

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS DE
MATERIAL POLIMÉRICO**

Dissertação submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para a obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

CLEBER PAGLIOSA

Florianópolis, Julho de 2004.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS DE
MATERIAL POLIMÉRICO**

CLEBER PAGLIOSA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA

sendo aprovada em sua forma final.

**PAULO DE TARSO R. MENDOÇA, Ph.D.
Orientador**

**JOSÉ ANTONIO BELLINI DA CUNHA NETO, Dr.
Coordenador do Curso**

BANCA EXAMINADORA

**EDISON DA ROSA, Dr.Eng.
Presidente**

CARLOS HENRIQUE AHRENS, Dr.Ing.

GEAN V. SALMORIA, Dr.Ing.

Agradecimentos

À Capes pelo apoio financeiro;

ao professor Paulo de Tarso R. Mendonça pela orientação deste trabalho;

ao professor Edison da Rosa pela contribuição à realização deste trabalho e aos demais professores do Grante pela contribuição à minha formação;

aos colegas pela convivência e colaboração;

aos amigos pela compreensão;

e especialmente à minha família pelo apoio, incentivo e paciência em todos os momentos.

Conteúdo

Lista de símbolos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Descrição dos capítulos	2
2 Revisão Bibliográfica	4
2.1 Modelamento do comportamento de materiais viscoelásticos	4
2.2 Efeitos do tempo e temperatura	6
2.3 Análise de tensões e deformações	8
3 Elementos de viscoelasticidade	10
3.1 Descrição do problema de viscoelasticidade	10
3.2 Fluência	10
3.3 Relaxação de tensão	11
3.4 Modelos Viscoelásticos	12
3.4.1 Os Elementos Básicos: Mola e Amortecedor	12
3.4.2 Fluido de Maxwell	13
3.4.3 Sólido de Kelvin	16
3.4.4 Transformada de Laplace	17
3.4.5 Teorema da Convolução	19
3.4.6 Função degrau unitário	20
3.4.7 Modelo de Zener - Sólido viscoelástico padrão	21
3.4.8 Cadeias Generalizadas de Kelvin e de Maxwell	25
3.5 Módulo de Fluência e Módulo de Relaxação	27
3.5.1 Princípio da Sobreposição de Boltzmann	30
3.6 Análise de Tensões e Deformações 3-D	32
3.6.1 Relação Constitutiva Viscoelástica-isotrópica 3-D	34

3.6.2	Ensaio de Tração Uniaxial	35
3.6.3	Relações entre $Y(t)$ e $\nu(t)$ e módulos deviatóricos e volumétricos no ensaio 1-D	38
3.7	Efeitos da Temperatura e Envelhecimento	40
3.7.1	O Tempo Reduzido	41
3.7.2	O Fator de Translação	44
3.8	Um Método Numérico de Análise de Tensões em Viscoelasticidade	47
3.8.1	Solução Para a Distribuição de Tensões	48
4	Aplicação do Modelo de Maxwell Generalizado	49
4.1	Módulo de Fluência	51
4.2	Módulo de Relaxação	54
4.3	Soluções em Série de Prony	54
4.3.1	Maxwell com $n = 1$	54
4.3.2	Maxwell com $n = 2$	55
4.3.3	Maxwell com $n = 5$	57
4.4	Componentes de Tensão e Deformação 3-D	63
4.4.1	Soluções de Fluência e de Relaxação Deviatóricos	63
4.4.2	Determinação Experimental do Módulo Volumétrico K_{el}	65
4.4.3	Forma 2 de Determinação de $\epsilon_{22}(t)$ a partir de $\epsilon_{11}(t)$ e de K_{el}	66
4.4.4	Demonstrações sobre K_{el} , E_{el} e ν_{el}	67
5	Procedimento Experimental	69
5.1	Metodologia	69
5.2	Ensaio de Fluência	70
5.2.1	Aparato de Ensaio	70
5.2.2	Corpos de Prova	74
5.2.3	Procedimento de Ensaio	76
5.2.4	Condições Iniciais de Ensaio	76
5.3	Ensaio Estático de Tração	77
5.4	Ensaio Estático de Placa	77
5.5	Determinação dos Fatores de Translação	78
5.5.1	Módulo de fluência na temperatura de referência T_0	78
5.5.2	Módulo de fluência na temperatura T_1	81
5.5.3	Constantes da função de translação: equação de WLF	82
5.5.4	Princípio da sobreposição tempo-temperatura	82
5.6	Determinação dos Parâmetros do Modelo	85
5.6.1	Soluções de Fluência e Relaxação	85
5.6.2	Módulo Volumétrico	88
5.6.3	Soluções de fluência e relaxação deviatóricos	89
5.6.4	Deslocamentos de placa	93

6 Conclusões

95

Bibliografia

99

Lista de símbolos

σ	tensão
ϵ	deformação
E_0	módulo de impacto
E_∞	módulo assintótico
P, Q	operadores completos no domínio da transformada de Laplace
P', Q'	operadores deviatóricos no domínio da transformada de Laplace
P'', Q''	operadores volumétricos no domínio da transformada de Laplace
P, Q	operadores completos no domínio do tempo
P', Q'	operadores deviatóricos no domínio do tempo
P'', Q''	operadores volumétricos no domínio do tempo
p_i	i – <i>ésima</i> constante dos operadores P e P'
q_i	i – <i>ésima</i> constante dos operadores Q e Q'
J	módulo de fluência completo
B_i	i – <i>ésima</i> constante do módulo de fluência
ρ_i	i – <i>ésimo</i> tempo de fluência
J'	módulo de fluência deviatórico
B'_i	i – <i>ésima</i> constante do módulo de fluência deviatórico
J_{22}	módulo de fluência transversal
B_i^*	i – <i>ésima</i> constante do módulo de fluência transversal
Y	módulo de relaxação completo
C_i	i – <i>ésima</i> constante do módulo de relaxação
λ_i	i – <i>ésimo</i> tempo de relaxação
G	módulo de relaxação deviatórico
C'_i	i – <i>ésima</i> constante do módulo de relaxação deviatórico
K_{el}	módulo volumétrico elástico
E_{el}	módulo elástico
ν_{el}	coeficiente de Poisson elástico
T	temperatura
a	fator de translação
ξ	tempo reduzido

Resumo

O projeto de componentes estruturais de materiais poliméricos deve considerar a resposta viscoelástica destes materiais. Porém, poucos dados referentes às propriedades mecânicas estão disponíveis na literatura. Adicionalmente, existem famílias de polímeros com propriedades que apresentam diferenças significativas. Para representar o comportamento de um polímero ao longo de um certo período de tempo, é necessário então, construir um modelo viscoelástico de comportamento, a equação constitutiva do material, determinando os seus parâmetros a partir de dados experimentais que se obtém geralmente por ensaios mecânicos de fluência, de relaxação de tensão ou dinâmicos.

Com este objetivo, é apresentado um procedimento de determinação dos parâmetros de uma relação constitutiva para representar o comportamento de um material polimérico por um certo período de tempo. É elaborado um modelo viscoelástico derivado de um arranjo de molas e amortecedores, o modelo de Maxwell generalizado, resultando em uma expressão na forma de operadores diferenciais. Os módulos de fluência e relaxação de tensão, necessários para a determinação da solução de problemas de geometria e carregamento complexos, são definidos. Para isto, o material é considerado termoreologicamente simples, permitindo o emprego do princípio da equivalência tempo-temperatura. Desta forma, vários ensaios de fluência de curta duração são realizados em diferentes temperaturas e os dados são posteriormente transladados para uma temperatura de referência, formando uma curva de deformação completa na temperatura de referência. Um processo de ajuste de curva aos dados experimentais conduz aos parâmetros do módulo de fluência. Considerando o material elástico linear em dilatação e viscoelástico apenas em cisalhamento, diferentes métodos são avaliados para a determinação dos parâmetros da relação constitutiva na forma diferencial, do módulo de relaxação e das componentes deviatóricas dos módulos de fluência e relaxação.

O módulo volumétrico elástico é determinado à partir de dados extraídos de ensaios de tração e do ensaio de fluência. Para isso é desenvolvido o projeto completo e detalhado do aparato de ensaio, que consiste de dispositivos para fixação dos corpos de prova, aplicação do carregamento e medição das deformações ao longo do tempo, além da montagem e ajustes do sistema de controle de temperatura. Elementos simples de placa são modelados através do método dos elementos finitos empregando as propriedades materiais obtidas. Ensaios de estrutura real são realizados nas condições estabelecidas no modelo numérico e os resultados são comparados com as soluções obtidas por elementos finitos.

Abstract

The engineering design with polymeric materials must take into account its viscoelastic behavior. However, mechanical properties data is not usually, available in the literature, due to the existence of different grades and compositions for a given polymer, which results in different properties. Building up a viscoelastic model, the constitutive equation of the material, it is possible to describe the long term behavior of a polymer. The numerical values of model parameters are determined experimentally from creep, relaxation or dynamic tests for a particular material.

This work presents a procedure to determine model parameters to describe the viscoelastic behavior of a polymeric material for a given period of time. A viscoelastic model is derived from a certain combination of springs and dashpots, the generalized Maxwell model, resulting the constitutive equation in the differential form. Creep modulus and relaxation modulus are determined, which are needed to solve problems of complex geometry and loads. The time-temperature superposition principle is employed considering the material to be thermoreologically simple. The time shift of the data obtained from several short term creep tests at different temperatures, gives the master curve of strain at reference temperature. A curve fit to experimental data gives the creep modulus parameters. Considering elastic behavior in bulk and viscoelastic behavior in shear, different methods for determination of parameters of the differential constitutive equation, relaxation modulus and deviatoric creep and relaxation modulus are developed and evaluated.

The elastic bulk modulus is determined by experimental data from tensile tests and creep tests. An apparatus is designed and built to perform creep tests, consisting of a system of grips for holding the test specimen, constant load application, strain measurement and temperature control. A plate element is modeled by the finite element method employing the material properties determined. Tests of real component are conducted in the same conditions as established in the numeric model and the results are compared with the finite element solution.

Capítulo 1

Introdução

As propriedades mecânicas de materiais poliméricos, extraídas de ensaios convencionais de tração e apresentadas na forma padrão de gráficos de tensão-deformação, representam o comportamento do material por apenas um breve período de tempo, não sendo adequadas para prever o comportamento a longo prazo. Isto ocorre, em virtude dos polímeros exibirem um comportamento viscoelástico, ou seja, o comportamento mecânico é dependente do tempo.

Todos os materiais estruturais exibem um certo grau de viscoelasticidade, sendo que a intensidade deste comportamento depende das condições do ambiente, principalmente a temperatura. Enquanto os metais são essencialmente elásticos na temperatura usual de trabalho, efeitos viscoelásticos tornam-se aparentes em temperaturas elevadas, aproximadamente acima de 50% da temperatura de fusão. Já os materiais poliméricos são, em geral, viscoelásticos na temperatura ambiente, acentuando-se este comportamento quando se aproxima da temperatura de transição vítrea.

O comportamento viscoelástico de um material pode manifestar-se principalmente pela deformação de fluência e pela relaxação de tensão. No primeiro caso, o material submetido a uma tensão constante exibe uma deformação dependente do tempo que se sobrepõe a uma deformação elástica inicial. No segundo caso, submetendo-se o material a uma deformação constante, ocorre uma relaxação de tensão dependente do tempo.

O projeto de componentes estruturais de material polimérico destinados a operar por longos períodos de tempo, deve portanto, considerar a resposta viscoelástica. Para representar o comportamento de um material polimérico a longo prazo, faz-se necessário estabelecer um modelo viscoelástico de comportamento, a equação constitutiva do material, determinando-se os seus parâmetros à partir de dados experimentais que se obtêm de ensaios mecânicos de fluência ou relaxação de tensão.

Modelos reológicos para o comportamento viscoelástico linear tradicionalmente são deriváveis de arranjos de molas e amortecedores viscosos, o que resulta em relações constitutivas tensão-deformação em forma de operadores diferenciais. A aplicação desses modelos, no domínio do tempo, é feita através de soluções da equação diferencial para casos padrão, gerando as funções de relaxação e de fluência do material. Essas funções são combinações lineares de funções exponenciais, cujos parâmetros são propriedades do material obtidas a partir de uma curva experimental. É sabido que o processo de ajuste de parâmetros é bastante intrincado devido às características da base de funções usada. A

precisão do ajuste depende da quantidade de unidades mola-amortecedores, geralmente unidades de Maxwell ou Kelvin, usadas no modelo.

1.1 Objetivos

Tem-se como objetivo principal, estudar um procedimento de determinação da relação constitutiva viscoelástica para a caracterização do comportamento mecânico de materiais poliméricos. Este procedimento consiste na elaboração de um modelo de representação do comportamento em termos de tensões e deformações, resultando em uma expressão da equação constitutiva contendo parâmetros a serem determinados experimentalmente, mediante a realização de ensaios mecânicos. Ensaios de estruturas são necessários para uma avaliação dos parâmetros obtidos, mediante a comparação dos dados experimentais com a solução de um modelo numérico de elementos finitos com as propriedades materiais obtidas.

Em virtude dos materiais poliméricos exibirem um comportamento viscoelástico, um modelo formado por uma combinação de elementos discretos de mola e amortecedor pode ser construído. Existem duas formas sistemáticas de construção de modelos, a cadeia de Kelvin e o modelo de Maxwell generalizado, sendo adotada a segunda forma, pois em um programa comercial de elementos finitos, o comportamento viscoelástico é modelado com as propriedades materiais correspondentes ao modelo de Maxwell generalizado, viabilizando a simulação numérica de problemas de geometria e carregamento complexos. Para a determinação dos parâmetros do modelo são realizados ensaios estáticos de fluência, em que são aplicados carregamentos de valor constante em corpos de prova mantidos em ambiente com controle de temperatura, medindo-se periodicamente a deformação.

Para a realização do procedimento experimental, é desenvolvido o projeto de um aparato completo de ensaio de fluência, conforme orientações estabelecidas em normas técnicas, as quais apresentam também recomendações para a execução dos ensaios. Os dados obtidos são apresentados na forma de gráficos de deformação em relação a uma escala logarítmica de tempo e um ajuste de curva a estes dados conduz aos parâmetros do módulo de fluência, o qual representa o comportamento do material em termos de deformação. Diferentes procedimentos podem então ser adotados para a determinação do módulo de relaxação de tensão, representando o comportamento do material em termos de tensão. Para evitar um número demasiadamente elevado de parâmetros a serem determinados experimentalmente, adota-se um comportamento elástico em dilatação, tornando necessária a realização de ensaios de tração em separado. Diferentes procedimentos conduzem então às componentes de viatóricas dos módulos de fluência e relaxação, resultando na completa caracterização do comportamento mecânico do material através das suas relações constitutivas.

1.2 Descrição dos capítulos

No capítulo 2 são apresentados resumos de trabalhos publicados por diferentes autores. O capítulo consiste de seções onde são agrupadas as publicações referentes ao modelamento do comportamento

viscoelástico, os efeitos da temperatura e do tempo, além de procedimentos de análise de tensão em condições isotérmicas, não isotérmicas e com propriedades viscoelásticas variáveis no tempo.

No capítulo 3 são apresentados métodos de construção de modelos de materiais viscoelástico-lineares, sendo deduzidas as equações constitutivas na forma de operadores diferenciais, de modelos simples de Maxwell e Kelvin. O uso da transformada de Laplace no modelamento do comportamento viscoelástico é apresentado e exemplificado com a dedução do modelo de Zener, seguindo-se uma introdução aos modelos generalizados de Maxwell e Kelvin. As equações constitutivas na forma integral são obtidas definindo-se os módulos de fluência e relaxação de tensão unidimensionais. Uma generalização das relações constitutivas para problemas tridimensionais é feita, separando-se os operadores diferenciais nas componentes deviatórica e volumétrica, apresentando-se também as relações resultantes da analogia elástico-viscoelástico e o conceito do tempo reduzido. Um método numérico para a solução de problemas de análise de tensões em viscoelasticidade linear é apresentado.

Empregando os métodos descritos no capítulo 3, modelos viscoelásticos com diferentes unidades de Maxwell são construídos no capítulo 4. Para o modelo de mais alta ordem, diferentes procedimentos para a determinação dos parâmetros das relações constitutivas são apresentados, discutindo-se as implicações da adoção de cada um. As expressões das componentes deviatóricas e volumétricas são determinadas, assumindo um comportamento elástico em dilatação como forma de simplificar o processo de obtenção dos parâmetros.

O procedimento experimental é apresentado no capítulo 5, sendo feita uma descrição do aparato desenvolvido para a execução dos ensaios de fluência. Os valores numéricos dos parâmetros são obtidos através dos diferentes procedimentos e inseridos nas expressões correspondentes, as quais são representadas graficamente, assim como os dados experimentais. Os resultados de ensaios de placa simplesmente apoiada com carga constante aplicada na borda são apresentados, comparando-se com a solução obtida pelo método dos elementos finitos de um modelo numérico.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões referentes ao procedimento experimental e de determinação dos parâmetros do modelo, sendo apresentadas também, sugestões para um aprimoramento dos procedimentos empregados.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Modelamento do comportamento de materiais viscoelásticos

A teoria geral de viscoelasticidade linear é apresentada em [1]. São definidos os modelos simples de Kelvin e Maxwell baseados em elementos discretos de mola e amortecedor para a representação do comportamento de materiais viscoelástico-lineares. É apresentado o uso da transformada de Laplace na dedução dos modelos generalizados de Kelvin e Maxwell, conduzindo à equação constitutiva de materiais viscoelásticos na forma de operadores diferenciais. Os módulos de fluência e de relaxação de tensão são definidos e empregando a regra da sobreposição linear, as relações tensão-deformação na forma integral são obtidas. O princípio de correspondência elástico-viscoelástico é apresentado, sendo mostrado o seu emprego e o das equações integrais na solução de problemas de viga de material viscoelástico sob diferentes condições de contorno. O módulo de fluência complexo e a dissipação são definidos no estudo de vibrações, sendo apresentados também os problemas de propagação de onda e instabilidade em meio viscoelástico unidimensional. Uma generalização da relação constitutiva viscoelástica para problemas tridimensionais é feita, sendo exemplificada a sua aplicação a alguns casos típicos.

Em [2] os diversos desenvolvimentos teóricos são integrados para proporcionar uma descrição completa da teoria do comportamento viscoelástico linear de materiais e uma introdução à teoria geral de viscoelasticidade não-linear é apresentada. As formulações teóricas são deduzidas à partir de um ponto de vista da mecânica do contínuo, sendo discutidas e ilustradas algumas técnicas de solução de problemas. São tratados vários aspectos da teoria linear sob condições isotérmicas e não isotérmicas, incluindo problemas dinâmicos e quase-estáticos. É realizada uma breve explanação da teoria de viscoelasticidade não-linear, incluindo aplicações a sólidos e fluidos separadamente. São apresentadas as características comuns e algumas diferenças entre as teorias linear e não-linear, além de um breve estudo dos métodos de determinação de propriedades mecânicas adequados a ambas teorias, com o objetivo de obter resultados válidos para aplicações práticas.

Os conceitos básicos relacionados às propriedades e processamento de polímeros, são tratados empregando uma abordagem convencional de engenharia das propriedades e do comportamento destes materiais [3]. São apresentadas técnicas simples com exemplos ilustrativos, de projeto de componentes

de material polimérico, sendo enfatizada a importância da mecânica da fratura na descrição do comportamento do material. Operações complexas de processamento de polímeros são analisadas também utilizando técnicas simples, fornecendo soluções aproximadas.

O comportamento viscoelástico linear de materiais anisotrópicos em problemas quase-estáticos e dinâmicos é abordado em [4]. São apresentadas as relações tensão-deformação isotérmicas na forma integral, empregando o princípio da sobreposição de Boltzmann. As equações constitutivas diferenciais são obtidas a partir de modelos discretos de mola e amortecedor, sendo apresentadas as soluções de fluência e relaxação de tensão referentes aos modelos simples de Kelvin e Maxwell. São apresentados exemplos simples e uma discussão sobre a influência do espectro de tempos de fluência e relaxação na representação do comportamento viscoelástico de materiais reais. Os efeitos do tempo e da temperatura são avaliados na determinação de propriedades mecânicas a partir de dados experimentais.

Em [5] são revisados aspectos da caracterização de materiais viscoelásticos, iniciando pela apresentação da relação tensão-deformação isotérmica na forma de operadores diferenciais lineares separados nas parcelas deviatória e volumétrica, considerando três possíveis comportamentos em dilatação: material incompressível, dilatação elástica e dilatação viscoelástica. São apresentados métodos de caracterização de materiais em viscoelasticidade a partir de ensaios padrão de relaxação de tensão, fluência, taxa de deformação constante e carregamento senoidal. As diferentes representações matemáticas do comportamento viscoelástico são apresentadas na forma de modelos de elementos discretos de mola e amortecedor, representação espectral, aproximação de banda larga e aproximação em séries. A equivalência tempo-temperatura é apresentada, mostrando a aplicação da equação de Williams, Landel e Ferry [6], na translação de curvas de dados experimentais em diferentes temperaturas para formar uma curva principal em uma temperatura de referência.

A aplicação da transformada de Laplace e da analogia elástico-viscoelástico na solução de problemas em viscoelasticidade linear, além de métodos empregando a transformada inversa aproximada são apresentados através de exemplos. O problema térmico transiente em um meio viscoelástico linear é revisado e critérios de falha para materiais viscoelásticos são discutidos, sendo apresentando métodos de ensaio para determinação de falha sob diferentes combinações de tensões.

Em [7] são introduzidos os operadores de diferenciação e integração fracional no contexto do cálculo fracional de Riemann-Liouville. É apresentada a técnica da transformada de Laplace no tratamento destes operadores, derivando as soluções analíticas das equações diferenciais e integrais simples de ordem fracional. Mostra-se o papel fundamental da função de Mittag-Le-er no cálculo fracional.

Em [8] é estabelecida uma ligação entre teorias moleculares para prever o comportamento macroscópico de certos meios viscoelásticos e uma abordagem desenvolvida empiricamente de cálculo fracional em viscoelasticidade. A teoria molecular é direcionada a propriedades viscoelásticas de sólidos poliméricos sem ligações cruzadas. Mostra-se que os resultados destas teorias são equivalentes as relações constitutivas escritas em termos do cálculo fracional.

A conexão entre o cálculo fracional e a teoria da equação integral de Abel é apresentada para materiais com memória em [9]. São obtidas expressões para os módulos de fluência e relaxação de tensão em termos da função de Mittag-Le-er, a qual depende de um certo parâmetro β da derivada fracional. Estes módulos de fluência e de relaxação permitem a determinação da deformação e da

tensão ao longo de várias décadas conforme o valor atribuído ao parâmetro β . A equação constitutiva fracional permite uma transição contínua do estado sólido para o de fluido, quando o valor deste parâmetro varia de zero para um.

Relações constitutivas generalizadas para materiais viscoelásticos são apresentadas, substituindo as derivadas no tempo de ordem inteira por derivadas de ordem fracional em [10]. Mostra-se que a derivada fracional surge naturalmente na descrição de certos movimentos de fluido Newtoniano, justificando o seu uso nas relações viscoelásticas. É apresentada uma aplicação de uma relação constitutiva para predição da resposta transiente de um material dependente da frequência.

Em [11] um modelo matemático viscoelástico empregando derivadas de ordem fracional é examinado em termos da sua consistência com princípios termodinâmicos. O desenvolvimento de restrições nos parâmetros do modelo impedem a predição de taxa de dissipação de energia e trabalho interno negativos. Estas restrições conduzem a um modelo para a predição da resposta senoidal, assim como da fluência e da relaxação de tensão.

2.2 Efeitos do tempo e temperatura

Williams, Landel e Ferry [6] mostram que uma simples função empírica consistente com formulações anteriores, é suficiente para descrever a dependência em relação a temperatura de todos os processos de relaxação mecânicos e elétricos, de um polímero amorfo acima da sua temperatura de transição vítrea. A razão a_T de um certo tempo de relaxação mecânico na temperatura T para o seu valor na temperatura de referência T_0 , obtida de medições dinâmicas ou transientes e a correspondente razão b_T de valores de um certo tempo de relaxação elétrico, são aparentemente idênticas sob uma ampla faixa de escala de tempo. Sob o ponto de vista das teorias de viscoelasticidade aplicadas a polímeros, a_T ou b_T , refletem a dependência em relação a temperatura de um coeficiente de fricção ou mobilidade, do qual depende a taxa de todos os rearranjos configuracionais. Uma função universal para expressar a dependência da viscosidade e das relaxações mecânica e elétrica em relação a temperatura, em polímeros amorfos e líquidos super-resfriados, surge devido às taxas de todos estes processos dependerem do volume livre, o qual depende da temperatura. A função a_T é desta forma, muito importante na descrição de propriedades físicas de um sistema polimérico.

Uma fórmula empírica para a_T pode ser inferida pela modificação de uma expressão aplicada a viscosidade e dispersões dielétricas de líquidos super-resfriados, assim como a fluência de polímeros. Entre T_g e $T_g + 100^\circ\text{C}$ ao menos, uma fórmula simples pode ser usada para predizer a dependência em relação a temperatura das propriedades mecânicas e dielétricas.

O estudo da dependência em relação ao tempo das propriedades físicas na faixa de transformação vítrea é dificultado pelo efeito de memória e a não-linearidade, as quais são características da relaxação estrutural. Um modelo de vários parâmetros de relaxação estrutural é apresentado por [12], diferindo dos modelos anteriores por considerar ambos os efeitos. Este modelo ajusta-se adequadamente aos dados experimentais obtidos em sua grande maioria, observando a evolução de propriedades tais como a densidade, que ocorre após a aplicação de uma mudança de temperatura na forma de uma função degrau. O modelo permite também a predição de propriedades físicas do vidro sujeito a uma história

arbitrária e mais complexa de carregamento térmico, tal como em um processo de tratamento térmico.

O tratamento matemático de relaxação em cisalhamento de materiais lineares termoreologicamente simples é adaptado para descrever a relaxação intrinsecamente não-linear das propriedades físicas de vidros na faixa de transformação. O modelo trata a não-linearidade introduzindo uma escala de tempo reduzido para permitir a mudança da viscosidade, o que é postulado como sendo causa unicamente da não-linearidade. Este tratamento conduz a uma nova definição da temperatura fictícia, a qual incorpora a sequência do carregamento térmico.

Análises de dados experimentais da evolução de propriedades físicas de vidros indicam que relaxação estrutural pode ser tratada como linear em relação ao tempo reduzido e que as influências das temperaturas presente e fictícia são igualmente importantes. Embora os dados sejam referentes, na sua maioria, a uma resposta das propriedades físicas a um degrau de variação da temperatura, o modelo permite também prever as propriedades físicas do vidro sujeito a histórias de carregamento térmico arbitrárias e mais complexas.

Materiais amorfos não estão em equilíbrio termodinâmico em temperaturas abaixo da sua transição vítrea [13]. Na condição de líquidos super-resfriados, possuem um volume, entropia, etc., maior que no estado de equilíbrio. Estudos de relaxação de volume revelam que abaixo da T_g a mobilidade molecular não é nula. Ocorre uma lenta e gradual aproximação da condição de equilíbrio e, este processo conhecido como envelhecimento, altera muitas propriedades do material. Trata-se de uma continuação gradual da vitrificação abaixo de T_g . Desta forma, o envelhecimento afeta todas as propriedades que dependem da temperatura. Durante o envelhecimento o material torna-se mais rígido e frágil, reduzindo suas taxas de relaxação de tensão e de fluência [13].

Ao menos em pequenas deformações, as propriedades mecânicas do material são determinadas principalmente pelo parâmetro tempo de envelhecimento, o qual deve ser considerado em ensaios de plásticos, particularmente na predição do seu comportamento a longo prazo.

Em [14] são descritas as técnicas experimentais, os materiais e os resultados obtidos em relação ao efeito do envelhecimento nas propriedades de polímeros semicristalinos sob fluência. Mostra-se que as predições de um modelo de transição vítrea prolongada em polímeros semicristalinos aproximam-se grandemente dos dados experimentais. Em [15] mostra-se que este modelo pode explicar o efeito do envelhecimento nas propriedades mecânicas dinâmicas, além do efeito da temperatura de fusão na relaxação de volume. Adicionalmente, mostra-se que o envelhecimento após sequências complexas de carregamento térmico, é semelhante em polímeros semicristalinos e amorfos. A teoria do tempo efetivo e o método da extrapolação linear para prever a fluência em longos períodos a partir de ensaios de curta duração, desenvolvida para polímeros amorfos é generalizada para polímeros semicristalinos em [16]. Em [17] é mostrado que para alguns polímeros semicristalinos, assim como ocorre com os amorfos, o efeito do envelhecimento diminui com o aumento do nível de tensão. Como consequência, os métodos desenvolvidos para a predição de fluência em longos períodos podem ser generalizados para o regime de tensões elevadas.

Um modelo analítico-numérico para interpretação e aplicação de dados experimentais em análise e projeto estrutural é apresentado em [18]. É proposta uma formulação incluindo relações constitutivas elásticas e viscoelásticas anisotrópicas com envelhecimento, análise de falha com critério de degradação

ajustado à idade do material, considerando grandes deslocamentos e pequenas deformações.

2.3 Análise de tensões e deformações

Em [19] é apresentada a formulação da teoria para determinação da distribuição de tensão em viscoelasticidade linear. São estabelecidas as situações particulares em que a variável tempo pode ser removida e o problema viscoelástico pode ser transformado em um problema elástico equivalente pela aplicação da transformada de Laplace, sendo apresentadas as dificuldades que devem ser esperadas quando isto não é possível. Um exemplo de cada tipo de problema é apresentado, mostrando a abordagem geral disponível para o primeiro caso e o procedimento particular que deve ser aplicado ao segundo. É discutida a resultante variação da distribuição de tensão com o tempo, sob carregamento constante distribuído na superfície, a qual está associada com as características viscoelásticas do material, sob o ponto de vista da flexibilidade oferecida no projeto de componentes destes materiais.

Em [20] é apresentado o sistema de equações que determina as distribuições de tensão e deformação para um material viscoelástico linear com temperatura variável. A influência da temperatura em viscoelasticidade é representada por uma relação de translação na escala logarítmica do tempo que relaciona a variação de temperatura com uma translação na escala logarítmica do tempo para todas as funções viscoelásticas. São discutidos métodos de tratamento das equações gerais, porém é mostrado que a solução pelos métodos padrão é possível apenas para situações restritas. Tensões em um cilindro de material incompressível sob uma distribuição axissimétrica constante de temperatura são calculadas quando uma pressão interna constante é aplicada. Em virtude da incompressibilidade do material, não ocorrem tensões térmicas devido à expansão não-homogênea, porém a influência da temperatura na resposta viscoelástica produz um efeito significativo no campo de tensão quando comparado com o caso isotérmico. São comparadas características particulares da distribuição de tensão para os modelos de Kelvin e Maxwell. É descrito um método aproximado de solução aplicável ao modelo de Maxwell e materiais viscoelásticos mais gerais.

A analogia elástico-viscoelástico é estendida para incorporar problemas de tensão térmica em meio viscoelástico linear não-homogêneo [21]. É mostrado que as tensões térmicas em um corpo que possui propriedades viscoelástico-lineares dependentes da temperatura podem ser deduzidas de um material elástico equivalente.

Em [22] é tratada a análise quase-estática de tensões térmicas transiente em viscoelasticidade linear com propriedades dependentes da temperatura, fazendo uso da hipótese da equivalência tempo-temperatura. Seguindo uma exposição teórica, são deduzidas soluções exatas de dois problemas específicos: o primeiro relacionado a tensões térmicas em uma placa infinita, geradas por um campo de temperatura que depende arbitrariamente da coordenada da espessura e do tempo; a segunda aplicação está relacionada com as tensões produzidas em uma esfera por uma distribuição arbitrária de temperatura radialmente simétrica dependente do tempo.

Problemas de análise de tensões em viscoelasticidade linear são solucionados empregando as relações tensão-deformação na forma de operadores integrais em [23]. O material é caracterizado pelo módulo de relaxação ou módulo de fluência, os quais são mensuráveis em uma faixa de tempo finita e

descrevem completamente o comportamento do material em termos de tensão e deformação referente ao mesmo período de tempo. É mostrado que as equações integrais obtidas da teoria da análise de tensões, podem ser solucionadas com alto grau de precisão através de procedimentos de integração numérica por diferença finita. É sugerida uma técnica de medição do módulo de relaxação e de fluência, baseada no método apresentado para solução numérica das equações integrais.

A necessidade de reter a história de tensão em soluções computacionais é eliminada em [24] e [25], representando o comportamento viscoelástico do material por um certo número de unidades de Kelvin conectados em série e armazenando a deformação total de fluência de cada unidade. É desenvolvido um método geral de análise numérica de tensão em viscoelasticidade com propriedades constantes ou variáveis com a temperatura. O método é comparado com algumas soluções conhecidas e são apresentados exemplos de aplicação em propelentes, rocha e concreto.

Em [26] é desenvolvido um algoritmo computacional para a solução do problema de valor de contorno quase-estático, de sólido viscoelástico linear sujeito a deformação mecânica e térmica. O método envolve a discretização por elementos finitos do problema de valor estacionário, conduzindo a solução de um sistema de equações integrais lineares que determina o movimento do sólido.

Uma revisão do método da transformada de Laplace para análise de tensões em viscoelasticidade é feita em [27]. São discutidos os conceitos de material termoreologicamente simples, analogia elástico-viscoelástico e a importância da relaxação volumétrica em estados de tensão uniaxial, biaxial e triaxial. São detalhados métodos de incorporação de dados experimentais de relaxação de tensão em análise de tensão para produzir uma descrição realística do comportamento de vidros e são determinadas soluções em forma fechada para tensões.

Capítulo 3

Elementos de viscoelasticidade

3.1 Descrição do problema de viscoelasticidade

Um material viscoelástico exibe propriedades características de sólido e fluido. A ocorrência de propriedades viscoelásticas em um material depende em grande parte das condições do ambiente, principalmente a temperatura, e do regime do carregamento imposto ao material. Em geral, a maioria dos polímeros exibe comportamento viscoelástico na temperatura de trabalho quando um carregamento é aplicado ao longo do tempo. Desta forma, é importante considerar tais propriedades em projetos envolvendo estes materiais [3]. Pode-se expressar a dependência do comportamento com o tempo em um material viscoelástico como uma combinação de um sólido elástico e um fluido viscoso:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sólido Elástico} & + & \text{Fluido Viscoso} & = & \text{Sólido Viscoelástico} \\ \sigma = E\epsilon & & \sigma = \mu d\epsilon/dt & & \sigma = F(\epsilon, t) \end{array} \quad (3.1)$$

Esta é a expressão geral para um sólido viscoelástico não linear onde a tensão é uma função genérica F da deformação e do tempo.

Para pequenas deformações (tipicamente $< 1\%$), a deformação e a resposta no tempo podem ser separadas, fornecendo a equação geral para um material viscoelástico linear

$$\sigma(t) = \epsilon(t) E(t), \quad (3.2)$$

onde $E(t)$ é o módulo do material dependente do tempo e em qualquer instante a tensão é proporcional a deformação.

