

$n = n - 1$  em (5.13) e obtém-se:

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-1) = \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-2) \quad (5.21)$$

e

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n) = \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-1) \quad (5.22)$$

Aplicando (5.21) e (5.22) em (5.20) chega-se à:

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n) = (1-\alpha)\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-3) + \alpha r(n-3) \quad (5.23)$$

que é equivalente à equação (5.14).

Procedendo da mesma forma para todas as  $P$  linhas, é fácil observar que o produto  $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n)$  pode ser expresso por:

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) = (1-\alpha)\mathit{diag}\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{V}(n)\} + \alpha\mathbf{r}(n-1) \quad (5.24)$$

onde  $\mathbf{V}(n)$  é uma matriz de dimensão  $N \times P$  formada por vetores passados de  $\mathbf{v}(n)$ , i.e.,

$$\mathbf{V}(n) = [\mathbf{v}(n-1) \ \mathbf{v}(n-2) \ \dots \ \mathbf{v}(n-P)], \quad (5.25)$$

e o vetor  $\mathbf{r}(n-1)$  é formado por:

$$\mathbf{r}(n-1) = [r(n-1) \ r(n-2) \ \dots \ r(n-P)]^T \quad (5.26)$$

Da eq. (5.24) observa-se que o termo  $\mathit{diag}\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{V}(n)\}$  pode ser definido como

sendo um vetor formado por  $P$  erros instantâneos passados, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n-1) &= e_a(n-1) \\
 \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-2) &= e_a(n-2) \\
 \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-3) &= e_a(n-3) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{v}(n-P) &= e_a(n-P)
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

e assim, tem-se o vetor  $\mathbf{e}_a(n-1) = [e_a(n-1) \ e_a(n-2) \ \dots \ e_a(n-P)]^T$ .

Retornando na equação (5.11) e aplicando os resultados das equações (5.24) e (5.27), e assumindo  $\hat{\mathbf{a}}(n) \approx \mathbf{a}$  (conforme justificado pela eq. (3.50)), obtém-se:

$$e_a(n) = \Phi^T(n)\mathbf{v}(n) + (1 - \alpha)\mathbf{a}^T\mathbf{e}_a(n-1) + \alpha\mathbf{a}^T\mathbf{r}(n-1) \tag{5.28}$$

O passo seguinte, é encontrar uma solução fechada para o erro instantâneo  $e_a(n)$  que possa ser aplicada em (5.5).

Na equação (5.28), observa-se que, para avaliar  $e_a(n)$  depende-se de uma recorrência que para o desenvolvimento de um modelo teórico, não é interessante ou mesmo elegante. Dessa forma, a eliminação do termo  $\mathbf{e}_a(n-1)$  torna-se necessária. Uma estratégia utilizada é mostrada a seguir.

Sendo:

$$\mathbf{a}^T \text{diag}[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{V}(n)] = \mathbf{a}^T \mathbf{e}_a(n-1) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(n-1) \\ e_a(n-2) \\ \vdots \\ e_a(n-P) \end{bmatrix} \tag{5.29}$$



isto é

$$\mathbf{a}^T \mathbf{e}_a(n-1) = \sum_{i=1}^P a_i \sum_{k=0}^{N-1} u(n-k-i)v_k(n-i) \quad (5.30)$$

Assumindo a hipótese que, para uma janela de  $P$  amostras de  $e_a(n-i)$  a variação é pequena, supõe-se a aproximação:

$$\mathbf{a}^T \text{diag}[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{V}(n)] = \mathbf{a}^T \mathbf{e}_a(n-1) \approx \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(n) \\ e_a(n) \\ \vdots \\ e_a(n) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

ou seja,

$$\mathbf{a}^T \mathbf{e}_a(n-1) = \left( \sum_{i=1}^P a_i \right) e_a(n) \quad (5.32)$$

A validade desta hipótese é observada de forma empírica nas Figuras 5.2(a) e 5.2(b) como um exemplo dos variados casos verificados em simulações. Na Figura 5.2(a) apresenta-se o gráfico mostrando as variações dos valores médios de  $E\{e_a(n)\}$  que é dado pela expressão (5.28) e da diferença  $(1-\alpha)(\mathbf{a}^T \mathbf{e}_a(n) - \mathbf{a}^T \mathbf{e}_a(n-1))$ , em que  $\mathbf{e}_a(n)$  e  $\mathbf{e}_a(n-1)$  são vetores de comprimento  $P$ . Observa-se na Fig. 5.2(a) que o erro cometido (linha hachurada escura) na aproximação é bem menor que a magnitude de  $e_a(n)$ , representada pela linha hachurada mais clara, demonstrando assim que a aproximação assumida é bastante razoável.

Na Figura 5.2(b) utiliza-se como figura de mérito a potência dos dois valores apresentados na Fig. 5.2(a), que também permite observar uma grande discrepância entre a potência das duas sequências. A linha mais escura indicada pelo número 1 representa a potência do erro instantâneo, e a linha 2, linha mais clara, representa a potência do erro cometido na aproximação assumida.

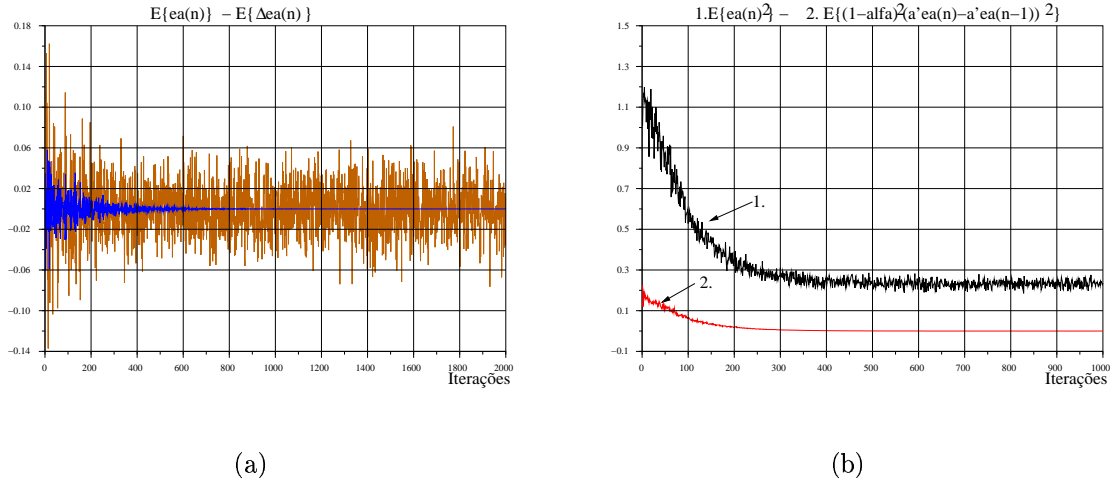


Figura 5.2: Avaliação gráfica da aproximação assumida na análise

Substituindo (5.32) na expressão do erro instantâneo (5.28), chega-se à:

$$e_a(n) = \frac{1}{1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^P a_i} \left( \Phi^T(n) \mathbf{v}(n) + \alpha \mathbf{a}^T \mathbf{r}(n-1) \right) \quad (5.33)$$

Retornando à equação de erro dos vetores de coeficientes (5.5), aplica-se o valor encontrado para o erro instantâneo  $e_a(n)$ , resultando em:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^P a_i} \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r(n) \\ - \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^P a_i} \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{r}(n-1) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Definindo  $r_a(n)$  como o ruído filtrado [28], expresso por:

$$r_a(n) = r(n) - \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^P a_i} \sum_{i=1}^P a_i r(n-i) \quad (5.35)$$

e

$$\gamma = 1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^P a_i \quad (5.36)$$

a equação (5.34) resulta em:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\alpha \Phi(n) \Phi^T(n)}{\gamma \Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a(n) \quad (5.37)$$

### 5.3 Análise do Comportamento Médio dos Coeficientes

Para a avaliação do comportamento médio dos coeficientes do pseudo algoritmo AP, toma-se o valor esperado da eq. (5.37), e utilizando a hipótese **A2** apresentada na Seção 3.5, tem-se:

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = E\{\mathbf{v}(n)\} - \frac{\alpha}{\gamma} E\left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\} E\{\mathbf{v}(n)\} + \alpha E\left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a(n) \right\} \quad (5.38)$$

A equação (5.38) é similar à eq. (3.27) exceto pelas constantes  $\gamma$  e  $\alpha$ . Entretanto, nenhum destes valores alteram a forma das expressões dos valores esperados. Assim, todos os procedimentos de avaliação que foram aplicados da eq.(3.27) à (3.38) na Seção 3.6 são repetidos. Do resultado obtido em (3.38) acrescentado das constantes que surgem no equacionamento do vetor erro dos coeficientes para o pseudo algoritmo AP, chega-se à seguinte expressão para o comportamento médio dos coeficientes:

$$E\{\mathbf{w}(n+1)\} = \left( \mathbf{I} - \frac{\alpha}{\gamma \sigma_\phi^2 (G-2)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \right) E\{\mathbf{w}(n)\} + \frac{\alpha}{\gamma \sigma_\phi^2 (G-2)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \mathbf{w}^o \quad (5.39)$$

## 5.4 Resultados de Simulações

Nesta seção, apresenta-se uma amostra dos resultados obtidos com o modelo analítico dado pela eq.(5.39) para ilustrar a acurácia do modelo.

### 5.4.1 Exemplo 1:

A entrada é um processo autoregressivo de primeira ordem AR(1) Gaussiano definido pela expressão  $u(n) = -0,9u(n-1) + z(n)$ , com  $z(n)$  sendo uma seqüência de ruído branco e Gaussiano. A relação sinal-ruído é de  $SNR = 60\text{dB}$ . As simulações executadas são para  $N = 64$  e  $N = 128$ , ambas para  $P = 4$ . As Figs. 5.3 e 5.4 mostram os resultados das simulações Monte Carlo e o comportamento médio dos coeficientes previsto por (5.39). Pode-se observar que existe muito boa combinação entre a simulação e o modelo teórico derivado.

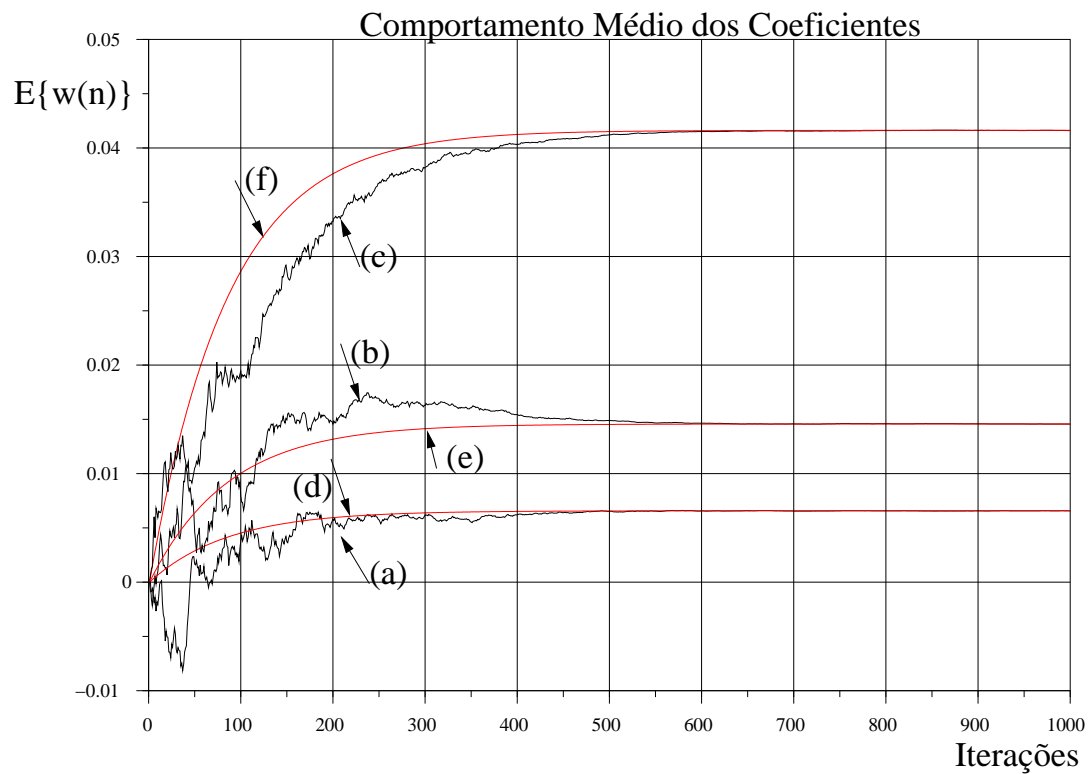


Figura 5.3: *Comportamento médio dos coeficientes – Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo AP(3),  $N = 64$ ,  $SNR = 60dB$  com passo de adaptação  $\alpha = 0,8$ . simulação (a) $w_{64}$  ; (b) $w_{40}$  ; (c) $w_{20}$  e modelo teórico (d) $w_{64}$  ; (e) $w_{40}$  ; (f) $w_{20}$  (100 realizações).*

