Universidade Federal de Santa Catarina

Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica

Estudo do objeto proporção:

elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado

Dissertação de Mestrado

Márcia Maria Bernal

Florianópolis
2004

Márcia Maria Bernal

Estudo do objeto proporção:

elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica.

Orientadora: Profa. Dra. Neri Terezinha Both Carvalho

Florianópolis
2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

"ESTUDO DO OBJETO PROPORÇÃO: ELEMENTOS DE SUA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA COMO OBJETO A ENSINAR E COMO OBJETO ENSINADO"

Dissertação submetida ao Colegiado do Curso de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 07/05/04

Dra. Neri Terezinha Both Carvalho (CFM/UFSC – Orientadora)

Dra. Cileda Coutinho (PUC/SP – Examinadora)

Dra. Regina Damm (CFM/UFSC – Examinadora)

Dr. Méricles Thadeu Moretti (CFM/UFSC – Suplente)

Márcia Maria Bernal

Florianópolis, Santa Catarina, maio de 2004

Para Nina, Téo e Taís,
meus filhos e
professores da Vida.

Agradeço a todos aqueles que estiveram ao meu lado no decorrer da elaboração deste trabalho, em especial, aos meus pais, Edgar e Marciana, à minha tia Irene, a meus irmãos e suas famílias, a Joel, meu marido e a Nina, Téo e Taís, meus queridos filhos, pelo apoio e incentivo em todos os momentos.

Meus agradecimentos a Beatriz Carmolinga, que me confiou seu raro exemplar da Aritmética Progressiva, de Antonio Trajano, elemento importante na elaboração desta dissertação;

ao professor Arden Zylbersztajn, coordenador do programa, e à secretária Sandra Mara, pelo zelo com que trataram minhas questões administrativas junto ao Programa de Pós-Graduação e também junto ao CNPq;

à professora Carmen Suzane C. Gimenez, que me acompanhou durante a graduação, pela confiança e orientação que me levaram ao curso de Mestrado;

à professora Nadir Ferrari pelo cuidado com que conduziu a disciplina Seminário de Dissertação II;

aos integrantes da comissão examinadora, professores Cileda Coutinho, Regina Damm e Méricles T Moretti, pelas valiosas observações que muito contribuíram na elaboração desta dissertação.

Por fim, minha especial gratidão à professora Neri Terezinha Both Carvalho, orientadora da dissertação. Seu interesse e dedicação, em todos os momentos, trouxeram coragem e confiança para escrever este trabalho. Agradeço, sobretudo, por meu aprendizado, fruto de seu emprenho ao tratar as questões relativas à Educação Matemática.

Resumo

BERNAL, Márcia Maria. **Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado**. Florianópolis, 2004. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, 2004.

Esta pesquisa tem por objetivo identificar objeto matemático proporção enquanto objeto a ensinar e, enquanto objeto ensinado em classe de 6ª série do Ensino Fundamental. Sob o referencial da Teoria Antropológica do Saber e da Teoria da Transposição Didática, de Chevallard, é realizado o estudo do conceito e da organização matemática do objeto proporção, em termos de tarefas, técnicas e tecnologias. Para identificá-lo enquanto saber a ensinar busca-se evidenciar questões relativas ao surgimento do saber proporção e a seu tratamento como objeto matemático, em um breve estudo histórico e em um estudo de publicações consideradas como instituições de formação de professores. O estudo de livros didáticos e uma observação em classe permite identificar elementos da organização matemática do objeto proporção enquanto saber ensinado em classe de 6ª série. Estes estudos permitem identificar, no ensino atual, duas diferentes abordagens das questões relativas à proporção. Uma abordagem com origem na teoria grega das proporções, na qual a proporção é objeto de estudo, e outra abordagem, na qual o objeto proporção não é presente e as questões relativas à proporção são ensinadas no contexto dos números reais, das igualdades e equações, com ênfase à noção de proporcionalidade.

Palavras-chave: proporção, organização matemática, saber a ensinar, saber ensinado, observação em classe ordinária.

Résumé

Bernal, Márcia M. **Étude de l’objet proportion : éléments de son organisation mathématique, comme objet à enseigner et comme objet enseigné**. Florianópolis, 2004. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, 2004.

Cette recherche a pour objectif d’identifier l’objet mathématique proportion, comme objet à enseigner et comme objet enseigné en classe de 6ª série de l’Enseignement Fondamental. Sous le référenciel de la Théorie Anthropologique du Savoir et de la Théorie de la Transposition Didactique, de Chevallard, est réalisée l’étude du concept et de l’organisation mathématique de l’objet proportion, en termes de tâches, tecniques et technologies. Pour identifier cet objet comme savoir à enseigner nous cherchons à mettre en évidence les questions relatives à l’apparition du savoir proportion et à son traitement comme objet mathématique, dans une brève étude historique et dans une étude de publications considerées comme institutions de formation des enseignants. L’étude de manuels des élèves (livres didactiques) et une observation en classe permet d’identifier des éléments de l’organisation mathématique d’objet proportion comme savoir enseigné en classe de 6ª série. Ces études permettent d’identifier, dans l’enseignement actuel, deux différentes approches des questions relatives à la proportion. Une approche avec pour origine la théorie grecque des proportions, dans laquelle la proportion est l’objet d’étude, et une autre approche, dans laquelle l’objet proportion n’est pas présent et les questions relatives à la proportion sont enseignées dans le contexte des nombres réels, des égalités et équations, en insistant sur la notion de proportionnalité.

Mots-clés: proportions, organisation mathématiques, savoir à enseigner, savoir enseigné, observation en classe ordinaire.

Sumário

Introdução

A pesquisa aqui apresentada trata de saberes sobre *proporção*. Mais particularmente buscamos identificar elementos sobre sua evolução como objeto matemático. O objeto *proporção* tem um lugar importante no desenvolvimento da matemática ao longo da história, em pesquisas sobre o desenvolvimento cognitivo dos alunos e também no ensino da matemática no âmbito do Ensino Fundamental e Médio.

No Brasil, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998), o desenvolvimento do raciocínio proporcional é um dos objetivos do ensino da matemática para os 3º e 4º ciclos[1]. Também neste mesmo documento, a *proporcionalidade* é apontada como uma idéia matemática fundamental, um princípio geral do conhecimento matemático, que deve ser desenvolvido articulado com múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos[2], visando possibilitar ao aluno a compreensão ampla deste saber. Esta mesma visão é presente na Proposta Curricular de Santa Catarina – PCSC (1998).

Para o 3º ciclo, em particular, os PCN apresentam como um dos objetivos do ensino, o seguinte:

> O ensino da matemática deve visar o desenvolvimento:
> Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam proporcionalidade.(p. 65)

---

[1] O 3º ciclo corresponde a 5ª e 6ª séries, e o 4º ciclo a 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.
[2] Conteúdos tais como: problemas multiplicativos em situações associadas à comparação entre razões, números racionais por meio de suas representações fracionárias, porcentagem, medidas, inclusive na variação de grandezas como áreas e perímetros, semelhança de figuras, construções com régua e compasso e uso de outros instrumentos, construção e análise de tabelas e gráficos, funções e matemática financeira.

E para o 4º ciclo:

> O ensino da matemática deve visar o desenvolvimento:
> Do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três. (p. 82)

Estes objetivos de ensino são justificados nas "Orientações aos conteúdos propostos" para o 3º ciclo: "*O fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação dos fenômenos do mundo real*." (p. 67)

Os PCN também reforçam a forma de tratamento, de abordagem, sugerida nos objetivos, em diferentes momentos, como por exemplo:

- nos "Conceitos e procedimentos" relativos ao 3º ciclo: "*Resolução de situações-problema que envolvam a idéia de proporcionalidade, incluindo o cálculo com porcentagens, pelo uso de estratégias não-convencionais.*" (p 72)
- nas "Orientações" relativas ao 4º ciclo: "*[...] Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais – os contra-exemplos*." (p.84)
- nos "Conceitos e procedimentos" relativos ao 4º ciclo:

> -Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano. (p. 87)
> -Resolução de problemas que envolvam grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais com estratégias variadas, incluindo regra de três. (p 87)
> -Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso. (p. 88)

Temos assim, segundo os PCN, a proporcionalidade como uma das idéias fundamentais da Matemática, que deve ser trabalhada no Ensino Fundamental, pois este conceito leva à resolução de situações-problema que envolvem grandezas proporcionais. As estratégias de resolução são apontadas como não-convencionais, as quais não são citadas, e convencionais, das quais são citadas somente “as regras de três”.

Como podemos notar, é a noção de proporcionalidade que tem lugar nos PCN, nos Objetivos de ensino e nos Conteúdos propostos, nos quais não há referência ao objeto matemático *proporção*. Entretanto, nas “Orientações didáticas” dos PCNs referentes a “Espaço e forma”, “Grandezas e medidas” e “Tratamento da informação” para os 3º e 4º ciclos, identificamos que *proporção* é explicitamente citada como conteúdo matemático, que pode ser trabalhado fazendo conexão com os conceitos de razões, semelhança de triângulos, propriedade de figuras, campos numéricos, etc.

Um breve estudo de planos de ensino de 6ª série do Ensino Fundamental da Escola Pública nos mostra o objeto *proporção* como conteúdo de ensino, com os seguintes objetivos:

- identificar proporção como a igualdade de duas razões;
- aplicar a propriedade fundamental das proporções para calcular o termo desconhecido de uma proporção na resolução de problemas.

A presença de *proporção* enquanto conteúdo nos planos de Ensino e a ênfase dada à proporcionalidade pelos PCN e PCSC, nos leva a questionar e estudar como vive este objeto, como saber a ensinar e como saber ensinado.

Neste documento, apresentamos o estudo de *proporções* em três capítulos.

O capítulo 1 traz uma síntese de trabalhos sobre *proporção* que permitiu-nos uma visão sobre o tema. Este capítulo trata do referencial teórico utilizado, que apóia-se na Teoria Antropológica do Saber e na Teoria da Transposição Didática, de Chevallard. Com este referencial encaminhamos as questões de estudo.

No capítulo 2 apresentamos o estudo da organização matemática do objeto *proporção*, enquanto saber a ensinar. Um breve estudo histórico busca evidenciar questões relativas ao surgimento do saber *proporção* e a seu tratamento como objeto matemático. O estudo de publicações que abordam questões relativas à *proporção*, e que consideramos instituições de formação de professores, também é apresentado. O estudo tratado neste capítulo nos forneceu referências para o capítulo seguinte.

Do saber *proporção*, enquanto saber ensinado em classe de 6ª série do Ensino Fundamental, é o que trata o capítulo 3. O estudo de livros didáticos e uma observação em classe de 6ª série nos permitiu identificar a organização matemática do objeto *proporção* neste nível de ensino.

Por fim, apresentamos a conclusão geral deste trabalho.

1 Estudo de pesquisas sobre saberes que envolvem proporção, problemática e quadro teórico

Neste estudo apresentamos uma síntese de trabalhos sobre o tema, o referencial teórico e nossas questões de pesquisa.

1.1 Síntese de trabalhos

Vários estudos em Educação Matemática, Educação em Ciências e Psicologia Cognitiva tratam de proporções ou proporcionalidade, a saber Vergnaud (1983, 1990), Vizolli (2001), Trindade (1996), Pinheiro (1996), Carraher, Carraher e Schliemann (1986), Carraher et al (1986), Magalhães (1990).

Vizolli (2001) faz um estudo sobre a aquisição do conceito de porcentagem, explorando os diferentes registros de representação: numéricos (percentual, fracionário, decimal e proporcional), geométrico, em língua natural, tabela e gráfico, com o objetivo de conceituar porcentagem enquanto proporção, abordando aspectos relativos ao sentido e ao significado operatório. Para tal, Vizolli elabora, aplica e analisa uma seqüência didática em classe de 6ª série.

Trindade (1996) apresenta a análise de alguns dos obstáculos epistemológicos[3] e suas implicações à construção da noção de *função* em matemática. Faz um estudo retrospectivo sobre funções no qual explicita sua ligação com proporções: "*Historicamente, o conceito de função foi*

[3]A noção de obstáculos epistemológicos tem origem na obra de Bachelard e foi introduzida na didática da matemática por Brousseau: "*Um obstáculo é um conhecimento que tem seu próprio domínio de validade e que fora desse domínio é ineficaz e pode ser fonte de erros e dificuldades*". (BROUSSEAU apud CHEVALLARD, BOSCH e GASCON, 2001, p 223)

identificado com o conceito de proporção". (SIERPINSKA, apud TRINDADE, 1996, p. 129). O uso do conceito de proporção para responder questões relativas a funções é analisado enquanto obstáculo epistemológico, o qual deve ser considerado no ensino de funções: "*Tal fenômeno [histórico] ocorre também entre os alunos. Assim, criar a idéia de que proporção é um tipo de relação privilegiada é um obstáculo epistemológico que diz respeito ao conceito de função, certamente*." (TRINDADE, 1996, p. 129) O autor propõe atividades instrucionais que podem facilitar a construção do conceito de função, incluindo aquelas nas quais a proporcionalidade direta não se apresenta como um tipo privilegiado de função.

Encontramos em Pinheiro (1996) uma discussão sobre o papel dos modelos matemáticos no aprendizado de conteúdos científicos, físicos em particular. Quanto à aprendizagem matemática, diz a autora que:

> Se pretendemos que o aluno possa utilizar modelos matemáticos para construir modelos científicos, não podemos desconsiderar a complexidade que esses primeiros possuem na sua construção. [...] Um dos elementos básicos para a construção de modelos matemáticos é a compreensão da noção de proporcionalidade. (PINHEIRO, 1996, p 79)

Pinheiro (1996) cita estudos que tratam das dificuldades da aprendizagem da noção de proporcionalidade, apontando para duas noções distintas de proporcionalidade direta: uma delas pertencente às experiências pessoais e a outra localizada nos conhecimentos de Matemática. Temos, neste trabalho, a identificação da aquisição da noção de proporcionalidade como uma tarefa problemática, o que motiva a autora na busca de justificativas e a proposição de possíveis soluções.

No âmbito da Psicologia Cognitiva, estudos sobre aprendizagem e desenvolvimento da noção de proporcionalidade oferecem contribuições para a Educação Matemática. No Brasil, encontramos estes estudos em Carraher et al (1986), em Carraher, Carraher e Schliemann (1986). Este último trabalho pesquisa as resoluções de problemas de proporção, formuladas por estudantes. Entre os fenômenos observados pelos autores, temos que a utilização de estratégias intuitivas é mais freqüente que o uso de regras institucionalizadas como algoritmo de resolução, a exemplo da regra de três. Os autores levam em consideração, entre outras, as idéias de Piaget, no âmbito da Psicologia Cognitiva, e de Vergnaud, no âmbito da Educação Matemática.

Na teoria de Piaget, o desenvolvimento cognitivo do adolescente estaria no estágio das operações formais: as estruturas intelectuais que comandam o conhecimento se tornariam aptas ao raciocínio lógico e abstrato, sem necessidade de apoio na experiência e na ação. Esta independência das operações formais em relação aos conteúdos e ao contexto cultural foi questionada por estudos posteriores[4], especialmente quanto à compreensão do conceito de proporcionalidade, apontada como uma conquista deste estágio: "*ao conceito matemático de proporções corresponde, segundo Piaget, um esquema psicológico, o esquema da proporcionalidade, que seria uma das características do pensamento no período operatório formal*" (CARRAHER, CARRAHER e SCHLIEMANN, 1986b, p. 588).

Um estudo sobre a transferência de estratégias na resolução de problemas de proporcionalidade entre diferentes conteúdos é feito por Magalhães (1990). Em sua pesquisa, apresenta as estratégias utilizadas na resolução de problemas de proporções simples, por sujeitos sem instrução formal acerca de proporções. Uma das conclusões deste estudo é que houve transferência do conhecimento entre problemas de conteúdos conhecidos para estes sujeitos, como por exemplo os que envolvem receitas culinárias, bem como entre problemas de conteúdo conhecido e desconhecido; entretanto, não houve uma generalização das estratégias e procedimentos utilizados, de forma espontânea. A autora propõe que, no ensino da proporção, se "*procure resgatar os conhecimentos adquiridos informalmente, para posteriormente confrontá-*

[4] Vários outros estudos são citados por Carraher, Carraher e Schliemann (1986, 1988), Carraher, Carraher, Schliemann e Ruiz (1986), que são eles mesmos estudos deste tipo.

los e sistematizá-los” (p. 85). Sugere o estudo da transferência de aprendizagem no contexto de sala de aula, investigando o efeito das interações entre diferentes conteúdos, com a finalidade de desenvolver estratégias mais eficientes de resolução de problemas.

Estes estudos mostram diferentes aspectos relativos à *proporção*: proporção como conteúdo matemático, proporção como ferramenta para o cálculo de porcentagem, proporção como obstáculo epistemológico para o conceito de função quando tratada como um tipo de relação privilegiada, como também nos apontam a aquisição da noção de proporcionalidade como uma tarefa problemática.

Toda esta diversidade de tratamento sobre proporção, dada pelos PCN e pelas pesquisas em Educação Matemática, Educação em Ciências e Psicologia Cognitiva, nos conduz a formular os seguintes questionamentos:

- Que conceito, ou que conteúdo matemático é proporção?
- Em qual saber matemático o professor busca subsídios para legitimar as estratégias intuitivas, ou não convencionais, para a resolução dos problemas de proporção?
- O que se ensina sobre proporções, na 6ª série? Qual a organização matemática do saber proporção nos livros didáticos?

A partir destes questionamentos e com base no referencial teórico que adotamos neste trabalho, que apresentamos a seguir, precisaremos nossas questões de pesquisa (p. 21).

1.2 Quadro teórico e questões de pesquisa

Apresentamos aqui os principais elementos do quadro teórico que adotamos neste trabalho, os quais nos conduzem a precisar nosso questionamento.

Situamos nosso estudo numa perspectiva ecológica, na medida em que nos interessamos sobre proporção na condição de objeto matemático na história, nas publicações enquanto saber a ensinar, nos livros didáticos e em classe. Resgatamos, assim, elementos da organização matemática do objeto proporção em diferentes "instituições"[5].

O estudo de uma noção matemática, quanto a seus aspectos epistemológicos, e a identificação de certas organizações matemáticas que vivem em diferentes instituições, sejam estas no mesmo ou em diferentes níveis de ensino, nos coloca no contexto da Teoria Antropológica do Saber e da Transposição Didática, sobre as quais daremos os elementos que consideramos os mais relevantes neste trabalho.

Segundo a Teoria Antropológica do Saber, um saber não vive isolado, e para conhecer este saber, questões do tipo das que seguem devem ser formuladas:

> O que *existe* e *por quê*? O que *não existe* e *por quê*? O que *poderia* existir? Sob quais *condições*? Quais *objetos* são possíveis de viver ou, ao contrário, quais são impedidos de viver nestas condições? (Chevallard in Artaud, 1997, p.1, tradução nossa)

Nesta teoria, Chevallard utiliza as noções de *habitat* (lugar) e *nicho* (função) como metáforas, fazendo analogia com o significado dado pelos ecologistas:

> Os ecologistas distinguem, na atividade de um organismo, seu habitat e seu nicho. [...]. O habitat é qualquer tipo de endereço, o lugar de residência do organismo. Nichos são as funções que o organismo aí exerce: é, de certo modo, a ocupação que ele aí exerce. (Chevallard in Assude, 1996, p. 50, tradução nossa)

[5] As definições de "organização matemática" e de "instituição", no contexto deste quadro teórico, serão apresentadas a seguir.

Em termos da Teoria Antropológica do Saber, habitats de um objeto matemático são os diversos tipos de instituições nas quais se encontra um saber. Instituições têm aqui um significado mais amplo que o uso corrente e podem ser, por exemplo, um ciclo do Ensino Fundamental, um livro didático, capítulo de livro, um artigo da revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, a classe de 6ª série do Ensino Fundamental.

Segundo Chevallard (1991), ao considerarmos esses habitats, percebemos que o saber em questão ocupa regularmente funções bem distintas. Isto é, a função do saber pode variar dependendo da instituição estudada. Assim, como cada instituição tem uma relação particular com o saber, ou seja, a relação com o saber varia de uma instituição para outra, também será variável a maneira como os agentes da instituição irão tratar este saber.

No quadro desta teoria, um objeto existe quando uma pessoa ou uma instituição reconhece a existência desse objeto. Mais precisamente, dizemos que um objeto existe para uma instituição se existe uma relação institucional desta com o objeto. Esta relação é representada por $R_I(O)$, R-relação, I-instituição e O-objeto (CHEVALLARD, 1992). A relação institucional $R_I(O)$ indica, em termos gerais, o que é feito na Instituição I com o objeto O, qual abordagem, qual tratamento, ou qual o destino dado a “O” na instituição I.

Ainda, na relação de uma certa instituição (escola) com um objeto, no caso de um sistema didático (professor, aluno, saber), é necessário considerar a relação institucional com o professor e a relação institucional com o aluno. A relação institucional com o professor $R_I(P)$ define o que a instituição exige do professor, isto é, o que e como o professor deve ensinar o objeto. Já a relação institucional com o aluno $R_I(A)$ define o que a instituição exige do aluno e deixa entender do que o aluno deverá dar conta.

As organizações matemáticas nos fornecem instrumentos para o estudo de nossas questões. Chevallard (2001) descreve uma organização matemática em termos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria relativas a um objeto matemático.

A tarefa evoca uma ação, o que é para fazer no exercício, por exemplo: calcular, demonstrar, construir.

A técnica é um "jeito de fazer" que permite realizar as tarefas de forma sistemática e explícita (técnica, do grego: "saber-fazer", *tékhne*). Algumas considerações sobre a técnica:

- Uma tarefa pode ser problemática, o que requer o domínio de uma técnica apropriada para resolvê-la.
- As técnicas permitem agrupar as questões, ou problemas, em *tipos de problemas.*
- Uma técnica tem sempre um aporte limitado: ela só é bem sucedida em algumas tarefas de determinado tipo.
- Pode acontecer que, a partir de uma primeira técnica de aporte reduzido, elabora-se uma técnica de aporte maior.

A tecnologia é um discurso interpretativo e justificativo da técnica e de seu âmbito de aplicabilidade e validade (tecnologia: *tékhne*, técnica, e *logos*, discurso). Para que uma técnica possa ser utilizada de maneira normatizada, deve aparecer como algo ao mesmo tempo correto, compreensível e justificado e sua existência supõe, então, a existência subjacente de uma tecnologia. Além de justificá-la e torná-la inteligível, a tecnologia também tem a importante função de trazer elementos para modificar a técnica e ampliar seu alcance, superando, assim, suas limitações e permitindo, em alguns casos, a produção de uma nova técnica.

Todas as técnicas, matemáticas ou não, exigem uma tecnologia e por isso, em toda instituição, a existência de uma tecnologia é uma condição ecológica essencial para a existência de uma técnica.

A teoria - tecnologia associada a uma técnica - é a tecnologia de sua tecnologia, isto é, um discurso suficientemente amplo que serve para interpretar e justificar a tecnologia. De alguma maneira, é o fundamento último da atividade que vai além do que parece óbvio e natural, sem necessidade de nenhuma justificativa.

Via a organização matemática identificada nas diferentes instituições, bem como a relação institucional com o objeto proporção destas instituições, apontamos elementos sobre o que existe e como vive o objeto proporção como saber dos sábios (savoir savant), como objeto a ensinar e como objeto a ser ensinado. Com este ponto de vista nos situamos na teoria da Transposição Didática.

A teoria da Transposição Didática põe em evidência as instituições de transposição dos saberes, instituições que se encontram na *Noosfera*. Noosfera é o lugar onde os saberes são manipulados para fins de ensino, onde os saberes são modificados para passar de um nível de ensino a outro, lugar onde é pensado o funcionamento didático. A Noosfera é considerada o centro operacional do processo de transposição. Sua finalidade é estabelecer a interação entre o sistema de ensino e seu entorno, proporcionando a seleção dos elementos do "saber sábio", que devem advir "saber a ensinar".

Fazem parte da Noosfera os pais, os porta-vozes da instituição escolar, os representantes do poder público, especialistas da disciplina cujas trajetórias pessoais conduziram ao interesse pelo ensino, entre outros.

Neste trabalho, estudamos um tratado e diferentes artigos enquanto produção noosferiana (como veremos no capítulo seguinte).

Consideramos "tratado", como Neyret:

> [...] tratado [é] o livro produzido por um autor (considerado como instituição transpositiva[6]), pertencente à esfera de produção do saber que chamamos Ip, ou muito próximo a ela, com a intenção de "elementarizar" os saberes a ensinar. [...] O que vai caracterizar o tratado é, assim, sua forte legitimidade epistemológica. (NEYRET, 1995, p.57-58, tradução nossa)

[6] Instituição transpositiva é aquela que pertence à Noosfera.

No contexto deste referencial teórico reformulamos nossas questões de pesquisa, que apresentamos a seguir.

Qual o habitat (lugar) e a função de *proporção* enquanto objeto matemático:

- como saber a ensinar?
- como saber ensinado?

Mais precisamente:

- O objeto *proporção* está presente como objeto matemático nas proposições noosferianas?
- O que propõe a noosfera em termos de tarefas e técnicas relativas ao objeto *proporção*?
- O objeto *proporção* tem lugar como objeto matemático no saber ensinado?
- Quais tarefas e técnicas são propostas como saber ensinado numa classe de 6ª série do Ensino Fundamental, ou seja, qual a relação da instituição 6ª série com o objeto *proporção*?

Nosso estudo não tem por objetivo dar respostas a estas questões de maneira exaustiva. Buscamos realizar um exercício no qual, apoiados no conceito de "Organização Matemática" e no conceito de "Relação Institucional" a um objeto matemático, pudéssemos explicitar elementos da Transposição Didática relativos ao objeto *proporção* enquanto objeto de saber a ensinar a saber ensinado.

Os elementos teóricos aqui apresentados nos fornecem o instrumental para nosso estudo.

2 Estudo da organização matemática do objeto proporção

Introdução

Com o objetivo de evidenciar questões relativas ao surgimento do saber proporções e o que é proporção enquanto objeto matemático, bem como de identificar tarefas e técnicas envolvendo proporção, realizamos um breve estudo histórico, o estudo de um tratado e de artigos de autores noosferianos.

Como tratado, estudamos o livro “Aritmética Progressiva”, de Antonio Trajano. Esta obra será considerada por nós como um tratado, pois segundo o próprio autor, ela é um “*um compêndio teórico e prático de aritmética*”. O exemplar que examinamos é cópia da 62ª edição, de 1927.

Neste contexto, não como tratados mas como instituição transpositiva, também estudamos dois artigos de Ávila, publicados na Revista do Professor de Matemática, da SBM, em 1986, (Razões, proporções e regra de três e Ainda sobre regra de três), nos quais faz uma crítica ao ensino de razões, proporções e regra de três no Brasil, e sugere o ensino de *variações proporcionais*, a exemplo do que é feito nos Estados Unidos.

Também estudamos quatro publicações de Lima, dirigidas a professores de matemática e editadas pela Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, nas quais o autor discute o conceito de Grandezas Proporcionais, sua definição e utilização: dois artigos da Revista do Professor de Matemática (1986, 1988), o capítulo sobre Grandezas Proporcionais no livro Meu Professor de Matemática (1991) e o livro A Matemática do Ensino Médio (1999), ao tratar de função linear.

Tratamos as publicações de Lima e Ávila como instituições transpositivas, pois os autores, em posição noosferiana, deixam clara uma intenção de levar aos professores uma proposta de abordagem ou de tratamento referente à proporção.

2.1 Proporção na história

Escolhemos fazer esse estudo seguindo a ordem cronológica dos acontecimentos, porém respeitando as várias civilizações, com o objetivo de obter um panorama evolutivo de nosso objeto de pesquisa.

Egito

A matemática do Egito antigo foi especialmente conhecida através do Papiro de Rhind, também conhecido como Papiro de Ahmes[7]. Parte deste papiro consiste em problemas sobre questões variadas e, segundo Boyer (1974), alguns deles podem ser descritos como aritméticos e outros como algébricos.

Exemplos de problemas aritméticos:

O problema 72 propõe calcular o número de pães, de 45 unidades de volume por grão, que se obtém com a mesma quantidade de grãos utilizados para fazer 100 pães, de 10 unidades de volume por grão e o de número 63 pede que sejam repartidos 700 pães entre 4 pessoas, em partes proporcionais a $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ e\ \frac{1}{4}$. Segundo Boyer (1974), estes problemas mostram conhecimento de manipulação equivalente à regra de três.

---

[7] Rhind foi um antiquário que comprou este papiro no Egito, em 1858 d.C. e Ahmes foi o escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C., de documentos que datam de 2000 a 1800 a.C.

A solução apresentada ao problema 72 é $\frac{100}{10}\times 45$ ou 450 pães. Ou seja, se 10 grãos, de 10 unidades de volume por grão, fornecem 100 pães, então 10 grãos de 45 unidades de volume por grão fornecem 450 pães. Já, a solução do problema 63 é obtida fazendo a divisão de 700 pela soma das frações na proporção, que resulta em 400, e calculando $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ deste valor. Ou seja, se $\frac{7}{4}$, que é soma das frações[8] na proporção, equivale a 700, um inteiro equivale a 400. Assim, $\frac{2}{3}$ de 400 equivale a $266\frac{2}{3}$, e assim por diante.

Os problemas que Boyer (1974) chama de algébricos se referem à procura de números desconhecidos, onde a incógnita é chamada de “aha”, e equivalem a equações lineares da forma $x+ax=b$ ou $x+ax+bx=c$, onde *a*, *b* e *c* são conhecidos e *x* é “aha”. Para a resolução é usado o método da falsa posição:

> Um valor específico, provavelmente falso, é assumido por aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre este número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporção chega-se à resposta correta. (BOYER, op.cit., p.12)

Exemplo de problema algébrico:

O problema 24 pede o valor de “aha” sabendo que “aha” mais um sétimo de “aha” dá 19. A solução de Ahmes é dada pelo método de falsa posição. Usando 7 como valor falso, Ahmes obtém 8 para $x+\frac{1}{7}x$, em vez de 19. Ou seja, para *x*’ = 7 temos $7+\frac{1}{7}.7=8$, mas procura-se $x+\frac{1}{7}x=19$. Como $8\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=19$, então $7\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=x$ e $x=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.

8 Os egípcios usavam somente frações unitárias, com exceção de 2/3. Assim, 7/4 é a notação atual para 1+1/2 + 1/4.

Identificamos, assim, três tipos de tarefas: problemas de regra de três, divisão em partes proporcionais e resolução de equações lineares, cujas técnicas de resolução tem por base *proporções*.

Mesopotâmia[9]

Segundo Boyer, para suprir as lacunas existentes em suas tabelas sobre exponenciais, os matemáticos babilônios interpolavam por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados, usando *proporção* como ferramenta: "*A interpolação linear parece ter sido comumente usada na Mesopotâmia antiga, e a notação posicional é conveniente para a regra de três*." (BOYER, 1974, p.22)

Quanto à aplicação de proporções à geometria, afirma Eves (1995, p.61) que "*os babilônios [...] tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais*".

O conhecimento babilônico sobre as médias foi introduzido na Grécia e aparece no estudo da igualdade de razões, ou proporções, como veremos adiante. De acordo com Bell (1985, p.50, tradução nossa), "*com seus exemplos numéricos de quatro números em proporção, os babilônios deram o primeiro passo para a teoria grega da proporção, que tem perdurado, praticamente, sem nenhuma modificação, até hoje*".

[9] As civilizações da antiga Mesopotâmia são também chamadas babilônias. Segundo Boyer (1974), sua matemática tornou-se conhecida pelas tabletas de barro cozidas, de dois períodos: por volta de 2000 a.C. e dos últimos séculos a.C. Parte destas tabletas são 'texto tabelas', de multiplicação, de recíprocos, de quadrados, de raízes quadradas e exponenciais, entre outras.

Grécia[10]

Tales teria trazido do Egito a geometria que introduziu na Grécia, e parece razoável supor que deu uma organização racional a este estudo. Há relatos de que Tales mediu a altura das pirâmides do Egito, observando os comprimentos das sombras no momento em que a sombra de um bastão vertical era igual à sua altura, o que sugere o uso de proporções. Cabe aqui notar que dentre os cinco teoremas atribuídos a Tales, não encontramos o Teorema de Tales, ou Lei de Tales, a respeito de segmentos proporcionais determinados por retas paralelas sobre transversais, que consta nos livros didáticos atuais.

A teoria das proporções dos pitagóricos

Conforme Heath (1981), não se conhece a forma como era exposta a teoria das proporções dos pitagóricos, mas há indícios de que estes tinham uma teoria de proporções para números, ou seja, para grandezas comensuráveis e números inteiros. Desses indícios, destacamos o desenvolvimento da teoria das médias e o abalo causado pela descoberta dos segmentos incomensuráveis. O autor diz, também, que embora não exista evidência clara de que os pitagóricos fizessem uso de proporções em geometria, estavam familiarizados com figuras semelhantes, o que implica alguma teoria de proporções.

O desenvolvimento da teoria das médias levou à descoberta da relação entre intervalos musicais e razões numéricas. A tradição diz que Pitágoras soube na Mesopotâmia das três médias aritmética, geométrica e harmônica, sendo a geométrica tida como *a proporção por excelência.* Também era usada pelos pitagóricos a *proporção áurea*, ou *proporção musical*, mencionada por

[10] Durante o século VI a.C. viveram Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. Boyer (1974) afirma que seu relato sobre eles é baseado em tradições persistentes, já que nenhuma obra destes estudiosos sobreviveu. Diz-se que Tales e Pitágoras aprenderam astronomia e matemática no Egito e na Babilônia.

antigos historiadores como *a mais perfeita proporção*. Esta relacionava duas das anteriores: o primeiro de dois números está para sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número. Estas médias são apresentadas por Heath (1981, p.86-87, tradução nossa), supondo $a > b > c$:

Aritmética: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$, equivalente a $a + c = 2b$.

Geométrica: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}\left[= \frac{b}{c}\right]$, equivalente a $ac = b^2$.

Harmônica: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, equivalente a $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ ou $b = \frac{2ac}{a+c}$.

Proporção áurea: $a : \frac{a+c}{2} = \frac{2ac}{a+c} : c$.

Um exemplo da aplicação da teoria de proporções à geometria, e que demonstra, segundo Boyer (1974), uma certa influência da escola pitagórica, é o teorema sobre as quadraturas de lunas, atribuído a Hipócrates de Chios (430 a.C.): *segmentos de círculos semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases*.

> O relato de Eudemo (335 d.C.) diz que Hipócrates provou isso, mostrando primeiro que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Aqui Hipócrates usa a linguagem e o conceito de proporção que desempenhou papel tão grande no pensamento pitagórico, [...] mas uma demonstração rigorosa deste teorema parece improvável nessa época. A teoria das proporções provavelmente estava feita só para grandezas comparáveis. (BOYER, 1974, p.49)

Em torno de 400 a.C. a suposição básica dos pitagóricos, de que tudo dependia dos números inteiros[11], é abalada pela descoberta dos segmentos incomensuráveis: os números inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever propriedades geométricas, como

[11] Pitágoras, após suas viagens, fundou a famosa escola pitagórica, que foi um centro de estudos de filosofia, de matemática e de ciências naturais, como também uma seita religiosa. Segundo Eves (1995, p.97), "*a filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros*".

comparar a diagonal de um quadrado ou de um pentágono com seu lado. Esta descoberta foi perturbadora também porque

> a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes. (EVES, 1995, p.107)

O fato de que a teoria das proporções existente até então não dava conta das magnitudes incomensuráveis mostra, segundo Heath (1981), que a teoria das proporções dos pitagóricos era uma teoria numérica, aplicável somente às magnitudes comensuráveis, provavelmente nos mesmos moldes da que é apresentada no Livro VII dos *Elementos* de Euclides, que trata da teoria dos números. Neste livro, a Definição 2 diz que "*um número é uma multitude composta de unidades*", e a Definição 20 diz que:

> Números são proporcionais quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou a mesma parte, ou as mesmas partes do segundo, como o terceiro é do quarto. (EUCLIDES, 1956, p.278)

Heath (1981. p.190, tradução nossa) explica esta definição ao dizer que "*as duas razões iguais são de uma das seguintes formas:* m, $\frac{1}{n}$ *ou* $\frac{m}{n}$, *onde* m *e* n *são números inteiros*."

