

**Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

Previsão Numérica do Ruído Gerado por Jatos Turbulentos

**Dissertação Submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para
Obtenção do Grau de Mestre de Engenharia Mecânica**

Eduardo Mayer

Florianópolis, 10 de Outubro de 2003

PREVISÃO NUMÉRICA DO RUÍDO GERADO POR JETOS TURBULENTOS

EDUARDO MAYER

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. César José Deschamps, Ph.D.
Orientador

Prof. Jáuber Cavalcante de Oliveira, Ph.D.
Orientador

Prof. José Antônio Bellini da Cunha Neto
Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D. - Presidente

Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva, Dr.Eng.

Prof. Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao governo e ao povo brasileiro, que, por intermédio do CNPq, forneceu a mim o suporte financeiro para a realização deste trabalho.

Aos professores Cesar José Deschamps e Jáuber Cavalcante de Oliveira, pela confiança, paciência, apoio, incentivo e pela excelente orientação.

Ao Núcleo de Refrigeração, Ventilação e Condicionamento de Ar (NRVA) e à Empresa Brasileira de Compressores (EMBRACO), por fornecerem os meios necessários à realização deste trabalho.

Aos colegas do NRVA, em especial a André Morriesen, Diogo Eduardo Ribeiro e João Ernesto Schreiner, pelo auxílio fornecido durante etapas da execução deste trabalho.

Aos meus pais, Ivone Medeiros Mayer e Arnaldo Mayer, por tudo.

E, por fim, a todos aqueles que, de algum modo, contribuíram para a realização deste trabalho.

“Scientific knowledge is a body of statements of varying degrees of certainty — some most unsure, some nearly sure, but none absolutely certain”.
(Richard Feymann).

RESUMO

O presente trabalho considera a previsão numérica do campo acústico gerado por jatos turbulentos subsônicos. Em função das características totalmente diferentes dos campos acústico e do escoamento, adota-se uma metodologia híbrida realizada em duas etapas.

A primeira consiste na solução prévia dos campos instantâneos do escoamento turbulento (velocidade e pressão) através da Simulação de Grandes Escalas (SGE), com o modelo de sub-malha de Smagorinsky. Na segunda etapa avalia-se a pressão sonora para diferentes posições de observador usando a analogia acústica de Lighthill, implementada em rotinas desenvolvidas no trabalho. A analogia de Lighthill é representada por uma equação de onda não homogênea, cujo termo de não homogeneidade é função do campo instantâneo de velocidade e da massa específica na região compreendida pelo escoamento. Assim, o campo de velocidade determinado a partir da resolução das equações de Navier-Stokes filtradas da SGE fornece, em última instância, os dados necessários para a avaliação da fonte sonora do ruído.

Uma geometria de jato plano é escolhida para a análise, considerando-se três níveis de velocidade, representados pelos números de Reynolds iguais a 400, 3.000 e 7.200. Resultados de grandezas médias são apresentados, tais como perfis de velocidade, perfis de tensões de Reynolds e campo de intensidade turbulenta. Além disto, campos instantâneos de vorticidade e de viscosidade turbulenta de sub-malha são também disponibilizados para ilustrar a natureza transiente e assimétrica do escoamento.

Resultados do espectro de frequência da pressão sonora são obtidos para várias posições do observador, nas diferentes condições de velocidade do jato. Em linhas gerais, os resultados demonstram ser fisicamente consistentes, sendo a ‘lei do inverso da distância’ rigorosamente observada. A pressão sonora apresenta em quase todos os casos um espectro de frequência característico de ruído branco, típico do ruído gerado por escoamentos turbulentos.

A metodologia possui potencial para desenvolvimentos futuros. Parte desses desenvolvimentos deveria considerar a redução de ruído espúrio, decorrente de erros de truncamento e pelo uso de condições de contorno de caráter reflexivo na resolução dos jatos.

ABSTRACT

The present work considers the numerical prediction of the acoustic field generated by turbulent plane jet. Considering the strong physical distinction between the flow field and the acoustic field, the problem has been solved through a hybrid methodology composed of two steps. In the first one, the turbulent jet flow is numerically solved using large eddy simulation (LES), so that the transient behavior of the large turbulence scales can be described. Effects associated to small scales are taken into account via Smagorinsky's sub-grid viscosity model. In the second step, the sound pressure level is estimated from the transient flow field using Lighthill's analogy.

The turbulent plane jet is solved for three Reynolds numbers ($Re = 400; 3.000$ and 7.200). Results of average quantities (such as velocity, Reynolds stress and turbulence intensity) are shown to be in agreement with available data in the literature. Results of instantaneous fields for vorticity and sub-grid viscosity are also made available to illustrate the transient and asymmetric nature of turbulence.

Results of sound pressure level for different observer's positions are seen to be physically consistent, with levels decaying correctly in respect to the distance. The sound pressure level resembles a white noise spectrum, typically attributed to turbulence.

Despite the physical consistency of the flow field and some encouraging predictions for sound pressure level, the present methodology should be further developed to minimize the presence of spurious noise in the results. Two aspects of merit for a separate work are the investigation of truncation error and the implementation of non reflecting boundary conditions.

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS DESCRIÇÃO

Símbolos Arábicos

A	fator de forma para o perfil de velocidade prescrito na fronteira 1 (para a seção 6.2.1, $A = 1$; para as seções 6.2.2, 6.2.3 e 6.3, $A = 2$)
a_{NB}	coeficientes da propriedade genérica Φ nos pontos NB, vizinhos ao ponto P
b	termo fonte para equação discreta em volumes finitos, na forma $a_P \Phi_P = \sum_{NB} a_{NB} \Phi_{NB} + b$
\bar{B}	termo fonte para a forma integral da equação de conservação para a propriedade Φ
c_o	velocidade do som no meio não perturbado (m/s)
c_p	calor específico a pressão constante (J/kgK)
c_v	calor específico a volume constante (J/kgK)
C_s	constante de Smagorinsky-Lilly
C_{ij}	componentes do tensor cruzado, em notação indicial (m^2/s^2)
d	largura da folga de saída do jato (m)
D_R	norma do tensor de sub-malha (m/s^2)
D_L	norma do tensores de Leonard e Cruzado (m/s^2)
D_M	norma do tensor de dissipação viscosa (m/s^2)
$\bar{\bar{D}}$	tensor taxa de deformação (s^{-1})
$e(\kappa, t)$	densidade espectral de energia do campo de velocidades (m^2/s^2)
f	função filtro
\hat{f}	função transferência
f_κ	freqüência de corte associada à estimativa para a pequena escala, baseada na escala dissipativa de Kolmogorov (s^{-1})
G_o	função de Green para a equação da onda clássica em domínio ilimitado
h	entalpia (J/kg)

h_x	espaçamento de malha na direção longitudinal (m)
h_y	espaçamento de malha na direção transversal (m)
H	metade do comprimento do domínio computacional para a simulação dos jatos planos (e para a simulação do campo acústico), na direção transversal (m)
$H(\kappa_c - \kappa)$	função transferência do filtro de espectro retangular
$I(\bar{x})$	intensidade sonora média (W/m^2)
\bar{I}	tensor identidade
k	condutividade térmica (W/mK)
k_t	energia cinética turbulenta (m^2/s^2)
k_{sg}	energia cinética de sub-malha (m^2/s^2)
l^*	escala das grandes estruturas turbulentas (m)
l_d	escala dissipativa de Kolmogorov (m)
l_{RCE}	menor escala da Região Contidora de Energia (m)
L	comprimento do domínio computacional para a simulação dos jatos planos (e para a simulação do campo acústico), na direção longitudinal (m)
L_{ij}	componentes do tensor de Leonard, em notação indicial (m^2/s^2)
M	numero de Mach
M	numero de pontos de colocação na quadratura de Chebyshev-Gauss-Lobatto, na direção transversal
$\vec{M}_{et} = \vec{U}_{et} / c_o$	vetor número de Mach para as estruturas turbulentas
$M_{et} = \ \vec{M}_{et}\ $	norma do vetor número de Mach para as estruturas turbulentas
M_p	massa contida no volume de controle na integração da equação de transporte para a propriedade genérica Φ , no instante atual (kg)
M_p^o	massa contida no volume de controle na integração da equação de transporte para a propriedade genérica Φ , no instante anterior (kg)
N	número de pontos de colocação na quadratura de Chebyshev-Gauss-Lobatto, na direção longitudinal
NPT	número de pontos de colocação na quadratura para o cálculo da transformada Discreta de Fourier, no tempo
p	pressão termodinâmica (Pa), pressão acústica (Pa)

p_0	pressão atmosférica do meio não perturbado (Pa)
\tilde{p}	espectro da flutuação de pressão acústica em banda estreita (Pa)
\hat{p}	pressão acústica no domínio da frequência (forma complexa da Transformada de Fourier) (Pa)
\bar{p}	complexo conjugado de \hat{p} (Pa)
P_{ij}, P_{ik}	tensor dissipação viscosa em notação indicial (Pa)
$\bar{\bar{P}}$	tensor dissipação viscosa (Pa)
φ	termo de produção (hipótese de equilíbrio local) (m^2/s^3)
\dot{q}	geração de calor (W/m^3)
r	escala de comprimento de uma dada estrutura turbulenta (m)
$r = U_S/\Delta U_F$	relação entre o escoamento secundário junto à folga e o número correspondente à diferença entre o escoamento principal e o secundário no perfil de entrada junto à folga
r^m	resíduo para a conservação da massa (kg/s)
r^Φ	resíduo para a conservação da propriedade genérica Φ
R	constante universal do gases em base mássica (J/kgK)
R^Φ	resíduo normalizado para a conservação da propriedade genérica Φ
Re	número de Reynolds
Re^*	número de Reynolds das grandes estruturas turbulentas
Re_1^*	número de Reynolds da estrutura turbulenta, cuja escala de comprimento apresenta tamanho igual a l^*
Re_r^*	número de Reynolds da estrutura turbulenta, cuja escala de comprimento apresenta tamanho igual a r
s	entropia (J/kgK)
S_Φ	coeficiente linear da linearização do termo fonte
S_p	coeficiente angular da linearização do termo fonte
S_{ij}	tensor taxa de deformação baseado no campo de velocidades filtrado, em notação indicial (s^{-1})
t	tempo (s)
t^*	tempo de emissão do sinal (s)
t^{r*}	tempo de emissão do sinal da fonte correlata (s)
T_{ij}	tensor de Lighthill em notação indicial (Pa)

$\overline{\overline{T}}$	tensor de não-homogeneidade de Lighthill (Pa)
TT	escala de tempo correspondente a $100\tau^*$ (s)
u_d	escala de velocidade de Kolmogorov (m/s)
u_i, u_j	componentes do campo de velocidades (m/s)
u^{me}	velocidade média longitudinal adimensional
u_{invo}^{me}	adimensionalização para o inverso quadrático da diferença entre o escoamento principal, U_C , e o escoamento secundário, U_S , ao longo da linha de simetria ($y = 0$).
u^{rms}	velocidade “rms” longitudinal adimensional
u_o^{rms}	velocidade “rms” longitudinal adimensional ao longo da linha de simetria
u_r	escala de velocidade das estruturas turbulentas cujo tamanho é r (m/s)
u_x	projeção da velocidade na direção do observador (m/s)
u_μ	velocidade média na direção longitudinal (m/s)
$u_{\mu o}$	velocidade média na direção longitudinal, ao longo da linha de simetria (m/s)
u_σ	velocidade “rms” na direção longitudinal (m/s)
u_{∞}	velocidade “rms” na direção longitudinal, ao longo da linha de simetria (m/s)
u^*	escala de velocidade das grandes estruturas turbulentas (m/s)
\bar{u}	componente longitudinal do campo de velocidade filtrado (m/s)
$\overline{u^2}$	tensão normal turbulenta longitudinal (m^2/s^2)
\bar{u}_i, u_i'	parcelas filtrada e residual da componente do campo de velocidades, em notação indicial (m/s)
$\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}'$	parcelas filtrada e residual do vetor campo de velocidades (m/s)
$\bar{u}\bar{u}$	tensor fluxo de quantidade de movimento (m^2/s^2)
U_J	escala de velocidade média para jatos (m/s)
U_C	velocidade média longitudinal do escoamento principal em uma dada posição da linha de simetria ($y = 0$) (m/s)
U_F	velocidade média longitudinal do escoamento principal junto a folga, na linha de simetria (em $x = 0$ e $y = 0$) (m/s)

U_S	velocidade média longitudinal do escoamento secundário (em $x = 0$) (m/s)
v_σ	velocidade “rms” na direção transversal (m/s)
$v_{\sigma 0}$	velocidade “rms” na direção transversal, ao longo da linha de simetria (m/s)
\bar{v}	componente transversal do campo de velocidade filtrado (m/s)
$\overline{v^2}$	tensão normal turbulenta transversal (m^2/s^2)
$x - x_0$	comprimento do jato em relação à posição referente ao término do cone potencial, denotado por x_0 (m)
x_i, x_j	coordenadas espaciais do observador, em notação indicial (m)
\bar{x}	vetor posição do observador (m)
$x = \ \bar{x}\ $	norma do vetor posição do observador (m)
y_i, y_j	coordenadas espaciais das fontes, em notação indicial (m)
y^1, y^2	coordenadas longitudinal e transversal no domínio das fontes (m)
y_i^1, y_j^2	coordenadas longitudinal e transversal no domínio das fontes (versão discreta) (m)
\bar{y}, \bar{y}'	vetor posição da fonte sonora, vetor posição da fonte correlata (m)

Símbolos Gregos

α	coeficiente de proporcionalidade entre a viscosidade de sub-malha e o produto entre a escala de comprimento associadas às pequenas escalas e uma escala de velocidade associada à energia cinética de sub-malha
α	fator de subrelaxação
α, β	coordenadas longitudinal e transversal do domínio computacional associadas ao mapeamento de Chebyshev-Gauss-Lobatto (versão contínua)
α_i, β_j	coordenadas longitudinal e transversal do domínio computacional associadas ao mapeamento de Chebyshev-Gauss-Lobatto (versão discreta)
$\delta_{0,5}$	largura de meia velocidade (m)
Δ	largura do filtro (m)

Δ_c	largura do filtro, associada à frequência de corte f_c (m)
Δ_K	largura do filtro para a coordenada K (= 1, 2 e 3) (m)
Δf	resolução espectral (s^{-1})
Δt	passo de tempo da simulação durante o período de coleta de dados (s)
ΔU_F	diferença entre o escoamento principal e o escoamento secundário, junto à folga (m/s)
ΔU_C	diferença entre o escoamento principal e o escoamento secundário, em uma dada posição da linha de simetria (m/s)
$\Delta x, \Delta y$	largura e altura dos volumes de controle (m)
ΔV	volume dos volumes de controle (m^3)
ε	dissipação de energia cinética turbulenta (m^2/s^3)
ϕ	dissipação viscosa (W/m^3)
Φ	campo da propriedade genérica Φ
Φ_{NB}	propriedade genérica do volume de controle nos pontos centrais dos volumes vizinhos ao volume cujo ponto central é P, no instante atual e na iteração atual
Φ_P	propriedade genérica do volume de controle no ponto P, no instante atual e na iteração atual
Φ_P^*	propriedade genérica do volume de controle no ponto P, no instante atual e na iteração anterior
γ	relação entre o calor específico à pressão constante e o calor específico a volume constante
Γ	propriedade difusiva genérica
$\eta = y/\delta_{0,5}$	posição transversal adimensionalizada pela função da largura de meia velocidade na posição longitudinal x
$\vec{\eta}$	vetor distância de correlação (m)
η_{df}	número de graus de liberdade do sistema de equações discreto (m)
ι	energia interna (J/kg)
κ_c	número de onda de corte do filtro para a SGE (m^{-1})
κ_d	número de onda associado à escala dissipativa de Kolmogorov (m^{-1}).
κ_{RCE}	número de onda associado à menor escala da região do espectro de energia que corresponde à RCE (Grandes Escalas) (m^{-1})

Λ	campo representante da fonte sonora local, avaliada no tempo de recepção do sinal
Λ_d	campo representante da fonte sonora local, avaliada no tempo de recepção do sinal e nos pontos de colocação de Chebyshev-Gauss-Lobatto
$\hat{\Lambda}$	transformada de Fourier da função Λ , na coordenada temporal
$\hat{\Lambda}_d$	transformada de Fourier discreta da função Λ_d , na coordenada temporal e nos pontos de colocação de Chebyshev-Gauss-Lobatto
μ	viscosidade molecular dinâmica (Ns/m ²)
μ_e	viscosidade efetiva (Ns/m ²)
μ_t	viscosidade de sub-malha (Ns/m ²)
ν	viscosidade cinemática (m ² /s)
ν_t	viscosidade cinemática de sub-malha (m ² /s)
π_{ij}	tensor de sub-malha (m ² /s ²)
θ	espessura de quantidade de movimento associada ao perfil de velocidade na folga de saída do jato (m).
$\theta(\bar{x}, \bar{y})$	ângulo entre a velocidade das fontes sonoras locais, representadas por estruturas turbulentas e a posição relativa entre o observador e as fontes sonoras locais (rad)
θ_{ff}	ângulo entre a velocidade das fontes sonoras locais, representadas por estruturas turbulentas e a posição do observador, quando o mesmo está no campo afastado (rad)
Θ	temperatura absoluta (K)
ρ	massa específica (kg/m ³)
ρ'	flutuação de massa específica (kg/m ³)
ρ_o	massa específica do meio não perturbado (kg/m ³)
τ	diferença entre os tempos de recepção dos sinais emitidos pelas fontes sonoras \bar{y} e \bar{y}' , nos respectivos instantes de tempo, t^* e t'^* (s)
τ_d	tempo associado às pequenas estruturas turbulentas (s)
τ^*	tempo associado às grandes estruturas turbulentas (s)
τ^*	diferença entre os tempos de emissão dos sinais nos instantes de tempo t^* e t'^* (s)

ζ	tempo de retardo (s)
ω	freqüência angular (rad/s)
ω_1	freqüência angular discreta (rad/s)
$\xi = x/d$	posição longitudinal adimensionalizada pela largura da folga de saída do jato.
$\vec{\xi}$	vetor posição da fonte sonora local, cujo referencial está sobre as grandes estruturas turbulentas (m)
\bar{E}_0	região ocupada pelo fluido no instante inicial ($t = 0$)
\bar{E}_t	região ocupada pelo fluido no instante t
Ω	domínio físico dos problemas hidrodinâmico e acústico, domínio físico das fontes sonoras locais induzidas pelo escoamento
Ω'	domínio físico das fontes sonoras locais induzidas pelo escoamento (descrito em função das posições de correlação)

Operadores

$\frac{\partial(\cdot)}{\partial(\ast)}$	operador derivada parcial
$\frac{\delta(\cdot)}{\delta(\ast)}$	derivada parcial discreta via diferenciação à Chebyshev
$\nabla^2(\cdot)$	operador laplaciano
$\vec{\nabla}(\cdot)$	operador gradiente
$\vec{\nabla}^T(\cdot)$	operador gradiente transposto
$\vec{\nabla} \cdot (\cdot)$	operador divergente
$\vec{\nabla} \times (\cdot)$	operador rotacional
$\frac{d(\cdot)}{dt}$	operador derivada substantiva
$\int_{\Omega}(\cdot)$	operador integral
$\int_a^b(\cdot)$	operador integral definida em uma dimensão

$\mathfrak{F}\{\cdot\}$	operador transformada de Fourier
$(\hat{\cdot})$	operador transformada de Fourier
$\ \cdot\ $	operador norma de vetor
$\text{tr}(\cdot)$	operador traço de matriz
$\cos(\cdot)$	função cosseno
$\exp(\cdot)$	função exponencial
$\ln(\cdot)$	função logaritmo natural
$\text{sen}(\cdot)$	função seno
$\tanh(\cdot)$	função tangente hiperbólica
$\delta(\cdot)$	distribuição delta de Dirac
$H(\cdot)$	distribuição “ <i>heavyside</i> ”

SUBÍNDICES

DESCRIÇÃO

w, e, s, n	indicam as interfaces entre os volumes de controle centrados em W, E, S e N com o volume centrado em P
N, M	valor máximo para os índices usados no mapeamento de Chebyshev-Gauss-Lobatto nas coordenadas longitudinal e transversal
NB	representação compacta para os centros dos volumes vizinhos ao volume cujo centro é P
NPT	número de passes de tempo durante o período de simulação destinado a coleta de dados
P	indica o volume centrado no ponto P
W, E, S, N	indicam os volumes centrados em nos pontos W, E, S e N, adjacentes ao volume centrado em P

SUPERÍNDICES

DESCRIÇÃO

1, 2	indicam as coordenadas longitudinal e transversal associadas, tanto à fontes sonoras locais quanto à posição do observador.
2	segunda derivada parcial

CONTEÚDO

1. INTRODUÇÃO	17
1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	17
1.2. OBJETIVOS	19
1.3. MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO	20
1.4. ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	21
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1. INTRODUÇÃO	23
2.2. REVISÃO DE TRABALHOS.....	24
2.2.1. Modelos Aeroacústicos	24
2.2.2. Geração do Ruído em Jatos.....	32
2.2.3. Aeroacústica Computacional	38
2.3. COMENTÁRIOS FINAIS.....	39
3. TEORIA DO RUÍDO GERADO POR ESCOAMENTOS.....	41
3.1. EQUAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS.....	41
3.2. NOÇÕES DE ACÚSTICA	43
3.3. MODELO DE Lighthill PARA O RUÍDO GERADO POR ESCOAMENTOS	47
4. SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS.....	59
4.1. INTRODUÇÃO	59
4.2. O FILTRO E A OPERAÇÃO DE FILTRAGEM.....	65
4.3. APLICAÇÃO DO OPERADOR FILTRO ÀS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES.....	71
4.4. MODELAGEM DO TENSOR DE SUB-MALHA.....	74
5. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO.....	79
5.1. INTRODUÇÃO	79
5.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO JATO PLANO TURBULENTO	81
5.2.1. Modelo Matemático	82
5.2.2. Metodologia Numérica.....	85
5.3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO CAMPO ACÚSTICO	92
5.3.1. Modelo Matemático	92
5.3.2. Metodologia Numérica.....	95
6. RESULTADOS E DISCUSSÕES	99
6.1. INTRODUÇÃO	99
6.2. O JATO PLANO TURBULENTO	99
6.2.1. Validação dos Resultados	104
6.2.2. Perfis de Quantidades Médias.....	113
6.2.3. Campos.....	130
6.3. O CAMPO ACÚSTICO.....	139
7. CONCLUSÕES.....	149
7.1. COMENTÁRIOS PRELIMINARES	149
7.2. PRINCIPAIS CONCLUSÕES	152
7.3. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	153
REFERÊNCIAS	157
APÊNDICE A – DIFERENCIAÇÃO À CHEBYSHEV	163

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Dentro do cenário mercadológico atual, conceitos como confiabilidade, custo e eficiência já não constituem somente vantagem competitiva, mas sim requisitos básicos que precisam ser atendidos para a aceitação de um produto pelos consumidores.