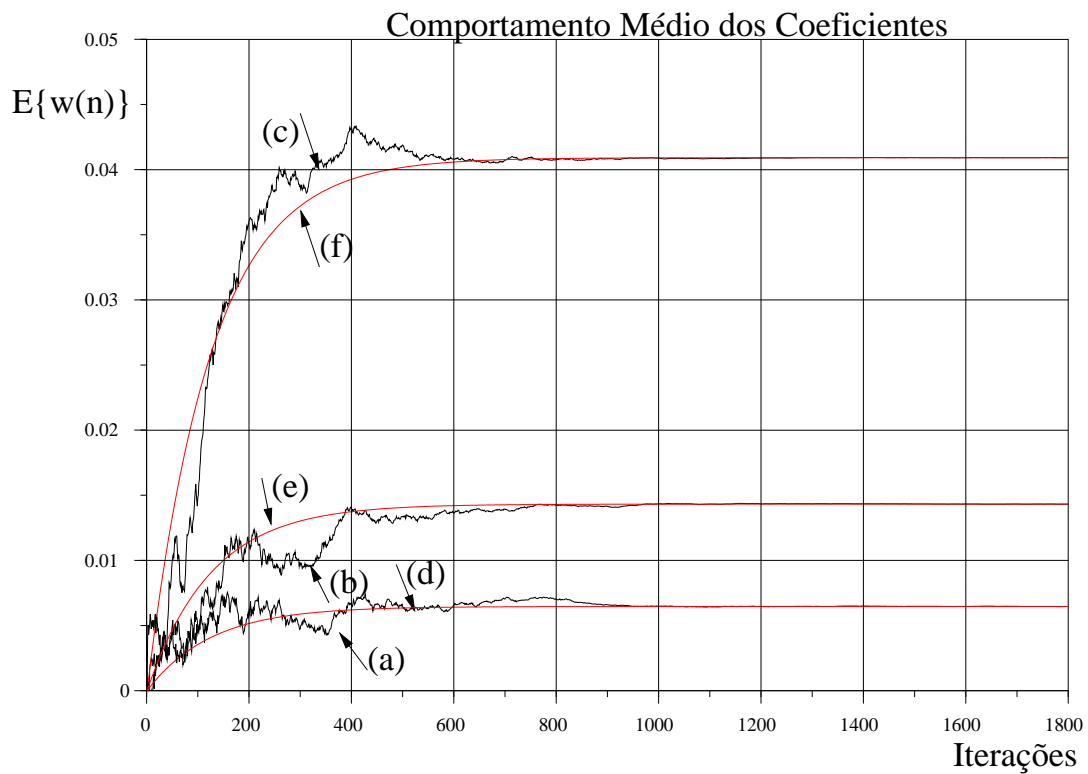


Figura 5.4: *Comportamento médio dos coeficientes - Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = -0,9$ , algoritmo AP(3),  $N = 64$ ,  $SNR = 60dB$  com passo de adaptação  $\alpha = 0.8$ . simulação (a)  $w_{128}$  ; (b)  $w_{80}$  ; (c)  $w_{40}$  e modelo teórico (d)  $w_{128}$  ; (e)  $w_{80}$  ; (f)  $w_{40}$  (100 realizações).*

## 5.5 Erro Médio Quadrático - EMQ do Pseudo Algoritmo AP

Uma das figuras de mérito que avalia o desempenho de um sistema adaptativo é o erro médio quadrático -EMQ, onde para o caso do cancelamento de eco acústico permite ao projetista verificar informações importantes do sistema. Para o cálculo do EMQ, eleva-se a eq. (3.39) ao quadrado e toma-se o valor esperado. Conforme a Seção 3.8, eq. (3.55):

$$E\{e^2(n)\} = E\{r_a^2(n)\} + \text{tr}[\mathbf{R}_{\phi\phi}\mathbf{K}(n)] \quad (5.40)$$

Como o ruído filtrado para o pseudo algoritmo AP é dado pela eq. (5.35), calcula-se a seguir o valor esperado de  $E\{r_a^2(n)\}$ . Assim,

$$\begin{aligned} E\{r_a^2(n)\} &= E\left\{\left(r(n) - \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{i=1}^P \hat{a}_i(n)r(n-i)\right)^2\right\} \\ &= E\left\{r^2(n) - 2\frac{\alpha}{\gamma} \sum_{i=1}^P \hat{a}_i(n)r(n)r(n-i) + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \hat{a}_i(n)\hat{a}_j(n)r(n-i)r(n-j)\right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

É importante observar na eq. (5.41), que deixa-se de assumir que  $\hat{\mathbf{a}}(n) = \mathbf{a}$ , pois como visto na eq. (3.59) existem flutuações que precisam ser consideradas, embora, conforme observado na análise e simulações mostradas no Capítulo 3, estas flutuações são desprezadas para fins práticos.

Como  $r(n)$  é branco Gaussiano de média zero,  $E\{r(n-i) \cdot r(n-j)\} = 0$  para  $i \neq j$ , e  $\hat{a}_i(n)$  é independente de  $r(n)$ , a equação (5.41) resulta em:

$$E\{r_a^2(n)\} = E\{r^2(n)\} + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \sum_{i=1}^P E\{\hat{a}_i^2(n)\}E\{r^2(n-i)\} \quad (5.42)$$

Como  $E\{r^2(n-i)\} = \sigma_r^2$  para todo  $i$ , a equação (5.42) pode ser expressa por:

$$E\{r_a^2(n)\} = \sigma_r^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \sum_{i=1}^P E\{\hat{a}_i^2(n)\} \right) = \sigma_r^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} E\{\hat{\mathbf{a}}^T(n)\hat{\mathbf{a}}(n)\} \right) \quad (5.43)$$

O valor esperado  $E\{\hat{\mathbf{a}}^T(n)\hat{\mathbf{a}}(n)\}$  é o mesmo que aparece no Capítulo 3 desenvolvido em (3.59)-(3.62). Dessa forma, aplicando (3.62) em (5.43), chega-se à equação do erro médio quadrático - EMQ para o pseudo algoritmo AP:

$$E\{e^2(n)\} = \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left( \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr}[E\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)\}^{-1}] \right) \right) \sigma_r^2 + \text{tr}[\mathbf{R}_{\phi\phi} \mathbf{K}(n)] \quad (5.44)$$

Para o cálculo do erro médio quadrático, é necessário verificar-se os momentos de segunda ordem do vetor de coeficientes, ou seja, a correlação entre os diversos coeficientes ao longo do tempo. Dessa forma, o passo seguinte é calcular o valor da matriz  $\mathbf{K}(n)$ .

### 5.5.1 Análise dos Momentos de Segunda Ordem

Tomando o valor esperado do produto do vetor de erro dos coeficientes (5.37) por seu transposto,  $\mathbf{K}(n+1) = E\{\mathbf{v}(n+1)\mathbf{v}^T(n+1)\}$ , encontra-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{K}(n) - \frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} + \alpha E \left\{ \mathbf{v}(n) \frac{r_a(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} \\ & + \alpha E \left\{ \frac{\Phi(n)r_a(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{v}^T(n) \right\} + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} E \left\{ \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} \\ & - \frac{\alpha^2}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{v}(n) \frac{r_a(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} - \frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n) \right\} \\ & - \frac{\alpha^2}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n)r_a(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} + \alpha^2 E \left\{ \frac{\Phi(n)r_a(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \frac{r_a(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \right\} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Comparando as parcelas da eq. (5.45) com as encontradas na eq. (3.64) para o cálculo dos momentos de segunda ordem na análise do algoritmo AP, seção 3.8.1, verifica-se que são praticamente similares, onde apenas as constantes  $\gamma$  e  $\alpha$  são acresci-



das no caso do pseudo APA. Com isso, são omitidos aqui os detalhamentos dos cálculos dos valores esperados, já que são os mesmos apresentados no Capítulo 3.

Do resultado no cálculo dos momentos de segunda ordem, apresentado na eq. (3.91) acrescentado da constante  $\gamma = 1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^P a_i$  e do passo de adaptação  $\alpha$ , chega-se à seguinte equação recursiva para  $\mathbf{K}(n + 1)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n + 1) = & \mathbf{K}(n) - \frac{\alpha}{\sigma_\phi^2 \gamma (G - 2)} [\mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{\phi\phi} + \mathbf{R}_{\phi\phi} \mathbf{K}(n)] \\ & + \frac{\alpha^2}{\sigma_\phi^2 \gamma^2 (G^2 + 2G)} \left[ \frac{G}{N} \text{tr}[\mathbf{K}(n)] + \left(1 - \frac{G}{N}\right) E\{\mathbf{v}^T(n)\} E\{\mathbf{v}(n)\} \right] \mathbf{R}_{\phi\phi} \\ & + \frac{\alpha^2 \sigma_r^2}{\sigma_\phi^4 (G - 2)(G - 4)} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left( \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[ E\{[\mathbf{U}^T(n) \mathbf{U}(n)]^{-1}\} \right] \right) \right] \mathbf{R}_{\phi\phi} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Observa-se na expressão (5.46) que para o caso do passo de adaptação  $\alpha = 1$ , a expressão recai exatamente na dos momentos de segunda ordem para o algoritmo de projeções afins (3.91).