Há a possibilidade, conforme Boyer (1974), de que até então os gregos usavam a idéia que quatro quantidades estão em proporção, $a:b = c:d$, se as duas razões $a:b$ e $c:d$ têm a mesma subtração mútua. Ora, isto é uma aplicação do *algoritmo euclidiano*, processo para achar o máximo divisor comum (m.d.c.) de dois números inteiros, que diz o seguinte: "Dividir o maior dos dois números inteiros positivos pelo menor e então dividir o divisor pelo resto. Continuar este processo de dividir o último divisor pelo último resto, até que a divisão seja exata. O divisor final é o m.d.c. procurado". O *algoritmo euclidiano* é enunciado por Euclides também no Livro VII dos Elementos – Proposições 1 a 3, como um tipo da subtração recíproca, o que reforça a hipótese de que os pitagóricos fizessem uso da técnica aqui apresentada para verificar proporções.

Vejamos esta técnica, tomando as razões 32:42 e 48:63, por exemplo, e aplicando a cada uma delas o algoritmo euclidiano:

	42 – 1 . 32 = 10	63 – 1 . 48 = 15
	32 – 3 . 10 = 2	48 – 3 . 15 = 3
	10 – 5 . 2 = 0	15 – 5 . 3 = 0.
ou	42 = 1 . 32 + 10	63 = 1 . 48 + 15
	32 = 3 . 10 + 2	48 = 3 . 15 + 3
	10 = 5 . 2	15 = 5 . 3 .

A proporção entre as razões é verificada, pois os quocientes 1, 3 e 5, que representam o número inteiro de vezes que as quantidades menores, ou restos, cabem nos maiores, é o mesmo para as duas razões.

A perturbação causada pela descoberta dos segmentos incomensuráveis, segundo Boyer (1974, p.57):

> levou a se evitar razões, o quanto possível, na matemática elementar. A equação linear $ax = bc$, por exemplo, era considerada como uma igualdade entre as áreas ax e bc e não como uma proporção igualdade entre as razões $a:b$ e $c:x$. [...] Só no Livro V de *Os elementos* é que Euclides atacou a difícil questão da proporcionalidade.

A teoria das proporções de Eudoxo

Eudoxo[12] desenvolveu a teoria das proporções que permitiu superar a crise dos incomensuráveis. Esta teoria é aplicável a grandezas, sem a necessidade dos números, já que estes eram insuficientes para definir razões de duas grandezas.

A teoria das proporções de Eudoxo é enunciada por Euclides (Livro V, def.5):

> As grandezas têm entre si a mesma razão, a primeira para a segunda, e a terceira para a quarta, quando umas grandezas, quaisquer que sejam, eqüimultíplices da

[12] Eudoxo de Cnido (408-355? a.C.), célebre matemático e astrônomo e discípulo de Platão.

> primeira e da terceira a respeito de outras, quaisquer que sejam, eqüimultíplices da segunda e da quarta, são ou justamente maiores, ou justamente iguais, ou justamente menores. (EUCLIDES, 1944, p.119)

E a seguir, enuncia (V – def.6): "*Grandezas que tem a mesma razão são chamadas proporcionais*" (EUCLIDES, 1944, p.119)

Esta definição de proporções compreende a definição numérica, dada em Euclides VII-20, quando aplicada a grandezas comensuráveis.

A definição dada por Eudoxo para a igualdade de razões significa, em notação atual, que $a/b = c/d$ se, e somente se, dados inteiros m e n, sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$; ou se $ma = nb$, então $mc = nd$; ou se $ma > nb$, então $mc > nd$. Ela se assemelha ao processo que usamos para equivalência de frações.

Mas a teoria das proporções de Eudoxo tem resultados mais amplos. Afirma Bell (1985, p. 66, tradução nossa) que

> esta obra grega do século IV a.C., *essencialmente uma teoria do sistema dos números reais*, não foi substancialmente modificada até a segunda metade do século XIX, quando dificuldades críticas na análise exigiram voltar a examinar minuciosamente o conceito de número real. (grifo nosso)

Boyer (1974, p. 67) explica esta relação entre a teoria das proporções e as definições de número real dadas no século XIX: " *[ela] divide a coleção dos números racionais m/n em duas classes, conforme* $ma \leq nb$ *ou* $ma > nb$."

Euclides de Alexandria[13]

O livro V dos *Elementos* de Euclides trata da teoria das proporções de Eudoxo, como já

[13] Euclides viveu entre os séculos IV e III a.C., em Alexandria, onde ensinou geometria. Sua obra *Os Elementos* é uma reunião e ordenação de trabalhos anteriores e nela aparece claramente o caráter demonstrativo e dedutivo da matemática grega da época, sendo uma das mais importantes obras da história da matemática. Segundo Boyer (1974, pp.76-77), "*Os Elementos não eram [...] um compêndio de todo o conhecimento geométrico, [...], mas a exposição de ordem lógica dos assuntos básicos da matemática elementar*". Esta obra está distribuída em 13 livros, sendo os seis primeiros de geometria plana, do VII ao IX de teoria dos números, o X sobre incomensuráveis, e do XI ao XIII sobre geometria no espaço.

vimos, não atribuindo valores às grandezas geométricas. No livro VI, aplica esta teoria à geometria plana, com teoremas fundamentais de semelhança de triângulos e a construção de terceiras, quartas e médias proporcionais.

No livro VII trata da teoria dos números, aqui inteiros e positivos e representados por segmentos, aos quais aplica a teoria das proporções. Neste livro, além da definição de números proporcionais (Def.20), já citada (p.28), é importante ressaltar a Proposição 19, que é apresentada atualmente como a propriedade fundamental das proporções:

> Se quatro números são proporcionais, o número produzido pelo primeiro e o quarto será igual ao número produzido pelo segundo e o terceiro; e, se o número produzido pelo primeiro e o quarto for igual aquele produzido pelo segundo e o terceiro, os quatro números serão proporcionais. (EUCLIDES, 1956, p.318)

Ou seja, se a:b = c:d então a.d = b.c; e se a.d = b.c então a:b = c:d.

Vemos, portanto, que a teoria das proporções na Grécia era aplicada em dois contextos. Na aritmética ou teoria dos números, aqui se referindo aos números naturais, e na geometria, na qual podiam ser incluídos os segmentos incomensuráveis.

China

Antigos textos chineses de matemática[14] tratam de proporção, regra de três e a regra de falsa posição. Segundo Eves (1995), a China foi a primeira a desenvolver a regra de três, além de outras realizações, cujos resultados só chegariam à Europa durante ou após o Renascimento, muitos deles através dos hindus e dos árabes.

---

[14] O mais importante dos antigos textos chineses de matemática é o *K'ui-ch'ang Suan-shu,* ou *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, composto no período entre 206 a.C. e 221 d.C. Segundo Eves (1995), este texto é uma síntese do conhecimento matemático chinês antigo, com teoria e prática ligadas numa seqüência de 246 problemas aplicados que tratam de vários assuntos.

***Índia*[15]**

A regra de três, conforme Smith (1958), foi dada por Brahmagupta e Bhaskara já com esta denominação e enunciada por eles quase da mesma forma, como uma regra arbitrária sem nenhuma justificação, cuja conexão com proporções não era percebida.

Segundo Eves (1995, p. 263), Brahmagupta assim enuncia a regra de três:

> Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e o último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto.

Um exemplo é dado por Bhaskara, conforme Smith (1958, p.484, tradução nossa): "*Se dois palas e meio de açafrão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas?*" A solução é dada do seguinte modo:

$$\boxed{\begin{matrix} 3 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 1 \end{matrix}}$$

na qual os termos semelhantes $\frac{3}{7}$ e 9 são Argumento e Requisito e $\frac{5}{2}$ é o Fruto. O Produto é dado pela regra: Requisito multiplicado por Fruto, $9 \times 2\frac{1}{2}$, e dividido pelo Argumento, $\frac{3}{7}$, resulta em $52\frac{1}{2}$.

***Os árabes*[16]**

Os árabes, segundo Smith (1958), usavam formas como as que seguem, para indicar a

---

[15] Na Índia, os primeiros trabalhos importantes em matemática surgem a partir do séc. V e estão fortemente ligados à astronomia. Segundo Eves (1995), embora sua matemática fosse grandemente empírica, os hindús iniciaram o desenvolvimento de algoritmos para nossas operações aritméticas e deram contribuições significativas à álgebra. Brahmagupta, em 628, e Bhaskara, em 1150, escrevem trabalhos sobre astronomia, que contêm partes dedicadas à matemática, principalmente à aritmética e álgebra. Afirma Eves (1995) que muitos problemas aritméticos eram resolvidos pelo método da falsa posição.

[16] Por volta do ano 600 d.C. as conquistas do Império Islâmico, que absorveram as culturas dos conquistados, tornam Bagdá o novo centro da matemática. No século IX d.C. muitas obras da antiga Grécia, da Índia, da Pérsia e da Mesopotâmia foram estudadas e traduzidas pelos árabes e sua principal contribuição refere-se à álgebra. Conforme Eves (1995), é do matemático e astrônomo al-Khowarizmi, que viveu entre os séculos VIII e IX, a primeira aritmética árabe que se conhece, à qual seguiram-se muitas outras aritméticas. Estas ensinavam regras de cálculo com os numerais e algoritmos hindús, a regra da falsa posição, frações e regra de três.

proporção, não dando nomes aos números:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Khayyan, cientista e poeta árabe que viveu entre os séculos XI e XII, escreveu a obra *Álgebra* e reformulou a teoria das proporções.

> Ao substituir a teoria das proporções de Euclides por um método numérico, [Khayyan] chegou perto da definição de números irracionais e lutou com o conceito de número real em geral. (BOYER, 1974, p. 175-176)

Conforme Dalmedico e Peiffer (1986), Khayyan expôs uma teoria elaborada de proporções, pois, para ele, a teoria de Euclides, Livro V, não exprimia a essência de uma razão que é a medida de uma grandeza por outra, e comparava razões incomensuráveis decompondo-as em frações contínuas.

O algoritmo das frações contínuas, segundo D'Ambrósio (1986), é apenas o algoritmo euclidiano. Para a razão $\frac{a}{b}$, temos o algoritmo euclidiano $a = qb + r$, que pode ser escrito como $\frac{a}{b} = q + \frac{1}{b/r}$, o que é aplicado novamente à razão $\frac{b}{r}$ e assim por diante. Vejamos como se expressa, por frações contínuas, o algoritmo euclidiano para as razões $\frac{32}{42}$ e $\frac{48}{63}$, que apresentamos anteriormente.

Razão $\frac{32}{42}$: $\qquad 42 = 1 \,.\, 32 + 10$; $\qquad 32 = 3 \,.\, 10 + 2$; $\qquad 10 = 5 \,.\, 2 + 0$.

$$\frac{42}{32} = 1 + \frac{1}{32/10}; \qquad \frac{32}{10} = 3 + \frac{1}{10/2}; \qquad \frac{10}{2} = 5 + 0\,. \qquad (1)$$

Por substituição, podemos escrever $$\frac{32}{42} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}}\,. \qquad (2)$$

Aplicando o processo para a razão $\frac{48}{63}$, encontraremos o mesmo resultado que em (2):

$$\frac{48}{63}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}.$$

Como as razões $\frac{32}{42}$ e $\frac{48}{63}$ são razões comensuráveis, existe um número finito de quocientes q_n, ou seja, os números 1, 3 e 5. Para razões incomensuráveis, a seqüência, como em (1), é infinita, sendo que os termos q, q_1,..., q_n,... são chamados de quocientes parciais da fração contínua.[17]

Já no Livro X dos *Elementos,* proposição 2, Euclides usa o método das subtrações recíprocas, que resulta no máximo divisor comum para números inteiros, para duas magnitudes "*como um teste de sua comensurabilidade ou incomensurabilidade: elas são incomensuráveis se o processo nunca chega ao fim, isto é, se o resto nunca mede o divisor precedente*" (Heath, 1981, p.404, tradução nossa).

Segundo Dalmedico e Peiffer (1986), Khayyan indicou que há igualdade entre duas razões se há a igualdade de seus quocientes parciais para todo *n*, dando assim um critério que permite comparar duas razões. A proporção pode ser assim verificada no exemplo das razões 32/42 e 48/63, nas quais os quocientes 1, 3 e 5 são iguais em ambas as frações contínuas.

Temos aqui as proporções como fonte para evolução dos números irracionais:

> Omar Khayyan levantou assim o problema profundo da ligação existente entre as noções de razão e de número, que era para ele de natureza filosófica. [...] Ele considerava que as razões, quaisquer que fossem, deviam poder ser expressas por números, mesmo se certos fossem impróprios; nós diríamos hoje que são os números irracionais. (DALMEDICO E PEIFFER, 1986, p.103, tradução nossa)

[17] É possível demonstrar que a razão incomensurável – um número irracional – é o limite das frações assim obtidas (Dalmedico e Peiffer, op. cit. p 103).

***Europa – Idade Média e Renascimento*[18]**

Alguns autores e seus estudos

Fibonacci, ou Leonardo de Pisa (1175-1250), publica em 1202 sua obra Liber abaci que, segundo Eves (1995), trata de aritmética e álgebra, mostra influência das obras árabes, e é de grande importância na introdução dos numerais indo-arábicos na Europa. Afirma ainda este autor que o método da falsa posição era usado por Fibonacci para a resolução de equações lineares e quadráticas e que a regra de três aparece ilustrada por um problema: "*Um certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores?*" (Eves, 1995, p.315-316)

No século XIV, deve-se uma visão mais ampla de proporcionalidade a dois físicos, Bradwardine e Nicole de Oresme, já que a teoria das proporções de Euclides havia sido aplicada a questões científicas.

Bradwardine (1290–1349), inglês, escreveu o *Tractatus de proportionibus.* Ele verificou, bem como outros estudiosos antes dele, que não era correta a forma dada pela lei de movimento de Aristóteles, V = KF/R, na qual a velocidade era proporcional à força e inversamente proporcional à resistência, e K uma constante de proporcionalidade não nula. Em seu Tratado, Bradwardine faz uso de uma teoria generalizada de proporções e propõe que, para dobrar a velocidade, a razão F/R deveria ser elevada ao quadrado. De modo geral, sua teoria das

---

[18] Durante a Idade Média o conhecimento acumulado pelos árabes chega à Europa Ocidental, principalmente através da Espanha, invadida pelos mouros. Segundo Boyer (1974), *Os Elementos* de Euclides foi uma das primeiras obras matemáticas clássicas a aparecer em tradução latina do árabe. Há uma cópia de 1142, feita pelo inglês Abelardo de Barth, e outra da mesma época de Gerardo de Cremona (1142-1187), na Espanha. Atribuem-se a eles traduções de muitas outras obras gregas e árabes.

Também as relações comerciais das cidades italianas com o mundo árabe contribuem para a disseminação de informações aritméticas e algébricas, úteis aos mercadores, dentre as quais destacamos a regra de três e o método da falsa posição. Estas informações aparecem nas aritméticas que surgem no Renascimento, e que, segundo Eves (1995), eram basicamente de dois tipos: as escritas em latim por intelectuais de formação clássica e outras escritas em vernáculo por professores práticos que preparavam os jovens para a carreira comercial.

proporções inclui tanto quantidades que variavam como potências, como quantidades que variavam como raízes.

Nicole de Oresme (1323?–1382), francês, escreveu *De Proportionibus proportionum*, no qual "*generalizou a teoria das proporções de Bradwardine de modo a incluir qualquer potência de expoente racional e deu regras para combinar proporções que são equivalentes às nossas leis sobre expoentes, agora expressas por* $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ *e* $(x^m)^n = x^{mn}$." (BOYER, 1974, p.192) Há, ainda, outra obra sua que trata de proporções, o *Algorismus proportionum*.

Regiomontanus[19] (1436-1476), em sua obra *De triangulis omnimodis*, trata inicialmente de noções sobre grandezas e razões. Segundo Boyer (1974), estas noções eram derivadas em grande parte de Euclides, mas Regiomontanus dava valores numéricos específicos aos segmentos, o que lhe permitia usar os métodos algorítmicos desenvolvidos pelos algebristas árabes.

Em 1487, o italiano Luca Pacioli (1445-1514) conclui sua obra *Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalite*, que segundo Boyer (1974) era uma compilação de aritmética, álgebra, geometria euclidiana e contabilidade; desenvolve o simbolismo algébrico e usa álgebra na resolução de problemas geométricos. Pacioli trata da regra de três e da falsa posição.

Também matemáticos como Chuquet (1445?-1500?), Stifel (1486-1567) e Tartaglia (1499-1557), segundo Smith (1958) e Eves (1995), tratam do cálculo com números racionais, com números irracionais, abordam a teoria das equações, proporções e discutem a regra de três.

Razão e proporção - uso dos termos e relações entre conteúdos

Conforme Smith (1958), durante a Idade Média os termos razão e proporção tiveram seus significados confundidos:

---

[19] Influente matemático do século XV, escreveu *De triangulis omnimodis*, dedicado à trigonometria.

> A palavra ‘razão’ é uma palavra latina e foi comumente usada na aritmética da Idade Média para significar cálculo. Para expressar a idéia a : b, os escritores medievais latinos geralmente usavam a palavra *proportio*, não a palavra *ratio*; enquanto para a idéia de igualdade de razões, a : b = c : d, eles usavam a palavra *proporcionalitas*. (SMITH, 1958, p. 478, tradução nossa)

Smith (1958) cita vários trabalhos matemáticos deste período, e também do Renascimento e ainda depois, nos quais a palavra “proporção” foi freqüentemente usada para significar “razão”: Campanus (1260), Jordanus Nemorarius (1225), Leonardo de Cremona (1425), Chuquet (1484), Rudolf (1526), Barrow (1670), Greenwood (1729). Mas diz também que vários outros autores usavam estes termos como o empregamos hoje.

Os termos *meios*, *antecedente* e *conseqüente* são devidos aos tradutores latinos de Euclides. Muitos termos antigos relacionados com razão, como razões múltiplas, duplas, triplas, superparticulares, foram empregados desde o tempo dos gregos até o século XVII. Diz Smith (1958) que estes termos resultaram de um esforço para desenvolver uma teoria geral das frações quando ainda não havia um bom simbolismo para isto, mas com a introdução de nossa notação atual e a invenção de um bom simbolismo algébrico, a exemplo do que foi feito por Pacioli (1494) e Stifel (1546), muitos destes termos desaparecem. Na Idade Média, segundo Smith (1958), a distinção entre razões e frações, ou razão e divisão, tornou-se menos marcada, e no Renascimento isto quase desapareceu, exceto nos casos de incomensurabilidade.

Ainda conforme Smith (1958), a palavra *proportio* foi freqüentemente usada para designar séries, como em Pacioli (1494) e mais tarde no século XVIII. O uso mais comum desta palavra limitou-se a séries de quatro termos: muitos antigos escritores falavam de uma proporção aritmética, b – a = d – c, como 2,3,4 e 5, e de uma proporção geométrica, a : b = c : d, como em 2,4,5 e 10, as quais os gregos adicionaram a proporção harmônica, nomes que agora são aplicados para séries. Os primeiros trabalhos impressos chamavam a atenção, também, à relação entre proporções e progressões, dizendo que proporção é apenas uma progressão de quatro termos.

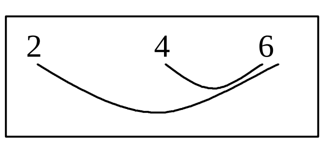
Regra de Três – a conexão com proporções

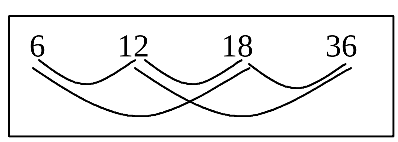
A Regra de Três aparece nas aritméticas comerciais, pois era usada pelos mercadores Orientais que obtinham, assim, de modo fácil, resultados seguros para certos problemas numéricos. Era chamada pelo nome Regra de Três pelos hindus e árabes, e por escritores latinos medievais. Foi chamada, também, de Regra de Ouro, de Chave dos Mercadores e de Regra dos Mercadores.

A regra era usualmente declarada sem explicação e a disposição dos termos que era a mesma dada pelos antigos hindus: “*Faça pela regra: multiplique o último número pelo segundo, e divida o produto pelo primeiro número. Na colocação de 3 termos deve ser bem observado que o 1º e o 3º são de mesma denominação.*” (DIGGES,1572 apud SMITH, 1958, p.489)

Diz Smith (1958) que declarações similares foram feitas por muitos outros aritméticos anteriores, ocasionalmente em versos. Afirma que este costume mostra o quanto estes escritores falharam completamente em reconhecer a relação da regra de três com proporção, que foi assim oculta na forma de uma regra arbitrária. A fundamental conexão entre as duas não atraiu muita atenção até que, no período do Renascimento, os matemáticos começaram a atentar para a aritmética comercial. O primeiro a enfatizar firmemente sua relação com a álgebra foi Stifel (1553-54).

Havia o costume de conectar os termos da regra de três por linhas curvas. Smith (1958) mostra o primeiro exemplo, do séc.XVII, e o segundo, de 1561.





Com a existência de regra puramente arbitrária, tornou-se necessária a colocação dos termos em uma ordem determinada e, segundo Smith (1958), os primeiros livros davam muita atenção a isto. Mas diz que escritores posteriores reconheceram que, se a regra era considerada como um caso de proporção, seria necessário colocar os termos de modo que os dois primeiros fossem semelhantes, como em Blassiére (1769), e em outros do séc. XVIII:

Ellen		Ellen		Guld.		Guld.
3	:	36	=	4	:	*x*

Quanto à *proporção inversa*, Smith (1958) dá seu conceito e os diferentes nomes usados entre 1500 e 1600, citando os autores. Diz que nesta regra foi costume partir dos termos como em proporção simples, mas mudando a direção para resolver, como em Hylles em sua Aritmética de 1600. Quanto às *proporções compostas*, menciona a Regra de Cinco e a Regra de Seis, e a Dupla Regra de Três, citando vários autores entre anos de 1549 e séc.XVIII.

O compasso proporcional de Galileu – uma ferramenta

Em 1597 surge uma ferramenta de computação confeccionada e vendida por Galileu (1564-1642), chamada compasso proporcional. Boyer (1974) o descreve e dá um exemplo de uma das computações possíveis:

> O compasso de Galileu consistia de dois braços unidos como os de um compasso usual, mas cada um marcado com graduações de vários tipos. A figura [fig.1] mostra apenas graduações simples, eqüidistantes, até 250. [...] Se, por exemplo, quisermos dividir um dado segmento de reta em cinco partes iguais, abre-se um compasso comum ao comprimento do segmento. Depois abre-se o compasso geométrico de modo que a distância entre as pontas do compasso comum cubra a distância entre duas marcas, uma em cada braço do compasso geométrico, que sejam múltiplos inteiros simples de cinco – digamos, o número 200 em cada braço. Então, mantendo fixa a abertura do compasso geométrico e colocando as pontas do outro compasso na marca 40 em cada braço, a distância

> entre as pontas do compasso comum será a quinta parte da distância dada, como se queria. (BOYER, 1974, p.234-235)

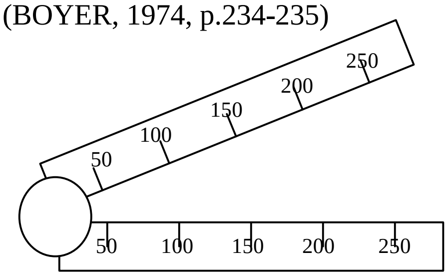


Figura 1

Este procedimento tem por base semelhança de triângulos, a mesma base que usamos hoje para dividir segmentos numa razão dada.

Europa - A partir do século XVII[20]

A contribuição de Descartes (1596-1650) à geometria analítica aparece em *La Geometrie*, de 1637. Afirma Eves (1995) que a primeira parte deste estudo trata dos princípios da geometria algébrica e revela um avanço em relação aos gregos:

> Para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo. Os gregos não iam além disso. Para Descartes, por outro lado, x^2 não sugeria uma área, antes porém o quarto termo da proporção $1:x = x:x^2$, suscetível de ser representado por um segmento de reta fácil de construir quando se conhece x. (EVES, 1995, p.384)

Este método, que faz uso de proporções na construção de segmentos, permitiu representar qualquer potência de uma variável, ou produtos de variáveis, por meio de um segmento de reta. Eves (1995) dá como exemplo a relação $y = x^2$, na qual, a cada valor de x é possível construir o y correspondente como quarto termo da proporção.

O desenvolvimento do cálculo algébrico simbólico e do cálculo infinitesimal no séc.XVIII, segundo Dalmedico e Peiffer (1986), reforça a discussão sobre grandezas incomensuráveis e números irracionais, que se dá em torno da leitura e interpretação do Livro V

[20] No século XVII tem inicio o desenvolvimento da geometria analítica e do cálculo.

dos *Elementos* de Euclides, ou seja, da teoria das proporções de Eudoxo. Esta questão será elucidada durante o século seguinte, pela construção dos números reais por Dedekind, Weierstrass, Cantor e Méray. O sistema dos números reais, exposto por Dedekind, é, como já citamos, essencialmente a teoria das proporções de Eudoxo. Este sistema legitima os números irracionais, que há muito vinham sendo usados, porém sem a fundamentação necessária.

Atualmente, conforme Smith (1958), razão, proporção e variação são considerados tópicos de álgebra, e como proporção não é nada mais do que uma equação fracionária, deve ser tratada como tal.

Conclusão

Neste breve levantamento histórico sobre proporções, destacamos alguns pontos.

A teoria das proporções dos pitagóricos, possivelmente desenvolvida a partir das médias babilônicas, era uma teoria aplicável a grandezas comensuráveis e números inteiros, provavelmente nos moldes do que é apresentado em Euclides VII-20, que estabelece quando números são proporcionais. A descoberta dos incomensuráveis leva a dificuldades que são superadas quando Eudoxo estabelece uma nova teoria das proporções, que consta em Euclides V-5, aplicada a grandezas, comensuráveis e incomensuráveis, evitando os números e estabelecendo quando duas grandezas têm entre si a mesma razão. O árabe Khayyan, ao dar um tratamento numérico à teoria de Eudoxo, faz a ligação entre as noções de razão e número. Na Europa, a partir da Idade Média, com o desenvolvimento da aritmética e da álgebra, a teoria das proporções de Eudoxo é estudada e aplicada a questões científicas e à matemática comercial. Os números irracionais são usados, mas sem bases sólidas. O desenvolvimento da geometria analítica e do cálculo, nos séc. XVII e XVIII, leva à criação, no séc. XIX, das teorias dos números reais, cuja exposição feita por Dedekind vem a ser, em essência, a teoria das proporções de Eudoxo.

Temos, assim, duas definições de proporções. Uma para números inteiros, em Euclides VII-20, da qual se origina a propriedade fundamental das proporções (Euclides VII-prop.19), e a de Eudoxo, para grandezas, em Euclides V-5, embora esta última compreenda a anterior.

Houve, e ainda há hoje, confusão acerca do significado do termo *proporção*. Na Idade Média foi usado para significar séries, bem como para significar razão. Muitas vezes o termo *proporção* é usado ainda hoje para significar razão.

No Renascimento, com a criação de um bom simbolismo algébrico, a distinção entre razões e frações, ou razão e divisão, quase desaparece, exceto nos casos de incomensurabilidade.

A regra de três, que havia surgido da Índia e China e era usada pelos mercadores como uma regra arbitrária, tem sua relação com proporção e álgebra reconhecida somente quando os matemáticos desta época começam a dar atenção às aritméticas comerciais.

A representação de proporção e da regra de três parte de uma exposição retórica, com auxílio de segmentos ou números e modifica-se ao longo do tempo até chegar à representação algébrica atual. A disseminação destes conhecimentos se deve às muitas aritméticas publicadas no Renascimento.

Identificamos, neste estudo, algumas tarefas relacionadas à proporção: divisão em partes proporcionais, resolução de equações lineares, interpolação linear de valores em tabelas, construção de segmentos e problemas típicos de regra de três. Quanto às técnicas, identificamos a regra de três, a falsa posição, e a utilização da semelhança de triângulos na construção de segmentos e também na divisão destes, por meio da ferramenta *compasso proporcional*. Também podemos considerar como uma tarefa, a verificação da igualdade de razões, cujos critérios ou técnicas são dadas pelas definições de proporção, tanto nas teorias gregas quanto na versão numérica dos árabes.

Assim, este estudo histórico nos permitiu visualizar diferentes aspectos sobre proporção, bem como explicitar elementos de uma organização matemática, por meio das tarefas e técnicas.

2.2 Estudo do objeto proporção no âmbito da noosfera

Apresentamos, a seguir, o estudo do tratado Trajano e das publicações de Ávila e Lima.

2.2.1 Estudo do tratado Aritmética Progressiva, de Antonio Trajano[21] (1927)

Um saber de referência

Este tratado é considerado por nós como referência, pois dois fatores indicam a influência desta aritmética no ensino brasileiro, do final do século 19 até meados do séc. XX:

- suas duas primeiras edições foram publicadas em torno do ano de 1880; em 1927 já estava na 62ª edição e a 84ª edição é de 1959;
- ela é citada por Lima (1991)[22] ao se referir à definição de Grandezas Proporcionais, ressaltando sua clareza e simplicidade.

[21] O exemplar que examinamos é de 1927, com a grafia das palavras bastante diferente da atual. Para tornar mais simples a leitura, optamos por atualizar a grafia nas citações, quando isto não interferir em nossa análise.
[22] Lima a teve como livro-texto na escola primária.

Conteúdo desenvolvido

São apresentados, nesta aritmética, cálculos com números naturais e frações, sistemas de medida, razão e proporção, regra de três, falsa posição, matemática comercial (porcentagem, juros, cambio, etc.), potências e raízes, progressões e logaritmos.

Ênfase dada no ensino da aritmética

Trajano visa retomar o ensino da aritmética de maneira sistematizada:

> Por muitos anos, o estudo de Aritmética esteve entre nós em quase completo abandono e deplorável atraso. Nas escolas primárias os mestres limitavam-se a ensinar superficialmente as quatro operações fundamentais e algumas regras cuja aplicação os alunos ficavam sempre desconhecendo. (p. 3)

O estudo de proporção

O tema proporção é apresentado no capítulo “Razão” (p.147).

O conceito de proporção é tratado como “*uma igualdade entre duas razões*” (p.149). O saber proporção depende, segundo esta abordagem, do conceito de razão[23], o que leva o autor a primeiro abordar o conceito de razão.

Tendo definido proporção, Trajano desenvolve o estudo de sua escrita, leitura, nome dos termos e propriedades, a partir de um exemplo numérico:

> **Proporção** é uma igualdade entre duas razões.
> Assim 12 : 6 = 8 : 4 é uma proporção que se lê: *a razão de 12 para 6 é igual a razão de 8 para 4*, isto é, o quociente de 12 dividido por 6 é igual ao quociente de 8 divido por 4.
> O sinal da igualdade entre duas razões é 4 pontos (: :), como 12:6 :: 8:4 que abreviadamente se lê: *12 está para 6, assim como 8 está para 4*.
> Em toda a proporção há duas razões expressas em quatro termos, sendo
> O 1º termo o antecedente da primeira razão,
> O 2º termo o conseqüente da primeira razão,

[23] Razão é definida por Trajano (p.147) como segue: “Quando comparamos entre si duas quantidades da mesma espécie, o quociente que nos mostra a relação que há entre elas, chama-se razão. [...] Em Aritmética, razão ou razão por quociente é o número que mostra quantas vezes uma quantidade contém outra da mesma espécie, quando ambas são comparadas.”

> O 3º termo o antecedente da segunda razão,
> O 4º termo o conseqüente da segunda razão.
> 1º termo   2º termo   3º termo   4º termo
> 12 : 6 :: 8 : 4
>
> O primeiro termo e o último chamam-se **extremos,** e os dois termos do meio chamam-se **meios**. Na proporção acima, 12 e 4 são extremos, e 6 e 8 são meios. (p.149, grifos do autor)

Aqui recuperamos:

- duas representações para proporção: *12 : 6 = 8 : 4*
- e *12 : 6 :: 8 : 4*;
- a leitura da proporção: *12 está para 6, assim como 8 está para 4*;
- a designação dos termos *antecedente* e *conseqüente* e *meios* e *extremos*.

Quanto às propriedades da proporção, Trajano apresenta:

> *1ª –Em toda a proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.*
> *2ª – Se o produto dos dois extremos for dividido por um dos meios, o quociente será o outro meio; e se o produto dos dois meios for dividido por um dos extremos, o quociente será o outro extremo.*
> *3ª –Dividindo-se ou multiplicando-se os dois termos de uma razão, ou os quatro termos de uma proporção por um mesmo número, não se altera o valor da proporção.*
> *4ª – Podemos alterar, inverter e transpor os termos de uma proporção, fazendo-lhe sete alterações diversas sem destruir as suas propriedades.* (p. 149-150)

Destas, somente a 1ª e a 2ª são usadas na resolução dos exercícios propostos, o que veremos com mais detalhes.

Duas tarefas cujas técnicas de resolução são justificadas pelas propriedades

A 1ª propriedade justifica a técnica de resolução da tarefa **verificar se uma proporção está certa**:

> Para verificarmos se uma proporção está certa, **multiplicaremos os dois meios, e se o produto for igual ao dos extremos,** a proporção estará exata.(p.149, grifo nosso)

A 2ª propriedade justifica a resolução da tarefa **achar qualquer termo de uma proporção**:

> Desde que o produto dos meios dividido por um dos extremos dá o outro extremo, e o produto dos extremos dividido por um dos meios dá o outro meio, segue-se que, se tivermos três termos de uma proporção, podemos achar facilmente o outro, seja ele qual for. O termo desconhecido é representado na proporção pela letra *x*, e chama-se a **incógnita** da proporção, isto é, o termo desconhecido.(p.150, grifo do autor)

O problema a seguir exemplifica este tipo de tarefa:

> Problema. Achar o valor de *x* na proporção 9 : 3 :: 18 : *x*.
> Solução. A incógnita ou o termo desconhecido é um dos extremos; ora para achar um dos extremos, temos de multiplicar os meios 3 e 18, e dividir o produto pelo outro extremo, que é 9, e teremos então o valor de *x*, que é 6. (p.150)

$$9 : 3 :: 18 : x$$

$$x = \frac{3\times 18}{9} = 6$$

Na solução apresentada por Trajano, há uma análise do problema, na qual ele identifica que o termo procurado é um dos extremos e, então, faz uso da 2ª propriedade: o extremo procurado será o quociente do produto dos meios dividido pelo outro extremo, que são os três termos conhecidos. Também Trajano apresenta a síntese da resolução, no quadro ao lado.

Uma regra institucionaliza a técnica, que chamaremos **resolução da proporção**:

> **Regra**. Para se achar um dos extremos, multiplicam-se os meios, e divide-se o produto pelo extremo conhecido.
> E para se achar um dos meios, multiplicam-se os extremos, e divide-se o produto pelo meio conhecido. (p.150)

Salientamos que o uso da 2ª propriedade se justifica pela opção de Trajano em não fazer uso da álgebra. A resolução do problema poderia ser feita usando a 1ª propriedade, o que resultaria na equação $3\times 18 = 9\times x$, na qual o valor de *x* é o valor procurado.