O comportamento viscoelástico dependente do tempo dos polímeros manifesta-se principalmente de duas maneiras. A fluência e a relaxação de tensões.

3.2 Fluência

Em um material elástico, quando um carregamento é aplicado instantaneamente e mantido constante a deformação subsequente também é instantânea. Esta deformação é totalmente recuperável quando

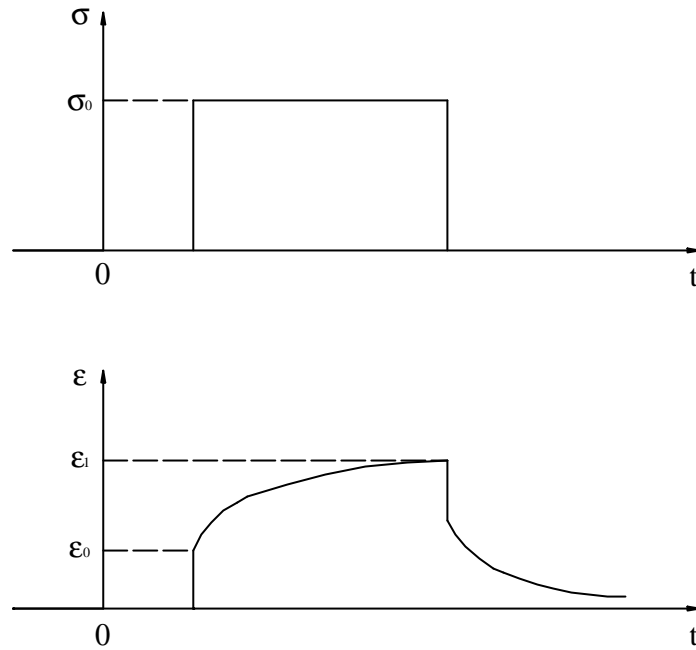


Figura 3.1: Fluência e recuperação de fluência.

o carregamento é removido. Isto não ocorre com um material viscoelástico. A resposta deste material para um carregamento constante aplicado instantaneamente é mostrada na fig. 3.1.

Ocorre uma deformação elástica instantânea inicial, seguida por uma deformação depende do tempo, ou seja, a fluência do material. Pode ocorrer também um escoamento viscoso permanente do material, principalmente quando o carregamento é muito elevado ou é aplicado durante um período de tempo muito longo, ou ainda, se a temperatura for elevada. Ao remover o carregamento, um processo inverso ocorre. Um certo nível de recuperação instantânea é seguida por uma recuperação da deformação que se estende por um certo tempo. Escoamento viscoso de material durante a aplicação do carregamento resulta em uma deformação residual quando o carregamento é removido.

3.3 Relaxação de tensão

Em um processo de fluência, observa-se a variação da deformação do material em relação ao tempo, devido a um carregamento aplicado instantaneamente e que é mantido constante. Um processo de relaxação de tensão porém, envolve a aplicação instantânea de deformação que é então mantida constante, enquanto observa-se a variação da tensão no material em relação ao tempo. Sob estas condições a tensão aumenta instantaneamente e então passa a ocorrer mais lentamente uma relaxação da tensão no material durante um certo período de tempo, até atingir um valor constante de tensão, como mostrado na fig. 3.2.

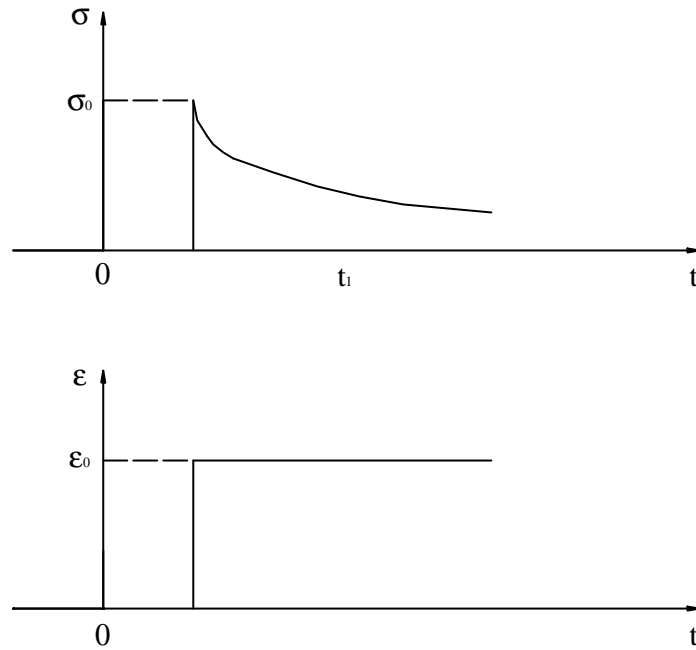


Figura 3.2: Relaxação de tensão.

3.4 Modelos Viscoelásticos

Elementos mecânicos como molas (elásticos) e amortecedores (viscosos) podem ser combinados para formar um modelo de material com propriedades viscoelásticas [4], [1] e [2]. Embora os modelos não contenham informações sobre os fenômenos físicos e moleculares que ocorrem, ou seja, são modelos exclusivamente fenomenológicos, eles são úteis para prever a resposta de um material sob condições de fluência e relaxação, assim como situações de carregamento complexas. Adicionalmente, fornecem uma visão da natureza geral da resposta viscoelástica.

3.4.1 Os Elementos Básicos: Mola e Amortecedor

Considerando uma mola elástica fig.3.3a, quando uma força trativa P é aplicada, a mola deforma-se de uma certa quantidade ϵ e quando a força é removida, a mola retorna ao seu comprimento inicial. O mesmo fenômeno pode ser observado em um ensaio de tração realizado com um corpo de prova elástico. Se o material é elástico-linear, tem-se a relação

$$\sigma = k\epsilon, \quad (3.3)$$

que é a Lei de Hooke, sendo k o módulo de elasticidade.

O amortecedor da figura 3.3b, trata-se de um pistão móvel dentro de um cilindro perfurado, preenchido com um fluido de viscosidade μ . Para deslocar o pistão de uma certa quantidade u , é necessário aplicar uma força P , de forma que quanto maior a força, mais rápido é o deslocamento do

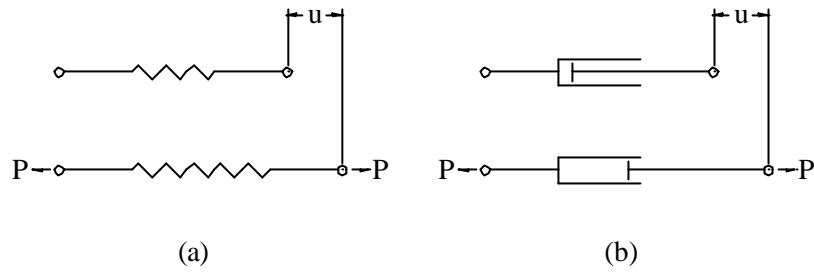


Figura 3.3: Modelos representando tensão em uma barra: a) elástica, b) viscosa.

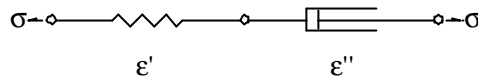


Figura 3.4: Modelo de Maxwell: mola e amortecedor em série.

pistão. Se esta relação entre a força aplicada e a velocidade du/dt do movimento do pistão é linear, tem-se que $P = \mu(du/dt)$. Um comportamento semelhante pode ser encontrado em certos materiais, ou seja, quando um carregamento é aplicado ocorre uma deformação, porém não é esta deformação que é proporcional a força, mas a sua taxa de variação no tempo. Escrevendo esta relação em termos de tensão e deformação, tem-se

$$\sigma = \mu \frac{d\epsilon}{dt}, \quad \text{isto é,} \quad \sigma = \mu \dot{\epsilon}, \quad (3.4)$$

sendo $\dot{\epsilon}$ a taxa de deformação.

O comportamento de materiais viscoelásticos é uma combinação dos dois casos simples descritos pelas equações (3.3) e (3.4) ilustrados nas figuras 3.3a e 3.3b. Para construir modelos mais complexos, pode-se propor diferentes combinações de molas e amortecedores para representar possíveis comportamentos de materiais viscoelásticos. A validação de cada modelo deve ser feita confrontando-os com resultados de ensaios experimentais do particular material que se deseja representar.

3.4.2 Fluido de Maxwell

Um modelo simples de material viscoelástico está representado na figura 3.4. Trata-se de uma mola associada em série com um amortecedor.

A deformação ϵ' da mola segue a relação (3.3)

$$\sigma = k\epsilon', \quad (3.5)$$

enquanto a taxa de deformação $\dot{\epsilon}''$ do amortecedor obedece à relação dada por (3.4)

$$\sigma = \mu \dot{\epsilon}'' . \quad (3.6)$$

Como ambos elementos estão conectados em série, a deformação total é a soma das deformações ϵ' e ϵ'' da mola e do amortecedor respectivamente

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon'' . \quad (3.7)$$

Derivando (3.7) em relação ao tempo e substituindo $\dot{\epsilon}'$ e $\dot{\epsilon}''$ na expressão resultante, encontra-se a relação entre a tensão σ e a deformação ϵ , do modelo mola-amortecedor

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}' + \dot{\epsilon}'' \quad \longrightarrow \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma}{\mu} . \quad (3.8)$$

Definindo $p_1 = \mu/k$ e $q_1 = \mu$, esta expressão pode ser escrita na seguinte forma

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} \quad (3.9)$$

Esta relação pode ser a equação constitutiva de algum material viscoelástico. O comportamento representado por esta equação pode ser estudado submetendo um corpo de prova hipotético a um ensaio de dois estágios.

No primeiro estágio, aplica-se no instante $t = 0$ uma tensão $\sigma = \sigma_0$ mantida constante ao longo de um certo intervalo de tempo obtendo-se a deformação $\epsilon(t)$ neste período.

Neste caso, (3.9) é uma equação diferencial em termos de ϵ e tem como solução

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{q_1} t + C_1 \quad t > 0 . \quad (3.10)$$

A constante C_1 é determinada em função das condições iniciais. Em virtude da tensão σ_0 ser aplicada instantaneamente em $t = 0$, neste instante a sua derivada $\dot{\sigma}(t)$, tem uma singularidade. Por este motivo, integra-se (3.9) através deste ponto

$$\int_{-\tau}^{+\tau} \sigma dt + p_1 [\sigma(+\tau) - \sigma(-\tau)] = q_1 [\epsilon(+\tau) - \epsilon(-\tau)] . \quad (3.11)$$

Quando $\tau \rightarrow 0$, o primeiro termo desta equação anula-se e como em $t = 0^-$ não há tensão aplicada, a deformação também é nula. Fazendo $\epsilon(0^+) = \epsilon_0$, a deformação inicial, chega-se então a

$$p_1 \sigma_0 = q_1 \epsilon_0 , \quad (3.12)$$

ou

$$\epsilon_0 = \frac{p_1}{q_1} \sigma_0 , \quad \text{isto é,} \quad \epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{k} . \quad (3.13)$$

A solução de (3.10) no instante $t = 0^+$, fornece o valor da constante C_1

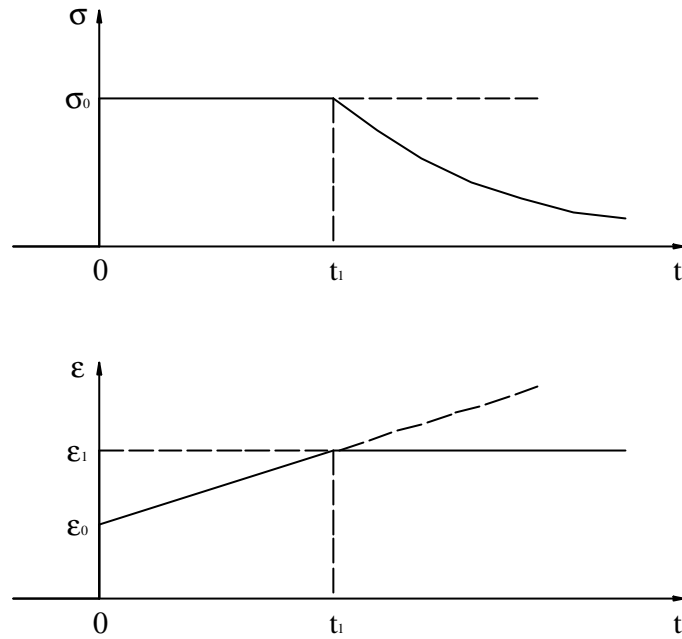


Figura 3.5: Ensaio de fluência e relaxação do modelo de Maxwell.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \epsilon_0, \\
 &= \frac{p_1}{q_1} \sigma_0, \\
 &= E_0 \sigma_0,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

e desta forma, tem-se a seguinte equação para a deformação

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{q_1} (p_1 + t), \quad \text{isto é,} \quad \epsilon(t) = \sigma_0 \left(E_0 + \frac{t}{q_1} \right). \tag{3.15}$$

Este ensaio está representado graficamente pelas curvas da figura 3.5 no intervalo $0 < t < t_1$.

No segundo estágio, que inicia no instante $t = t_1$ a deformação ϵ é mantida constante no valor ϵ_1 ao longo do ensaio e obtém-se a tensão $\sigma(t)$ neste período.

Como a deformação $\epsilon = \epsilon_1$ é constante, a sua derivada $\dot{\epsilon}$ é nula, a expressão (3.9) fica uma equação diferencial homogênea para a tensão σ e tem a seguinte solução

$$\sigma(t) = C_2 e^{(-t/\lambda_1)}, \quad t > t_1, \tag{3.16}$$

sendo $\lambda_1 = p_1$ o tempo de relaxação, ou o tempo necessário para a tensão reduzir para $1/e$ do seu valor inicial.

Para obter o valor da constante C_2 é necessário o valor da tensão no início deste estágio, $\sigma(t_1^+)$. Como a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ é finita ao longo de todo o ensaio, conclui-se que $\sigma(t_1^-) = \sigma(t_1^+) = \sigma_0$.

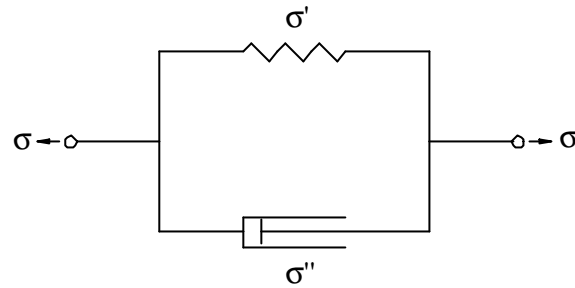


Figura 3.6: Modelo de Kelvin: mola e amortecedor em paralelo.

Introduzindo este valor em (3.16), obtém-se C_2 e então chega-se a expressão da tensão

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-(t-t_1)/\lambda_1}. \quad (3.17)$$

Na figura 3.5 as curvas para um tempo $t > t_1$ representam graficamente este estágio do ensaio.

No primeiro estágio do ensaio, a deformação ϵ aumenta sob uma tensão σ constante, o que caracteriza o fenômeno de fluência. No segundo estágio, a tensão diminui sob uma deformação constante, o que por sua vez caracteriza a relaxação de tensão. De acordo com este modelo, um material submetido a uma tensão finita possui uma capacidade ilimitada de deformação, o que é uma propriedade típica de um fluido. Por este motivo, este modelo de material é denominado fluido de Maxwell, embora apresente uma resposta elástica no instante de aplicação do carregamento com um módulo inicial, ou **módulo de impacto** E_0 , [1].

3.4.3 Sólido de Kelvin

Outro modelo simples é apresentado na figura 3.6. Neste caso, tem-se uma mola associada em paralelo com um amortecedor, de forma que a deformação ϵ dos dois elementos é a mesma e a tensão total σ é composta por uma componente σ' atuando na mola e uma componente σ'' atuando no amortecedor.

As equações (3.3) e (3.4) para este modelo ficam

$$\begin{aligned} \sigma' &= k\epsilon, \\ \sigma'' &= \mu\dot{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como a mola e o amortecedor estão associados em paralelo, a tensão total σ no modelo é a soma das componentes σ' e σ'' :

$$\sigma = \sigma' + \sigma'', \quad (3.19)$$

$$= k\epsilon + \mu\dot{\epsilon}, \quad (3.20)$$

que escrita na forma padrão

$$\sigma = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}, \quad (3.21)$$

é a equação constitutiva do material de Kelvin.

Novamente, para estudar o comportamento representado por este modelo, realiza-se o ensaio de dois estágios. No primeiro estágio, o ensaio de fluência, tem-se uma tensão constante $\sigma = \sigma_0$ e a equação (3.21) tem como solução

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{q_0} + C_1 e^{-t/\rho_1}, \quad (3.22)$$

sendo $\rho_1 = q_1/q_0$ o tempo de fluência.

No instante $t = 0$ de aplicação do carregamento, a tensão σ varia instantaneamente de 0 a σ_0 , permanecendo finita, o mesmo devendo ocorrer com a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ dada por (3.21). Consequentemente a condição inicial para (3.22) é $\epsilon(0^+) = 0$, o que resulta no valor de $C_1 = -\sigma_0/q_0$. Desta forma tem-se

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{q_0} \left(1 - e^{-t/\rho_1}\right), \quad (3.23)$$

que é a expressão da deformação de fluência, ilustrada na figura 3.7 no intervalo de tempo $0 < t < t_1$. Extendendo este estágio do ensaio por um longo período de tempo, $t \rightarrow \infty$, a deformação não aumenta indefinidamente, mas aproxima-se de um valor limite ϵ_∞ , proporcional a tensão, de forma semelhante ao que ocorre com um sólido elástico. Este modelo é denominado sólido de Kelvin

$$\epsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{q_0}, \quad \text{isto é,} \quad \epsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E_\infty}, \quad (3.24)$$

sendo E_∞ denominado **módulo assintótico**, [1].

O segundo estágio do ensaio inicia no instante $t = t_1$, quando a deformação é mantida constante, $\epsilon = \epsilon_1$. A partir de (3.21) e usando (3.23), chega-se a seguinte expressão para a tensão

$$\begin{aligned} \sigma &= q_0 \epsilon_1, \\ \sigma &= \sigma_0 \left(1 - e^{-t_1/\lambda_1}\right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

No ensaio de relaxação, a tensão diminui instantaneamente a um certo valor e permanece constante o restante do ensaio, ou seja, a relaxação é incompleta.

Como será visto adiante, a transformada de Laplace desempenha um importante papel no estudo de modelos viscoelásticos. Desta forma, a seguir é feita uma breve descrição da transformada de Laplace.

3.4.4 Transformada de Laplace

Seja uma função $f(t)$, contínua por partes e de ordem exponencial no domínio $(0, \infty)$. Então a integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (3.26)$$

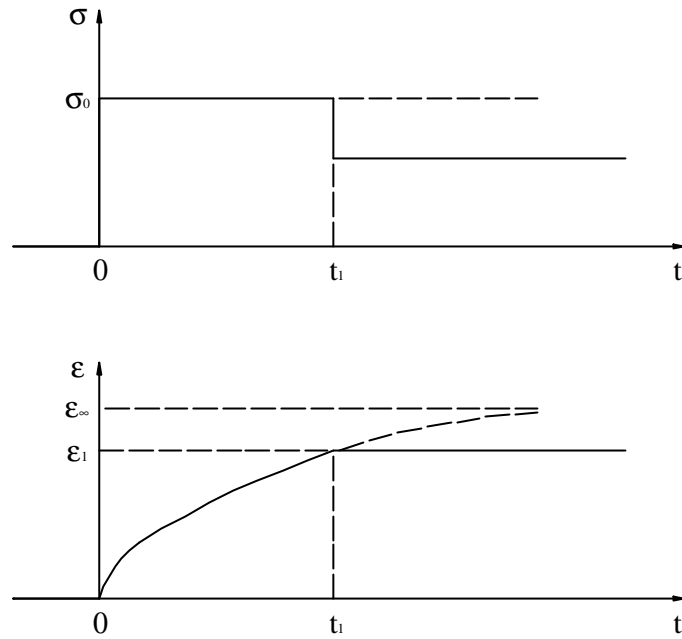


Figura 3.7: Ensaio de fluência e relaxação do modelo de Kelvin.

converge para certos valores de s , definindo uma função de s denominada Transformada de Laplace, representada por $\mathcal{L}[f]$. Através de $\mathcal{L}[f]$ e do comportamento de f em 0, pode-se exprimir a transformada da derivada de f

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0^+), \tag{3.27}$$

sendo $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.

De modo mais geral, se $f, f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$ são contínuas para $t > 0$ e se $f^{(n)}$ é contínua por partes e de ordem exponencial no domínio $[0^+, \infty)$, então

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f^{(1)}(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+). \tag{3.28}$$

Uma importante aplicação da transformada de Laplace, refere-se a solução de problemas de valor inicial. Dada uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes

$$a_n f^{(n)} + \dots + a_1 f^{(1)} + a_0 f = h(t), \tag{3.29}$$

e as condições iniciais

$$\left\| \begin{array}{l} f(0) = f_0, \\ f'(0) = f_1, \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(0) = f_{n-1}, \end{array} \right. \tag{3.30}$$

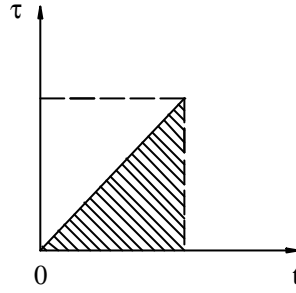


Figura 3.8: Região de integração de 3.34

então pode-se usar (3.27) para transformar este problema de valor inicial numa equação linear da forma

$$\mathcal{L}[f] = \phi(s), \tag{3.31}$$

quando $h(t)$ é de ordem exponencial. Determinando $\mathcal{L}^{-1}[\phi]$, obtém-se a solução do problema

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\phi]. \tag{3.32}$$

3.4.5 Teorema da Convolução

Seja a integral $h(t)$ do produto das funções $f(t)$ e $g(t)$, contínuas por partes e de ordem exponencial

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau. \tag{3.33}$$

Então, empregando a definição da transformada de Laplace, tem-se que

$$\mathcal{L}[h] = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau dt, \tag{3.34}$$

sendo que a integração é realizada na região do plano (t, τ) , figura (3.8), descrita pelas desigualdades

$$0 \leq \tau \leq t \quad \text{e} \quad 0 \leq t \leq \infty, \tag{3.35}$$

ou

$$\tau \leq t \leq \infty \quad \text{e} \quad 0 \leq \tau \leq \infty. \tag{3.36}$$

Conseqüentemente a integral (3.34) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h] &= \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)g(\tau) dt d\tau, \\ \mathcal{L}[h] &= \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau) dt \right] d\tau. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Fazendo a mudança de variável $u = t - \tau$ em $\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau) dt$, obtém-se

$$\mathcal{L}[h] = \int_0^{\infty} g(\tau) \left[\int_0^{\infty} e^{-s(u+\tau)} f(u) du \right] d\tau, \quad (3.38)$$

que pode ser escrita como um produto de integrais

$$\mathcal{L}[h] = \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \int_0^{\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau. \quad (3.39)$$

Reconhecendo que as integrais do lado direito da expressão (3.39) são as transformadas das funções f e g , então

$$\mathcal{L}[h] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]. \quad (3.40)$$

A integral (3.33) denomina-se convolução de f e g . A transformada de Laplace da convolução é o produto das transformadas de f e g , sendo útil na construção de inversas de operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes.

3.4.6 Função degrau unitário

Nas seções anteriores descreveu-se a aplicação instantânea de uma tensão σ , dividindo o eixo do tempo em duas partes e estabelecendo duas expressões diferentes para a tensão, $\sigma = 0$ para $t < 0$ e $\sigma = \sigma_0$ para $t > 0$. Isto pode ser escrito de uma forma mais compacta através da função degrau unitária definida como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(t) \left\{ \begin{array}{ll} = 0, & t < 0, \\ = t/\varepsilon, & 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ = 1, & t > \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

Com esta função, o carregamento no ensaio de fluência é definido como $\sigma = \sigma_0 \Delta(t)$. Para introduzir este carregamento nas equações diferenciais, são necessárias as derivadas no tempo da função $\Delta(t)$. Derivando (3.41), obtém-se uma função δ que é nula em todo o domínio, exceto num pequeno intervalo ε .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t) \left\{ \begin{array}{ll} = 0, & t < 0, \\ = 1/\varepsilon, & 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ = 0, & t > \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

A integral desta função ao longo de qualquer parte do domínio, desde que incluindo o intervalo $0 \leq t \leq \varepsilon$, tem valor unitário

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\varepsilon} (1/\varepsilon) dt = 1. \quad (3.43)$$

No limite $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta(t)$ tem valor infinito, constituindo-se numa função singular, porém a sua integral permanece unitária. O processo que conduz de $\Delta(t)$ para $\delta(t)$ pode ser repetido, originando uma sequência de funções singulares.

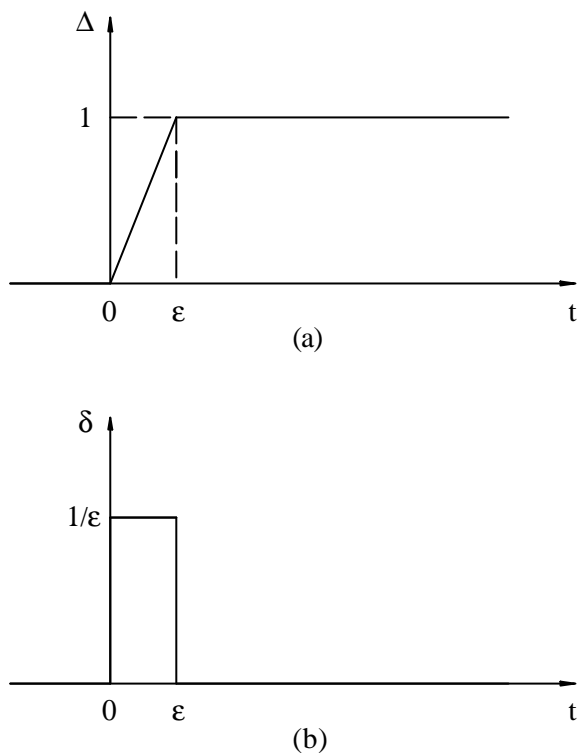


Figura 3.9: Função degrau unitária (a) e delta de Dirac (b).

3.4.7 Modelo de Zener - Sólido viscoelástico padrão

A figura 3.10 mostra uma mola e um elemento de Kelvin associados em série, constituindo o modelo de Zener.

Tem-se as seguintes expressões envolvendo as deformações de ambas as partes

$$\begin{aligned} \sigma &= k_0 \epsilon', \\ \sigma &= k_1 \epsilon'' + \mu_1 \dot{\epsilon}'' . \end{aligned} \tag{3.44}$$

A determinação da equação constitutiva deste modelo é feita com o auxílio da transformada de Laplace. Considerando que k_0 , k_1 e μ_1 são constantes, obtém-se

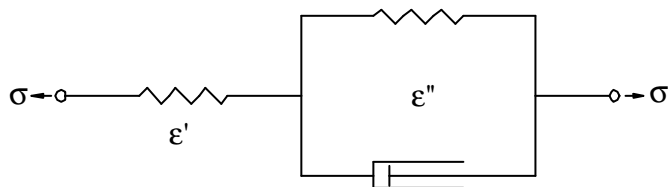


Figura 3.10: Modelo de Zener: sólido padrão.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sigma] &= k_0 \mathcal{L}[\epsilon'], \\ &= (k_1 + \mu_1 s) \mathcal{L}[\epsilon'']. \end{aligned} \quad (3.45)$$

A deformação total ϵ deste modelo, é a soma das deformações ϵ' da mola e ϵ'' do elemento de Kelvin

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon''. \quad (3.46)$$

Aplicando a transformada de Laplace a esta expressão, tem-se

$$\mathcal{L}[\epsilon] = \mathcal{L}[\epsilon'] + \mathcal{L}[\epsilon'']. \quad (3.47)$$

Substituindo nesta expressão, as equações (3.45) chega-se a

$$k_0 (k_1 + \mu_1 s) \mathcal{L}[\epsilon] = (k_1 + \mu_1 s) \mathcal{L}[\sigma] + k_0 \mathcal{L}[\sigma]. \quad (3.48)$$

Esta expressão pode ser transformada para o domínio do tempo, resultando na seguinte equação diferencial

$$k_o k_1 \epsilon + k_o \mu_1 \dot{\epsilon} = (k_o + k_1) \sigma + \mu_1 \dot{\sigma}, \quad (3.49)$$

que pode ser escrita na forma padrão como

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}, \quad (3.50)$$

sendo

$$p_1 = \frac{\mu_1}{k_o + k_1}, \quad q_0 = \frac{k_0 k_1}{k_o + k_1}, \quad q_1 = \frac{k_0 \mu_1}{k_o + k_1} \quad (3.51)$$

parâmetros positivos em virtude das constantes mecânicas k_0 , k_1 e μ_1 serem todas positivas.

Através do ensaio de fluência e de relaxação de tensão, pode-se conhecer o comportamento representado pelo modelo de Zener. No ensaio de fluência, aplica-se instantaneamente um carregamento que é então mantido constante ao longo do tempo. Este carregamento pode ser representado através da função degrau unitária

$$\sigma = \sigma_o \Delta(t), \quad (3.52)$$

ou

$$\mathcal{L}[\sigma] = \sigma_o / s. \quad (3.53)$$

Aplicando a transformada de Laplace a equação (3.50) e substituindo o carregamento, chega-se a

seguinte expressão

$$\sigma_0 \left(\frac{1}{s} + p_1 \right) = (q_0 + q_1) \mathcal{L} [\epsilon], \quad (3.54)$$

e reagrupando termos, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\epsilon] &= \sigma_0 \frac{1 + p_1 s}{s(q_0 + q_1 s)}, \quad \text{isto é,} \\ &= \frac{\sigma_0}{q_1} \left[\frac{1}{s(q_0/q_1 + s)} + \frac{p_1}{q_0/q_1 + s} \right]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

A transformada de Laplace inversa desta equação fornece a deformação de fluência descrita por este modelo

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{q_1} \left[\frac{q_1}{q_0} \left(1 - e^{-q_0 t/q_1} \right) + p_1 e^{-q_0 t/q_1} \right], \quad \text{isto é,} \\ &= \frac{\sigma_0}{q_0} \left[1 - \left(1 - \frac{p_1 q_0}{q_1} \right) e^{-t/\rho_1} \right], \end{aligned} \quad (3.56)$$

sendo $\rho_1 = q_0/q_1$.

Nesta equação o termo entre parênteses deve ser positivo, pois um material submetido a um carregamento trativo apresenta gradualmente uma elongação. Caso este termo seja negativo, o modelo descreve uma contração do material, mesmo estando submetido a um carregamento de tração. Desta forma a seguinte condição deve ser satisfeita

$$1 - \frac{p_1 q_0}{q_1} > 0, \quad \text{isto é,} \quad q_1 > p_1 q_0. \quad (3.57)$$

Estudando a equação (3.56), observa-se que este modelo apresenta uma resposta instantânea inicial ao carregamento aplicado

$$\epsilon_0 \equiv \epsilon(0^+) = \frac{\sigma_0 p_1}{q_1} = \frac{\sigma_0}{k_0},$$

e desde que a condição (3.57) seja satisfeita, a deformação aumenta tendendo a um valor limite dado por

$$\epsilon_\infty \equiv \epsilon(\infty) = \frac{\sigma_0}{q_0} = \frac{\sigma_0}{E_\infty}.$$

Na figura 3.11, no intervalo $0 < t < t_1$, está representado graficamente o comportamento deste modelo durante o ensaio de fluência

Desta forma, o modelo de Zener representa o comportamento de um material sólido [1].

Para o ensaio de relaxação de tensão, que inicia no instante $t = t_1$, é definida uma nova variável para o tempo, $\tau = t - t_1$. Para $\tau \geq 0$, a deformação pode ser escrita como

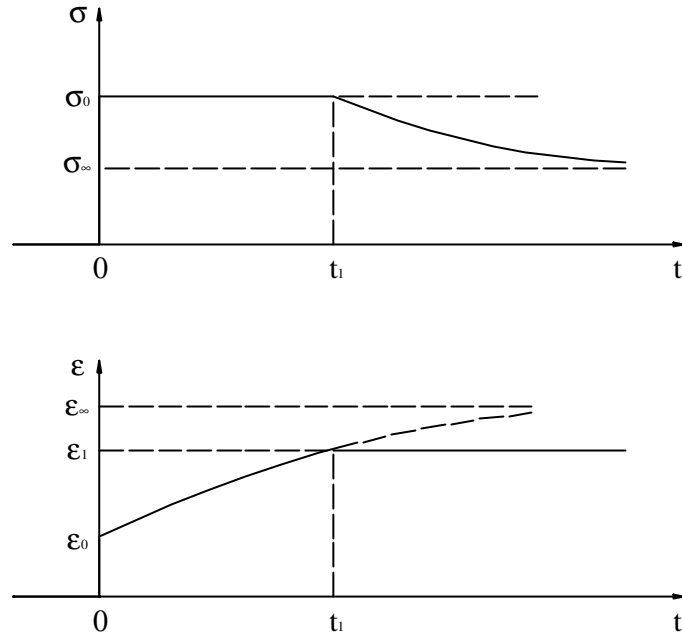


Figura 3.11: Ensaio de fluência e relaxação do modelo de Zener.

$$\epsilon(t) = \epsilon_1 \Delta(\tau), \tag{3.58}$$

ou

$$\mathcal{L}[\epsilon] = \epsilon_1/s. \tag{3.59}$$

Aplicando a transformada de Laplace a (3.50) e substituindo a deformação pela expressão anterior, obtém-se

$$\mathcal{L}[\sigma] + p_1(s\mathcal{L}[\sigma] - \sigma_0) = q_0\mathcal{L}[\epsilon] + q_1(s\mathcal{L}[\epsilon] - \epsilon_1). \tag{3.60}$$

Resolvendo para $\mathcal{L}[\sigma]$, chega-se a

$$\mathcal{L}[\sigma] = \frac{q_0\epsilon_1}{s(1+p_1s)} + \frac{p_1\sigma_0}{1+p_1s}, \tag{3.61}$$

cuja transformada inversa de Laplace fornece a tensão durante o ensaio

$$\sigma(t) = q_0\epsilon_1 \left(1 - e^{-t/\lambda_1}\right) + \sigma_0 e^{-t/\lambda_1}, \tag{3.62}$$

sendo $\lambda_1 = p_1$.

De acordo com este modelo, ocorre uma redução gradual de tensão tendendo a um valor limite

$$\sigma_\infty = q_0\epsilon_1, \quad \text{isto é,} \quad \sigma_\infty = E_\infty\epsilon_1. \tag{3.63}$$

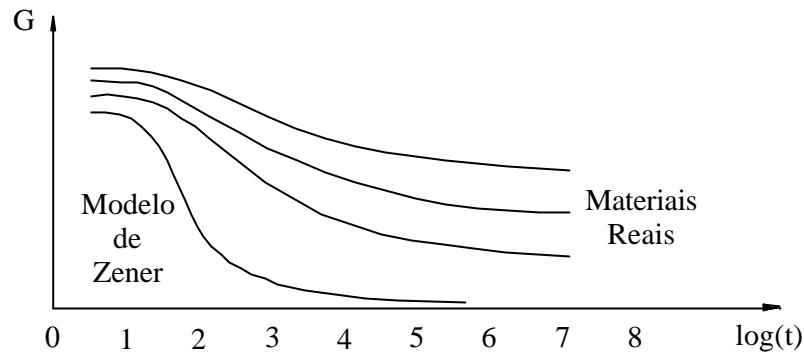


Figura 3.12: Módulo de relaxação do modelo de Zener e de materiais reais.

