

**DANIEL FERREIRA COUTINHO**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE E  
DESEMPENHO, E SÍNTESE DE CONTROLE  
PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS**

**FLORIANÓPOLIS**

**2003**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE E  
DESEMPENHO, E SÍNTESE DE CONTROLE  
PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

**DANIEL FERREIRA COUTINHO**

Florianópolis, Fevereiro de 2003.



# ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO, E SÍNTESE DE CONTROLE PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS

**Daniel Ferreira Coutinho**

'Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Automação e Sistemas*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.'

---

Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.  
Orientador

---

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.  
Presidente

---

Prof. Aguinaldo Silveira e Silva, Ph.D.

---

Prof. Alexandre Sanfelice Bazanella, Dr.

---

Prof. Carlos Emanuel de Souza, Dr.

---

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.



*Dedico este trabalho à minha esposa Rachel pela compreensão, apoio, carinho e dedicação durante a realização desta tese. Também gostaria de agradecer aos meus pais Leônidas (in memoriam) e Carmen Luisa pelo apoio durante minha vida acadêmica.*



### **Agradecimentos:**

Agradeço ao CNPq e Capes pelo suporte financeiro para a realização desta tese. Também agradeço à Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul pela liberação das minhas atividades como professor e, em especial, aos meus colegas Fernando Soares dos Reis e Luís Alves Pereira pelo incentivo e apoio para a realização deste trabalho. Finalmente, agradeço de coração ao suporte, dedicação, apoio e compreensão dados pelo meu orientador Prof. Alexandre Trofino e, sem esquecer, do Prof. Minyue Fu da Universidade de Newcastle, Austrália, durante o período em que estive sob sua orientação.



Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

# ANÁLISE DE ESTABILIDADE E DESEMPENHO, E SÍNTESE DE CONTROLE PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS

Daniel Ferreira Coutinho

Fevereiro/2003

Orientador: Alexandre Trofino, Dr.

Área de Concentração: Sistemas de Controle

Palavras-chave: controle robusto, funções de Lyapunov polinomiais, LMIs.

Número de Páginas: 113.

**RESUMO.** O presente trabalho apresenta uma técnica para análise de estabilidade e desempenho, e síntese de controladores para uma classe de sistemas não lineares incertos na qual os elementos das matrizes do sistema são funções racionais dos estados e parâmetros incertos do sistema. A metodologia proposta consiste na determinação numérica em termos de inequações matriciais lineares (ou LMIs) de funções de Lyapunov polinomiais dependente dos estados e parâmetros incertos. Como as condições de estabilidade são não globais, uma estimativa do domínio de atração do sistema não linear é também determinada considerando a maior curva de nível da função de Lyapunov pertencente a uma região politópica dada contendo a origem. Os resultados de análise são estendidos para sistemas não lineares sujeitos a saturação descritos por equações algébrico-diferenciais com algumas não linearidades não racionais. O desempenho do sistema não linear pode ser obtido dentro dos conceitos de taxa de convergência, custo garantido e ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entrada de perturbação/saída de interesse. Na síntese de controladores utiliza-se funções de Lyapunov quadráticas (isto é, funções quadráticas no estado e independentes dos parâmetros incertos) obtendo desta forma condições convexas de estabilização para uma lei de controle linear ou não linear. Para diminuir o possível conservadorismo da utilização de funções quadráticas é proposto uma etapa de análise adicional empregando funções de Lyapunov mais complexas. Vários exemplos numéricos são apresentados para ilustrar o procedimento e demonstrar a vantagem desta metodologia com relação às que empregam funções de Lyapunov quadráticas.



Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

# STABILITY AND PERFORMANCE ANALYSIS, AND CONTROL SYNTHESIS OF UNCERTAIN NONLINEAR SYSTEMS

Daniel Ferreira Coutinho

February/2003

Advisor: Alexandre Trofino, Dr.

Area of Concentration: Control Systems.

Keywords: robust control, polynomial Lyapunov functions, convex optimization.

Number of Pages: 113.

**ABSTRACT.** This thesis presents a technique to the stability and performance analysis, and control synthesis of uncertain nonlinear systems whose vector field is described by rational functions of the state and uncertain parameters. This method consists on the numerical computation of polynomial (parameter and state dependent) Lyapunov functions in terms of linear matrix inequalities (LMIs). As the stability conditions are not globally asymptotically stable (GAS), we also compute an estimate of the domain of attraction by considering the largest level set of the Lyapunov function inside a given polytopic region of the state space containing the origin. The analysis results are then extended to deal with nonlinear systems with saturation described by differential-algebraic equations with some non-rational nonlinearities. The performance analysis is obtained by considering the following concepts: (i) convergence rate (transient performance), (ii) guaranteed cost and (iii)  $\mathcal{L}_2$ -gain of the input-to-output operator. For the control design, we consider quadratic Lyapunov functions (i.e., quadratic functions on the state and parameter-independent) in order to obtain convex conditions in terms of LMIs. We then apply the proposed analysis techniques with polynomial Lyapunov functions to the closed-loop system obtaining less conservative results. Several examples are used to demonstrate this approach and to show its potential when compared with methods that consider quadratic Lyapunov functions.



# Sumário

Resumo	xi
Abstract	xiii
Nomenclatura e Simbologia	xxi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceitos Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1 Inequações de Lyapunov . . . . .	5
2.2 Inequações Matriciais Lineares - LMIs . . . . .	6
2.3 Inequações matriciais dependente dos estados . . . . .	10
<b>3 Análise de Estabilidade</b>	<b>13</b>
3.1 Decomposição Não Linear . . . . .	14
3.2 Funções de Lyapunov Polinomiais . . . . .	17
3.3 Domínio de Atração . . . . .	19
3.4 Estabilidade Regional . . . . .	21
3.5 Não Linearidades Trigonométricas . . . . .	26
3.6 Sistemas Sujeitos a Saturação . . . . .	30
<b>4 Análise de Desempenho</b>	<b>37</b>
4.1 Taxa de Convergência . . . . .	37
4.2 Energia de Saída . . . . .	42
4.3 Ganho $\mathcal{L}_2$ . . . . .	46
<b>5 Síntese de Controladores</b>	<b>53</b>
5.1 Estabilização com Taxa de Convergência Garantida . . . . .	54
5.2 Estabilização com Custo Garantido . . . . .	59

5.3	Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear . . . . .	65
5.4	Sistemas Sujeitos à Saturação . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Análise de Sistemas Chaveados</b>	<b>75</b>
6.1	Introdução . . . . .	76
6.2	Representação do Sistema Chaveado . . . . .	77
6.3	Função de Lyapunov . . . . .	79
6.4	Análise de Estabilidade . . . . .	80
6.5	Exemplo Numérico . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>87</b>
7.1	Resumo dos Resultados Obtidos . . . . .	87
7.2	Perspectivas Futuras . . . . .	88
7.3	Considerações Finais . . . . .	90
<b>A</b>	<b>Controle Ótimo de Sistemas Lineares Sujeitos a Saturação</b>	<b>91</b>
A.1	Introdução . . . . .	91
A.2	Conceitos Preliminares . . . . .	93
A.3	Síntese da Lei de Controle . . . . .	95
A.4	Saturação: uma caracterização por IQCs . . . . .	99
A.5	Resultados Numéricos . . . . .	104
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>107</b>

# Lista de Figuras

3.1	Estimativas do domínio de atração do sistema (3.4). . . . .	25
3.2	Estimativas do domínio de atração do sistema (3.7). . . . .	26
3.3	Estimativas do domínio de atração do sistema (3.40). . . . .	29
3.4	Estimativas do domínio de atração do sistema (3.58). . . . .	36
4.1	Estimativas do domínio de atração do sistema (3.4) com $\varrho = 0.1$ . . . . .	40
5.1	Trajетórias do sistema em malha fechada. . . . .	59
5.2	Estimativas do domínio de atração com $\varrho = 0.1$ . . . . .	60
5.3	Resposta no tempo do sistema em malha fechada. . . . .	64
5.4	Estimativas do domínio de atração com custo garantido. . . . .	65
5.5	Trajетórias do sistema em malha fechada, $x_1(t)$ (—) e $x_2(t)$ (+ +). . . . .	72
5.6	Sinal de controle do sistema em malha fechada, $u(t)$ . . . . .	73
5.7	Estimativas do domínio de atração do sistema sujeito a saturação. . . . .	73
6.1	Estimativa do domínio de atração e ciclo limite do sistema (6.31). . . . .	86
A.1	Regiões de atração para diferentes níveis de sobre-saturação. . . . .	106



# Lista de Tabelas

4.1	Estimativas da taxa de convergência. . . . .	42
4.2	Estimativas da norma-2 da energia de saída. . . . .	46
4.3	Estimativas do ganho $\mathcal{L}_2$ do operador entrada/saída. . . . .	51
5.1	Estimativas de $\ G_{wz}\ _\infty$ para o sistema em malha fechada. . . . .	70
A.1	Função custo e respectivas regiões de atração. . . . .	105



# Nomenclatura e Simbologia

<b>ARE</b>	Equação algébrica de Riccati,
<b>HJE</b>	Equação de Hamilton-Jacob,
<b>HJI</b>	Inequação de Hamilton-Jacob,
<b>IQC</b>	Restrição integral quadrática,
<b>LFR</b>	Representação por frações lineares,
<b>LMI</b>	Inequação (ou Desigualdade) matricial linear,
<b>LPV</b>	Linear a parâmetro variante,
<b>LTI</b>	Linear invariante no tempo,
<b>NLMI</b>	Inequação (ou Desigualdade) matricial não linear,
<b>SDLMI</b>	Inequação (ou Desigualdade) matricial dependente do estado
<b>SDRE</b>	Equação de Riccati dependente do estado
$S'$	Matriz transposta de $S$ ,
$S = S'$	Matriz simétrica,
$S > 0$	Matriz definida positiva,
$\text{He}(S)$	$S + S'$ ,
$\text{diag}\{S_i\}$	Matriz (bloco) diagonal com elementos $S_i$ ,
$\text{trace}(S)$	Traço da matriz $S$ ,
$\text{rank}(S)$	Posto da matriz $S$ ,
$\text{det}(S)$	Determinante da matriz $S$ ,
$\text{sat}(\cdot)$	Operador saturação unitária,
$\text{Re}\{H(s)\}$	Parte real da função de transferência $H(s)$ ,
$\dot{r}(t)$	Derivada temporal de uma função $r(t)$ , onde o argumento $t$ é freqüentemente omitido,
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais,
$\mathbb{R}^n$	Conjunto de vetores reais de dimensão $n$ ,
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$ ,

$\mathcal{V}(\mathcal{B})$	Conjunto de todos os vértices do politopo $\mathcal{B}$ ,
$\text{Co}(\mathcal{V}(\mathcal{B}))$	Casca convexa de $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ ,
$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$	Representa um meta-politopo obtido pelo produto cartesiano de dois politopos $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ ,
$\mathcal{V}(\mathcal{B}_1) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_2)$	Conjunto de todos os vértices do meta-politopo $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ ,
$I_n$	Matriz identidade de dimensão $n \times n$ ,
$0_n$	Matriz de zeros de dimensão $n \times n$ ,
$0_{m \times n}$	Matriz de zeros de dimensão $m \times n$ ,
$\ x\ _2$	Norma Euclidiana de $x$ , $x \in \mathbb{R}^n$ ,
$\ f(\cdot)\ _p$	Norma $p$ de $f(\cdot)$ ,
$\mathcal{J}_\eta$	Conjunto de $\eta$ números inteiros, isto é $\{1, 2, \dots, \eta\}$ ,
$\mathbb{J}^n$	Conjunto dos vetores de dimensão $\eta$ cujos elementos são números inteiros.

# Capítulo 1

## Introdução

As funções de Lyapunov são reconhecidas como uma das mais fundamentais ferramentas para a solução de problemas de análise de estabilidade e desempenho, e síntese de controladores para sistemas não lineares. Veja por exemplo os livros textos [1], [2], [3] e [4]. A idéia básica na teoria de Lyapunov consiste em utilizar uma função escalar positiva, conhecida como função de Lyapunov, para representar de alguma forma a energia do sistema. Desta forma a estabilidade do sistema passa a ser caracterizada pela maneira na qual esta função (energia) cresce, decresce ou se mantém constante. Portanto, o método resume-se à busca de funções candidatas que representem adequadamente a distância do estado do sistema em relação ao seu ponto de equilíbrio.

Nos últimos anos, vários métodos numéricos foram desenvolvidos para a determinação das funções de Lyapunov. A maioria destes métodos são baseados em problemas de otimização convexa em termos de inequações matriciais lineares<sup>1</sup> (ou LMIs), explorando o fato de o conjunto de funções de Lyapunov para um dado sistema ser convexo [5].

Desde o desenvolvimento dos métodos de pontos-interiores para a solução de problemas de programação semi-definida e da publicação do livro [6], as técnicas LMI tem sido utilizadas largamente na solução de diferentes problemas na teoria de controle. A idéia básica é a de reformular o problema de controle em termos de inequações matriciais simétricas e afins nas variáveis de decisão. Novos avanços na aplicação das técnicas LMI podem ser encontradas em [7], como por exemplo análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas lineares a parâmetros variantes, otimização de restrições integrais quadráticas, sistemas impulsivos, ganho variável e controle multi-objetivo.

---

<sup>1</sup>A tradução correta da terminologia em Inglês seria desigualdades matriciais lineares, entretanto, no entender do autor, o termo inequações é mais adequado.

O maior obstáculo na utilização de técnicas LMI em sistemas não lineares reside no fato das condições de estabilidade serem na realidade inequações matriciais não lineares<sup>2</sup> (ou NLMIs) perdendo a propriedade da convexidade. Tal fato acarreta na obrigatoriedade do cálculo ponto a ponto no espaço de estados (ou um subconjunto deste) das condições de estabilidade gerando um enorme esforço computacional [8]. Entretanto vários trabalhos propõem métodos aproximados para a solução de NLMIs utilizando, por exemplo, a técnica das diferenças finitas. Dentro desta linha de pesquisa destacam-se [9, 10, 11] que propõem soluções teóricas para problemas de robustez e [12, 13, 14, 15] que utilizam a técnica de escalonamento dependente dos estados para diversos problemas de controle não linear.

Uma das primeiras soluções convexas em termos de LMIs para o problema de controle robusto de sistemas não lineares incertos foi proposta em [16] utilizando uma representação por frações racionais<sup>3</sup> (LFR) e funções de Lyapunov quadráticas<sup>4</sup>. Também, utilizando funções quadráticas mas para classes diferentes de sistemas não lineares incertos, podemos destacar, entre outros, as referências [18], [19], [20] e [21]. Entretanto, a estabilidade quadrática tem se mostrado conservadora para tratar problemas de análise de estabilidade e desempenho, e síntese de controle para sistemas não lineares (e incertos) [22, 23, 24].

Para sistemas do tipo Lure [25], vários pesquisadores propuseram soluções para os problemas de análise de estabilidade e desempenho, e síntese de controle utilizando funções do tipo Lure-Postnikov em termos de LMIs, como por exemplo [26] e [27]. Recentemente, visando melhorar os resultados obtidos para estabilidade quadrática, vários trabalhos foram propostos para o problema de análise (local, regional e/ ou global) utilizando técnicas convexas e funções de Lyapunov mais complexas, como por exemplo [23, 28, 29, 24] que utilizam funções do tipo polinomial e [30, 31] que utilizam funções quadráticas por partes. No entanto, o problema de síntese de controladores baseados em funções de Lyapunov não quadráticas para sistemas não lineares utilizando uma abordagem convexa continua em aberto.

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver técnicas convexas para problemas de análise de estabilidade e desempenho, e síntese de controladores em uma dada região politópica do espaço de estados para uma classe de sistemas não lineares incertos do tipo  $\dot{x} = f(x, \delta, u) = A(x, \delta)x + B(x, \delta)u$  onde  $x$  é o vetor de estados,  $\delta$  é o vetor

<sup>2</sup>Também chamadas de inequações matriciais dependente dos estados.

<sup>3</sup>Para maiores detalhes sobre esta classe de sistemas veja [17].

<sup>4</sup>Ao longo desta tese, utiliza-se o termo função de Lyapunov quadrática para designar a classe de funções quadráticas no estado e independente dos parâmetros incertos do sistema

dos parâmetros incertos do sistema e  $u$  representa o sinal de entrada (controle ou perturbação). Com esta finalidade, utiliza-se funções de Lyapunov polinomiais em  $x$  e  $\delta$  na forma  $v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta)x$  onde  $\mathcal{P}(x, \delta)$  é uma função quadrática em  $x$  e  $\delta$ .

Os resultados obtidos estão organizados da seguinte maneira:

- O capítulo 2 apresenta vários conceitos preliminares essenciais ao estudo de técnicas convexas para sistemas não lineares.
- Métodos para análise local e regional de sistemas não lineares são apresentadas no capítulo 3. Em particular, trata-se do problema de obtenção da região de atração além de estender os resultados para sistemas com não linearidades trigonométricas e sujeitos a saturação.
- Problemas de análise regional do desempenho de sistemas não lineares são abordados no capítulo 4 considerando critérios relacionados à resposta temporal do sistema (taxa de convergência dos estados), energia do sinal de saída e ganho  $\mathcal{L}_2$ .
- Utilizando funções quadráticas propõe-se no capítulo 5 soluções para os problemas de estabilização regional e controle robusto (custo garantido e  $\mathcal{H}_\infty$  não linear). Para diminuir o conservadorismo destes resultados, propõe-se a utilização das técnicas propostas nos capítulos 3 e 4 aplicadas ao sistema em malha fechada.
- O problema de análise de sistemas chaveados é abordado no capítulo 6, para uma classe particular de sistemas não lineares chaveados. Através de um exemplo numérico esta metodologia é aplicada na análise de sistemas bilineares sujeitos a saturação.
- Várias considerações finais, bem como um sumário dos resultados obtidos são apresentadas no capítulo 7. Também, neste capítulo são propostas futuras áreas de pesquisa visando a complementação desta tese.

Parte dos resultados neste trabalho foi desenvolvida em conjunto com o prof. Minyue Fu do Departamento de Engenharia Elétrica e Computação da Universidade de Newcastle, Austrália, no período de Dezembro/2000 a Janeiro/2001. Em paralelo a estas atividades no exterior, foram desenvolvidas técnicas de controle ótimo para sistemas lineares sujeitos a saturação, onde a saturação é descrita através de restrições integrais quadráticas (IQCs). Por utilizar uma metodologia relativamente diferente, estes resultados são apresentados resumidamente em apêndice. Todos os resultados

numéricos neste trabalho foram obtidos utilizando o LMITOOL [32] do software *Scilab*, desenvolvido pelo *INRIA* [33].

# Capítulo 2

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentam-se alguns conceitos preliminares relacionados à teoria de estabilidade de Lyapunov e a sua representação em termos de LMIs. Além disso, serão feitas algumas considerações para garantir a existência e unicidade de solução das equações diferenciais utilizadas na descrição de modelos físicos.

### 2.1 Inequações de Lyapunov

Considere o seguinte sistema não linear incerto:

$$\dot{x} = f(x, \delta), \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta, \quad (2.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $\delta \in \mathbb{R}^l$  é o vetor de parâmetros incertos,  $f(x, \delta) \in \mathbb{R}^n$  é uma função não linear de  $x$  e  $\delta$ ,  $\mathcal{B}_x$  é uma dada região politópica no espaço de estados contendo a origem e  $\mathcal{B}_\delta$  é uma dada região politópica representando os valores admissíveis de  $\delta$  e  $\dot{\delta}$ .

Para que o modelo matemático acima definido consiga descrever adequadamente o comportamento dinâmico de sistema físico, deve-se garantir a existência e unicidade de solução da equação diferencial  $\dot{x} = f(x, \delta)$  para uma determinada condição inicial  $x(0) = x_0$ . Para tal, assume-se para o sistema (2.1) que  $f(x, \delta)$  é contínua e limitada para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Observe que esta hipótese assegura a existência e unicidade de solução pelo Teorema 2.2 em [1].

Com a hipótese acima, a estabilidade do sistema (2.1) pode ser determinada utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov. O seguinte lema [34] fornece o resultado fundamental para a análise regional de estabilidade do sistema (2.1).

**Lema 2.1** (*Estabilidade regional*) Considere o sistema não linear (2.1), onde  $f(x, \delta) : \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \mapsto \mathbb{R}^n$  é uma função contínua e limitada tal que  $f(0, \delta) = 0$ . Suponha que existam escalares positivos  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$ ,  $\varepsilon_c$ ,  $c$  e uma função continuamente diferenciável  $v(x, \delta) : \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \mapsto \mathbb{R}$  tendo as seguintes propriedades:

$$\varepsilon_a x' x \leq v(x, \delta) \leq \varepsilon_b x' x, \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (2.2)$$

$$\dot{v}(x, \delta) \leq -\varepsilon_c x' x, \forall x \in \mathcal{B}_x, (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta \quad (2.3)$$

$$\Upsilon(c) \triangleq \{x : v(x, \delta) \leq c\} \subset \mathcal{B}_x, \forall x \in \mathcal{B}_x \quad (2.4)$$

Então, para todo  $x(0) \in \Upsilon(c)$  a trajetória  $x(t) \in \Upsilon(c)$  e aproxima-se da origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

Utilizando a teoria de Lyapunov também é possível estimar a taxa de convergência da trajetória  $x(t)$  do sistema não linear incerto (2.1). Para tal, considere o seguinte lema [1].

**Lema 2.2** (*Taxa de convergência*) Considere o lema 2.1. Suponha que existam escalares positivos  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$ ,  $c$ , e uma função continuamente diferenciável  $v(x, \delta) : \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \mapsto \mathbb{R}$  tendo as seguintes propriedades:

$$\varepsilon_a x' x \leq v(x, \delta) \leq \varepsilon_b x' x, \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (2.5)$$

$$\dot{v}(x, \delta) \leq -2\varrho v(x, \delta), \forall x \in \mathcal{B}_x, (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta \quad (2.6)$$

$$\Upsilon(c) \triangleq \{x : v(x, \delta) \leq c\} \subset \mathcal{B}_x, \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (2.7)$$

Então, para todo  $x(0) \in \Upsilon(c)$  a norma da trajetória  $x(t)$  tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$  e satisfaz a seguinte relação:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a}} \|x(0)\| e^{-\varrho t}$$

Na seqüência, define-se formalmente desigualdades do tipo LMI além de mostrar sua aplicabilidade através da análise de estabilidade utilizando a teoria de Lyapunov.

## 2.2 Inequações Matriciais Lineares - LMIs

A idéia básica da formulação LMI consiste em reformular problemas de controle em termos de inequações matriciais lineares, isto é, restrições de desigualdade envolvendo

matrizes simétricas afins nas variáveis de decisão. Dentro deste quadro, o objetivo desta seção é o de familiarizar o leitor com esta formulação apresentando algumas definições, operações algébricas envolvendo matrizes e exemplos.

**Definição 2.1** (LMI) *Uma inequação matricial linear (LMI) tem a seguinte forma [6]:*

$$F(\varsigma) \triangleq F_0 + \varsigma_1 F_1 + \cdots + \varsigma_q F_q > 0 \quad (2.8)$$

onde  $\varsigma_1, \dots, \varsigma_q \in \mathbb{R}$  são as variáveis de decisão e  $F_0, F_1, \dots, F_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes simétricas conhecidas. O problema é então encontrar  $\varsigma$  (se possível) tal que  $F(\varsigma) > 0$ .

Nesta tese, também encontram-se LMIs não estritas na forma  $F(\varsigma) \geq 0$ , isto é,  $F(\varsigma)$  é uma matrix positiva semi-definida.

Em geral, na teoria de controle aparecem problemas onde as variáveis de decisão são matrizes, como, por exemplo, a inequação de Lyapunov para sistemas lineares invariantes no tempo:

$$A'P + PA < 0 \quad (2.9)$$

onde a matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é dada e  $P = P'$  é a variável de decisão. Inequações do tipo (2.9) podem ser colocadas equivalentemente na forma (2.8). Existem várias vantagens em utilizarmos a notação na qual as matrizes são variáveis (para maiores detalhes veja [6, capítulo 2]). Nesta tese, todas as inequações matriciais serão colocadas na forma compacta (2.9) e em alguns casos aparecerão como restrições em problemas de otimização.

**Definição 2.2** (Programação Semi-definida) *Considere o seguinte problema de otimização:*

$$\min c' \varsigma \quad \text{sujeito a } F(\varsigma) > 0 \quad (2.10)$$

onde o vetor  $\varsigma \in \mathbb{R}^q$  é a variável de otimização,  $c \in \mathbb{R}^q$  é um vetor conhecido e  $F(\varsigma) > 0$  é uma LMI em  $\varsigma$ . Este problema é conhecido como programação semi-definida (SDP) [35].

Atualmente existem vários pacotes computacionais dedicados a solução de SDPs, como por exemplo o LMI-toolbox do Matlab [36], sdpsol [37] e o LMITOOL do Scilab [32].

A seguir, apresentam-se vários conceitos da álgebra linear envolvendo operações com inequações matriciais utilizados na linearização de inequações matriciais na área de controle não linear.

**Definição 2.3** (*Complemento de Schur, [6]*) Considere o seguinte conjunto de inequações matriciais:

$$P(x) > 0, \quad Q(x) - B(x)P(x)^{-1}B(x)' > 0 \quad (2.11)$$

onde as matrizes  $P(x) = P(x)'$ ,  $Q(x) = Q(x)'$ ,  $B(x)$  são funções afins em  $x$ . Então, o conjunto de inequações não lineares (2.11) é equivalente à seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & B(x) \\ B(x)' & P(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.12)$$

**Exemplo 2.1** Considere a seguinte inequação matricial não linear associada a equação de Riccati:

$$A'P + PA + PBR^{-1}B'P + Q < 0$$

onde as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $Q = Q'$ ,  $R = R' > 0$  são conhecidas com dimensões apropriadas, e  $P = P'$  é a variável de decisão. Então, aplicando o complemento de Schur na expressão acima leva à seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + Q & PB \\ B'P & -R \end{bmatrix} < 0$$

**Lema 2.3** (*Lema de Finsler, [38, 39]*) Seja  $\sigma \in \mathbb{R}^{n_\sigma}$  um vetor,  $S \in \mathbb{R}^{n_\sigma \times n_\sigma}$  uma matrix simétrica e  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n_\sigma}$  uma matrix com  $\text{rank}(Z) < n_\sigma$ . Então, as seguintes relações são equivalentes:

- i.  $\sigma'S\sigma < 0, \quad \forall Z\sigma = 0, \quad \sigma \neq 0;$
- ii.  $Z^\perp'SZ^\perp < 0;$
- iii. Existe um escalar  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que  $S - \mu Z'Z < 0$ .
- iv. Existe uma matrix  $L \in \mathbb{R}^{n_\sigma \times m}$  tal que  $S + LZ + Z'L < 0$ .

onde  $Z^\perp$  representa uma base para o espaço nulo de  $Z$ .

Utilizando o lema de Finsler é possível transformar uma LMI associada a uma restrição de igualdade em uma única LMI adicionando multiplicadores. Este lema será bastante utilizado ao longo deste trabalho. Para exemplificar sua aplicabilidade considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.2** Considere o seguinte sistema linear invariante no tempo  $\dot{x} = Ax$  onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $A$  é uma matriz Hurwitz. Pela teoria de Lyapunov existe uma função de Lyapunov  $v(x) = x'Px$ , onde  $P$  é uma matriz simétrica definida positiva tal que:

$$\dot{v} = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x < 0. \quad (2.13)$$

A condição acima é satisfeita se e somente  $A'P + PA < 0$ . Alternativamente, a condição (2.13) pode ser representada em um espaço aumentado associada a uma restrição algébrica, em outras palavras:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -I & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = 0$$

Utilizando o lema de Finsler obtém-se a seguinte condição necessária e suficiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} -I & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ A' \end{bmatrix} L' < 0 \quad (2.14)$$

onde  $P$  e  $L$  são as variáveis de decisão.

Observe que na condição acima não existe um acoplamento direto entre as matrizes de Lyapunov e do sistema. Tal característica pode ser explorada em sistemas incertos e não lineares (veja a próxima seção) na busca de soluções convexas ou menos conservadoras.

Freqüentemente na teoria de controle encontram-se problemas no qual alguma função quadrática (ou forma quadrática) precisa ser positiva (ou negativa) definida sempre que outro conjunto de formas quadráticas forem positivas (ou negativas) definidas. Tais problemas podem ser solucionados construindo-se uma única desigualdade com o auxílio do seguinte lema.

**Lema 2.4** (*S-Procedure* [6]) Sejam  $F_0, \dots, F_q$  funções quadráticas da variável  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  com a seguinte estrutura:

$$F_i(z) = z' T_i z + 2u_i' z + v_i, \quad i = 0, 1, \dots, q$$

onde  $T_i = T_i' \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^{n_z}$  e  $v_i \in \mathbb{R}$ .

Então a seguinte condição:

$$F_0(z) > 0, \quad \text{para todo } z \text{ tal que } F_i(z) \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.15)$$

é satisfeita se existem escalares  $\tau_1, \dots, \tau_q$  positivos tais que:

$$F_0(z) - \sum_{i=1}^q \tau_i F_i(z) > 0, \quad \forall z \quad (2.16)$$

Veja no capítulo 3, seção 3.6, uma aplicação do lema 2.4 à análise de sistemas não lineares sujeitos a saturação considerando o critério do círculo.

## 2.3 Inequações matriciais dependente dos estados

Para ilustrar o problema relacionado a utilização de LMIs na análise de sistemas não lineares considere o seguinte sistema linear:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (2.17)$$

Pela teoria de Lyapunov o sistema acima é estável se existe uma função na forma  $v(x) = x'Px$ , onde  $P$  é uma matriz constante, simétrica e definida positiva, tal que  $\dot{v}(x) = x'(A'P + PA)x < 0$  ou equivalentemente se a LMI (2.9) é satisfeita.

Entretanto, para sistemas não lineares na forma  $\dot{x} = f(x) = A(x)x$  a matriz  $A$  é função dos estados. Neste caso a condição (2.9) é apenas suficiente e possivelmente conservadora. Tal situação pode ser demonstrada através do seguinte exemplo [23]:

$$\dot{x} = f(x) = A(x)x, \quad A(x) = \begin{bmatrix} -1 - x_2 & \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{x_1 + x_2}{2} & -1 - x_1 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Utilizando a expressão (2.9), obtém-se:

$$A(x)'P + PA(x) < 0, \quad P = P' > 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \quad (2.19)$$

onde  $\mathcal{B}_x$  representa uma região politópica contendo a origem. A LMI acima é um problema de programação semi-definida e portanto pode ser resolvida utilizando métodos numéricos<sup>1</sup>. Através do LMI solver do Scilab, a estabilidade assintótica do sistema é garantida para todo  $x \in \mathcal{B}_x = \{x : |x_i| < 0.5, i = 1, 2\}$ . No entanto, prova-se facilmente para  $P = I_2$  que o sistema (2.18) é globalmente estável demonstrando que a condição (2.19) é conservadora.

---

<sup>1</sup>Note que  $A(x)$  é afim em  $x$ .

Com o objetivo de diminuir o conservadorismo dos resultados associados a inequações matriciais dependente dos estados em [23, lema 2.1] é proposto o seguinte resultado baseado no lema de Finsler:

**Lema 2.5** *Seja  $H(z) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  uma matriz simétrica cujos elementos são funções afins em  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ . Seja  $M_z \in \mathbb{R}^{m_z \times n_x}$  uma matriz afim em  $z$  tal que  $M_z z = 0$  e  $\mathcal{B}_z$  uma região politópica e convexa tal que  $z \in \mathcal{B}_z$ . Então a condição  $z' H(z) z > 0$  é satisfeita para todo  $z \in \mathcal{B}_z$  e  $z \neq 0$  se existe uma matriz  $L$  com as mesmas dimensões de  $M_z'$  tal que a seguinte LMI é satisfeita em todos os vértices do politopo  $\mathcal{B}_z$ :*

$$H(z) + LM_z + M_z' L' > 0 \quad (2.20)$$

Em particular, nesta tese será considerada a seguinte definição da matriz  $M_z$  utilizada no lema 2.5:

$$M_z = \begin{bmatrix} z_2 & -z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_3 & -z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{n_z} & z_{n_z-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_z-1) \times n_z} \quad (2.21)$$

Então, utilizando o lema 2.5 e considerando a matriz  $M_z$  dada por (2.21), pode-se obter uma nova condição LMI para testar a estabilidade do sistema (2.18). Com esta finalidade, defina  $M_x = [x_2 \quad -x_1]$  e  $H(x) = A(x)' P + P A(x)$ . Resultando na seguinte LMI:

$$A(x)' P + P A(x) + LM_x + M_x' L' < 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \quad (2.22)$$

Escolhendo  $L = [1 \quad -1]'$  e  $P = I_2$ , obtém-se

$$A(x)' P + P A(x) + LM_x + M_x' L' = -2I_2$$

que é sempre definida negativa para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Em outras palavras, o sistema (2.18) é globalmente estável o que não era possível determinar sem considerar a matriz de escalonamento  $L$ . Resumindo, o lema 2.5 pode levar a resultados menos conservadores quando aplicado a LMIs dependentes dos estados.



# Capítulo 3

## Análise de Estabilidade

Considere o seguinte sistema não linear incerto:

$$\dot{x} = f(x, \delta) \tag{3.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados e  $\delta \in \mathbb{R}^l$  é o vetor de parâmetros incertos. Com relação ao sistema acima considere as seguintes hipóteses.

**H2.1a** *A origem do sistema,  $x = 0$ , é um ponto de equilíbrio.*

**H2.1b** *Os parâmetros incertos,  $\delta$ , e sua taxa de variação,  $\dot{\delta}$ , são limitados a uma região politópica,  $\mathcal{B}_\delta$ , conhecida, isto é,  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ .*

**H2.1c** *A função vetorial  $f(x, \delta)$  em (3.1) é contínua e limitada para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$  de interesse, onde  $\mathcal{B}_x$  é uma dada região politópica dos estados contendo a origem.*

Com as definições acima estabelecidas<sup>1</sup>, o problema a ser considerado neste capítulo pode ser formalizado da seguinte maneira:

**Problema 3.1** *Considere o sistema (3.1) com as hipóteses **H2.1**. Determine numericamente uma função de Lyapunov local (isto é, para a origem do sistema) e uma estimativa do seu domínio de atração através de um problema de programação semi-definida.*

Com esta finalidade, define-se na próxima seção uma classe de sistemas não lineares

---

<sup>1</sup>Observe que a Hipótese **H2.1c** assegura a existência e unicidade de solução de (3.1), para maiores detalhes veja [1, Teorema 2.2].

incertos na forma algébrico/diferencial associado ao sistema (3.1) que ao longo desta tese denominar-se-á *decomposição não linear* do sistema (3.1).