Proporções – uma ferramenta para resolver problemas

Regra de Três – uma técnica para resolver um certo tipo de tarefa

Trajano diz que "*A regra de três tem por fim achar a quantidade desconhecida de um problema, quando são dadas três quantidades conhecidas e proporcionais. Dos três termos conhecidos, vem o nome regra de três*" (p.151).

A **regra de três** é aqui colocada como uma técnica de resolução de um certo tipo de tarefa: **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três quantidades conhecidas e proporcionais**. Este tipo de tarefa dá lugar aos problemas identificados por sua técnica de resolução, ou seja, "**problemas de regra de três**".

Quanto à técnica **regra de três**, Trajano faz o estudo da regra de três simples e da regra de três composta.

Regra de três simples

Quanto à **regra de três simples**, temos:

- uma caracterização:

> Na regra de três simples há só duas razões, uma tem as duas quantidades conhecidas a que se dá o nome de quantidades principais; a outra tem uma quantidade conhecida e outra desconhecida, e ambas têm o nome de quantidades relativas, porque têm relação com as primeiras.(p.151)

- e mais particularmente, temos:

> **Regra de três direta** é aquela em que as quantidades relativas aumentam, se as principais aumentam, ou diminuem se as principais diminuem.
> **Regra de três inversa** é aquela em que as quantidades relativas aumentam, se as principais diminuem, ou diminuem se as principais aumentam. (p. 151)

Com isto, temos dois tipos de problemas de regra de três:

- **Problemas de regra de três direta** - as quantidades se relacionam como caracterizado na regra de três direta;

- **Problemas de regra de três inversa** - a relação entre as quantidades se dá como descrito na regra de três inversa.

Ilustraremos a seguir estes dois tipos problemas. O estudo da resolução destes problemas nos permitiu identificar o uso da **técnica geral Análise/Síntese** e a proporção como ferramenta de resolução.

Problema 1

> **Problema de regra de três direta**.
> Se 4 quilos de café custam 2$000[24], quanto devem custar 6 quilos?
> Solução. Para formarmos a proporção, temos três quantidades conhecidas e uma desconhecida representada por *x*, e cujo valor queremos achar. 4 quilos e 6 quilos são quantidades conhecidas e principais, e formam a primeira razão; 2$000 e *x* são quantidades relativas das primeiras e formam a segunda razão.
> Este problema é da **regra de três direta**, porque aumentando o número de quilos, aumentará necessariamente o importe deles; e diminuindo o número de quilos, diminuirá também o seu importe.
>
> Processo
> 4 quilos 2$000
> 6 quilos *x*
> (1º) (2º) (3º) (4º)
> $4 : 6 :: 2\$000 : x$
>
> $$x = \frac{6 \times \$2000}{4} = 3\$$$
>
> Para dispor estes quatro termos em uma proporção, escreveremos *x* como o quarto termo da proporção, e a quantidade da mesma espécie que *x*, como terceiro termo. Ora, neste problema *x* representa dinheiro, e a quantidade da mesma espécie é 2$000. Depois de escrevermos estes dois termos na proporção passaremos a escrever os outros dois termos da outra razão.
> Se *x* for maior do que 2$000, escreveremos a maior quantidade como o segundo termo; se for menor, escreveremos a menor quantidade como segundo termo.
> Pela natureza do problema, vê-se que *x* é mais do que 2$000, porque se 4 quilos custam 2$000, 6 quilos devem custar mais de $2000. Então escreveremos 6 como segundo termo, e 4 como primeiro. Multiplicaremos agora os meios e dividiremos o produto pelo extremo conhecido, e teremos 3$000, que é o importe dos 6 quilos.(p.152, grifos do autor)

Trajano resgata, nesta resolução, a *proporção* como ferramenta para resolver **problemas de regra de três direta**. Na solução dada, uma descrição discursiva da resolução é apresentada, na qual identificamos duas etapas distintas: Análise e Síntese.

A “Análise”, por sua vez, é constituída das seguintes etapas:

[24] “2$000” são dois mil-réis, a dinheiro da época, com o cifrão entre centenas e milhares, o que também era escrito como “2$”, no caso dos três últimos algarismos serem zero. (p. 16)

- Reconhecimento de uma proporção: "*Para formarmos a proporção, temos...*";
- Reconhecimento das quantidades conhecidas e principais (primeira razão);
- Reconhecimento das quantidades relativas das primeiras (segunda razão);
- Identificação do tipo de problema: "*Este problema é da regra de três direta, porque...*";
- Descrição de como dispor os termos da proporção: "Para dispor estes quatro termos em uma proporção, escreveremos...";
- Identificação dos termos de mesma espécie: "*... x representa dinheiro, e a quantidade da mesma espécie é 2$000.*";
- Estudo da quantidade de *x*: "*Pela natureza do problema, vê-se que x é mais do que 2$000, porque...*";
- Formulação da proporção: "*Se x for maior do que 2$000, escreveremos a maior quantidade como o segundo termo; se for menor ...*";
- Resolução da proporção: "*Multiplicaremos agora os meios e dividiremos o produto pelo extremo conhecido...*".

A "Síntese", que o autor designa por "processo", consiste de:

- Representação da regra de três: "*4 quilos 2$000*
  6 quilos x ".
- Representação da proporção, com indicação dos termos: "*(1º) (2º) (3º) (4º)*
  4 : 6 :: 2$000 : x ".
- Cálculo: " $x = \frac{6 \times \$2000}{4} = 3\$$ " .

Salientamos que na etapa da análise "estudo da quantidade de *x*", a expressão "*pela natureza do problema*" remete à identificação do tipo de problema. Esta identificação é condição para formulação da proporção.

Problema 2.

> **Problema de regra de três inversa**.
> Se 15 homens fazem um muro em 40 dias, 30 homens em quantos dias o farão?
> Solução. 15 homens e 30 homens formam a primeira razão; 40 dias e x são as quantidades relativas e formam a segunda razão. Este problema é de **regra de três inversa**, porque aumentando o número de trabalhadores, diminuem os dias de serviço, pois se 15 homens gastam 40 dias em um trabalho, 30 homens, que é o dobro do pessoal, gastarão a metade do tempo. Os termos dispõem-se do mesmo modo do que na regra de três direta.
>
> Processo
> 15 homens   40 dias
> 30 homens x dias
> $30 : 15 :: 40 : x$
> $$x = \frac{15 \times 40}{30} = 20$$
>
> Escreveremos x como o quarto termo, e a quantidade da mesma espécie de x, que é 40 dias, como o terceiro termo. Pela natureza do problema vê-se que x é menos que 40 dias, porque se 15 homens gastam 40 dias em um serviço, 30 homens devem gastar menos dias. Escreveremos então 15 como o segundo termo, e 30 como o primeiro.
> O valor de x é 20 dias, tempo que gastam os 30 homens. (p.152)

A solução deste problema também é apresentada seguindo a técnica geral Análise/ Síntese. Além disso, a cada etapa da Análise e da Síntese, os procedimentos são os mesmos descritos para a resolução do problema de regra de três simples. Porém, o que difere essa resolução da anterior é a própria *natureza do problema*, ou seja, o tipo de variação entre as quantidades, variação essa que é considerada na etapa “estudo da quantidade de *x*”. Assim, fixadas as quantidades relativas na 2ª razão, sendo *x* o 4º termo, a disposição dos termos na 1ª razão é feita de modo a preservar o tipo de variação (para mais ou para menos) existente entre os termos da 2ª razão, ou seja, de modo que ambas formem uma proporção.

Trajano institucionaliza a “*Regra geral para a proporção direta e inversa*”, como uma síntese do que foi feito nos problemas. Esta “*Regra geral para a proporção direta e inversa*” será tratada por nós como duas técnicas:

- **Regra geral para proporção direta**;
- **Regra geral para proporção inversa**.

Regra de três composta

A **regra de três composta**, segundo o autor, consta sempre de três ou mais razões e oferece mais de três quantidades para se achar a incógnita. Assim, temos um novo tipo de problema: **problema de regra de três composta**. O estudo é desenvolvido por meio da resolução de um exemplo.

> Problema. Se 4 homens serram 20 taboas em 5 dias, quantas taboas serrarão 12 homens em 3 dias?
> Solução. Neste problema temos 3 razões que são 4 homens e 12 homens, 5 dias e 3 dias, 20 taboas e x taboas. x é o quarto termo da proporção; a quantidade da mesma espécie que x, que é 20 taboas, é o terceiro termo.
> Para sabermos colocar os termos das outras razões, devemos fazer o mesmo raciocínio que já fizemos na regra de três simples.
>
> $$\begin{array}{l} \text{4 homens 5 dias 20 taboas} \\ \text{12 homens 3 dias } x \text{ taboas} \\ \left.\begin{array}{l} 4 : 12 \\ 5 : \ \ 3 \end{array}\right\} : : 20 : x \\ 20 : 36 \ : : \ 20 : x \\ \qquad x = 36 \end{array}$$
>
> Se 4 homens serram 20 taboas, 12 serram mais, logo a resposta deve ser mais e por isso, o número maior da razão, que é 12, pertencerá ao segundo termo da proporção, e 4 pertencerá ao primeiro. Se em 5 dias serram 20 taboas, em 3 dias serram menos taboas, logo 3, que é menor, pertencerá ao segundo termo, e 5 pertencerá ao primeiro.
> Como a primeira razão é composta de duas razões, reduz-se a uma razão simples e temos $4 \times 5 = 20$, e $12 \times 3 = 36$. A proporção é pois $20 : 36 : : 20 : x$, sendo x=36.(p.156)

Aqui, Trajano segue a mesma exposição feita nas resoluções dos problemas de regra de três simples. Identifica os termos das três razões e analisa a variação das quantidades dadas, em relação à quantidade procurada, para dispor os termos na proporção. Porém, como devem ser consideradas as variações de duas quantidades de espécies diferentes para o cálculo daquela que se procura, reduz suas razões a uma só e com ela forma a proporção.

Também aqui Trajano institucionaliza a técnica para a formulação da proporção com uma "***Regra geral para a formação da regra de três composta***", a qual também trataremos como uma técnica.

Proporção como condição para a existência da técnica "Falsa Posição"

Diz Trajano que a *falsa posição* é uma aplicação curiosa da regra de três:

> A regra da falsa posição é um processo aritmético que, por meio de um número suposto ou falso, se acha o número requerido. [...] Toma-se um número falso, e com ele se fazem todas as operações indicadas no problema; depois o total falso está para o total verdadeiro, assim como o número falso, que se tomou, está para o número requerido. (p.157, 158)

Nesta exposição da regra a proporção aparece como etapa final da técnica. Assim, a aplicação da técnica da *falsa posição* pressupõe que os valores envolvidos no problema formem uma proporção. Temos, portanto, a proporção como condição para a existência da técnica da *falsa posição*.

Proporção na tarefa "Dividir em partes proporcionais"

Vejamos um exemplo dado:

> Problema. Dividir $140 em três partes, na razão de 3, 5 e 6.
> Solução. A soma dos números proporcionais é 3 + 5 + 6 = 14. Temos, pois, de formar a seguinte proporção: A soma dos números proporcionais está para o dividendo, que é $140, assim como cada um dos números proporcionais está para o seu relativo, que é *x*.
> Como há três números proporcionais, estabelecemos três proporções para achar as três partes relativas ou correspondentes. As três partes proporcionais a 3, 5 e 6 são $30, $50 e $60. (p.159)

Processo	
14 : $140 : : 3 : *x* = $30	
14 : $140 : : 5 : *x* = $50	
14 : $140 : : 6 : *x* = $60	
Portanto	
Uma parte é	$30
Outra parte é	$50
Outra parte é	$60
Soma das partes	$140

Na solução dada a este problema, identificamos a utilização da técnica geral **Análise/Síntese**. A *proporção* tem a função de ferramenta que caracteriza uma técnica.

Na Análise, as etapas são:

- Apresentação da soma dos números proporcionais: "*3 + 5 + 6 = 14*";
- Formulação da proporção: "*Temos, pois, de formar a seguinte proporção...*";

- Identificação do número de proporções necessárias: “*Como há três números proporcionais, estabelecemos três proporções...*”

Na Síntese, temos:

- A representação das proporções;
- A listagem de cada uma das partes encontradas e a soma destas.

Na etapa da Análise “formulação da proporção”, Trajano explicita a proporção existente entre os valores totais e cada parte, proporção esta que permite encontrar as partes proporcionais aos números dados.

Nesta resolução, a **formulação da proporção** é uma técnica que permite realizar a tarefa **dividir uma quantidade em partes proporcionais**. Esta tarefa está presente em diferentes situações-problema da matemática comercial.

No capítulo *Sociedade Comercial*, Trajano afirma que problemas como “*achar o lucro ou a perda de cada sócio, segundo seu capital*” (p.173) são da mesma natureza que os da divisão em partes proporcionais, sendo que os capitais de cada sócio correspondem aos números proporcionais para a divisão. Outro problema deste tipo é “*achar a parte de cada sócio, quando seus capitais giram em tempos desiguais*” (p.174), ou seja, capitais desiguais em tempos desiguais. Conforme o autor, para resolvê-lo “*multiplica-se cada capital pelo tempo em que foi empregado; consideram-se estes produtos como os seus respectivos capitais, e procede-se como nos problemas simples.*” (p.174)

Proporção no estudo de porcentagem

O exemplo a seguir nos permite ilustrar a tarefa **achar a porcentagem.**

> Problema. Quanto é 5% de 120?
> Solução. 120 é o principal, e 5% é a taxa. Multiplicando o principal pela taxa temos 600. Dividindo agora este produto por 100, temos 6, que é 5% de 120. (p.161)

Na solução são destacados os dados do problema, e descrito um procedimento de resolução. A partir desta resolução, o autor institucionaliza a regra:

> Para se achar a porcentagem, multiplica-se o principal pela taxa, e divide-se o produto por 100.(p.161)

Esta regra é uma versão da técnica **resolução da proporção**. Podemos ver na demonstração dada:

> Demonstração. A regra acima é baseada na seguinte proporção, por meio da qual se podem resolver todos os problemas de porcentagem:
> 100 : principal : : taxa : porcentagem ou
> 100 : 180 : : 5 : x (p.161)

Remarcamos a função da *proporção*, aqui como uma ferramenta no cálculo da porcentagem. Demonstrações análogas são dadas para as tarefas "achar a taxa" e "achar o principal". Temos, assim, um novo conjunto de tarefas, que chamaremos **problemas de porcentagem**, cuja resolução se dá usando proporções.

Conclusão

Neste tratado, Trajano aborda o saber proporção por meio de sua definição: "*proporção é uma igualdade entre duas razões*"; de sua representação: "*12 : 6 = 8 : 4*"; e de suas propriedades, das quais salientamos duas: "*1ª –Em toda a proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos* e *2ª – Se o produto dos dois extremos for dividido por um dos meios, o quociente será o outro meio; e se o produto dos dois meios for dividido por um dos extremos, o quociente será o outro extremo*".

Identificamos, neste estudo, diversas tarefas e técnicas de resolução relativas à proporção:

Tarefas	Técnicas
1) Verificar se uma proporção está certa.	Igualdade entre produto dos meios e produto dos extremos.
2)Achar qualquer termo de uma proporção	Resolução da proporção Para se achar um dos extremos, multiplicam-se os meios, e divide-se o produto pelo extremo conhecido. E para se achar um dos meios, multiplicam-se os extremos, e divide-se o produto pelo meio conhecido.
3)Problemas de Regra de Três: Simples: direta e inversa Composta Achar a quantidade desconhecida de um problema, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais (direta ou inversamente).	Técnica geral Análise/Síntese Regra de três - formulação das proporções Escreve-se *x* como o quarto termo da proporção, e como terceiro termo, a quantidade da mesma espécie de *x*. Regra geral para proporção direta Se da natureza do problema, *x* for maior do que o terceiro termo, escreve-se o maior dos dois números como segundo termo, e o menor como primeiro termo. Regra geral para proporção inversa Mas, se *x* for menor do que o terceiro termo, escreve-se o número menor, como segundo termo, e o maior, como primeiro termo. Regra geral para a formação da regra de três composta Quando são dadas mais de três quantidades conhecidas: Escrevem-se todas as razões destas quantidades em forma de uma razão composta, e reduz-se a razão composta a uma razão simples, e acha-se na proporção o valor de *x*. Resolução da proporção.
4)Dividir em partes proporcionais. Aplicação: A regra da sociedade, divisão de lucros.	Técnica geral Análise/Síntese Formulação das proporções: Forma-se uma proporção, na qual a incógnita é o quarto termo, um dos números proporcionais é o terceiro termo, o número a ser dividido é o segundo termo, e a soma dos números proporcionais é o primeiro termo. Forma-se uma proporção semelhante para cada um dos outros números proporcionais. Resolução das proporções.
5) Problemas de porcentagem	Formulação da proporção: 100 : principal : : taxa : porcentagem Resolução da proporção.

Salientamos que proporção inicialmente é tratada como objeto matemático em si mesmo, via uma abordagem aritmética. Daí decorrem a tarefa **achar qualquer termo de uma proporção** e a técnica **resolução da proporção**, que se tornarão etapas de técnicas de resolução de outras tarefas, para as quais proporção tem a função de ferramenta de resolução. Proporção também tem como função ser condição para a existência de uma técnica.

2.2.2 Razões, proporções e regra de três, segundo Geraldo Ávila

Proposição: estudar proporções no contexto dos números reais (igualdade e equações)

Segundo Ávila (1986a), a apresentação do tópico **razões e proporções** no ensino não se modernizou. Até hoje, o ensino guarda resquícios da maneira antiga de se entender o que é uma razão e de se exprimir a igualdade de duas razões como uma proporção. Esta forma de vida e de tratamento do objeto proporção tem origem no rigor grego de não admitir os números irracionais e na teoria de Eudoxo que contorna a crise dos incomensuráveis.

Ainda segundo Ávila, como dispomos dos números reais, "*podemos medir todas as grandezas e, em conseqüência, podemos sempre definir a razão de duas delas como o quociente de suas medidas*" (1986a, p.2). Isto dispensa o uso da teoria geométrica das proporções e de seus problemas de regra de três: "*O essencial sobre razões, proporções e regra de três pode muito bem ser ensinado no estudo dos números reais, das igualdades e equações. [...] Pode-se então definir razão e proporção e estabelecer propriedades importantes.*"(Ávila, 1986a, p. 8).

Estudo da propriedade fundamental

Para exemplificar, citamos a propriedade fundamental das proporções, segundo a qual "o produto dos meios é igual ao produto dos extremos", que é, conforme Ávila (1986a), uma propriedade das igualdades, que deve ser tratada no estudo das equações, como também no estudo da igualdade de frações.

Como saber a ensinar – ênfase na proporcionalidade

Ávila (1986a) dá ênfase à noção de proporcionalidade, a partir da qual os conceitos de proporcionalidade direta e inversa devem ser estudados.

A proporcionalidade- relação entre grandezas

Três definições apresentadas por Ávila (1986a) dão conta de que a "relação de proporcionalidade direta ou inversa entre as variáveis" é verificada a partir da equação que estabelece a dependência entre elas. Vejamos:

> *Definição 1.* Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais – mais especificamente, diretamente proporcionais – se estiverem assim relacionadas: $y = kx$ ou $y/x = k$, onde k é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade.
>
> *Definição 2.* Diz-se que as variáveis x e y são inversamente proporcionais se $y = k/x$ ou $xy = k$, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade). (1986a, p.3)

Temos aqui, x e y variáveis e k a constante de proporcionalidade. Na definição 1, a equação $y = kx$ e na definição 2 a equação $y=k/x$, estabelecem a dependência entre as variáveis x e y.

Já a definição 3 abrange as duas anteriores, isto é, contempla o caso de proporcionalidade direta e inversa:

> *Definição 3.* Se várias variáveis, digamos x, y, z, w, r ,s estão relacionadas por uma equação do tipo $z = k\dfrac{xyw}{rs}$, onde k é constante, então dizemos que z é diretamente proporcional a x, a y e a w; e inversamente proporcional a r e a s. (1986a, p. 3,4)

Como resolver os problemas de regra de três – tarefa "achar a quantidade desconhecida"

Ávila propõe uma resolução algébrica para estes problemas. Considera que eles

> são aplicações de equações de primeiro grau. Todos podem ser formulados em termos de duas variáveis x e y, ligadas por uma equação do tipo $y = kx$ ou $xy = k$, onde k é uma constante. Isto é verdade mesmo nos chamados "problemas de regra de três composta".(1986b, p.4)

Vejamos dois exemplos.

Exemplo 1. Este é um problema de regra de três composta.

> *Se 10 máquinas, funcionando 6 horas por dia, durante 60 dias, produzem 90.000 peças, em quantos dias x, 12 dessas mesmas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzirão 192 000 peças?*
> Temos aqui quatro variáveis:
> - M = número de máquinas;
> - H = horas de funcionamento por dia;
> - D = dias de funcionamento;
> - P = número de peças produzidas.
>
> Seja k o número de peças que cada máquina produz por hora.
> Temos: P = kMHD; ou $\frac{P}{MHD} = k$.
> Esta equação nos diz que a variável P é diretamente proporcional a M, H e D. Substituindo nesta equação as duas seqüências de valores dados no problema, obtemos
> $$\frac{90\,000}{10 \times 6 \times 60} = k = \frac{192\,000}{12 \times 8 \times x}\ .$$
> Novamente temos aqui uma equação simples, cuja solução é
> $$x = \frac{10 \times 6 \times 60 \times 192\,000}{90\,000 \times 12 \times 8} = 80 \text{ dias.}$$ (1986a, p.4)

Nesta resolução, Ávila segue as seguintes etapas:

- identificação das variáveis envolvidas;
- identificação da constante de proporcionalidade k;
- formulação da equação de dependência entre as variáveis;
- identificação, a partir da equação, das relações de proporcionalidade entre a variável em função da qual se expressa k e as demais variáveis;
- uso da equação para expressar as duas situações propostas no problema;

- identificação da igualdade, determinada pela constante *k*, entre as duas expressões;
- resolução da equação daí resultante.

Ressaltamos que, pelo fato deste problema envolver quatro grandezas, a constante *k* é determinada a partir da "escolha" da grandeza que ela representa. Nesta resolução, *k* representa "número de peças", mais especificamente, o número de peças produzidas por uma máquina em uma hora, que é constante nas situações propostas. Podemos, por exemplo, determinar outra constante *k'*, que represente o "número de máquinas necessárias para produzir uma peça em uma hora". Assim, teríamos a equação

$$M = k'\frac{P}{HD} \quad \text{ou} \quad k' = \frac{MHD}{P}.$$

Embora esta constante *k'* não seja tão evidente quanto aquela dada por Ávila, a equação resultante de sua escolha nos leva igualmente ao resultado do problema.

Exemplo 2. O problema aqui apresentado trata de velocidade média.

> *Uma viagem foi feita em 12 dias percorrendo-se 150 km por dia. Quantos dias seriam necessários para fazer a mesma viagem, percorrendo-se 200 km por dia?* (1986b,p.2)

A velocidade média, segundo Ávila, "*é um conceito simples, que deve ser ensinado claramente ao aluno. Se* s *é o espaço percorrido por uma móvel durante um certo tempo* t, *então, por definição, a sua* velocidade média v *é* v = s/t, *donde se segue que* s = vt." (1986b,p. 2). Diz o autor que muitas situações ocorrem com a presença de grandezas que, de modo geral, são uma "taxa de variação" ou "razão", como a velocidade.

Para este problema, Ávila apresenta a seguinte resolução:

> Está claro, pelo enunciado do problema, que a distância s percorrida é a mesma nas duas hipóteses feitas. No primeiro caso, a velocidade é 150 km/dia, e no segundo, 200 km/dia. Substituindo-se esses dados na fórmula *s = vt*, encontramos

> $s = 150 \times 12$ e $s = 200 \times t$.
> Igualando os segundos membros, eliminamos s e obtemos uma equação em t, que nos dá $t = 9$ dias. (1986b,p.2)

Aqui, as etapas de resolução são:

- identificação da constante *distância s* para as duas situações dadas;
- identificação dos valores da variável velocidade em cada situação;
- utilização da fórmula $s = vt$, para expressar as duas situações;
- descrição de como obter a nova equação, por eliminação da constante s;
- apresentação do resultado.

No comentário que antecede a resolução do problema, Ávila explicita que a fórmula $v=s/t$, da qual decorre $s=vt$, expressa a definição de velocidade média, cujo conceito deve ser ensinado ao aluno. Temos, portanto, neste problema, que a equação de dependência entre as variáveis já é dada por uma lei conhecida.

Nestes dois problemas, identificamos a tarefa típica de regra de três, ou seja, **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três quantidades conhecidas e proporcionais.**

A técnica de resolução dada por Ávila consiste, basicamente, em:

- identificar a constante k;
- estabelecer a equação de dependência entre as variáveis envolvidas, $y = kx$ ou $xy= k$, se ela não é dada por uma lei conhecida;
- obter uma nova equação, por eliminação da constante, e então resolvê-la.

A equação de dependência entre as variáveis – uma etapa da técnica

Quanto à determinação da equação que relaciona as variáveis, Ávila faz uma crítica ao uso da seguinte regra:

> Fixadas as variáveis envolvidas no problema, exceto duas delas, estas são diretamente proporcionais se aumentam ou diminuem simultaneamente, e inversamente proporcionais se uma aumenta enquanto a outra diminui.(Ávila, 1986a,p. 5)

Isto não é sempre verdade, pois duas variáveis podem aumentar ou diminuir simultaneamente, ou uma aumenta enquanto a outra diminui, sem que sejam respectivamente direta ou inversamente proporcionais. Segundo Ávila, esta regra só poderá ser aplicada para verificar se a proporcionalidade entre variáveis é direta ou inversa, quando já se sabe que são proporcionais.

Assim, para o ensino desta primeira etapa da técnica, Ávila sugere que "*o professor deva esclarecer suficientemente seus alunos para que eles saibam encontrar as corretas relações de proporcionalidade*".(1986a, p. 6) Entendemos que esta sugestão não explicita suficientemente esta etapa da técnica, porém, recuperamos aqui elementos de uma intenção de ensino de uma técnica.

Conclusão

Vimos, neste estudo, que Ávila não faz referência explícita a *proporções*. Por quê?

Ávila propõe, nestes artigos, que o ensino das questões relativas à razão, proporção e regra de três, os conceitos e suas aplicações, sejam ensinados no contexto dos números reais, das igualdades e equações, com ênfase no conceito de grandezas ou variações proporcionais. Assim, Ávila refere-se a grandezas ou variações proporcionais, ou seja, grandezas que possuem entre si uma relação de *proporcionalidade* e, portanto, aborda a igualdade de razões neste novo contexto.

O autor afirma que podemos sempre definir a razão entre duas grandezas como o "quociente de suas medidas", que é constante para as grandezas proporcionais. Expressa a relação entre grandezas diretamente proporcionais pela equação $y = kx$ e entre grandezas inversamente proporcionais pela equação $y = k/x$, nas quais k é a constante de proporcionalidade.

Ressaltamos, por fim, que identificamos neste estudo a tarefa **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três quantidades conhecidas e proporcionais,** cuja técnica de resolução consiste em **estabelecer a equação de dependência entre as variáveis, a partir da identificação da constante de proporcionalidade.**

2.2.3 Grandezas Proporcionais, Elon Lages Lima

Uma proposta de resolução de problemas sem o uso de regras prontas

Ênfase dada a Grandezas Proporcionais

Lima, como Ávila (1986a), propõe que o ensino dê ênfase a Grandezas Proporcionais:

> Uma vez entendido com bastante clareza este conceito, todos os problemas relativos a regra de três e proporções se resolvem naturalmente, sem haver necessidade de regras mnemônicas ou quaisquer outros artifícios. [...] [Sua definição] deve permitir que se reconheça, num problema proposto, sem grande dificuldade, se uma determinada grandeza é (ou não) direta ou inversamente proporcional a outras. (1986,p. 21)

Reconhecemos aqui que Lima sugere a definição de Grandezas Proporcionais **(destas grandezas)** como ferramenta na resolução de problemas. Ele sugere que **reconhecer, a partir das propriedades das grandezas envolvidas, se estas são, ou não, direta ou inversamente proporcionais**, conduz a resolução dos problemas de maneira natural, ou seja, sem regras pré-estabelecidas.

Uma abordagem formal: proporcionalidade como função

Em *Grandezas Proporcionais* (1991), Lima resgata a definição dada por Trajano[25] para estas grandezas, da qual ressalta a clareza e simplicidade:

> Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número.
> No primeiro caso a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. (Trajano in Lima, 1991, p.125)

Afirma Lima (1999) que a definição de Trajano pode ser escrita em linguagem atual, substituindo as *grandezas* por suas medidas, que são números reais:

> *Uma proporcionalidade é uma função* f: R $\rightarrow$ R *tal que, para quaisquer números reais* c, x *tem-se* f(cx) = c . f(x) *(proporcionalidade direta) ou* f(cx) = f(x)/c, *se* $c \neq 0$ *(proporcionalidade inversa)*.(1999, p.93, grifo do autor)

Como verificar a proporcionalidade a partir desta definição, se ela exige que se tenha *f(cx)= c. f(x)* para todo *c* real? Este trabalho torna-se mais fácil, segundo Lima (1991), quando *c* é inteiro, e isto pode ser aplicado desde que se saiba que *f* é monótona.

Limitando-se a considerar grandezas cuja medida é um número positivo, Lima define grandezas proporcionais:

Definição 1:

> Suponhamos que a grandeza *y* seja função da grandeza *x*, isto é, *y* = *f(x)*. Diremos que *y* é *diretamente proporcional* a *x* quando as seguintes condições forem satisfeitas:
> 1ª) *y* é uma função crescente de *x*;
> 2ª) se multiplicarmos *x* por um número natural *n*, o valor correspondente de *y* também fica multiplicado por *n*. Em termos matemáticos: *f (n .x) = n f(x)* para todo o valor de *x* e todo $n \in$ N.
> Analogamente, diz-se que *y* é *inversamente proporcional* a *x* quando *y = f(x)* é uma função decrescente de *x* e, além disso, ao se multiplicar *x* por um número natural *n*, o valor correspondente de *y* fica dividido por *n*, isto é, $f\,(n\,.\,x) = \frac{1}{n}\,.\,f(x)$ para todo valor de *x* e todo $n \in$ N. (1991, p.127)

[25] Aritmética Progressiva, 84ª edição,1959. Esta definição de Trajano para *grandezas proporcionais* não consta no exemplar da 62ª edição, 1927, que analisamos. Atribuímos isto às revisões e ampliações das 22 edições que separam os dois exemplares.

Mas, segundo Lima (1991, p. 129), o resultado fundamental a respeito de grandezas proporcionais é o Teorema 1, a seguir[26].

> **Teorema 1.** *As seguintes afirmações a respeito de y = f(x) são equivalentes:*
> *1) y é diretamente proporcional a x;*
> *2) para todo número real c > 0, tem-se f(c .x) = c . f(x);*
> *3) existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que f (x) = k .x , para todo x.*
> *4) f (x+ y) = f(x) + f(y) para quaisquer x, y reais.*

Observamos que a constante de proporcionalidade é o valor unitário da função, isto é, $k=f(1)$, o que é usado por Lima na demonstração deste teorema.

O Teorema 2 refere-se a grandezas inversamente proporcionais.

> **Teorema 2.** *As seguintes afirmações a respeito de y = f(x) são equivalentes:*
> *1)y é inversamente proporcional a x;*
> *2)para todo número real c > 0, tem-se f(c .x) = f(x)/c;*
> *3)existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que f (x) = k /x para todo x.* (Lima, 1991, p. 131)

O autor observa que *y* é inversamente proporcional a *x* se, e somente se, é diretamente proporcional a 1/*x*. Isto possibilita que se aplique a estas grandezas, com as devidas modificações, resultados demonstrados para grandezas diretamente proporcionais.

Conforme Lima (1991), as fórmulas $y = kx$ e $y = k/x$ da afirmação 3 dos teoremas, que caracterizam a proporcionalidade direta e inversa entre *x* e *y*, levam a outra definição do mesmo conceito:

Definição 2:

> Sejam *x'*,*x''*, *x'''* etc, valores assumidos por *x* e *y'*, *y''*, *y'''* etc, os valores correspondentes de *y*. Então, afim de que *y* seja diretamente proporcional a *x* é necessário e suficiente que $\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = ...$ sendo o valor comum desses quocientes igual à constante de proporcionalidade *k*. Com efeito, afirmar que $y' = k \,.\, x'$, $y''=k \,.x''$, $y'''= k \,.\, x'''$ etc equivale a dizer que $\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = ... = k$.
> Analogamente, a fim de que *y* seja inversamente proporcional a *x* é necessário e suficiente que $x' \,.\, y' = x'' \,.\, y'' = x''' \,.\, y''' = ... = k$. (1991, p.131)

[26] A afirmação 4 será acrescida ao teorema no estudo de função linear, em Lima (1999, p. 95).

Ou seja, y é diretamente, ou inversamente, proporcional a x quando existe uma constante k tal que $y=kx$, ou $y=k/x$. A constante k, definida como "o valor comum dos quocientes $\frac{y'}{x'}=\frac{y''}{x''}=\frac{y'''}{x'''}=....$", representa a igualdade das razões y/x, ou $y/1/x$, para quaisquer valores correspondentes de x e y.

Esta definição é aquela dada por Ávila (item 2.2.2 deste capítulo, p. 57, def.1 e def.2). Por sua definição 1, temos que x e y são grandezas diretamente proporcionais se $y = kx$, onde k é constante. Então, se tomarmos para x os valores x' e x'', teremos $y'=kx'$ e $y''=kx''$, e disto segue que

$$\frac{y'}{x'}=k \quad \text{e} \quad \frac{y''}{x''}=k\,. \qquad (1)$$

Ávila afirma que podemos sempre definir a razão de duas grandezas como *o quociente de suas medidas*. Ora, em (1), k representa esta razão, que é constante por definição, ou seja, igual para as duas equações. Assim, de (1) segue que

$$\frac{y'}{x'}=\frac{y''}{x''},$$

que é uma igualdade das razões entre duas grandezas.

De maneira análoga, a equação da proporcionalidade inversa da definição 2, $y = k/x$ ou $xy = k$, nos leva à igualdade

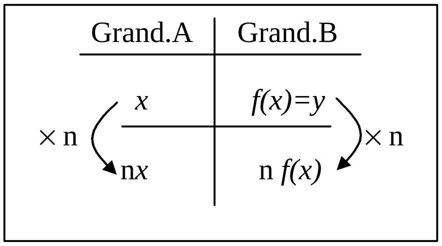
$$\frac{y'}{x''}=\frac{y''}{x'}\,.$$

As definições na resolução de problemas

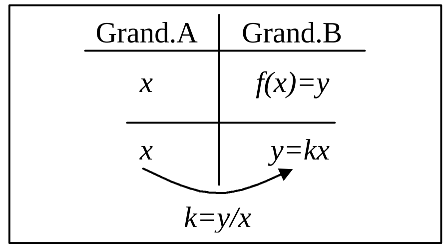
Na resolução de problemas sobre grandezas proporcionais, as definições de Lima podem ser representadas por esquemas:

Proporcionalidade direta:

Definição 1

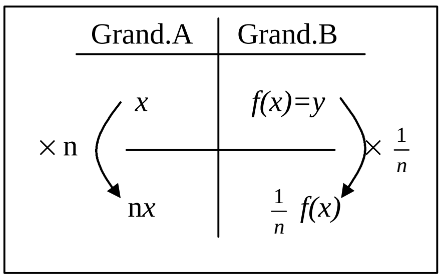


Definição 2

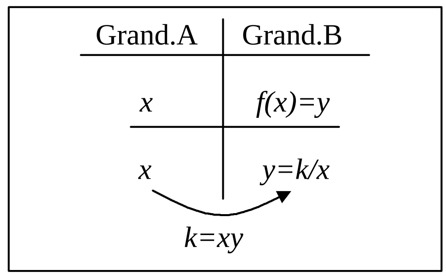


Proporcionalidade inversa

Definição 1



Definição 2



Esquema 1

Ressaltamos que, ao considerarmos apenas as definições de grandezas *diretamente* proporcionais, temos nas definições dadas por Lima conceitos correspondentes aos tratados por Vergnaud (1983), ao abordar problemas de proporção.