Tanto em âmbito local como internacional, as legislações que tratam de temas como preservação do meio-ambiente e segurança do trabalho vêm se tornando cada vez mais severas em seus mecanismos de controle, de modo que outros requisitos, tais como engajamento social, estética e baixo impacto sobre o meio ambiente, representam vantagem competitiva às empresas e aos profissionais que, na realização de seus serviços, buscam atendê-los.

A aviação civil é um exemplo que se encaixa em tal panorama. A viabilidade da utilização do avião como um meio de transporte de pessoas, documentos e mercadorias em larga escala tornou-se, com o passar dos anos, indispensável. Uma consequência imediata é a imperiosa necessidade de se produzir aviões mais confiáveis, baratos e eficientes, implicando no emprego da tecnologia de motores à reação puros ou mistos. No entanto, o ruído emitido por tais motores é, pelo menos em âmbito civil, a fonte de ruído de maior intensidade. Idéia praticamente disseminada no senso comum, a exposição do ser humano por tempo prolongado ao ruído nas escalas de magnitudes características da operação dessas máquinas é proibitiva, tanto do ponto de vista da saúde física quanto psicológica do indivíduo. Dentre as principais consequências pode-se citar a perda irreversível da audição, hipertensão, problemas cardiovasculares, imuno-deficiência, alterações de sono, distúrbios mentais e fadiga. A tabela 1.1 ilustra alguns exemplos de efeitos nocivos do ruído sobre a saúde humana.

Outro exemplo de produto tecnológico onde a emissão de ruído deve ser controlada é o compressor utilizado em refrigeração doméstica. Quando esta categoria de compressor atinge certo nível de eficiência energética, melhoras no nível de performance acarretam geralmente um aumento considerável nos níveis de ruído, o que obriga a utilização de dispositivos silenciadores adicionais, elevando o custo de produto. Medições sugerem que a

principal fonte de ruído de alta frequência em compressores se deve ao escoamento de natureza turbulenta que ocorre nas linhas de sucção e descarga do compressor.

TABELA DE IMPACTO DE RUÍDOS NA SAÚDE - VOLUME REAÇÃO EFEITOS NEGATIVOS EXEMPLOS DE EXPOSIÇÃO			
VOLUME	REAÇÃO	EFEITOS NEGATIVOS	EXEMPLOS DE EXPOSIÇÃO
Até 50 Db	Confortável (limite da OMS)	Nenhum	Rua sem tráfego
Acima de 50 dB	ORGANISMO HUMANO COMEÇA A SOFRER IMPACTOS DO RUÍDO.		
De 55 a 65 dB	A pessoa fica em estado de alerta, não relaxa	Diminui o poder de concentração e prejudica a produtividade no trabalho intelectual.	Agência bancária
De 65 a 70 dB (início das epidemias de ruído)	O organismo reage para tentar se adequar ao ambiente, minando as defesas	Aumenta o nível de cortisona no sangue, diminuindo a resistência imunológica. Induz a liberação de endorfina, tornando o organismo dependente. É por isso que muitas pessoas só conseguem dormir em locais silenciosos com o rádio ou TV ligados. Aumenta a concentração de colesterol no sangue.	Bar ou restaurante lotado
Acima de 70	O organismo fica sujeito a estresse degenerativo além de abalar a saúde mental	Aumentam os riscos de enfarte, infecções, entre outras doenças sérias	Praça de alimentação em shopping centers Ruas de tráfego intenso.
Obs.: O quadro mostra ruídos inseridos no cotidiano das pessoas. Ruídos eventuais alcançam volumes mais altos. Um trio elétrico, por exemplo, chega facilmente a 130 dB(A), o que pode provocar perda auditiva induzida, temporária ou permanente em poucos segundos.			

Tabela 1.1: Impacto do ruído sobre a saúde.

Exemplos adicionais dignos de menção correspondem ao escoamento de vapor d'água em turbulações de usinas térmicas, o som gerado por linhas de alta tensão devido a rajadas de vento e o ruído gerado por hélices de ventiladores.

Diante de tal contexto, há a necessidade de normas que visem garantir o bem-estar e a preservação da saúde através da determinação de critérios relativos à intensidade e ao tempo de exposição a um determinado tipo de ruído. Por outro lado, para garantir a observância desses critérios de modo economicamente viável, faz-se necessário o estudo do ruído gerado por escoamentos, dadas as suas peculiaridades em relação às demais categorias de ruído.

Em plantas de usinas térmicas, tubulações industriais, compressores, motores alternativos, grande parte do ruído se deve ao próprio escoamento interno do fluido de trabalho, independentemente da interação com a estrutura formada pelo sistema de dutos. Em motores a reação e estruturas carenadas, parcela significativa do ruído é consequência do escoamento externo. No primeiro caso, trata-se do escoamento de natureza turbulenta, com ou sem a presença de ondas de choques, resultante da expansão dos gases oriundos da câmara de combustão, enquanto que no segundo, o escoamento turbulento resulta da interação do fluido em repouso com a estrutura carenada. Em todas as situações mencionadas acima, a fonte do ruído é o próprio escoamento, ou seja, o movimento das estruturas turbulentas se comporta como uma fonte sonora distribuída.

Aeroacústica é o nome que se dá ao ramo da Mecânica dos Fluidos que se preocupa com o entendimento do fenômeno da geração de ruído pelo escoamento. Como o objeto de

seu estudo está intimamente ligado à questão da turbulência, a qual ainda não é plenamente compreendida, a aeroacústica comunga da mesma condição. Devido à complexidade do problema, ainda não existe sequer uma formulação padrão, havendo uma grande diversidade de propostas, algumas até mesmo conflitantes entre si.

A primeira motivação para o presente trabalho é a geração de subsídios que auxiliem o desenvolvimento de compressores de alta eficiência energética e com níveis de ruído reduzidos.

Além disto, existe no Brasil uma carência muito grande de profissionais na área de aeroacústica comparada com a demanda relacionada ao assunto. Tal carência pode ser em parte entendida pela necessidade de conhecimentos tanto em Mecânica dos Fluidos como em Acústica, além de uma base matemática adequada para a solução de equações diferenciais parciais, tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado. Desta forma, a formação de recursos humanos nessa área é outra motivação importante.

Finalmente, o tema fornece também uma oportunidade para se avançar o entendimento do fenômeno da turbulência e de técnicas adotadas na sua modelação como, por exemplo, a simulação de grandes escalas (SGE).

1.2. OBJETIVOS

O objetivo central do presente trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia para a previsão do ruído gerado por escoamentos, buscando estabelecer uma estrutura conceitual que envolva a identificação de variáveis principais, admissibilidade e abrangência das diversas hipóteses, equações a serem resolvidas, escolha de condições de contorno apropriadas, identificação de possíveis métodos numéricos de solução.

Inseridos neste contexto, alguns objetivos específicos são também buscados:

- i) Revisão de modelos para o cálculo do campo acústico gerado por escoamentos;
- ii) Exame das metodologias numéricas empregadas para a solução dos modelos de aeroacústica;
- iii) Emprego da simulação de grandes escalas (SGE) para a previsão numérica de um jato plano turbulento;

- iv) Solução do campo acústico a partir dos resultados numéricos de velocidade e de pressão obtidos com a SGE;
- v) Análise crítica da metodologia e dos resultados gerados.

1.3. MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO

O presente trabalho propõe uma abordagem computacional para a investigação do fenômeno do ruído gerado por escoamentos, em particular, por jatos planos.

Dentro desse contexto, as metodologias computacionais aptas à previsão de ruído gerado aerodinamicamente podem ser divididas em duas categorias principais: (1), abordagem direta; (2), abordagem híbrida.

Métodos de abordagem direta correspondem a todos aqueles através dos quais se obtém o campo acústico via resolução aproximada das equações de Navier-Stokes, ou seja, considerando que tal solução contém toda a informação referente ao escoamento (o que também contempla a informação referente ao campo acústico), bastaria apenas o emprego de uma metodologia apta à separação da parcela referente às ondas sonoras após a obtenção da solução aproximada do escoamento. Do ponto de vista numérico, tal procedimento é proibitivo, tendo em vista a exigência relacionada ao número de graus de liberdade necessários a uma representação adequada da solução numérica do escoamento (níveis elevados de refino de malha e passe de tempo), resultando em simulações numéricas excessivamente longas, exigindo máquinas com capacidade de memória e de processamento em níveis que, em regra, inviabilizam o emprego dessa abordagem.

Nos métodos de abordagem híbrida, como o próprio nome sugere, a pressão sonora é obtida após a execução de um procedimento computacional que envolve duas etapas principais. De forma semelhante ao que ocorre nos métodos diretos, a primeira etapa consiste da resolução numérica aproximada das equações de Navier-Stokes, o que se traduz na obtenção da evolução temporal dos campos numéricos de velocidade e de pressão, e, de posse de tal informação, a excitação sonora induzida pelo escoamento é construída. Assim, o campo acústico é avaliado através da resolução numérica de uma expressão matemática denominada por analogia acústica, que, em síntese, corresponde a uma equação de onda não-homogênea, relacionando uma grandeza mecânica associada à propagação do som (pressão sonora, massa específica, logaritmo natural da pressão e entalpia de estagnação) com a excitação sonora,

obtida a partir das informações do escoamento resolvido previamente e cuja representação se dá por meio do termo de não-homogeneidade.

Os métodos híbridos apresentam a vantagem de permitir a previsão do campo acústico com recursos computacionais aceitáveis, uma vez que o escoamento pode ser resolvido com um número menor de graus de liberdade para a discretização espacial e temporal (tamanho de malha e passe de tempo maiores) sem grande comprometimento da previsão numérica do campo acústico. Além disso, os métodos híbridos possuem a vantagem de apresentar de forma explícita o campo acústico, diferentemente da abordagem direta, na qual se faz necessário o emprego de um método de separação da informação referente ao campo acústico a partir dos campos representativos do escoamento.

No presente trabalho, opta-se pelo emprego de uma metodologia computacional híbrida para a obtenção da previsão numérica do ruído gerado por jatos planos. Dentro desse contexto, utiliza-se a metodologia de volumes finitos, juntamente com o modelo de Smagorinsky-Lilly, com os objetivos de realizar a simulação do escoamento turbulento e, também, obter a evolução temporal do campo de velocidades ao longo do domínio do jato. Esse procedimento compreende a primeira etapa da metodologia híbrida aplicada aos casos de interesse desse trabalho.

A segunda etapa envolve a construção do campo de fonte sonora, cuja obtenção se dá a partir da evolução temporal do campo de velocidades, seguida da obtenção do campo acústico, a ser obtido a partir da resolução numérica da analogia de Lighthill. A metodologia numérica empregada para a resolução da equação de Lighthill corresponde à integração numérica de sua forma integral, conforme será descrito em detalhe no capítulo 5.

1.4. ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

O capítulo 2 compreende uma extensa revisão bibliográfica sobre o tema do trabalho, com destaque aos modelos de previsão de ruído gerado aerodinamicamente, mas incluindo também aspectos relacionados a jatos turbulentos, simulação de grandes escalas e métodos numéricos.

Uma extensa apresentação da abordagem pioneira de Lighthill é feita no capítulo 3. Esse capítulo se inicia com uma revisão de elementos de mecânica dos fluidos e de acústica linear, o que serve de base para o desenvolvimento da teoria supracitada. A analogia acústica de Lighthill descreve a evolução do campo acústico através de uma equação de onda não-

homogênea, da qual se obtém uma expressão analítica para a pressão sonora mediante a aplicação do método de Green. Segue a essa dedução uma análise que tem como principal objetivo a caracterização de diversas propriedades do campo acústico, tais como: dependência do nível de pressão sonora com a magnitude do campo de velocidades; diretividade; intensidade da energia sonora irradiada; representação do escoamento como uma fonte sonora; campo sonoro próximo e afastado, dentre outras.

O capítulo 4 trata de aspectos teóricos da Simulação de Grandes Escalas (SGE), utilizada para a solução do comportamento transiente do escoamento turbulento, incluindo tópicos tais como o processo de filtragem (efeito da aplicação do filtro sobre as equações de Navier-Stokes), a obtenção de grandezas filtradas e a modelação de tensores cruzados, de Leonard e de sub-malha.

O capítulo 5 apresenta a formulação completa do problema analisado, representado pela geração de ruído em um jato plano. Como o método de solução é do tipo híbrido, a formulação é dividida em duas partes: uma correspondente à mecânica dos fluidos (resolução do jato livre) e outra à acústica (obtenção da pressão sonora a partir dos dados do escoamento). Inicialmente, as hipóteses simplificativas e as equações governantes do escoamento e da analogia acústica são indicadas. Além disto, para cada um dos problemas são também fornecidos detalhes da metodologia de solução.

Os resultados do trabalho são apresentados no capítulo 6, juntamente com uma análise crítica das soluções do jato plano turbulento e do campo acústico a ele associado. Finalmente, o capítulo de conclusões compreende uma síntese do trabalho, as contribuições realizadas e sugestões para investigações futuras.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. INTRODUÇÃO

A aeroacústica é um ramo da mecânica dos fluidos formado por um conjunto de princípios que tratam do ruído gerado aerodinamicamente, tendo o seu início na década de 50, com os trabalhos pioneiros de Lighthill (1952, 1954). A motivação inicial para o conhecimento do assunto adveio da necessidade de diminuição dos níveis de ruído gerado por aviões; seja o mesmo oriundo da interação da carenagem da aeronave com o ar circundante, ou devido aos sistemas de propulsão, em particular, motores a jato puros ou mistos.

Até meados da década de 80, o desenvolvimento da aeroacústica se deu marcadamente nos campos teórico e experimental, com o desenvolvimento de inúmeras extensões da proposta inicial de Lighthill (1952, 1954). Além disto, nesse mesmo período foram realizados importantes estudos sobre jatos, obtendo-se dados de propriedades médias, tensores de Reynolds, caracterizando a estrutura do escoamento em diversas regiões do jato e como a mesma afeta o ruído.

A partir de meados da década de 80, surgem os primeiros trabalhos computacionais em aeroacústica. O aumento da capacidade de processamento e de memória dos computadores impulsionou o desenvolvimento de códigos para a solução numérica das mais variadas situações em aeroacústica. Muitas dessas situações não são abertas a um tratamento analítico, requerendo a resolução numérica das equações diferenciais do modelo escolhido para a descrição do ruído gerado aerodinamicamente. Ao conjunto de estratégias computacionais e métodos empregados com a finalidade de resolver numericamente problemas de ruído gerado por escoamentos dá-se o nome de Aeroacústica Computacional (AAC).

A revisão bibliográfica a ser apresentada a seguir está dividida em três partes. A primeira delas trata da revisão de trabalhos relacionados ao desenvolvimento dos modelos aeroacústicos, também denominados “analogias”. A segunda parte considera as investigações sobre a estrutura turbulenta em jatos e a sua repercussão sobre a geração de ruído. A última

parte dessa revisão é dedicada à descrição de trabalhos em aeroacústica computacional, onde várias iniciativas de previsão numérica para diferentes problemas são apresentadas.

2.2. REVISÃO DE TRABALHOS

2.2.1. Modelos Aeroacústicos

O início da pesquisa em aeroacústica deve-se ao trabalho pioneiro de Lighthill (1952), no qual o autor deduz, a partir das equações de Navier-Stokes, uma equação de onda para a flutuação de massa específica, com um termo de não homogeneidade representando a contribuição do escoamento na geração do ruído. A equação de Lighthill, escrita para a flutuação de massa específica, assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2 \rho = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}}$$

onde o tensor de não-homogeneidade de Lighthill é dado por

$$\bar{\bar{T}} = \rho \bar{u} \bar{u} + (p - c_o^2 \rho) \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{P}}$$

Os campos ρ , \bar{u} e p correspondem, respectivamente, aos campos de massa específica, velocidade e pressão; o escalar c_o corresponde à velocidade do som na região não perturbada pelo escoamento e o tensor $\bar{\bar{P}}$ corresponde ao tensor viscoso.

A equação de onda assim obtida é exata e geral, sendo aplicável, em princípio, a qualquer tipo de fluido e em qualquer situação de escoamento. Além disso, todos os efeitos de convecção, refração e espalhamento das ondas acústicas estão contemplados no termo de não homogeneidade. Lighthill (1952) demonstra também que, no termo de não homogeneidade da equação da onda, a contribuição viscosa não é importante e aquela associada à pressão pode ser desprezada no caso de jatos subsônicos quasi-isotérmicos. Considerando que a razão entre as flutuações de densidade e as flutuações de velocidade é da ordem do quadrado do número de Mach, a formulação de Lighthill (1952) sugere, também para o caso de jatos subsônicos, a possibilidade de negligenciar a flutuação de massa específica na primeira parcela do termo de

não-homogeneidade, permitindo o desacoplamento entre os problemas de acústica e de mecânica dos fluidos. Uma informação importante indicada em Lighthill (1952) corresponde à variação da intensidade sonora com a oitava potência da velocidade média, em jatos subsônicos.

Em um trabalho posterior, Lighthill (1954) faz uso dos resultados obtidos por Proudman (1952) para investigar extensivamente os mecanismos de geração do ruído aerodinâmico oriundos da turbulência. As várias parcelas do termo de não homogeneidade são estudadas rigorosamente, o que leva a formulação de uma equação de transporte para as componentes do tensor de fluxo de quantidade de movimento, a qual é a única parcela significativa do termo de não homogeneidade em escoamentos subsônicos frios (Lighthill, 1952). Lighthill demonstra também que as componentes do tensor fluxo de quantidade de movimento são alimentadas diretamente pela taxa de deformação do escoamento, o que estabelece uma relação causal desta com os níveis de intensidade sonora irradiada. Neste trabalho, é demonstrado também que, para escoamentos a baixo número de Mach, apenas as componentes cruzadas do tensor de fluxo de quantidade de movimento contribuem significativamente para a produção do som. Outra contribuição deste trabalho consiste na investigação do efeito devido ao movimento da fonte sonora sobre a pressão sonora percebida pelo observador. A dedução da expressão da flutuação de pressão sonora em relação ao sistema de referência em movimento evidencia a amplificação do sinal no sentido do escoamento e a atenuação do sinal no sentido oposto, ou seja, a convecção das estruturas turbulentas altera a diretividade do sinal. Ainda em Lighthill (1954), investigações sobre amplificação (ou atenuação) de ruído são conduzidas para os casos em que diferenças de temperatura e mudanças na composição química do meio são relevantes.

A partir do conceito original de analogia acústica de Lighthill, surgiram ao longo do tempo diversas variantes. Algumas das abordagens alternativas são equivalentes, diferindo apenas na escolha da variável principal e na forma de expressar os termos de não homogeneidade.

Curle (1955) desenvolve a partir da analogia de Lighthill (1952) uma formulação integral para representar a pressão acústica gerada em situações envolvendo interação do escoamento com superfícies sólidas. Basicamente, o autor utiliza uma forma específica da função de Green para a equação da onda e escreve a pressão sonora como uma soma de duas parcelas fundamentais. A primeira parcela corresponde à parcela da pressão sonora resultante da integral de volume sobre a distribuição de quadrupolos formados pelas estruturas turbulentas do escoamento (levando em conta os tempos de retardo dos respectivos elementos

de volume). A segunda parcela é de origem dipolar e está associada à integral dos fluxos viscosos, de pressão mecânica e de quantidade de movimento totais (levando em conta os tempos de retardo dos respectivos elementos de superfície) sobre a superfície sólida. Anos mais tarde, Ffowcs Williams (1965) estende os resultados obtidos por Curle para situações envolvendo fronteiras flexíveis. A essência da contribuição do trabalho de Curle (1955) reside no fato de que o escoamento pode dar origem a radiações de origem dipolar, permitindo a aplicação da teoria para a determinação do ruído aerodinâmico em meios com superfícies sólidas ou interfaces entre fluidos de diferentes massas específicas.

Meecham e Ford (1958) manipularam as equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível e invíscido e evidenciaram o fato de que a pressão mecânica ou hidrodinâmica pode ser expressa através de uma equação de Poisson, onde o termo de não homogeneidade é o divergente do divergente do tensor quantidade de movimento.

Ribner (1959, 1962, 1964) desenvolve uma nova teoria sobre a geração de ruído por jatos turbulentos quasi-incompressíveis. Utilizando as idéias do trabalho de Meecham e Ford (1958), Ribner separa a pressão em duas parcelas: a parcela hidrodinâmica, também denominada por Ribner de “pseudo-som”, a qual é a única parcela existente em escoamentos incompressíveis, e a parcela acústica, representando o sinal de pressão que constitui a onda sonora. Com a separação da pressão nas duas componentes descritas acima, Ribner obtém uma equação de onda para a pressão acústica cujo termo de não homogeneidade representa a segunda variação temporal da componente hidrodinâmica da pressão (pseudo-som). A abordagem de Ribner é equivalente a concebida por Lighthill.