### 3.1 Decomposição Não Linear

Suponha que o sistema (3.1) possa ser descrito na seguinte forma:

$$\dot{x} = A_1(x, \delta)x + A_2(x, \delta)\pi, \quad \Omega_1(x, \delta)x + \Omega_2(x, \delta)\pi = 0 \quad (3.2)$$

onde o vetor  $\pi \in \mathbb{R}^m$  é uma função não linear de  $(x, \delta)$  e as matrizes  $A_1(x, \delta)$ ,  $A_2(x, \delta)$ ,  $\Omega_1(x, \delta) \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $\Omega_2(x, \delta) \in \mathbb{R}^{q \times m}$  são funções afins em  $(x, \delta)$ .

Com relação à decomposição não linear (3.2), considere a seguinte hipótese.

**H2.2** *As representações (3.1) e (3.2) são equivalentes para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ .*

A hipótese **H2.2** implica que a variável auxiliar  $\pi$  pode ser removida das expressões retornando-se desta forma à representação original do sistema. Isto ocorre quando  $\Omega_2$  é de posto completo por colunas, isto é,  $\text{rank}(\Omega_2) = m$ ,  $\forall (x, \delta) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Logo, o sistema original pode ser obtido da seguinte forma:

$$\dot{x} = A_1x + A_2\pi, \quad \pi = -(\Omega_2'\Omega_2)^{-1}\Omega_2'\Omega_1x \quad (3.3)$$

Portanto, o campo vetorial

$$f(x, \delta) = \left( A_1 - A_2(\Omega_2'\Omega_2)^{-1}\Omega_2'\Omega_1 \right) x$$

é limitado (e contínuo) para todo  $(x, \delta) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$  (hipótese **H2.1c**), visto que  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  são afins em  $(x, \delta)$ , e  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  são regiões limitadas.

A hipótese de que a matriz  $\Omega_2$  tenha posto completo por colunas é usual em sistemas descritores do tipo<sup>2</sup>:

$$\dot{x} = A_1x + A_2\pi, \quad 0 = \Omega_1x + \Omega_2\pi$$

**Observação 3.1** *Nesta tese não é realizado um estudo completo com relação à generalidade da representação (3.2) de sistemas não lineares. Entretanto, pela equivalência demonstrada em (3.3) e pelo resultado proposto em [16] para a classe de sistemas des-*

---

<sup>2</sup>Veja por exemplo [40].

critos por frações racionais, pode-se concluir que a classe de sistemas proposta em (3.2) consegue representar a classe de sistemas racionais.

Para ilustrar a proposição acima, considere os seguintes exemplos.

**Exemplo 3.1** Considere o seguinte sistema de Van der Pol em tempo reverso [1]:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \epsilon(x_1^2 - 1) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde  $\epsilon$  é o coeficiente de amortecimento não linear.

Por conveniência, o sistema acima pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\epsilon \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon x_1 \end{bmatrix} x_1 x_2 \quad (3.5)$$

que está na forma (3.2), isto é:

$$\dot{x} = A_1 x + A_2(x)\pi, \quad \Omega_1(x)x + \Omega_2\pi = 0$$

onde  $\pi = x_1 x_2$ ,  $\Omega_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \end{bmatrix}$  e  $\Omega_2 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$ .

**Observação 3.2** Em geral, a representação de sistemas não lineares na forma (3.2) não é única. Por exemplo, poderia-se reescrever o sistema (3.4) da seguinte maneira:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\epsilon \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon \end{bmatrix} x_1^2 x_2 \quad (3.6)$$

que por sua vez está na forma (3.2) com:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\epsilon \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 x_2 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \Omega_2(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Generalizando o resultado acima, pode-se afirmar que quanto maior a dimensão do vetor  $\pi$  menor será o conservadorismo dos resultados, visto que serão adicionados

mais graus de liberdade na escolha do função de Lyapunov através dos multiplicadores que serão associados às matrizes  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Entretanto, a inclusão de um multiplicador associado a matriz  $M_x$  (lema 2.5) ajuda na diminuição do conservadorismo provocado por uma escolha inadequada da decomposição não linear (3.2). Uma discussão mais aprofundada sobre este tema pode ser encontrada em [8] e [41].

**Exemplo 3.2** Considere que o fator de amortecimento não linear,  $\epsilon$ , no sistema (3.4) é parcialmente conhecido, isto é:  $\epsilon \in [\epsilon_0 - \Delta\epsilon, \epsilon_0 + \Delta\epsilon]$  onde  $\epsilon_0$  é o valor nominal de  $\epsilon$  e  $\Delta\epsilon$  é a sua variação em torno do valor nominal. Por conveniência,  $\epsilon$  será representado na seguinte maneira:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon\delta, \quad \delta \in [-1, 1]$$

Com a definição acima, pode-se representar o sistema de Van der Pol incerto em tempo reverso na seguinte forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(\epsilon_0 + \Delta\epsilon\delta) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\epsilon_0 + \Delta\epsilon\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 x_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ou na forma (3.2) com:

$$\pi = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 x_2 \end{bmatrix}, \quad A_1(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(\epsilon_0 + \Delta\epsilon\delta) \end{bmatrix}, \quad A_2(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\epsilon_0 + \Delta\epsilon\delta) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \Omega_2(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.3** Considere o seguinte sistema escalar:

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+x^4} \quad (3.8)$$

O sistema acima pode ser representado na forma (3.2) com as seguintes definições:

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{x}{1+x^4} \\ \frac{x^2}{1+x^4} \\ \frac{x^3}{1+x^4} \\ \frac{x^4}{1+x^4} \end{bmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -x \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = 0,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 3.2 Funções de Lyapunov Polinomiais

Nesta seção apresenta-se a classe de funções de Lyapunov a ser utilizada no decorrer desta tese. Com este objetivo, considere a seguinte função candidata:

$$v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta)x, \quad \mathcal{P}(x, \delta) = \begin{bmatrix} \Theta(x, \delta) \\ I_n \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} \Theta(x, \delta) \\ I_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $P \in \mathbb{R}^{(n+n_1) \times (n+n_1)}$  é uma matrix simétrica e constante a ser determinada, e  $\Theta(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$  é uma dada função matricial afim em  $(x, \delta)$

Para simplificar a representação de  $v(x, \delta)$ , defina o seguinte vetor auxiliar:

$$\xi = \begin{bmatrix} \Theta(x, \delta) \\ I_n \end{bmatrix} x, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+n_1} \quad (3.10)$$

Com a definição acima, a função candidata à Lyapunov poderá ser equivalentemente representada ao longo desta tese na seguinte forma compacta:

$$v(x, \delta) = v(\xi) = \xi' P \xi \quad (3.11)$$

Por definição a matrix  $\Theta(x, \delta)$  tem a seguinte estrutura<sup>3</sup>:

$$\Theta(x, \delta) = \sum_{i=1}^n T_i x_i + \sum_{i=1}^l U_i \delta_i + V \quad (3.12)$$

onde as matrizes  $T_i$ ,  $U_i$  e  $V$  são constantes com as mesmas dimensões de  $\Theta(x, \delta)$  e  $x_i$ ,  $\delta_i$  são os  $i$ -ésimos elementos dos vetores  $x$  e  $\delta$ , respectivamente.

Para obter-se uma solução para o problema 3.1, utilizando o lema 2.1, deve-se determinar a derivada temporal de  $v(x, \delta)$  que é dada pela seguinte expressão:

$$\dot{v}(x, \delta) = \dot{x}' \mathcal{P}(x, \delta)x + x' \dot{\mathcal{P}}(x, \delta)x + x' \dot{\mathcal{P}}(x, \delta)x \quad (3.13)$$

$$= \xi' P \dot{\xi} + \dot{\xi}' P \xi \quad (3.14)$$

---

<sup>3</sup>Observe que por definição a matrix  $\Theta(x, \delta)$  é afim em  $x, \delta$ .

Pela definição do vetor  $\xi$  em (3.10),  $\dot{\xi}$  é dado pela seguinte expressão:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{\Theta}(x, \delta) \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \Theta(x, \delta) \\ I_n \end{bmatrix} \dot{x} \quad (3.15)$$

Utilizando a estrutura de  $\Theta(x, \delta)$  definida em (3.12), o termo  $\dot{\Theta}(x, \delta)x$  pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\dot{\Theta}(x, \delta)x = \left( \sum_{i=1}^n T_i \dot{x}_i + \sum_{i=1}^l U_i \dot{\delta}_i \right) x \quad (3.16)$$

$$= \sum_{i=1}^n T_i x s_i \dot{x} + \sum_{i=1}^l U_i \dot{\delta}_i x \quad (3.17)$$

$$= \tilde{\Theta}(x) \dot{x} + \hat{\Theta}(\dot{\delta}) x \quad (3.18)$$

onde  $s_i$  é a  $i$ -ésima linha da matrix identidade  $I_n$  e

$$\tilde{\Theta}(x) = \sum_{i=1}^n T_i x s_i, \quad \hat{\Theta}(\dot{\delta}) = \sum_{i=1}^l U_i \dot{\delta}_i. \quad (3.19)$$

Com as definições acima, pode-se reescrever a expressão (3.15) da seguinte maneira:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\Theta}(\dot{\delta}) \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \left( \Theta(x, \delta) + \tilde{\Theta}(x, \delta) \right) \\ I_n \end{bmatrix} \dot{x} \quad (3.20)$$

ou equivalentemente<sup>4</sup> :

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & - \left( \Theta(x, \delta) + \tilde{\Theta}(x) \right) \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\Theta}(\dot{\delta}) \\ A_1(x, \delta) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ A_2(x, \delta) \end{bmatrix} \pi \quad (3.21)$$

$$0 = \Omega_1(x, \delta)x + \Omega_2(x, \delta)\pi \quad (3.22)$$

Então a condição (2.3) do lema 2.1 pode ser reescrita da seguinte forma considerando

---

<sup>4</sup>Lembre-se que  $\dot{x} = f(x, \delta) = A_1(x, \delta)x + A_2(x, \delta)\pi$ ,  $\forall (x, \pi) : \Omega_1(x, \delta)x + \Omega_2(x, \delta)\pi = 0$ .

a função de Lyapunov definida em (3.9):

$$\dot{\xi}' P \xi + \xi' P \dot{\xi} \leq -\epsilon_c x' x, \quad \forall \begin{cases} x \in \mathcal{B}_x, (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta \\ (x, \xi, \dot{\xi}, \pi) : (3.10), (3.21) \text{ e } (3.22). \end{cases} \quad (3.23)$$

**Observação 3.3** A função de Lyapunov definida em (3.9) pode representar qualquer função polinomial de grau 4 em  $x$  e 2 em  $\delta$ . Além disso as funções de Lyapunov quadráticas podem ser vistas como um caso particular. Para tal considere a seguinte partição da matrix  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} P_2 & P_1' \\ P_1 & P_0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}$  e  $P_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ . Portanto, com a partição (3.24) é possível considerar os seguintes casos:

- i.  $\mathcal{P}(x, \delta)$  quadrática em  $(x, \delta)$ :  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  livres;
- ii.  $\mathcal{P}(x, \delta)$  afim em  $(x, \delta)$ :  $P_0$ ,  $P_1$  livres e  $P_2 = 0$ ;
- iii.  $\mathcal{P}(x, \delta)$  constante:  $P_0$  livre e  $P_1 = P_2 = 0$  (caracterizando a função de Lyapunov quadrática com  $v(x) = x' P_0 x$ ).

### 3.3 Domínio de Atração

Nesta seção, aborda-se o problema da determinação de uma estimativa do domínio de atração do sistema não linear (3.2). Com esta finalidade, mostra-se que a região delimitada por uma curva de nível da função de Lyapunov será invariante se a condição (2.4) for satisfeita para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Visando uma formulação convexa para este problema, represente o politopo  $\mathcal{B}_x$  pelo seguinte conjunto de inequações lineares:

$$\mathcal{B}_x = \left\{ x : a_k' x \leq 1, k = 1, \dots, n_f \right\} \quad (3.25)$$

onde  $a_k \in \mathbb{R}^n$  são vetores associados as  $n_f$  faces do politopo  $\mathcal{B}_x$ . Lembre-se que o politopo  $\mathcal{B}_x$  pode ser equivalentemente representado pelos seus vértices.

Considere o seguinte conjunto como uma estimativa do domínio de atração do sistema (3.2):

$$\Upsilon = \left\{ x : v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta) x \leq 1 \right\}, \quad \forall \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (3.26)$$

Observe que o conjunto acima não é em geral um elipsóide, visto que  $\mathcal{P}(x, \delta)$  não é uma matriz constante.

Suponha que as condições (2.2) e (2.3) sejam satisfeitas para uma função de Lyapunov  $v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta) x$  conforme a sua definição em (3.9). Logo, com as considerações acima, a condição (2.4) (isto é:  $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$ ) pode ser escrita na seguinte forma:

$$1 - a'_k x \geq 0, \forall x : v(x, \delta) - 1 \leq 0, (x, \delta) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta, k = 1, \dots, n_f.$$

Aplicando o lema 2.4 na condição acima, obtém-se a seguinte desigualdade<sup>5</sup>:

$$1 - 2a'_k x + v(x, \delta) \geq 0, (x, \delta) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta, k = 1, \dots, n_f. \quad (3.27)$$

Levando em conta a definição de  $v(x, \delta)$  em (3.9) e a notação auxiliar definida em (3.10), a inequação acima pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} 0 & a'_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ a_k \end{bmatrix} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix} \geq 0, \forall \xi : \begin{bmatrix} I_{n_1} & -\Theta(x, \delta) \end{bmatrix} \xi = 0. \quad (3.28)$$

Utilizando o lema 2.3 (Lema de Finsler), a inequação (3.28) é satisfeita (e portanto  $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$ ) se as seguintes LMIs forem satisfeitas nos vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} 0 & a'_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ a_k \end{bmatrix} & (P + L_k N + N' L'_k) \end{bmatrix} \geq 0, k = 1, \dots, n_f, \quad (3.29)$$

onde  $L_k, k = 1, \dots, n_f$ , são matrizes constantes a serem determinadas e  $N$  é uma dada matriz afim em  $(x, \delta)$  a ser especificada na próxima seção.

Note que o tamanho da região  $\Upsilon$  como definida em (3.26) é inversamente proporcional a norma  $p$  da matrix  $\mathcal{P}(x, \delta)$ , isto é, quanto menor  $\|\mathcal{P}(x, \delta)\|_p$  maiores serão os valores que  $x$  pode assumir tal que  $x' \mathcal{P}(x, \delta) x \leq 1$ . Normalmente, utiliza-se a norma traço ( $p = 1$ ) ou simplesmente a função traço para uma matriz simétrica definida positiva para maximizar<sup>6</sup> o tamanho de  $\Upsilon$ . Em outras palavras,  $\Upsilon$  pode ser maximizado pela minimização do traço de  $\mathcal{P}(x, \delta)$ . Entretanto, a matrix de Lyapunov é uma função

<sup>5</sup>Note que neste caso o multiplicador associado ao  $\mathcal{S}$ -Procedure é igual a 1. Esta escolha é baseada no caso linear onde o multiplicador unitário é o valor ótimo [6].

<sup>6</sup>Veja outras formas de se maximizar a região  $\Upsilon$  em [6, Seção 5.2].

quadrática do estado e dos parâmetros incertos o que torna a função  $\text{trace}(\mathcal{P}(x, \delta))$  não convexa. Desta forma, neste trabalho para maximizar-se o tamanho da estimativa da região de atração será considerado a seguinte função objetivo:

$$\min \text{trace}(P + RN + N'R') \text{ sujeito a (3.23), (3.29) e } P + RN + N'R' > 0 \quad (3.30)$$

onde  $R$  é uma matriz a ser determinada. Note que o problema de otimização acima definido minimiza aproximadamente  $x'(\mathcal{P}(x, \delta))x$  para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$  ou, em outras palavras, o traço de  $\mathcal{P}(x, \delta)$ .

### 3.4 Estabilidade Regional

Nesta seção, apresenta-se uma solução convexa para o problema 3.1 utilizando as definições introduzidas nas seções 3.1, 3.2 e 3.3.

Pelo lema 2.1, considerando os conceitos introduzidos neste capítulo, a região  $\Upsilon$  será invariante em relação ao sistema (3.1) se as seguintes condições forem satisfeitas:

- i.  $\varepsilon_a x'x \leq \xi'P\xi \leq \varepsilon_b x'x$ , para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ ,  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$  e  $(x, \xi) : (3.10)$ ;
- ii.  $\dot{\xi}'P\xi + \xi'P\dot{\xi} \leq -\varepsilon_c x'x$ , para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ ,  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$  e  $(x, \xi, \dot{\xi}, \pi) : (3.10), (3.21)$  e (3.22);
- iii. (3.29) para todo  $k = 1, \dots, n_f$ ,  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ .

Observe que associado às condições de estabilidade i e ii, tem-se as seguintes restrições de igualdade: (3.10), (3.21) e (3.22). Logo, a idéia básica na busca de soluções via LMI para o problema de estabilidade regional é anexar essas restrições de igualdade às inequações de Lyapunov através do lema de Finsler. Com esta finalidade, considere a seguinte notação auxiliar:

$$E = \begin{bmatrix} 0_{q \times n_1} & \Omega_1(x, \delta) \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} I_{n_1} & -(\Theta(x, \delta) + \tilde{\Theta}(x)) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}; \quad M_x = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_n & x_{n-1} \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\Theta}(\dot{\delta}) \\ 0 & A_1(x, \delta) \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times m} \\ A_2(x, \delta) \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 0 & M_x \\ I_{n_1} & -\Theta(x, \delta) \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Com a notação acima, uma solução em termos de LMIs para o problema 3.1 é proposta a seguir.

**Teorema 3.1** *Considere o sistema não linear (3.1) (com as hipóteses **H2.1a-c**), a sua decomposição não linear (3.2) (com a hipótese **H2.2**) e a notação auxiliar (3.31). Seja  $\Theta(x, \delta)$  uma dada matriz afim em  $(x, \delta)$  e considere a definição das matrizes auxiliares  $\tilde{\Theta}(x)$  e  $\hat{\Theta}(\delta)$  em (3.18). Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  regiões politópicas conhecidas representando uma vizinhança da origem do sistema e os valores admissíveis de  $(\delta, \dot{\delta})$  respectivamente.*

*Suponha que as matrizes  $P = P'$ ,  $R$ ,  $L_1, \dots, L_{n_f}$  e  $W$  sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as LMIs são construídas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ :*

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{trace}(P + RN + N'R') \text{ sujeito a} \\ & P + RN + N'R' > 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} 0 & a'_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ a_k \end{bmatrix} & (P + L_k N + N' L'_k) \end{bmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n_f \quad (3.33)$$

$$\text{He} \left( \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + W \begin{bmatrix} 0 & E & \Omega_2(x, \delta) \\ 0 & N & 0 \\ -F & G & H \end{bmatrix} \right) < 0 \quad (3.34)$$

Então, para todo  $x(0) \in \Upsilon$  a trajetória  $x(t) \in \Upsilon$  e converge para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ , onde  $\Upsilon$  é dado por (3.26).

### Prova do teorema 3.1

Suponha que as LMIs (3.32)-(3.34) estejam satisfeitas nos vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Então, por convexidade, também estão satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ . Para facilitar a compreensão esta prova será elaborada nas seguintes etapas:

- Condição (2.2).

Seja  $Q_1$  uma matriz tal que  $Q_1 \xi = x$ , por exemplo:  $Q_1 = [0 \quad I_n]$ . Considere a LMI (3.32). Como ela é estrita, considerando um escalar positivo e suficientemente pequeno  $\varepsilon_a$ , é possível adicionar o termo  $-\varepsilon_a Q_1' Q_1$  a (3.32) sem modificar o seu sinal, isto é, a seguinte LMI é ainda satisfeita:

$$P + RN + N'R' - \varepsilon_a Q_1' Q_1 \geq 0$$

Pré- and pós-multiplicando a LMI acima por  $\xi'$  e  $\xi$ , respectivamente, leva a:

$$v(x, \delta) = \xi' P \xi \geq \varepsilon_a x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (3.35)$$

Note que por construção o produto  $N\xi = 0$ . Em outras palavras:

$$M_x x = 0 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} I_{n_1} & -\Theta(x, \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta(x, \delta)x \\ x \end{bmatrix} = 0$$

Observe que os elementos da matriz  $N$  são limitados. Logo, existe um escalar positivo e suficientemente grande  $\varepsilon_{b1}$  tal que  $\varepsilon_{b1} I_{n+n_1} \geq P + RN + N'R'$ . Pré- e pós-multiplicando esta LMI por  $\xi'$  e  $\xi$ , respectivamente, leva a seguinte condição:

$$\xi' P \xi \leq \varepsilon_{b1} \xi' \xi$$

Como  $x, \delta$  pertencem a um politopo, existe um escalar positivo suficientemente grande  $\varepsilon_{b2}$  tal que  $\varepsilon_{b2} I_n \geq \Theta(x, \delta)' \Theta(x, \delta)$ . Portanto:

$$v(x, \delta) = \xi' P \xi \leq \varepsilon_{b1} (1 + \varepsilon_{b2}) x x' = \varepsilon_b x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (3.36)$$

- Condição (2.3).

Defina a seguinte matriz  $Q_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times (n+n_1)} & Q_1 & 0_{n \times m} \end{bmatrix}$ . Considere a LMI (3.34). Como esta LMI é estrita, para um escalar positivo e suficientemente pequeno  $\varepsilon_c$ , é possível adicionar o termo  $\varepsilon_c Q_2' Q_2$  a (3.34) sem modificar o seu sinal, isto é:

$$\text{He} \left( \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + W \begin{bmatrix} 0 & E & \Omega_2 \\ 0 & N & 0 \\ -F & G & H \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon_c}{2} Q_2' Q_2 \right) \leq 0$$

Pré- e pós-multiplicando a LMI acima por  $\begin{bmatrix} \dot{\xi} & \xi' & \pi' \end{bmatrix}$  e seu transposto, respectivamente, e lembrando que:

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega_1 x + \Omega_2 \pi \\ 0 &= N \xi \\ 0 &= -F \dot{\xi} + G \xi + H \pi \end{aligned}$$

obtém-se a seguinte inequação:

$$\dot{v}(x, \delta) = \dot{\xi}' P \xi + \xi' P \dot{\xi} \leq -\varepsilon_c x' x, \quad \forall (x, \delta) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \quad (3.37)$$

Note em (3.37) que: (a)  $\Omega_1 x + \Omega_2 \pi = 0$  pela definição da decomposição não linear (3.2); (b)  $N\xi = 0$  por construção a partir de  $M_x x = 0$  e (3.10); e (c)  $F\dot{\xi} = G\xi + H\pi$  é uma representação compacta da seguinte relação:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{\Theta}x + \Theta\dot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta + \tilde{\Theta} \\ I_n \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} \hat{\Theta} \\ 0_n \end{bmatrix} x$$

- Condição (2.4).

A partir dos resultados apresentados na seção 3.3, o conjunto de LMIs em (3.33) implica na seguinte relação de inclusão:

$$\Upsilon \triangleq \left\{ x : v(x, \delta) = \xi' P \xi \leq 1 \right\} \subset \mathcal{B}_x, \quad \forall \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (3.38)$$

Resumindo, a partir de (3.35), (3.36) e (3.37),  $v(x, \delta)$  definida em (3.9) é uma função de Lyapunov para o sistema (em  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ ). Além disso, o conjunto  $\Upsilon$  é invariante e, portanto, para todo  $x(0) \in \Upsilon$  a trajetória  $x(t) \in \Upsilon \quad \forall t \geq 0$  e tende a origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

□

Para ilustrar a aplicação do teorema 3.1 na análise de estabilidade regional de sistemas não lineares, considere os seguintes exemplos.

**Exemplo 3.4** Considere o sistema (3.4) (com  $\varepsilon = 1$ ) e a decomposição não linear (3.5). Visando um estudo comparativo, defina as seguintes matrizes<sup>7</sup>  $\Theta(x)$ :

$$\Theta_a(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ x_2 I_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \Theta_b(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

Logo, as matrizes auxiliares  $\tilde{\Theta}(x)$  e  $\hat{\Theta}(\delta)$  são dadas por:

$$\tilde{\Theta}_a(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Theta}_b = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Theta}_a = 0 \quad e \quad \hat{\Theta}_b = 0.$$

<sup>7</sup>Observe que o sistema (3.4) não tem incertezas.

Seja o politopo  $\mathcal{B}_x$  definido pelo seguintes vértices:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2a \\ -0.2a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.6a \\ 1.1a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8a \\ 2.6a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2a \\ -0.2a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1.6a \\ -1.2a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.8a \\ -2.6a \end{bmatrix} \right\} \quad (3.39)$$

onde  $a$  é um dado escalar (o maior possível).

A figura 3.1 mostra as estimativas obtidas, representadas por  $\Upsilon_a$  (com  $a = 0.9$ ) e  $\Upsilon_b$  (com  $a = 0.7$ ) considerando as matrizes  $\Theta_a(x)$  e  $\Theta_b(x)$  respectivamente. Nesta mesma figura, as regiões  $\mathcal{R}$  e  $\Upsilon_0$  (com  $a = 0.6$ ) representam respectivamente: o domínio de atração exato, obtido pelo método da trajetória reversa [42], e uma estimativa utilizando uma matriz de Lyapunov constante<sup>8</sup> (caracterizando uma função de Lyapunov quadrática).

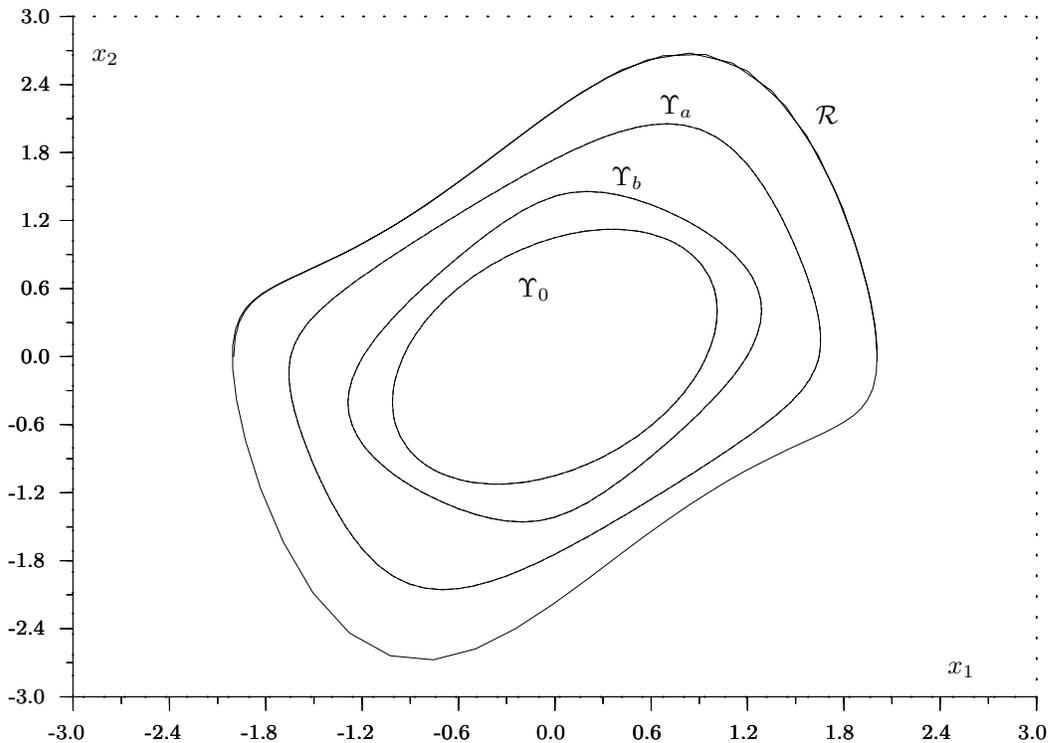


Figura 3.1: Estimativas do domínio de atração do sistema (3.4).

**Exemplo 3.5** Considere o exemplo 3.2 com os seguintes valores [43]:

$$\epsilon_0 = 0.8 \quad e \quad \Delta\epsilon = 0.2.$$

<sup>8</sup>Veja a observação 3.3.

Defina a função de Lyapunov utilizando a seguinte matriz  $\Theta(x, \delta)$ :

$$\Theta(x, \delta) = \begin{bmatrix} x_1 I \\ x_2 I \\ \delta I \end{bmatrix},$$

e considere o mesmo politopo  $\mathcal{B}_x$  definido no exemplo 3.4.

A figura 3.2 mostra as seguintes estimativas do domínio de atração:  $\Upsilon_1$  (função de Lyapunov polinomial) e  $\Upsilon_0$  (função de Lyapunov quadrática).

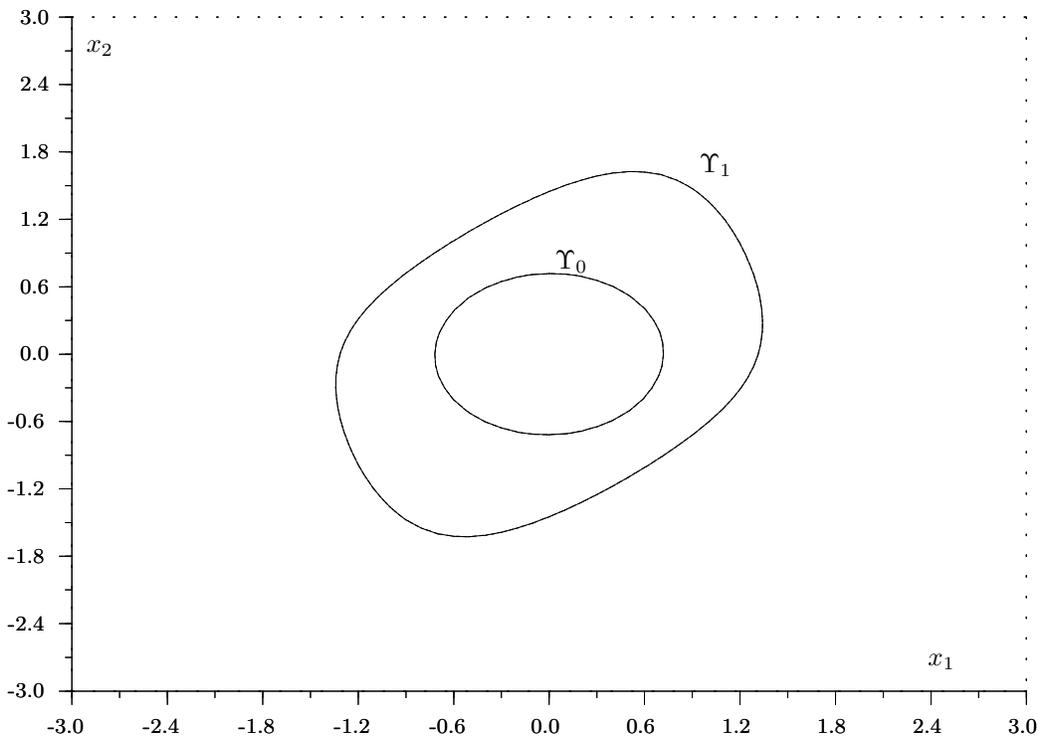


Figura 3.2: Estimativas do domínio de atração do sistema (3.7).

Analisando os resultados dos exemplos 3.4 e 3.2 a melhor estimativa do domínio de atração foi obtida utilizando uma função de Lyapunov mais complexa justificando o maior esforço computacional.

### 3.5 Não Linearidades Trigonométricas

Nesta seção mostra-se como representar sistemas com não linearidades do tipo trigonométrica na forma (3.2). Com esta finalidade, considere o seguinte sistema de

potência transladado para a origem [44]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 \sin x_1 + \alpha_3 \cos x_1 + \beta_1 \end{cases} \quad (3.40)$$

onde  $\alpha_1 = -0.58$ ,  $\alpha_2 = -33.95$ ,  $\alpha_3 = -29.40$ ,  $\beta_1 = 29.40$  e  $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Para o sistema acima, defina as seguintes variáveis:

$$x_3 = \sin x_1 \quad \text{e} \quad \tau = \cos x_1.$$

Com esta definição é possível construir as seguintes equações:

$$(i) \dot{x}_3 = \tau x_2 \quad (\text{diferencial}) \quad \text{e} \quad (ii) x_3^2 + \tau^2 - 1 = 0 \quad (\text{algébrica})$$

Obtendo-se o seguinte sistema aumentado na forma algébrico-diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 \tau + \beta_1 \\ \dot{x}_3 = \tau x_2 \\ 0 = x_3^2 + \tau^2 - 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

**Observação 3.4** *Por construção, as trajetórias do sistema (3.41) incluem todas as trajetórias do sistema original (3.40). Em particular, suponha que  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  sejam as condições iniciais do sistema (3.40). Então, para as condições iniciais  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  e  $x_3(0) = \sin x_1(0)$  ambos os sistemas tem trajetórias idênticas no sub-espaço  $(x_1, x_2)$ .*

Observe que o sistema aumentado (3.41) pode ser colocado na forma (3.2) através da seguinte representação:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pi \\ 0 = \Omega_1 x + \Omega_2 \pi \end{cases} \quad (3.42)$$

onde os vetores e matrizes auxiliares são dados por:

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ & I_3 & \\ 0_{1 \times 3} & & \\ & \tau I_3 & \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} & \tau & -1 \\ & 0_3 & -x \\ 0_{1 \times 3} & 1 & -\tau \\ -I_3 & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} \tau x \\ \tau \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pela decomposição não linear acima, observa-se que as matrizes  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são funções afins em  $\tau$  (variável algébrica). Com isso, considere a seguinte suposição adicional para sistemas com não linearidades trigonométricas:

**H2.3** *O vetor de variáveis algébricas,  $\tau \in \mathbb{R}^r$ , é limitado a uma região politópica conhecida, isto é:  $\tau \in \mathcal{B}_\tau$ .*

Com as considerações acima, pode-se estimar o domínio de atração do sistema (3.40) através do teorema 3.1 levando em conta que as LMIs (3.32)-(3.34) devam ser construídas nos vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \times \mathcal{B}_\tau$ .

