

Universidade Federal de Santa Catarina  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

# Desenvolvimento de uma metodologia para análise de estrutura veicular

Dissertação submetida à Universidade Federal de  
Santa Catarina para obtenção do grau de  
mestre em Engenharia Mecânica

Fábio Krug Rocha

Florianópolis, julho de 2004

**DESENVOLVIMENTO DE UMA METODOLOGIA  
PARA ANÁLISE DE ESTRUTURA VEÍCULAR**

**Fábio Krug Rocha**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E  
APROVADA EM SUA  
FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

---

**Lauro Cesar Nicolazzi, Dr. Eng. - Orientador**

---

**José A. Bellini da Cunha Neto, Dr. - Coordenador do Curso**

*Dedico este trabalho a minha família e a todas as pessoas que me acompanharam durante esta etapa da minha vida.*

## Agradecimentos

*Agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho, e em especial,*

*Ao meu irmão Klaus, pelo carinho, amizade e companheirismo;*

*À minha namorada Eliane, pelo grande apoio e auxílio nas horas difíceis de minha vida;*

*Aos meus pais Fábio e Francisca, pela compressão e paciência durante esta etapa da minha vida;*

*Ao professor Lauro Cesar Nicolazzi por sua dedicação, amizade, incentivo e orientação;*

*Ao professor Narbal A. Marcellino, que cedeu gentilmente o Laboratório de Estruturas do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina para a realização de ensaios experimentais;*

*Ao professor Arcanjo Lenzi, que disponibilizou o espaço do Laboratório de Vibrações e Acústica do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a execução de atividades indispensáveis ao fechamento deste trabalho;*

*Ao professor Marcelo Krajnk Alves, pela apresentação e orientação na utilização do programa "Anzol";*

*A FIAT AUTOMÓVEIS S.A, com distinção ao Engenheiro Rodrigo Lopes, que possibilitou a minha estadia na Fábrica durante o período de trinta e três (33) dias, permitindo o levantamento de dados experimentais essenciais para o desenvolvimento do presente trabalho;*

*A equipe UFSC Mini Baja, pelo empréstimo do Mini Baja Ilhéu e auxílio nas atividades práticas;*

*Aos Técnicos de laboratório Edi e Paru, pela grande ajuda em relação a construção e montagem dos ensaios experimentais;*

*À Universidade Federal de Santa Catarina e ao Departamento de Engenharia Mecânica;*

*À Deus.*

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Comentários iniciais . . . . .	1
1.2 Objetivos e contribuições . . . . .	2
1.3 Organização do trabalho . . . . .	2
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
<b>3 Modelos Dinâmicos</b>	<b>7</b>
3.1 Introdução . . . . .	7
3.2 Definições básicas . . . . .	7
3.2.1 Definição dos graus de liberdade . . . . .	7
3.2.2 Deflexão dos pneus . . . . .	9
3.3 Modelo dinâmico com dois graus de liberdade . . . . .	10
3.3.1 Introdução . . . . .	10
3.3.2 Definição das variáveis básicas . . . . .	10
3.3.3 Formulação das equações de movimento . . . . .	12
3.3.4 Métodos de solução . . . . .	16
3.4 Modelo dinâmico com sete graus de liberdade . . . . .	25
3.4.1 Introdução . . . . .	25
3.4.2 Definição das variáveis básicas . . . . .	25
<b>4 Caracterização e Levantamento de Propriedades do Veículo Experimental</b>	<b>38</b>
4.1 Introdução . . . . .	38
4.2 Caracterização da rigidez das molas helicoidais . . . . .	39

---

4.3	Caracterização do amortecedor . . . . .	46
4.4	Caracterização da rigidez do pneu . . . . .	52
4.5	Medição das distâncias do CG aos eixos dianteiro e traseiro e distâncias entre rodas de um mesmo eixo do veículo experimental . . . . .	61
4.6	Levantamento das massas suspensa e não suspensas . . . . .	62
4.6.1	Massa suspensa . . . . .	62
4.6.2	Massas não suspensas . . . . .	63
4.7	Medição experimental dos momentos de inércia . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Validação Experimental dos Modelos Teóricos</b>	<b>70</b>
5.1	Introdução . . . . .	70
5.2	Desenvolvimento do ensaio experimental . . . . .	70
5.3	Espectros de frequência experimentais . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Aplicação dos Modelos Lineares</b>	<b>83</b>
6.1	Introdução . . . . .	83
6.2	Modelo linear com dois graus de liberdade . . . . .	83
6.3	Modelo linear com dois graus de liberdade e função de excitação do tipo rampa.	84
6.3.1	Solução analítica . . . . .	86
6.3.2	Solução através do método explícito de integração direta no tempo . .	87
6.3.3	Superposição das curvas . . . . .	87
6.4	Modelo linear com dois graus de liberdade e função de excitação senoidal . .	88
6.4.1	Solução analítica . . . . .	89
6.4.2	Solução através do método explícito de integração direta no tempo . .	90
6.4.3	Superposições das curvas . . . . .	91
6.4.4	Espectro de frequência . . . . .	93
6.5	Modelo linear com sete graus de liberdade e função de excitação senoidal . .	95
6.5.1	Solução analítica . . . . .	96
6.5.2	Solução através do método explícito de integração direta no tempo . .	99
6.5.3	Superposições das curvas . . . . .	101
6.5.4	Espectro de frequência . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Aplicação dos Modelos não Lineares</b>	<b>106</b>
7.1	Introdução . . . . .	106
7.2	Considerações básicas a respeito da não linearidade do amortecimento . . . .	106
7.3	Modelo não linear com dois graus de liberdade . . . . .	107
7.4	Modelo não linear com sete graus de liberdade . . . . .	112

---

<b>8</b>	<b>Comparação e Análise dos Resultados Obtidos</b>	<b>120</b>
8.1	Introdução . . . . .	120
8.2	Superposições das curvas obtidas pelo ensaio experimental e os modelos teóricos lineares . . . . .	120
8.3	Superposições das curvas obtidas pelo ensaio experimental e modelos teóricos não lineares . . . . .	123
8.4	Discussão . . . . .	128
<b>9</b>	<b>Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros</b>	<b>130</b>
9.1	Conclusões . . . . .	130
9.2	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	133
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>135</b>
<b>A</b>	<b>Parcelas de energia para o modelo com dois graus de liberdade</b>	<b>138</b>
<b>B</b>	<b>Parcelas de energia para o modelo com sete graus de liberdade</b>	<b>140</b>

# Lista de Símbolos

- $a_I$  - Distância longitudinal do centro de gravidade (CG) ao eixo dianteiro.  
 $a_{II}$  - Distância longitudinal do centro de gravidade (CG) ao eixo traseiro.  
 $c$  - Coeficiente de amortecimento equivalente.  
 $c^*$  - Coeficiente de amortecimento real.  
 $c_c$  - Coeficiente de amortecimento crítico.  
 $c_i$  - Coeficiente de amortecimento do amortecedor sobre a  $i$ -ésima roda.  
 $c_{ij}$  - Elementos da matriz de amortecimento.  
 $\mathbf{C}$  - Matriz de amortecimento.  
 $\det$  - Operador determinante.  
 $f_j$  -  $J$ -ésima frequência natural.  
 $\mathbf{f}(t)$  - Vetor de excitação.  
 $F_a$  - Frequência amostral.  
 $F_d$  - Força de amortecimento.  
 $F_i^c$  - Força devido a ação do amortecedor posicionado sobre a  $i$ -ésima roda.  
 $F_i^{km}$  - Força devido a ação da mola da suspensão posicionada sobre a  $i$ -ésima roda.  
 $F_i^{kp}$  - Força devido a deflexão do  $i$ -ésimo pneu.  
 $\mathbf{F}(\Omega)$  - Vetor de carregamento em frequência.  
 $G(\Omega)$  - Amplitude de aceleração da carroceria em frequência.  
 $G_i(\Omega)$  - Amplitude de aceleração da  $i$ -ésima roda em frequência.  
 $\mathbf{G}(\Omega)$  - Vetor de aceleração em frequência.  
 $H(s)$  - Termo associado com a matriz receptância  $\mathbf{\Lambda}(s)$ .  
 $I$  - Momento de inércia.  
 $I_x$  - Momento de inércia da carroceria em torno do eixo axial.  
 $I_y$  - Momento de inércia da carroceria em torno do eixo transversal.  
 $k$  - Rigidez equivalente da mola helicoidal.  
 $k^*$  - Rigidez real da mola helicoidal.  
 $k_i$  - Rigidez da mola posicionada sobre a  $i$ -ésima roda.  
 $k_{ij}$  - Elementos da matriz de rigidez.  
 $k_i^p$  - Rigidez do  $i$ -ésimo pneu.  
 $k_{96,5kPa}^p$  - Rigidez do pneu para pressão de 96,5 kPa.



- $k_{137,8kPa}^p$  - Rigidez do pneu para pressão de 137,8 kPa.  
 $k_{165,4kPa}^p$  - Rigidez do pneu para pressão de 165,4 kPa.  
 $k_{179,2kPa}^p$  - Rigidez do pneu para pressão de 179,2 kPa.  
 $k_{248,2kPa}^p$  - Rigidez do pneu para pressão de 248,2 kPa.  
**K** - Matriz de rigidez.  
 $l$  - Distância longitudinal entre eixos.  
**L** - Lagrangiano.  
 $L$  - Distância entre o eixo de oscilação e o centro de gravidade (CG) do corpo.  
 $L_1$  - Distância do eixo de oscilação ao CG do conjunto veículo mais plataforma.  
 $L_2$  - Distância do eixo de oscilação ao centro de gravidade da plataforma.  
 $L_3$  - Distância do eixo de oscilação ao centro de gravidade do veículo.  
 $m$  - Massa da carroceria (massa suspensa).  
 $m_i$  - Massa da  $i$ -ésima roda.  
 $m_{ij}$  - Elementos da matriz de inércia.  
 $m_{\frac{1}{4}}$  - Valor referente a  $\frac{1}{4}$  da massa suspensa.  
 $m_I$  - Massa suspensa associada ao eixo dianteiro.  
 $m_{II}$  - Massa suspensa associada ao eixo traseiro.  
**M** - Matriz de inércia.  
 $n_t$  - Número total de incrementos no tempo.  
 $N_p$  - Número de pontos de aquisição.  
 $p_m$  - Elemento do vetor de excitação transformado.  
 $P_o$  - Amplitude da excitação.  
 $q_i$  - Deslocamento da  $i$ -ésima coordenada generalizada.  
 $\dot{q}_i$  - Velocidade da  $i$ -ésima coordenada generalizada.  
 $\mathbf{q}$  - Vetor de deslocamentos das coordenadas generalizadas.  
 $\dot{\mathbf{q}}$  - Vetor de velocidades das coordenadas generalizadas.  
 $\ddot{\mathbf{q}}$  - Vetor de acelerações das coordenadas generalizadas.  
 $\mathbf{Q}(s)$  - Vetor de coordenadas generalizadas de deslocamento no domínio  $s$ .  
 $R^2$  - Coeficiente de regressão.  
 $t$  - Variável tempo.

---

$t_i$	- Tempo inicial de análise.
$t_f$	- Tempo final de análise.
$t_I$	- Distância transversal entre as rodas (bitola) do eixo dianteiro.
$t_{II}$	- Distância transversal entre as rodas (bitola) do eixo traseiro.
$T$	- Período de oscilação.
$T_a$	- Tempo de aquisição.
$T_c$	- Energia cinética da carroceria.
$Temp$	- Valor do tempo $t$ .
$T_{erI}$	- Energia cinética do eixo dianteiro.
$T_{erII}$	- Energia cinética do eixo traseiro.
$T_{Total}$	- Energia cinética total do sistema.
$T_1$	- Período medido do veículo sobre a plataforma quando balançados.
$T_2$	- Período medido com o balanço apenas da plataforma.
$u$	- Distância entre a mola real e a rótula da suspensão fixa na carroceria.
$u_c(t)$	- Função degrau unitário.
$v$	- Distância entre a mola equivalente e a rótula da suspensão fixa na carroceria.
$V(\Omega)$	- Amplitude de velocidade da carroceria em frequência.
$V_i(\Omega)$	- Amplitude de velocidade da $i$ -ésima roda em frequência.
$V_c$	- Energia potencial da carroceria.
$V_{erI}$	- Energia potencial do eixo dianteiro.
$V_{erII}$	- Energia potencial do eixo traseiro.
$V_{Total}$	- Energia potencial total do sistema.
$\mathbf{V}(\Omega)$	- Vetor de velocidade em frequência.
$W$	- Peso.
$W_d$	- Energia dissipada por ciclo de ação do amortecedor.
$W_1$	- Peso total do veículo mais a plataforma.
$W_2$	- Peso da plataforma.
$W_3$	- Peso do veículo.
$X$	- Amplitude do curso da haste do amortecedor.
$Y_n$	- Amplitudes modais.

$\mathbf{Y}$	- Vetor das amplitudes modais.
$z$	- Deslocamento vertical da carroceria (bounce).
$\dot{z}(t)$	- Velocidade vertical da carroceria.
$\ddot{z}(t)$	- Aceleração vertical da carroceria.
$z_i(t)$	- Deslocamento vertical da i-ésima roda.
$\dot{z}_i(t)$	- Velocidade vertical da i-ésima roda.
$\ddot{z}_i(t)$	- Aceleração vertical da i-ésima roda.
$z_i^s(t)$	- Deslocamento causado pela rugosidade do solo sob a i-ésima roda.
$\dot{z}_i^s(t)$	- Velocidade devido a rugosidade do solo sob a i-ésima roda.
$Z(\Omega)$	- Amplitude do deslocamento da massa suspensa em frequência.
$Z_i(\Omega)$	- Amplitude do deslocamento da i-ésima roda em frequência.
$Z_i^s(\Omega)$	- Amplitude do deslocamento do solo sob a i-ésima roda em frequência.
$\mathbf{Z}(\Omega)$	- Vetor de deslocamento em frequência.
$\alpha$ e $\beta$	- Fatores de proporcionalidade arbitrários.
$\gamma$	- Ângulo de oscilação.
$\delta W_{Conservativo}$	- Trabalho conservativo exercido pela mola equivalente.
$\delta W_{Conservativo}^*$	- Trabalho conservativo exercido pela mola real.
$\delta W_{Nconservativo}$	- Trabalho não conservativo do amortecedor equivalente.
$\delta W_{Nconservativo}^*$	- Trabalho não conservativo do amortecedor real.
$\delta W_{nc}$	- Trabalho não conservativo realizado no sistema.
$\delta_i(t)$	- Deflexão da mola e amortecedor localizados sobre a i-ésima roda.
$\dot{\delta}_i(t)$	- Velocidade de deflexão da mola e amortecedor sobre a i-ésima roda.
$\delta_i^b(t)$	- Deflexão da mola e amortecedor devido a translação da carroceria.
$\delta_i^p(t)$	- Deflexão do i-ésimo pneu.
$\dot{\delta}_i^p(t)$	- Velocidade de deflexão do i-ésimo pneu.
$\delta_i^r(t)$	- Deflexão da mola e amortecedor devido ao deslocamento das rodas.
$\delta_i^\theta(t)$	- Deflexão da mola e amortecedor devido a arfagem da carroceria.
$\delta_i^\phi(t)$	- Deflexão da mola e amortecedor devido a rolagem da carroceria.
$\Delta f$	- Resolução espectral.
$\Delta t$	- Intervalo de tempo.

- $\theta$  - Giro da carroceria em torno do eixo transversal que passa pelo CG do veículo.  
 $\dot{\theta}$  - Velocidade angular da massa suspensa em torno do eixo transversal do veículo.  
 $\mathbf{\Lambda}(s)$  - Matriz receptância.  
 $\nu_j$  - J-ésima frequência circular natural amortecida.  
 $\xi_j$  - J-ésima razão de amortecimento.  
 $\Xi(\Omega)$  - Acelerância.  
 $\Upsilon(\Omega)$  - Mobilidade.  
 $\phi$  - Giro da carroceria em torno do eixo axial que passa pelo CG do veículo.  
 $\dot{\phi}$  - Velocidade angular da massa suspensa em torno do eixo axial do veículo.  
 $\Phi$  - Ângulo de fase.  
 $\mathbf{\Phi}$  - Matriz modal.  
 $\varphi$  - Autovetores.  
 $\hat{\varphi}$  - Autovetores normalizados em relação a matriz massa.  
 $\Psi$  - Giro da carroceria em torno do eixo vertical que passa pelo CG do veículo.  
 $\Omega$  - Frequência circular natural não amortecida.  
 $\mathfrak{S}$  - Função dissipação de Rayleigh.  
 $\mathfrak{S}_c$  - Potência dissipada pelos amortecedores.  
 $L$  - Operador da transformada de Laplace.  
 $\frac{d(\cdot)}{dt}$  - Derivada material.  
 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial q_i}$  - Derivada parcial em relação a i-ésima coordenada.  
 $\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial q_i \partial q_j}$  - Derivada parcial de segunda ordem em relação as i-ésima e j-ésima coordenadas.  
 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}_i}$  - Derivada parcial em relação a velocidade da i-ésima coordenada.  
 $\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$  - Derivada parcial de segunda ordem em relação as i-ésima e j-ésima velocidades.  
 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$  - Derivada parcial em relação ao tempo.

# Lista de Figuras

3.1	Sistema de coordenadas e principais graus de liberdade da carroceria de um automóvel. . . . .	8
3.2	Sistema de coordenadas e deslocamento de uma roda. . . . .	9
3.3	Modelo de 1/4 do veículo com dois graus de liberdade. . . . .	11
3.4	Diagramas de corpo livre para o modelo com dois graus de liberdade . . . .	13
3.5	Modelo de sete graus de liberdade para um veículo com suspensões independentes. . . . .	27
3.6	Rolagem, $\phi(t)$ , da carroceria sobre suspensões dianteira e traseira independentes . . . . .	28
3.7	Modelo de carroceria e respectivos eixos para consideração do <i>bounce</i> e da arfagem. . . . .	28
4.1	Modelo experimental Mini Baja . . . . .	39
4.2	Equipamento de ensaio MTS utilizado para caracterização das molas e amortecedores. . . . .	40
4.3	Curva de rigidez - mola 1. . . . .	41
4.4	Curva de rigidez - mola 2. . . . .	42
4.5	Curva de rigidez - mola 3. . . . .	42
4.6	Curva de rigidez - mola 4. . . . .	43
4.7	Definição das posições das molas reais e equivalentes . . . . .	44
4.8	Ensaio de caracterização das molas helicoidais . . . . .	46
4.9	Curvas Carga x Curso do amortecedor coletadas através do programa Aquisi. . . . .	47
4.10	Ensaio de caracterização do amortecedor . . . . .	52
4.11	Dispositivo utilizado para fixação e suspensão da roda em relação ao solo. . . . .	53
4.12	Montagem vertical do atuador para aplicação da carga sobre o pneu. . . . .	53
4.13	Montagem dos equipamentos Spyder (sob o computador) e MTS para o ensaio de caracterização da rigidez do pneu. . . . .	54
4.14	Calibrador utilizado durante o ensaio de caracterização do pneu. . . . .	54
4.15	Caracterização da rigidez do pneu - pressão 96,5 kPa. . . . .	55

---

4.16	Caracterização da rigidez do pneu - pressão 137,8 kPa. . . . .	55
4.17	Caracterização da rigidez do pneu - pressão 165,4 kPa. . . . .	56
4.18	Caracterização da rigidez do pneu - pressão 179,2 kPa. . . . .	56
4.19	Caracterização da rigidez do pneu - pressão 248,2 kPa. . . . .	57
4.20	Rigidez do pneu - pressão 96,5 kPa. . . . .	58
4.21	Rigidez do pneu - pressão 137,8 kPa. . . . .	58
4.22	Rigidez do pneu - pressão 165,4 kPa. . . . .	59
4.23	Rigidez do pneu - pressão 179,2 kPa. . . . .	59
4.24	Rigidez do pneu - pressão 248,2 kPa. . . . .	60
4.25	Aplicação da carga vertical sobre o pneu. . . . .	61
4.26	Veículo Mini Baja posicionado sobre a plataforma de balanço. . . . .	67
4.27	Pórtico construído para a realização do ensaio. . . . .	68
4.28	Medição do momento de inércia em torno do eixo transversal. . . . .	68
4.29	Medição do momento de inércia em torno do eixo longitudinal. . . . .	68
4.30	Sensor de mouse utilizado para a medição do período de oscilação. . . . .	69
4.31	Osciloscópio digital utilizado para a visualização do período de oscilação. . . . .	69
5.1	Montagem do ensaio experimental. . . . .	71
5.2	Dispositivo para aplicação de carga utilizado no ensaio experimental. . . . .	71
5.3	Stinger construído a partir de um esticador de cabo de aço. . . . .	72
5.4	União entre a base do shaker e o dispositivo de excitação através do stinger. . . . .	72
5.5	Colocação do acelerômetro na roda traseira direita. . . . .	73
5.6	Equipamento de aquisição de dados. . . . .	73
5.7	Espectro de frequência da chapa referente a medição experimental de acelerações na roda 1. . . . .	75
5.8	Espectro de frequência da chapa referente a medição experimental de acelerações na roda 2. . . . .	76
5.9	Espectro de frequência da chapa referente a medição experimental de acelerações na roda 3. . . . .	76
5.10	Espectro de frequência da chapa referente a medição experimental de acelerações na roda 4. . . . .	77
5.11	Espectro de frequência - Roda 1. . . . .	78
5.12	Espectro de frequência - Roda 2. . . . .	79
5.13	Espectro de frequência - Roda 3. . . . .	80
5.14	Espectro de frequência - Roda 4. . . . .	81
6.1	Função de excitação do tipo rampa . . . . .	85

---

6.2	Deslocamento vertical - Roda 1. . . . .	86
6.3	Deslocamento vertical - Roda 1. . . . .	87
6.4	Superposição das curvas - Intervalo entre 2 e 2,25 s. . . . .	88
6.5	Função de excitação do tipo senoidal . . . . .	89
6.6	Deslocamento vertical - Roda 1. . . . .	90
6.7	Deslocamento vertical - Roda 1. . . . .	91
6.8	Superposição das curvas - Intervalo entre 0 e 0,2 s. . . . .	92
6.9	Superposição das curvas - Intervalo entre 0,4 e 0,6 s. . . . .	92
6.10	Superposição das curvas - Intervalo entre 6,4 e 6,6 s. . . . .	93
6.11	Espectro de frequência - Massa não suspensa do modelo linear com dois graus de liberdade. . . . .	94
6.12	Deslocamento vertical - Roda 1. . . . .	97
6.13	Deslocamento vertical - Roda 2. . . . .	97
6.14	Deslocamento vertical - Roda 3. . . . .	98
6.15	Deslocamento vertical - Roda 4. . . . .	98
6.16	Deslocamento vertical - Roda 1. . . . .	99
6.17	Deslocamento vertical - Roda 2. . . . .	99
6.18	Deslocamento vertical - Roda 3. . . . .	100
6.19	Deslocamento vertical - Roda 4. . . . .	100
6.20	Superposição das curvas - Roda 1. . . . .	101
6.21	Superposição das curvas - Roda 2. . . . .	101
6.22	Superposição das curvas - Roda 3. . . . .	102
6.23	Superposição das curvas - Roda 4. . . . .	102
6.24	Espectro de frequência - Roda 1. . . . .	103
6.25	Espectro de frequência - Roda 2. . . . .	104
6.26	Espectro de frequência - Roda 3. . . . .	104
6.27	Espectro de frequência - Roda 4. . . . .	105
7.1	Espectro de frequência entre 0 e 150 Hz. . . . .	110
7.2	Espectro de frequência entre 150 e 300 Hz. . . . .	110
7.3	Espectro de frequência entre 300 e 450 Hz. . . . .	111
7.4	Espectro de frequência entre 450 e 600 Hz. . . . .	111
7.5	Espectro de frequência entre 600 e 800 Hz. . . . .	112
7.6	Espectro de frequência - Roda 1. . . . .	115
7.7	Espectro de frequência - Roda 2. . . . .	116
7.8	Espectro de frequência - Roda 3. . . . .	117
7.9	Espectro de frequência - Roda 4. . . . .	118

---

8.1	Espectro de frequência 125 Hz - Roda 1. . . . .	121
8.2	Espectro de frequência 125 Hz - Roda 2. . . . .	121
8.3	Espectro de frequência 125 Hz - Roda 3. . . . .	122
8.4	Espectro de frequência 125 Hz - Roda 4. . . . .	122
8.5	Espectro de frequência - Roda 1. . . . .	124
8.6	Espectro de frequência - Roda 2. . . . .	125
8.7	Espectro de frequência - Roda 3. . . . .	126
8.8	Espectro de frequência - Roda 4. . . . .	127



## Resumo

*Neste trabalho são apresentados modelos dinâmicos lineares e não lineares com dois e sete graus de liberdade, desenvolvidos a partir da técnica das múltiplas massas ou Multibody Model, para representação do comportamento real de veículos automotores.*

*Estes modelos levam em consideração a ação de campos de deslocamentos causados por irregularidades na pista.*

*Os desenvolvimentos teóricos são baseados na aplicação de métodos de formulação e solução de sistemas de equações diferenciais de movimento.*

*Os parâmetros de entrada para os modelos propostos são obtidos a partir de ensaios de caracterização experimental de elementos tais como molas, amortecedores e pneus e levantamento de propriedades de massa e inércia, sendo que a validação dos modelos teóricos é feita através da medição experimental de respostas em um veículo real.*

*Com a finalidade de verificar se a modelagem teórica desenvolvida com dois e sete graus de liberdade se aproximam do comportamento de um veículo real, são feitas comparações e análises dos espectros de frequência de deslocamento dos modelos teóricos lineares, não lineares e experimentais.*

*O objetivo principal deste trabalho é propor uma formulação matemática aprimorada, de forma a obter melhores resultados nas etapas de desenvolvimento do anteprojeto de estruturas veiculares.*

# Abstract

*In this work linear and not linear dynamic models with two and seven degrees of freedom are presented and developed from the technique of the multiple masses or Multibody Model, for real representation of automachine vehicles behavior.*

*These models consider the displacements produced by irregularities in the track.*

*The theoretical developments are based on formulation methods and solution of differential equations systems.*

*The initial parameters for these models are obtained of experimental characterization of elements such as springs, shock absorbers and tires and survey of mass properties and inertia. The validation of the theoretical models is made through the experimental measurement in a real vehicle.*

*With the purpose to verify the approach of the developed theoretical modeling with two and seven degrees of freedom in relation to the behavior of a real vehicle, comparisons and analyses of the displacement frequency specters to linear, not linear and experimental models are made.*

*The main objective of this work is to consider a improved mathematical formulation to get better results in the stages of the initial draft of vehicles structures development.*

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Comentários iniciais

A sobrevivência das indústrias no atual cenário de competição nacional e internacional é dependente do grau de competitividade de seus produtos. Segundo Back e Forcellini [1], a competitividade baseia-se nos requisitos de qualidade, custo e tempo, fatores que estão diretamente ligados a função projeto.

Do ponto de vista das empresas automobilísticas, o projeto e o desenvolvimento de produtos tendem a ser vistos como uma função corporativa. Desta forma, o sucesso no desenvolvimento de produtos está relacionado com a utilização de novos conceitos e tecnologias, que venham a tornar a atividade de projeto mais eficiente.

Desde cedo, trabalhos e pesquisas vêm sendo desenvolvidas na área automobilística, com o objetivo de prever e simular o comportamento de sistemas mecânicos veiculares.

Entre os anos de 1940 e 1950 pesquisadores como Rocard e Segel [2], desenvolveram conceitos a respeito da geração de forças em pneus, influenciando o comportamento de dirigibilidade e frenagem. Posteriormente Segel juntamente com outros pesquisadores, desenvolveram equações lineares analíticas para um modelo simplificado de um veículo com três graus de liberdade.

Entre os anos de 1960 e 1980, a proliferação e desenvolvimento de computadores analógicos e digitais resultaram em uma nova fase, possibilitando a construção de modelos de veículos não lineares mais complexos e detalhados com até vinte graus de liberdade.

Atualmente os fabricantes de automóveis utilizam o Método de Elementos Finitos para a construção de modelos numéricos. Estes modelos permitem uma pré análise, representando de forma bastante fiel o comportamento de um veículo real.

A história mostra, que os esforços para o desenvolvimento de modelos analíticos e numéricos com o objetivo de buscar ferramentas que auxiliem os projetos automobilísticos, são cada

vez maiores.

## 1.2 Objetivos e contribuições

O objetivo principal deste trabalho é propor uma formulação matemática aprimorada, de forma a obter melhores resultados nas etapas de desenvolvimento do anteprojeto de estruturas veiculares. A validação do modelo proposto será feito através de um modelo experimental. As respostas obtidas pelos modelos serão avaliadas, comparadas e criticadas.

Vale salientar que os conceitos e métodos empregados nesse desenvolvimento são de ampla aplicação no projeto de equipamentos tais como de máquinas ferramentas, agrícolas, aeronáuticas, etc, resultando em uma metodologia generalista.

O resultado almejado é o de um modelo teórico suficientemente eficiente. Esta eficiência é fundamental pois encurta a fase de maturação do projeto e reduz consideravelmente os custos de experimentação de protótipos, ou seja, reduz o investimento necessário no desenvolvimento de novos produtos.

## 1.3 Organização do trabalho

De maneira a visualizar a estrutura deste trabalho, é feita a seguir uma descrição sucinta de cada capítulo.

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica dos principais artigos e livros que abordam os assuntos relacionados a este trabalho como o desenvolvimento de modelos teóricos veiculares, levantamento de propriedades experimentais e projetos de suspensões entre outros.

No Capítulo 3 é apresentado o desenvolvimento teórico dos modelos dinâmicos com dois e sete graus de liberdade. A partir da definição de variáveis básicas, graus de liberdade e expressões de deflexão de componentes, como pneus, molas e amortecedores, determina-se as parcelas de energia potencial, cinética e a função dissipação de Rayleigh para cada subsistema (carroceria, eixo traseiro e eixo dianteiro) sendo a superposição dos efeitos feita posteriormente. Os sistemas de equações diferenciais dos modelos teóricos são obtidos pela aplicação das equações de Lagrange nas parcelas de energia calculadas.

No Capítulo 4 são descritos os ensaios de caracterização de propriedades mecânicas de molas, amortecedores e pneus, medição de distâncias entre eixos e distâncias entre rodas de um mesmo eixo (bitolas), levantamento de massas e determinação experimental de momentos de inércia. As considerações e procedimentos experimentais são detalhados e os resultados obtidos apresentados.

No Capítulo 5 é apresentado o ensaio feito com um veículo real para aquisição de dados experimentais com objetivo de avaliar e comparar os resultados dos modelos teóricos propostos.

Nos Capítulos 6 e 7 são apresentados aplicações dos modelos com dois e sete graus de liberdade, lineares e não lineares respectivamente, tendo-se como parâmetros de entrada as propriedades experimentais levantadas no Capítulo 4.

No Capítulo 8, os resultados dos modelos teóricos com dois e sete graus de liberdade são analisados e comparados com as respostas experimentais. Uma discussão a respeito destes resultados também é apresentada.

No Capítulo 9, são apresentadas as conclusões, enfatizando os principais resultados, deficiências e observações do presente trabalho, também sendo propostas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Para a obtenção de um conhecimento básico no desenvolvimento do presente trabalho, foi feita uma revisão das bibliografias que tratam dos diversos aspectos que contribuem na modelagem simplificada do comportamento dinâmico de automóveis. A seguir é feita uma análise do conteúdo de alguns artigos e livros importantes.

Miller [3] e Green [4], desenvolvem um trabalho contendo a descrição da construção de um aparato experimental utilizado para determinação dos momentos de inércia principais e a localização do centro de gravidade de aviões, que é perfeitamente aplicável aos automóveis. A localização do centro de gravidade é baseado no princípio que o centro de gravidade de um corpo suspenso por um ponto, está contido na linha vertical que passa pelo seu ponto de suspensão. O método para a determinação dos momentos de inércia, consiste em balançar um corpo montado em um dispositivo de balanço, como um pêndulo, com os eixos com os quais se deseja medir o momento de inércia, coincidente e paralelo ao eixo de oscilação. O momento de inércia do pêndulo e do corpo, são calculados diretamente dos dados obtidos pelo teste. Dois tipos de pêndulos são propostos: Pêndulo Composto para a determinação dos momentos de inércia sobre o eixo transversal e longitudinal e um Pêndulo Bifilar para a determinação da inércia sobre o eixo vertical do corpo. A medição dos momentos de inércia a partir destes dispositivos, forneceram resultados eficientes, sendo que o erro verificado na utilização deste aparato experimental é da ordem de 1%.

Ringegni, et al. [5] descrevem uma simples metodologia para a determinação do momento de inércia de corpos com formas irregulares, através da utilização de um pêndulo torcional modificado. Neste trabalho, são apresentadas as teorias básicas que regem o comportamento de um pêndulo torcional, os procedimentos experimentais e a estimativa de erro na medição de valores de momento de inércia.

Han e Sayers [6] apresentam um modelo dinâmico do comportamento de frenagem e

manobrabilidade de um automóvel com suspensão independente. Este modelo teórico é uma representação genérica simplificada do comportamento real de suspensões independentes, como a influência da união entre o sistema de direção e suspensão no deslocamento vertical das rodas, o aumento da distância entre eixos e distância entre rodas de um mesmo eixo (bitola) devido a compressão dos elementos da suspensão e a consideração de fatores ligados a deformação estrutural do pneu que afetam a capacidade de resposta destes elementos quando solicitados. Os cálculos das propriedades equivalentes dos elementos (mola e amortecedor) em pontos específicos da suspensão também são apresentados. São citados ainda, modelos analíticos desenvolvidos no passado, considerando outros efeitos, tais como as forças de reação geradas nas massas não suspensas, que resultam na mudança do comportamento dinâmico do veículo real. A principal aplicação destes modelos é a implementação de programas *multibody*.

A interação entre uma estrutura representada por uma placa apoiada sobre uma fundação visco-elástica e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico (massa, mola e amortecedor) representando um veículo em movimento, foi abordado por Bessa e Silva [8]. Foram extraídos resultados referentes ao deslocamento vertical do modelo da estrutura e velocidades relacionadas aos movimentos verticais e angulares em torno do eixo longitudinal e transversal do modelo veicular (roll e pitch respectivamente). Estes resultados são de grande importância para a análise de dinâmica veicular e conforto de passageiros.

O projeto de sistemas de suspensões duplo A, para diminuição do giro da carroceria em relação ao eixo transversal de veículos, devido a esforços de frenagem, foi apresentado por Metz et al. [9]. Foram feitos cálculos analíticos de dois tipos de sistemas: antimergulho fixado e variável. O sistema antimergulho fixado consiste na inclinação dos braços da suspensão através de um valor de ângulo constante enquanto que no sistema antimergulho variável esta inclinação é função do deslocamento vertical da suspensão. Estas configurações permitem a geração de forças de reação que compensam o giro da carroceria durante a frenagem.

Costa e Padovese [10] investigaram o contato entre o pneu e o solo, visando a caracterização do desgaste observado em pneus dianteiros de caminhões e ônibus. São apresentadas as configurações da estrutura de um pneu bem como os principais componentes, tais como: carcaça, cordonéis e banda de rodagem. A importância do conhecimento dos componentes estruturais e do comportamento histerético relacionado as propriedades dos pneus se deve a tentativa de obter uma estimativa do valor associado ao coeficiente de amortecimento histerético no modelamento de pneus.

Moura et al. [12] desenvolveram um modelo plano de um veículo de passeio com três

graus de liberdade. Neste modelo, são levados em conta os movimentos de translação e rotação da carroceria e translação do eixo dianteiro. Os parâmetros de entrada deste modelo são apresentados por Valle et al. [11]. A solução dos sistemas de equações diferenciais foram feitas através do ambiente Simulink, do Matlab. O objetivo principal deste trabalho é o estudo da dinâmica de suspensões.

Valle et al. [11] apresenta uma metodologia experimental simples para a caracterização de propriedades mecânicas de massas, molas, amortecedores e levantamento de momentos de inércia, sem fazer uso de equipamentos sofisticados. A representação de um veículo é feita através da análise de um modelo com dois graus de liberdade.

Clough e Penzien [17], apresentam em seu livro uma abordagem matemática a respeito de dinâmica estrutural. São introduzidos conceitos que envolvem a formulação de equações de movimento, análise de respostas de sistemas mecânicos submetidos a vibrações livres e forçadas, levantamento de modos e frequências naturais e uma descrição geral do tratamento matemático de vibrações.

Uma descrição a respeito de elementos finitos em dinâmica e vibrações é apresentada por Cook, Malkus e Plesha [18]. É mostrado o tratamento matemático e desenvolvimento dos métodos de solução de análise modal e integração direta no tempo para sistemas de equações de movimento. Observações práticas a respeito da utilização destes métodos também são apresentadas.

Uma descrição a respeito de extensometria é apresentada por Dally e Riley [13], contendo as características básicas de extensômetros (*Strain Gages*), tipos principais e funcionamento. Uma abordagem específica de extensômetros de resistência elétrica também é feita.

Nicolazzi et al. [14], fazem uma descrição global sobre diversos aspectos que se apresentam no projeto de um veículo automotor. São feitos detalhamentos de propriedades e tipos de pneus, avaliação da transmissão de forças entre pneu e pista, verificação de valores de cargas médias sobre eixos de um veículo, definições a respeito de suspensões e sistemas de direção e levantamentos referentes às principais causas de resistências ao movimento. Os assuntos abordados por estes autores são essenciais para a construção de um conhecimento básico a respeito de veículos.

Espindola [15] sugere algumas informações de ordem prática em medições experimentais de vibrações e chama a atenção para as diferentes expressões de transformada discreta de Fourier utilizadas nos programas comerciais computacionais. O autor desenvolve o conteúdo de dinâmica e vibrações de forma bastante eficiente e completa.



# Capítulo 3

## Modelos Dinâmicos

### 3.1 Introdução

Os veículos dotados de rodas são sistemas mecânicos que operam sobre superfícies rugosas, no caso a superfície das estradas, sendo estas a principal fonte indutora de vibrações e ruídos da estrutura quando no seu deslocamento. Para reduzir o efeito das acelerações induzidas pela pista sobre a estrutura bem como aumentar o conforto dos ocupantes, os veículos são dotados de elementos elásticos e dissipadores, tais como molas e amortecedores. Apesar das estruturas serem flexíveis, a maior parcela do molejamento de um automóvel é devido a deflexão dos elementos elásticos das suspensões e dos pneus.

Neste capítulo são desenvolvidas formulações dinâmicas usando as técnicas das múltiplas massas ou *Multibody Model* para veículos, [19] e [6].

Dentro deste contexto serão feitas as seguintes abordagens:

- Modelo com dois graus de liberdade e
- Modelo com sete graus de liberdade considerando suspensões independentes na dianteira e na traseira.

Vale salientar que os modelos a serem desenvolvidos irão negligenciar as acelerações lineares nas direções axial e transversal.

### 3.2 Definições básicas

#### 3.2.1 Definição dos graus de liberdade

Na abordagem do comportamento dinâmico de um automóvel, a definição dos graus de liberdade dos sistemas dinâmicos será de acordo com as convenções adotadas pela SAE [7].

Para isso, na Figura 3.1, são mostrados os graus de liberdade da carroceria de um veículo sobre rodas.

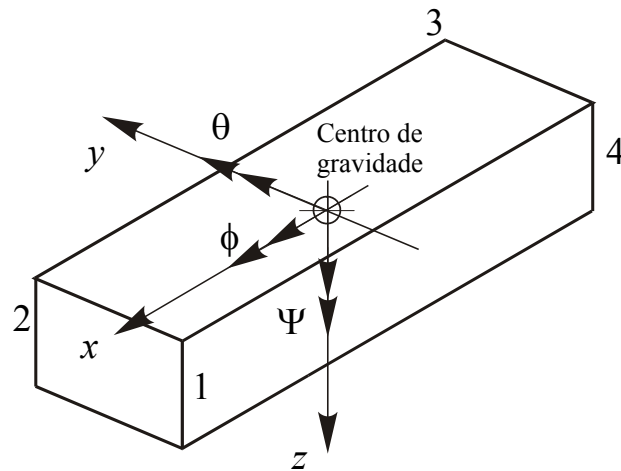


Figura 3.1: Sistema de coordenadas e principais graus de liberdade da carroceria de um automóvel.

Nesta figura, a direção de deslocamento do veículo é no sentido positivo do eixo  $x$  enquanto que os pontos 1, 2, 3 e 4 definem a posição das massas não suspensas do veículo. Para os desenvolvimentos que serão feitos posteriormente, a massa total do veículo é dividida em duas parcelas:

- massa suspensa e
- massa não suspensa.

A massa suspensa de um veículo inclui todas as massas dos componentes existentes sobre as molas. A massa não suspensa corresponde as massas da roda e acessórios da suspensão. Neste modelo, a massa suspensa será também referenciada como carroceria e a massa não suspensa como roda.

Vale salientar que a rigidez das molas neste modelo é equivalente à rigidez real das molas, porque não é possível colocar fisicamente as molas nos pontos 1, 2, 3 e 4, por problemas construtivos.

Convenciona-se, a partir de agora, que:

- $z$ — deslocamento vertical da carroceria (*bounce*);
- $\phi$ — giro da carroceria em torno do eixo axial  $x$ , denominado de ângulo de rolamento (*roll*);

$\theta$ – giro da carroceria em torno do eixo transversal  $y$ , denominado de ângulo de arfagem (*pitch*);

$\Psi$ – giro da carroceria em torno do eixo  $z$ , denominado de ângulo de guinada (*yaw*).

O sentido positivo dos ângulos segue a regra da mão direita. O deslocamento vertical do veículo (*bounce*), é positivo no mesmo sentido do eixo  $z$ .