Vergnaud (1983) trata das estruturas multiplicativas ao trabalhar com a idéia de *campos conceituais* como um conjunto de situações, de tarefas, que possibilita o estudo da interconexão de conceitos, procedimentos e representações. O campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve vários conceitos que não são matematicamente independentes, como multiplicação, divisão, fração, razão, número racional, função linear, entre outras, que aparecem simultaneamente em muitos problemas, e tomam primitivamente sentido em problemas de proporção. Vergnaud identificou e classificou diferentes estratégias de resolução destes problemas.

Assim, o número real *c* na definição de Trajano, que Lima restringe para *n* natural na definição 1, corresponde ao que Vergnaud chama de *operador escalar*, enquanto que à constante de proporcionalidade *k*, da definição 2, corresponde ao que este autor chama de *operador funcional*. Vergnaud (1983) esclarece a denominação destes operadores: o primeiro operador é dito *escalar* porque ele não tem dimensão, sendo a razão entre duas magnitudes de mesma espécie. O segundo operador é dito *funcional* porque ele representa o coeficiente de uma função linear, cuja dimensão é o quociente entre duas outras dimensões.

Tarefa Verificar a proporcionalidade – aplicação das definições

Retomamos aqui a questão proposta por Lima: a definição de grandezas proporcionais deve permitir que se realize, sem grandes dificuldades, a tarefa de reconhecer se uma grandeza é (ou não) direta ou inversamente proporcional a outras.

Segundo Lima, embora as três afirmações dos teoremas (p. 64) sejam equivalentes do ponto de vista matemático, elas não o são do ponto de vista da aplicabilidade: "*Nos problemas, a tarefa de verificar se y é realmente proporcional a x (direta ou inversamente) é muito mais fácil de ser executada com a definição que demos* [def.1]".(1991, p.131)

Vejamos suas justificativas.

A dificuldade em aplicar a definição de Trajano, que corresponde a afirmação 2 dos teoremas, está, como já vimos, no fato de que ela exige $f(cx)=cf(x)$ e $f(cx)=f(x)/c$ para todo c real, o que leva Lima a propor a definição 1.

Quanto à aplicabilidade da definição 2, que corresponde à afirmação 3 dos teoremas, afirma Lima:

> Devemos observar que a fórmula $y = k.x$ raramente é dada no enunciado do problema. É preciso deduzi-la e, para isso, necessita-se saber as propriedades das grandezas em questão, propriedades que encerram a verdadeira noção de proporcionalidade, expressa pelas condições que adotamos. Além disso, se já estamos de posse da fórmula $y=k.x$, pouco importa saber sobre proporcionalidade; a fórmula já contém todas as informações que venham a ser solicitadas. (1991, p.131)

Um caso em que a fórmula é irrelevante

Outra consideração feita por Lima (1991) a respeito da definição 2 se refere aos casos em que a fórmula $y = k.x$ é irrelevante, ou não cabe no contexto da discussão. Conforme o autor, um resultado básico a respeito da aplicação dos teoremas a questões de proporcionalidade em Geometria é a proposição conhecida como “Teorema de Tales”, segundo o qual “toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais”.

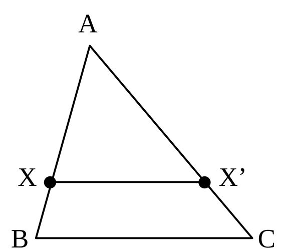


Figura 2

Temos aqui que

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AX'}{X'C}.$$

Lima observa que, neste caso, “*a constante k pode exprimir-se como o quociente de dois senos mas isto é apenas uma curiosidade. O seno de um ângulo só vai ser definido mais tarde e, mesmo assim, só tem sentido por causa do teorema de Tales.*”(1991, p. 139)

A técnica para verificar a proporcionalidade

Temos, portanto, que é com base na definição 1 que Lima nos apresenta uma técnica que permite realizar a tarefa de **verificar a proporcionalidade, direta ou inversa, entre duas grandezas**. Vejamos duas situações-problema: a primeira envolve grandezas *diretamente proporcionais* e a segunda, grandezas *inversamente proporcionais*.

Situação-problema 1.

> [...] **O peso de um fio homogêneo é diretamente proporcional ao comprimento desse fio.** Com efeito, o peso é função crescente do comprimento. Além disso, a homogeneidade do fio significa que dois pedaços do mesmo comprimento (tirados de qualquer parte do fio) têm o mesmo peso. Logo, o peso total de *n* pedaços com o mesmo comprimento é igual a *n* vezes o peso de cada um desses pedaços. Ou seja, multiplicando-se o comprimento do fio por *n*, seu peso também fica multiplicado por *n*. (Lima, 1991,p.128, grifo nosso)

Situação-problema 2.

> [...] **O tempo necessário para ir, numa linha reta, de um ponto A a um ponto B, com velocidade constante, é inversamente proporcional a essa velocidade.** De fato, esse tempo diminui quando se aumenta a velocidade. Além disso, ele reduz-se à metade, a um terço, a um quarto, etc quando se duplica, triplica, quadruplica, etc a velocidade.[...](Lima, 1991,p.128, grifo nosso)

Nestas situações temos a explicitação de uma técnica de resolução justificada pelas duas condições da definição 1. Esta técnica, que chamaremos **condições de *f(x)***, consiste, portanto, de duas etapas:

Etapa 1 (1^a condição da definição 1):

- *f(x)* é crescente? "*O peso é função crescente do comprimento*".
- *f(x)* é decrescente? "*O tempo diminui quando se aumenta a velocidade*".

Etapa 2 (2^a condição da definição 1):

- Se *f(x)* é crescente, *f(n.x)=nf(x)*? "*Multiplicando o comprimento do fio por* n, *seu peso também fica multiplicado por* n".
- Se *f(x)* é decrescente, $f(n.x) = \frac{1}{n} f(x)$? "*[O tempo] reduz-se à metade, a um terço, a um quarto, etc quando se duplica, triplica, quadruplica, etc a velocidade*".

Notemos que na etapa 2, as características das grandezas envolvidas nas situações-problema, *homogeneidade* do fio e velocidade *constante*, levam a formulação das condições $f(n.x)=nf(x)$ e $f(n.x) = \frac{1}{n} f(x)$.

Aplicação da noção de proporcionalidade - problemas de regra de três

Segundo Lima (1991, p.133), "*uma das aplicações mais antigas da noção de proporcionalidade é o tipo de problema chamado* ***regra de três***."(grifo do autor) Quanto à resolução deste tipo de problema, o autor considera que:

> "Uma vez comprovado (mediante as definições dadas acima) que *y* é, de fato, proporcional *x*, não há dificuldade em resolver a regra de três. Digamos que se conhecem *x'*, *x''* e *y'*. Se a regra de três é direta, temos *y' = k . x'* e *y'' = k . x''*, logo *k= y'/x'* e, por substituição obtemos *y'' = y' .x''/x'*. Se a regra de três é inversa, temos *x'. y' = x''. y'' = k*, logo *y'' = x' . y'/x''*. Estes resultados mostram que se pode calcular o valor de *y''* quando se conhecem *x'*, *y'* e *x''*, sem precisar ter o valor de *k*."(1991,p.133)

Identificamos aqui, sob a denominação "tipo de problema chamado regra de três", a tarefa **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três quantidades conhecidas e proporcionais.**

Lima ressalta a necessidade da comprovação da relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, como condição para aplicação da técnica de resolução que apresenta. Ou seja, o resultado da tarefa **verificar a proporcionalidade** condiciona a técnica utilizada para realizar a tarefa **achar a quantidade desconhecida**.

Assim, verificada a proporcionalidade, o autor apresenta uma técnica que permite realizar a segunda tarefa. Esta técnica se justifica pela definição 2 de "grandezas proporcionais" (p.64) e consiste em **expressar as igualdades** ***y'' = y' .x''/x'*** e ***y''= x' . y'/x''***, conforme o caso, **com base no reconhecimento da constante** ***k***, sem, contudo, explicitar seu valor.

Esta técnica é retomada por Lima (1999) ao tratar de função afim, ou seja, ao tratar de proporcionalidade direta:

> Quando a correspondência $x \to y, x' \to y'$ é uma proporcionalidade, a igualdade $y'/x' = y/x$ permite que se determine um desses quatro números quando se conhecem os outros três. Nisto consiste a tradicional 'regra de três'. (1999, p. 94,95, grifo do autor)

Temos aqui uma modificação na representação da igualdade *y' = y .x'/x*, que sob a forma $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ representa a igualdade da razão constante *k*.

Uma grandeza proporcional a várias outras – função de várias variáveis

Em muitos problemas as relações de proporcionalidade envolvem mais de duas grandezas. Assim, Lima (1991) define *grandezas proporcionais a várias outras*. Vejamos.

> [Seja] uma grandeza *z*, de tal modo relacionada com outras, digamos *x, y, u, v, w*, que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para *z*. Então dizemos que *z* é uma função das variáveis *x, y, u, v, w* e escrevemos *z=f(x, y, u, v, w)*. Nestas condições, diz-se que *z* é *diretamente proporcional* a *x* quando:
> 1º) para quaisquer valores fixados de *y, u, v, w*, a grandeza *z* é uma função crescente de *x*, isto é, a desigualdade *x' < x''* implica *f (x', y, u, v, w) < f (x'', y, u, v, w)*;
> 2º) para quaisquer *x, y, u, v, w* e *n* $\in$ N, tem-se *f(n.x, y, u, v, w) = n . f(x, y, u, v, w)*.
> Analogamente, diz-se que *z = f(x, y, u, v, w)* é *inversamente proporcional a x* quando:
> 1º) para quaisquer valores fixados de *y, u, v, w*, a grandeza *z* é uma função decrescente de *x*, isto é, a desigualdade *x' < x''* implica *f(x', y, u, v, w) > f(x'', y, u, v, w)*;
> 2º) para quaisquer *x, y, u, v, w* e *n* $\in$ N, tem-se *f(n .x, y, u, v, w) = f(x, y, u, v, w)/n.*
> Definições semelhantes podem ser dadas para as demais variáveis *y, u, v, w*."(1991,p.136)

O teorema a seguir, segundo Lima (1991), resume os Teoremas 1 e 2 no caso de uma função de várias variáveis:

> **Teorema4**. *Seja z = f(x, y, u, v, w). As seguintes afirmações são equivalentes:*
> *1) z é diretamente proporcional a x, y e inversamente proporcional a u, v, w;*
> *2) existe uma constante* ***k*** *tal que* $z = k \cdot \dfrac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w}$.(1991, p. 136-137)

Da definição e do teorema resulta, conforme o autor, "*que uma grandeza é diretamente (ou inversamente) proporcional a várias outras se, e somente se, é diretamente (ou inversamente) proporcional ao produto dessas outras*."(1991, p. 137) Isto é expresso pelo fator $\dfrac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w}$ na equação do Teorema 4.

Diferentes tarefas - definição e teorema como justificativa de técnicas

De maneira análoga ao que fez para duas grandezas proporcionais, Lima (1986,1991) aplica a definição de grandeza proporcional a várias outras e o Teorema 4 (p. 71), na resolução de duas tarefas:

- **verificar a proporcionalidade de uma grandeza em relação a outras;**
- **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas mais de três quantidades conhecidas e proporcionais.**

Ilustramos estas tarefas em um problema resolvido por Lima:

> *Se 10 máquinas, funcionando 6 horas por dia, durante 60 dias, produzem 90 000 peças, em quantos dias x, 12 dessas mesmas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzirão 192 000 peças?*
>
> O número *D* de dias necessários para produzir P peças em M máquinas que trabalham H horas por dia é diretamente proporcional a P porque para dobrar, triplicar, quadruplicar, etc. o número de peças produzidas é necessário dobrar, triplicar, etc o número de dias de trabalho (supondo, evidentemente, M e H fixos). Por outro lado, se dobrarmos, triplicarmos, etc. o número M de máquinas, o número de dias (necessários para produzir as P peças, trabalhando H horas por dia) fica reduzido à metade, a um terço, etc. Logo, D é inversamente proporcional a M. Analogamente se verifica que D é inversamente proporcional a H. Feitas estas simples constatações, *se chamarmos de k o número de dias necessários para produzir uma só peça, usando uma única máquina e trabalhando apenas uma hora por dia,* resulta do teorema acima demonstrado que
>
> $$D = k\frac{P}{MH}.$$
>
> Desta fórmula retira-se qualquer informação que se deseje sobre o assunto.(Lima, 1986, p.24, grifo nosso)

Nesta resolução há duas etapas.

Na primeira etapa é realizada a tarefa **verificar a proporcionalidade** da grandeza “dias” em relação à “peças, máquinas e horas”. A técnica, justificada pela definição de grandeza proporcional a várias outras (p. 71), consiste em **verificar a variação entre “dias” e cada uma das outras grandezas, enquanto mantêm fixas as outras duas.**

Na segunda etapa, Lima apresenta uma técnica de resolução da tarefa **achar a quantidade desconhecida *dias***, quando dadas outras três quantidades conhecidas e proporcionais. Esta tarefa corresponde ao tipo de **problema de regra três composta**, para os quais Lima (1991) faz considerações análogas ao que fez para os problemas de regra de três simples. A técnica é justificada pela da afirmação 2 do Teorema 4 (estes são elementos da tecnologia) e consiste em **estabelecer a equação de dependência entre as variáveis,** $D = k\frac{P}{MH}$ **, a partir da relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas e da definição da constante *k*.**

O significado da "divisão em partes proporcionais"

Problemas de divisão em partes proporcionais, segundo Lima (1988), têm origem no comércio e um de seus exemplos mais característicos é a *chamada regra de sociedade,* que mencionamos no estudo do tratado Trajano. Esta regra estabelece que o lucro de uma sociedade deve ser dividido em partes proporcionais ao capital aplicado por cada sócio. Assim, temos nestes problemas a tarefa **dividir em partes proporcionais**.

Quanto a esta tarefa, Lima coloca a seguinte questão:

"*O que significa* ***dividir em partes proporcionais***"?

Sua resposta remete a sua segunda definição de grandezas proporcionais. Vejamos.

> [Dividir em partes proporcionais] significa que o lucro y de cada sócio é diretamente proporcional à sua contribuição x. Tem-se, assim, uma função $y = f(x)$ ou, mais precisamente, $y = k.x$. A constante k mede, de certa forma, o sucesso dos negócios. Resta saber quanto vale k. Uma vez determinado seu valor, o lucro de cada sócio será obtido multiplicando-se seu capital inicial por k. (1988, p. 10)

Temos, portanto, mais uma tarefa cuja técnica de resolução faz uso da equação $y = k.x$. Lima apresenta esta tarefa em sua forma mais geral, seguida da resolução:

> *Dividir um número N em partes proporcionais a três números dados a, b e c.*
> A solução é simples: as partes *x*, *y*, *z* procuradas devem satisfazer às condições
> $x + y + z = N$, $x = a.k$, $y = b.k$ e $z = c.k$.
> Somando as 3 últimas igualdades obtém-se
> $x + y + z = (a + b + c) . k$, ou seja, $N = (a + b + c) . k$.
> Logo $k = \frac{N}{a+b+c}$ e as partes procuradas são obtidas multiplicando este valor de *k* por *a*, *b* e *c*, respectivamente. (1988 ,p.10-11)

Nesta resolução, a **condição de proporcionalidade** entre cada parte e seu número correspondente permite **expressar estas relações pelas equações *x = a.k, y= b.k* e *z = c.k***, nas quais *k* é constante, conforme a definição 2 de grandezas proporcionais (p. 64). Isto constitui a primeira etapa de resolução. A partir daí temos um **sistema linear cuja resolução permite determinar *k* e, então, as partes procuradas.**

Lima (1988) também faz referências à "divisão em partes proporcionais a várias grandezas", caso em que temos uma função de várias variáveis. Assim teremos, por exemplo, a equação $z = k . x . y$, para expressar que a parte *z* procurada é diretamente proporcional a *x* e a *y*, ou seja, *z* é diretamente proporcional ao produto *xy*. Novamente aqui a determinação da constante *k* leva aos valores procurados.

Outras considerações do autor

Nestas publicações, Lima (1986,1991,1999) também faz considerações sobre problemas nos quais a proporcionalidade não se aplica, em especial naqueles em que *y* é uma função crescente (ou decrescente) de *x*, sem que seja diretamente (ou inversamente) proporcional a *x*, como no caso da área de um quadrado e seu lado. Também ressalta os limites de validez deste "modelo matemático", como no caso da proporcionalidade inversa entre o número de operários e o tempo gasto para construir uma casa, que usado sem restrições pode resultar em um tempo de, por exemplo, 1 segundo, quando o número de operários for suficientemente grande.

Conclusão

Lima apresenta uma abordagem formal da noção de proporcionalidade, definindo-a como função.

Suas duas definições, do ponto de vista da aplicabilidade, se complementam.

A definição representada por $f(n.x)=nf(x)$ e $f(n.x) = \frac{1}{n} f(x)$ justifica a técnica que permite realizar a tarefa **verificar a proporcionalidade**. A técnica das **condições de *f(x)*** consiste basicamente, conforme o autor, nas perguntas: ***y* cresce ou decresce quando *x* cresce? Ao multiplicarmos *x* por um número natural, *y* também fica multiplicado por ele? *y* fica dividido por ele?** A ênfase de seus artigos está nesta tarefa e em sua técnica.

Uma vez realizada a tarefa anterior, é possível realizar a tarefa **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais**, os problemas de regra de três. A definição representada pela constante de proporcionalidade k justifica a técnica que permite realizar esta tarefa, e que consiste em **expressar e resolver a equação de dependência entre as variáveis envolvidas: $y = k.x$ e $y = k/x$ no caso de uma só variável, e $z = kxy/uvw$ no caso de muitas variáveis.** Correspondem a esta tarefa os problemas de regra de três simples e composta. A tarefa **divisão em partes proporcionais** também é resolvida por esta técnica.

2.3 Conclusão do capítulo 2

O breve estudo histórico sobre proporções, realizado neste capítulo (item 2.1), nos revela que proporção é um saber antigo. Já os pitagóricos tinham possivelmente desenvolvido uma teoria das proporções, a partir das médias babilônicas. Proporção foi tratada como objeto matemático em *Os Elementos*, de Euclides. A *teoria das proporções* de Eudoxo, em Euclides V-5, que estabelece quando duas grandezas têm entre si a mesma razão, permitiu superar a crise causada pela descoberta dos incomensuráveis e teve importante papel no desenvolvimento da matemática. Estudada ao longo da história, dá origem, no séc. XIX, ao sistema de números reais. Também em Euclides VII há a definição de números proporcionais e a proposição da qual se origina a propriedade fundamental das proporções. Identificamos também que, ao longo da história, proporção tem a função de ferramenta de resolução de certas tarefas, bem como de ser condição para a existência de uma técnica.

No estudo das proposições noosferianas identificamos que, no tratado Trajano, proporção é apresentada como objeto matemático, numa abordagem aritmética, por meio de sua definição: "*proporção é uma igualdade entre duas razões*"; de sua representação: "*12 : 6 = 8 : 4*"; e de suas propriedades, das quais salientamos: "*Em toda a proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos*". Suas funções como ferramenta de resolução de várias tarefas e como condição para a existência de uma técnica são próximas àquelas identificadas no estudo histórico.

Já, nas publicações noosferianas atuais que estudamos, há uma mudança de abordagem. Não identificamos a presença do objeto matemático proporção e sim o estudo da noção de proporcionalidade e do conceito de grandezas ou variações proporcionais. Ávila propõe que as questões relativas à proporção sejam ensinadas no contexto dos números reais, das igualdades e equações e define grandezas ou variáveis direta e inversamente proporcionais por meio das equações $y=kx$ e $y=k/x$, nas quais k é constante. Lima faz uma abordagem formal de proporcionalidade como função matemática e apresenta duas definições de grandezas direta e inversamente proporcionais, que se complementam, do ponto de vista da aplicabilidade: $f(nx) = nf(x)$ e $f(n.x) = \frac{1}{n} f(x)$, $y=kx$ e $y=k/x$.

Apresentamos, no quadro a seguir, as tarefas e técnicas relativas a proporções e à proporcionalidade, que identificamos neste estudo. Não indicamos tarefas e técnicas para proporcionalidade no estudo histórico, pois esta noção não foi objeto de nosso estudo.

	Proporção			Proporcionalidade		
	Tarefa	Técnica	FO	Tarefa	Técnica	FO
História	Verificar igualdade de razões	-Subtração mútua -Igualdade de quocientes parciais	O	—	—	—
História	-Problemas de regra de três -Dividir em partes proporcionais -Interpolação linear	Regra de três: -regra declarada sem explicação -regra vinculada à proporção Obs.:Algumas técnicas não foram identificadas	F	—	—	—
História	Construção e divisão de segmentos	Semelhança de triângulos		—	—	—
História	Resolução de equações lineares	Falsa posição	CE	—	—	—
Trajano	-Verificar se a proporção está certa -Achar qualquer termo de uma proporção	-Igualdade entre produto dos meios e produto dos extremos -Resolução da proporção.	O	—	—	—
Trajano	Achar a quantidade desconhecida: -Problemas de regra de três -Dividir em partes proporcionais -Problemas de porcentagem	- Técnica geral Análise/Síntese -Regra de três: formulação das proporções Formulação das proporções	F	—	—	—
Trajano	Problemas cujos valores formem uma proporção.	Falsa posição Resolução da proporção.	CE	—	—	—
Ávila	—	—	—	Achar a quantidade desconhecida (problemas de regra de três)	Equação da constante *k*, de dependência entre as variáveis.	F
Lima	—	—	—	Verificar a proporcionalidade	Condições de $f(x)$	O
Lima	—	—	—	-Achar a quantidade desconhecida (problemas de regra de três) -Dividir em partes proporcionais	Equação da constante *k*, de dependência entre as variáveis.	F

1)FO- ferrramenta/objeto. Nas tarefas, as noções são ora objeto de estudo, ora ferramenta de resolução.
2)CE-Condição p/ existência da técnica.

Salientamos a semelhança de algumas tarefas entre o estudo histórico e o tratado Trajano, como **problemas de regra de três** e **dividir em partes proporcionais.**

Nas proposições de Ávila e Lima também se verifica a presença da mesma tarefa, **achar a quantidade desconhecida**, para a qual é apresentada a mesma técnica de resolução. Cabe salientar que a proposição noosferiana atual é aquela proposta nos PCN, e dá lugar ao estudo da proporcionalidade em detrimento de proporção.

3 O saber proporção em classe de 6ª série do Ensino Fundamental

O estudo realizado nos capítulos precedentes nos permitiu reconhecer certas abordagens, certas tarefas e técnicas concernentes ao objeto *Proporção*. Com a finalidade de identificar elementos da relação da instituição 6ª série do Ensino Fundamental com o saber proporção, ou seja, o que a instituição 6ª série espera que o aluno saiba sobre proporção, apresentamos aqui um estudo de livros didáticos de 6ª série e uma observação em classe.

3.1 Estudo dos livros didáticos

Neste estudo buscamos identificar os elementos da organização matemática referente ao objeto proporção nos livros didáticos. Estudamos livros atuais destinados aos alunos da 6ª série do Ensino Fundamental e o livro didático de Quintella (1958).

A escolha deste último se justifica por seu uso no ensino do Brasil durante décadas. Isto nos leva a considerar que este livro didático possa ter influenciado escritores de livros, caso em que o identificamos como um saber de referência.

Para estudo dos livros atuais escolhemos Giovanni e Giovanni Jr. (2000)[27], Bigode (2000) e Imenes & Lellis (2002) em função da:

- melhor indicação no Guia do Livro Didático, do MEC;

[27] Livro adotado pelo professor, sujeito da observação em classe nesta pesquisa.

- por serem os livros mais solicitados ao MEC, pelas escolas de Santa Catarina, em 2002.

Nos propomos a examinar nestes livros didáticos, sistematicamente, o objeto proporção, bem como as tarefas e técnicas relativas à proporção. Examinamos também as definições, tarefas e técnicas relativas a grandezas proporcionais, tendo em vista que sua abordagem é proposta nas publicações noosferianas de Ávila e Lima.

3.1.1 Quintella, um saber de referência

Matemática – terceira série ginasial

Porque estudar Quintella?

Este livro faz parte de uma coleção dirigida ao ensino ginasial, editada a partir dos anos 40, cuja importância é ressaltada por D'Ambrósio (1996), ao fazer uma retrospectiva sobre o ensino de matemática no Brasil. O número de edições indica a grande utilização deste livro didático: o exemplar de nossa análise é da 32ª edição, de 1958, e em 1961, três anos depois, portanto, este volume já estava na 46ª edição.

Um indício do trabalho da noosfera

No prefácio do volume que examinamos, Terceira série ginasial, Quintella justifica as modificações existentes entre diferentes edições, sob a influência da noosfera[28]. Quintella pretende estreitar a lacuna entre o que se pretende ensinar e o que se ensina:

[28] A Noosfera é considerada o centro operacional do processo de transposição. Sua finalidade é estabelecer a interação entre o sistema de ensino e seu entorno, proporcionando a seleção dos elementos do "saber sábio", que devem advir como "saber a ensinar". (Chevallard, 1991)

> Acreditamos deva ser uma obra didática compreendida como o resultado de uma experiência coletiva que inclua os trabalhos de classe e a sua verificação, de modo a estabelecer a necessária correlação entre o que se pretendeu ensinar e aquilo que real e efetivamente resultou dessa pretensão (aprendizagem). [...]
> A nova edição de nosso Curso Ginasial foi projetada na base de um inquérito que realizamos entre professores de vários pontos do país. Vem, agora, modificada, mesmo em sua estrutura, com supressões, simplificações e acréscimos que os colegas identificarão facilmente.(p.7)

Conteúdo desenvolvido

Este livro didático trata de aplicações aritméticas de razões e proporções, de geometria plana, linhas proporcionais, semelhança e relações trigonométricas. A álgebra é tratada no volume destinado à Segunda série ginasial, bem como grandezas comensuráveis e incomensuráveis, números racionais e irracionais.

O estudo de *proporção* é feito na Unidade Razões e Proporções - Aplicações Aritméticas, juntamente com médias, números proporcionais, divisão em partes proporcionais, regra de três, percentagem e juros simples. Vejamos alguns elementos do estudo de *proporções*.

Uma definição em termos de razão

Quintella define proporção como uma igualdade de duas razões. Tal como Trajano (cap.2), trata primeiro o conceito de razão, como o quociente de dois números. Apresenta a leitura, escrita e designação dos termos da proporção:

> **Proporção é a igualdade de duas razões.**
> Exemplo: $\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$.
> Lê-se: 3 *está para* 6 *assim como* 9 *para* 18. Também se escreve: 3 : 6 : : 9 : 18.
> [...] O primeiro e o quarto termos, 3 e 18, são denominados ***extremos***. O segundo e o terceiro, 6 e 9, são ***meios***.
> A designação dos termos é a seguinte:
> $\boxed{\frac{1^\circ\,termo}{2^\circ\,termo} = \frac{3^\circ\,termo}{4^\circ\,termo}}$ $\boxed{\frac{extremo}{meio} = \frac{meio}{extremo}}$ $\boxed{\frac{antecedente}{conseq\ddot{u}ente} = \frac{antecedente}{conseq\ddot{u}ente}}$
> (p.17)

Temos aqui elementos como a leitura, a designação de seus termos e a representação *3 : 6 : : 9 : 18* que não se alteram em relação ao tratado Trajano.

Porém, há uma nova representação de proporção: $\frac{3}{6}=\frac{9}{18}$. Isto é decorrente da representação fracionária utilizada por Quintella para *razão*: "*A razão entre 3 e 5 é* $\frac{3}{5}$" (p. 15). Além disto, a ligação entre *razões* e *frações* é apontada pelo autor quando trata das propriedades das razões: "*As razões gozam de todas as propriedades das frações, e a elas são aplicáveis todas as regras de cálculo com as frações, já conhecidas*." (p.16)

Tratamento algébrico das propriedades e de suas aplicações

Quintella apresenta duas propriedades das proporções. Em suas demonstrações usa princípios de igualdades e equações, como veremos a seguir.

> **Propriedade fundamental das proporções.**
> **Em toda a proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.**
> Consideremos, de modo geral, a proporção:
> $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$
> Eliminando os denominadores:
> $$ad = bc,$$
> o que prova a propriedade. (p.16-17)

Nesta demonstração, a "eliminação de denominadores" indica o uso de princípios de equações.

> **Propriedade das proporções. Aplicações.**
> Primeira.
> **A soma ou a diferença dos antecedentes está para a dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para seu conseqüente.**
> Seja, de modo geral, a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.
> Suponhamos q o valor comum das razões:
> $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=q \text{.........} \quad (1)$$
> Daí, resulta: $a = bq$
> $c = dq$

Somando ou subtraindo, membro a membro, e colocando *q* em evidência:

$$a \pm c = (b \pm d) \cdot q$$

donde: $$\frac{a \pm c}{b \pm d} = q\ .$$

Comparando com a igualdade (1):

$$\boxed{\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \cdot}\ .\ \text{(p.23)}$$

Na demonstração desta última propriedade, a relação que Quintella estabelece entre *proporções* e equações torna-se mais evidente. Identificamos uma linguagem algébrica nas seguintes etapas:

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q.........$ *Daí, resulta:* $a = bq$ e $c = dq$;
- *Somando ou subtraindo, membro a membro...;*
- $a \pm c = (b \pm d) \cdot q$, *donde:* $\frac{a \pm c}{b \pm d} = q$;
- *Comparando com a igualdade (1)...* .

Esta relação entre *proporções* e equações é explicitada numa das *aplicações* desta propriedade, em uma tarefa típica de equações:

2) **Resolver o sistema**:

$$x + y = 20$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{7} \qquad \text{(p. 24)}$$

Duas tarefas

Uma das *aplicações* da propriedade fundamental tem por título "*Cálculo de um termo qualquer de uma proporção*". Vejamos um exemplo.

Exemplo:

1º) Achar o valor de *x* na proporção $\frac{12}{48} = \frac{16}{x}$.

Aplicando a propriedade fundamental:

$12x = 48 \times 16$ ou $12x = 768$

donde concluimos: $x = \frac{768}{12} = 64$. (p.20)

Identificamos aqui a tarefa do tratado Trajano, **achar qualquer termo de uma proporção,** que aparece em 12 dos 45 exercícios propostos para *proporções*. Ressaltamos que a técnica usada por Quintella difere da de Trajano, que nos dá uma regra explícita para realizar a tarefa. Quintella usa a propriedade fundamental para determinar que 12x = 768, e a técnica para o próximo passo da resolução é implícita: "*donde concluímos:* $x = \frac{768}{12} = 64$". Este segundo passo indica que Quintella faz uso do princípio multiplicativo das equações nesta resolução. Chamaremos esta técnica de **resolução da proporção-PF** (da propriedade fundamental).

Nas *aplicações* da propriedade 1 identificamos a tarefa **achar dois números desconhecidos, a partir de sua soma/subtração/produto ou da razão entre eles ou ainda de dois termos da proporção que formam.** Alguns exemplos são:

> 1) A diferença entre os antecedentes de uma proporção é 10 e os conseqüentes são 9 e 7. Achar os antecedentes. (p. 23)
> 3) Achar dois números, cuja soma é 85 e a razão 2/3. (p. 24)
> 5) Achar dois números na razão 3/4, cujo produto seja 300. (p. 25)

A técnica de resolução é justificada pela propriedade. Por exemplo:

> 2) **Resolver o sistema**:
>
> $$x + y = 20$$
> $$\frac{x}{3} = \frac{y}{7}$$
>
> Resolução. Aplicando a propriedade, vem:
>
> $$\frac{x+y}{3+7} = \frac{x}{3} = \frac{y}{7} \quad \text{ou} \quad \frac{20}{10} = \frac{x}{3} = \frac{y}{7}.$$
>
> Donde resulta: $x = \frac{60}{10} = 6$ e $y = \frac{140}{10} = 14$. (p. 24)

Esta tarefa é trabalhada em 26 dos 45 exercícios propostos para *proporções*, o que demonstra a ênfase dada a ela pelo autor.

Proporcionalidade – uma relação entre números e entre grandezas

Quintella apresenta as definições de “números diretamente proporcionais” e “inversamente proporcionais” e aplica estas definições à “grandezas proporcionais”.

Vejamos as definições de números proporcionais.

> **Números diretamente proporcionais.**
> Duas sucessões de números são denominadas diretamente proporcionais ou, apenas, proporcionais, quando a razão entre um número qualquer da primeira e seu correspondente na segunda é constante.
> [...] O valor comum das razões é denominado **fator ou coeficiente de proporcionalidade** (**k**) (p. 35)
>
> **Números inversamente proporcionais.**
> Duas sucessões são denominadas inversamente proporcionais, quando o produto de dois termos correspondentes é constante.
> [...] O produto constante denomina-se **coeficiente de proporcionalidade.** (p. 36)
> Duas sucessões são denominadas inversamente proporcionais, quando os termos da primeira são diretamente proporcionais aos inversos dos da segunda. (p. 37)

Estas definições correspondem às definições de “grandezas proporcionais” dadas por Ávila (cap. 2) e à definição 2 de Lima (cap. 2), nas quais as equações $y=kx$ e $k=xy$ caracterizam a proporcionalidade.

Quintella então caracteriza “grandezas proporcionais” em três problemas comentados.

Para “**grandezas diretamente proporcionais**”, o autor dá como exemplo a relação entre o lado de um quadrado e seu perímetro:

> Se representarmos o lado de um quadrado por *l*, o perímetro será obtido multiplicando-o por 4, isto é, será 4*l*.
> Assim, podemos formar a seguinte tabela de correspondência dos diferentes estados das duas grandezas:

lado em metros.........	1	2	3	4	...
perímetro em metros	4	8	12	16	...

> Observemos que as medidas das duas grandezas formam duas sucessões proporcionais porque
>
> $$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=....$$
>
> As duas grandezas são, então, denominadas **diretamente proporcionais** ou, apenas, **proporcionais.** (p. 38, grifo do autor)

Para as "**grandezas inversamente proporcionais**", o problema envolve diferentes velocidades e respectivos tempos, necessários para percorrer a mesma distância:

> Podemos formar a tabela de correspondência dos estados das duas grandezas.
>
> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | velocidade em km/h. | 60 | 40 | 30 | 20 |
> | tempo em horas ...... | 4 | 6 | 8 | 12 |
>
> Observemos que as medidas das duas grandezas formam duas sucessões inversamente proporcionais. O coeficiente de proporcionalidade é 240.
> Dizemos, então, que as duas grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais.** (pp. 38, 39, grifo do autor)

Nestas duas resoluções, a tabela de correspondência dos valores fornece duas sucessões de números, sobre as quais são aplicadas as definições de números proporcionais. Portanto, é com base nestas definições que Quintella estabelece a relação de proporcionalidade entre essas grandezas.

Quanto à "**grandezas proporcionais a várias outras**", afirma Quintella que "*uma grandeza é proporcional a outras, quando fixando uma dessas últimas, a grandeza dada varia proporcionalmente à outra*" (p.39). Dá como exemplo a área de um retângulo, que depende da base e da altura e conclui que "*quando uma grandeza é proporcional a várias outras, os números que exprimem sua medida são proporcionais aos produtos dos números resultantes das medidas das outras*" (p.41), tal como em Lima.