Este comportamento está representado na figura 3.11 para o tempo $t > t_1$.

Como mostrado nesta figura, o modelo de Zener descreve corretamente as características de um material viscoelástico linear observadas experimentalmente em ensaios de fluência e relaxação de tensão. Porém esta descrição não é completamente adequada, como pode ser visto no gráfico do módulo de relaxação na fig.3.12. A completa relaxação de tensão do modelo de Zener ocorre em um intervalo de tempo aproximadamente menor que uma década, o que não se verifica com os materiais reais, em que a relaxação desenvolve-se por períodos de tempo muito maiores.

Este período de relaxação maior dos materiais reais, deve-se a existência de uma distribuição de tempos de relaxação. Através de modelos mais complexos, é possível introduzir uma distribuição de tempos de relaxação, estendendo o período de relaxação de tensão para valores mais realistas [4].

3.4.8 Cadeias Generalizadas de Kelvin e de Maxwell

Existem duas formas de construção sistemática de modelos mais complexos: a cadeia de Kelvin e o modelo de Maxwell [2]. No primeiro caso, um certo número de unidades de Kelvin são conectadas em série, figura 3.13a, sendo possível incluir também uma mola ou amortecedor em série. A presença da mola adicional confere ao modelo, resposta a impacto ($E_0 \neq 0$) e a presença do amortecedor resulta em comportamento de fluido ($E_\infty = 0$). No modelo de Maxwell, figura 3.13b, várias unidades podem ser conectadas em paralelo. Assim como no caso anterior, a presença de uma mola ou amortecedor adicional, confere ao modelo resposta a impacto ou comportamento de fluido. Em particular, estaremos usando intensamente o chamado **sólido de Maxwell de ordem n** , significando o modelo representado na figura 3.13b com a mola isolada e n unidades mola-amortecedor em paralelo. Note que a ausência da mola isolada implica que o modelo se comporta como fluido.

A equação diferencial de qualquer modelo de Kelvin ou Maxwell tem a forma

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \dots = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon} + \dots \quad (3.64)$$

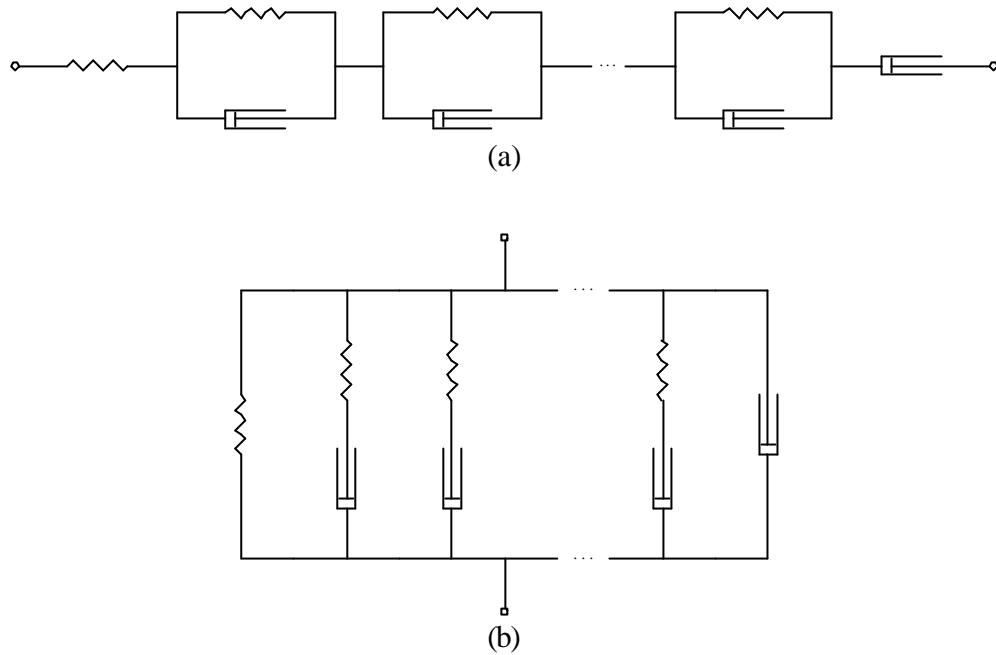


Figura 3.13: Modelos viscoelásticos: a) Cadeia de Kelvin, b) Modelo de Maxwell generalizado.

ou

$$\sum_{i=0}^m p_i \frac{d^i \sigma}{dt^i} = \sum_{i=0}^n q_i \frac{d^i \epsilon}{dt^i}, \quad (3.65)$$

onde foi definido $p_0 = 1$. A equação (3.65) também pode ser escrita como

$$P(t) \sigma = Q(t) \epsilon, \quad (3.66)$$

sendo P e Q operadores diferenciais

$$\boxed{P(t) = \sum_{i=0}^m p_i \frac{d^i}{dt^i} \quad \text{e} \quad Q(t) = \sum_{i=0}^n q_i \frac{d^i}{dt^i}} \quad (3.67)$$

A equação (3.64) em qualquer de suas formas descreve matematicamente o comportamento mecânico de um material viscoelástico, sendo denominada equação constitutiva [22], [21] e [5].

Aplicando a transformada de Laplace a (3.65), chega-se a uma relação algébrica entre as transformadas de Laplace da tensão $\mathcal{L}[\sigma]$ e deformação $\mathcal{L}[\epsilon]$

$$\sum_{i=0}^m p_i s^i \mathcal{L}[\sigma] = \sum_{i=0}^n q_i s^i \mathcal{L}[\epsilon], \quad (3.68)$$

que pode ser escrita como

$$P(s) \mathcal{L}[\sigma] = Q(s) \mathcal{L}[\epsilon], \quad (3.69)$$

sendo P e Q polinômios em s :

$$\boxed{P(s) = \sum_{i=0}^m p_i s^i \quad \text{e} \quad Q(s) = \sum_{i=0}^n q_i s^i} \quad (3.70)$$

os quais, possuem os mesmos coeficientes que os operadores diferenciais P e Q .

Estudando os modelos simples de materiais viscoelásticos, verifica-se que alguns deles apresentam resposta instantânea e outros não, alguns são sólidos, que sob tensão constante deformam-se até um valor limite e alguns são fluidos que sofrem fluência a uma taxa de deformação constante. Se o coeficiente $q_0 = 0$, existem apenas derivadas da deformação no lado direito de (3.64) e a equação constitutiva representa o comportamento de um fluido. Se $q_0 \neq 0$, a tensão e a deformação aproximam-se de valores finitos e todas as derivadas de ambos os lados de (3.64) anulam-se para $t \rightarrow \infty$. No limite, tem-se $\sigma = q_0 \epsilon$ e define-se então o módulo assintótico

$$E_\infty = q_0. \quad (3.71)$$

Uma resposta elástica inicial com módulo E_0 ocorre, se o número de termos em ambos os lados de (3.64) for igual.

3.5 Módulo de Fluência e Módulo de Relaxação

Como mostrado nas seções anteriores, o estudo do comportamento representado por modelos mecânicos de materiais viscoelásticos é feito através de um ensaio consistindo de um estágio de fluência e um estágio de relaxação. No estágio de fluência, aplica-se uma tensão trativa constante $\sigma = \sigma_0 \Delta(t)$ e determina-se a deformação ϵ dependente do tempo. Considerando somente materiais lineares, a deformação é sempre proporcional à tensão σ_0 e pode ser escrita como

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t). \quad (3.72)$$

A função $J(t)$ é a deformação por unidade de tensão aplicada, sendo diferente para cada material. Para qualquer instante $t < 0$, $J(t) \equiv 0$ e, para $t > 0$, $J(t)$ é uma função que cresce monotonicamente, pois, mantendo-se o carregamento uniforme, o material apresenta uma elongação. A função $J(t)$ é denominada **módulo de fluência** [1] e [4].

Obtém-se $J(t)$ à partir da equação diferencial do material, o que pode ser feito mais convenientemente através da transformada de Laplace, introduzindo $\mathcal{L}[\sigma] = 1/s$ na equação (3.69) e resolvendo para $\mathcal{L}[\epsilon] = \mathcal{L}[J]$ tem-se então

$$\mathcal{L}[J] = \frac{P(s)}{sQ(s)}. \quad (3.73)$$

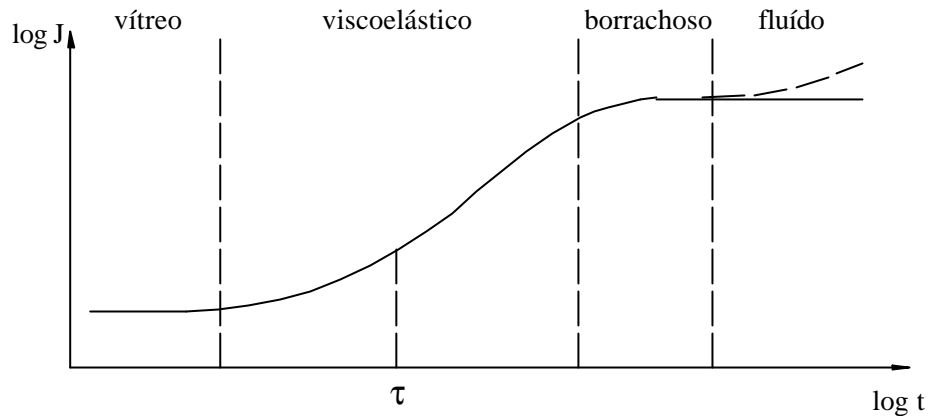


Figura 3.14: Variação do módulo de fluência em relação ao tempo.

O quociente dos dois polinômios pode ser separado em frações parciais que são transformadas para o domínio físico do tempo, fornecendo o módulo de fluência $J(t)$ como uma soma de funções exponenciais e possivelmente mais uma constante. A dependência do módulo de fluência $J(t)$, em relação ao tempo, pode ser visualizada através de um gráfico em escala log-log, como mostrado na figura 3.14.

Quando o período de tempo de um ensaio de fluência é muito pequeno, o material demonstra um comportamento elástico com um baixo módulo de fluência. Em um período de tempo intermediário entre o instante em que o material exibe um comportamento de um sólido rígido elástico e o instante em que o material comporta-se como borracha, o módulo de fluência é dependente do tempo de aplicação do carregamento e o material é considerado como viscoelástico. A dependência do módulo de fluência em relação ao tempo é expressa através de uma relação entre o tempo de aplicação do carregamento e um parâmetro característico do material. Em fluência, este parâmetro é chamado de **tempo de fluência**, τ , e varia para diferentes materiais dependendo da estrutura molecular [4].

O procedimento que conduziu a $J(t)$ pode ser invertido, prescrevendo uma deformação $\epsilon(t) = \epsilon_0 \Delta(t)$ e resolvendo a equação constitutiva diferencial do modelo para obter a evolução da tensão. Isto implica em submeter o modelo no instante $t = 0$ a uma certa tensão, produzindo a deformação desejada ϵ_0 , a qual é mantida constante na sequência do ensaio, enquanto se observa a variação da tensão.

Desde que as equações sejam lineares, a tensão σ é proporcional a deformação ϵ_0

$$\sigma(t) = Y(t) \epsilon_0. \quad (3.74)$$

A função $Y(t)$ é denominada **módulo de relaxação** e é sempre monotonicamente decrescente [1], ou ao menos, é uma função não crescente ao longo do tempo. Introduzindo em (3.69) a transformada da

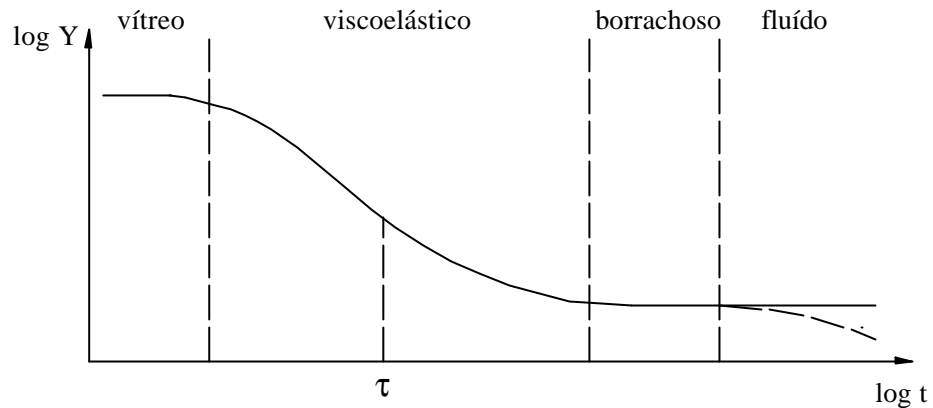


Figura 3.15: Variação do módulo de relaxação em relação ao tempo.

deformação $\mathcal{L}[\epsilon] = 1/s$ e $\mathcal{L}[\sigma] = \mathcal{L}[Y]$, chega-se a expressão

$$\mathcal{L}[Y] = \frac{Q(s)}{sP(s)}, \tag{3.75}$$

a partir da qual, pode-se obter o módulo de relaxação $Y(t)$. A variação de $Y(t)$ com o tempo é apresentada em um gráfico em escala log-log, como mostrado na figura 3.15.

Na relaxação de tensão existem as mesmas regiões de comportamento, como ocorre na fluência. Nos instantes iniciais, o material é rígido e possui um alto módulo. Após um certo período, o módulo é baixo e o material comporta-se como borracha. A presença de escoamento viscoso afeta o valor limite do módulo. Se ocorre escoamento, o módulo reduz ao longo do tempo até atingir um valor infinitesimal e a tensão no material reduz a um valor nulo. Quando não há escoamento viscoso, após um certo período de tempo o módulo de relaxação atinge um valor constante. Em instantes intermediários o material comporta-se viscoelasticamente com um módulo de relaxação que depende do tempo. O tempo de duração da relaxação depende da estrutura molecular do material e é caracterizado pelo **tempo de relaxação**, λ [4].

Embora o processo molecular que governa a fluência seja similar ao que governa a relaxação, em geral o tempo de fluência e o tempo de relaxação têm valores diferentes

Comparando (3.73) com (3.75) chega-se a uma relação simples entre a transformada de Laplace do módulo de relaxação e do módulo de fluência

$$\boxed{\mathcal{L}[J] \mathcal{L}[Y] = s^{-2}} \tag{3.76}$$

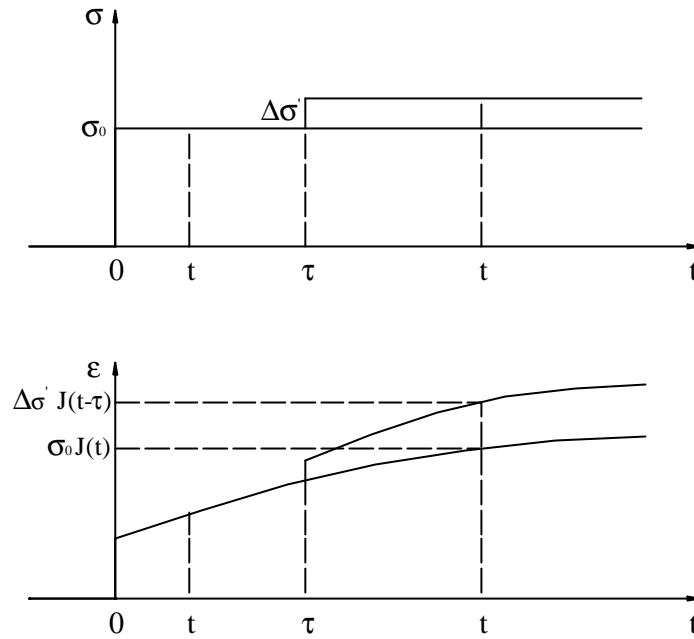


Figura 3.16: Princípio da sobreposição de Boltzmann.

3.5.1 Princípio da Sobreposição de Boltzmann

Considerando somente materiais lineares, pode-se empregar a regra da sobreposição linear, o Princípio da Sobreposição de Boltzmann [4], [1] e [3], para calcular a deformação produzida pela ação comum de vários carregamentos aplicados em diferentes intervalos de tempo gerando tensões de tração de diferentes magnitudes. Como exemplo, considerar o caso mostrado na figura 3.16. Uma tensão σ_0 é aplicada instantaneamente em $t = 0$, produzindo uma deformação $\epsilon = \sigma_0 J(t)$. Se a tensão σ_0 é mantida inalterada, esta equação descreve a deformação em qualquer instante de tempo seguinte. Mas, se em $t = \tau$ outra tensão é acrescentada, então para $t > \tau$ será produzida uma deformação adicional proporcional a $\Delta\sigma'$ e que depende do mesmo módulo de fluência. Porém, para esta deformação adicional, o tempo passa a transcorrer à partir do instante $t = \tau$. A deformação total para $t > \tau$ é então

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \Delta\sigma' J(t - \tau). \tag{3.77}$$

Para o caso geral, é assumido como antes, uma tensão σ_0 aplicada instantaneamente em $t = 0$. Mas esta tensão varia de acordo com uma função $\sigma(t)$. Como mostrado na figura 3.17, este carregamento pode ser decomposto em uma componente base $\sigma_0 \Delta(t)$ e uma sequência de funções degrau infinitesimais $d\sigma' \Delta(t - \tau)$, sendo $d\sigma' = (d\sigma/dt)|_{t=\tau}$, que pode ser escrito como $d\sigma' = d\sigma/d\tau$. A correspondente deformação no instante t é então a soma das deformações causadas por todos os degraus de carga aplicados anteriormente ao instante τ , isto é

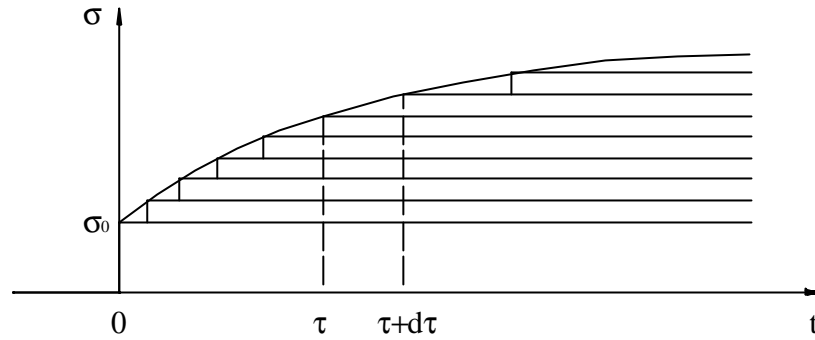


Figura 3.17: Carregamento variável no tempo.

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_{0^+}^t J(t - \tau) \frac{d\sigma'}{d\tau} d\tau. \quad (3.78)$$

Esta expressão mostra que a deformação em qualquer instante de tempo t , depende de toda a sequência de tensão $\sigma'(\tau)$, $\tau < t$, ocorrida anteriormente a t . Isto difere do que ocorre com um material elástico, em que a deformação em qualquer instante depende apenas da tensão atuante naquele momento.

A integral da equação (3.78) é denominada de integral hereditária. Integrando por partes, a equação (3.78) pode ser expressa como

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + [J(t - \tau) \sigma(\tau)] \Big|_{0^+}^t - \int_{0^+}^t \sigma(\tau) \frac{dJ(t - \tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.79)$$

Somando os dois primeiros termos do lado direito desta igualdade e escrevendo $dJ(t - \tau)/d\tau = -dJ(t - \tau)/d(t - \tau)$, chega-se a seguinte expressão

$$\epsilon(t) = \sigma(t) J(0) + \int_{0^+}^t \sigma(\tau) \frac{dJ(t - \tau)}{d(t - \tau)} d\tau. \quad (3.80)$$

Enquanto a expressão (3.78) separa as deformações causadas pelo carregamento inicial σ_0 e pelos incrementos posteriores, a expressão (3.80) fornece a deformação determinando a parcela instantânea devida a tensão total σ no instante t e a deformação adicional devida a parcela da tensão aplicada anteriormente ao instante t .

A integral hereditária (3.78) pode ser submetida a algumas alterações que facilitam o seu uso. Aos vários incrementos de tensão $d\sigma'/d\tau$, aplicados em sucessivos incrementos de tempo, é possível adicionar um incremento finito de tensão $\Delta\sigma_1$ em um instante $t = t_1$. Desta forma, o degrau inicial de tensão σ_0 , pode ser incorporado a integral e o limite inferior de integração pode ser alterado para $\tau = -\infty$, pois para $\tau < 0$ não há tensão $\sigma'(\tau)$ aplicada. Obtém-se então, a seguinte integral de

convolução [22]

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma'}{d\tau} d\tau. \quad (3.81)$$

As integrais (3.78), (3.80) e (3.81) foram obtidas à partir da definição do módulo de fluência contida em (3.72). Um procedimento similar pode ser adotado partindo do módulo de relaxação $Y(t)$ dado por (3.74). Se a deformação é conhecida como uma função do tempo, então a tensão pode ser obtida mediante qualquer das três equações a seguir

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \epsilon_0 Y(t) + \int_{0^+}^t Y(t-\tau) \frac{d\epsilon'}{d\tau} d\tau, \\ &= \epsilon(t) Y(0) + \int_{0^+}^t \epsilon(\tau) \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau, \\ &= \int_{-\infty}^t Y(t-\tau) \frac{d\epsilon'}{d\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.82)$$

3.6 Análise de Tensões e Deformações 3-D

Em problemas com apenas uma componente de tensão e deformação, a relação constitutiva (3.64) e suas equivalentes (3.78) a (3.82) são apropriadas para descrever o comportamento do material. Quando há mais de uma componente é necessária uma generalização triaxial da relação constitutiva.

O tensor de tensões pode ser decomposto em parcelas esférica e deviatórica:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_v & 0 & 0 \\ 0 & S_v & 0 \\ 0 & 0 & S_v \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}}. \quad (3.83)$$

O primeiro tensor do lado direito da igualdade, o tensor de tensões volumétrico ou hidrostático, é definido pela tensão volumétrica ou hidrostática S_v como

$$S_v \equiv \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (3.84)$$

O segundo tensor do lado direito de (3.83), o tensor deviatórico \mathbf{S} , é obtido simplesmente subtraindo o tensor volumétrico do tensor de tensões completo. Como a soma dos termos da diagonal principal, ou o traço da matriz, de ambos os lados de (3.83) devem ser iguais, tem-se então para o tensor deviatórico,

$$S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0. \quad (3.85)$$

O tensor deviatórico pode ser representado como a sobreposição de cinco estados de tensão cisalhante

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{23} \\ 0 & S_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix}. \tag{3.86}
\end{aligned}$$

Os três primeiros tensores no lado direito desta expressão, representam cisalhamento puro, ou seja, $S_{ij} = \sigma_{ij}$. O quarto e quinto tensores representam estados planos de tensão equivalentes a estados de cisalhamento puro.

Considerando pequenas deformações e isotropia de propriedades, o tensor de tensões volumétrico produz somente deformações que alteram o tamanho do elemento diferencial de volume. Por outro lado, cada estado de tensão representado em (3.86) produz somente deformação cisalhante, seja uma variação do ângulo entre duas faces ou planos diagonais do elemento de volume. Porém nenhum destes estados de tensão cisalhante produz alteração de volume.

Pode-se fazer um estudo semelhante das deformações, considerando dois tipos de deformação: a deformação extensional e a cisalhante. A deformação extensional, ϵ_{11} , ϵ_{22} ou ϵ_{33} , descreve uma variação de comprimento de um elemento de linha. A deformação cisalhante, por exemplo γ_{12} , descreve a variação do ângulo entre dois elementos de linha dx_1 e dx_2 .

As componentes de deformação formam o tensor de deformação, que pode ser separado em outros dois tensores. Representando na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_v & 0 & 0 \\ 0 & E_v & 0 \\ 0 & 0 & E_v \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}}, \tag{3.87}$$

sendo que, por conveniência, a deformação cisalhante é representada como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij}, \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3 \text{ e } i \neq j. \tag{3.88}$$

Na expressão (3.87), o tensor de deformação está separado em um tensor volumétrico, que representa uma dilatação pura, sem variação de forma e um tensor deviatórico, que representa a distorção, a variação de forma a volume constante.

O traço do tensor de deformação volumétrico fornece a variação de volume, sendo suas componentes não-nulas dadas por

$$E_v \equiv \frac{1}{3} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}), \tag{3.89}$$

e, em virtude do tensor de deformação deviatórico representar a distorção a volume constante, tem-se

então que

$$E_{11} + E_{22} + E_{33} = 0. \quad (3.90)$$

O tensor de deformação deviatórico, a exemplo do tensor de tensão deviatórico, também pode ser representado como a sobreposição de cinco estados simples de deformação cisalhante

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & E_{12} & 0 \\ E_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{23} \\ 0 & E_{32} & 0 \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_{33} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

3.6.1 Relação Constitutiva Viscoelástica-isotrópica 3-D

Em um material viscoelástico isotrópico, um estado hidrostático de tensões produz somente dilatação volumétrica, sem distorção. As tensões e deformações volumétricas, S_v e E_v , podem ser relacionadas pela equação diferencial (3.64) ou equivalente:

$$\sum_{i=0}^{m''} p_i'' \frac{d^i S_v}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n''} q_i'' \frac{d^i E_v}{dt^i}, \quad (3.92)$$

que pode ser posta na forma de operadores diferenciais:

$$P'' [S_v] = Q'' [E_v]. \quad (3.93)$$

Na forma integral, a relação entre S_v e E_v é:

$$S_v(t) = \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{dE_v(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.94)$$

e, inversamente,

$$E_v(t) = \int_{-\infty}^t J''(t-\tau) \frac{dS_v(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.95)$$

sendo $K(t)$ o módulo de relaxação volumétrico. $J''(t)$ o módulo de fluência volumétrico.

Por outro lado, cada um dos cinco estados de tensão em (3.86), produz uma deformação cisalhante correspondente, representadas pelas matrizes em (3.91). Devido a isotropia do material, a relação entre estes cinco pares de tensão e deformação deve ser a mesma

$$\sum_{i=0}^{m'} p_i' \frac{d^i S_{kl}}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n'} q_i' \frac{d^i E_{kl}}{dt^i}, \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (3.96)$$

ou

$$P' [\mathbf{S}] = Q' [\mathbf{E}]. \quad (3.97)$$

A relação entre estas componentes na forma integral fica

$$S_{kl}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{dE_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad e \quad (3.98)$$

$$E_{kl}(t) = \int_{-\infty}^t J'(t-\tau) \frac{dS_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3.99)$$

sendo $G(t)$ o módulo de relaxação deviatório e $J'(t)$ o módulo de fluência deviatório [22]. Os pares de operadores P'' , Q'' e P' , Q' que descrevem o material viscoelástico, são independentes um do outro, isso é, pode-se escolher modelar cada par por um cadeia generalizada de Maxwell (ou de Kelvin) distinta [22], [21], [19] e [23].

Caso particular – Sólido elástico linear

A relação tensão-deformação triaxial para sólidos elástico-lineares isotrópicos é um caso particular da relação viscoelástica definida acima. Isso é verificado primeiro tomando a relação elástico-linear, que toma a seguinte forma quando as tensões e deformações são separadas em parcela volumétrica e deviatória:

$$S_v = K_{el} (3E_v) \quad e \quad S_{kl} = G_{el} (2E_{kl}), \quad (3.100)$$

sendo K_{el} o módulo volumétrico elástico e G_{el} o módulo cisalhante elástico. Comparado (3.100) com as relações viscoelásticas (3.92) e (3.96), nota-se que essas últimas modelam as primeiras se as constantes forem definidas tais que:

$$P' = 1, \quad Q' = 2G_{el}, \quad P'' = 1, \quad Q'' = 3K_{el}. \quad (3.101)$$

3.6.2 Ensaio de Tração Uniaxial

As relações (3.92) e (3.96) são formulações gerais de equações constitutivas viscoelásticas de materiais isotrópicos. A relação constitutiva diferencial pode ser expressa entre a tensão e a deformação totais pela eq.(3.64), ou relacionando separadamente os pares tensão-deformação volumétrico e deviatóricos, através de relações entre os operadores P'' , Q'' e P' , Q' , como será visto a seguir. Para a caracterização experimental do material, também é importante conhecer as relações entre esses pares de operadores e os operadores completos P , Q , como serão deduzidas a seguir [27].

No caso de tração uniaxial, tem-se apenas uma componente de tensão, σ_{11} , por exemplo. A componente volumétrica de tensão é obtida da relação (3.84) como

$$S_v = \frac{1}{3} \sigma_{11}, \quad (3.102)$$

e as componentes deviatóricas são

$$S_{11} = \frac{2}{3}\sigma_{11} \quad \text{e} \quad S_{22} = S_{33} = -\frac{1}{3}\sigma_{11}. \quad (3.103)$$

A deformação tem três componentes: a deformação axial ϵ_{11} e as deformações transversais ϵ_{22} e ϵ_{33} , sendo $\epsilon_{22} = \epsilon_{33}$. A partir de (3.89), tem-se a deformação volumétrica

$$E_v = \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + 2\epsilon_{22}) \quad (3.104)$$

e, conseqüentemente, as deformações deviatóricas

$$E_{11} = \frac{2}{3}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \quad \text{e} \quad E_{22} = E_{33} = -\frac{1}{3}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}). \quad (3.105)$$

Aplicando os operadores (3.93) às tensões e os operadores (3.97) às deformações, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} P'' [\frac{1}{3}\sigma_{11}] = Q'' [\frac{1}{3}(\epsilon_{11} + 2\epsilon_{22})], \quad (\text{parcela volumétrica}) \\ P' [\frac{2}{3}\sigma_{11}] = Q' [\frac{2}{3}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})]. \quad (\text{parcela deviatórica}) \end{array} \right. \quad (3.106)$$

Como os operadores são lineares, os fatores constantes podem ser cancelados e o lado direito de ambas igualdades pode ser separado em uma soma de operadores

$$\left\{ \begin{array}{l} P'' [\sigma_{11}] = Q'' [\epsilon_{11}] + 2Q'' [\epsilon_{22}], \\ P' [\sigma_{11}] = Q' [\epsilon_{11}] - Q' [\epsilon_{22}]. \end{array} \right. \quad (3.107)$$

Aplicando o operador Q' a primeira equação e $2Q''$ à segunda equação e somando, obtém-se

$$(Q'P'' + 2Q''P') [\sigma_{11}] = (Q'Q'' + 2Q''Q') [\epsilon_{11}] + 2(Q'Q'' - Q''Q') [\epsilon_{22}]. \quad (3.108)$$

Como os operadores são lineares e seus coeficientes p_i'' , q_i'' e p_i' , q_i' são independentes do tempo, os operadores podem ter sua ordem trocada, isto é,

$$Q''Q' [\epsilon_{22}] = Q'Q'' [\epsilon_{22}]. \quad (3.109)$$

Assim, o termo contendo ϵ_{22} no último termo de (3.108) anula-se, o que resulta em

$$\boxed{\underbrace{(Q'P'' + 2Q''P')}_P [\sigma_{11}] = \underbrace{3Q''Q'}_Q [\epsilon_{11}]} \quad (3.110)$$

Comparando esta expressão com a equação constitutiva uniaxial (3.64) da tensão e deformação completas, chega-se a seguinte relação entre os operadores completos e os deviatóricos/volumétricos:

$$\boxed{\begin{array}{l} P = Q'P'' + 2Q''P', \\ Q = 3Q''Q'. \end{array}} \quad (3.111)$$

A relação entre a tensão σ_{11} e a deformação transversal ϵ_{22} é obtida por um procedimento seme-

lhante: eliminando ϵ_{11} entre as duas eqs.(3.107) obtém-se

$$\boxed{(Q'P'' - Q''P') [\sigma_{11}] = \underbrace{3Q''Q'}_Q [\epsilon_{22}]} \quad (3.112)$$

Nota-se a similaridade entre as eqs.(3.110) e (3.112). Uma é entre σ_{11} e ϵ_{11} , e a outra entre σ_{11} e ϵ_{22} . Entretanto, apenas o operador Q à direita é comum.

Caso particular – Dilatação elástica

Para estudar as equações (3.110) e (3.112) é necessário arbitrar operadores. Uma aproximação possível para o comportamento de um material viscoelástico real, é assumir que apenas a deformação cisalhante é viscosa e que a dilatação é elástica, isto é, de (3.100),

$$S_v = 3K_{el}E_v \quad (3.113)$$

sendo K_{el} o módulo volumétrico elástico. De (3.101), isto corresponde a $P'' = 1$ e $Q'' = 3K_{el}$. Assim, as equações diferenciais (3.110) e (3.112) ficam

$$\boxed{\begin{aligned} (Q' + 6K_{el}P') [\sigma_{11}] &= 9K_{el}Q' [\epsilon_{11}], \\ (Q' - 3K_{el}P') [\sigma_{11}] &= 9K_{el}Q' [\epsilon_{22}]. \end{aligned}} \quad (3.114)$$

Resta ainda, definir P' e Q' , para a parcela deviatórica. Esse é um dos procedimentos mais comuns por duas razões. Primeiro porque, efetivamente, a deformação volumétrica é geralmente muito pequena e apresenta pouco comportamento viscoso. A segunda razão é por facilidade de obtenção de resultados experimentais. Arbitrando dilatação elástica, torna-se necessário determinar apenas uma constante, K_{el} para a parcela volumétrica, além das $2n + 1$ constantes da cadeia de Maxwell com n módulos, usada para definir os operadores deviatóricos P' e Q' .

A seguir considera-se inicialmente uma possibilidade clássica para P' e Q' apenas para ilustração do método, pois seus resultados são bastante insatisfatórios do ponto de vista de materiais reais. Posteriormente são apresentados modelos mais acurados.