Com esta finalidade, considere que os politopos  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\tau$  são dados respectivamente por:

$$\mathcal{B}_x = \mathbf{Co} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ -c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ -c \\ -e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \\ -e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ -c \\ -e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -b \\ c \\ -e \end{bmatrix} \right\}$$

e  $\mathcal{B}_\tau = [0, f]$ , onde  $a, b$  e  $c$  são escalares positivos determinados de forma a maximizar a estimativa da região de atração,  $d = \sin(a)$ ,  $e = \sin(b)$  e  $f = \cos(a)$ . Lembre-se que este sistema não tem incertezas.

Defina a função candidata a Lyapunov considerando que  $\Theta(x)$  é dado pela seguinte expressão:

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_3 \\ x_2 I_3 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Na figura 3.3, apresentam-se estimativas do domínio de atração do sistema (3.40) utilizando a matrix  $\Theta(x)$  em (3.43), representado pela região  $\Upsilon_1$  (com  $a = 2$ ,  $b = 1.1$ , e  $c = 12$ ); considerando uma função de Lyapunov quadrática, região  $\Upsilon_0$ ; além de uma trajetória simulando a perda de uma linha de transmissão. Observa-se que a trajetória  $x(t)$  (representada por +++) após a correção da falta deixa a região  $\Upsilon_1$ , mas retorna assim que o estado converge à origem. Na literatura de controle esta propriedade é

conhecida como pseudo-invariância [45]. Neste exemplo, esta característica é devido à região  $\Upsilon_1$  ser invariante apenas para o sistema aumentado  $(x_1, x_2, x_3)$ . A região na figura 3.3 é a intersecção de  $\Upsilon_1$  com o plano  $x_1, x_2$ .

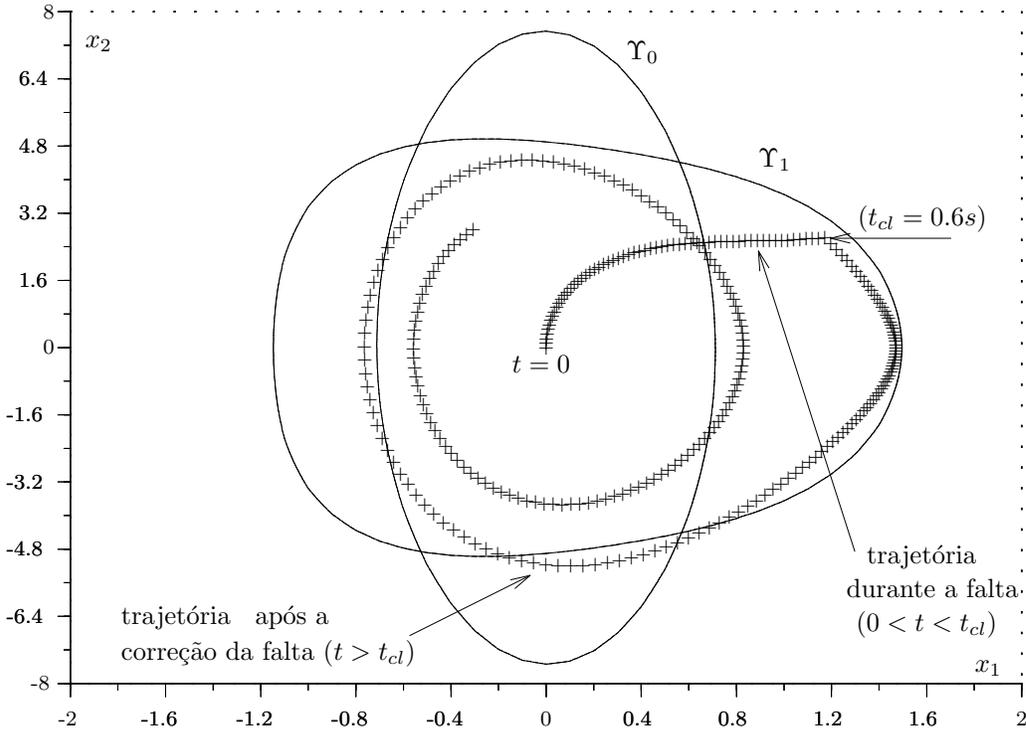


Figura 3.3: Estimativas do domínio de atração do sistema (3.40).

Através da região  $\Upsilon_1$ , obtida utilizando uma função de Lyapunov polinomial, é possível estimar um melhor tempo de correção da falha,  $t_{cl} = 0.6s$ , justificando um maior esforço computacional. Em geral para sistemas de potência o domínio de atração não é um região simétrica (em relação a origem). Desta forma, os métodos menos conservadores para estimar-se o domínio de atração levam em conta a trajetória do sistema [46], que é o caso do método proposto neste trabalho<sup>9</sup>.

**Observação 3.5** *A metodologia proposta nesta seção pode ser generalizada para analisar a estabilidade regional de sistemas não lineares na forma algébrico-diferencial (lembre-se que o sistema aumentado (3.41) está nesta forma). Em muitos sistemas dinâmicos é mais natural uma descrição utilizando equações algébrico-diferenciais, como por exemplo os sistemas de potência [47]. A obtenção de modelos na forma puramente diferencial em tais casos é algumas vezes não factível ou freqüentemente*

<sup>9</sup>Note que a matrix  $\mathcal{P}(x)$  é função quadrática da trajetória do sistema.

*inconveniente, seja por motivos analíticos ou numéricos. Além disso, o uso de métodos que preservam a estrutura original do sistema (como, por exemplo, a técnica proposta nesta seção) tem demonstrado ser vantajoso para esta classe de sistemas [46]. Para maiores detalhes sobre este assunto veja [44].*

### 3.6 Sistemas Sujeitos a Saturação

Em geral, os sistemas dinâmicos são sujeitos a restrições do tipo saturação no sinal de controle. No caso de sistemas lineares, existe uma vasta literatura dedicada à análise de estabilidade e desempenho, e síntese de controle para sistemas sujeitos a saturação utilizando LMIs, como por exemplo [48], [27], [34], [49] e [50]. Entretanto a extensão desses resultados para o caso não linear é um problema de difícil solução, levando em geral a métodos que combinam a teoria de Lyapunov com outras técnicas, por exemplo a referência [51] que utiliza a teoria de bifurcações em conjunto com a de Lyapunov.

Nesta seção, aborda-se o problema da estabilidade regional de sistemas não lineares sujeitos a saturação do sinal de controle utilizando o resultado proposto no teorema 3.1 e descrevendo a saturação através de uma condição do tipo setor (para maiores detalhes veja [52]). Com este objetivo, considere a seguinte classe de sistemas não lineares:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x, \delta)x + B(x, \delta)u \\ u &= \text{sat}(Kx) \end{aligned} \tag{3.44}$$

onde  $u \in \mathbb{R}$  representa o sinal de controle,  $B(x, \delta) \in \mathbb{R}^n$  é uma função vetorial contínua e limitada para todo  $(x, \delta) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ ,  $K' \in \mathbb{R}^n$  é um dado vetor constante e  $\text{sat}(\cdot)$  representa o operador saturação definido da seguinte forma:

$$\text{sat}(Kx) = \begin{cases} 1 & Kx > 1 \\ Kx & \text{se } |Kx| \leq 1 \\ -1 & Kx < -1 \end{cases} \tag{3.45}$$

Um possível maneira de considerar-se a saturação é a de restringir a amplitude do sinal de entrada  $u(t)$  através de uma restrição no vetor de estados [48]. Desta forma, definindo o escalar  $\rho \geq 0$  como a máxima amplitude permitida ao sinal de controle  $Kx$  acima do nível de saturação, que a partir deste ponto será denominado de nível de

sobre-saturação [53], a restrição:

$$|u(t)| \leq 1 + \rho$$

é satisfeita se e somente se o estado do sistema pertence ao conjunto

$$\mathcal{X}_\rho \triangleq \{x : |Kx| \leq 1 + \rho\}$$

Observe quando  $\rho = 0$  (isto é:  $x \in \mathcal{X}_0$ ) que o sistema (3.44) comporta-se de acordo com a seguinte dinâmica:

$$\dot{x} = (A(x, \delta) + B(x, \delta)K)x$$

e, portanto, pode-se aplicar os resultados das seções anteriores com a restrição adicional  $\Upsilon \subset \mathcal{X}_0$  para analisar-se sua estabilidade. Entretanto, o vetor de estados frequentemente converge a origem a partir de uma condição inicial fora da região  $\Upsilon \subset \mathcal{X}_0$  o que pode gerar resultados bastante conservadores.

Uma maneira mais apropriada para considerar a saturação é a de permitir um certo nível de sobre-saturação (considerando  $\rho > 0$ ) através do critério do círculo. Desta forma, a seguinte restrição de setor pode ser associada ao operador  $\text{sat}(\cdot)$  [34]:

$$(u - Kx) \left( u - \frac{1}{1 + \rho} Kx \right) \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}_\rho \quad (3.46)$$

Com a restrição acima, pode-se utilizar o  $\mathcal{S}$ -Procedure (lema 2.4) para anexar a condição (3.46) na inequação de Lyapunov (2.3). Portanto, existe um escalar  $\mu$  positivo tal que a seguinte inequação é satisfeita para todo  $x \in \mathcal{B}_x \cap \mathcal{X}_\rho$  e  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ :

$$\dot{v}(x, \delta) - \mu u^2 + \mu \rho_1 (uKx + x' K' u) - \mu \rho_2 x' K' Kx \leq -\varepsilon_c x' x \quad (3.47)$$

onde

$$\rho_1 = \frac{2 + \rho}{2(1 + \rho)} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{1}{(1 + \rho)}$$

Com relação ao sistema (3.44), suponha que este sistema não saturado possa ser

descrito na seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1(x, \delta)x + A_2(x, \delta)\pi + B_\phi(x, \delta)\phi \\ 0 = \Omega_1(x, \delta)x + \Omega_2(x, \delta)\pi \\ 0 = \Phi(x, \delta)\phi \end{cases} \quad (3.48)$$

onde  $\phi \in \mathbb{R}^p$  é uma função vetorial não linear em  $(x, \delta)$  e linear em  $u$ ,  $B_\phi(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $\Phi(x, \delta) \in \mathbb{R}^{\sigma \times p}$ . Para a decomposição não linear (3.48) serão feitas as seguintes hipóteses adicionais:

**H2.4a** As matrizes  $B_\phi(x, \delta)$  e  $\Phi(x, \delta)$  são funções afins em  $(x, \delta)$ .

**H2.4b** O sinal de entrada  $u$  é um dos elementos do vetor auxiliar  $\phi$ . Portanto, existe um vetor linha  $s_\phi$  tal que  $s_\phi\phi = u$ . Em particular, considere que:

$$\phi = \begin{bmatrix} u \\ \phi_1 \end{bmatrix} \quad e \quad s_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Com as hipóteses acima, pode-se utilizar o lema 2.1, substituindo (2.3) por (3.47), para analisar a estabilidade regional do sistema (3.44). Entretanto, lembre-se que a condição de setor só será válida para todo  $x \in \mathcal{X}_\rho$ . Desta forma, deve-se também considerar a restrição  $\Upsilon \subset \mathcal{X}_\rho$  nas condições de estabilidade.

Com este objetivo, redefine-se o poliedro  $\mathcal{X}_\rho$  da seguinte forma:

$$\mathcal{X}_\rho \triangleq \{x : e_i x \leq 1, i = 1, 2\} \quad (3.50)$$

onde

$$e_1 = \frac{1}{(1+\rho)}K \quad e \quad e_2 = -\frac{1}{(1+\rho)}K.$$

Logo, pode-se utilizar o procedimento da seção 3.3 para determinar uma formulação LMI para a relação de inclusão  $\Upsilon \subset \mathcal{X}_\rho$ . Na seqüência, uma solução convexa é proposta para o problema de estabilidade regional da classe de sistemas não lineares saturados definida em (3.44) com base no teorema 3.1 e nas considerações acima definidas.

**Teorema 3.2** Considere o sistema não linear saturado (3.44), as hipóteses **H2.1a-c**, **H2.2** e **H2.4a,b**, a notação auxiliar (3.31) e defina:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times 1} \\ K' \end{bmatrix} & \Gamma &= \begin{bmatrix} 0 & E & \Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi \\ 0 & N & 0 & 0 \\ -F & G & H & J \end{bmatrix} \\ J &= \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times 1} \\ B_\phi(x, \delta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Seja  $\Theta(x, \delta)$  uma dada matriz afim em  $(x, \delta)$  e considere a definição das matrizes auxiliares  $\tilde{\Theta}(x)$  e  $\hat{\Theta}(\delta)$  em (3.18). Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  regiões politópicas conhecidas representando uma vizinhança da origem do sistema e os valores admissíveis de  $(\delta, \dot{\delta})$  respectivamente.

Suponha que as matrizes  $P = P'$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $L_1, \dots, L_{n_f}$ ,  $W$ , e o escalar  $\mu$  positivo sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as matrizes são construídas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{trace}(P + RN + N'R') \text{ sujeito a} \\ & P + RN + N'R' > 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} 0 & a'_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ a_k \end{bmatrix} & (P + L_k N + N' L'_k) \end{bmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n_f \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} (1 + \rho)^2 & \bar{K}' \\ \bar{K} & (P + SN + N'S') \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & -\mu\rho_2 \bar{K} \bar{K}' & 0 & \mu\rho_1 \bar{K} s_\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\rho_1 s'_\phi \bar{K}' & 0 & -\mu s'_\phi s_\phi \end{bmatrix} + W\Gamma + \Gamma'W' < 0 \quad (3.55)$$

Então, para todo  $x(0) \in \Upsilon$  a trajetória  $x(t) \in \Upsilon \forall t \geq 0$  e converge para a origem do sistema quando  $t \rightarrow \infty$ , onde  $\Upsilon$  é dado pela expressão (3.26).

## Prova do teorema 3.2

Considere a prova do teorema 3.1. Então, as LMIs (3.52), (3.53) e (3.54) implicam respectivamente que:

- (i) Existem dois escalares positivos  $\varepsilon_a$  e  $\varepsilon_b$  tais que  $\varepsilon_a x'x \leq \xi' P \xi \leq \varepsilon_b x'x$ , para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ ;

(ii)  $\Upsilon = \{x : \xi' P \xi \leq 1\} \subset \mathcal{B}_x$  para todo  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ ; e

(iii)  $\Upsilon \subset \mathcal{X}_\rho = \{x : |Kx| \leq (1 + \rho)\}$  para todo  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ .

Defina a seguinte matriz:

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0_{n \times (n+n_1)} & Q_1 & 0_{n \times m} & 0_{n \times p} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Utilizando os mesmos argumentos da prova do teorema 3.1, existe um escalar positivo  $\varepsilon_c$  tal que:

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & -\mu\rho_2\bar{K}\bar{K}' & 0 & \mu\rho_1\bar{K}s_\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu\rho_1s'_\phi\bar{K}' & 0 & -\mu s'_\phi s_\phi \end{bmatrix} + W\Gamma + \Gamma'W' \leq -\varepsilon_c Q'_3 Q_3$$

Pré- e pós-multiplicando a LMI acima por  $[\xi' \quad \xi' \quad \pi' \quad \phi']$  e pelo seu transposto implica em (3.47).

Então,  $v(x, \delta) = \xi' P \xi$  é uma função de Lyapunov para  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Além disso,  $\Upsilon$  é um conjunto invariante para a origem do sistema (3.44).  $\square$

**Observação 3.6** *A metodologia proposta nesta seção pode ser estendida facilmente para um sistema com  $n_u$  entradas se a saturação em cada entrada não estiver acoplada às outras entradas como em [48]. Neste caso, o vetor saturação (com  $n_u$  elementos) é dado por:*

$$\text{sat}(Kx) \triangleq \begin{bmatrix} \text{sat}(K_1x) & \cdots & \text{sat}(K_{n_u}x) \end{bmatrix}' \quad (3.57)$$

onde  $K'_i \in \mathbb{R}^n$  e os operadores escalares  $\text{sat}(K_i x)$ , para  $i = 1, \dots, n_u$ , correspondem respectivamente a  $i$ -ésima linha da matriz de ganhos  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  e os elementos da função vetorial definida em (3.57). Desta forma, é possível aplicar o teorema 3.2 considerando  $n_u$  restrições na forma  $\Upsilon \subset \mathcal{X}_{\rho_i} = \{x : |K_i x| \leq (1 + \rho_i)\}$ .

**Exemplo 3.6** *Considere o seguinte sistema que representa a dinâmica de um pêndulo invertido sujeito a saturação:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 - x_2 + u \\ u = \text{sat}(K_0 x) \end{cases} \quad (3.58)$$

onde  $K_0 = [ -2 \ 0 ]$ .

Utilizando o método proposto na seção 3.5, isto é define-se  $x_3 = \sin(x_1)$  e  $\tau = \cos(x_1)$ , obtém-se o seguinte sistema aumentado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 = \tau x_2 \\ 0 = x_3^2 + \tau^2 - 1 \\ u = \text{sat}(Kx) \end{cases} \quad (3.59)$$

onde  $K = [ -2 \ 0 \ 0 ]$ .

Portanto, o sistema (3.59) pode ser decomposto na seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \pi + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ 0 = \Omega_1 x + \Omega_2 \pi \\ u = \text{sat}(Kx) \end{cases} \quad (3.60)$$

onde:

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \\ & I_3 & \\ & \tau I_3 & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -x_2 & 0 \\ 0 & \tau & -1 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -\tau \end{bmatrix}. \\ \pi &= \begin{bmatrix} \tau x_2 \\ \tau \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Seja a matriz  $\Theta(x, \delta)$  dada por:

$$\Theta(x, \delta) = \Theta(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_3 \\ x_2 I_3 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Considere as seguintes definições: (i) para os vértices politopos  $\mathcal{B}_x$ ,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.8\alpha \\ -2\alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8\alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.8\alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.8\alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8\alpha \\ -2\alpha \\ -\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.8\alpha \\ 0 \\ -\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.8\alpha \\ 2\alpha \\ -\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.8\alpha \\ 0 \\ -\beta \end{bmatrix} \right\}$$

e (ii) do politopo  $\mathcal{B}_\tau = [0, \gamma]$ , onde  $\alpha$  é um escalar a ser determinado,  $\beta = \sin(\alpha)$  e  $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$ .

A figura 3.4 mostra estimativas do domínio de atração para o sistema (3.58) representadas pelas regiões  $\Upsilon_p$  (função polinomial definida pela matriz  $\Theta(x, \delta)$  dada em (3.61)) e  $\Upsilon_q$  (função quadrática) com  $\alpha = 2.0$  e  $\rho = 2$ . Para um estudo comparativo, as separatrizes do plano de fase do sistema também são mostradas nesta figura.

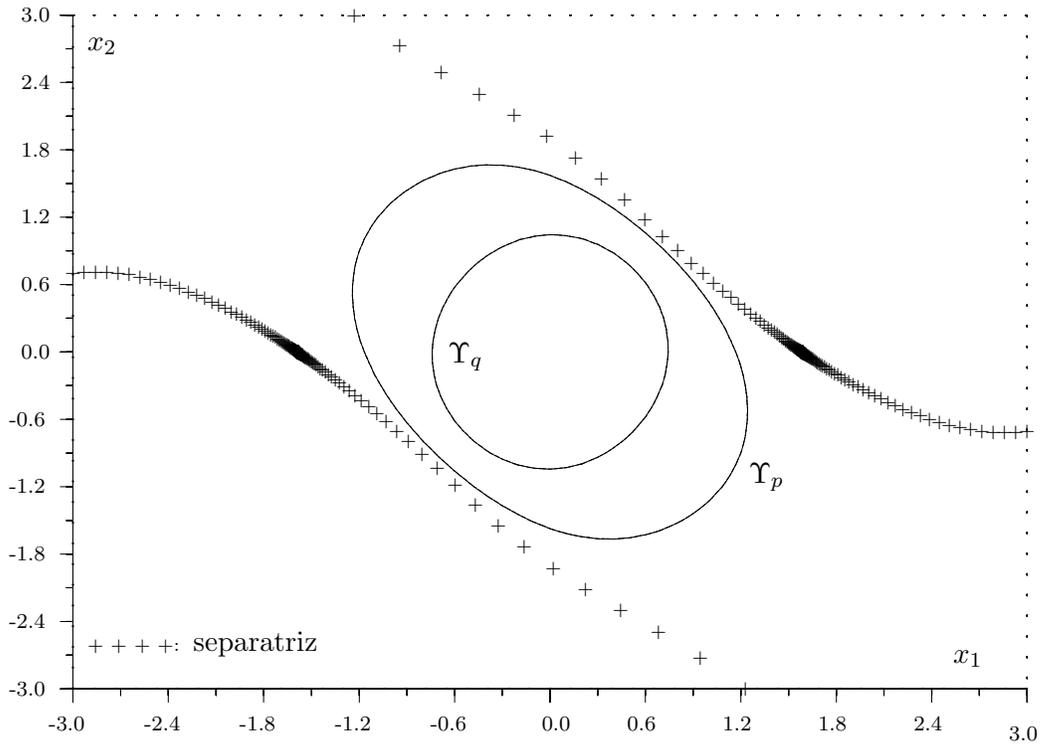


Figura 3.4: Estimativas do domínio de atração do sistema (3.58).

# Capítulo 4

## Análise de Desempenho

Em geral, para sistemas dinâmicos de controle não é suficiente apenas determinar a sua estabilidade, isto é, deve-se de alguma forma garantir um desempenho mínimo para o sistema de controle. Existem várias formas de determinar-se o desempenho de sistemas dinâmicos, como por exemplo a velocidade com que os estados convergem ao ponto de equilíbrio [54], o valor de um determinado custo (em geral, uma função quadrática) que envolva os estados do sistema [55], e o grau com que a resposta dinâmica é afetada por perturbações externas [56].

Neste capítulo, abordam-se os três casos acima citados para a classe de sistemas não lineares definida no capítulo 3. Apresenta-se para cada caso uma solução convexa em termos de LMIs. Na seção 4.1, estima-se o domínio de atração de um sistema não linear e a respectiva taxa de convergência dos estados. Na sequência, a seção 4.2 apresenta uma forma mais elaborada para analisar o desempenho do sistema através da determinação de um limitante superior da energia do sinal de saída que pode ser uma função não linear dos estados de interesse do sistema. Finalizando este capítulo, na seção 4.3 analisa-se a influência de perturbações externas ao sistema nas saídas de interesse através da determinação de um limitante superior para o ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entrada/saída do sistema.

### 4.1 Taxa de Convergência

Com base no lema 2.2 e na metodologia proposta no capítulo 3, pode-se estimar um domínio de atração, representada pela região  $\Upsilon_\rho$ , na qual a norma da trajetória  $x(t)$

do sistema satisfaz a seguinte relação:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a}} \|x(0)\| e^{-\varrho t}, \quad \forall x(0) \in \Upsilon_\varrho \quad (4.1)$$

onde  $\varrho$  é a taxa de convergência associada à região  $\Upsilon_\varrho$ . Observe que a otimização de ambos, domínio de atração e da taxa  $\varrho$  associada a esta região, é um problema de difícil solução, pois os objetivos são conflitantes em geral<sup>1</sup>. Portanto, nesta seção serão tratados os seguintes problemas:

**Problema 4.1** *Para uma dada taxa de convergência  $\varrho$  determinar uma estimativa  $\Upsilon_\varrho$  tal que para todo  $x(0) \in \Upsilon_\varrho$  a norma de  $x(t)$  satisfaz (4.1).*

**Problema 4.2** *Para um dado conjunto invariante  $\Upsilon_\varrho \triangleq \{x : x' \mathcal{P}_\varrho(x, \delta)x \leq 1\} \subset \mathcal{B}_x$ , onde a matriz  $\mathcal{P}_\varrho(x, \delta)$  é dada, determinar um limitante inferior para a taxa de convergência  $\varrho$ , isto é, determinar um escalar  $\bar{\varrho}$  tal que  $\varrho \geq \bar{\varrho}$  para todo  $x(0) \in \Upsilon_\varrho$ .*

## Região de Atração com Taxa de Convergência Garantida

Considere o sistema não linear (3.1), o lema 2.2 e a função de Lyapunov definida em (3.9). A região de atração associada a uma dada taxa de convergência  $\varrho$  pode ser estimada através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & x' \mathcal{P}(x, \delta)x \quad \text{sujeito a:} \\ & x' \mathcal{P}(x, \delta)x > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$2\dot{x}' \mathcal{P}(x, \delta)x + x' \left( \dot{\mathcal{P}}(x, \delta) + 2\varrho \mathcal{P}(x, \delta) \right) x < 0 \quad (4.3)$$

$$\Upsilon_\varrho = \left\{ x : x' \mathcal{P}(x, \delta)x \leq 1 \right\} \subset \mathcal{B}_x \quad (4.4)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ .

A seguir, apresenta-se uma solução convexa para o problema acima utilizando a metodologia apresentada no capítulo 3.

**Teorema 4.1** *Considere o sistema não linear (3.1) (com as hipóteses **H2.1a-c**), a sua decomposição não linear (3.2) (com a hipótese **H2.2**) e a notação auxiliar (3.31). Seja  $\Theta(x, \delta)$  uma dada matriz afim em  $(x, \delta)$  e considere a definição das matrizes auxiliares  $\tilde{\Theta}(x)$  e  $\hat{\Theta}(\dot{\delta})$  em (3.18). Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  regiões politópicas conhecidas representando*

<sup>1</sup>Veja que próximo da verdadeira região de atração a taxa de convergência é em geral bem pequena.

uma vizinhança da origem do sistema e os valores admissíveis de  $(\delta, \dot{\delta})$  respectivamente. Seja  $\varrho$  uma dada taxa de convergência (valor desejado).

Suponha que as matrizes  $P = P'$ ,  $R$ ,  $L_1, \dots, L_{n_f}$  e  $W$  sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as matrizes são construídas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ :

$$\min \text{trace}(P + RN + N'R') \text{ sujeito a} \\ P + RN + N'R' > 0 \quad (4.5)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} 1 & \begin{bmatrix} 0 & a'_k \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \\ a_k \end{bmatrix} & (P + L_k N + N' L'_k) \end{array} \right] \geq 0, \quad k = 1, \dots, n_f \quad (4.6)$$

$$\text{He} \left( \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ 0 & \varrho P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + W \begin{bmatrix} 0 & E & \Omega_2(x, \delta) \\ 0 & N & 0 \\ -F & G & H \end{bmatrix} \right) < 0 \quad (4.7)$$

Então a origem do sistema (3.1) é exponencialmente estável e  $v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta)x$  é uma função de Lyapunov para o sistema em  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Além disso, para todo  $x(0) \in \Upsilon_\varrho = \{x : v(x, \delta) \leq 1\}$  existem dois escalares positivos  $\varepsilon_a$  e  $\varepsilon_b$  tais que a norma da trajetória  $x(t)$  satisfaz a relação (4.1).

A prova deste teorema é direta a partir da prova do teorema 3.1 e do lema 2.2. A seguir, apresenta-se um exemplo numérico para ilustrar a aplicação deste teorema.

**Exemplo 4.1** Considere o sistema do exemplo 3.4,  $\Theta(x) = [x_1 I_2 \quad x_2 I_2]'$  e o politopo definido em (3.39). A figura 4.1 mostra duas estimativas do domínio de atração  $\Upsilon_1$  (com  $\mathcal{P}(x)$  quadrática e  $a = 0.6$ ) e  $\Upsilon_0$  (com  $\mathcal{P}(x)$  constante e  $a = 0.45$ ) para uma taxa de convergência  $\varrho = 0.1$ . Observe que a função de Lyapunov polynomial obteve a melhor estimativa do domínio de atração para uma dada taxa de convergência.

## Taxa de Convergência para uma dada Região Invariante

Considere o sistema não linear (3.1), o lema 2.2 e a função de Lyapunov definida em (3.9). A taxa de convergência  $\varrho$  associada a uma dada região invariante  $\Upsilon_\varrho = \{x : x' \mathcal{P}_\varrho(x, \delta)x \leq 1\}$  pode ser estimada através do seguinte problema de otimização:

$$\max \quad \varrho \text{ sujeito a:}$$

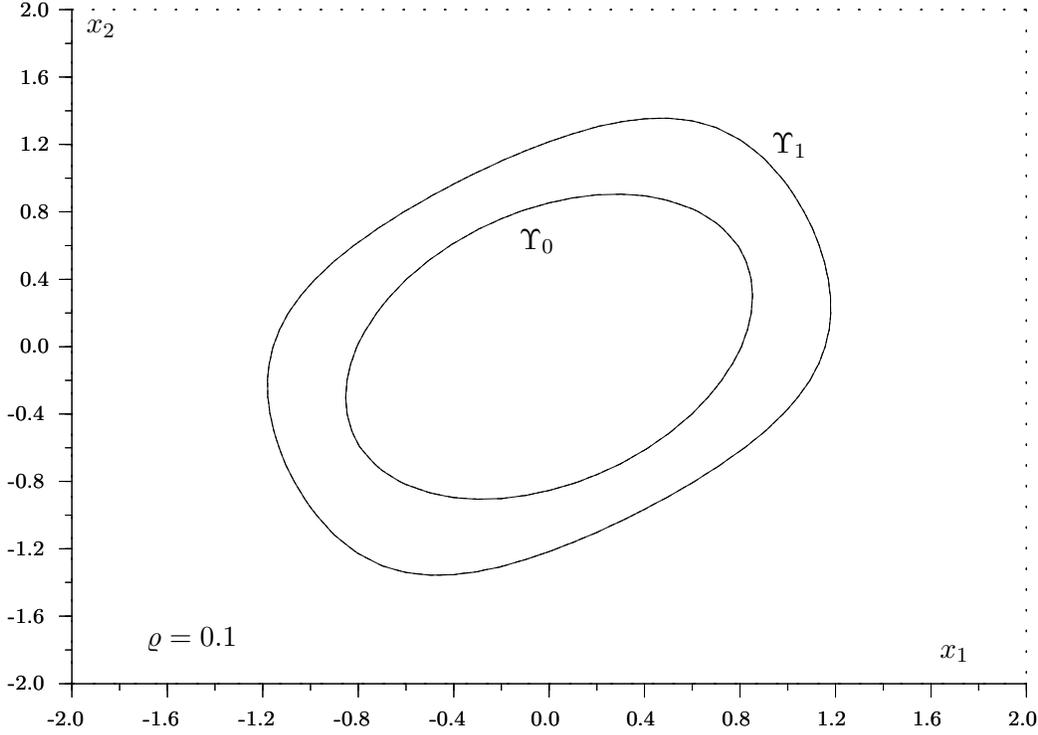


Figura 4.1: Estimativas do domínio de atração do sistema (3.4) com  $\rho = 0.1$ .

$$x' (\mathcal{P}_\rho(x, \delta) - \mathcal{P}(x, \delta)) x \geq 0 \quad (4.8)$$

$$x' \mathcal{P}(x, \delta) x > 0 \quad (4.9)$$

$$2\dot{x}' \mathcal{P}(x, \delta) x + x' (\dot{\mathcal{P}}(x, \delta) + 2\rho \mathcal{P}_\rho(x, \delta)) x < 0 \quad (4.10)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ .

Observe que no problema de otimização acima as condições (4.8), (4.9) e (4.10) implicam respectivamente nas seguintes relações:

- i.  $x' \mathcal{P}_\rho(x, \delta) x \geq v(x, \delta)$  e  $\Upsilon_\rho \subseteq \{x : v(x, \delta) \leq 1\}$ ,  $\forall \delta \in \mathcal{B}_\delta$ ;
- ii.  $v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta) x > 0$ ;
- iii.  $\dot{v}(x, \delta) + 2\rho x' \mathcal{P}_\rho(x, \delta) x \leq \dot{v}(x, \delta) + 2\rho v(x, \delta) < 0$ .

A seguir, apresenta-se uma solução convexa para o problema acima utilizando a metodologia apresentada no capítulo 3.

**Teorema 4.2** *Considere o sistema não linear (3.1) (com as hipóteses **H2.1a-c**), a sua decomposição não linear (3.2) (com a hipótese **H2.2**) e a notação auxiliar (3.31). Seja  $\Theta(x, \delta)$  uma dada matriz afim em  $(x, \delta)$  e considere a definição das matrizes auxiliares*

$\tilde{\Theta}(x)$  e  $\hat{\Theta}(\delta)$  em (3.18). Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  regiões politópicas conhecidas representando uma vizinhança da origem do sistema e os valores admissíveis de  $(\delta, \dot{\delta})$  respectivamente. Seja

$$\Upsilon_\varrho = \left\{ x : \xi' P_\varrho \xi \leq 1 \right\}$$

uma dada região invariante contida em  $\mathcal{B}_x$ .

Suponha que as matrizes  $P = P'$ ,  $R$ ,  $L$  e  $W$  e o escalar  $\bar{\varrho}$  sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as matrizes são construídas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ :

max  $\bar{\varrho}$  sujeito a

$$P + RN + N'R' > 0 \quad (4.11)$$

$$P_\varrho - P + LN + N'L' \geq 0 \quad (4.12)$$

$$\text{He} \left( \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ 0 & \bar{\varrho}P_\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + W \begin{bmatrix} 0 & E & \Omega_2(x, \delta) \\ 0 & N & 0 \\ -F & G & H \end{bmatrix} \right) < 0 \quad (4.13)$$

Então a origem do sistema (3.1) é exponencialmente estável e  $v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta) x$  é uma função de Lyapunov para o sistema em  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Além disso,  $\bar{\varrho}$  é um limitante inferior da taxa de convergência  $\varrho$  associada a região  $\Upsilon_\varrho$ .

## Prova do teorema 4.2

Utilizando os mesmos argumentos da prova do teorema 3.1, as LMIs (4.11) e (4.13) implicam que  $v(x, \delta) = \xi' P \xi$  é uma função de Lyapunov. Note que pré- e pós-multiplicando (4.11) por  $[ x' \Theta(x, \delta)' \quad x' ]$  e seu transposto, respectivamente, obtém-se a condição (4.9).

Considere a LMI (4.12). Pré e pós multiplicando-a por  $\xi'$  e  $\xi$  obtém-se:

$$\xi' P_\varrho \xi \geq \xi' P \xi \quad (4.14)$$

De forma similar, a LMI (4.13) implica em (4.10). Observe que pré- e pós-multiplicando a LMI (4.13) por  $[ \dot{\xi}' \quad \xi' \quad \pi' ]$  e seu transposto, respectivamente, obtém-se:

$$2\dot{\xi}' P \xi + 2\bar{\varrho}\xi' P \xi \leq 2\dot{\xi}' P \xi + 2\bar{\varrho}\xi' P_\varrho \xi < 0 \quad (4.15)$$

Então,  $\{x : \xi' P_\varrho \xi \leq 1\} \subseteq \{x : \xi' P \xi \leq 1\}$  pelas relações (4.14) e (4.15) e  $\{x : \xi' P_\varrho \xi \leq 1\} \subset \mathcal{B}_x$  por hipótese. Logo, como as condições do problema de otimização no Teorema

4.2 são apenas suficientes, conclui-se que  $\bar{\rho} \leq \rho$ .