Estas definições de números e grandezas proporcionais justificam as técnicas de resolução das tarefas que veremos a seguir.

As tarefas "achar a quantidade desconhecida" e " dividir em partes proporcionais"

Dos 30 exercícios propostos para "números e grandezas proporcionais", 11 se referem à tarefa **achar a quantidades desconhecida** e 14 a **dividir em partes proporcionais**.

A tarefa **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais** é proposta tanto para sucessões de números quanto para grandezas. Por exemplo:

> 3) Achar x nas sucessões proporcionais:
>
> 2 8 3
>
> 4 16 x *Resp.:* 6.
>
> 12) Um trem, com a velocidade de 60km/h, percorre uma certa distância em 3,5h. Calcular a velocidade de um segundo trem que faz o mesmo percurso em 5h. *Resp*.: 42km/h.

Vejamos a técnica de resolução, em um exemplo resolvido:

> **Exemplo:**
>
> Dadas duas sucessões proporcionais:
>
> 3, 5, 7, y
>
> 6, 10, x, 8
>
> **achar** o coeficiente de proporcionalidade e **os valores de *x* e *y***.
>
> Resolução. O coeficiente de proporcionalidade é:
>
> $$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
>
> Logo, temos: $\frac{7}{x} = \frac{1}{2} \therefore x = 7 \times 2 = 14$
>
> $\frac{y}{8} = \frac{1}{2} \therefore y = \frac{8 \times 1}{2} = 4$. (p.35-36, grifo nosso)

Aqui, as etapas da técnica de resolução são dadas pelo próprio enunciado do problema:

- "*achar o coeficiente de proporcionalidade*", que é determinado pela razão entre o número 3, da primeira sucessão e 6, seu correspondente na segunda sucessão.
- "*[achar] os valores de x e y*". A razão constante $\frac{1}{2}$ permite formular as proporções, cujos termos desconhecidos são determinados pela técnica **resolução da proporção-PF.**

A primeira etapa desta técnica se assemelha àquela dada por Ávila e Lima, ou seja, a determinação do coeficiente de proporcionalidade. Porém difere na segunda etapa, pois enquanto Quintella formula a proporção para achar o número desconhecido, Ávila e Lima formulam a equação de dependência das variáveis.

A tarefa **dividir em partes proporcionais** é apresentada com seguinte enunciado: "*Dividir um número em partes proporcionais a outros é decompô-lo em parcelas proporcionais a esses outros*" (p.41). Vejamos um exemplo.

> **Exemplo**. *Decompor o número 180 em partes proporcionais a 3, 4 e 11.*
> Representemos por *x*, *y* e *z* as parcelas de 180, proporcionais a 3, 4 e 11. Devemos ter:
> $$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{11}\,.$$
> Para achar as parcelas *x*, *y* e *z*, é suficiente conhecer o fator de proporcionalidade, como vimos no estudo dos números proporcionais; para isto aplicamos a propriedade das razões iguais ou proporção prolongada[29] e obtemos:
> $$\frac{x+y+z}{3+4+11}=\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{11}\,.$$
> Daí, concluímos, por ser $x+y+z=180$:
> $$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{11}=\frac{180}{18}=10\,.$$
> O fator de proporcionalidade é 10; logo, temos:
> $$x = 3\times 10 = 30$$
> $$y = 4\times 10 = 40$$
> $$z = 11\times 10 = 110$$
> *Verificação*: $x+y+z = 30+40+110 = 180$. (pp.41,42)

Aqui, a técnica consiste em determinar o coeficiente de proporcionalidade, como o faz Lima, mas difere deste na maneira de determiná-lo. Enquanto Lima expressa as partes proporcionais em termos de *k*, que resultaria em $x = 3k$, $y = 4k$, $z = 11k$, Quintella o determina por meio da 1ª propriedade das proporções (p. 82). Também a técnica de Quintella difere da de Trajano, que explicita a proporção existente entre os valores totais e cada parte, sem uso de propriedades. A mesma técnica vista aqui é utilizada para **dividir em partes inversamente proporcionais**, ao expressá-las como diretamente proporcional aos inversos dos números.

[29] "Proporção prolongada é a sucessão de três ou mais razões iguais, como 2/4=6/12=8/16." (p. 27)

Problemas de regra de três – a técnica das proporções

"Regra de três" é apresentada em capítulo próprio. Segundo Quintella, "*os problemas sobre grandezas proporcionais são de dois tipos: regra de três simples e regra de três composta*." (p. 47) Temos aqui que a "regra de três" é abordada como "problemas de regra de três", ou seja, como uma tarefa.

Esta tarefa corresponde a **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais**, já apresentada no estudo dos "números e grandezas proporcionais". Para esta tarefa são propostos 20 exercícios.

Os dois problemas a seguir explicitam a tarefa **problemas de regra de três direta e inversa**, respectivamente. Neles, *proporção* é empregada como ferramenta de resolução.

> **Primeiro exemplo. Regra de três simples direta.**
> *Quatro quilogramas de farinha de trigo produzem cinco pães; quantos quilogramas de farinha serão necessários para produzir cento e vinte pães?*
> Os dados podem ser dispostos sob a forma:
> 4 kg de farinha produzem 5 pães
> *x* kg de farinha produzirão 120 pães
> As grandezas são diretamente proporcionais; *a razão dos termos relativos* é igual *à razão dos principais*[30]; logo, temos a proporção:
> $$\frac{4}{x} = \frac{5}{120} \therefore x = \frac{120 \times 4}{5} = 96\,.$$
> *Resp.*: São necessários 96kg de farinha. (p.47)
>
> **Segundo exemplo. Regra de três simples inversa.**
> *Uma torneira, jorrando 20 litros de água por minuto, enche um reservatório em 6 horas. Qual o tempo em que encherá o mesmo reservatório, uma torneira que deite 30 litros de água por minuto?*
> Os dados podem ser dispostos:
> 20 litros correspondem a 6 horas
> 30 litros corresponderão a *x* horas.
> Quanto maior o número de litros vertidos por minuto, menor será o tempo gasto para encher o reservatório. As grandezas são inversamente proporcionais; *a razão dos termos relativos é igual à razão inversa dos principais.* Assim, temos a proporção:

[30] Segundo Quintella, "denominam-se *termos principais* os dois valores conhecidos da mesma grandeza, e *termos relativos* os dois valores da grandeza, em que um é desconhecido." (p.47)

$$\frac{20}{30} = \frac{x}{6} \therefore x = \frac{6 \times 20}{30} = 4 \,.$$

Resp.: A segunda torneira enche o reservatório em 4 horas. (p.48)

Nestas resoluções a técnica consiste de quatro etapas:

- disposição dos dados;
- verificação da proporcionalidade direta ou inversa;
- formulação da proporção;
- resolução da proporção-PF.

Temos aqui uma técnica diversa daquela dada para a resolução desta mesma tarefa, quando apresentada no estudo de “grandezas proporcionais”. Naqueles problemas, a proporção é formulada a partir do coeficiente de proporcionalidade *k* entre as diferentes grandezas. Aqui, a proporção expressa a “igualdade das razões”, mas razões entre valores da mesma grandeza, como é explicitado em “*a razão dos termos relativos* é igual *à razão dos principais*”, como identificamos no tratado Trajano. Salientamos que a expressão desta proporção é favorecida pela disposição dos dados do problema.

Temos também que, no segundo exemplo, Quintella explicita uma técnica para realizar a tarefa **verificar a proporcionalidade inversa** entre as grandezas em: “*Quanto maior o número de litros vertidos por minuto, menor será o tempo gasto para encher o reservatório. As grandezas são inversamente proporcionais*”. Esta técnica consiste em verificar que a medida de uma grandeza aumenta se a medida da outra diminui (o contrário também é válido). Temos assim uma nova etapa da técnica, pois para que haja a *proporção,* isto é, para que haja igualdade das razões, é necessário que se inverta a razão dos termos relativos.

Regra de três composta

Na resolução da tarefa **problemas de regra de três composta**, Quintella apresenta a técnica que denomina *método das proporções.* Para utilizar esta técnica, o autor retoma a propriedade de "grandeza diretamente proporcional a várias outras", ou seja, "*os números que exprimem sua medida são diretamente proporcionais aos produtos dos números resultantes das medidas das outras*". Ressalta, também, que esta propriedade é válida para grandezas inversamente proporcionais, se forem considerados os inversos dos números que exprimem suas medidas.

Vejamos como Quintella apresenta esta técnica.

> **Exemplo 2**.*Uma máquina de rotular garrafas funcionou durante 6 horas por dia e rotulou 3 000 garrafas em 6 dias. Quantas horas deverá funcionar por dia, para rotular 5 000 garrafas em 4 dias?*
> Resolução. Disposição dos dados:
> 6 horas ---- 3 000 garrafas ---- 6 dias
> *x* horas ---- 5 000 garrafas ---- 4 dias
> *(d)* *(i)*
> Os símbolos *(d)* e *(i)*, de direta e inversa, resultam da comparação com a grandeza desconhecida:
> Mais horas, mais garrafas: *(d)*
> Mais horas, menos dias: *(i)*
> Os termos assinalados com *(i)* devem ser invertidos; assim, teremos:
> $$\frac{6}{x} = \frac{3000}{5000} \times \frac{4}{6}$$
> ou, simplificando e efetuando:
> $$\frac{6}{x} = \frac{2}{5} \text{ donde } x = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \text{ horas}$$
> Resp.: Deverá funcionar 15 horas diárias. (p. 51)

Nesta resolução, a técnica utilizada é semelhante a da regra de três simples. Porém, na formulação da proporção, é utilizada a propriedade que vimos acima: a razão dos termos relativos é igual ao produto das razões dos principais, considerando razões diretas para grandezas diretamente proporcionais e razões inversas para grandezas inversamente proporcionais.

Percentagem – problemas de regra de três e a técnica das proporções

As tarefas calcular a percentagem, o capital e a taxa são apresentados por Quintella como problemas de regra de três. Vejamos um exemplo.

> **Cálculo da percentagem**. Exemplo:
> *Calcular 5% de Cr$ 208,00.*
> O problema consiste numa regra de três simples e direta, pois a taxa 5 corresponde à razão $\frac{5}{100}$.
> Temos, assim: a 100 corresponde......5,
> a 208 corresponderá....*x*.
> Donde a proporção:
> $$\frac{100}{208}=\frac{5}{x}\therefore x=\frac{208\times 5}{100}=\text{Cr\$ }10{,}40.$$
> *Resp.*: 5% de Cr$ 208,00 são Cr$ 10,40. (p. 55)

Nesta resolução, Quintella justifica a classificação da tarefa **problemas de percentagem** como um "problema de regra de três" ao expressar a taxa 5% pela razão $\frac{5}{100}$. Assim, a técnica de resolução é a mesma utilizada nestes problemas, ou seja, a técnica das proporções. Para esta tarefa há 40 exercícios.

Conclusão

No estudo de Quintella resgatamos a definição de proporção: "*proporção é a igualdade de duas razões*", uma nova representação, na forma fracionária: $\frac{3}{6}=\frac{9}{18}$, que Quintella irá usar daí em diante, e duas propriedades: a propriedade fundamental das proporções - em toda a proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos; e a primeira propriedade - a soma ou a diferença dos antecedentes está para a dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para seu conseqüente. Na exposição das propriedades e de suas aplicações, identificamos um tratamento algébrico dado a proporções, porém não generalizado.

Resgatamos, também, as definições de “números proporcionais" e sua aplicação ao conceito de “grandezas proporcionais”, caracterizadas pela existência do coeficiente de proporcionalidade *k*.

Identificamos tarefas e técnicas justificadas nas definições e propriedades acima mencionadas, e que estão, portanto, relacionadas a proporções. Listamos as tarefas, o número de exercícios em que são propostas e respectivas técnicas, no quadro a seguir.

Tarefas	Nº de exercícios em que a tarefa é proposta	Técnicas
Estudo de proporção Total de exercícios propostos: 45		
Achar qualquer termo de uma proporção	12	Resolução da proporção-Propriedade Fundamental* Uso implícito de equações
Achar 2 números desconhecidos, a partir de sua soma/subtração/produto e da razão entre eles ou de 2 termos da proporção que formam. Resolver sistemas.	26	Primeira propriedade de proporções e Resolução da proporção- PF*
Estudo de números e grandezas proporcionais Total de exercícios propostos: 30		
Achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais.	11	Formulação da proporção e Resolução da proporção- PF* a partir do coeficiente de proporcionalidade (*k*) .
Dividir em partes proporcionais (direta ou inversa)	14	Primeira propriedade de proporções, coeficiente de proporcionalidade e Resolução da proporção- PF*
Estudo da regra de três Total de exercícios propostos: 20		
Achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais: problemas de regra de três simples e composta.	20	Formulação da proporção e Resolução da proporção- PF* a partir de razões entre valores da mesma grandeza.
Estudo de porcentagem Total de exercícios propostos: 40		
Problemas de porcentagem	40	Aplicação da regra de três simples.

* Resolução da proporção-PF: aplicação da propriedade fundamental.

Quanto às tarefas e técnicas, este estudo nos permite algumas considerações.

A tarefa **achar qualquer termo de uma proporção**, cuja técnica de resolução se justifica pela propriedade fundamental das proporções, embora proposta em somente 12 dos 45 exercícios do estudo de proporções, torna-se uma etapa da técnica de resolução de todas as outras tarefas que envolvem proporção.

A tarefa **achar a quantidade desconhecida** aparece em dois momentos: no estudo dos "números e grandezas proporcionais" e no estudo da "regra de três". Em cada um deles é resolvida por uma técnica diferente, que correspondem a duas maneiras de expressar a proporção entre as quantidades:

- pelo coeficiente de proporcionalidade *k*, no estudo de "números e grandezas proporcionais". Neste estudo não há predominância da tarefa **achar a quantidade desconhecida**, que aparece em 11 dos 30 exercícios propostos.
- no estudo da "regra de três" a proporção é expressa pela igualdade das razões entre valores da mesma grandeza. Com esta técnica de resolução, a tarefa **achar a quantidade desconhecida** é apresentada em todos os 20 exercícios propostos, o que demonstra ser esta a técnica privilegiada pelo autor na resolução desta tarefa.

Esta tarefa foi identificada no tratado Trajano no estudo de "Regra de Três", enquanto que nas publicações de Ávila e Lima aparece no estudo de "grandezas proporcionais".

3.1.2 Giovanni e Giovanni Jr.

Matemática – Pensar e descobrir – Novo

Neste livro didático, o estudo de proporção é feito na Unidade 6: “*Razão e Proporção*”, seguido de Grandezas Proporcionais e Regra de Três, na Unidade 7. Os números racionais e equações são apresentados em unidade anteriores.

A estrutura de apresentação consiste, de maneira geral, em problemas resolvidos e comentados, definições e aplicações, seguidas de exercícios propostos.

O estudo de proporção: definição e propriedades

No estudo de *proporção* são apresentadas, inicialmente, sua definição e representação:

> Sentenças matemáticas que expressam uma igualdade entre duas razões são chamadas *proporção*.
> *Proporção* é a igualdade entre duas razões.
> Quatro números racionais a, b, c e d, diferentes de zero, nessa ordem, formam uma *proporção* quando:
> $$a : b = c : d \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ .(p.264)}$$

São dados, também, os nomes dos termos: *extremos* e *meios*.

As propriedades são apresentadas por meio de exemplos e então enunciadas, sem demonstrações. São elas:

> **Propriedade fundamental (PF):**
> De modo geral, em toda a proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice-versa.
> $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \underbrace{a \cdot d}_{\text{produto dos extremos}} = \underbrace{b \cdot c}_{\text{produto dos meios. (p.266)}}$$
> **1ª propriedade:**
> Em toda a proporção, a soma ou diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo) termo, assim como a soma ou diferença dos dois últimos termos está para o terceiro (ou para o quarto) termo. Assim:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\ ou\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}\ ou\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ .$$ (p.271)

2ª propriedade:
Em toda a proporção, a soma (ou diferença) dos antecedentes está para a soma (ou diferença) dos conseqüentes, assim como cada antecedente está para seu conseqüente. Veja:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}\ ou\ \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}\ ou\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}\ .$$ (p.273)

As tarefas – aplicações das propriedades

Identificamos, como “aplicações” das propriedades de proporção, as tarefas:

- **achar qualquer termo de uma proporção**;
- **achar dois números desconhecidos, a partir de sua soma ou subtração ou da razão entre eles ou ainda de dois termos da proporção que formam.**

A tarefa **achar qualquer termo de uma proporção**, uma aplicação da propriedade fundamental, tem como técnica **resolução da proporção-PF** dada por Quintella e aparece em 15 dos 26 exercícios propostos. Destes 15 exercícios, 9 são problemas aplicados a grandezas, como escala, por exemplo.

A tarefa **achar dois números desconhecidos, a partir de sua soma ou subtração ou da razão entre eles ou ainda de dois termos da proporção que formam**, é dada como aplicação das propriedades 1 e 2, que justificam sua técnica de resolução. Aparece em 8 dos 26 exercícios propostos e é apresentada tanto na forma de problemas quanto pelo enunciado *resolver sistemas de equações*. Esta tarefa, em suas duas formas de apresentação, também foi identificada em Quintella como aplicação das propriedades de proporções, embora Quintella não apresente a 1ª propriedade acima.

Números proporcionais e Grandezas proporcionais – duas definições

Tendo como referência as duas definições de Lima (cap. 2) para Grandezas Proporcionais, ou seja:

- definição 1: $f(nx) = nf(x)$ e $f(nx) = \frac{1}{n} f(x)$;
- definição 2: $y=kx$ e $k=xy$;

identificamos, neste livro, que a definição de "números proporcionais" corresponde à definição 2 de Lima e que a definição de "grandezas proporcionais" corresponde à definição 1, embora não seja usado explicitamente o conceito de função matemática. Estas duas definições têm reflexos nas técnicas de resolução das tarefas que apresentaremos adiante. Vejamos as definições dadas neste livro.

Números proporcionais – o coeficiente de proporcionalidade

"Números proporcionais" são mostrados por meio de tabelas de correspondência de valores de duas grandezas, por exemplo:

Tempo (em horas)	Produção (em peças)
1	100
2	200
3	300
4	?
?	500

(p. 287)

Da correspondência entre as duas seqüências de números assim formadas é concluído que:

- Se a razão entre os termos correspondentes, $\frac{1}{100}$ neste caso, for constante, os números são *diretamente proporcionais*.

- Se o produto entre os termos correspondentes for constante, os números são *inversamente proporcionais*.

Isto também corresponde à definição de Quintella para números proporcionais, e à definição de Ávila para grandezas direta e inversamente proporcionais. O nome “coeficiente de proporcionalidade” entre as seqüências de números ou grandezas não é mencionado, mas o conceito é o mesmo referido por estes autores, ou seja, $y=kx$ ou $k=y/x$ para proporcionalidade direta e $k=xy$ para a proporcionalidade inversa.

Grandezas proporcionais –razões entre valores da mesma grandeza

As definições destas grandezas são:

> Duas grandezas são *diretamente proporcionais* quando, dobrando uma delas, a outra também dobra; triplicando uma delas, a outra também triplica... e assim por diante.
>
> [...] Veja: $\frac{1}{3}=\frac{1{,}20}{3{,}60}$ Você vai notar que as duas razões são iguais.
>
> Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão. (p.292, grifo dos autores)
>
> Duas grandezas são *inversamente proporcionais* quando, dobrando uma delas, a outra se reduz para a metade; triplicando uma delas, a outra se reduz para a terça parte... e assim por diante.
>
> [...] Você vai notar que as razões não são iguais; são inversas. Veja:
>
> $$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\\[4pt]\frac{12}{6}=\frac{2}{1}\end{array}\right\}\longrightarrow \frac{2}{4}\text{ e }\frac{12}{6}\text{ são } \textit{razões inversas}$$
>
> Quando duas grandezas são inversamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam um na razão inversa do outro. (p.293)

As definições que ressaltamos nos quadros acima, correspondem, como já dissemos, à definição 1 de Lima, isto é, $f(nx) = nf(x)$ e $f(nx) = \frac{1}{n}f(x)$.

Os autores apresentam também, as conseqüências destas definições, que são expressas por razões entre valores da mesma grandeza. Nas grandezas diretamente proporcionais estas razões são iguais; nas grandezas inversamente proporcionais estas razões são inversas.

Três tarefas

A tarefa **dividir em partes proporcionais** é apresentada em 8 dos 11 exercícios propostos após as definições de "números proporcionais". A técnica de resolução, apresentada em exercícios resolvidos, é justificada por estas definições e é basicamente aquela dada por Lima para esta tarefa, que faz uso do coeficiente de proporcionalidade. Para divisão em partes inversamente proporcionais, a técnica é similar. Salientamos que, apesar de terem sido apresentadas as propriedades 1 e 2 das proporções, estas não são utilizadas nesta tarefa, como o faz Quintella.

Identificamos, também, a tarefa **verificar a proporcionalidade**, apresentada em 5 dos 7 exercícios propostos após as definições de "grandezas proporcionais". Dos enunciados destes exercícios, ressaltamos duas questões: uma quanto às técnicas de resolução e outra quanto à própria formulação da tarefa. Vejamos alguns exemplos.

> 1)Um eletricista, fazendo o serviço de fiação de uma casa, consegue estender 200 m de fio em 8 horas de trabalho. As grandezas metros de fio estendido e tempo de trabalho são *direta ou inversamente proporcionais*
>
> 2)Um ônibus faz o percurso da praça Central até a praça *A* de seu bairro. Na ida, a velocidade média foi de 50 km/h e o tempo que ele gastou nesse percurso foi de 60 minutos. Na volta, a sua velocidade média foi de 40 km/h e o tempo gasto para fazer o percurso foi de 75 minutos. Nessas condições, responda:
> a) Quando a velocidade média passa de 50 km/h para 40 km/h, ela varia em que razão?
> b) Nesse caso, o tempo gasto no percurso varia em que razão?
> c) As grandezas velocidade e tempo são *direta ou inversamente proporcionais*?

> 3) A medida do lado e a área de um quadrado são grandezas *direta ou inversamente proporcionais*? (p.294, grifos nossos)

Quanto às técnicas de resolução temos que o enunciado do exercício 1 sugere, sem explicitar, que a técnica de resolução seja a aplicação direta da definição, que consiste em verificar se a multiplicação de uma grandeza por um número implica na multiplicação da outra por este mesmo número, ou implica na divisão da outra por este mesmo número, como foi apresentado por Lima.

Já no exercício 2, a técnica de resolução é explicitada nas perguntas a) e b), e tem origem nas conseqüências das definições. Consiste em determinar, para cada grandeza, a razão entre dois de seus valores e, então compará-las:

- se as razões são iguais, as grandezas são diretamente proporcionais;
- se as razões são inversas, as grandezas são inversamente proporcionais.

Quanto à formulação da tarefa, o modo como é colocada a questão: "*as grandezas são direta ou inversamente proporcionais*?", que grifamos nos exercícios acima, sugere que se deva optar por um dos dois tipos de proporcionalidade, e não que se verifique se há, ou não, proporcionalidade, seja ela direta ou inversa, como no caso do exercício 3. Portanto, não identificamos aqui a mesma tarefa de "verificar a proporcionalidade", dada por Lima.

Problemas de Regra de Três

Sob o título Regra de Três, são apresentados problemas resolvidos e exercícios propostos que correspondem à tarefa **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais**, isto é, **problemas de regra de três**. Estes problemas são divididos em Regra de Três Simples, para os quais são propostos 19 exercícios, e Regra de Três Composta, com 7 exercícios propostos. Suas características não são explicitadas.

Três problemas iniciais explicitam as técnicas de resolução.

No primeiro problema as grandezas são diretamente proporcionais: comprimento e largura do tampo de uma mesa, medidos em palmos e em palitos de fósforo. Apresentamos a resolução:

> Levantando os dados do problema
> usando palmos: 12 palmos de comprimento e 5 palmos de largura
> usando palitos de fósforo: 48 palitos de comprimento e x palitos de largura.
> Interpretando os dados
> Podemos colocar esses dados numa tabela:
>
> | Comprimento | Largura |
> |---|---|
> | 12 palmos | 5 palmos |
> | 48 palitos | x palitos |
>
> Observe que o comprimento da mesa aumentou[31] 4 vezes quando passamos do ‘palmo’ para o ‘palito’:
>
> | | Comprimento |
> |---|---|
> | $\times 4$ | 12 palmos |
> | | 48 palitos |
>
> Esse mesmo fato deve ocorrer na largura. Temos então:
>
> | Largura | |
> |---|---|
> | 5 palmos | $\times 4$ |
> | x palitos | |
>
> As grandezas são diretamente proporcionais. Daí, podemos fazer:
>
> $$\frac{12}{48} = \frac{5}{x} \rightarrow 12x = 48 \cdot 5 \rightarrow 12 \cdot x = 240 \rightarrow x = \frac{240}{12} \rightarrow x = 20$$
>
> Analisando o resultado obtido, concluímos que o tampo da mesa tem 20 palitos de fósforo de largura. (p.296)

A técnica é justificada pela definição de grandezas proporcionais e se divide em etapas, das quais destacamos:

- verificação da proporcionalidade direta entre as grandezas, com o uso explícito da técnica justificada pela definição destas grandezas, ou seja, quadruplicar o número que expressa o comprimento implica em quadruplicar o número que expressa a largura;

[31] Esta expressão é incorreta, pois o tampo da mesa não aumentou. O que aumentou foram os números que expressam a medida do tampo da mesa: é necessário 4 vezes mais palitos do que palmos para medi-la.

- formulação da igualdade das razões, ou proporção, com base na conseqüência da definição: quando duas grandezas são diretamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão;
- resolução da proporção-PF.

Observamos que, ao explicitar o fator 4 em $\boxed{\times 4}$, os autores já estão indicando uma técnica de resolução, a qual não é ressaltada. Esta técnica consiste, justamente, em identificar este fator, pelo qual será multiplicado o valor conhecido da outra grandeza.

No segundo problema as grandezas são inversamente proporcionais: velocidade média e tempo, em um mesmo percurso. Os dados são organizados em uma tabela:

Velocidade (em km/h)	Tempo (em segundos)
180	20
200	*x*

> Observe que, se duplicarmos a velocidade inicial, o tempo gasto para percorrer o percurso vai cair pela metade. Logo, as grandezas são *inversamente proporcionais*. Nesse caso, temos:
>
> $180 \cdot 20 = 200 \cdot x \quad \rightarrow 200x = 3600 \quad \rightarrow x = \frac{3600}{200} \quad \rightarrow x = 18$
>
> Analisando o resultado obtido, concluímos que, se a velocidade do competidor fosse 200 km/h, ele teria gasto 18 segundos para fazer o percurso.(p.297)

Também aqui a técnica divide-se em etapas, análogas ao do problema anterior. A técnica de verificação da proporcionalidade inversa é justificada pela definição de grandezas inversamente proporcionais, ou seja, duplicar a velocidade implica em reduzir pela metade o tempo gasto para percorrer o percurso. Mas na formulação da igualdade 180 . 20 = 200 . *x*, não são usadas as *razões inversas*, conseqüência da definição de grandezas inversamente proporcionais. Há aqui a aplicação do *produto constante*, com o qual os autores conceituam “números inversamente proporcionais”.

Ressaltamos que, nestes dois problemas sobre regra de três simples, a etapa da técnica de resolução “formulação das igualdades” não se justifica pela mesma definição. No problema sobre grandezas diretamente proporcionais a formulação da igualdade das razões se justifica na definição de “grandezas diretamente proporcionais”, enquanto que no problema sobre grandezas inversamente proporcionais a formulação a formulação da igualdade se justifica na definição de “números proporcionais”. Portanto, não há uniformidade na aplicação das técnicas justificadas pelas definições quando da resolução dos problemas sobre grandezas proporcionais.

A **regra de três composta** é apresentada no terceiro problema, que relaciona número de máquinas, dias de trabalho e número de peças produzidas. Vejamos a resolução dada pelos autores.

> Levantando os dados
> 5 máquinas em 6 dias produzem 400 peças
> 7 máquinas em 9 dias produzem x peças
> Interpretando os dados

Número de máquinas (A)	Número de dias (B)	Número de peças (C)
5	6	400
7	9	x

> *Fixando a grandeza A, podemos relacionar as grandezas B e C:*
> *Se dobrarmos o número de dias, o número de peças também dobrará. Logo, as grandezas B e C são* ***diretamente proporcionais****.*
> *Fixando a grandeza B, podemos relacionar as grandezas A e C:*
> *Se dobrarmos o número de máquinas, o número de peças também dobrará. Logo, as grandezas A e C são* ***diretamente proporcionais****.*
> *Quando uma grandeza é diretamente proporcional a duas outras, a variação da primeira é diretamente proporcional ao* ***produto*** *da variação das outras duas.*
>
> De acordo com o quadro, temos:
> $$\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{9}=\frac{400}{x} \quad \rightarrow \frac{30}{63}=\frac{400}{x}$$
> Resolvendo a proporção, temos:
> $$30\cdot x = 63\cdot 400 \quad \rightarrow 30x = 25\,200 \quad \rightarrow x = \frac{25\,200}{30} = 840$$
> Analisando o resultado obtido, concluímos que:
> Se as máquinas funcionarem durante 9 dias, serão produzidas 840 peças. (p. 299-300, grifo nosso)

Nesta resolução está explícita a definição de Lima e Quintella para *grandezas proporcionais a várias outras*, o que justifica as seguintes etapas da técnica utilizada:

- a verificação da proporcionalidade entre duas das grandezas é feita fixando a terceira;
- na formulação da proporção é considerado o *produto* das razões das grandezas conhecidas.

Conclusão

No estudo deste livro didático identificamos as definições de proporção: "*proporção é a igualdade entre duas razões*", de números proporcionais, com base no coeficiente de proporcionalidade *k*, e de grandezas proporcionais, com base nas razões entre valores da mesma grandeza. Identificamos, também, a representação de proporções: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e suas propriedades, das quais destacamos a propriedade fundamental: "*o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e vice-versa*".

Observamos que, a partir da aplicação da propriedade fundamental às proporções, as expressões são tratadas como equações.

Identificamos tarefas e técnicas nas quais o saber *proporção* é tratado, ora como objeto, ora como ferramenta, que listamos no quadro a seguir, juntamente com o número de exercícios em que as tarefas são propostas.

Tarefas	Número de exercícios em que a tarefa é proposta	Técnicas
Estudo de proporção Total de exercícios propostos: 26		
Achar qualquer termo de uma proporção	15	Resolução da proporção- PF*
Achar 2 números desconhecidos, a partir de sua soma ou subtração e da razão entre eles ou de 2 termos da proporção que formam. Resolver sistemas.	8	Primeira e segunda propriedades de proporções e Resolução da proporção- PF*
Estudo de números proporcionais Total de exercícios propostos: 11		
Dividir uma grandeza em partes diretamente, ou inversamente, proporcionais a números dados.	8	Coeficiente de proporcionalidade (D)Determinação de razões iguais (proporção), e Resolução da proporção-PF* (I) Determinação do produto igual, equação.
Estudo de grandezas proporcionais Total de exercícios propostos: 7		
Verificar a proporcionalidade	5	1)Condições de *f(x)* 2) Razões entre valores da mesma grandeza: razões iguais, diretamente proporcionais razões inversas, inversamente proporcionais.
Estudo da regra de três Total de exercícios propostos: 26		
Achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais: Problemas de regra de três	26	Direta: igualdade das razões e Resolução da proporção-PF*. Inversa: produto constante (k) e equação Produto das variações- Resolução da proporção-PF*.

* Resolução da proporção-PF: aplicação da propriedade fundamental.

Estas tarefas já foram identificadas nas publicações noosferianas, a saber: **achar qualquer termo de uma proporção** e **dividir em partes proporcionais**, no tratado Trajano; **verificar a proporcionalidade** e **dividir em partes proporcionais**, em Lima; **achar a quantidade desconhecida**, em Trajano, Lima e Ávila. Todas as tarefas aqui apresentadas também foram identificadas no livro didático de Quintella, com pequenas variações.

Ressaltamos que a tarefa **achar qualquer termo de uma proporção**, que aparece em 15 dos 26 exercícios propostos no estudo de proporção, e sua técnica **resolução da proporção-PF**, tornam-se uma etapa da técnica de resolução de outras tarefas.

Quanto à tarefa **achar a quantidade desconhecida**, que é proposta em todos os 26 exercícios do estudo da regra de três, resgatamos técnicas de resolução que se justificam em definições diferentes. Para grandezas diretamente proporcionais, ou problemas de regra de três direta, a técnica é justificada pela definição de "grandezas proporcionais" e tem por base as razões entre os valores da mesma grandeza. Para grandezas inversamente proporcionais, ou problemas de regra de três inversa, a técnica se justifica na definição de "números proporcionais" e tem por base o produto constante, ou coeficiente de proporcionalidade *k*. Temos, portanto, que não há uniformidade na aplicação das técnicas, pois as definições de "grandezas proporcionais" e de "números proporcionais" justificam, cada uma delas, técnicas de resolução tanto para problemas de regra de três direta quanto para problemas de regra de três inversa.

3.1.3 Antonio Jose Lopes Bigode

Matemática Hoje é feita assim

As referências à *proporção*, neste livro didático, estão no capítulo 9 "Proporcionalidade", e no capítulo 10 "Geometria e Proporcionalidade". No primeiro, há o estudo de comparações indiretas, de razões, de grandezas proporcionais e não proporcionais; no capítulo 10 há o estudo de figuras semelhantes, cuja principal abordagem é a ampliação e redução de figuras.

Proporção – condição para realizar uma tarefa

No capítulo “Proporcionalidade”, no tópico “Aumentando Receitas”, o conceito de proporção é apresentado na resolução do problema ‘aumentar a receita de um refresco’. Vejamos como o autor explora esta situação.

> Para aumentar a receita, a quantidade de cada ingrediente tem de respeitar as proporções da receita original. Caso contrário o refresco não fica mais com o mesmo gosto.
>
> Veja a tabela que relaciona as quantidades.

Laranjas	Limões	Litros de suco obtido	Copos (de 250 ml)
5	1	1,5	6
10	2	3	12
15	3	4,5	18
20	4	6	24

> Dobrar uma receita implica dobrar a quantidade de todos os ingredientes envolvidos. Conseqüentemente obtém-se o dobro da quantidade de refresco.
>
> A razão entre o número de laranjas e o de limões se mantém constante.
>
> Para manter a *proporção* entre os ingredientes – laranjas e limões, neste caso - a razão entre o número de laranjas e o de limões deve ser equivalente à razão “5 para 1”. (pp. 221, 222, grifo do autor)

> [...] Para aumentar ou diminuir uma receita de modo a manter o sabor e a consistência do produto final, usamos os ingredientes na mesma proporção indicada na receita básica. No caso das receitas e das misturas, manter a proporção significa manter as relações entre as quantidades.(p. 222)

Ressaltamos, desta exposição, alguns aspectos.

A abordagem de proporção não é feita a partir da verificação de sua existência, mas sim ao considerá-la como uma condição para a realização de uma tarefa, o que é expresso por: “*a quantidade de cada ingrediente tem que respeitar as proporções da receita original. Caso contrário o refresco não fica mais com o mesmo gosto*”.

Os termos *proporção* e *razão*[32] são utilizados com o mesmo significado. A expressão “*as proporções da receita”*, por exemplo, e “*a razão entre o número de laranjas e o de limões*”

[32] O estudo de razões trata de situações como preço/kg, candidatos/vaga, densidade demográfica, velocidade média, escala e porcentagens, entre outros. Razão é definida como o quociente entre dois números inteiros, expressa por a/b, com $b \neq 0$.

significam, ambas, “razões entre os ingredientes da receita”, ou seja, 5 laranjas para 1 limão. Já a idéia de proporcionalidade, ou o conceito de proporção, é dado pela “mesma variação”, expresso em “*respeitar* as proporções da receita”, que pode ser lida como “respeitar as razões...”.