Considerando o modelo de fluido de Maxwell com $n = 1$ módulos (apenas mola e amortecedor em série, sem a mola em paralelo) para aproximar a distorção:

$$P' = 1 + p_1' \frac{d}{dt} \quad \text{e} \quad Q' = q_1' \frac{d}{dt}. \quad (3.115)$$

Introduzindo estes operadores em (3.114) e reagrupando termos obtém-se

$$\begin{aligned} 6K_{el}\sigma_{11} + (q_1' + 6K_{el}p_1') \dot{\sigma}_{11} &= 9K_{el}q_1' \dot{\epsilon}_{11}, \\ -3K_{el}\sigma_{11} + (q_1' - 3K_{el}p_1') \dot{\sigma}_{11} &= 9K_{el}q_1' \dot{\epsilon}_{22}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Dividindo a primeira equação por $6K_{el}$ e a segunda por $3K_{el}$ tem-se as equações diferenciais constitutivas

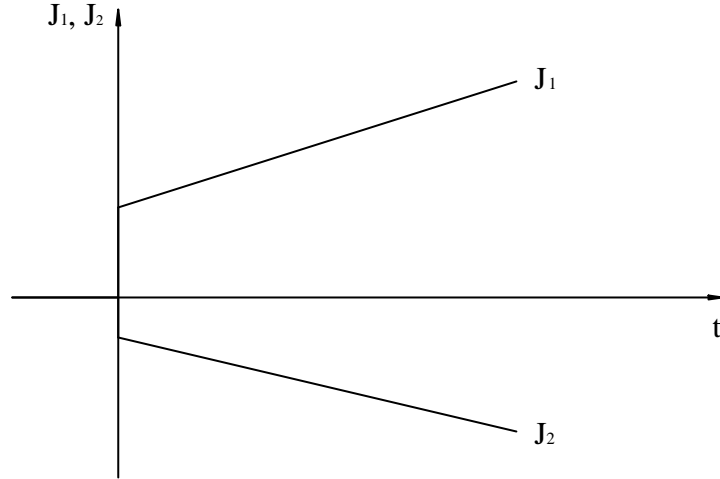


Figura 3.18: Módulos de fluência de um material com dilatação elástica e distorção de Maxwell com $N = 1$.

$$\left\| \begin{aligned} \sigma_{11} + \underbrace{\left(p_1' + \frac{1}{6K_{el}} q_1' \right)}_{p_1} \dot{\sigma}_{11} &= \underbrace{\left(\frac{3}{2} q_1' \right)}_{q_1} \dot{\epsilon}_{11}, \\ \sigma_{11} + \underbrace{\left(p_1' - \frac{1}{3K_{el}} q_1' \right)}_{p_1^*} \dot{\sigma}_{11} &= \underbrace{\left(-3q_1' \right)}_{q_1^*} \dot{\epsilon}_{22}. \end{aligned} \right. \quad (3.117)$$

Comparando com (3.9), nota-se que ambas possuem a forma do modelo de Maxwell. No caso particular de um carregamento na forma de uma função degrau unitária $\sigma_{11} = \Delta(t)$, (ensaio de fluência) as deformações podem ser resolvidas das duas eqs.(3.117), ou tomadas diretamente da solução (3.15):

$$\left\| \begin{aligned} \epsilon_1(t) &= \frac{\sigma_{11}}{q_1} (p_1 + t), & \text{isto é,} & \quad \epsilon_1(t) = \sigma_{11} \left[\frac{2p_1'}{3q_1'} + \frac{1}{9K_{el}} + \frac{2}{3} \frac{t}{q_1'} \right], \\ \epsilon_2(t) &= \frac{\sigma_{11}}{q_1^*} (p_1^* + t), & \text{isto é,} & \quad \epsilon_2(t) = \sigma_{11} \left[-\frac{1}{3} \frac{p_1'}{q_1'} + \frac{1}{9K_{el}} - \frac{1}{3} \frac{t}{q_1'} \right]. \end{aligned} \right. \quad (3.118)$$

O gráfico de ambas deformações pode ser visto na figura 3.18, onde os módulos de fluência são $J_1 = \epsilon_1(t)$ e $J_2 = \epsilon_2(t)$ obtidos para $\sigma_{11} = 1$. Este gráfico também mostra que a razão $-\epsilon_{22}/\epsilon_{11}$, isto é, o **coeficiente de Poisson**, é variável ao longo do tempo nesse modelo. Essa solução, de fato, é bastante irreal quando comparado aos resultados experimentais típicos.

3.6.3 Relações entre $Y(t)$ e $\nu(t)$ e módulos deviatóricos e volumétricos no ensaio 1-D

Busca-se uma relação entre o módulo em extensão $Y(t)$ e o coeficiente de Poisson $\nu(t)$ medidos diretamente em um ensaio uniaxial, com os módulo de relaxação deviatórico G e volumétrico K , ou com

os módulos de fluência deviatórico J' e volumétrico J'' . Para isso, considera-se o ensaio de relaxação uniaxial, em que

$$\epsilon_{11} = \epsilon_o \Delta(t), \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}(t), \quad \sigma_{11} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j. \quad (3.119)$$

Partindo da equação (3.98) para as tensões e deformações deviatóricas, e usando (3.103) e (3.105), obtém-se a relação entre as tensões e deformações completas em termos do módulo de relaxação deviatórico G do ensaio uniaxial:

$$\sigma_{11}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{d}{d\tau} [\epsilon_o \Delta(\tau) - \epsilon_{22}(\tau)] d\tau, \quad (3.120)$$

e da equação (3.94), a relação entre as tensões e deformações completas em termos do módulo de relaxação volumétrico K :

$$\sigma_{11}(t) = \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{d}{d\tau} [\epsilon_o \Delta(\tau) + 2\epsilon_{22}(\tau)] d\tau. \quad (3.121)$$

Aplicando a transformada de Laplace a (3.120) e (3.121), obtém-se [?]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sigma_{11}] &= \mathcal{L}[G] \{\epsilon_o - s\mathcal{L}[\epsilon_{22}]\} & \text{e} \\ \mathcal{L}[\sigma_{11}] &= \mathcal{L}[K] \{\epsilon_o + 2s\mathcal{L}[\epsilon_{22}]\}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

No ensaio de relaxação em tração, a relação tensão-deformação axial e o coeficiente de Poisson são:

$$\sigma(t) = Y(t) \epsilon_o \quad \text{e} \quad \nu(t) = -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_o}. \quad (3.123)$$

As eqs.(3.122) podem ser postas na forma $\mathcal{L}[\sigma_{11}]/\epsilon_o$ e $-\epsilon_{22}/\epsilon_o$ que, quando comparadas às transformadas eqs.(3.123), geram as seguintes relações entre os módulos das tensões completas e deviatóricas/volumétricas:

$$\boxed{Y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3\mathcal{L}[G]\mathcal{L}[K]}{2\mathcal{L}[K] + \mathcal{L}[G]} \right\} \quad \text{e} \quad \nu(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}[K] - \mathcal{L}[G]}{s(2\mathcal{L}[K] + \mathcal{L}[G])} \right\}} \quad (3.124)$$

Em paralelo, as eqs.(3.122) podem também ser resolvidas para fornecer as inversas de (3.124):

$$\boxed{G(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}[Y]}{1 + s\mathcal{L}[\nu]} \right\} \quad \text{e} \quad K(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}[Y]}{1 - 2s\mathcal{L}[\nu]} \right\}} \quad (3.125)$$

Essas relações são importantes, pois nos ensaios o que é efetivamente obtido são os módulos $Y(t)$ e $\nu(t)$, mas necessita-se em geral, os módulos $G(t)$ e $K(t)$.

As relações (3.124) e (3.125) podem ser reescritas em termos de módulos de fluência, em vez de relaxação [27]. Para isso, aplica-se a relação entre os módulos de relaxação e de fluência, eq.(3.76), para as componentes deviatórica e volumétrica:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[J'] \mathcal{L}[G] &= s^{-2}, & (\text{parcela deviatórica}) \\ \mathcal{L}[J''] \mathcal{L}[K] &= s^{-2}, & (\text{parcela volumétrica}).\end{aligned}\quad (3.126)$$

Com isso (3.124) e (3.125) tomam a forma:

$$\boxed{\begin{aligned}Y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s^2 \mathcal{L}[J'] \mathcal{L}[J'']}{2\mathcal{L}[J''] + \mathcal{L}[J']} \right\}, & \nu(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}[J''] - \mathcal{L}[J']}{s(2\mathcal{L}[J''] + \mathcal{L}[J'])} \right\}, \\ J'(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(1+s)\mathcal{L}[\nu]}{s^2 \mathcal{L}[Y]} \right\}, & K(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(1-2s)\mathcal{L}[\nu]}{s^2 \mathcal{L}[Y]} \right\}\end{aligned}}\quad (3.127)$$

Considerando novamente o material elástico, a relação constitutiva é dada pelo módulo de cisalhamento elástico G_{el} e pelo módulo volumétrico elástico K_{el} como $S_{11} = 2G_{el}E_{11}$ e $S_v = K_{el}E_v$. No ensaio de relaxação em tração, as tensões e deformações deviatóricas e volumétricas são: $S_{11} = \frac{2}{3}\sigma_{11}$, $E_{11} = \frac{2}{3}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})$, $S_v = \frac{1}{3}\sigma_{11}$ e $E_v = \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + 2\epsilon_{22})$. Então, no ensaio de relaxação uniaxial tem-se:

$$\sigma_{11}(t) = 2G_{el}(t)[\epsilon_o \Delta(t) - \epsilon_{22}(t)] \quad \text{e} \quad \sigma_{11}(t) = 3K_{el}(t)[\epsilon_o \Delta(t) + 2\epsilon_{22}(t)]. \quad (3.128)$$

As transformada de Laplace das eqs.(3.128) são:

$$\mathcal{L}[\sigma_{11}] = 2 \mathcal{L}[G_{el}][\epsilon_o - s\mathcal{L}[\epsilon_{22}]] \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[\sigma_{11}] = 3 \mathcal{L}[G_{el}][\epsilon_o + 2s\mathcal{L}[\epsilon_{22}]]. \quad (3.129)$$

Substituindo nestas relações as correspondentes relações (3.122), obtém-se a seguinte correspondência entre o módulo de cisalhamento elástico $G_{el}(t)$ e o módulo de relaxação deviatórico $G(t)$ e entre os módulos volumétricos elástico $K_{el}(t)$ e de relaxação $K(t)$

$$\boxed{G_{el}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s\mathcal{L}[G]}{2} \right\} \quad \text{e} \quad K_{el}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s\mathcal{L}[K]}{3} \right\}}\quad (3.130)$$

3.7 Efeitos da Temperatura e Envelhecimento

Nas seções anteriores, os efeitos da temperatura e do envelhecimento no comportamento de materiais viscoelásticos, não foram considerados. Por conveniência estuda-se inicialmente os efeitos da temperatura.

As relações tensão-deformação de um material elástico podem conter termos referentes a expansão térmica, o mesmo ocorrendo para um material viscoelástico. Porém, em viscoelasticidade também é importante o efeito da temperatura na taxa de fluência, assim como na taxa de relaxação de tensão. Em geral, o aumento da temperatura provoca um aumento das taxas de fluência e relaxação.

Entre os polímeros amorfos que satisfazem as relações da viscoelasticidade linear a uma temperatura uniforme, existe um grupo que exhibe uma propriedade particular com a variação de temperatura. O módulo de relaxação assim como o módulo de fluência em diferentes condições de temperatura

uniforme, são funções que não mudam de forma, sofrendo apenas uma translação no eixo do tempo, o que conduz a uma relação de equivalência entre a temperatura e o tempo. Esta propriedade é usada para estender a escala de tempo de dados experimentais e os materiais que exibem esta propriedade são denominados termoreologicamente simples, sendo esta a base do princípio da sobreposição tempo-temperatura (TTS), ou método das variáveis reduzidas [4], [13] e [20].

3.7.1 O Tempo Reduzido

Para expressar esta relação de equivalência, define-se o módulo de relaxação $Y(\log t, T_0)$ como uma função do logaritmo do tempo $\log t$ em uma temperatura de referência T_0 . Considerando um material termoreologicamente simples, o módulo de relaxação em uma temperatura arbitrária T é dado por

$$Y(\log t, T) = Y[\log t + \psi(T), T_0] \quad (3.131)$$

sendo $\psi(T)$ uma função de translação no tempo [20], definida em termos do fator de translação $a(T)$

$$\psi(T) = \log a(T) \quad (3.132)$$

tal que $\psi(T_0) = 0$.

Como a taxa de variação aumenta com o aumento da temperatura, a curva do módulo de relaxação sofre uma translação para tempos menores com o aumento da temperatura e $\psi(T)$ é uma função crescente para $T > T_0$. Se $Y_T(t)$ expressa o módulo de relaxação como uma função do tempo a uma temperatura arbitrária T , então $Y_T(t) = Y(\log t, T)$, ou

$$Y_T(t) = Y_{T_0}[t \cdot a(T)], \quad (3.133)$$

sendo Y_{T_0} o módulo de relaxação na temperatura de referência.

Definindo o **tempo reduzido** ξ , como

$$\xi = t \cdot a(T), \quad (3.134)$$

tem-se então

$$Y_T(t) = Y_{T_0}[\xi]. \quad (3.135)$$

Para um aumento de temperatura acima de T_0 , ξ é maior que t e conseqüentemente

$$a(T) > 1. \quad (3.136)$$

Os módulos de relaxação e de fluência em uma temperatura uniforme arbitrária são desta forma, expressos através dos módulos obtidos em uma temperatura de referência e relacionados a uma nova escala de tempo dependente da temperatura [20].

Expressando as tensões e deformações como funções do tempo reduzido, a relação viscoelástica na

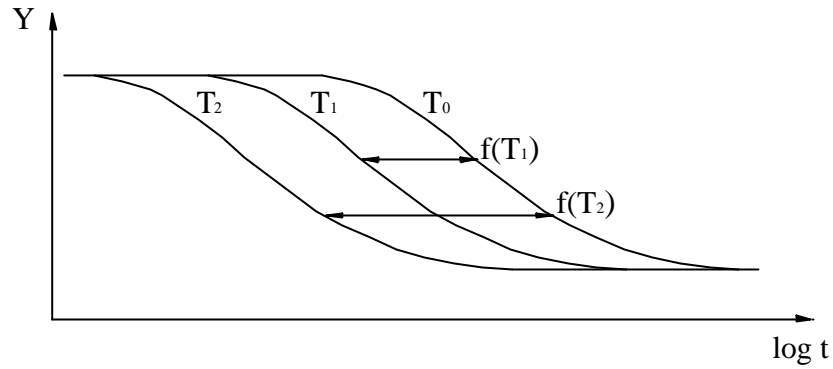


Figura 3.19: Efeito da temperatura no módulo de relaxação.

forma integral fica

$$\sigma(\xi) = \int_0^\xi Y(\xi - \xi') \frac{d\epsilon(\xi')}{d\xi'} d\xi', \quad (3.137)$$

ou, na forma de operadores diferenciais,

$$P(\xi)\sigma = Q(\xi)\epsilon, \quad (3.138)$$

sendo

$$\begin{aligned} P(\xi) &= \sum_{i=0}^m p_i \frac{d^i}{d\xi^i}, \\ Q(\xi) &= \sum_{i=0}^n q_i \frac{d^i}{d\xi^i}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

A relação de equivalência obtida, aplica-se para um material mantido em diferentes temperaturas uniformes, restando estender esta relação para o caso geral de um campo de temperatura $T(x, t)$. Para uma dada temperatura T , o tempo necessário para uma determinada variação do módulo de relaxação é igual ao tempo necessário para que a mesma variação ocorra a uma temperatura T_0 , dividido pelo fator $a(T)$, o qual é idêntico para todas as seções da curva de relaxação. Ou seja, se o tempo decorrido para $Y_{T_0}(t)$ diminuir de um valor Y_1 para um valor Y_2 é δt , então o tempo necessário para $Y_T(t)$ diminuir de Y_1 a Y_2 é $\delta t/a(T)$. Isto implica que o comportamento em relaxação (cisalhamento ou dilatação) é acelerado por um fator constante $a(T)$ a uma temperatura mais elevada T .

Considerando agora um campo de temperatura $T(x, t)$, cada ponto do meio tem uma temperatura variando com o tempo, de forma que a taxa de variação do módulo de relaxação é acelerada por um mesmo fator $a(T)$. Existe então um mapeamento do tempo $\xi = \xi(x, t)$, que depende da posição, tal que, expressando o módulo de relaxação para um campo de temperatura $T(x, t)$ como $Y^*(t)$,

dependente da posição, tem-se

$$Y^*(t) = Y_{T_0}(\xi). \quad (3.140)$$

Após um incremento adicional de tempo δt , esta relação fornece

$$Y^*(t + \delta t) = Y_{T_0}(\xi + \delta\xi) \quad (3.141)$$

de forma que o incremento $\delta\xi$ satisfaz

$$\delta\xi = a [T(x, t)] \delta t. \quad (3.142)$$

Sendo $Y(0) = Y_{T_0}(0)$, conseqüentemente $\xi(x, 0) = 0$. Então, a expressão do tempo reduzido fica [20], [26] e [27]

$$\xi(x, t) = \int_0^t a [T(x, \tau)] d\tau. \quad (3.143)$$

Considerando a resposta sob este mesmo campo de temperatura devida a uma deformação aplicada no instante t_0 , sendo o módulo de relaxação $Y(t - t_0)$, então existe $\zeta(x, t)$ tal que $\zeta(x, t_0) = 0$ e

$$Y(t - t_0) = Y_{T_0}(\delta\zeta) \quad (3.144)$$

sendo

$$\delta\zeta = a [T(x, t)] \delta t \quad (3.145)$$

e tem-se então

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \int_{t_0}^t a [T(\tau)] d\tau, \\ \zeta(x, t) &= \xi(t) - \xi(t_0). \end{aligned} \quad (3.146)$$

Definindo $\xi(x, t_0) = \xi_0$, obtém-se

$$Y(t - t_0) = Y_{T_0}(\xi - \xi_0), \quad (3.147)$$

que define a relação de equivalência para a resposta iniciando em um instante qualquer, em termos de uma escala de tempo reduzido dada pela equação (3.143). A relação constitutiva correspondente é dada por (3.137) ou (3.138).

O problema de análise de tensão envolve duas relações constitutivas independentes, uma governando o comportamento em cisalhamento e outra governando o comportamento volumétrico. Em geral o fator de translação é diferente para cada um destes, resultando em duas escalas de tempo reduzido diferentes. Assumindo porém, que o comportamento viscoelástico limita-se à resposta ao cisalhamento, sendo a dilatação elástica, então é necessária apenas uma escala de tempo reduzido, associada à resposta ao cisalhamento.

As relações entre as componentes deviatóricas de tensão e deformação na presença de um campo de temperatura ficam

$$S_{ij}(x, \xi) = \int_0^\xi G(\xi - \xi') \frac{\partial E_{ij}(x, \xi')}{\partial \xi'} d\xi', \quad (3.148)$$

ou, na forma de operadores diferenciais,

$$P(\xi) S_{ij}(x, \xi) = Q(\xi) E_{ij}(x, \xi), \quad (3.149)$$

sendo $P(\xi)$ e $Q(\xi)$ dados pelas equações (3.139).

As relações entre as componentes volumétricas ficam

$$S_v(x, \xi) = 3K_{el} \{E_v(x, \xi) - 3\alpha_0\theta(x, \xi)\}, \quad (3.150)$$

sendo ξ dado pela equação (3.143) e K_{el} é o módulo volumétrico constante para a dilatação elástica. A pseudo-temperatura $\theta(\xi)$ é definida como

$$\theta(x, \xi) = \frac{1}{\alpha_0} \int_{T_0}^T \alpha(x, T') dT', \quad (3.151)$$

sendo $\alpha(x, T)$ o coeficiente de expansão térmica dependente da temperatura e α_0 é seu valor na temperatura de referência T_0 [20], [26]. No caso particular em que $\alpha(x, T)$ é constante, então $\alpha(x, T) = \alpha_0$ e a equação (3.151) fica

$$\theta(x, \xi) = T(x, \xi) - T_0. \quad (3.152)$$

3.7.2 O Fator de Translação

A eficiência do método das variáveis reduzidas depende da determinação do fator de translação $a(T)$. Quando a temperatura T é maior que a temperatura de transição vítrea T_g do material, o fator de translação pode ser determinado empiricamente através da equação de William-Landel-Ferry (WLF) [6]

$$\log a_T = -\frac{c_1(T - T_0)}{c_2 + (T - T_0)}. \quad (3.153)$$

sendo c_1 e c_2 constantes do material que devem ser determinadas experimentalmente. Quando T_0 é aproximadamente $50^\circ C$ superior a T_g , os valores $c_1 = 8.86$ e $c_2 = 101.6$ são válidos para uma grande variedade de polímeros.

Para uma temperatura $T = T_0$, da equação (3.153) tem-se $\log a_T = 0$ e portanto $a_T = 1$. Para temperaturas $T > T_0$, tem-se que $\log a_T < 0$, de forma que $a_T < 1$. Pode-se definir então, à partir da equação (3.153) um fator de translação $a(T)$, como

$$a(T) = \frac{1}{a_T}, \quad (3.154)$$

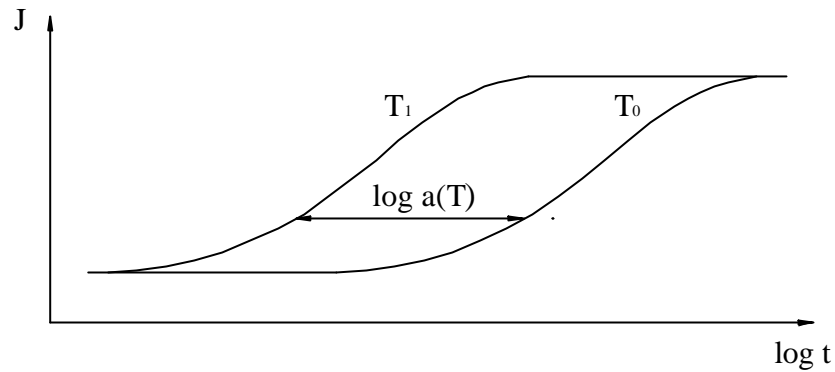


Figura 3.20: Efeito da temperatura no módulo de fluência.

satisfazendo a condição (3.136).

Para a determinação do fator de translação $a(T)$, adotando a equação (3.153) de William-Landel-Ferry para a função de translação, é necessário portanto, obter as duas constantes c_1 e c_2 desta equação para o particular material que se procura representar o comportamento. Assumindo que o material seja termoreologicamente simples, as curvas de deformação em diferentes temperaturas encontram-se transladadas no eixo do tempo, tornando necessários dois ensaios de fluência para determinar as constantes da equação (3.153).

Realizando um ensaio de fluência em uma temperatura de referência T_0 , sob um certo nível de tensão σ_0 , obtém-se os parâmetros do módulo de fluência J_{T_0} pelo processo de ajuste de curva descrito anteriormente, representando o comportamento do material correspondente ao período de tempo do ensaio. Para a determinação das constantes c_1 e c_2 , deve-se realizar um ensaio adicional em uma temperatura diferente T_1 e determinar o correspondente módulo de fluência J_{T_1} . Definindo o tempo do ensaio na temperatura de referência T_0 como o tempo reduzido ξ , então o valor do módulo de fluência em um certo instante é dado por $J_{T_0}(\xi)$. O mesmo valor do módulo de fluência, porém na temperatura T_1 , corresponde a um determinado instante t , relacionado ao tempo reduzido ξ pelo fator de translação $a(T)$, como pode ser visto na figura 3.20. Tem-se então, a seguinte igualdade

$$J_{T_1}(t) = J_{T_0}(\xi) \quad (3.155)$$

O tempo reduzido ξ pode ser expresso em termos do tempo t e do fator de translação $a(T)$, de forma que a igualdade (3.155) pode ser escrita como

$$J_{T_1}(t) = J_{T_0}(t.a(T)) \quad (3.156)$$

Conhecendo a expressão do módulo de fluência J_{T_0} na temperatura de referência T_0 e conhecendo o módulo de fluência J_{T_1} em uma temperatura diferente T_1 , pode-se definir uma expressão do erro

considerando dois pontos da curva do módulo de fluência na temperatura T_1 :

$$Erro = \left[\frac{J_{T_1}(t_1) - J_{T_0}(t_1.a(T))}{J_{T_1}(t_1)} \right]^2 + \left[\frac{J_{T_1}(t_2) - J_{T_0}(t_2.a(T))}{J_{T_1}(t_2)} \right]^2 \quad (3.157)$$

ou

$$Erro = \left[\frac{J_{T_1}(t_1) - J_{T_0}(\xi_1)}{J_{T_1}(t_1)} \right]^2 + \left[\frac{J_{T_1}(t_2) - J_{T_0}(\xi_2)}{J_{T_1}(t_2)} \right]^2 \quad (3.158)$$

sendo ξ_1 e ξ_2 os tempos reduzidos correspondentes aos instantes t_1 e t_2 respectivamente. O fator de translação $a(T)$ é dado pela equação (3.154).

Substituindo em (3.157) a expressão do fator de translação, obtém-se a equação do erro como uma função das constantes c_1 e c_2 . Para a minimização do erro a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\begin{aligned} \frac{\partial Erro}{\partial c_1} &= 0 \\ \frac{\partial Erro}{\partial c_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.159)$$

o que implica na solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas. A solução deste sistema fornece as constantes c_1 e c_2 .

Determinadas as constantes da equação (3.153), pode-se realizar a translação da curva de deformação de fluência na temperatura T_1 para a temperatura T_0 , obtendo-se um segmento da curva de deformação na temperatura de referência. Dispondo-se de dados experimentais de deformação de fluência em outras temperaturas, este processo de translação no tempo pode ser repetido empregando-se as mesmas constantes, conduzindo a vários segmentos da curva de deformação na temperatura de referência.

O princípio da sobreposição tempo-temperatura (TTS), aplica-se a muitos polímeros a temperaturas acima de T_g , o que nem sempre ocorre a temperaturas inferiores a transição vítrea [4]. Embora o TTS seja aplicável aos dados de ensaios de fluência e relaxação de curta duração nestas temperaturas, quando aplicado aos dados de ensaios de longa duração, não produz resultados válidos. A razão para isto é um processo denominado envelhecimento [13] que ocorre em polímeros abaixo de T_g e que altera a resposta viscoelástica do material durante um ensaio de longa duração. Em um ensaio de curta duração, não ocorre um envelhecimento significativo devido à duração do ensaio ser muito menor que o tempo de envelhecimento [13] e [14].

O processo de envelhecimento de polímeros está associado com a lenta redução do volume livre remanescente na microestrutura do material [6], [13] e [12], após seu resfriamento abaixo da temperatura de transição vítrea T_g . À medida que o volume livre diminui, a mobilidade da cadeia polimérica também diminui e como consequência ocorre um aumento dos tempos de relaxação e retardo, reduzindo a velocidade dos processos de fluência e relaxação. Para ensaios de longa duração, um novo fator de translação deve ser definido, considerando os efeitos da temperatura e do tempo de envelhecimento.

3.8 Um Método Numérico de Análise de Tensões em Viscoelasticidade

A análise de tensões e deformações de materiais viscoelásticos apresenta várias dificuldades quando se trata de problemas reais de geometria e carregamentos temporais complexos. A abordagem padrão permite determinar a solução quando é disponível uma solução fechada de um problema elástico equivalente. Métodos numéricos, em particular o método dos elementos finitos de análise elástica, podem ser estendidos para determinar a solução de problemas viscoelásticos lineares do tipo quase-estático, ao considerar que a relação tensão-deformação pode ser escrita de forma similar à relação da elasticidade [25].

Considerando que a deformação instantânea é elástica, a deformação total pode então ser escrita no caso geral como:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c \quad (3.160)$$

onde ε^e é a deformação elástica:

$$\varepsilon^e = D^{-1} \sigma \quad (3.161)$$

sendo, D a matriz de elasticidade que pode ser uma função do tempo e da temperatura.

A componente de deformação de fluência, ε^c , é relacionada à tensão σ pela matriz \bar{D} , similar à matriz de elasticidade D , cujos elementos são operadores diferenciais ou integrais que substituem as constantes elásticas da matriz de elasticidade. A deformação de fluência pode então ser escrita como:

$$\varepsilon^c = \bar{D} \sigma \quad (3.162)$$

com os elementos da matriz \bar{D} , definidos como:

$$\bar{D}_{ij} = \frac{a_0 + a_1 (d/dt) + a_2 (d^2/dt^2) + \dots}{b_0 + b_1 (d/dt) + b_2 (d^2/dt^2) + \dots} \quad (3.163)$$

onde os operadores estão escritos na forma diferencial. Escrevendo esta expressão em termos de frações parciais, obtém-se:

$$\bar{D}_{ij} = \frac{A_1}{(d/dt) + B_1} + \frac{A_2}{(d/dt) + B_2} + \dots \quad (3.164)$$

Assim, a deformação de fluência pode ser expressa pela adição de termos da forma:

$$\varepsilon_k^c = \frac{A_k}{(d/dt) + B_k} \sigma \quad (3.165)$$

ou

$$\frac{d\varepsilon_k^c}{dt} = A_k \sigma - B_k \varepsilon_k^c \quad (3.166)$$

onde A_k e B_k , são parâmetros do material que podem ser dependentes do tempo e da temperatura [24] e [25].

3.8.1 Solução Para a Distribuição de Tensões

Um processo de solução para o caso em que os carregamentos mecânicos e térmicos são aplicados na forma de degraus em sucessivos intervalos de tempo, apresentado por Zienkiewicz [25], é descrito a seguir.

1. As cargas e temperaturas aplicadas instantaneamente em $t = 0$, originam um sistema de tensões elásticas. Assumindo que estas tensões e também as propriedades do material permanecem inalteradas durante o intervalo de tempo Δt , pode-se determinar a deformação de fluência $\{\epsilon_c\}$ no final do intervalo;
2. No início do segundo intervalo, são aplicadas forças e temperaturas adicionais, além de uma variação brusca das propriedades materiais. O problema elástico é então solucionado, somando-se as cargas, adotando-se os valores atualizados de temperatura e considerando $\{\epsilon_c\}$ uma deformação inicial prescrita, resultando um sistema de tensões $\{\sigma\}_1$. Novamente, assume-se que este novo sistema de tensões e as propriedades do material permanecem constantes durante o intervalo Δt_2 e a deformação total de fluência $\{\epsilon_c\}_2$ ao final do segundo intervalo é determinada;
3. Repetindo o procedimento que conduziu a $\{\sigma\}_1$, obtém-se as tensões $\{\sigma\}_2$ no início do intervalo Δt_3 e as deformações $\{\epsilon_c\}_3$ ao final deste intervalo e assim sucessivamente.

Usando o método dos elementos finitos para obter a solução elástica, torna-se necessário determinar a solução em termos de deslocamentos, de um sistema de equações simultâneas em cada intervalo de tempo. Se as propriedades do material não variam com a temperatura e o tempo, um processo direto pode ser empregado para determinar a solução do sistema. Caso contrário, é necessário fazer uso de um processo iterativo, incorporando na matriz de rigidez pequenas variações das propriedades em cada estágio da iteração.

Capítulo 4

Aplicação do Modelo de Maxwell Generalizado

Um modelo é construído com um certo número n de módulos de Maxwell associados em paralelo a um elemento de mola isolado como mostrado na figura (4.1).

No elemento de mola de rigidez k_o a deformação é dada pela relação

$$\sigma_o = k_o \epsilon_o. \quad (4.1)$$

Nos módulos de Maxwell a relação entre a tensão e a deformação é dada pela expressão (3.8). Desta forma, para cada módulo de Maxwell tem-se

$$\left\| \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \frac{\sigma_1}{\mu_1} + \frac{\dot{\sigma}_1}{k_1}, \\ \dot{\epsilon}_2 = \frac{\sigma_2}{\mu_2} + \frac{\dot{\sigma}_2}{k_2}, \\ \vdots \\ \dot{\epsilon}_n = \frac{\sigma_n}{\mu_n} + \frac{\dot{\sigma}_n}{k_n}. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (4.1) e (4.2), obtém-se

$$\mathcal{L}[\sigma_o] = k_o \mathcal{L}[\epsilon_o], \quad (4.3)$$

e

$$\left\| \begin{array}{l} s\mathcal{L}[\epsilon_1] = \frac{1}{\mu_1} \mathcal{L}[\sigma_1] + \frac{s}{k_1} \mathcal{L}[\sigma_1], \\ s\mathcal{L}[\epsilon_2] = \frac{1}{\mu_2} \mathcal{L}[\sigma_2] + \frac{s}{k_2} \mathcal{L}[\sigma_2], \\ \vdots \\ s\mathcal{L}[\epsilon_n] = \frac{1}{\mu_n} \mathcal{L}[\sigma_n] + \frac{s}{k_n} \mathcal{L}[\sigma_n]. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

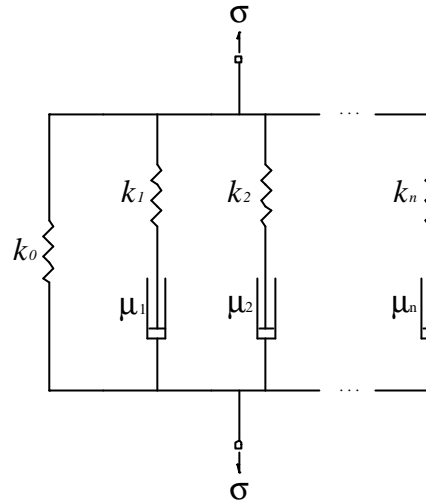


Figura 4.1: Modelo de Maxwell generalizado com N elementos em paralelo com uma mola.

Neste modelo a deformação total de cada módulo de Maxwell e do elemento de mola são iguais, ou seja, correspondem a deformação total do modelo

$$\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_n = \epsilon. \quad (4.5)$$

Somando as tensões atuantes em cada módulo e na mola obtém-se a tensão total σ

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = \sigma. \quad (4.6)$$

Estas deformações e tensões podem ser expressas em termos da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[\epsilon_0] = \mathcal{L}[\epsilon_1] = \mathcal{L}[\epsilon_2] = \dots = \mathcal{L}[\epsilon_n] = \mathcal{L}[\epsilon] \quad (4.7)$$

e

$$\mathcal{L}[\sigma_0] + \mathcal{L}[\sigma_1] + \mathcal{L}[\sigma_2] + \dots + \mathcal{L}[\sigma_n] = \mathcal{L}[\sigma]. \quad (4.8)$$

Substituindo nas expressões (4.3) e (4.4) a transformada de Laplace da deformação total e fazendo a soma das tensões expressa em (4.8), obtém-se uma relação entre a transformada de Laplace da tensão total σ e da deformação total ϵ

$$\mathcal{L}[\sigma] = \left(k_0 + \frac{k_1 \mu_1 s}{k_1 + \mu_1 s} + \frac{k_2 \mu_2 s}{k_2 + \mu_2 s} + \dots + \frac{k_n \mu_n s}{k_n + \mu_n s} \right) \mathcal{L}[\epsilon]. \quad (4.9)$$

Reagrupando os termos desta equação, obtém-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 (k_1 + \mu_1 s)(k_2 + \mu_2 s) \dots (k_n + \mu_n s) \mathcal{L}[\sigma] &= \frac{(k_1 + \mu_1 s)(k_2 + \mu_2 s) \dots (k_n + \mu_n s) k_0}{(k_1 + \mu_1 s)(k_2 + \mu_2 s) \dots (k_n + \mu_n s)} \mathcal{L}[\epsilon] \\
 &+ \frac{(k_2 + \mu_2 s)(k_3 + \mu_3 s) \dots (k_n + \mu_n s) k_1 \mu_1 s}{(k_1 + \mu_1 s)(k_2 + \mu_2 s) \dots (k_n + \mu_n s)} \mathcal{L}[\epsilon] \\
 &+ \frac{(k_1 + \mu_1 s)(k_2 + \mu_2 s) \dots (k_n + \mu_n s)}{(k_1 + \mu_1 s)(k_3 + \mu_3 s) \dots (k_n + \mu_n s)} k_2 \mu_2 s \mathcal{L}[\epsilon] \\
 &\vdots \\
 &+ \frac{(k_1 + \mu_1 s)(k_2 + \mu_2 s) \dots (k_{n-1} + \mu_{n-1} s) k_n \mu_n s}{(k_1 + \mu_1 s)(k_2 + \mu_2 s) \dots (k_n + \mu_n s)} \mathcal{L}[\epsilon].
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Efetando os produtos e definindo novas constantes p_1, p_2, \dots, p_n e q_0, q_1, \dots, q_n em termos das constantes mecânicas do modelo, obtém-se

$$\mathcal{L}[\sigma] + p_1 s \mathcal{L}[\sigma] + p_2 s^2 \mathcal{L}[\sigma] + \dots + p_n s^n \mathcal{L}[\sigma] = q_0 \mathcal{L}[\epsilon] + q_1 s \mathcal{L}[\epsilon] + q_2 s^2 \mathcal{L}[\epsilon] + \dots + q_n s^n \mathcal{L}[\epsilon]. \tag{4.11}$$

A inversa da transformada de Laplace da expressão (4.11) fornece a equação constitutiva do modelo no domínio do tempo

$$\sigma + p_1 \sigma^{(1)} + p_2 \sigma^{(2)} + \dots + p_n \sigma^{(n)} = q_0 \epsilon + q_1 \epsilon^{(1)} + q_2 \epsilon^{(2)} + \dots + q_n \epsilon^{(n)}. \tag{4.12}$$

Esta é uma equação diferencial que relaciona a tensão e a deformação total, podendo ser representada na forma de operadores como na expressão (3.66), $P(t)\sigma = Q(t)\epsilon$, sendo $P(t)$ e $Q(t)$ definidos neste caso como

$$\begin{aligned}
 P(t) &= 1 + p_1 \frac{d}{dt} + p_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + p_n \frac{d^n}{dt^n}, \\
 Q(t) &= q_0 + q_1 \frac{d}{dt} + q_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + q_n \frac{d^n}{dt^n}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Pode-se obter também, relações entre tensão e deformação na forma integral, definindo-se o módulo de fluência e o módulo de relaxação.