### 3.2.2 Deflexão dos pneus

O desenvolvimento matemático para expressão da deflexão de pneus considera que o deslocamento vertical do centro de massa das rodas,  $z_i^p(t)$ , é maior do que os deslocamentos causados pela rugosidade do piso, definida por uma função  $z_i^s(t)$  conhecida. Para estas grandezas, que estão mostradas na Figura 3.2,

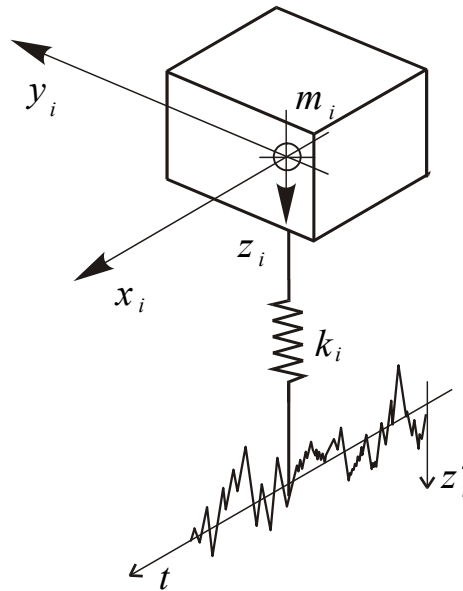


Figura 3.2: Sistema de coordenadas e deslocamento de uma roda.

tem-se que a deflexão que o pneu está submetido é dada por:

$$\delta_i^p(t) = z_i(t) - z_i^s(t) \quad (3.1)$$

sendo:

$i$  - a posição do pneu, conforme Figura 3.1,

$t$  - a variável tempo,

- $m_i$  - a massa da  $i$ -ésima roda,
- $\delta_i^p(t)$  - a deflexão do  $i$ -ésimo pneu,
- $z_i(t)$  - o deslocamento vertical da  $i$ -ésima roda e
- $z_i^s(t)$  - a rugosidade do solo sob a  $i$ -ésima roda.

Vale salientar que, nessa análise, a velocidade vertical do centro de massa não suspensa (pneu, roda e acessórios) será considerada igual ao do centro geométrico da roda.

### 3.3 Modelo dinâmico com dois graus de liberdade

#### 3.3.1 Introdução

Segundo a referência [19], uma análise dinâmica preliminar de um veículo pode ser feita com um modelo da quarta parte do conjunto. Neste modelo o veículo é separado em quatro partes, sendo cada parte associada a uma roda do veículo. Com estas considerações o tratamento dinâmico é feito como sendo um sistema de massas, molas e amortecedor com dois graus de liberdade, sendo que, neste caso, uma das molas é a da suspensão e a outra o pneu. As massas associadas a este modelo são a metade da massa não suspensa do eixo e a outra a metade da massa suspensa sobre o eixo. Vale salientar que a massa associada ao eixo é função da posição do centro de gravidade da massa suspensa.

#### 3.3.2 Definição das variáveis básicas

##### Deslocamentos e velocidades generalizadas

O modelo dinâmico com dois graus de liberdade tem os deslocamentos e velocidades das coordenadas generalizadas dadas por:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(t) \\ z_i(t) \end{Bmatrix} \text{ e} \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{z}_i(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.3)$$

respectivamente,

sendo:

- $z(t)$  - o deslocamento vertical da massa suspensa,
- $z_i(t)$  - o deslocamento vertical da  $i$ -ésima roda,
- $\dot{z}(t)$  - a velocidade vertical da massa suspensa e

$\dot{z}_i(t)$  - a velocidade vertical da  $i$ -ésima roda.

Com isto definido, o modelo matemático será desenvolvido a partir do modelo diagramático mostrado na Figura 3.3.

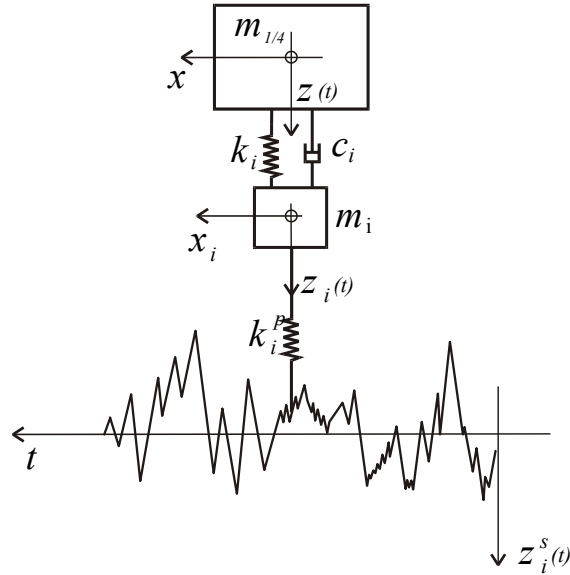


Figura 3.3: Modelo de 1/4 do veículo com dois graus de liberdade.

Os termos  $m_{\frac{1}{4}}$  e  $m_i$  correspondem a massa suspensa da carroceria e a massa da  $i$ -ésima roda para este modelo, respectivamente.

### Deflexão da mola e amortecedor da suspensão

A expressão da deflexão da mola e do amortecedor, em função do deslocamento do centro de massa das rodas e do deslocamento vertical da carroceria, é:

$$\delta_i(t) = z(t) - z_i(t) \tag{3.4}$$

sendo:

$i$  - a posição da roda, conforme Figura 3.1,

$\delta_i(t)$  - a deflexão da mola e amortecedor sobre a  $i$ -ésima roda,

$z(t)$  - o deslocamento vertical da massa suspensa e

$z_i(t)$  - o deslocamento vertical da  $i$ -ésima roda.

A velocidade associada a esta deflexão é dada por:

$$\dot{\delta}_i(t) = \dot{z}(t) - \dot{z}_i(t) \tag{3.5}$$

sendo:

$\dot{\delta}_i(t)$  - a velocidade de deflexão da mola e amortecedor sobre a  $i$ -ésima roda,

$\dot{z}(t)$  - a velocidade vertical da massa suspensa e

$\dot{z}_i(t)$  - a velocidade vertical da  $i$ -ésima roda.

O ponto indica a derivada em relação ao tempo, ou seja

$$\dot{\delta}_i(t) = \frac{\partial \delta_i(t)}{\partial t}. \quad (3.6)$$

### Deflexão dos pneus

A deflexão dos pneus para o modelo com dois graus de liberdade, em termos do deslocamento do centro de massa das rodas e da rugosidade do solo, é dada por (3.1), sendo esta equação repetida a seguir:

$$\delta_i^p(t) = z_i(t) - z_i^s(t) \quad (3.7)$$

sendo:

$i$  - a posição do pneu, conforme Figura 3.1,

$t$  - a variável tempo,

$\delta_i^p(t)$  - a deflexão do  $i$ -ésimo pneu,

$z_i(t)$  - o deslocamento vertical da  $i$ -ésima roda e

$z_i^s(t)$  - a rugosidade do solo sob a  $i$ -ésima roda.

A partir desta equação, a velocidade é dada por:

$$\dot{\delta}_i^p(t) = \dot{z}_i(t) - \dot{z}_i^s(t). \quad (3.8)$$

sendo:

$\dot{\delta}_i^p(t)$  - a velocidade de deflexão do  $i$ -ésimo pneu,

$\dot{z}_i(t)$  - a velocidade vertical da  $i$ -ésima roda e

$\dot{z}_i^s(t)$  - a velocidade devido a rugosidade do solo sob a  $i$ -ésima roda.

Com a definição das deflexões e velocidades dos componentes para este modelo, a seguir são apresentados os métodos de formulação para sistemas de equações diferenciais de movimento.

### 3.3.3 Formulação das equações de movimento

A formulação das equações de movimento podem ser obtidas através dos seguintes procedimentos:

- Equilíbrio Direto e
- Equações de Lagrange.

### Equilíbrio Direto

Da Figura 3.3 considerando o efeito das molas e o amortecedor nas massas  $m_{\frac{1}{4}}$  e  $m_i$ , é possível construir os diagramas de corpo livre mostrados na Figura 3.4, conforme referência [14].

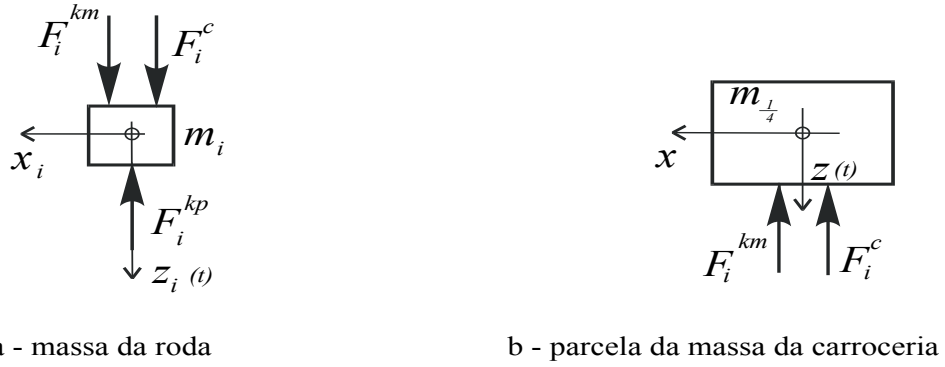


Figura 3.4: Diagramas de corpo livre para o modelo com dois graus de liberdade

Do equilíbrio de forças dos diagramas de corpo livre mostrados na Figura 3.4 a- e b-, tem-se as seguintes equações.

$$-F_i^{km} - F_i^c = m_{\frac{1}{4}} \ddot{z}(t) \tag{3.9}$$

$$F_i^{km} + F_i^c - F_i^{kp} = m_i \ddot{z}_i(t) \tag{3.10}$$

Os índices sobre-escritos das forças tem a seguinte interpretação:

$F_i^{km}$  - representa a força devido a deflexão da mola da suspensão,

$F_i^{kp}$  - representa a força devido a deflexão do pneu e

$F_i^c$  - representa a força devido a ação do amortecedor.

$\ddot{z}(t)$  e  $\ddot{z}_i(t)$  referem-se as acelerações devido a ação das forças elásticas e a força viscosa sobre as massas  $m_{\frac{1}{4}}$  e  $m_i$ , respectivamente.

As forças de mola e amortecimento em função dos deslocamentos e velocidades são dadas por:

$$F_i^{km} = k_i \delta_i = k_i [z(t) - z_i(t)], \tag{3.11}$$

$$F_i^{kp} = k_i^p \delta_i^p = k_i^p [z_i(t) - z_i^s(t)] \text{ e} \tag{3.12}$$

$$F_i^c = c_i \dot{\delta}_i = c_i [\dot{z}(t) - \dot{z}_i(t)]. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.11), (3.12) e (3.13) em (3.9) e (3.10), as equações de movimento podem ser reescritas como:

$$m_{\frac{1}{4}} \ddot{z}(t) + c_i [\dot{z}(t) - \dot{z}_i(t)] + k_i [z(t) - z_i(t)] = 0 \quad (3.14)$$

$$m_i \ddot{z}_i(t) - c_i [\dot{z}(t) - \dot{z}_i(t)] - k_i z(t) + [k_i + k_i^p] z_i(t) = k_i^p z_i^s(t) \quad (3.15)$$

as quais são escritas matricialmente como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}(t) \\ \ddot{z}_i(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_i & -c_i \\ -c_i & c_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{z}_i(t) \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i^p + k_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z(t) \\ z_i(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_i^p z_i^s(t) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

e compactamente,

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K}] \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.17)$$

sendo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

a matriz de inércia,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_i & -c_i \\ -c_i & c_i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

a matriz de amortecimento,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i^p + k_i \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

a matriz de rigidez,

$$\mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} z(t) \\ z_i(t) \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

o vetor de deslocamentos e

$$\mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_i^p z_i^s(t) \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

o vetor força ou excitação.



## Derivação das equações de Lagrange através da aplicação do princípio de Hamilton

As equações de movimento também podem ser obtidas a partir de conceitos energéticos, tal como a aplicação do Princípio de Hamilton, referência [20].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_{Total} - V_{Total}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (3.23)$$

sendo:

$T_{Total}$  - a energia cinética total do sistema,

$V_{Total}$  - a energia potencial total do sistema e

$\delta W_{nc}$  - o trabalho não conservativo realizado no sistema.

A partir de cálculos de parcelas de energia, Apêndice A, é possível determinar o sistema de equações diferenciais de movimento do modelo proposto através da aplicação das equações de Lagrange originadas do princípio de Hamilton.

## Equações de Lagrange

As equações de Lagrange, referência [15], para sistemas dinâmicos são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \left( \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} \right) = f_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.24)$$

sendo:

$L$  - denominado de Lagrangiano e dado por  $L = T_{Total} - V_{Total}$ ;

$q_i, \dot{q}_i$  - o deslocamento e a velocidade da  $i$ -ésima coordenada generalizada do sistema e

$n$  - o número de graus de liberdade do sistema.

As matrizes de inércia, amortecimento e rigidez deste sistema, desenvolvidas a partir da aplicação da equação (3.24), tem os seus elementos dados por

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 T_{Total}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (3.25)$$

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \text{ e} \quad (3.26)$$

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial q_i \partial q_j} \quad (3.27)$$

A aplicação das Equações de Lagrange fornece o mesmo sistema de equações diferenciais

de movimento como apresentado no método de formulação de equações por Equilíbrio Direto, expressão (3.16).

### 3.3.4 Métodos de solução

A solução do sistema de equações de movimento podem ser obtidas através dos seguintes métodos:

- Método de solução analítica,
- Método de análise modal e
- Método de integração direta no tempo.

#### Método de solução analítica

Com as equações de movimento desenvolvidas, parte-se para a determinação das respostas características deste sistema dinâmico. Para isso, considera-se que a excitação seja harmônica e a hipótese de comportamento linear é adotada [14].

A representação da excitação harmônica será feita na forma complexa, visto que a mesma representa todas as grandezas possíveis de uma excitação, tais como frequência e ângulo de fase, de maneira bastante compacta. Sendo assim, a excitação e as respostas, bem como as suas derivadas em relação ao tempo são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 z_i^s(t) &= Z_i^s(\Omega)e^{i\Omega t}, \\
 \dot{z}_i^s(t) &= i\Omega Z_i^s(\Omega)e^{i\Omega t}, \\
 \ddot{z}_i^s(t) &= -\Omega^2 Z_i^s(\Omega)e^{i\Omega t},
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 z_i(t) &= Z_i(\Omega)e^{i\Omega t}, \\
 \dot{z}_i(t) &= i\Omega Z_i(\Omega)e^{i\Omega t} = V_i(\Omega)e^{i\Omega t}, \\
 \ddot{z}_i(t) &= -\Omega^2 Z_i(\Omega)e^{i\Omega t} = G_i(\Omega)e^{i\Omega t},
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
z(t) &= Z(\Omega)e^{i\Omega t}, \\
\dot{z}(t) &= i\Omega Z(\Omega)e^{i\Omega t} = V(\Omega)e^{i\Omega t}, \\
\ddot{z}(t) &= -\Omega^2 Z(\Omega)e^{i\Omega t} = G(\Omega)e^{i\Omega t}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

sendo:

$i$  - a entidade matemática imaginária,

$\Omega$  - a frequência circular, dada em  $\frac{rad}{s}$ ,

$t$  - a variável tempo e

$Z_i^s(\Omega)$ ,  $Z_i(\Omega)$ ,  $Z(\Omega)$ ,  $V(\Omega)$ ,  $V_i(\Omega)$ ,  $G(\Omega)$ ,  $G_i(\Omega)$  - as amplitudes dos deslocamentos, das velocidades e das acelerações, em frequência.

Com isto e as devidas simplificações, as equações do movimento são reescritas como:

$$\left[ -m_{\frac{1}{4}} \Omega^2 Z(\Omega) + i\Omega c_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] + k_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] \right] e^{i\Omega t} = 0 \tag{3.31}$$

$$\left[ -m_i \Omega^2 Z_i(\Omega) - i\Omega c_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] - k_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] + k_i^p Z_i(\Omega) \right] e^{i\Omega t} = k_i^p Z_i^s(\Omega) e^{i\Omega t} \tag{3.32}$$

ou

$$-m_{\frac{1}{4}} \Omega^2 Z(\Omega) + i\Omega c_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] + k_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] = 0. \tag{3.33}$$

$$-m_i \Omega^2 Z_i(\Omega) - i\Omega c_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] - k_i Z(\Omega) + [k_i^p + k_i] Z_i(\Omega) = k_i^p Z_i^s(\Omega) \tag{3.34}$$

Definindo

$$s = i\Omega$$

e lembrando que

$$s^2 = (i\Omega)^2 = -\Omega^2,$$

pode-se escrever que:

$$m_{\frac{1}{4}} s^2 Z(\Omega) + s c_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] + k_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] = 0. \tag{3.35}$$

$$m_i s^2 Z_i(\Omega) - s c_i [Z(\Omega) - Z_i(\Omega)] - k_i Z(\Omega) + [k_i^p + k_i] Z_i(\Omega) = k_i^p Z_i^s(\Omega). \tag{3.36}$$

ou na forma matricial

$$\left[ \begin{bmatrix} m_{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} c_i & -c_i \\ -c_i & c_i \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i^p + k_i \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Z(\Omega) \\ Z_i(\Omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_i^p Z_i^s(\Omega) \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

e mais compactamente por:

$$[\mathbf{M} s^2 + \mathbf{C} s + \mathbf{K}] \mathbf{Z}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega). \quad (3.38)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes definidas nas equações (3.18), (3.19) e (3.20),

$$\mathbf{Z}(\Omega) = \begin{Bmatrix} Z(\Omega) \\ Z_i(\Omega) \end{Bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{F}(\Omega) = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_i^p Z_i^s(\Omega) \end{Bmatrix}.$$

Com estas definições a equação (3.38) pode ser reescrita como

$$\mathbf{D}(s)\mathbf{Z}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega), \quad (3.39)$$

que são as equações de equilíbrio escritas compactamente em termos da frequência circular  $\Omega$ . Verifica-se que estas equações são algébricas sendo a sua solução facilmente obtida, como é mostrado a seguir.

Definindo a matriz receptância como

$$\mathbf{\Lambda}(s) = \mathbf{D}(s)^{-1} = [\mathbf{M} s^2 + \mathbf{C} s + \mathbf{K}]^{-1} \quad (3.40)$$

tem-se que a resposta,  $\mathbf{Z}(\Omega)$ , do sistema é calculada por:

$$\mathbf{Z}(\Omega) = \mathbf{\Lambda}(s)\mathbf{F}(\Omega). \quad (3.41)$$

A matriz receptância, em termos das propriedades do sistema, é dada por:

$$\mathbf{\Lambda}(s) = \frac{1}{\det \mathbf{D}(s)} \begin{bmatrix} k_i + k_i^p + s(c_i + m_i s) & k_i + c_i s \\ k_i + c_i s & k_i + s(c_i + m_{\frac{1}{4}} s) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde:

$$\det \mathbf{D}(s) = k_i(k_i^p + (m_i + m_{\frac{1}{4}})s^2) + s(m_{\frac{1}{4}}s(k_i^p + m_i s^2) + c_i s(k_i^p + (m_i + m_{\frac{1}{4}})s^2)) \quad (3.43)$$

é o determinante da matriz  $\mathbf{D}(s)$ .

Na ressonância, teoricamente, a resposta do sistema tende ao infinito e para que isto aconteça é necessário que a inversa tenda a infinito, o que ocorre nos pólos da razão  $1/\det\mathbf{D}(s)$ . A determinação destes pólos, que correspondem as frequências naturais do sistema, são obtidos a partir da solução da seguinte equação algébrica:

$$\det \mathbf{D}(s) = 0 \quad (3.44)$$

sendo  $\det$ , o operador determinante.

Vale salientar que o sistema em questão é estável somente se a parte real das raízes desta equação forem negativas. As raízes desta equação, ou os pólos, normalmente são complexas conjugadas aos pares, podendo ser colocadas na forma geral:

$$s_j = \zeta_j \pm i \nu_j \quad (3.45)$$

sendo  $j = 2, 4, \dots, 2n$  e  $n$  a dimensão da matriz  $\mathbf{D}(s)$ . O caso particular do sistema com dois graus de liberdade  $n = 2$ , implica em quatro raízes.

Para um sistema com  $n$  graus de liberdade pode-se escrever que:

$$\zeta_j = \xi_j \Omega_j \quad (3.46)$$

$$\nu_j = \Omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (3.47)$$

as quais invertidas resultam em:

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu_j}{\zeta_j}\right)^2}} \quad (3.48)$$

$$\Omega_j = \frac{|\zeta_j|}{\xi_j} \quad (3.49)$$

sendo:

$\nu_j$  a  $j$ -ésima frequência circular natural amortecida,

$\Omega_j$  denominada de  $j$ -ésima frequência circular natural não amortecida e

$\xi_j$  a  $j$ -ésima razão de amortecimento dada por

$$\xi_j = \frac{c}{c_{c_j}} \quad (3.50)$$

e o amortecimento crítico  $c_{c_j}$  é calculado por

$$c_{c_j} = 2 m \Omega_j. \quad (3.51)$$

Vale salientar que

$$f_j = \frac{\Omega_j}{2\pi} [Hz]. \quad (3.52)$$

é a frequência natural do sistema.

Lembrando da forma que o deslocamento, a velocidade e a aceleração das diversas partes do modelo são dadas, equações (3.29) e (3.30), pode-se escrever que a amplitude complexa da velocidade e da aceleração, em termos da amplitude complexa do deslocamento, como

$$\mathbf{V}(\Omega) = \begin{Bmatrix} V(\Omega) \\ V_i(\Omega) \end{Bmatrix} = i\Omega \begin{Bmatrix} Z(\Omega) \\ Z_i(\Omega) \end{Bmatrix} \text{ e} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{G}(\Omega) = \begin{Bmatrix} G(\Omega) \\ G_i(\Omega) \end{Bmatrix} = -\Omega^2 \begin{Bmatrix} Z(\Omega) \\ Z_i(\Omega) \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

ou de maneira compacta por

$$\mathbf{V}(\Omega) = i\Omega\mathbf{Z}(\Omega) \text{ e} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{G}(\Omega) = -\Omega^2\mathbf{Z}(\Omega). \quad (3.56)$$

Introduzindo a equação (3.41) nestas duas últimas equações, pode-se escrever:

$$\mathbf{V}(\Omega) = i\Omega\mathbf{\Lambda}(s)\mathbf{F}(\Omega) = \mathbf{\Upsilon}(\Omega)\mathbf{F}(\Omega), \quad (3.57)$$

$$\mathbf{G}(\Omega) = -\Omega^2\mathbf{\Lambda}(s)\mathbf{F}(\Omega) = \mathbf{\Xi}(\Omega)\mathbf{F}(\Omega) \quad (3.58)$$

sendo:

$$\mathbf{\Upsilon}(\Omega) = i\Omega\mathbf{\Lambda}(s) \quad (3.59)$$

a mobilidade e

$$\mathbf{\Xi}(\Omega) = -\Omega^2\mathbf{\Lambda}(s) \quad (3.60)$$

a acelerância, ambas obtidas a partir da matriz de receptância  $\mathbf{\Lambda}(s)$ .

Uma outra forma de se obter a solução analítica de um sistema de equações diferenciais é através da utilização do conceito da transformada de Laplace [21].

A resolução das equações de movimento consiste na aplicação da transformada de Laplace ao sistema de equações diferenciais. Isolando a resposta no domínio de Laplace, representado pela letra (s), é possível através da transformada de Laplace inversa, a recuperação da resposta em seu domínio inicial.

A transformada de Laplace é um tipo de transformação integral. Uma transformação integral é uma relação com a forma

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t) f(t) dt \quad (3.61)$$

onde  $f$  é uma função dada que se transforma em outra função  $F$  mediante uma integral. A função  $F$  é a transformada de  $f$  e a função  $K$  é o núcleo da transformação. A idéia principal é a de usar a relação (3.61) para transformar um problema em  $f$  num problema mais simples em  $F$ , resolver este problema mais simples, e recuperar então a função desejada  $f$  por meio da sua transformada inversa. Com uma escolha conveniente do núcleo  $K$  e dos limites  $\alpha$  e  $\beta$  é possível, muitas vezes, simplificar substancialmente um problema que envolva uma equação diferencial linear. A transformada de Laplace de  $f$  é definida por

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (3.62)$$

Esta transformada faz uso do núcleo  $K(s, t) = e^{-st}$ . Como as soluções de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes se baseiam em funções exponenciais, a transformada de Laplace é particularmente útil para resolver equações desse tipo.

O sistema de equações diferenciais de movimento dado pela equação (3.17) é repetida a seguir:

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K}] \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.63)$$

A aplicação da transformada de Laplace ao sistema de equações diferenciais (3.63), considerando os deslocamentos e as velocidades iniciais com valores nulos, resultam nas seguintes expressões:

$$S^2 [\mathbf{M}] \mathbf{Q}(s) + S [\mathbf{C}] \mathbf{Q}(s) + [\mathbf{K}] \mathbf{Q}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (3.64)$$

$$\{S^2 [\mathbf{M}] + S [\mathbf{C}] + [\mathbf{K}]\} \mathbf{Q}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (3.65)$$

Como definido em (3.40),

$$\mathbf{\Lambda}(s) = \mathbf{D}(s)^{-1} = [\mathbf{M} s^2 + \mathbf{C} s + \mathbf{K}]^{-1} \quad (3.66)$$

Desta forma é possível isolar a resposta do sistema, resultando

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{\Lambda}(s) \mathbf{F}(s) \quad (3.67)$$

Através da utilização do conceito de Frações Parciais, referência [22] é possível reescrever a expressão (3.67) de forma a facilitar a aplicação da transformada inversa de Laplace e recuperar a resposta no domínio do tempo.

### Método da análise modal

O método da análise modal, [17] é aplicável somente a problemas lineares. Este método consiste em transformar o vetor das amplitudes modais  $\mathbf{Y}$  do problema em coordenadas geométricas do vetor  $\mathbf{q}$ , através da seguinte relação:

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{Y} \quad (3.68)$$

sendo  $\Phi$  a matriz modal constituída de vetores modais independentes (autovetores)  $\varphi$ . Um deslocamento qualquer pode ser obtido e representado pela soma das componentes dos modos,

$$\mathbf{q} = \varphi_1 Y_1 + \varphi_2 Y_2 + \dots + \varphi_N Y_N = \sum_{n=1}^N \varphi_n Y_n \quad (3.69)$$

sendo que  $\varphi_n$  é a n-ésima coluna da matriz  $\Phi$ .

A análise modal é eficiente devido as propriedades especiais que os autovetores possuem, referência [18]. Essas propriedades são:

- Ortogonalidade e
- Independência Linear.

As condições de ortogonalidade com respeito as matrizes de massa e rigidez são:

$$\varphi_m^T [\mathbf{M}] \varphi_n = 0 \quad m \neq n \quad (3.70)$$

$$\varphi_m^T [\mathbf{K}] \varphi_n = 0 \quad m \neq n \quad (3.71)$$

A normalização dos autovetores com respeito a matriz massa, resulta em forma matricial:

$$[\hat{\varphi}]^T [\mathbf{M}] [\hat{\varphi}] = [\mathbf{I}] \quad (3.72)$$

$$[\hat{\varphi}]^T [\mathbf{K}] [\hat{\varphi}] = [\mathbf{w}^2] \quad (3.73)$$

sendo  $[\mathbf{I}]$  a matriz identidade e  $[\mathbf{w}^2]$  a matriz diagonal de frequências naturais ao quadrado.



Uma transformação similar pode ser aplicada aos termos de amortecimento, admitindo que as correspondentes condições de ortogonalidade também se aplicam à matriz de amortecimento.

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T [\mathbf{C}] \boldsymbol{\varphi}_n = 0 \quad m \neq n \quad (3.74)$$

A definição da matriz de amortecimento como uma combinação linear da matriz de massa e matriz de rigidez possibilita a aplicação das condições de ortogonalidade aos termos de amortecimento.

$$[\mathbf{C}] = \alpha [\mathbf{K}] + \beta [\mathbf{M}] \quad (3.75)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são fatores de proporcionalidade arbitrários que satisfazem as condições de ortogonalidade.

A normalização dos autovetores com respeito a matriz massa, resulta em forma matricial:

$$[\hat{\boldsymbol{\varphi}}]^T [\mathbf{C}] [\hat{\boldsymbol{\varphi}}] = [\boldsymbol{\epsilon}] \quad (3.76)$$

sendo  $[\boldsymbol{\epsilon}]$  a matriz diagonal com coeficientes  $2\xi_m\Omega_m$ .

A determinação dos fatores  $\alpha$  e  $\beta$  é feita através de um sistema de equações, sendo considerados valores de amortecimentos críticos e frequências relacionadas aos espectros de carregamento ou resposta do problema.

Desta forma, é possível desacoplar as equações de movimento através da transformação de coordenadas (3.68) e premultiplicação do sistema por  $[\hat{\boldsymbol{\varphi}}]^T$ .

O sistema compacto de equações de movimento dado pela equação (3.17) pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\ddot{Y}_m + 2\xi_m\Omega_m\dot{Y}_m + \Omega_m^2 Y_m = p_m \quad (3.77)$$

sendo  $p_m = \boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{f}(t)$ .

O número de equações diferenciais desacopladas na equação (3.77) é igual ao número  $m$  de graus de liberdade do sistema.

A utilização do método de análise modal para a solução de sistemas de equações pode ser ineficiente devido ao grande esforço e custo computacional para o cálculo de autovalores e autovetores do problema. Este tipo de método se aplica preferencialmente a problemas nos quais as baixas frequências naturais são importantes.

### Método explícito de integração direta por diferenças centrais

O método de integração direta explícito por diferenças centrais no tempo ou método passo a passo, referência [18] é uma alternativa ao método de análise modal e consiste na aproximação das derivadas temporais que aparecem no sistema de equações diferenciais de movimento, equação (3.17), por diferenças de deslocamentos em vários instantes de tempo.

O método possui a seguinte forma:

$$\mathbf{q}_{n+1} = f(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n, \ddot{\mathbf{q}}_n, \mathbf{q}_{n-1}, \dot{\mathbf{q}}_{n-1}, \ddot{\mathbf{q}}_{n-1}) \quad (3.78)$$

sendo:

$n = 1, 2, \dots, n_t$  - o número de incrementos no tempo,

$n_t$  - o número total de incrementos no tempo,

$\mathbf{q}_{n+1}$  - o vetor de deslocamentos das coordenadas generalizadas no instante posterior,

$\mathbf{q}_n$  - o vetor de deslocamentos das coordenadas generalizadas no instante atual,

$\mathbf{q}_{n-1}$  - o vetor de deslocamentos das coordenadas generalizadas no instante anterior,

$\dot{\mathbf{q}}_n$  - o vetor de velocidades das coordenadas generalizadas no instante atual,

$\dot{\mathbf{q}}_{n-1}$  - o vetor de velocidades das coordenadas generalizadas no instante anterior,

$\ddot{\mathbf{q}}_n$  - o vetor de acelerações das coordenadas generalizadas no instante atual e

$\ddot{\mathbf{q}}_{n-1}$  - o vetor de acelerações das coordenadas generalizadas no instante anterior.

A expressão (3.78) mostra a relação funcional dos vetores listados acima entre o instante posterior e os instantes atual e anterior da análise.

A velocidade e a aceleração são aproximadas pelas seguintes expressões:

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_{n-1}) \quad (3.79)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{q}_{n+1} - 2\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1}) \quad (3.80)$$

Assim, o sistema de equações diferenciais, expressão (3.63), pode ser representado da seguinte forma:

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{f}(t)_n - [\mathbf{K}] \mathbf{q}_n + \frac{1}{\Delta t^2} [\mathbf{M}] (2\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t} [\mathbf{C}] \mathbf{q}_{n-1} \quad (3.81)$$

sendo que no lado direito da igualdade encontram-se os termos referentes aos instantes atual e anterior e no lado esquerdo os termos associados ao instante posterior da análise.

A expressão acima é condicionalmente estável e requer que o intervalo de tempo  $\Delta t$  seja:

$$\Delta t \leq 2/\Omega_{\max} \quad (3.82)$$

sendo  $\Omega_{\max}$  a maior frequência natural do sistema sem amortecimento.

Este método de solução é indicado no tratamento de problemas não lineares, pois permite a definição das propriedades das matrizes do sistema de equações de movimento em cada instante de tempo.

## 3.4 Modelo dinâmico com sete graus de liberdade

### 3.4.1 Introdução

A abordagem que será apresentada, vale para a seguinte configuração de suspensão para automóveis: suspensão independente na dianteira e na traseira.

A partir das definições dos deslocamentos e velocidades das coordenadas generalizadas do modelo dinâmico com sete graus de liberdade são determinadas as parcelas de energia referentes aos sub-sistemas carroceria, eixo dianteiro e eixo traseiro, as quais introduzidas nas equações de Lagrange, fornecem o sistema de equações diferenciais de movimento.

O objetivo desses modelos é o da melhor representação do comportamento de um veículo transitando em linha reta, sendo o modelo com sete graus de liberdade adequado para uma primeira abordagem. Porém modelos com maior número de graus de liberdade, de tal forma a simular dirigibilidade e frenagem como feito por Sayers e Han na referência [6], podem ser construídos.

Não serão consideradas as influências dos carregamentos médios em função do peso do veículo e das resistências ao movimento, devido à desenvolvimentos já realizados.

### 3.4.2 Definição das variáveis básicas

#### Deslocamentos e velocidades das coordenadas generalizadas

O modelo com sete graus de liberdade, para o caso em que as suspensões dianteira e traseira são independentes, tem os deslocamentos e as velocidades das coordenadas generalizadas dadas por:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \\ q_7(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(t) \\ \phi(t) \\ \theta(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{Bmatrix} \text{ e} \quad (3.83)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \\ \dot{q}_5(t) \\ \dot{q}_6(t) \\ \dot{q}_7(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.84)$$

respectivamente,

sendo:

$z(t)$  - o deslocamento vertical da massa suspensa,

$\phi(t)$  - o ângulo de rolamento (roll) da massa suspensa,

$\theta(t)$  - o ângulo de de arfagem (pitch) da massa suspensa,

$z_1(t)$  - o deslocamento vertical da roda 1,

$z_2(t)$  - o deslocamento vertical da roda 2,

$z_3(t)$  - o deslocamento vertical da roda 3,

$z_4(t)$  - o deslocamento vertical da roda 4,

$\dot{z}(t)$  - a velocidade vertical da massa suspensa,

$\dot{\phi}(t)$  - a velocidade angular (roll) da massa suspensa,

$\dot{\theta}(t)$  - a velocidade angular (pitch) da massa suspensa,

$\dot{z}_1(t)$  - a velocidade vertical da roda 1,

$\dot{z}_2(t)$  - a velocidade vertical da roda 2,

$\dot{z}_3(t)$  - a velocidade vertical da roda 3 e

$\dot{z}_4(t)$  - a velocidade vertical da roda 4.

Um diagrama do modelo está mostrado na Figura 3.5, no qual estão indicadas as coordenadas generalizadas listadas em (3.83).

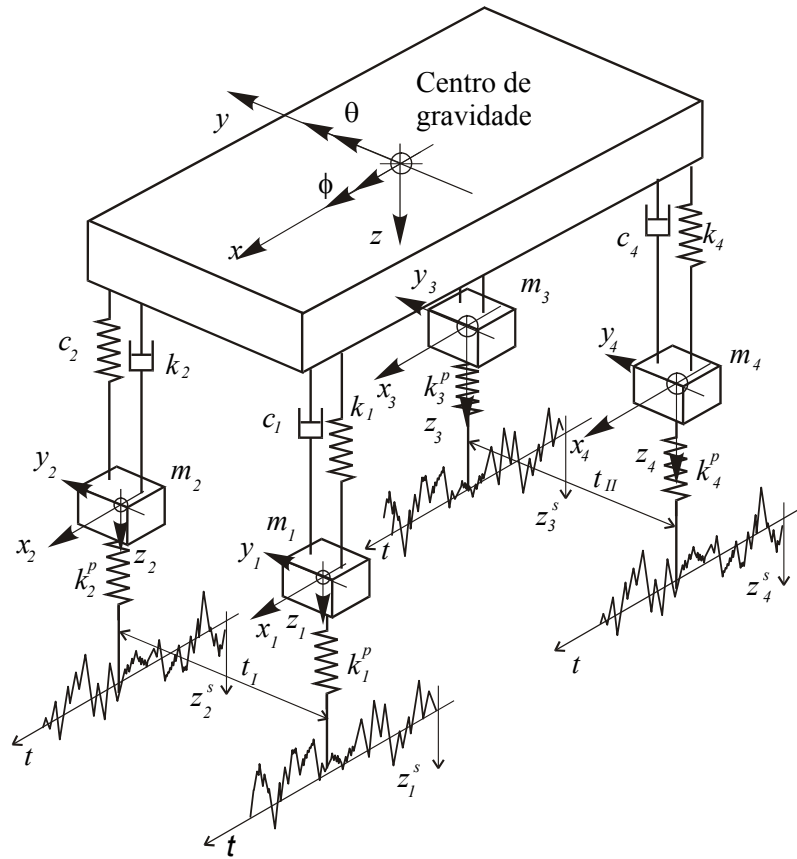


Figura 3.5: Modelo de sete graus de liberdade para um veículo com suspensões independentes.

Na Figura 3.5 os termos dados por  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  e  $m_4$  são respectivamente a massa suspensão e as massas das rodas 1, 2, 3 e 4, conforme Figura 3.1.

A seguir são calculadas as deflexões e velocidades dos elementos elásticos e viscosos, para o modelo com sete graus de liberdade.

### Deflexão das molas e amortecedores para suspensões independentes

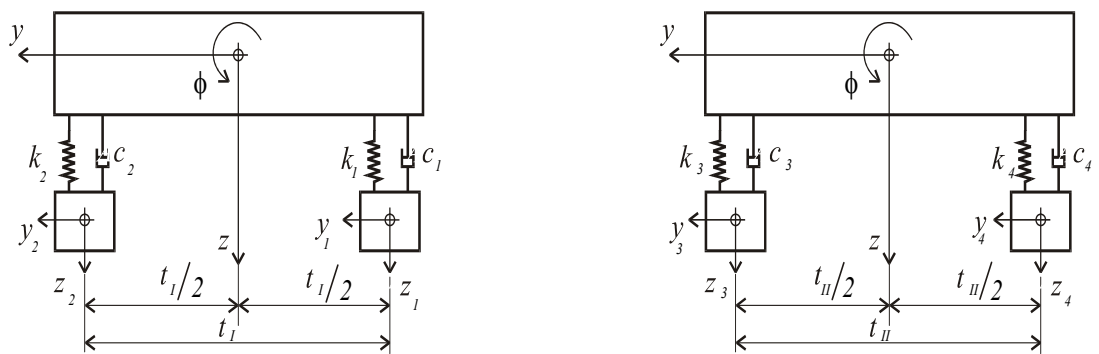
As carrocerias dos automóveis são apoiadas sobre os eixos através de molas. Sendo assim há o deslocamento relativo destes elementos, o que ocasiona as deflexão das molas e dos amortecedores. A deflexão das molas e dos amortecedores são devidas aos seguintes deslocamentos:

- deslocamento vertical (*bounce*) do centro de massa da carroceria (centro de massa suspensão),

- ângulo de rolagem da carroceria (*roll*),
- ângulo de arfagem da carroceria (*pitch*) e
- deslocamentos do centro de massa das rodas.

A contribuição de cada uma das parcelas acima listadas na deflexão das molas e amortecedores das suspensões é determinada a seguir.

A análise destes componentes será feita de acordo com os modelos representados nas Figuras 3.6 e 3.7 que seguem:



a - suspensão dianteira independente

b - suspensão traseira independente

Figura 3.6: Rolagem,  $\phi(t)$ , da carroceria sobre suspensões dianteira e traseira independentes

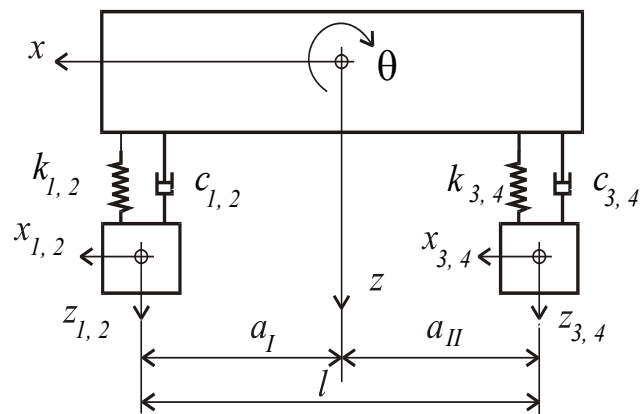


Figura 3.7: Modelo de carroceria e respectivos eixos para consideração do *bounce* e da arfagem.

As grandezas apresentadas nas Figuras 3.6 e 3.7 são:

$k_1$  - rigidez da mola sobre a roda dianteira esquerda,

$k_2$  - rigidez da mola sobre a roda dianteira direita,

$k_3$  - rigidez da mola sobre a roda traseira direita,

$k_4$  - rigidez da mola sobre a roda traseira esquerda,

$c_1$  - coeficiente de amortecimento viscoso sobre a roda dianteira esquerda,

$c_2$  - coeficiente de amortecimento viscoso sobre a roda dianteira direita,

$c_3$  - coeficiente de amortecimento viscoso sobre a roda traseira direita,

$c_4$  - coeficiente de amortecimento viscoso sobre a roda traseira esquerda,

$a_I$  - distância longitudinal do centro de gravidade (CG) ao eixo dianteiro,

$a_{II}$  - distância longitudinal do centro de gravidade (CG) ao eixo traseiro,

$l$  - distância longitudinal entre eixos,

$t_I$  - distância transversal entre as rodas (bitola) do eixo dianteiro e

$t_{II}$  - distância transversal entre as rodas (bitola) do eixo traseiro.

As molas e amortecedores de um eixo com suspensão independente, são submetidas as deflexões causadas pelo deslocamento vertical da roda, bem como pelo deslocamento vertical, arfagem e rolamento da carroceria. Para este desenvolvimento, considera-se também que os deslocamentos verticais da carroceria são maiores do que o das rodas. A deflexão da  $i$ -ésima mola e amortecedor do veículo é dada genericamente por:

$$\delta_i(t) = \delta_i^b(t) + \delta_i^\phi(t) + \delta_i^\theta(t) + \delta_i^r(t) \quad (3.85)$$

sendo:

$\delta_i^b(t)$  - deflexão devido ao deslocamento vertical (*bounce*) do centro de massa da carroceria,

$\delta_i^\phi(t)$  - deflexão devido ao ângulo de rolagem da carroceria (*roll*),

$\delta_i^\theta(t)$  - deflexão devido ao ângulo de arfagem da carroceria (*pitch*) e

$\delta_i^r(t)$  - deflexão devido ao deslocamento vertical do centro de massa das rodas.