Identificamos duas formas de expressar a proporcionalidade entre as grandezas, que equivalem às duas definições de Lima (cap.2) para grandezas proporcionais:

- “*Dobrar uma receita implica dobrar a quantidade de todos os ingredientes envolvidos*”, que equivale à definição 1, *f(nx) = nf(x)*;
- “*A razão entre o número de laranjas e o de limões se mantém constante*”, que equivale à segunda definição, ou coeficiente de proporcionalidade em $y=kx$.

Proporção – o termo desconhecido

No capítulo 10, “Geometria e Proporcionalidade”, no tópico “O termo desconhecido de uma proporção”, um tratamento formal é dado a proporções. A proporção é apresentada como um tipo de igualdade, para a qual são dadas representação, leitura e a propriedade fundamental. Vejamos.

> Igualdades do tipo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ são chamadas de proporção. Não se esqueça que é proibido dividir por zero. $b \neq 0$ e $d \neq 0$
> Lê-se: “**a** está para **b**, assim como **c** está para **d**”.
> Os “elementos” **a**, **b**, **c** e **d** são chamados termos da proporção.
> Como, na leitura da proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, iniciamos por **a** e terminamos por **d**, chamamos esses termos de extremos. Nessa leitura **b** e **c** vêm entre **a** e **d**, por isso **b** e **c** são termos conhecidos como meios.
> Numa equação, se multiplicarmos os dois membros pelo mesmo número, não nulo, a igualdade não se altera.
> Para eliminarmos os denominadores, na igualdade $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ multiplicamos o primeiro e o segundo membros por bd.
>
> $$\frac{a \cdot \cancel{b}d}{\cancel{b}}=\frac{c \cdot b\cancel{d}}{\cancel{d}}$$

> No primeiro membro os “bês” do numerador e do denominador se cancelam; no segundo membro os “dês” do numerador e do denominador também se cancelam.
> O resultado é a igualdade $a \cdot d = b \cdot c$.
> $$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } a \cdot d = b \cdot c.$$
> Esta é a propriedade fundamental das proporções.
> **O produto dos meios é igual ao produto dos extremos.**
> Veja como se aplica essa propriedade na resolução de alguns problemas.
> (p. 258)

Esta abordagem é muito próxima daquela feita por Quintella, a exceção do tratamento explícito que aqui é dado à proporção como uma equação. A propriedade fundamental será utilizada na resolução de problemas, como ressalta o autor: “*Veja como se aplica essa propriedade na resolução de alguns problemas*”(p. 258).

Proporcionalidade – variação de grandezas

O estudo das grandezas proporcionais é feito no capítulo 9 “Proporcionalidade”, no tópico “Variação de grandezas proporcionais”, no qual o autor dá ênfase à relação de dependência entre as grandezas: “*Duas grandezas que mantêm entre si uma relação de dependência podem variar proporcionalmente*” (p. 229). Isto aproxima esta abordagem daquela proposta por Lima, na qual a proporcionalidade é definida como uma função.

Nos exemplos utilizados para abordar proporcionalidade, identificamos a definição 1 de Lima, para grandezas diretamente proporcionais: “[...] *Observe que duplicando, triplicando, quadruplicando etc. a medida do lado, o perímetro fica, respectivamente, duplicado, triplicado, quadruplicado etc*” (p. 229), e para grandezas inversamente proporcionais: “[...] *Observe que duplicando, triplicando etc. a velocidade média, o tempo gasto fica, respectivamente, divido por dois, três etc*” (p.231)

Ressaltamos que, somente para a proporcionalidade direta é mencionada a razão entre as grandezas, que corresponde ao coeficiente de proporcionalidade da segunda definição de Lima: "[...] *A razão entre o perímetro de um quadrado e a medida de seu lado é uma relação de proporcionalidade direta. Aumentando o lado, aumenta o perímetro. O perímetro é igual a 4 vezes a medida do lado*" (p. 229-230).

O conceito de razão constante é retomado pelo autor no capítulo "Geometria e proporcionalidade", em que trata da razão de ampliação e redução de figuras, de escala, de famílias de retângulos proporcionais e de triângulos semelhantes. Apresentamos dois exemplos do uso deste conceito. No primeiro, o autor refere-se à razão de ampliação/redução:

> Na ampliação da página anterior, cada medida de comprimento é o dobro da medida correspondente à da foto original. A razão de ampliação é de 2 : 1. Na redução, cada medida de comprimento é a metade da medida correspondente à da foto original. A razão de redução é de 1 : 2. (p. 245)

No segundo exemplo, o autor discute as relações entre os retângulos cujas medidas são 1×2, 2×4, 3×6, 4×8 e 5×10, donde conclui:

> Nos retângulos semelhantes, a razão entre seus lados correspondentes (comprimento/largura) é constante.
> Portanto, dizemos que seus lados são proporcionais. (p. 252)

Os contra-exemplos

No tópico "Nem tudo é proporcional" são apresentadas várias situações de *variação não proporcional*. Quando trata, por exemplo, da venda com desconto de muitas unidades de um produto, ou do preço de uma corrida de táxi, o autor ressalta:

> [...]nem sempre os negócios respeitam proporções matemáticas. Numa compra de quase 1 milhão de camisetas devem ser levados em conta outros fatores que, em geral, fazem diminuir o preço unitário. (p. 233)
>
> O preço da corrida de táxi depende da distância percorrida, mas essa dependência não é proporcional à distância. (p. 235)

Portanto, são apresentados diferentes exemplos, alguns envolvendo as mesmas grandezas, de situações em que há proporcionalidade e de situações que não há. Porém, não identificamos de forma explícita a tarefa “verificar a proporcionalidade” entre grandezas.

A tarefa “achar a quantidade desconhecida”

Identificamos neste livro a tarefa relativa à proporção e à proporcionalidade **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais**, nos dois capítulos que estudamos e com diferentes técnicas de resolução.

No capítulo “Proporcionalidade”, esta tarefa aparece em 10 dos 16 exercícios propostos no tópico “Aumentando receitas” e em 8 dos 21 exercícios complementares do capítulo. É apresentada uma nova técnica, ainda não identificada nas produções noosferianas e nos livros didáticos já estudados, que chamaremos **operador escalar**, a exemplo de Vergnaud[33]. Esta técnica é explicitada na resolução do seguinte problema:

> Se 6 copos equivalem a 1,5 litros, 180 copos equivalem a quantos litros?
> [...]
>
> $$\begin{array}{rcrc} & \text{Copos} & & \text{Litros} \\ & 6 & & 1{,}5 \\ \times 30 & \downarrow & \times 30 & \downarrow \\ & 180 & & 45 \end{array}$$
>
> [...] (p. 222)

Justificada na definição 1 de Lima, *f(nx)* = *nf(x)*, esta técnica é representada pelo operador escalar ×30, e consiste em determinar este operador, a partir dos valores conhecidos da grandeza *copos*, e aplicá-lo ao valor conhecido da grandeza *litro*.

No capítulo “Geometria e proporcionalidade”, a tarefa **achar a quantidade desconhecida** aparece em 18 dos 47 exercícios propostos. No decorrer deste capítulo são apresentadas duas técnicas aritméticas de resolução: a técnica **equação da constante *k***, proposta por Ávila e Lima,

[33] Ver referência no estudo de Lima, cap. 2.

aplicada a um problema resolvido de redução de retângulos, e a técnica **resolução da proporção-PF** (propriedade fundamental), justificada na apresentação formal de proporção, aplicada a 6 problemas resolvidos. Salientamos que, após a apresentação destas técnicas, são propostos apenas 7 exercícios dos 18 que apresentam a tarefa **achar a quantidade desconhecida.**

Conclusão

Identificamos, neste livro didático, um tratamento formal do objeto proporção, no estudo de "Geometria e proporcionalidade", por meio de sua definição e representação: "*igualdades do tipo* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *são chamadas de proporção*", e propriedade fundamental. Esta apresentação formal de proporção é feita sob o título "termo desconhecido de uma proporção", o que demonstra a intenção do autor de fornecer uma técnica de resolução para a tarefa **achar a quantidade desconhecida**.

A proporção também é abordada como uma condição para a realização da tarefa **achar a quantidade desconhecida**, em problemas não geométricos. Observamos que, nesta abordagem, o termo "proporção" também é utilizado com significado de "razão", o que foi observado nas referências históricas, que apresentamos no capítulo 1.

Identificamos, também, a definição de *grandezas proporcionais*, bem como de as duas formas de expressar a *proporcionalidade*, dadas pelas definições de Lima, ou seja, $f(nx) = n(fx)$ e $y = kx$. A *proporcionalidade* é abordada como um tipo de relação de dependência entre grandezas. Isto é ressaltado nos exemplos e contra-exemplos.

A tarefa relativa à proporção e proporcionalidade, **achar a quantidade desconhecida**, aparece em 36 dos 84 exercícios propostos nos tópicos onde é abordada. É apresentada uma nova técnica de resolução desta tarefa, **operador escalar**, sendo a única explicitada no capítulo

"Proporcionalidade". Para resolução desta tarefa, quando aplicada a problemas geométricos, são apresentadas as técnicas aritméticas **equação da constante *k*** e **resolução da proporção-PF** (propriedade fundamental), sendo esta última justificada pela apresentação formal de proporções. Apenas 7 dos 36 exercícios em que a tarefa **achar a quantidade desconhecida** aparece são propostos após a explicitação destas duas últimas técnicas.

Não identificamos a tarefa "verificar a proporcionalidade", como também não há referências à regra de três.

3.1.4 Imenes & Lellis

Matemática para todos

Identificamos nos artigos de Ávila e Lima (cap. 2) a proposição de abordagem da noção de proporcionalidade no lugar de proporção. O estudo de Imenes e Lellis ilustra esta abordagem num livro didático.

O estudo da proporcionalidade

Este estudo é feito no capítulo 7 "Proporcionalidade". Este capítulo trata de grandezas proporcionais, explorando suas características via situações-problema, em três momentos: Grandezas diretamente proporcionais, Mais proporcionalidade direta e Grandezas inversamente proporcionais.

Grandezas diretamente proporcionais – duas caracterizações

Os autores apresentam duas maneiras de caracterizar as grandezas diretamente proporcionais, uma em “Grandezas diretamente proporcionais” e a outra em “Mais proporcionalidade direta”.

Em “Grandezas diretamente proporcionais”, apresentam a primeira caracterização destas grandezas em uma situação que relaciona tempo e distância, a uma velocidade constante:

> [...] Na situação apresentada, o tempo gasto e a distância percorrida são grandezas diretamente proporcionais. Isso quer dizer que se o tempo dobrar, a distância também dobrará; se o tempo triplicar, a distância também triplicará e assim por diante. Logo, *temos um padrão fixo que relaciona as duas grandezas: se o tempo gasto for multiplicado por um número, a distância percorrida será multiplicada pelo mesmo número.* (p. 118, grifo nosso)

A relação, ou padrão fixo, que caracteriza a proporcionalidade direta entre as grandezas neste exemplo, corresponde à definição 1 de Lima para grandezas proporcionais, ou seja, $f(nx) = nf(x)$, $n \in$ N.

Esta caracterização é reforçada em um contra-exemplo:

> Exemplo
> Um jogo de futebol dura 90min. Aos 30min de jogo, o placar é 3× 1. Qual será o placar final?
> Nessa situação, o tempo de jogo triplica, de 30mim para 90min. Você acha que o placar vai triplicar? É muito provável que não! Tempo de jogo e placar não são grandezas proporcionais. Aliás, não há relação alguma entre essas grandezas que permite usar a matemática para obter o placar final. O time perdedor pode até mesmo “virar” o jogo. A matemática não proíbe isso! (p.118)

Em “Mais proporcionalidade direta”, é apresentada a segunda caracterização das grandezas diretamente proporcionais, em uma situação que envolve quantidade de farinha e número de bengalas de pão:

> [...]
>
> bengalas farinha
>
> $6 \xrightarrow{\times 300} 1800$ g
>
> $5 \xrightarrow{\times 300} 1500$ g
>
> Compreendeu a idéia? A quantidade de farinha é sempre igual ao número de bengalas multiplicado por 300.

> Vamos fazer uma generalização: *quando duas grandezas são diretamente proporcionais, o valor de uma das grandezas é igual ao valor correspondente da outra, multiplicado sempre por um mesmo número*. (p. 122, grifo nosso)

Esta generalização corresponde à definição de Ávila e à definição 2 de Lima, ou seja, $y = kx$. No exemplo acima, o valor de 300 g é, então, o coeficiente de proporcionalidade *k*. Ressaltamos que esta característica é apresentada como uma conseqüência da proporcionalidade direta entre as grandezas, em "*quando duas grandezas são diretamente proporcionais, o valor*....".

Grandezas inversamente proporcionais – uma caracterização

Os autores apresentam uma única maneira de caracterizar estas grandezas, em "Grandezas inversamente proporcionais". A situação proposta relaciona a quantidade de exercícios escolares e o tempo de trabalho para fazê-los:

> [...] Este é um caso de grandezas inversamente proporcionais: se a primeira dobra, a outra reduz-se à metade; se a primeira triplica, a outra reduz-se à terça parte e assim por diante. Portanto, *o padrão que relaciona as duas grandezas é o seguinte: se uma delas é multiplicada por um número (que não pode ser zero), a outra é dividida por esse mesmo número*. (p.127, grifo nosso)

Nesta situação, o padrão que relaciona as duas grandezas também corresponde a definição 1, de Lima, ou seja, $f(nx) = \frac{1}{n} f(x)$, $n \in$ N. Ressaltamos que para as grandezas inversamente proporcionais não é apresentada a caracterização que corresponde à definição 2 , $y = k/x$, na qual o coeficiente de proporcionalidade é $k = xy$.

Outras expressões

Os autores esclarecem que há outras maneiras de se referir à proporcionalidade. A partir da expressão "*Na minha rua, há 4 meninas para cada grupo de 3 meninos*" (p. 123), esclarecem que em linguagem cotidiana isto é expresso por "*na proporção de 4 para 3*", e que no meio matemático é expresso por "*assim como 4 está para 3*" ou "*na razão 4 para 3*". Resgatam, assim, o significado destas expressões e identificam o uso indevido do termo *proporção*, para indicar *razão*, como linguagem cotidiana.

A tarefa "verificar a proporcionalidade"

Esta tarefa é apresentada em 19 dos 55 exercícios propostos no capítulo "Proporcionalidade" e aparece somente nos tópicos "Grandezas diretamente proporcionais" e "Grandezas inversamente proporcionais". Por exemplo:

> [...] b) Em um quadrado, se o lado dobrar de comprimento, o perímetro também dobrará? Se o tamanho do lado triplicar, o perímetro também triplicará? O perímetro é diretamente proporcional ao comprimento do lado?
> c) Em um quadrado, se o tamanho do lado dobrar, a área também dobrará? Há proporcionalidade direta entre a área e o comprimento do lado? (p. 120)

Identificamos aqui a técnica de resolução **condições de *f(x)***, proposta por Lima. Esta se justifica nas caracterizações apresentadas para estas grandezas nos tópicos que citamos acima. Consiste, portanto, em verificar se existe, ou não, o "padrão" que aí as caracteriza.

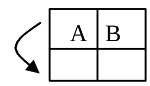
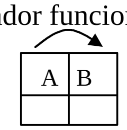
A resolução de problemas

A tarefa "resolver de problemas de proporcionalidade", que corresponde à tarefa **achar a quantidade desconhecida**, aparece em 32, dos 55 exercícios propostos no capítulo "Proporcionalidade", para os quais são apresentadas técnicas de resolução diferentes.

A relação entre os valores envolvidos – diferentes técnicas

As diferentes técnicas de resolução são apresentadas considerando a evidência, ou não, da relação entre os valores envolvidos nos problemas. Veremos isto a seguir.

Para a análise destas técnicas regatamos os termos “operador escalar” e “operador funcional” de Vergnaud[34]. Estabelecemos a correspondência entre estes operadores, as características das grandezas diretamente proporcionais dadas por Imenes e Lellis e as definições de Lima, no quadro a seguir.

Tópico da apresentação	Caracterização de Imenes e Lellis	Definições de Lima	Operadores de Vergnaud
Grandezas diretamente proporcionais	1ª cateterização: Padrão fixo que relaciona as duas grandezas: se uma delas é multiplicada por um número, a outra é multiplicada pelo mesmo número.	Definição 1: $f(nx) = nf(x)$	Operador escalar 
Mais proporcionalidade direta	2ª caracterização: O valor de uma das grandezas é igual ao valor correspondente da outra, multiplicado sempre por um mesmo número.	Definição 2: $y = kx$	Operador funcional 

A técnica “operador escalar”

Esta técnica é apresentada no tópico “Grandezas diretamente proporcionais”. Vejamos a resolução do problema que a apresenta.

> [...] Primeiro, organize as informações do problema em uma tabela:
>
> | Tempo (h) | Distância (km) |
> |---|---|
> | 0,5 | 150 |
> | 2,0 | ////////////////////// |
>
> Note que, de 0,5h para 2h, o tempo foi multiplicado por 4. Como o tempo e a distância são diretamente proporcionais, você pode multiplicar a distância também por 4. Observe como fica a tabela:
>
> | Tempo (h) | Distância (km) |
> |---|---|
> | 0,5 | 150 |
> | $\times 4$ | $\times 4$ |
> | 2,0 | 600 |
>
> Conclusão: em 2h, o helicóptero percorrerá 600 km. (p. 118)

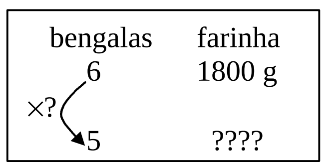
[34] Ver referência no estudo de Lima, cap. 2.

A 1ª caracterização de grandezas diretamente proporcionais justifica esta técnica de resolução. Ela consiste em determinar o operador escalar ×4, a partir dos valores conhecidos da grandeza *tempo* e aplicá-lo ao valor conhecido da grandeza *distância*.

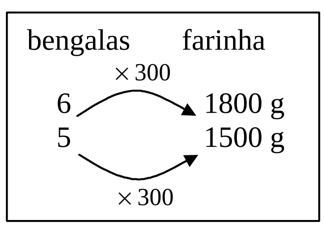
A técnica "operador funcional"

No tópico "Mais proporcionalidade direta", os autores apresentam "*outra maneira de resolver problemas de proporcionalidade*" (p. 122). Na situação-problema, o operador escalar não é evidente, o que leva a outra técnica de resolução destes problemas. Vejamos.

> Exemplo[35]
> Em 6 bengalas de pão, o padeiro gasta 1800 g de farinha. Quanto gastará em 5 bengalas?
> Padeiro 1: – Bem... É um caso de proporcionalidade. Mas... de 6 para 5... Por quanto devo multiplicar?



> Padeiro 2: – Se, em 6 bengalas, uso 1800 g de farinha, em cada bengala, uso 300g.
> Padeiro 1: – Entendi! 5 vezes 300 é 1500. Em 5 bengalas, uso 1500 g de farinha.



> Autores: Compreendeu a idéia? A quantidade de farinha é sempre igual ao número de bengalas multiplicado por 300. (p. 122)

A técnica de resolução, justificada pela 2ª caracterização de grandezas diretamente proporcionais, consiste em determinar o operador funcional, ou coeficiente de proporcionalidade *k*, a partir dos valores conhecidos e correspondentes das duas grandezas, e aplicá-lo ao valor correspondente daquele que se procura.

---

[35] Este problema é apresentado em quadrinhos. Aqui reproduzimos somente o diálogo entre dois padeiros.

Uma técnica para resolução de problemas de proporcionalidade inversa?

Identificamos uma técnica de resolução de problemas de proporcionalidade inversa. Porém, ela não é explicitada na resolução de um problema, mas apenas sugerida na situação que apresenta as grandezas inversamente proporcionais.

Esta situação relaciona a quantidade de exercícios escolares e o tempo de trabalho para fazê-los, do seguinte modo:

[...]

Exercícios por hora	Tempo de trabalho
4	4
×2 8	2 ÷2
×4 16	1 ÷4

[...] (p. 126)

Esta técnica é justificada na caracterização de grandezas inversamente proporcionais que, como já vimos, corresponde à definição 1 de Lima: $f(nx) = \frac{1}{n} f(x)$. Consiste, portanto, em determinar o operador, a partir dos valores conhecidos de uma das grandezas, e aplicá-lo à outra, considerando que este operador é multiplicador para uma grandeza e divisor para a outra.

A técnica da Regra de Três - quando os operadores não são evidentes

No capítulo 13 “Equação”, no tópico “Regra de Três”, os autores apresentam novamente a tarefa **achar a quantidade desconhecida**, que aparece em 13 dos 17 exercícios propostos para este tópico. Esta tarefa é agora apresentada em situações nas quais nem o operador escalar nem o operador funcional são evidentes, isto é, não são números inteiros ou racionais mais comuns, como 0,5 ou 1,5. O exemplo apresentado pelos autores relaciona tempo e distância na seguinte tabela:

[...] $\times ?$

tempo	distância
11	840
x	1800

$\times ?$

[...] (p. 236)

A técnica de resolução consiste em escrever, com os dados da tabela, uma equação e resolvê-la. A justificativa que possibilita tal técnica é dada pelos autores como segue:

> Estamos acostumados a representar valores de grandezas diretamente proporcionais numa tabela que tem um padrão: multiplicando-se os valores de uma linha por algum número, obtemos os valores da segunda linha.
>
> | A | B |
> |---|---|
> | 6 | 11 |
> | 18 | 33 |
>
> $\times 3$ $\times 3$
>
> Esse padrão multiplicativo existe sempre que há proporcionalidade direta. Como multiplicação e divisão são operações inversas, também podemos encontrar nessa tabela padrões relativos à divisão. Veja:
>
> $\frac{6}{18} = \frac{11}{33} = 0{,}333\ldots$, ou então, $\frac{18}{6} = \frac{33}{11} = 3$
>
> O padrão relativo à divisão é uma propriedade muito útil para resolver problemas. (p. 235)

Este padrão ou propriedade da divisão que existe na proporcionalidade direta é a expressão da igualdade dos quocientes, que corresponde ao conceito de proporção. Temos, então, que o conceito de proporção dá lugar a uma propriedade, e é esta propriedade que permite escrever, com os dados do problema, a equação:

$$\frac{x}{11} = \frac{840}{1800}.$$

Quanto à denominação "regra de três", dizem os autores que "*a equação que resolveu o problema é chamada* ***regra de três****: você usa três números conhecidos para descobrir um número desconhecido*" (p. 236, grifo dos autores). Referem-se, portanto, à "regra de três" como uma técnica, como o faz Trajano.

Essa técnica também é aplicada a problemas com grandezas inversamente proporcionais. Vejamos:

> Os números da coluna A são inversamente proporcionais aos da coluna B.
>
> | | A | B | |
> |---|---|---|---|
> | $\times 2$ | 3 | 8 | $\div\ 2$ |
> | | 6 | 4 | |
>
> Note que $\frac{6}{3}$ não é igual a $\frac{4}{8}$. É preciso inverter uma das divisões para ter uma igualdade:
>
> $$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$
>
> Assim, se o problema envolver grandezas inversamente proporcionais, você deverá mudar a ordem dos valores de uma das colunas para escrever a equação. (p. 236)

Os autores partem, assim, da definição de grandezas inversamente proporcionais e explicitam a necessidade de uma nova etapa da técnica da regra de três, que consiste em inverter uma das divisões para que haja a igualdade dos quocientes.

Conclusão

Identificamos, neste estudo, uma nova proposta de abordagem das questões relativas à proporcionalidade. Ressaltamos que o estudo de Proporcionalidade é feito antes do que o estudo de equações e, portanto, sem os seus recursos.

Há aqui a proposição de Lima, de que a definição de grandezas proporcionais deva permitir reconhecer as propriedades destas grandezas e a resolução de problemas de proporcionalidade. Assim, os autores caracterizam estas grandezas do mesmo modo que é proposto nas definições de Lima.

As grandezas diretamente proporcionais são caracterizadas de duas maneiras:

- pelo padrão fixo que relaciona as duas grandezas, ou seja, se uma for multiplicada por um número, a outra também o será;
- o valor de uma das grandezas é igual ao valor correspondente da outra, multiplicado sempre por um mesmo número.

As grandezas inversamente proporcionais são caracterizadas somente de uma maneira:

- pelo padrão que relaciona as duas grandezas, ou seja, se uma delas for multiplicada por um número (que não pode ser zero), a outra será dividida por esse mesmo número.

Observamos também que, neste livro, a proporção dá lugar a uma propriedade das grandezas diretamente proporcionais, para as quais há um padrão relativo à divisão de seus valores. Isto é, há a igualdade dos quocientes de suas medidas, que permite escrever, com os dados do problema, a equação fracionária $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$. Encontramos esta orientação em Ávila.

Assim, as caracterizações de grandezas direta e inversamente proporcionais justificam as técnicas que permitem resolver duas tarefas:

Tarefas	Nº de exercícios em que a tarefa é proposta	Técnicas
Estudo de proporcionalidade Total de exercícios propostos: 55		
Verificar a proporcionalidade	19	Condições de *f(x)* Verificar se a multiplicação de uma grandeza por um número implica: - na multiplicação da outra por este mesmo número: grandezas diretamente proporcionais; - na divisão da outra por este mesmo número: grandezas inversamente proporcionais; - nenhuma das alternativas anteriores: não há proporcionalidade.
Achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três quantidades conhecidas e proporcionais: Problemas de proporcionalidade	32	1)Operador escalar, e 2) Operador funcional , para grandezas diretamente proporcionais. 3) Uso do operador , para grandezas inversamente proporcionais.
Estudo de equações, tópico regra de três Total de exercícios propostos para tópico regra de três: 17		
Achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três quantidades conhecidas e proporcionais: Problemas de proporcionalidade.	13	Equação Regra de Três.

Salientamos que há o predomínio da tarefa **achar a quantidade desconhecida**, ou resolver problemas de proporcionalidade, pois esta aparece em 45 dos 72 exercícios propostos nos tópicos em que é trabalhada. Quanto às técnicas, ressaltamos que estas são apresentadas considerando a evidência, ou não, da relação entre os valores envolvidos nos problemas. Isto é, as técnicas estão relacionadas à complexidade da tarefa.

3.2 Observação em classe ordinária

A pesquisa de um trabalho desenvolvido por um professor em classe, ou seja, da prática de um professor, nos permite identificar os diferentes aspectos sobre o objeto de estudo, que o professor coloca em evidência. Isto nos possibilita fazer uma leitura das decisões tomadas em classe, com as quais visa o professor dar conta de certas condições de aprendizagem. Estas informações, comparadas ao projeto do professor, juntamente com o estudo dos livros didáticos, nos permitem explicitar a lacuna que existe entre o saber que é considerado oficialmente ensinado e o que é realmente ensinado.

Retomamos nossas questões de pesquisa:

- O objeto *proporção* tem lugar como objeto matemático no saber ensinado?
- Quais tarefas e técnicas são propostas como saber ensinado numa classe de 6ª série do Ensino Fundamental, ou seja, qual a relação da instituição 6ª série com o objeto *proporção*?

Delimitamos a observação ao ensino do objeto proporção, sem estendê-lo ao ensino de grandezas proporcionais ou regra de três.

3.2.1 Elementos teóricos e metodológicos da observação

O estudo de uma observação em classe ordinária nos leva a considerar o projeto do professor e o trabalho desenvolvido em classe. Optamos por analisar o projeto do professor em termos de macro-decisões, e o desenvolvimento efetivo da situação em classe em termos de micro-decisões.

As macro-decisões são aquelas tomadas para o cumprimento de programas. As micro-decisões são aquelas tomadas em classe. Conforme Comiti e Grenier,

> quando confrontamos sessões realizadas em classe com o cenário elaborado inicialmente, ou seja, com as intenções do professor antes do início da seqüência de estudo, constata-se a aparição, na situação em classe, de acontecimentos imprevistos pelo professor que o leva a tomar decisões imediatas, as quais são chamadas de micro-decisões. (COMITI e GRENIER, 1993 apud COMITI et al, 1995, p.94, tradução nossa)

O que é uma observação em classe ordinária? Conforme Coulange (2000), classe ordinária ou naturalista, significa trabalhar com um professor voluntário que aceita que suas 'práticas' sejam observadas antes, durante e depois das situações de ensino. "*A observação de classe 'ordinária' permite colocar em evidência os fenômenos ligados às tomadas de decisões do professor em ação*" (COMITI et al, 1995, p. 93, tradução nossa).

A metodologia de observação

A observação em classe ordinária, segundo Comiti et al (1995), consiste de:

- realizar uma primeira entrevista com o professor para estabelecer um contrato;
- colocar em prática um dispositivo para recolher os dados, permitindo o registro das informações;
- elaborar protocolos;
- modelar a situação, segundo o quadro teórico da pesquisa.

O contrato com o professor visa:

- estabelecer uma relação entre pesquisador/professor e observador/observado no campo da pesquisa e não do controle.
- estabelecer as condições da experimentação; a concepção e a gestão das sessões de ensino são de inteira responsabilidade do professor, sem intervenção do pesquisador, nem no momento da concepção, nem no momento da observação das sessões.

Os dados recolhidos são de dois tipos:

- dados internos, oriundos do interior da classe: notas do observador, registro de áudio das sessões em classe.
- dados externos, que se constituem de: plano de aula do professor, exercícios preparados e entrevista.

O plano de aula é fundamental para analisar o que foi previsto pelo professor e o que foi observado pelo pesquisador. A entrevista, antes da realização da aula propriamente dita, permite recuperar de maneira geral o que o professor pensa do tema, sua relação com o objeto, informações precisas sobre seu projeto de ensino, os métodos de ensino que o professor pretende por em prática, os objetivos definidos para aquela aula em particular e as escolhas feitas pelo professor.

O protocolo é o documento que permite reconstituir as situações da classe. Ele integra todo material escrito (produções) recolhido pelo observador, que ele julga relevante. Os protocolos são analisados, quando realizadas fragmentações que revelam “episódios” julgados significativos.

A modelagem da situação é feita por meio das análises da aula, que são de dois tipos:

- análise a priori da aula planejada pelo professor, que precede a realização da aula e é efetuada com base nas atividades e proposições de abordagem.
- análise a posteriori, que é feita sobre os protocolos. Consiste basicamente na interpretação dos acontecimentos recuperados no protocolo.

3.2.2 Estudo do projeto do professor

Sob esta rubrica, buscamos elementos que nos permitiram identificar o tratamento previsto, planejado, por um professor em uma classe de 6ª série, relativo à proporção. Esta observação foi realizada em uma escola pública de Florianópolis.

Recolha do material para estudo

Neste estudo utilizamos o plano de ensino e o plano de aula, bem como uma entrevista que fizemos com o professor antes da realização das aulas sobre *proporções*. Buscamos, assim, evidenciar elementos relativos ao projeto do professor, em termos de macro-decisões, como anunciamos anteriormente.

Tratamento dado ao objeto proporção

O estudo de proporção é feito após o estudo de equações e sistemas. Proporção é definida como “a igualdade de razões”, razões que são tratadas como o quociente de dois números racionais. Vejamos o que diz o professor sobre *proporções*:

8[36]. Prof. No âmbito da 6ª série se define como igualdade de razões. Se ensina primeiro razões, mostra o que é razão, e que não é só fração, [...]. Aí já é comparação entre duas grandezas. [...] Mas primeiro você ensina: este está para....assim como..... E mostra o cálculo: se em cima multiplicou por 3, então embaixo também multiplica por 3. Vai dando os nomes antecedente e conseqüente.

Identificamos nesta fala do professor alguns elementos que caracterizam o objeto *proporção*: sua leitura, o nome dos termos e a relação que estabelece com frações equivalentes em "*se em cima multiplicou por 3, então embaixo também multiplica por 3*".

O plano de aula é elaborado pelo professor com base no livro didático de Giovanni, adotado como livro texto pela escola, e também com base em outros livros:

32. Prof. Na 6ª série eu praticamente sigo o livro texto. Mas dou exemplos que surgem na aula, com notas de prova, por exemplo: se de 10 acertou 8, qual a razão? Mas eu faço exercícios de outros livros também, que não tem no nosso livro. Eu seleciono, pois têm alguns que são repetitivos. [...]

No plano de aula há a representação da proporção na forma fracionária, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, e também na forma $3 : 4 = 6 : 8$. É dada, também, a designação dos termos *meios* e *extremos* e, a seguir, a propriedade fundamental das proporções:

Em toda a proporção, o produto dos extremos é sempre igual ao produto dos meios[...].
Esta propriedade é conhecida como propriedade fundamental das proporções.
Assim: Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $a \cdot d = b \cdot c$
Veja por quê:
Multiplicando cada membro da primeira igualdade por $b \cdot d$, temos
$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$.

Esta propriedade é apontada pelo professor, na entrevista, como um dos conhecimentos que considera indispensáveis no estudo de proporções:

[36] Esta numeração se refere aos protocolos da entrevista (anexo B).

48. Prof. Tem de saber o que é razão, proporção. Depois, que eles resolvam aqueles problemas, mas a gente tem que ensinar antes como calcular. Por isto que eu não vou dar muito propriedades de proporção. Bato mais é na propriedade fundamental. Tem que saber isto.

3.2.3 Análise a priori dos exercícios propostos

Realizamos esta análise dos exercícios propostos no plano de aula do professor em duas etapas. Na primeira identificamos as tarefas aí propostas. Na segunda etapa resolvemos os exercícios por meio de diversas técnicas, o que permitiu um levantamento daquelas técnicas de resolução passíveis de serem utilizadas por alunos de 6ª série.

Organização matemática do projeto do professor

No plano de aula do professor são propostos 44 exercícios (anexo C), que agrupamos em 4 tipos de tarefas, algumas com variações. Apresentamos a seguir cada tarefa, o número de exercícios em que cada uma é proposta e um ou mais exemplos destes exercícios.

Tarefa 1 - Dada a proporção, calcular o produto dos extremos e o produto dos meios.

Exercício propostos: 3

Exemplo: *1) Em cada proporção, calcule o produto dos extremos e o produto dos meios.*

$$1a)\ \frac{3}{4} = \frac{30}{40}.$$

Tarefa 2 - Verificar se as igualdades são verdadeiras, usando a propriedade fundamental das proporções.

Exercícios propostos: 6

Exemplo: *2) Usando a propriedade fundamental das proporções, verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras.*

$$2a)\ \frac{2}{3}=\frac{24}{36} \qquad 2c)\ \frac{4}{5}=\frac{16}{25}.$$

Tarefa 3 - Achar qualquer termo da proporção

Exercícios propostos: 25

Tarefa 3.1 - valor desconhecido em um só termo.

Exercícios propostos: 12

Exemplo: *3)Determine o valor de x:*

$$3a)\ \frac{x}{4}=\frac{30}{20} \qquad 3c)\ \frac{1}{4}=\frac{x}{5}.$$

Tarefa 3.2 - dados a razão entre dois valores e um deles, achar o valor desconhecido.

Exercícios propostos: 8

Exemplo: *5)Em uma equipe olímpica, 25 atletas são rapazes. Qual é o número de moças, se a razão entre o número de rapazes e moças é* $\frac{5}{3}$*?*

Tarefa 3.3 - valor desconhecido em dois termos.

Exercícios propostos: 5

Exemplo: *4)Determine o valor de x em cada uma das proporções:*

$$4d)\ \frac{x}{6}=\frac{5-x}{9}.$$

Tarefa 4 - Achar dois valores desconhecidos, dadas a razão entre eles e sua soma ou subtração.

Exercícios propostos: 10

Tarefa 4.1 – valores desconhecidos na mesma razão.