□

**Exemplo 4.2** Considere o sistema do exemplo 3.4,  $\Theta(x) = [x_1 I_2 \quad x_2 I_2]'$  e o politopo definido em (3.39). Seja  $\Upsilon_\rho = \{x : x' P_0 x \leq 1\} \subset \mathcal{B}_x$  uma dada região invariante, onde

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1.53 & -0.48 \\ -0.48 & 1.37 \end{bmatrix}$$

A tabela 4.1 mostra estimativas da taxa de convergência  $\rho$  associada à região  $\Upsilon_\rho$  para diferentes matrizes de Lyapunov.

limitante da taxa de convergência	função de Lyapunov	
	quadrática	polinomial
$\bar{\rho}$	0.1	0.3

Tabela 4.1: Estimativas da taxa de convergência.

## 4.2 Energia de Saída

Considere que o sistema (3.1) tenha um sinal de saída dado por  $z = g(x, \delta)$  com uma condição inicial  $x(0) = x_0$ , em outras palavras:

$$\dot{x} = f(x, \delta), \quad z = g(x, \delta), \quad x(0) = x_0, \quad (4.16)$$

onde  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  representa o vetor de desempenho do sistema e  $g(x, \delta)$  é uma função não linear em  $(x, \delta)$ .

O problema de interesse nesta seção é determinar um limitante  $c$  da norma-2 do sinal de saída do sistema (4.16), isto é,  $\|z\|_2^2 \leq c$  para todos os valores de  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$  e para qualquer  $x_0 \in \mathcal{R}_c$  onde  $\mathcal{R}_c$  é um conjunto invariante contido em  $\mathcal{B}_x$ . Com esta finalidade, a energia de saída será definida da seguinte maneira:

$$\|z\|_2^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T z' z \, dt, \quad x_0 \in \mathcal{R}_c \subset \mathcal{B}_x \quad (4.17)$$

Visando uma solução em termos de LMIs para o problema acima, suponha que o sistema (4.16) possa ser decomposto da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_1(x, \delta)x + A_2(x, \delta)\pi \\ z &= C_1(x, \delta)x + C_2(x, \delta)\pi \\ 0 &= \Omega_1(x, \delta)x + \Omega_2(x, \delta)\pi\end{aligned}\tag{4.18}$$

onde as matrizes  $A_1(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_2(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_1(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $C_2(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_z \times m}$ ,  $\Omega_1(x, \delta)$  e  $\Omega_2(x, \delta)$  são funções afins em  $(x, \delta)$ .

Da mesma forma que na definição da decomposição não linear em (3.2) considere a hipótese **H2.2** para o sistema (4.18).

Utilizando o lema 2.1 e o resultado proposto em [6, seção 6.2], um limitante da energia de saída do sistema (4.18) pode ser obtido através da seguinte modificação nas condições de estabilidade

$$\varepsilon_a x' x \leq v(x, \delta) \leq \varepsilon_b x' x \quad \text{e} \quad \dot{v}(x, \delta) < -z' z\tag{4.19}$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ . Na realidade a condição acima implica que  $\|z\|_2^2 \leq v(x(0), \delta(0))$ . Como  $\delta(0)$  pode assumir qualquer valor em  $\mathcal{B}_\delta$ , pode-se concluir que  $\|z\|_2^2 \leq v(x_0, \delta)$  para qualquer  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Além disso,  $x_0$  deve pertencer ao conjunto invariante  $\mathcal{R}_c \subset \mathcal{B}_x$ . Para caracterizar o conjunto  $\mathcal{R}_c$  considere a seguinte definição

$$\mathcal{R}_c \triangleq \{x : v(x, \delta) \leq c, \forall \delta \in \mathcal{B}_\delta, 0 \leq c \leq c^*\}\tag{4.20}$$

onde o escalar  $c^*$  é dado por:

$$c^* = \max c \quad \text{tal que} \quad \mathcal{R}_c \subset \mathcal{B}_x\tag{4.21}$$

Nota-se que a relação de inclusão  $\mathcal{R}_c \subset \mathcal{B}_x$  em (4.21) juntamente com (4.19) implica na invariância de  $\mathcal{R}_c$ . Além disso, o limitante superior de  $\|z\|_2^2$  dependerá do tamanho do conjunto invariante  $\mathcal{R}_c$  a ser considerado. Logo, nesta tese, será considerado o problema de estimar-se um limitante superior para o maior conjunto invariante  $\mathcal{R}_c$  contido em  $\mathcal{B}_x$ , isto é, com  $c$  o mais próximo possível de  $c^*$ .

Lembre-se que a determinação de  $c^*$  é um problema de difícil solução visto que  $v(x, \delta)$  pode depender dos parâmetros incertos do sistema e também não é uma função quadrática em  $x$ . No entanto, considerando que  $\mathcal{R}_c = \{x : c^{-1}x' \mathcal{P}(x, \delta)x \leq 1\}$  e utilizando os resultados propostos na seção 3.3 pode-se estimar  $c^*$  através do seguinte

problema de otimização:

$$\min \lambda : \lambda - 2a'_k x + x' \mathcal{P}(x, \delta) x \geq 0, \quad (4.22)$$

onde a condição acima é uma aplicação direta da condição (3.27) para uma região na forma  $\{x : \lambda x' \mathcal{P}(x, \delta) x \leq 1\}$ .

Logo, de forma similar ao problema de estabilidade regional, obtém-se a seguinte versão LMI para o problema de otimização definido em (4.22):

$$\min \lambda \text{ sujeito a :} \quad \left[ \begin{array}{c} \lambda \\ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ a_k \end{array} \right] \end{array} \quad \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} 0 & a'_k \end{array} \right] \\ (P + R_k N + N' R'_k) \end{array} \right] \right] \geq 0, \quad \forall k \quad (4.23)$$

para uma dada função de Lyapunov  $v(x) = x' \mathcal{P}(x, \delta) x$  como em (3.9), onde as LMIs devem ser construídas em todos os vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . No problema acima, as matrizes  $R_1, \dots, R_{n_f}$  são as variáveis de decisão,  $N$  é a mesma matrix definida em (3.31) e a estimativa de  $c^*$  é dada por  $c = \lambda^{-1} \leq c^*$ .

Então, com as considerações acima, a função de Lyapunov que satisfaz (4.19) pode ser obtida através do seguinte teorema.

**Teorema 4.3** *Considere que o sistema (3.2)-(4.18) satisfaça **H2.1a-c** e **H2.2**. Seja  $\Theta(x, \delta)$  uma dada matriz afim em  $(x, \delta)$  e considere a definição das matrizes auxiliares  $\tilde{\Theta}(x)$  e  $\hat{\Theta}(\delta)$  em (3.18). Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  regiões politópicas conhecidas representando uma vizinhança da origem do sistema e os valores admissíveis de  $(\delta, \dot{\delta})$  respectivamente. Considere a notação auxiliar (3.31).*

*Suponha que as matrizes  $P = P'$ ,  $R$  e  $L_{ij}$  sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as LMIs são satisfeitas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ .*

$$\begin{aligned} & \min \text{trace} (P + RN + N' R') \quad \text{sujeito à} \\ & P + RN + N' R' > 0 \quad (4.24) \\ & \text{He} \left[ \begin{array}{ccccc} -L_{12}F & L_{11}E + L_{12}G + L_{13}N & L_{11}\Omega_2 + L_{12}H & 0 & \\ P - L_{22}F & L_{21}E + L_{22}G + L_{23}N & L_{21}\Omega_2 + L_{22}H & 0 & \\ -L_{32}F & L_{31}E + L_{32}G + L_{33}N & L_{31}\Omega_2 + L_{32}H & 0 & \\ 0 & [ 0_{n_z \times n_1} \quad C_1 ] & C_2 & -\frac{I_{n_z}}{2} & \end{array} \right] < 0 \quad (4.25) \end{aligned}$$

Então  $v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta)x$  é uma função de Lyapunov para o sistema e a norma-2 do sinal de saída satisfaz:

$$\|z\|_2^2 < v(x_0, \delta) \leq c^*, \quad \forall x_0 \in \mathcal{R}_{c^*} \quad e \quad (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta \quad (4.26)$$

onde  $\mathcal{R}_{c^*}$  e  $c^*$  são definidos em (4.20) e (4.21) respectivamente.

### Prova do teorema 4.3

Considere a prova do teorema 3.1. Suponha que as LMIs (4.24) e (4.25) estejam satisfeitas nos vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Então, por convexidade, elas também estão satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ .

Pelos mesmos argumentos da prova do teorema 3.1 a LMI (4.24) implica que existem dois escalares  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  tais que:

$$\epsilon_1 x' x \leq v(\xi) = \xi' P \xi \leq \epsilon_2 x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (4.27)$$

Aplicando o complemento de Schur na LMI (4.25) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ P & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1' C_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ C_1' \end{bmatrix} C_2 \\ 0 & C_2' \begin{bmatrix} 0 & C_1 \end{bmatrix} & C_2' C_2 \end{bmatrix} + \text{He} \left( [L_{ij}]_{i,j=1,2,3} \begin{bmatrix} 0 & E & \Omega_2 \\ -F & G & H \\ 0 & N & 0 \end{bmatrix} \right) < 0 \quad (4.28)$$

Pré- e pós-multiplicando a LMI (4.28) por  $[\xi' \quad \xi' \quad \pi']$  e seu transposto respectivamente, obtém-se:

$$\dot{v}(x, \delta) = \dot{\xi}' P \xi + \xi' P \dot{\xi} < -z' z, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta \quad (4.29)$$

Logo, considerando (4.27) e (4.29) o sistema é localmente estável. Além disso, pela definição de  $\mathcal{R}_{c^*}$  e  $c^*$  em (4.20) e (4.21) respectivamente o conjunto  $\mathcal{R}_{c^*}$  é positivamente invariante. Em outras palavras, para todo  $x_0 \in \mathcal{R}_{c^*}$  a trajetória  $x(t) \in \mathcal{R}_{c^*} \quad \forall t \geq 0$  e converge para a origem.

Integrando a inequação (4.29) de 0 a  $T$ , leva a  $v(x(T), \delta(T)) - v(x(0), \delta(0)) < -\int_0^T z' z dt$ ,  $\forall T > 0$  e  $x_0 \in \mathcal{R}_{c^*}$ . Com  $T \rightarrow \infty$ , esta expressão leva a  $\|z\|_2^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T z' z dt < v(x(0), \delta) \leq c^*$ , para todo  $x_0 \in \mathcal{R}_{c^*}$  e  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ .

□

Note que o Teorema 4.3 assegura que a condição (4.19) esteja satisfeita para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Desta forma, deve-se utilizar o problema de otimização definido em (4.23) para determinar o limitante superior para a norma-2 do sinal de saída considerando a mesma matrix  $P$  obtida no Teorema 4.3. Para ilustrar este procedimento considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 4.3** Considere o sistema (3.4) com  $z = [1 \ 0]x$  e  $\Theta(x) = [x_1I \ x_2I]'$ . Defina o politopo  $\mathcal{B}_x$  como  $\mathcal{B}_x = \{x : |x_i| \leq 0.8, i = 1, 2\}$ . Também, considere a partição da matrix  $P$  definida na observação 3.3.

Desta forma, neste exemplo são considerados os seguintes casos: (i)  $\mathcal{P}(x)$  quadrática em  $x$ ; (ii)  $\mathcal{P}(x)$  afim em  $x$  e (iii)  $\mathcal{P}(x)$  constante.

A tabela 4.2 mostra estimativas da energia de saída obtidas através do teorema 4.3 e (4.23) para os casos acima definidos. Como esperado, a função de Lyapunov do tipo polinomial atinge o resultado menos conservador (caso (i)).

estimativas de $\ z\ _2^2$	Matriz de Lyapunov		
	(i)	(ii)	(iii)
$c = \lambda^{-1}$	1.0	1.5	1.6

Tabela 4.2: Estimativas da norma-2 da energia de saída.

### 4.3 Ganho $\mathcal{L}_2$

Considere que o sistema (4.16) está sujeito a perturbações externas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \delta) + b(x, \delta, w), & x(0) = 0 \\ z = g(x, \delta) + d(x, \delta, w) \end{cases} \quad (4.30)$$

onde  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada de perturbação e  $b(x, \delta, w)$ ,  $d(x, \delta, w)$  são funções não lineares em  $(x, \delta)$  e lineares em  $w$  com dimensões apropriadas.

Com relação ao sistema perturbado (4.30), considere a seguinte hipótese adicional:

**H3.1** As funções vetoriais  $b(x, \delta, w)$  e  $d(x, \delta, w)$  são contínuas e limitadas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$  de interesse.

O problema a ser abordado nesta seção é determinar o desempenho do sistema (4.30) com relação ao sinal de perturbação  $w(t)$  através do ganho- $\mathcal{L}_2$  do operador

entrada/saída. Entretanto, para sistema não lineares não globalmente estáveis o sinal de entrada  $w(t)$  pode levar o sistema para fora da região de atração da origem. Desta forma, considere as seguintes definições.

**Definição 4.1** *Considere o sistema (4.30) com as hipóteses **H2.1** e **H3.1**, e um dado conjunto  $\mathcal{W}$  do sinal de perturbação (isto é:  $w \in \mathcal{W}$ ). O sistema será regionalmente estável (com relação a  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{B}_x$ ) se  $x(t) \in \mathcal{B}_x$  para todo  $t \geq 0$  e todo  $w \in \mathcal{W}$ . Neste caso, o conjunto  $\mathcal{W}$  será denominado de conjunto admissível do sinal de perturbação  $w(t)$ .*

**Definição 4.2** *Considere o sistema (4.30) com as hipóteses **H2.1** e **H3.1**, e um dado conjunto admissível do sinal de perturbação  $\mathcal{W}$ . O ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entrada/saída, representado por  $G_{wz}$ , do sistema (4.30) é dado por:*

$$\|G_{wz}\|_\infty = \sup_{\substack{0 \neq w \in \mathcal{W} \\ (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, \quad x(0) = 0, \quad \mathcal{W} \text{ admissível.} \quad (4.31)$$

Para simplificar a análise do desempenho do sistema (4.30), a partir deste ponto, será suposto que o conjunto  $\mathcal{W}$  é conhecido. Entretanto, quando o conjunto  $\mathcal{W}$  não for conhecido, pode-se estimá-lo ou até mesmo testar se o sistema não será instável para uma determinada classe de sinais de perturbação utilizando um procedimento semelhante ao apresentado nesta seção, para maiores detalhes veja [57].

Com as definições acima, o problema de interesse nesta seção pode ser colocado na seguinte forma:

**Problema 4.3** *Dado dois politopos  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  e o conjunto admissível  $\mathcal{W}$ , determine um limitante superior  $\gamma$  do ganho  $\mathcal{L}_2$ , definido em (4.31), para o sistema (4.30).*

Utilizando os resultados propostos em [6], pode-se obter um limitante  $\gamma$  do ganho  $\mathcal{L}_2$  através do seguinte problema de otimização:

$$\min \quad \gamma \quad \text{sujeito a:} \quad (4.32)$$

$$v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta) x > 0 \quad (4.32)$$

$$\dot{v}(x, \delta) + z' z - \gamma w' w < 0 \quad (4.33)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ ,  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ ,  $w \in \mathcal{W}$  e  $t \geq 0$ . Observe que as condições acima

implicam que existem escalares positivos  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  e  $\varepsilon_c$  tais que:

$$\varepsilon_a x'x \leq v(x, \delta) \leq \varepsilon_b x'x \quad \text{e} \quad \dot{v}(x, \delta) \leq -\varepsilon_c x'x,$$

visto que as condições (4.32) e (4.33) são estritas, e  $\mathcal{P}(x, \delta)$  e as matrizes do sistema são limitadas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ .

Visando uma formulação LMI para o problema de otimização acima definido, considere a seguinte hipótese com relação aos vetores  $b(x, \delta, w)$  e  $d(x, \delta, w)$ :

**H3.2** *Os vetores  $b(x, \delta, w)$  e  $d(x, \delta, w)$  podem ser decompostos da seguinte maneira:*

$$b(x, \delta, w) = B(x, \delta)\psi, \quad d(x, \delta, w) = D(x, \delta)\psi, \quad 0 = \Psi(x, \delta)\psi \quad (4.34)$$

onde as matrizes  $B(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n \times n_\psi}$ ,  $D(x, \delta) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_\psi}$  e  $\Psi(x, \delta) \in \mathbb{R}^{\nu \times n_\psi}$  são funções afins em  $(x, \delta)$ , e o vetor  $\psi$  é uma função não linear em  $(x, \delta)$  e linear em  $w$  com a seguinte estrutura:  $\psi = \begin{bmatrix} w \\ \psi_1(x, \delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\psi}$ .

O teorema a seguir apresenta uma solução convexa em termos de LMIs para o problema 4.3 utilizando o mesmo procedimento apresentado nas seções anteriores.

**Teorema 4.4** *Considere o sistema (4.30) com as hipóteses **H2.1a-c**, **H2.2**, **H3.1** e **H3.2**. Seja  $\Theta(x, \delta)$  uma dada matriz afim em  $(x, \delta)$  e considere a definição das matrizes auxiliares  $\tilde{\Theta}(x)$  e  $\hat{\Theta}(\delta)$  em (3.18). Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  regiões politópicas conhecidas representando uma vizinhança da origem do sistema e os valores admissíveis de  $(\delta, \delta)$  respectivamente. Seja  $\mathcal{W}$  um dado conjunto admissível do sinal de perturbação  $w$ . Considere a notação auxiliar (3.31) e defina:*

$$\begin{aligned} J_w &= \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_\psi} \\ B(x, \delta) \end{bmatrix} & \Gamma_w &= \begin{bmatrix} 0 & E & \Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi \\ 0 & N & 0 & 0 \\ -F & G & H & J_w \end{bmatrix} \\ S_\psi &= \begin{bmatrix} I_{n_w} & 0_{n_w \times (n_\psi - n_w)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Suponha que as matrizes  $P = P'$ ,  $R$  e  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as LMIs são satisfeitas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ .

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \quad \text{sujeito a} \\ & P + RN + N'R' > 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(P, \gamma) + L_w \Gamma_w \\ + \Gamma_w' L_w' \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1(x, \delta)' \\ C_2(x, \delta)' \\ D(x, \delta)' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_1(x, \delta) & C_2(x, \delta) & D(x, \delta) \end{bmatrix} & -I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.37)$$

onde  $\Sigma(P, \gamma)$  e  $L_w$  são dados por:

$$\Sigma(P, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma S_\psi' S_\psi \end{bmatrix} \quad e \quad L_w = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}.$$

Então  $v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta) x$  é uma função de Lyapunov para o sistema não forçado,  $w \equiv 0$ , e o ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entrada/saída satisfaz:

$$\|G_{wz}\|_\infty^2 = \sup_{\substack{0 \neq w \in \mathcal{W} \\ (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta}} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \gamma, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta, w \in \mathcal{W}. \quad (4.38)$$

## Prova do teorema 4.4

Considere a prova do teorema 3.1. Suponha que as LMIs (4.36) e (4.37) estejam satisfeitas nos vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Então, por convexidade, elas também estão satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $(\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta$ .

Pelos mesmos argumentos da prova do teorema 3.1 a LMI (4.36) implica que existem dois escalares  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  tais que:

$$\epsilon_1 x' x \leq v(\xi) = \xi' P \xi \leq \epsilon_2 x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (4.39)$$

onde  $\xi$  está definido em (3.10).

Aplicando o complemento de Schur na LMI (4.37) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1' C_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ C_1' \end{bmatrix} C_2 & \begin{bmatrix} 0 \\ C_1' \end{bmatrix} D \\ 0 & C_2' [0 \ C_1] & C_2' C_2 & C_2' D \\ 0 & D' [0 \ C_1] & D' C_2 & D' D - \gamma S_\psi' S_\psi \end{bmatrix} + \text{He}(L_w \Gamma_w) < 0 \quad (4.40)$$

Pré- e pós-multiplicando a LMI (4.40) por  $[\xi' \ \xi' \ \pi' \ \psi']$  e seu transposto respectivamente, obtém-se:

$$\dot{v}(x, \delta) = \xi' P \xi + \xi' P \dot{\xi} < \gamma w' w - z' z, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta, w \in \mathcal{W} \quad (4.41)$$

Logo, considerando (4.39) e (4.41) o sistema é localmente estável e  $v(x, \delta) = \xi' P \xi$  é uma função de Lyapunov.

Integrando a inequação (4.41) de 0 a  $T$  e levando em conta que  $x(0) = 0$ , conclui-se que  $0 < v(x(T), \delta(T)) < \int_0^T (\gamma w' w - z' z) dt, \forall T > 0$ . Quando  $T \rightarrow \infty$ , esta expressão implica em:

$$\|G_{wz}\|_\infty^2 = \sup_{\substack{0 \neq w \in \mathcal{W} \\ (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta}} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} = \sup_{\substack{0 \neq w \in \mathcal{W} \\ (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{z' z}{w' w} dt < \gamma, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x.$$

□

**Exemplo 4.4** Considere o seguinte sistema não linear:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & (0.8 + 0.2\delta)(x_1^2 - 1) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + w \end{aligned} \quad (4.42)$$

Defina  $\Theta(x) = [x_1 I \ x_2 I]'$ ,  $\mathcal{B}_x = \{x : |x_i| \leq 0.7, i = 1, 2\}$  e  $\mathcal{B}_\delta = \{\delta : |\delta| \leq 1\}$ . Considere a partição da matrix  $P$  definida na observação 3.3.

Desta forma, neste exemplo são considerados os seguintes casos: (i)  $\mathcal{P}(x)$  quadrática em  $x$ ; (ii)  $\mathcal{P}(x)$  afim em  $x$  e (iii)  $\mathcal{P}(x)$  constante.

A tabela 4.3 mostra estimativas do ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entrada/saída obtidas através do teorema 4.4 para os três casos acima definidos.

estimativas de $\ G_{wz}\ _\infty^2$	Matriz de Lyapunov		
	(i)	(ii)	(iii)
$\gamma$	10.7	84.4	84.5

Tabela 4.3: Estimativas do ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entrada/saída.



# Capítulo 5

## Síntese de Controladores

A obtenção de técnicas convexas utilizando funções de Lyapunov Polinomiais para o projeto de controladores no caso de sistemas não lineares é um problema em aberto na teoria de Controle. Existem algumas propostas não convexas, como por exemplo [58, 9, 10, 11] que utilizam NLMIs (inequações matriciais não lineares), [12, 13, 15, 14] que utilizam matrizes de escalonamento dependente dos estados e [59, 60, 61] que empregam equações de Riccati dependente dos estados. Entretanto, a solução numérica de tais propostas exige um grande esforço computacional [8]. Até a presente data, as únicas soluções convexas em termos de LMIs são aquelas que consideram funções de Lyapunov quadráticas, como por exemplo as referências [16] (que utiliza uma representação por frações racionais) e [18] (que considera um sistema linear com incertezas não lineares).

Por outro lado, devido ao grande avanço nas técnicas de controle aplicadas a sistemas lineares com parâmetros variantes ou LPV [62, 63, 64, 65], vários autores estenderam estes resultados para sistemas não lineares nas representações *quasi-LPV* [66, 67] e politópica [20, 21]. No entanto, estas metodologias (baseadas em sistemas lineares) podem levar a resultados conservadores por não levarem em conta as não linearidades do sistema além de utilizarem funções quadráticas [24]. Também, existem alguns problemas relacionados a representação quasi-LPV que podem levar a problemas com dimensão infinita (mesmo para um pequeno número de não linearidades) ou a instabilidade do sistema não linear em malha fechada [68].

Dentro deste panorama, neste capítulo propõe-se uma técnica de controle utilizando funções de Lyapunov quadráticas e uma lei de controle não linear. Com este objetivo, utiliza-se uma decomposição não linear semelhante a apresentada no capítulo 3 onde as não linearidades são levadas em conta através do lema de Finsler. Posteriormente, para diminuir o possível conservadorismo dos resultados devido a utilização de uma função

de Lyapunov quadrática, aplicam-se as técnicas de análise propostas nos capítulos 3 e 4 no sistema não linear em malha fechada obtendo-se uma melhor estimativa da região de atração e/ou do índice de desempenho.

## 5.1 Estabilização com Taxa de Convergência Garantida

Considere o seguinte sistema não linear afim na entrada de controle:

$$\dot{x} = A(x, \delta)x + B_u(x, \delta)u \quad (5.1)$$

onde  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de controle,  $A(x, \delta)$  e  $B_u(x, \delta)$  são funções matriciais não lineares em  $(x, \delta)$  de dimensões apropriadas.

Com relação ao sistema (5.1) considere as hipóteses **H2.1a,b**, e

**H4.1a** *As funções matriciais  $A(x, \delta)$  e  $B_u(x, \delta)$  são contínuas e limitadas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$  de interesse, onde  $\mathcal{B}_x$  é uma dada região politópica dos estados contendo a origem.*

Com as hipóteses acima, o problema a ser considerado nesta seção pode ser formalizado da seguinte maneira:

**Problema 5.1** *Considerando o sistema (5.1) e as hipóteses **H2.1a,b** e **H4.1a**, determine uma lei de controle  $u = K(x, \delta)x$  tal que o sistema em malha fechada seja regionalmente estável. Além disso, estime uma região de atração para uma dada taxa de convergência  $\rho$ .*

**Observação 5.1** *Na sua forma mais geral, a lei de controle  $u = K(x, \delta)x$  pode ser dependente de um conjunto de parâmetros contidos no vetor  $\delta$ . Neste caso, os parâmetros que estão presentes na lei de controle não são interpretados como incertezas, mas sim como parâmetros da técnica de ganho variável que são disponíveis em tempo real e portanto podem ser incorporados na lei de controle. Para maiores detalhes sobre controladores dependente de parâmetros veja, por exemplo, [62, 69]. Entretanto, a metodologia a ser apresentada nesta seção pode ser facilmente aplicada na determinação de uma lei de controle robusta na forma  $u = K(x)x$ .*

Para simplificar a solução a ser apresentada nesta seção, considere a seguinte hipótese adicional:

**H4.1b** Os parâmetros  $\delta \in \mathbb{R}^{n_s}$  do sistema (5.1) são disponíveis "on-line" para realimentação.

Visando uma solução para o problema 5.1, considere a seguinte função de Lyapunov:

$$v(x) = x' P_0 x \quad (5.2)$$

onde  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica e positiva definida.

Pela teoria de Lyapunov o sistema (5.1) com  $u = K(x, \delta)x$  é regionalmente estável, com uma taxa de convergência garantida  $\rho$ , se a função de Lyapunov definida em (5.2) satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} x' \left( A(x, \delta)' P_0 + P_0 A(x, \delta) + P_0 B_u(x, \delta) K(x, \delta) + \right. \\ \left. + K(x, \delta)' B_u(x, \delta)' P_0 + 2\rho P_0 \right) x < 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\Upsilon_0 \triangleq \left\{ x : x' P_0 x \leq 1 \right\} \subset \mathcal{B}_x \quad (5.4)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Então, para qualquer  $x(0) \in \Upsilon_0$  a norma da trajetória  $x(t)$  satisfaz a relação:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \|x(0)\| e^{-\rho t} \quad (5.5)$$

onde  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são respectivamente o menor e o maior autovalor da matriz  $P_0$ .

Note que a seguinte NLMI é uma condição suficiente para (5.3):

$$A(x, \delta)' P_0 + P_0 A(x, \delta) + P_0 B_u(x, \delta) K(x, \delta) + K(x, \delta)' B_u(x, \delta)' P_0 + 2\rho P_0 < 0 \quad (5.6)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ .

Defina a inversa da matriz  $P_0$  como  $Z$ , isto é,  $Z = P_0^{-1}$ . Pré e pós multiplicando (5.6) por  $Z$  e definindo  $Y(x, \delta) = K(x, \delta)Z$ , obtém-se a seguinte expressão:

$$Z A(x, \delta)' + A(x, \delta) Z + B_u(x, \delta) Y(x, \delta) + Y(x, \delta)' B_u(x, \delta)' + 2\rho Z < 0 \quad (5.7)$$

Agora, considere a seguinte hipótese com relação as matrizes do sistema  $A(x, \delta)$  e  $B_u(x, \delta)$ :

**H4.1c** As matrizes  $A(x, \delta)$  e  $B_u(x, \delta)$  podem ser decompostas da seguinte maneira:

$$A(x, \delta) = \Pi(x, \delta)' \mathbf{A}, \quad B_u(x, \delta) = \Pi(x, \delta)' \mathbf{B}_u, \quad \mathcal{D}(x, \delta) \Pi(x, \delta) = 0_{m_g \times n} \quad (5.8)$$

onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m_p \times n}$ ,  $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{m_p \times n_u}$  são matrizes constantes,  $\mathcal{D}(x, \delta) \in \mathbb{R}^{m_g \times m_p}$  é uma matriz afim em  $(x, \delta)$  e  $\Pi(x, \delta)$  é uma função matricial não linear em  $(x, \delta)$  com a seguinte estrutura:

$$\Pi(x, \delta) = \begin{bmatrix} I_n \\ \Pi_1(x, \delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_p \times n} \quad (5.9)$$

Visando uma formulação LMI para (5.7), defina a matriz  $Y(x, \delta)$  da seguinte forma:

$$Y(x, \delta) = \mathbf{Y}\Pi(x, \delta) \quad (5.10)$$

com  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times m_p}$  sendo uma matriz constante a ser determinada.

Com a definição acima e a hipótese **H4.1c**, a NLMI (5.7) pode ser reescrita na seguinte maneira:

$$\Pi(x, \delta)' (S'_\pi Z \mathbf{A}' + \mathbf{A} Z S_\pi + \mathbf{B}_u \mathbf{Y} + \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_u + 2\rho S'_\pi Z S_\pi) \Pi(x, \delta) < 0 \quad (5.11)$$

para toda matriz  $\Pi(x, \delta)$  tal que  $\mathcal{D}(x, \delta)\Pi(x, \delta) = 0$ , onde  $S_\pi = [ I_n \ 0 ] \in \mathbb{R}^{n \times m_p}$ .

Aplicando a mesma técnica dos capítulos 3 e 4 à condição (5.11), obtém-se o seguinte teorema que propõe uma condição suficiente para a síntese de controladores com taxa de convergência garantida.

**Teorema 5.1** *Considere o sistema não linear (5.1) com as hipóteses **H2.1a,b** e **H4.1a-c**. Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  regiões politópicas e considere a representação (3.25) do politopo  $\mathcal{B}_x$ . Seja  $\rho$  uma dada taxa de convergência.*

*Suponha que as matrizes  $Z = Z'$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $L$  sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as LMIs são construídas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ :*

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{trace}(Z) \text{ sujeito à} \\ & Z > 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$1 - a'_k Z a_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n_f \quad (5.13)$$

$$\text{He} \left( S'_\pi Z \mathbf{A} + \mathbf{B}_u \mathbf{Y} + \rho S'_\pi Z S_\pi + L \mathcal{D}(x, \delta) \right) < 0 \quad (5.14)$$

*Então o sistema (5.1) com  $u = \mathbf{Y}\Pi(x, \delta)Z^{-1}x$  é exponencialmente estável e  $v(x) = x'Z^{-1}x$  é uma função de Lyapunov para  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Além disso, para todo  $x(0) \in \Upsilon_0 = \{x : x'Z^{-1}x \leq 1\}$  a norma da trajetória  $x(t)$  satisfaz a relação (5.5).*

### Prova do teorema 5.1

Suponha que exista uma solução para o teorema 5.1. Então, por convexidade, as LMIs (5.12)-(5.14) estão satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Defina  $P_0 = Z^{-1}$  e  $\epsilon_1, \epsilon_2$  como o menor e o maior autovalor de  $P_0$  respectivamente. Logo,  $v(x) = x' P_0 x$  satisfaz o seguinte:

$$\epsilon_1 x' x \leq x' P_0 x \leq \epsilon_2 x' x \quad (5.15)$$

Considere a LMI (5.14). Pré e pós multiplique-a por  $\Pi(x, \delta)'$  e pelo seu transposto, respectivamente. Desta forma, obtém-se a seguinte expressão:

$$ZA(x, \delta) + A(x, \delta)' Z + B_u(x, \delta) Y(x, \delta) + Y(x, \delta)' B_u(x, \delta)' + 2\rho Z < 0 \quad (5.16)$$

visto que  $\Pi(x, \delta)' \mathbf{A} = A(x, \delta)$ ,  $\Pi(x, \delta)' \mathbf{B}_u = B_u(x, \delta)$ ,  $\mathbf{Y} \Pi(x, \delta) = Y(x, \delta)$ ,  $S_\pi \Pi(x, \delta) = I_n$  e  $\mathcal{D}(x, \delta) \Pi(x, \delta) = 0$ .

Agora, pré e pós multiplicando a NLMI acima por  $x' P_0$  e seu transposto, obtém-se:

$$\begin{aligned} & x' (A(x, \delta) P_0 + P_0 A(x, \delta)' + P_0 B_u(x, \delta) K(x, \delta) + \\ & K(x, \delta)' B_u(x, \delta)' P_0 + 2\rho P_0) x < 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \mathcal{B}_\delta \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde  $K(x, \delta) = Y(x, \delta) P_0$ .

Considere o conjunto de inequações lineares em (5.13) e o resultado proposto na seção 5.2 de [6]. Então, a condição (5.13) implica que:

$$\Upsilon_0 = \left\{ x : x' P_0 x \leq 1 \right\} \subset \mathcal{B}_x \quad (5.18)$$

Portanto, o sistema (5.1) com  $u = Y(x, \delta) P_0 x$  é exponencialmente estável e  $v(x) = x' P_0 x$  é uma função de Lyapunov para  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Além disso,  $\Upsilon_0$  é invariante e a norma da trajetória  $x(t)$  satisfaz (5.1).

□

**Exemplo 5.1** *Considere o seguinte sistema incerto:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 0.8x_2 + 0.2\delta x_2 - 0.8x_1^2 x_2 - 0.2\delta x_1^2 x_2 + u \end{cases} \quad (5.19)$$

onde  $\delta \in [-1, 1]$  é um parâmetro incerto invariante no tempo. O objetivo deste

exemplo é determinar uma lei de controle  $u = Kx$  que estabilize o sistema com uma taxa de convergência  $\rho = 0.1$ .