### Cálculo da parcela $\delta_i^b(t)$

Esta parcela, referente ao deslocamento vertical do centro de gravidade da carroceria, ou *bounce*, é dada por:

$$\delta_i^b(t) = z \quad (3.86)$$

### Cálculo da parcela $\delta_i^\phi(t)$

Esta parcela é causada pelo ângulo de rolamento  $\phi$  da carroceria, conforme Figura 3.6. Sendo  $t_I$  e  $t_{II}$  as bitolas dos eixos dianteiro e traseiro, respectivamente, e com a consideração

que o ângulo de giro da carroceria é pequeno, pode-se escrever que a deflexão das molas das posições 1 a 4 é dada para:

a roda dianteira esquerda por

$$\delta_1^\phi(t) = -\phi(t)\frac{t_I}{2}, \quad (3.87)$$

a roda dianteira direita por

$$\delta_2^\phi(t) = \phi(t)\frac{t_I}{2}, \quad (3.88)$$

a roda traseira direita por

$$\delta_3^\phi(t) = \phi(t)\frac{t_{II}}{2}, \quad (3.89)$$

e para a roda traseira esquerda por

$$\delta_4^\phi(t) = -\phi(t)\frac{t_{II}}{2}, \quad (3.90)$$

onde o sinal negativo indica que a mola foi tracionada.

### Cálculo da parcela $\delta_i^\theta(t)$

Esta parcela, devido ao ângulo de arfagem  $\theta$  da carroceria, conforme Figura 3.7, é igual para as rodas de um mesmo eixo. Assim a parcela da deflexão das molas devido a este movimento da carroceria (considerando pequenos ângulos de giro da carroceria e que as distâncias do centro de gravidade às rodas dianteiras e traseiras são  $a_I$  e  $a_{II}$  respectivamente), são:

roda dianteira esquerda e direita

$$\delta_1^\theta(t) = \delta_2^\theta(t) = -\theta(t)a_I, \quad (3.91)$$

roda traseira direita e esquerda

$$\delta_3^\theta(t) = \delta_4^\theta(t) = \theta(t)a_{II}. \quad (3.92)$$

O sinal negativo nas duas primeiras equações indica que a mola é tracionada.

### Cálculo da parcela $\delta_i^r(t)$

A deflexão das molas devido ao deslocamento do centro de gravidade das rodas é dada por:

$$\delta_i^r(t) = -z_i(t) \quad (3.93)$$



O sinal negativo indica que a mola é distendida.

### Deflexão total das molas e amortecedores $\delta_i(t)$

Com estas parcelas definidas em função dos deslocamentos dos elementos constituintes do veículo, bem como da posição do centro de gravidade destes, pode-se escrever, a partir da equação (3.85), que:

$$\delta_1(t) = z(t) - \phi(t)\frac{t_I}{2} - \theta(t)a_I - z_1(t), \quad (3.94)$$

$$\delta_2(t) = z(t) + \phi(t)\frac{t_I}{2} - \theta(t)a_I - z_2(t), \quad (3.95)$$

$$\delta_3(t) = z(t) + \phi(t)\frac{t_{II}}{2} + \theta(t)a_{II} - z_3(t) \text{ e} \quad (3.96)$$

$$\delta_4(t) = z(t) - \phi(t)\frac{t_{II}}{2} + \theta(t)a_{II} - z_4(t). \quad (3.97)$$

e, a partir destas, as velocidades dadas por:

$$\dot{\delta}_1(t) = \dot{z}(t) - \dot{\phi}(t)\frac{t_I}{2} - \dot{\theta}(t)a_I - \dot{z}_1(t), \quad (3.98)$$

$$\dot{\delta}_2(t) = \dot{z}(t) + \dot{\phi}(t)\frac{t_I}{2} - \dot{\theta}(t)a_I - \dot{z}_2(t), \quad (3.99)$$

$$\dot{\delta}_3(t) = \dot{z}(t) + \dot{\phi}(t)\frac{t_{II}}{2} + \dot{\theta}(t)a_{II} - \dot{z}_3(t) \text{ e} \quad (3.100)$$

$$\dot{\delta}_4(t) = \dot{z}(t) - \dot{\phi}(t)\frac{t_{II}}{2} + \dot{\theta}(t)a_{II} - \dot{z}_4(t). \quad (3.101)$$

### Deflexões dos pneus para suspensões independentes

As deflexões dos pneus para eixos com suspensões independentes, generalizadas pela equação (3.1), são:

$$\delta_1^p(t) = z_1(t) - z_1^s(t), \quad (3.102)$$

$$\delta_2^p(t) = z_2(t) - z_2^s(t), \quad (3.103)$$

$$\delta_3^p(t) = z_3(t) - z_3^s(t) \text{ e} \quad (3.104)$$

$$\delta_4^p(t) = z_4(t) - z_4^s(t). \quad (3.105)$$

e as velocidades associadas dadas por:

$$\dot{\delta}_1^p(t) = \dot{z}_1(t) - \dot{z}_1^s(t), \quad (3.106)$$

$$\dot{\delta}_2^p(t) = \dot{z}_2(t) - \dot{z}_2^s(t), \quad (3.107)$$

$$\dot{\delta}_3^p(t) = \dot{z}_3(t) - \dot{z}_3^s(t) \text{ e} \quad (3.108)$$

$$\dot{\delta}_4^p(t) = \dot{z}_4(t) - \dot{z}_4^s(t). \quad (3.109)$$

A determinação da energia cinética, energia potencial e função dissipação de Rayleigh para cada um dos subsistemas carroceria, eixo dianteiro e eixo traseiro do veículo é apresentada no Apêndice B.

### Equações de Lagrange

Para a determinação do sistema de equações de movimento, utiliza-se as equações de Lagrange (3.24) as quais são repetidas a seguir:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} + \left( \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} \right) = f_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.110)$$

sendo:

$\mathbf{L}$  - denominado de Lagrangiano e dado por  $\mathbf{L} = T_{Total} - V_{Total}$ ,

$q_i$  e  $\dot{q}_i$  - o deslocamento e a velocidade da  $i$ -ésima coordenada generalizada do sistema e

$n$  - o número de graus de liberdade do sistema.

As matrizes de inércia, amortecimento e de rigidez deste sistema, podem ser também desenvolvidas a partir da aplicação direta da equação (3.110), tendo os seus elementos dados por

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 T_{Total}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (3.111)$$

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \text{ e} \quad (3.112)$$

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial q_i \partial q_j}; \quad (3.113)$$

### Determinação das matrizes de inércia, amortecimento e rigidez

**Matriz massa** A seguir são determinados os elementos da matriz massa com o auxílio da equação (3.111).

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \frac{\partial^2 T_{Total}}{\partial \dot{z}^2} = m \\
 m_{22} &= \frac{\partial^2 T_{Total}}{\partial \dot{\phi}^2} = I_x \\
 m_{33} &= \frac{\partial^2 T_{Total}}{\partial \dot{\theta}^2} = I_y \\
 m_{44} &= \frac{\partial^2 T_{Total}}{\partial \dot{z}_1^2} = m_1 \\
 m_{55} &= \frac{\partial^2 T_{Total}}{\partial \dot{z}_2^2} = m_2 \\
 m_{66} &= \frac{\partial^2 T_{Total}}{\partial \dot{z}_3^2} = m_3 \\
 m_{77} &= \frac{\partial^2 T_{Total}}{\partial \dot{z}_4^2} = m_4
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

ou, na forma matricial, como segue

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}. \tag{3.115}$$

**Matriz amortecimento** Os elementos da matriz amortecimento, obtidos a partir da função dissipação de Rayleigh com o auxílio da equação (3.112), são:

$$c_{11} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{z}^2} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \tag{3.116}$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{z} \partial \dot{\phi}} = -(c_1 - c_2) \frac{t_I}{2} + (c_3 - c_4) \frac{t_{II}}{2} \tag{3.117}$$

$$c_{13} = c_{31} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{z} \partial \dot{\theta}} = -(c_1 + c_2) a_I + (c_3 + c_4) a_{II} \tag{3.118}$$

$$c_{14} = c_{41} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{z} \partial \dot{z}_1} = -c_1 \quad (3.119)$$

$$c_{15} = c_{51} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{z} \partial \dot{z}_2} = -c_2 \quad (3.120)$$

$$c_{16} = c_{61} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{z} \partial \dot{z}_3} = -c_3 \quad (3.121)$$

$$c_{17} = c_{71} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{z} \partial \dot{z}_4} = -c_4 \quad (3.122)$$

$$c_{22} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\phi}^2} = (c_1 + c_2) \left( \frac{t_I}{2} \right)^2 + (c_3 + c_4) \left( \frac{t_{II}}{2} \right)^2 \quad (3.123)$$

$$c_{23} = c_{32} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\theta}} = (c_1 - c_2) \left( \frac{a_I t_I}{2} \right) + (c_3 - c_4) \left( \frac{a_{II} t_{II}}{2} \right) \quad (3.124)$$

$$c_{24} = c_{42} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{z}_1} = c_1 \frac{t_I}{2} \quad (3.125)$$

$$c_{25} = c_{52} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{z}_2} = -c_2 \frac{t_I}{2} \quad (3.126)$$

$$c_{26} = c_{62} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{z}_3} = -c_3 \frac{t_{II}}{2} \quad (3.127)$$

$$c_{27} = c_{72} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{z}_4} = c_4 \frac{t_{II}}{2} \quad (3.128)$$

$$c_{33} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\theta}^2} = (c_1 + c_2) a_I^2 + (c_3 + c_4) a_{II}^2 \quad (3.129)$$

$$c_{34} = c_{43} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{z}_1} = c_1 a_I \quad (3.130)$$

$$c_{35} = c_{53} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{z}_2} = c_2 a_I \quad (3.131)$$

$$c_{36} = c_{63} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{z}_3} = -c_3 a_{II} \quad (3.132)$$

$$c_{37} = c_{73} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{z}_4} = -c_4 a_{II} \quad (3.133)$$

$$c_{44} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{z}_1^2} = c_1 \quad (3.134)$$

$$c_{45} = c_{54} = \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \dot{z}_1 \partial \dot{z}_2} = 0 \quad (3.135)$$

$$c_{46} = c_{64} = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \dot{z}_1 \partial \dot{z}_3} = 0 \quad (3.136)$$

$$c_{47} = c_{74} = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \dot{z}_1 \partial \dot{z}_4} = 0 \quad (3.137)$$

$$c_{55} = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \dot{z}_2^2} = c_2 \quad (3.138)$$

$$c_{56} = c_{65} = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \dot{z}_2 \partial \dot{z}_3} = 0 \quad (3.139)$$

$$c_{57} = c_{75} = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \dot{z}_2 \partial \dot{z}_4} = 0 \quad (3.140)$$

$$c_{66} = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \dot{z}_3^2} = c_3 \quad (3.141)$$

$$c_{67} = c_{76} = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \dot{z}_3 \partial \dot{z}_4} = 0 \quad (3.142)$$

$$c_{77} = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \dot{z}_4^2} = c_4 \quad (3.143)$$

Os termos apresentados acima têm sua disposição na matriz de amortecimento,  $\mathbf{C}$ , mostrada na expressão que segue.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{37} & c_{36} & c_{37} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & c_{77} \end{bmatrix}. \quad (3.144)$$

É conveniente salientar que a matriz acima é simétrica, já que não são considerados efeitos giroscópicos.

**Matriz de rigidez** Os elementos da matriz rigidez, obtidos a partir da energia potencial com o auxílio da equação (3.113), são:

$$k_{11} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z^2} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \quad (3.145)$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z \partial \phi} = -(k_1 - k_2) \frac{t_I}{2} + (k_3 - k_4) \frac{t_{II}}{2} \quad (3.146)$$

$$k_{13} = k_{31} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z \partial \theta} = -(k_1 + k_2) a_I + (k_3 + k_4) a_{II} \quad (3.147)$$

$$k_{14} = k_{41} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z \partial z_1} = -k_1 \quad (3.148)$$

$$k_{15} = k_{51} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z \partial z_2} = -k_2 \quad (3.149)$$

$$k_{16} = k_{61} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z \partial z_3} = -k_3 \quad (3.150)$$

$$k_{17} = k_{71} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z \partial z_4} = -k_4 \quad (3.151)$$

$$k_{22} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \phi^2} = (k_1 + k_2) \left(\frac{t_I}{2}\right)^2 + (k_3 + k_4) \left(\frac{t_{II}}{2}\right)^2 \quad (3.152)$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \phi \partial \theta} = (k_1 - k_2) \left(\frac{a_I t_I}{2}\right) + (k_3 - k_4) \left(\frac{a_{II} t_{II}}{2}\right) \quad (3.153)$$

$$k_{24} = k_{42} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \phi \partial z_1} = k_1 \frac{t_I}{2} \quad (3.154)$$

$$k_{25} = k_{52} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \phi \partial z_2} = -k_2 \frac{t_I}{2} \quad (3.155)$$

$$k_{26} = k_{62} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \phi \partial z_3} = -k_3 \frac{t_{II}}{2} \quad (3.156)$$

$$k_{27} = k_{72} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \phi \partial z_4} = k_4 \frac{t_{II}}{2} \quad (3.157)$$

$$k_{33} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \theta^2} = (k_1 + k_2) a_I^2 + (k_3 + k_4) a_{II}^2 \quad (3.158)$$

$$k_{34} = k_{c43} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \theta \partial z_1} = k_1 a_I \quad (3.159)$$

$$k_{35} = k_{c53} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \theta \partial z_2} = k_2 a_I \quad (3.160)$$

$$k_{36} = k_{63} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \theta \partial z_3} = -k_3 a_{II} \quad (3.161)$$

$$k_{37} = k_{73} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial \theta \partial z_4} = -k_4 a_{II} \quad (3.162)$$

$$k_{44} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_1^2} = k_1 + k_1^p \quad (3.163)$$

$$k_{45} = k_{54} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_1 \partial z_2} = 0 \quad (3.164)$$

$$k_{46} = k_{64} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_1 \partial z_3} = 0 \quad (3.165)$$

$$k_{47} = k_{74} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_1 \partial z_4} = 0 \quad (3.166)$$

$$k_{55} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_2^2} = k_2 + k_2^p \quad (3.167)$$

$$k_{56} = k_{65} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_2 \partial z_3} = 0 \quad (3.168)$$

$$k_{57} = k_{75} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_2 \partial z_4} = 0 \quad (3.169)$$

$$k_{66} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_3^2} = k_3 + k_3^p \quad (3.170)$$

$$k_{67} = k_{76} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_3 \partial z_4} = 0 \quad (3.171)$$

$$k_{77} = \frac{\partial^2 V_{Total}}{\partial z_4^2} = k_4 + k_4^p \quad (3.172)$$

Os termos desenvolvidos acima, tem sua disposição na matriz de rigidez,  $\mathbf{K}$ , mostrada na expressão que segue.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{37} & k_{36} & k_{37} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} \end{bmatrix}. \quad (3.173)$$

### Vetor excitação

Neste caso, onde a excitação é pela base, tem-se que o vetor de carregamentos é dado por:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_6(t) \\ f_7(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_1^p z_1^s(t) \\ k_2^p z_2^s(t) \\ k_3^p z_3^s(t) \\ k_4^p z_4^s(t) \end{Bmatrix} \quad (3.174)$$

# Capítulo 4

## Caracterização e Levantamento de Propriedades do Veículo Experimental

### 4.1 Introdução

Neste capítulo é feita uma descrição a respeito da caracterização e levantamento de propriedades de componentes mecânicos de um veículo experimental.

O objetivo principal é a obtenção de parâmetros de entrada para os modelos teóricos dinâmicos desenvolvidos anteriormente e simulação do comportamento do veículo real.

O modelo experimental utilizado neste trabalho é o veículo de competição fora de estrada **Mini Baja**, projetado e construído pelos estudantes de engenharia da Universidade Federal de Santa Catarina (**UFSC**), que participa anualmente de competições nacionais universitárias, sendo este evento realizado e coordenado pela SAE.

O Mini Baja é um veículo constituído basicamente de um arranjo estrutural tubular formando uma gaiola. As rodas são posicionadas na estrutura através dos braços das suspensões que possuem componentes elásticos (molas) e viscosos (amortecedores) para reduzir impactos de cargas devido às rugosidades das pistas de rodagem. Este veículo é impulsionado por um motor estacionário de 7456 W e a transmissão de movimento é feita através de um variador contínuo de polias cônicas e correias de deslizamento (CVT - Continuous Variable Transmission).

A escolha do Mini Baja para o desenvolvimento deste trabalho é justificado principalmente devido a simplicidade estrutural do veículo, resultando em pouca dissipação de energia por amortecimento histerético, efeito este, não levado em conta nos modelos propostos.

A Figura 4.1 mostra o veículo Mini Baja utilizado como modelo experimental.





Figura 4.1: Modelo experimental Mini Baja

As principais atividades experimentais necessárias para a obtenção de parâmetros de entrada dos modelos teóricos são:

- caracterização da rigidez das molas helicoidais e pneus,
- levantamento dos coeficientes de amortecimento dos amortecedores,
- medição das distâncias dos eixos dianteiro e traseiro ao centro de gravidade (CG) do veículo,
- medição das distâncias entre rodas de um mesmo eixo (bitola),
- levantamento das massas suspensa e não suspensas e
- medição de valores de momentos de inércia.

O desenvolvimento destas atividades experimentais são descritas detalhadamente a seguir.

## 4.2 Caracterização da rigidez das molas helicoidais

A caracterização das molas helicoidais foram feitas em um equipamento MTS apresentado na Figura 4.2.



Figura 4.2: Equipamento de ensaio MTS utilizado para caracterização das molas e amortecedores.

Este equipamento é constituído basicamente pelos seguintes componentes:

- atuador vertical unido a uma base móvel, localizado na região inferior do equipamento,
- célula de carga localizada em um cabeçote superior e
- duas colunas guias

O cabeçote e a base são guiados pelas colunas e a movimentação durante os ensaios é feita pela base móvel unida ao atuador vertical localizado na região inferior do equipamento. O posicionamento dos componentes a serem ensaiados é feito através do deslocamento tanto do cabeçote superior como pela variação da posição da base inferior.

Através do equipamento MTS, é possível a definição e ajuste de alguns parâmetros de ensaio como o curso e velocidade de movimentação dos atuadores. O equipamento permite também o ajuste de parâmetros de teste através de outros tipos de programas externos.

Para a aquisição de dados foi utilizado o equipamento Spyder, ligado através de dois canais, um para a célula de carga e o outro para o transdutor de deslocamento, ao painel de controle do equipamento MTS. Os resultados foram visualizados e armazenados no programa Catman [23].

Foram feitas caracterizações de rigidez de quatro molas helicoidais, através de ensaios estáticos. As Figuras 4.3 a 4.6 mostram os resultados destes ensaios.

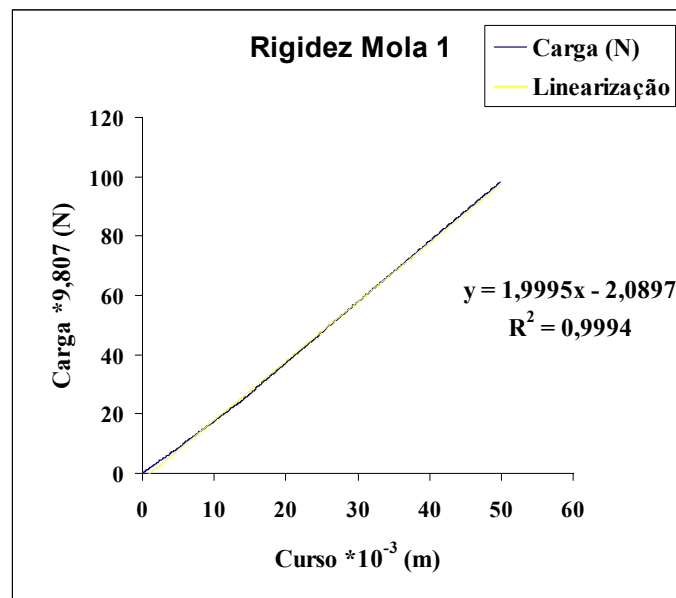


Figura 4.3: Curva de rigidez - mola 1.

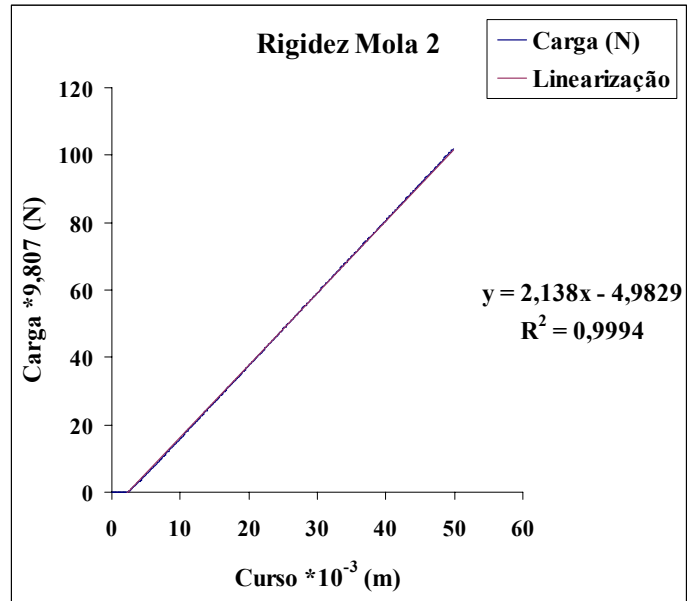


Figura 4.4: Curva de rigidez - mola 2.

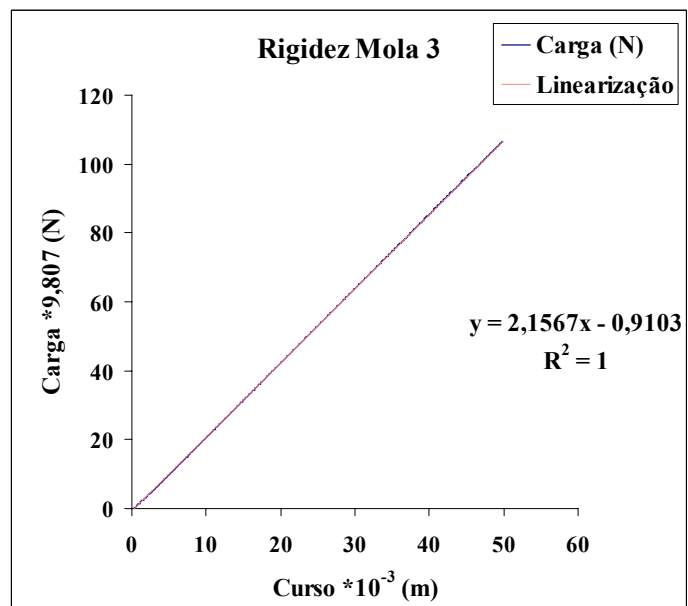


Figura 4.5: Curva de rigidez - mola 3.

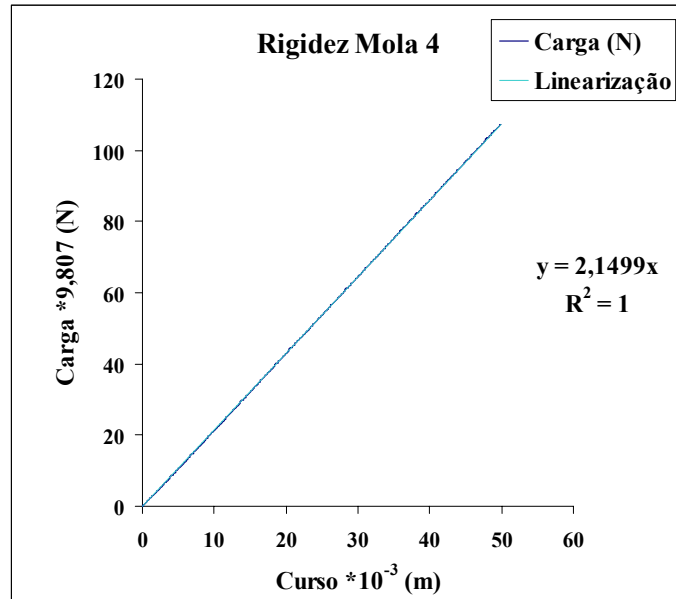


Figura 4.6: Curva de rigidez - mola 4.

Conforme Figuras 4.3 a 4.6, a máxima deflexão das molas ficou em torno de 50 mm. Após este valor, as molas atingiam a condi o de instabilidade (flambagem). As curvas de carga e descarga em fun o do deslocamento permaneceram praticamente sobrepostas, indicando pouco amortecimento estrutural deste elemento. Observa-se ainda nestas figuras que o comportamento das molas   linear.

Os valores dados por  $R^2$  (coeficiente de regressão) indicam a qualidade de ajuste de linhas de tendência sobre as curvas obtidas experimentalmente. Quanto mais próximo da unidade este coeficiente, melhor   o ajuste das linhas de tendência sobre os pontos do gráfico. As legendas das Figuras 4.3 a 4.6 mostram os coeficientes de regressão  $R^2$  para curvas lineares ajustadas sobre os pontos experimentais. Os valores dos coeficientes de regressão foram iguais ou bastante próximos da unidade, o que reforça a defini o do comportamento linear das molas ensaiadas.

A partir das curvas lineares ajustadas,   possível a determina o de um valor médio de coeficiente de rigidez real das molas helicoidais  $k^*$ , definido pelos coeficientes angulares das linhas de tendência dos gráficos das Figuras 4.3 a 4.6 de:

$$k^* = 2,07 \cdot 10^4 \frac{N}{m}. \quad (4.1)$$

A rigidez da mola determinada experimentalmente não pode ser aplicada diretamente nas equa es de movimento desenvolvidas anteriormente, pois nos modelos teóricos as molas estão localizadas no plano médio do pneu enquanto que nos veículos reais isso não ocorre.

Sendo assim, é necessário a determinação de uma rigidez no plano médio do pneu, equivalente à rigidez real da mola, como segue.

O cálculo do valor de rigidez equivalente, a partir da rigidez real das molas é feito através da consideração que o trabalho potencial conservativo realizado pela mola equivalente e real são iguais, ou seja:

$$\delta W_{Conservativo} = \delta W_{Conservativo}^* \quad (4.2)$$

sendo:

$\delta W_{Conservativo}$  - trabalho potencial exercido pela mola equivalente e

$\delta W_{Conservativo}^*$  - trabalho potencial exercido pela mola real.

Desta forma, a relação entre a rigidez real e equivalente é dada por:

$$k = k^* \left(\frac{u}{v}\right)^2 \quad (4.3)$$

sendo:

$k^*$  - rigidez real da mola,

$k$  - rigidez equivalente da mola,

$u$  - distância da mola real em relação à rótula do braço transversal que suporta este elemento, fixo a carroceria e

$v$  - distância da mola equivalente em relação à rótula do braço transversal que suporta este elemento, fixo a carroceria.

A Figura 4.7 mostra as distâncias  $u$  e  $v$ , sendo que a posição da mola equivalente no modelo é localizada no centro geométrico da roda, conforme consideração feita no Capítulo 3.

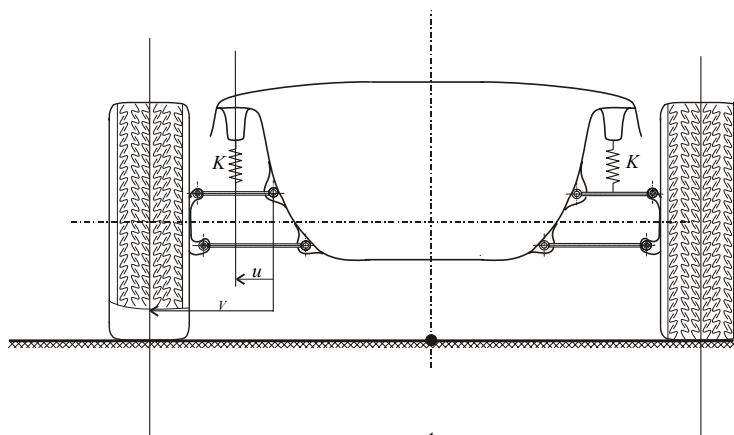


Figura 4.7: Definição das posições das molas reais e equivalentes

As distâncias  $u$  e  $v$  medidas nas suspensões dianteira e traseira do veículo Mini Baja, foram:

$$\begin{aligned}u &= 0,225m, \\v &= 0,400m\end{aligned}\tag{4.4}$$

e

$$\begin{aligned}u &= 0,350m, \\v &= 0,475m\end{aligned}\tag{4.5}$$

respectivamente.

Com estes resultados, a rigidez das molas equivalentes dianteira e traseira são respectivamente:

$$k_1, k_2 = 6,54 \cdot 10^3 \frac{N}{m} \text{ e}\tag{4.6}$$

$$k_3, k_4 = 1,12 \cdot 10^4 \frac{N}{m}.\tag{4.7}$$

As fotos do ensaio de caracterização das molas helicoidais são mostradas na Figura 4.8.



Figura 4.8: Ensaio de caracterização das molas helicoidais

### 4.3 Caracterização do amortecedor

A caracterização do amortecedor foi feita também no equipamento MTS apresentado na Figura 4.2. Foram necessários dispositivos de fixação diferenciados daqueles utilizados nos testes das molas helicoidais, devido a configuração deste elemento. O olhal superior do amortecedor foi aparafusado na célula de carga localizada no cabeçote do equipamento e o inferior na base móvel através de um suporte. Um goniômetro digital foi utilizado, com a finalidade de verificar se a inclinação do amortecedor em relação a base móvel estava correta, ou seja, se o ângulo entre a parede do amortecedor e a base era de noventa graus. Após todas essas verificações de montagem, os testes foram executados.

O ensaio foi feito com a utilização do programa de aquisição de dados Aquisi da empresa



Spectra Tecnologia. Este programa possibilita o controle de parâmetros como: velocidade, curso total, frequência, ciclos do teste, números de ciclos e velocidade de pré aquecimento. A etapa de pré aquecimento tem como objetivo principal eliminar a existência de bolhas no interior do fluido de trabalho do amortecedor, o que evita o mascaramento dos resultados obtidos no ensaio. Vale salientar que a caracterização do amortecedor deve ser feita dinamicamente, como no presente trabalho.

As curvas coletadas durante o ensaio do amortecedor são apresentadas na Figura 4.9.

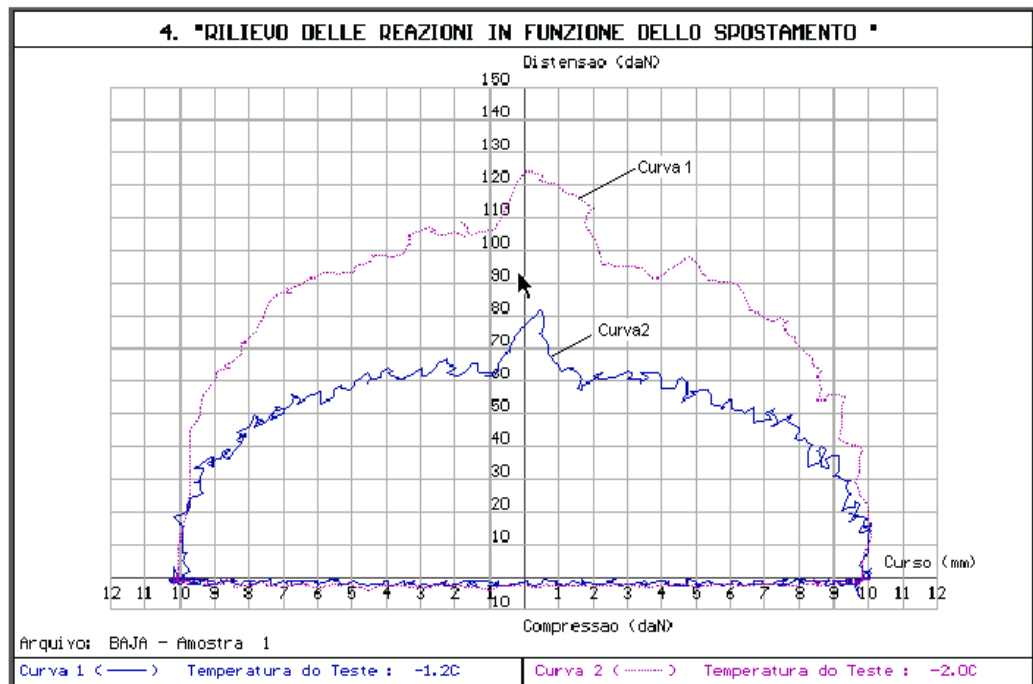


Figura 4.9: Curvas Carga x Curso do amortecedor coletadas através do programa Aquisi.

É importante ressaltar que a unidade dos valores de carga medidos durante o ensaio é kgf e não daN, como mostra o título na Figura 4.9, já que o programa Aquisi já estava com a configuração pré definida deste sistema de unidades.

Para o levantamento das curvas da Figura 4.9, é necessário a definição dos seguintes parâmetros de entrada no programa Aquisi:

- duas velocidades máximas na metade do curso total da haste do amortecedor e
- amplitude do curso total da haste do amortecedor.

Desta forma, as curvas 1 e 2 da Figura 4.9 foram obtidas a partir da definição das velocidades máximas de  $0,100 \frac{m}{s}$  e  $0,050 \frac{m}{s}$ , respectivamente e amplitude do curso total da haste do amortecedor de  $0,020$  m.

A determinação do coeficiente de amortecimento é feita a partir da Figura 4.9 e do desenvolvimento mostrado a seguir.

A equação de movimento harmônico simples

$$x(t) = X \sin(\Omega t + \Phi) \quad (4.8)$$

permite relacionar velocidades a cada ponto do curso total da haste do amortecedor e as respectivas cargas [16].

Para  $\Phi = 0$ , tem-se

$$\Omega t = \arcsin\left(\frac{x}{X}\right) \quad (4.9)$$

e a velocidade é dada por

$$\dot{x}(t) = X\Omega \cos(\Omega t) \quad (4.10)$$

sendo:

$X$  - a amplitude de movimento, em  $m$ ,

$\Phi$  - o ângulo de fase,

$\Omega$  - a frequência circular em  $\frac{rad}{s}$  e

$t$  - a variável tempo em  $s$ .

Os valores de amplitude  $X$ , que corresponde a metade do curso total da haste do amortecedor e frequência circular  $\Omega$  são obtidos diretamente dos parâmetros de entrada do ensaio. Esses valores são respectivamente 0,010 m e  $10 \frac{rad}{s}$  para curva 1 e 0,010 m e  $5 \frac{rad}{s}$  para curva 2, conforme Figura 4.9.

A razão carga por velocidade fornece o coeficiente de amortecimento para cada ponto do curso total da haste. Foram determinados, separadamente, os coeficientes médios de amortecimento para as cargas de distensão e compressão, referentes as curvas 1 e 2 da Figura 4.9, devido a diferenciação do comportamento mecânico do amortecedor em cada sentido de deslocamento (simples efeito). Os valores dos coeficientes de amortecimento  $c^*$ , obtidos através das médias dos coeficientes médios de amortecimento das curvas 1 e 2, para carga de distensão e compressão, são:

$$c^* = 1,23 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m} \text{ e} \quad (4.11)$$

$$c^* = 2,69 \cdot 10^2 \frac{N \cdot s}{m} \quad (4.12)$$

respectivamente.

Uma outra forma de determinar o coeficiente de amortecimento é através do cálculo da energia dissipada por ciclo, referência [24]. A energia dissipada por ciclo de ação é obtida da

seguinte forma:

$$W_d = \oint F_d dx \quad (4.13)$$

Para o amortecimento viscoso, a força de amortecimento é dada por:

$$F_d = c^* \dot{x} \quad (4.14)$$

Os deslocamentos e velocidades são dados pelas equações

$$x(t) = X \sin(\Omega t - \Phi) \quad e \quad (4.15)$$

$$\dot{x}(t) = X\Omega \cos(\Omega t - \Phi) \quad (4.16)$$

análogas as equações (4.8) e (4.10), com o ângulo de fase  $\Phi \neq 0$ .

sendo:

$c^*$  - o coeficiente de amortecimento real,

$X$  - a amplitude de movimento em  $m$ ,

$\Phi$  - o ângulo de fase,

$\Omega$  - a frequência circular em  $\frac{rad}{s}$  e

$t$  - variável tempo em  $s$ .

Com a substituição da equação (4.14) em (4.13), a energia dissipada por ciclo é reescrita como:

$$W_d = \oint c^* \dot{x} dx = \oint c^* \dot{x}^2 dt \quad (4.17)$$

a qual, substituindo a equação (4.16), tem-se para um coeficiente médio de amortecimento:

$$W_d = c^* \Omega^2 X^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \cos^2(\Omega t - \Phi) dt = \pi c^* \Omega X^2 \quad (4.18)$$

As áreas englobadas pelas curvas 1 e 2, mostradas na Figura 4.9, permite a obtenção da energia dissipada por cada ciclo de ação do amortecedor e a partir da aplicação da equação (4.18), é possível a determinação de coeficientes médios de amortecimento para cada uma das curvas.

Desta forma, foram obtidos valores de coeficientes médios de amortecimento, referentes às áreas superiores (cargas de distensão) e inferiores (cargas de compressão) das curvas 1 e 2 da Figura 4.9.

A média dos valores dos coeficientes médios de amortecimento  $c^*$  das curvas 1 e 2 para cargas de distensão e compressão são:

$$c^* = 1,19 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m} \text{ e} \quad (4.19)$$

$$c^* = 2,53 \cdot 10^2 \frac{N \cdot s}{m} \quad (4.20)$$

respectivamente.

A média entre os coeficientes médios de amortecimento determinados em (4.11) e (4.19) e (4.12) e (4.20) são:

$$c^* = 2,61 \cdot 10^2 \frac{N \cdot s}{m}$$

para carga de compressão e

$$c^* = 1,21 \cdot 10^4 \frac{N \cdot s}{m}, \quad (4.21)$$

para cargas de tração.

A definição do valor do coeficiente de amortecimento equivalente, a partir do coeficiente de amortecimento real é feito de forma análoga ao caso das molas helicoidais, equação (4.2), sendo considerada a igualdade entre o trabalho não conservativo realizado pelo amortecedor equivalente e o amortecedor real, ou seja

$$\delta W_{Nconservativo} = \delta W_{Nconservativo}^* \quad (4.22)$$

sendo:

$\delta W_{Nconservativo}$  - trabalho não conservativo realizado pelo amortecedor equivalente e

$\delta W_{Nconservativo}^*$  - trabalho não conservativo realizado pelo amortecedor real.

Desta forma, a relação entre o coeficiente de amortecimento real e equivalente é dada por:

$$c = c^* \left(\frac{u}{v}\right)^2 \quad (4.23)$$

sendo:

$c^*$  - coeficiente de amortecimento real do amortecedor,

$c$  - coeficiente de amortecimento equivalente do amortecedor,

$u$  - distância do amortecedor real em relação a rótula do braço transversal fixo a carroceria

e

$v$  - distância do amortecedor equivalente em relação a rótula do braço transversal fixo a carroceria.

A Figura 4.7 mostra as distâncias  $u$  e  $v$ , sendo que a posição do amortecedor equivalente no modelo é localizada no centro geométrico da roda, como no caso das molas.

Os valores das distâncias  $u$  e  $v$  são repetidas novamente a seguir:

$$u = 0,225m, \quad (4.24)$$

$$v = 0,400m$$

para a suspensão dianteira e

$$u = 0,350m, \quad (4.25)$$

$$v = 0,475m$$

para a suspensão traseira.

Desta forma, os valores dos coeficientes de amortecimento equivalente para as suspensões dianteiras e traseiras são respectivamente para carga de compressão

$$c_1, c_2 = 8,51 \cdot 10^1 \frac{Ns}{m} \text{ e} \quad (4.26)$$

$$c_3, c_4 = 1,46 \cdot 10^2 \frac{Ns}{m} \quad (4.27)$$

e carga de tração

$$c_1, c_2 = 3,89 \cdot 10^3 \frac{Ns}{m} \text{ e} \quad (4.28)$$

$$c_3, c_4 = 6,68 \cdot 10^3 \frac{Ns}{m}. \quad (4.29)$$

Um fator bastante importante a ser observado neste tipo de experimentação é a relação das propriedades do fluido de trabalho do amortecedor com a temperatura. Após um certo número de ensaios consecutivos, foi observado que as curvas coletadas começavam a divergir entre si, devido o aumento de temperatura do fluido.

Desta forma, os ensaios foram realizados entre longos intervalos de tempo, a fim de evitar o aquecimento e conseqüentemente, alteração do comportamento mecânico do amortecedor.

A foto referente a este ensaio é mostrada na Figura 4.10.



Figura 4.10: Ensaio de caracterização do amortecedor

## 4.4 Caracterização da rigidez do pneu

Para a realização do ensaio de caracterização da rigidez do pneu, foi necessário a construção de um dispositivo para a fixação e suspensão da roda em relação ao solo, de forma que apenas uma das alturas do pneu do veículo experimental Mini Baja fosse deformada.

Foram utilizados os seguintes materiais para a construção deste dispositivo:

- viga I  $4'' \times 2\frac{5}{8}'' \times 0,300$  m,
- chapa  $0,148 \times 0,148$  m x  $0,030$  m e
- disco  $\varnothing 0,170$  m x  $0,015$  m, para a fixação do cubo da roda no dispositivo.

Na Figura 4.11 é mostrado o dispositivo utilizado durante o ensaio de caracterização de rigidez do pneu.



Figura 4.11: Dispositivo utilizado para fixação e suspensão da roda em relação ao solo.

Para a aplicação da carga, foi utilizado um atuador hidráulico posicionado verticalmente e na sua extremidade uma outra chapa aparafusada à célula de carga com a finalidade de simular um contato do pneu com uma superfície plana, como pode ser visto na Figura 4.12.

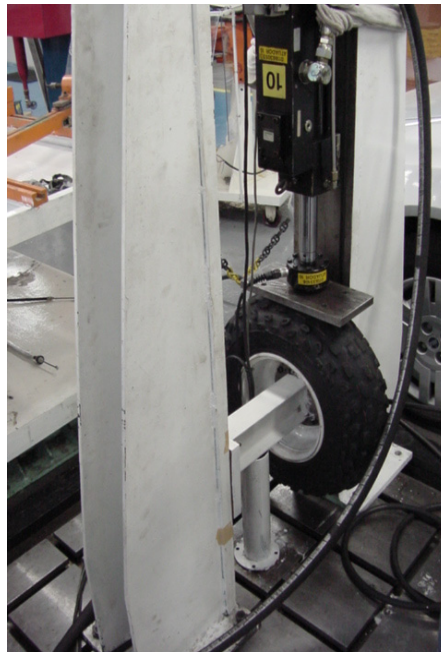


Figura 4.12: Montagem vertical do atuador para aplicação da carga sobre o pneu.