Considerando o problema de camada limite turbulenta sobre placa plana, Powell (1960) mostrou que as principais fontes sobre a placa não correspondem a uma distribuição de dipolos com eixo paralelo à mesma. De fato, uma fronteira rígida e infinita funciona como um refletor acústico cuja eficácia é praticamente nula, em função do efeito de sobreposição da distribuição imagem sobre a distribuição de quadrupolos gerada pelo escoamento turbulento.

Powell (1961, 1962, 1964) demonstrou a equivalência entre um vórtice anular e uma camada de dipolos e que para alterar a área de um vórtice anular é necessária uma força localmente igual ao produto vetorial entre a velocidade angular e o vetor velocidade multiplicado pela massa específica média do meio. Além disso, escreveu o divergente do tensor fluxo de quantidade de movimento como a soma das seguintes parcelas: 1) o produto vetorial entre a velocidade angular e o vetor velocidade multiplicado pela massa específica média do meio; 2) o gradiente da energia cinética; 3) o produto do simétrico da variação temporal da massa específica com o vetor velocidade; 4) o produto do simétrico da energia

cinética específica pelo gradiente de massa específica. Para escoamentos a baixo número de Mach, os dois últimos termos podem ser desprezados, resultando uma equação da onda para a pressão cujo termo de não homogeneidade é composto por duas parcelas principais: uma que envolve a vorticidade e a outra que relaciona o gradiente de energia cinética.

Ffowcs Williams (1963) estudou o efeito da convecção em níveis elevados de velocidade, com o objetivo de investigar o ruído gerado por jatos em movimento. O fator de correção devido à advecção das estruturas turbulentas utilizado para a avaliação da intensidade sonora local, expresso nos trabalhos de Lighthill (1952, 1954) por $(1-M_{et} \cos\theta(\bar{x}, \bar{y}))^{-6}$, é modificado para $(1-M_{et} \cos\theta(\bar{x}, \bar{y}))^{-5}$, pois uma das integrais deve ser avaliada no sistema de referência fixo.

Em um trabalho subsequente, Ffowcs Williams (1965) estendeu os seus resultados para fronteiras não rígidas, utilizando as idéias de Curle (1955) e os resultados de Powell (1960), mostrando que o efeito de vibração da fronteira é o de apenas alterar a fase da distribuição da imagem. Tanto no caso onde há a presença de fronteiras rígidas, quanto naqueles onde a mesma não ocorre, não há aumento significativo da radiação que, em essência, continua sendo devida a distribuição de quadrupolos.

Ffowcs Williams e Hawkins (1969) e Ffowcs Williams (1974) estenderam a teoria para meios com corpos sólidos em movimento e, utilizando a solução de Curle (1955), modelaram a geração de ruído por um jato turbulento delimitado por uma lâmina de vorticidade. Esse modelo foi desenvolvido e ampliado mais tarde por Dowling et al. (1978), permitindo a elaboração de uma generalização da analogia de Lighthill.

A despeito de todos os esforços realizados no sentido de elaborar uma teoria unificada sobre o ruído gerado por escoamentos, o problema continua em aberto até os dias atuais. Muitos autores dedicaram seus esforços na busca de operadores e termos de não homogeneidade a partir de idéias distintas daquelas dos autores supracitados. A motivação para a adoção de novos conceitos nesses trabalhos se deve a uma série de fatores: i) a impossibilidade de aplicação do modelo de Lighthill e de suas abordagens equivalentes em problemas de engenharia sem o emprego de aproximações; ii) a analogia de Lighthill não evidencia de forma clara efeitos do escoamento sobre a propagação do som, tais como refração, espalhamento e efeito Doppler, de modo a comprometer o entendimento dos mecanismos de interação entre o campo acústico e o escoamento.

Phillips (1960) foi o responsável pela elaboração da primeira abordagem alternativa, abandonando praticamente as idéias que compõem a base das teorias relacionadas à analogia

de Lighthill. Em seu trabalho, Phillips empregou alguns princípios inovadores, que são: i) a representação do campo acústico através do logaritmo natural do quociente entre a pressão sonora e uma pressão de referência ($\ln(p/p_0)$); ii) a manipulação das equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia, possibilitando a obtenção de um operador onda não linear e dependente do campo de velocidade (contemplando os efeitos de refração); iii) a obtenção de um termo de não homogeneidade (também via manipulação dos princípios de conservação) independente da variável adotada para a representação do campo acústico, $\ln(p/p_0)$.

O termo de não homogeneidade correspondente à geração do ruído pode ser dividido em três partes. A primeira delas está relacionada com as fontes associadas diretamente à taxa de deformação do escoamento. As outras duas parcelas estão associadas aos gradientes de temperatura (fluxo de calor) e ao atrito viscoso, podendo ser desprezadas em grande parte dos casos (em jatos subsônicos frios, a parcela associada à variação de entropia pode ser desprezada). A dedução de uma equação na qual a flutuação de pressão ou flutuação de massa específica não aparece no termo de não homogeneidade constitui um dos maiores méritos dessa formulação. Diferentemente das abordagens relacionadas às idéias de Lighthill, a formulação de Phillips resulta em uma equação que não é capaz de definir uma situação de referência, o que talvez constitua a sua principal fraqueza. Além disso, Phillips defende, mediante a sua abordagem, que o operador do lado esquerdo (um pouco diferente do operador usualmente utilizado em equações de onda) descreve corretamente a propagação de ondas acústicas em um meio de propriedades médias variáveis, hipótese criticada por vários autores (Doak, 1972; Lilley, 1974 e Howe, 1975).

Crow (1970) mostra que a solução integral de Lighthill é correta somente para escoamentos onde o campo de velocidade é isocórico ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$), consideração que Lighthill já faz implicitamente em seus trabalhos. Nesse trabalho, o campo de velocidades é composto por duas parcelas: isocórica e irrotacional (expressa como o gradiente de um potencial escalar). Através de manipulações apropriadas dos princípios de conservação, Crow conseguiu obter a entalpia como variável principal. Além disso, Crow observou níveis de entalpia particularmente maiores nas regiões onde camadas de vorticidade estão presentes. Finalmente, mostrou que o quadrupolo dado por $\rho_0 u_i u_j$ corresponde ao primeiro termo de uma expansão assintótica, válida para situações referentes a números de Mach reduzidos.

Lilley (1974) critica a formulação elaborada por Phillips (1960) por incluir termos de propagação lineares, associados aos termos de cisalhamento, juntamente com os termos

oriundos dos produtos de flutuações de velocidade. Assim, Lilley (1974) aplica o operador derivada material sobre a equação de Phillips (1960), decompondo todas as grandezas em dois termos: o primeiro, o qual é representativo da média no tempo e outro, referente a uma medida da sua flutuação. Os produtos de flutuações que não envolvem exclusivamente flutuações de velocidade são negligenciados e o campo de velocidades é expresso como a soma entre uma componente média que varia apenas com a coordenada radial e uma componente de flutuação, que varia nas três direções espaciais e também na coordenada temporal. Assim, Lilley (1974) obtém uma equação cuja variável dependente é a mesma utilizada por Phillips (1960). O operador do lado esquerdo da equação corresponde à forma compressível do operador de Rayleigh, que governa a instabilidade do escoamento médio. Da mesma forma que ocorre no desenvolvimento da formulação de Phillips (1960), o termo de não homogeneidade não depende da propriedade que se quer resolver. A principal crítica direcionada à formulação de Lilley (1974) está relacionada à sua não-causalidade, ou seja, diferentemente das formulações de Lighthill (1952) e Phillips (1960), existem soluções não nulas quando o termo de não homogeneidade é nulo. De fato, as soluções não nulas da versão homogênea da equação de Lilley (1974) correspondem às soluções de instabilidade, resultantes do acoplamento dos modos associados à vorticidade com aqueles associados à propagação do ruído.

Doak (1972) criticou a formulação de Lighthill por uma série de motivos. O primeiro deles está relacionado à escolha da massa específica como variável dependente. Lighthill (1952) justifica a sua escolha com o argumento de que em escoamentos próximos do limite incompressível (número de Mach reduzido), a massa específica é mais bem comportada do que a pressão, facilitando a captação do efeito desejado (propagação do som). Uma segunda crítica refere-se à omissão dos efeitos de condução de calor, que não são governados pela equação da onda. Doak (1972) propõe o uso da pressão, em vez da massa específica, como variável dependente. Segundo ele, todas as teorias existentes, exceto a elaborada por Lilley (1974), não explicitam a interação do escoamento com as ondas acústicas. Criticou também o esquema de separação do campo de velocidades proposto por Crow (1970), propondo em seu lugar a separação do vetor quantidade de movimento em uma componente solenoidal, que conteria as flutuações turbulentas do escoamento, e outra irrotacional expressa como o gradiente de um potencial escalar. Doak (1972) finaliza a sua argumentação derivando uma equação de 4ª ordem para a variável dependente (parte irrotacional do vetor quantidade de movimento), na qual o termo de não homogeneidade é expresso como uma função da componente solenoidal do vetor quantidade de movimento.

Howe (1975) elaborou através de um método de expansões assintóticas uma equação convectiva da onda homogênea, aplicável a escoamentos irrotacionais e isentrópicos, escrevendo o potencial de velocidades como sendo a soma de uma parcela dependente apenas das coordenadas espaciais e outra, dependente das coordenadas espaciais e do tempo. É demonstrado que, na situação de fluido ideal, a derivada temporal do potencial de velocidades é a variável natural para a análise do campo acústico. No caso de escoamentos arbitrários, a propagação do som deveria ser governada pela entalpia de estagnação, sobre a qual é aplicado um operador semelhante àquele utilizado no caso irrotacional e isentrópico. Na equação da onda também aparece um termo de não homogeneidade, o qual contempla os efeitos de vorticidade e transferência de calor. A forma do termo de não homogeneidade obtida por Howe (1975) fornece a informação necessária para a demonstração da conclusão de Powell (1960), ou seja, na ausência de fontes de calor, o ruído aerodinâmico é inteiramente determinado pela vorticidade. O operador aplicado sobre a entalpia de estagnação é dividido em três partes. Uma delas representa a interação do escoamento com as ondas sonoras, e permite o estabelecimento de uma analogia, uma vez definida uma situação de referência (escoamento irrotacional e isentrópico, no caso em questão).

Yates e Sandri (1976) também utilizaram como variáveis principais o potencial de velocidades e a entalpia de Bernoulli. Os autores demonstram que a propagação de ondas acústicas é governada por um sistema de duas equações acopladas. A equação para a entalpia de Bernoulli se assemelha à equação que descreve o pseudo-som, de acordo com a terminologia utilizada na teoria elaborada por Ribner (1959). A determinação do campo de entalpia é bem mais difícil devido à dificuldade de convergência. Isso pode ser explicado, já que a entalpia de Bernoulli é uma fonte estritamente local. Assim, basta estar fora da região onde ocorrem as variações de entropia e vorticidade para que a entalpia assumo o valor do campo não perturbado. A equivalência com a abordagem de Ribner (1959) é clara quando percebe-se que a variação temporal do potencial de velocidade multiplicada pela massa específica do meio não perturbado é exatamente igual à pressão acústica de Ribner (1959).

Möhring (1978), a partir dos trabalhos de Powell (1960, 1961, 1962, 1964) conclui que, para escoamentos a baixo número de Mach e na ausência de fontes de calor, o campo acústico pode ser diretamente relacionado à geração de vorticidade.

Dowling et al. (1978) escreveram a equação de Lighthill em um sistema de coordenadas que se desloca com as mesmas velocidade e sentido do escoamento. Nesse referencial, a equação de Lighthill mantém a mesma forma mas, no entanto, se transforma na equação convectiva da onda para um referencial estacionário. Nesse trabalho, foi demonstrada

a equivalência entre o ruído de jato e o problema de ruído gerado por um escoamento turbulento restrito a uma região que se desloca com velocidade constante e delimitada por uma folha de vorticidade. Assim, a solução da equação proposta por Dowling et al. (1978) corresponde ao campo gerado por uma distribuição de quadrupolos por unidade de volume sobreposta por uma distribuição de dipolos sobre a fronteira que separa a camada de vorticidade do meio em repouso, e que responde pelo efeito do termo de cisalhamento.

Ribner (1981) fez uma interessante revisão a respeito das principais alternativas que surgiram com o objetivo de explicar o mecanismo de geração de ruído por escoamento. Nesse trabalho, Ribner (1981) escreve o campo de velocidades de um jato livre circular como sendo a soma de uma parcela estacionária e dependente apenas da coordenada radial com outra, que contém a informação turbulenta (campo de flutuações). A partir dessa decomposição, Ribner (1981) reescreve a equação de Lighthill, permitindo o aparecimento de três parcelas no termo de não homogeneidade. A primeira delas representa a fonte para o ruído de cisalhamento, a qual é essencialmente composta pelos produtos entre as parcelas média e flutuante do campo de velocidade. A segunda parcela, constituída pelos produtos tomados dois a dois entre as diferentes componentes flutuantes do campo de velocidades, é responsável pelo ruído próprio (“self-noise”). Finalmente, a terceira corresponde ao termo responsável pela convecção das ondas acústicas e, via-de-regra, é desconsiderada na solução da equação de Lighthill. Colocando este último termo no lado esquerdo da equação, obtém-se a equação convectiva da onda, a qual prevê, dentre outros fenômenos, a refração das altas frequências. O termo de cisalhamento, que acopla o campo médio de velocidades com as flutuações turbulentas, é de natureza linear, e responde pelo aumento da emissão sonora na direção axial (principalmente para as baixas frequências). Assim, o termo de ruído próprio constitui a única parcela do termo de não homogeneidade que pode ser considerada uma fonte de ruído verdadeira, uma vez que os outros termos estão relacionados com os mecanismos de interação do escoamento com o campo acústico, sendo mais apropriado denominá-los como termos de interação ou propagação.

2.2.2. Geração do Ruído em Jatos

Pode-se definir um jato como sendo uma modalidade de escoamento livre que surge em função da descarga de um fluido proveniente de uma canalização, em um meio quiescente. Entende-se por meio quiescente aquela região no espaço na qual o fluido nela contido apresenta uma condição de escoamento cujo campo de velocidade é nulo ou minoritário em relação ao campo de velocidade do fluido que emerge do sistema de dutos, via de regra, por intermédio de um bocal.

O fluido egresso do bocal contém uma dada energia cinética e, na medida em que o mesmo avança para o interior do meio quiescente, porções desse meio, as quais se localizam nas adjacências da frente de fluido originária do bocal, absorvem a sua energia cinética. Tal processo pode ocorrer de modo mais ou menos gradual, o que depende de aspectos tais como a viscosidade dos fluidos envolvidos, as suas massas específicas, a presença de campos externos como o gravitacional e o eletromagnético, o estado físico de cada um deles, dentre outros. A transferência de energia entre as porções de fluido envolvidas no jato ocorre devido à natureza não ideal dos fluidos envolvidos. Como essa interação ocorre de forma dissipativa, a energia cinética do sistema que envolve ambos os fluidos decai, transformando-se em energia térmica.

Levando em conta o escopo deste trabalho, considera-se apenas a situação de jato que envolve um fluido gasoso, viscoso, monofásico, oriundo de uma canalização e descarregado em um meio quiescente, cujo fluido nele contido é também gasoso, viscoso e apresenta a mesma composição química e temperatura do fluido vindo do bocal. Considera-se, também, que as forças de campo gravitacionais e eletromagnéticas apresentam influência desprezível. Assim, a dinâmica dos jatos que se enquadram na descrição acima envolve, basicamente, a transferência da quantidade de movimento do gás proveniente do bocal para as porções de gás do meio quiescente que se localizam nas proximidades do fluido que sai do bocal, o que se dá marcadamente por interação viscosa e turbulenta.

Considera-se, então, que o escoamento de um gás que surge na seção de saída do bocal é uniforme, normal à superfície e apresenta uma velocidade cuja magnitude é dada por U_J . Na ocasião em que uma dada porção de gás adentra no meio quiescente, as porções de gás que estão em sua vizinhança são aceleradas em função de uma força que surge da interação viscosa entre as duas porções de fluido, que é proporcional ao gradiente de velocidade que se estabelece em função da diferente condição de escoamento entre o fluido do meio quiescente e aquele proveniente do bocal.

Por sua vez, as camadas mais externas do fluido vindo do bocal sofrem uma diminuição de sua velocidade, em função da reação promovida pelo fluido do meio quiescente recém acelerado. Desse modo, o padrão de escoamento do fluido egresso do bocal vai gradativamente perdendo a sua quantidade de movimento em favor de porções de fluido do meio quiescente incorporadas pelo escoamento vindo do bocal.

Na medida em que o escoamento resultante dessa interação se afasta da seção de saída do bocal, o padrão de escoamento deixa de ser uniforme em toda a área correspondente à seção de saída, para ser uniforme apenas na região interna da seção que ainda não sentiu a presença do meio quiescente, denominada por cone potencial ou região invíscida. Além disso, já não existe mais uma mudança abrupta na condição de escoamento entre a região do meio quiescente, denominada como região de entranhamento, e o fluido egresso do bocal, o que ocorre devido ao surgimento de uma região intermediária, denominada por camada cisalhante. Na camada cisalhante, o campo de velocidade apresenta, na região fronteira com a região de entranhamento, magnitude muito próxima a zero e U_j , nas proximidades do cone potencial. A figura 2.1 ilustra as diversas regiões características de um jato.

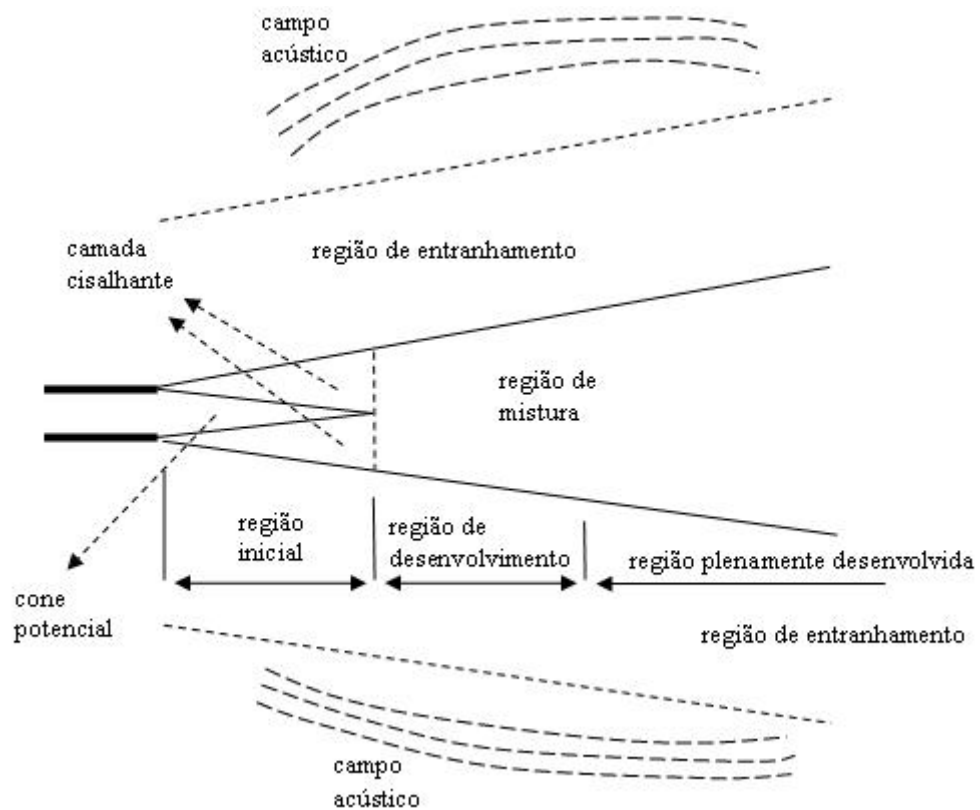


Figura 2.1: Jato e suas regiões

Na medida em que o escoamento resultante dessa interação se afasta da seção de saída do bocal, outras regiões do meio quiescente, que outrora estavam em repouso, são incorporadas pela camada cisalhante. Como a camada cisalhante é mais lenta que o cone potencial, a mesma oferece resistência viscosa ao avanço do cone potencial remanescente, retirando quantidade de movimento das suas regiões mais externas. Desse modo, a camada cisalhante cresce, ao mesmo tempo, na direção do meio quiescente e, também, na direção do cone potencial, à custa do consumo da energia cinética contida no mesmo.

Em função das forças viscosas exercidas pela camada cisalhante, a região de escoamento uniforme compreendida pelo cone potencial diminui de tamanho na medida em que o próprio avança para posições mais distantes da saída do bocal, até o momento da sua extinção, o que ocorre a uma distância compreendida entre 4 e 6 vezes o diâmetro do bocal (Musafir, 1984). A região do jato compreendida pelo cone potencial e pela camada cisalhante é denominada como região inicial, conforme é ilustrado na figura 2.1

A região que segue denomina-se como região de desenvolvimento ou região de transição. Nessa região, a velocidade do fluido no centro do jato começa a diminuir e o escoamento é marcadamente turbulento, o que ocorre em função do intenso processo de mistura entre os vórtices gerados na região inicial. Apesar dos elevados níveis de energia cinética turbulenta, o que é típico dessa região do jato, nota-se que, a uma distância da seção de saída do bocal (entre 8 e 10 vezes o diâmetro), o suprimento de energia para a manutenção do escoamento turbulento começa a diminuir, o que ocorre em função do decaimento dos gradientes de velocidade média e a partir desse momento, os níveis das grandezas turbulentas do jato também começam a diminuir.