### 5.5.2 Comportamento Médio do Pseudo APA em Regime Permanente

Como  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sigma_\phi^2 \mathbf{I}$ , a expressão do erro médio quadrático em (5.44) é uma função de  $\text{tr}[\mathbf{K}(n)]$ . Definindo os escalares

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2}{G - 2} \\ \beta &= \frac{G}{N(G^2 + 2G)} \\ \rho &= \frac{P}{N(G^2 + 2G)} \\ \delta &= \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left( \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[ E\{[\mathbf{U}^T(n) \mathbf{U}(n)]^{-1}\} \right] \right) \right) \frac{\sigma_r^2}{\sigma_\phi^2 (G - 2)(G - 4)} \end{aligned}$$

a eq. (5.46) pode escrita como:

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) - \frac{\alpha \eta}{\gamma} \mathbf{K}(n) + \frac{\alpha^2 \beta}{\gamma^2} \text{tr}[\mathbf{K}(n)] \mathbf{I} + \frac{\alpha^2 \rho}{\gamma^2} E\{\mathbf{v}^T(n)\} E\{\mathbf{v}(n)\} \mathbf{I} + \alpha^2 \delta \mathbf{I}. \quad (5.47)$$

Assumindo a convergência, a ação do algoritmo em regime permanente pode ser determinada tomando o limite para  $n \rightarrow \infty$  do modelo analítico. Como  $n \rightarrow \infty$ , pode-se dizer que  $\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) = \mathbf{K}_\infty$ . Também,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\mathbf{v}(n)\} = 0$ . Dessa forma, tomando o  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  de (5.47) resulta:

$$\mathbf{K}_\infty = \frac{\alpha}{\eta} \left( \frac{\beta}{\gamma} \text{tr}[\mathbf{K}_\infty] + \gamma \delta \right) \mathbf{I} \quad (5.48)$$

A equação (5.48) mostra claramente que  $\mathbf{K}_\infty$  é um múltiplo da matriz identidade. Tomando o traço de (5.48) encontra-se que  $\text{tr}[\mathbf{K}_\infty] = N \gamma^2 \alpha \delta / (\gamma \eta - N \alpha \beta)$  e dessa maneira

$$\mathbf{K}_\infty = \frac{\alpha \gamma \sigma_r^2}{(2 - \alpha) \sigma_\phi^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left( \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr}[E\{[\mathbf{U}^T(n) \mathbf{U}(n)]^{-1}\}] \right) \right) \frac{(G+2)}{(G-4)(G + \frac{4+2\alpha}{2-\alpha})} \mathbf{I}. \quad (5.49)$$

Usando (5.49) e  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sigma_\phi^2 \mathbf{I}$  em (5.44) chega-se à expressão do erro médio quadrático em regime permanente

$$\begin{aligned} \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} E\{e^2(n)\} &= \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left( \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr}[E\{[\mathbf{U}^T(n) \mathbf{U}(n)]^{-1}\}] \right) \right) \\ &\times \left( 1 + \frac{\alpha \gamma}{(2 - \alpha)} \frac{N(G+2)}{(G-4)(G + \frac{4+2\alpha}{2-\alpha})} \right) \sigma_r^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

## 5.6 Resultados de Simulações

Nesta seção apresenta-se uma amostra dos resultados obtidos com o modelo analítico do pseudo algoritmo de projeções afins, formado das equações (5.39), (5.44) e (5.46), com o objetivo de ilustrar sua acurácia. Em todos os exemplos, a variância de  $\sigma_\phi^2 = 1$

e  $\sigma_r^2 = 10^{-6}$ . O termo  $\sigma_z^2 \text{tr}[E\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)\}^{-1}]$  é desprezado em todas as simulações. A resposta ideal do processo  $\mathbf{w}^o$  utilizada nas simulações é mostrada na Fig. 3.8.

### 5.6.1 Exemplo 1:

Nas Figs. 5.5 e 5.6, mostra-se o comportamento do erro médio quadrático do pseudo APA operando em um ambiente estacionário e com um passo de adaptação  $\alpha = 0,2$ . O número de coeficientes do filtro adaptativo é  $N=64$  para  $P=2$  e  $P=8$ . O sinal de entrada é derivado de um processo AR(1) do tipo  $u(n) = -0,9u(n-1) + z(n)$  (filtro passa-altas de primeira ordem). Comparando o modelo teórico com as simulações Monte Carlo, observa-se uma combinação muito boa, e dessa forma o modelo proposto representa satisfatoriamente o comportamento do algoritmo nesta condição de operação. A seguir, nas Figs. 5.7 e 5.8 são apresentados gráficos representando o comportamento do EMQ para  $N=128$  coeficientes para  $P=2$  e  $P=8$  vetores passados do sinal de entrada  $u(n)$ . O passo de adaptação é  $\alpha = 0,5$  e o sinal de entrada  $u(n)$  é gerado conforme os exemplos das Figs. 5.5 e 5.6. Nestes gráficos também observam-se bons resultados comparativos entre modelo e simulações. Nas quatro situações de operação apresentadas, observa-se que o EMQ em regime permanente previsto pela eq. (5.50) (linha horizontal) ajusta-se perfeitamente aos resultados das simulações.

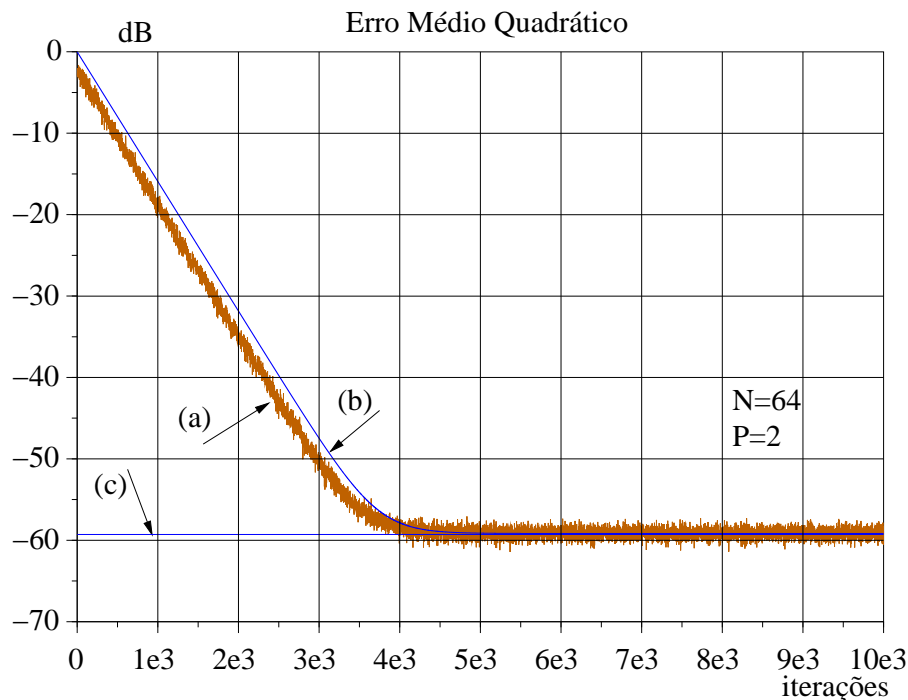


Figura 5.5: *EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50).  $\alpha = 0,2$ ,  $N=64$  e  $P=2$*

### 5.6.2 Exemplo 2:

Nas Figs. 5.9 e 5.10, são apresentados gráficos do EMQ onde o passo de adaptação assume os valores  $\alpha = 0,8$  e  $\alpha = 0,1$ . Os valores de  $N=64$  e  $P=8$  são os mesmos nos dois gráficos e o sinal de entrada é gerado no primeiro caso por um processo AR(1) definido pela função  $u(n) = -0,3u(n-1) + z(n)$  (filtro passa-alta de primeira ordem) na Fig 5.9, e no segundo caso por um processo AR(1) definido pela função  $u(n) = 0,3u(n-1) + z(n)$  (filtro passa-baixas de primeira ordem) na Fig 5.10. Em ambos os gráficos o modelo e as simulações apresentam uma boa combinação, caracterizando uma excelente acurácia do modelo proposto para o pseudo algoritmo AP. Nas duas situações os erros médio quadráticos em regime permanente previstos pela eq. (5.50) (linha horizontal) ajustam-se perfeitamente aos resultados das simulações.

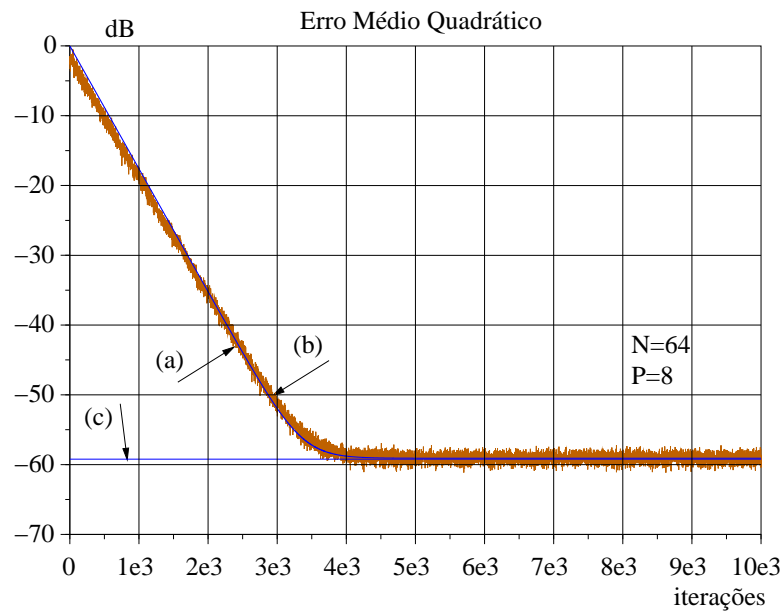


Figura 5.6: EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50).  $\alpha = 0,2$ ,  $N=64$  e  $P=8$

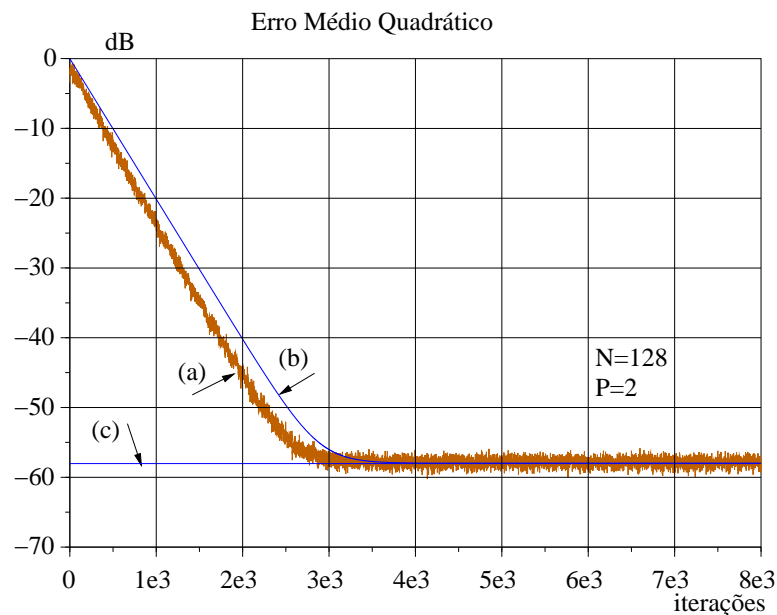


Figura 5.7: EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50).  $\alpha = 5$ ,  $N=128$  e  $P=2$

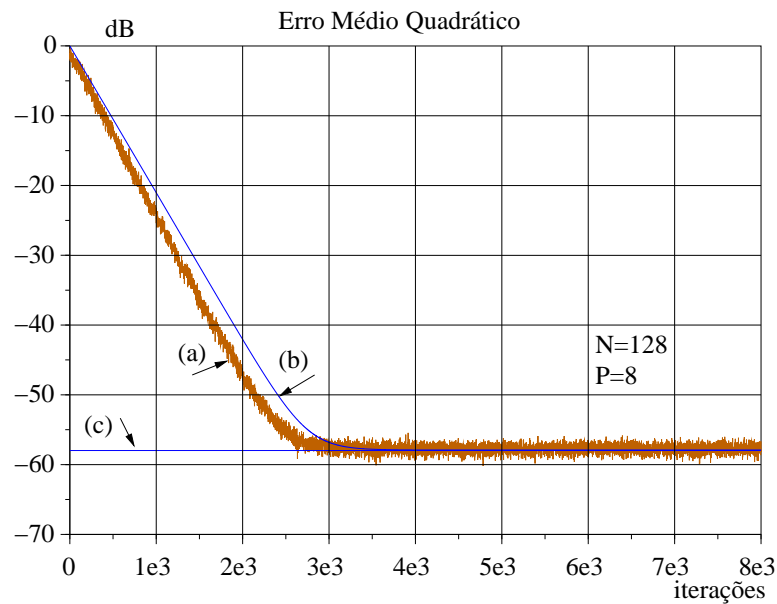


Figura 5.8: *EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50).  $\alpha = 0,5$ ,  $N=128$  e  $P=8$*