Considere que o politopo  $\mathcal{B}_x$  seja definido pelos seguintes vértices:

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} 5 \\ -5 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -5 \\ 5 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -5 \\ -5 \end{array} \right] \right\} \quad (5.20)$$

Observe que o sistema (5.19) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\dot{x} = \Pi(x, \delta)' \mathbf{A}x + \Pi(x, \delta)' \mathbf{B}_u u, \quad \partial(x, \delta) \Pi(x, \delta) = 0 \quad (5.21)$$

onde as matrizes são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.8 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi(x, \delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \delta \\ 0 & x_1 \\ 0 & x_1^2 \\ 0 & \delta x_1^2 \end{bmatrix},$$

$$e \quad \partial(x, \delta) = \begin{bmatrix} 0 & \delta & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & -1 \end{bmatrix}.$$

Visando implementar uma lei de controle linear, define-se a matriz  $\mathbf{Y}$  com a seguinte estrutura:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y & 0_{1 \times 4} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Desta forma,  $Y(x, \delta) = \mathbf{Y} \Pi(x, \delta) = Y$ .

Aplicando o teorema 5.1, obtém-se os seguintes resultados:

$$Z = \begin{bmatrix} 4.2857326 & -0.8465037 \\ -0.8465037 & 19.194779 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -13.567346 & -28.564438 \end{bmatrix}.$$

A figura 5.1 mostra trajetórias do sistema em malha fechada com  $u = YZ^{-1}x$  para uma condição inicial  $x_0 = [2 \quad -2]'$ .

O resultado obtido no exemplo 5.1 pode ser conservador devido a utilização de

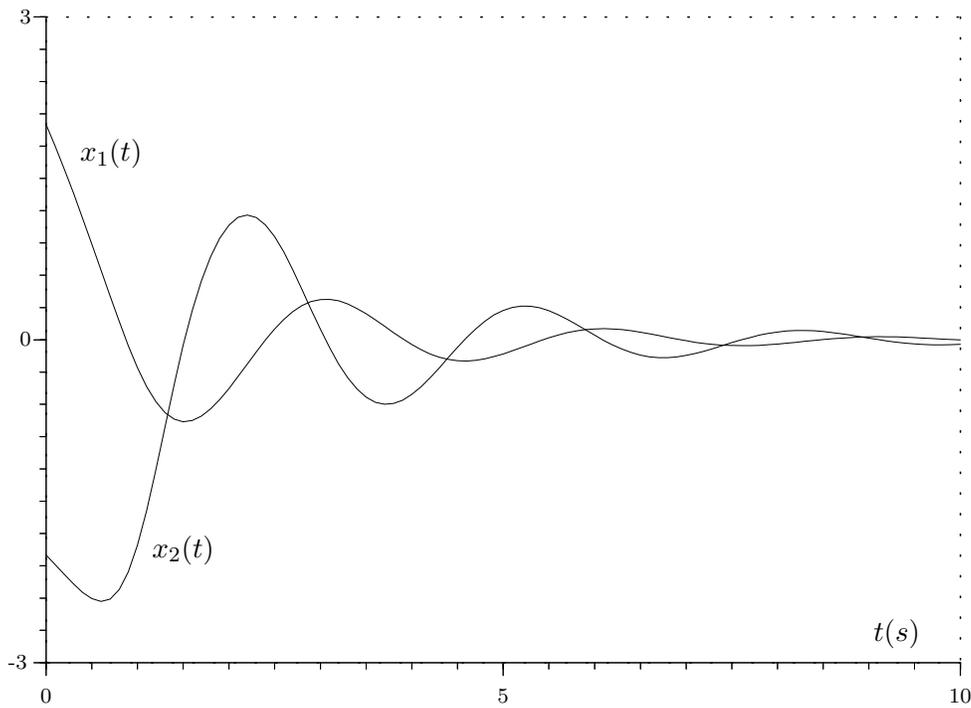


Figura 5.1: Trajetórias do sistema em malha fechada.

uma função de Lyapunov quadrática na determinação da lei de controle. Visando diminuir tal conservadorismo, isto é obter uma melhor estimativa do domínio de atração com taxa de convergência garantida, pode-se aplicar a técnica de análise proposta no capítulo 4 no sistema (5.19) em malha fechada resultando em uma melhor estimativa da região de atração com taxa de convergência  $\rho = 0.1$ . A figura 5.2 mostra uma estimativa menos conservadora desta região através da aplicação do teorema 4.1 no sistema em malha fechada (região  $\Upsilon_p$ ), e também a região obtida com a função de Lyapunov quadrática obtida através do Teorema 5.1 (região  $\Upsilon_q$ ).

## 5.2 Estabilização com Custo Garantido

Considere o seguinte sistema não linear:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x, \delta)x + B_u(x, \delta)u, \quad x(0) = x_0 \\ z &= C(x, \delta)x + D_u(x, \delta)u \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\delta \in \mathbb{R}^l$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  e as matrizes  $A(x, \delta)$ ,  $B_u(x, \delta)$ ,  $C(x, \delta)$ ,  $D_u(x, \delta)$  são funções não lineares em  $(x, \delta)$  de dimensões apropriadas.

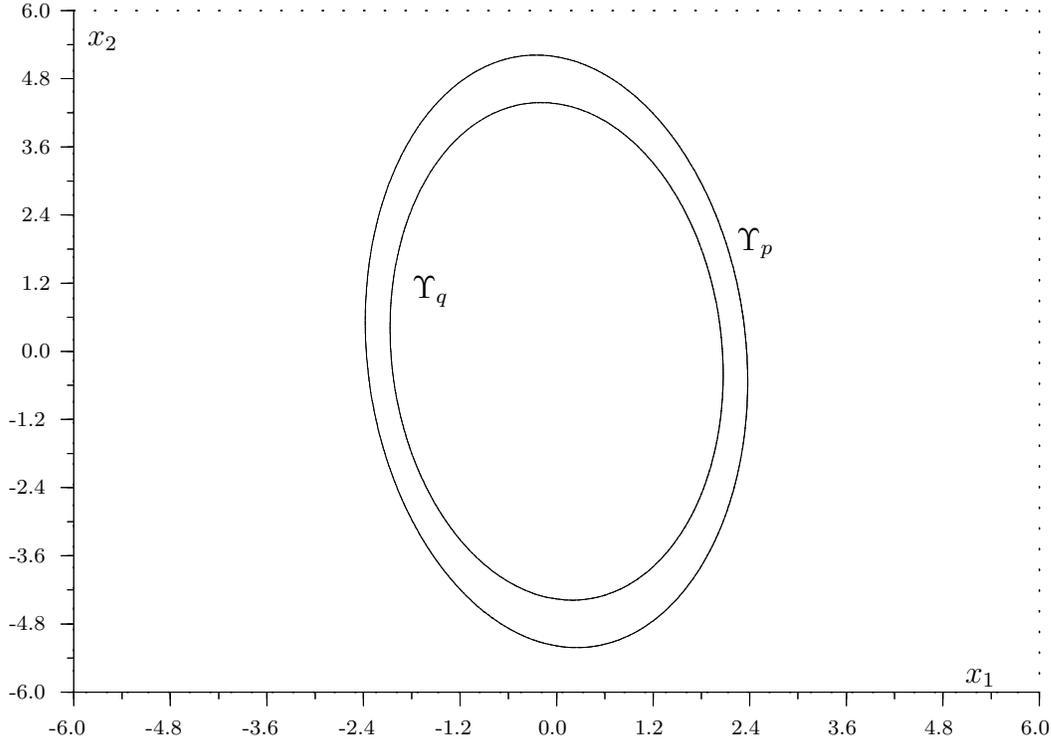


Figura 5.2: Estimativas do domínio de atração com  $\varrho = 0.1$ .

Com relação ao sistema (5.23) considere as hipóteses **H2.1a,b**, **H4.1a-c**, e

**H4.2a** As funções matriciais  $C(x, \delta)$  e  $D(x, \delta)$  são limitadas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$  de interesse.

Levando em consideração as hipóteses acima, o problema de interesse nesta seção pode ser enunciado da seguinte forma:

**Problema 5.2** Considerando o sistema (5.23) e as hipóteses **H2.1a,b**, **H4.1**, e **H4.2a**, determine uma lei de controle  $u = K(x, \delta)$  tal que:

- O sistema seja regionalmente estável;
- A norma-2 da energia do sinal de saída satisfaça a seguinte relação para um dado limitante superior  $\lambda$ :

$$\|z(t)\|_2^2 < \lambda, \quad \forall x_0 \in \Upsilon \subset \mathcal{B}_x$$

onde  $\Upsilon$  representa uma estimativa do domínio de atração a ser maximizada.

Da mesma forma que na seção anterior, considere como candidata à função de Lyapunov a função quadrática definida em (5.2). Pela teoria de Lyapunov, a energia

de saída do sistema (5.23) com  $u = K(x, \delta)x$  tem um limitante superior  $\lambda$ , isto é,  $\|z\|_2^2 < \lambda$  para todo  $x_0 \in \Upsilon_0$ , se as seguintes condições estão satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ :

$$\dot{v}(x) + \lambda^{-1} z' z < 0 \quad (5.24)$$

$$\Upsilon_0 = \{x : x' P_0 x \leq 1\} \subset \mathcal{B}_x \quad (5.25)$$

Considere as definições de  $v(x)$  e  $u$  dadas acima. Então, a seguinte NLMI é uma condição suficiente para (5.24):

$$\begin{aligned} & A(x, \delta)' P_0 + P_0 A(x, \delta) + K(x, \delta)' B_u(x, \delta)' P_0 + P_0 B_u(x, \delta) K(x, \delta) + \\ & \lambda^{-1} (C(x, \delta) + D_u(x, \delta) K(x, \delta))' (C(x, \delta) + D_u(x, \delta) K(x, \delta)) < 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Pré e pós multiplicando (5.26) por  $Z = P_0^{-1}$  e aplicando o complemento de *Schur*, obtém-se:

$$\left[ \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{c} ZA(x, \delta)' + A(x, \delta)Z + \\ Y(x, \delta)' B_u(x, \delta)' + B_u(x, \delta)Y(x, \delta) \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} ZC(x, \delta)' + \\ Y(x, \delta)' D_u(x, \delta)' \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} C(x, \delta)Z + \\ D_u(x, \delta)Y(x, \delta) \end{array} \right) & -\lambda I_{n_z} \end{array} \right] < 0 \quad (5.27)$$

onde  $Y(x, \delta) = K(x, \delta)Z$ .

Agora, considere a hipótese **H4.2a** e a seguinte hipótese adicional:

**H4.2b** As matrizes  $C(x, \delta)$  e  $D_u(x, \delta)$  podem ser decompostas da seguinte maneira:

$$C(x, \delta) = \Pi_z(x, \delta)' \mathbf{C}, \quad D_u(x, \delta) = \Pi_z(x, \delta)' \mathbf{D}_u, \quad \mathcal{D}_z(x, \delta) \Pi_z(x, \delta) = 0_{l_g \times n_z} \quad (5.28)$$

onde  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l_p \times n_z}$ ,  $\mathbf{D}_u \in \mathbb{R}^{l_p \times n_u}$  são matrizes constantes,  $\mathcal{D}_z(x, \delta) \in \mathbb{R}^{l_g \times l_p}$  é uma matriz afim em  $(x, \delta)$  e  $\Pi_z(x, \delta)$  é uma função matricial em  $(x, \delta)$  com a seguinte estrutura:

$$\Pi_z(x, \delta) = \begin{bmatrix} I_{n_z} \\ \Pi_2(x, \delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l_p \times n_z} \quad (5.29)$$

Considerando a definição de  $Y(x, \delta)$  em (5.10) e as hipóteses **H4.2a,b**, pode-se

reescrever a NLMI (5.27) na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \Pi_z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} S'_\pi Z \mathbf{A}' + \mathbf{A} Z S_\pi + \\ \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_u + \mathbf{B}_u \mathbf{Y} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S'_\pi Z \mathbf{C}' + \\ \mathbf{Y}' \mathbf{D}'_u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{C} Z S_\pi + \\ \mathbf{D}_u \mathbf{Y} \end{pmatrix} & -\lambda S'_z S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \Pi_z \end{bmatrix} < 0 \quad (5.30)$$

para todo  $\Pi(x, \delta) : \mathcal{D}(x, \delta) \Pi(x, \delta) = 0$  e  $\Pi_z(x, \delta) : \mathcal{D}_z(x, \delta) \Pi_z(x, \delta) = 0$ , onde  $S_z = [I_{n_z} \ 0] \in \mathbb{R}^{n_z \times l_p}$ .

Aplicando o mesmo procedimento da seção anterior à (5.30), obtém-se o seguinte teorema que propõe uma condição suficiente para a estabilização do sistema (5.23) com custo garantido  $\lambda$ .

**Teorema 5.2** *Considere o sistema não linear (5.23) com as hipóteses H2.1a,b, H4.1a-c e H4.2a,b. Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  regiões politópicas dadas, onde  $\mathcal{B}_x$  pode ser representado na forma (3.25). Seja  $\lambda$  um dado limitante superior da energia de saída do sistema (5.23). Defina a seguinte matriz auxiliar:*

$$\Psi_z = \text{diag}\{\mathcal{D}(x, \delta), \mathcal{D}_z(x, \delta)\} \quad (5.31)$$

*Suponha que as matrizes  $Z = Z'$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $L$  sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as LMIs são construídas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ :*

$$\begin{aligned} \max \quad & \text{trace}(Z) \text{ sujeito à} \\ & Z > 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$1 - a'_k Z a_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n_f \quad (5.33)$$

$$\text{He} \left( \begin{bmatrix} S'_\pi Z \mathbf{A} + \mathbf{B}_u \mathbf{Y} & 0 \\ \mathbf{C} Z S_\pi + \mathbf{D}_u \mathbf{Y} & -\frac{\lambda S'_z S_z}{2} \end{bmatrix} + L \Psi_z \right) < 0 \quad (5.34)$$

*Então o sistema (5.1) com  $u = \mathbf{Y} \Pi(x, \delta) Z^{-1} x$  é exponencialmente estável e  $v(x) = x' Z^{-1} x$  é uma função de Lyapunov para o sistema em  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Além disso, para todo  $x(0) \in \Upsilon_0 = \{x : x' Z^{-1} x \leq 1\}$  a norma do sinal de saída satisfaz:*

$$\|z(t)\|_2^2 < \lambda, \quad \forall \delta \in \mathcal{B}_\delta$$

## Prova do teorema 5.2

Suponha que exista uma solução para o teorema 5.2. Então, por convexidade, as LMIs (5.32)-(5.34) estão satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Defina  $P_0 = Z^{-1}$  e  $\epsilon_1, \epsilon_2$  como o menor e o maior autovalor de  $P_0$  respectivamente. Logo,  $v(x) = x' P_0 x$  satisfaz  $\epsilon_1 x' x \leq x' P_0 x \leq \epsilon_2 x' x$ .

Considere a LMI (5.34). Pré e pós multiplicando-a por  $\begin{bmatrix} \Pi(x, \delta) & 0 \\ 0 & \Pi_z(x, \delta) \end{bmatrix}'$  e pelo seu transposto respectivamente, obtém-se a expressão (5.27). Visto que:  $\Pi(x, \delta)' \mathbf{A} = A(x, \delta)$ ,  $\Pi(x, \delta)' \mathbf{B}_u = B_u(x, \delta)$ ,  $\mathbf{Y} \Pi(x, \delta) = Y(x, \delta)$ ,  $S_\pi \Pi(x, \delta) = I_n$ ,  $\mathcal{D}(x, \delta) \Pi(x, \delta) = 0$ ,  $\Pi_z(x, \delta)' \mathbf{C} = C(x, \delta)$ ,  $\Pi_z(x, \delta)' \mathbf{D}_u = D_u(x, \delta)$  e  $\mathcal{D}_z(x, \delta) \Pi_z(x, \delta) = 0$ . Então,  $\dot{v}(x) + \lambda^{-1} z' z < 0$  para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ .

Pelos mesmos argumentos da prova do teorema 5.1, o conjunto de inequações lineares em (5.33) implica que  $\Upsilon_0 \subset \mathcal{B}_x$ .

Portanto, o sistema (5.23) com  $u = Y(x, \delta) P_0 x$  é exponencialmente estável e  $v(x) = x' P_0 x$  é uma função de Lyapunov para o sistema em  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Além disso,  $\Upsilon_0$  é invariante e para todo  $x(0) \in \Upsilon_0$  a norma do sinal de saída satisfaz  $\|z(t)\|_2^2 < \lambda$ .

□

**Exemplo 5.2** Considere o seguinte sistema instável, não linear, incerto e invariante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (0.8 + 0.2\delta)(1 - x_1^2) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde  $\delta \in [-1, 1]$  é um parâmetro incerto invariante no tempo. O objetivo deste exemplo é determinar uma lei de controle  $u = Kx$  que estabilize o sistema tal que:  $\|z\|_2^2 < 2$ . Com este objetivo, considere o politopo  $\mathcal{B}_x$ , as matrizes  $\Pi(x, \delta)$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_u$ ,  $\mathcal{D}(x, \delta)$  definidos no exemplo 5.1, e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_z(x, \delta) = I_2.$$

Para implementar uma lei de controle linear, defina a estrutura de  $\mathbf{Y}$  como em (5.22).

Aplicando o teorema 5.2, obtém-se os seguintes resultados:

$$Z = \begin{bmatrix} 0.1864780 & -0.0282081 \\ -0.0282081 & 0.3669918 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A figura 5.3 mostra a resposta no tempo do sistema em malha fechada para uma condição inicial  $x_0 = [1 \ -1]'$ , onde  $-$ ,  $+$ , e  $+$  representam respectivamente as trajetórias  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  e o sinal de controle  $u(t)$ . Utilizando as técnicas de análise de

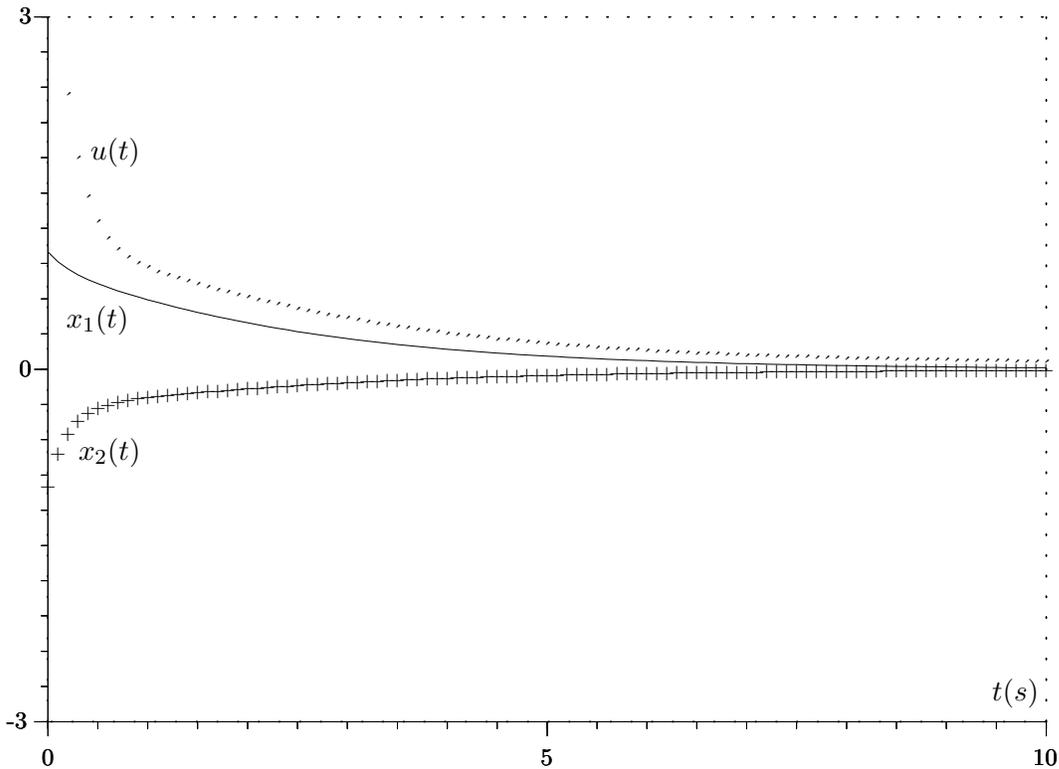


Figura 5.3: Resposta no tempo do sistema em malha fechada.

desempenho no sistema em malha fechada obtém-se uma melhor estimativa da região de atração com custo garantido. Na figura 5.4 tem-se estimativas desta região para as seguintes funções:

i. Polinomial (representada pela região  $\Upsilon_p$ ) com

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ x_2 I_2 \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

ii. Quadrática (representada pela região  $\Upsilon_q$ ) obtida através do Teorema 5.2.

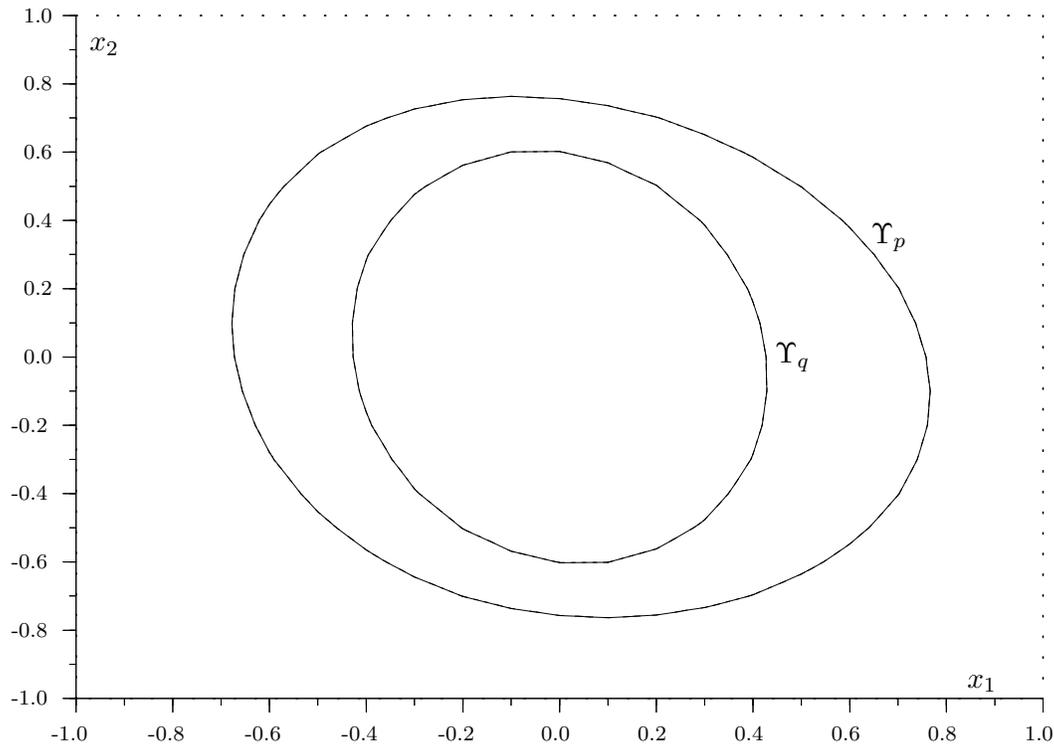


Figura 5.4: Estimativas do domínio de atração com custo garantido.

### 5.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Não Linear

Considere o seguinte sistema não linear incerto:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x, \delta)x + B_u(x, \delta)u + B_w(x, \delta)w, \quad x(0) = 0 \\ z &= C(x, \delta)x + D_u(x, \delta)u + D_w(x, \delta)w\end{aligned}\tag{5.37}$$

onde  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada de perturbação, e as matrizes  $A(x, \delta)$ ,  $B_u(x, \delta)$ ,  $B_w(x, \delta)$ ,  $C(x, \delta)$ ,  $D_u(x, \delta)$  e  $D_w(x, \delta)$  são funções não lineares em  $(x, \delta)$  de dimensões apropriadas.

Com relação ao sistema (5.37) considere as hipóteses **H2.1a,b**, **H4.1a-c**, **H4.2a,b** e

**H4.3a** As funções matriciais  $B_w(x, \delta)$  e  $D_w(x, \delta)$  são contínuas e limitadas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$  de interesse.

Considerando as hipóteses acima mencionadas, o problema de interesse nesta seção pode ser enunciado da seguinte maneira:

**Problema 5.3** Considerando o sistema (5.37) e as hipóteses **H2.1a,b**, **H4.1a-c**, **H4.2a,b** e **H4.3a** determine uma lei de controle  $u = K(x, \delta)x$  tal que:

- O sistema não forçado,  $w \equiv 0$ , seja localmente estável;
- O ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $z$  do sistema em malha fechada, i.e.

$$\|G_{wz}\|_\infty = \sup_{\substack{0 \neq w \in \mathcal{W} \\ (\delta, \dot{\delta}) \in \mathcal{B}_\delta}} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}$$

seja minimizado para todo  $w(t) \in \mathcal{W}$ , onde  $\mathcal{W}$  é o conjunto admissível de perturbações.

Por simplificação, supõe-se por hipótese que o conjunto  $\mathcal{W}$  seja admissível, conforme a definição (4.1).

Logo, seguindo os mesmos passos das seções anteriores e considerando a função de Lyapunov quadrática definida em (5.2), tem-se que  $\|G_{wz}\|_\infty^2$  do sistema (5.37) com  $u = K(x, \delta)x$  tem um limitante superior  $\gamma$  para todo  $w \in \mathcal{W}$ , se a seguinte condição é satisfeita para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ :

$$\dot{v}(x) + z'z - \gamma w'w < 0 \quad (5.38)$$

Portanto, a seguinte NLMI é uma condição suficiente para (5.38):

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} A(x, \delta)'P_0 + P_0A(x, \delta) + K(x, \delta)'B_u(x, \delta)'P_0 \\ + P_0B_u(x, \delta)K(x, \delta) \end{array} \right) & P_0B_w(x, \delta) \\ B_w(x, \delta)'P_0 & -\gamma I_{n_w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} C(x, \delta)' + \\ K(x, \delta)'D_u(x, \delta)' \end{array} \right) \\ D_w(x, \delta)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} C(x, \delta) + \\ D_u(x, \delta)K(x, \delta) \end{array} \right) & D_w(x, \delta) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.39)$$

Aplicando o complemento de Schur a (5.39), obtém-se:

$$\left[ \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{c} A(x, \delta)' P_0 + P_0 A(x, \delta) \\ + K(x, \delta)' B_u(x, \delta)' P_0 \\ + P_0 B_u(x, \delta) K(x, \delta) \end{array} \right) & P_0 B_w(x, \delta) \left( \begin{array}{c} C(x, \delta)' + \\ K(x, \delta)' D_u(x, \delta)' \end{array} \right) \\ B_w(x, \delta)' P_0 & -\gamma I_{n_w} \quad D_w(x, \delta)' \\ (C(x, \delta) + D_u(x, \delta) K(x, \delta)) & D_w(x, \delta) \quad -I_{n_z} \end{array} \right] < 0 \quad (5.40)$$

Pré- e pós-multiplicando (5.40) respectivamente por  $\begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix}'$  e seu transposto, tem-se que:

$$\left[ \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{c} Z A(x, \delta)' + A(x, \delta) Z \\ + Y(x, \delta)' B_u(x, \delta)' \\ + B_u(x, \delta) Y(x, \delta) \end{array} \right) & B_w(x, \delta) \left( \begin{array}{c} Z C(x, \delta)' + \\ Y(x, \delta)' D_u(x, \delta)' \end{array} \right) \\ B_w(x, \delta)' & -\gamma I_{n_w} \quad D_w(x, \delta)' \\ (C(x, \delta) Z + D_u(x, \delta) Y(x, \delta)) & D_w(x, \delta) \quad -I_{n_z} \end{array} \right] < 0 \quad (5.41)$$

onde  $Z = P_0^{-1}$  e  $Y(x, \delta) = K(x, \delta) Z$ .

Na seqüência, considere as hipóteses **H4.1**, **H4.2** e

**H4.3b** As matrizes  $B_w(x, \delta)$  e  $D_w(x, \delta)$  podem ser decompostas da seguinte maneira:

$$B_w(x, \delta) = \mathbf{B}_w \Pi_w(x, \delta), \quad D_w(x, \delta) = \mathbf{D}_w \Pi_w(x, \delta), \quad \mathcal{D}_w(x, \delta) \Pi_w(x, \delta) = 0_{q_g \times n_w} \quad (5.42)$$

onde  $\mathbf{B}_w \in \mathbb{R}^{n \times q_p}$ ,  $\mathbf{D}_w \in \mathbb{R}^{n_z \times q_p}$  são matrizes constantes,  $\mathcal{D}_w(x, \delta) \in \mathbb{R}^{q_g \times q_p}$  é uma matriz afim em  $(x, \delta)$  e  $\Pi_w(x, \delta)$  é uma função matricial em  $(x, \delta)$  com a seguinte estrutura:

$$\Pi_w(x, \delta) = \begin{bmatrix} I_{n_w} \\ \Pi_3(x, \delta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_p \times n_w} \quad (5.43)$$

Logo, considerando as hipóteses acima mencionadas, a NLMI (5.41) pode ser rees-

crita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \Pi & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_w & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} S'_\pi Z \mathbf{A}' + \mathbf{A} Z S_\pi + \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_u + \mathbf{B}_u \mathbf{Y} \\ \mathbf{B}'_w S_\pi \\ \mathbf{C} Z S_\pi + \mathbf{D}_u \mathbf{Y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S'_\pi \mathbf{B}_w & S'_\pi Z \mathbf{C} + \mathbf{Y}' \mathbf{D}'_u \\ -\gamma S'_w S_w & \mathbf{D}'_w S_z \\ S'_z \mathbf{D}_w & -S'_z S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_w & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_z \end{bmatrix} < 0, \quad (5.44)$$

$$\forall \begin{bmatrix} \Pi & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_w & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \varrho(x, \delta) & 0 & 0 \\ 0 & \varrho_w(x, \delta) & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_z(x, \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_w & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_z \end{bmatrix} = 0$$

onde  $S_w = [ I_{n_w} \quad 0 ] \in \mathbb{R}^{n_w \times q_p}$ .

Na seqüência, com o auxílio do lema 2.3, apresenta-se uma condição suficiente em termos de LMIs para o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  não linear.

**Teorema 5.3** *Considere o sistema não linear (5.37) com as hipóteses **H2.1a,b**, **H4.1a-c**, **H4.2a,b** e **H4.3a,b**. Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  regiões politópicas dadas e  $\mathcal{W}$  um dado conjunto admissível de perturbações com relação a  $\mathcal{B}_x$ . Defina a seguinte matriz auxiliar:*

$$\Psi_w = \text{diag}\{\varrho(x, \delta), \varrho_w(x, \delta), \varrho_z(x, \delta)\} \quad (5.45)$$

*Suponha que as matrizes  $Z$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $L$  sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as LMIs são construídas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \mathcal{V}(\mathcal{B}_\delta)$ :*

$$\min \quad \gamma \text{ sujeito a} \\ Z > 0, \quad Z = Z' \quad (5.46)$$

$$\text{He} \left( \begin{bmatrix} S'_\pi Z \mathbf{A} + \mathbf{B}_u \mathbf{Y} & 0 & 0 \\ \mathbf{B}'_w S_\pi & -\frac{\gamma S'_w S_w}{2} & 0 \\ \mathbf{C} Z S_\pi + \mathbf{D}_u \mathbf{Y} & S'_z \mathbf{D}_w & -\frac{S'_z S_z}{2} \end{bmatrix} + L \Psi_w \right) < 0 \quad (5.47)$$

*Então o sistema (5.37) não forçado ( $w \equiv 0$ ) com  $u = \mathbf{Y} \Pi(x, \delta) Z^{-1} x$  é localmente estável e  $v(x) = x' Z^{-1} x$  é uma função de Lyapunov para  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Além disso, para*

todo  $w \in \mathcal{W}$  o ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $z$  do sistema em malha fechada satisfaz:

$$\|G_{wz}\|_\infty^2 < \gamma, \quad \forall \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (5.48)$$

### Prova do teorema 5.3

Suponha que exista uma solução para o teorema 5.3. Então, por convexidade, as LMIs (5.46) e (5.47) estão satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ . Defina  $P_0 = Z^{-1}$  e  $\epsilon_1, \epsilon_2$  como o menor e o maior autovalor de  $P_0$  respectivamente. Logo,  $v(x) = x' P_0 x$  satisfaz  $\epsilon_1 x' x \leq x' P_0 x \leq \epsilon_2 x' x$ .

Considere a LMI (5.47). Pré- e pós-multiplicando (5.47) respectivamente por  $\begin{bmatrix} \Pi(x, \delta) & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_w(x, \delta) & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_z(x, \delta) \end{bmatrix}'$  e pelo seu transposto, obtém-se a NLMI (5.41), que por sua vez implica que  $\dot{v}(x) + z' z - \gamma w' w < 0$  para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ .

Portanto, o sistema (5.37) não forçado ( $w \equiv 0$ ) com  $u = Y(x, \delta) P_0 x$  é localmente estável e  $v(x) = x' P_0 x$  é uma função de Lyapunov para  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Além disso, a partir da seção 6.3 de [6] o ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $z$  do sistema em malha fechada satisfaz (5.48).  $\square$

**Exemplo 5.3** Considere o seguinte sistema não linear incerto e invariante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (0.8 + 0.2\delta)(1 - x_1^2) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w, \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde  $\delta \in [-1, 1]$  é um parâmetro incerto invariante no tempo. O objetivo deste exemplo é determinar uma lei de controle  $u = Kx$  que estabilize localmente o sistema para  $w \equiv 0$  e que um limitante superior de  $\|G\|_{wz}^2$  seja minimizado. Com este objetivo, considere o politopo  $\mathcal{B}_x$ , as matrizes  $\Pi(x, \delta)$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_u$ ,  $\mathcal{D}(x, \delta)$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}_u$  e  $\Pi_z(x, \delta)$  definidos no exemplo 5.2, e

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_w(x, \delta) = 1.$$

Para implementar uma lei de controle linear, defina a estrutura de  $\mathbf{Y}$  como em (5.22).