O início da região plenamente desenvolvida ocorre a uma distância da saída do bocal que varia entre 8 e 10 vezes o diâmetro do bocal (Musafir, 1984). Nessa região, tanto as grandezas médias quanto as grandezas turbulentas iniciam o seu processo de declínio até a condição de repouso. O comportamento do escoamento passa a ser bem representado por perfis de similaridade, tanto para as grandezas médias quanto para as grandezas turbulentas.

Do ponto de vista acústico, as diversas regiões do jato também apresentam comportamentos diferentes, tanto no seu papel como fonte sonora, quanto no seu papel como meio de propagação. Isso se dá como uma consequência das características particulares apresentadas pelo escoamento em cada uma dessas regiões.

Jatos são encontrados em aplicações práticas de engenharia, tais como exaustão de turbinas de aviões e sistemas de conversão de energia. Com o objetivo de alcançar maior entendimento sobre os fenômenos físicos associados a jatos, e por extensão, promover

melhora na previsão numérica do ruído gerado por essa modalidade de escoamento, é conveniente o estudo de casos envolvendo geometrias simples de jatos. Considerando que o presente trabalho é essencialmente computacional, a supressão da complexidade geométrica no caso a ser investigado, além de propiciar o foco sobre os fenômenos essenciais associados à dinâmica de jatos, contribui no processo de análise dos resultados, uma vez que facilita a distinção entre os aspectos fenomenológicos e os oriundos dos erros de truncamento associados aos esquemas numéricos.

Existe na literatura um grande número de investigações experimentais analisando o fenômeno da geração de ruído em jatos. Um dos trabalhos pioneiros na investigação experimental de ruído gerado por escoamentos é o de Mollo-Christensen et al. (1963), que trata da determinação do espectro de frequência e da diretividade no campo afastado.

Lush (1971) realizou experimentos com jatos subsônicos para vários números de Mach ($M= 0,36; 0,56$ e $0,86$). A comparação de seus dados com resultados teóricos mostra boa concordância com a teoria de Lighthill (1952, 1954) para frequências abaixo de uma frequência crítica, que depende do diâmetro do jato e do ângulo de emissão, não variando com velocidade do jato. Após a frequência crítica, os valores previstos pela teoria são superestimados em relação aos dados experimentais e a amplificação advectiva prevista pela teoria de Lighthill diminui sensivelmente. Espectros de frequência em bandas de 1/3 de oitava, direcionalidade do campo acústico, variação da potência sonora com a velocidade do jato são alguns dentre os vários resultados obtidos.

MacGregor et al. (1973) apresenta uma investigação experimental com o objetivo de estimar o ruído gerado por jatos subsônicos quando as parcelas geradas por efeitos de advecção e de refração são suprimidas.

Armstrong Jr. (1981) investiga a influência do número de Mach sobre as estruturas coerentes em jatos subsônicos axissimétricos na região compreendida entre $1 \leq x/d \leq 12$ e $0 \leq r/d \leq 2$. Os números de Mach considerados nesse trabalho estão situados entre 0,3 e 0,7. É constatado que as estruturas coerentes não são fortemente influenciadas pelo número de Mach dentro da faixa considerada.

Laufer e Yen (1983) investigam experimentalmente o ruído gerado por jatos turbulentos subsônicos, com baixo número de Mach (entre 0,05 e 0,2) e número de Reynolds variando entre 63000 e 250000, apresentando resultados para espectros de frequência nos campos próximo e afastado, bem como padrões de diretividade para a pressão acústica. Como principal conclusão, obtém-se que, mesmo havendo o transporte advectivo das perturbações

que, em essência, compõem a fonte de ruído, a fonte sonora permanece confinada a uma região fixa no espaço em jatos nas referidas condições de número de Reynolds e número de Mach. Assim, a fonte sonora é, de fato, o resultado da saturação de ondas de instabilidade que ocorrem nas regiões de pareamento de vórtices, efeito largamente por Winant e Browand (1974). A intensidade do ruído irradiado varia de forma não linear com a magnitude da fonte sonora e é altamente direcional.

Características importantes do campo próximo e da região desenvolvida do jato foram analisadas, revelando estruturas turbulentas de grande dimensão, especialmente no campo próximo. O trabalho de Antonia et al. (1983) e de Thomas e Prakash (1991) mostram que junto ao bocal as estruturas são predominantemente simétricas para um perfil de velocidade uniforme na saída. Após as camadas cisalhantes terem penetrado na região do jato e interagido entre si, as estruturas tornam-se simétricas na região plenamente desenvolvida do jato. A região plenamente desenvolvida, na qual é válida a solução de similaridade, tem como principais características o aumento linear de sua espessura, o decaimento quadrático da velocidade na linha de centro, e valores constantes para a intensidade turbulenta na linha de centro quando normalizada pela componente axial de velocidade, na mesma posição.

Bridges e Hussain (1992) investigam experimentalmente o campo acústico gerado por um jato axissimétrico subsônico, com número de Mach igual a 0,08. Em contraste com a maioria dos estudos já realizados envolvendo comparação de resultados experimentais com modelos teóricos (os quais empregam, em sua grande maioria, a teoria desenvolvida por Lighthill), o escoamento sob análise é conhecido de forma detalhada e emprega a teoria desenvolvida por Howe (1975) e Mohring (1978). O principal resultado para a diretividade do campo acústico irradiado devido ao emparelhamento de vórtices apresenta como características básicas a simetria circunferencial, a estacionariedade e o padrão característico de fonte quadrupolar lateral, o que é muito similar ao previsto pela teoria. Demonstram também que o emparelhamento de estruturas coerentes puramente simétricas não corresponde à fonte sonora dominante, sendo justamente os eventuais padrões assimétricos de desprendimento de vórtices um dos mecanismos essenciais responsáveis pela geração de ruído em jatos na condição de baixo número de Mach.

Até o fim da década de 80, a maioria dos resultados de ruído gerado por jatos turbulentos era obtida via experimentação, tendo em vista os escassos recursos computacionais. Com o advento de uma nova geração de computadores dotados de maior capacidade de armazenamento e processamento, o surgimento de tecnologias que possibilitaram uma maior velocidade e eficiência na comunicação de dados entre máquinas

individuais, os novos desenvolvimentos em modelação da turbulência (em particular, a SGE) e finalmente, novas metodologias para a resolução numérica de equações diferenciais, tornou-se cada vez mais viável a simulação numérica de jatos turbulentos.

Na Simulação Numérica Direta (SND), as equações de Navier-Stokes são resolvidas na sua forma original, sem o emprego de qualquer técnica de modelagem para a turbulência. Assim, a solução numérica gerada por essa modalidade de simulação corresponde a uma estimativa de todas as escalas associadas ao escoamento turbulento, a menos de erros de truncamento associados ao esquema de discretização utilizado. Para serem precisas, tais simulações demandam o emprego de um grande refino nas discretizações espacial e temporal, bem como de esquemas numéricos de elevada ordem de precisão, o que, até o presente momento, limita o uso da metodologia a geometrias simplificadas e números de Reynolds baixos. Um exemplo de simulação precisa de um jato via SND é dado pelo trabalho de Stanley et al. (2002), permitindo a análise da evolução das camadas cisalhantes na borda do jato, das suas interações no final do cone potencial e, finalmente, do jato na região desenvolvida. Os resultados numéricos obtidos pelos autores apresentam uma boa concordância com dados experimentais.

A Simulação de Grandes Escalas (SGE), como o nome sugere, resolve somente as maiores escalas e assim pode ser aplicada em situações de escoamentos muito mais interessantes do ponto de vista prático, uma vez que possui a potencialidade de fornecer resultados quantitativamente corretos de grandezas turbulentas, necessárias tanto na previsão de escoamento quanto na previsão do campo acústico. No entanto, devido ao ainda elevado custo computacional associado à SGE, grande parte das simulações de jatos adota formulações parabólicas, bem como geometrias circulares. Jatos descarregando em uma região com expansão brusca foram analisados numericamente via SGE por Akselvoll e Moin (1996). Simulações de grandes escalas para um jato plano foram realizadas por Dai et al. (1995) e Weinberger et al. (1997) com o objetivo de investigar a influência da condição de contorno de entrada sobre a estrutura do jato. Ambas as simulações empregam o modelo de sub-malha de Smagorinsky (1963).

O trabalho de Le Ribault et al. (1999) consiste na simulação de grandes escalas de um jato plano, empregando o modelo de sub-malha de Smagorinsky (1963) e também uma variante dinâmica do mesmo. Resultados foram gerados para dois números de Reynolds, baseado na largura da folga ($Re = 3.000$ e 30.000). O trabalho de Ribault et al. (1999) se constitui em referência importante para efeito de comparação com os resultados do presente trabalho.

2.2.3. Aeroacústica Computacional

Os primeiros trabalhos de previsão numérica do ruído surgiram a partir do início da década de 70, podendo-se citar como os trabalhos Tam (1971) sobre a diretividade do campo acústico gerado por jatos subsônicos e de Schubert (1972a,1972b) sobre o fenômeno de refração para as altas frequências.

Tam e Burton (1984) obtêm, utilizando o método de expansões assintóticas, uma previsão numérica do ruído gerado mediante a introdução de ondas de instabilidade em escoamentos turbulentos, representado por um jato axissimétrico e supersônico, com número de Mach 2,1.

Lyrantzis (1994) realiza uma análise sobre o uso do método de Kirchhoff na previsão de ruído gerado por escoamentos em torno de superfícies sólidas fixas, com movimento arbitrário e superfícies deformáveis, comentando sobre as vantagens e problemas no uso da referida metodologia em cada um dos casos. Além disso, Lyrantzis (1994) faz uma revisão abrangente das metodologias existentes para a previsão de ruído gerado por escoamento.

Wang et al. (1996) determina o ruído gerado por fontes quadrupolares mediante o emprego de uma metodologia híbrida, onde são resolvidas as equações de Navier-Stokes na forma incompressível para o escoamento em torno de um aerofólio, seguido da utilização de uma analogia acústica para a previsão numérica do ruído. Além disso, o trabalho de Wang et al. (1996) propõe um método para a eliminação de ruído espúrio gerado pela passagem dos vórtices através da fronteira de saída.

Mitchell et al. (1997) obtêm a previsão numérica do ruído gerado por um jato axissimétrico turbulento supersônico mediante a simulação direta das equações de Navier-Stokes na forma compressível, para os campos próximo e afastado. Nesse trabalho também é realizada uma comparação dos resultados numéricos com soluções obtidas via analogias acústicas.

Bailly et al. (1997) obtêm a previsão numérica de ruído gerado por jatos subsônicos e supersônicos utilizando uma abordagem estatística, a qual compreende a solução das equações de Navier-Stokes, juntamente com o modelo de turbulência $k-\varepsilon$, seguido da aplicação de uma analogia acústica para a obtenção do campo acústico. Nesse trabalho são realizados testes com várias analogias e comparações entre os resultados de cada uma delas.

Bastin et al. (1998) estuda o ruído gerado por estruturas coerentes em jatos planos subsônicos e supersônicos, utilizando o Modelo Semi-Determinístico proposto originalmente por Liepmann (1952) para a resolução de escoamentos turbulentos, no qual somente movimentos coerentes de grande escala são resolvidos. Para a previsão numérica do ruído, faz-se uso da analogia de Lighthill, a qual é resolvida através de diferentes técnicas numéricas com o propósito de comparação de performance.

Pilon e Lyrintzis (1998) desenvolveram o método de Kirchhoff para a previsão do campo acústico, visando a sua aplicação em escoamentos com comportamento característico de fonte não compacta. A metodologia desenvolvida nesse trabalho é de natureza híbrida, envolvendo a resolução do escoamento mediante simulação das equações de Navier-Stokes, seguida da integração numérica sobre a superfície de Kirchhoff.

2.3. COMENTÁRIOS FINAIS

Com base na revisão realizada neste capítulo, constata-se a existência de um grande número de teorias para a previsão do campo acústico. Tendo em mente que:

- i) o maior objetivo do presente trabalho é iniciar uma linha pesquisa em aeroacústica computacional;
- ii) não existem grupos de pesquisa na área no país;

decidiu-se abordar o problema empregando uma teoria clássica, representada pela analogia acústica de Lighthill. Além disto, a fim de não introduzir dificuldades maiores do que a própria previsão do campo acústico optou-se por focar o interesse no ruído gerado por jatos, em função de sua geometria simples e da documentação vasta disponível na literatura.

Não obstante as simplificações da presente investigação, a solução do escoamento será obtida através da simulação de grandes escalas, conferindo aos resultados um rigor maior na previsão das estruturas turbulentas transientes.

CAPÍTULO 3

TEORIA DO RUÍDO GERADO POR ESCOAMENTOS

Neste capítulo é apresentada uma sucessão de desenvolvimentos teóricos, cujo objetivo corresponde à obtenção de um modelo para a previsão do ruído gerado por escoamentos. O modelo a ser discutido corresponde ao modelo desenvolvido por Lighthill (1952, 1954).

É importante ressaltar que a base dos princípios que culminam no modelo de Lighthill advém inegavelmente da mecânica dos fluidos. Diante disso, entende-se que, num primeiro momento, é indispensável realizar algumas considerações teóricas em mecânica dos fluidos e em acústica.

3.1. EQUAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

Considera-se uma região do espaço, denotada por Ξ_0 , como a região ocupada por uma certa quantidade de fluido em um dado instante inicial ($t=0$). Cada ponto \vec{x}_0 pertencente a Ξ_0 representa uma *partícula fluida*. Após certo tempo t , arbitrário, cada partícula fluida ocupa uma nova posição no espaço e Ξ_t representa o lugar geométrico ocupado por todas as partículas fluidas nesse instante.

Define-se um campo vetorial sobre Ξ_t , denominado por campo de velocidades \vec{u} , que representa a velocidade da *partícula fluida* em uma dada posição \vec{x} , no instante t . A determinação do campo de velocidades na região Ξ_t , ocupada pelo fluido no instante t , arbitrário, permite a determinação das posições de todas as partículas fluidas em cada instante t , o que significa a própria determinação das suas trajetórias. Define-se, também, um campo escalar, denominado como *massa específica* $\rho(\vec{x},t)$, que representa a massa específica de cada *partícula fluida*, em Ξ_t . Em Ξ_t , também são definidas propriedades termofísicas associadas às partículas fluidas, tais como a pressão $p(\vec{x},t)$, a temperatura $\Theta(\vec{x},t)$, a energia interna $i(\vec{x},t)$, a entalpia $h(\vec{x},t)$, a entropia $s(\vec{x},t)$, dentre outras.

Com base nessas idéias, aplicando os princípios de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia em sua forma integral e considerando as hipóteses adequadas para os campos definidos em Ξ_t , é possível deduzir equações para os princípios de conservação em sua forma diferencial (Nachbin, 2001). Desse modo, a forma diferencial dos princípios de conservação da massa e de conservação da quantidade de movimento é conforme abaixo:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} = 0 \quad (3.2)$$

Deve ser observado que na dedução das equações (3.1) e (3.2), as seguintes hipóteses adicionais foram consideradas: i) fluido newtoniano; ii) propriedades físicas constantes.

A equação de conservação da energia na forma diferencial pode ser escrita para a energia interna como

$$\rho \frac{dt}{dt} = \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} \Theta) - p(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \mu \phi \quad (3.3)$$

onde a dissipação viscosa, ϕ , pode ser expressa como

$$\phi = -\frac{2}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2 + 2\text{tr}(\overline{\overline{D}}) \quad (3.4)$$

A energia interna está relacionada à entalpia, conforme abaixo

$$i = h - \frac{p}{\rho} \quad (3.5)$$

e, portanto,

$$\rho \frac{dt}{dt} = \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} - p(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (3.6)$$

Combinando (3.3) e (3.6), obtém-se a equação da energia para a entalpia

$$\rho \frac{dh}{dt} = \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} \Theta) + \frac{dp}{dt} + \mu \phi \quad (3.7)$$

Para gases perfeitos, é válida a seguinte relação

$$\frac{dh}{dt} = c_p \frac{d\Theta}{dt} \quad (3.8)$$

onde Θ representa a temperatura. Combinando as equações (3.7) e (3.8), obtém-se a equação da energia expressa em termos da temperatura Θ

$$\rho c_p \frac{d\Theta}{dt} = \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} \Theta) + \frac{dp}{dt} + \mu \phi \quad (3.9)$$

A equação de estado para gases perfeitos é dada por

$$p = \rho R \Theta \quad (3.10)$$

Combinando (3.9) e (3.10), obtém-se uma equação da energia envolvendo a pressão

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = (\gamma - 1) [\dot{q} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} \Theta) + \mu \phi] \quad (3.11)$$

onde a razão de calores específicos γ é expressa como

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.12)$$

Finalmente, das relações de Maxwell e da equação (3.7), obtém-se

$$\rho \Theta \frac{ds}{dt} = \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} = \dot{q} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} \Theta) + \mu \phi \quad (3.13)$$

As equações acima fornecem a base necessária para a formulação teórica e para a resolução de problemas em acústica linear e, também, em aeroacústica, conforme será visto a seguir.

3.2. NOÇÕES DE ACÚSTICA

A propagação do som consiste em uma modalidade de escoamento caracterizada por um padrão organizado de fluxo. As partículas fluidas se movimentam segundo um padrão oscilatório semelhante ao observado em um sistema massa-mola ou a propagação de uma

perturbação mecânica em uma rede cristalina. Como a propagação do som também pode ser entendida como uma modalidade de escoamento, é possível descrevê-lo utilizando conceitos como pressão e velocidade. Ao campo de pressão gerado pelas ondas sonoras, dá-se o nome de *campo acústico*, *pressão sonora*, ou ainda, *pressão acústica*. Ao campo de velocidade, dá-se o nome *velocidade de partícula*. Sua característica principal reside, em essência, na quase ausência de irreversibilidade. De fato, como o fenômeno de propagação do som ocorre em uma escala de tempo muito curta, praticamente não há troca significativa de calor com o ambiente, o que permite caracterizá-lo como um processo isentrópico. Tais fatos refletem diretamente sobre as magnitudes dos campos de pressão e de velocidade associadas ao campo acústico, as quais, invariavelmente, são diminutas.

Um modo conveniente de expressar a equação de energia pode ser obtido combinando as equações (3.1), (3.11) e (3.13). Assim,

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{ds}{dt} \quad (3.14)$$

onde

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho = \frac{p}{c_v} \quad (3.16)$$

Sendo a propagação do som um processo isentrópico ($ds/dt = 0$), a equação da energia assume a seguinte forma

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{\gamma}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (3.17)$$

Após a aplicação de um procedimento algébrico sobre a equação (3.17), obtém-se que

$$\frac{d(\ln p - \gamma \ln \rho)}{dt} = 0 \quad (3.18)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad (3.19)$$

Conforme dito anteriormente, os campos representativos do som são de pequena magnitude, podendo ser expressos por

$$\frac{p - p_0}{\rho} \ll 1 \quad (3.20)$$

$$u = \|\vec{u}\| \ll 1 \quad (3.21)$$

o que permite assumir

$$\rho \cong \rho_0 \quad (3.22)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p \cong \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.23)$$

Através da aplicação de uma expansão em série de Taylor centrada em ρ_0 sobre a equação (3.19), obtém-se, para a flutuação de pressão

$$\frac{p - p_0}{\rho - \rho_0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = c_0^2 \quad (3.24)$$

Combinando as equações (3.1) e (3.24) e a relação dada por (3.22), a equação da conservação da massa pode ser reescrita como

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (3.25)$$

Combinando as equações (3.2), as relações (3.21) (3.22), e desprezando os termos viscosos, a equação da conservação da quantidade de movimento pode ser expressa como

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0 \quad (3.26)$$

Assim, combinando as equações (3.25) e (3.26), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \mathbf{p} = 0 \quad (3.27)$$

Em sendo um campo vetorial, é válida a seguinte decomposição do campo de velocidades

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\nabla} \times \bar{\Psi} + \bar{\nabla} \varphi \quad (3.28)$$

Aplicando o operador rotacional à equação (3.28), obtém-se

$$\bar{\nabla} \times \left(\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\nabla} \mathbf{p} \right) = \rho_0 \frac{\partial (\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{u}})}{\partial t} = 0 \quad (3.29)$$

o que significa dizer que o rotacional do campo de velocidades é função apenas das coordenadas espaciais. Considerando que o campo de velocidades inicial é nulo, pode-se afirmar que

$$(\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{u}})(\bar{\mathbf{x}}, 0) = 0 \quad (3.30)$$

o que implica em dizer que o campo de velocidade de partícula é irrotacional, ou seja,

$$\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.31)$$

Assim,

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\nabla} \varphi \quad (3.32)$$

Combinando (3.26) e (3.32), obtém-se

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\nabla} \mathbf{p} = \bar{\nabla} \left(\frac{\partial \rho_0 \varphi}{\partial t} + \mathbf{p} \right) = 0 \quad (3.33)$$

de onde se conclui que

$$\frac{\partial (\rho_0 \varphi)}{\partial t} + \mathbf{p} = f(t) \quad (3.34)$$

Definindo um novo potencial , φ' , como

$$\rho_0 \varphi' = \rho_0 \varphi - \int_{t_0}^t f(t') dt' \quad (3.35)$$

obtém-se que

$$\frac{\partial(\rho_0 \varphi')}{\partial t} + p = 0 \quad (3.36)$$

Da equação (3.35), obtém-se que

$$\vec{\nabla} \varphi' = \vec{\nabla} \varphi \quad (3.37)$$

Assim, combinando (3.25) e (3.32), vem que

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \nabla^2 \varphi' = 0 \quad (3.38)$$

Por outro lado a combinação das equações (3.36) e (3.38) resulta em

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \varphi' = 0 \quad (3.39)$$

Da condição de escoamento irrotacional, decorre que

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \nabla^2 \vec{u} \quad (3.40)$$

Assim, combinando (3.25), (3.36) e (3.40), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 \vec{u} \quad (3.41)$$

Desse modo, conclui-se que, em situações de escoamento nas quais são válidas as hipóteses da acústica linear, a evolução de todos os campos pode ser representada através de uma equação de onda homogênea, conforme expresso por (3.27), (3.39) e (3.41).