4.1 Módulo de Fluência

A expressão do módulo de fluência J , pode ser obtida aplicando as condições de um ensaio de fluência à equação constitutiva do modelo, ou seja, impõe-se uma tensão na forma de uma função degrau unitário $\sigma(t) = \sigma_0 \Delta(t)$. Isto é mais convenientemente realizado através da transformada de Laplace, substituindo na equação (4.11) a transformada da tensão. Desta forma obtém-se a seguinte expressão

$$(q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n) \mathcal{L}[\epsilon] = \frac{\sigma_0}{s} (1 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n). \tag{4.14}$$

Considerando que o módulo de fluência é definido como a deformação por unidade de tensão,

tem-se então

$$\mathcal{L}[J] = \frac{\mathcal{L}[\epsilon]}{\sigma_o}. \quad (4.15)$$

Desta forma, o seguinte quociente fornece a transformada do módulo de fluência

$$\mathcal{L}[J] = \frac{1 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n}{s (q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n)}. \quad (4.16)$$

Este quociente pode ser escrito de forma mais compacta na forma da expressão (3.73), $\mathcal{L}[J] = P(s)/sQ(s)$, sendo $P(s)$ e $Q(s)$ definidos neste caso, como

$$\begin{aligned} P(s) &= 1 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n, \\ Q(s) &= q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A inversa da transformada de Laplace desta equação pode ser obtida, separando o quociente destes polinômios em frações parciais

$$\mathcal{L}[J] = \frac{1 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n}{q_n s (s - s_1) (s - s_2) \dots (s - s_n)}, \quad (4.18)$$

sendo s_1, s_2, \dots, s_n as raízes do polinômio $Q(s)$, resultando no módulo de fluência no domínio físico do tempo

$$\begin{aligned} J(t) &= -\frac{1}{q_n} \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_n} + \frac{1}{q_n} \frac{1 + p_1 s_1 + p_2 s_1^2 + \dots + p_n s_1^n}{s_1 (s_1 - s_2) (s_1 - s_3) \dots (s_1 - s_n)} e^{s_1 t} \\ &\quad + \frac{1}{q_n} \frac{1 + p_1 s_2 + p_2 s_2^2 + \dots + p_n s_2^n}{s_2 (s_2 - s_1) (s_2 - s_3) \dots (s_2 - s_n)} e^{s_2 t} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{q_n} \frac{1 + p_1 s_n + p_2 s_n^2 + \dots + p_n s_n^n}{s_n (s_n - s_1) (s_n - s_2) \dots (s_n - s_{n-1})} e^{s_n t}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

De acordo com esta expressão, para a completa definição do módulo de fluência, resta determinar o valor das raízes s_1, s_2, \dots, s_n e o valor das constantes p_1, p_2, \dots, p_n e q_n , o que pode ser feito através de um processo de ajuste de curva aos dados experimentais de ensaios de fluência. Com este objetivo, a equação (4.19) pode ser escrita de forma simplificada em termos de novas constantes

$$J(t) = B_0 - B_1 e^{-t/\rho_1} - B_2 e^{-t/\rho_2} - \dots - B_n e^{-t/\rho_n}, \quad (4.20)$$

sendo $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ os tempos de retardo definidos em função das raízes de $Q(s)$

$$\left\| \begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{1}{s_1}, \\ \rho_2 &= -\frac{1}{s_2}, \\ &\vdots \\ \rho_n &= -\frac{1}{s_n}, \end{aligned} \right. \quad (4.21)$$

e B_0, B_1, \dots, B_n são constantes definidas como

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = \frac{1}{q_n s_1 s_2 \dots s_n} \\ B_1 = \frac{1}{q_n s_1} \frac{1}{1 + p_1 s_1 + p_2 s_1^2 + \dots + p_n s_1^n}, \\ \vdots \\ B_n = \frac{1}{q_n s_n} \frac{1}{(s_n - s_1)(s_n - s_2) \dots (s_n - s_{n-1})}. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Desta forma o módulo de fluência fica caracterizado determinando-se os tempos de retardo $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ e as constantes B_0, B_1, \dots, B_n através da minimização do erro entre a expressão (4.20) e uma curva experimental de deformação de fluência. Pode-se definir então, uma função erro relativo ao quadrado como

$$Erro(\rho, J) = \int_0^t \left[\frac{\varepsilon(\tau) - J(\tau)}{\varepsilon(\tau)} \right]^2 d\tau, \quad (4.23)$$

sendo $\varepsilon(\tau)$ um valor experimental de deformação medido em um certo instante do ensaio de fluência, $J(\tau)$ é o módulo de fluência e t é o tempo total de ensaio. A minimização do erro implica na condição de que as derivadas de (4.23) em relação aos tempos de retardo e em relação às constantes do módulo de fluência, sejam nulas, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\partial Erro}{\partial \rho_1} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial Erro}{\partial \rho_n} &= 0, \\ \frac{\partial Erro}{\partial B_0} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial Erro}{\partial B_n} &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Assim tem-se um sistema de equações, cuja solução fornece os tempos e as constantes do módulo de fluência. É necessário porém, determinar os coeficientes dos polinômios $P(s)$ e $Q(s)$, com os quais é possível definir o módulo de relaxação, suas componentes deviatórica e volumétrica, assim como as componentes do módulo de fluência, além de permitir a completa caracterização da equação constitutiva do modelo, expressão (4.12).

Com o valor dos tempos de retardo e empregando as relações (4.21), obtém-se as raízes s_1, s_2, \dots, s_n do polinômio $Q(s)$. Mediante o valor destas raízes e da constante B_0 do módulo de fluência, determina-se o coeficiente q_n de $Q(s)$ empregando a primeira relação de (4.22). Os coeficientes q_0, q_1, \dots, q_{n-1} restantes de $Q(s)$ são obtidos como a solução do sistema de equações que resulta, substituindo-se em $Q(s)$ as raízes s_1, s_2, \dots, s_n

$$\begin{aligned}
q_0 + q_1 s_1 + q_2 s_1^2 + \dots + q_n s_1^n &= 0, \\
q_0 + q_1 s_2 + q_2 s_2^2 + \dots + q_n s_2^n &= 0, \\
&\vdots \\
q_0 + q_1 s_n + q_2 s_n^2 + \dots + q_n s_n^n &= 0.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Os coeficientes do polinômio $P(s)$ são obtidos à partir das relações (4.22). Substituindo as constantes do módulo de fluência, as raízes e o coeficiente q_n de $Q(s)$, resulta um sistema de equações cuja solução fornece os coeficientes p_1, p_2, \dots, p_n de $P(s)$.

4.2 Módulo de Relaxação

O módulo de relaxação pode ser obtido invertendo o procedimento que conduziu ao módulo de fluência, ou seja, aplica-se as condições de um ensaio de relaxação de tensão à equação constitutiva do material, em que a deformação e não mais a tensão é imposta. Assim como os parâmetros do módulo de fluência, os parâmetros do módulo de relaxação podem então ser obtidos mediante um processo de ajuste de curva aos dados experimentais de ensaios de relaxação. Porém, fazendo uso da relação entre as transformadas de Laplace do módulo de relaxação e do módulo de fluência, expressão (3.76) dada por $\mathcal{L}[J]\mathcal{L}[Y] = s^{-2}$, chega-se a uma expressão para a transformada do módulo de relaxação na forma, $\mathcal{L}[Y] = Q(s)/sP(s)$, que neste caso fica

$$\mathcal{L}[Y] = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n}{s(1 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n)}. \tag{4.26}$$

Com os coeficientes p_1, p_2, \dots, p_n e q_0, q_1, \dots, q_n já determinados, a inversa da transformada de Laplace pode ser obtida, fornecendo o módulo de relaxação no domínio físico do tempo

$$Y(t) = C_0 + C_1 e^{-t/\lambda_1} + C_2 e^{-t/\lambda_2} + \dots + C_n e^{-t/\lambda_n}, \tag{4.27}$$

sendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os tempos de relaxação e C_0, C_1, \dots, C_n as constantes do módulo de relaxação.

4.3 Soluções em Série de Prony

Nessa seção particulariza-se as soluções para os módulos de relaxação e de fluência vistas anteriormente para cadeias de $n = 1, 2$ e 5 módulos de Maxwell. Como será visto, as equações diferenciais conduzem naturalmente a soluções na forma de séries finitas de Prony.

4.3.1 Maxwell com $n = 1$

Nesse caso tem-se as equações diferenciais

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma}{k_o} && \text{para a mola livre,} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{\sigma}{\mu_1} + \frac{\dot{\sigma}}{k_1}, && \text{para o módulo 1} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Realizando a transformada de Laplace em cada termo e combinando-os conforme (4.7) e (4.8), obtém-se a equação na forma (4.9):

$$\mathcal{L}[\sigma] = \left(k_o + \frac{s}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{s}{k_1}} \right) \mathcal{L}[\epsilon]$$

expandindo os termos e reorganizando-os

$$\mathcal{L}[\sigma] = \left(\frac{k_o}{k_1 \mu_1} + \frac{s}{\frac{1}{\mu_1} + s \frac{1}{k_1}} \right) \mathcal{L}[\epsilon]$$

e fazendo a transformada inversa temos a equação diferencial do modelo Maxwell $n = 1$:

$$\boxed{\sigma + \underbrace{\frac{\mu_1}{k_1}}_{p_1} \dot{\sigma} = \underbrace{k_o}_{q_o} \epsilon + \underbrace{(k_o + k_1) \frac{\mu_1}{k_1}}_{q_1} \dot{\epsilon}} \quad (4.29)$$

(Prova-se que essa é a mesma equação do modelo da cadeia de Kelvin com $n = 1$ módulos em paralelo a uma mola isolada.) A solução de relaxação já foi obtida:

$$\begin{aligned} Y(t) &\equiv \frac{\sigma(t)}{\epsilon_o} = q_o + \left(\frac{q_1}{p_1} - q_o \right) e^{-t/p_1}, \\ &= k_o + k_1 e^{-t/\lambda_1}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

que está na mesma forma geral (4.27). O tempo de relaxação $\lambda_1 = p_1 = \mu_1/k_1$.

O módulo de fluência é dado por:

$$\boxed{J(t) \equiv \frac{\epsilon(t)}{\sigma_o} = \frac{1}{k_o} - \frac{k_1}{k_o(k_o + k_1)} e^{-t/\rho_1}, \quad \text{onde} \quad \rho_1 = \frac{\mu_1}{k_o k_1} (k_o + k_1)} \quad (4.31)$$

que está na mesma forma geral (4.20).

4.3.2 Maxwell com $n = 2$

Nesse caso tem-se as equações diferenciais para cada módulo

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \frac{\sigma}{k_o} && \text{para a mola livre,} \\
 \dot{\epsilon} &= \frac{\sigma}{\mu_1} + \frac{\dot{\sigma}}{k_1}, && \text{para o módulo 1,} \\
 \dot{\epsilon} &= \frac{\sigma}{\mu_2} + \frac{\dot{\sigma}}{k_2}, && \text{para o módulo 2.}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Realizando a transformada de Laplace em cada termo e combinando-os conforme (4.7) e (4.8),

$$\mathcal{L}[\sigma] = k_o \mathcal{L}[\epsilon] + \frac{s \mathcal{L}[\epsilon]}{\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{s}{k_1}\right)} + \frac{s \mathcal{L}[\epsilon]}{\left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{s}{k_2}\right)}$$

Colocando sob denominador comum obtém-se

$$\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{s}{k_1}\right) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{s}{k_2}\right) \mathcal{L}[\sigma] = \mathcal{L}[\epsilon] \left\{ k_o \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{s}{k_1}\right) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{s}{k_2}\right) + s \left[\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) + s \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \right] \right\}$$

Expandindo os produtos, separando as potências de s e colocando-as nos numeradores, temos:

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{1}{\mu_1 \mu_2} + s \left(\frac{1}{k_2 \mu_1} + \frac{1}{k_1 \mu_2} \right) + s^2 \frac{1}{k_1 k_2} \right] \mathcal{L}[\sigma] \\
 = &\mathcal{L}[\epsilon] \left\{ \left[\frac{1}{\mu_1 \mu_2} + s \left(\frac{1}{k_2 \mu_1} + \frac{1}{k_1 \mu_2} \right) + s^2 \frac{1}{k_1 k_2} \right] k_o + s \left[\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + s \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Fazendo a transformada inversa e reordenando os termos, tem-se a equação diferencial do modelo de Maxwell $n = 2$ na forma padrão:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 &\sigma + \underbrace{\left(\frac{\mu_1}{k_1} + \frac{\mu_2}{k_2}\right)}_{p_1} \dot{\sigma} + \underbrace{\left(\frac{\mu_1 \mu_2}{k_1 k_2}\right)}_{p_2} \ddot{\sigma} = \\
 &\underbrace{k_o}_{q_o} \epsilon + \underbrace{\left[k_o \left(\frac{\mu_1}{k_1} + \frac{\mu_2}{k_2}\right) + \mu_1 + \mu_2 \right]}_{q_1} \dot{\epsilon} + \underbrace{\left[k_o \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{k_1 k_2}\right) + \mu_1 \mu_2 \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \right]}_{q_2} \ddot{\epsilon}
 \end{aligned}
 } \tag{4.33}$$

A solução de relaxação é obtida transformando a equação acima usando $\epsilon(t) = \epsilon_o \Delta(t)$, o que resulta em:

$$\frac{\mathcal{L}[\sigma]}{\epsilon_o} = \frac{Q(s)}{sP(s)} = \frac{\frac{k_o}{s} + q_1 + q_2 s}{p_2 \left(\frac{1}{p_2} + \frac{p_1}{p_2} s + s^2 \right)}. \tag{4.34}$$

Considerando as duas raízes λ_1 e λ_2 do polinômio $P(s) = p_2 \left(\frac{1}{p_2} + \frac{p_1}{p_2} s + s^2 \right)$, tal que $P(s) =$

$p_2(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$, onde

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = -\frac{p_1}{2p_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 - \frac{4}{p_2}}. \quad (4.35)$$

Substituindo as definições das constantes p 's e q 's de (4.33) em (4.35) e realizando simplificações em um manipulador simbólico de equações, obtém-se que:

$$\lambda_1 = \frac{k_1}{\mu_1} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{k_2}{\mu_2}, \quad (4.36)$$

isto é, os tempos de relaxação em termos das constantes mecânicas do modelo de Maxwell.

Substituindo $P(s)$ em termos das raízes em (4.33) tem-se uma equação algébrica, de forma que a inversa da transformada de Laplace (novamente pode-se empregar um manipulador simbólico de equações), resulta:

$$Y(t) \equiv \frac{\sigma(t)}{\epsilon_o} = \underbrace{\frac{k_o}{p_2 \lambda_1 \lambda_2}}_{k_o} + \underbrace{\frac{[k_o - \lambda_1(q_1 - \lambda_1 q_2)]}{p_2 \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}}_{k_1} e^{-t/\lambda_1} + \underbrace{\frac{[k_o - \lambda_2(q_1 - \lambda_2 q_2)]}{p_2 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}}_{k_2} e^{-t/\lambda_2} \quad (4.37)$$

Simplificando, prova-se que $p_2 \lambda_1 \lambda_2 = 1$ e os demais coeficientes são iguais as constantes mecânicas k_1 e k_2 respectivamente.

4.3.3 Maxwell com $n = 5$

Nesse caso tem-se as equações diferenciais para cada módulo

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma}{k_o} && \text{para a mola livre,} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{\sigma}{\mu_1} + \frac{\dot{\sigma}}{k_1}, && \text{para o módulo 1,} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{\sigma}{\mu_2} + \frac{\dot{\sigma}}{k_2}, && \text{para o módulo 2,} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{\sigma}{\mu_3} + \frac{\dot{\sigma}}{k_3}, && \text{para o módulo 3,} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{\sigma}{\mu_4} + \frac{\dot{\sigma}}{k_4}, && \text{para o módulo 4,} \\ \dot{\epsilon} &= \frac{\sigma}{\mu_5} + \frac{\dot{\sigma}}{k_5}, && \text{para o módulo 5.} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Realizando a transformada de Laplace em cada termo e combinando-os conforme (4.7) e (4.8),

$$\mathcal{L}[\sigma] = k_o \mathcal{L}[\epsilon] + \frac{s \mathcal{L}[\epsilon]}{\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{s}{k_1}\right)} + \frac{s \mathcal{L}[\epsilon]}{\left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{s}{k_2}\right)} + \frac{s \mathcal{L}[\epsilon]}{\left(\frac{1}{\mu_3} + \frac{s}{k_3}\right)} + \frac{s \mathcal{L}[\epsilon]}{\left(\frac{1}{\mu_4} + \frac{s}{k_4}\right)} + \frac{s \mathcal{L}[\epsilon]}{\left(\frac{1}{\mu_5} + \frac{s}{k_5}\right)} \quad (4.39)$$

Colocando sob denominador comum, expandindo os produtos e separando as potências de s , obtém-se a forma padrão

$$\mathcal{L}[\sigma] \underbrace{[1 + sp_1 + s^2 p_2 + s^3 p_3 + s^4 p_4 + s^5 p_5]}_P = \mathcal{L}[\epsilon] \underbrace{[q_o + sq_1 + s^2 q_2 + s^3 q_3 + s^4 q_4 + s^5 q_5]}_Q, \quad (4.40)$$

sendo que, a inversa da transformada, leva à forma padrão da relação constitutiva diferencial $P\sigma = Q\epsilon$. As constantes do material são dadas por

$$p_j = \frac{\bar{p}_j}{\bar{p}_o} \quad \text{e} \quad q_j = \frac{q_o \bar{p}_j + \bar{q}_j}{\bar{p}_o} \quad \text{para } j = 1, 5, \quad (4.41)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{p}_o &= \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5}, \\ \bar{p}_1 &= \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 k_5} + \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 k_4 \mu_5} + \frac{1}{\mu_1 \mu_2 k_3 \mu_4 \mu_5} + \frac{1}{\mu_1 k_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5} + \frac{1}{k_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5}, \\ \bar{p}_2 &= \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 k_4 k_5} + \frac{1}{\mu_1 \mu_2 k_3 \mu_4 k_5} + \frac{1}{\mu_1 k_2 \mu_3 \mu_4 k_5} + \frac{1}{k_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 k_5} + \\ &\quad \frac{1}{\mu_1 \mu_2 k_3 k_4 \mu_5} + \frac{1}{\mu_1 k_2 \mu_3 k_4 \mu_5} + \frac{1}{k_1 \mu_2 \mu_3 k_4 \mu_5} + \\ &\quad \frac{1}{\mu_1 k_2 k_3 \mu_4 \mu_5} + \frac{1}{k_1 \mu_2 k_3 \mu_4 \mu_5} + \\ &\quad \frac{1}{k_1 k_2 k_3 \mu_4 \mu_5}, \\ \bar{p}_5 &= \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

As definições de \bar{p}_3 e \bar{p}_4 podem ser obtidas substituindo k por μ nas expressões de \bar{p}_2 e \bar{p}_1 respectivamente.

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5} + \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_4\mu_5} + \frac{1}{\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5} + \frac{1}{\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5}, \\ \bar{q}_2 &= \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3k_5} + \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_4k_5} + \frac{1}{\mu_1\mu_3\mu_4k_5} + \frac{1}{\mu_2\mu_3\mu_4k_5} + \\ &\frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_4k_4} + \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_5k_4} + \frac{1}{\mu_1\mu_3\mu_5k_4} + \frac{1}{\mu_2\mu_3\mu_4k_4} + \\ &\frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_4k_3} + \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_5k_3} + \frac{1}{\mu_1\mu_4\mu_5k_3} + \frac{1}{\mu_2\mu_4\mu_5k_3} + \\ &\frac{1}{\mu_1\mu_3\mu_4k_2} + \frac{1}{\mu_1\mu_3\mu_5k_2} + \frac{1}{\mu_1\mu_4\mu_5k_2} + \frac{1}{\mu_3\mu_4\mu_5k_2} + \\ &\frac{1}{\mu_2\mu_3\mu_4k_1} + \frac{1}{\mu_2\mu_3\mu_5k_1} + \frac{1}{\mu_2\mu_4\mu_5k_1} + \frac{1}{\mu_3\mu_4\mu_5k_1}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_3 &= \frac{1}{\mu_1\mu_2k_4k_5} + \frac{1}{\mu_1\mu_3k_4k_5} + \frac{1}{\mu_2\mu_3k_4k_5} + \frac{1}{\mu_1\mu_2k_3k_5} + \frac{1}{\mu_1\mu_4k_3k_5} + \frac{1}{\mu_2\mu_4k_3k_5} + \\ &\frac{1}{\mu_1\mu_3k_2k_5} + \frac{1}{\mu_1\mu_4k_2k_5} + \frac{1}{\mu_3\mu_4k_2k_5} + \frac{1}{\mu_2\mu_3k_1k_5} + \frac{1}{\mu_2\mu_4k_1k_5} + \frac{1}{\mu_3\mu_4k_1k_5} + \\ &\frac{1}{\mu_1\mu_2k_3k_4} + \frac{1}{\mu_1\mu_5k_3k_4} + \frac{1}{\mu_2\mu_5k_3k_4} + \frac{1}{\mu_1\mu_3k_2k_4} + \frac{1}{\mu_1\mu_5k_2k_4} + \frac{1}{\mu_3\mu_5k_2k_4} + \\ &\frac{1}{\mu_2\mu_3k_1k_4} + \frac{1}{\mu_2\mu_5k_1k_4} + \frac{1}{\mu_3\mu_5k_1k_4} + \frac{1}{\mu_1\mu_4k_2k_3} + \frac{1}{\mu_1\mu_5k_2k_3} + \frac{1}{\mu_4\mu_5k_2k_3} + \\ &\frac{1}{\mu_2\mu_4k_1k_3} + \frac{1}{\mu_2\mu_5k_1k_3} + \frac{1}{\mu_4\mu_5k_1k_3} + \frac{1}{\mu_3\mu_4k_1k_2} + \frac{1}{\mu_3\mu_5k_1k_2} + \frac{1}{\mu_4\mu_5k_1k_2}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

As definições de \bar{q}_4 e \bar{q}_5 podem ser obtidas substituindo k por μ nas expressões de \bar{q}_2 e \bar{q}_1 respectivamente.

Solução de fluência

A solução de fluência é obtida transformando a equação diferencial usando $\sigma(t) = \sigma_o \Delta(t)$, (4.40) resulta em:

$$\mathcal{L}[J] = \frac{\mathcal{L}[\epsilon]}{\sigma_o} = \frac{P(s)}{sQ(s)} = \frac{[1 + sp_1 + s^2p_2 + s^3p_3 + s^4p_4 + s^5p_5]}{q_5s \left[\frac{q_0}{q_5} + s\frac{q_1}{q_5} + s^2\frac{q_2}{q_5} + s^3\frac{q_3}{q_5} + s^4\frac{q_4}{q_5} + s^5 \right]}. \quad (4.45)$$

Considerando as cinco raízes $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_5$ do polinômio $Q(s)/q_5$, tal que o denominador torna-se $q_5(s - \delta_1)(s - \delta_2)(s - \delta_3)(s - \delta_4)(s - \delta_5)$. Colocado nessa forma, um manipulador simbólico de equações facilmente fornece a inversa da transformada de (4.45), o que resulta no módulo de fluência:

$$\boxed{J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_o} = B_o - B_1e^{-t/\rho_1} - B_2e^{-t/\rho_2} - B_3e^{-t/\rho_3} - B_4e^{-t/\rho_4} - B_5e^{-t/\rho_5}} \quad (4.46)$$

onde os tempos de fluência são $\rho_j = -1/\delta_j$, para $j = 1, \dots, 5$, e as constantes são:

$$\begin{aligned}
B_o &= \frac{1}{q_5 \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \delta_5}, \\
B_j &= -\frac{1 + \delta_j p_1 + \delta_j^2 p_2 + \delta_j^3 p_3 + \delta_j^4 p_4 + \delta_j^5 p_5}{d_j}, \text{ para } j = 1, \dots, 5, \text{ onde} \\
d_1 &= q_5 \delta_1 (\delta_1 - \delta_2) (\delta_1 - \delta_3) (\delta_1 - \delta_4) (\delta_1 - \delta_5), \\
d_2 &= q_5 \delta_2 (\delta_2 - \delta_1) (\delta_2 - \delta_3) (\delta_2 - \delta_4) (\delta_2 - \delta_5), \\
d_3 &= q_5 \delta_3 (\delta_3 - \delta_1) (\delta_3 - \delta_2) (\delta_3 - \delta_4) (\delta_3 - \delta_5), \text{ etc.}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Determinação das constantes do material a partir de resultados experimentais de fluência

Caso as constantes e os tempos de fluência sejam conhecidos a partir de resultados experimentais, é possível realizar a determinação das constantes que definem a relação constitutiva do material, os $p's$ e $q's$. Para isso, considera-se o polinômio $Q(s)$ escrito de duas formas:

$$\begin{aligned}
\frac{Q(s)}{q_5} &= \left[\frac{q_o}{q_5} + s \frac{q_1}{q_5} + s^2 \frac{q_2}{q_5} + s^3 \frac{q_3}{q_5} + s^4 \frac{q_4}{q_5} + s^5 \right], \text{ e} \\
&= (s - \delta_1)(s - \delta_2)(s - \delta_3)(s - \delta_4)(s - \delta_5).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Expandindo a segunda forma e coletando as potências de s tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{Q(s)}{q_5} &= f_1 + f_2 s + f_3 s^2 + f_4 s^3 + f_5 s^4 + s^5, \text{ onde} \\
f_1 &= +\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \delta_5, \\
f_2 &= -(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_5 + \delta_1 \delta_2 \delta_4 \delta_5 + \delta_1 \delta_3 \delta_4 \delta_5 + \delta_2 \delta_3 \delta_4 \delta_5), \\
f_3 &= +(\delta_1 \delta_2 \delta_3 + \delta_1 \delta_2 \delta_4 + \delta_1 \delta_2 \delta_5 + \delta_1 \delta_3 \delta_4 + \delta_1 \delta_3 \delta_5 + \delta_2 \delta_3 \delta_4 + \delta_2 \delta_3 \delta_5 + \delta_3 \delta_4 \delta_5), \\
f_4 &= -(\delta_1 \delta_2 + \delta_1 \delta_3 + \delta_1 \delta_4 + \delta_1 \delta_5 + \delta_2 \delta_3 + \delta_2 \delta_4 + \delta_2 \delta_5 + \delta_3 \delta_4 + \delta_3 \delta_5 + \delta_4 \delta_5), \\
f_5 &= +(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Como os $\delta's$ são conhecidos pelos tempos de fluência, os $f's$ também o são. Assim, igualando os coeficientes dos polinômios (4.48)₁ e (4.49)₁, obtém-se um sistema algébrico de cinco equações para os $q's$, que resolvido produz:

$$\begin{aligned}
q_5 &= \frac{1}{B_o f_1}, \\
q_o &= q_5 f_1 = \frac{1}{B_o}, \\
q_1 &= q_5 f_2, \quad q_2 = q_5 f_3, \quad q_3 = q_5 f_4, \quad q_4 = q_5 f_5.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

A determinação dos $p's$ é feita observando que as 5 equações (4.47) para as constantes $B's$ agora formam um sistema algébrico para os $p's$. Esse sistema pode ser organizado na forma padrão:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1^2 & \delta_1^3 & \delta_1^4 & \delta_1^5 \\ \delta_2 & \delta_2^2 & \delta_2^3 & \delta_2^4 & \delta_2^5 \\ \delta_3 & \delta_3^2 & \delta_3^3 & \delta_3^4 & \delta_3^5 \\ \delta_4 & \delta_4^2 & \delta_4^3 & \delta_4^4 & \delta_4^5 \\ \delta_5 & \delta_5^2 & \delta_5^3 & \delta_5^4 & \delta_5^5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 d_1 - 1 \\ B_2 d_2 - 1 \\ B_3 d_3 - 1 \\ B_4 d_4 - 1 \\ B_5 d_5 - 1 \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

A matriz coeficiente é altamente mal condicionada, porém, caso o sistema possa ser resolvido, tem-se as constantes p 's e q 's do material. De forma geral, por razões físicas, as constantes mecânicas k 's e μ 's do modelo de Maxwell são positivas. Conseqüentemente, das definições (4.41), as constantes p 's e q 's são também positivas.

Algumas relações auxiliares são importantes. Primeiro, para $t = 0$, (4.46) produz

$$J(0) \equiv \frac{\epsilon(0)}{\sigma_o} = B_o - B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5, \quad (4.52)$$

e para $t \rightarrow \infty$,

$$J(\infty) \equiv \frac{\epsilon(\infty)}{\sigma_o} = B_o. \quad (4.53)$$

Solução de relaxação

A solução de relaxação é obtida transformando a equação diferencial $P\sigma = Q\epsilon$ usando $\epsilon(t) = \epsilon_o\Delta(t)$, (4.40) resulta em:

$$\mathcal{L}[Y] \equiv \frac{\mathcal{L}[\sigma]}{\epsilon_o} = \frac{Q(s)}{sP(s)} = \frac{[q_o + sq_1 + s^2q_2 + s^3q_3 + s^4q_4 + s^5q_5]}{p_5s \left[\frac{1}{p_5} + s\frac{p_1}{p_5} + s^2\frac{p_2}{p_5} + s^3\frac{p_3}{p_5} + s^4\frac{p_4}{p_5} + s^5 \right]}. \quad (4.54)$$

Considerando as cinco raízes $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_5$ do polinômio $P(s)/p_5$, tal que o denominador torna-se $p_5(s - \zeta_1)(s - \zeta_2)(s - \zeta_3)(s - \zeta_4)(s - \zeta_5)$. Colocado nessa forma, um manipulador simbólico de equações fornece a inversa da transformada de (4.54), o que resulta no módulo de relaxação:

$$\boxed{Y(t) \equiv \frac{\sigma(t)}{\epsilon_o} = C_o + C_1e^{-t/\lambda_1} + C_2e^{-t/\lambda_2} + C_3e^{-t/\lambda_3} + C_4e^{-t/\lambda_4} + C_5e^{-t/\lambda_5}} \quad (4.55)$$

onde os tempos de relaxação são $\lambda_j = -1/\zeta_j$, para $j = 1, \dots, 5$, e as constantes são:

$$\begin{aligned} C_o &= \frac{q_o}{p_5\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4\zeta_5}, \\ C_1 &= \frac{q_o + \zeta_1(q_1 + \zeta_1(q_2 + \zeta_1(q_3 + \zeta_1(q_4 + \zeta_1q_5))))}{p_5\zeta_1(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_1 - \zeta_4)(\zeta_1 - \zeta_5)}, \\ C_2 &= \frac{q_o + \zeta_2(q_1 + \zeta_2(q_2 + \zeta_2(q_3 + \zeta_2(q_4 + \zeta_2q_5))))}{p_5\zeta_{12}(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_4)(\zeta_2 - \zeta_5)}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Prova-se que, para $j = 1, \dots, 5$,

$$\boxed{C_j = k_j \quad \text{e} \quad \lambda_j = \frac{\mu_j}{k_j} = -\frac{1}{\zeta_j}} \quad (4.57)$$

Isto significa, que se for realizado o ensaio de relaxação para caracterizar o material, as constantes de relaxação C_j 's e os tempos λ_j 's são obtidos diretamente do ajuste dos dados, e as constantes mecânicas k_j 's e μ_j 's vem de (4.57). Em seguida, as constantes da equação diferencial do material, p_j 's e q_j 's, vem das definições (4.41).

Uma relação auxiliar é obtida considerando as duas formas de expressão do polinômio $P(s)$ em (4.54):

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{p_5} &= \left[\frac{1}{p_5} + s \frac{p_1}{p_5} + s^2 \frac{p_2}{p_5} + s^3 \frac{p_3}{p_5} + s^4 \frac{p_4}{p_5} + s^5 \right], \\ &= (s - \zeta_1)(s - \zeta_2)(s - \zeta_3)(s - \zeta_4)(s - \zeta_5). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Expandindo a segunda forma, separando as potências de s e igualando os coeficientes com a primeira equação, obtêm-se:

$$\begin{aligned} p_5 &= -1/\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4\zeta_5, \\ p_1 &= p_5 (\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4 + \zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_5 + \zeta_1\zeta_2\zeta_4\zeta_5 + \zeta_1\zeta_3\zeta_4\zeta_5 + \zeta_2\zeta_3\zeta_4\zeta_5), \\ p_2 &= p_5 (\zeta_1\zeta_2\zeta_3 + \zeta_1\zeta_2\zeta_4 + \zeta_1\zeta_2\zeta_5 + \zeta_2\zeta_3\zeta_4 + \zeta_2\zeta_3\zeta_5 + \zeta_2\zeta_4\zeta_5 + \\ &\quad \zeta_3\zeta_4\zeta_5 + \zeta_1\zeta_3\zeta_4 + \zeta_1\zeta_3\zeta_5 + \zeta_1\zeta_4\zeta_5), \\ p_3 &= p_5 [\zeta_1(\zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5) + \zeta_2(\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5) + \zeta_3(\zeta_4 + \zeta_5) + \zeta_4\zeta_5], \\ p_4 &= p_5 (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Constantes de relaxação a partir do ensaio de fluência

De um ponto de vista prático, é mais complicada a realização do ensaio de relaxação e o de fluência é mais comum. Conhecida a função do módulo de fluência, o módulo de relaxação pode ser obtido por

$$\mathcal{L}[Y] = \frac{1}{s^2 \mathcal{L}[J]}. \quad (4.60)$$

Realizando a transformação inversa, tem-se uma expressão para $Y(t)$ na forma de séries de Prony, eq.(4.55), isto é, as constantes C_j 's e os tempos de relaxação λ_j 's são conhecidas. Com isso, basta aplicar as relações (4.57) para ter as constantes mecânicas e as constantes da equação diferencial, os p_j 's e q_j 's, são obtidas aplicando as relações 4.41.