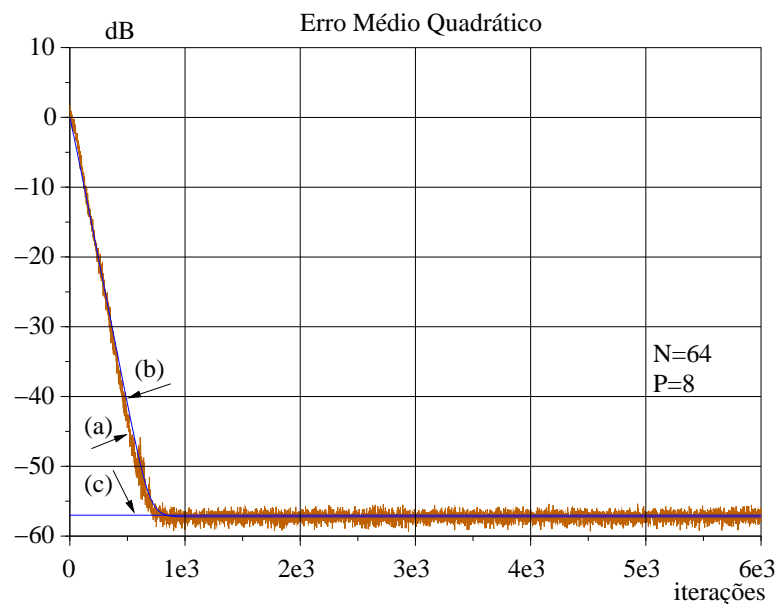


Figura 5.9: *EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50).  $\alpha = 0,8$ ,  $N=64$  e  $P=8$*

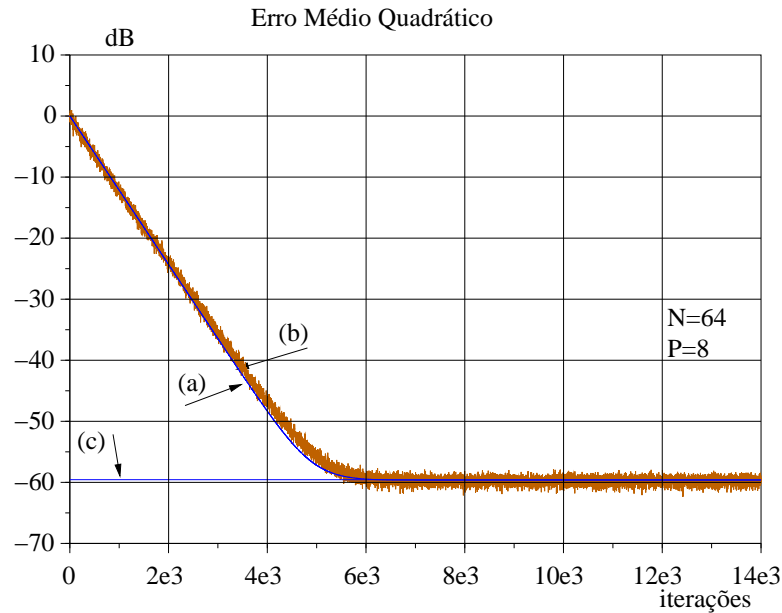


Figura 5.10: *EMQ: Comparação entre (a) Simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo analítico do pseudo APA; (c) EMQ em Regime Permanente previsto em (5.50).  $\alpha = 0, 1$ ,  $N=64$  e  $P=8$*

## 5.7 Conclusão

Este capítulo apresentou uma análise estatística para o comportamento do pseudo algoritmo AP, considerando um sinal de entrada AR de média zero. Equações recursivas determinísticas foram desenvolvidas para o comportamento médio dos coeficientes do vetor erro dos coeficientes e para o erro médio quadrático. Exemplos mostram que o modelo desenvolvido descreve com bastante precisão o comportamento do algoritmo nas fases transitória e em regime permanente.

No próximo capítulo é feita a análise estatística do pseudo algoritmo AP considerando sua operação em um meio não estacionário. São derivadas expressões para o comportamento do valor médio dos coeficientes e do erro médio quadrático (EMQ).

# Capítulo 6

## Análise Estatística do Pseudo Algoritmo de Projeções Afins com Entrada Autoregressiva - Em Ambiente Não Estacionário

### 6.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo a análise estatística do pseudo algoritmo de projeções afins considerando sua aplicação em um sistema adaptativo operando em um ambiente não estacionário. Observa-se no decorrer do estudo, que os procedimentos de avaliação são os mesmos utilizados nos capítulos anteriores. Entretanto, as propriedades derivadas para análise são diferentes das encontradas nos casos de análise dos capítulos anteriores.

As características relativas a um ambiente não estacionário e as hipóteses utilizadas neste capítulo na análise estatística, como são as mesmas usadas nos capítulos anteriores, serão apenas referenciadas, apresentando-se apenas as manipulações pertinentes à situação de operação do algoritmo neste capítulo.



## 6.2 Análise do Vetor de Erro dos Coeficientes

Retornando à Fig. 4.2, o sistema adaptativo busca estimar o sinal desejado  $d(n)$ , onde o processo  $\mathbf{w}^o(n)$  é não estacionário, isto é:

$$d(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}^o(n) + r(n) \quad (6.1)$$

A equação dinâmica do processo desconhecido  $\mathbf{w}^o(n)$  é representado por um modelo, denominado processo *Random Walk*, utilizado também no Capítulo 4, que é definida pela eq. (4.2) reescrita abaixo:

$$\mathbf{w}^o(n+1) = \mathbf{w}^o(n) + \mathbf{q}(n) \quad (6.2)$$

em que a seqüência  $\{q(n)\}$  é independente, de média zero e com matriz correlação  $\mathbf{R}_{qq}$ .

Definindo o vetor erro dos coeficientes como  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o(n)$ , e aplicando na equação de ajuste do pseudo algoritmo AP (5.1), obtém-se:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} e(n) - \mathbf{w}^o(n+1) + \mathbf{w}^o(n) \quad (6.3)$$

Aplicando (6.2) em (6.3) tem-se:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} e(n) - \mathbf{q}(n) \quad (6.4)$$

Observa-se que a expressão (6.4) é muito parecida com a encontrada em (4.6) para o algoritmo AP, mas com o acréscimo do passo de adaptação  $\alpha$ , que no caso anterior tem valor unitário. Como será visto a seguir, esta pequena diferença entre as duas equações acarreta uma grande diferença quando derivam-se as propriedades que são usadas na análise do algoritmo.

Sendo o sinal de erro  $e(n)$  dado por:

$$\begin{aligned} e(n) &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}^o(n) + r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) \\ &= -\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + r(n) \end{aligned} \quad (6.5)$$

e substituindo a expressão acima em (6.4), resulta em:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \alpha \frac{\mathbf{\Phi}(n)\mathbf{u}^T(n)}{\mathbf{\Phi}^T(n)\mathbf{\Phi}(n)}\mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\mathbf{\Phi}(n)}{\mathbf{\Phi}^T(n)\mathbf{\Phi}(n)}r(n) - \mathbf{q}(n) \quad (6.6)$$

Definindo  $e_a(n)$  como o erro instantâneo,

$$\begin{aligned} e_a(n) &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) \\ &= \mathbf{\Phi}^T(n)\mathbf{v}(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) \end{aligned} \quad (6.7)$$

a eq.(6.6) pode ser escrita como:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \alpha \frac{\mathbf{\Phi}(n)}{\mathbf{\Phi}^T(n)\mathbf{\Phi}(n)}e_a(n) + \alpha \frac{\mathbf{\Phi}(n)}{\mathbf{\Phi}^T(n)\mathbf{\Phi}(n)}r(n) - \mathbf{q}(n) \quad (6.8)$$

Pode-se observar na eq. (6.8) que o efeito da não-estacionaridade aparece com o termo  $\mathbf{q}(n)$ , que, para um processo estacionário, conforme eq. (5.5), não existe.

A seguir, mais uma vez explorou-se os procedimentos aplicados nos capítulos anteriores, onde derivam-se algumas propriedades com o objetivo de auxiliar na análise do pseudo algoritmo AP operando em meio não estacionario. Assim, pré-multiplicando-se a eq. (6.6) por  $\mathbf{u}^T(n)$  e  $\mathbf{U}^T(n)$  obtém-se:

**Propriedade.1:**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \alpha \frac{\mathbf{u}^T(n)\Phi(n)\mathbf{u}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\mathbf{u}^T(n)\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) \\
 &\quad - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{q}(n) \\
 &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) - \alpha \frac{[\Phi^T(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)]\Phi(n)\mathbf{u}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) \\
 &\quad + \alpha \frac{[\Phi^T(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{U}^T(n)]\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{q}(n)
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Como  $\mathbf{U}^T(n)\Phi(n) = 0$ , a eq.(6.9) resulta em:

$$\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = (1 - \alpha)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + \alpha r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{q}(n) \tag{6.10}$$

**Propriedade.2:**

Aplicando o mesmo procedimento para  $\mathbf{U}^T(n)$  encontra-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) - \alpha \frac{\mathbf{U}^T(n)\Phi(n)\mathbf{u}^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n) \\
 &\quad + \alpha \frac{\mathbf{U}^T(n)\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r(n) - \mathbf{U}^T(n)\mathbf{q}(n) \\
 &= \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) - \mathbf{U}^T(n)\mathbf{q}(n)
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Retornando a eq. (6.8), verifica-se a necessidade de avaliar-se o erro instantâneo  $e_a(n)$ . Assim, observa-se na eq. (6.7) que, para sua determinação, é possível utilizar propriedades derivadas em (6.10) e (6.11), e obter-se uma forma recursiva para o produto  $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n)$ .

Assim, da equação (6.11) pode-se obter as seguintes expressões:

$$\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n) \quad (6.12)$$

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n) \quad (6.14)$$

⋮

$$\mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{q}(n) \quad (6.15)$$

Aplicando  $n$  igual a  $n-1$  em (6.10), obtém-se:

$$\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n) = (1-\alpha)\mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n-1) + \alpha r(n-1) - \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n-1) \quad (6.16)$$

Substituindo agora  $n = n-2$  em (6.10), encontra-se:

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-1) = (1-\alpha)\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-2) + \alpha r(n-2) - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-2) \quad (6.17)$$

Conforme pode-se observar, a eq. (6.17) ainda não está na forma desejada para avaliação de  $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n)$ . Assim, fazendo agora  $n = n-1$  em (6.12):

$$\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n) = \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-1) - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-1) \quad (6.18)$$

Aplicando (6.17) em (6.18), resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n) &= (1-\alpha)\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-2) + \alpha r(n-2) - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-2) \\ &\quad - \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-1) \\ &= (1-\alpha)\mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-2) + \alpha r(n-2) - \mathbf{u}^T(n-2)[\mathbf{q}(n-1) + \mathbf{q}(n-2)] \end{aligned} \quad (6.19)$$

Procedendo da mesma forma para  $k$  linhas e obtendo a equação na forma desejada,

chega-se à seguinte expressão:

$$\mathbf{u}^T(n-k)\mathbf{v}(n) = (1-\alpha)\mathbf{u}^T(n-k)\mathbf{v}(n-k) + \alpha r(n-k) - \mathbf{u}^T(n-k) \sum_{l=1}^k \mathbf{q}(n-l) \quad (6.20)$$

Para colocar a equação (6.20) de uma forma mais fácil de ser manipulada, define-se  $\mathbf{Q}(n)$  como uma matriz formada por vetores passados de  $\mathbf{q}(n-i)$ , ou seja:

$$\mathbf{Q}(n) = [ \mathbf{q}(n-1) \ \mathbf{q}(n-2) \ \dots \ \mathbf{q}(n-P) ] \quad (6.21)$$

e

$$\mathbf{q}(n-i) = [ q_1(n-i) \ q_2(n-i) \ \dots \ q_N(n-i) ]^T \quad (6.22)$$

Observando que:

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{Q}(n) =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n-1) & \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n-2) & \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n-3) & \dots & \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n-P) \\ \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-1) & \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-2) & \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-3) & \dots & \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{q}(n-P) \\ \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n-1) & \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n-2) & \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n-3) & \dots & \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{q}(n-P) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{q}(n-1) & \dots & \dots & \dots & \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{q}(n-P) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

O terceiro termo da equação (6.20) corresponde a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{q}(n-1) \\ \mathbf{u}^T(n-2) \sum_{l=1}^2 \mathbf{q}(n-l) \\ \mathbf{u}^T(n-3) \sum_{l=1}^3 \mathbf{q}(n-l) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^T(n-P) \sum_{l=1}^P \mathbf{q}(n-l) \end{bmatrix} = \text{diag}\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{Q}(n)\mathbf{L}\} \quad (6.24)$$

onde  $\mathbf{L}$  é uma matriz superior ( $P \times P$ ):

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Observando agora que o segundo termo da eq. (6.20) pode ser definido como o traço da matriz:

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{V}(n) =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n-1) & \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n-2) & \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n-3) & \dots & \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{v}(n-P) \\ \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-1) & \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-2) & \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-3) & \dots & \mathbf{u}^T(n-2)\mathbf{v}(n-P) \\ \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-1) & \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-2) & \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-3) & \dots & \mathbf{u}^T(n-3)\mathbf{v}(n-P) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{v}(n-1) & \dots & \dots & \dots & \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{v}(n-P) \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

em que  $\mathbf{V}(n)$  é uma matriz ( $N \times P$ ) formada por vetores passados de  $\mathbf{v}(n)$ ,

$$\mathbf{V}(n) = [\mathbf{v}(n-1) \ \mathbf{v}(n-2) \ \dots \ \mathbf{v}(n-P)], \quad (6.27)$$

O produto  $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n)$  pode ser finalmente estabelecido, definindo  $\mathbf{g}(n) = \text{diag}\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{Q}(n)\mathbf{L}\}$ , e aplicando o traço da expressão (6.26), conforme apresentado na eq. (5.27), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) &= (1 - \alpha)\text{diag}[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{V}(n)] + \alpha\mathbf{r}(n-1) - \mathbf{g}(n) \\ &= (1 - \alpha)\mathbf{e}_a(n-1) + \alpha\mathbf{r}(n-1) - \mathbf{g}(n) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Retornando para a eq.(6.7), obtém-se:

$$\begin{aligned} e_a(n) &= \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) \\ &= \Phi^T(n)\mathbf{v}(n) + \hat{\mathbf{a}}^T(n)[(1 - \alpha)\mathbf{e}_a(n - 1) + \alpha\mathbf{r}(n - 1) - \mathbf{g}(n)] \end{aligned} \quad (6.29)$$

Aplicando o critério de aproximação desenvolvido na Seção 5.2, eqs. (5.28)-(5.32), encontra-se a seguinte expressão para o erro instantâneo:

$$e_a(n) = \frac{1}{1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^P a_i} \left( \Phi^T(n)\mathbf{v}(n) + \alpha\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{r}(n - 1) - \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{g}(n) \right) \quad (6.30)$$

Retornando à eq.(6.8), e aplicando nesta a eq.(6.30), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n + 1) &= \mathbf{v}(n) - \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{v}(n) - \frac{\alpha^2}{\gamma} \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{r}(n - 1) \\ &\quad + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{g}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} r(n) - \mathbf{q}(n) \end{aligned} \quad (6.31)$$

onde  $\gamma = 1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^P a_i$ .

Assumindo  $\hat{\mathbf{a}}(n) \approx \mathbf{a}$ , e que o erro filtrado  $r_a(n)$  é definido por:

$$r_a(n) = r(n) - \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{i=1}^P a_i r(n - i), \quad (6.32)$$

a equação recursiva para o vetor de erro dos coeficientes  $\mathbf{v}(n + 1)$ , para o pseudo algoritmo AP operando em ambiente não estacionário, pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n + 1) &= \mathbf{v}(n) - \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} r_a(n) \\ &\quad + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) - \mathbf{q}(n) \end{aligned} \quad (6.33)$$

### 6.3 Análise do Comportamento Médio dos Coeficientes

Para o cálculo do valor médio dos coeficientes, toma-se o valor esperado da eq. (6.33). Assim,

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = E\{\mathbf{v}(n)\} - \frac{\alpha}{\gamma} E\left\{\frac{\Phi(n)\Phi^T(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{v}(n)\right\} + \alpha E\left\{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}r_a(n)\right\} + \frac{\alpha}{\gamma} E\left\{\frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n)\Phi(n)}\mathbf{a}^T\mathbf{g}(n)\right\} - E\{\mathbf{q}(n)\}. \quad (6.34)$$

Os três primeiros valores esperados em (6.34), são os mesmos encontrados na equação (3.27) acrescentados da constante  $\gamma$ , e do passo de adaptação  $\alpha$ . Dessa forma, os resultados desses valores esperados são apresentados na Seção 3.6.

A quarta e quinta parcela da eq. (6.34) também já foram avaliadas na Seção 4.4, onde trata-se da análise do algoritmo de projeções afins aplicado em um ambiente não estacionário. Dessa forma, resgatando os resultados obtidos e substituindo em (6.34), chega-se à equação para o comportamento médio do vetor de erros dos coeficientes do pseudo algoritmo AP quando submetido a operar em ambiente não estacionário:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(n+1)\} &= \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{\gamma\sigma_\phi^2(G-2)}\mathbf{R}_{\phi\phi}\right)E\{\mathbf{v}(n)\} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma(G-2)}\right)E\{\mathbf{v}(n)\} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma(G-2)}\right)^n \cdot \mathbf{v}_o \end{aligned} \quad (6.35)$$

em que  $\mathbf{v}_o$  é o valor de  $\mathbf{v}(n)$  no instante inicial, e a matriz  $\mathbf{R}_{\phi\phi} = \sigma_\phi^2\mathbf{I}$ .

A seguir, substituindo-se  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o$  em (6.35), obtém-se o modelo do



comportamento médio do vetor de coeficientes:

$$E\{\mathbf{w}(n+1)\} = \left( I - \frac{\alpha}{\gamma \sigma_\phi^2 (G-2)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \right) E\{\mathbf{w}(n)\} + \frac{\alpha}{\gamma \sigma_\phi^2 (G-2)} \mathbf{R}_{\phi\phi} \mathbf{w}^o \quad (6.36)$$

Observa-se na equação (6.36), que a não-estacionaridade do processo não afeta o comportamento médio dos coeficientes, tornando o modelo idêntico ao encontrado para uma operação do pseudo algoritmo AP em meio estacionário. Dessa forma, o comportamento médio dos coeficientes pode ser observado nas Figs. 5.3 e 5.4

## 6.4 Erro Médio Quadrático

Conforme já apresentado no Capítulo 5 Seção 5.5, o erro médio quadrático (EMQ) é definido pela expressão:

$$E\{e^2(n)\} = \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left( \mathbf{a}^T \mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr}[E\{[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\}] \right) \right) \sigma_r^2 + \text{tr}[\mathbf{R}_{\phi\phi} \mathbf{K}(n)] \quad (6.37)$$

onde  $\mathbf{K}(n) = E\{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\}$  é a matriz de correlação do vetor erro dos coeficientes.

Sendo o primeiro termo em (6.37) função da estatística do sinal de entrada, faz-se necessário apenas a avaliação da matriz de correlação do vetor de erro dos coeficientes, ou seja, calcular os momentos de segunda ordem  $\mathbf{K}(n)$ . Dessa forma, pós-multiplicando (6.33) por sua transposta e tomando o valor esperado, chega-se à seguinte expressão

estatística para  $\mathbf{K}(n)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{K}(n) - \underbrace{\frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_1 + \underbrace{\alpha E \left\{ \mathbf{v}(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_2 \\
 &+ \underbrace{\frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \mathbf{v}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_3 + \underbrace{\frac{\alpha^2}{\gamma^2} E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_4 \\
 &- \underbrace{\frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \right\}}_5 + \underbrace{\frac{\alpha^2}{\gamma^2} E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_6 \\
 &- \underbrace{\frac{\alpha^2}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_7 + \underbrace{\alpha E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a(n) \mathbf{v}^T(n) \right\}}_8 \\
 &+ \underbrace{\frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) \mathbf{q}^T(n) \right\}}_9 - \underbrace{\frac{\alpha^2}{\gamma^2} E \left\{ \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{v}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_{10} \\
 &- \underbrace{\frac{\alpha^2}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_{11} - \underbrace{E \{ \mathbf{q}(n) \mathbf{v}^T(n) \}}_{12} \\
 &+ \underbrace{\alpha^2 E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_{13} - \underbrace{\alpha E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a(n) \mathbf{q}^T(n) \right\}}_{14} \\
 &+ \underbrace{\frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{v}^T(n) \right\}}_{15} - \underbrace{\frac{\alpha^2}{\gamma^2} E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_{16} \\
 &+ \underbrace{\frac{\alpha^2}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_{17} + \underbrace{E \{ \mathbf{q}(n) \mathbf{q}^T(n) \}}_{18} \\
 &- \underbrace{\frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \mathbf{a}^T \mathbf{g}(n) \mathbf{q}^T(n) \right\}}_{19} + \underbrace{\frac{\alpha^2}{\gamma} E \left\{ \frac{\Phi(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} r_a(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_{20} \\
 &+ \underbrace{\frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \mathbf{q}(n) \mathbf{v}^T(n) \frac{\Phi(n) \Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_{21} - \underbrace{\alpha E \left\{ \mathbf{q}(n) r_a(n) \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_{22} \\
 &- \underbrace{\frac{\alpha}{\gamma} E \left\{ \mathbf{q}(n) \mathbf{g}^T(n) \mathbf{a} \frac{\Phi^T(n)}{\Phi^T(n) \Phi(n)} \right\}}_{23} - \underbrace{E \{ \mathbf{v}(n) \mathbf{q}^T(n) \}}_{24}
 \end{aligned}$$

Na expressão (6.38), observa-se que todas as parcelas já foram avaliadas em capítulos anteriores, já que a diferença básica entre o pseudo algoritmo AP e o algoritmo AP é o surgimento da constante  $\alpha$  e da constante definida por  $\gamma$ , resultando numa expressão modificada do vetor de erro dos coeficientes do pseudo algoritmo AP em relação ao algoritmo AP. Esta diferença também se estende quando é analisado o comportamento de ambos algoritmos operando em ambiente não estacionário. Assim, para determinação dos momentos de segunda ordem, é necessário apenas utilizar os resultados obtidos anteriormente e substituí-los aqui.

As parcelas 1,2,5,6,7,8,11 e 13, têm suas avaliações apresentadas na Seção 3.8.1, e o restante das parcelas são calculadas na Seção 4.5.1. Substituindo em (6.38) encontra-se a seguinte expressão para a equação dos momentos de segunda ordem  $\mathbf{K}(n)$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) & - \frac{\alpha}{\gamma} \frac{1}{(G-2)\sigma_\phi^2} [\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\phi\phi} + \mathbf{R}_{\phi\phi}\mathbf{K}(n)] \\
 & + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \frac{1}{(G^2+2G)\sigma_\phi^2} \left[ \frac{G}{N} \text{tr}[\mathbf{K}(n)] + \left(1 - \frac{G}{N}\right) E\{\mathbf{v}^T(n)\}E\{\mathbf{v}(n)\} \right] \mathbf{R}_{\phi\phi} \\
 & + \frac{\alpha^2\sigma_r^2}{(G-2)(G-4)\sigma_\phi^4} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left( \mathbf{a}^T\mathbf{a} + \sigma_z^2 \text{tr} \left[ E\{[U^T(n)U(n)]^{-1}\} \right] \right) \right] \mathbf{R}_{\phi\phi} \\
 & + \sigma_q^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \frac{\mathbf{a}^T\Psi(n)\mathbf{a}}{\sigma_\phi^4(G-2)(G-4)} \right) \mathbf{R}_{\phi\phi}
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

Lembrando que a matriz  $\Psi(n) = E\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{A}\mathbf{U}(n)\}$  e  $\gamma = 1 - (1 - \alpha) \sum_{i=1}^P a_i$ .