3.3. MODELO DE Lighthill PARA O RUÍDO GERADO POR ESCOAMENTOS

Consideram-se os princípios de conservação da massa e de conservação de quantidade de movimento, válidas para qualquer escoamento, conforme abaixo

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.42)$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (3.43)$$

onde

$$\bar{\mathbf{P}} = \mu \left[-\frac{2}{3} (\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{I}} + 2\bar{\mathbf{D}} \right] \quad (3.44)$$

Inicialmente, aplica-se o operador divergente sobre a equação (3.43)

$$\bar{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{u}})}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) \right) = \bar{\nabla} \cdot \left(-\bar{\nabla}p + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{P}} \right) \quad (3.45)$$

Da álgebra vetorial

$$\bar{\nabla}p = \bar{\nabla} \cdot (p\bar{\mathbf{I}}) \quad (3.46)$$

Além disso, obtém-se, aplicando a equação (3.42), que

$$\bar{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{u}})}{\partial t} \right) = \frac{\partial[\bar{\nabla} \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}})]}{\partial t} = -\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} \quad (3.47)$$

Combinando (3.45), (3.46) e (3.47), tem-se

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \cdot \left(\rho\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} + p\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{P}} \right) \quad (3.48)$$

Finalmente, adicionando a expressão $-c_o^2\nabla^2\rho$ aos dois lados da equação (3.48), resulta em

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - c_o^2\nabla^2\rho = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{T}} \quad (3.49)$$

onde $\bar{\mathbf{T}}$ corresponde ao termo de não homogeneidade, dado por

$$\bar{\mathbf{T}} = \rho\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} + (p - c_o^2\rho)\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{P}} \quad (3.50)$$

O tensor de não homogeneidade, $\bar{\mathbf{T}}$, definido pela equação (3.50), pode ser entendido como a comparação entre o estado de tensões presente sobre o fluido devido à presença do escoamento, em relação a uma situação de referência, a qual, nesse caso, corresponde à propagação de ondas acústicas em um meio em repouso.

Vale lembrar que no processo de obtenção da equação (3.49) não ocorre nenhuma aproximação. Assim, a equação de Lighthill é exata, contemplando todos os efeitos como convecção, refração e espalhamento das ondas sonoras. A solução da equação (3.49) pode ser representada conforme abaixo

$$\rho'(\bar{x}, t) = (\rho - \rho_o)(\bar{x}, t) = \frac{p(\bar{x}, t)}{c_o^2} = \int_0^\infty \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} T_{ij}(\bar{y}, t) \frac{\delta(\tau - t^*)}{4\pi c_o^2 |\bar{x} - \bar{y}|} d\Omega d\tau \quad (3.51)$$

onde

$$t^* = t - \frac{\|\bar{x} - \bar{y}\|}{c_o} \quad (3.52)$$

e

$$G_o(\bar{x}, t; \bar{y}, \tau) = \frac{\delta(\tau - t^*)}{4\pi c_o^2 \|\bar{x} - \bar{y}\|} \quad (3.53)$$

corresponde a função de Green para o problema em domínio ilimitado, com condições de contorno e iniciais homogêneas.

O tensor $T_{ij}(\bar{y}, \tau)$ contém as informações do escoamento e, desta forma, pode ser interpretado como a fonte do ruído atuando sobre um observador situado a distâncias \bar{x} e $\bar{x} - \bar{y}$ de dois pontos genéricos no escoamento, conforme representado na figura 3.1.

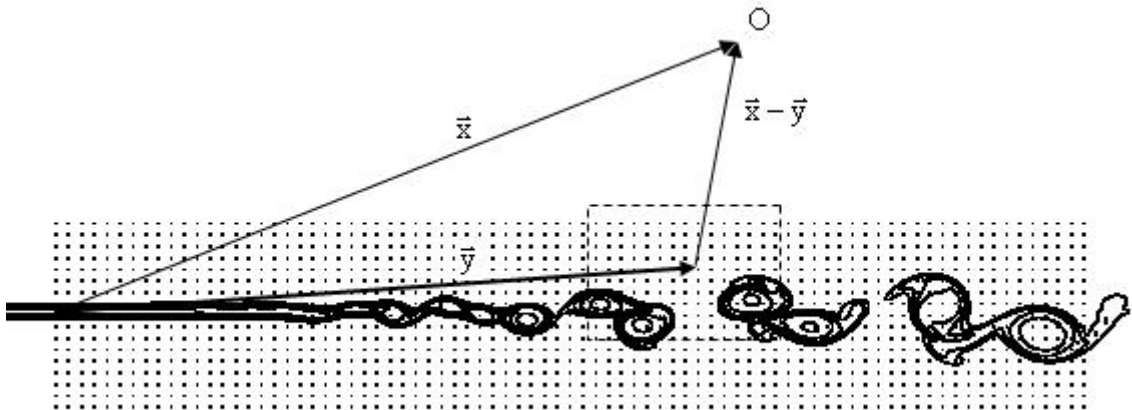


Figura 3.1: Posição de um observador em relação a dois pontos genéricos no escoamento.

Vale lembrar que, nas equações (3.50) e (3.51), o tensor \bar{T} apresenta uma dependência da propriedade termodinâmica representante da propagação do ruído, que corresponde à flutuação de massa específica ($\rho = \rho_o + \rho'$). Assim, a equação (3.51) não se propõe a fornecer

uma solução em forma fechada para a equação (3.50), mas, de fato, consiste em uma forma conveniente de expressar a relação entre o sinal de pressão acústica e a fonte sonora equivalente, \bar{T} , o que será útil no desenvolvimento a seguir.

Aplicando as propriedades da função de Green, a equação (3.51) se modifica para

$$\rho'(\bar{x}, t) = (\rho - \rho_o)(\bar{x}, t) = \frac{p(\bar{x}, t)}{c_o^2} = \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi c_o^2 |\bar{x} - \bar{y}|} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} T_{ij}(\bar{y}, t^*) d\Omega \quad (3.54)$$

Além da forma expressa pela equação (3.54), a solução da equação (3.49), dada por (3.51), pode ser reescrita de modo alternativo. Através do uso de integração por partes e da aplicação do teorema da divergência à equação (3.51), obtém-se que

$$\rho'(\bar{x}, t) = (\rho - \rho_o)(\bar{x}, t) = \frac{p(\bar{x}, t)}{c_o^2} = \iint_{-\infty\Omega} T_{ij}(\bar{y}, \tau) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\delta(\tau - t^*)}{4\pi c_o^2 \|\bar{x} - \bar{y}\|} d\Omega d\tau \quad (3.55)$$

Considerando que,

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\delta(\tau - t^*)}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta(\tau - t^*)}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} \quad (3.56)$$

tem-se:

$$\rho'(\bar{x}, t) = (\rho - \rho_o)(\bar{x}, t) = \frac{p(\bar{x}, t)}{c_o^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \iint_{-\infty\Omega} T_{ij}(\bar{y}, \tau) \frac{\delta(\tau - t^*)}{4\pi c_o^2 \|\bar{x} - \bar{y}\|} d\Omega d\tau \quad (3.57)$$

Aplicando a propriedade da distribuição dada por $\delta(\tau - t^*)$, obtém-se, finalmente, a forma alternativa de expressar a solução de (3.49). Assim,

$$\rho'(\bar{x}, t) = (\rho - \rho_o)(\bar{x}, t) = \frac{p(\bar{x}, t)}{c_o^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi c_o^2 \|\bar{x} - \bar{y}\|} T_{ij}(\bar{y}, t^*) d\Omega \quad (3.58)$$

Conforme pode-se observar a partir da equação (3.58), a flutuação de massa específica é expressa como uma distribuição de quadrupolos, que tanto podem ser longitudinais ($i = j$, na equação 3.58) quanto laterais ($i \neq j$, na equação 3.58).

Algumas hipóteses podem ser feitas em relação ao tensor de não homogeneidade, definido na equação (3.50). Em primeiro lugar, vale lembrar que o tensor definido na equação (3.50) é significativo apenas na região onde a presença do escoamento ocorre de forma relevante, que também denominada de *campo próximo*. Na região distante da influência direta do escoamento, a qual recebe a denominação de *campo afastado* ou *região de propagação*, o tensor $\overline{\overline{T}}$ pode ser negligenciado, valendo a formulação homogênea da equação da onda.

No campo próximo, onde a presença do escoamento é fortemente percebida, as contribuições relacionadas ao tensor viscoso $\overline{\overline{P}}$ podem ser negligenciadas, considerando que a relação entre as contribuições fornecidas pelo tensor viscoso e pelo tensor de quantidade de movimento $\rho \overline{\overline{u u}}$, também integrante do tensor de não homogeneidade, é da ordem do inverso do número de Reynolds (Musafir, 1984). Assim,

$$\frac{P_{ij}}{\rho u_i u_j} \approx \frac{1}{Re} \quad (3.59)$$

Com a aplicação do operador divergente sobre a equação (3.44), demonstra-se que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{P}} = \mu \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \nabla^2 \vec{u} \right) = \frac{4\mu}{3} \nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (3.60)$$

Assim, conclui-se que para escoamentos a baixo número de Mach, o efeito do tensor viscoso pode ser negligenciado.

O tensor de pressão mecânica, dado por $(p - c_o^2 \rho) \overline{\overline{I}}$, se mostra significativo nos casos onde há grande fluxo de calor, meios multifásicos e em escoamentos supersônicos, o que, neste último caso, pode ser atribuído à própria natureza supersônica do escoamento ou pela ocorrência de choques, o que permite afirmar o efeito desprezível deste tensor, nos casos referentes a jatos subsônicos isotérmicos.

Levando em conta todos os aspectos supracitados, o tensor de não homogeneidade $\overline{\overline{T}}$ pode ser assumido como,

$$\overline{\overline{T}} = \rho_o \overline{\overline{u u}} \quad (3.61)$$

ou, na forma indicial, como

$$T_{ij} = \rho_o u_i u_j \quad (3.62)$$

com um erro proporcional ao quadrado do número de Mach.

Levando em conta o exposto acima, a equação de Lighthill assume a seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot (\bar{u}\bar{u}) \quad (3.63)$$

Combinando (3.58) e (3.62), obtém-se

$$\rho'(\bar{x}, t) = (\rho - \rho_0)(\bar{x}, t) = \frac{p(\bar{x}, t)}{c_0^2} = \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi c_0^2 \|\bar{x} - \bar{y}\|} u_i u_j(\bar{y}, t^*) d\Omega \quad (3.64)$$

No campo afastado, é possível aplicar uma aproximação à solução da equação de Lighthill, considerando o tensor de não homogeneidade de acordo com a equação (3.62), conforme equação (3.64). A derivada do tensor fluxo de quantidade de movimento $\rho_0 u_i u_j$ em relação à coordenada espacial x_i pode ser relacionada com a derivada temporal, da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [(u_i u_j)(\bar{y}, t^*)] = \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial x_i} = -\frac{1}{c_0} \frac{(x_i - y_i)}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial t}(\bar{y}, t^*) \quad (3.65)$$

Novamente, diferenciando a equação (3.65) em relação a coordenada espacial x_j , e desprezando os termos com maior decaimento em relação a x (norma do vetor \bar{x}), obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [(u_i u_j)(\bar{y}, t^*)] \cong \frac{1}{c_0^2} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{\|\bar{x} - \bar{y}\|^2} \frac{\partial^2(u_i u_j)}{\partial t^2}(\bar{y}, t^*) \quad (3.66)$$

Levando em conta que, no campo afastado, é válida a aproximação dada por

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \|\bar{x}\| = x \quad (3.67)$$

a equação (3.65) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [(u_i u_j)(\bar{y}, t^*)] \cong \frac{1}{c_0^2} \frac{x_i x_j}{x^2} \frac{\partial^2(u_i u_j)}{\partial t^2}(\bar{y}, t^*) \quad (3.68)$$

Deste modo, a solução aproximada da equação (3.62), válida para o campo afastado, é dada por

$$\rho'(\bar{x}, t) = \frac{p(\bar{x}, t)}{c_o^2} \cong \frac{\rho_o}{4\pi c_o^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega} u_i u_j(\bar{y}, t^*) d\Omega \quad (3.69)$$

Para a flutuação de pressão sonora, obtém-se

$$p(\bar{x}, t) \cong \frac{\rho_o}{4\pi c_o^2} \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega} u_i u_j(\bar{y}, t^*) d\Omega \quad (3.70)$$

Conforme observou Proudman (1952), pode-se escrever que

$$u_x = u_i n_i = \frac{u_i x_i}{x} \quad (3.71)$$

e, assim, a pressão sonora pode ser escrita como

$$p(\bar{x}, t) \cong \frac{\rho_o}{4\pi c_o^2 x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega} u_x^2(\bar{y}, t^*) d\Omega \quad (3.72)$$

A intensidade sonora média é definida como

$$I(\bar{x}) = \frac{\overline{p^2}}{\rho_o c_o} \quad (3.73)$$

onde a barra superior, presente na equação (3.73), representa a média temporal que, nesse caso, é aplicada sobre o quadrado da pressão.

Substituindo a equação (3.70) em (3.73), obtém-se a expressão para a intensidade sonora no campo afastado. Assim,

$$I(\bar{x}) = \frac{\overline{p^2}}{\rho_o c_o} = \frac{x_i x_j x_k x_l}{(4\pi)^2 \rho_o c_o^5 x^6} \int_{\Omega'} \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i u_j(\bar{y}, t^*) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k u_l(\bar{y}', t^*) d\Omega d\Omega' \quad (3.74)$$

onde \bar{y}' corresponde à posição local da fonte sonora no domínio de correlação Ω' , dado por

$$\bar{y}' = \bar{y} + \bar{\eta} \quad (3.75)$$

Nesse momento, define-se t^* como o tempo de emissão do sinal pela fonte sonora correlata \bar{y}' , conforme a seguir

$$t^* = t' - \frac{\|\bar{x} - \bar{y}'\|}{c_o} = t + \tau - \frac{\|\bar{x} - \bar{y}'\|}{c_o} \quad (3.76)$$

Define-se, também, τ , como sendo a diferença entre os tempos de recepção do sinais vindos de uma fonte local em \bar{y} e de sua fonte correlata, em \bar{y}' , conforme abaixo

$$\tau = t' - t \quad (3.77)$$

Também é conveniente definir τ^* como a diferença entre os tempos de emissão dos sinais gerados em \bar{y} e \bar{y}' , conforme abaixo

$$\tau^* = t^* - t^* = t + \tau - \frac{\|\bar{x} - \bar{y}'\|}{c_0} - \left(t - \frac{\|\bar{x} - \bar{y}\|}{c_0} \right) = \tau - \left(\frac{\|\bar{x} - \bar{y}'\|}{c_0} - \frac{\|\bar{x} - \bar{y}\|}{c_0} \right) \quad (3.78)$$

Substituindo (3.75), (3.76), (3.77), (3.78) em (3.74), obtém-se

$$I(\bar{x}) = \frac{\overline{p^2}}{\rho_0 c_0} = \frac{x_i x_j x_k x_l}{(4\pi)^2 \rho_0 c_0^5 X^6} \iint_{\Omega\Omega'} \frac{\partial^2}{\partial(t^*)^2} u_i u_j(\bar{y}, t^*) \frac{\partial^2}{\partial(t^*)^2} \Big|_{\tau^*=0} u_k u_l(\bar{y} + \bar{\eta}, t^* + \tau^*) d\Omega d\Omega' \quad (3.79)$$

Considerando que

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial \tau^*} \quad (3.80)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial \tau^*} \quad (3.81)$$

obtém-se, por meio de sucessivas integrações por partes (Ffowcs Williams, 1963), que

$$I(\bar{x}) = \frac{\overline{p^2}}{\rho_0 c_0} = \frac{x_i x_j x_k x_l}{(4\pi)^2 \rho_0 c_0^5 X^6} \iint_{\Omega\Omega'} \frac{\partial^4}{\partial(\tau^*)^4} \Big|_{\tau^*=0} u_i u_j(\bar{y}, t^*) u_k u_l(\bar{y} + \bar{\eta}, t^* + \tau^*) d\Omega' d\Omega \quad (3.82)$$

Combinando a solução de Proudman (1952), dada pela equação (3.72), e a expressão para a intensidade no campo afastado, dada pela equação (3.82), resulta a seguinte expressão:

$$I(\bar{x}) = \frac{\overline{p^2}}{\rho_0 c_0} = \frac{1}{(4\pi X)^2 \rho_0 c_0^5} \iint_{\Omega\Omega'} \frac{\partial^4}{\partial(\tau^*)^4} \Big|_{\tau^*=0} u_x^2(\bar{y}, t^*) u_x^2(\bar{y} + \bar{\eta}, t^* + \tau^*) d\Omega' d\Omega \quad (3.83)$$

Lighthill (1954) notou que, como as estruturas turbulentas são transportadas por advecção pelo escoamento, as frequências detectadas por um observador não seriam capazes de reproduzir as verdadeiras modificações do tensor de quantidade de movimento $\rho_0 u_i u_j$, pois, na percepção do observador no referencial estacionário, estaria incluído o efeito de advecção dos turbilhões. Assim, Lighthill reescreve a flutuação de pressão sonora em um

sistema de coordenadas que se desloca com velocidade constante e na direção do escoamento, \vec{U}_{et} , dado por,

$$\vec{\xi} = \vec{y} + \vec{M}_c \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad (3.84)$$

onde $\vec{M}_{et} = \vec{U}_{et} / c_o$. Assim,

$$d\vec{\xi} = d\vec{y} \left(1 - \vec{M}_{et} \cdot \frac{(\vec{x} - \vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} \right) = d\vec{y} (1 - M_{et} \cos\theta(\vec{x}, \vec{y})) \quad (3.85)$$

Combinando as equações (3.64) e (3.85) obtém-se

$$p(\vec{x}, t) = \rho_o \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega_\xi} \frac{u_i u_j(\vec{y}, t^*)}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\| (1 - M_{et} \cos\theta(\vec{x}, \vec{y}))} d\Omega_\xi \quad (3.86)$$

Diferenciando o tensor $u_i u_j$ em relação a x_i , vem que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_i u_j(\vec{y}, t^*) = \frac{\partial u_i u_j}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial x_i} = \frac{1}{c_o} \frac{(x_i - y_i)}{\|\vec{x} - \vec{y}\| (1 - M_{et} \cos\theta(\vec{x}, \vec{y}))} \frac{\partial u_i u_j}{\partial t^*} \quad (3.87)$$

Novamente, diferenciando a equação (3.87) e aplicando a aproximação para o campo afastado, expressa pela equação (3.67), obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j(\vec{y}, t^*) \cong \frac{1}{c_o^2} \frac{x_i x_j}{x^2 (1 - M_{et} \cos\theta_{fr})^2} \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial (t^*)^2} \quad (3.88)$$

onde $\cos\theta_{fr} = \vec{M}_{et} \cdot \vec{x} / M_{et} x$. Assim, a pressão sonora, em relação ao referencial em movimento, é dada por

$$p(\vec{x}, t) = \rho_o \frac{1}{(1 - M_{et} \cos\theta_{fr})^3} \frac{x_i x_j}{4\pi c_o^2 x^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega_\xi} u_i u_j(\vec{y}, t^*) d\Omega_\xi \quad (3.89)$$

Combinando (3.74) e (3.89), obtém-se a expressão para a intensidade sonora média para o campo afastado, no sistema de referências em movimento

$$I(\vec{x}) = \frac{\overline{p^2}}{\rho_o c_o} = \frac{1}{(1 - M_{et} \cos\theta_{fr})^6} \frac{x_i x_j x_k x_l}{(4\pi)^2 \rho_o c_o^5 x^6} \int_{\Omega_\xi} \int_{\Omega_\xi} \frac{\partial^4}{\partial (\tau^*)^4} \overline{u_i u_j(\vec{y}, t^*) u_k u_l(\vec{y} + \vec{\eta}, t^* + \tau^*)} d\Omega_\xi d\Omega_\xi \quad (3.90)$$

A equação (3.90) demonstra que o ruído gerado pelas estruturas turbulentas deve-se, essencialmente, ao fato das mesmas apresentarem dependência temporal, permitindo afirmar que a convecção de padrões estacionários de escoamento são incapazes de produzir efeito sonoro. Além disso, a convecção produz um efeito de amplificação do ruído, já que o aumento na intensidade do ruído emitido à jusante é maior que a redução do ruído a montante.

Por meio de uma análise de ordem de grandeza sobre as componentes do tensor $\rho u_i u_j$, é possível mostrar que

$$\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial t^2} \approx \omega^2 \rho u_i u_j \quad (3.91)$$

Considerando que,

$$\omega \approx \frac{U_j}{l_j} \quad (3.92)$$

obtém-se,

$$\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial t^2} \approx U_j^4 \quad (3.93)$$

Combinando a equação (3.74) com a equação (3.93), obtém-se, finalmente, que

$$I \approx U_j^8 \quad (3.94)$$

o que corresponde à lei U_j^8 , obtida pela primeira vez por Lighthill, válida para escoamentos subsônicos e confirmada por vários experimentos (Lush, 1971; Laufer e Yen, 1983), e proveniente da origem quadrupolar do campo acústico gerado pela turbulência.