Exercícios propostos: 6

Exemplo: *6)Os números x e y estão entre si assim como 2 está para 5. Isso significa que podemos escrever* $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$ *. Sabendo que a soma desses números é 140 (x + y = 140), determine-os.*

Tarefa 4.2 – valores desconhecidos nas duas razões.

Exercícios propostos: 4

Exemplo: *13) Determine os números x e y, sabendo que:*

13a) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ $e\ x+y=100$ *13b)* $\frac{x}{8}=\frac{y}{5}$ $e\quad x-y=30$

Ressaltamos que dos 44 exercícios propostos, 25 referem-se à tarefa 3, **achar qualquer termo da proporção**. Esta tarefa é referida pelo professor, na entrevista, como **calcular a proporção**. É um dos objetivos do plano de ensino: "*aplicar a propriedade fundamental para calcular o termo desconhecido de uma proporção* [...]". Destes 25 exercícios, 8 são contextualizados e 17 são enunciados do tipo "calcule o valor de *x*".

Análise a priori das técnicas de resolução

Este estudo é um levantamento das possíveis técnicas de resolução das tarefas propostas no plano de aula, passíveis de serem utilizadas por alunos de 6ª série. Consideramos como primeira técnica àquela sugerida no plano de aula e explicitamos as técnicas possíveis de serem usadas apenas por suas etapas iniciais.

Tarefa 1 - Dada a proporção, calcular o produto dos extremos e o produto dos meios.

Exemplo: *1a)* $\frac{3}{4}=\frac{30}{40}$

Técnica: calcular os produtos.

Tarefa 2 - Verificar se as igualdades são verdadeiras, usando a propriedade fundamental das proporções.

Exemplos: *2a)* $\frac{2}{3}=\frac{24}{36}$ *2c)* $\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$

Técnica: verificar a igualdade dos produtos dos meios e dos extremos.

Tarefa 3 - Achar qualquer termo da proporção

Tarefa 3.1 - valor desconhecido em um só termo

Exemplo: *3a)* $\frac{x}{4}=\frac{30}{20}$

Técnicas: 4 técnicas podem ser usadas na resolução.

a) Resolução da proporção-PF (propriedade fundamental): $\frac{x}{4}=\frac{30}{20} \Rightarrow 20x = 30.4 \Rightarrow \ldots$

Explicitada no plano de aula por um exemplo, se justifica na propriedade fundamental e também faz uso de equação:

> [...] podemos usar a propriedade fundamental das proporções. Observe:
>
> $$\frac{x}{4}=\frac{9}{6} \Rightarrow 6x = 4\cdot 9 \Rightarrow 6x = 36 \Rightarrow x = 6\,.$$

b) Frações equivalentes: $\frac{x}{4}\overset{\times 5}{\underset{\times 5}{=}}\frac{30}{20} \Rightarrow x = 6$

Esta técnica tem alcance reduzido, pois depende da relação entre os valores envolvidos no exercício. Seu uso não é previsto, por exemplo, para os exercícios *3c)* $\underset{\times ?}{\frac{1}{4}=\frac{x}{5}}$ ou *4b)* $\underset{\times ?}{\frac{3{,}6}{2{,}4}=\frac{x}{0{,}2}}$. Ela pode ser aplicada em 6 dos 12 exercícios propostos para esta tarefa. Esta técnica pode ser considerada uma variação dos "operadores" de Vergnaud[37]. Porém, Vergnaud (1983) se refere

[37] Ver páginas 65 a 67, item 2.2.3, capítulo 2.

aos operadores em situações que envolvem medidas de grandezas proporcionais e não expressa a relação entre elas por meio da igualdade de razões ou frações, como aqui.

c) Equação - operações inversas: $\frac{x}{4} = \frac{30}{20} \Rightarrow \quad x = \frac{30 \cdot 4}{20} \Rightarrow ...$

d) Equação – mmc (mínimo múltiplo comum): $\frac{x}{4} = \frac{30}{20} \Rightarrow \frac{5x}{20} = \frac{30}{20} \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow ...$

Tarefa 3.2 - dados a razão entre dois valores e um deles, achar o valor desconhecido

Exemplo: *5)Em uma equipe olímpica, 25 atletas são rapazes. Qual é o número de moças, se a razão entre o número de rapazes e moças é* $\frac{5}{3}$*?*

Técnicas: Não explicitada no plano de aula, apenas sugerida. Podem ser usadas 4 técnicas, a partir de uma etapa inicial de formulação da proporção:

- representação do número de moças por *x*;
- formulação a proporção, considerando a razão 5 rapazes para 3 moças: $\frac{5}{3} = \frac{25}{x}$.

A partir desta etapa, recai nas 4 técnicas previstas para a tarefa **3.1**. A técnica das frações equivalentes, pela mesma justificativa dada para na tarefa **3.1**, pode ser aqui aplicada em 7 dos 8 exercícios propostos.

Tarefa 3.3 - valor desconhecido em dois termos

Exemplo: *4d)* $\frac{x}{6} = \frac{5-x}{9}$

Técnicas: 2 técnicas podem ser usadas na resolução.

a) Resolução da proporção-PF: $\frac{x}{6} = \frac{5-x}{9} \Rightarrow 9x = 6(5-x) \Rightarrow 9x = 30 - 5x \Rightarrow ....$

b) Equação -mmc: $\frac{x}{6} = \frac{5-x}{9} \Rightarrow \frac{3x}{18} = \frac{2(5-x)}{18} \Rightarrow 3x = 10 - 2x \Rightarrow ...$

Na entrevista o professor faz a relação entre este tipo de proporção e equação fracionária, estudada anteriormente. Isto sugere a possibilidade do uso da técnica do mínimo múltiplo comum (mmc) na resolução desta tarefa:

> 16. Prof. [...] Às vezes a gente faz equações do tipo $\frac{x+1}{2} = \frac{3x}{5}$. Não deixa de ser uma proporção. Vamos achar o mínimo múltiplo comum. Se a gente quisesse, pela propriedade fundamental chegaria ao resultado. Mas quando chega lá [em proporção] eu mostro que poderia ser feito assim, como se aprendeu em equações.

Tarefa 4 - Achar dois valores desconhecidos, dadas a razão entre eles e sua soma ou subtração

Tarefa 4.1 – valores desconhecidos na mesma razão

Exemplos:

6)Os números x e y estão entre si assim como 2 está para 5. Isso significa que podemos escrever $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$*. Sabendo que a soma desses números é 140 (x + y = 140), determine-os.*

7) Na classe de André há 36 alunos. Se a razão entre o número de meninos e meninas dessa classe é $\frac{4}{5}$*, quantos são os meninos e quantas são as meninas?*

Técnicas: 3 técnicas podem ser usadas na resolução.

a) Expressão da proporção e da outra equação, no caso do exercício 7):

- representação do número de meninos por *x* e de meninas por *y*;
- formulação da proporção, considerando a razão 4 meninos para 5 meninas: $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$;

- formulação da outra equação, considerando que a soma de meninos e meninas é 36: $x + y = 36$.

A partir desta etapa, a técnica é válida também para o exercício 6:

- aplicação da propriedade fundamental na proporção: $5x = 4y$;
- resolução do sistema: $\begin{cases} x + y = 36 \\ 5x = 4y \end{cases} \Rightarrow \ldots$

Explicitada, no plano de aula, na resolução do exemplo que introduz a resolução de problemas:

> [...] Daí, formamos a proporção: $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$
> Aplicando a propriedade fundamental da proporção, temos: $3x = 2y$
> Então, $\begin{cases} x + y = 35 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$ [...]

b) Frações equivalentes e soma dos termos a cada etapa, até encontrar o valor procurado: $\underset{s\,9}{\frac{4}{5}} = \underset{s\,18}{\frac{8}{10}} = \underset{s\,27}{\frac{12}{15}} = \underset{s\,36}{\frac{16}{20}}$. Resp.: 16 meninos e 20 meninas.

c) Multiplicador entre a soma dos termos da razão e o valor total – cálculo mental: *4 mais 5 é igual a 9, 9 para 36 o multiplicador é 4, então 4 vezes 4 é igual a 16 e 4 vezes 5 é igual a 20. 16 mais 20 é igual a 36.*

Para as técnicas b) e c) valem as observações feitas para a técnica “frações equivalentes” da tarefa **3.1**. Estas técnicas são previstas somente para *x* e *y* inteiros e não é provável que sejam aplicadas a números grandes. Podem ser previstas para 5 dos 6 exercícios propostos para esta tarefa.

Tarefa 4.2 – valores desconhecidos nas duas razões

Exemplo: *13) Determine os números x e y, sabendo que:*

$$a)\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad e\ x + y = 100 \qquad b)\ \frac{x}{8} = \frac{y}{5} \quad e \quad x - y = 30$$

Técnicas: 2 técnicas podem ser usadas, sendo as mesmas previstas para a tarefa **4.1**, itens a) e c).

a) Propriedade fundamental na proporção e sistemas.

b1)Multiplicador entre a soma dos termos da razão e o valor total, para exercício 13a.

b2) Multiplicador entre a diferença dos termos da razão e o valor total – cálculo mental, para exercício 13b: *8 menos 5 é igual a 3, 3 para 30 o multiplicador é 10, então 8 vezes 10 é igual a 80 e 5 vezes 10 é igual a 50, e 80 menos 50 é igual a 30*.

Valem aqui as observações feitas para técnica "multiplicador" da tarefa **4.1**. Esta técnica pode ser aplicada em todos 4 exercícios propostos para esta tarefa.

O estudo do projeto do professor juntamente com a análise a priori dos exercícios propostos, em termos de tarefas e das técnicas passíveis de serem utilizadas pelos alunos, nos serviu de referência no estudo da situação em classe, que apresentaremos a seguir.

3.2.4 Estudo da situação em classe - as aulas sobre proporção

Este estudo se apóia nos protocolos, que são as notas das observadoras e o registro de áudio das aulas. Evidenciamos algumas questões relativas ao tratamento dado pelo professor à proporção. Também identificamos questões relativas às técnicas de resolução das tarefas propostas, tanto no trabalho do professor quanto no dos alunos.

Quando duas razões são iguais?

Ao iniciar o estudo de proporção e defini-la como “igualdade de razões”, o professor parte de uma situação-problema: *Fernando e Alexandre apostaram juntos numa loteria esportiva e foram premiados. Como eles devem dividir o prêmio de R$ 500.000,00, se as importâncias que Fernando e Alexandre apostaram estão na razão de 2 para 3?*

Em sua resolução, apresenta a “igualdade das razões” apoiado no conceito de frações equivalentes:

> 1-07[38]. Prof. Cada um entrou com uma quantidade de dinheiro quando fizeram a aposta. O que eles apostaram está na razão 2 para 3. Ou seja, um pode ter apostado R$ 20,00 e outro R$ 30,00. Basta ver que é só pegar o 2 e multiplicar por 10 e o 3 e multiplicar por 10, que continua a mesma razão. Um poderia ter apostado 40 e o outro 60.
>
> Quadro- F, A > 500.000 $\qquad \frac{2^{\times 10}}{3_{\times 10}} = \frac{20}{30} = \frac{40}{60}$
>
> [...]1-14. Obs.O professor volta ao quadro, continuando a partir do que já havia escrito:
>
> Quadro: $\frac{2^{\times 10}}{3_{\times 10}} = \frac{20}{30} = \frac{40}{60} = \frac{200.000}{300.000}$.
>
> 1-15. Prof. Se você for multiplicando esta razão por 10, depois por 10, depois por 10, você vai chegar ao ponto em que vai dar 200 mil e o outro vai dar 300 mil. É só ir fazendo a razão, e multiplicando vai dar sempre a razão equivalente.
>
> [...]1-20. Prof. Como 2 está para 3 é uma razão e isto (mostra $\frac{200.000,00}{300.000,00}$) é outra razão, então a igualdade entre 2 razões forma uma proporção.

Temos aqui uma técnica que permite realizar a tarefa **verificar se há igualdade das razões**, ou **se a igualdade é uma proporção**, não prevista no projeto do professor e que este não

[38] Esta numeração refere-se aos protocolos (anexo D): o primeiro número (1) refere-se à aula observada e o segundo número (07) refere-se à seqüência dos acontecimentos nesta aula.

irá institucionalizar. Como vimos anteriormente, é no estudo da propriedade fundamental que **verificar se a igualdade é uma proporção** será institucionalizada como uma tarefa, a tarefa 2.

A propriedade fundamental

De acordo com o projeto do professor, esta propriedade é ressaltada:

> 1-55. Prof. Agora vem a propriedade mais importante das proporções. Existem outras propriedades, mas nós vamos estudar somente esta. [...] A propriedade fundamental vocês não podem esquecer mais, porque você vai precisar para resolver outros problemas também. Temos no futuro outras unidades para as quais você vai precisar aplicar as propriedades das proporções [...]. Muitos problemas que vamos resolver aqui na sala, vamos fazer com aplicação desta propriedade.

O professor representa esta propriedade com as "setas" que indicam a multiplicação dos termos da proporção, que será utilizada por ele, daí em diante:

> 1-88. [...] Quadro:

$$\begin{array}{r} 120 \\ \frac{3}{4} = \frac{30}{40} \\ 120 \end{array}$$

Uma técnica de equações

Para a tarefa 3.3 **achar qualquer termo da proporção, com valor desconhecido em dois termos da proporção**, o professor apresenta a técnica que institucionaliza, **resolução da proporção-PF** (propriedade fundamental). Para um mesmo exercício, também apresenta a igualdade como uma equação, resolvendo pela técnica **mmc**, que já foi estudada anteriormente pelos alunos. Faz isto para apenas este exercício, como um exemplo:

> 2-14. Prof. Como equação, fazemos o mínimo múltiplo comum.

$$\frac{x}{6} = \frac{5-x}{9}$$
$$\frac{3x}{18} = \frac{2(5-x)}{18}$$
$$3x = 10 - 2x$$
$$3x + 2x = 10$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

A técnica "multiplicador"

Identificamos o uso da técnica b2) **multiplicador entre a diferença dos termos da razão e o valor total**, na tarefa 4.2 **achar dois valores desconhecidos, dadas a razão entre eles e sua soma ou subtração, valores desconhecidos nas duas razões**.

> **Exerc.14**: *A razão entre dois números é* $\frac{7}{3}$*. Sabendo que a diferença entre eles é 40, quais são esses números?*
>
> 4-22. AlunoV. 7 e 3, a diferença é 4. [...] Então dá... 70 e 30.

A técnica das frações equivalentes

Ao iniciar a resolução de problemas, novamente o professor utiliza frações equivalentes para mostrar a igualdade de razões, na resolução da tarefa 4.1 **achar dois valores desconhecidos, dadas a razão entre eles e sua soma ou subtração, com valores desconhecidos na mesma razão**:

> 2-28. Prof. De uma caixa com 35 bombons, para cada 2 bombons comidos por Carina, Giuliano comeu 3. Conseqüentemente, se ela comeu 4 bombons, ele comeu 6. Se ela comeu 6, ele comeu quanto?
>
> Quadro: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{?}$
>
> [...] 2-31. Prof. Preste atenção! Se ela comeu 2, ele comeu 3. Se ela comeu 4, ele comeu 6. Você multiplicou por 2.

Quadro: $\frac{2^{x2}}{3_{x2}} = \frac{4}{6}$

2-32. Prof. E se ela comer 6?

2-33. Aluno V. Ele vai comer 9, porque 3 vezes 2 dá 6 e 3 vezes 3 dá 9!

2-34. Prof. Se ela comeu 20, ele vai comer quanto?

2-35. Aluno D. 30.

Após esta explicação, o professor institucionaliza, para esta tarefa, a técnica **expressão da proporção e da outra equação - aplicação da propriedade fundamental na proporção e resolução do sistema**. Porém, em sua apresentação do problema, justifica a técnica de resolução **frações equivalentes** possível de ser utilizada da resolução das tarefas 3.1 e 3.2 **achar qualquer termo de uma proporção,** e da tarefa e 4.1 **achar dois valores desconhecidos**. Esta técnica, como já vimos, tem um alcance reduzido, e não é institucionalizada pelo professor. Porém, é utilizada por alguns alunos na resolução do problema apresentado pelo professor:

Problema: De uma caixa com 35 bombons, para cada 2 bombons comidos por Carina, Giuliano comeu 3. Quantos bombons comeu cada um?

2- 47. Obs. Aluno T. conversa com o professor. Este dirige-se à turma e explica a maneira como Aluno T. resolveu o problema.

Quadro: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{14}{21}$

Soma 5b 10b 15b 35b.

O professor explica o alcance reduzido desta técnica, e orienta para utilização daquela que institucionalizou:

2-50.Prof. [...] Então, ele [aluno T] só foi fazendo razões, sempre a mesma razão. Conclusão: você achou o resultado. Você pode fazer assim? Pode! Vai mantendo a proporcionalidade, não tem problema nenhum. [...] E assim T. foi multiplicando e chegou a 35, que é a quantidade de bombons que deu 14 para 21. Você pode fazer assim? Pode! Eu aconselho você a fazer assim? Não! Porque não? Porque o problema, se os resultados não forem números inteiros, forem números decimais, será muito mais difícil de encontrar. [...] Você pode fazer assim, não tem problema nenhum. Só que eu aconselho, sinceramente, você fazer usando sistemas. [...]

Mesmo após estas orientações os alunos continuam usando a técnica **frações equivalentes** para resolver o problema 5, que corresponde à tarefa 3.2 **dados a razão entre dois valores e um deles, achar o valor desconhecido**, e para resolver o problema 6, que corresponde à tarefa 4.1 **achar dois valores desconhecidos**:

5)*Em uma equipe olímpica, 25 atletas são rapazes. Qual é o número de moças, se a razão entre o número de rapazes e moças é* $\frac{5}{3}$*?*

6) *Os números x e y estão entre si assim como 2 está para 5. Isso significa que podemos escrever* $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$. *Sabendo que a soma desses números é 140 (x + y = 140), determine-os.*

2-62. AlunoV. A questão 5 eu fiz assim: 25 dividido por 5 dá 5 e 3 vezes 5 dá 15. A questão 6 eu fiz assim: 2 e 5. Aí eu multipliquei 2 vezes 20, que deu 40 e 5 vezes 20, que deu 100. 100 mais 40 dá 140. [...]

O uso desta técnica é explicitado na resolução destes problemas no quadro:

2-73. [...]

Quadro. Aluno T:

5) $\frac{5}{3}$ $3 \times 5 = 15$

15 moças.

Aluno V:

quarenta

6) $\frac{2^{\times 20}}{5_{\times 20}} = \frac{40}{100}$

cem

O professor se dirige ao aluno V:

2-78. Prof. Você não armou o sistema, você só usou a proporção, de modo que a soma dos 2 desse 140. Alguém fez o sistema?

A aluna H. vai ao quadro e resolve como o professor pediu. Este se dirige à classe:

> 2-82. Prof. Na próxima unidade que é regra de três, principalmente para o pessoal que gosta de fazer direto, tem muitos problemas que também podem ser feitos [desta maneira], mas tem de tomar cuidado, como eu disse, porque certas proporções você não consegue fazer. [...] O conselho que eu dou é o pessoal começar a aprender passo a passo. Eu estou considerando fazer na prova do jeito que muita gente está fazendo, mas até certo ponto, depois não considero mais, e considero errado.
>
> [...] 2-84. Prof. Se eu der o problema "utilize proporção e sistema", tem de fazer como eu pedi e não como você quer. Se eu puser "resolva o problema", é outro caso, pois você resolve como quiser.

3.2.5 Conclusão da observação em classe

Nesta observação em classe identificamos um tratamento de proporções semelhante aquele dado por Quintella e Giovanni, pois é feita a partir da definição de proporção como "*a igualdade de razões*", de sua representação: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, e da propriedade fundamental: "*em toda a proporção, o produto dos extremos é sempre igual ao produto dos meios*".

O estudo da organização matemática do projeto do professor nos permitiu agrupar os 44 exercícios propostos no plano de aula em 4 tipos de tarefas e suas variações, para os quais identificamos as técnicas institucionalizadas pelo professor e apontamos outras possíveis técnicas de resolução:

Tarefas/nº de exercícios	Técnica institucionalizada	Outras possíveis técnicas de resolução
1 - Dada a proporção, calcular o produto dos extremos e o produto dos meios. (3)	Calcular os produtos	----------------------
2 - Verificar se as igualdades são verdadeiras, usando a propriedade fundamental das proporções. (6)	Verificar a igualdade dos produtos dos meios e dos extremos.	----------------------
3 - Achar qualquer termo da proporção (25)*	-----------	-----------------------
3.1 - valor desconhecido em um só termo (12)	Resolução da proporção-PF (propriedade fundamental)	-Frações equivalentes. -Equações -operações inversas. -Equações - mmc (mínimo múltiplo comum)
3.2 - dados a razão entre dois valores e um deles, achar o valor desconhecido (8)	Formulação e Resolução da proporção- PF	-Frações equivalentes. -Equações -operações inversas. -Equações - mmc
3.3 - valor desconhecido em dois termos (5)	Resolução da proporção-PF	-Equações – mmc.
4 - Achar dois valores desconhecidos, dadas a razão entre eles e sua soma ou subtração. (10)*	-----------	-------------------------
4.1 – valores desconhecidos na mesma razão (6)	Expressão da proporção e da equação, aplicação da propriedade fundamental na proporção e resolução do sistema.	-Frações equivalentes. -Multiplicador entre a soma dos termos da razão e o valor total.
4.2 – valores desconhecidos nas duas razões (4)	Aplicação da propriedade fundamental na proporção e resolução do sistema.	-Multiplicador entre a soma/diferença dos termos da razão e o valor total.

* Número total de exercícios propostos nestes tipos de tarefas.

Deste estudo, salientamos a predominância da tarefa 3 **achar qualquer termo da proporção**, que é proposta em 25 dos 44 exercícios. É relevante, também, o estudo da propriedade fundamental das proporções, pois esta justifica as técnicas institucionalizadas pelo professor para resolução de todas as tarefas.

O mesmo tratamento das questões relativas à proporção, em termos de definição, representação, propriedades, tarefas e técnicas, proposto no projeto do professor, é evidenciado pelo estudo da situação em classe. Porém, quanto às técnicas não institucionalizadas pelo professor, observamos que:

- A técnica **mínimo múltiplo comum**, não é institucionalizada, mas é apresentada pelo professor. Não identificamos seu uso pelos alunos.
- A técnica **multiplicador** não é prevista no projeto do professor e nem é por ele sugerida em momento algum das aulas, porém, identificamos seu uso por um aluno.
- A técnica **frações equivalentes**, não prevista no projeto do professor, acaba por ser sugerida por ele, ao exemplificar a igualdade das razões na definição de proporção. O uso desta técnica pelos alunos, um acontecimento não previsto pelo professor, o leva a manifestar-se sobre seu alcance reduzido na resolução de certos exercícios e a explicitar que, em prova, não irá admití-la na resolução de todos os exercícios. Dos 44 exercícios propostos, 18 podem ser resolvidos por esta técnica e 8 evidenciam suas limitações.

Ressaltamos que estas técnicas não se justificam na propriedade fundamental das proporções.

3.3 Conclusão do capitulo 3

No estudo dos livros didáticos, identificamos um tratamento formal do objeto proporção em Quintella e Giovanni, sendo a abordagem deste último semelhante à de Quintella. Nestes há a definição de *proporção* como “igualdade de duas razões” e são apresentadas suas propriedades. A tarefa **achar qualquer termo de uma proporção**, cuja técnica de resolução é justificada pela propriedade fundamental das proporções: *o produto dos extremos é igual ao produto dos meios*, torna-se uma etapa da técnica de resolução de outras tarefas. Em Quintella, ela é proposta em 12 de 45 exercícios em que proporção é objeto de estudo, e em Giovanni é proposta em 15 de 26 destes exercícios.

Em Bigode, o estudo formal de proporções também aparece. É apresentado para justificar a técnica **resolução da proporção-PF** (propriedade fundamental), na resolução da tarefa **achar a quantidade desconhecida**. Do total de 36 exercícios em que esta tarefa aparece neste livro didático, apenas 7 são propostas após o estudo de proporções e da técnica resolução da proporção-PF.

Em Imenes e Lellis não há o estudo do objeto matemático proporções.

O estudo de *grandezas proporcionais* é encontrado em todos os livros didáticos, mas com abordagens diferentes. Quintella apresenta suas definições com base no coeficiente de proporcionalidade k e propõe 30 exercícios, dos quais 14 tratam da tarefa **dividir em partes proporcionais** e 11 de **achar a quantidade desconhecida**. Esta última tarefa também é trabalhada na **regra de três**, com 20 exercícios propostos.

Giovanni define números proporcionais em termos do coeficiente de proporcionalidade, e grandezas proporcionais conforme a definição 1 de Lima, ou seja, $f(nx)=nf(x)$ e $f(nx) = \frac{1}{n}f(x)$. Há 7 exercícios propostos no estudo destas grandezas, dos quais 5 se referem à tarefa **verificar a proporcionalidade**. A tarefa **achar a quantidade desconhecida é** trabalhada na **regra de três**, com 26 exercícios propostos.

Já Bigode e Imenes e Lellis, dão ênfase ao estudo das grandezas proporcionais, com as 2 definições de Lima: $f(nx)=nf(x)$ ou $f(nx)=\frac{1}{n}f(x)$ e $y=kx$ ou $y=k/x$, e a tarefa **achar a quantidade desconhecida** é aí proposta. Em Bigode, esta tarefa aparece em 36 dos 84 exercícios propostos nos tópicos em que é abordada. Em Imenes e Lellis, aparece em 45 dos 72 exercícios destes tópicos. Em Imenes e Lellis identificamos a tarefa **verificar a proporcionalidade**, como é sugerido por Lima, em 19 dos 43 exercícios propostos nos capítulos sobre *grandezas proporcionais*.

Apresentamos, a seguir, um quadro comparativo de tarefas e técnicas propostas nestes livros didáticos.

Tarefas	Técnicas			
	Quintella	Giovanni	Bigode	Imenes e Lellis
Achar qualquer termo de uma proporção	Resolução da proporção- PF (propriedade fundamental)	Resolução da proporção-PF	—	—
Achar 2 números desconhecidos, a partir de sua soma/ subtração/produto e da razão entre eles ou de 2 termos da proporção que formam. (resolver sistemas)	Propriedades 1 de proporções e Resolução da proporção- PF	Propriedades: 1ª , 2ª e Resolução da proporção-PF	—	—
Achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais. Problemas de regra de três: Simples – direta ou inversa Composta Problemas de porcentagem (somente em Quintella)	Formulação da proporção e Resolução da proporção- PF a partir de: 1) Coeficiente de proporcionalidade (k) 2) razões entre valores da mesma grandeza.	Direta: igualdade das razões e resolução da proporção-PF. Inversa: produto constante (k) e equação Produto das variações- resolução da proporção-PF.	1)operador escalar 2)equação da constante k 3)resolução da proporção -PF	1)Operador escalar, e 2) Operador funcional para grandezas diretamente proporcionais. 3) Uso do operador , para grandezas inversamente proporcionais. 4) Equação Regra de Três.
Dividir em partes proporcionais (direta ou inversa)	P1 de proporções, coeficiente de proporcionalidade e Resolução da proporção- PF	Coeficiente de proporcionalidade (D)Determinação de razões iguais (proporção), e Resolução da proporção-PF (I) Determinação do produto igual, equação.	—	—
Verificar a proporcionalidade	—	1)Condições de *f(x)* 2) Comparação das razões entre valores da mesma grandeza	—	Condições de *f(x)*

A análise deste quadro nos permite algumas considerações.

As tarefas nas quais *proporção* é objeto de estudo, as duas primeiras, não são apresentadas por Bigode, apesar deste apresentar o estudo de proporção. Em Imenes e Lellis esta ausência é evidente, pois não abordam *proporções*.

A regra de três, como técnica de resolução, só é proposta por Imenes e Lellis, que assim chamam a "equação" com a qual resolvem problemas de proporcionalidade. Em Quintella e Giovanni são apresentados "os problemas de regra de três", ou seja, uma tarefa.

A tarefa **achar a quantidade desconhecida**, ou problemas de regra de três, ou problemas de proporcionalidade, é a única abordada por todos e é, também, a que tem maior diversidade de técnicas.

Na observação em classe, que delimitamos ao ensino do objeto proporção, identificamos que este objeto tem um tratamento semelhante aquele dado por Quintella e Giovanni. Este último é o livro adotado pelo professor, embora outros livros também tenham sido usados na elaboração do plano de aula. Nesta observação, constatamos que é relevante o estudo da propriedade fundamental, pois esta justifica as técnicas de resolução institucionalizadas, e que predomina a tarefa **achar qualquer termo da proporção**, que aparece em 25 dos 44 exercícios propostos. Identificamos o uso de técnicas que não se justificam na propriedade fundamental das proporções, e que, portanto, não são institucionalizadas pelo professor.

Assim, no estudo destes livros didáticos e na observação em classe, identificamos elementos da relação da instituição 6ª série do Ensino Fundamental com o saber proporção. Há uma abordagem formal de proporções em Quintella e Giovanni, também adotada pelo professor. Outra abordagem é feita por Bigode, que trata da noção de proporcionalidade de maneira semelhante àquela sugerida por Lima, mas também apresenta um estudo formal de proporção. Outra abordagem, ainda, é feita por Imenes e Lellis, que seguem as orientações noosferianas de Ávila e Lima, no sentido de as questões relativas a proporções sejam ensinadas no contexto dos números reais, das igualdades e equações e de que a ênfase seja dada à noção de proporcionalidade.

Conclusão geral

Retomamos, agora, nossas questões de pesquisa:

Qual o habitat (lugar) e a função de *proporção* enquanto objeto matemático como saber a ensinar? O objeto *proporção* está presente como objeto matemático nas proposições noosferianas? O que propõe a noosfera em termos de tarefas e técnicas relativas ao objeto *proporção*?

Qual o habitat (lugar) e a função de *proporção* enquanto objeto matemático como saber ensinado? O objeto *proporção* tem lugar como objeto matemático no saber ensinado? Quais tarefas e técnicas são propostas como saber ensinado numa classe de 6ª série do Ensino Fundamental, ou seja, qual a relação da instituição 6ª série com o objeto *proporção*?

O objeto matemático " proporção" como saber a ensinar

O estudo histórico e o estudo das publicações noosferianas nos fornecem elementos sobre o habitat (lugar) e a função de *proporção* enquanto saber a ensinar. Nestes estudos encontramos duas abordagens das questões relativas à proporção: em uma, proporção é tratada como objeto matemático, e em outra, há o estudo da noção de proporcionalidade e de grandezas ou variações proporcionais, e o objeto matemático proporção não é presente.

A primeira abordagem de proporções é encontrada no estudo histórico e no tratado Trajano (1927). Proporção é tratada como objeto matemático desde tempos antigos. A teoria das proporções de Eudoxo, que consta em *Os Elementos* V-5, de Euclides, e que estabelece quando duas grandezas têm entre si a mesma razão, é uma referência importante: permitiu superar a crise causada pela descoberta dos incomensuráveis e, estudada ao longo da história, dá origem, no séc. XIX, ao sistema de números reais. No tratado Trajano, proporção também é estudada como objeto matemático, por meio de sua definição: *proporção é a igualdade de duas razões*, representação e da propriedade: "*o produto dos meios é igual ao produto dos extremos*".

Esta abordagem também é caracterizada por elementos da organização matemática do objeto proporção em termos de tarefas e técnicas (anexo E, quadro 1), que identificamos tanto no estudo histórico quanto no tratado Trajano.

A tarefa **verificar a igualdade das razões**, na qual proporção é objeto de estudo, é encontrada no estudo histórico e aparece no tratado Trajano como **verificar se a proporção está certa**. As tarefas em que proporção é ferramenta de resolução, tais como **achar a quantidade desconhecida, quando são dadas três ou mais quantidades conhecidas e proporcionais**, ou **problemas de regra de três**, e **dividir em partes proporcionais**, bem como o método da falsa posição, no qual a proporção é condição para a existência de uma técnica, também aparecem destes dois estudos.

Uma segunda abordagem, mais recente, é encontrada nas publicações noosferianas de Ávila (1986) e Lima (1986, 1988, 1991, 1999). Nela, o objeto proporção não é presente. As questões relativas à proporção são tratadas no estudo da noção de proporcionalidade e de grandezas ou variações proporcionais e se inserem no contexto dos números reais, das igualdades e equações. Há um tratamento formal da proporcionalidade, como função matemática, no qual são apresentadas duas definições de grandezas proporcionais (Lima):

- $f(x)$ crescente e $f(n.x)=nf(x)$ (proporcionalidade direta), $f(x)$ *decrescente* e $f(n.x) = \frac{1}{n} f(x)$ (proporcionalidade inversa);

- $y = k.x$ (proporcionalidade direta), $y = k/x$ (proporcionalidade inversa); k contante de proporcionalidade.

Identificamos nesta abordagem tarefas que se referem, portanto, à proporcionalidade, tais como **verificar a proporcionalidade** e **achar a quantidade desconhecida,** ou “problemas de regra de três”, e cujas técnicas de resolução (anexo E, quadro 2) são justificadas pelas definições acima.

Temos, portanto, o objeto proporção presente na primeira abordagem, tanto quanto objeto de estudo como ferramenta na resolução de tarefas. Na segunda abordagem, há o estudo de grandezas proporcionais e da noção de proporcionalidade, e o objeto proporção não é mais presente. Salientamos que as tarefas **achar a quantidade desconhecida**, ou “problemas de regra de três”, e **dividir em partes proporcionais**, permanecem nas duas abordagens.

O objeto matemático “ proporção” como saber ensinado

O estudo dos livros didáticos e da observação em classe nos forneceu elementos sobre o habitat (lugar) e a função de *proporção* enquanto saber ensinado em classe de 6ª série.

No estudo de Quintella (1958) e de Giovanni (2000) identificamos um tratamento formal do objeto matemático proporção, com sua definição: *proporção é a igualdade de duas razões*, e propriedades e identificamos, também, o estudo de números e grandezas proporcionais. Nas tarefas e técnicas propostas (anexo E, quadro 3), proporção é objeto de estudo em algumas tarefas como, por exemplo, **achar qualquer termo de uma proporção**, e tem também a função de ferramenta de resolução de outras tarefas, como **achar a quantidade desconhecida**, ou “problemas de regra de três”, dentre outras. Assim, o tratamento de proporções nestes dois livros didáticos, bem como as tarefas e técnicas propostas, caracterizam uma abordagem de proporções semelhante à primeira abordagem das publicações noosferianas, ou seja, aquela dada pelo estudo histórico e pelo tratado Trajano.

Identificamos esta mesma abordagem na observação em classe. Proporção foi objeto de estudo em tarefas que são, com pequenas variações, as mesmas identificadas em Quintella e Giovanni: **achar qualquer termo de uma proporção** e **achar 2 números desconhecidos, a partir de sua soma/subtração e da razão entre eles ou de 2 termos da proporção que formam (resolver sistemas)**, cujas técnicas de resolução se justificam na propriedade fundamental das proporções. Identificamos, também, nesta observação, que os alunos fazem uso de técnicas que não foram previstas no projeto de ensino do professor, tais como **frações equivalentes** e a técnica **multiplicador** (basicamente um cálculo mental), embora estas técnicas tenham um alcance reduzido da resolução das tarefas.

Ainda no estudo dos livros didáticos identificamos uma segunda abordagem das questões relativas à proporção, em Bigode (2000). Este trata de grandezas proporcionais de maneira semelhante àquela sugerida por Lima, mas apresenta, também, um estudo formal de proporções. Justifica, assim, diferentes técnicas, como **operador escalar**, **equação da constante *k*** e **resolução da proporção-PF** (propriedade fundamental), que permitem resolver a tarefa **achar a quantidade desconhecida**, ou "problemas de proporcionalidade", que predomina neste livro didático.