Nesta expressão pode-se verificar que, dependendo de  $\alpha$  e  $\gamma$ , a expressão recai em um dos modelos encontrados nos capítulos anteriores, tanto para ambiente estacionário, quanto não estacionário, possibilitando assim, uma expressão completa para todos os casos analisados neste trabalho.

## 6.5 Resultados de Simulações

O modelo analítico composto das equações (6.35), (6.37) e (6.39) foi testado em várias situações diferentes. Nesta seção, apresenta-se uma amostra destes resultados para ilustrar a acurácia do modelo. Estes resultados são representativos dos resultados obtidos em todos os casos testados.

Em todos os exemplos apresentados, a variância  $\sigma_z^2$  é ajustada de tal modo que resulte em  $\sigma_\phi^2 = 1$  e  $\sigma_r^2 = 10^{-6}$ . A relação sinal-ruído é dada por  $SNR = 10 \log_{10}(\sigma_\phi^2/\sigma_r^2)$  dB. Em todos os exemplos, o termo  $\sigma_z^2 \text{tr}[E\{\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)\}^{-1}]$  é desprezado, e a matriz  $\Psi(n)$  é numericamente estimada. A entrada é um processo autoregressivo de primeira ordem AR(1) Gaussiano definido pela expressão  $u(n) = -a_1 u(n-1) + z(n)$ , com  $z(n)$  sendo uma seqüência de ruído branco e Gaussiano de média zero.

Para definição das variações estatísticas de um modelo dinâmico linear de um meio não estacionário, utiliza-se a expressão para o grau de não-estacionaridade [19]:

$$S = \frac{\sqrt{N\sigma_q^2\sigma_u^2}}{\sigma_r} \quad (6.40)$$

conforme apresentada na Seção 4.6.

### 6.5.1 Exemplo 1:

Nas Figuras 6.1–6.3 apresentam-se os gráficos do comportamento do erro médio quadrático, onde o número de coeficientes para o filtro adaptativo é de  $N = 64$ , e para o número de vetores passados  $\mathbf{u}(n-i)$  é de  $P = 2$ . Mantendo  $N$  e  $P$  fixos, busca-se observar o comportamento do modelo, para diferentes graus de não-estacionaridade. A taxa de adaptação adotada é  $\alpha = 0,8$  para estas três figuras, e os valores do grau de não-estacionaridade  $S$  assumem os seguintes valores para os respectivos gráficos

apresentados:  $S = 1, 2$  e  $10$ . Observa-se nas figuras uma excelente combinação entre simulação e modelo proposto, tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Com relação ao grau de não-estacionaridade, os gráficos mostram claramente a influência do meio no comportamento do sistema adaptativo em regime permanente, onde percebe-se um aumento considerável do erro nesta fase de operação. Entretanto, em casos práticos, os valores de  $S$  não ultrapassam a 2 ( $S < 2$ ). De qualquer forma, o modelo proposto funciona satisfatoriamente nos casos extremos de não-estacionaridade.

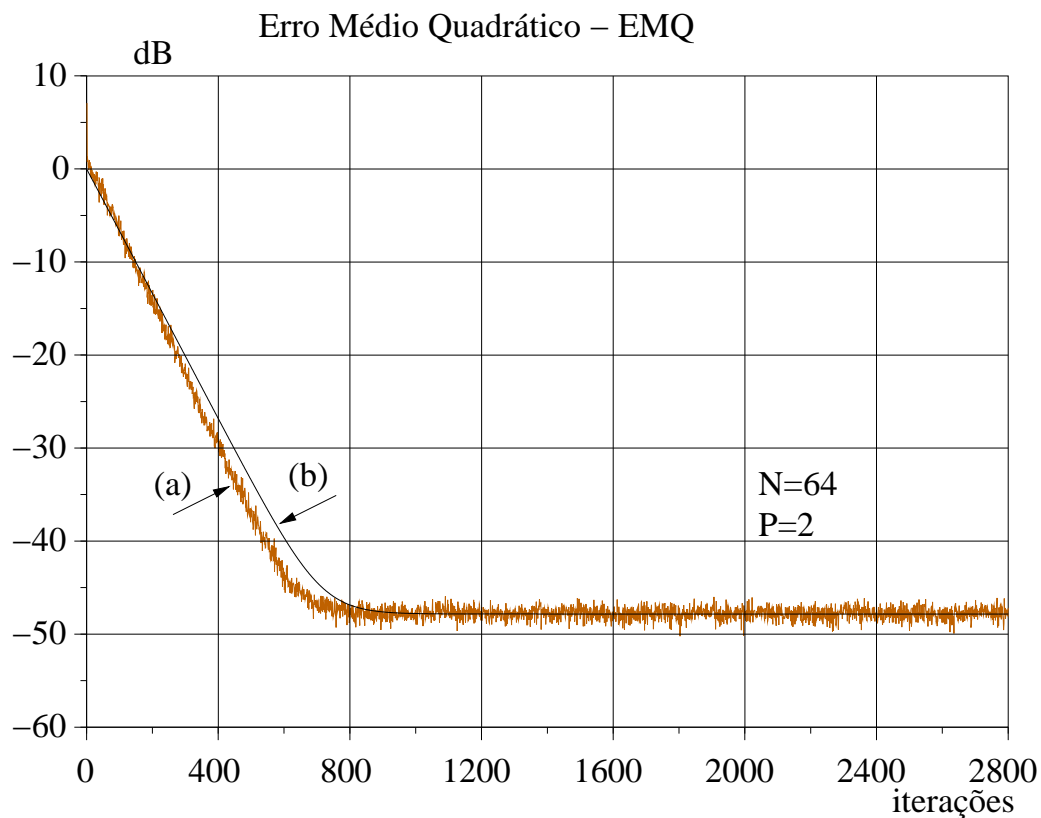


Figura 6.1: *EMQ – Entrada AR(1) Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo AP(3),  $N = 64$ ,  $S = 1$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\sigma_q^2 = 2,876 \times 10^{-9}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.*

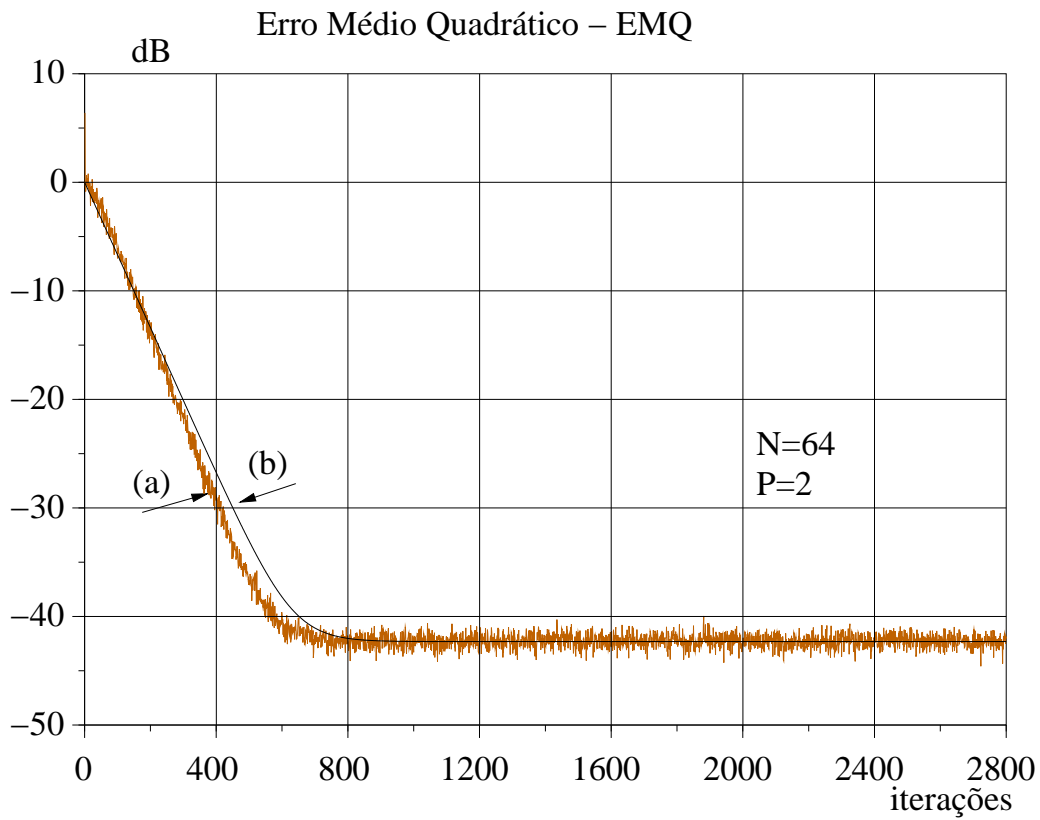


Figura 6.2: *EMQ* - Entrada *AR(1)* Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo *AP(3)*,  $N = 64$ ,  $S = 2$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\sigma_q^2 = 1,150E \times 10^{-8}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.

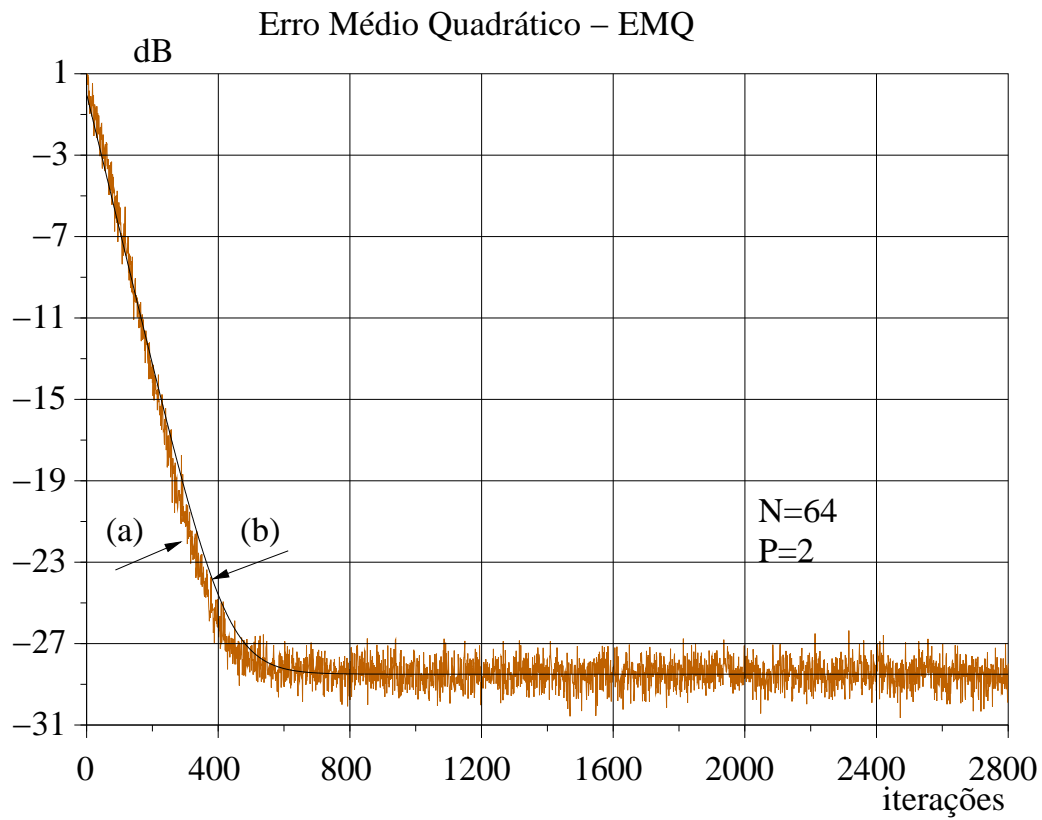


Figura 6.3: *EMQ* - Entrada *AR(1)* Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo *AP(3)*,  $N = 64$ ,  $S = 10$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\sigma_q^2 = 2,876 \times 10^{-7}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.