Para demonstrar que o tensor de fluxo de quantidade de movimento constitui um quadrupolo de eficácia não nula, Lighthill (1954) deduz a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial t} = & (p\delta_{ik} + P_{ik}) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + (p\delta_{ij} + P_{ij}) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho u_i u_j u_k + (p\delta_{ik} + P_{ik}) u_j + (p\delta_{jk} + P_{jk}) u_i \right] \end{aligned} \quad (3.95)$$

O último termo da equação (3.95) é um octupolo, que pode ser eliminado através da aplicação do teorema de Gauss. Desprezando os termos viscosos, obtém-se que

$$\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial t} = p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.96)$$

Assim, pode-se dizer que a eficácia não nula dos quadrupolos é assegurada pela taxa de deformação local. Além disso, decorre, da equação (3.96), que

$$\frac{\partial^2(\rho u_i u_i)}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \left[p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.97)$$

significando que, para baixo número de Mach, a soma das eficácias dos quadrupolos normais é nula. Deste modo, escoamentos na condição de baixo número de Mach comportam-se como distribuições de quadrupolos laterais.

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS

4.1. INTRODUÇÃO

Em contraste com o conhecimento científico e tecnológico já desenvolvido visando à identificação, caracterização e medição de escoamentos turbulentos, e também, com o caráter cotidiano relativo à ocorrência de tais eventos físicos, o fenômeno da turbulência ainda é um mistério. Em outras palavras, ainda que seja possível observar de modo inequívoco a ocorrência desse fenômeno, ainda não existe uma definição precisa da turbulência.

Do ponto de vista científico, a maior aproximação conceitual possível consiste na identificação de suas características observáveis, tais como a sua natureza aleatória, a sua manifestação tridimensional e transiente, o seu caráter difusivo e dissipativo, a sua associação com elevados números de Reynolds, dentre outras. Além disso, pode-se entender o fenômeno da turbulência como o resultado sobre a evolução de um fluido originado por processos de natureza inercial, envolvendo troca de massa, quantidade de movimento e energia entre as suas diversas estruturas de movimento.

As primeiras investigações científicas em turbulência são atribuídas a Leonardo da Vinci (~1500), que fez interpretações muito importantes com base em observações visuais, representando, através de desenhos, o comportamento das diversas escalas do movimento turbulento, como ocorre, por exemplo, na situação em que um jato de água proveniente de um canal é descarregado em um reservatório (figura 4.1, item “a”). A figura 4.1, item “b”, ilustra uma imagem do escoamento de uma pluma, obtida através de técnicas modernas de visualização de escoamentos.

Em função da grande diversidade de aplicações em engenharia, tais como aeronaves, embarcações, motores à reação, compressores, turbinas, bem como em situações envolvendo previsão do tempo e dispersão de poluentes na atmosfera, são cada vez maiores os esforços de natureza intelectual e tecnológica dedicados ao alcance de um maior nível de entendimento, capacidade de previsão e controle de situações envolvendo escoamentos turbulentos.

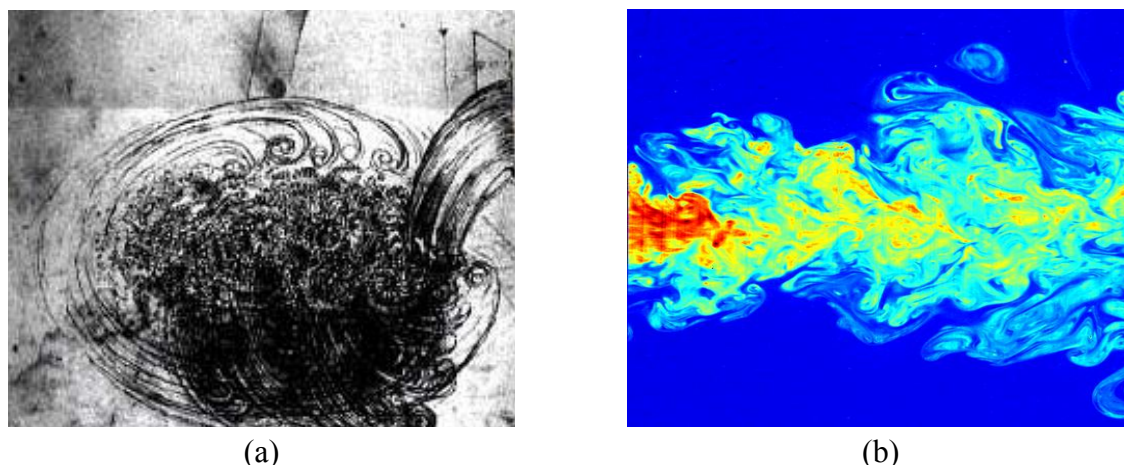


Figura 4.1: Representação de estruturas turbulentas em escoamentos: (a) gravura de Da Vinci (~1500); (b) imagem de jato obtida com a técnica de fluorescência induzida por laser (extraído de Fukushima e Westerweel, Universidade de Delft, Holanda).

Dentro do contexto particular envolvendo a simulação numérica de escoamentos turbulentos, é crescente a demanda por novos modelos matemáticos cuja finalidade consiste na representação das estruturas turbulentas, bem como pelo desenvolvimento de novas metodologias para a resolução das equações diferenciais que as descrevem. Impulsionado por tal demanda, e também, pelo advento de uma nova geração de computadores de alto desempenho, tem-se dedicado um considerável esforço para o desenvolvimento de estratégias numéricas cujo objetivo principal consiste na obtenção de uma solução aproximada dos modelos matemáticos com elevada confiabilidade, elevada precisão e a um custo computacional aceitável.

Quando se aplica uma metodologia numérica sobre as equações governantes de um escoamento turbulento, a representação contínua do sistema dinâmico correspondente à evolução das propriedades do fluido cede lugar a uma representação discreta, cujo porte (tamanho) é representado por um número inteiro que pode ser denominado como número de graus de liberdade (η_{df}). Esse número corresponde, em essência, ao número de subdomínios (volumes) ou pontos discretos utilizados na representação numérica do domínio físico do escoamento. Uma estimativa natural para η_{df} pode ser definida através da relação entre o comprimento da maior estrutura turbulenta e aquele associado à menor estrutura turbulenta, que é função do número de Reynolds. Assim, o número de graus de liberdade η_{df} pode ser representado conforme a seguinte equação.

$$\eta_{df} = \left(\frac{l^*}{l_d}\right)^3 = \left(l^* \left(\frac{\varepsilon}{v^3}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\left(\frac{u^* l^*}{v}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^3 = (Re_{l^*}^*)^{\frac{9}{4}} \quad (4.1)$$

onde l^* corresponde à escala de comprimento representante das grandes estruturas turbulentas do escoamento; l_d representa a escala dissipativa de Kolmogorov e $Re_{l^*}^*$ representa o número de Reynolds representativo do movimento turbulento de grande escala. A escala dissipativa de Kolmogorov é dada por

$$l_d = \left(\frac{v^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.2)$$

onde v é a viscosidade cinemática e ε é a taxa de dissipação de energia turbulenta, que é representada por

$$\varepsilon = \frac{(u^*)^3}{l^*} \quad (4.3)$$

Uma das principais características dos escoamentos turbulentos consiste em estar associado a um elevado valor para $Re_{l^*}^*$. Desse modo, decorre que tal modalidade de escoamento, em regra, deverá ser representado por uma aproximação numérica dotada de um elevado número de graus de liberdade.

Conforme dito anteriormente, o número de graus de liberdade pode ser entendido como o número de elementos discretos sobre o domínio físico que contém o fluido. Dependendo do método empregado, esse número pode ser diretamente identificado com o tamanho da malha computacional, ou seja, se a malha de discretização for suficientemente fina, a mesma garante que os processos físicos presentes em todas as escalas intermediárias entre a escala da maior estrutura turbulenta e a escala de Kolmogorov serão adequadamente representados. Esse tipo de simulação é conhecido como Simulação Numérica Direta (SND).

Nos dias atuais, tal metodologia só pode ser utilizada para escoamentos na condição de baixo número de Reynolds. Como cada grau de liberdade corresponde a um conjunto de equações algébricas, a aplicação da estratégia de SND para a simulação escoamentos com elevados números de Reynolds demandam recursos de memória e processamento em níveis ainda proibitivos.

De acordo com Silveira Neto (2000), para escoamentos com número de Reynolds da ordem de 4000, obtém-se um número de graus de liberdade, η_{df} , da ordem de 10^8 , o que tem

por conseqüência a obtenção de um sistema de 100 milhões de equações algébricas. O limite atual para o porte dos sistemas algébricos corresponde à resolução simultânea de apenas 20 milhões de equações, ainda insuficiente para o escoamento supracitado, cujo número de Reynolds é considerado modesto. Escoamentos atmosféricos são, em regra, caracterizados por um número de graus de liberdade, η_{df} , da ordem de 10^{25} , levando a conclusão de que o emprego da estratégia de SND em aplicações práticas ainda deve ser encarado como um objetivo distante, em vista dos recursos computacionais disponíveis na atualidade.

Motivado por tal dificuldade, surge, no início da década de 60, uma nova proposta destinada à modelagem de escoamentos turbulentos, na qual a separação do escoamento em um campo médio e outro flutuante não é mais utilizada, e sim, a separação entre os altos números de onda e os baixos números de onda, por intermédio de um procedimento denominado por *filtragem*.

Tal metodologia recebe o nome de Simulação de Grandes Escalas (SGE), cujo surgimento se deve aos trabalhos pioneiros do meteorologista Smagorinsky (1963). Nesse trabalho, Smagorinsky propõe um modelo por meio do qual apenas os movimentos associados às maiores estruturas turbulentas do escoamento atmosférico seriam resolvidas, e, diante da impossibilidade de se realizar uma simulação com precisão suficiente para a representação de todo o espectro de escalas, é também uma proposta uma estratégia de modelação das pequenas estruturas, tendo como base a hipótese de equilíbrio local e as escalas de Kolmogorov. O trabalho de Deardorff (1970) consiste na primeira aplicação do modelo de Smagorinsky em problemas de engenharia e desde então, a SGE já evoluiu significativamente durante os últimos quarenta anos, com o advento de novos modelos que, em medida cada vez maior, comprovam o seu potencial na análise de problemas práticos envolvendo escoamentos turbulentos.

Em SGE, as estruturas turbulentas de grande escala são diretamente resolvidas, enquanto que os efeitos dos movimentos de pequena escala são obtidos via modelação. Tanto do ponto de vista de estrutura conceitual quanto de aplicabilidade, a SGE consiste em uma metodologia intermediária à SND e à simulação via equações de Reynolds promediadas. Sua concepção foi motivada pelas limitações apresentadas pelas duas últimas metodologias.

Devido à representação explícita das grandes escalas do escoamento turbulento, a SGE se mostra mais precisa e confiável em relação aos modelos de equações de Navier-Stokes baseados na promediação de Reynolds em casos onde as flutuações de grande escala são importantes, como em escoamento em torno de corpos rombudos, onde ocorre separação de camada limite e desprendimento de vórtices. A grande vantagem da SGE em relação à SND

está relacionada à diminuição do custo computacional, consequência da obtenção de um sistema de equações de menor porte para a resolução de um determinado problema de mecânica dos fluidos, que, por sua vez, é resultado do processo de separação do tratamento dado às grandes e pequenas escalas do escoamento.

A modelação das menores escalas é baseada na hipótese de equilíbrio universal, proposta por Kolmogorov, indicando que as menores estruturas turbulentas apresentam uma tendência à isotropia, homogeneidade e independência das condições de contorno, características que se verificam mais fortes na medida em que se observa diminuição da escala de comprimento das estruturas turbulentas.

Uma das principais semelhanças entre as metodologias de SND e SGE reside na possibilidade de obtenção, por meio da SGE, de campos discretos tridimensionais e transientes para as propriedades do escoamento, o que não ocorre com metodologias baseadas na decomposição de escalas de Reynolds. Essa característica, juntamente com a sua menor exigência do ponto de vista de discretização espacial e temporal quando comparada a SND, e também, com a possibilidade de incorporar o comportamento das pequenas escalas via modelação, torna a metodologia SGE particularmente interessante em relação à SND, em função de seu menor custo e em relação às metodologias baseadas em decomposição de escalas de Reynolds, em função de sua maior generalidade.

A SGE pode ser dividida em quatro grandes passos conceituais, que são: (1), o emprego de um operador que recebe o nome de filtro, que promove a decomposição do campo de velocidades, dado por $\bar{u}(\bar{x},t)$, em uma parcela filtrada (ou parcela resolvida), representante do movimento das grandes escalas, denotada por $\bar{\bar{u}}(\bar{x},t)$, e outra, denominada como parcela residual (ou parcela de sub-malha), denotada por $\bar{u}'(\bar{x},t)$; (2), a aplicação do operador filtro às equações de Navier-Stokes, que permite a obtenção das equações de evolução para a parcela filtrada do campo de velocidades (ou campo de velocidades filtrado) e modelação dos tensores residuais; (3), obtenção de uma relação constitutiva para os tensores residuais através de emprego de um modelo de viscosidade turbulenta; (4), escolha da estratégia e resolução numérica das equações de Navier-Stokes filtradas para a obtenção do campo de velocidades filtrado.

Existem dois pontos de vista relativos à separação conceitual entre as etapas referentes à modelação, (etapas 1, 2 e 3), da última, referente à proposição do esquema numérico (etapa 4). Reynolds (1990) é um dos defensores da manutenção da separação entre as etapas referentes ao processo de filtragem e modelação e aquela relativa à aplicação do método para

a resolução numérica do escoamento. Assim, a filtragem e a modelação são independentes do método numérico, e, em particular, da malha empregada. Deste modo, os termos apropriados para as duas parcelas do campo de velocidades são ‘filtrado’ e ‘residual’, e não, ‘resolvido’ e de ‘sub-malha’. O método numérico é, então, visto apenas como uma ferramenta que permite a obtenção de uma solução precisa para o sistema de equações filtradas. O outro ponto de vista, defendido por Boris et al. (1992), consiste justamente na combinação deliberada entre as etapas de filtragem, modelação dos tensores residuais e do método numérico empregado. Na prática, os processos de filtragem, modelação dos tensores residuais e o método numérico estão de algum modo entrelaçados.

De acordo com Pope (2000), existem várias situações alternativas baseadas nos princípios da SGE. Por exemplo, considerando escoamentos em meios ilimitados (jatos, camadas cisalhantes, plumas), pode-se fazer a distinção entre SGE e SEMG (Simulação de Escalas Muito Grandes). Em SGE, o campo filtrado de velocidades contém a quase totalidade da energia cinética em todo o escoamento. Em SEMG, a malha e o filtro são muito grosseiros. Assim, considerável parcela da energia é transferida aos tensores residuais, aumentando a dependência da simulação em relação ao modelo de sub-malha empregado. Por outro lado, deve-se ressaltar que, em muitos casos, a SEMG é capaz de fornecer as informações de interesse (campo médio de velocidades, estrutura dos maiores vórtices) com menor custo computacional. Como a parcela da energia contida no campo filtrado de velocidades é raramente estimada, não existe uma distinção muito clara entre SGE e SEMG.

Ainda em Pope (2000), as considerações feitas a respeito das metodologias SGE e SEMG também são válidas para escoamentos internos ou em torno de corpos sólidos nas regiões próximas de paredes. Se o filtro e a malha forem suficientemente refinados, de modo a permitir a resolução de todas as maiores escalas de movimento (contendo a quase totalidade da energia cinética turbulenta disponível), a metodologia recebe o nome de Simulação de Grandes Escalas com Resolução do escoamento na Região Próxima à Parede (SGE-RRPP). Essa modalidade de SGE requer uma malha bastante refinada nessas regiões, o que implica em custos computacionais elevados, inviabilizando, na maioria das situações (principalmente em escoamentos com alto número de Reynolds), o tratamento do problema na região próxima à parede. A alternativa imediata à metodologia SGE-RRPP, recebe o nome de Simulação de Grandes Escalas com Modelação do escoamento na Região Próxima à Parede (SGE-MRPP), na qual o filtro e a malha são suficientemente grosseiros nas regiões próximas a paredes sólidas, a ponto de não viabilizarem uma solução precisa, demandando o emprego de modelos (funções parede) para a representação do escoamento em tais regiões.

4.2. O FILTRO E A OPERAÇÃO DE FILTRAGEM

Na Simulação Numérica Direta (SND), o campo de velocidade é resolvido em todas as escalas, inclusive naquelas escalas cujo tamanho é menor que a escala dissipativa de Kolmogorov, l_d , cujo número de onda associado é κ_d . Já na Simulação de Grandes Escalas (SGE), um filtro passa-baixa é aplicado sobre o campo de velocidades para que o campo de velocidades filtrado seja adequadamente resolvido em uma malha relativamente grosseira. Especificamente, o tamanho de malha, h , é proporcional à largura do filtro, Δ_c , cujo número de onda associado é dado por κ_{Δ_c} .

Na situação ideal do ponto de vista do custo computacional, a largura do filtro deve ser correspondente à menor estrutura turbulenta pertencente à Região Contidora de Energia (RCE), denotada por l_{RCE} , e cujo número de onda associado é dado por κ_{RCE} . Assim, a malha computacional pode ser grosseira tanto quanto possível, desde que permita a resolução das estruturas turbulentas contidas na RCE. A Figura 4.2 ilustra este conceito, representando um filtro de corte que intercepta o espectro de energia na frequência κ_c , entre os números de onda κ_{RCE} e κ_d . Desta forma, estruturas turbulentas de maior frequência devem ser modeladas por algum modelo de sub-malha, enquanto as maiores estruturas, de menor número de onda, são resolvidas.

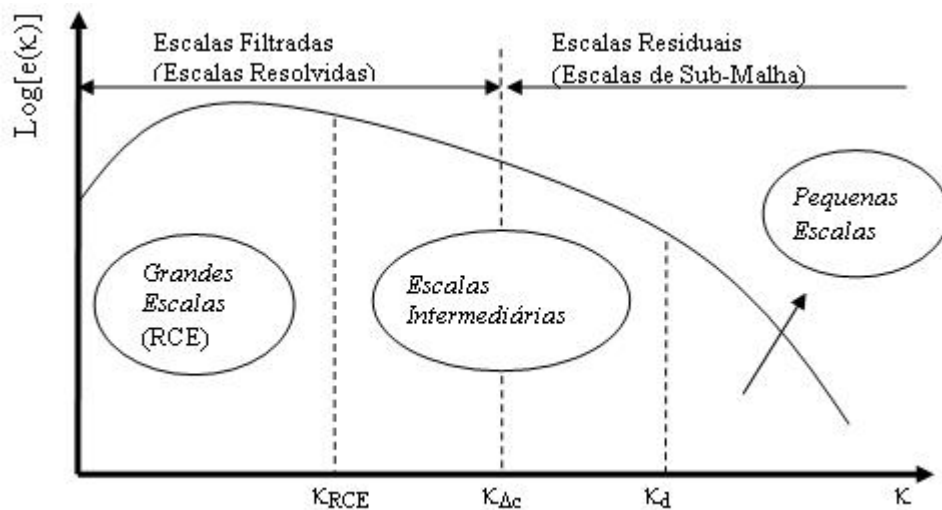


Figura 4.2: Espectro de energia da turbulência.

A operação de filtragem é definida como,

$$\bar{f}(\bar{x},t)=\int_{\Omega}f(\bar{x}-\bar{r},t)G(\bar{r},\bar{x},t)d\Omega \quad (4.4)$$

onde a integração é realizada ao longo de todo o domínio Ω . Na equação (4.4), $f(\bar{x},t)$ é o campo a ser filtrado, o qual pode ser escalar ou vetorial, $\bar{f}(\bar{x},t)$ é a parcela filtrada do campo, que, da mesma forma que $f(\bar{x},t)$, pode ser escalar ou vetorial e $G(\bar{r},\bar{x},t)$ é a função escalar denominada por filtro, que deve satisfazer a seguinte condição de normalização,

$$\int_{\Omega}G(\bar{r},\bar{x},t)d\Omega=1 \quad (4.5)$$

O campo residual é definido como:

$$f'(\bar{x},t)=f(\bar{x},t)-\bar{f}(\bar{x},t) \quad (4.6)$$

A figura 4.3 apresenta uma representação do processo de filtragem, onde se tem a distribuição temporal de uma função genérica $f(x,t)$, da sua parte filtrada, $\bar{f}(x,t)$, e da sua parte residual, $f'(x,t)$. Também é ilustrada a quantidade $\bar{f}'(x,t)$, que representa a função obtida a partir da aplicação do filtro sobre a parte residual, $f'(x,t)$.

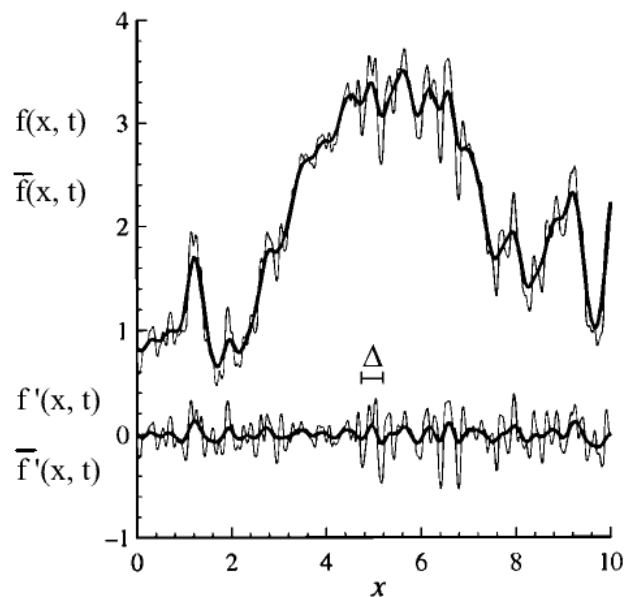


Figura 4.3: Decomposição das escalas da turbulência na SGE (extraído de Pope, 2000).