Figura 4.13: Montagem dos equipamentos Spyder (sob o computador) e MTS para o ensaio de caracterização da rigidez do pneu.

O controle do atuador foi feito através de um equipamento MTS, Figura 4.13. Este equipamento, permite o ajuste e a verificação de parâmetros do atuador como curso da haste, velocidade e a definição de limites para a finalização da operação. Para a aquisição de dados foi utilizado o equipamento Spyder, ligado ao controlador MTS por dois canais, um para a célula de carga e outro para o transdutor de deslocamento, sendo que a visualização dos dados foi feita através do programa Catman [23]. O pneu foi calibrado através de um calibrador ligado a um sistema de ar comprimido, Figura 4.14, com valores de pressão entre 96,5 kPa e 248,2 Kpa, sendo este último valor, o limite máximo recomendado pelo fabricante do pneu. É importante ressaltar que o coeficiente de rigidez do pneu está diretamente relacionado com a pressão de calibração.

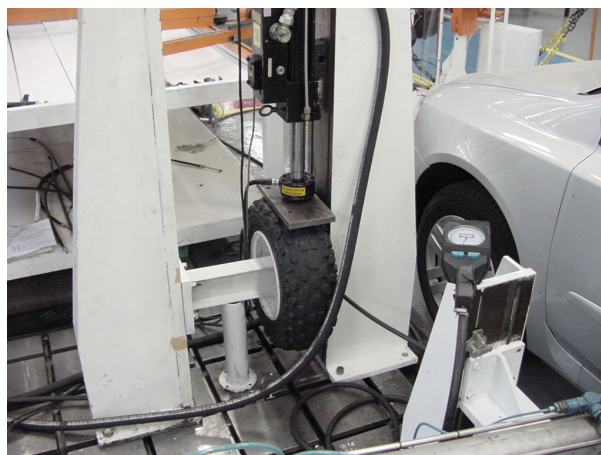


Figura 4.14: Calibrador utilizado durante o ensaio de caracterização do pneu.



Para cada valor de pressão foram realizados dois ensaios estáticos. As curvas referentes a primeira bateria de ensaios são apresentadas nas Figuras 4.15 a 4.19.

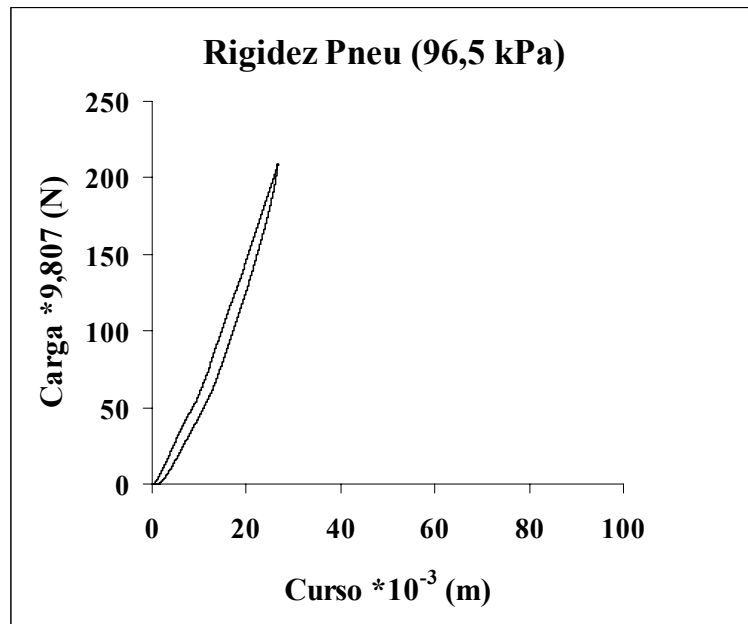


Figura 4.15: Caracterização da rigidez do pneu - pressão 96,5 kPa.

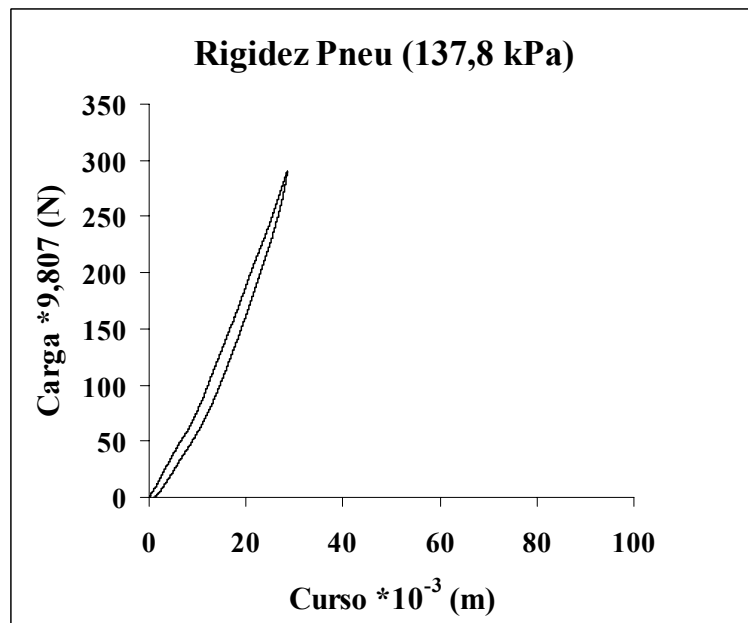


Figura 4.16: Caracterização da rigidez do pneu - pressão 137,8 kPa.

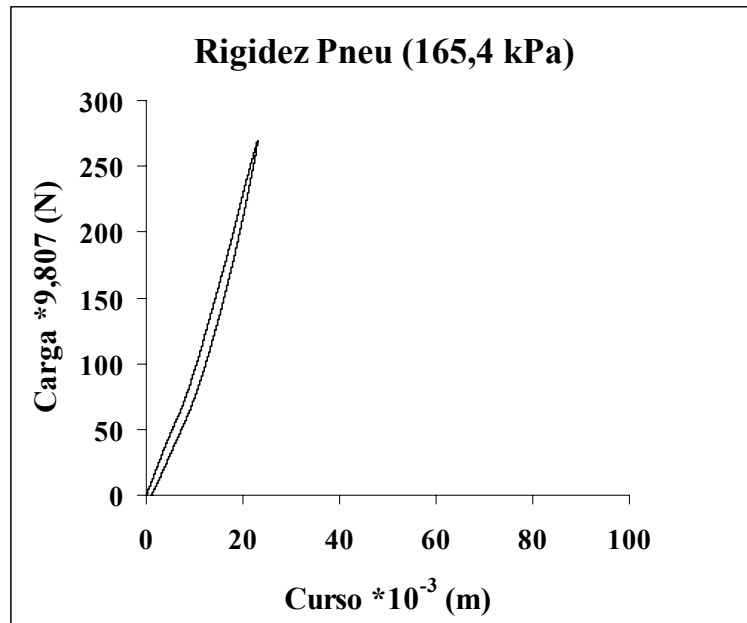


Figura 4.17: Caracterização da rigidez do pneu - pressão 165,4 kPa.

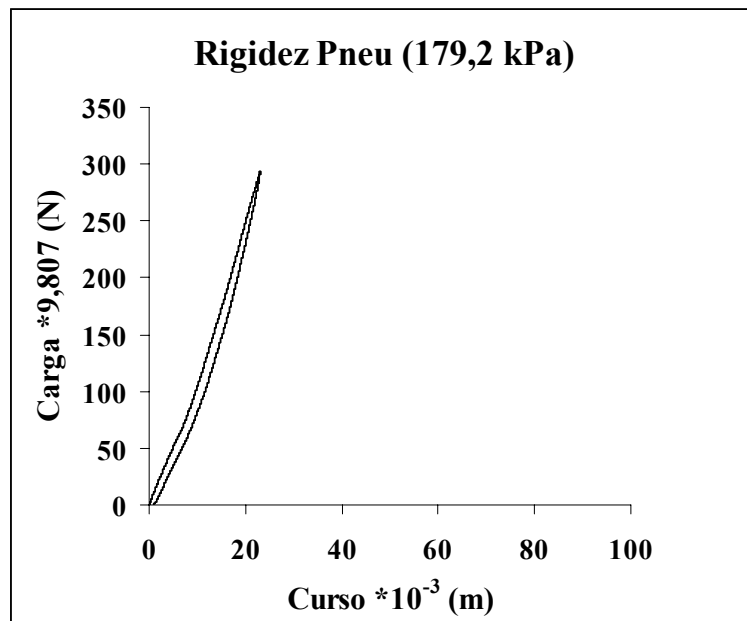


Figura 4.18: Caracterização da rigidez do pneu - pressão 179,2 kPa.

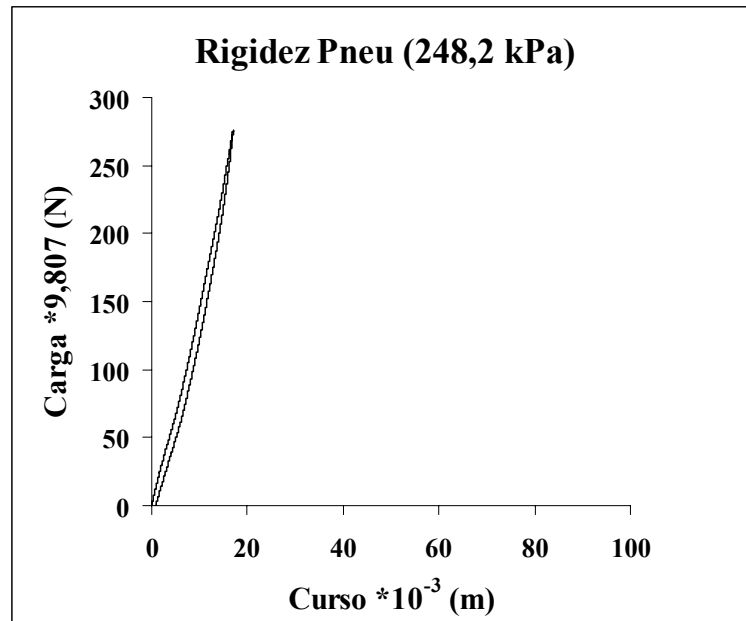


Figura 4.19: Caracterização da rigidez do pneu - pressão 248,2 kPa.

Como pode ser observado nas Figuras 4.15 a 4.19, a máxima deflexão do pneu é função da pressão de calibração. As curvas de carga e descarga em função dos deslocamentos são caracterizadas pela formação de laços de histerese, indicando que ocorre dissipação de energia interna durante a deformação do pneu [14] e [10]. O atrito interno é provocado pela deformação do pneu na zona de contato com o solo, sendo que esta deformação faz com que as lonas da carcaça movam-se entre si. Este movimento, embora pequeno, faz com que a borracha que separa as lonas seja solicitada por cisalhamento, consumindo energia. A banda de rodagem também é deformada e, ficando sujeita as solicitações mecânicas, contribui com uma parcela do consumo de energia. Sendo assim, as áreas contidas nos laços de histerese representam a energia consumida nos ciclos e correspondem ao trabalho de atrito. Esta energia é dissipada em forma de calor.

A proximidade e o paralelismo entre as curvas de carga e descarga dos laços de histerese das Figuras 4.15 a 4.19, permitem que os coeficientes de rigidez em função da pressão de calibração sejam determinados, considerando o ajuste de curvas lineares sobre pontos experimentais referentes ao carregamento do pneu, eliminando desta forma, o efeito do amortecimento histerético.

Vale lembrar que os modelos com dois e sete graus de liberdade não levam em consideração o efeito do amortecimento dos pneus

A rigidez do pneu é determinada a partir dos coeficientes angulares das curvas lineares ajustadas, apresentadas nas Figuras 4.20 a 4.24, nas quais estão mostrados os coeficientes

de regressão  $R^2$ , todos muito próximos da unidade. Isso significa dizer que os pontos experimentais destes gráficos possuem um comportamento praticamente linear.

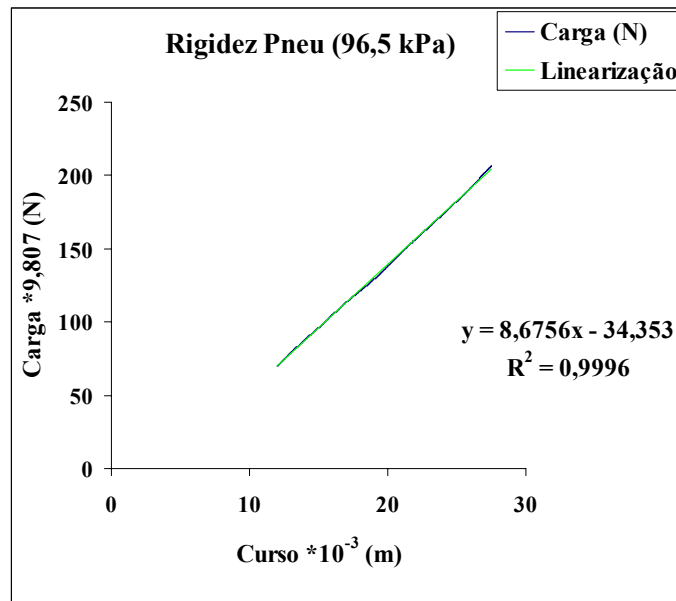


Figura 4.20: Rigidez do pneu - pressão 96,5 kPa.

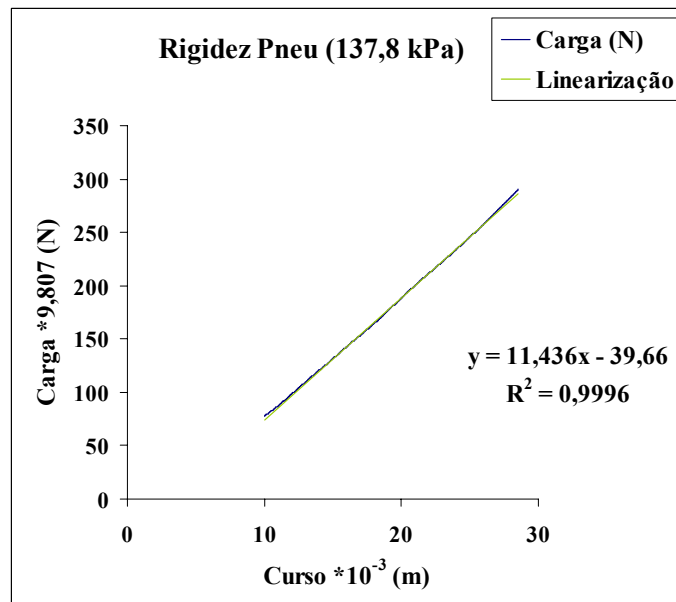


Figura 4.21: Rigidez do pneu - pressão 137,8 kPa.

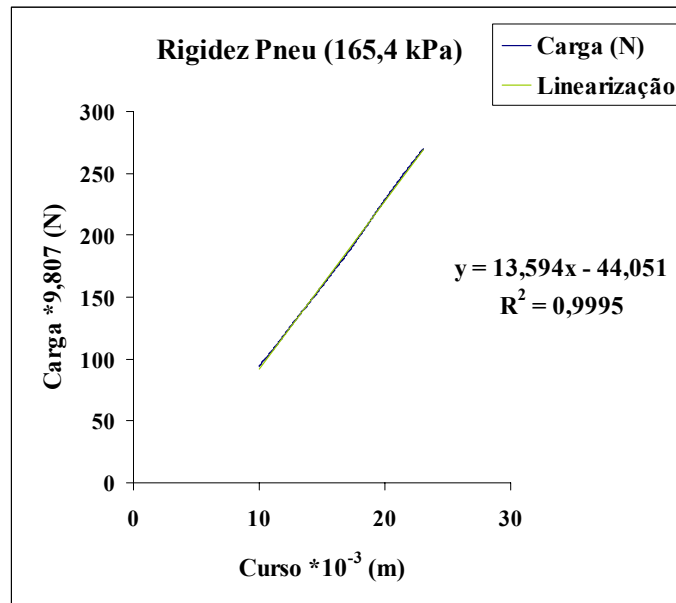


Figura 4.22: Rigidez do pneu - pressão 165,4 kPa.

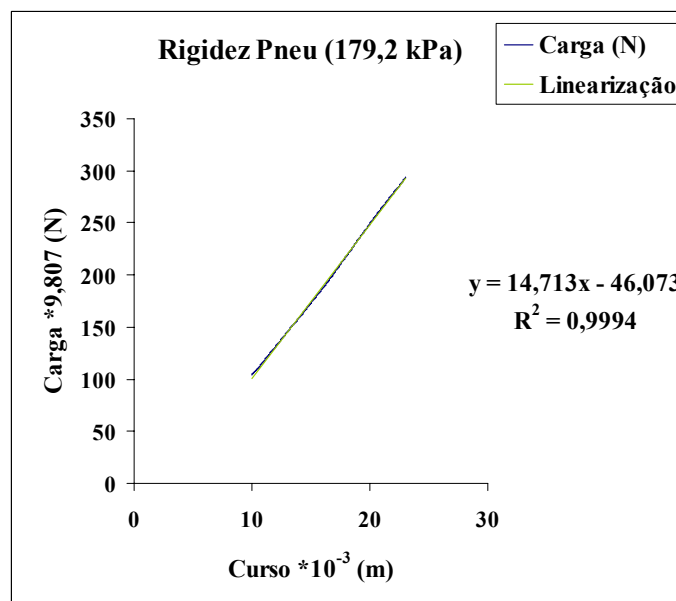


Figura 4.23: Rigidez do pneu - pressão 179,2 kPa.

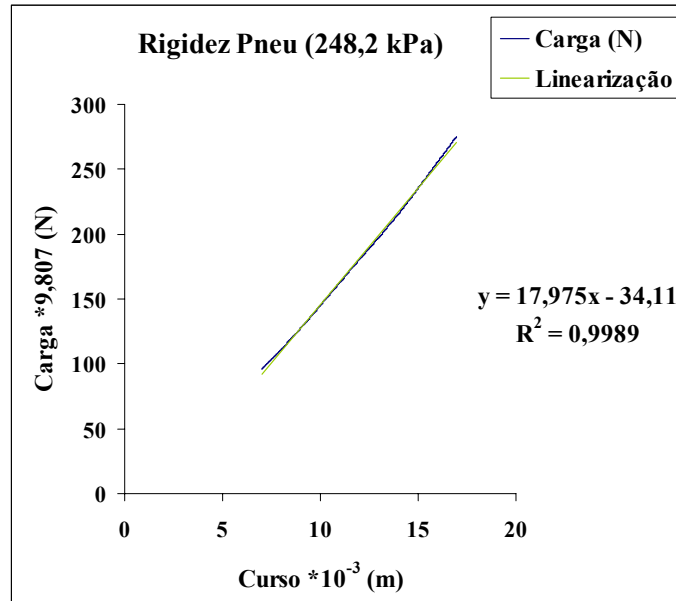


Figura 4.24: Rigidez do pneu - pressão 248,2 kPa.

Os valores médios de rigidez obtidos a partir dos ensaios, para cada valor de pressão, são mostrados logo a seguir:

$$k_{96,5kPa}^p = 8,53 \cdot 10^4 \frac{N}{m}, \quad (4.30)$$

$$k_{137,8kPa}^p = 1,11 \cdot 10^5 \frac{N}{m}, \quad (4.31)$$

$$k_{165,4kPa}^p = 1,33 \cdot 10^5 \frac{N}{m}, \quad (4.32)$$

$$k_{179,2kPa}^p = 1,43 \cdot 10^5 \frac{N}{m} \text{ e} \quad (4.33)$$

$$k_{248,2kPa}^p = 1,74 \cdot 10^5 \frac{N}{m}. \quad (4.34)$$

A Figura 4.25 mostra a aplicação da carga vertical sobre o pneu.



Figura 4.25: Aplicação da carga vertical sobre o pneu.

Os ensaios de caracterização de rigidez das molas, pneu e coeficiente de amortecimento do amortecedor foram realizados na área de Engenharia de Produtos da empresa FIAT AUTOMÓVEIS S/A localizada na cidade de Betim, MG.

## 4.5 Medição das distâncias do CG aos eixos dianteiro e traseiro e distâncias entre rodas de um mesmo eixo do veículo experimental

As distâncias medidas do CG ao eixo dianteiro e traseiro foram respectivamente

$$a_I = 0,980 \text{ m e} \quad (4.35)$$

$$a_{II} = 0,597 \text{ m.} \quad (4.36)$$

As distâncias medidas entre rodas para os eixos dianteiro e traseiro do veículo (bitolas) foram respectivamente

$$t_I = 1,200 \text{ m e} \quad (4.37)$$

$$t_{II} = 1,200 \text{ m.} \quad (4.38)$$

Esses valores foram obtidos a partir de dados de projeto e conferidos experimentalmente.

## 4.6 Levantamento das massas suspensa e não suspensas

### 4.6.1 Massa suspensa

O equipamento utilizado para a medição da massa suspensa do veículo Mini Baja, foi uma balança digital de alta capacidade de carga.

Após a retirada das suspensões e rodas, foi feito o posicionamento do CG referente a massa suspensa do veículo sobre o centro da balança.

O valor total medido da massa suspensa foi de:

$$m = 186,70 \text{ kg.} \quad (4.39)$$

Vale lembrar que este valor, inclui a massa de um saco de areia de 70 kg, com o objetivo de simular a massa de uma pessoa.

As massas associadas aos eixos são funções da posição do centro de gravidade da massa suspensa, sendo calculadas pelas seguintes expressões:

$$m_I = \frac{m a_{II}}{l} \quad (4.40)$$

$$m_{II} = \frac{m a_I}{l} \quad (4.41)$$

sendo:

$m_I$  - A massa suspensa associada ao eixo dianteiro,

$m_{II}$  - A massa suspensa associada ao eixo traseiro e

$l = a_I + a_{II}$ , a distância entre eixos.

A partir da aplicação da equação (4.40), o valor calculado para a massa suspensa do modelo com dois graus de liberdade, que corresponde a metade da massa suspensa sobre o eixo dianteiro é:

$$m_{\frac{1}{4}} = 35,34 \text{ kg.} \quad (4.42)$$



## 4.6.2 Massas não suspensas

Para o levantamento das massas não suspensas, utilizou-se uma balança de alta resolução com a finalidade de obter uma boa precisão durante as medições. Foram pesados também alguns blocos padrões para a verificação correta da calibragem da balança.

As suspensões, montadas com suas respectivas rodas, foram posicionadas sobre o centro da balança e os valores medidos das massas não suspensas foram:

$$m_1 = 14,15 \text{ kg}, \quad (4.43)$$

$$m_2 = 14,10 \text{ kg}, \quad (4.44)$$

$$m_3 = 15,39 \text{ kg e} \quad (4.45)$$

$$m_4 = 15,39 \text{ kg}. \quad (4.46)$$

É importante ressaltar que os índices 1, 2, 3 e 4 indicam a posição do pneu, conforme Figura 3.1.

## 4.7 Medição experimental dos momentos de inércia

Os momentos de inércia em torno do eixo transversal e longitudinal da carroceria do veículo são parâmetros de entrada necessários para a montagem das matrizes de inércia dos modelos teóricos.

O método utilizado para a determinação destas propriedades consiste em balançar o corpo (veículo) em um pêndulo, [3] e [4]. Os momentos de inércia são calculados diretamente dos dados obtidos através do balanço do veículo montado sobre uma plataforma com o eixo o qual o momento de inércia é desejado paralelo ao eixo de oscilação. O momento de inércia da plataforma é então subtraído deste valor, sobrando apenas o momento de inércia do veículo sobre o eixo de oscilação.

Desta forma, o momento de inércia do veículo sobre o eixo de oscilação que atravessa o seu centro de gravidade é igual ao momento de inércia do pêndulo sobre este mesmo eixo, menos o momento de inércia da plataforma, menos o momento de inércia adicional devido o deslocamento do centro de gravidade do veículo em relação ao eixo de oscilação.

$$I = \frac{W_1 T_1^2 L_1}{4\pi^2} - \frac{W_2 T_2^2 L_2}{4\pi^2} - \frac{W_3 L_3^2}{g}. \quad (4.47)$$

Na equação (4.47) tem-se que:

$$L_1 = \frac{W_2 L_2 + W_3 L_3}{W_1} e \quad (4.48)$$

$$W_1 = W_2 + W_3 \quad (4.49)$$

sendo:

$I$  - o momento de inércia do veículo sobre o eixo que atravessa o centro de gravidade e paralelo ao eixo de oscilação,

$W_1$  - o peso total do veículo mais a plataforma,

$W_2$  - o peso da plataforma,

$W_3$  - o peso do veículo,

$T_1$  - o período medido do veículo sobre a plataforma quando balançados,

$T_2$  - o período medido com o balanço apenas da plataforma,

$L_1$  - a distância do eixo de oscilação ao centro de gravidade do conjunto veículo mais plataforma,

$L_2$  - a distância do eixo de oscilação ao centro de gravidade da plataforma

$L_3$  - a distância do eixo de oscilação ao centro de gravidade do veículo e

$g$  - a aceleração da gravidade.

A plataforma foi construída de forma que as dimensões e pesos dos componentes fossem facilmente calculados analiticamente, permitindo com certa precisão a localização do seu centro de gravidade.

Para a construção da plataforma, foram utilizados os seguintes materiais:

- Dois perfis U 6 x 2" x 3 m,
- Quatro perfis I 3 x 2 $\frac{3}{8}$ " x 1,396 m
- Um compensado de madeira 3 x 1,375 x 0,015 m.

A Figura 4.26 mostra o veículo Mini Baja posicionado sobre a plataforma construída.

A correta localização do centro de gravidade (CG) do veículo é de fundamental importância, pois os cálculos dos momentos de inércia são feitos em relação aos eixos que passam por este ponto.

O método para a localização do CG do veículo Mini Baja baseia-se no princípio que o centro de gravidade de um corpo suspenso por um único ponto, está contido na linha vertical que passa pelo ponto de suspensão.

A forma de determinação do centro de gravidade consiste em suspender o veículo sucessivamente em dois pontos distintos da estrutura. Para cada suspensão, uma linha vertical é traçada na lateral do veículo a partir do ponto de fixação. A intersecção de duas linhas verticais traçadas define a posição vertical e longitudinal do centro de gravidade do veículo.

Para a localização do centro de gravidade da massa suspensa do veículo Mini Baja, utilizou-se uma ponte rolante com capacidade de cinco toneladas. Inicialmente as massas não suspensas do veículo (rodas, molas, amortecedores e braços da suspensão) foram retiradas e apenas a gaiola com o motor e seus componentes foram suspensos através de um cabo de aço preso ao gancho da ponte. Um saco de areia com 70 kg foi colocado no interior da gaiola com o objetivo de simular o peso de uma pessoa.

Com a utilização de um prumo foi possível a traçagem das linhas verticais a partir dos pontos nos quais o cabo de aço estava em contato com o gancho da ponte.

Para verificar o ponto de intersecção das linhas verticais, utilizou-se também um Teodolito. Com a ajuda de um técnico especializado, foi conferida a intersecção das linhas, assegurando desta forma o correto posicionamento do centro de gravidade do veículo.

Após a determinação do centro de gravidade do veículo e da plataforma, foi necessário a construção de um pórtico, para a realização dos ensaios de medição dos momentos de inércia, como pode ser visto na Figura 4.27.

A fixação da plataforma no pórtico foi feita com cabos de aço, passando através de olhais rosqueados na trave superior do pórtico e presos a esticadores enganchados nas extremidades da estrutura, conforme Figura 4.26. Os esticadores possibilitaram um ajuste fino durante a tarefa de nivelamento da plataforma.

Para a medição do período de oscilação, utilizou-se um sensor óptico de mouse de computador ligado a um osciloscópio digital e um cartão telefônico colado em uma das extremidades da plataforma, Figura 4.30. A interrupção dos sinais gerados no sensor do mouse devido a passagem do cartão telefônico, resultava no aparecimento de picos de onda no osciloscópio. A medição do período de uma oscilação completa do pêndulo foi obtido então, através de picos consecutivos conforme Figura 4.31.

Foram feitas medições em torno do eixo transversal e longitudinal, Figuras 4.28 e 4.29 respectivamente.

Da medição do momento de inércia em torno do eixo transversal do veículo, foram obtidas as seguintes propriedades:

$$W_1 = 3646,27 \text{ N}, \quad (4.50)$$

$$W_2 = 1814,75 \text{ N}, \quad (4.51)$$

$$W_3 = 1831,52 \text{ N}, \quad (4.52)$$

$$L_1 = 1,66 \text{ m}, \quad (4.53)$$

$$L_2 = 1,92 \text{ m}, \quad (4.54)$$

$$L_3 = 1,39 \text{ m}, \quad (4.55)$$

$$T_1 = 2,86 \text{ s e} \quad (4.56)$$

$$T_2 = 3,08 \text{ s}. \quad (4.57)$$

Com estes dados o momento de inércia em torno do eixo transversal do veículo é:

$$I_y = 57,14 \text{ kg m}^2. \quad (4.58)$$

Da medição do momento de inércia em torno do eixo longitudinal do veículo, obteve-se as seguintes propriedades:

$$W_1 = 3646,27 \text{ N}, \quad (4.59)$$

$$W_2 = 1814,75 \text{ N}, \quad (4.60)$$

$$W_3 = 1831,52 \text{ N}, \quad (4.61)$$

$$L_1 = 1,69 \text{ m}, \quad (4.62)$$

$$L_2 = 1,95 \text{ m}, \quad (4.63)$$

$$L_3 = 1,43 \text{ m}, \quad (4.64)$$

$$T_1 = 2,71 \text{ s e} \quad (4.65)$$

$$T_2 = 2,90 \text{ s} \quad (4.66)$$

Com estes dados o momento de inércia em torno do eixo longitudinal do veículo é:

$$I_x = 12,96 \text{ kg m}^2. \quad (4.67)$$

Os períodos definidos para cada medição, correspondem a uma média de aproximadamente cinquenta (50) valores medidos no osciloscópio.

É importante ressaltar que as oscilações do pêndulo devem ter pequenas amplitudes, pois a formulação que rege o comportamento pendular é válida somente para a seguinte aproximação:  $\tan \gamma = \sin \gamma = \gamma$ , sendo  $\gamma$  a metade do ângulo de oscilação.

As fotos dos experimentos para determinação dos momentos de inércia em torno do eixo longitudinal e transversal do veículo são mostradas nas Figuras 4.26 a 4.31.



Figura 4.26: Veículo Mini Baja posicionado sobre a plataforma de balanço.



Figura 4.27: Pórtico construído para a realização do ensaio.



Figura 4.28: Medição do momento de inércia em torno do eixo transversal.



Figura 4.29: Medição do momento de inércia em torno do eixo longitudinal.



Figura 4.30: Sensor de mouse utilizado para a medição do período de oscilação.

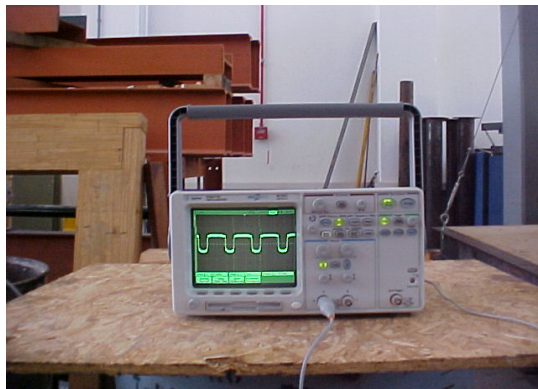


Figura 4.31: Osciloscópio digital utilizado para a visualização do período de oscilação.

# Capítulo 5

## Validação Experimental dos Modelos Teóricos

### 5.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o ensaio experimental feito no veículo Mini Baja para validação dos modelos teóricos.

A descrição detalhada a respeito da montagem e realização deste ensaio é feita no item que segue, sendo as respostas experimentais apresentadas no final deste capítulo.

### 5.2 Desenvolvimento do ensaio experimental

Para a validação dos modelos teóricos através do modelo experimental, foi necessário a medição de valores de acelerações em alguns pontos do veículo Mini Baja, correspondentes aos centros de massa dos subsistemas (carroceria, eixo dianteiro e traseiro) que compõem os modelos teóricos.

O ensaio para o levantamento das acelerações foi realizado através de um Shaker, marca Bruel & Kjaer, modelo 4812 e capacidade máxima de carga de 392,28 N, com o objetivo de excitar a roda dianteira esquerda do veículo, Figura 5.1. Foi necessário, a elevação do veículo em relação ao solo, devido a altura física do Shaker e a construção de um dispositivo que permitisse que a roda do veículo excitada fosse apoiada e tivesse a liberdade de deslocamento vertical tanto para cima como para baixo, a partir de uma posição média.

Para a construção deste dispositivo, foi utilizada uma chapa de 3 mm de espessura, fixada sobre duas molas helicoidais, conforme Figura 5.2. Sob a chapa foram soldados dois perfis T com objetivo de evitar a deflexão deste componente quando solicitado pelo carregamento da roda.





Figura 5.1: Montagem do ensaio experimental.



Figura 5.2: Dispositivo para aplicação de carga utilizado no ensaio experimental.

A transmissão da excitação entre a base do Shaker e a chapa localizada sob a roda do veículo foi feita através de uma haste, construída a partir de um esticador de cabo de aço, denominada Stinger, como pode ser visto nas Figuras 5.3 e 5.4.



Figura 5.3: Stinger construído a partir de um esticador de cabo de aço.

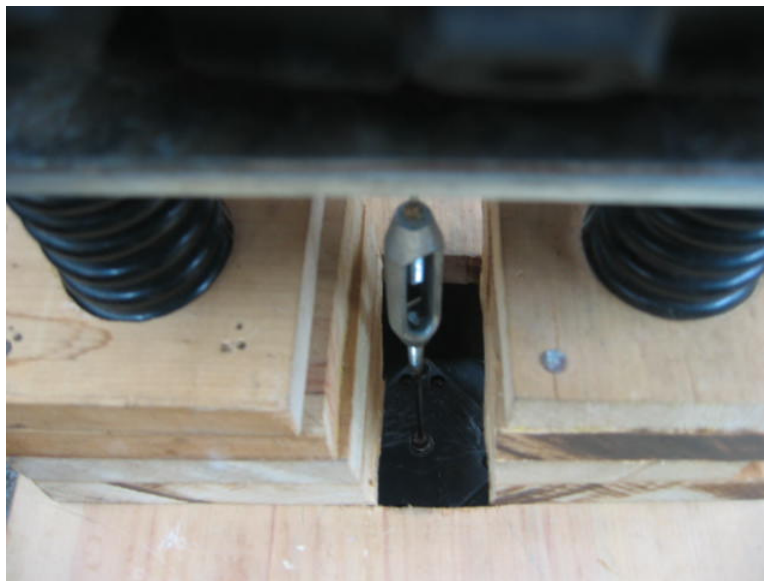


Figura 5.4: União entre a base do shaker e o dispositivo de excitação através do stinger.

Houve uma grande limitação do ensaio em relação ao Shaker, devido o grande peso da estrutura do veículo e a baixa capacidade de carregamento do excitador. Desta forma, a definição dos parâmetros de entrada para a geração de sinais no equipamento e a quantidade de pontos a serem medidos no veículo foram restringidos. O sinal gerado durante o ensaio foi uma função senoidal com frequência de 125 Hz e os pontos de medição experimental de aceleração foram as quatro rodas do veículo.

Para a execução do ensaio foram utilizados três acelerômetros, os quais possibilitaram o levantamento de acelerações no Shaker, na chapa do dispositivo experimental de excitação e em uma roda do veículo, de forma simultânea. Assim, foram realizados no total, quatro ensaios experimentais para avaliação de todas as rodas do veículo Mini Baja, Figura 5.5.



Figura 5.5: Colocação do acelerômetro na roda traseira direita.



Figura 5.6: Equipamento de aquisição de dados.

A aquisição de dados foi feita através do analisador HP 3566A, [25] e [26], Figura 5.6,

sendo necessário a definição de algumas variáveis como o número de pontos de aquisição,  $N_p$  e a máxima frequência do espectro, denominada frequência amostral,  $F_a$ .

O número de pontos de aquisição,  $N_p$  e a frequência amostral,  $F_a$ , são definidos de acordo com as seguintes formulações [16]:

Tempo de aquisição do evento:

$$T_a = \frac{N_p}{F_a} [s] \quad (5.1)$$

Espaçamento entre pontos no tempo:

$$\Delta t = \frac{1}{F_a} [s] \quad (5.2)$$

Resolução espectral:

$$\Delta f = \frac{F_a}{N_p} [Hz] \quad (5.3)$$

O número de pontos e a frequência amostral durante a aquisição de dados foram 3200 e 800 Hz, respectivamente. Estes valores foram escolhidos com o objetivo de obter um tempo de aquisição suficiente para a visualização geral dos dados da resposta.

Para a avaliação e posterior comparação dos resultados experimentais e teóricos, foi aplicada a propriedade da transformada da derivada de Fourier nas respostas de aceleração no tempo, possibilitando desta forma, a obtenção dos espectros de frequência de deslocamento referentes a chapa e as rodas.

A propriedade da transformada da derivada de Fourier [15], é dada por:

$$\ddot{X}(\Omega) = -\Omega^2 X(\Omega) \quad (5.4)$$

sendo:

$\Omega$  - a frequência circular dada em  $\frac{rad}{s}$ ,

$X(\Omega)$  - a amplitude de deslocamento no domínio da frequência e

$\ddot{X}(\Omega)$  - a amplitude da aceleração no domínio da frequência.

O espectro de frequência ou espectro de Fourier é a representação dos módulos das amplitudes (magnitudes lineares) da resposta de um sistema no domínio da frequência. A união das magnitudes lineares aos correspondentes valores no eixo da frequência dão origem as chamadas linhas espectrais.

Os espectros de frequência permitem visualizar em que frequências os sinais no tempo carregam mais energia e identificar separadamente a contribuição de cada componente de frequência de excitação nas respostas dos sistemas, [15] e [16].

No item a seguir, são apresentados os espectros de frequência experimentais obtidos a partir da medição de acelerações no dispositivo de excitação, mostrado na Figura 5.2 e nas rodas do veículo Mini Baja. É importante ressaltar que durante a medição de acelerações em cada roda do veículo, foram levantadas simultaneamente respostas na chapa do dispositivo de excitação.

### 5.3 Espectros de frequência experimentais

As Figuras 5.7 a 5.10 mostram os espectros de frequência de deslocamento normalizados, obtidos a partir das acelerações medidas na chapa do dispositivo experimental, Figura 5.2, durante a avaliação de cada roda do veículo.

A normalização é feita com a divisão das magnitudes lineares dos espectros pelas respectivas magnitudes lineares correspondentes a frequência de 125 Hz.

As amplitudes do dispositivo experimental (chapa) obtidas durante a avaliação das rodas do veículo são apresentadas a seguir:

Magnitudes lineares correspondentes à frequência de 125 Hz (m)	
Espectro de frequência da chapa - avaliação roda 1	$3,96 \cdot 10^{-6}$
Espectro de frequência da chapa - avaliação roda 2	$3,97 \cdot 10^{-6}$
Espectro de frequência da chapa - avaliação roda 3	$3,95 \cdot 10^{-6}$
Espectro de frequência da chapa - avaliação roda 4	$3,94 \cdot 10^{-6}$

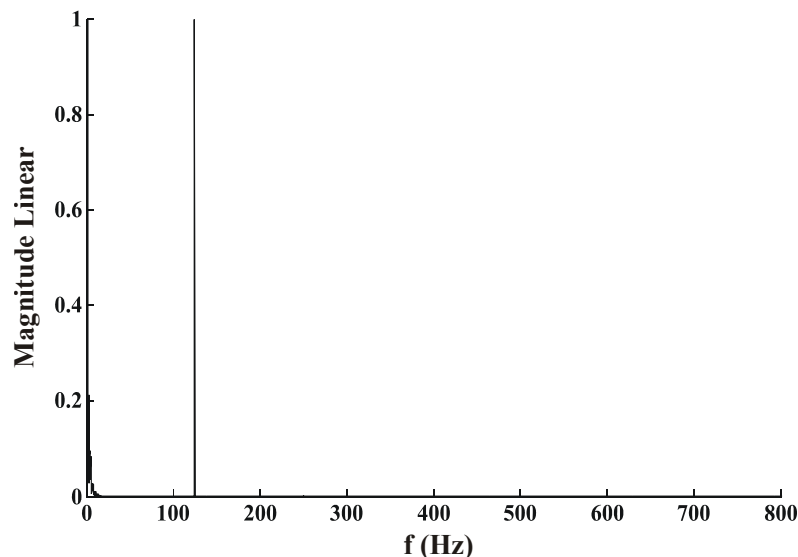


Figura 5.7: Espectro de frequência da chapa referente a medição experimental de acelerações na roda 1.

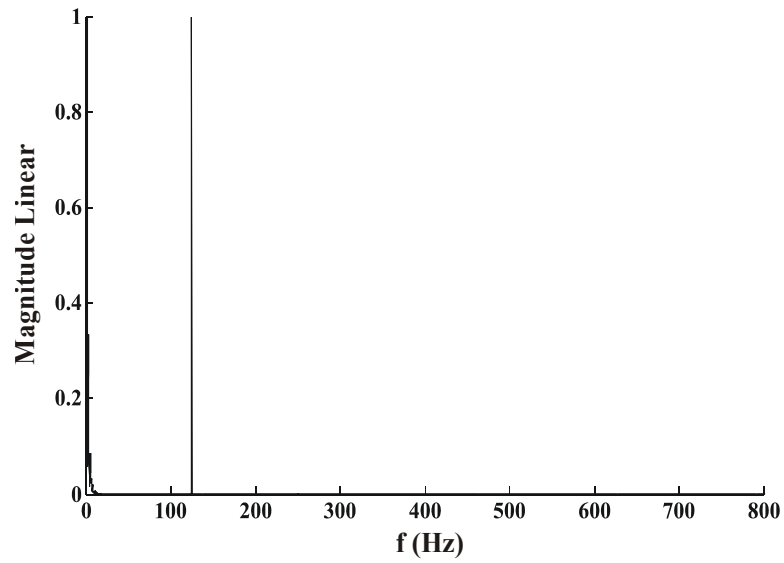


Figura 5.8: Espectro de frequência da chapa referente a medição experimental de acelerações na roda 2.