Aplicando o teorema 5.3, obtém-se os seguintes resultados:

$$Z = \begin{bmatrix} 0.0359293 & -0.0049307 \\ -0.0049307 & 0.0640707 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -1.532 \times 10^{-9} & -1 \end{bmatrix}.$$

A tabela 5.1 mostra estimativas do limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $z$  do sistema em malha fechada considerando os teoremas 4.4, função de Lyapunov polinomial com a matriz  $\Theta(x, \delta)$  dada por (5.36), e 5.3 (função quadrática).

estimativas de $\ G_{wz}\ _\infty$	Teorema	
	5.3	4.4
$\sqrt{\gamma}$	1.7	0.14

Tabela 5.1: Estimativas de  $\|G_{wz}\|_\infty$  para o sistema em malha fechada.

## 5.4 Sistemas Sujeitos à Saturação

Recentemente, IWASAKI et al. em [34, 70, 71] provaram que o critério do círculo para não linearidades do tipo setor não é menos conservador do que considerar-se apenas a região linear da saturação para problemas de síntese (estabilização, custo garantido e ganho  $\mathcal{L}_2$  garantido) envolvendo sistemas LTI quando o objetivo é maximizar o domínio do espaço de estados na qual a função objetivo é garantida. Este resultado é diretamente estendido para a classe de sistemas considerada neste capítulo<sup>1</sup>.

Portanto, nesta tese, considerar-se-á apenas a região linear da função sat  $(K_i(x, \delta)x)$  nos problemas de síntese (estabilização, custo garantido e  $\mathcal{H}_\infty$  não linear) com saturação na entrada de controle, isto é, as condições LMIs terão a seguinte restrição adicional

$$|K_i(x, \delta)x| \leq 1, \forall x \in \left\{ x : x'Z^{-1}x \leq 1 \right\}, i = 1, \dots, n_u \quad (5.50)$$

onde  $K_i(x, \delta)$  corresponde à  $i$ -ésima linha da matriz  $K(x, \delta)$ . Observe que, por hipótese, supõem-se que a função saturação seja a mesma definida em (3.45).

<sup>1</sup>Veja que basta considerar as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  como funções não lineares em  $(x, \delta)$  e resolver as NLMIs resultantes para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$  utilizando desta forma os mesmos resultados propostos para sistemas LTI.

O conjunto de condições em (5.50) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\Upsilon_0 \subset \mathcal{X}_i, \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (5.51)$$

onde  $\Upsilon_0 = \{x : x' Z^{-1} x \leq 1\}$  e  $\mathcal{X}_i = \{x : |K_i(x, \delta)x| \leq 1\}$ .

A partir de [34] e dos resultados propostos na seção 3.3, a condição (5.51) é equivalente a:

$$1 - K_i(x, \delta) Z K_i(x, \delta)' \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_u \quad (5.52)$$

Aplicando o complemento de Schur a (5.52) leva ao seguinte conjunto de NLMIs<sup>2</sup>:

$$\begin{bmatrix} 1 & Y_i(x, \delta) \\ Y_i(x, \delta)' & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_u \quad (5.53)$$

onde  $Y_i(x, \delta) = K_i(x, \delta)Z$ .

Considerando que  $Y_i(x, \delta) = \mathbf{Y}_i \Pi(x, \delta)$ ,  $\mathcal{D}(x, \delta) \Pi(x, \delta) = 0$  e utilizando a mesma técnica das seções anteriores, obtém-se o seguinte conjunto de LMIs:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{Y}_i \\ \mathbf{Y}_i' & S_\pi' Z S_\pi + L_0 \mathcal{D} + \mathcal{D}' L_0' \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_u \quad (5.54)$$

onde  $Z$ ,  $\mathbf{Y}_i$  e  $L_0$  são as variáveis de decisão.

Portanto, pode-se considerar os teoremas 5.1, 5.2 e 5.3 com a restrição LMI adicional (5.54) para tratar de sistemas com saturação, lembrando-se que  $\mathbf{Y}_i$  corresponde a  $i$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{Y}$ .

**Exemplo 5.4** *Considere que o sistema no exemplo 5.1 está sujeito à saturação, isto é,  $u = \text{sat}(Kx)$ .*

*Aplicando o teorema 5.1 com a restrição adicional*

$$\begin{bmatrix} 1 & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.55)$$

*obtém-se o seguinte resultado:*

$$Z = \begin{bmatrix} 0.063 & -0.012 \\ -0.012 & 0.219 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -0.132 & -0.369 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -2.462 & -1.826 \end{bmatrix}.$$

<sup>2</sup>Note que  $K_i(x\delta)ZK_i(x, \delta)' = K_i(x, \delta)ZZ^{-1}ZK_i(x, \delta)'$ .

As figuras 5.5 e 5.6 mostram a resposta no tempo do sistema em malha fechada para uma condição inicial  $x_0 = [ 0.2 \quad -0.4 ]'$ .

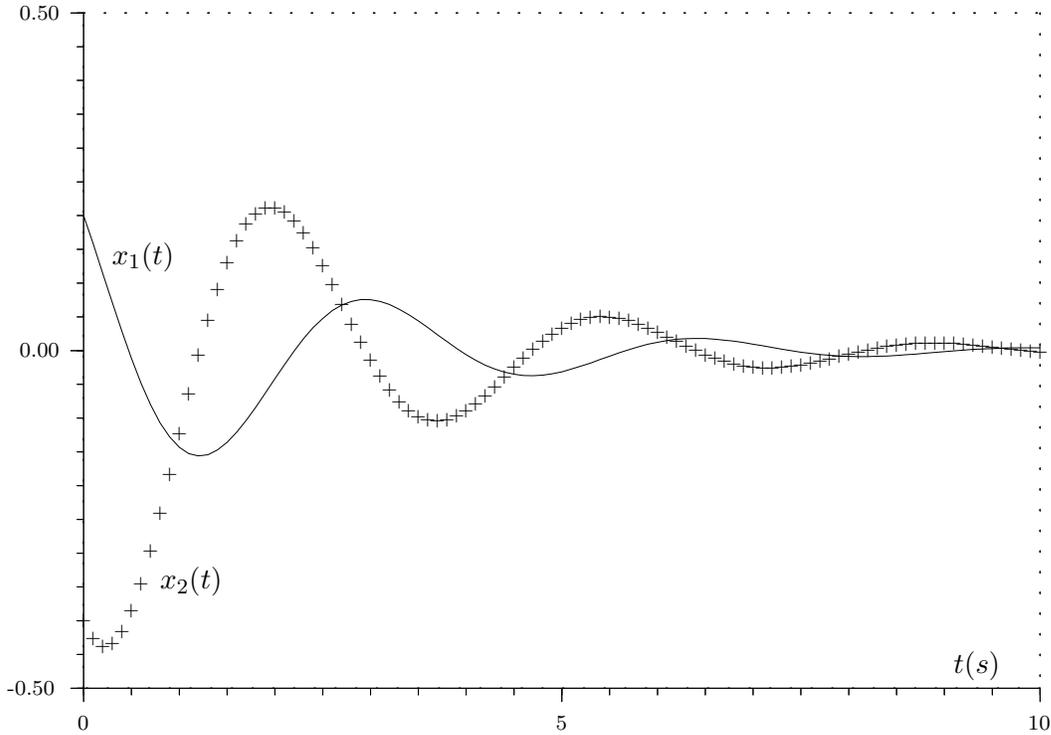


Figura 5.5: Trajetórias do sistema em malha fechada,  $x_1(t)$  (—) e  $x_2(t)$  (+ +).

Aplicando a técnica de análise proposta na seção 3.6, obtém-se uma melhor estimativa do domínio de atração do sistema em malha fechada com taxa de convergência garantida e uma lei de controle  $u = \text{sat}(Kx)$ . A figura 5.7 mostra estas estimativas  $\Upsilon_q$  e  $\Upsilon_p$  considerando respectivamente uma função de Lyapunov quadrática (obtida através do teorema 5.1 com a restrição (5.55)) e polinomial, obtida através do teorema 3.2 com a matriz  $\Theta(x, \delta)$  definida em (5.36) para o sistema em malha fechada.

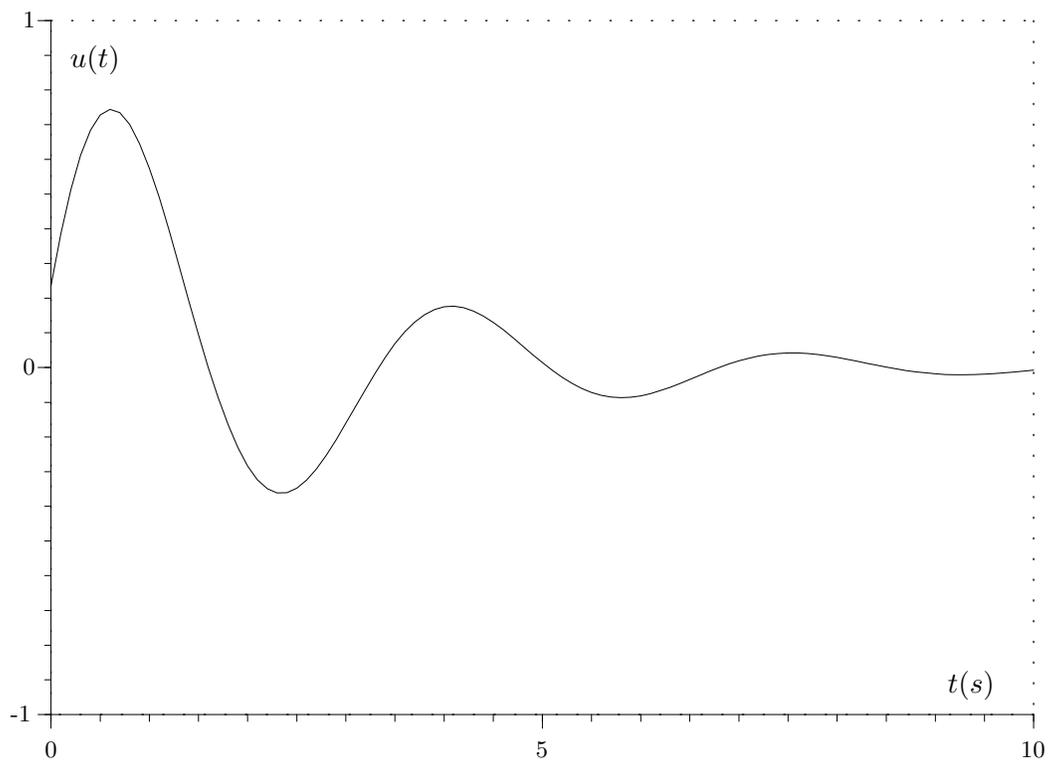


Figura 5.6: Sinal de controle do sistema em malha fechada,  $u(t)$ .

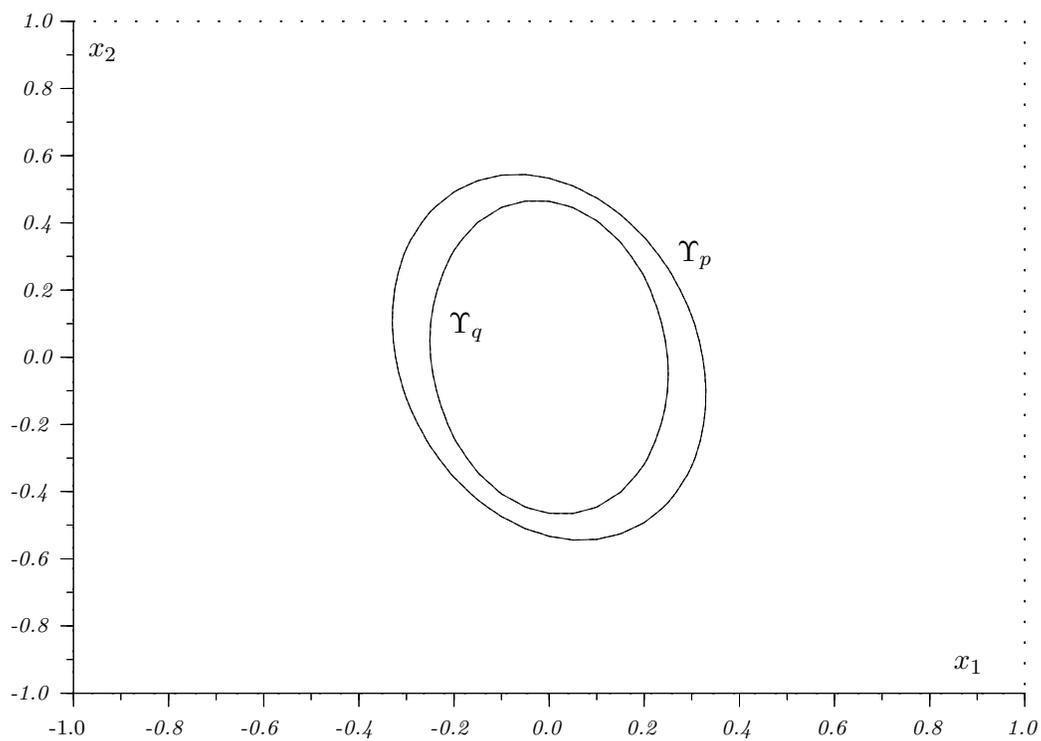


Figura 5.7: Estimativas do domínio de atração do sistema sujeito a saturação.



# Capítulo 6

## Análise de Sistemas Chaveados

Sistemas afins por partes têm sido estudados nos últimos anos devido à sua grande aplicabilidade em uma vasta classe de problemas de controle, como, por exemplo, sistemas de estrutura variável, sistemas descritos por modelagem nebulosa e ARMAX, e sistemas sujeitos à saturação [31]. Apesar do grande número de métodos dedicados a esta classe de sistemas [72, 73, 74, 75, 76], a generalização para o caso não linear é um problema de difícil solução e recentemente tem despertado a atenção da comunidade científica [77, 78, 79].

Neste capítulo será apresentada uma metodologia para a análise de estabilidade regional de uma classe de sistemas chaveados não lineares, onde os modelos locais são modelados por uma equação diferencial na forma  $\dot{x} = A_i(x)x + b_i(x)$ ,  $x \in X_i$ , com  $x$  e  $i$  representando respectivamente as variáveis contínua e discreta do sistema chaveado e  $A_i(x), b_i(x)$  sendo funções afins em  $x$ . Para analisar a estabilidade desta classe de sistemas considera-se uma função de Lyapunov polinomial comum,  $v(x) = x'P(x)x$ , para todas as sub-regiões  $X_i$  do espaço de estados. Para ilustrar esta metodologia, analisa-se a estabilidade de um sistema bilinear sujeito à saturação no sinal de controle.

Os resultados neste capítulo são frutos do trabalho em conjunto com a aluna de doutorado Sonia Palomino Bean e serão apresentados neste capítulo de forma resumida. Maiores detalhes sobre esta abordagem podem ser encontrados na tese de doutorado [80] e no relatório técnico [81]. A notação utilizada neste capítulo difere um pouco daquela considerada nos outros capítulos. Por exemplo,  $\mathcal{J}_\eta$  representa o conjunto de  $\eta$  números inteiros  $\{1, 2, \dots, \eta\}$  e  $\mathbb{J}^\eta$  é o conjunto dos vetores de dimensão  $\eta$  cujos elementos são números inteiros.

## 6.1 Introdução

Considere a seguinte classe de sistemas:

$$\dot{x} = A_i(x)x + b_i(x), \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad i \in \mathcal{J}_\eta, \quad t > 0 \quad (6.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa a componente contínua do espaço de estados com valores nas sub-regiões  $X_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \mathcal{J}_\eta$  representa uma variável discreta assumindo valores no conjunto  $\mathcal{J}_\eta \triangleq \{1, \dots, \eta\}$ , e  $A_i(x)$ ,  $b_i(x)$  (para  $i = 1, \dots, \eta$ ) são funções afins em  $x$  de dimensões apropriadas.

Os campos vetoriais chaveados apresentam uma complexa modelagem matemática e exigem uma atenção especial em sua definição [82]. Por esta razão, considere as seguintes hipóteses com relação a classe de sistemas definida por (6.1):

**H5.1a** *A origem do sistema,  $x = 0$ , é um ponto de equilíbrio.*

**H5.1b** *A região de interesse é representada pelo politopo  $\mathcal{B}_x$  do espaço de estados contendo a origem.*

**H5.1c** *As sub-regiões  $X_i$  satisfazem  $\mathbb{X} = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_\eta \subseteq \mathcal{B}_x \subseteq \mathbb{R}^n$ , e a dimensão da região na fronteira entre duas regiões (adjacentes)  $X_i \cap X_j$ ,  $\forall i \neq j$ , é inferior à dimensão de  $X_i$  e  $X_j$ .*

**H5.1d** *As mudanças na variável discreta  $i$  são governadas somente pelos valores assumidos pelos componentes contínuos do espaço de estados. Em outras palavras, o sistema (6.1) pode ser caracterizado como um sistema chaveado autônomo.*

**H5.1e** *Existe um número finito de transições em qualquer intervalo de tempo finito.*

**H5.1f** *Nos limites entre  $l_j$  regiões adjacentes de  $X_j$ ,  $j = i, \dots, i+l_j$ , não existem modos deslizantes, isto é, se  $x(t^-) \in X_i \cap X_j$  então  $x(t) \notin X_i \cap X_j$  onde  $x(t^-)$  representa o valor da trajetória antes do instante de tempo  $t$ .*

As sub-regiões  $X_i$  do espaço de estados serão nesta tese representadas na seguinte forma:

$$X_i = \{x : \psi_{ij}(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m_i\}, \quad i \in \mathcal{J}_\eta \quad (6.2)$$

onde  $\psi_{ij}(x) \in \mathbb{R}$  são funções afins em  $x$ .

Logo, o problema de interesse neste capítulo pode ser definido na seguinte maneira:

**Problema 6.1** *Analisar a estabilidade local do sistema (6.1) com as hipóteses **H5.1a-f** e estimar seu domínio de atração utilizando uma função de Lyapunov polinomial, na forma  $v(x) = x' \mathcal{P}(x)x$  com  $\mathcal{P}(x)$  sendo uma função quadrática em  $x$ , comum a todas sub-regiões  $X_i$  ( $i \in \mathcal{J}_\eta$ ) através de um problema de otimização convexa em termos de LMIs.*

A seguir, antes de apresentar o resultado principal deste capítulo, faz-se necessário reescrever o sistema (6.1) e a função de Lyapunov com base na notação a ser considerada neste capítulo.

## 6.2 Representação do Sistema Chaveado

Visando uma formulação similar aos capítulos anteriores, a variável discreta  $i$  será associada a um conjunto de variáveis lógicas  $\{\delta_1, \dots, \delta_\eta\}$  com  $\delta_i \in \{0, 1\}$  na seguinte forma:

*Seja  $s_i$  a  $i$ -ésima coluna da matriz identidade  $I_\eta$  e defina o seguinte vetor  $\delta \in \mathbb{J}^\eta$  constituído pelas variáveis lógicas  $\delta_i$  como*

$$\delta \triangleq \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_\eta \end{bmatrix} = s_i \quad \text{se } x(t^-) \text{ e } x(t) \text{ pertencem a } X_i. \quad (6.3)$$

A definição acima estabelece que se o estado discreto assume um dado valor  $i \in \mathcal{J}_\eta$  a  $i$ -ésima componente lógica do vetor  $\delta$  assumirá o valor unitário e todas as outras serão nulas (zero). Para representar o fato de que  $\delta$  pode assumir qualquer valor no conjunto  $\{s_1, \dots, s_\eta\}$ , utiliza-se a notação  $\delta \in \Delta$ , onde:

$$\Delta \triangleq \{s_1, \dots, s_\eta\} \subset \mathbb{J}^\eta \quad (6.4)$$

Para simplificar a representação do sistema (6.1), observa-se a partir da definição acima que os elementos do vetor  $\delta$  satisfazem  $\sum_{i=1}^\eta \delta_i = 1$  e portanto:

$$\delta_\eta = 1 - \sum_{i=1}^{\eta-1} \delta_i \quad (6.5)$$

Também, sem perda de generalidade, considere a seguinte restrição adicional no sistema (6.1):

**H5.2** *A origem é um ponto de equilíbrio da dinâmica do sistema associada a região  $X_\eta$ , isto é,  $b_\eta(x) = 0$ .*

Com as considerações acima, o sistema chaveado (6.1) pode ser reescrito através da seguinte representação:

$$\dot{x} = A_\eta(x)x + \sum_{i=1}^{\eta-1} (A_i(x) - A_\eta(x)) \delta_i x + \sum_{i=1}^{\eta-1} b_i(x) \delta_i \quad (6.6)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \Delta$ , onde a componente  $\delta_\eta$  foi eliminada da representação acima pela relação definida em (6.5).

Considere a definição do seguinte vetor auxiliar  $\pi \in \mathbb{R}^{n_\pi}$  ( $n_\pi = (\eta - 1)(n + 1)$ ):

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{\eta-1} \\ \pi_\eta \\ \vdots \\ \pi_{2\eta-2} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \left. \begin{array}{l} \pi_i = \delta_i x \\ \pi_{i+\eta-1} = \delta_i \end{array} \right\} \forall i \in \mathcal{J}_{\eta-1} \quad (6.7)$$

Para simplificar a representação das relações envolvendo os elementos do vetor  $\pi$ , utiliza-se a seguinte notação  $(x, \pi) \in \mathcal{D}$  onde o conjunto  $\mathcal{D}$  é definido como:

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ (x, \pi) : \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} = 0 \right\} \quad (6.8)$$

com  $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n}$  e  $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_\pi}$  sendo funções matriciais afins em  $(x, \delta_1, \dots, \delta_{\eta-1})$ .

Com as definições acima, o sistema (6.6) pode ser descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x} = A_\eta(x)x + \mathbf{A}(x)\pi, \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad (x, \pi) \in \mathcal{D} \quad (6.9)$$

onde a matriz  $\mathbf{A}(x)$  é dada por:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} (A_1(x) - A_\eta(x)) & \cdots & (A_{\eta-1}(x) - A_\eta(x)) & b_1(x) & \cdots & b_{\eta-1}(x) \end{bmatrix}.$$

Note, pelas relações acima definidas, que as matrizes  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são utilizadas para definir todas as relações entre  $x$  e  $\pi$ . Em particular, estas matrizes irão representar o fato de que  $\delta$  é uma variável lógica. Com esta finalidade, observa-se a partir de (6.3) que  $\delta' \delta = \text{diag}\{\delta_i\}$  ou equivalentemente:

$$\delta_i \delta_j = 0 \quad \text{e} \quad \delta_i (\delta_i - 1) = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \mathcal{J}_\eta \quad (6.10)$$

Considerando as relações acima e (6.7), obtém-se as seguintes restrições algébricas:

$$\left. \begin{aligned} (\delta_i - 1)\delta_i x &= (\delta_i - 1)\pi_i &= 0 \\ (\delta_i - 1)\delta_i &= (\delta_i - 1)\pi_{i+\eta-1} &= 0 \\ \delta_i \delta_j x &= \delta_i \pi_j &= 0 \\ \delta_i \delta_j &= \delta_i \pi_{j+\eta-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall i \neq j, \quad (i, j) \in \mathcal{J}_{\eta-1} \quad (6.11)$$

De forma similar, as seguintes igualdades também são verdadeiras:

$$\left. \begin{aligned} \delta_i x - \pi &= 0 \\ \pi_i - x \pi_{i+\eta-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall i \in \mathcal{J}_{\eta-1} \quad (6.12)$$

Observe que os conjuntos de igualdades em (6.11) e (6.12) são afins em relação ao vetor auxiliar  $[x' \quad \pi']'$ . Portanto, pode-se representá-los como linhas das matrizes  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  em (6.8).

### 6.3 Função de Lyapunov

Considere que a função de Lyapunov seja comum a todas sub-regiões  $X_i$  e que tenha a seguinte estrutura:

$$v(x) = x' \mathcal{P}(x) x, \quad \mathcal{P}(x) = \begin{bmatrix} I_n \\ \Theta_x \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_n \\ \Theta_x \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

onde  $\Theta_x \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n}$  é uma dada função afim em  $x$ , e  $P$  é uma matriz simétrica e constante a ser determinada.

Pelo lema 2.1, deve-se determinar a derivada temporal de  $\mathcal{P}(x)$ . Com esta finalidade,

a estrutura da matriz  $\Theta_x$  pode ser definida na seguinte forma:

$$\Theta_x = \sum_{i=1}^n T_i x_i + U \quad (6.14)$$

onde  $x_i$  corresponde a  $i$ -ésima componente do vetor  $x$  e  $T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e  $U$  são matrizes constantes com as mesmas dimensões de  $\Theta_x$ .

Portanto, o termo  $\dot{\Theta}_x x$  que aparece em  $x' \dot{\mathcal{P}}(x) x$  satisfaz a relação:

$$\dot{\Theta}_x x = \sum_{i=1}^n T_i \dot{x}_i x = \sum_{i=1}^n T_i x r_i \dot{x} = \tilde{\Theta}_x \dot{x}, \quad (6.15)$$

onde  $r_i$  é a  $i$ -ésima linha da matriz identidade  $I_n$  e

$$\tilde{\Theta}_x = \sum_{i=1}^n T x r_i \quad (6.16)$$

A seguir, aborda-se o problema da obtenção de condições suficientes em termos de LMIs para analisar a estabilidade do sistema chaveado (6.1) utilizando a mesma técnica apresentada no capítulo 3.

## 6.4 Análise de Estabilidade

Pela técnica apresentada nos capítulos anteriores são associados multiplicadores (através do lema 2.3) às restrições de igualdade relacionadas às condições de estabilidade do lema 2.1 e à definição das relações entre  $x$  e  $\pi$  em (6.8). Para tal, considere a seguinte notação auxiliar:

$$\begin{aligned} F_x &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -(\Theta_x + \tilde{\Theta}_x) & I_{n_\theta} \end{bmatrix}, & G_x &= \begin{bmatrix} A_\eta(x) & 0 & \mathbf{A}(x) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Psi_x &= \begin{bmatrix} -\Theta_x & I_{n_\theta} \\ M_x & 0 \end{bmatrix}, & \Omega_x &= \begin{bmatrix} -F_x & G_x \\ 0 & \begin{bmatrix} \Psi_x & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

e  $S_\theta = [ I \ 0 ] \in \mathbb{R}^{(n+n_\theta) \times (n+n_\theta+n_\pi)}$ , onde  $M_x$  é a mesma matriz definida em (2.21).

Entretanto, além das restrições de igualdade associadas à definição da função de Lyapunov e ao vetor auxiliar  $\pi$ , também existem as inequações relacionadas às de-

finições das sub-regiões  $X_i$  em (6.2). Portanto, emprega-se o lema 2.4 ( $\mathcal{S}$ -procedure) para obter-se uma única desigualdade matricial. Desta forma, considere a seguinte notação auxiliar associada as desigualdades definidas em (6.2):

$$\Phi_x = \sum_{i=1}^{2\eta-1} E'_i \phi_i E_i + \sum_{i=1}^{2\eta-2} \left( E'_{2\eta-1} \Gamma_i E_i + E'_i \Gamma'_i E_{2\eta-1} \right) \quad (6.18)$$

onde as matrizes  $\Gamma_i$  ( $i \in \mathcal{J}_{2\eta-2}$ ) são variáveis livres de dimensões apropriadas e os escalares  $\phi_i$  são funções afins em  $x$  dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \sum_{j=1}^{m_i} R_{ij} \psi_{ij}, \quad R_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad i \in \mathcal{J}_{\eta-1} \\ \phi_{i+\eta-1} &= \sum_{j=1}^{m_i} R_{(i+\eta-1)j} \psi_{ij}, \quad R_{(i+\eta-1)j} \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathcal{J}_{\eta-1} \\ \phi_{2\eta-1} &= \sum_{j=1}^{m_\eta} R_{(2\eta-1)j} \psi_{\eta j}, \quad R_{(2\eta-2)j} \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned} \quad (6.19)$$

com  $E_i$  representando matrizes constantes com estrutura definida na seqüência e  $R_{ij} > 0$  sendo variáveis de escalonamento a serem determinadas.

As matrizes  $E_i$  são definidas da seguinte maneira. Sejam  $\tilde{E}_i$  e  $\tilde{E}_{2\eta-1}$  matrizes constantes tais que  $\tilde{E}_i \pi = \pi_i$  ( $i \in \mathcal{J}_{2\eta-1}$ ) e  $\tilde{E}_{2\eta-1} \pi = \sum_{i=1}^{\eta-1} \pi_i$ . Desta forma, as matrizes  $E_i$  são dadas por:

$$\begin{aligned} E_i &= \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n \times n_\theta} & \tilde{E}_i \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{J}_{\eta-1} \\ E_{i+\eta-1} &= \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & 0_{1 \times n_\theta} & \tilde{E}_{i+\eta-1} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{J}_{\eta-1} \\ E_{2\eta-1} &= \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_\theta} & -\tilde{E}_{2\eta-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com as definições acima, o teorema abaixo propõe uma condição suficiente para a análise regional do sistema chaveado (6.1).

**Teorema 6.1** *Considere o sistema chaveado (6.1) com as hipóteses **H5.1a-f** e **H5.2**. Seja  $\Theta_x \in \mathbb{R}^{n_\theta \times n}$  uma dada matriz afim em  $x$ . Considere a definição da matriz  $\tilde{\Theta}_x$  em (6.15).*

*Suponha que as matrizes  $P$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $R_{ij}$  e  $\Gamma_l$  (para  $i \in \mathcal{J}_{2\eta-1}$ ,  $j = 1, \dots, m_i$  e  $l \in \mathcal{J}_{2\eta-2}$ ) sejam uma solução do seguinte problema de otimização, onde as LMIs são*

construídas em  $\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) \times \Delta$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{trace} (P + L_1\Psi_x + \Psi'_x L'_1) \text{ sujeito a} \\ & P + L_1\Psi_x + \Psi'_x L'_1 > 0, \quad P = P' \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} a'_k & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_k \\ 0 \end{bmatrix} & (P + L_1\Psi_x + \Psi'_x L'_1) \end{bmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n_f \quad (6.21)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & PS_\theta \\ S'_\theta P & \Phi_x \end{bmatrix} + L_2\Omega_x + \Omega'_x L'_2 < 0 \quad (6.22)$$

Então o sistema (6.1) é assintoticamente estável e  $v(x) = x'P(x)x$  é uma função de Lyapunov para  $\mathcal{B}_x$ . Além disso,  $\Upsilon = \{x : v(x) \leq 1\}$  é uma região invariante, isto é, para todo  $x(0) \in \Upsilon$  a trajetória  $x(t)$  do sistema chaveado permanece em  $\Upsilon$  e converge à origem ao  $t \rightarrow \infty$ .

## Prova do teorema 6.1

Considere o sistema (6.6) e o vetor auxiliar  $\pi$  em (6.7). Defina os seguintes vetores auxiliares:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_\theta+n_\pi}, \quad \zeta_1 = \begin{bmatrix} x \\ \Theta_x x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_\theta}, \quad \zeta_2 = \pi \in \mathbb{R}^{n_\pi} \quad (6.23)$$

Também, defina duas matrizes  $D_1$  e  $D_2$  tais que  $D_1\zeta_1 = x$  e  $D_2 \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \zeta \end{bmatrix} = x$ , por exemplo:

$$D_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_\theta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times (n+n_\theta)} & D_1 & 0_{n \times n_\pi} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Suponha que as condições do teorema 6.1 estão satisfeitas em todos os vértices de  $\mathcal{B}_x \times \mathbf{Co}(\Delta)$ . Então, por convexidade, o teorema 6.1 também está satisfeito para todo  $(x, \delta) \in \mathcal{B}_x \times \Delta$ .

Como as LMIs (6.20) e (6.22) são estritas, existem escalares positivos  $\varepsilon_a$  e  $\varepsilon_c$  suficientemente pequenos tais que seja possível somar-se os termos  $-\varepsilon_a D'_1 D_1$  e  $\varepsilon_c D'_2 D_2$  respectivamente em (6.20) e (6.22), isto é, as seguintes LMIs estão satisfeitas para todo

$(x, \delta) \in \mathcal{B}_x \times \Delta$ :

$$P + L_1 \Psi_x + \Psi'_x L'_1 - \varepsilon_a D'_1 D_1 \geq 0 \quad (6.25)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & PS_\Theta \\ S'_\Theta P & \Phi_x \end{bmatrix} + L_2 \Omega_x + \Omega'_x L'_2 + \varepsilon_c D'_2 D_2 \leq 0 \quad (6.26)$$

Pré- e pós-multiplicando (6.25) por  $\zeta'_1$  e  $\zeta_1$  respectivamente, obtém-se:

$$v(x) = x' \mathcal{P}(x)x = \zeta'_1 P \zeta_1 \geq \varepsilon_a x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \quad (6.27)$$

Observe que por construção  $\Psi_x \zeta_1 = 0$ . Em outras palavras:

$$\begin{bmatrix} -\Theta_x & I_{n_\theta} \\ M_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Theta_x x \end{bmatrix} = 0, \text{ pois } \begin{cases} -\Theta_x x + \Theta_x x = 0 \\ M_x x = 0 \end{cases}$$

Como  $x \in \mathcal{B}_x$ , os elementos da matriz  $\Theta_x$  são limitados. Então, existe um escalar  $\varepsilon_{b1}$  suficientemente grande tal que:

$$\varepsilon_{b1} \zeta'_1 \zeta_1 = \varepsilon_{b1} x' (I_n + \Theta'_x \Theta_x) x \geq \zeta'_1 P \zeta_1 = v(x)$$

Da mesma forma, existe um escalar  $\varepsilon_{b2}$  suficientemente grande tal que  $\varepsilon_{b2} I_n \geq \Theta'_x \Theta_x$ . Portanto:

$$v(x) = \zeta'_1 P \zeta_1 \leq \varepsilon_{b1} (1 + \varepsilon_{b2}) x' x = \varepsilon_b x' x \quad (6.28)$$

Agora, pré- e pós-multiplique (6.26) respectivamente por  $[\zeta'_1 \quad \zeta']$  e seu transposto. Esta multiplicação leva à seguinte inequação:

$$\dot{\zeta}'_1 P \zeta_1 + \zeta'_1 P \dot{\zeta}_1 + \zeta' \Phi_x \zeta \leq -\varepsilon_c x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad (6.29)$$

Observe que por construção  $\Omega_x \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \zeta \end{bmatrix} = 0$ , isto é:

$$\begin{bmatrix} -F_x & G_x \\ 0 & \begin{bmatrix} \Psi_x & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \zeta_1 \\ \pi \end{bmatrix} = 0, \text{ pois } \begin{cases} \Psi_x \zeta_1 = 0, \\ \Omega_1 x + \Omega_2 \pi = 0, \\ \dot{x} = A_\eta(x)x + \mathbf{A}(x)\pi, \\ \frac{d(\Theta_x x)}{dt} = \Theta_x \dot{x} + \tilde{\Theta}_x \dot{x} \end{cases}$$

Analisando o termo  $\zeta' \Phi_x \zeta$ , obtém-se a seguinte relação:

$$\zeta' \Phi_x \zeta = \sum_{i=1}^{\eta-1} (x' \phi_i x \delta_i^2 + \phi_{(i+\eta-1)} \delta_i^2) + x' \phi_\eta x \delta_\eta^2 + \sum_{i=1}^{\eta-1} 2x' (\Gamma_i x \delta_\eta \delta_i + \Gamma_{(i+\eta-1)} \delta_\eta \delta_i)$$

A partir de (6.2), (6.7) e (6.18), conclui-se que  $x' \phi_i x \geq 0$  sempre que  $x \in X_i$ . Além disso,  $\delta_\eta \delta_i = 0$  for all  $i \neq \eta$ . Visto que  $\mathcal{B}_x \subseteq \bigcup X_i$ , tem-se que  $\zeta' \Phi_x \zeta \geq 0$  para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \Delta$ . Então, considerando (6.29) obtém-se:

$$\dot{v}(x) = \zeta_1' P \zeta_1 + \zeta_1' P \dot{\zeta}_1 \leq -\varepsilon_c x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \Delta \quad (6.30)$$

Considerando (6.27), (6.28) e (6.30), conclui-se que  $v(x) = x' \mathcal{P}(x) x = \zeta_1' P \zeta_1$  é uma função de Lyapunov para  $\mathcal{B}_x$  e o sistema (6.1) é assintoticamente estável.