Deste modo, o campo de velocidades pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\bar{u}'(\bar{x},t) = \bar{u}(\bar{x},t) - \overline{\bar{u}}(\bar{x},t) \quad (4.7)$$

Vale lembrar que o campo de velocidades filtrado é também um campo dependente do tempo. A decomposição realizada por intermédio da operação de filtragem descrita acima é semelhante àquela realizada na decomposição de Reynolds, com a importante diferença de que a aplicação do operador filtro sobre o campo residual não resulta, necessariamente, em um campo nulo, conforme ilustra a figura 4.3. Assim,

$$\bar{u}'(\bar{x},t) \neq 0 \quad (4.8)$$

O operador filtro e o operador derivada temporal são comutativos, ou seja,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \quad (4.9)$$

Já o mesmo não pode ser afirmado quando a derivada é realizada em uma coordenada espacial. No entanto, diferenciando a equação em relação a uma coordenada espacial, obtém-se que

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} + \int_{\Omega} f(\bar{x} - \bar{r}, t) \frac{\partial G(\bar{r}, \bar{x})}{\partial x_i} d\Omega \quad (4.10)$$

Quando a função filtro é independente da coordenada espacial, ou seja, $G(\bar{x}, \bar{r}, t) = G(\bar{r}, t)$, diz-se que a função filtro é homogênea. Para esse tipo de filtro é válida a operação de comutação entre a aplicação do filtro e a derivada espacial. Assim,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \quad (4.11)$$

As propriedades dos filtros são mais facilmente examinadas em uma dimensão. Desse modo, considera-se uma função escalar $f(x,t)$ definida em todo x pertencente ao intervalo $(-\infty < x < \infty)$. Escolhendo um filtro homogêneo unidimensional $G(r,t)$, o campo filtrado $\bar{f}(x,t)$ é dado pela convolução, conforme definido abaixo:

$$\bar{f}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-r,t) G(r,t) d\Omega \quad (4.12)$$

Os filtros mais comumente usados são: o filtro retangular, o filtro Gaussiano e o filtro de espectro retangular. Na tabela 4.1, os filtros supracitados são definidos, juntamente com as suas respectivas funções de transferência.

Os efeitos do filtro sobre um determinado campo $f(x,t)$ ficam mais evidentes quando a análise é realizada no espaço de números de onda. Suponha que a transformada de Fourier $\hat{f}(x,t)$ seja definida para um campo $f(x,t)$.

$$\hat{f}(\kappa, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\kappa x} dx \quad (4.13)$$

A transformada de Fourier do campo filtrado é dada por:

$$\hat{f}(\kappa, t) = \hat{f}(\kappa, t) \hat{G}(\kappa, t) \quad (4.14)$$

onde a função transferência, $\hat{G}(\kappa, t)$, é dada por:

$$\hat{G}(\kappa, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) e^{-i\kappa x} dx \quad (4.15)$$

O resultado expresso pela equação (4.14) segue diretamente do processo de filtragem e da aplicação de teorema de convolução, no contexto da transformada de Fourier.

Como consequência direta da normalização, as funções de transferência são unitárias na origem. Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(r) dr = \hat{G}(0) = 1 \quad (4.16)$$

Considera-se, então, o filtro de espectro retangular, conforme está representado na tabela 4.1, item (c)

$$G(r) = \frac{\text{sen}(\pi r / \Delta)}{\pi r / \Delta} \quad (4.17)$$

A transformada de Fourier desse filtro corresponde à função, no domínio de número de onda, dada por:

$$\hat{G}(\kappa) = H(\kappa_c - \kappa); \quad \kappa_c \equiv \frac{\pi}{\Delta} \quad (4.18)$$

Assim, pode-se concluir que o filtro de espectro retangular anula as componentes com frequência acima da frequência de corte dada por

$$\kappa = \kappa_c \quad (4.19)$$

Deste modo, o exemplo acima contribui para a compreensão do efeito exercido pelo filtro sobre o campo de velocidades. De maneira geral, os filtros utilizados em SGE buscam exercer um efeito semelhante ao exemplo expresso pela equação (4.17) e (4.18), ou seja, retirar ou minimizar a influência das altas frequências.

Para o caso geral, o campo filtrado de velocidade, $\bar{\bar{u}}(\bar{x}, t)$, é definido de forma análoga à equação (4.4). Assim, $\bar{\bar{u}}(\bar{x}, t)$ é dado por,

$$\bar{\bar{u}}(\bar{x}, t) = \int_{\Omega} \bar{u}(\bar{x} - \bar{r}, t) G(\bar{r}, \bar{x}, t) d\Omega \quad (4.20)$$

onde $G(\bar{x}, \bar{r})$ é a função filtro, de forma análoga àquela apresentada na equação (4.4), válida para a situação unidimensional. O filtro tridimensional também deve satisfazer a condição de normalização, dada pela equação (4.5).

Da mesma forma que na situação unidimensional, diz-se que o filtro é homogêneo quando não há dependência em relação à posição do espaço onde o mesmo é aplicado (coordenada \bar{x}). Se o filtro assumir um único valor em todos os pontos em uma esfera centrada em \bar{x} e com raio igual à norma da coordenada \bar{r} , o mesmo pode ser chamado de isotrópico. Os filtros definidos para situações unidimensionais podem ser utilizados para definir filtros tridimensionais. A maioria das deduções teóricas e dos resultados obtidos para filtros unidimensionais também valem para filtros tridimensionais.

O espectro de energia filtrado é dado por:

$$\hat{\bar{e}}(\kappa, t) = \left| \hat{G}(\kappa, t) \right|^2 \hat{e}(\kappa, t) \quad (4.21)$$

Esta relação é utilizada para obtenção da parcela da energia contida no campo de velocidades filtrado. Para escoamentos com alto número de Reynolds, pode-se demonstrar através da equação acima que, em torno de 80% da energia do escoamento está contida nas escalas representadas pelo campo filtrado de velocidades. Como uma consequência natural da

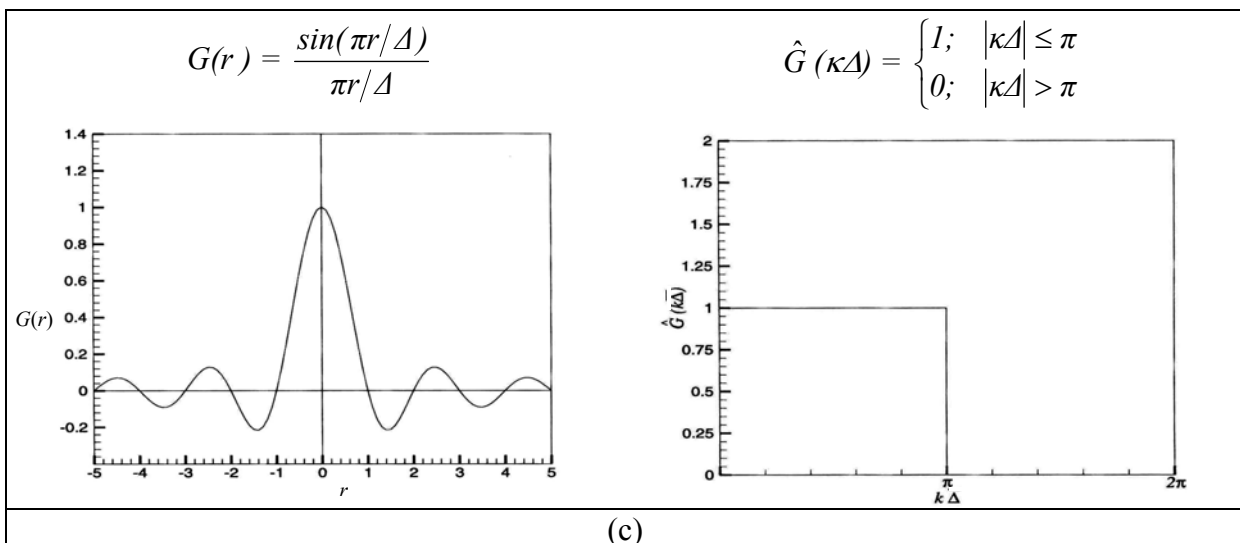
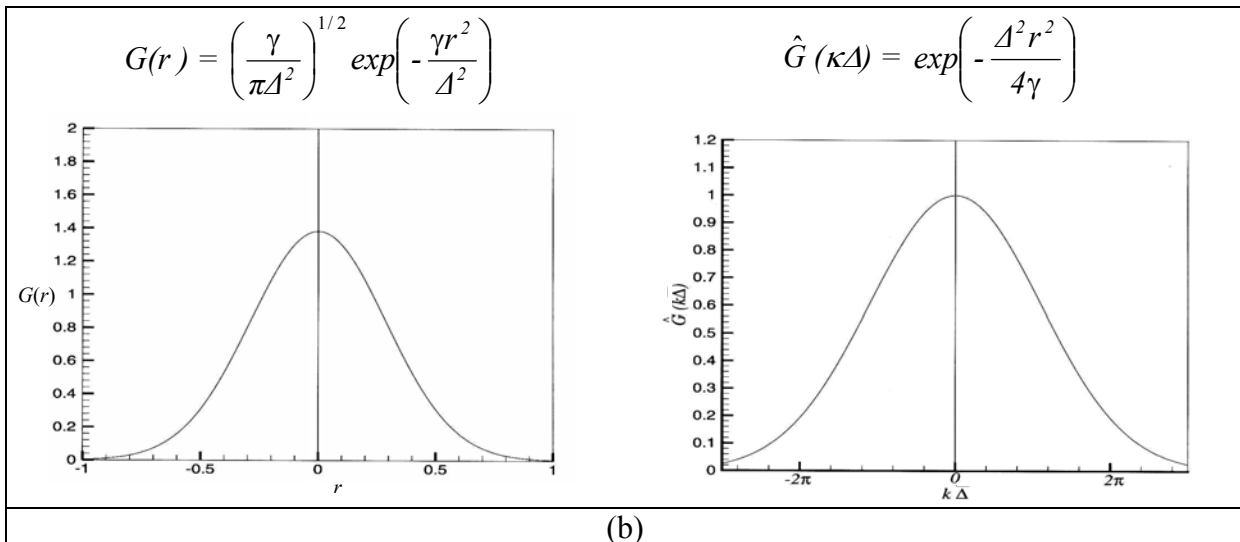
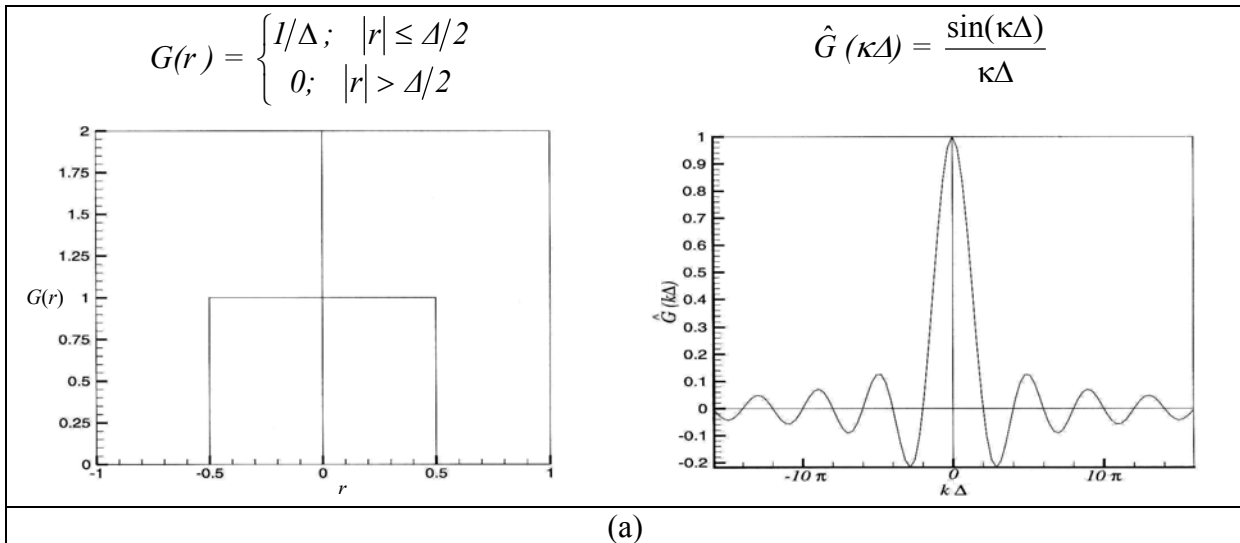


Tabela 4.1: Funções filtro e suas respectivas funções de transferência: (a), filtro retangular; (b), filtro gaussiano e (c), filtro de espectro retangular (extraído de Sagaut, 2002)

definição expressa na equação (4.21), a parcela de energia de sub-malha, que está associada às pequenas escalas, é definida por:

$$\hat{e}'(\kappa, t) = \left(1 - |\hat{G}(\kappa, t)|^2\right) \hat{e}(\kappa, t) \quad (4.22)$$

Assim, a equação (4.22) pode ser entendida como um critério para a validação de modelos de sub-malha (notadamente aqueles baseados em uma viscosidade de sub-malha), ou ainda, como um critério para a separação entre o efeito do modelo de sub-malha e os efeitos associados aos erros de truncamento, oriundos dos esquemas discretos empregados na metodologia numérica de solução das equações de conservação.

4.3. APLICAÇÃO DO OPERADOR FILTRO ÀS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Considerando o exposto no capítulo 3, quando se trata de avaliar o termo de não homogeneidade, pode-se tratar escoamentos a baixo número de Mach como incompressíveis. Deste modo, a aplicação do operador filtro e a dedução das equações filtradas será realizada considerando, por simplicidade, as equações de Navier-Stokes na forma incompressível. Assim, as equações de conservação da massa e quantidade de movimento são conforme abaixo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u}) = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (4.24)$$

Em geral, a escolha do filtro está relacionada à parcela do espectro de frequências associadas ao campo de velocidades que se quer resolver e ao método numérico disponível para resolver as equações filtradas. Considerando que o método a ser empregado na resolução do escoamento é o método de volumes finitos, o filtro empregado pode ser descrito como

$$G(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^3}; & \|\vec{r}\| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0; & \|\vec{r}\| > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (4.25)$$

onde Δ corresponde à largura característica do filtro, que determina o número de onda de corte. No caso de associação direta entre a largura do filtro, Δ , e o tamanho de malha, h , o

processo de filtragem pode ser entendido como uma conseqüência natural do processo de discretização (Boris, 1992). Outros tipos de filtro sugeridos pela literatura são a função Gaussiana e a função de espectro retangular, conforme a ser comentado a seguir. Vale lembrar, que as propriedades clássicas da decomposição de Reynolds não são verificadas no operador filtro, conforme expressa a equação abaixo,

$$\begin{cases} \overline{\overline{u_i u'_j}} \neq 0 \\ \overline{\overline{u_i}} \neq \overline{u_i} \end{cases} \quad (4.26)$$

É interessante ressaltar, também, que o filtro expresso na equação (4.25) é homogêneo, ou seja, a operação de filtragem comuta com a operação de derivação espacial. Por simplicidade, a operação de filtragem descrita pela equação (4.25) será representada por uma barra sobre a quantidade a ser filtrada. Por conveniência, as equações serão apresentadas de acordo com a notação indicial. Aplicando o filtro dado por (4.25) sobre as equações (4.23) e (4.24), e considerando as suas propriedades em relação aos operadores de derivação expressa pela equação (4.11), obtém-se,

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.28)$$

Vale lembrar que a aplicação do filtro sobre o produto de duas grandezas não é equivalente ao produto de duas grandezas filtradas. Diante disso, o termo advectivo da equação (4.28) será tratado da seguinte forma:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u_i} + u'_i)(\overline{u_j} + u'_j)} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{\overline{u_j} u'_i} + \overline{u'_i u'_j} \quad (4.29)$$

Percebe-se que a decomposição realizada acima ainda não permite a obtenção do tensor formado pelos produtos de componentes de velocidades filtradas, $\overline{u_i u_j}$, o que é obtido, somando e subtraindo essa parcela, numa segunda etapa, conforme abaixo:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} + [\overline{\overline{u_i} u'_j} - \overline{u_i u'_j}] + [\overline{\overline{u_j} u'_i} + \overline{u_j u'_i}] + [\overline{u'_i u'_j}] \quad (4.30)$$

onde

$$L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (4.31)$$

$$C_{ij} = \overline{u_i u_j'} + u_i' \bar{u}_j \quad (4.32)$$

$$\pi_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \quad (4.33)$$

Combinando as equações (4.27)-(4.33), obtêm-se as equações de Navier-Stokes na forma filtrada, conforme abaixo:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - (L_{ij} + C_{ij} + \pi_{ij}) \right] \quad (4.35)$$

As equações (4.34) e (4.35) formam um sistema de quatro equações para as quatro incógnitas, \bar{u}_i ($i = 1, 2$ e 3), e \bar{p} , juntamente com três tensores, dados por L_{ij} , C_{ij} e π_{ij} , correspondendo, desse modo, a um sistema indeterminado, com mais incógnitas que equações. Esse fato é consequência da decomposição do termo advectivo (não linear) da equação de conservação da quantidade de movimento, conforme se pode observar nas equações (4.29) e (4.30).

As quantidades expressas nas equações (4.31), (4.32) e (4.33), que são tensores (ou momentos estatísticos) de segunda ordem, aparecem como termos de não homogeneidade nas equações de transporte para \bar{u}_i (que correspondem a momentos estatísticos de primeira ordem). De forma análoga ao que ocorre com os momentos estatísticos de primeira ordem, é possível gerar equações para os momentos estatísticos de segunda ordem, cujo desenvolvimento utilizado na obtenção de tais equações acarreta o surgimento de momentos de ordem mais elevada, e assim, sucessivamente.

Em outras palavras, o problema acima descrito corresponde ao *fechamento da turbulência*, que, ainda hoje, permanece sem solução definitiva. A metodologia SGE não resolve essa questão, mas auxilia na avaliação da importância dos vários tensores obtidos, expressos pelas equações (4.31), (4.32) e (4.33), conforme será tratado com maiores detalhes na próxima seção.

4.4. MODELAGEM DO TENSOR DE SUB-MALHA

Existem dois grupos principais através dos quais os modelos de sub-malha podem ser classificados: (1), modelos baseados no conceito de viscosidade de sub-malha (Smagorinsky, 1963); (2), aqueles baseados em uma expressão para a função filtro (Stolz et al., 2001). A modelagem do tensor de sub-malha, utilizada no presente trabalho, é fortemente apoiada no conceito de viscosidade de sub-malha, de modo que a discussão que vem a seguir se aplica somente aos modelos de sub-malha referentes ao primeiro dos dois grupos supracitados.

No presente trabalho, o tensor de sub-malha é modelado de acordo com a hipótese de Boussinesq, ou seja, como uma função linear da taxa de deformação local gerada pelo campo de velocidades filtrado, e também, da energia cinética de sub-malha local. Entende-se por sub-malha todo e qualquer resíduo resultante da aplicação do operador filtro sobre o campo de velocidades. Desse modo, o tensor de sub-malha pode ser expresso como,

$$\pi_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k_{sg} \delta_{ij} \quad (4.36)$$

onde

$$k_{sg} = \frac{1}{2} \overline{(u'_i u'_i)} \quad (4.37)$$

É prática conveniente definir um tensor $p_a \delta_{ij}$, onde $p_a = p + 2k_{sg}/3$. Desse modo, a energia cinética de sub-malha exerce o papel de um termo de pressão mecânica, em adição ao efeito promovido pela pressão termodinâmica, p .

Clark et al.(1979), sugerem expressar a soma dos tensores cruzados e de Leonard como uma expansão em serie de potências do campo de velocidade filtrado. De modo complementar à análise realizada pelo trabalho anterior, Findikakis e Street (1979) demonstram que:

$$L_{ij} + C_{ij} \cong \frac{\Delta_K}{12} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (4.38)$$

onde Δ_K ($k = 1, 2$ e 3) corresponde à largura do filtro nas direções x , y e z . Com essa expressão, é possível o calculo das componentes do tensor $L_{ij} + C_{ij}$ de modo explícito, em função do campo de velocidade filtrado.

Shaanan et al. (1975) concluíram que é possível desconsiderar, sem grandes prejuízos, as parcelas advindas dos tensores de Leonard e cruzado, em situações envolvendo esquemas de até segunda ordem para os termos de transporte por advecção, o que não é válido quando esquemas de diferenças finitas de ordem mais elevada ou métodos espectrais são empregados.

De forma complementar ao exposto por Shaanan et al. e tendo como base simulações numéricas em um escoamento sobre uma expansão súbita, Silveira Neto et al. (1993) mostram que, mesmo para esquemas de terceira ordem, a contribuição associada ao tensor de sub-malha é, de longe, muito superior à influência desempenhada pelos outros dois tensores. No intuito de tornar esse aspecto evidente, foram definidas às contribuições associadas aos três termos difusivos, conforme abaixo:

$$D_R = \left\| \vec{\nabla} \cdot \bar{\pi} \right\| \quad (4.39)$$

$$D_L = \left\| \vec{\nabla} \cdot (\bar{L} + \bar{C}) \right\| \quad (4.40)$$

$$D_M = \left\| \vec{\nabla} \cdot (2\nu\bar{S}) \right\| \quad (4.41)$$

onde D_R , D_L e D_M são, respectivamente, os efeitos da difusão associada ao tensor de sub-malha, à soma entre os tensores de Leonard e cruzado e ao tensor viscoso. Essa investigação numérica foi realizada por intermédio da metodologia de SGE, fazendo uso das equações (4.36) e (4.38), onde a viscosidade turbulenta foi avaliada com o modelo de Smagorinsky (1963), a ser descrito a seguir.

A figura 4.4 ilustra a comparação feita por Silveira Neto et al. (1993) entre os efeitos definidos pelas quantidades representadas nas equações (4.39), (4.40) e (4.41). A contribuição da parcela D_R é da ordem de 40 vezes o efeito gerado pelas outras parcelas nas regiões mais distantes da posição correspondente à localização da expansão brusca (sentido do gráfico correspondente aos maiores valores de x/H), o que está linha com o resultado de Antonopoulos-Domis (1981), obtido mediante o uso de um esquema de discretização similar.