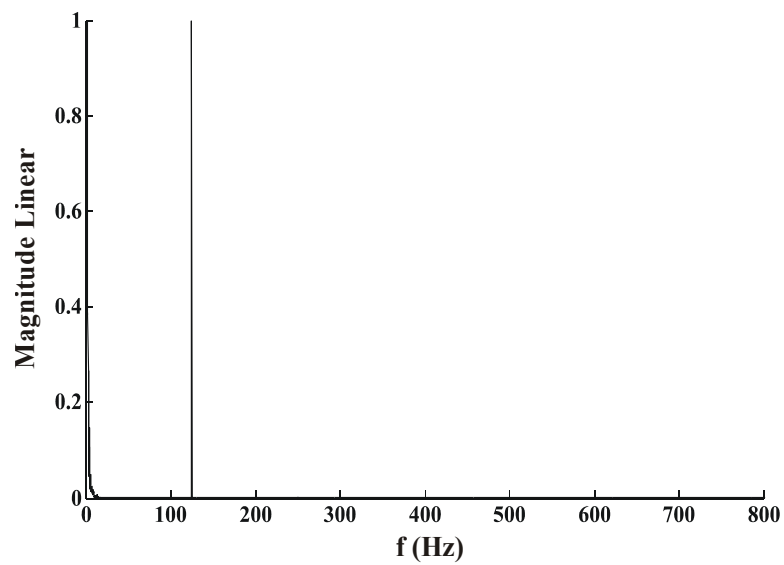


Figura 5.9: Espectro de frequência da chapa referente a medição experimental de acelerações na roda 3.

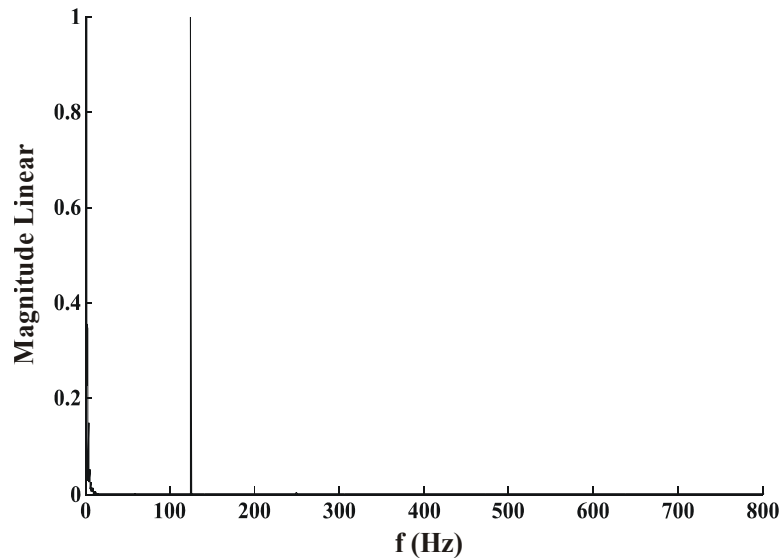


Figura 5.10: Espectro de frequência da chapa referente a medição experimental de acelerações na roda 4.

Os espectros de frequência da chapa do dispositivo, referentes as medições de aceleração nas quatro rodas do veículo, apresentam picos na frequência de 125 Hz, valor este, que corresponde a frequência de excitação da função senoidal definida para a realização do ensaio. O valor médio da magnitude linear para estes espectros de frequência foi igual a  $3,96 \cdot 10^{-6}$  m. Uma observação extremamente importante é que o analisador plota apenas o espectro positivo de frequência, sendo necessário a duplicação das magnitudes lineares para a correta representação da resposta em frequência no domínio do tempo e vice versa.

O principal objetivo da avaliação dos espectros de deslocamento da chapa, Figura 5.2, é obter o valor de amplitude de excitação para os modelos teóricos, de forma que estes possam ser comparados corretamente com o modelo experimental.

As Figuras 5.11 a 5.14 apresentam gráficos com faixas de frequência a) entre 0 e 150 Hz, b) entre 150 e 300 Hz, c) entre 300 e 450 Hz, d) entre 450 e 600 Hz e e) entre 600 e 800 Hz, para melhor visualização dos espectros de deslocamento normalizados em relação às respectivas magnitudes lineares de 125 Hz, os quais foram obtidos a partir das respostas de aceleração medidas experimentalmente nas quatro rodas do veículo Mini Baja.

Magnitudes lineares correspondentes à frequência de 125 Hz (m)	
Espectro de frequência - Roda 1	$1,52 \cdot 10^{-7}$
Espectro de frequência - Roda 2	$2,98 \cdot 10^{-8}$
Espectro de frequência - Roda 3	$1,33 \cdot 10^{-8}$
Espectro de frequência - Roda 4	$6,03 \cdot 10^{-9}$

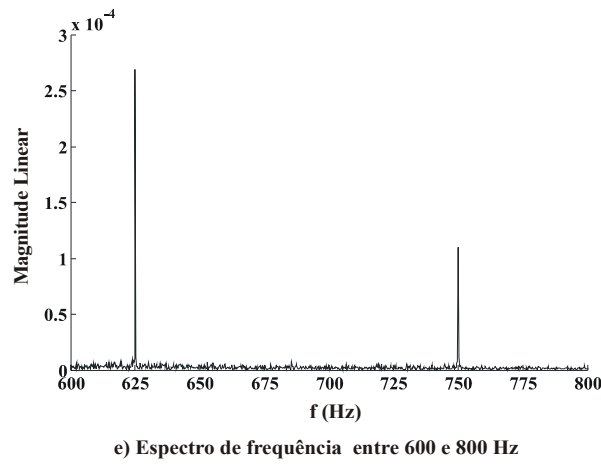
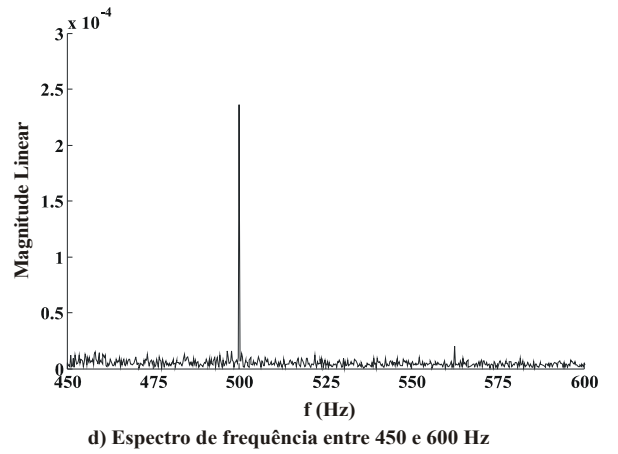
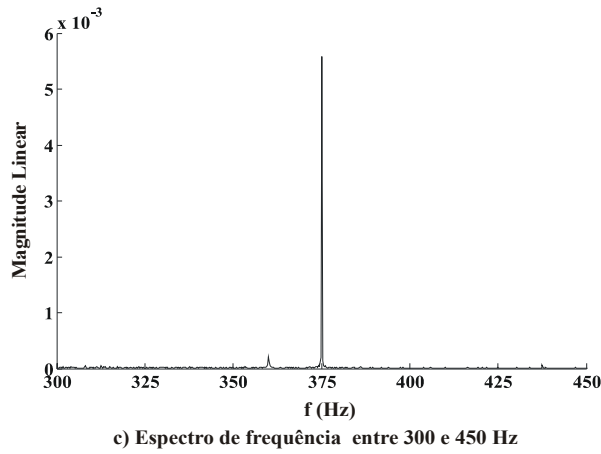
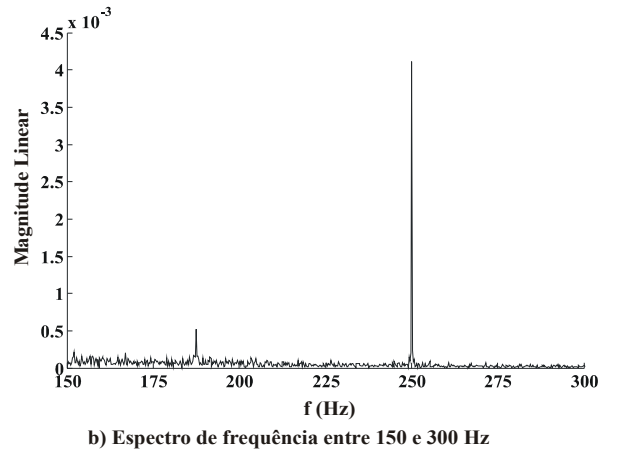
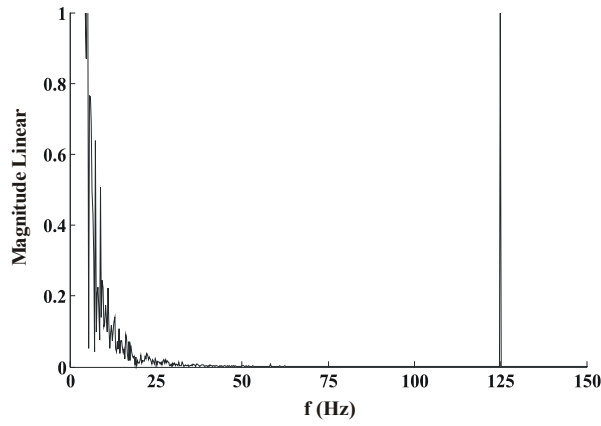


Figura 5.11: Espectro de frequência - Roda 1.



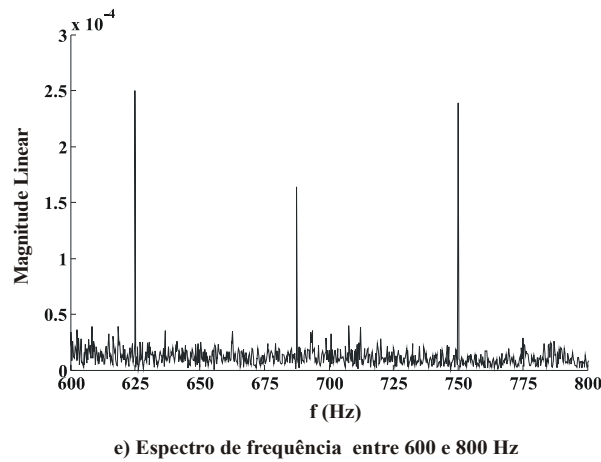
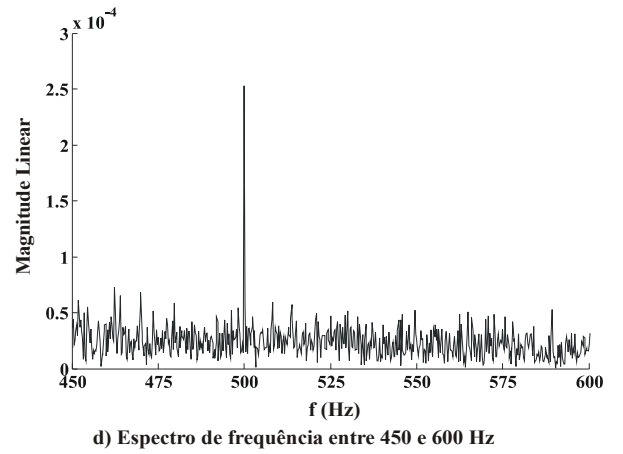
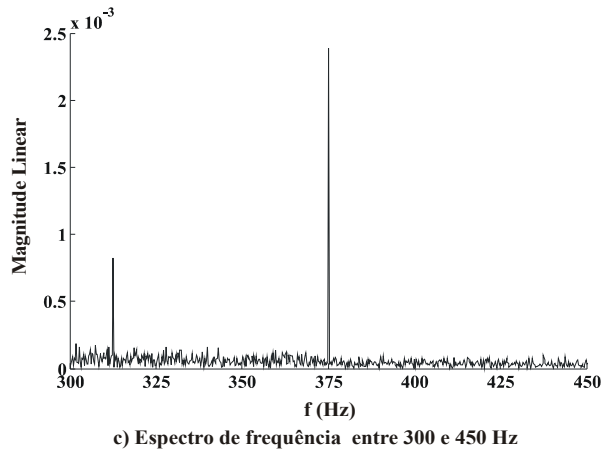
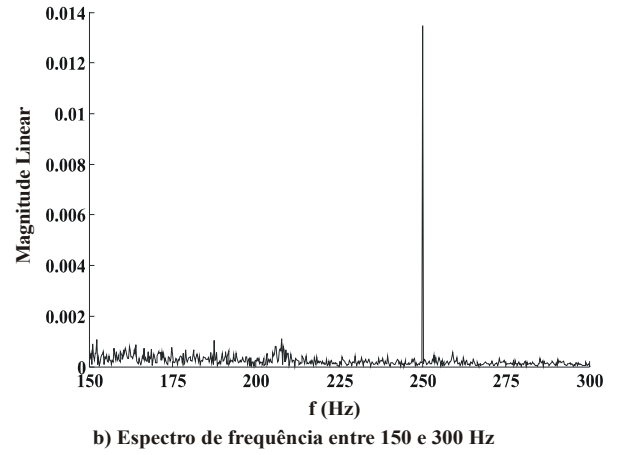
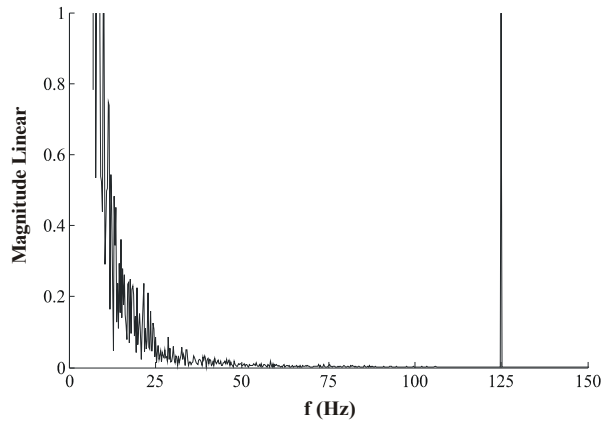


Figura 5.12: Espectro de frequência - Roda 2.

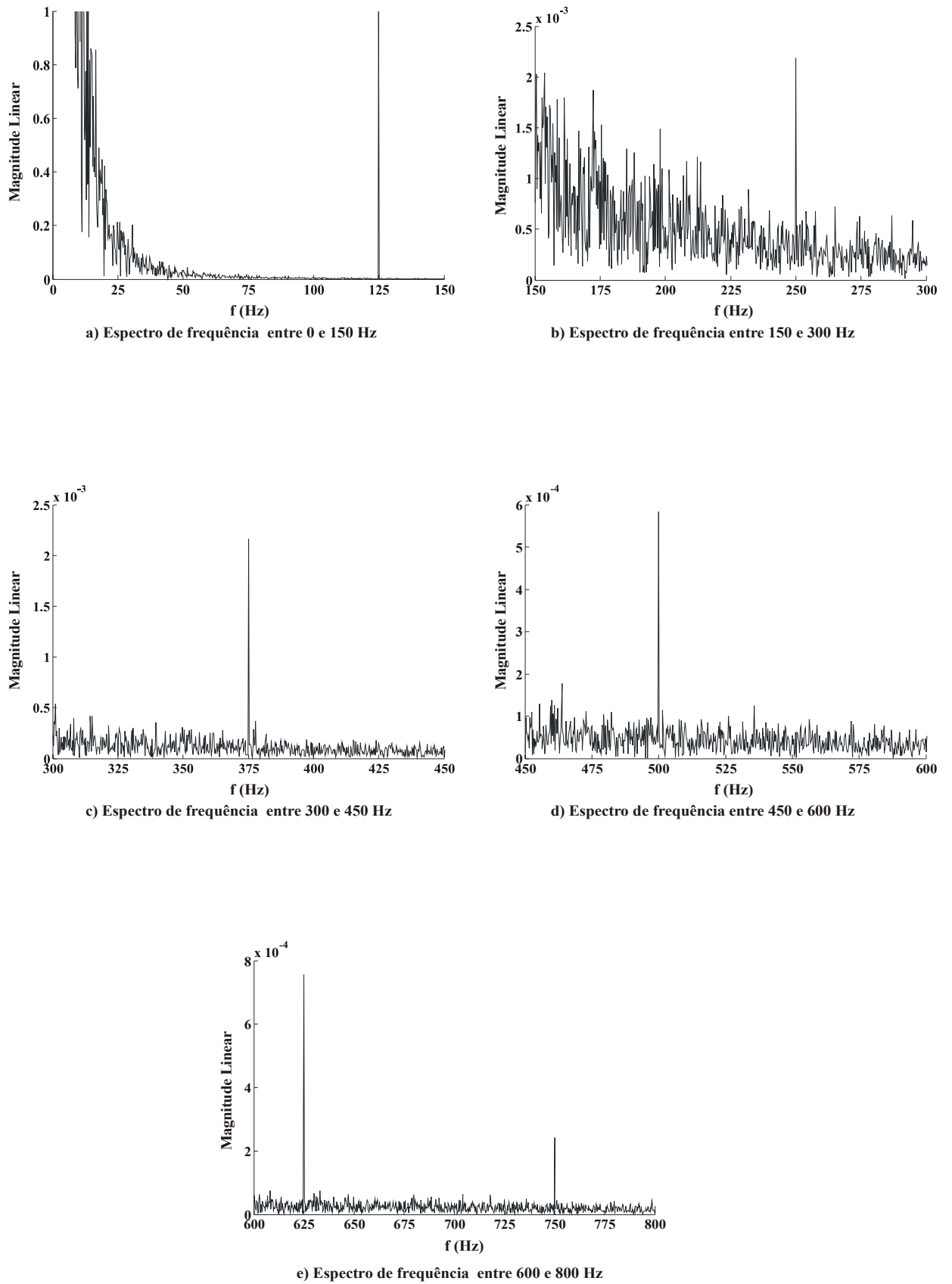


Figura 5.13: Espectro de frequência - Roda 3.

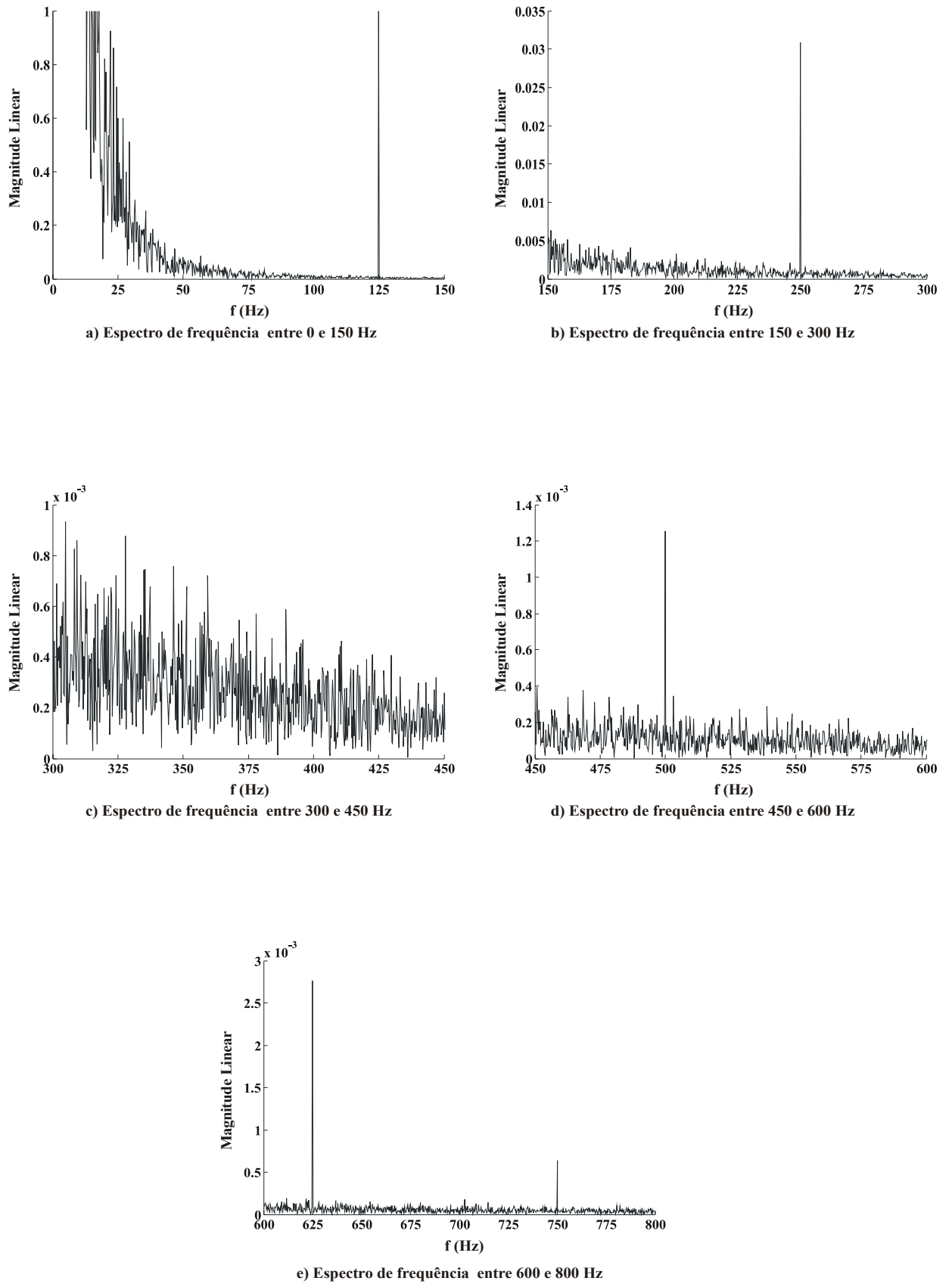


Figura 5.14: Espectro de frequência - Roda 4.

Os espectros de frequência das Figuras 5.11 a 5.14 mostram a distribuição de magnitudes lineares de deslocamento nas frequências múltiplas inteiras (harmônicas) da frequência fundamental de 125 Hz, juntamente com a presença de ruídos de alta frequência caracterizados pelos picos menores espalhados ao longo de todo o espectro da resposta, originados possivelmente pelo tipo de montagem utilizado durante o ensaio e fatores externos, como ruídos gerados por outros tipos de equipamentos.

Observa-se que o gráfico c) da Figura 5.14 não apresenta pico na frequência de 375 Hz, conforme esperado. A verificação deste fato deveria ser feita através da repetibilidade do ensaio, o que não foi possível devido as restrições do equipamento de excitação, como citado anteriormente.

A existência de picos maiores nas frequências harmônicas se deve ao fato do veículo ser um sistema não linear. Um dos fatores responsáveis pela não linearidade do sistema é o comportamento mecânico do amortecedor (simples efeito), diferenciado para cargas de compressão e distensão, como foi visto no Capítulo 4.

# Capítulo 6

## Aplicação dos Modelos Lineares

### 6.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentadas as respostas dos modelos lineares, com dois e sete graus de liberdade, obtidas através da aplicação do método analítico e o método explícito de integração direta no tempo, sendo feito posteriormente as superposições destes resultados. O objetivo principal é verificar a convergência entre as soluções, qualificando desta forma, a solução numérica do método explícito de integração direta nos modelos com 2 e 7 graus de liberdade.

Serão analisados também os espectros de frequência de deslocamento referentes as massas não suspensas (rodas) dos modelos matemáticos lineares, para que no Capítulo 8 sejam feitas comparações destes resultados com os espectros de frequência levantados experimentalmente no Capítulo 5.

### 6.2 Modelo linear com dois graus de liberdade

Para a aplicação do modelo linear com dois graus de liberdade são utilizadas as propriedades levantadas experimentalmente no Capítulo 4, e repetidas a seguir:

$$k_1 = 6,54 \cdot 10^3 \frac{N}{m}, \quad (6.1)$$

$$c_1 = 3,89 \cdot 10^3 \frac{Ns}{m}, \quad (6.2)$$

$$m_{\frac{1}{4}} = 35,34 \text{ kg}, \quad (6.3)$$

$$m_1 = 14,15 \text{ kg}, \quad (6.4)$$

$$k_1^p = 1,74 \cdot 10^5 \frac{N}{m} \quad (6.5)$$

sendo os deslocamentos e velocidades iniciais dadas por:

$$\mathbf{q}(0) = 0 \text{ e} \quad (6.6)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}(0) = 0 \quad (6.7)$$

respectivamente.

A rigidez do pneu  $k_1^p$ , é o valor médio referente a pressão de 248,2 kPa e o coeficiente de amortecimento,  $c_1$ , corresponde ao comportamento mecânico do amortecedor quando submetido à cargas de tração, conforme o tratamento feito no Capítulo 4.

É importante ressaltar que a massa não suspensa para o modelo com dois graus de liberdade é referente a roda dianteira esquerda do veículo Mini Baja, pelo fato da excitação durante o ensaio experimental, ter sido aplicada sob esta roda. A posição da roda dianteira esquerda para os modelos teóricos é dada pelo ponto 1, conforme Figura 3.1.

O modelos de carregamento adotados neste desenvolvimento são definidos pelas seguintes funções de excitação:

- função de excitação do tipo rampa e
- função de excitação senoidal.

O detalhamento a respeito destas funções são feitos nos itens logo a seguir.

A comparação entre os modelos teóricos e experimental se aplica apenas aos casos em que a excitação é senoidal, já que esta é a função de excitação utilizada para a obtenção dos espectros de frequência experimentais.

### 6.3 Modelo linear com dois graus de liberdade e função de excitação do tipo rampa.

A construção deste tipo de excitação pode ser feita através da introdução de uma função denominada **função degrau unitário** [21]. Esta função, simbolizada por  $u_c$  é definida por:

$$u_c(t) = 0, \quad t < c \quad (6.8)$$

$$u_c(t) = 1, \quad t \geq c \quad (6.9)$$

para  $c \geq 0$ .

A utilização da função degrau unitário é especialmente importante devido suas propriedades que possibilitam a aplicação da transformada de Laplace. A definição da função rampa em termos da função degrau unitário para o modelo proposto é dada por:

$$f(t) = \frac{P_o}{Temp}(t - u_{Temp}(t - Temp)) \quad (6.10)$$

sendo definidas as seguintes propriedades:

$$P_o = 0,10 \text{ m}, \quad (6.11)$$

$$Temp = 2 \text{ s e} \quad (6.12)$$

tempo inicial e final de análise de:

$$t_i = 0 \text{ s e} \quad (6.13)$$

$$t_f = 20 \text{ s} \quad (6.14)$$

respectivamente.

A Figura 6.1 mostra a função de excitação do tipo rampa dada pela expressão (6.10).

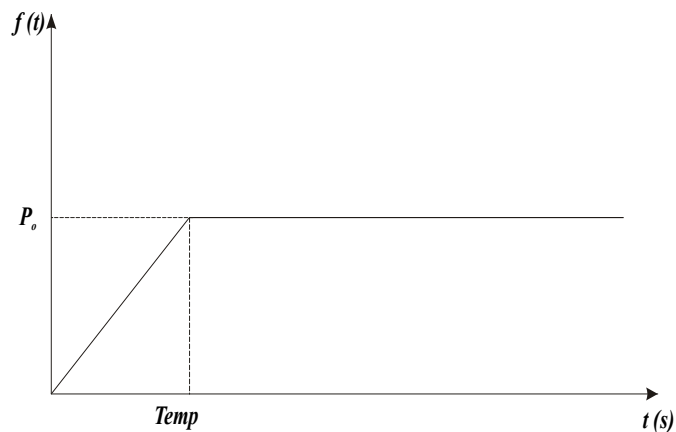


Figura 6.1: Função de excitação do tipo rampa

A seguir, são apresentadas aplicações dos métodos de solução analítica e integração direta no tempo no modelo linear com dois graus de liberdade e função de excitação do tipo rampa, sendo feito posteriormente a superposição destes resultados.

### 6.3.1 Solução analítica

Para o problema com a função de excitação dada pela equação (6.10), a resposta do sistema no domínio de Laplace, representado por  $s$ , é definida por:

$$\mathbf{Q}(s) = H(s)k_1^p \frac{Po}{Temp} (1 - e^{-(Temp)s}) \quad (6.15)$$

sendo:

$\mathbf{Q}(s)$  - o vetor de coordenadas generalizadas de deslocamento no domínio de Laplace,

$H(s) = \frac{\mathbf{\Lambda}(s)}{s^2}$ , o termo associado com a matriz receptância  $\mathbf{\Lambda}(s)$  e

$k_1^p$  - a rigidez do pneu referente a posição do ponto 1, conforme Figura 3.1.

A transformada inversa de Laplace, fornece a resposta no domínio do tempo

$$\mathbf{q}(t) = k_1^p \frac{Po}{Temp} [h(t) - u_{Temp}(t)h(t - Temp)] \quad (6.16)$$

sendo:

$\mathbf{q}(t)$  - o vetor de coordenadas generalizadas de deslocamento no domínio do tempo, definido pela equação (3.2),

$u_{Temp}$  - a função degrau unitária definida nas equações (6.8) e (6.9) e

$h(t)$  - a transformada inversa de Laplace ( $L^{-1}$ ) do termo  $H(s)$ .

A resposta analítica referente a massa não suspensa do modelo linear com dois graus de liberdade e função de excitação do tipo rampa é apresentada na Figura 6.2:

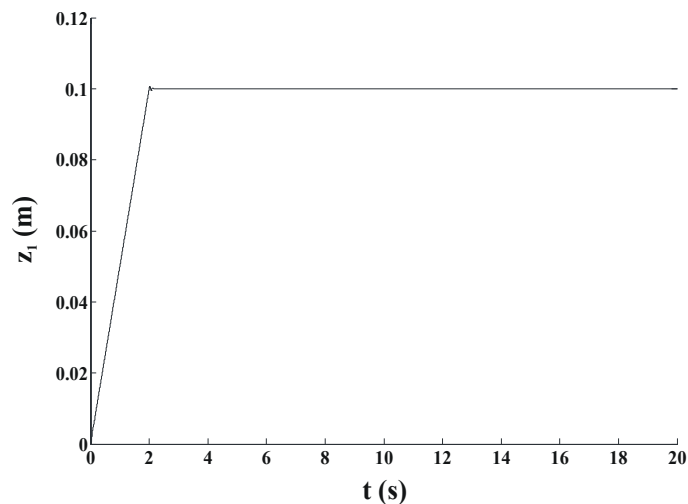


Figura 6.2: Deslocamento vertical - Roda 1.

A seguir é apresentada a mesma solução através da utilização do método explícito de integração direta no tempo.



### 6.3.2 Solução através do método explícito de integração direta no tempo

A resposta referente a massa não suspensa do modelo linear com dois graus de liberdade e função de excitação do tipo rampa, obtida através da aplicação do método explícito de integração direta no tempo, é apresentada na Figura 6.3:

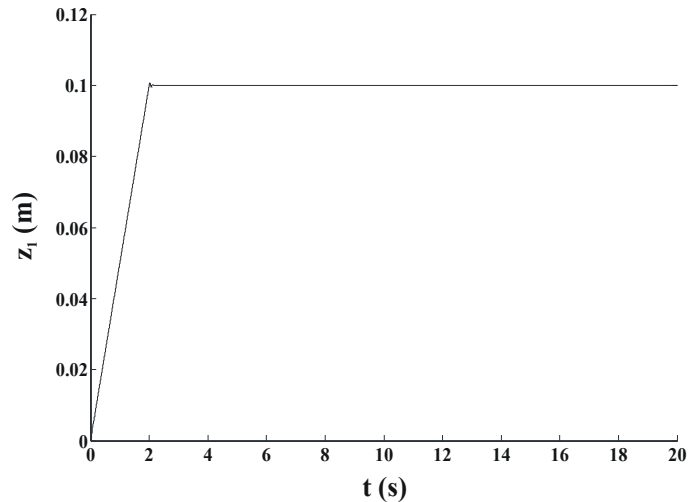


Figura 6.3: Deslocamento vertical - Roda 1.

É possível observar a partir das Figuras 6.2 e 6.3 que o deslocamento vertical da massa não suspensa do modelo com dois graus de liberdade apresenta um comportamento bastante próximo da função de excitação aplicada, sendo verificada a presença de pequenas oscilações no instante de 2 s, devido alterações do próprio perfil de carregamento.

Com o objetivo de demonstrar a convergência das soluções obtidas através dos métodos analítico e integração direta no tempo, será feito no item a seguir a superposição das curvas referentes as Figuras 6.2 e 6.3, no intervalo de tempo de análise entre 2 e 2,25 s, possibilitando desta forma a visualização e avaliação mais adequada dos resultados.

### 6.3.3 Superposição das curvas

A Figura 6.4 mostra a superposição das curvas obtidas pelos dois métodos de solução empregados, no intervalo de tempo de análise entre 2 e 2,25 s.

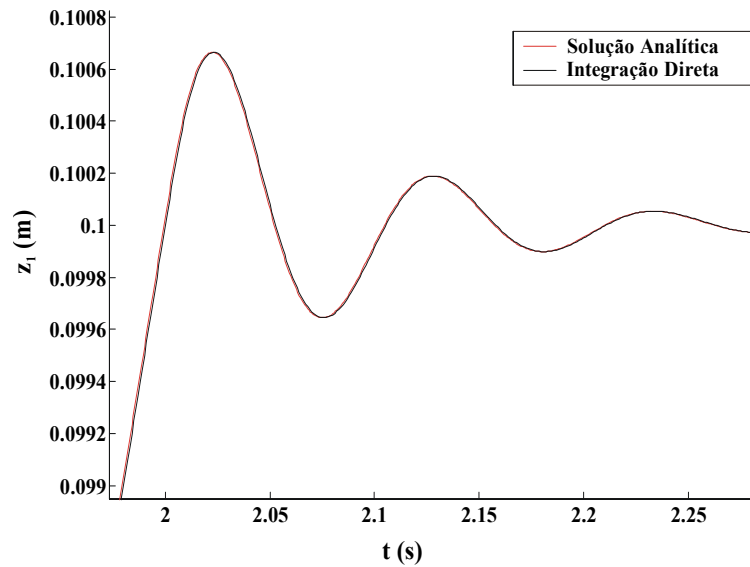


Figura 6.4: Superposição das curvas - Intervalo entre 2 e 2,25 s.

Conforme é mostrado na Figura 6.4, as respostas analítica e numérica, obtida a partir do método de integração direta, são bastante aproximadas e possuem praticamente o mesmo comportamento.

## 6.4 Modelo linear com dois graus de liberdade e função de excitação senoidal

A definição do modelo de carregamento de uma função senoidal é feita da seguinte forma:

$$f(t) = P_o \sin(2\pi ft) \quad (6.17)$$

sendo:

$f$  a frequência em Hz,

$P_o$  a amplitude da função senoidal em m e

$t$  o tempo de análise em s.

Na Figura 6.5 é mostrado a função de excitação dada pela expressão (6.17).

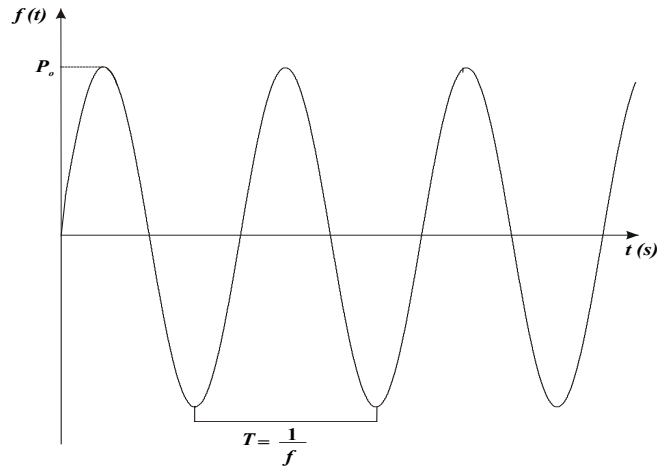


Figura 6.5: Função de excitação do tipo senoidal

Para este modelo de carregamento são definidas as seguintes propriedades:

$$f = 125 \text{ Hz}, \quad (6.18)$$

$$P_o = 7,92 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad (6.19)$$

$$t_i = 0 \text{ s e} \quad (6.20)$$

$$t_f = 10 \text{ s} \quad (6.21)$$

sendo  $t_i$  e  $t_f$  o tempo inicial e final de análise, respectivamente.

A frequência de 125 Hz, corresponde a frequência de excitação utilizada no ensaio experimental do veículo Mini Baja, Capítulo 5.

A amplitude  $P_o$  da excitação no domínio do tempo, é definida pela duplicação do valor médio das magnitudes lineares dos espectros de deslocamento, referentes ao dispositivo utilizado para excitar o veículo Mini Baja, mostrado na Figura 5.2 do Capítulo 5.

Como observado no Capítulo 5, o analisador plota apenas o espectro positivo de frequência, sendo necessário a duplicação das magnitudes lineares para a correta representação da resposta em frequência no domínio do tempo e vice versa.

A seguir, são apresentadas as soluções obtidas pela aplicação dos métodos analítico e integração direta no tempo, bem como a superposição destes resultados.

### 6.4.1 Solução analítica

Para o caso em que o modelo de excitação é definido através de uma função senoidal, Figura 6.5, a resposta do sistema no domínio de Laplace, representado por  $s$ , é dada por:

$$\mathbf{Q}(s) = H(s)k_1^p P o \Omega \quad (6.22)$$

sendo:

$\Omega$  - frequência circular dada em  $\frac{rad}{s}$ ,

$\mathbf{Q}(s)$  - o vetor de coordenadas generalizadas de deslocamento no domínio de Laplace,

$H(s) = \frac{\Lambda(s)}{s^2 + \Omega^2}$ , o termo associado com a matriz receptância  $\Lambda(s)$  e

$k_1^p$  - rigidez do pneu referente a posição do ponto 1, conforme Figura 3.1.

A transformada de Laplace inversa, fornece a resposta no domínio do tempo.

$$\mathbf{q}(t) = h(t)k_1^p P o \Omega \quad (6.23)$$

sendo:

$\mathbf{q}(t)$  - o vetor de coordenadas generalizadas de deslocamento no domínio do tempo, definido pela equação (3.2) e

$h(t)$  - a transformada inversa de Laplace ( $L^{-1}$ ) do termo  $H(s)$ .

A Figura 6.6 mostra a resposta analítica referente a massa não suspensa deste modelo.

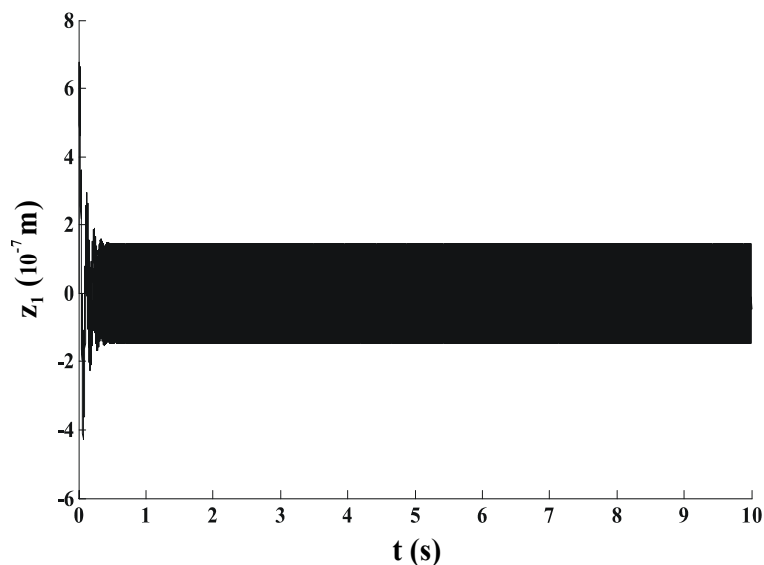


Figura 6.6: Deslocamento vertical - Roda 1.

### 6.4.2 Solução através do método explícito de integração direta no tempo

A Figura 6.7 mostra a aplicação do método de integração direta para este modelo.

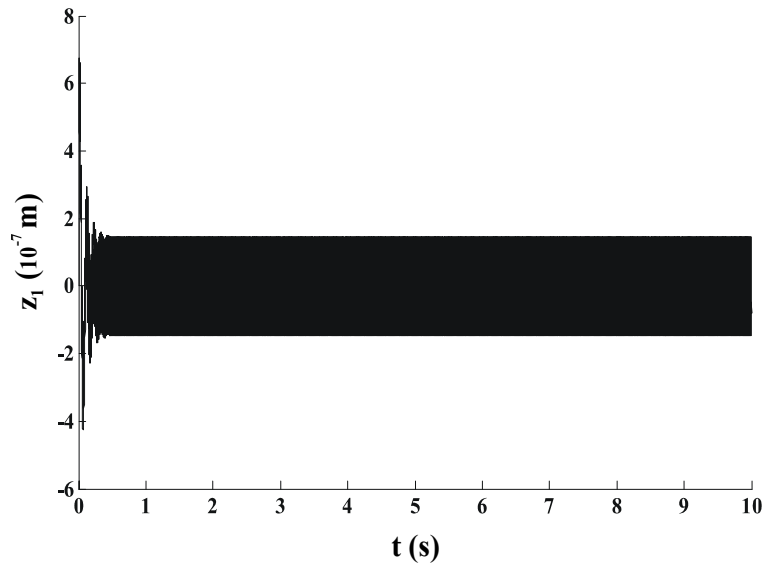


Figura 6.7: Deslocamento vertical - Roda 1.

Com o objetivo de demonstrar a convergência das soluções obtidas através dos métodos analítico e integração direta no tempo, será feito no item a seguir superposições das curvas referentes as Figuras 6.6 e 6.7, no intervalos de tempo de análise entre 0 e 0,2 s, 0,4 e 0,6 s e 6,4 e 6,6 s possibilitando desta forma a visualização e avaliação mais adequada dos resultados.

### 6.4.3 Superposições das curvas

As superposições das curvas obtidas pelos métodos de solução empregados, são mostradas nas Figuras 6.8, 6.9 e 6.10 em intervalos de tempo de análise entre 0 e 0,2 s, 0,4 e 0,6 s e 6,4 e 6,6 s, respectivamente, para melhor visualização dos resultados.