4.4 Componentes de Tensão e Deformação 3-D

Todo o equacionamento desenvolvido na Seção 4.3 trata das relações entre a tensão e a deformação totais no ensaio uniaxial associadas ao modelo de sólido de Maxwell de ordem n . Na presente seção, determina-se os módulos de fluência e relaxação separados em suas parcelas deviatóricas e volumétricas. Na Seção 3.6.2 determinou-se as relações constitutivas diferenciais (3.114) relacionando σ_{11} , ϵ_{11} e ϵ_{22} para o caso em que o comportamento volumétrico do material seja considerado elástico-linear.

Da expressão (3.93), as componentes volumétricas relacionam-se por $P'' S_v = Q'' E_v$ e de (3.97), as componentes deviatóricas relacionam-se por $P' S_{ij} = Q' E_{ij}$. Representando a parcela volumétrica como elástica, $P'' = 1$ e $Q'' = 3K_{el}$, as equações diferenciais do problema tornam-se

$$\begin{cases} (Q' + 6K_{el}P') \sigma_{11} = 9K_{el}Q' \epsilon_{11}, \\ (Q' - 3K_{el}P') \sigma_{11} = 9K_{el}Q' \epsilon_{22}. \end{cases} \quad (4.61)$$

como fora desenvolvido em (3.114). Torna-se então necessário arbitrar um modelo para os operadores deviatóricos P' e Q' . Na Seção 3.6.2 exemplificou-se o caso em que essa parcela era modelada pelo fluido simples de Maxwell com mola-amortecedor em série. Na presente seção pretende-se generalizar a formulação para definir P' e Q' através do modelo de Maxwell generalizado de ordem n , como ilustrado na figura 4.1. Assim, os operadores assumem as formas (4.13), ou seja

$$\begin{cases} P' = 1 + p_1' \frac{d}{dt} + p_2' \frac{d^2}{dt^2} + \dots + p_n' \frac{d^n}{dt^n}, \\ Q' = q_0' + q_1' \frac{d}{dt} + q_2' \frac{d^2}{dt^2} + \dots + q_n' \frac{d^n}{dt^n}. \end{cases} \quad (4.62)$$

Substituindo (4.62) em (4.61) obtém-se

$$\begin{cases} \sigma_{11} + p_1 \sigma_{11}^{(1)} + p_2 \sigma_{11}^{(2)} + \dots + p_n \sigma_{11}^{(n)} = q_0 \epsilon_{11} + q_1 \epsilon_{11}^{(1)} + q_2 \epsilon_{11}^{(2)} + \dots + q_n \epsilon_{11}^{(n)}, \\ \sigma_{11} + p_1^* \sigma_{11}^{(1)} + p_2^* \sigma_{11}^{(2)} + \dots + p_n^* \sigma_{11}^{(n)} = q_0^* \epsilon_{22} + q_1^* \epsilon_{22}^{(1)} + q_2^* \epsilon_{22}^{(2)} + \dots + q_n^* \epsilon_{22}^{(n)}, \end{cases} \quad (4.63)$$

sendo

$$\begin{cases} p_m = \frac{q_m' + 6K_{el}p_m'}{q_0' + 6K_{el}}, \\ p_m^* = \frac{q_m' - 3K_{el}p_m'}{q_0' - 3K_{el}}, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} q_j = \frac{9K_{el}q_j'}{q_0' + 6K_{el}}, \\ q_j^* = \frac{9K_{el}q_j'}{q_0' - 3K_{el}}, \end{cases} \quad (4.64)$$

para $m = 1, \dots, n$ e $j = 0, \dots, n$. Notando que (4.63)₁ é, de fato, a relação constitutiva padrão uniaxial entre σ_{11} e ϵ_{11} , e (4.63)₂ é uma relação especial entre σ_{11} e ϵ_{22} .

4.4.1 Soluções de Fluência e de Relaxação Deviatóricas

A solução do problema de fluência deviatórico pode ser obtida como a solução da equação diferencial (4.63) para a condição de um ensaio de fluência em que impõe-se uma tensão uniaxial na forma de uma função degrau, $\sigma_{11} = \sigma_o \Delta(t)$. A solução dos problemas em (4.63), nesse caso, é obtida pelo mesmo procedimento usado na Seção 4.3. Para o caso do sólido de Maxwell de ordem $n = 5$, a eq.(4.46)

resulta em:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{11}(t) \equiv \frac{\epsilon_{11}(t)}{\sigma_o} = B_o - B_1 e^{-t/\rho_1} - B_2 e^{-t/\rho_2} - B_3 e^{-t/\rho_3} - B_4 e^{-t/\rho_4} - B_5 e^{-t/\rho_5}, \quad e \\ J_{22}(t) \equiv \frac{\epsilon_{22}(t)}{\sigma_o} = B_o^* - B_1^* e^{-t/\rho_1^*} - B_2^* e^{-t/\rho_2^*} - B_3^* e^{-t/\rho_3^*} - B_4^* e^{-t/\rho_4^*} - B_5^* e^{-t/\rho_5^*}, \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Caso seja realizado o ensaio de fluência, o ajuste dos dados resultará nos valores das constantes de fluência B_m , para $m = 0, \dots, n$ e dos tempos ρ_j , para $j = 1, \dots, n$. Determina-se as constantes B_m^* na forma que segue. Primeiramente, é necessário obter as constantes da equação diferencial do material, p_j 's e q_j 's da eq.(4.63). Isso é feito como discutido na Seção 4.3.3, particularmente nas eqs.(4.51) e (4.59).

As expressões de p_j e q_m em (4.64) definem um sistema algébrico de $2n + 1$ equações em termos de p_j ' e q_m ', e as expressões de p_j^* e q_m^* definem um outro sistema algébrico de $2n + 1$ equações também em termos de p_j ' e q_m '. Resolvendo o primeiro sistema tem-se

$$\boxed{\begin{array}{l} q_o' = \frac{6K_{el}q_o}{9K_{el} - q_o} \\ q_m' = \frac{q_o q_m}{q_o}, \quad \text{para } m = 0, \dots, n, \\ p_j' = \frac{(q_o' + 6K_{el}) p_j - q_j'}{6K_{el}}, \quad \text{para } j = 1, \dots, n \end{array}} \quad (4.66)$$

Em seguida, conhecidos os valores de p_j ' e q_m ', a eq.(4.64) produz os valores de p_j^* e q_m^* . Com isto, (4.47) pode ser usado para obter os coeficientes B_m^* de $\epsilon_{22}(t)$ em (4.65). Isso é possível considerando que os tempos de fluência nas direções longitudinal e transversal sejam idênticos, isto é, $\rho_j^* = \rho_j$, e são portanto já conhecidos do ensaio de fluência axial. Na Seção 4.4.3 é apresentado um procedimento abreviado para a determinação de B_m^* .

A determinação do módulo de relaxação deviatórico a partir do ensaio de fluência é como segue. Considere a deformação deviatórica desenvolvida no ensaio uniaxial, $E_{11} = \frac{2}{3}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})$, e considere que, por definição, eq.(4.65), os módulos de fluência são tais que $J_{11}(t) \equiv \frac{\epsilon_{11}(t)}{\sigma_o}$ e $J_{22}(t) \equiv \frac{\epsilon_{22}(t)}{\sigma_o}$. Então,

$$\begin{aligned} E_{11}(t) &= \frac{2}{3}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}), \\ &= \frac{2}{3}\sigma_o(J_{11} - J_{22}). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Porém, no ensaio de tração, a tensão deviatórica é $S_{11} = \frac{2}{3}\sigma_o$, de forma que

$$E_{11}(t) = S_{11} \underbrace{(J_{11} - J_{22})}_{J'} \implies \boxed{J'(t) = J_{11}(t) - J_{22}(t)} \quad (4.68)$$

$J'(t)$ é o módulo de fluência deviatórico. Como $J_{11}(t)$ e $J_{22}(t)$ foram previamente determinados, $J'(t)$

é então conhecido, e pode ser posto na forma:

$$J_{11}'(t) \equiv \frac{E_{11}(t)}{\frac{2}{3}\sigma_o} = B_o' - B_1'e^{-t/\rho_1} - B_2'e^{-t/\rho_2} - B_3'e^{-t/\rho_3} - B_4'e^{-t/\rho_4} - B_5'e^{-t/\rho_5}, \quad (4.69)$$

O módulo de relaxação deviatórico $G(t)$ é obtido observando que (3.76) pode ser aplicada aos operadores deviatóricos, de forma que $\mathcal{L}[G]\mathcal{L}[J'] = s^{-2}$. Como $J'(t)$ é conhecido, a transformação inversa leva a

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{-2}\mathcal{L}[J']} \right], \quad (4.70)$$

que terá a forma padrão

$$\boxed{G(t) = C_0' + C_1'e^{-t/\lambda_1'} + C_2'e^{-t/\lambda_2'} + \dots + C_n'e^{-t/\lambda_n'}} \quad (4.71)$$

onde $\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_n'$ são os tempos de relaxação, idênticos aos λ_m , e C_0', C_1', \dots, C_n' são as constantes do módulo de relaxação deviatórico.

Um conjunto auxiliar de relações pode ser obtido no caso de ser dado o módulo de relaxação deviatórico $G(t)$ e se buscar o módulo de relaxação total $Y(t)$. As etapas são as seguintes:

- a) De (3.76), calcular o módulo de fluência deviatórico na direção axial:

$$J_{11}'(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{-2}\mathcal{L}[G]} \right] \quad (4.72)$$

- b) Como $\text{tr}[\mathbf{E}] = 0$, o módulo de fluência deviatórico na direção transversal é $J_{22}' = -J_{11}'/2$.

- c) Por definição, $\epsilon_{11} = E_{11} + E_v$. Então, o módulo de fluência completo $J(t)$ é obtido de

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= E_{11} + \frac{\sigma_o}{9K_{el}}, \\ &= \sigma_o \underbrace{\left(\frac{2}{3}J_{11}' + \frac{1}{9K_{el}} \right)}_{J(t)} \implies \boxed{J(t) = \frac{2}{3}J_{11}' + \frac{1}{9K_{el}}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

- d) Finalmente, de (3.76) tem-se o módulo de relaxação completo:

$$\boxed{Y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{-2}J} \right]} \quad (4.74)$$

4.4.2 Determinação Experimental do Módulo Volumétrico K_{el}

O módulo volumétrico K_{el} que define o operador Q'' , eq.(3.100), requer um ensaio em separado para sua determinação. Como foi considerado que o comportamento do material em dilatação é puramente

elástico, então o módulo volumétrico não varia com o tempo, estando relacionado ao módulo elástico e ao coeficiente de Poisson pela fórmula usual da teoria da elasticidade

$$\boxed{K_{el} = \frac{E_{el}}{3(1 - 2\nu_{el})}} \quad (4.75)$$

A relação entre a tensão e a deformação volumétrica fica

$$S_v = \frac{E_{el}}{(1 - 2\nu_{el})} E_v. \quad (4.76)$$

É necessário então, determinar o valor do **módulo elástico** E_{el} e do **coeficiente de Poisson** ν_{el} . Através de ensaios de fluência, considerando que a resposta instantânea inicial do material é elástica, medem-se as deformações extensional ϵ_{11} e transversal ϵ_{22} no instante inicial $t = 0$. A relação entre a tensão aplicada $\sigma_o = \sigma(0)$ e a deformação $\epsilon_{11}(0)$, fornece então o módulo elástico inicial

$$\boxed{E_{el} = \frac{\sigma_o}{\epsilon_{11}(0)}} \quad (4.77)$$

O coeficiente de Poisson elástico é obtido da relação entre a contração lateral $\epsilon_{22}(0)$ e a deformação extensional $\epsilon_{11}(0)$ no início do ensaio

$$\boxed{\nu_{el} = -\frac{\epsilon_{22}(0)}{\epsilon_{11}(0)}} \quad (4.78)$$

Obtidos experimentalmente os valores de E_{el} e ν_{el} , o valor do módulo volumétrico é obtido de (4.75).

4.4.3 Forma 2 de Determinação de $\epsilon_{22}(t)$ a partir de $\epsilon_{11}(t)$ e de K_{el}

Na Seção 4.4.1 foi apresentado um procedimento para obter a deformação transversal $\epsilon_{22}(t)$ num ensaio de fluência uniaxial, a partir dos dados medidos de $\epsilon_{11}(t)$. Um segundo procedimento é apresentado, considerando inicialmente as eqs.(4.65) na forma

$$\epsilon_{11}(t) = \sigma_o J_{11}(t) \quad \text{e} \quad \epsilon_{22}(t) = \sigma_o J_{22}(t). \quad (4.79)$$

No ensaio uniaxial as deformações deviatórica e volumétrica são:

$$\begin{aligned} E_{11}(t) &= \frac{2}{3}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) = \frac{2}{3}\sigma_o(J_{11} - J_{22}), \\ E_v(t) &= \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + 2\epsilon_{22}) = \frac{1}{3}\sigma_o(J_{11} + 2J_{22}), \end{aligned} \quad (4.80)$$

e a tensão hidrostática é $S = \sigma_o/3$. A lei de Hooke para a parcela volumétrica de deformações é

$$\begin{aligned}
 S &= 3K_{el}E_v(t). \quad \text{Logo,} \\
 \frac{1}{3}\sigma_o &= 3K_{el}\frac{1}{3}\sigma_o(J_{11} + 2J_{22}) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{K_{el} = \frac{1}{3(J_{11} + 2J_{22})}} \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

Observa-se que, embora no lado direito existem termos dependentes do tempo, K_{el} não depende. Assim, de (4.65) pode-se escrever (para modelo sólido de Maxwell com $n = 5$ com deformação volumétrica elástica):

$$\begin{aligned}
 J_{11}(t) + 2J_{22}(t) &= B_o - B_1e^{-t/\rho_1} - B_2e^{-t/\rho_2} - B_3e^{-t/\rho_3} - B_4e^{-t/\rho_4} - B_5e^{-t/\rho_5} + \\
 &2B_o^* - 2B_1^*e^{-t/\rho_1} - 2B_2^*e^{-t/\rho_2} - 2B_3^*e^{-t/\rho_3} - 2B_4^*e^{-t/\rho_4} - 2B_5^*e^{-t/\rho_5}
 \end{aligned}$$

Como o lado direito deve ser independente do tempo, tem-se $2(n + 1)$ equações que permitem determinar os coeficientes B_m^* do módulo de fluência $J_{22}(t)$, uma vez conhecidos os B_m e ρ_j de $J_{11}(t)$:

$$\boxed{2B_o^* = \frac{1}{3K_{el}} - B_o \quad \text{e} \quad B_m^* = -\frac{B_m}{2} \quad \text{para } m = 1, \dots, n} \quad (4.82)$$

Com isso, torna-se conhecida a expressão para $\epsilon_{22}(t)$, e $J_{22}(t)$, o que permite determinar a expressão para a evolução no tempo do coeficiente de Poisson do material no ensaio de fluência e do módulo de elasticidade:

$$\boxed{\nu(t) = -\frac{\epsilon_{22}(t)}{\epsilon_{11}(t)} \quad \text{e} \quad E(t) = \frac{\sigma_o}{\epsilon_{11}(t)}} \quad (4.83)$$

4.4.4 Demonstrações sobre K_{el} , E_{el} e ν_{el}

Nessa seção busca-se mostrar que, dadas as equações (4.83), as condições $E_{el} = E(0)$ e $\nu_{el} = \nu(0)$ no ensaio de fluência implicam que K_{el} satisfaz a relação elástica $K_{el} = E_{el}/3(1 - 2\nu_{el})$, quando o material é modelado como um sólido de Maxwell e a deformação volumétrica é elástica. Para isso, basta supor

$$\begin{aligned}
 \nu_{el} &= \nu(0), \\
 &= -\frac{\epsilon_{22}(0)}{\epsilon_{11}(0)} = -\frac{J_{22}(0)}{J_{11}(0)}, \\
 E_{el} &= E(0), \\
 &= \frac{\sigma_o}{\epsilon_{11}(0)} = \frac{\sigma_o}{\sigma_o J_{11}(0)} = \frac{1}{J_{11}(0)}. \quad (4.84)
 \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões na definição do módulo volumétrico elástico tem-se

$$K_{el} = \frac{E_{el}}{3(1 - 2\nu_{el})} = \frac{1/J_{11}(0)}{3 + 6J_{22}(0)/J_{11}(0)} = \frac{1}{3J_{11}(0) + 6J_{22}(0)}.$$

Tomando os módulos de fluência de (4.65) para $t = 0$ e usando (4.82),

$$\frac{1}{K_{el}} = 3(B_0 - B_1 - B_2 - B_3 - \dots) + 6 \left(\frac{1}{6K_{el}} - \frac{B_0}{2} + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} + \dots \right)$$

Simplificando, observa-se que a igualdade é satisfeita.

Capítulo 5

Procedimento Experimental

5.1 Metodologia

Para caracterizar o comportamento de um material viscoelástico referente a um período de tempo arbitrário através da realização de ensaios de fluência, é necessário obter dados experimentais de deformação. Empregando o princípio da sobreposição tempo-temperatura, é possível obter a curva completa de deformação em uma temperatura de referência, correspondente ao período de tempo para o qual se pretende representar o comportamento do material, mediante a translação das curvas de deformação obtidas de vários ensaios de curta duração.

O procedimento consiste em inicialmente arbitrar a temperatura de referência T_0 , usualmente a temperatura de trabalho do material. Um ensaio de fluência de curta duração fornece uma curva de deformação $\varepsilon_{T_0}(t)$ nesta temperatura, o segmento inicial da curva de deformação na temperatura de referência. Um segundo ensaio na temperatura T_1 , superior a T_0 resulta em uma curva de deformação $\varepsilon_{T_1}(t)$ e um processo de ajuste de curva, conforme descrito na seção 4.1, conduz aos correspondentes módulos de fluência nas temperaturas T_0 e T_1 na forma da expressão (4.46). As constantes da função de translação (3.153) são então determinadas através do procedimento descrito na seção 3.7.2. Outras temperaturas T_2, T_3, \dots, T_n mais elevadas que T_0 , porém abaixo da temperatura de transição vítrea T_g , são arbitradas e os correspondentes fatores de translação são determinados. Os tempos reduzidos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, (3.134), distribuídos ao longo do período de tempo total para o qual se pretende obter a curva de deformação do material, são definidos em um número igual ao de temperaturas arbitradas e, através dos fatores de translação determina-se os tempos de duração dos ensaios nas diferentes temperaturas, conduzindo às curvas de deformação $\varepsilon_{T_1}(t), \varepsilon_{T_2}(t), \dots, \varepsilon_{T_n}(t)$.

Estas curvas de deformação em diferentes temperaturas, são então transladadas no eixo do tempo empregando os respectivos fatores de translação, obtendo-se segmentos da curva de deformação na temperatura de referência. A minimização de uma função erro, equação (4.23), envolvendo a expressão do módulo de fluência e os segmentos da curva de deformação, fornece a curva de deformação completa na temperatura de referência. Conforme o procedimento descrito anteriormente, obtém-se o módulo de fluência completo na temperatura de referência para o período de tempo desejado desconsiderando o efeito do tempo, o envelhecimento do material. Os diferentes procedimentos são então utilizados

para a determinação do módulo de relaxação completo, das componentes deviatóricas dos módulos de fluência e relaxação, além do módulo volumétrico elástico. Ensaio estático de placa são realizados e os resultados são comparados com a solução obtida pelo método dos elementos finitos, empregando as propriedades materiais do material ensaiado.

5.2 Ensaio de Fluência

Os dados do ensaio de fluência são necessários para definir os parâmetros do módulo de fluência e de relaxação de tensão. Os dados deste ensaio podem ser usados para caracterizar o comportamento de um material como função do tempo e desta forma, prever as variações dimensionais e de tensão que podem ocorrer como resultado de um certo carregamento e sob certas condições de temperatura.

O método consiste na medição da extensão como uma função do tempo, de um corpo de prova sujeito a uma carga de tração constante, em uma determinada temperatura. Para a realização dos ensaios, é necessário dispor de um aparato de ensaio, o qual deve atender certos requisitos para produzir resultados válidos. A norma ASTM [28] empregada neste procedimento, estabelece requisitos para a construção do aparato.

5.2.1 Aparato de Ensaio

A seguir é feita uma descrição dos principais dispositivos que compõem o aparato de ensaio:

1. O dispositivo de fixação do corpo de prova, figura 5.1, deve impedir o escorregamento das extremidades do corpo de prova durante o período em que o mesmo está sob carregamento, sendo desenvolvido um dispositivo consistindo de garras unidas por parafusos. A presença de arruelas de pressão nas uniões por parafusos, mantém as garras pressionando constantemente as extremidades do corpo de prova, impedindo o escorregamento. Para minimizar a excentricidade do carregamento, adota-se uma articulação que permite o alinhamento do corpo de prova antes da aplicação da carga;
2. O dispositivo de carregamento, figura 5.2, foi desenvolvido para a aplicação de uma carga constante no corpo de prova através de um mecanismo de braço de alavanca. A força peso de uma certa massa é transmitida ao corpo de prova, mediante um braço de alavanca pivotado que amplifica a carga quatro vezes. Através deste mecanismo, é possível aplicar uma carga elevada à partir de uma massa pequena. Uma base móvel de acionamento manual através de eixo com excêntrico, permite uma aplicação rápida e uniforme do carregamento, de forma que, em uma montagem com vários dispositivos, as cargas passam a solicitar todos os corpos de prova simultaneamente.

Neste dispositivo, a incerteza no valor do carregamento deve-se a incerteza na medição das massas e do comprimento do braço de alavanca. Massas de 1000, 2000 e 3000g são medidas em balança com faixa de medição de 0,25g a 5000g, com resolução correspondente a um incremento digital de 0,1g. Massas de 5000 e 10000g são medidas em balança com faixa de medição de 30000g,

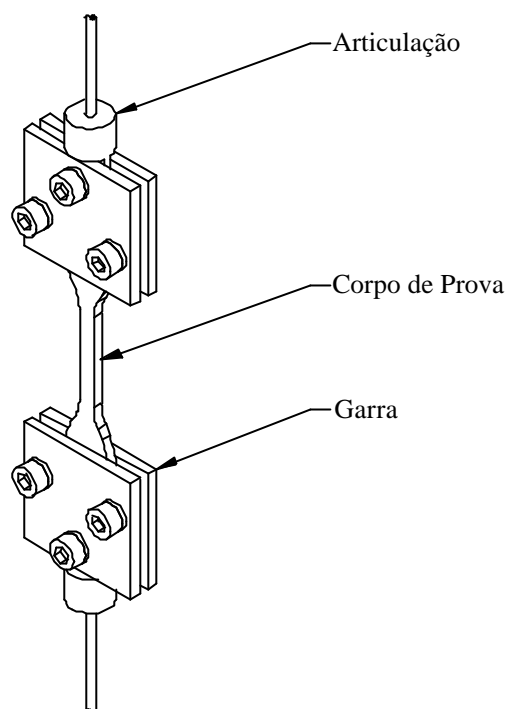


Figura 5.1: Dispositivo de fixação.

com resolução de 5g. Além da força devida à massa suspensa, atua sobre o corpo de prova a força correspondente ao peso próprio do dispositivo, a qual é medida através de dinamômetro com faixa de medição de 10000g e com valor de divisão de escala de 50g. A incerteza quanto ao comprimento do braço de alavanca deve-se ao processo de fabricação do dispositivo, assumindo-se a tolerância de projeto estabelecida em $\pm 0,01\text{mm}$;

3. O dispositivo utilizado para medir a extensão do comprimento útil do corpo de prova sob carga, figura 5.3, não pode influenciar o comportamento do mesmo, seja por efeito mecânico (deformação não desejada, entalhe, etc.), físico (aquecimento do corpo de prova, etc.), ou químico. A extensão do corpo de prova deve preferencialmente ser medida diretamente no mesmo, o que nem sempre é possível devido ao corpo de prova ser mantido no interior de um forno para controle de temperatura, a qual pode atingir valores elevados. Uma possível solução, consiste em um dispositivo composto por dois grampos com hastes concêntricas que, através de molas ficam aderidos ao corpo de prova em pontos distintos do comprimento útil de medição, de forma a proporcionar um comprimento de referência l_0 de 25mm para o cálculo das deformações. O movimento relativo das hastes devido a deformação do corpo de prova, fornece a extensão deste, medida através de relógio comparador montado exteriormente ao forno. O relógio comparador empregado possui uma faixa de medição de 8,0mm com o valor de uma divisão de escala de 0,01mm, o que é suficiente para medir uma extensão de ao menos 2,00mm com uma resolução maior que $\pm 1\%$, conforme recomendado pela norma [28];

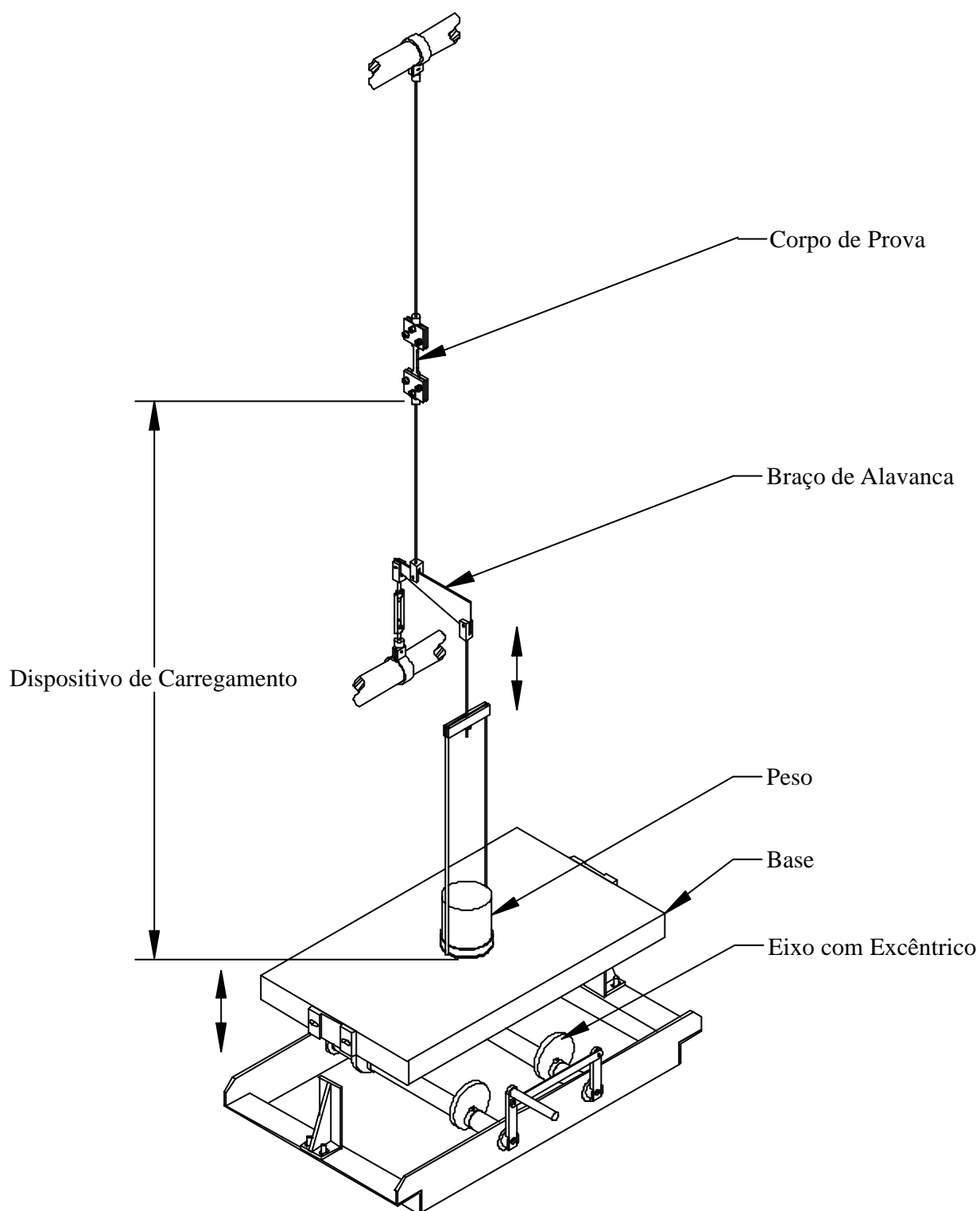


Figura 5.2: Dispositivo de carregamento.

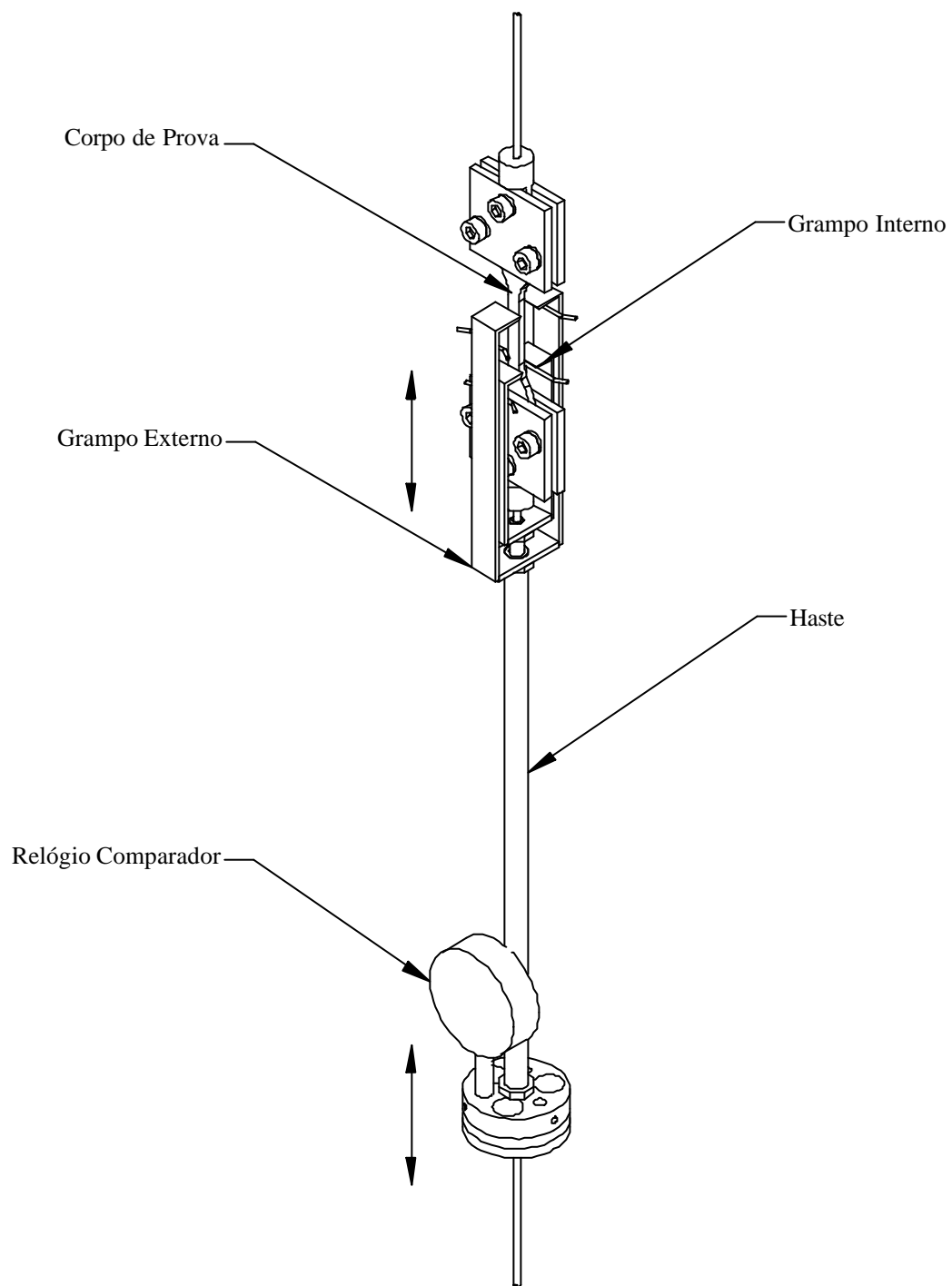


Figura 5.3: Dispositivo de medição.

4. A medição do tempo de ensaio é realizada através de cronômetro com resolução correspondente a um incremento digital de 1s, de forma que o início da medição do tempo coincide com o início da aplicação do carregamento. O cronograma de medição da extensão dos corpos de prova é estabelecido conforme as recomendações da norma [28], com os seguintes tempos: 1, 6, 12, 20, 30min, 1, 2, 5, 20, 50, 100, 200, 400h;
5. A temperatura do local do ensaio, especialmente próximo ao comprimento útil do corpo de prova, deve ser mantida dentro de uma faixa de variação de $\pm 2^{\circ}\text{C}$. Com esta finalidade, adota-se um forno de resistências elétricas com uma potência total de 1100W, equipado com um controlador de temperatura microprocessado, que recebe um sinal de leitura da temperatura, proveniente de um sensor do tipo PT-100 e emite um sinal de controle para um relê de estado sólido. Este relê é responsável pela operação das resistências elétricas de aquecimento do forno. Desta forma, dispõe-se de um sistema de controle e monitoramento permanente da temperatura dentro da faixa de variação desejada, sendo possível controlar temperaturas de 0°C a 150°C correspondente a faixa de medição do PT-100, com uma resolução de 1°C , referente ao incremento digital do controlador de temperatura. Nas paredes superior e inferior do forno existem furos passantes, permitindo a fixação das garras superiores do corpo de prova e a montagem dos dispositivos de medição e de aplicação do carregamento;
6. Todos os dispositivos descritos anteriormente são montados em um suporte tubular, formando uma unidade de ensaio de fluência, onde podem ser dispostos simultaneamente doze corpos de prova, figura 5.4. Os corpos de prova com as garras são dispostos no interior do forno para controle de temperatura. Restringe-se o movimento vertical das garras superiores, conectando-as através de uma haste, a um dispositivo situado no topo do suporte tubular. Na parte intermediária do suporte, existe um dispositivo que permite o pivotamento do braço de alavanca do dispositivo de aplicação de carga. Externamente e abaixo do forno, é montado o relógio comparador na haste externa do dispositivo de medição, para a leitura da extensão do corpo de prova. Na base do suporte, dispõe-se a base do dispositivo de aplicação de carga, através da qual é acionado o carregamento;

5.2.2 Corpos de Prova

Os corpos de prova adotados para os ensaios de fluência são do Tipo IV, como especificado na Norma D638, [29] sendo usinados de chapa de PVC produzidas industrialmente pelo processo de laminação, com temperatura de transição vítrea T_g de 57°C . Todos os corpos de prova são cortados segundo a direção de laminação das chapas, devendo-se eliminar as rebarbas decorrentes da usinagem. A norma [28], recomenda o condicionamento dos corpos de prova no ambiente de ensaio por um período de 48h, antes do início do ensaio.