### 6.5.2 Exemplo 2:

Nas Figuras 6.4 e 6.5 são mostrados os gráficos do comportamento do erro médio quadrático para  $N = 128$  coeficientes e  $P = 4$  vetores passados  $\mathbf{u}(n - i)$ , mantendo o mesmo grau de não-estacionaridade  $S = 2$ , mas alterando o passo de adaptação, isto é,  $\alpha = 0,4$  e  $\alpha = 0,8$  respectivamente. Como pode ser observado, a comparação entre as simulações e o modelo apresentam uma boa combinação, principalmente em regime permanente. Quanto ao comportamento do algoritmo operando em meio não estacionário, a diminuição do passo de adaptação de  $\alpha = 0,8$  para  $0,4$ , provoca um aumento do erro em regime permanente, como pode-se observar nas figuras.

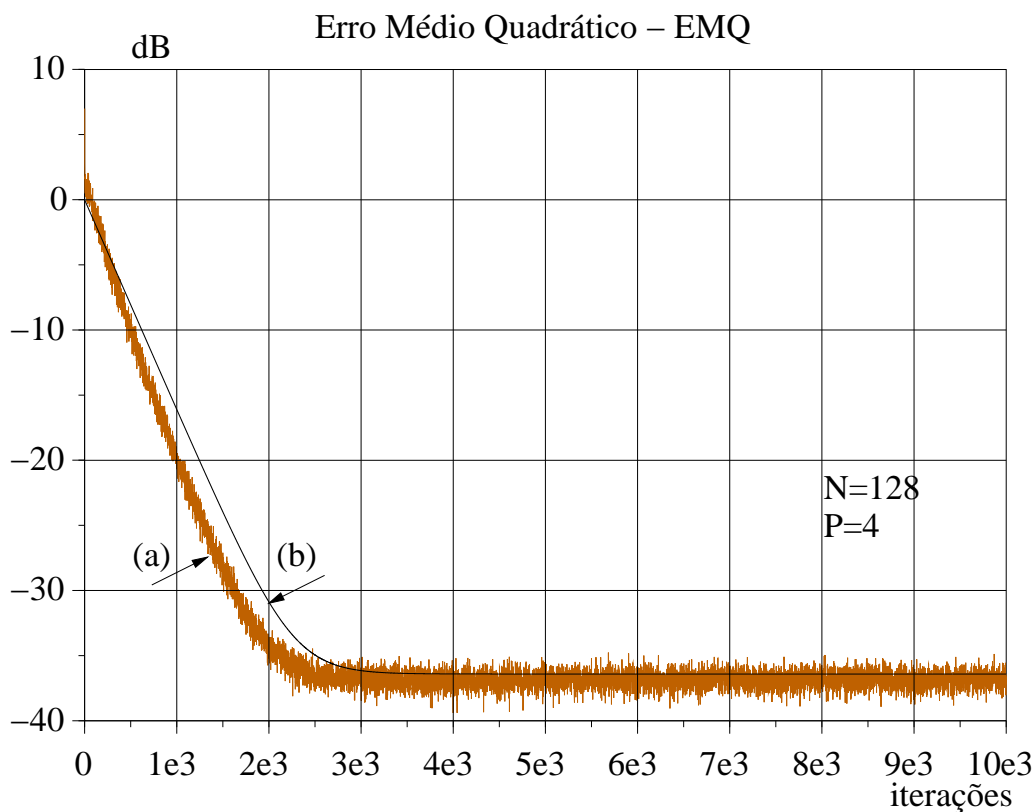


Figura 6.4: *EMQ* – Entrada *AR(1)* Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo *AP(5)*,  $N = 128$ ,  $S = 2$ ,  $\alpha = 0,4$ ,  $\sigma_q^2 = 5,752 \times 10^{-9}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.



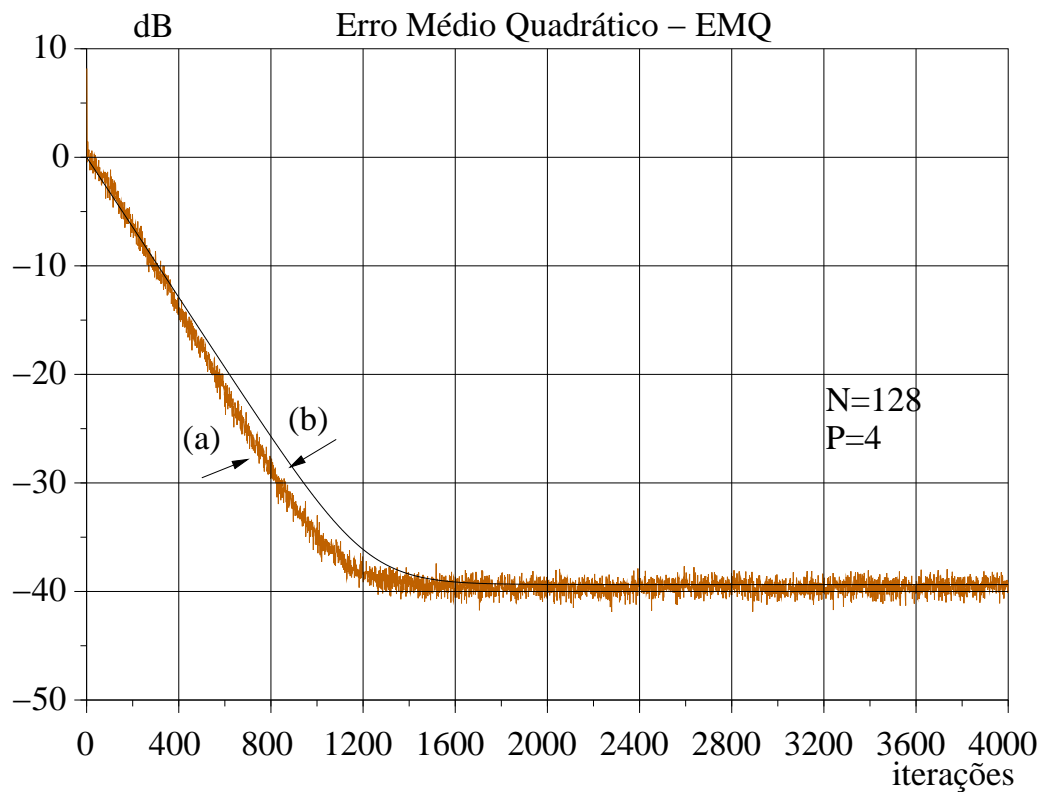


Figura 6.5: *EMQ* – Entrada *AR(1)* Gaussiana,  $a_1 = 0,9$ , algoritmo *AP(5)*,  $N = 128$ ,  $S = 2$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\sigma_q^2 = 5,752 \times 10^{-9}$ ,  $\sigma_\phi^2 = 1$ ,  $\sigma_u^2 = 5,43$ . (a) simulações Monte Carlo (100 realizações); (b) Modelo proposto.

## 6.6 Conclusão

Este capítulo apresentou uma análise estatística do pseudo algoritmo AP quando submetido a operar em ambiente não estacionário. Equações recursivas determinísticas foram derivadas para o comportamento médio dos elementos do vetor de erro dos coeficientes e para o erro médio quadrático (EMQ). Exemplos mostram que o modelo descreve com bastante precisão o comportamento do EMQ do algoritmo, tanto na fase transitória, quanto em regime permanente. Os modelos foram desenvolvidos considerando um sinal de entrada autoregressivo.

# Capítulo 7

## Conclusões

Neste trabalho foram desenvolvidas as análises estatísticas dos algoritmos Projeções Afins e do pseudo algoritmo de Projeções Afins, vislumbrando suas aplicações no cancelamento de eco acústico. Os dois algoritmos realizam o processo de otimização em funções custo baseadas no erro médio quadrático. Estes algoritmos apresentam melhor desempenho que o algoritmo LMS e o NLMS. Entretanto, apresentam significativo aumento de complexidade computacional.

Foi desenvolvido um estudo detalhado das propriedades vetoriais e estatísticas das variáveis envolvidas no comportamento do algoritmo de Projeções Afins. O entendimento destas propriedades permitiu que hipóteses fossem assumidas, possibilitando que manipulações algébricas fossem aplicadas, objetivando facilitar os cálculos envolvidos nas derivações de equações decorrentes dos valores esperados.

Inicialmente foi desenvolvido o estudo do comportamento estatístico do algoritmo de Projeções Afins, que apresenta a característica de utilizar o passo de adaptação unitário.

Modelos determinísticos foram derivados representando o comportamento do mo-

mento de primeira-ordem dos coeficientes do filtro adaptativo, assim como, do erro médio quadrático. Em toda análise apresentada neste trabalho assumiu-se que o sinal de entrada é um processo autoregressivo (AR). O motivo para escolha deste tipo de processo devesse ao fato deste representar de forma satisfatória a maioria dos processos existentes.

O estudo inicial assume que o algoritmo AP opera em um ambiente estacionário, ou seja, os elementos do vetor que representa o processo a ser identificado são fixos.

Para validação dos modelos desenvolvidos, simulações foram feitas com o objetivo de comparar o comportamento do modelo derivado com algoritmo AP e com modelos determinísticos encontrados na literatura. Observou-se que o modelo apresentou excelentes resultados, confirmando que o modelo representa o comportamento do algoritmo AP em operação em um meio estacionário.

A seguir, desenvolveu-se a análise do algoritmo AP considerando sua operação em ambiente não estacionário. O objetivo desta análise deve-se ao fato que a maioria dos processos a serem identificados, terem pequenas variações na sua resposta impulsiva. Embora na prática a aplicação de algoritmos adaptativos para operar neste tipo de ambiente só sejam úteis para baixos graus de não-estacionaridade, o modelo permite que a aplicação de graus elevados de não-estacionaridade possam ser observados no desempenho do algoritmo.

Assim como para o algoritmo AP operando em ambiente estacionário, simulações foram feitas buscando avaliar o modelo derivado para meio não estacionário. Resultados excelentes foram obtidos validando o modelo derivado.

Tanto para a operação do algoritmo AP em meio estacionário quanto não esta-

cionário, expressões para o erro médio quadrático em regime permanente foram desenvolvidas.

A seguir, desenvolveu-se o estudo do algoritmo AP com a taxa de adaptação menor que a unidade. Esta modificação resulta em um vetor erro, ao invés de um valor de erro escalar. Dessa forma, o nome do algoritmo muda para Pseudo algoritmo AP.

Expressões para a operação do pseudo algoritmo AP foram desenvolvidas para meio estacionário e não estacionário. Para validação dos modelos, simulações comparativas são apresentadas no final de cada capítulo mostrando uma excelente combinação com o comportamento do algoritmo. Também foram derivados modelos para o comportamento do algoritmo em regime permanente nos dois ambientes.