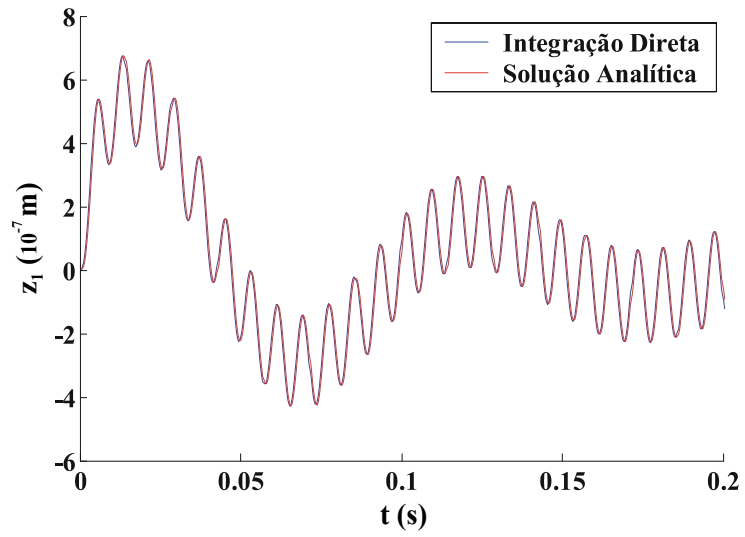


Figura 6.8: Superposição das curvas - Intervalo entre 0 e 0,2 s.

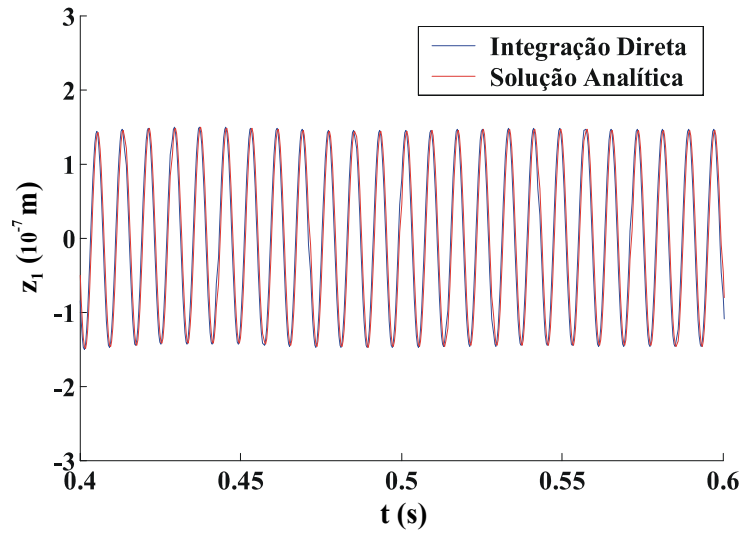


Figura 6.9: Superposição das curvas - Intervalo entre 0,4 e 0,6 s.

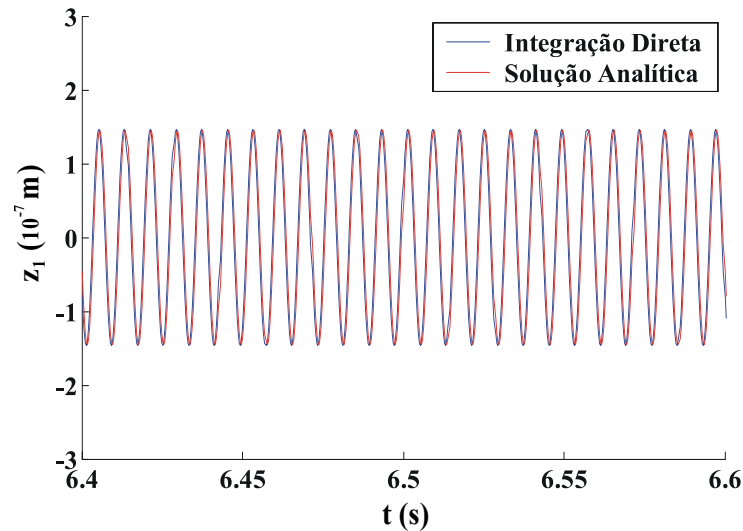


Figura 6.10: Superposição das curvas - Intervalo entre 6,4 e 6,6 s.

As Figuras 6.8, 6.9 e 6.10 mostram que os métodos de solução aplicados fornecem praticamente as mesmas respostas para o modelo linear com dois graus de liberdade e excitação senoidal.

As respostas no domínio do tempo de um sistema de equações diferenciais são caracterizadas pela combinação de uma solução complementar (transiente) e uma solução particular (permanente) [21].

A solução transiente é a resposta referente a vibração livre do sistema, onde são consideradas as condições iniciais do problema. Com o decorrer do tempo, a energia existente no sistema amortecido devido as condições iniciais, desaparece. A solução particular é o comportamento específico da resposta gerado pelo carregamento dinâmico.

Na Figura 6.8, observa-se a influência das condições iniciais no sistema sendo que nas Figuras 6.9 e 6.10 verifica-se apenas as respostas forçadas devido a aplicação do carregamento senoidal.

Será apresentado a seguir, o espectro de frequência de deslocamento, obtido a partir da aplicação da transformada discreta de Fourier, na solução no domínio do tempo, referente a massa não suspensa do modelo linear com dois graus de liberdade e excitação senoidal.

#### 6.4.4 Espectro de frequência

Como já discutido anteriormente, os espectros permitem visualizar em que frequências os sinais no tempo carregam mais energia bem como identificar separadamente a contribuição de cada componente de frequência da excitação nas respostas do sistema.

O espectro normalizado em relação à amplitude na frequência de 125 Hz, referente a resposta da massa não suspensa do modelo linear com dois graus de liberdade e excitação senoidal, considerando as magnitudes lineares de deslocamento é mostrado na Figura 6.11:

Magnitude linear correspondente à frequência de 125 Hz (m)	
Espectro de frequência - Massa não suspensa do modelo linear com dois graus de liberdade	$7,33 \cdot 10^{-8}$

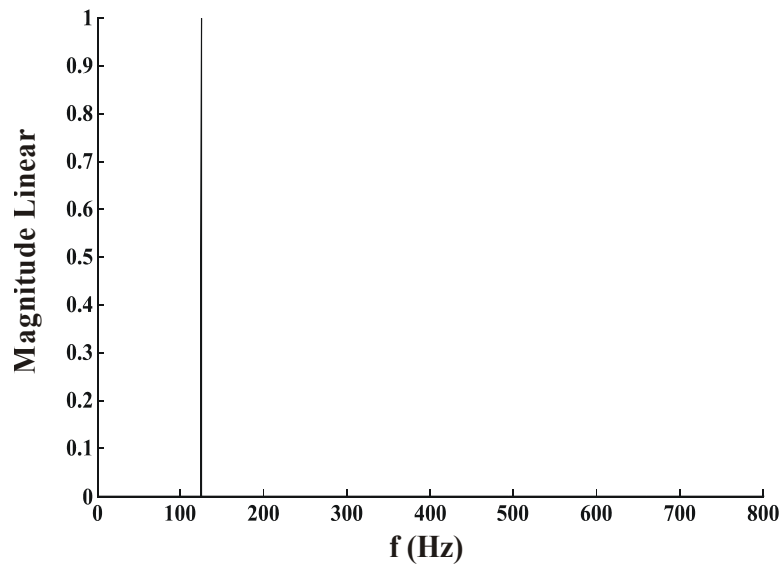


Figura 6.11: Espectro de frequência - Massa não suspensa do modelo linear com dois graus de liberdade.

A Figura 6.11 apresenta o espectro para uma frequência máxima de 800 Hz, correspondente a frequência amostral definida no ensaio experimental. A análise específica do espectro de frequência da massa não suspensa se deve, pela medição experimental de acelerações apenas nas rodas do veículo.

Na Figura 6.11 verifica-se também a presença de um pico de energia na frequência de 125 Hz, que corresponde a frequência de excitação para este modelo linear.

Uma observação importante é que o valor da magnitude linear no espectro de frequência positiva, Figura 6.11, é a metade da amplitude da resposta forçada no tempo, Figuras 6.6 e 6.7, já que o espectro desta função é simétrico.

O programa Matlab plota apenas o espectro positivo de frequência, espelhando o pico referente ao espectro negativo neste mesmo gráfico, quando amostrada toda a faixa de frequência do modelo teórico.



## 6.5 Modelo linear com sete graus de liberdade e função de excitação senoidal

Para o desenvolvimento das soluções, através da aplicação do método analítico e método explícito de integração direta no tempo do modelo linear com sete graus de liberdade e excitação senoidal, são utilizadas as propriedades experimentais levantadas no Capítulo 4, as quais são repetidas a seguir:

$$k_1, k_2 = 6,54 \cdot 10^3 \frac{N}{m}, \quad (6.24)$$

$$k_3, k_4 = 1,12 \cdot 10^4 \frac{N}{m}, \quad (6.25)$$

$$c_1, c_2 = 3,89 \cdot 10^3 \frac{Ns}{m}, \quad (6.26)$$

$$c_3, c_4 = 6,68 \cdot 10^3 \frac{Ns}{m}, \quad (6.27)$$

$$m = 186,70 \text{ kg}, \quad (6.28)$$

$$m_1 = 14,15 \text{ kg}, \quad (6.29)$$

$$m_2 = 14,10 \text{ kg}, \quad (6.30)$$

$$m_3 = 15,39 \text{ kg}, \quad (6.31)$$

$$m_4 = 15,39 \text{ kg}, \quad (6.32)$$

$$I_y = 57,14 \text{ kg m}^2, \quad (6.33)$$

$$I_x = 12,96 \text{ kg m}^2, \quad (6.34)$$

$$k_i^p = 1,74 \cdot 10^5 \frac{N}{m}, \quad (6.35)$$

$$a_I = 0,980 \text{ m}, \quad (6.36)$$

$$a_{II} = 0,597 \text{ m}, \quad (6.37)$$

$$t_I = 1,200 \text{ m e} \quad (6.38)$$

$$t_{II} = 1,200 \text{ m}. \quad (6.39)$$

sendo o índice  $i = 1, 2, 3$  e  $4$  as posições das massas não suspensas, conforme mostrado na Figura 3.1.

Vale lembrar que a rigidez dos pneus,  $k_i^p$ , é o valor médio referente a pressão de 248,2 kPa

e os coeficientes de amortecimento,  $c_i$ , para este modelo, correspondem ao comportamento mecânico do amortecedor quando submetido a cargas de tração, conforme o tratamento feito no Capítulo 4.

Os deslocamentos e velocidades iniciais para esta análise são:

$$\mathbf{q}(0) = 0 \text{ e} \quad (6.40)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}(0) = 0. \quad (6.41)$$

respectivamente.

A função de excitação, definida conforme o ensaio experimental descrito no Capítulo 5, é repetida a seguir:

$$f = 125 \text{ Hz e} \quad (6.42)$$

$$P_o = 7,92 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad (6.43)$$

sendo o tempo inicial e final desta análise:

$$t_i = 0 \text{ s e} \quad (6.44)$$

$$t_f = 10 \text{ s} \quad (6.45)$$

respectivamente.

A seguir são apresentadas as soluções referentes as massas não suspensas do modelo linear com sete graus de liberdade obtidas pela aplicação dos métodos analítico e integração direta no tempo, sendo feito posteriormente a superposição destes resultados.

### 6.5.1 Solução analítica

As respostas analíticas do modelo linear com sete graus de liberdade são apresentadas nas Figuras 6.12 a 6.15:

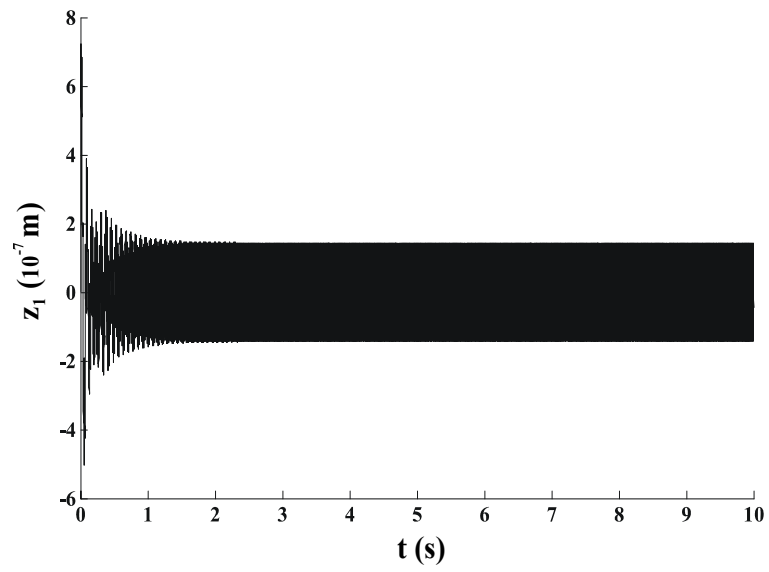


Figura 6.12: Deslocamento vertical - Roda 1.

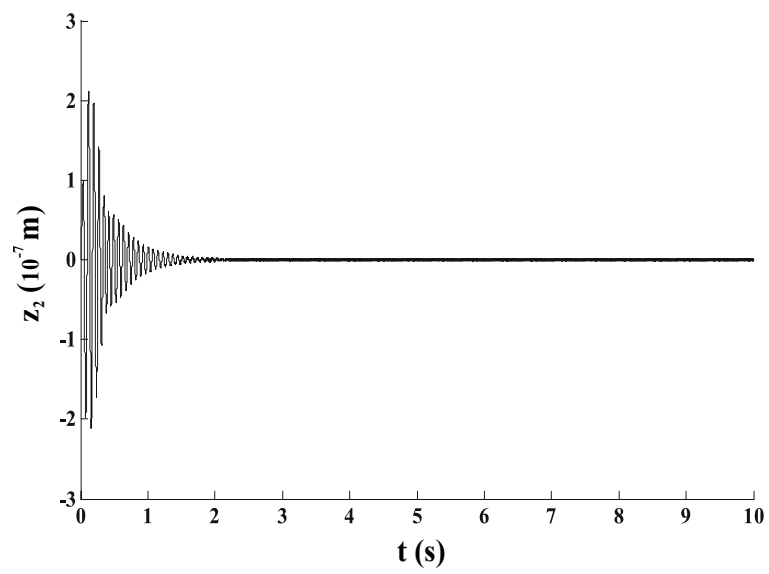


Figura 6.13: Deslocamento vertical - Roda 2.

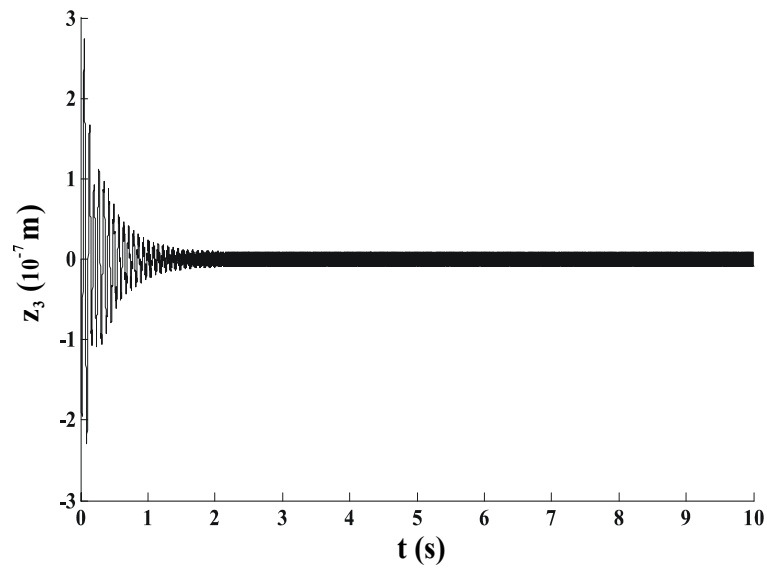


Figura 6.14: Deslocamento vertical - Roda 3.

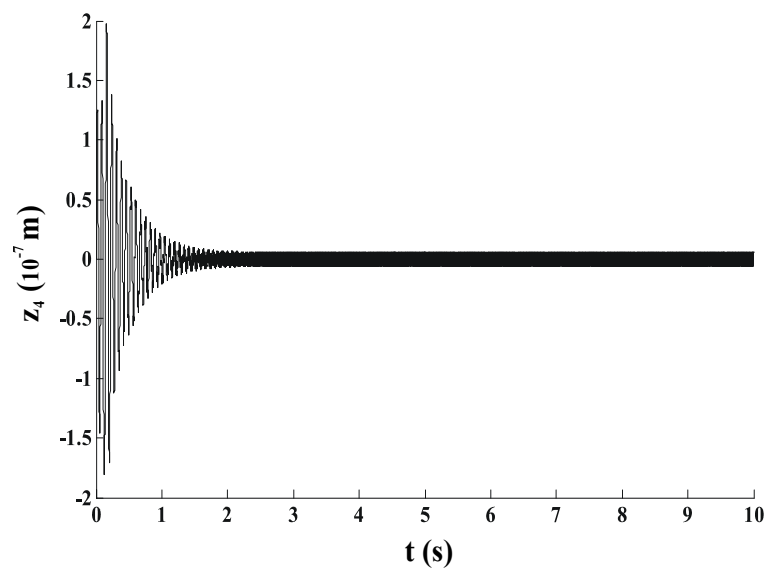


Figura 6.15: Deslocamento vertical - Roda 4.

As mesmas soluções obtidas pela aplicação do método explícito de integração direta no tempo são apresentadas no item que segue.

## 6.5.2 Solução através do método explícito de integração direta no tempo

As soluções obtidas através do método explícito de integração direta no tempo para o modelo linear com sete graus de liberdade, são apresentadas nas Figuras 6.16 a 6.19:

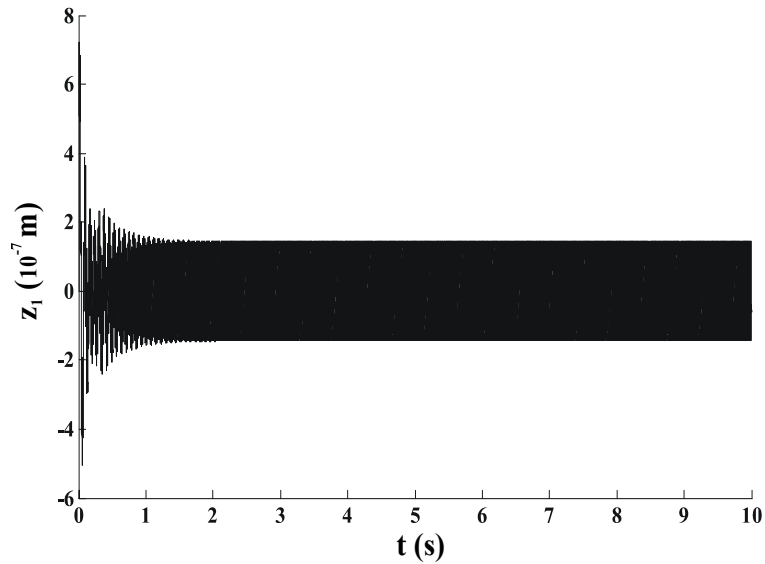


Figura 6.16: Deslocamento vertical - Roda 1.

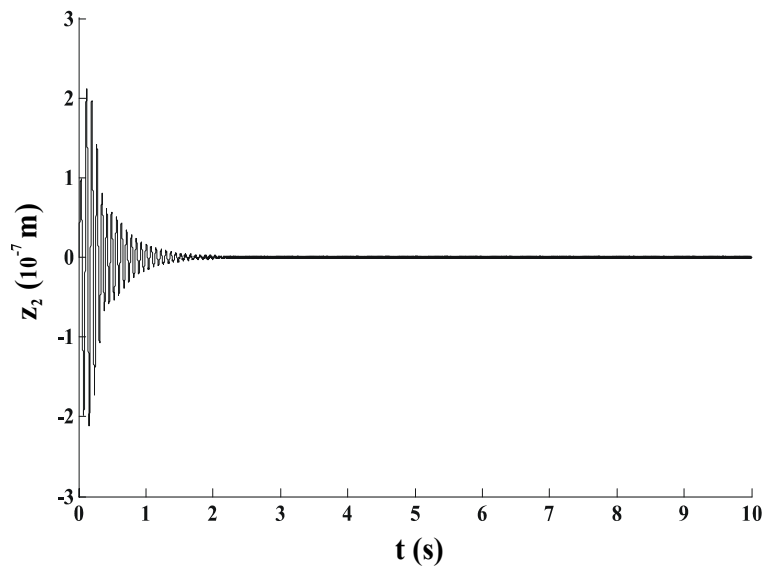


Figura 6.17: Deslocamento vertical - Roda 2.

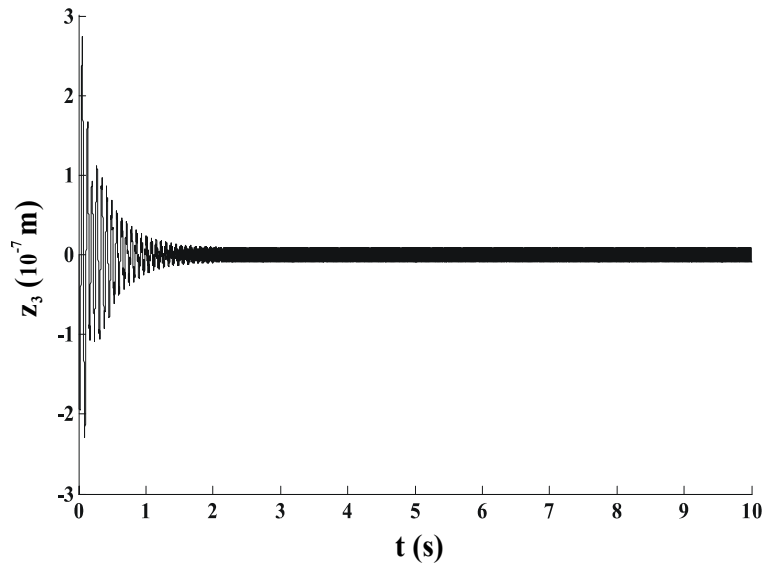


Figura 6.18: Deslocamento vertical - Roda 3.

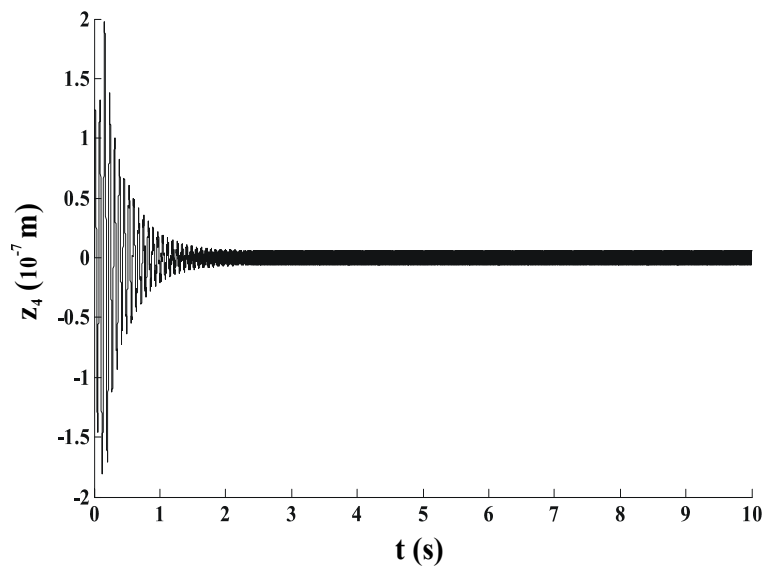


Figura 6.19: Deslocamento vertical - Roda 4.

As soluções referentes as massas não suspensas do modelo linear com sete graus de liberdade caracterizam-se pela influência das condições iniciais do problema em um intervalo de tempo entre 0 e 3 s aproximadamente, enquanto que no restante da análise a resposta possui um comportamento gerado apenas pelo carregamento dinâmico.

### 6.5.3 Superposições das curvas

As superposições das curvas, obtidas pelos métodos de solução empregados, podem ser vistas nas Figuras 6.20 a 6.23 em intervalos de tempo entre 0 e 0,2 s e 6,4 e 6,6 s, possibilitando desta forma, a visualização mais detalhada destes resultados.

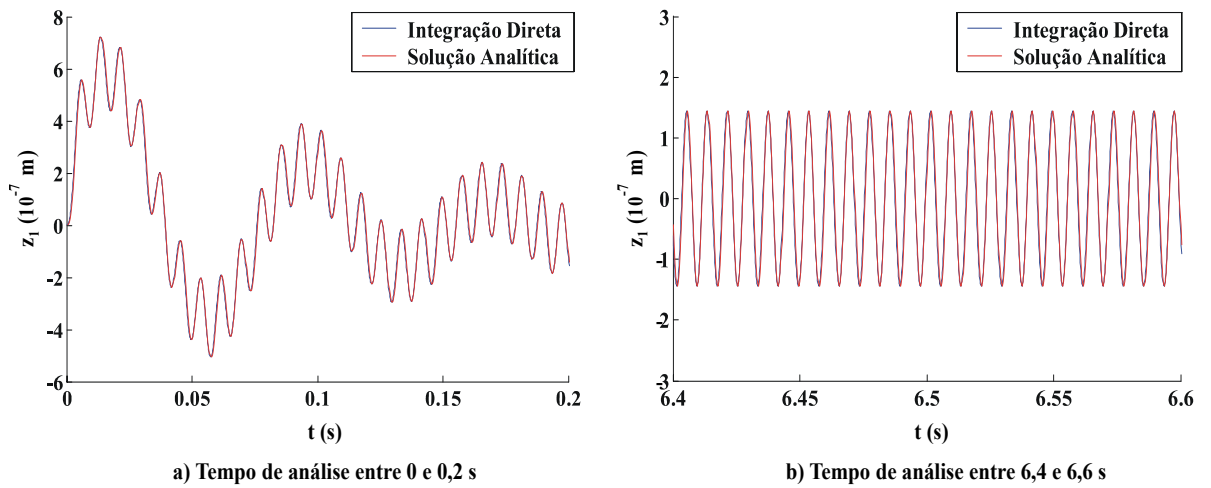


Figura 6.20: Superposição das curvas - Roda 1.

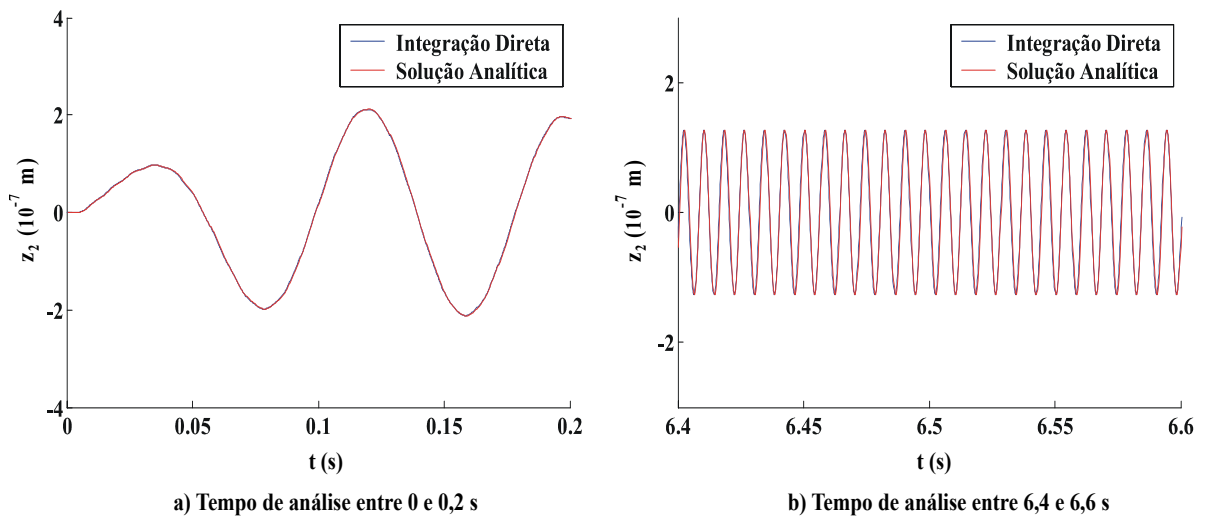


Figura 6.21: Superposição das curvas - Roda 2.

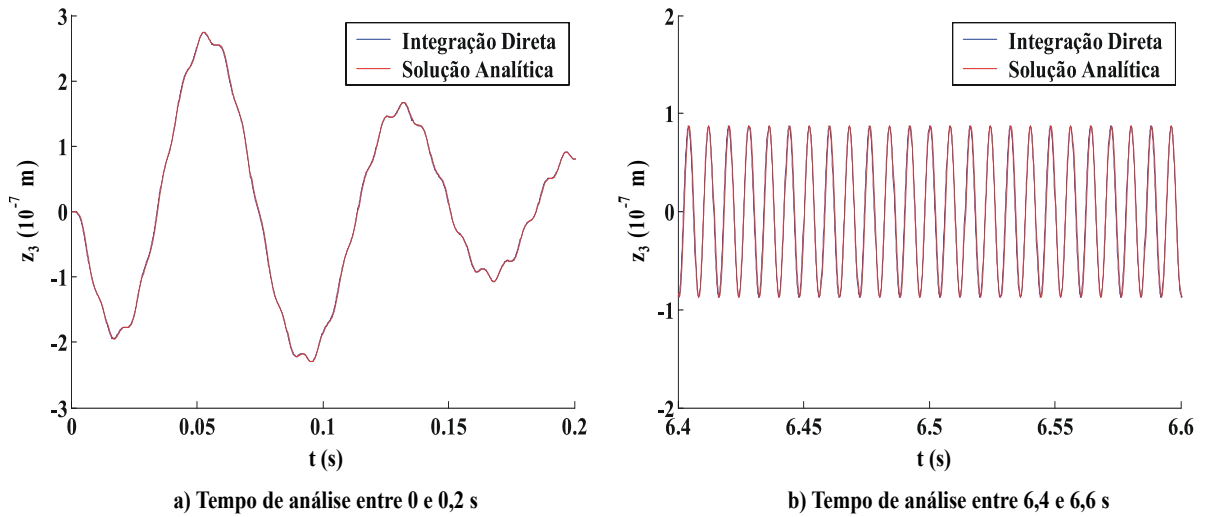


Figura 6.22: Superposição das curvas - Roda 3.

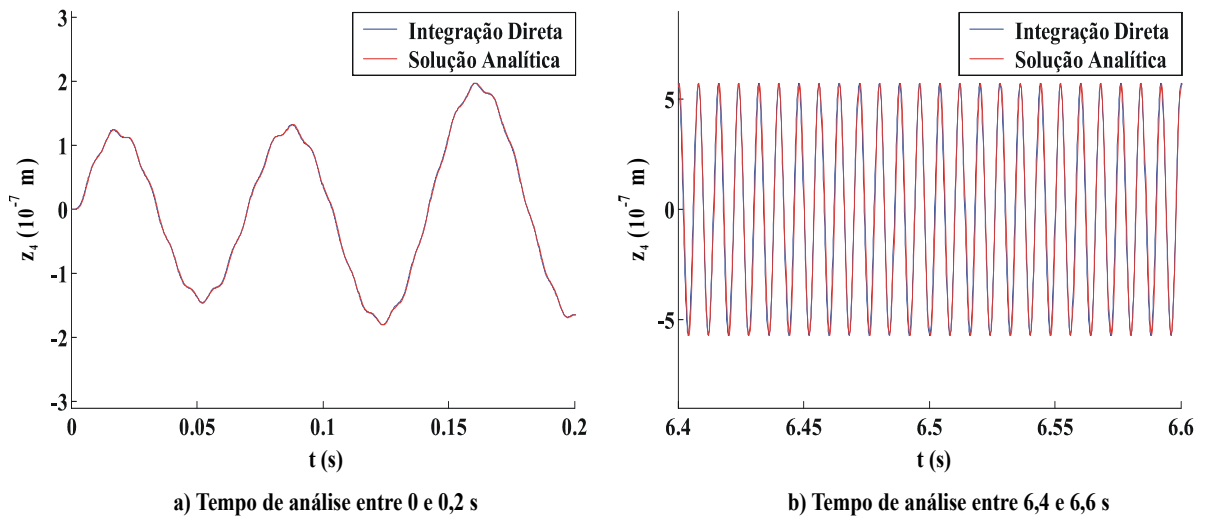


Figura 6.23: Superposição das curvas - Roda 4.

Observando as Figuras 6.20 a 6.23 verifica-se a boa concordância das respostas determinadas a partir dos métodos de solução analítico e integração direta no tempo. Assim, o método explícito de integração direta no tempo é uma alternativa de análise confiável e eficiente para estes modelos.

Os espectros de frequência de deslocamento, obtidos através da aplicação da transformada discreta de Fourier nas soluções teóricas no domínio do tempo, referentes as massas não suspensas do modelo linear com sete graus de liberdade e excitação senoidal, são apresentados no item que segue.



### 6.5.4 Espectro de frequência

Os espectros de frequência de deslocamento das massas não suspensas para este modelo, normalizados em relação às respectivas magnitudes lineares na frequência de 125 Hz, são mostrados nas Figuras 6.24 a 6.27.

Magnitudes lineares correspondentes à frequência de 125 Hz (m)	
Espectro de frequência - Roda 1	$7,21 \cdot 10^{-8}$
Espectro de frequência - Roda 2	$6,31 \cdot 10^{-10}$
Espectro de frequência - Roda 3	$4,35 \cdot 10^{-9}$
Espectro de frequência - Roda 4	$2,85 \cdot 10^{-9}$

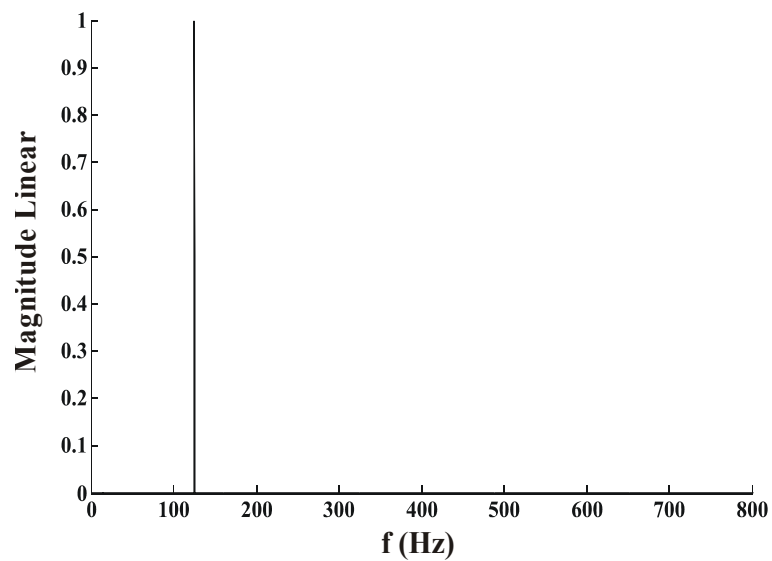


Figura 6.24: Espectro de frequência - Roda 1.

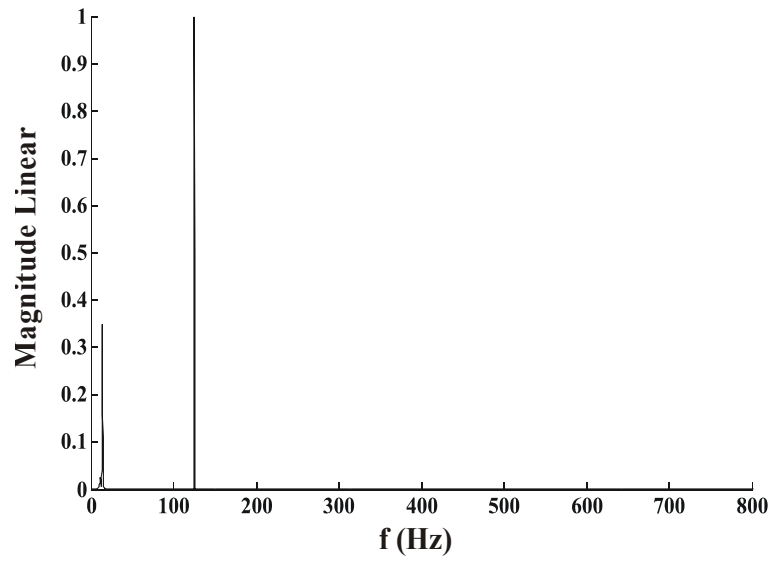


Figura 6.25: Espectro de frequência - Roda 2.

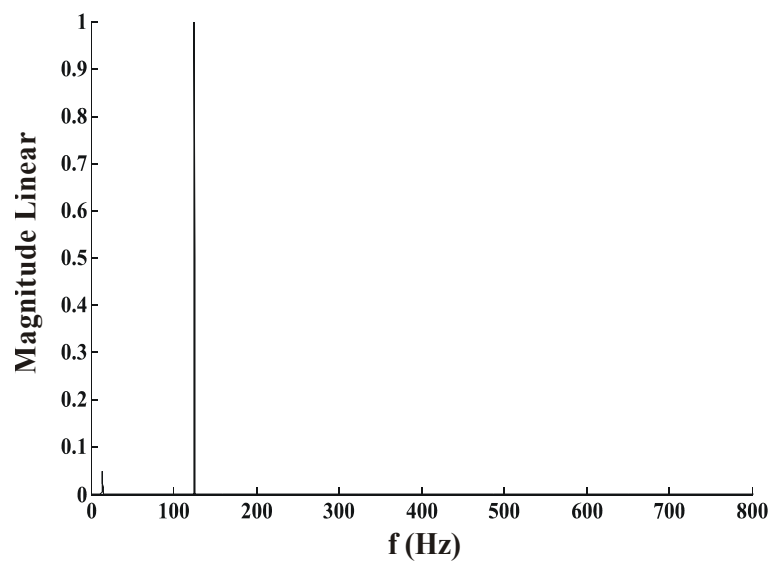


Figura 6.26: Espectro de frequência - Roda 3.

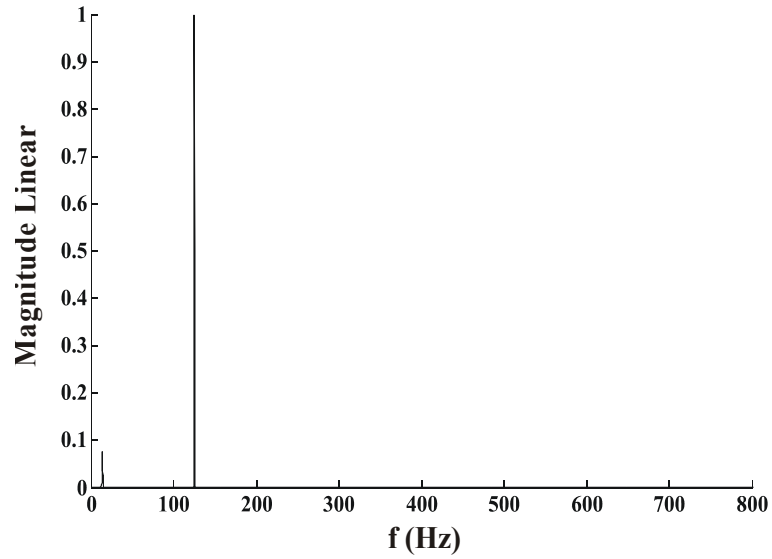


Figura 6.27: Espectro de frequência - Roda 4.

Como pode ser visto nas Figuras 6.24 a 6.27, os espectros de deslocamento apresentam picos de energia predominantes na frequência de 125 Hz, que corresponde a frequência de excitação para este modelo linear. Os picos menores que aparecem nos valores de frequência mais baixos, ocorrem possivelmente devido a influência das respostas transientes nas soluções gerais do sistema.

A discussão mais detalhada a respeito dos resultados obtidos através da aplicação dos modelos lineares são feitos no Capítulo 8.

# Capítulo 7

## Aplicação dos Modelos não Lineares

### 7.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentadas as respostas dos modelos não lineares com dois e sete graus de liberdade, obtidas através do método explícito de integração direta no tempo.

Serão analisados os espectros de frequência de deslocamento referentes as massas não suspensas dos modelos matemáticos não lineares, para que no Capítulo 8 sejam feitas comparações destes resultados com os espectros de frequência levantados experimentalmente no Capítulo 5.

### 7.2 Considerações básicas a respeito da não linearidade do amortecimento

Os amortecedores de uso automotivo tem uma característica peculiar, que é o de apresentarem amortecimento diferente na compressão e distensão. As rodas de um automóvel ao subirem pelo efeito do impacto, possuem uma resistência mínima do amortecedor. Este comportamento tem como objetivo:

- reduzir a transmissão de cargas à carroceria e
- aumentar o conforto dos ocupantes

Porém o amortecimento não deve ser nulo, já que a roda deve ter o seu deslocamento durante a subida, reduzido.

Em contrapartida, durante a descida da roda, para evitar problemas de grandes deslocamentos na ressonância, o amortecimento deve ser grande.

Esta característica do amortecedor apresentar comportamento distinto nos dois sentidos de funcionamento, como mostrado no Capítulo 4, resulta em um comportamento bilinear do componente, como pode ser observado na Figura 4.9.

Os modelos teóricos não lineares permitem representar de uma forma mais adequada o comportamento diferenciado dos amortecedores, quando submetidos as cargas de compressão e tração. O desenvolvimento destes modelos são baseados na estrutura de programação dos modelos lineares, sendo utilizado o método de solução por integração direta no tempo, com a introdução de uma lógica na definição dos coeficientes bilineares de amortecimento.

Desta forma, é necessário a verificação do tipo de carregamento (tração ou compressão) que os amortecedores sofrem, para a correta definição dos coeficientes de amortecimento.

A lógica utilizada nos modelos não lineares, consiste na comparação das deflexões dadas pelos deslocamentos relativos entre a massa suspensa e a massa não suspensa dos modelos, no instante atual e anterior, ou seja:

$$\delta_i(t_n) > \delta_i(t_{n-1}) - \text{Tração} \quad (7.1)$$

$$\delta_i(t_n) < \delta_i(t_{n-1}) - \text{Compressão} \quad (7.2)$$

$$\delta_i(t_n) = \delta_i(t_{n-1}) - \text{Deslocamento de corpo rígido} \quad (7.3)$$

sendo:

$\delta_i(t_n)$  - a deflexão dos amortecedores no instante atual e

$\delta_i(t_{n-1})$  - a deflexão dos amortecedores no instante anterior.

O índice  $n$  é referente ao número de iterações do modelo, ou seja

$$n = 1, 2, 3, \dots, n_t. \quad (7.4)$$

sendo:

$n_t$  - o número total de incrementos no tempo.