Para o cálculo da tensão devida ao carregamento, é necessária a determinação da área média inicial da seção transversal de cada corpo de prova. Com este objetivo, mede-se as dimensões da seção transversal do corpo de prova em ao menos três pontos distintos ao longo do comprimento útil de

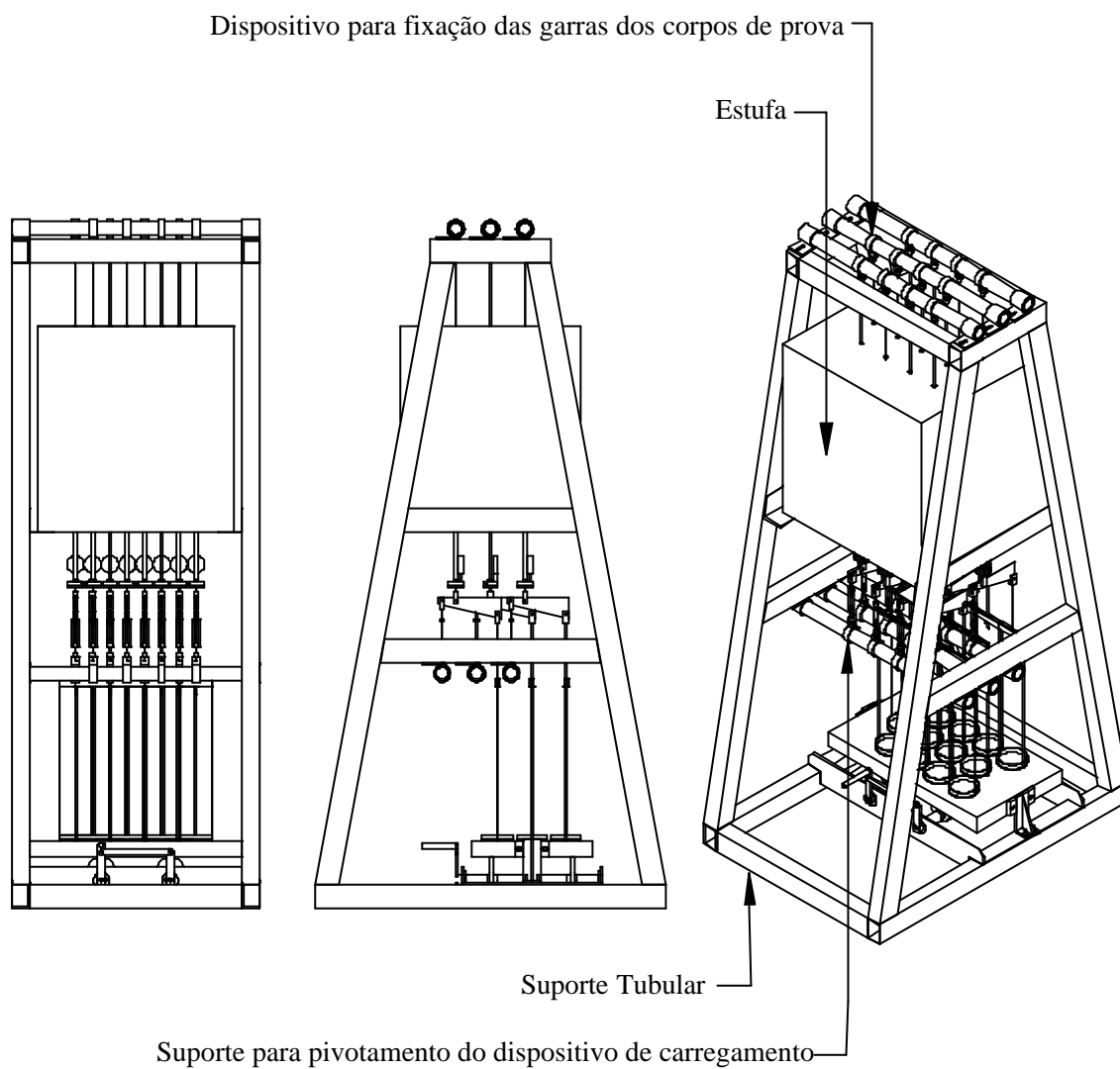


Figura 5.4: Máquina de ensaio.

medida, antes do início do ensaio. Anteriormente à fixação das garras uma limpeza a seco é realizada, utilizando lixa com granulação 600 para remoção de rebarbas e sujeira.

5.2.3 Procedimento de Ensaio

O procedimento de ensaio envolve um certo número de passos, listados a seguir:

1. Inicialmente é feita a medição da área da seção transversal do corpo de prova ao longo do comprimento útil de medida. A seguir, monta-se o corpo de prova nas garras de fixação;
2. O corpo de prova com as garras é montado no dispositivo de aplicação de carga, previamente instalado no suporte tubular. O dispositivo de medição, previamente instalado no forno, é então montado no corpo de prova;
3. Pesos são montados no dispositivo de aplicação de carga, devendo proporcionar uma deformação mensurável pelo dispositivo de medição, porém restringindo-se ao limite de pequenas deformações, o que permite assumir uma condição de tensão constante atuando nos corpos de prova durante os ensaios;
4. Com os parâmetros do microcontrolador de temperatura configurados e o corpo de prova montado no ambiente de ensaio, procede-se ao acionamento do forno. Através do controlador de temperatura, é possível monitorar a temperatura continuamente ao longo de todo o período de ensaio;
5. Decorrido o período de condicionamento do corpo de prova no ambiente de ensaio, ajusta-se a faixa de indicação do relógio comparador para a posição inicial e aplica-se o carregamento acionando manualmente os eixos com excêntricos da base do dispositivo de carga. O período de aplicação da carga não deve exceder 5s, conforme recomendação da norma [28], para evitar o período de resposta transiente;
6. O início da medição do tempo de ensaio coincide com a aplicação do carregamento. A leitura da extensão do corpo de prova é feita então, através do relógio comparador do dispositivo de medição, segundo um cronograma previamente definido. Recomenda-se desconsiderar as medições da extensão, realizadas em um período de tempo inferior a 10 vezes o período da aplicação do carregamento [28];
7. Ao completar-se o período de tempo do ensaio, o carregamento é removido e o forno é desligado. Desmonta-se o dispositivo de medição e o corpo de prova é retirado do dispositivo de carregamento, encerrando o procedimento de ensaio.

5.2.4 Condições Iniciais de Ensaio

Foram realizados dois ensaios de fluência em diferentes temperaturas e com diferentes tempos de duração. Um ensaio foi realizado na temperatura de referência T_0 , arbitrada em 40°C , com duração

de 400h (17 dias) e um outro ensaio foi realizado em uma temperatura superior T_1 , a 50°C com duração de 20h (1 dia). Com as curvas de deformação obtidas através destes ensaios, determinou-se as constantes da função de translação (3.153), conforme o procedimento descrito anteriormente.

Em cada ensaio, três novos corpos de prova foram submetidos simultaneamente às mesmas condições de temperatura e carga. Cada corpo de prova foi submetido a um carregamento devido a uma massa de 10kg e ao peso próprio do dispositivo de aplicação de carga, sendo a tensão de ensaio obtida como a média das tensões atuantes nos corpos de prova, correspondendo ao valor de 21,1MPa em ambos os ensaios.

5.3 Ensaio Estático de Tração

Assumindo um comportamento elástico em dilatação, o módulo volumétrico pode ser determinado através da relação da elasticidade (4.75). Do ensaio de fluência, foi obtido o módulo elástico correspondente à resposta instantânea inicial do material. Para a determinação do coeficiente de Poisson elástico foram realizados ensaios estáticos de tração para a medição das deformações longitudinal e transversal.

Os ensaios foram realizados sem controle de temperatura em uma máquina padrão de ensaio de tração Emic DL3000, com monitoramento contínuo do carregamento e da deformação. Em cada ensaio, o corpo de prova fixado em garras apropriadas e inicialmente descarregado, foi submetido a uma taxa de carga de tração durante um período de tempo de 5s, atingindo um valor previamente definido em função da área da seção transversal do corpo de prova, para produzir a tensão de 21,1MPa do ensaio de fluência. A seguir o carregamento foi mantido constante e a medição das deformações foi realizada conforme o cronograma do ensaio de fluência. Neste caso, apenas uma medição foi realizada, correspondendo ao primeiro instante de medição do cronograma.

A medição da deformação longitudinal foi realizada através de extensômetro montado em adaptador fixado no corpo de prova, com comprimento de referência de 25mm. Esta medida foi obtida diretamente do dispositivo de ensaio. A deformação transversal foi obtida como a razão entre a variação da largura e o seu valor inicial, sendo a medição desta variação realizada através de relógio comparador em um ponto intermediário do comprimento útil de medição do corpo de prova.

5.4 Ensaio Estático de Placa

Para avaliar os parâmetros obtidos, assim como o modelo construído para representar o comportamento do material, são necessários ensaios de estruturas reais. Realiza-se então, ensaios estáticos de placa circular de PVC simplesmente apoiada, submetida a um carregamento constante ao longo do tempo. Medindo-se os deslocamentos dos pontos de aplicação de carga no período do ensaio, obtém-se a curva de deslocamentos ao longo do tempo, representando o comportamento em fluência de uma estrutura de material polimérico com as propriedades viscoelásticas determinadas através do procedimento em estudo. A avaliação das relações constitutivas obtidas pode então ser feita, comparando-se os resultados do ensaio de placa com uma solução analítica ou numérica do problema.

Através do dispositivo mostrado na figura 5.5, um carregamento constante devido ao peso de uma massa suspensa é aplicado em uma placa plana circular. Um anel circular com 208mm de diâmetro apoiado na superfície superior da placa, aplica uma força uniformemente distribuída próxima a borda da placa, devida ao peso próprio e de uma massa conectada através de uma haste. A geometria da superfície do anel em contato com a placa, uma aresta circular, conduz a um carregamento aplicado na forma de uma força por unidade de comprimento. Esta aresta, trata-se de uma superfície plana com uma largura de 1mm para impedir o puncionamento da placa.

A placa é apoiada sobre a aresta de um suporte circular concêntrico com o anel de aplicação de carga, porém com um diâmetro menor de 100mm. As características da aresta do suporte são as mesmas da aresta do anel, para que não ocorra o puncionamento da placa em seu apoio.

Através de relógio comparador montado em uma haste do suporte de apoio, mede-se o deslocamento do dispositivo de aplicação de carga em relação ao suporte, devido a deformação da placa. Desta forma, tem-se os deslocamentos dos pontos da placa com a mesma posição radial, correspondentes aos pontos de aplicação de carga, ou seja a uma distância radial de 104mm do centro da placa.

Para a execução dos ensaios, os dispositivos de fixação, medição e aplicação de carga foram removidos do aparato do ensaio de fluência e os dispositivos para apoio e aplicação do carregamento foram então montados juntamente com a placa no interior do forno, como mostrado na figura 5.6. Utilizou-se corpos de prova de placa plana circular com 3,4mm de espessura e 230mm de diâmetro, contendo um furo passante central de 4mm de diâmetro para a haste de aplicação de carga. Realizou-se três ensaios na temperatura de referência $T_0 = 40^{\circ}\text{C}$, aplicando um carregamento devido ao peso próprio do dispositivo de 2757, 2g, durante um período de 20h.

5.5 Determinação dos Fatores de Translação

Procura-se inicialmente determinar as constantes da função de translação (3.153), tornando necessário primeiramente determinar os módulos de fluência correspondentes às duas temperaturas de ensaio, a temperatura em que se procura caracterizar o comportamento do material, a temperatura de referência T_0 e uma segunda temperatura T_1 , conforme as condições de ensaio estabelecidas na seção 5.2.4.

5.5.1 Módulo de fluência na temperatura de referência T_0

A partir dos valores medidos da extensão dos corpos de prova ao longo do tempo, determinou-se as deformações dos mesmos e a deformação de fluência do ensaio foi obtida como a média das deformações dos corpos de prova. No gráfico 5.7 estão representados os dados normalizados de deformação média de fluência, obtidos do ensaio realizado na temperatura de referência e a curva de deformação resultante do ajuste de curva em que se busca minimizar uma função erro na forma da expressão (4.23), envolvendo o módulo de fluência e os dados experimentais de deformação média. Neste processo de ajuste de curva, os dados dos extremos da curva experimental de deformação foram desprezados.

A expressão (5.1) representa a curva de deformação de fluência obtida por ajuste de curva, fornecendo os tempos de fluência da equação (4.46) do módulo de fluência:

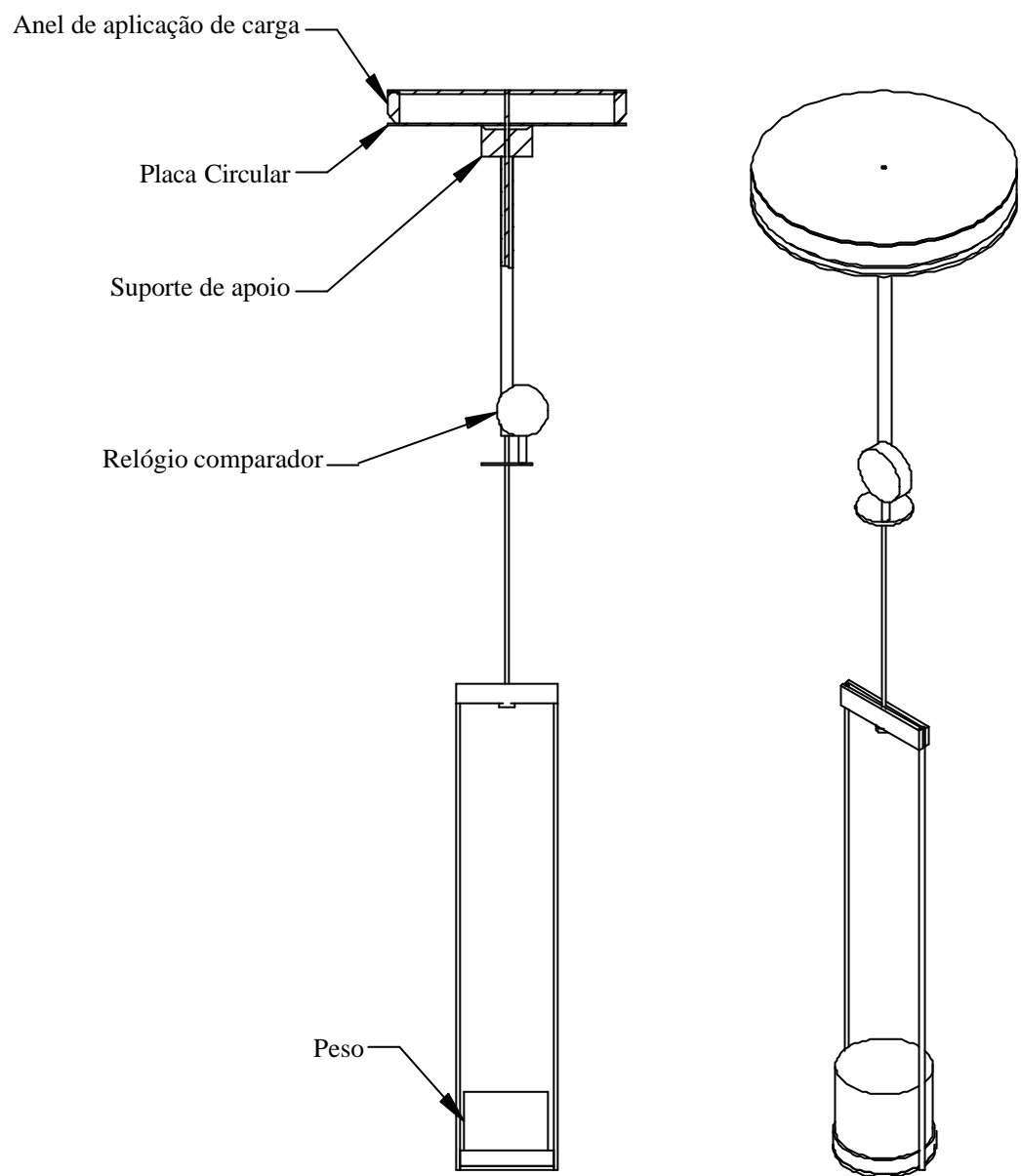


Figura 5.5: Dispositivo de ensaio de placa.

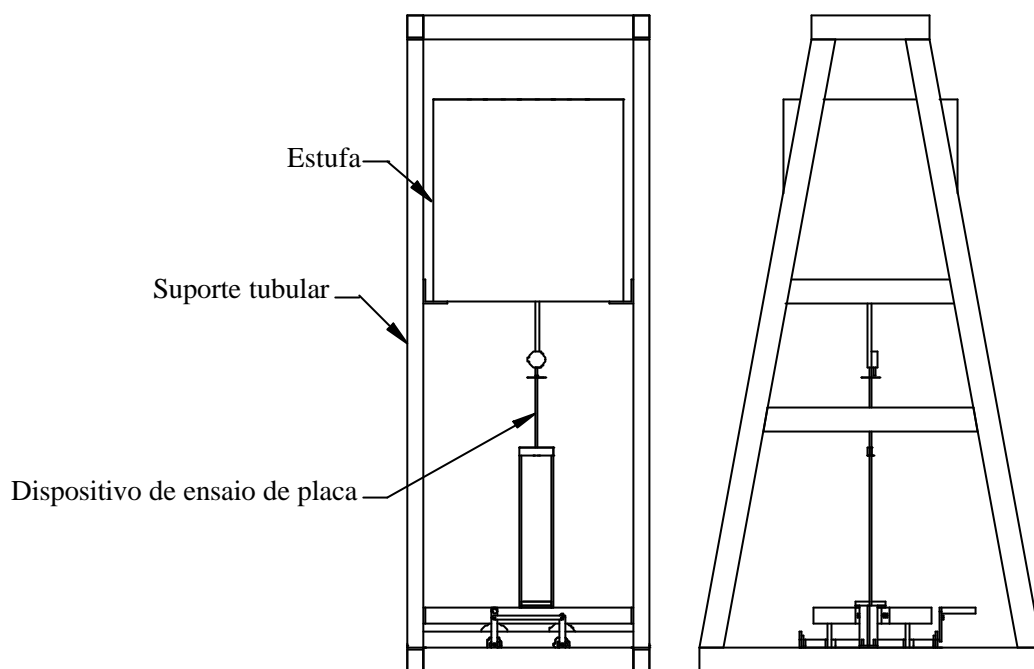


Figura 5.6: Aparato de ensaio de placa.

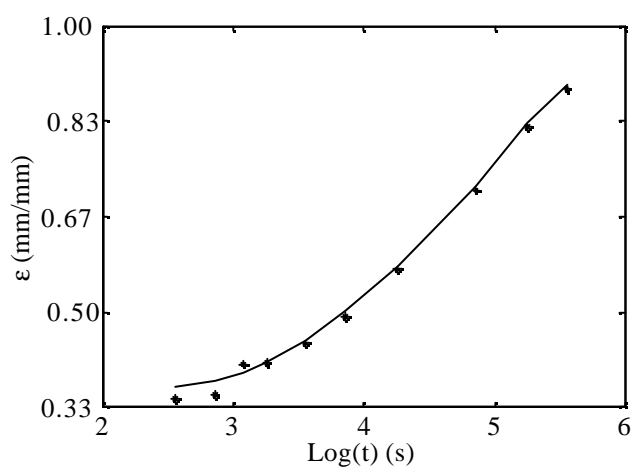


Figura 5.7: Deformação de fluência na temperatura de referência T_0 .

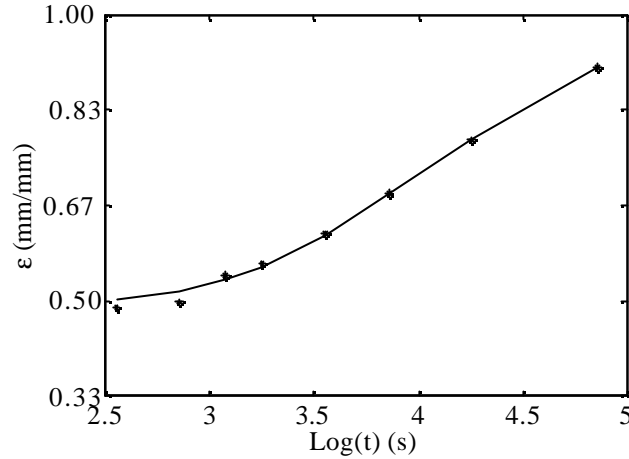


Figura 5.8: Deformação de fluência na temperatura de referência T_1 .

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & 0,0289 - 0,0031e^{-t/580424,74} - 0,0083e^{-t/116207,17} \\ & - 0,00093e^{-t/11201,59} - 0,0027e^{-t/3486,62} - 0,0032e^{-t/18624,53} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dividindo esta expressão pela tensão de ensaio, foram obtidas as constantes do módulo de fluência. Substituindo estes valores na equação (4.46), foi obtido o módulo de fluência completo na temperatura de referência:

$$\begin{aligned} J_{T_0}(t) = & 0,0011 - 0,00012e^{-t/580424,74} - 0,00032e^{-t/116207,17} \\ & - 0,000036e^{-t/11201,59} - 0,00010e^{-t/3486,62} - 0,00012e^{-t/18624,53} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Um procedimento idêntico conduziu ao módulo de fluência na temperatura T_1 .

5.5.2 Módulo de fluência na temperatura T_1

No gráfico 5.8 estão representados os dados normalizados de deformação média de fluência do ensaio realizado na temperatura T_1 e a curva de deformação obtida por ajuste de curva aos dados experimentais.

A curva de deformação obtida é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & 0,042 - 0,0058e^{-t/147221,83} - 0,014e^{-t/383571,58} \\ & - 0,0012e^{-t/6312,39} - 0,00046e^{-t/5902,78} - 0,0063e^{-t/6263,13} \end{aligned} \quad (5.3)$$

O módulo de fluência foi obtido dividindo a expressão (5.3) pela tensão do ensaio:

$$\begin{aligned} J_{T_1}(t) = & 0,016 - 0,00022e^{-t/147221,83} - 0,00053e^{-t/383571,58} \\ & - 0,000047e^{-t/6312,39} - 0,000018e^{-t/5902,78} - 0,00024e^{-t/6263,13} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ambos os módulos de fluência na temperatura T_0 e T_1 , expressões (5.2) e (5.4) respectivamente,

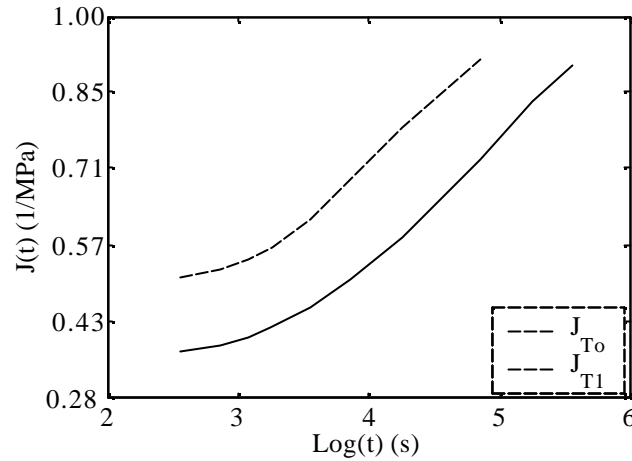


Figura 5.9: Módulos de fluência nas temperaturas T_0 e T_1 .

estão representados graficamente na figura 5.9, sendo possível observar o deslocamento no tempo da curva na temperatura T_1 em relação a curva na temperatura de referência.

A seguir, buscou-se determinar as constantes da função de translação, equação (3.153), através da minimização do erro, equação (3.158), entre o módulo de fluência obtido na temperatura de referência e dois pontos da curva do módulo de fluência na temperatura T_1 , conforme descrito na seção 5.1.

5.5.3 Constantes da função de translação: equação de WLF

Selecionando convenientemente dois diferentes instantes de tempo $t_1 = 3600s$ e $t_2 = 72000s$, foram obtidos dois pontos distintos ε_1 e ε_2 da curva do módulo de fluência na temperatura T_1 . Os correspondentes tempos reduzidos do módulo de fluência na temperatura de referência, foram então determinados através da expressão (3.134), sendo $a(T)$ o fator de translação definido em (3.154) como uma função das constantes c_1 e c_2 , da função de translação (3.153). Como resultado do processo de minimização do erro, foram obtidos os seguintes valores das constantes da função de translação: $c_1 = 6,29$ e $c_2 = 67,01$.

A expressão da função de translação fica

$$\log a_T = -\frac{6,29(T - T_0)}{67,01 + (T - T_0)} \quad (5.5)$$

O gráfico 5.10 apresenta o comportamento desta função em uma faixa de temperaturas limitada pela temperatura de referência e a temperatura de transição vítrea.

5.5.4 Princípio da sobreposição tempo-temperatura

Determinadas as constantes da função de translação, pode-se definir as condições dos ensaios necessários para obter os vários segmentos de uma curva de deformação referente a um período de tempo de 10

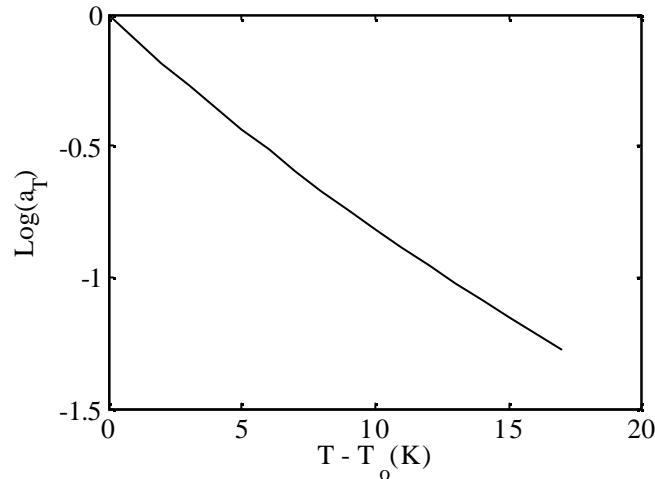


Figura 5.10: Função de translação de WLF.

anos na temperatura de referência. Considerando as temperaturas de referência de 40°C e de transição vítrea de 57°C , pode-se arbitrar neste intervalo três temperaturas: 45° , 50° , e 55°C . Com isto, através do gráfico 5.10 ou da equação (3.154) determina-se os correspondentes fatores de translação: $a(45^{\circ}) = 2,73$, $a(50^{\circ}) = 6,56$ e $a(55^{\circ}) = 14,14$.

Define-se os tempos reduzidos uniformemente distribuídos ao longo do período de 10 anos, ou aproximadamente 87600h, sendo: 29200, 58400 e 87600h. Com os tempos reduzidos e os fatores de translação obtidos, os tempos de ensaio são determinados usando a equação (3.134), resultando os seguintes valores: 10696, 8903 e 6195h. Desta forma, ficam definidas as condições dos ensaios necessários para a caracterização do material ao longo do período de tempo de 10 anos. Outras condições podem ser obtidas, arbitrando diferentes valores de temperatura de ensaio, do tempo reduzido e empregando um fator de translação que considera os efeitos da temperatura e do tempo.

Com o objetivo de realizar ensaios de menor duração, adotou-se um procedimento simplificado envolvendo apenas as curvas de deformação na temperatura de referência T_0 e na temperatura $T_2 = 50^{\circ}\text{C}$. Empregando o fator de translação $a(50^{\circ})$, realizou-se a translação da curva de deformação na temperatura T_2 para a temperatura T_0 . No gráfico 5.11 são apresentadas as curvas de deformação normalizadas obtidas nos ensaios na temperatura de referência e na temperatura T_2 .

Desta forma, aplicando o princípio da sobreposição tempo-temperatura foi possível construir uma curva de deformação na temperatura de 40°C referente a um período de 130h, realizando um ensaio de 5h de duração nesta temperatura e um ensaio de 20h de duração na temperatura de 50°C . No gráfico 5.12 é apresentada a curva de deformação resultante.

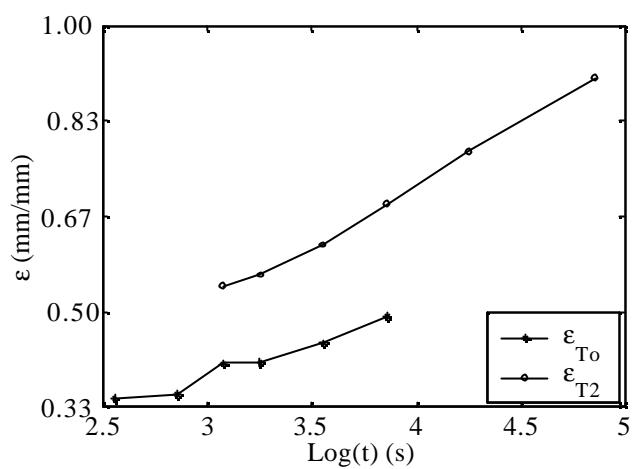


Figura 5.11: Curvas de deformação de fluência nas temperaturas T_0 e T_2 .

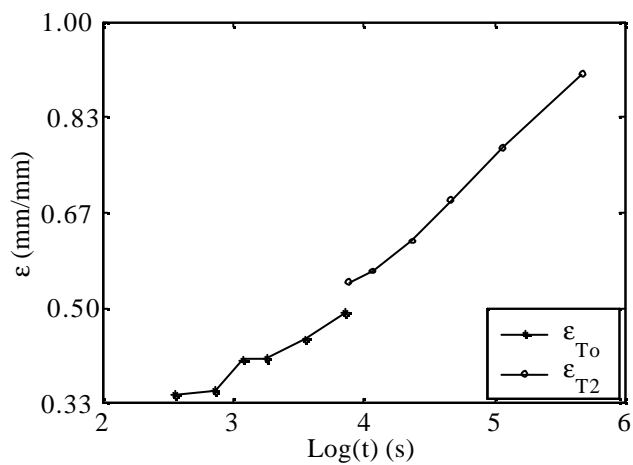


Figura 5.12: Curva de deformação completa na temperatura de referência T_0 .

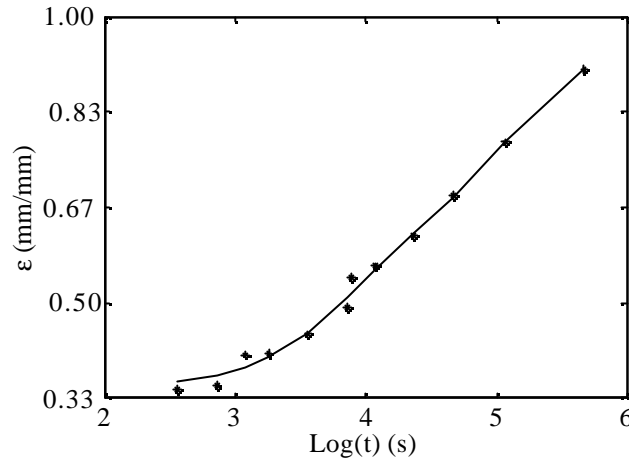


Figura 5.13: Ajuste de curva aos dados de deformação de fluência do gráfico 5.12.

5.6 Determinação dos Parâmetros do Modelo

5.6.1 Soluções de Fluência e Relaxação

Módulo de fluência completo na temperatura de referência T_0

A minimização do erro, dado pela expressão (4.23), envolvendo os pontos da curva de deformação do gráfico 5.12 e o módulo de fluência, resultou na expressão (5.6) da deformação de fluência na temperatura de referência:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & 0,029 - 0,0046e^{-t/339309,15} - 0,0058e^{-t/49305,14} \\ & - 0,0025e^{-t/343811,19} - 0,0037e^{-t/6198,41} - 0,0019e^{-t/6142,79} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Esta expressão normalizada está representada graficamente na figura 5.13.

Dividindo esta expressão pela tensão de ensaio, obtém-se o módulo de fluência completo:

$$\begin{aligned} J(t) = & 0,00111 - 0,00018e^{-t/339309,15} - 0,00022e^{-t/49305,14} \\ & - 0,00009e^{-t/343811,19} - 0,00014e^{-t/6198,41} - 0,00007e^{-t/6142,79} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Esta expressão está representada graficamente na figura 5.14.

Operadores diferenciais

Conhecendo as constantes e os tempos de fluência a partir de resultados experimentais, determinou-se as constantes que definem a relação constitutiva na forma diferencial, os p 's e q 's. Para isso, primeiramente determinou-se as raízes do polinômio $Q(s)$, equação (4.48), através da relação $\delta_j = -1/\rho_j$, para $j = 1, \dots, 5$, entre as raízes δ_j e os tempos de fluência ρ_j , com as quais determinou-se os f 's usando (4.49). Os parâmetros q 's foram então determinados à partir de (4.50) e a solução do sistema de equações (4.51) forneceu os parâmetros p 's. A transformada de Laplace dos operadores

diferenciais, P e Q em (4.40), fica:

$$\begin{aligned} P(s) &= 1 + 649654,20s + 1,18 \times 10^{11}s^2 + 4,39 \times 10^{15}s^3 + 3,56 \times 10^{19}s^4 + 7,91 \times 10^{22}s^5 \\ Q(s) &= 728,94 + 5,43 \times 10^8s + 1,16 \times 10^{14}s^2 + 5,56 \times 10^{18}s^3 + 5,59 \times 10^{22}s^4 + 1,59 \times 10^{26}s^5 \end{aligned} \quad (5.8)$$

A inversa da transformada de Laplace de (5.8), forneceu os operadores diferenciais que aplicados à tensão e à deformação resulta na relação constitutiva na forma diferencial:

$$\begin{aligned} \sigma + 649654,20 \frac{d\sigma}{dt} + 1,18 \times 10^{11} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + 4,39 \times 10^{15} \frac{d^3\sigma}{dt^3} + 3,56 \times 10^{19} \frac{d^4\sigma}{dt^4} + 7,91 \times 10^{22} \frac{d^5\sigma}{dt^5} = \\ 728,94\epsilon + 5,43 \times 10^8 \frac{d\epsilon}{dt} + 1,16 \times 10^{14} \frac{d^2\epsilon}{dt^2} + 5,56 \times 10^{18} \frac{d^3\epsilon}{dt^3} + 5,59 \times 10^{22} \frac{d^4\epsilon}{dt^4} + 1,59 \times 10^{26} \frac{d^5\epsilon}{dt^5} \end{aligned}$$

Substituindo na equação (4.45) os valores dos p 's e q 's, foi obtida a transformada de Laplace do módulo de fluência:

$$\mathcal{L}[J] = \frac{1 + 649654,20s + 1,18 \times 10^{11}s^2 + 4,39 \times 10^{15}s^3 + 3,56 \times 10^{19}s^4 + 7,91 \times 10^{22}s^5}{s(728,94 + 5,43 \times 10^8s + 1,16 \times 10^{14}s^2 + 5,56 \times 10^{18}s^3 + 5,59 \times 10^{22}s^4 + 1,59 \times 10^{26}s^5)} \quad (5.9)$$

A inversa da transformada de Laplace desta equação, resultou na expressão (5.10) do módulo de fluência:

$$\begin{aligned} J(t) = 0,0014 - 0,000090e^{-t/6142,79} - 0,00017e^{-t/6198,41} \\ - 0,00027e^{-t/49305,14} - 0,00022e^{-t/339309,15} - 0,00012e^{-t/343811,19} \end{aligned} \quad (5.10)$$

No gráfico 5.14 estão representados o módulo de fluência obtido por ajuste de curva aos dados experimentais, equação (5.7) e, o módulo de fluência obtido à partir dos operadores P(s) e Q(s), equação (5.10):

Módulo de relaxação obtido através dos operadores diferenciais

O módulo de relaxação pode ser obtido através de um procedimento semelhante, empregando as constantes da relação constitutiva na forma diferencial. A inversa da transformada de Laplace de (4.54), forneceu a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} Y(t) = 728,94 + 757,20e^{-t/3940,62} + 0,069e^{-t/6161,93} \\ + 323,93e^{-t/36475,1} + 208,93e^{-t/260810,4} + 0,11e^{-t/342266,16} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Esta expressão está representada graficamente na figura 5.15.