Encontramos uma terceira abordagem em Imenes e Lellis (2002), que apresentam o estudo das grandezas proporcionais, seguindo as orientações propostas por Ávila e Lima. Neste livro não há, portanto, o estudo do objeto matemático proporção. Nesta abordagem são propostas as tarefas **verificar a proporcionalidade** e **achar a quantidade desconhecida**, ou "problemas de proporcionalidade" e técnicas de resolução, justificadas pelas definições de grandezas proporcionais, tais como **condições de *f(x)***, apresentada por Lima, **operador escalar**, **operador funcional** e **equação Regra de Três**.

Este estudo de elementos da organização matemática do objeto proporção nos permitiu identificar abordagens distintas sobre as questões relativas a este saber. Estas são encontradas tanto no saber a ensinar das publicações noosferianas, como também no saber ensinado dos livros didáticos de 6ª série.

Em uma primeira abordagem, a proporção existe como objeto matemático, objeto de estudo, e foi esta que identificamos em nossa observação em classe, embora tenham sido observadas as práticas de apenas um professor. Uma outra abordagem, mais recente, trata as questões de proporção no âmbito de grandezas proporcionais e da noção de proporcionalidade, na qual o objeto matemático proporção não está presente, ou seja, o objeto proporção não tem lugar como objeto matemático no saber ensinado. Uma outra abordagem, ainda, encontrada em um livro didático, é uma mescla das duas anteriores.

Estas constatações nos levam a sugerir estudos futuros, relativos às abordagens aqui encontradas:

-um estudo mais amplo da prática dos professores de 6ª série do Ensino Fundamental, que vise determinar a influência, sobre estas práticas, das diferentes abordagens encontradas nos livros didáticos;

-o estudo de outros conteúdos matemáticos que envolvam os saberes proporção e proporcionalidade, com o objetivo de precisar, sob o ponto de vista do formalismo matemático, qual das abordagens aqui identificadas tem continuidade.

Estas são algumas sugestões que visam aprofundar o estudo que apresentamos.

Referências bibliográficas

ARTAUD, M. *Cours Introduction à L'Aprroche Ëcologique du Didactique- L'Ecologie des Organizations Mathématiques et Didactiques.* Creshsto, Orléans, 1997.

ASSUD, T. *De L'Ecologie et de L'Economie D'un Système Didactique: Une Étude de Cas.* Recherches in Didactique des Mathématiques, vol 16, nº 1, pp.47-70, 1996.

ÁVILA, G. *Razões, proporções e regra de três*. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 8, p 1-8, 1986.

_____. *Ainda sobre a regra de três*. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 9, p 1-10, 1986.

BELL. E.T. *Historias de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica, 1985.

BIGODE, A. J. L. *Matemática hoje é feita assim*. (6) São Paulo: FTD, 2000.

BOYER,C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1974.

CARRAHER, T.N. CARRAHER, D.W. *Proporcionalidade na educação científica e matemática: desenvolvimento cognitivo e aprendizagem.* Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67 (157), 586-602; 1986.

CARRAHER, T.N. CARRAHER, D.W. SCHLIEMANN, A. D. e RUIZ, E. *Proporcionalidade na educação cientifica e matemática: quantidades medidas por razões.* Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67 (155), 93-107. 1986.

CARRAHER, T.N. CARRAHER, D.W. e SCHLIEMANN, A. D. *Proporcionalidade na educação científica e matemática: uma análise de tarefas piagetianas.* Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 67 (156), 367-79; 1986.

CHEVALLARD, Y. *La Transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* France: La pensée sauvage, 1991.

_____.*Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique.* Recherches in Didactique des Mathématiques, vol 12, nº 1, p.73-112, 1992.

_____. *Séminaire d´analyse et d´ingénierie didactiques*. IUFM d´Aix-Marseille. PCL2 de mathématiques. 1995-1996.

CHEVALLARD, Y.,BOSCH, M. GASCÓN,J. *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed, 2001.

COMITI C., GRENIER D. , MARGOLINAS C. *Niveaux de connaissances em jeu lors d´interactions em situation de classes et modélisation de phénomène didactiques.* in Arsac et al (coord). *Différents types de savoir et leur articulation,* pp 92-113. France: La Pensée Sauvage, 1995.

COULANGE, L. *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise em équation em classe de Troisième.* Tese de doutorado. Universidade Joseph Fourier – Grenoble 1. Grenoble, 2000.

DALMEDICO, A. D. e PEIFFER, J. *Une histoire des mathématiques*. Paris: Èditions du Seuil, 1986.

D'AMBRÓSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação matemática*. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

_____. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas, SP: Papirus, 1996.

EUCLIDES. *Elementos de Geometria*, adicionados e ilustrados por Roberto Simson. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

EUCLID. *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. 2ª ed. Vol. II, books III-IX. New York: Dover Publ, Inc, 1956.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1995

GIOVANNI & GIOVANNI JR. *Matemática pensar e descobrir : novo* (6) São Paulo : FTD, 2000.

HEATH, T. A History of Greek Mathematics. Vol. 1 From Thales to Euclid. New York: Dover Publ, Inc, 1981.

IMENES, L M. LELLIS, M. *Matemática para todos*. 6ª série, 3º ciclo. São Paulo, Scipione, 2002.

LIMA, E L. *Que são grandezas proporcionais?* Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 9, p 21-29, 1986.

LIMA, E L. *Novamente a proporcionalidade*. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n.12, p 8-12, 1988.

LIMA, E.L. *Meu professor de matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. Coleção do professor de matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

MAGALHÃES, V. P. de. *A Resolução de problemas de proporção e sua transferência entre diferentes conteúdos*. 1990. 99 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva)- Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1990.

NEYRET, R. *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants: nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres.* Tese de doutorado. Universidade Joseph Fourier – Grenoble 1. Grenoble, 1995.

PCNs- Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática para o Ensino Fundamental – MEC, 1998.

PCSC- Proposta Curricular de Santa Catarina – Educação Infantil e Ensino Fundamental e Médio – Disciplinas Curriculares - Matemática – 1998

PINHEIRO, T F. *Aproximação entre a ciência do aluno na sala de aula da 1ª série do 2º grau e a ciência dos cientistas: uma discussão*. 1996. 151 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1996.

QUINTELLA, A. *Matemática-terceira série ginasial*. 32. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1958.

SMITH, D.E. *History of Mathematics*. Special Topics of Elementary Mathematics. Vol. II. New York: Dover Publications, INC., 1958.

TRAJANO, A. *Arithmetica progressiva*.Curso completo theorico e pratico de arithmetica superior. 62 . ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1927.

TRINDADE, J A O. *Os Obstáculos Epistemológicos e a Educação Matemática*. 1996. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1996.

VERGNAUD, G. Multiplicative Strutures – in *Acquision of Mathematics concepts and processes*. Academia Press, New York, 1983.

VIZOLLI, I. *Porcentagem e Semiótica*. 2001. 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

Anexos

Anexo A

Roteiro da entrevista

1) Se você tivesse de explicar a um leigo o que é proporção, o que você diria?
2) Para você, sobre o plano matemático, o que representa proporção?
3) Qual é o interesse de proporção em matemática? Para que serve isto?
4) Quais os objetivos do programa de 6ª série, em geral, e quais são os objetivos do planejamento de 6ª série relativo à proporção?
5) No âmbito do programa de 7ª e 8ª séries, você vê noções matemáticas que têm relação com proporção?
6) Há alguma competência que você deseja, mais particularmente, desenvolver nos seus alunos, sobre proporção?
7) O que você deseja, como essencial, que os alunos retenham sobre proporção?
8) Quantas aulas você pensa dar sobre proporção?
9) Você já preparou as aulas? Tem alguma atividade que você pensa fazer já preparada?
10) Por que esta escolha? (se a resposta da questão 9 for sim)
11) Em que material (publicação, livro) você se apoiou para preparar a aula?
12) Você fez escolhas? O que você mudou? Em função de que?
13) Você fará ligações deste objeto proporção com outros mais adiante, que agora você ainda não ensinou?
14) Qual foi o último assunto estudado antes de entrar em proporção?
15) Quais são as principais dificuldades dos alunos sobre proporção?
16) Quais as noções matemáticas que você vai institucionalizar?

Anexo B

Protocolos da entrevista

7. E -Para você, sobre o plano matemático, como define proporção?

8. P – No âmbito da 6ª série se define como igualdade de razões. Se ensina primeiro razões, mostra o que é razão, e que não é só fração, que é só uma parte de proporção entre números inteiros. Aí já é comparação entre duas grandezas. Então mostra a igualdade entre duas razões para achar o elemento desconhecido. Basicamente é isso. Aí se parte para problemas práticos. Mas primeiro você ensina, este está para....assim como...., e mostra o cálculo: se em cima multiplicou por 3, então embaixo também multiplica por 3. Vai dando os nomes antecedente e conseqüente.

15. E -Quais são os objetivos do planejamento de 6ª série relativo à proporção? O conteúdo anterior de equação e sistemas é pré-requisito para o estudo de proporções?

16. P – Diretamente, não. Eu acho até que quando se vê equações, logo depois de equações, a gente poderia dar proporções, porque tem muitas equações que se põe na forma de frações. Mas é claro, resguardando a Unidade (conteúdo) que é Razão e Proporção. Por exemplo, em equações podemos dar $x/2 + x = (x+1)/4$. Mas as vezes a gente faz equações do tipo $(x+1)/2 = 3x/5$. Não deixa de ser uma proporção. Vamos achar MMC. Se a gente quisesse, pela PFP chega ao resultado. Mas quando chega lá (em proporção), eu mostro que poderia ser feito assim, como se aprendeu em equações.

31. E - Tem alguma atividade que você pensa fazer já preparada? Em que material (publicação, livro) você se apoiou para preparar a aula?

32. P – Na 6ª série eu praticamente sigo o livro texto. Mas dou exemplos que surgem na aula, com notas de prova, por exemplo: se de 10 acertou 8, qual a razão? Mas eu faço exercícios de outros livros também, que não tem no nosso livro. Eu seleciono, pois têm alguns que são repetitivos. Mas se eu quero fixar, sigo aquela lista.

45. E - Em relação à proporção, o que você espera que os alunos saibam? A gente ensina muita coisa, e eles não aprendem tudo que se ensina.

46. P – Em relação à proporção. Primeiro, o que é proporção. Para isto tem de saber o que é razão, primeiro. Então eles têm de saber o que é razão e o que é proporção. E para eles poderem fazer alguma aplicação, utilizando os exercícios que fizemos em sala. Passar a aprendizagem para aquilo lá [aplicação]. Eu posso resolver dessa maneira, eu posso aplicar a proporção neste tipo de problema? Isto que é o mais importante. Mas não é fácil. Eles estão numa idade que não é todo mundo que tem a vontade de aprender bem.

47. E - Mas estamos falando aqui do que a gente gostaria que eles soubessem, o que a gente espera que eles saibam.

48. P – Tem de saber o que é razão, proporção. Ta. Depois, que eles resolvam aqueles probleminhas, mas a gente tem de ensinar antes como calcular. Por isto que eu não vou dar muito propriedades de proporção. Bato mais é na PF. Tem de saber isto.

Anexo C

Exercícios propostos no plano de aula

1) *Em cada proporção, calcule o produto dos extremos e o produto dos meios.*

a) $\frac{3}{4}=\frac{30}{40}$ b) $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$ c) $\frac{2}{7}=\frac{8}{28}$

2) *Usando a propriedade fundamental das proporções, verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras:*

a) $\frac{2}{3}=\frac{24}{36}$ c) $\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$ e) $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$

b) $\frac{3}{7}=\frac{12}{28}$ d) $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$ f) $\frac{2}{5}=\frac{5}{2}$

3) *Determine o valor de x:*

a) $\frac{x}{4}=\frac{30}{20}$ b) $\frac{2}{x}=\frac{4}{3}$ c) $\frac{1}{4}=\frac{x}{5}$ d) $\frac{15}{25}=\frac{6}{x}$

4)Determine o valor de x em cada uma das proporções:

a) $\frac{7}{x}=\frac{28}{12}$ b) $\frac{3,6}{2,4}=\frac{x}{0,2}$ c) $\frac{\frac{1}{2}}{x}=\frac{\frac{5}{6}}{3}$ d) $\frac{x}{6}=\frac{5-x}{9}$

5) Determine o valor de x nas proporções:

a) $\frac{x-1}{3}=\frac{2x}{9}$ b) $\frac{x-4}{x}=-\frac{4}{3}$ c) $\frac{3x-1}{2}=\frac{x-3}{5}$ d) $\frac{2x}{5}=\frac{x-1}{1-\frac{1}{3}}$

<u>Problemas</u>

5) *Em uma equipe olímpica, 25 atletas são rapazes. Qual é o número de moças, se a razão entre o número de rapazes e moças é* $\frac{5}{3}$*?*

6) *Os números x e y estão entre si assim como 2 está para 5. Isso significa que podemos escrever* $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$. *Sabendo que a soma desses números é 140 (x + y = 140), determine-os.*

7) *Na classe de André há 36 alunos. Se a razão entre o número de meninos e meninas dessa classe é* $\frac{4}{5}$*, quantos são os meninos e quantas são as meninas?*

8) *Em uma empresa, 2 entre cada 9 trabalhadores ganham o salário mínimo. Sabendo que 350 trabalhadores dessa empresa não ganham o salário mínimo, determine:*

a) o número de empregados que ganham o salário mínimo;

b) o total de empregados dessa empresa.

Exercícios complementares

9) *Numa maquete, a altura de um edifício é de 80 cm. Qual é a sua altura REAL, sabendo-se que a maquete foi construída na escala 1:50?*

$$Escala = \frac{altura\ do\ edifício\ na\ maquete}{altura\ real\ do\ edifício}$$

10) *Um mapa está desenhado na escala 1: 10 000 000. Qual é, em quilômetros, a distância real entre Salvador e Maceió, se, no mapa, a distância entre elas é de 5 cm?*

11) *Determine o valor de x nas proporções:*

a) $\frac{x}{24} = \frac{5}{4}$ b) $\frac{x}{40} = \frac{6}{5}$ c) $\frac{5}{x} = \frac{25}{30}$ d) $\frac{28}{x} = \frac{7}{4}$

12) *Determine* ***x*** *e* ***y*** *na proporção* $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$*, sabendo que x + y = 20.*

13) *Determine os números x e y, sabendo que*

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad e \quad x + y = 100$ c) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \quad e \quad x + y = 140$

b) $\frac{x}{8} = \frac{y}{5} \quad e \quad x - y = 30$ d) $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} \quad e \quad x + y = 110$

14) *A razão entre dois números é* $\frac{7}{3}$*. Sabendo que a diferença entre eles é 40, quais são esses números?*

15) *Duas pessoas apostaram juntas numa loteria e ganharam R$ 60 000 000,00. Quanto coube a cada uma, se as importâncias que jogaram estão na razão* $\frac{2}{3}$*?*

16) *Na cantina da escola, de cada 4 refrigerantes vendidos, 3 são da marca A. Se foram vendidos 100 refrigerantes, quantos destes são da marca A?*

17) *Em uma escola há 280 alunos, e a razão entre o número de rapazes e de meninas é de* $\frac{2}{5}$*. Determine o número de rapazes e o número de meninas.*

18) *Numa bandeira, a altura está para o comprimento assim como 7 está para 10. Qual deve ser o comprimento de uma bandeira com 1,40 m de altura?*

19) *Em geral, num adulto, a altura da cabeça está para a altura do restante do corpo assim como 1 está para 7. Quanto mede uma pessoa cuja cabeça tem 20 cm de altura?*

20) *Os números 6, 16, x e 40 formam, nessa ordem, uma proporção. Nessas condições, determine o número x.*

Anexo D

Protocolos das aulas

Aula 1

Título 1 – a proporção no dia-a-dia

1-05.Aluno R. lê: *Fernando e Alexandre apostaram juntos numa loteria esportiva e foram premiados. Como eles devem dividir o prêmio de R$ 500.000,00, se as importâncias que Fernando e Alexandre apostaram estão na razão de 2 para 3?*
1-06. Obs-Prof. explica enquanto escreve.
1-07.Prof. – Cada um entrou com uma quantidade de dinheiro quando fizeram a aposta. O que eles apostaram está na razão 2 para 3. Ou seja, um pode ter apostado R$ 20,00 e outro R$ 30,00. Basta ver que é só pegar o 2 e multiplicar por 10 e o 3 e multiplicar por 10, que continua a mesma razão. Um poderia ter apostado 40 e o outro 60.

Quadro: F / A 500.000 $\qquad \frac{2^{\times 10}}{3_{\times 10}} = \frac{20}{30} = \frac{40}{60}$

1-08.Prof. O problema é o seguinte. Quero saber quanto é que cada uma vai receber se é proporcional ao valor que ele apostou, de acordo com o que ele apostou, correspondente ao que apostou.
1-09.Aluno R. lê: *Vamos chamar de* ***x*** *a importância que cabe a Fernando e de* ***y*** *a importância que cabe a Alexandre. Como a quantia que eles apostaram estão na razão* $\frac{2}{3}$ (lido 2 está para 3), *podemos escrever:* $\frac{2}{3} = \frac{x}{y}$ (lido 2 está para 3 igual a x está para y).
1-10.Obs-Prof. vai revisando e escrevendo no quadro, enquanto fala.
1-11.Prof. Então 2 está para 3 assim como *x*, a quantidade que Fernando vai receber, está para a quantidade que Alexandre vai receber. Então 2 está para 3 é igual a *x* está para *y*.
1-12. Aluno R. continua lendo: *É fácil concluirmos que:*

- *Fernando vai receber R$ 200 000,00.*
- *Alexandre vai receber R$ 300 000,00.*

1-13.Prof. Entenderam? Porque somando tem de dar 500 000. Como está na razão 2 para 3, o Fernando apostou menos dinheiro e Alexandre mais. Consequentemente, ele tem de receber mais do que o Fernando, e na razão, como nós estudamos. É evidente que se é 2 para 3, e se você multiplicar tudo por 100.000, vai achar 200.000 e 300.000.
1-14.Obs-Prof. volta ao quadro, continuando a partir do que já havia escrito:

Quadro: $\frac{2^{\times 10}}{3_{\times 10}} = \frac{20}{30} = \frac{40}{60} = \frac{200.000}{300.000}$.

1-15.Prof. Se você for multiplicando esta razão por 10, depois por 10, depois por 10, você vai chegar ao ponto em que vai dar 200 mil e o outro vai dar 300 mil. É só ir fazendo a razão, e multiplicando vai dar sempre a razão equivalente.
1-16.Obs-Prof. lê um trecho do texto, no qual está escrito:

Texto – *Portanto* $\frac{2}{3} = \frac{200.000,00}{300.000,00}$, *ou seja, dois está para três assim como duzentos mil reais está para trezentos mil reais.*
1-17.Prof., lendo- Portanto, 2 está para 3 é igual a 200 mil está para 300 mil. Ou seja, 2 está para 3 ASSIM COMO 200 mil está para 300 mil. Este sinal de igual é lido ASSIM COMO.
1-18.Aluno R. lê: *A igualdade entre as razões* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{200.000,00}{300.000,00}$ *é chamada de proporção.* (o texto ressalta a palavra proporção).
1-19.Obs-Prof. chama a atenção para proporção.
1-20.Prof. – Como 2 está para 3 é uma razão e isto (mostra $\frac{200.000,00}{300.000,00}$) é outra razão.

A propriedade fundamental das proporções
1-55.Prof . Agora vem a propriedade mais importante das proporções. Existem outras propriedades, mas nós vamos estudar somente este. Esta é fundamental, e além disto, as outras podem ser transferidas para a forma de problemas. Mas a propriedade FUNDAMENTAL vocês não podem esquece mais, porque você vai precisar para resolver outros problemas também. Temos no futuro outras unidades para as quais você vai precisar aplicar as propriedades das proporções, como PA e PG,com aplicação em certos exercícios, na comparação de razões. Muitos dos problemas que vamos resolver aqui na sala, vamos fazer com aplicação desta propriedade.
1-72. Prof. Então, o que importa para nós no momento, da propriedade fundamental, multiplicando o primeiro com o último, que são os extremos, o resultado tem de dar o mesmo de *b* vezes *c*, o produto dos meios. Se não der o mesmo resultado, não é proporção.

1-75. Prof. Na questão *a*, quanto dá o produto dos extremos?
1-76.Alunos. 90. Não! 120.
1-77.Prof. E o produto dos meios?
1-78.Alunos. 120.
1-79.Obs-Prof. repete a explicação, falando a propriedade.
1-80.Prof. 3 está para 4 assim como 30 está para 40. Quem são os extremos?
1-81.Alunos. 3 e 40.
1-82.Prof. E os meios?
1-83.Alunos. 4 e 30.
1-84.Prof. Então o produto, a multiplicação, dos extremos dá quanto?
1-85.Alunos. 120.
1-86.Prof. E o outro?
1-87.Alunos. 120.
1-88.Prof. 120 também. Se der o mesmo resultado, então isto forma uma proporção.

120

Quadro: $\frac{3}{4} = \frac{30}{40}$

120

Aula 2

2-11.Obs. Prof. Faz exercício 4d) e apresenta duas formas de resolver esta questão: usando a propriedade fundamental das proporções e como equação, e faz no quadro, explicando enquanto escreve.

$4d_1$)

2-12. Prof. Usando a propriedade fundamental das proporções:

$$\frac{x}{6} = \frac{5-x}{9}$$

– “5 menos x” é uma coisa só: $9 \cdot x = 6\,(5 - x)$

– Aplicando a propriedade distributiva: $9x = 30 - 6x$ (*)

– Usando operações inversas das equações: $9x + 6x = 30$

– Fazendo a adição de termos semelhantes: $15x = 30$ (**)

2-13.Obs-Prof. termina o cálculo: $x = \frac{30}{15}$ (***)

$x = 2$

$4d_2$)

2-14.Prof. Como equação: $\frac{x}{6} = \frac{5-x}{9}$

– Fazemos o mínimo múltiplo comum: $\frac{3x}{18} = \frac{2\left(5-x\right)}{18}$

– Obtemos uma equação equivalente a (*), pois dividida por 3: $3x = 10 - 2x$

– Então: $3x + 2x = 10$

– Também é uma equação equivalente a (**): $5x = 10$

2-15.Obs-Prof. termina o cálculo: $x = 2$

2-16.Obs-Prof. mostra que na questão $4d_1$, também poderia ter aparecido a etapa $5x = 10$. Volta em (***) e escreve: $x = \frac{30}{15} = \frac{10}{5}$. Diz também que de um jeito ou de outro é possível resolver.

2-26.Prof. Nós vamos usar agora a PFP na resolução de certos problemas.

2-27.Obs-O texto tem um problema como exemplo, seguido de sua resolução. Prof. lê parte do problema. A seguir, Prof. dá outras possíveis quantidades de bombons que estejam na mesma razão 2/3, por meio de frações equivalentes.

2-28.Prof. *De uma caixa com 35 bombons, para cada 2 bombons comidos por Carina, Giuliano comeu 3*. Conseqüentemente, se ela comeu 4 bombons, ele comeu 6. Se ela comeu 6, ele comeu quanto?

Quadro: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{?}$

2-29.Alunos. 12! 10! 9! 8!

2-30.Obs-Prof. retoma e repete, pois há muita discussão entre os alunos, sobre o resultado.

2-31.Prof. Preste atenção! Se ela comeu 2, ele comeu 3. Se ela comeu 4, ele comeu 6. Você multiplicou por 2.

Quadro: $\frac{2^{x2}}{3_{x2}} = \frac{4}{6}$

2-32.Prof. E se ela comer 6?

2-33.Aluno V. Ele vai comer 9, porque 3 vezes 2 dá 6 e 3 vezes 3 dá 9!
2-34.Prof. Se ela comeu 20, ele vai comer quanto?
2-35.Aluno- 30.
2-36.Obs-Prof. seguiu a explicação do que está no texto.
2-37.Prof. – Aqui você vai aplicar a PF. Então, como a caixa tem 35 bombons no total, então observe. A razão é 2 está para 3, certo? Se *x* é a quantidade que Carina comeu, *y* vai ser a quantidade que Giuliano comeu.

2-47.Obs-Aluno T. chama PROF. e os dois conversam. Prof. dirige-se à turma e explica a maneira como T. resolveu o problema.

Quadro: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{14}{21}$

Soma 5b 10b 15b 35b

2-48.Prof. A razão é 2 para 3. Se eu multiplico por 2 e aqui multiplico por 2, vou manter a razão, 4 para 6. Até aqui (2/3) os dois só comeram 5 bombons, ela comeu 2 e ele 3. se multiplicar por 2 vai ficar 4 e 6, ela comeu 4 e ele 6. Então, até aqui já comeram 10.
2-49.Aluno D. é por 7.
2-50.Prof. Se multiplicar por 3, vai dar 6 e 9 e ai já comeram 15 bombons. É mantida a proporção. Se multiplicar por 7, e embaixo também, 2 vezes 7 é igual a 14 e 3 vezes 7 é igual a 21, até aqui eles comeram 14 mais 21 igual a 35 bombons. Então, ele só foi fazendo razões, sempre a mesma razão. Conclusão: você achou o resultado. Você pode fazer assim? Pode! Vai mantendo a proporcionalidade, não tem problema nenhum. Se a caixa tivesse 5, já teria terminado aqui (em 2/3), se tivesse 10, ela comeria 4 e ele 6, se tivesse 15, ela comeria 6 e ele 9. Sempre a mesma razão: 2 para 3. E assim o T. foi multiplicando e chegou a 35, que é a quantidade de bombons que deu 14 para 21. Você pode fazer assim? Pode! Eu aconselho você a fazer assim? Não! Porque não? Porque o problema, se os resultados não forem números inteiros, forem números decimais, será muito mais difícil de encontrar.
Viu T.? Você pode fazer assim, não tem problema nenhum. Só que eu aconselho, sinceramente, você fazer usando sistemas. Porque? Porque é um método mais garantido, é a maneira correta de você fazer, matematicamente. Se nos problemas aparecer número decimal, é muito mais difícil você fazer por tentativas. Lembra aquele problema de loteria que fizemos no começo? Lá era fácil, era 500 mil. Agora imagina se fosse 442 mil e noventa centavos? Você faria assim? Aliás, em matemática não tem uma maneira única de fazer. O que aconteceu na última prova? Você sabia fazer muitos problemas assim, direto. Mas quando chegou na prova, não conseguir. Porque tem muitos que não dá para fazer assim, diretamente. E cada um tem a maneira correta de fazer.
Aqui nestes problemas estamos aplicando duas coisas. Aplicando proporção, ou seja, PFP e aplicando sistemas de equações para resolver problemas. E ai você resolve pelo método que você quiser. Mas é bom aprender como deve ser feito, porque certos problemas dão mais trabalho, se você for fazer direto assim.

2-61.Obs-Aluno V. pede para dizer como fez os problemas 5 a 7. Usa o método de frações equivalentes, como T. fez anteriormente.
2-62. AlunoV. A questão 5 eu fiz assim: 25 dividido por 5 dá 5 e 3 vezes 5 dá 15.
A questão 6 eu fiz assim: 2 e 5. Ai eu multipliquei 2 vezes 20, que deu 40 e 5 vezes 20, que deu 100. 100 mais 40 dá 140.

A questão 7 eu fiz assim: 4 está para 5, que dá 9. 8 está para 10, que dá 18, e 16 está para 20, que dá 36. Isto é a resposta. Então são 16 meninos e 20 meninas.
2-63.Obs-Alguns alunos discutem as soluções encontradas.

2-73.Obs-Prof. dá início a resolução dos problemas. Para isto, chama um aluno para resolver cada problema no quadro.
Probl.5 Aluno R. faz pelo método que Prof. ensinou. AlunoT. fez de outra maneira e Prof. pede que ele faça no quadro.

Quadro: AlunoR.

$$5)\ \frac{5}{3} = \frac{25}{x}$$

$$5x = 3.\ 25$$
$$5x = 75$$
$$x = \frac{75}{5}$$
$$x = 15$$

R = são 15 moças

Aluno T.

$$5)\ \frac{5}{3} \quad 3 \times 5 = 15$$

15 moças

2-74.Obs-Prof. pede que T. explique o que fez, que diga qual é o fundamento de sua resolução. T. tenta, mas não sabe explicar o que fez. Prof. não comenta.
2-75.Obs-Probl.6 Aluno V. vai ao quadro e escreve:
Quadro: quarenta

$$6)\ \frac{2^{\times 20}}{5_{\times 20}} = \frac{40}{100}$$

cem

terminou

2-76.Obs-Prof. pergunta a V. qual é a resposta.
2-77.AlunoV. Tá escrito lá, professor.
2-78.Prof. Você não armou o sistema, você só usou a proporção, de modo que a soma dos 2 desse 140. Alguém fez o sistema?
2-79.Obs-AlunoH. vai ao quadro e escreve:

Quadro: 6) $\begin{cases} x + y = 140 \\ 2x = 5y \quad (*) \end{cases}$

2-80.Obs-Prof. pergunta se os alunos entenderam porque deu $2x = 5y$ (*). Alguns alunos respondem que sim. Outros nada respondem. H. continua a escrever.

Quadro:

$$\begin{cases} x + y = 140 \quad (-2) \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$-2x - 2y = -280$$
$$2x - 5y = 0$$
$$-7y = -280$$
$$-y = \frac{-280}{7}$$

$$-y = -40$$
$$y = 40$$

$$x + y = 140$$
$$x + 40 = 140$$
$$x = 140 - 40$$
$$x = 100$$

2-81.Obs-Prof. pede a atenção da classe. Está preocupado com o fato de alguns alunos, como T. e V., continuarem a fazer uso de uma técnica mais simples para resolverem os problemas, ao invés de utilizarem sistema de equações.
2-82.Prof. Na próxima Unidade que é regra de três, principalmente para o pessoal que gosta de fazer direto, tem muitos problemas que também podem ser feitos [desta maneira], mas tem de tomar cuidado, como eu disse, porque certas proporções você não consegue fazer. [...] Com regra de três inversa é pior ainda. Com regra de três composta, aí mesmo que vai ser mais difícil. O conselho que eu dou é o pessoal começar a aprender passo a passo. (Fazer *direto* é fazer pelo método de frações equivalentes. Fazer *passo a passo* é a montagem do sistema e sua resolução) Eu estou considerando fazer na prova do jeito que muita gente está fazendo, mas até certo ponto, depois não considero mais, e considero errado.
2-83.Aluno V. Mas professor, como que antes não tinha problema?
2-84. (Prof. esclarece a diferença entre os tipos de questões que faz): Se eu der o problema "utilize proporção e sistema", tem de fazer como eu pedi e não como você quer. Se eu puser "resolva o problema", é outro caso, pois você resolve como quiser.
Na realidade o que você está fazendo aqui (aponta para a resolução que T. fez no quadro) é multiplicar este por este (3 por 5). É porque aqui, 25 dividido por 5 dá 5. Então multiplicou e deu 15. Está simplificando. Mas nem sempre é assim, eu já aviso. Por isso, alguns daqueles resolvidos assim, na última prova, deram tudo errado. Tem de tomar cuidado. É isto que tem de entender. O correto é do modo que H. fez. Usa a proporção e monta um sistema e então resolve.

Aula 4

4-17.Obs-Prof. dá as respostas para 13c e 13d, como também alguns alunos.
4-18.Prof. A maneira de fazer é a mesma: aplica a PF, monta o sistema e resolve. Não importa se pelo método da substituição ou adição. Todos os dois métodos você sabe.

Exerc.14 Texto: *A razão entre dois números é* $\frac{7}{3}$. *Sabendo que a diferença entre eles é 40, quais são esses números?*
4-19.Prof. A razão entre dois números é 7 para 3. Ou seja, *x* está para *y* assim como 7 está para 3. [...] Só que aqui não está colocado diretamente, está em forma de problema. Você transforma o problema num sistema, e aí resolve.
Qd. $\frac{x}{y} = \frac{7}{3}$ $\quad x - y = 40 \qquad \begin{cases} 3x = 7y \\ x - y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 7y = 0 \\ x - y = 40 \end{cases}$
4-20.Prof. Resolvendo, vai dar como resposta os números 70 e 30.
4-21.Obs-Enquanto Prof. faz no quadro, V. fala em voz baixa seu método de resolução.
4-22. Aluno V. 7 e 3, a diferença é 4. Que burro que fui. Então dá... 70 e 30.

Anexo E

Quadros comparativos: tarefas e técnicas

Quadro 1- Tarefas e técnicas relativas à proporção, identificadas no estudo histórico e no tratado Trajano.

História			Trajano		
Tarefa	FO	Técnica	Tarefa	FO	Técnica
Verificar igualdade de razões	O	-Subtração mútua -Igualdade de quocientes parciais	-Verificar se a proporção está certa -Achar qualquer termo de uma proporção	O	-Igualdade entre produto dos meios e produto dos extremos -Resolução da proporção.
-Problemas de regra de três -Divisão em partes proporcionais -Interpolação linear	F	Regra de três: -regra declarada sem explicação -regra vinculada à proporção Obs.:Algumas técnicas não foram identificadas	Achar a quantidade desconhecida -Problemas de regra de três -Divisão em partes proporcionais -Problemas de porcentagem	F	- Técnica geral Análise/Síntese -Regra de três: formulação das proporções -Formulação das proporções
Construção e divisão de segmentos	F	Semelhança de triângulos	____________	__	____________
Resolução de equações lineares	CE	Falsa posição	Problemas cujos valores formem uma proporção.	CE	Falsa posição Resolução da proporção.

1)FO- ferramenta/objeto. Nas tarefas, proporção ora é objeto de estudo, ora ferramenta de resolução.
2)CE-Condição p/ existência da técnica.

Quadro 2- Tarefas e técnicas relativas à proporcionalidade, identificadas nas publicações noosferianas de Ávila e Lima.

Tarefa	Técnica	
	Ávila	Lima
Verificar a proporcionalidade	---------	Condições de *f(x)*
Achar a quantidade desconhecida (problemas de regra de três)	Equação da constante *k*, de dependência entre as variáveis.	Equação da constante *k*, de dependência entre as variáveis
Divisão em partes proporcionais	----------	Equação da constante *k*, de dependência entre as variáveis

Quadro 3- Tarefas e técnicas identificadas nas nos livros didáticos Quintella (1958) e Giovanni (2000).

Tarefas	FO	Técnicas	
		Quintella	Giovanni
Achar qualquer termo de uma proporção	O	Resolução da proporção-PF (propriedade fundamental)	Resolução da proporção-PF
Achar 2 números desconhecidos, a partir de sua soma/ subtração/produto e da razão entre eles ou de 2 termos da proporção que formam. (resolver sistemas)	O	Propriedades 1 de proporções e Resolução da proporção- PF	Propriedades: 1ª , 2ª e Resolução da proporção-PF
Achar a quantidade desconhecida. Problemas de regra de três: Simples – direta ou inversa Composta Problemas de porcentagem	F	Formulação da proporção e Resolução da proporção- PF a partir de: 1) Coeficiente de proporcionalidade (*k*) 2) razões entre valores da mesma grandeza.	Direta: igualdade das razões e resolução da proporção-PF. Inversa: produto constante (*k*) e equação Produto das variações- resolução da proporção-PF.
Divisão em partes proporcionais (direta ou inversa)	F	P1 de proporções, coeficiente de proporcionalidade e Resolução da proporção-PF	Coeficiente de proporcionalidade (D)Determinação de razões iguais (proporção), e Resolução da proporção-PF (I) Determinação do produto igual, equação.
Verificar a proporcionalidade	F	___________	1)Condições de *f(x)* 2) Comparação das razões entre valores da mesma grandeza

1)FO- ferramenta/objeto. Nas tarefas, proporção ora é objeto de estudo, ora ferramenta de resolução.