Para a situação de deslocamento de corpo rígido, ou seja,  $\delta_i(t_n) = \delta_i(t_{n-1})$ , os coeficientes de amortecimento permanecem inalterados, com o mesmo valor definido no instante anterior ( $t_{n-1}$ ).

### 7.3 Modelo não linear com dois graus de liberdade

Para o modelo teórico com dois graus de liberdade, tem-se que a deflexão do amortecedor em função das coordenadas generalizadas é dada por:

$$\delta_i(t) = z_i(t) - z(t) \quad (7.5)$$

que é a expressão (3.4) do Capítulo 3, com o sinal trocado. É importante lembrar que o sentido positivo do eixo vertical  $z$  é dado pela Figura 3.1.

Na Figura 4.9 é mostrado a ocorrência de cargas compressivas e trativas tanto nos sentidos negativos como positivos do curso do amortecedor.

O sinal negativo na deflexão do amortecedor indica que a haste está comprimida e o sinal positivo indica que a haste está tracionada. A comparação das deflexões entre o instante atual e anterior permite definir o sentido de deslocamento do curso da haste e o tipo de carregamento sobre o amortecedor, como pode ser visto na Tabela 7.1:

Tabela 7.1: Definição do tipo de carregamento sobre a haste do amortecedor

Sentido de deslocamento	Instante Anterior	Instante Atual	Tipo de carregamento
Positivo	Deflexão negativa	Deflexão positiva	Tracção
Negativo	Deflexão positiva	Deflexão negativa	Compressão
Positivo	Deflexão negativa	Deflexão negativa	Tracção
Negativo	Deflexão negativa	Deflexão negativa	Compressão
Positivo	Deflexão positiva	Deflexão positiva	Tracção
Negativo	Deflexão positiva	Deflexão positiva	Compressão

Para a aplicação dos modelos não lineares com dois graus de liberdade são utilizadas as propriedades experimentais levantadas no Capítulo 4, repetidas a seguir:

$$m_{\frac{1}{4}} = 35,34 \text{ kg}, \quad (7.6)$$

$$m_1 = 14,15 \text{ kg}, \quad (7.7)$$

$$k_1 = 6,54 \cdot 10^3 \frac{N}{m} \text{ e} \quad (7.8)$$

$$k_1^p = 1,74 \cdot 10^5 \frac{N}{m} \quad (7.9)$$

O coeficiente de amortecimento equivalente da suspensão dianteira esquerda para cargas de compressão é:

$$c_1 = 8,51 \cdot 10^1 \frac{Ns}{m} \quad (7.10)$$

e cargas de tração:

$$c_1 = 3,89 \cdot 10^3 \frac{Ns}{m}. \quad (7.11)$$

Os deslocamentos e velocidades iniciais são dadas por:

$$\mathbf{q}(0) = 0 \text{ e} \quad (7.12)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}(0) = 0. \quad (7.13)$$

respectivamente.

Vale lembrar que a rigidez,  $k_1^p$ , do pneu é o valor médio referente a pressão de 248,2 kPa.

A excitação aplicada neste modelo é a mesma função senoidal definida para o modelo linear com dois graus de liberdade, ou seja, corresponde a excitação utilizada no ensaio experimental do veículo Mini Baja, como pode ser visto no Capítulo 5, sendo estas propriedades repetidas a seguir:

$$f = 125 \text{ Hz e} \quad (7.14)$$

$$P_o = 7,92 \cdot 10^{-6} \text{ m}. \quad (7.15)$$

O tempo inicial e final para esta análise teórica são:

$$t_i = 0 \text{ s e} \quad (7.16)$$

$$t_f = 10 \text{ s}. \quad (7.17)$$

respectivamente.

A solução no domínio da frequência normalizada em relação à respectiva magnitude linear na frequência de 125 Hz, referente a massa não suspensa (roda 1) do modelo não linear com dois graus de liberdade é apresentada nas Figuras 7.1 a 7.5, sendo mostradas faixas de frequência para a melhor visualização dos resultados.

Magnitude linear correspondente à frequência de 125 Hz (m)

---

Espectro de frequência - Massa não suspensa do modelo não linear com dois graus de liberdade	$7,77 \cdot 10^{-8}$
---	----------------------

---

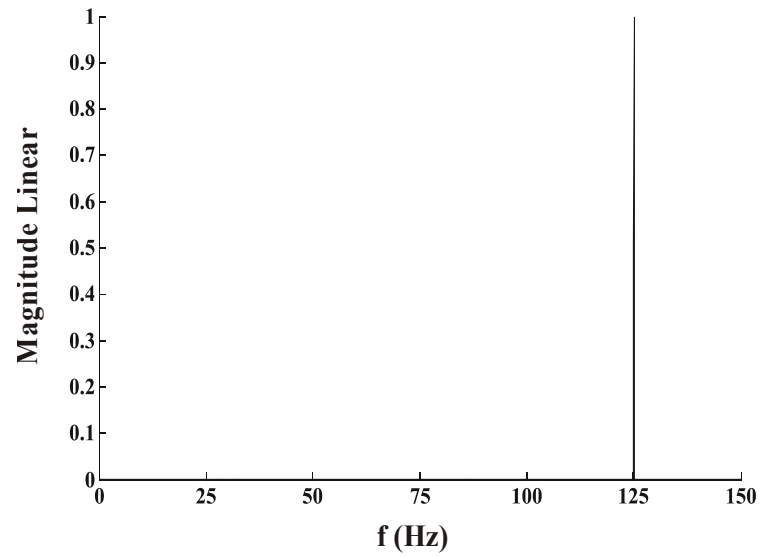


Figura 7.1: Espectro de frequência entre 0 e 150 Hz.

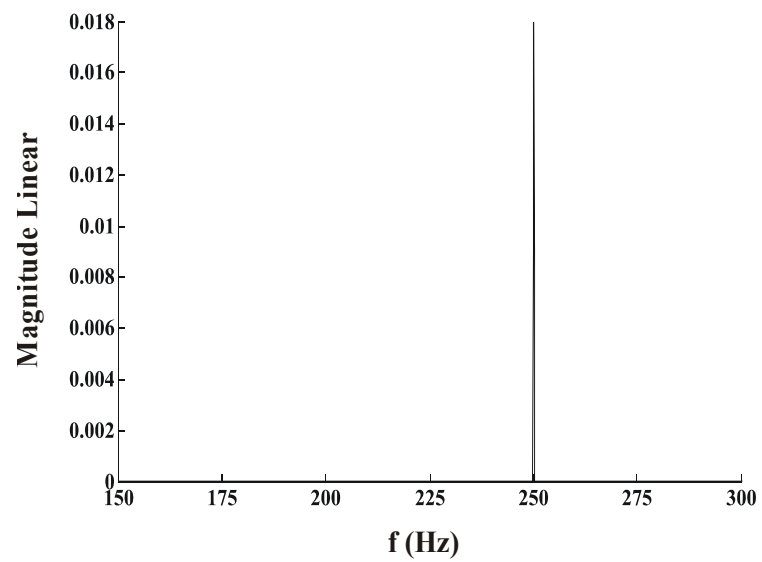


Figura 7.2: Espectro de frequência entre 150 e 300 Hz.



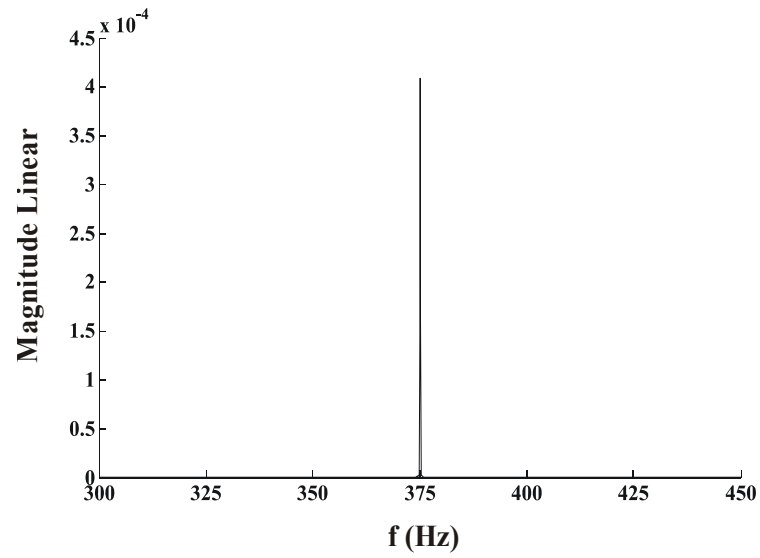


Figura 7.3: Espectro de frequência entre 300 e 450 Hz.

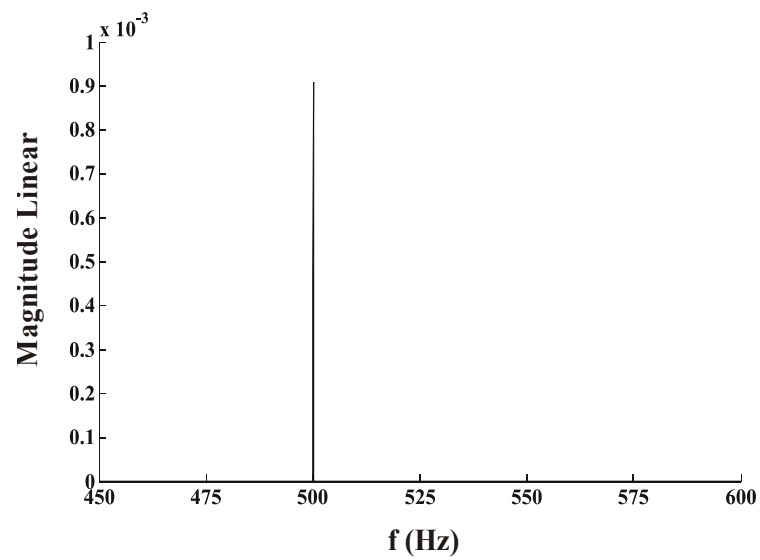


Figura 7.4: Espectro de frequência entre 450 e 600 Hz.

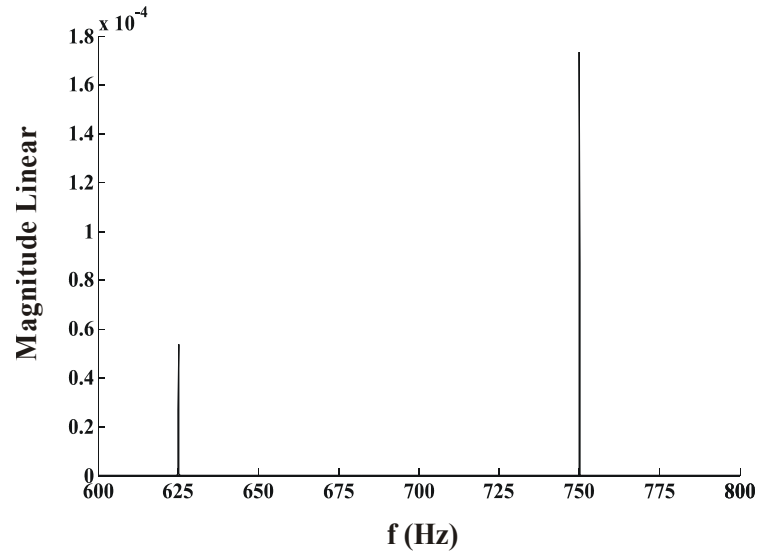


Figura 7.5: Espectro de frequência entre 600 e 800 Hz.

O espectro de frequência para este modelo apresenta um pico máximo de energia na frequência de 125 Hz, que corresponde a frequência da excitação aplicada, seguido de picos menores discretos nas frequências múltiplas inteiras (harmônicas) desta frequência fundamental.

A discussão mais detalhada a respeito destes resultados é feita no Capítulo 8.

A aplicação do modelo não linear com sete graus de liberdade é feita no item que segue.

## 7.4 Modelo não linear com sete graus de liberdade

No modelo com sete graus de liberdade, os coeficientes da matriz de amortecimento são calculados pelas expressões (7.1), (7.2) e (7.3), sendo as deflexões dos amortecedores em função das coordenadas generalizadas dadas pelas equações a seguir:

$$\delta_1(t) = z_1(t) - (z(t) - \phi(t)\frac{t_I}{2} - \theta(t)a_I), \quad (7.18)$$

$$\delta_2(t) = z_2(t) - (z(t) + \phi(t)\frac{t_I}{2} - \theta(t)a_I), \quad (7.19)$$

$$\delta_3(t) = z_3(t) - (z(t) + \phi(t)\frac{t_{II}}{2} + \theta(t)a_{II}), \quad (7.20)$$

$$\delta_4(t) = z_4(t) - (z(t) - \phi(t)\frac{t_{II}}{2} + \theta(t)a_{II}). \quad (7.21)$$

que são as expressões (3.94), (3.95), (3.96) e (3.97) do Capítulo 3, com o sinal trocado.

Para a aplicação do modelo não linear com sete graus de liberdade são utilizadas as propriedades experimentais levantadas no Capítulo 4, repetidas a seguir:

$$k_1, k_2 = 6,54 \cdot 10^3 \frac{N}{m}, \quad (7.22)$$

$$k_3, k_4 = 1,12 \cdot 10^4 \frac{N}{m}, \quad (7.23)$$

$$m = 186,70 \text{ kg}, \quad (7.24)$$

$$m_1 = 14,15 \text{ kg}, \quad (7.25)$$

$$m_2 = 14,10 \text{ kg}, \quad (7.26)$$

$$m_3 = 15,39 \text{ kg}, \quad (7.27)$$

$$m_4 = 15,39 \text{ kg}, \quad (7.28)$$

$$I_y = 57,14 \text{ kg m}^2, \quad (7.29)$$

$$I_x = 12,96 \text{ kg m}^2, \quad (7.30)$$

$$k_i^p = 1,74 \cdot 10^5 \frac{N}{m}, \quad (7.31)$$

$$a_I = 0,980 \text{ m}, \quad (7.32)$$

$$a_{II} = 0,597 \text{ m}, \quad (7.33)$$

$$t_I = 1,200 \text{ m e} \quad (7.34)$$

$$t_{II} = 1,200 \text{ m}. \quad (7.35)$$

Os coeficientes de amortecimento equivalentes para as suspensões dianteiras e traseiras são respectivamente para cargas de compressão:

$$c_1, c_2 = 8,51 \cdot 10^1 \frac{Ns}{m} \text{ e} \quad (7.36)$$

$$c_3, c_4 = 1,46 \cdot 10^2 \frac{Ns}{m} \quad (7.37)$$

e cargas de tração:

$$c_1, c_2 = 3,89 \cdot 10^3 \frac{Ns}{m} \text{ e} \quad (7.38)$$

$$c_3, c_4 = 6,68 \cdot 10^3 \frac{Ns}{m}. \quad (7.39)$$

Novamente os índices  $i = 1, 2, 3$  e  $4$  nas propriedades acima definem as posições das

massas não suspensas, conforme Figura 3.1.

Os deslocamentos e velocidades iniciais são dadas por:

$$\mathbf{q}(0) = 0 \text{ e} \quad (7.40)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}(0) = 0. \quad (7.41)$$

respectivamente.

A função de excitação é definida novamente conforme o ensaio experimental tratado no Capítulo 5, sendo estes parâmetros repetidos a seguir:

$$f = 125 \text{ Hz}, \quad (7.42)$$

$$P_o = 7,92 \cdot 10^{-6} \text{ m}. \quad (7.43)$$

O tempo inicial e final de análise para este modelo são respectivamente:

$$t_i = 0 \text{ s e} \quad (7.44)$$

$$t_f = 10 \text{ s}. \quad (7.45)$$

As soluções no domínio da frequência normalizadas em relação as respectivas magnitudes lineares na frequência de 125 Hz, referentes as massas não suspensas do modelo não linear com sete graus de liberdade são apresentadas nas Figuras 7.6 a 7.9, sendo mostradas faixas de frequências entre a) 0 e 150 Hz, b) 150 e 300 Hz, c) 300 e 450 Hz, d) 450 e 600 Hz e e) 600 e 800 Hz, para a visualização mais adequada dos resultados.

Magnitudes lineares correspondentes à frequência de 125 Hz (m)	
Espectro de frequência - Roda 1	$7,72 \cdot 10^{-8}$
Espectro de frequência - Roda 2	$1,95 \cdot 10^{-10}$
Espectro de frequência - Roda 3	$1,55 \cdot 10^{-9}$
Espectro de frequência - Roda 4	$1,04 \cdot 10^{-9}$

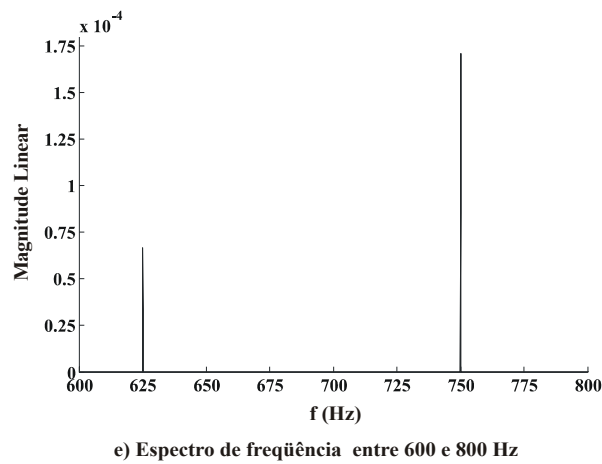
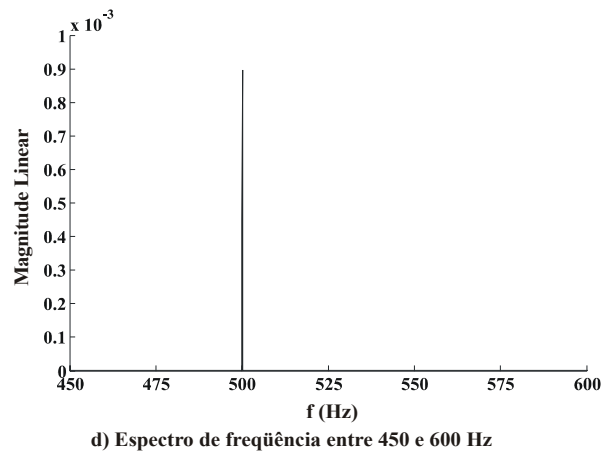
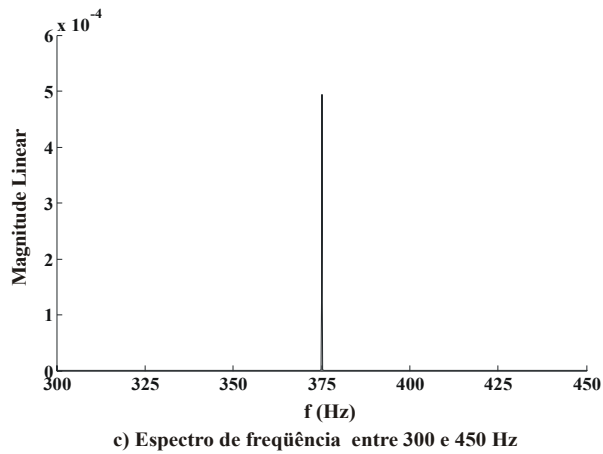
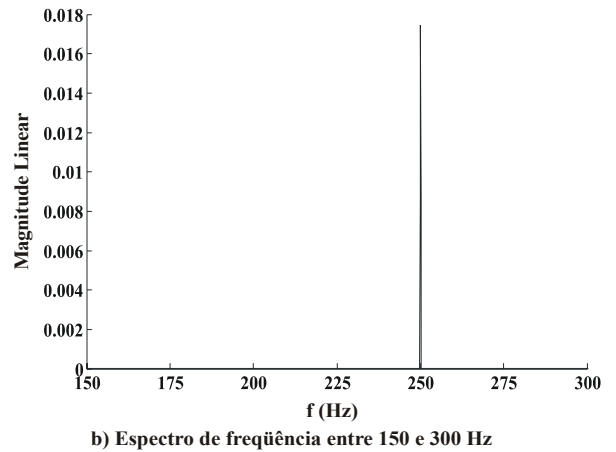
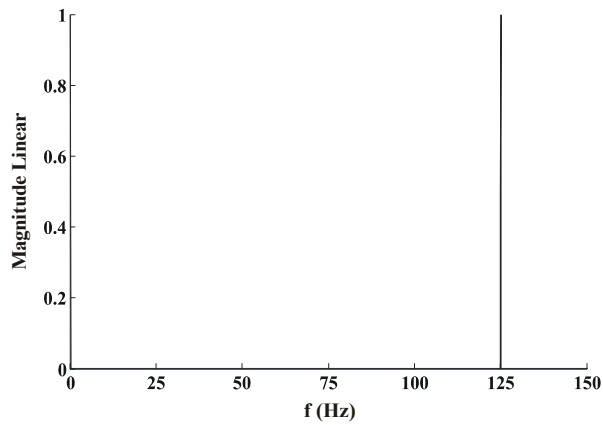


Figura 7.6: Espectro de frequência - Roda1.

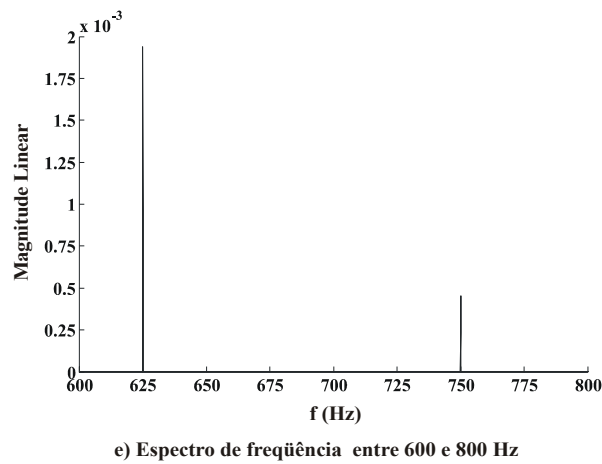
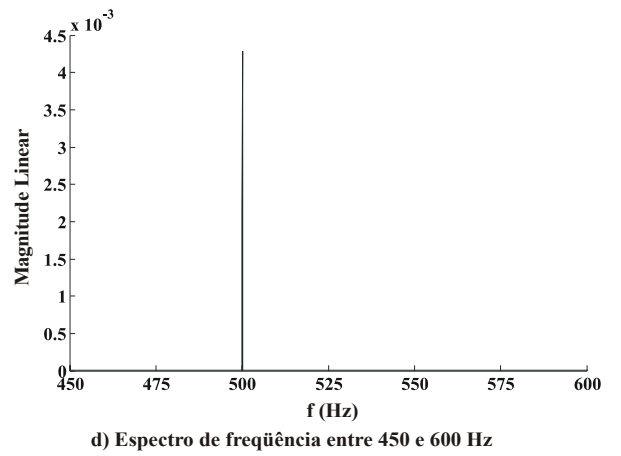
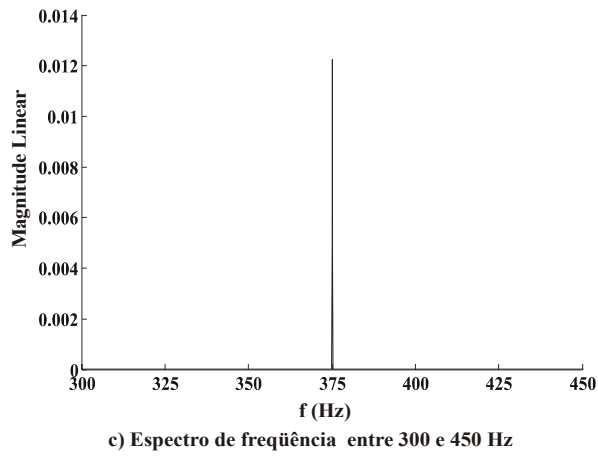
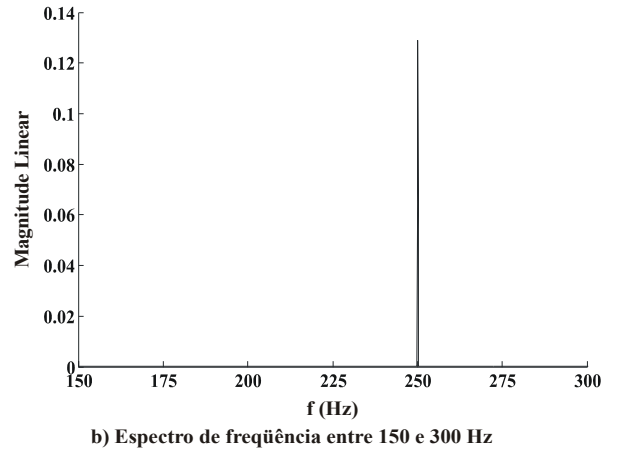
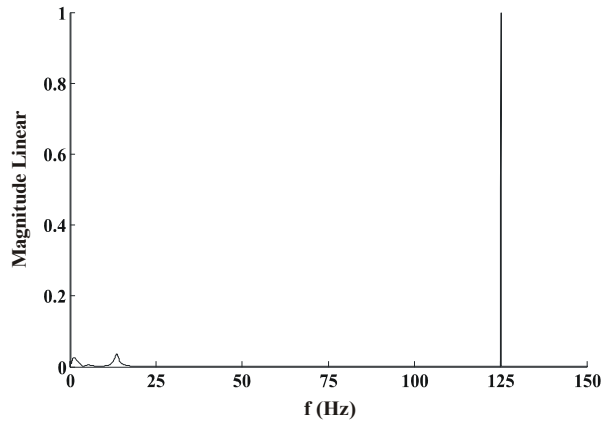


Figura 7.7: Espectro de frequência - Roda 2.

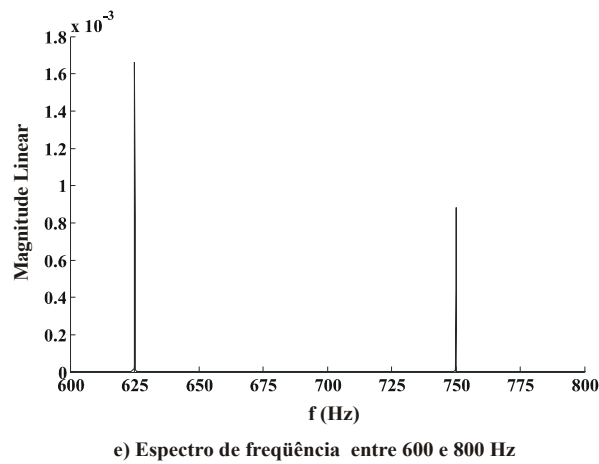
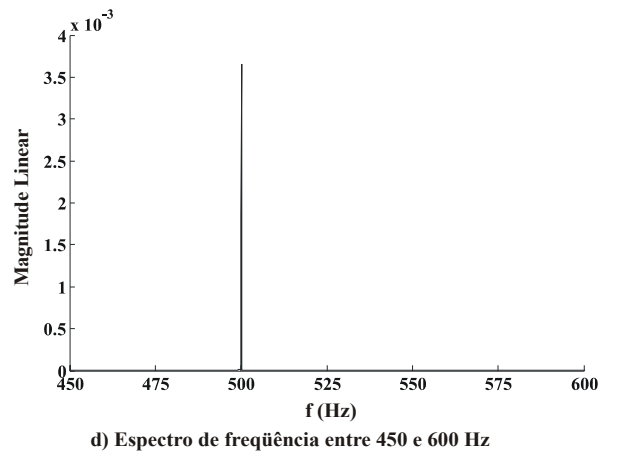
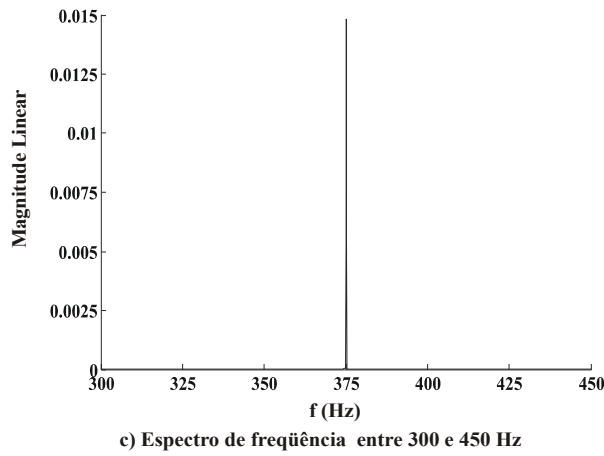
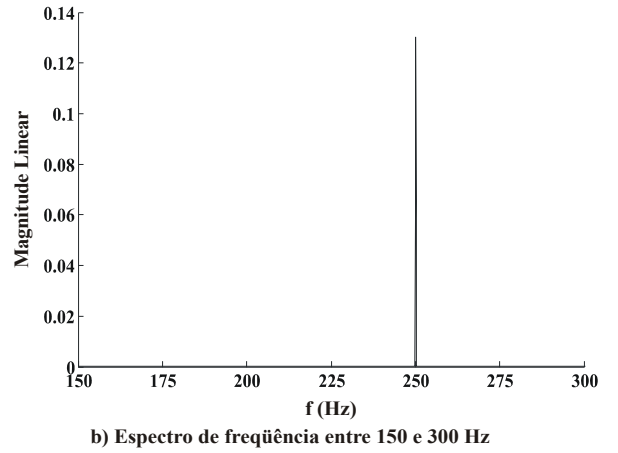
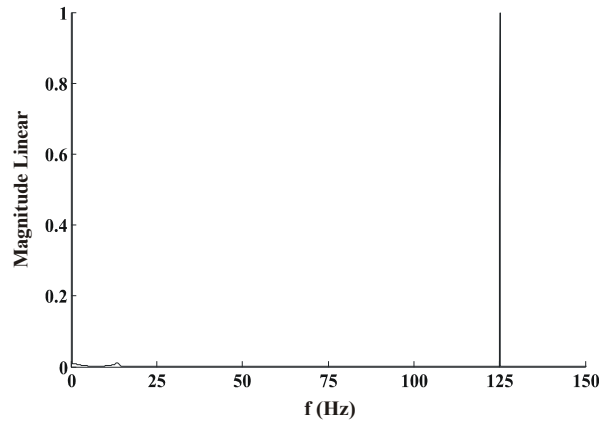


Figura 7.8: Espectro de frequência - Roda 3.

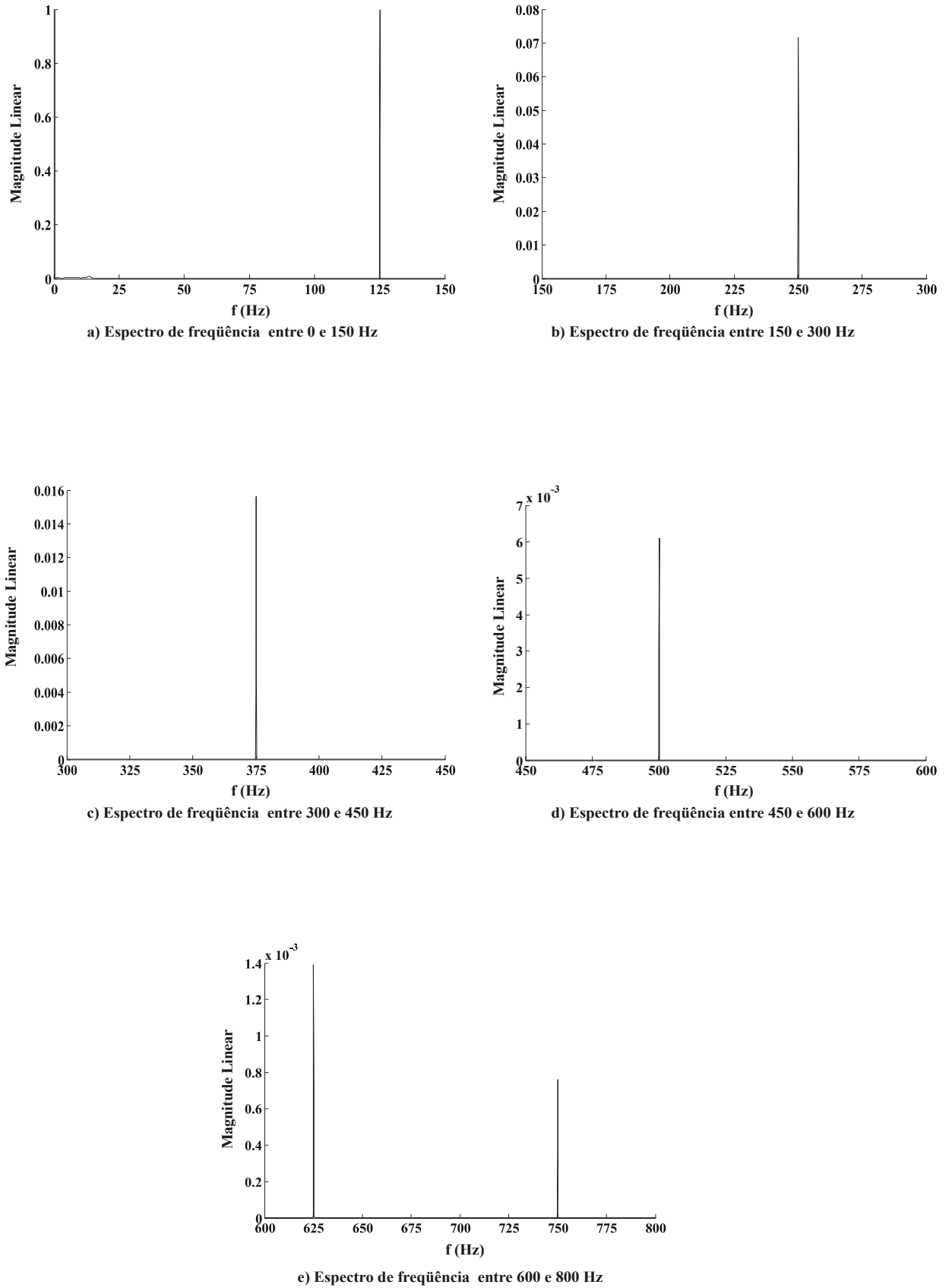


Figura 7.9: Espectro de frequência - Roda 4.



Os espectros das respostas teóricas do modelo não linear com sete graus de liberdade apresentam picos máximos de energia na frequência de 125 Hz, seguida de picos menores discretos nas frequências múltiplas inteiras (harmônicas) desta frequência fundamental.

O modelo experimental também apresenta picos de energia nestes mesmos valores de frequência, como pode ser observado nas Figuras 5.11 a 5.14 do Capítulo 5.

No próximo capítulo são feitas análises e comparações entre as respostas teóricas e experimental, sendo discutido de forma mais detalhada as características e resultados de cada um dos modelos apresentados neste trabalho.

# Capítulo 8

## Comparação e Análise dos Resultados Obtidos

### 8.1 Introdução

Neste capítulo são comparados e analisados os espectros de frequência de deslocamento dos modelos teóricos lineares, não lineares e experimental.

O objetivo desta comparação, é o de verificar se a modelagem teórica desenvolvida com dois e sete graus de liberdade se aproximam do comportamento de um veículo real, tal como o Mini Baja.

A discussão a respeito dos resultados obtidos é feita no final deste capítulo, onde são analisadas e criticadas as características peculiares de cada modelo.

### 8.2 Superposições das curvas obtidas pelo ensaio experimental e os modelos teóricos lineares

As superposições das curvas obtidas pelo ensaio experimental e os modelos teóricos lineares, normalizadas em relação às respectivas magnitudes lineares das respostas experimentais na frequência de 125 Hz, são apresentadas nas Figuras 8.1 a 8.4, sendo mostradas faixas dos espectros que se aproximam da frequência característica de 125 Hz para os modelos lineares.

Magnitudes lineares experimentais correspondentes à frequência de 125 Hz (m)

Espectro de frequência 125 Hz - Roda 1	$1,52 \cdot 10^{-7}$
Espectro de frequência 125 Hz - Roda 2	$2,98 \cdot 10^{-8}$
Espectro de frequência 125 Hz - Roda 3	$1,33 \cdot 10^{-8}$
Espectro de frequência 125 Hz - Roda 4	$6,03 \cdot 10^{-9}$

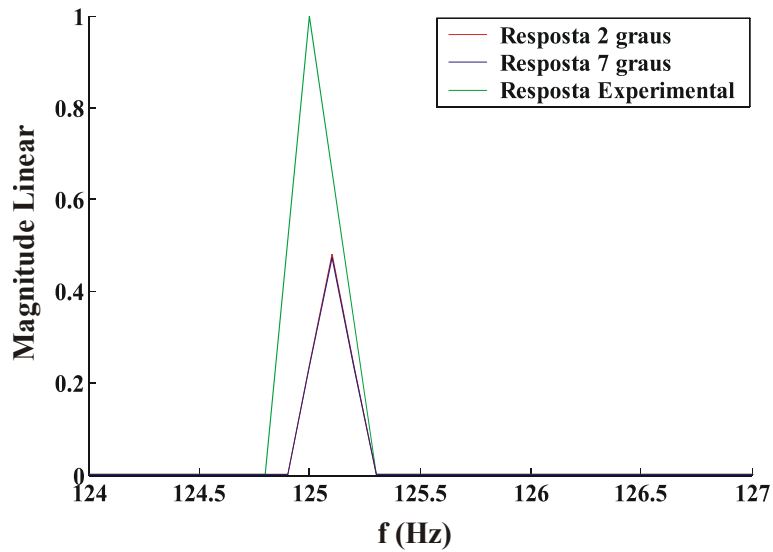


Figura 8.1: Espectro de frequência 125 Hz - Roda 1.

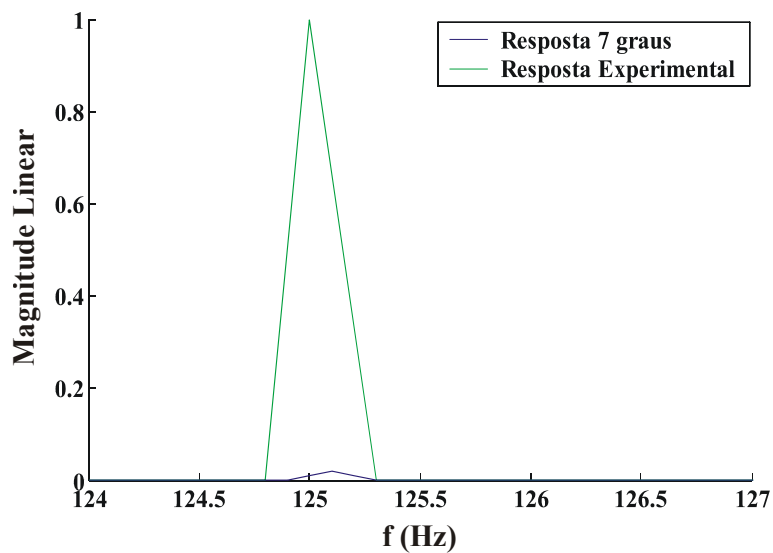


Figura 8.2: Espectro de frequência 125 Hz - Roda 2.

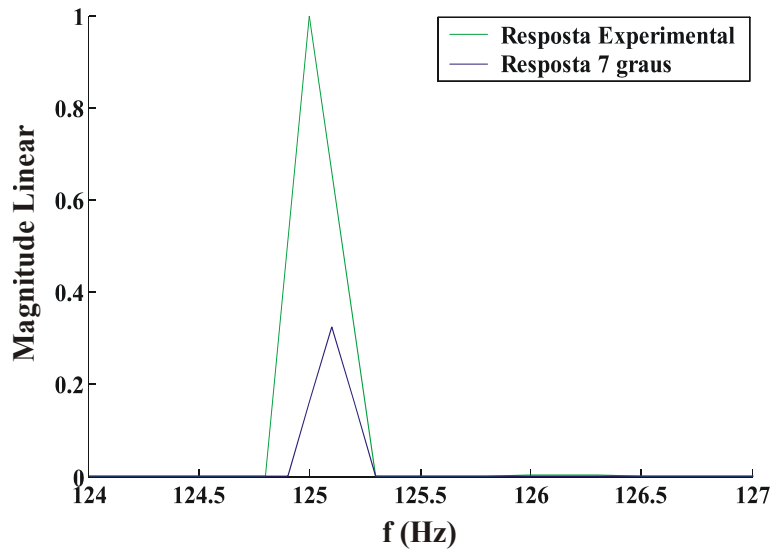


Figura 8.3: Espectro de frequência 125 Hz - Roda 3.

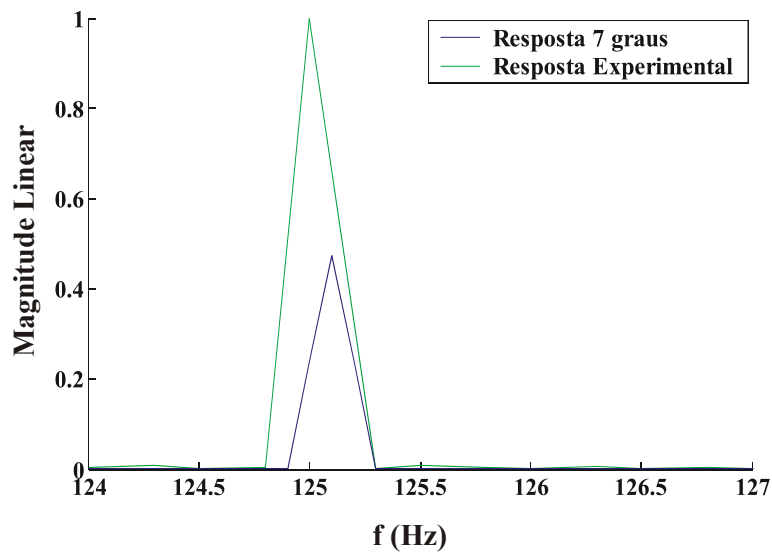


Figura 8.4: Espectro de frequência 125 Hz - Roda 4.

Como pode ser observado nas Figuras 8.1 a 8.4, as magnitudes dos modelos teóricos lineares se apresentam de forma bastante aproximada das magnitudes lineares experimentais, as quais correspondem a frequência de 125 Hz, sendo as amplitudes dos modelos experimentais maiores que a dos modelos teóricos lineares.

Vale lembrar que a massa não suspensa para os modelos com dois graus de liberdade, a qual representa a roda dianteira esquerda do veículo Mini Baja excitada experimentalmente, tem sua posição dada pelo ponto 1, conforme é mostrado na Figura 3.1.

Comentários adicionais destes resultados são encontrados no item 8.4 deste capítulo.