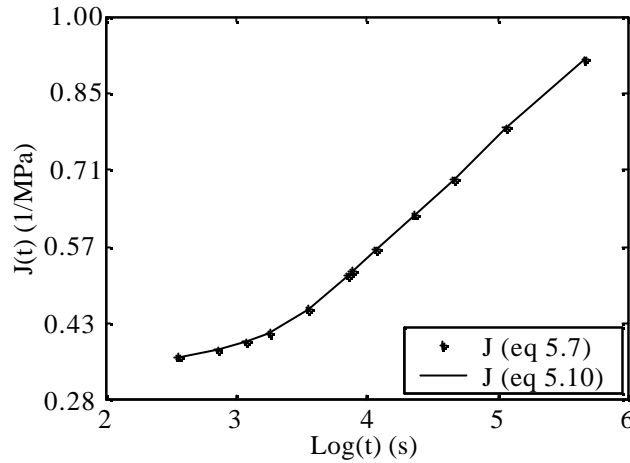


Figura 5.14: Módulos de fluência obtidos por ajuste de curva aos dados experimentais e através dos operadores diferenciais.

Módulo de relaxação obtido através do módulo de fluência

A matriz coeficiente do sistema de equações (4.51) é altamente mal condicionada, o que pode inviabilizar a determinação das constantes da relação constitutiva pelo método anterior. Desta forma, o segundo método para a determinação do módulo de relaxação deve ser avaliado.

O procedimento consiste em obter o módulo de relaxação, ou seja, as constantes e os tempos de relaxação, mediante a inversa da transformada de Laplace da expressão (4.60). Substituindo nesta equação o módulo de fluência determinado anteriormente, a inversa da transformada forneceu uma expressão quase idêntica a equação (5.11):

$$\begin{aligned}
 Y(t) = & 728,94 + 757,20e^{-t/3940,62} + 0,069e^{-t/6161,93} \\
 & + 323,93e^{-t/36475,08} + 208,93e^{-t/260810,39} + 0,11e^{-t/342266,16}
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

No gráfico 5.15 são apresentados os módulos de relaxação obtidos por ambos os métodos.

Constantes mecânicas do modelo de Maxwell

Definido o módulo de relaxação, foram obtidas as constantes mecânicas do modelo mediante as relações (4.57). As constantes do módulo de relaxação fornecem diretamente os $k's$, que são então empregados na expressão dos tempos de relaxação para fornecer os $\mu's$. A tabela a seguir apresenta os valores das constantes mecânicas, devendo-se observar que são todas positivas:

$k_0 = 728,94$	$k_1 = 198,87$	$k_2 = 228,06$	$k_3 = 156,23$	$k_4 = 565,61$	$k_5 = 129,5$
$\mu_1 = 1097,94$	$\mu_2 = 1097,16$	$\mu_3 = 653,86$	$\mu_4 = 2012,84$	$\mu_5 = 540,515$	

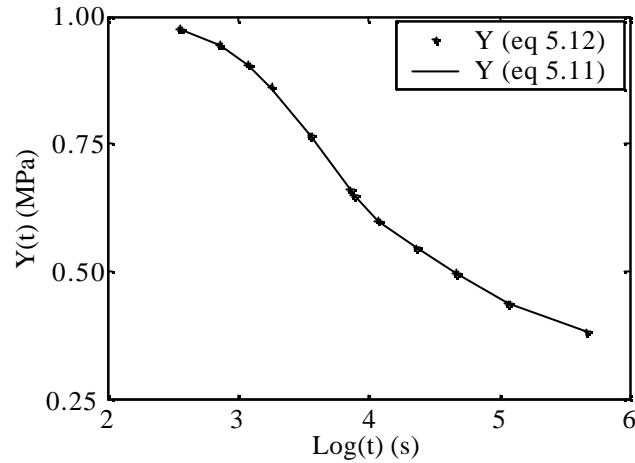


Figura 5.15: Módulos de relaxação obtidos através dos operadores diferenciais e do módulo de fluência.

5.6.2 Módulo Volumétrico

Em virtude da deformação cisalhante ser usualmente mais significativa que a deformação volumétrica, uma aproximação possível para representar o comportamento de um material viscoelástico é considerar apenas as relações entre as componentes deviatóricas de tensão e deformação como viscoelásticas, sendo a dilatação representada pelas relações da elasticidade linear. Desta forma, torna-se necessário determinar o módulo volumétrico elástico, o que pode ser feito de acordo com o procedimento descrito na seção 4.4.2, envolvendo a determinação do módulo elástico inicial e do coeficiente de Poisson.

Módulo elástico inicial

À partir do ensaio de fluência foi obtido experimentalmente $\epsilon_{11}(t_0)$, correspondendo a deformação do corpo de prova medida no início do ensaio, conforme o cronograma de medição. Esta deformação $\epsilon_{11}(t_0)$, é considerada a resposta elástica inicial do material $\epsilon_{11}(0)$. O módulo elástico inicial E_{el} foi determinado aplicando à equação (4.77) os valores de tensão e deformação inicial do ensaio de fluência na temperatura de referência. Tem-se então o seguinte valor do módulo elástico inicial:

$$E_{el} = 2019,2 \text{ Mpa}$$

Coefficiente de Poisson inicial

O aparato do ensaio de fluência não permite a medição da deformação transversal ϵ_{22} , necessária para a determinação do coeficiente de Poisson. Por esta razão, realizou-se um ensaio de tração específico para a medição das deformações ϵ_{11} e ϵ_{22} iniciais, obtendo-se os seguintes valores: $\epsilon_{11} = 0,007$ e $\epsilon_{22} = 0,0029$.

O coeficiente de Poisson foi então determinado empregando a equação (4.78), resultando no seguinte

valor:

$$\nu_{el} = 0,4$$

Módulo volumétrico elástico

Substituindo na equação (4.75), o módulo elástico E_{el} e o coeficiente de Poisson ν_{el} , foi obtido o módulo volumétrico elástico:

$$K_{el} = 3365,3 \text{MPa}$$

5.6.3 Soluções de fluência e relaxação deviatóricas

Determinadas as relações entre tensão e deformação totais no ensaio uniaxial associadas ao modelo de Maxwell de ordem 5, ou seja, as equações (4.46) e (4.55) do módulo de fluência e do módulo de relaxação respectivamente, além da equação constitutiva na forma diferencial e o módulo volumétrico, busca-se agora determinar as parcelas deviatóricas dos módulos de fluência e relaxação, empregando diferentes procedimentos.

Operadores deviatóricos

A componente deviatórica dos módulos de fluência e relaxação podem ser obtidas através dos operadores deviatóricos P' e Q' , equações (4.62). Desta forma, é necessário determinar as constantes p'_j e q'_m substituindo nas relações (4.66) o módulo volumétrico e as constantes dos operadores P e Q da relação constitutiva entre a tensão e a deformação total. Os seguintes operadores no domínio da transformada de Laplace foram obtidos:

$$\begin{aligned} P'(s) &= 1 + 647308,68s + 1,17 \times 10^{11}s^2 + 4,31 \times 10^{15}s^3 + 3,45 \times 10^{19}s^4 + 7,56 \times 10^{22}s^5 \\ Q'(s) &= 497,94 + 3,71 \times 10^8s + 7,94 \times 10^{13}s^2 + 3,80 \times 10^{18}s^3 + 3,82 \times 10^{22}s^4 + 1,09 \times 10^{26}s^5 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Módulo de fluência deviatórico

O módulo de fluência deviatórico foi obtido, substituindo na relação (4.45) os operadores deviatóricos (5.13). Tem-se então a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} J'(t) &= 0,0020 - 0,00014e^{-t/6142,79} - 0,00026e^{-t/6198,41} \\ &\quad - 0,00041e^{-t/49305,14} - 0,00034e^{-t/339309,15} - 0,00018e^{-t/343811,19} \end{aligned} \quad (5.14)$$

O módulo J' está representado graficamente na figura 5.18.

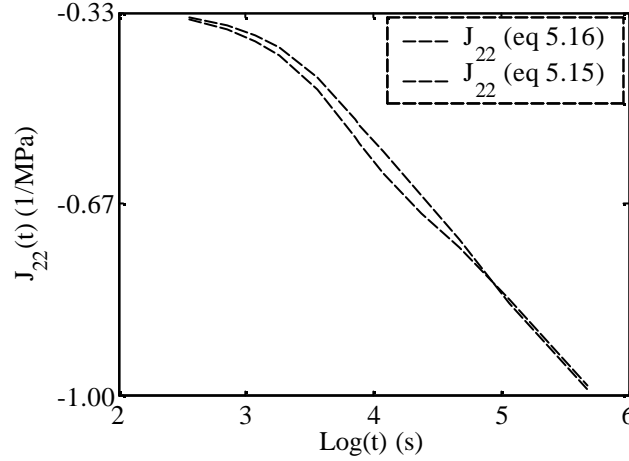


Figura 5.16: Comparação das diferentes formas de determinação do módulo de fluência transversal J_{22} .

Módulo $J_{22}(t)$: Pode-se determinar as parcelas deviatóricas dos módulos de fluência e relaxação conhecendo-se os módulos de fluência $J_{11}(t)$ e $J_{22}(t)$, equações (4.65). O módulo $J_{11}(t)$ é conhecido, correspondendo ao módulo obtido anteriormente do ensaio de fluência uniaxial, equação (5.7), restando portanto determinar $J_{22}(t)$. Para isto, deve-se determinar as constantes p_j^* e q_m^* das relação entre σ_{11} e ϵ_{22} , equação (4.63), o que foi feito substituindo o módulo volumétrico elástico e as constantes p_j' e q_m' dos operadores deviatóricos P' e Q' nas relações (4.64).

Definidas as constantes p_j^* e q_m^* , determinou-se os B_m^* do módulo de fluência $J_{22}(t)$ através das relações (4.47). Os tempos de fluência ρ_j^* são considerados os mesmos do módulo de fluência $J_{11}(t)$. Desta forma, a seguinte expressão de $J_{22}(t)$ foi obtida:

$$J_{22}(t) = -0,00064 + 0,000045e^{-t/339309,15} + 0,000087e^{-t/49305,14} + 0,00014e^{-t/343811,19} + 0,00011e^{-t/6198,41} + 0,000059e^{-t/6142,79} \quad (5.15)$$

Forma 2 de determinação do módulo $J_{22}(t)$: Como demonstrado na seção 4.4.3, sendo os tempos de fluência de $J_{11}(t)$ e $J_{22}(t)$ iguais, existe um segundo procedimento de determinação das constantes do módulo $J_{22}(t)$. Este procedimento consiste no cálculo das constantes B_m^* , substituindo em (4.82) as constantes B_m de $J_{11}(t)$ e o módulo volumétrico elástico K_{el} . De acordo com este procedimento, a seguinte expressão do módulo $J_{22}(t)$ foi obtida:

$$J_{22}(t) = -0,00064 + 0,00011e^{-t/339309,15} + 0,00014e^{-t/49305,14} + 0,000059e^{-t/343811,19} + 0,000087e^{-t/6198,41} + 0,000045e^{-t/6142,79} \quad (5.16)$$

O gráfico 5.16 apresenta $J_{22}(t)$ obtido por ambas as formas.

No gráfico 5.17, são apresentados os módulos J_{11} , obtido por ajuste de curva aos dados experimentais e J_{22} obtido pelo primeiro procedimento.

O módulo de fluência deviatórico $J'(t)$, foi então obtido à partir da equação (4.68), resultando em

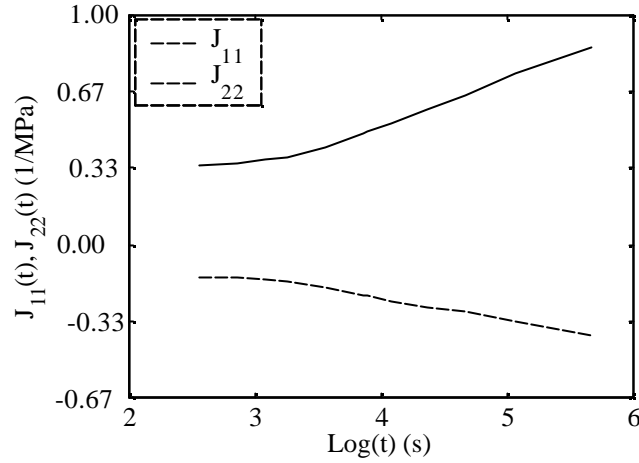


Figura 5.17: Comparação dos módulos de fluência J_{11} e J_{22} .

uma expressão na forma da equação (4.69):

$$J'(t) = 0,0020 - 0,00015e^{-t/6142,79} - 0,00028e^{-t/6198,41} - 0,00036e^{-t/49305,14} - 0,00026e^{-t/339309,15} - 0,00025e^{-t/343811,19} \quad (5.17)$$

O gráfico 5.18 apresenta uma comparação entre os módulos de fluência deviatóricos obtidos empregando os operadores deviatóricos e através do módulo transversal J_{22} :

Módulo de relaxação deviatórico

De forma semelhante, dois procedimentos distintos conduziram ao módulo de relaxação deviatórico. Primeiramente considerou-se o procedimento de substituição dos operadores (5.13) na relação (4.54), fornecendo o módulo de relaxação deviatórico com os seguintes parâmetros:

$$G(t) = 497,94 + 565,98e^{-t/3837,67} + 0,046e^{-t/6161,91} + 231,59e^{-t/36073,32} + 146,64e^{-t/258970,89} + 0,076e^{-t/342264,88} \quad (5.18)$$

A segunda forma de obtenção do módulo de relaxação deviatórico, consiste em substituir a transformada de Laplace do módulo de fluência deviatórico na relação (4.70). Tem-se então a seguinte expressão de $G(t)$:

$$G(t) = 497,94 + 565,98e^{-t/3720,62} + 0,046e^{-t/6162,16} + 231,59e^{-t/37547,78} + 146,64e^{-t/257086,01} + 0,076e^{-t/341642,53} \quad (5.19)$$

Na figura 5.19 são representados graficamente os módulos de relaxação deviatóricos obtidos:

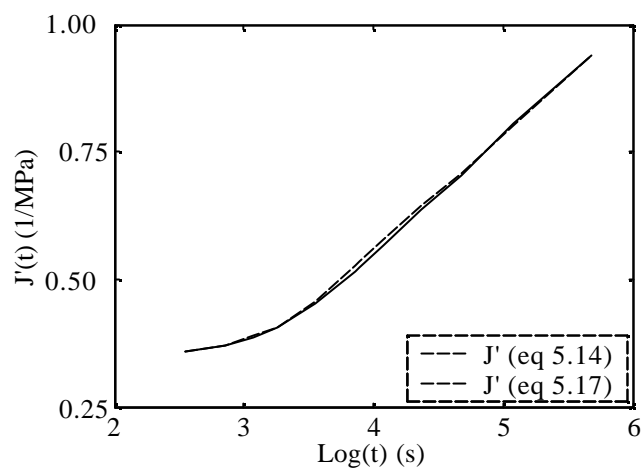


Figura 5.18: Módulos de fluência deviatóricos obtidos através dos operadores deviatóricos e dos módulos J_{11} e J_{22} .

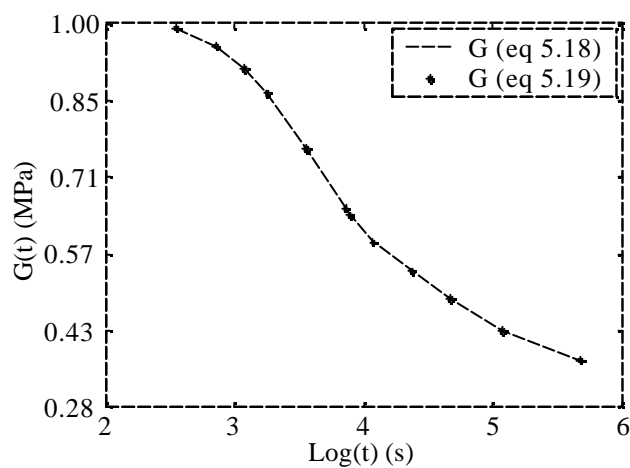


Figura 5.19: Módulos de relaxação deviatóricos obtidos através dos operadores deviatóricos e através do módulo de fluência deviatórico.

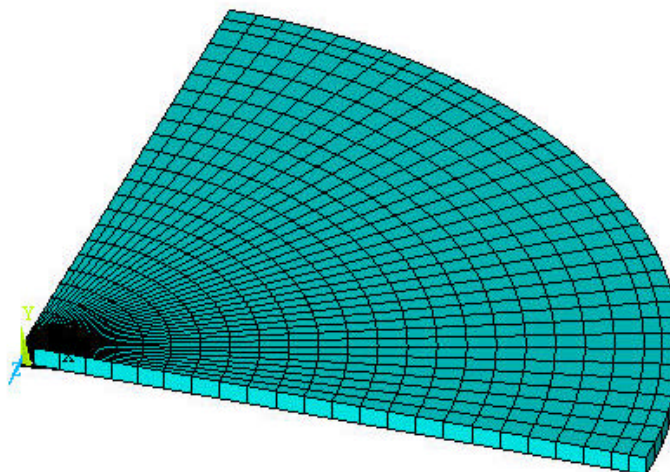


Figura 5.20: Modelo de elementos finitos.

5.6.4 Deslocamentos de placa

Na figura 5.21, é apresentada a curva representando os deslocamentos obtidos dos ensaios de placa. Nesta figura é apresentada também, a solução da simulação numérica do ensaio, obtida através do método dos elementos finitos, utilizando o programa Ansys. Em virtude da geometria e das condições de contorno, um modelo foi elaborado considerando a simetria do problema utilizando o elemento hexaédrico de 20 nós Visco89, da biblioteca de elementos do programa, figura.5.20.

Devido a simetria do problema, uma malha de 805 elementos foi gerada em um volume representando um quarto da placa, estabelecendo nós nos locais de aplicação das condições de contorno. Desta forma, condições de contorno de simetria foram aplicadas estabelecendo restrições ao deslocamento no plano da placa e restrições ao deslocamento na direção do carregamento são estabelecidas nos nós do local de apoio da mesma. O carregamento total aplicado no modelo corresponde a um quarto da carga total de 27N aplicada no ensaio. Dividindo-se o valor deste carregamento pelo número de nós de aplicação de carga, obtém-se a força nodal estabelecida no modelo.

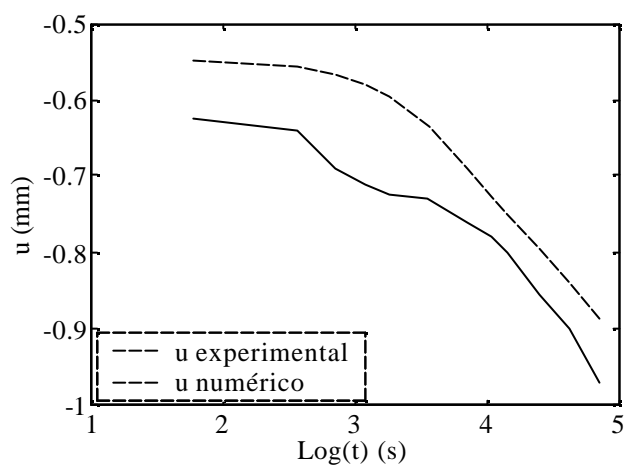


Figura 5.21: Comparação dos deslocamentos de placa obtidos experimentalmente e por simulação numérica.

Capítulo 6

Conclusões

O procedimento de ensaio adotado seguiu recomendações de normas técnicas, sendo de fácil implementação e possibilitando extrair os dados necessários para a caracterização do comportamento viscoelástico do material. O conhecimento das características do comportamento do material e experiência na execução de ensaios, contribuem para a estimativa do carregamento a ser aplicado, de forma a proporcionar uma resposta do corpo de prova no regime de deformação esperado. Porém, como no presente trabalho, um processo de tentativa e erro no estabelecimento da carga de ensaio pode ser necessário. O cronograma de medição adotado, o qual é recomendado pela norma, pode ser alterado para proporcionar um maior número de dados de deformação em ensaios de curta duração ou quando verifica-se grandes variações da deformação ao longo do tempo.

Todos os corpos de prova foram usinados à partir de uma mesma chapa laminada de PVC, sendo extraídos segundo a direção de laminação da chapa. A temperatura máxima de ensaio é limitada pela temperatura de transição vítrea do material, a qual foi determinada através de análise dilatométrica realizada pelo Labmat, laboratório do Departamento de Engenharia Mecânica.

Para a realização dos ensaios foi desenvolvido o projeto e fabricado um aparato completo de ensaio, consistindo de um suporte tubular onde são montados os dispositivos para fixação dos corpos de prova, aplicação do carregamento e controle de temperatura. Também faz parte do aparato de ensaio, um dispositivo de medição montado diretamente no corpo de prova. O desenvolvimento do projeto envolveu um protótipo dos dispositivos de fixação, aplicação de carga e medição, que foi construído para a realização de estudos das soluções propostas. A análise do seu comportamento levou ao desenvolvimento de um segundo projeto e à construção de um novo protótipo, que se revelou satisfatório. O dispositivo de fixação do corpo de prova foi desenvolvido com o objetivo de minimizar a excentricidade do carregamento, de forma a ter-se uma condição de tensão uniaxial. Um escorregamento das garras do dispositivo em relação ao corpo de prova, observado inicialmente, foi eliminado pela ação de arruelas de pressão nas uniões por parafusos da junta formada pelas garras e as extremidades do corpo de prova.

O dispositivo de aplicação de carga possibilitou impor rapidamente o carregamento sem induzir vibrações nos corpos de prova. Em virtude de não se dispor previamente de valores das propriedades mecânicas do material ensaiado e das limitações do dispositivo, não foi possível manter uma tensão

constante durante o ensaio. Porém, considerando apenas os dados que se encontram no regime de pequenas deformações, verificou-se que a variação da área da seção transversal é suficientemente pequena, permitindo desprezar-se as variações de tensão no período considerando.

Para a determinação das deformações do corpo de prova, um dispositivo de medição do deslocamento relativo, empregando relógio comparador foi desenvolvido. Trata-se de um dispositivo mecânico simples montado no corpo de prova, que permitiu um acompanhamento da evolução da variação da distância entre dois pontos do comprimento útil de medição. No entanto, dois inconvenientes foram verificados: o peso devido à massa do dispositivo e a ocorrência ocasional de um certo escorregamento entre as garras do dispositivo e o corpo de prova, conduzindo a invalidação de alguns ensaios.

O peso pode representar um carregamento adicional atuando nos pontos de contato das garras do dispositivo com o corpo de prova. Um estudo para proporcionar uma redução da massa do dispositivo pode ser realizado, considerando porém, que uma certa estabilidade dimensional é necessária para que não ocorra interferência da deformação do próprio dispositivo nas medições dos deslocamentos do corpo de prova. É sugerido também, realizar um estudo para impedir definitivamente o escorregamento entre as garras do dispositivo e o corpo de prova.

Uma estufa para controle de temperatura foi adaptada para permitir a montagem dos corpos de prova. Furos passantes nas paredes superior e inferior, foram executados para possibilitar a aplicação do carregamento e a fixação dos corpos de prova no suporte do aparato de ensaio. Um sistema de controle de temperatura foi instalado, sendo configurado para que a temperatura de ensaio selecionada, não apresentasse uma oscilação maior que 2°C .

Para representar o comportamento mecânico do material, foi utilizada a técnica de construção sistemática de modelos de Maxwell generalizados. Em virtude da complexidade matemática aumentar consideravelmente com o aumento do número de unidades de Maxwell, um modelo com cinco unidades de Maxwell (11 parâmetros) com uma mola adicional, associados em paralelo, foi construído com o objetivo de obter-se uma distribuição de tempos de fluência e relaxação, suficiente para representar o comportamento em termos de tensão e deformação referente ao período de tempo do ensaio. Um procedimento de ajuste de curva aos dados experimentais conduziu aos valores dos parâmetros dos módulos de fluência completos nas diferentes temperaturas de ensaio. No início de um ensaio, as deformações dos diferentes corpos de prova medidas em um mesmo instante de tempo, podem apresentar diferenças significativas e por representarem o comportamento do material em um intervalo de tempo muito pequeno, comparado ao período total, podem ser excluídas do processo de ajuste de curva para determinação do módulo de fluência. Desta forma, a medida inicial de cada ensaio foi desprezada, sendo o ajuste de curva realizado com os demais dados.

Para o ajuste de curva, estimativas iniciais dos valores das constantes e dos tempos de fluência são necessárias, verificando-se que as estimativas destas constantes afetam grandemente os valores finais destes parâmetros. Assim, um procedimento de tentativa e erro foi necessário para obter-se apenas parâmetros mecânicos positivos. Por este motivo, um processo de minimização do erro sujeito a restrições nos valores dos parâmetros do módulo de fluência pode ser implementado, além de uma análise de sensibilidade para melhorar a qualidade das estimativas iniciais. O módulo de fluência foi então empregado em um método de determinação das constantes e dos tempos de relaxação do módulo

de relaxação.

Um procedimento de ajuste de curva também foi empregado para a determinação das constantes da função de translação. Neste caso, as estimativas iniciais e os valores obtidos encontram-se na faixa de 0 a 100, como pode ser esperado para um grande conjunto de materiais poliméricos, segundo a literatura. Com isto, foi possível realizar a translação de uma curva de deformação de fluência obtida em uma temperatura superior, para fornecer um segmento da curva na temperatura de referência. Uma comparação da curva obtida por este procedimento e a curva completa na temperatura de referência, mostra uma pequena diferença de inclinação da curva transladada. Esta diferença pode ocorrer devido a deficiências do dispositivo de medição, de controle de temperatura, ou ainda, devido a um comportamento viscoelástico não linear do material. Ensaio com diferentes níveis de carga podem ser realizados para avaliar a linearidade do comportamento do material, assim como alterações do aparato de ensaio conforme sugerido anteriormente.

A solução de um sistema de equações, forneceu as constantes dos operadores da equação constitutiva na forma diferencial. Estas constantes são a solução de um sistema de equações que possui uma matriz de coeficientes mal condicionada. As constantes obtidas foram avaliadas, determinando-se os módulos de fluência e relaxação empregando a transformada de Laplace dos operadores. Uma comparação entre os módulos de fluência obtidos através de ajuste de curva e mediante os operadores, mostra que ambos são idênticos. Quanto ao módulo de relaxação, verificou-se que as curvas obtidas pelos diferentes métodos coincidem. Adicionalmente, as constantes mecânicas, extraídas do módulo de relaxação, apresentam todas valores positivos, como esperado. Desta forma, foi possível utilizar as constantes dos operadores posteriormente, na determinação das componentes deviatóricas dos módulos de fluência e relaxação.

Para evitar um número demasiadamente elevado de parâmetros a serem determinados experimentalmente, adotou-se um comportamento elástico em dilatação. Um ensaio de tração uniaxial foi realizado para a medição das deformações longitudinal e transversal iniciais de um corpo de prova, necessárias para a determinação do coeficiente de Poisson empregado no cálculo do módulo volumétrico elástico. O dispositivo de ensaio empregado, possibilitou a aplicação da mesma carga do ensaio de fluência e a leitura da medição da deformação longitudinal. Verificou-se porém, que um relógio comparador com uma divisão de escala de 0,01mm, pode não ser adequado para a medição da variação da largura da seção transversal do corpo de prova, pois a incerteza da medição pode resultar em valores bastante diferentes do coeficiente de Poisson. Por esta razão, recomenda-se que a medição da deformação transversal seja realizada através de outro método, como por exemplo a extensometria.

Diferentes procedimentos foram então empregados para a determinação das parcelas deviatóricas dos módulos de fluência e de relaxação de tensão. Comparando as curvas de um mesmo módulo, verificou-se que os valores extremos estão muito próximos. Na região entre os extremos, podem ocorrer diferenças mais acentuadas entre os valores do módulo obtidos pelos diferentes métodos.

Ensaio estáticos de placa simplesmente apoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído na borda foram realizados e os deslocamentos medidos foram comparados com a solução de um modelo numérico de elementos finitos. O modelo numérico foi elaborado com as propriedades materiais viscoelásticas extraídas dos ensaios de fluência. Comparando os resultados verificou-se a

existência de diferenças aceitáveis entre os valores experimentais e os valores obtidos por simulação numérica. Possivelmente contribuem para estas diferenças a qualidade dos dados experimentais, o modelo elaborado para representar o comportamento do material e os valores de seus parâmetros. Recomenda-se realizar alterações no dispositivo de aplicação de carga do aparato de ensaio de placa, para redução do peso próprio, além de uma avaliação da isotropia das propriedades do material e da influência do módulo volumétrico elástico na representação do comportamento de um material viscoelástico.

Conclui-se portanto, que o procedimento de caracterização do comportamento viscoelástico de materiais poliméricos, observando-se as sugestões de alterações apresentadas, pode ser empregado para se obter a representação do comportamento destes materiais ao longo de um período reduzido de tempo. A elaboração de modelos mais complexos, considerando o comportamento volumétrico viscoelástico, a realização de ensaios dinâmicos para a determinação dos parâmetros do modelo e a utilização de um fator de translação que considera o efeito do tempo, para representar o comportamento do material ao longo de um período de tempo maior, são sugestões para trabalhos futuros.

Bibliografia

- [1] FLUGGE, W. Viscoelasticity, 2nd. ed., Springer-Verlag.
- [2] CHRISTENSEN, R. M. Theory of viscoelasticity - an introduction, 2nd. ed., Academic Press, 1982.
- [3] CRAWFORD, R. J. Plastics engineering, 2nd. ed., Pergamon Press, 1989.
- [4] GIBSON, R. F. Principles of composite material mechanics, McGraw-Hill Int. Ed., 1994.
- [5] WILLIAMS, M. L., "Structural analysis of viscoelastic materials", AIAA Journal, 1964, Vol. 2, pp. 785-808.
- [6] WILLIAMS, M. L., LANDEL, R. F., FERRY, J. D. "The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids ", J. Am. Chem. Soc., 1955, Vol. 77, pp. 3701-3706.
- [7] GORENFLO, R., MAINARDI, F., "Fractional Calculus: Integral and differential equations of fractional order".
- [8] BAGLEY, R. L., "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity", Journal of Rheology, 1983, Vol. 27(3), pp. 201-210.
- [9] KOELLER, R. C., "Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity", Journal of Applied Mechanics, 1984, Vol. 51, pp. 299-307.
- [10] TORVIK, P. J., BAGLEY, R. L., "On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials", Transactions of the ASME, 1984, Vol. 51, pp. 294-298.
- [11] BAGLEY, R. L., TORVIK, P. J., "On the fractional calculus model of viscoelastic behavior", Journal of Rheology, 1986, Vol. 30(1), pp. 133-155.
- [12] NARAYANASWAMY, O. S. "A model of structural relaxation in glass ", J. of the American Ceramic Soc., 1971, Vol. 54, pp. 491-498.
- [13] STRUIK, L. C. E., "Physical aging in plastics and other glassy materials: 1 ", Polymer Engineering and Science, 1977, Vol. 17, pp. 165-173.

- [14] STRUIK, L. C. E., "The mechanical and physical ageing of semicrystalline polymers: 1 ", Polymer, 1987, Vol. 28, pp. 1521-1533.
- [15] STRUIK, L. C. E., "The mechanical and physical ageing of semicrystalline polymers: 2 ", Polymer, 1987, Vol. 28, pp. 1534-1542.
- [16] STRUIK, L. C. E., "The mechanical and physical ageing of semicrystalline polymers: 3. Prediction of long term creep from short time tests ", Polymer, 1989, Vol. 30, pp. 799-814.
- [17] STRUIK, L. C. E., "The mechanical and physical ageing of semicrystalline polymers: 4 ", Polymer, 1989, Vol. 30, pp. 815-830.
- [18] OLIVEIRA, B. F., "Um modelo analítico e computacional para consideração de efeitos de envelhecimento em estruturas de material compósito.", Porto Alegre: Escola de Engenharia, 2004. 152p. Tese de Doutorado em Engenharia (Estruturas) - CPGEC/UFRGS.
- [19] LEE, E. H., RADOK, J. R. M., WOODWARD, W. B., "Stress analysis for linear viscoelastic materials", Transactions of the society of rheology, 1959, Vol. 3, pp. 41-59.
- [20] MORLAND, L. W., LEE, E. H., "Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation", Transactions of the society of rheology, 1960, Vol. 4, pp. 233-263.
- [21] HILTON, H. H., RUSSELL, H. G. "An extension of alfrey's analogy to thermal stress problems in temperature dependent linear viscoelastic media ", J. Mech. Phys. Solids, 1961, Vol. 9, pp. 152-164.
- [22] MUKI, R., STERNBERG, E., "On transiente thermal stresses in viscoelastic materials with temperature-dependent properties", Journal of Applied Mechanics, 1961, pp. 193-207.
- [23] LEE, E. H., ROGERS, T. G., "Solution of viscoelastic stress analysis problems using measured creep or relaxation functions", Journal of Applied Mechanics, 1963, pp. 127-133.
- [24] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The finite element method - Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity*, Vol. 2, 4th.ed., McGraw-Hill Int. Ed., 1991.
- [25] ZIENKIEWICZ, O. C., WATSON, M., KING, I. P. "A numerical method of visco-elastic stress analysis ", Int. J. Mech. Sci., 1968, Vol. 10, pp. 807-827.
- [26] TAYLOR, R. L., PISTER, K. S., GOUDREAU, G. L. "Thermomechanical analysis of viscoelastic solids ", Int. J. Num. Meth. Eng., 1970, Vol. 2, pp. 45-59.
- [27] SCHERER, G. W., REKHSOON, S. M. "Viscoelastic-elastic composites: I, general theory ", J. of the American Ceramic Soc., 1982, Vol. 65, pp. 352-360.
- [28] ANSI/ASTM D 2990 - 77, Standard test methods for tensile, compressive, and flexural creep and creep-rupture of plastics, 1980, Annual Book of ASTM Standards, Part 35.

-
- [29] ANSI/ASTM D 638 - 77a, Standard test method for tensile properties of plastics, 1980, Annual Book of ASTM Standards, Part 35.