Finalizando, o conjunto de inequações em (6.21) implica que  $\Upsilon = \{x : v(x) \leq 1\} \subset \mathcal{B}_x$  pelos mesmos argumentos da prova do teorema 3.1 (veja a seção 3.3 para maiores detalhes). Logo,  $\Upsilon$  é um conjunto positivamente invariante.

□

Na seqüência, apresenta-se um exemplo numérico baseado no exemplo 7.2 proposto em [83] ilustrando desta forma a metodologia aqui proposta.

## 6.5 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema bilinear com saturação:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{12} \\ -\frac{50}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + \frac{x_1}{8} \end{bmatrix} \text{sat}(Kx), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

onde  $\text{sat}(\cdot)$  corresponde ao operador saturação unitária e  $K = [ 0.3133 \quad -3.5561 ]$ .

O objetivo neste exemplo é determinar uma estimativa da região de atração do sistema (6.31) em malha fechada. Com esta finalidade, observe que este sistema pode ser representado na forma de um sistema chaveado, isto é:

$$\dot{x} = A_i(x)x + b_i(x), \quad i \in \mathcal{J}_3 \quad (6.32)$$

onde as matrizes e os vetores dos sub-sistemas são dados por:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{12} \\ -\frac{50}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}, \quad A_3(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{12} \\ -\frac{50}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + \frac{x_1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3133 & -3.5561 \end{bmatrix},$$

$$b_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 - \frac{x_1}{8} \end{bmatrix}, \quad b_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + \frac{x_1}{8} \end{bmatrix}.$$

Pela definição acima, as sub-regiões  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  representam respectivamente a saturação negativa, positiva e não saturação. Desta forma, elas podem ser definidas a partir de (6.2) pelas seguintes funções afins em  $x$ :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= -(1 + Kx); \\ \phi_2(x) &= -1 + Kx; \\ \phi_{31}(x) &= 1 + Kx, \quad \phi_{32}(x) = 1 - Kx. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Defina a candidata à função de Lyapunov na forma (6.13) pela seguinte matriz  $\Theta_x = [x_1 I_2 \quad x_2 I_2]'$ . Conseqüentemente, a matriz  $\tilde{\Theta}_x$  é dada por:

$$\tilde{\Theta}_x = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

Considere que o polítopo  $\mathcal{B}_x$  e o conjunto de vértices  $\Delta$  sejam definidos por:

$$\mathcal{B}_x = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.15 \\ -0.40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.90 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.40 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.90 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

A figura 6.1 mostra a estimativa  $\Upsilon$  obtida através do teorema 6.1 e o domínio real de atração obtido pela trajetória do seu ciclo limite.

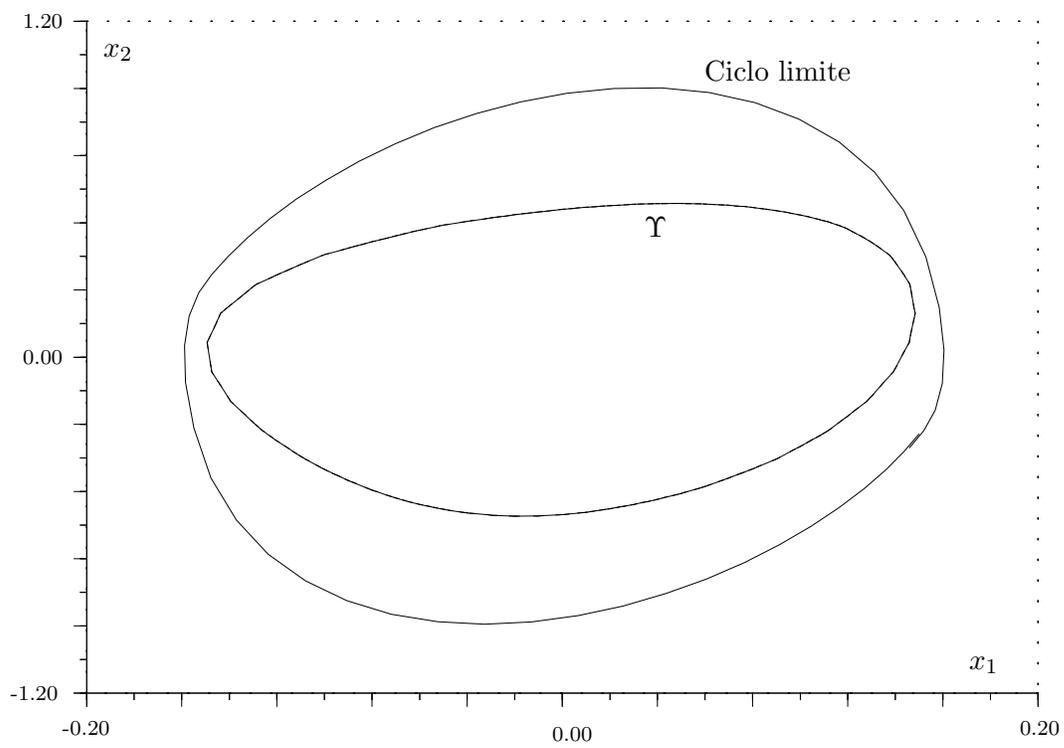


Figura 6.1: Estimativa do domínio de atração e ciclo limite do sistema (6.31).

# Capítulo 7

## Conclusões e Perspectivas Futuras

Nesta tese apresentou-se uma metodologia através da abordagem LMI para a análise e controle de sistemas não lineares incertos utilizando funções de Lyapunov na forma  $v(x, \delta) = x' \mathcal{P}(x, \delta)x$  onde a matrix  $\mathcal{P}(x, \delta)$  é uma função quadrática dos estados e dos parâmetros incertos do sistema.

Para uma melhor compreensão da técnica proposta, os dois capítulos iniciais apresentaram um referencial teórico introduzindo o leitor aos problemas de interesse neste trabalho. A partir do terceiro capítulo vários resultados foram apresentados para análise de estabilidade e desempenho, e síntese de controle para a classe de sistemas não lineares apresentada no capítulo 3. Por hipótese, as matrizes que definem o sistema não linear são limitadas a um conjunto politópico dado contendo a origem e as condições de estabilidade são regionais. Ressalta-se que todos os resultados propostos foram ilustrados através de vários exemplos obtidos da literatura de sistemas não lineares.

A seguir, apresenta-se um resumo dos resultados propostos nesta tese.

### 7.1 Resumo dos Resultados Obtidos

O capítulo 3 além de introduzir o leitor à técnica proposta apresentou vários resultados relacionados à análise de estabilidade de sistemas não lineares tanto na forma diferencial [43, 54] como os representados por equações algébrico-diferenciais [44] sempre levando em conta o conceito de estabilidade regional, isto é, análise de estabilidade local com a determinação de uma estimativa do domínio de atração. Finalizando este capítulo, analisou-se a estabilidade de sistemas não lineares com saturação na entrada de controle utilizando a combinação do critério do círculo com funções de Lyapunov

polinomiais [52].

Na seqüência, no capítulo 4 analisa-se o desempenho da classe de sistemas não lineares apresentada no capítulo 2. Para tal, consideram-se várias formas de determinar este desempenho, tendo sido considerado a taxa de convergência dos estados [54], energia do sinal de saída [55] e ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entrada/saída [56].

Complementando os resultados anteriores, no capítulo 5 apresenta-se uma técnica de controle baseada em funções quadráticas com uma posterior etapa de análise do sistema em malha fechada empregando as funções de Lyapunov polinomiais para a obtenção de uma melhor estimativa do domínio de atração e/ou do índice de desempenho. Os problemas considerados são o de estabilização, custo garantido [84], e  $\mathcal{H}_\infty$  não linear [57]. Levando em conta os recentes resultados apresentados em [34, 71], propõe-se a extensão destes resultados para sistemas sujeitos à saturação através de uma restrição adicional na lei de controle.

Como resultado do trabalho em conjunto com a aluna de doutorado Sonia Palomino Bean, foi proposto no capítulo 6 uma técnica de análise de estabilidade regional de sistemas chaveados autônomos [76] com uma aplicação em sistemas saturados considerando uma classe de funções de Lyapunov polinomiais [85].

Além dos resultados acima citados, durante a realização do doutorado sanduíche na Universidade de Newcastle (Austrália), também estudou-se o problema de controle ótimo de sistemas lineares sujeitos a saturação do sinal de controle em conjunto com o professor Minyue Fu [86, 50]. Apesar destes resultados utilizarem a formulação LMI, eles apresentam uma formulação diferente da estrutura principal desta tese. Desta forma, tais resultados foram apresentados de forma resumida no apêndice A ao final desta tese.

## 7.2 Perspectivas Futuras

Certamente, condições convexas para o controle de sistemas não lineares utilizando funções de Lyapunov polinomiais é ainda um problema em aberto tanto para realimentação de estados quando de saída. A grande dificuldade neste problema encontra-se na existência do termo  $\dot{\mathcal{P}}(x, \delta)$  que aparece na determinação da derivada temporal da função de Lyapunov. Tal fato, não possibilita a utilização de uma formulação dual em função de  $\mathcal{P}(x, \delta)^{-1}$  sem o aparecimento do termo  $\dot{x}$  nas LMIs. A simples inclusão de  $\dot{x}$

no politopo<sup>1</sup> (nas quais as LMIs são testadas) pode ser uma fonte de conservadorismo, visto que não se levaria em consideração a relação entre  $\dot{x}$  e  $x$  (dada pela equação diferencial que descreve o sistema não linear). Uma possível solução seria a inclusão de uma restrição de igualdade que descreve esta relação possibilitando a inclusão de um multiplicador associado a esta restrição (diminuindo com isso o conservadorismo potencial dos resultados). Portanto, o próximo passo após a conclusão do doutorado será o aprofundamento destas questões visando a obtenção de uma condição convexa para o problema de síntese com funções não quadráticas, em especial para o caso mais real da realimentação de saída.

Uma extensão natural desta tese seria para o caso discreto, isto é: a análise de estabilidade e desempenho, e controle de sistemas não lineares discretos utilizando LMIs e funções de Lyapunov polinomiais. Uma dificuldade que aparece neste caso é a não possibilidade da fatoração do termo  $\Theta(x(k+1), \delta(k+1))x(k+1)$  em termos de outras matrizes afins, como no caso contínuo na qual  $\dot{\Theta}x = \tilde{\Theta}\dot{x} + \hat{\Theta}\dot{\delta}$ . De fato, já existe um estudo preliminar para abordar este problema [87] utilizando uma versão não linear para o teste de estabilidade proposto em [88] para sistemas lineares discretos e incertos. Entretanto, tal formulação necessita de um maior aprofundamento devido à explosão dimensional que aparece no caso não linear pois as condições de estabilidade envolvem LMIs de maior dimensão.

Outro ponto a ser abordado é a aplicação dos resultados propostos em problemas não acadêmicos envolvendo o controle de sistemas não lineares reais<sup>2</sup>. A aplicação direta desta teoria em problemas não acadêmicos pode não ser possível devido à maior complexidade do comportamento dos sistemas físicos reais, como por exemplo, pontos de equilíbrio fora da origem (e possivelmente incertos), limitações físicas do sistema, regiões de operação segura, estados do sistema não disponíveis para realimentação, etc. No entanto, esta tese fornece várias ferramentas matemáticas que podem ser adaptadas em situações particulares para o projeto de controladores para sistemas nas áreas de eletrônica de potência, sistemas de potência, e robótica, entre outras.

---

<sup>1</sup>Outro problema que vale ser citado é a determinação do politopo que limite sem conservadorismo o vetor  $\dot{x}$ , um problema que aparece nos trabalhos que utilizam a representação na forma *quasi-LPV* [41].

<sup>2</sup>Apesar de um esforço por parte do autor desta tese na procura de alguns exemplos que descrevessem situações no mundo real, este documento pode ser considerado uma coleção de resultados teóricos.

### 7.3 Considerações Finais

Esta tese procurou de forma coerente apresentar os resultados obtidos dentro dos estudos de doutoramento, e em geral a sua estrutura não correspondeu à ordem cronológica dos eventos. Grande parte dos resultados foram obtidos de forma paralela entre os segundos semestres de 2000 e 2001, como se percebe nas referências citadas nas seções anteriores. Praticamente, todos os resultados de alguma forma ou outra geraram (ou gerarão) publicações a nível nacional e internacional.

Outro fato a destacar foi o trabalho realizado em conjunto com outros pesquisadores (além dos orientadores) o que facilitou em muito o desenvolvimento desta tese, fato essencial numa área de pesquisa com grande diversificação de conhecimentos tanto no aspecto matemático como no volume de diferentes abordagens existentes na literatura de controle.

Finalizando, a participação dos professores Alexandre Trofino e Minyue Fu foi essencial na realização deste trabalho através de discussões com relação aos mais variados aspectos envolvidos nesta tese, assim como na correta orientação quando perceberam alguma dispersão do foco principal deste trabalho.

# Apêndice A

## Controle Ótimo de Sistemas Lineares Sujeitos a Saturação

No período de realização do doutoramento na Universidade de Newcastle, Austrália, sob supervisão do prof. Minyue Fu, foi desenvolvida uma técnica de controle ótimo para sistemas lineares sujeitos à saturação no sinal de controle, onde a não linearidade é modelada por uma restrição integral quadrática (IQC). Apesar deste método propor uma solução em termos de LMIs, a abordagem a ser utilizada difere do conteúdo principal desta tese. Desta forma, os resultados obtidos serão resumidamente apresentados neste apêndice, veja para maiores detalhes sobre esta metodologia [50, 86]. Deve-se ressaltar que vários dos conceitos utilizados nesta técnica foram de alguma forma empregados nos resultados envolvendo sistemas não lineares sujeitos a saturação (apresentados nos capítulos 3 e 5).

### A.1 Introdução

O controle ótimo de sistemas lineares é uma área de pesquisa bem estabelecida e os livros [89], [90], [91] e [92] são bons exemplos desta afirmação. Entretanto, nos problemas práticos de controle o sistema em malha-fechada está sujeito a restrições no sinal de controle. A negligência desta não linearidade no projeto do controlador pode levar à perda de desempenho ou até mesmo à instabilidade do sistema em malha fechada.

Na última década surgiram vários trabalhos dedicados ao controle ótimo de sistemas lineares sujeitos à saturação utilizando as mais variadas técnicas de controle, como por exemplo [93, 94, 95, 96]. Basicamente, existem duas abordagens para o projeto de con-

troladores ótimos para sistemas saturados [96]: os métodos baseados na otimização de um critério de desempenho, e os métodos "Ad-hoc", como a técnica "anti-windup", na qual o objetivo é preservar a estabilidade do sistema em malha-fechada em detrimento do seu desempenho.

Com relação à estabilidade regional de sistemas lineares sujeitos à saturação, vários métodos foram propostos utilizando a abordagem LMI e os critérios do círculo e de *Popov* [97, 48, 27, 34]. Neste caso, observa-se que a abordagem LMI é mais apropriada do que as técnicas baseadas na equação de *Riccati* visto que ela possibilita o uso de funções não-quadráticas e multiplicadores associados à modelagem da não linearidade levando a resultados menos conservadores. Recentemente, os trabalhos de IWASAKI et al. em [34] e [71] demonstraram que os controladores (estabilização e custo garantido) baseados no critério do círculo (onde é permitida um certo nível de saturação da lei de controle) e os que utilizam somente a região linear de operação (saturação não permitida) obtêm o mesmo domínio de atração quando o objetivo é maximizá-lo. Em outras palavras, o critério do círculo e provavelmente o de *Popov* são potencialmente conservadores para a síntese de controladores.

Neste apêndice propõe-se uma nova técnica para o controle ótimo de sistemas lineares saturados utilizando a teoria de estabilidade absoluta e multiplicadores que caracterizam o operador saturação com o objetivo de obter resultados menos conservadores do que os critérios do círculo e de *Popov*. Com esta finalidade, a não linearidade será modelada em termos de IQCs [98] e esta informação será utilizada para melhorar o desempenho do sistema em malha fechada. Uma das características mais importantes do "framework" IQC é a facilidade na combinação de diferentes multiplicadores associados a saturação propiciando uma descrição mais apurada desta não linearidade [26]. Desta forma, também propõe-se uma IQC para descrever a saturação que combina o multiplicador proposto por ZAMES e FALB [99] com o critério do círculo. Para sintonizar alguns dos parâmetros associados à IQC, implementa-se um algoritmo iterativo para melhorar o desempenho do sistema em malha fechada. Exemplos numéricos demonstram que a técnica proposta obtém um melhor desempenho do que os critérios do círculo e de *Popov*.

## A.2 Conceitos Preliminares

Considere o seguinte sistema não linear:

$$\dot{x} = Ax + b\mathbf{g}(u), \quad x(0) = x_0 \quad (\text{A.1})$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^n$  são constantes, e  $\mathbf{g}(\cdot)$  é um operador não linear.

A idéia básica neste apêndice é a de modelar a função  $\mathbf{g}(\cdot)$  em termos de uma função linear e uma não linear (representando a diferença entre a função real e a sua aproximação linear) a ser descrita por uma restrição integral quadrática. Desta forma, assumamos por hipótese que o par  $(A, b)$  é controlável e o operador não linear  $\mathbf{g}(\cdot)$  tem ganho limitado sendo descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{g}(u) = \rho_u u + \sigma(u) \quad (\text{A.2})$$

para um dado escalar positivo  $\rho_u$  e um operador  $\sigma(\cdot) \in \mathbb{R}$  que satisfaz a seguinte IQC:

$$\int_0^\infty f(y, u, \sigma) dt \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

onde  $f(\cdot)$  é uma forma quadrática, e  $y$  é definido pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{y} = A_y y + b_{yu} u + b_{y\sigma} \sigma, \quad y(0) = 0 \quad (\text{A.4})$$

com  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  e  $A_y \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  sendo uma matriz *Hurwitz*. Por simplicidade, assume-se inicialmente que as matrizes associadas a equação diferencial (A.4) são dadas. Posteriormente, na seção A.4 será apresentado um algoritmo iterativo para a determinação destas matrizes.

A IQC acima tem a seguinte forma equivalente no domínio da frequência [98]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{u}(j\omega) \\ \hat{\sigma}(j\omega) \end{bmatrix}^* \mathcal{Y}(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{u}(j\omega) \\ \hat{\sigma}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

em termos de um multiplicador  $\mathcal{Y}(j\omega)$ .

Note que o sistema não linear (A.1) e a IQC (A.3) podem ser representados num

espaço de estados aumentado, isto é:

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_{au} u + B_{a\sigma} \sigma, \forall \sigma : \int_0^\infty f(y, u, \sigma) dt \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

onde:

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_y \end{bmatrix}, B_{au} = \begin{bmatrix} \rho_u b \\ b_{yu} \end{bmatrix} \text{ e } B_{a\sigma} = \begin{bmatrix} b \\ b_{y\sigma} \end{bmatrix}.$$

Como função de Lyapunov, considere a seguinte função quadrática no espaço aumentado:

$$v(x_a) = v(x, y) = x_a' P x_a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

onde  $P = P' \in \mathbb{R}^{(n+n_y) \times (n+n_y)}$  é uma matriz constante a ser determinada tal que as condições do lema 2.1 sejam satisfeitas.

Também, considere a seguinte função custo:

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty (x' Q x + r g(u)^2) dt \quad (\text{A.8})$$

para uma dada matriz  $Q = C' C$  ( $C \in \mathbb{R}^{m_c \times n}$ ) e um escalar  $r \geq 0$ .

Com as considerações acima, o problema de interesse neste apêndice pode ser formulado na seguinte maneira:

**Problema A.1** *Para uma dada IQC, determine para o sistema aumentado (A.6) uma lei de controle dinâmica na forma:*

$$u = K \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, K' \in \mathbb{R}^{n+n_y} \quad (\text{A.9})$$

onde  $K'$  é um vetor constante a ser determinado tal que:

- a função custo definida em (A.8) seja minimizada;
- o sistema em malha fechada seja regionalmente estável com um domínio  $\Upsilon_x$ , isto é, para qualquer  $x(0) \in \Upsilon_x$  a trajetória  $x(t)$  converge para a origem.

Neste apêndice será estimado o domínio de atração do sistema aumentado (A.6) através da região limitada pela máxima curva de nível de  $v(x, y)$ , representada por

$\Upsilon_a$ , pertencendo a uma região poliédrica  $\mathcal{B}_a$  na qual as condições de estabilidade são válidas<sup>1</sup>. Para o sistema original (A.1) será considerada como estimativa do domínio de atração a intersecção da região  $\Upsilon_a$  com o sub-espaço  $(x, 0)$  a ser representada por  $\Upsilon_x$ .

### A.3 Síntese da Lei de Controle

Nesta seção será proposta uma lei de controle para o problema A.1. Com esta finalidade, considere a seguinte função custo para relaxar o problema de horizonte infinito em (A.8):

$$J(x_0, u, T) = \int_0^T (x'Qx + r\mathbf{g}(u)^2) dt, \quad T \rightarrow \infty \quad (\text{A.10})$$

Considerando (A.6) e (A.7) e lembrando que  $y(0) = 0$ , note que a função custo em (A.10) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} J(x_0, u, T) &\stackrel{T \rightarrow \infty}{=} v(x_0, 0) - v(x(T), x_a(T)) \\ &+ \int_0^T (\dot{v}(x_a) + x'Qx + r\mathbf{g}(u)^2) dt \\ &\leq v(x_0, 0) + \int_0^\infty (\dot{v}(x_a) + x'Qx + r\mathbf{g}(u)^2) dt \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Suponha que:

$$\int_0^\infty (\dot{v}(x_a) + x'Qx + r\mathbf{g}(u)^2) dt \leq 0, \quad \forall x_a : (\text{A.6}) \quad (\text{A.12})$$

Então, a função custo (A.8) terá o seguinte limitante superior:

$$J(x_0, u) \leq v(x_0, 0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Com as considerações acima, o problema de interesse neste apêndice será reformulado da seguinte maneira:

**Problema A.1'** *Para uma dada IQC, determine uma função de Lyapunov no*

---

<sup>1</sup>Na realidade, o poliedro  $\mathcal{B}_a$  representa a região de validade da IQC (A.3). A definição desta região ficará mais clara no decorrer deste apêndice.

espaço aumentado e projete uma lei de controle  $u$  dada por (A.9) tal que:

i. minimize  $v(x_0, 0)$  sujeito à (A.12);

ii. o sistema em malha fechada seja regionalmente estável para todo  $x_0 \in \Upsilon_x$ .

Visando uma solução para o problema acima, considere a seguinte restrição:

$$\int_0^\infty \left( \dot{v}(x_a) + x' Q x + r(\rho_u u + \sigma(u))^2 \right) dt \leq 0, \quad \forall \sigma : \int_0^\infty f(y, u, \sigma) dt \geq 0$$

Aplicando o lema 2.4 ( $\mathcal{S}$ -procedure) à expressão acima, obtém-se a seguinte expressão equivalente:

$$\int_0^\infty \left( \dot{v}(x, y) + x' Q x + r(\rho_u u + \sigma(u))^2 + \tau_1 f(y, u, \sigma) \right) dt \leq 0 \quad (\text{A.14})$$

para um dado escalar  $\tau_1 > 0$ .

Por definição  $f(y, u, \sigma)$  é uma forma quadrática. Desta forma, considere a seguinte estrutura para  $f(y, u, \sigma)$ :

$$f(y, u, \sigma) = \begin{bmatrix} y \\ u \\ \sigma \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F'_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F'_{13} & F'_{23} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

onde  $F_{11} = F'_{11} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $F_{12} \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $F_{13} \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $F_{22} \in \mathbb{R}$ ,  $F_{23} \in \mathbb{R}$  e  $F_{33} \in \mathbb{R}$ .

Para simplificar a apresentação do resultado a seguir, considere a seguinte notação auxiliar:

$$\tau_1 = -\frac{r}{F_{33}}, \quad \alpha = r\rho_u^2 + \tau_1 F_{22}, \quad \beta = r\rho_u + \tau_1 F_{23}, \quad C_a = \begin{bmatrix} C & 0_{m_c \times n_y} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

$$F_{11}^a = \begin{bmatrix} 0_{n \times n_y} \\ \tau_1 F_{11} \end{bmatrix}, \quad F_{12}^a = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_1 F_{12} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad F_{13}^a = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_1 F_{13} \end{bmatrix}$$

**Teorema A.1** *Considere o sistema aumentado (A.6), a IQC (A.3) com (A.15) válida em uma região poliédrica  $\mathcal{B}_a$  do espaço aumentado, a função custo (A.8) e a notação auxiliar (A.16). Seja  $x_0$  uma dada condição inicial para o sistema (A.1). Suponha que*

$\lambda$  e  $Z = Z'$  sejam uma solução para o seguinte problema de otimização:

$$\min \lambda \text{ sujeito a :} \quad \begin{bmatrix} \lambda & \begin{bmatrix} x'_0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda(Z) + ZF_{11}^a Z - \frac{ZF_{12}^a F_{13}^{a'} Z + ZF_{13}^a F_{12}^{a'} Z}{\beta} & ZC'_a & ZF_{13}^a \\ & C_a Z & -I_{m_c} & 0 \\ & F_{13}^{a'} Z & 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{A.18})$$

onde  $\Lambda(Z)$  é dado por:

$$\begin{aligned} \Lambda(Z) = & ZA'_a + A_a Z - \frac{B_{a\sigma} B'_{au} + ZF_{13}^a B'_{au} + B_{au} B'_{a\sigma} + B_{au} F_{13}^{a'} Z}{\beta} + \\ & + \frac{\alpha(B_{a\sigma} B'_{a\sigma} + B_{a\sigma} F_{13}^{a'} Z + ZF_{13}^a B'_{a\sigma})}{\beta^2} - \frac{ZF_{12}^a B'_{a\sigma} + B_{a\sigma} F_{12}^{a'} Z}{\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Defina as seguintes regiões:

$$\Upsilon_a \triangleq \{x_a \in \mathcal{B}_a : x'_a Z^{-1} x_a \leq \mu^2\} \quad e \quad \Upsilon_x \triangleq \left\{ x : \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \Upsilon_a \right\} \quad (\text{A.20})$$

para algum  $\mu > 0$ .

Então, a função custo (A.8) satisfaz  $J(x_0, u) < \lambda$  para uma lei de controle:

$$u = - \left( \frac{B'_{a\sigma} Z^{-1} + F_{13}^{a'}}{\beta} \right) x_a \quad (\text{A.21})$$

Além disso, para todo  $x(0) \in \Upsilon_x$  a trajetória  $x(t)$  do sistema em malha fechada converge para a origem.

## Prova do teorema A.1

A derivada temporal da função de Lyapunov definida em (A.7) é dada por:

$$\dot{v}(x_a) = x'_a \left( A'_a P + P A_a \right) x_a + 2 \left( u B'_{au} P + \sigma B'_{a\sigma} P \right) x_a$$

Portanto, a expressão (A.14) pode ser reescrita como:

$$\int_0^\infty \left( x_a' \left( A_a' P + P A_a \right) x_a + 2 \left( u B_{au}' P + \sigma B_{a\sigma}' P \right) x_a + r (\rho_u u + \sigma)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left( u F_{12}^{a'} + \sigma F_{13}^{a'} \right) x_a + \tau_1 \left( F_{22} u^2 + 2 F_{23} u \sigma + F_{33} \sigma^2 \right) \right) dt \leq 0 \quad (\text{A.22})$$

ou, equivalentemente, na forma compacta  $\int_0^\infty f_1(x_a, u, \sigma) dt \leq 0$ .

Por hipótese, assumamos que  $r + \tau_1 F_{33} \leq 0$ . Neste caso,  $f_1(x_a, u, \sigma)$  é uma função côncava com relação a  $\sigma$ . Portanto,  $f_1(x_a, u, \sigma)$  deve ser maximizada com relação a  $\sigma$ . Esta otimização leva ao seguinte valor:

$$\bar{\sigma} = - \left( \frac{\beta u + (B_{a\sigma}' P + F_{13}^{a'}) x_a}{r + \tau_1 F_{33}} \right) \quad (\text{A.23})$$

O mínimo valor de  $\tau_1$  que satisfaz  $r + \tau_1 F_{33} \leq 0$ , e portanto maximiza  $\sigma$ , é dado por:

$$\bar{\tau}_1 = - \frac{r}{F_{33}} \quad (\text{A.24})$$

Aplicando (A.23) e (A.24) em (A.22) obtém-se:

$$\int_0^\infty \left( x_a' \left( A_a' P + P A_a + C_a' C_a + F_{11}^a \right) x_a + 2u \left( B_{au}' P + F_{12}^{a'} \right) x_a + \bar{\sigma}^2 \left( r + \tau_1 F_{33} \right) \right) dt \leq 0$$

ou, equivalentemente,  $\int_0^\infty f_2(x_a, u) dt \leq 0$ .

Minimizando  $f_2(x_a, u)$  com relação a  $u$  leva ao valor ótimo  $\bar{u}$  dado por (A.21). Levando em conta os valores de  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{u}$ , a expressão (A.22) pode ser reescrita como:

$$\int_0^\infty \left( x_a' \left( A_a' P + P A_a + C_a C_a' + F_{11}^a \right) x_a + 2\bar{u} \left( B_{au}' P + F_{12}^{a'} \right) x_a + \alpha \bar{u}^2 \right) dt \leq 0$$

ou, equivalentemente,  $\int_0^\infty f_3(x_a) \leq 0$ .

Defina  $Z = P^{-1}$ . Então,  $f_3(x_a) \leq 0$  é dado por:

$$\Lambda(Z) + Z F_{11}^a Z - \frac{Z F_{12}^a F_{13}^{a'} Z + Z F_{13}^a F_{12}^{a'} Z}{\beta} + \begin{bmatrix} C_a Z \\ F_{13}^{a'} Z \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} I_{m_c} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_a Z \\ F_{13}^{a'} Z \end{bmatrix} \leq 0$$

Aplicando o complemento de *Schur* na inequação acima, obtém-se a inequação matricial (A.18).

Agora considere a LMI (A.17). Pelo complemento de *Schur*, conclui-se que:

$$\min_Z \lambda : \begin{cases} \lambda - \begin{bmatrix} x'_0 \\ 0 \end{bmatrix}' Z^{-1} \begin{bmatrix} x'_0 \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \\ Z > 0 \text{ e (A.18)}. \end{cases}$$

Em outras palavras:  $\min v(x_0, 0) : Z > 0$  e (A.18).

Pela análise acima, conclui-se que  $v(x_a)$  é uma função de Lyapunov para  $\mathcal{B}_a$  com  $u = \bar{u}$ . Por definição a região  $\Upsilon_a$  pertence a  $\mathcal{B}_a$  e, portanto,  $\Upsilon_a$  é um conjunto positivamente invariante para o espaço aumentado. Em particular, para todo  $x(0) \in \Upsilon_x \subset \Upsilon_a$  a trajetória  $x(t)$  converge para a origem.

□

Observe que o problema de otimização no teorema A.1 não é convexo em  $Z$ . Entretanto, este problema pode ser convertido em uma condição convexa dependendo da caracterização da IQC que descreverá a não linearidade  $\sigma(\cdot)$ . Para ilustrar tal afirmação, a seguir propõe-se uma solução convexa para o caso de sistemas lineares com saturação do sinal de controle.

## A.4 Saturação: uma caracterização por IQCs

Considere no sistema (A.1) que a não linearidade  $\mathbf{g}(\cdot)$  é a função saturação unitária definida em (3.45). Por hipótese, o operador  $\mathbf{g}(Kx) = \text{sat}(Kx)$  pode ser decomposto em uma parte linear e outra não linear limitada. Logo, o primeiro problema de interesse neste apêndice é como limitar por um setor a parte não linear da saturação.

Com esta finalidade, define-se o nível de sobre-saturação como  $\mathbf{h}(u) = \max\{0, |u| - 1\}$  para um dado controle  $u$  onde supõe-se que a lei de controle é tal que  $\mathbf{h}(u) \leq \rho$  e  $|\sigma(u)| \leq \rho_\sigma |u|$  para  $\rho, \rho_\sigma \geq 0$ . Com estas definições, considere o seguinte problema:

**Problema A.2** *Qual é o setor ótimo que limita a não linearidade provocada pela saturação? Em outras palavras: como determinar*

$$\min \rho_\sigma \text{ tal que } \sigma(u) = \text{sat}(u) - \rho_u u, \quad |\sigma(u)| \leq \rho_\sigma |u|, \quad \forall |u| \leq 1 + \rho.$$

Recentemente, em [53] foi proposta uma solução para o problema acima que é resumida a seguir:

**Lema A.1** *O setor ótimo para o problema A.2 é obtido com os seguintes valores de  $\rho_u$  e  $\rho_\sigma$ :*

$$\rho_u = \frac{2 + \rho}{2(1 + \rho)} \quad e \quad \rho_\sigma = \frac{\rho}{2(1 + \rho)}. \quad (\text{A.25})$$

Agora, deve-se procurar uma descrição adequada em termos de uma IQC para a não linearidade saturação levando em conta o setor ótimo definido pelo lema A.1. Para tal, considera-se o seguinte resultado proposto em [99] para a saturação unitária:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{u}(j\omega) \\ \hat{\mathbf{g}}(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 + H(j\omega) \\ \tau_2 + H(-j\omega) & -2(\tau_2 + \text{Re}\{H(j\omega)\}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}(j\omega) \\ \hat{\mathbf{g}}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0$$

onde  $\tau_2 \geq 0$  é um escalar a ser determinado e a função de transferência  $H(j\omega)$  é tal que  $\text{Re}\{H(j\omega)\} \leq \tau_2$ .