Assim, podemos concluir das observações dos resultados obtidos que para o algoritmo AP, o novo modelo melhora resultados prévios existentes na literatura. Com relação ao pseudo algoritmo AP, os resultados das simulações versus modelo mostram excelente concordância, tanto em regime transitório quanto permanente, embora na literatura não tenha sido apresentado nenhum modelo com o qual se possa comparar esses resultados.

Algumas propostas para continuação do trabalho podem ser sugeridas, entre elas:

- **Estudo da classe de algoritmos AP em estruturas em Sub-Bandas:** o estudo do algoritmo AP e sua extensão em estruturas em sub-bandas aplicando transformadas *wavelets*.
- **Implementação dos algoritmos em DSPs:** a implementação prática em processadores de sinais digitais, para aplicação no cancelamento de eco acústico, buscando observar o desempenho desta classe de algoritmos operando em tempo

real.

# Apêndice A

## Símbolos e Abreviaturas

- AR - autoregressive.
- $d(n)$  - sinal desejado.
- $e(n)$  - sinal de erro.
- EMQ - erro médio quadrático.
- ERLE - *echo return loss enhancement*.
- FIR - finite impulse response.
- IIR - infinite impulse response.
- $K(n)$  - matriz de correlação do vetor erro dos coeficientes.
- $N$  - número de coeficientes.
- $n$  - tempo discreto ou número da iteração no algoritmo adaptativo.
- $\mathbf{R}_{\phi\phi}$  - matriz de correlação do sinal de direção do algoritmo.
- $S$  - grau de não-estacionaridade do processo
- $SNR$  - relação sinal/ruído.
- $\mathbf{v}(n)$  - vetor erro dos coeficientes.
- $\mathbf{w}(n)$  - vetor de coeficientes do algoritmo adaptativo.
- $\mathbf{w}^o$  - resposta ao impulso do sistema desconhecido e estacionário.
- $\mathbf{w}^o(n)$  - resposta ao impulso do sistema desconhecido e não estacionário.

- $\mathbf{u}(n)$  - vetor de amostras do sinal de entrada.
- $u(n)$  - sinal de entrada ou sinal de referência.
- $\mathbf{U}(n)$  - matriz formada por vetores passados de  $\mathbf{u}(n)$ .
- $\mathbf{P}_{\perp}(n)$  - matriz de projeção no subespaço ortogonal complementar
- $\mathbf{P}_U(n)$  - matriz de projeção no subespaço formado por vetores passados de  $\mathbf{u}(n)$
- $\Phi(n)$  - vetor de direção do algoritmo
- $y(n)$  - sinal da saída do filtro adaptativo.
- $r(n)$  - ruído de medição.
- $q(n)$  - sinal de entrada do processo não estacionário.

**Símbolos especiais:**

- $\alpha$  - constante de adaptação.
- $\sigma_u^2$  - variância do sinal de entrada.
- $\sigma_r^2$  - variância do ruído aditivo.
- $\sigma_{\phi}^2$  - variância do sinal de direção do algoritmo.
- $G$  - grau de liberdade.
- $\mathcal{M}$  - desajuste.



# Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, S. J. M.; BERMUDEZ, J. C. M.; BERSHAD, N. J.; 2003. Statistical Analysis of a Pseudo Affine Projection Adaptive Algorithm. *XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, SBT'03*, pp.1105-1108, pp.733-738, Outubro - Rio de Janeiro - Brazil.
- [2] ALMEIDA, S. J. M.; BERMUDEZ, J. C. M., 2002. A New Stochastic Analysis of the Affine Projection Algorithm for Gaussian Inputs and Large Number of Coefficients, *International Telecommunications Symposium-ITS2002*, Setembro - Natal, Brazil.
- [3] BAZARAA, M.S.; SHERALL, H.D.; SHETTY, C.M.; 1993. *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*, 2. ed. Wiley-Interscience.
- [4] BERSHAD, N.J.; LINEBARGER, D; McLAUGHLIN, S.; 2001. A Stochastic Analysis of the Affine Projection Algorithm for Gaussian Autoregressive Inputs, *Acoustic, Speech, and Signal Processings- ICASSP'01*, vol.6, pp.3897-3840, Maio.
- [5] BERSHAD, N.J.; 1986. Analysis of the Normalized LMS Algorithm with Gaussian Inputs. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech, and Processing*, v. ASSP-34, n.4 (Agosto), pp.793-806.
- [6] BREINING, C.; SCHERTLER, T.; 2000. Delay-Free Low-Cost Step-Gain Estimation for Adaptive Filters in Acoustic Echo Cancellation. *Signal Processing* vol.80 pp.1721-1731.
- [7] BREINING, C. et al.; 1999. Acoustic Echo Control. *Signal Processing Magazine*, vol.16, no.4, pp.42-69.
- [8] BREINING, C.; 1997. Control of a Hands-Free Telephone Set. *Signal Processing* vol.61, no.2, pp.131-143.
- [9] COSTA, J.P.; LAGRANGE, A.; ARLIAUD, A.; 2003. Acoustic Echo Cancellation using Nonlinear Cascade Filters. *In proc. ICASSP 2003*, vol. 5, pp.389-392.
- [10] COSTA, M.H.; BERMUDEZ, J.C.M.; 2002. An Improved Model for the Normalized LMS Algorithm with Gaussian Input and Larger Number of Coefficients. *In Proc. ICASSP 2002*, Orlando, USA.
- [11] EWEDA, E.; 1994. Comparison of RLS, LMS, and Sign Algorithms for Tracking Randomly Time-Varying Channels. *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no.11 (Novembro), pp. 2937-2944.

- [12] FARHANG-BOROUJENY, B.;1998. *Adaptive Filters - Theory and Applications*, 1. ed. John Wiley & Sons.
- [13] FÜLLER, C.R.; ELLIOT, S.J.; NELSON, P.A.; 1996. *Active Control of Vibration*, San Diego, CA: Academic Press.
- [14] GAY, S.L.; BENESTY, J.; 2000. *Acoustic Signal Processing for Telecommunication*, 1. ed. Kluwer Academic Press.
- [15] GHOSE, K.; REDDY, V.U.; 2000. A Double-Talk Detector for Acoustic Echo Cancellation. *Signal Processing* vol.80, pp.1459-1467.
- [16] HAYKIN, S.; 2002. *Adaptive Filter Theory*, 4. ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [17] HEITKÄMPER, P.; 1997. An Adaptation Control for Acoustic Echo Cancellers. *IEEE Signal Processing Letters*, vol.4, no.6 (Junho), pp.170-172.
- [18] LIAVAS, A.P.; REGALIA, P.A.; 1998. Acoustic Echo Cancellation: Do IIR Models offer Better Modeling Capabilities than their FIR Counterparts?. *Proc. IEEE Transactions on signal processing*, v.46, no.9 (Setembro), pp.2499-2504.
- [19] MARCOS, S.; MACHI, O.; 1987. Applications to an Asynchronous Echo Canceller. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-35, (Novembro), pp.1570-1578.
- [20] MADER, A. et al.; 2000. Step-Size Control for Acoustic Echo Cancellation Filters - An Overview. *Signal Processing* vol.80, pp.1697-1719.
- [21] MANOLAKIS, D.G.; INGLE, V.K.; KOGON, S.M.; 2000. *Statistic and Adaptive Signal Processing - Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing*. 1. ed. McGraw-Hill.
- [22] MAZO, J.E.; 1979. On the Independence Theory of Equalizer Convergence. *The Bell-System Technical Journal*, v.58, no.5 (Maio-Junho), pp.963-993.
- [23] MORGAN, D.R.; KUO, S.M.; 1996. *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, first edition, NY:John Wiley and Sons.
- [24] NIKIAS, C.L.; PETROPULU, A.P.; 1993. *Higher-Order Spectra Analysis-A Non-linear Signal Processing Framework*. Signal Processing Series - Prentice-Hall.
- [25] NOBLE, B.; DANIEL, J.W.; 1977. *Álgebra Linear Aplicada*, 2. ed. Prentice/Hall do Brasil.
- [26] OZEKI, K.; UMEDA, T.; 1984. An Adaptive Filtering Algorithm using Orthogonal Projection to an Affine Subspace and Its Properties. *Eletronics and Communications in Japan*,vol.67-A, no.5, pp. 19-27.
- [27] PAPOULIS, A.; 1991. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. 3. ed. - McGraw-Hill.

- [28] RUPP, M.; 1998. A Family of Filter Algorithms with Decorrelating Properties. *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.46 (Março), no.3, pp.771-775.
- [29] SAMSON, C.; REDDY, V.U.; 1983. Fixed Point Error Analysis of the Normalized Ladder Algorithms. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v.31, n.5 (Outubro), pp.1177-1191.
- [30] SANKARAN, S. G.; BEEEX, A. A.; 2002. Tracking Analysis Results for NLMS and APA. *In proc. ICASSP 2002*, vol. 2, pp.1105-1108, 2002.
- [31] SANKARAN, S.G.; BEEEX, A.A.; 2000. Convergence Behavior of Affine Projection Algorithms. *IEEE Transactions on signal processing*, v.48 n.4 (Abril), pp.1086-1096.
- [32] SAYED, A. H.; 2003. *Fundamentals of Adaptive Filtering*, 1. ed. - WILEY INTERSCIENCE.
- [33] SCHMIDT, G.U.; 2000. Acoustic Echo and Noise Control Low-Cost Processors. *DSP world spring design conference*, pp.1-36 (Abril), San Jose, CA.
- [34] SHIN, H. C.; SAYED, A. H.; 2003. Transient Behavior of Affine Projection Algorithms. *In Proc. ICASSP 2003*, pp. VI-353-356, Hong Kong, China.
- [35] SLOCK, D.T.M.; 1993. On the Convergence Behavior of the LMS and Normalized LMS Algorithms. *IEEE Trans. on Signal Processing*, v.41, n.9, (Setembro) pp.2811-2825.
- [36] SOLO, V.; KONG, X.; 1995 *Adaptive Signal Processing Algorithms*, 1. ed. Prentice Hall.
- [37] STENGER, A.; KELLERMAN, W.; 2000. Adaptation of a Memoryless Preprocessor for Nonlinear Acoustic Echo Cancelling. *Signal Processing* vol.80, pp.1747-1760.
- [38] TARRAB, M.; FEUER, A.; 1988. Convergence and Performance Analysis of the Normalized LMS Algorithm with Uncorrelated Gaussian Data. *IEEE Trans. on Information Theory*, v. 34, no.4 (Julho), pp. 680-691.
- [39] WIDROW, B.; LEHR, M. R.; 1990. 30 Years of Adaptive Neural Networks: Perceptron, Madaline, and Backpropagation. *Proceeding of the IEEE*, vol. 78 (Setembro), pp. 1415-1442.
- [40] WIDROW, B.; STEARNS, S.D.; 1985. *Adaptive Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [41] WIDROW, B.; WALACH, E.; 1984. On the Statistical Efficiency of the LMS Algorithm with Nonstationary Inputs. *IEEE Trans. on Information Theory*, v. IT-30, No.2 (Agosto), pp.211-221.
- [42] WIDROW, B. et al., 1976. Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter. *Proc. IEEE*, v.64 (Agosto), pp.1151-1162.

- 
- [43] WIDROW, B.; 1970. Adaptive filters. in R. E. Kalman and N. Declaris, eds. *Aspects of Network and System Theory*, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [44] YASUKAWA. H.; SHIMADA. S.; 1993. An Acoustic Echo Canceller Using Subband Sampling and Decorrelation Methods. *IEEE Trans. on Signal Processing*, v.41, no.2 (Fevereiro), pp. 926-930.
- [45] YIP, P.C-W.; ETTER, D.M.; 1990. An Adaptive Multiple Echo Canceller for Slowly Time-Varying Echo Paths. *IEEE Transactions on Communications*, vol.38, no.10 (Outubro), pp.1693-1698.