No item que segue, são apresentadas as superposições das curvas obtidas pelo ensaio experimental e modelos teóricos não lineares.

### 8.3 Superposições das curvas obtidas pelo ensaio experimental e modelos teóricos não lineares

Com a finalidade de demonstrar de forma mais adequada as superposições das curvas obtidas pelo ensaio experimental e os modelos teóricos não lineares, são mostrados nas Figuras 8.5 a 8.8, faixas dos espectros normalizados que se aproximam das frequências nas quais se observam a presença de picos de energia para estes modelos, permitindo assim, a melhor visualização dos resultados.

A normalização dos espectros de deslocamento para cada roda, os quais são divididos em faixas de frequência, é feita em relação às respectivas magnitudes lineares experimentais na frequência de 125 Hz.

Magnitudes lineares experimentais correspondentes à frequência de 125 Hz (m)	
Espectro de frequência - Roda 1	$1,52 \cdot 10^{-7}$
Espectro de frequência - Roda 2	$2,98 \cdot 10^{-8}$
Espectro de frequência - Roda 3	$1,33 \cdot 10^{-8}$
Espectro de frequência - Roda 4	$6,03 \cdot 10^{-9}$

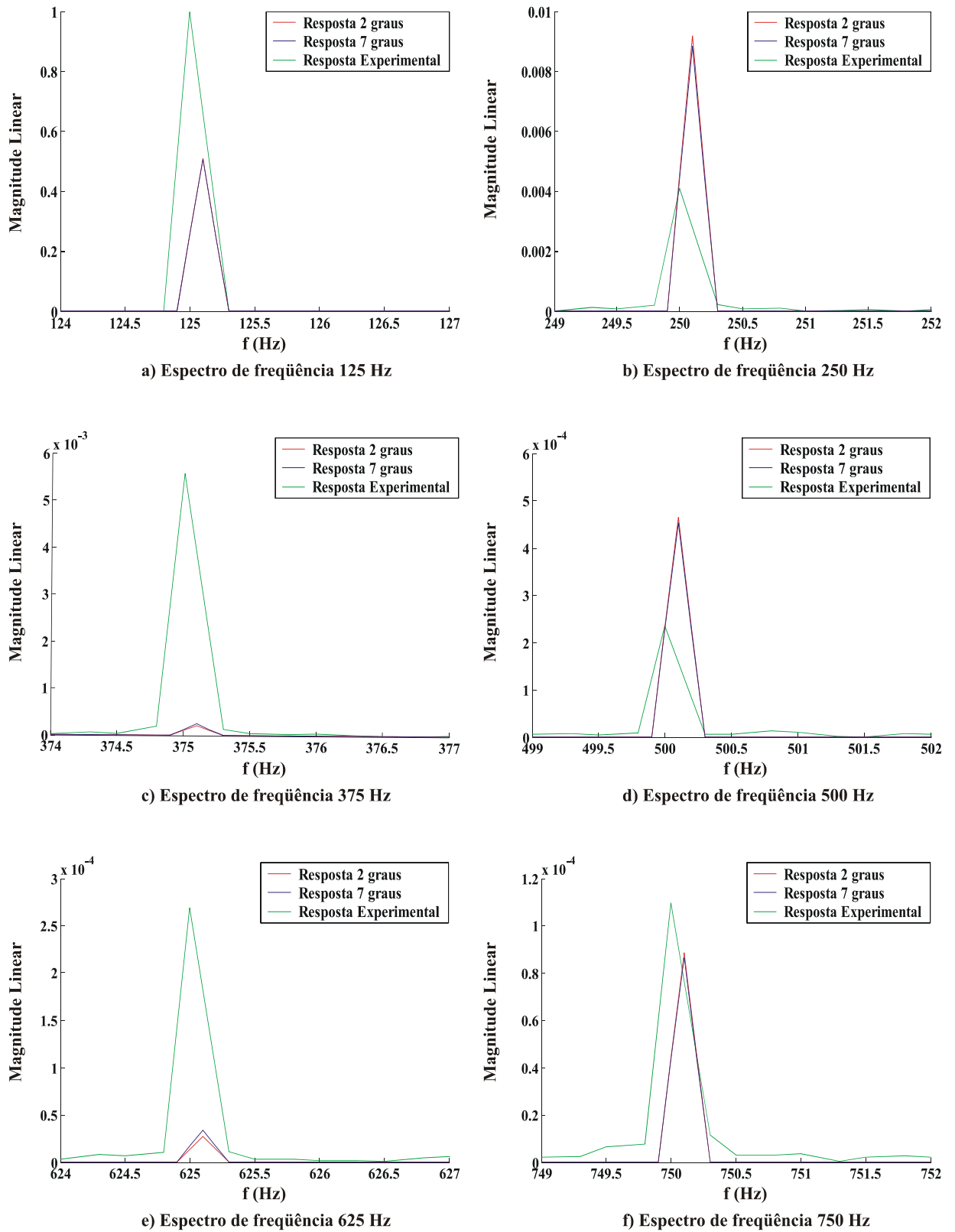


Figura 8.5: Espectro de frequência - Roda 1.

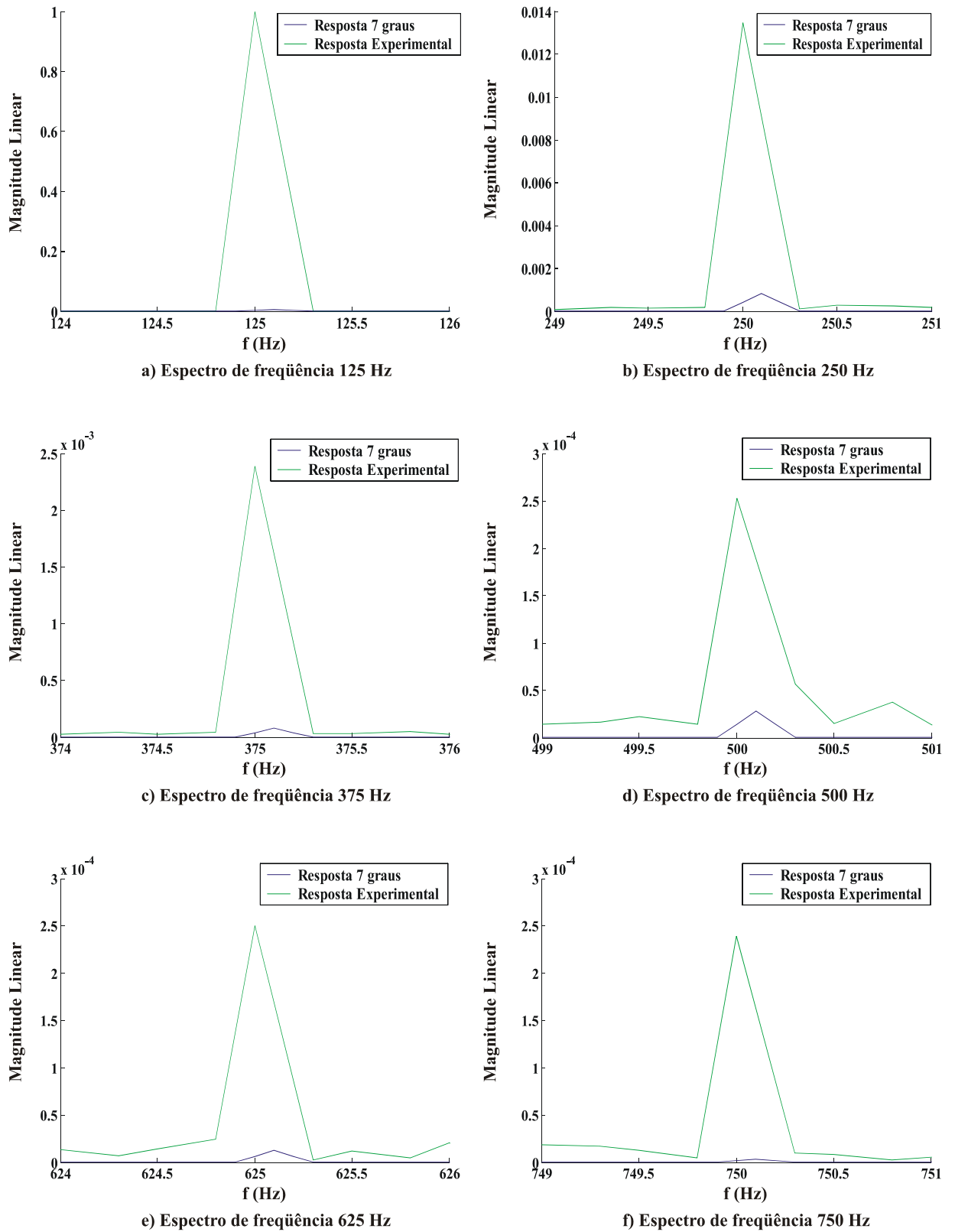


Figura 8.6: Espectro de frequência - Roda 2.

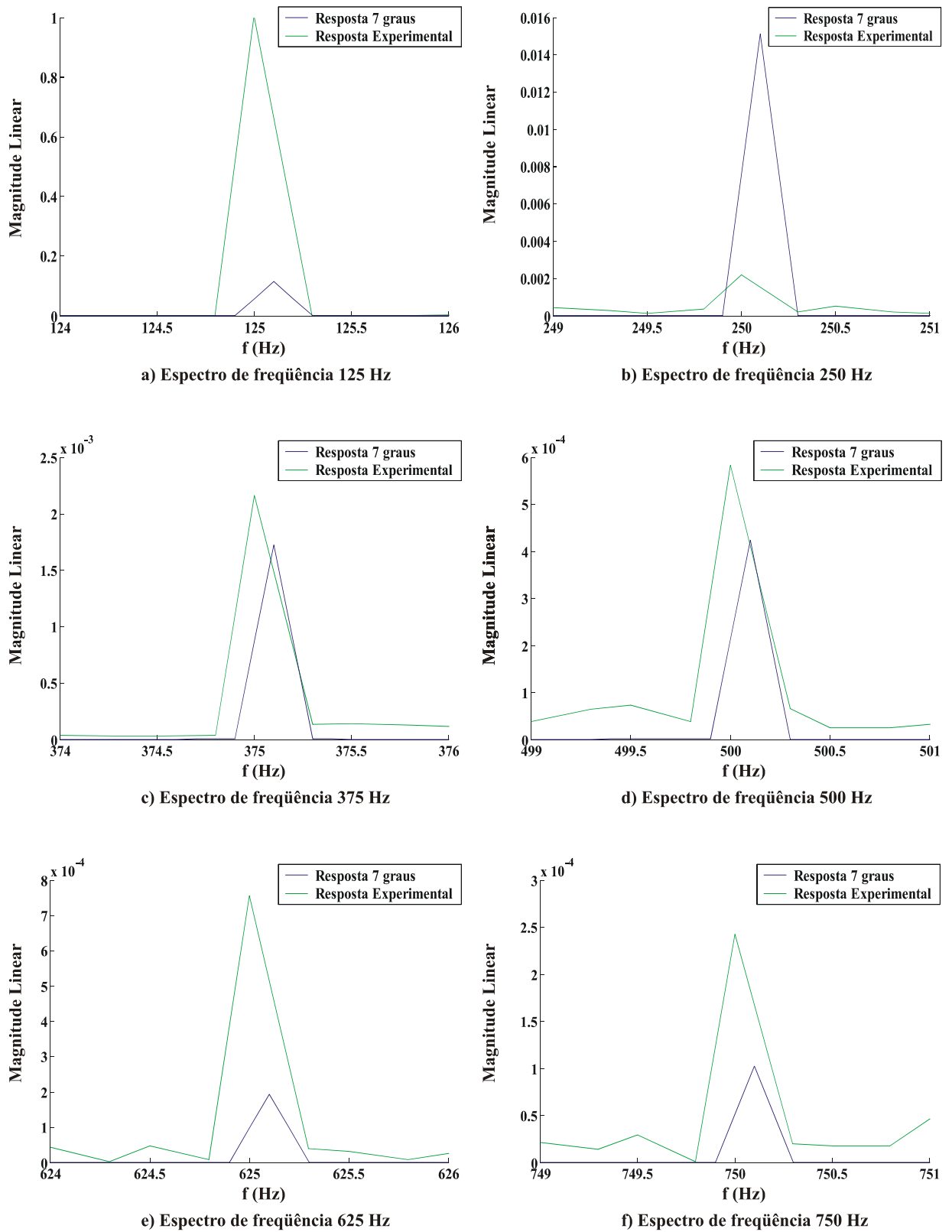


Figura 8.7: Espectro de frequência - Roda 3.



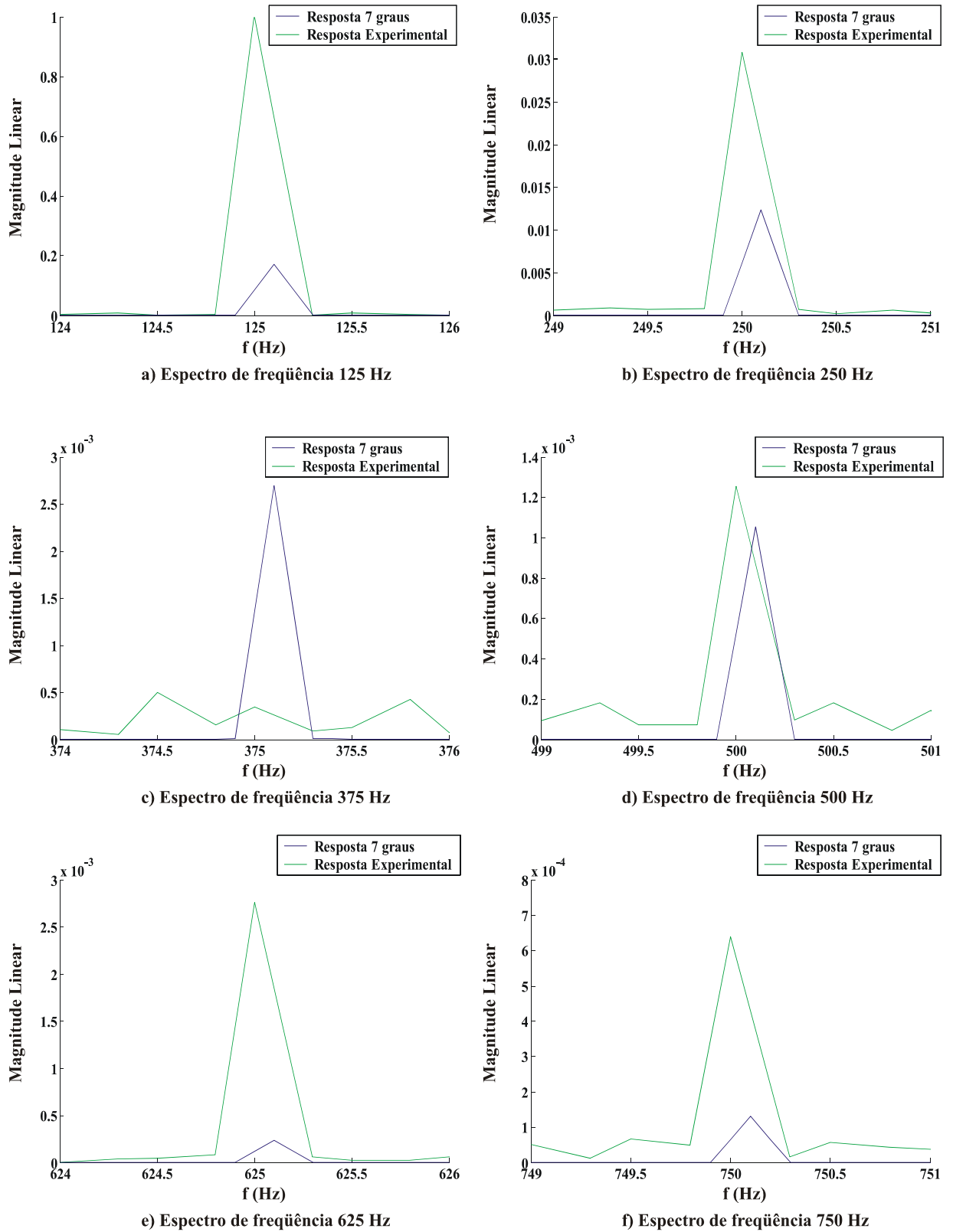


Figura 8.8: Espectro de frequência - Roda 4.

Novamente, nas Figuras 8.5 a 8.8, observa-se a grande aproximação das magnitudes características das respostas teóricas não lineares com as magnitudes experimentais, correspondentes as frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental de 125 Hz.

Na discussão a seguir são feitos comentários e análises a respeito dos resultados obtidos no presente trabalho.

## 8.4 Discussão

Algumas observações importantes em relação a comparação dos resultados teóricos e experimental são feitas nesta discussão.

Como pode ser observado nas Figuras 8.5 a 8.8, os espectros de deslocamento dos modelos não lineares e experimental apresentam praticamente a mesma distribuição de picos de energia, ou seja, picos discretos correspondentes as frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental de 125 Hz. Os espectros de deslocamento dos modelos lineares, Figuras 8.1 a 8.4, apresentam apenas picos de energia na frequência de 125 Hz, que corresponde a frequência de excitação, conforme esperado.

Conseqüentemente, os modelos não lineares representam o comportamento do veículo real de uma forma mais adequada.

É possível verificar também diferenças entre as amplitudes dos modelos teóricos e experimental, as quais se justificam pelo fato dos modelos teóricos serem uma representação simplificada do modelo experimental e não levarem em consideração uma série de fatores presentes na configuração do veículo real, tais como:

- flexibilidade estrutural,
- não homogeneidade das propriedades mecânicas de materiais presentes no veículo,
- presença de elementos de união, como parafusos, porcas e rebites,
- ocorrência de deflexões em componentes como coxins do suporte do motor e buchas da suspensão,
- existência de componentes mecânicos que interferem e limitam os deslocamentos dos subsistemas (massa suspensa e massas não suspensas), tais como buchas, arruelas e batentes.
- configurações particulares da suspensão do veículo Mini Baja composta de dois braços transversais (duplo A) e inclinação das molas e amortecedores em relação aos braços da suspensão,

- ângulos de geometria de direção como Câmber, Caster, convergência das rodas e inclinação do pino mestre, que influenciam e alteram o curso da suspensão e
- amortecimento estrutural da carroceria e pneus.

Nos resultados apresentados, tanto na análise linear como não linear, as variações das amplitudes de deslocamento entre os modelos com dois e sete graus de liberdade são muito pequenas. Desta forma, o modelo plano (dois graus de liberdade) pode ser bastante adequado para o cálculo de forças nos elementos da suspensão, tais como molas, amortecedores, pivos, rolamentos, eixos, balanças, etc. Estes resultados também podem servir de dados de entrada para ensaios experimentais e simulação de modelos numéricos construídos a partir de programas de Elementos Finitos bem como avaliação de fatores importantes como segurança e estabilidade.

Os resultados obtidos com os modelos tridimensionais (sete graus de liberdade), especialmente aqueles que consideram o comportamento não linear do amortecedor, são muito importantes para análises do tipo:

- estimativa dos modos e respectivas frequências naturais de vibração do modelo experimental,
- avaliação do conforto de ocupantes,
- levantamento de falhas que possam ocorrer devido vibrações com frequências próximas à frequência natural do sistema,
- cálculo da função transferência e
- verificação da influência particular de um determinado elemento mecânico no comportamento geral de um veículo.

# Capítulo 9

## Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

### 9.1 Conclusões

O presente trabalho é uma primeira abordagem na representação do comportamento real de um veículo.

Sendo assim, foram desenvolvidos modelos matemáticos, solucionados analiticamente e numericamente, cujas respostas foram comparadas com os resultados experimentais de um veículo real.

Dentro do conjunto de ensaios experimentais necessários para determinar os dados de entrada nos modelos matemáticos, houve um aprendizado muito grande do autor. Deste aprendizado, podem ser citadas algumas observações, tais como:

- Todos experimentos devem ser feitos com critério e cautela para evitar o acúmulo de erros nos dados obtidos.
- As limitações mecânicas de componentes, como molas, amortecedores e pneus devem ser respeitadas, para evitar a ocorrência de falhas que possam mascarar os resultados obtidos durante o levantamento das propriedades destes elementos.
- Os dados de ensaio de caracterização da rigidez de molas e pneus devem ser medidos e adquiridos até o momento de descarga total do atuador.
- O ensaio de caracterização do amortecedor exige uma atenção especial em relação ao número de ciclos de ensaio, pois ocorrem alterações das propriedades do fluido de trabalho do amortecedor com a variação da temperatura.

- A pressão de calibração deve ser sempre aferida durante o ensaio de caracterização do pneu, pois os coeficientes de rigidez estão diretamente relacionados com a definição destas pressões.
- A medição precisa de distâncias é um fator fundamental. Devem ser sempre observadas as cotas de projeto e se possível comprovadas experimentalmente.
- Os equipamentos usados para medições devem ser calibrados e aferidos constantemente.
- Os valores dos momentos de inércia são extremamente sensíveis à pequenas variações nas medições dos períodos de oscilação. Deve ser evitado o uso de cronômetros digitais acionados manualmente para a medição destes períodos. A preocupação em utilizar um sensor ligado à um osciloscópio digital mostra claramente a importância de eliminar a subjetividade nestas medições.
- A construção da plataforma para o levantamento experimental dos momentos de inércia deve ser feita de forma que os componentes sejam distribuídos simetricamente, facilitando assim a localização dos centros de gravidade e cálculos dos momentos de inércia dos elementos que a compõe.
- A determinação correta do centro de gravidade (CG) do veículo é outro fator fundamental nas medições dos momentos de inércia. Esta verificação pode ser feita da seguinte forma: define-se a posição do CG do veículo. A plataforma para o balanço do veículo deve ser suspensa e nivelada através de um goniômetro. O mesmo nivelamento deve ser mantido quando o CG do veículo é posicionado sobre o CG da plataforma.
- Os acelerômetros uniaxiais utilizados nos ensaios experimentais devem ser colados de forma que as acelerações sejam captadas apenas na direção de interesse, evitando medições de componentes em outras direções.
- É importante a escolha de número de pontos e frequência amostral que permitam a aquisição de dados suficientes para uma análise mais completa das respostas.

Houve também um amadurecimento bastante grande do autor em relação ao conteúdo teórico necessário para o desenvolvimento do presente trabalho, sendo algumas observações apresentadas a seguir:

- A formulação das equações de movimento podem ser obtidas tanto pelo equilíbrio direto de forças, como pela aplicação das equações de Lagrange originadas do princípio de Hamilton.

- O cálculo das propriedades equivalentes nos modelos teóricos são fundamentais para a verificação do efeito de componentes mecânicos em posições diferenciadas das posições reais.
- Os métodos de solução analítica e integração direta no tempo empregados, fornecem praticamente as mesmas respostas para os sistemas de equações diferenciais dos modelos propostos.
- Os espectros de frequência facilitam bastante a análise das respostas dos modelos pois permitem verificar o efeito e contribuição de cada conteúdo de frequência da excitação, separadamente.
- Os modelos lineares apresentam picos de energia na frequência de 125 Hz, correspondente a frequência de excitação de entrada enquanto que os modelos não lineares possuem valores de picos nas frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental de 125 Hz.
- O modelo experimental também apresenta os espectros de frequência com magnitudes nas frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental de 125 Hz.
- Os modelos não lineares representam de forma adequada o comportamento diferenciado dos amortecedores (simples efeito) quando submetidos as cargas de tração e compressão.
- Conforme os resultados obtidos, os modelos planos (dois graus de liberdade) são adequados para a determinação de forças nos elementos das suspensões, podendo fornecer parâmetros de entrada em ensaios experimentais e modelos numéricos (Método de Elementos Finitos), e avaliação de fatores importantes como segurança e estabilidade.
- Uma avaliação mais específica de componentes da suspensão como pneus, pode ser feita também através de um modelo plano com dois graus de liberdade.
- Os modelos tridimensionais permitem uma análise mais criteriosa, como por exemplo, estimativa dos modos, frequências naturais de vibração e funções de transferência, verificação da influência particular de um determinado elemento mecânico no comportamento geral do veículo e avaliação do conforto de ocupantes.

Os resultados obtidos através da aplicação dos modelos teóricos propostos, fornecem uma estimativa inicial do comportamento de um veículo real, sendo os desenvolvimentos

aqui realizados essenciais para a abertura de novos horizontes que possam vir acrescentar e enriquecer o presente trabalho, ou ainda, iniciar uma nova linha de pesquisa no que diz respeito à análise de estruturas veiculares.

Dentro deste contexto, no item que segue, são deixadas sugestões para a realização de trabalhos futuros.

## 9.2 Sugestões para trabalhos futuros

Os trabalhos teóricos e experimentais aqui realizados, permitem que uma série de propostas possam ser estudadas e desenvolvidas.

Desta forma, ficam as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Acréscimo de novos graus de liberdade de tal forma a representar novos subsistemas, como por exemplo direção e transmissão.
- Introduzir efeitos nos modelos tais como efeitos giroscópicos e massas desbalanceadas.
- Inclusão e representação do amortecimento histerético de pneus e chassi.
- Aplicação de ferramentas probabilísticas na definição de propriedades mecânicas experimentais.
- Realização de ensaios em novas condições de experimentação, como por exemplo: utilização de equipamentos hidráulicos para excitação do modelo real.
- Análise e levantamento dos modos e respectivas frequências naturais do modelo.
- Desenvolvimento de modelos teóricos, incluindo novas configurações de suspensões como por exemplo, eixos rígidos e suspensões independentes.
- Desenvolvimento de modelos específicos de subsistemas, como por exemplo o tratamento matemático de propriedades de pneus.
- Otimização no tratamento de sinais coletados durante a análise experimental do veículo.
- Aplicação de outros tipos de carregamentos e verificação das respostas dos modelos propostos neste trabalho.
- Otimização nos processos de levantamento de parâmetros experimentais, como a medição de momentos de inércia e propriedades de molas amortecedores e pneus.

- Aplicação de novos métodos para a medição de dimensões do veículo, como por exemplo a tecnologia de Fotometria.
- Utilização de um outro veículo experimental para validação dos modelos propostos.
- Validação dos modelos teóricos presentes em relação a um modelo numérico dinâmico construído através do Método de Elementos Finitos.



# Referências Bibliográficas

- [1] BACK, N; FORCELLINI, F.A. *Projeto de Produtos*, Curso de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.
- [2] SEGEL, L. Keynote Address: Some Reflections on Early Efforts to Investigate the Directional Stability and Control of the Motor Car, *Transportation Systems*, ASME Publication AMD, v. 108, 1990.
- [3] MILLER, M.P. An Accurate Method of Measuring The Moments of Inertia of Airplanes, *National Advisory Committee For Aeronautics*, Technical Note 351, Washington, USA, 1930.
- [4] GREEN, M.W. Measurements of the Moments of Inertia of Full Scale Airplanes, *National Advisory Committee For Aeronautics*, Technical Note 265, 1927.
- [5] RINGEGNI, P.L; ACTIS, M.D; PATANELLA, A.J. *An experimental technique for determining mass inertial properties of irregular shape bodies and mechanical assemblies*, Universidad nacional de La Plata, School of Engineering, Aeronautical Department, La Plata, Buenos Aires, Argentina, 2000.
- [6] SAYERS, M.W; HAN, D. A. Generic Multibody Vehicle Model for Simulating Handling and Braking. *Vehicle System Dynamics*, v. 25, p. 599-613, 1996.
- [7] SOCIETY OF AUTOMOTIVE ENGINEERS. SAE J670e. *Vehicle Dynamics Terminology*. Warrendale, PA.
- [8] BESSA, W.M; SILVA, F.R; DUTRA, M.S. *Comportamento dinâmico de estruturas apoiadas em fundações visco-elásticas e submetidas a cargas móveis*, CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, XVI, 2001, Uberlândia, Brasil.
- [9] METZ, D et ali. The Design of Variable Antidive Vehicle Suspension Systems, *Journal of Engineering for Industry*, Transactions of the ASME, p 171-175, 1976.

- [10] COSTA, A.L.A; PADOVESE, L.R. Contact Simulation Between Truck Tires and the Roadway Concerning the Tread Wear, *Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP*, Departamento de Engenharia Mecânica, São Paulo, BT/PME/0102, 2001.
- [11] VALLE, N.D; KRETZER, J.R; SOUZA, N. Levantamento Experimental de Parâmetros da Suspensão de um Veículo, *Re.BrCMe*, Rio de Janeiro, v. 2, p. 35-39, 1982.
- [12] MOURA, E.D.A; JUNIOR, J.J.L; PINHEIRO, C.A.M.P. Estudo de uma suspensão Veicular Passiva, Semi Ativa e Ativa, *Revista Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico*, v. 26, p. 43-49, Itajubá, MG, Brasil, 2002.
- [13] DALLY, J.W; RILEY, W.F. *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1965. 520 p.
- [14] NICOLAZZI, L.C; DA ROSA, E; LEAL, L.C.M. *Uma introdução à teoria de veículos*, Departamento de Engenharia Mecânica-CTC, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2001.
- [15] ESPINDOLA, J.J. Notas de aula da disciplina Fundamentos de Vibrações, EMC-6705, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.
- [16] HEIDRICH, R.M. Notas de aula da disciplina Controle de Vibrações, EMC-5140, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1998.
- [17] CLOUGH, R.W; PENZIEN, J. *Dynamics of Structures*, Singapore, McGraw-Hill, Inc., 1982.
- [18] COOK, R.D; MALKUS, D.S; PLESHA, M.E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, University of Wisconsin-Madison, Canada, Jonh Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [19] GILLESPIE, T.D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Warrendale, USA: SAE - Inc. 1992. 495p.
- [20] ALVES, M.K. Notas de aula da disciplina Métodos Numéricos em Dinâmica de Estruturas, EMC-6501, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.
- [21] BOYCE, W.E; DIPRIMA, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- [22] KREYSZIG, E. *Matemática Superior*. Tradução de Carlos Campos de Oliveira. Rio de Janeiro: LTC, v.1, 1978.

- [23] HBM, Manual de operação do equipamento Spider8, Spider8-30 e programa Catman Express.
- [24] THOMSON, W.T. *Teoria da vibração com aplicações*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. 462p.
- [25] HEWLETT PACKARD. *Getting Started*. PC Spectrum/Network Analyser HP 3566A/3567A, HP Part Number: 03566-90042, Microfiche Part Number: 03566-90242, USA, December, 1998.
- [26] HEWLETT PACKARD. *Measurement Hardware Service Manual*. PC Spectrum/Network Analyser HP 3566A/3567A, HP Part Number: 03566-90048, Microfiche Part Number: 03566-90248, USA, August, 1995.

# Apêndice A

## Parcelas de energia para o modelo com dois graus de liberdade

**Energia cinética** A parcela de energia cinética para o modelo com dois graus de liberdade é dada por:

$$T_{Total} = \frac{1}{2} \left[ m_{\frac{1}{4}} \dot{z}^2(t) + m_i \dot{z}_i^2(t) \right] \quad (A.1)$$

sendo:

- $m_{\frac{1}{4}}$  - a massa suspensa da carroceria para o modelo com dois graus de liberdade,
- $m_i$  - a massa da i-ésima roda e componentes,
- $\dot{z}$  - a velocidade vertical da massa da carroceria e
- $\dot{z}_i$  - a velocidade vertical da massa das rodas e componentes.

**Energia potencial** A parcela de energia potencial é dada por:

$$V_{Total} = \frac{1}{2} \left[ k_i \delta_i^2(t) + k_i^p \delta_i^{p2}(t) \right] \quad (A.2)$$

podendo ser reescrita como

$$V_{Total} = \frac{1}{2} \left[ k_i (z(t) - z_i(t))^2 + k_i^p (z_i(t) - z_i^s(t))^2 \right] \quad (A.3)$$

sendo:

- $k_i$  - a rigidez da mola sobre a i-ésima roda,
- $k_i^p$  - a rigidez do i-ésimo pneu,
- $z(t)$  - o deslocamento vertical da massa suspensa,
- $z_i(t)$  - o deslocamento vertical da i-ésima roda e
- $z_i^s(t)$  - a rugosidade do solo sob a i-ésima roda.

### Função dissipativa de Rayleigh

As forças dissipativas ou não conservativas podem ser oriundas de mecanismos de amortecimento viscoso bem como de forças circulatorias, as quais são incluídas nos sistemas de equações através da seguinte função dissipadora [15],

$$\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + d_{ij} \dot{q}_i q_j \right) \quad (\text{A.4})$$

sendo:

- $c_{ij}$  - o coeficiente de amortecimento viscoso,
- $d_{ij}$  - o coeficiente do amortecimento das forças circulatorias,
- $\dot{q}_i$  - a velocidade da  $i$ -ésima coordenada generalizada,
- $q_j$  - a  $j$ -ésima coordenada generalizada e
- $n$  - o número de graus de liberdade do sistema.

Na equação (A.4) o primeiro termo do lado direito da igualdade é associado com as forças de amortecimento viscoso enquanto que o último é associado ao amortecimento das forças circulatorias. Como neste modelo a aerodinâmica não será considerada como um fator importante no amortecimento do veículo, o último termo da equação (A.4) é negligenciado. Com isto definido, a potência dissipada pelos amortecedores do veículo é dada por:

$$\mathfrak{S}_c = \frac{1}{2} \left[ c_i \dot{\delta}_i^2(t) \right] \quad (\text{A.5})$$

ou, em termos dos graus de liberdade da carroceria e das suspensões, por:

$$\mathfrak{S}_c = \frac{1}{2} \left[ c_i (\dot{z}(t) - \dot{z}_i(t))^2 \right]. \quad (\text{A.6})$$

sendo:

- $c_i$  - o coeficiente de amortecimento sobre a  $i$ -ésima roda,
- $\dot{z}(t)$  - a velocidade vertical da massa suspensa e
- $\dot{z}_i(t)$  - a velocidade vertical da  $i$ -ésima roda

# Apêndice B

## Parcelas de energia para o modelo com sete graus de liberdade

### Carroceria

**Energia cinética** O objetivo de calcular a energia cinética do sistema é o de determinar a matriz de inércia do conjunto, a partir de conceitos de mecânica Lagrangeana. A energia cinética do subsistema carroceria é dada por:

$$T_c = \frac{1}{2} \left[ m \dot{z}^2(t) + I_x \dot{\phi}^2(t) + I_y \dot{\theta}^2(t) \right] \quad (\text{B.1})$$

sendo:

$m$  - a massa da carroceria,

$I_x$  - o momento de massa da carroceria em torno do eixo,  $x$ , axial ao carro e

$I_y$  - o momento de massa da carroceria em torno do eixo,  $y$ , transversal ao carro.

**Energia potencial** O objetivo da determinação da energia potencial é o de obter a matriz de rigidez do sistema. A energia potencial da carroceria do veículo com suspensões independentes é:

$$V_c = \frac{1}{2} \left[ k_1 \delta_1^2(t) + k_2 \delta_2^2(t) + k_3 \delta_3^2(t) + k_4 \delta_4^2(t) \right] \quad (\text{B.2})$$

que em termos dos deslocamentos é reescrita como:

$$\begin{aligned}
V_c = & \frac{1}{2} \left[ k_1 \left( z(t) - \phi(t) \frac{t_I}{2} - \theta(t) a_I - z_1(t) \right)^2 \right. \\
& + k_2 \left( z(t) + \phi(t) \frac{t_I}{2} - \theta(t) a_I - z_2(t) \right)^2 \\
& + k_3 \left( z(t) + \phi(t) \frac{t_{II}}{2} + \theta(t) a_{II} - z_3(t) \right)^2 \\
& \left. + k_4 \left( z(t) - \phi(t) \frac{t_{II}}{2} + \theta(t) a_{II} - z_4(t) \right)^2 \right]. \tag{B.3}
\end{aligned}$$

**Função dissipativa de Rayleigh** A potência dissipada pelos amortecedores do veículo, dada por:

$$\mathfrak{S}_c = \frac{1}{2} \left[ c_1 \dot{\delta}_1^2(t) + c_2 \dot{\delta}_2^2(t) + c_3 \dot{\delta}_3^2(t) + c_4 \dot{\delta}_4^2(t) \right] \tag{B.4}$$

é reescrita, em termos dos graus de liberdade da carroceria e das suspensões, como:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_c = & \frac{1}{2} \left[ c_1 \left( \dot{z}(t) - \dot{\phi}(t) \frac{t_I}{2} - \dot{\theta}(t) a_I - \dot{z}_1(t) \right)^2 \right. \\
& + c_2 \left( \dot{z}(t) + \dot{\phi}(t) \frac{t_I}{2} - \dot{\theta}(t) a_I - \dot{z}_2(t) \right)^2 \\
& + c_3 \left( \dot{z}(t) + \dot{\phi}(t) \frac{t_{II}}{2} + \dot{\theta}(t) a_{II} - \dot{z}_3(t) \right)^2 \\
& \left. + c_4 \left( \dot{z}(t) - \dot{\phi}(t) \frac{t_{II}}{2} + \dot{\theta}(t) a_{II} - \dot{z}_4(t) \right)^2 \right]. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

## Eixo dianteiro

Neste item são calculadas apenas a energia cinética e a energia potencial do eixo dianteiro, já que o efeito das forças dissipativas dos pneus não é considerada neste desenvolvimento.

**Energia cinética** A energia cinética no eixo dianteiro é dada por:

$$T_{er_I} = \frac{1}{2} [m_1 (\dot{z}_1(t))^2 + m_2 (\dot{z}_2(t))^2], \tag{B.6}$$

sendo:

$m_1$ - a massa da roda dianteira esquerda,

$m_2$ - a massa da roda dianteira direita e

$\dot{z}_1(t)$  e  $\dot{z}_2(t)$  - a velocidade vertical das rodas dianteira esquerda e direita respectivamente.

**Energia potencial** A energia potencial do eixo dianteiro é dada por:

$$V_{erI} = \frac{1}{2} [k_1^p (\delta_1^p(t))^2 + k_2^p (\delta_2^p(t))^2], \quad (\text{B.7})$$

que em termos dos deslocamentos é reescrita como:

$$V_{erI} = \frac{1}{2} \{k_1^p [z_1(t) - z_1^s(t)]^2 + k_2^p [z_2(t) - z_2^s(t)]^2\}. \quad (\text{B.8})$$

### **Eixo traseiro**

Como a energia dissipada pelos pneus é desprezável, neste item se calcula, também, apenas a energia cinética e a potencial.

**Energia cinética** Para o eixo traseiro a energia cinética é escrita como:

$$T_{erII} = \frac{1}{2} [m_3 (\dot{z}_3(t))^2 + m_4 (\dot{z}_4(t))^2]. \quad (\text{B.9})$$

sendo:

$m_3$ - a massa da roda traseira direita,

$m_4$ - a massa da roda traseira esquerda e

$\dot{z}_3(t)$  e  $\dot{z}_4(t)$  - a velocidade vertical das rodas traseira direita e esquerda, respectivamente.

**Energia potencial** Para o eixo traseiro a energia potencial é dada por:

$$V_{erII} = \frac{1}{2} [k_3^p (z_3(t) - z_3^s(t))^2 + k_4^p (z_4(t) - z_4^s(t))^2]. \quad (\text{B.10})$$

### **Superposição dos efeitos**

A seguir é feita a superposição das energias calculadas para que se possa aplicar a equação de Lagrange e obter, desta forma, o sistema de equações de movimento para o modelo com sete graus de liberdade.

**Energia cinética total para um veículo com suspensão independente na dianteira e traseira** A energia cinética de um veículo dotado de suspensões independentes é dada pela soma das parcelas (B.1) , (B.6) e (B.9)

$$T_{Total} = T_c + T_{erI} + T_{erII} \quad (\text{B.11})$$



que, em termos dos graus de liberdade do sistema, é reescrita como

$$T_{Total} = \frac{1}{2} \left[ m \dot{z}^2(t) + I_x \dot{\phi}^2(t) + I_y \dot{\theta}^2(t) + m_1 (\dot{z}_1(t))^2 + m_2 (\dot{z}_2(t))^2 + m_3 (\dot{z}_3(t))^2 + m_4 (\dot{z}_4(t))^2 \right]. \quad (\text{B.12})$$

**Energia potencial total para um veículo com suspensão independente na dianteira e traseira** A energia potencial de todo o conjunto é dada pela soma direta das parcelas (B.3), (B.8) e (B.10), desenvolvidas anteriormente, como segue,

$$V_{Total} = V_c + V_{erI} + V_{erII} \quad (\text{B.13})$$

ou

$$\begin{aligned} V_{Total} = & \frac{1}{2} \left[ k_1 \left( z(t) - \phi(t) \frac{t_I}{2} - \theta(t) a_I - z_1(t) \right)^2 \right. \\ & + k_2 \left( z(t) + \phi(t) \frac{t_I}{2} - \theta(t) a_I - z_2(t) \right)^2 \\ & + k_3 \left( z(t) + \phi(t) \frac{t_{II}}{2} + \theta(t) a_{II} - z_3(t) \right)^2 \\ & + k_4 \left( z(t) - \phi(t) \frac{t_{II}}{2} + \theta(t) a_{II} - z_4(t) \right)^2 \\ & + k_1^p (z_1(t) - z_1^s(t))^2 + k_2^p (z_2(t) - z_2^s(t))^2 \\ & \left. + k_3^p (z_3(t) - z_3^s(t))^2 + k_4^p (z_4(t) - z_4^s(t))^2 \right] \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

**Potência dissipada pelos amortecedores de um veículo com suspensão independente na dianteira e traseira** A dissipação de potência é dada pela equação (B.5), pois este modelo considera apenas a dissipação de energia dos amortecedores da suspensão

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_c = & \frac{1}{2} \left[ c_1 \left( \dot{z}(t) - \dot{\phi}(t) \frac{t_I}{2} - \dot{\theta}(t) a_I - \dot{z}_1(t) \right)^2 \right. \\ & + c_2 \left( \dot{z}(t) + \dot{\phi}(t) \frac{t_I}{2} - \dot{\theta}(t) a_I - \dot{z}_2(t) \right)^2 \\ & + c_3 \left( \dot{z}(t) + \dot{\phi}(t) \frac{t_{II}}{2} + \dot{\theta}(t) a_{II} - \dot{z}_3(t) \right)^2 \\ & \left. + c_4 \left( \dot{z}(t) - \dot{\phi}(t) \frac{t_{II}}{2} + \dot{\theta}(t) a_{II} - \dot{z}_4(t) \right)^2 \right]. \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$