A partir da IQC acima definida, a seguinte expressão é satisfeita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{u}(j\omega) \\ \hat{\mathbf{g}}(j\omega) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 + H(j\omega) \\ 0 & -(\tau_2 + H(j\omega)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}(j\omega) \\ \hat{\mathbf{g}}(j\omega) \end{bmatrix} \right\} d\omega \geq 0 \quad (\text{A.26})$$

Defina um sinal  $c(j\omega) = (\tau_2 + H(j\omega))\mathbf{g}(j\omega)$  e considere a seguinte realização da função de transferência  $\tau_2 + H(s)$ :

$$\tau_2 + H(s) = C_y(sI - A_y)^{-1}B_y + D_y + \tau_2$$

Então, o sinal  $c(t)$  no domínio tempo é dado pela seguinte equação de estados:

$$\dot{y} = A_y y + B_y \mathbf{g}(u), \quad c(t) = C_y y + (D_y + \tau_2)\mathbf{g}(u) \quad (\text{A.27})$$

onde  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  e  $\mathbf{g}(u) = \text{sat}(u)$ . Observe a partir de (A.4) que  $b_{yu} = \rho_u B_y$  e  $b_{y\sigma} = B_y$ .

Considerando a definição do sinal  $c(t)$ , a IQC no domínio tempo correspondente a condição (A.26) é dada por:

$$\int_0^{\infty} \left\{ (u' - \text{sat}(u)') c + c' (u - \text{sat}(u)) \right\} dt \geq 0 \quad (\text{A.28})$$

Levando em consideração que  $\text{sat}(u) = \rho_u u + \sigma(u)$  para todo  $\sigma(u) : |\sigma(u)| \leq \rho_\sigma |u|$

e (A.28), obtém-se a seguinte IQC que descreve o operador saturação:

$$\int_0^\infty \begin{bmatrix} y \\ u \\ \sigma \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & h_{12} & h_{13} \\ h'_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h'_{13} & h'_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \\ \sigma \end{bmatrix} dt \geq 0 \quad (\text{A.29})$$

onde os elementos  $h_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 2, 3$ ;  $j \geq i$ ) são dados por

$$\begin{aligned} h_{12} &= (1 - \rho_u)C'_y, \quad h_{13} = -C'_y, \quad h_{22} = 2\rho_u(1 - \rho_u)(D_y + \tau_2) + \tau_3^2\rho_\sigma^2, \\ h_{23} &= (1 - 2\rho_u)(D_y + \tau_2) \quad \text{e} \quad h_{33} = -2(D_y + \tau_2 + 0.5\tau_3), \end{aligned}$$

com  $\tau_3 \geq 0$  sendo um parâmetro livre a ser determinado.

**Observação A.1** *A IQC definida em (A.29) engloba os critérios do círculo, Popov e Zames & Falb. Para ilustrar este ponto, considere a seguinte restrição integral quadrática:*

$$\int_0^\infty \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \rho_\sigma^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \sigma \end{bmatrix} dt \geq 0 \quad (\text{A.30})$$

obtida a partir de (A.29) com  $\tau_2 = 0$ ,  $\tau_3 = 1$  e  $H(s) = 0$ . Note que os controladores obtidos com a IQC (A.30) correspondem àqueles projetados com a técnica proposta em [53] que considera o critério do círculo. De maneira similar, os critérios de Popov, por exemplo [27], e o de Zames & Falb, por exemplo [98], podem ser obtidos respectivamente com: (i)  $\tau_2 = 1$ ,  $\tau_3 = 1$  e  $H(s) = s$ ; e (ii)  $\tau_2 = 1$  e  $\tau_3 = 0$ .

**Observação A.2** *Note pelas considerações feitas com relação a função  $\sigma(u)$  que a IQC utilizada para descreve-la será válida na seguinte região poliédrica do espaço aumentado  $\mathcal{B}_a = \{x_a : |Kx_a| \leq 1 + \rho\}$ . Em outras palavras, para todo  $x_a \in \mathcal{B}_a$  a condição de setor imposta em  $\sigma(u)$  é válida.*

Com a IQC definida em (A.29) é possível tornar as condições do teorema A.1 convexas em termos de LMIs pois  $F_{11}^a = 0$  e  $F_{12}^a = -(1 - \rho_u)F_{13}^a$ . Desta forma, definindo  $F_a = [0 \quad C_y]'$  pode-se reescrever o termo  $F_{12}^a F_{13}^{a'} = -(1 - \rho_u)F_a F_a'$  levando ao seguinte teorema.

**Teorema A.2** *Considere as mesmas condições do teorema A.1, a IQC (A.29) e a notação acima. Suponha que  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  e  $Z$  sejam uma solução do seguinte problema*

de otimização:

$$\min \text{trace } P_a \text{ sujeito a:} \quad Z > 0, Z = Z' \quad (\text{A.31})$$

$$P_\lambda > 0, P_\lambda = P_\lambda' \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{bmatrix} P_\lambda & I_{n+n_y} \\ I_{n+n_y} & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda(Z) & ZF_a & ZC'_a & ZF_{13}^a \\ F'_a Z & -\frac{\beta}{1-\rho_u} & 0 & 0 \\ C_a Z & 0 & -I_{m_c} & 0 \\ F_{13}^{a'} Z & 0 & 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{A.34})$$

onde  $\Lambda(Z)$  é dada por (A.19) e  $P_\lambda$  tem a seguinte estrutura:

$$P_\lambda = \begin{bmatrix} P_a & P_b \\ P_b' & P_c \end{bmatrix}, \quad P_a \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_c \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}.$$

Defina o seguinte conjunto  $\Upsilon_x$ :

$$\Upsilon_x = \left\{ x : \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}' Z^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \leq \frac{\beta^2(1+\rho)^2}{B_{a\sigma}' Z^{-1} B_{a\sigma} + \tau_1(b_{y\sigma} F_{13} + F_{13}' b_{y\sigma}) + \tau_1^2 F_{13}^{a'} Z F_{13}^a} \right\}$$

Então, para uma lei de controle dada por (A.21) e qualquer  $x(0) \in \Upsilon_x$  as seguintes condições são satisfeitas:

- i.  $J(x_0, u)$  é minimizado;
- ii.  $x(t) \rightarrow 0$  ao  $t \rightarrow \infty$ ; e
- iii.  $|u(t)| \leq (1 + \rho)$ .

## Prova do teorema A.2

A prova da afirmação (i) é obtida diretamente da prova do teorema A.1 com a aplicação do complemento de *Schur* em (A.34) e considerando que  $P_\lambda \geq Z^{-1}$  pela condição (A.32). Observe que o problema de otimização no teorema A.2 implica na

minimização de:

$$v(x_0, 0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}' Z^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq x_0' P_a x_0$$

para qualquer  $x_0 \in \Upsilon_x$ .

Defina  $\mathcal{B}_a = \{x_a : |Kx_a| \leq 1 + \rho\}$ , onde

$$K = \frac{B_{a\sigma}' P + F_{13}^{a'}}{\beta} \quad \text{e} \quad P = Z^{-1}.$$

Considere que  $\Upsilon_a$  seja uma região delimitada por uma curva de nível da função  $v(x_a) = x_a' P x_a$  para um dado  $\mu^2$ , isto é:

$$\Upsilon_a = \left\{ x_a : x_a' P x_a \leq \mu^2 \right\}$$

Pelo lema 2.1, o conjunto acima será invariante se a relação  $\Upsilon_a \subset \mathcal{B}_a$  for satisfeita. A partir dos resultados propostos em [100] e [96, lema 3.6.1], o mínimo valor de  $v(x_a)$  que satisfaz esta condição é dado por:

$$\mu^2 = \frac{(1 + \rho)^2}{K' Z K} = \frac{\beta^2 (1 + \rho)^2}{B_{a\sigma}' P B_a + \tau_1 b_{y\sigma}' F_{13} b_{y\sigma} + F_{13}^{a'} Z F_{13}^a}$$

Portanto, para qualquer  $x(0) \in \Upsilon_x$  a trajetória  $x(t)$  converge à origem ao  $t \rightarrow \infty$  (lembrando que  $y(0) = 0$  por hipótese). Além disso, a restrição de sobre-saturação  $x_0 \in \mathcal{B}_a$  também esta satisfeita visto que  $\Upsilon_a \subset \mathcal{B}_a$ .

□

O ponto chave para a aplicação do teorema A.2 na síntese de controladores ótimos é a escolha do multiplicador  $H(s)$ . Entretanto, até o presente não existe uma maneira sistemática para determiná-lo. A seguir, propõe-se um algoritmo iterativo para auxiliar na sintonia dos parâmetros associados ao multiplicador  $H(s)$  (em outras palavras, as matrizes  $A_y$ ,  $B_y$ ,  $C_y$  e  $D_y$ ).

**Algoritmo A.1** *Considere o teorema A.2, a IQC (A.29) e defina a seguinte estrutura para a matriz  $Z$ :*

$$Z = \begin{bmatrix} Z_a & Z_b \\ Z_b' & Z_c \end{bmatrix}, \quad Z_a \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Z_c \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}.$$

**Passo 1** Escolha uma função  $H(s)$  com a seguinte estrutura:

$$H(s) = -\frac{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

e a seguinte representação no espaço de estados:

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C'_y = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix},$$

e  $D_y = 0$ . Inicie com os elementos  $a_i$  e  $c_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) arbitrários, mas com  $A_y$  sendo uma matriz Hurwitz.

**Passo 2** Escolha  $\tau_2$  tal que  $\tau_2 \geq \text{Re}\{H(j\omega)\}$ .

**Passo 3** Determine  $\tau_3$  e  $Z$  através do teorema A.2 minimizando o traço de  $P_a$ .

**Passo 4** Para  $Z_b$  e  $Z_c$  fixos, determine  $a_i$  e  $c_i$  tal que o traço de  $P_a$  seja minimizado, onde

$$Z = \begin{bmatrix} Z_a & Z_b \\ Z'_b & Z_c \end{bmatrix}.$$

**Passo 5** Repita os passos de 2 até 4.

Para cada iteração  $i$ , observe que no algoritmo acima o sistema em malha fechada é estável e que  $\lambda_i \leq \lambda_{i-1}$  onde  $\lambda$  corresponde ao traço de  $P_a$ . Desta forma, a convergência do algoritmo para um ótimo local é garantida.

## A.5 Resultados Numéricos

Para demonstrar a aplicação dos resultados propostos serão considerados dois exemplos permitindo a comparação dos resultados com os critérios do círculo [53, seção 5] e de Popov [27, seção 6].

**Exemplo A.1** [53, seção 5] Considere o seguinte sistema linear (instável em malha aberta) sujeito a saturação:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

e defina a função custo  $J(x_0, u)$  com  $r = 1$  e  $C = [1 \ 0]$ .

Visando um estudo comparativo, considere que a saturação seja descrita pelas IQCs (A.30) (critério do círculo) e (A.29) (método proposto).

Também, considere as seguintes condições iniciais para o algoritmo A.1:

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_y = [1 \ 0], \quad \tau_2 = 1, \quad e \quad \tau_3 = 1.$$

Após cinco iterações, obtém-se os seguintes parâmetros:

$$H(s) = -\frac{0.5s + 1}{s^2 + 0.5s + 5.1}, \quad \tau_2 = 1.3 \quad e \quad \tau_3 = 10.$$

A tabela A.1 e a figura A.1 apresentam os resultados obtidos (função custo e a respectiva região de atração) para uma condição inicial  $x_0 = [0.5 \ 0.5]'$  e considerando as IQCs referentes ao critério do círculo (A.30) e a proposta em (A.29). Os resultados mostram

Nível de sobre - saturação	IQC			
	(A.30)		(A.29)	
$\rho = 0$	1.58	$\Upsilon_e$	1.05	$\Upsilon_f$
$\rho = 1$	1.73	$\Upsilon_c$	1.18	$\Upsilon_d$
$\rho = 10$	4.18	$\Upsilon_a$	2.43	$\Upsilon_b$

Tabela A.1: Função custo e respectivas regiões de atração.

claramente que a técnica proposta com a IQC definida em (A.29) melhora o desempenho do sistema sem a degradação do domínio de atração quando comparado ao critério do círculo.

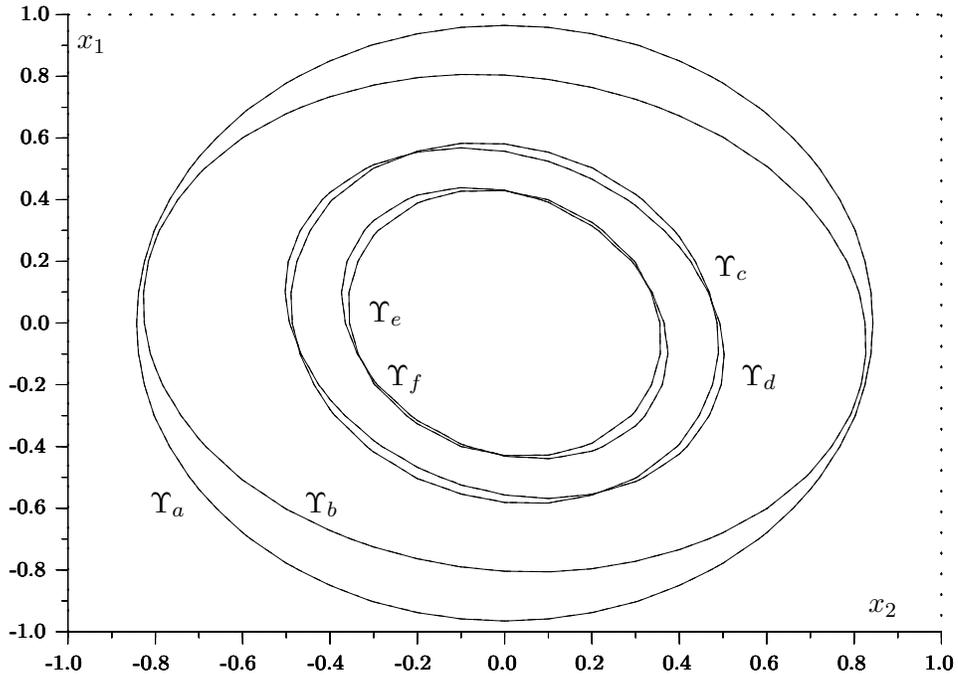


Figura A.1: Regiões de atração para diferentes níveis de sobre-saturação.

**Exemplo A.2** [27, seção 6] Considere o seguinte sistema com saturação:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.35 \end{bmatrix} \text{sat}(u), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

com uma função custo definida por  $Q = I_3$  e  $r = 1$ .

O problema de interesse neste exemplo é determinar uma lei de controle que minimize a função custo para um nível de sobre-saturação  $\rho = 0.25$  e uma condição inicial  $x_0 = [2 \quad -4.5 \quad 1.3]'$ . Aplicando o algoritmo A.1, obtém-se um custo de 47.63. Para ilustrar o potencial da metodologia proposta, o controlador proposto em [27] (utilizando o critério de Popov) obteve um custo de 652 para as mesmas condições.

# Referências Bibliográficas

- [1] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [2] J.-J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [3] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, 1993.
- [4] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 1995.
- [5] A. Rantzer and P.A. Parrilo, “On Convexity in Stabilization of Nonlinear Systems,” in *Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 3, (Sydney, Australia), pp. 2942–2945, 2000.
- [6] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM books, 1994.
- [7] L. El Ghaoui and S-I. Niculescu, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. SIAM books, 2000.
- [8] Y. Huang and W-M. Lu, “Nonlinear Optimal Control: Alternatives to Hamilton-Jacobi Equation,” in *Proc. 35th IEEE Conf. Decision and Control*, (Kobe, Japan), pp. 3942–3947, 1996.
- [9] W-M. Lu and J.C. Doyle, “Robustness Analysis and Synthesis for Uncertain Nonlinear Systems,” in *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 1, (Lake Buena Vista), pp. 787–792, 1994.
- [10] W-M. Lu and J.C. Doyle, “ $H_\infty$  Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 9, pp. 1668–1675, 1995.
- [11] W-M. Lu and J.C. Doyle, “Robustness Analysis and Synthesis of Nonlinear Uncertain Systems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 42, no. 12, pp. 1654–1662, 1997.

- [12] H. Ito, “Semi-Global Robust Nonlinear Control: State-Dependent Scaling and Computational Aspects,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 3, (Philadelphia), pp. 1663–1668, 1998.
- [13] H. Ito, “State-Dependent Scaling for Robust Nonlinear Control: Techniques and Effectiveness,” in *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 4, (Tampa), pp. 4111–4114, 1998.
- [14] H. Ito, “Region Maximization Technique in Robust Nonlinear Control via State-Dependent Scaling Design,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 2, (San Diego), pp. 1390–1394, 1999.
- [15] H. Ito, “A New Look at Robust Backstepping through State-dependent Scaling Design,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 1, (San Diego), pp. 11–16, 1999.
- [16] L. El Ghaoui and G. Scorletti, “Control of Rational Systems using Linear-fractional Representations and LMIs,” *Automatica*, vol. 32, no. 9, pp. 1273–1284, 1996.
- [17] S. Dussy and L. El Ghaoui, “Multi-objective Bounded Control of Uncertain Nonlinear Systems: an Inverted Pendulum Example,” in *Control of Uncertain Systems with Bounded Inputs (Lecture Notes in Control and Information Sciences, No. 227)*, (S. Tarbouriech and G. Garcia, ed.), Springer-Verlag, 1997.
- [18] S.K. Nguang and M. Fu, “Robust  $H_\infty$  Control for a Class of Nonlinear Systems: a LMI Approach,” in *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*, (Tampa), pp. 4063–4068, 1998.
- [19] K. Kiriakidis, “An LMI Approach to the Control of a Class of Nonlinear Systems,” in *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*, (Tampa), pp. 1470–1475, 1998.
- [20] A. Jadbabaie, C.T. Abdallah, and P. Dorato, “Guaranteed-Cost Control of Polynomial Nonlinear Systems,” in *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*, (Tampa), pp. 4100–4102, 1998.
- [21] T. Pancake, M. Corless, and M. Brockman, “Analysis and Control of Polytopic Uncertain/Nonlinear Systems in the Presence of Bounded Disturbance Inputs,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 1, (Chicago), pp. 159–163, 2000.

- [22] S. Sasaki and K. Uchida, “A Convex Characterization of Analysis and Synthesis for Nonlinear Systems via Extended Quadratic Lyapunov Function,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 1, (Albuquerque), pp. 411–415, 1997.
- [23] A. Trofino, “Bi-quadratic Stability for Nonlinear Systems,” in *Proc. 3rd IFAC Symp. Robust Control Design*, (Prague, Czech Republic), 2000.
- [24] T.A. Johansen, “Computation of Lyapunov Functions for Smooth Nonlinear Systems using Convex Optimization,” *Automatica*, vol. 36, pp. 1617–1626, 2000.
- [25] A. Lure and V. Postnikov, “On the Theory of Stability of Control Systems,” *Prikl. Mat. i Mekn.*, vol. 8, pp. 3–13, 1944.
- [26] U. Jonsson, “Robustness Analysis of Uncertain and Nonlinear Systems.” PhD Thesis, Dept. of Automatic Control, Lund Inst. of Technology, Sweden, Nov. 1996.
- [27] V. Kapila, A.G. Sparks, and H. Pan, “Control of Systems with Actuator Nonlinearities: an LMI Approach,” in *Proc. Am. Control Conf.*, (San Diego), pp. 3201–3205, 1999.
- [28] A. Trofino, “Robust Stability and Domain of Attraction for Uncertain Nonlinear Systems,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 5, (Chicago), pp. 3707–3711, 2000.
- [29] T. Iwasaki, “Generalized Quadratic Lyapunov Functions for Nonlinear/Uncertain Systems Analysis,” in *Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 3, (Sydney, Australia), pp. 2953–2958, 2000.
- [30] S. Pettersson and B. Lennartson, “Exponential Stability Analysis of Nonlinear Systems using LMIs,” in *Proc. 36th IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 1, (San Diego), pp. 199–204, 1997.
- [31] M. Johansson, “Piecewise Linear Control Systems.” PhD Thesis, Lund Inst. of Technology, Sweden, Mar. 1999.
- [32] R. Nikoukhah, F. Delebecque, and L. El Ghaoui, “LMITool: a Package for LMI Optimization in Scilab - User’s Guide.” Tech. Report N. 0170, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), France, Feb. 1995.
- [33] E. Gomez, *Engineering and Scientific Computing with Scilab*. Birkhauser, 1999.

- [34] T. Kiyama and T. Iwasaki, “On the Use of Multi-loop Circle Criterion for Saturating Control Synthesis,” *System & Control Letters*, vol. 41, pp. 105–114, 2000.
- [35] L. Vandenberghe, S.P. Boyd, and S-P. Wu, “Determinant Maximization with Linear Matrix Inequality Constraints.” Tech. Report, ISL, EED, Stanford Univ., USA, Apr. 1996.
- [36] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*. The MatWorks, 1995.
- [37] S-P. Wu and S.P. Boyd, “**sdpsol** A parser/solver for Semidefinite Programming and Determinant Maximization Problems with Matrix Structure.” User’s Guide, ISL, EED, Stanford Univ., USA, May 1996.
- [38] D.H. Jacobson, *Extensions of Linear Quadratic Control Optimization and Matrix Theory*. Academic Press, 1977.
- [39] M.C. de Oliveira and R.E. Skelton, “Stability Tests for Constrained Linear Systems,” in *Proc. Robust Control Workshop 2000*, (Newcastle, Australia), 2000.
- [40] D.J. Bender and A.J. Laub, “The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 32, no. 8, pp. 672–688, 1997.
- [41] Y. Huang and A. Jadbabaie, “Nonlinear  $H_\infty$  Control: An Enhanced Quasi-LPV Approach,” in *Proc. 14th IFAC World Congress*, (Beijing, China), pp. 85–90, 1999.
- [42] R. Genesio, M. Tartaglia, and A. Vicino, “On the Estimation of Asymptotic Stability Regions: State of the Art and New Proposals,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 30, no. 08, pp. 747–755, 1985.
- [43] D.F. Coutinho and A. Trofino, “Análise de Sistemas Não Lineares Incertos: uma Abordagem LMI [Analysis of Uncertain Nonlinear Systems: An LMI Approach],” in *Proc. XIII Congresso Brasileiro de Automática*, (Florianópolis, Brazil), pp. 592–597, 2000 (in Portuguese).
- [44] D.F. Coutinho, A.S. Bazanella, A.S. Silva, and A. Trofino, “Polynomial Lyapunov Functions for a Class of Differential-Algebraic Nonlinear Systems,” in *Proc. XIV Congresso Brasileiro de Automática*, (Natal, Brazil), pp. 110–115, 2002.

- [45] L. El Ghaoui and J.P. Folcher, “Multiobjective Robust Control of LTI Systems with Unstructured Perturbations,” *System & Control Letters*, vol. 28, pp. 23–30, 1996.
- [46] H-S. Chiang, C-C. Chu, and G. Cauley, “Direct Stability Analysis of Electrical Power Systems using Energy Functions: Theory, Applications and Perspectives,” in *Proc. IEEE: Special Issue on Nonlinear Phenomena in Power Systems* (D.J. Hill, ed.), IEEE Inc., 1995.
- [47] M.A. Pai, *Power System Stability*. North-Holland Publishing Company, 1981.
- [48] H. Hindi and S.P. Boyd, “Analysis of Linear Systems with Saturation using Convex Optimization,” in *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*, (Tampa), pp. 903–908, 1998.
- [49] J.M. Gomes da Silva Jr. and S. Tarbouriech, “Local Stabilization of Discrete-Time Linear Systems with Saturating Controls: an LMI Approach,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 46, no. 01, pp. 119–125, 2001.
- [50] D.F. Coutinho and M. Fu, “On the Maximisation of the Domain of Attraction with Guaranteed Cost for Linear Systems with Input Saturation,” in *Proc. 2001 Australian East Coast Conf. Signals, Networks and Systems*, (Canberra, Australia), 2001.
- [51] A. Barreiro, J. Aracil, and D.J. Pagano, “Detection of Attraction Domains of Nonlinear Systems using the Bifurcation Analysis and Lyapunov Theory,” *Int’l J. Control*, vol. 75, no. 5, pp. 314–327, 2001.
- [52] D.F. Coutinho, D.J. Pagano, and A. Trofino, “Domain of Attraction of Uncertain Nonlinear Systems with Input Saturation,” in *Proc. XIV Congresso Brasileiro de Automática*, (Natal, Brazil), pp. 134–139, 2002.
- [53] M. Fu, “Linear Optimal Control with Input Saturation,” in *Proc. Robust Control Workshop 2000*, (Newcastle, Australia), 2000.
- [54] D.F. Coutinho and A. Trofino, “Análise de Sistemas Não Lineares Incertos: uma Abordagem LMI [Analysis of Uncertain Nonlinear Systems: An LMI Approach],” *Controle e Automação (Revista da Sociedade Brasileira de Automática)*, vol. 13, no. 2, pp. 94–104, 2002 (in Portuguese).

- [55] D.F. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu, “Guaranteed Cost Control of Uncertain Nonlinear Systems via Polynomial Lyapunov Functions,” in *Proc. 40th IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 4, (Orlando), pp. 3844–3849, 2001.
- [56] D.F. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu, “Nonlinear  $H_\infty$  Control: an LMI Approach,” in *Proc. 15th IFAC World Congress*, (Barcelona, Spain), 2002.
- [57] D.F. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu, “Regional Analysis and  $H_\infty$  Control of Uncertain Nonlinear Systems with Bounded Disturbance Inputs.” Tech. Report, School of Electrical Eng. and Computer Sciences, Univ. of Newcastle, Australia, Mar. 2002.
- [58] W.-M. Lu and J.C. Doyle, “A State Space Approach to Robustness Analysis and Synthesis for Nonlinear Uncertain Systems.” Tech. Report, CIT-CDS-94-010, CDS, Caltech, Pasadena, USA, 1994.
- [59] C.P. Mracek and J.R. Cloutier, “Control Designs for the Nonlinear Benchmark Problem via the State-dependent Riccati Equation Method,” *Int’l J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, no. 4, pp. 401–433, 1998.
- [60] W. Langson and A. Alleyne, “Infinite Horizon Optimal Control of a Class of Nonlinear Systems,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 5, (Albuquerque), pp. 3017–3022, 1997.
- [61] W. Langson and A. Alleyne, “A Stability Result with Application to Nonlinear Regulation: Theory and Experiments,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 5, (San Diego), pp. 3051–3056, 1999.
- [62] P. Apkarian and P. Gahinet, “A Convex Characterization of Gain-Scheduled  $H_\infty$  Controllers,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 05, pp. 853–864, 1995.
- [63] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet, “Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter-dependent Lyapunov Functions,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, no. 7, pp. 1041–1046, 1996.
- [64] F. Wu, X.H. Yang, A. Packard, and G. Becker, “Induced  $L_2$ -norm Control for LPV Systems with Bounded Parameter Variation,” *Int’l J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 6, no. 9-10, pp. 983–998, 1996.

- [65] J. de Oliveira, C.E. de Souza, and A. Trofino, “ $H_2$  Analysis and Control of Parameter-Dependent Systems via LMIs and Parameter-Dependent Lyapunov Functions,” in *Proc. 3rd IFAC Symp. Robust Control Design*, (Prague, Czech Republic), 2000.
- [66] H. Kajiwara, P. Apkarian, and P. Gahinet, “LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum,” *IEEE Control Systems*, vol. 19, no. 1, pp. 44–54, 1999.
- [67] W. Tan, A.K. Packard, and G.J. Balas, “Quasi-LPV Modeling and LPV Control of a Generic Missile,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 5, (Chicago), pp. 3692–3696, 2000.
- [68] D.J. Leith and W.E. Leithead, “On formulating Nonlinear Dynamics in LPV Form,” in *Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 4, (Sydney, Australia), pp. 3526–3527, 2000.
- [69] C. W. Scherer, “LPV Control and Full Block Multipliers,” *Automatica*, vol. 37, pp. 361–375, 2001.
- [70] T. Kiyama, S. Hara, and T. Iwasaki, “When Does or Not Does Circle Criterion Help in Robust Control Synthesis for LTI Systems with Sector Type Nonlinearities?,” in *Proc. 40th IEEE Conf. Decision and Control*, (Orlando), pp. 39–44, 2001.
- [71] T. Iwasaki and M. Fu, “Regional  $H_2$  Performance Synthesis,” in *Actuator Saturation Control* (V. Kapila and K.M. Grigoriadis, ed.), Marcel Dekker, 2002.
- [72] A. Hassibi and S.P. Boyd, “Quadratic Stabilization and Control of Piecewise-Linear Systems,” in *Proc. Am. Control Conf.*, vol. 6, (Philadelphia), pp. 3659–3664, 1998.
- [73] M. Johansson and A. Rantzer, “Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 43, no. 4, pp. 555–559, 1998.
- [74] C.A. Yfoulis, A. Muir, N.B.O.L. Pettit, and P.E. Wellstead, “Stabilization of Orthogonal Piecewise Linear Systems using Piecewise Linear Lyapunov-like Functions,” in *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control*, vol. 2, (Tampa), pp. 1476–1481, 1998.

- [75] S. Pettersson, “Analysis and Design of Hybrid Systems.” PhD Thesis, Chalmers Univ. of Technology, Sweden, May 1999.
- [76] S.E. Palomino Bean, D.F. Coutinho, A. Trofino, and J.E.R. Cury, “Stability Analysis and Guaranteed Domain of Attraction for a Class of Hybrid Systems: An LMI Approach.” Tech. Report, Dept. of Automation and Systems, UFSC, Brazil, to be published in *Int’l J. Robust and Nonlinear Control*, Mar. 2002.
- [77] A. Agrachev and D. Liberzon, “Li-algebraic Stability Criteria for Switched Systems,” *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 40, no. 01, pp. 253–269, 2001.
- [78] O. Beldiman and L. Bushnell, “Stability, Linearization and Control of Switched Systems,” in *Proc. Am. Control Conf.*, (San Diego), pp. 2950–2954, 1999.
- [79] Z. Li, C.B. Soh, and X. Xu, “Robust Stability of a Class of Hybrid Dynamic Uncertain Systems,” *Int’l J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, pp. 1059–1072, 1998.
- [80] S.E. Palomino Bean, “Uma Abordagem LMI para Análise e Controle de uma Classe de Sistemas Híbridos [An LMI Approach to the Analysis and Control of a Class of Hybrid Systems].” PhD Thesis, PGEEL, UFSC, Brazil, June 2002 (in Portuguese).
- [81] S.E. Palomino Bean, D.F. Coutinho, A. Trofino, and J.E.R. Cury, “Regional Stability of a Class of Nonlinear Hybrid Systems: An LMI Approach,” in *Proc. 41st IEEE Conf. Decision and Control*, (Las Vegas), 2002.
- [82] A.F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer, 1988.
- [83] E.P. Hofer and B. Tibken, “An Iterative Method for the Finite-Time Bilinear Quadratic Control Problem,” *J. Optimization: Theory and Applications*, vol. 57, no. 3, pp. 411–427, 1988.
- [84] D.F. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu, “Guaranteed Cost Control of Uncertain Nonlinear Systems via Polynomial Lyapunov Functions,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 47, no. 9, pp. 1575–1580, 2002.
- [85] S.E.P. Castro, D.F. Coutinho, A. Trofino, and J.E.R. Cury, “Computation of Stability Regions using LMIs for Dynamical Systems with Saturation,” in *Proc.*

- IX Int'l Symp. Dynamics Problems in Mechanics*, (Florianópolis, Brazil), pp. 21–26, 2001.
- [86] D.F. Coutinho and M. Fu, “Optimal Control of Linear Systems with Input Saturation using IQCs,” in *Proc. 15th IFAC World Congress*, (Barcelona, Spain), 2002.
- [87] D.F. Coutinho, M. Fu, and A. Trofino, “Regional Stability and Performance Analysis for a Class of Nonlinear Discrete-Time Systems,” in *Proc. 41st IEEE Conf. Decision and Control*, (Las Vegas), 2002.
- [88] M. de Oliveira, J. Bernussou, and J.C. Geromel, “A New Discrete-Time Robust Stability Condition,” *System & Control Letters*, vol. 37, pp. 261–265, 1999.
- [89] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, 1989.
- [90] M. Green and D.J.N. Limebeer, *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, 1995.
- [91] K. Zhou, *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1998.
- [92] J.B. Burl, *Linear Optimal Control*. Addison Wesley, 1999.
- [93] D.S. Bernstein and A.N. Michel, “A Chronological Bibliography on Saturating Actuators,” *Int'l J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 5, pp. 375–380, 1995.
- [94] W. Reinelt, “Robust Control of Systems Subject to Hard Constraints.” PhD thesis, Inst. for Automatic Control, Univ. of Paderbon, Germany, Apr. 1998.
- [95] A. Teel, “Anti Windup for Exponentially Unstable Linear Systems,” *Int'l J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 9, no. 10, pp. 701–716, 1999.
- [96] J.A. De Doná, “Input Constrained Linear Control.” PhD thesis, Dept. Electrical and Computer Eng., Univ. of Newcastle, Australia, Feb. 2000.
- [97] C. Pittet, S. Tarbouriech, and C. Burgat, “Stability Regions for Linear Systems with Saturating Controls via Circle and Popov Criteria,” in *Proc. 36th IEEE Conf. Decision and Control*, (San Diego), 1997.
- [98] A. Megretski and A. Rantzer, “System Analysis via Integral Quadratic Constraints,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 42, no. 6, pp. 819–830, 1997.

- [99] G. Zames and P.L. Falb, “Stability Conditions for Systems with Monotone and Slope-Restricted Nonlinearities,” *SIAM J. Control*, vol. 6, no. 1, pp. 89–108, 1968.
- [100] D.G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*. Addison Wesley, 1989.