Desse modo, conclui-se que a importância da contribuição dos tensores de Leonard e cruzado crescem na medida em que se eleva a ordem dos esquemas numéricos. Por outro lado, é necessário o emprego de esquemas de ordem muito elevada para que as contribuições fornecidas pelos tensores de Leonard e cruzado apresentem alguma significância perante o efeito promovido pelo tensor de sub-malha.

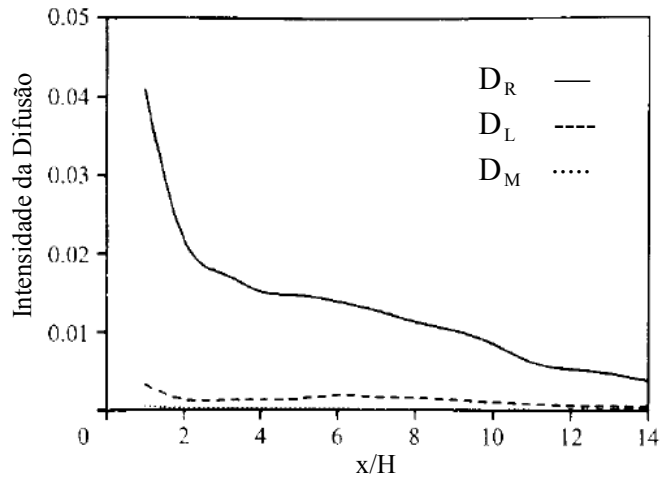


Figura 4.4: Comparação entre a influência exercida pelos diversos tensores (baseado em figura extraída de Silveira Neto et al. ,1993).

Existem várias formas de tratar o problema do cálculo da viscosidade turbulenta em SGE, mas apenas o modelo de Smagorinsky-Lilly será descrito em detalhe.

O modelo de Smagorinsky (1963) se baseia na hipótese de equilíbrio local para as pequenas escalas, as quais compreendem todas as estruturas turbulentas com escalas de movimento inferiores a escala dissipativa de Kolmogorov. A hipótese de equilíbrio local enuncia que a energia produzida pelas tensões de sub-malha seja igual à dissipação, ou seja:

$$\wp = \varepsilon \quad (4.42)$$

A energia produzida pelas tensões de sub-malha é expressa pelo traço do tensor formado pelo produto entre a parcela não isotrópica do tensor de sub-malha $-\overline{u'_i u'_j}$ e o tensor taxa de deformação baseado nas grandezas filtradas, S_{ij} . Já a dissipação, é expressa como uma quantidade proporcional ao quociente entre as escalas de velocidade característica de sub-malha $(\overline{u'_i u'_i})^{1/2}$ e a escala de comprimento característico de sub-malha, l , conforme segue:

$$\wp = -\overline{u'_i u'_j} S_{ij} = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \quad (4.43)$$

$$\varepsilon = \alpha \frac{(\overline{u'_i u'_i})^{3/2}}{l} \quad (4.44)$$

Assumindo a viscosidade de sub-malha, ν_t , como sendo proporcional às escalas de velocidade característica de sub-malha, $(\overline{u_i u_i})^{1/2}$, e à escala de comprimento característico de sub-malha, l , obtém-se que

$$\nu_t = \alpha l (\overline{u_i u_i})^{1/2} \quad (4.45)$$

Combinado as equações (4.43), (4.44) e (4.45), pode-se expressar a viscosidade turbulenta em função a taxa de deformação e da escala de comprimento, conforme a seguir:

$$\nu_t = (C_s l)^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (4.46)$$

O valor para a constante de Smagorinsky $C_s = 0,18$, determinado analiticamente por Lilly (1967) com base na situação de escoamento com média nula e flutuação turbulenta de comportamento homogêneo e isotrópico, tem sido questionado pela comunidade científica e modificado segundo o tipo de escoamento a ser investigado numericamente e, também, de acordo com a metodologia numérica empregada.

A escala de comprimento, l , que, em regra, é identificada com a largura do filtro Δ , pode ser calculada em função da malha de discretização. Para uma malha retangular uniforme, porém, não isotrópica (ortotrópica), com espaçamentos h_x , h_y , e h_z , nas três direções dos eixos coordenados, Deardorff (1970) sugere que a largura do filtro pode ser tomada como a média geométrica dos diferentes espaçamentos, ou seja, $\Delta = l = (h_x h_y h_z)^{1/3}$.

Embora a validade do modelo de Smagorinsky, em seu sentido estrito, ocorrer apenas na situação de escoamento correspondente à turbulência homogênea e isotrópica, o mesmo tem sido amplamente utilizado em diversas situações onde há desvios consideráveis dessa condição, apresentando bons resultados. Este modelo marca o início de uma linha de pesquisa que, nos dias atuais, corresponde a um nicho bastante efervescente e promissor nas áreas de modelação da turbulência e simulação numérica de escoamentos. Importantes e freqüentes avanços têm sido obtidos no campo da modelagem de sub-malha e na pesquisa por funções filtro durante os últimos vinte anos, o que culmina em novas concepções tais como os modelos dinâmicos, que não necessitam do uso de constantes *ad-hoc* (Germano, 1986), e também, em filtros seletivos que dispensam o emprego de viscosidade de sub-malha (Stolz et al., 2001).

CAPÍTULO 5

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo será realizada uma exposição detalhada do modelo físico do problema, dos modelos matemáticos empregados, das hipóteses simplificativas, das condições de contorno adotadas nas situações simuladas e do método numérico utilizado, tanto na situação referente à simulação do jato plano turbulento, quanto naquela que trata da resolução do campo acústico, com o emprego de informações sobre o campo de velocidades obtido através da simulação do escoamento.

Conforme visto nos capítulos 1 e 3, não existe, do ponto de vista físico, uma dissociação entre o jato turbulento e o campo acústico gerado pelo mesmo, uma vez que ambos são integrantes de um mesmo escoamento. Os conceitos referentes à manifestação, tanto do jato turbulento, quanto do campo acústico são indistinguíveis. Em outras palavras, ambos podem ser expressos por campos de velocidade e de pressão, significando que, em uma solução precisa do escoamento estariam contidas todas as informações que permitiriam a caracterização do jato e do ruído concomitantemente observado. Para auxiliar a compreensão do exposto acima, a Figura 5.1 apresenta um resultado típico dos campos de vorticidade e acústico que poderiam ser obtidos para um jato.

A separação conceitual e o tratamento distinto para os fenômenos do escoamento e do ruído são justificados pela diferença entre os mecanismos envolvidos na manifestação dos mesmos. O jato é o resultado de efeitos inerciais não-lineares e da difusão de quantidade de movimento provocada pela interação de massas fluidas a alta velocidade em um meio quiescente. Já o ruído é resultante da natureza elástica (compressível) do fluido que escoar e o principal mecanismo envolvido consiste na propagação, por intermédio de um fluido elástico, de pequenas flutuações de massa específica e pressão.

Apesar de ambos, jato e som, constituírem escoamentos, os mesmos apresentam características distintas relacionadas às magnitudes e às taxas de decaimento apresentadas por seus campos.

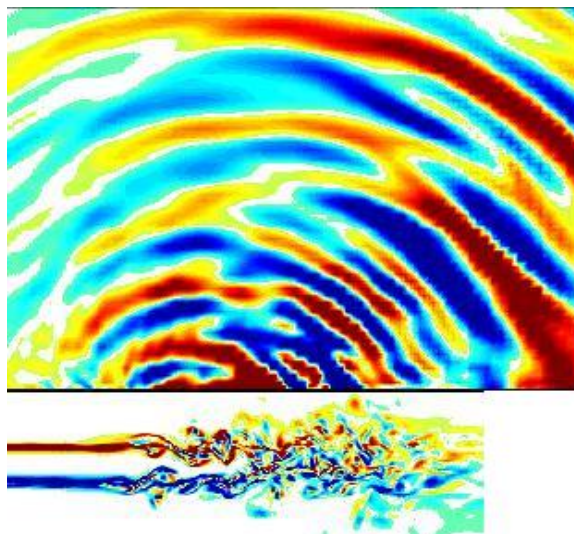


Figura 5.1: Campos de vorticidade e acústico gerados por um jato
(extraído de Bogey, 2000).

O campo de velocidade apresentado pelo jato é caracterizado pela presença de escalas de movimento diversificadas, onde as maiores são responsáveis pela determinação do campo de velocidade médio e contêm a maior parte da energia, enquanto as menores respondem pelas grandezas turbulentas observadas, apresentando característica fortemente aleatória e comportamento quase independente do escoamento principal. O campo de velocidade é altamente não-linear e decai rapidamente devido aos mecanismos dissipativos da interação turbulenta entre as várias porções de fluido contidas no jato.

Por outro lado, o ruído é um fenômeno linear e apresenta, invariavelmente, pequena escala de magnitude e constitui um padrão altamente organizado de escoamento, de caráter oscilatório, semelhante ao apresentado por um sistema massa-mola. Devido a essas características, uma vez caracterizada a fonte, as condições iniciais e as condições de contorno, o campo acústico é unicamente determinado. Na maioria dos casos, o campo acústico apresenta um decaimento lento da pressão (inversamente proporcional à distância da fonte) e pode ser considerado como isentrópico.

O campo de pressão hidrodinâmica em um jato turbulento, na condição de baixo número de Mach, costuma apresentar magnitude superior às ondas de pressão acústica geradas pelo mesmo em quatro, ou até mesmo, cinco ordens de grandeza.

Diante do exposto, existem duas alternativas para a obtenção do campo acústico. A primeira delas, e talvez a mais intuitiva, corresponde à simulação numérica direta do escoamento. A principal motivação deste procedimento reside na percepção de que o ruído é parte integrante do escoamento, e assim, a resolução do mesmo conteria todas as informações

referentes ao campo acústico. Conforme já mencionado no capítulo 1, uma vez obtida a solução, bastaria a realização de um processo de separação entre o escoamento e o campo acústico para a obtenção do som. No entanto, como primeira dificuldade pode-se citar o custo computacional elevado exigido por uma tarefa de tamanho porte. Além disso, mesmo sendo possível a obtenção de uma solução precisa do escoamento, respeitando as escalas espaciais e temporais características do campo acústico, é necessária a separação entre esse último e o jato, o que constitui, também, um grande obstáculo ao emprego de tal estratégia, devido à grande diferença de magnitude entre os dois campos. Ainda pode-se mencionar que a metodologia direta permite apenas a determinação do campo acústico na região onde o escoamento é resolvido, uma vez que o domínio físico empregado é, quase sempre, limitado.

Uma alternativa para a solução do problema corresponde ao emprego de uma metodologia híbrida composta de duas partes. A primeira delas consiste em resolver o escoamento (neste trabalho representado por um jato plano turbulento). Posteriormente, de posse da solução do escoamento, a segunda etapa trata da obtenção da pressão sonora por meio do emprego de uma analogia acústica. Uma vantagem desta metodologia é o estabelecimento natural de uma separação entre os processos de solução do escoamento e do campo acústico. Outra importante vantagem é a diminuição drástica do esforço computacional requerido para solução do escoamento. A metodologia híbrida trata o campo acústico como um produto do escoamento; noção válida na maioria absoluta das situações que envolvem geração aerodinâmica de ruído.

Diante dos aspectos supracitados, entende-se que a metodologia híbrida corresponde a melhor alternativa para a resolução do campo acústico gerado por um jato plano turbulento. A analogia acústica escolhida corresponde àquela elaborada por Lighthill (1952), devido à sua aceitação no meio científico e à sua simplicidade.

Para a resolução do jato turbulento empregou-se a simulação de grandes escalas (SGE), via método de volumes finitos e utilizando a proposta de Smagorinsky para a viscosidade turbulenta de sub-malha. Para a resolução do campo acústico, utiliza-se a solução do campo de velocidade do escoamento obtida da SGE para o cálculo do tensor de não homogeneidade da equação da onda, para posteriormente então avaliar a pressão sonora, mediante a resolução da equação de Lighthill em sua forma integral, conforme exposto no capítulo 3. Nas próximas seções, são fornecidos os detalhes da formulação e da metodologia de solução empregadas para a simulação numérica do jato e para o cálculo do campo acústico.

5.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO JATO PLANO TURBULENTO

5.2.1. Modelo Matemático

O interesse principal do presente trabalho reside no estudo de jatos planos turbulentos subsônicos quasi-isotérmicos. De acordo com o exposto no capítulo 3, escoamentos a baixo número de Mach podem ser tratados como incompressíveis, sem grande prejuízo para a previsão do campo acústico. Deste modo, basta resolver a forma incompressível das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento para a avaliação do tensor de não homogeneidade, $\overline{\overline{T}}$, necessário para o cálculo da pressão sonora.

As equações de conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia, para escoamentos newtonianos incompressíveis podem ser escritas na forma:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (5.2)$$

Em princípio, a solução numérica das equações (5.1) e (5.2) para todas as escalas presentes num dado escoamento é possível e caracteriza a abordagem denominada Simulação Numérica Direta (SND). Entretanto, devido ao elevado número de graus de liberdade dos escoamentos turbulentos, este tipo de resolução apresenta na quase totalidade dos casos custos computacionais proibitivos.

A técnica utilizada para a modelagem da turbulência é aquela dada pela simulação de grandes escalas (SGE). O filtro utilizado nas simulações realizadas é dado por

$$G(x', y') = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^2}; & (x', y') \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2} \right] \\ 0; & (x', y') \notin \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2} \right] \end{cases} \quad (5.3)$$

onde a largura do filtro, dado por Δ , é tomado como sendo o próprio refino da malha. Na verdade, o filtro representado pela equação (5.3) é implicitamente definido pelo método numérico utilizado.

Em concordância com o capítulo 4, aplicando o filtro definido pela equação (5.3), nas equações (5.1) e (5.2), obtêm-se as equações filtradas correspondentes ao movimento das

grandes escalas. Embora rigorosamente não seja fisicamente consistente, a condição de escoamento bidimensional foi considerada neste trabalho para o escoamento filtrado, a fim reduzir o custo computacional. As equações filtradas considerando esta simplificação podem ser escritas como a seguir:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - (L_{11} + C_{11} + \pi_{11}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - (L_{12} + C_{12} + \pi_{12}) \right] \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - (L_{21} + C_{21} + \pi_{21}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - (L_{22} + C_{22} + \pi_{22}) \right] \quad (5.6)$$

De acordo com o capítulo 4, os tensores dados por \bar{L} e \bar{C} podem ser negligenciados, a menos que os esquemas de interpolação utilizados na discretização sejam de ordem suficientemente elevada, o que não acontece aqui. Aplicando a hipótese de Boussinesq e o modelo de Smagorinsky para a viscosidade turbulenta sobre as equações (5.4), (5.5) e (5.6), obtém-se

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] \quad (5.9)$$

A viscosidade turbulenta ν_t é expressa através da proposta de Smagorinsky:

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}; \quad i, j = 1, 2 \quad (5.10)$$

onde C_s é a constante de Lilly, e S_{ij} representa o tensor taxa de deformação, dado por

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = 1, 2 \quad (5.11)$$

Para a solução das equações (5.7) a (5.9) são necessárias condições de contorno em cada uma das fronteiras do domínio de solução (figura 5.2).

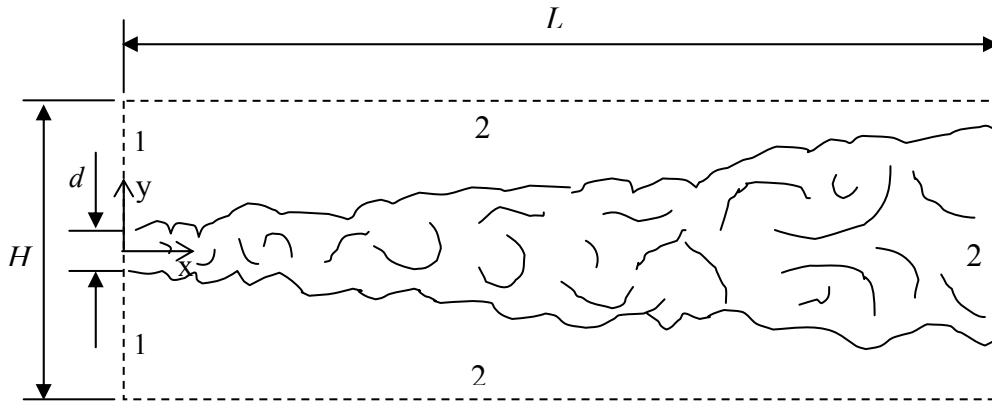


Figura 5.2: Domínio da solução numérica.

Para a fronteira 1, foram prescritas as componentes do vetor velocidade, de acordo com os perfis expressos pelas equações (5.12) a (5.15), a seguir. Para a fronteira 2, uma condição de contorno de pressão igual à pressão do ambiente não perturbado, p_o , foi empregada. Tais condições podem ser expressas como a seguir:

Fronteira 1 ($x = 0$; $0 \leq y \leq H/2$):

$$u = \frac{Re\mu_o}{2\rho_o d} \left\{ 1 + 2r + \tanh \left[\frac{d}{2\theta} \left(\frac{1}{2A} - \frac{y}{d} \right) \right] \right\} \quad (5.12)$$

$$\bar{v} = 0 \quad (5.13)$$

Fronteira 1 ($x = 0$; $-H/2 \leq y \leq 0$):

$$u = \frac{Re\mu_o}{2\rho_o d} \left\{ 1 + 2r + \tanh \left[\frac{d}{2\theta} \left(\frac{1}{2A} + \frac{y}{d} \right) \right] \right\} \quad (5.14)$$

$$\bar{v} = 0 \quad (5.15)$$

Fronteira 2:

$$\bar{p} = \bar{p}_o \quad (5.16)$$

onde o número de Reynolds, Re , é definido como, $Re = \rho d(U_F - U_S) / \mu$ e $r = U_S / (U_F - U_S)$.

As variáveis denotadas por d , θ , U_F e U_S são, respectivamente: a folga de saída do jato (conforme representado na Figura 5.2), a espessura de quantidade de movimento inicial, a velocidade do escoamento principal do jato e a velocidade do escoamento secundário. As

propriedades físicas do meio não perturbado pelo jato são dadas por μ_0 (viscosidade) e ρ_0 (massa específica).

Existe uma pequena diferença na forma para o perfil de velocidade prescrito na folga de saída do jato entre os casos cujos resultados são descritos nas seções 6.2.2 e 6.2.3 e o caso utilizado para a validação mediante comparação com os resultados de Le Ribault et al. (1999), conforme descrito na seção 6.2.1. A diferença no formato para o perfil de velocidade prescrito na folga é estabelecida através de uma constante, denotada por A , nas equações (5.12) e (5.14). Para o caso de jato plano correspondente aos resultados da seção 6.2.1, atribui-se o valor $A = 1$ na equação que representa a forma do perfil de entrada. Já para os outros casos, descritos nas seções 6.2.2 e 6.2.3, atribui-se o valor $A = 2$.

A relação entre a velocidade do escoamento principal, U_F , e a velocidade do escoamento secundário, U_S , também é diferente para o caso de validação, cujos resultados estão apresentados na seção 6.2.1. A relação entre U_F e U_S é representada pela constante, r , conforme expresso nas equações (5.12) e (5.14). O caso de jato plano referente à seção 6.2.1 apresenta $r = 0,1$ enquanto que, para os demais casos, $r = 0$.

Como condição inicial, utiliza-se o campo de velocidades e o campo de pressão obtidos a partir da resolução numérica das equações de Navier-Stokes, juntamente com o uso do modelo k - ϵ , de Jones e Launder (1973).

5.2.2. Metodologia Numérica

As equações (5.7) a (5.9) foram resolvidas numericamente através do método dos volumes finitos, empregando-se para este fim o código computacional Fluent v. 6.0 (2002).

Em função do escopo principal da dissertação ser a previsão do campo acústico, somente serão fornecidas aquelas informações essenciais para a compreensão do procedimento de cálculo. Maiores detalhes sobre o método podem ser encontrados em diversas referências, tais como Maliska (1995), Versteeg e Malalasekera (1995) e Ferziger e Peric (1996).

A idéia básica do Método dos Volumes Finitos consiste na divisão do domínio físico associado ao escoamento (denotado por Ω) em sub-regiões (volumes) para, em uma etapa posterior, aplicar a forma integral do princípio de conservação sobre uma propriedade física genérica do fluido, denotada como $\Phi(x,y,t)$, no interior do volume de controle ΔV , cujo centro (centróide) corresponde ao ponto $P = (x_i, y_i)$. Do processo de integração supracitado,

juntamente com a aproximação numérica das integrais de volume e de superfície envolvendo a propriedade genérica $\Phi(x_i, y_i, t)$ em cada volume cujo centro é dado pelo ponto $P = (x_i, y_i)$ ($i = 1, \dots, \eta_{df}$), resulta um sistema de equações algébricas, cujo porte é proporcional ao número η_{df} (no mesmo sentido da definição dada na seção 4.1), que, ao ser resolvido, fornece os campos das propriedades que representam a solução do escoamento em todos os pontos $P = (x_i, y_i)$, ($i = 1, \dots, \eta_{df}$).

Por exemplo, para uma propriedade genérica Φ , a equação de transporte para um sistema de coordenadas cartesianas bidimensional e dada por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \bar{B} \quad (5.17)$$

A equação de conservação da massa e da quantidade de movimento nas duas direções do sistema de coordenadas são obtidas fazendo-se Φ igual a 1, \bar{u} e \bar{v} , respectivamente.

O termo Γ representa um coeficiente de difusão relativo à propriedade transportada em questão. Assim, para Φ igual a 1, \bar{u} e \bar{v} (correspondendo, respectivamente, às equações de conservação da massa, quantidade de movimento para \bar{u} e quantidade de movimento para a componente \bar{v}), obtém-se que $\Gamma^{\Phi=1} = 0$ e $\Gamma^{\Phi=\bar{u}, \bar{v}} = \nu_e$, onde a viscosidade efetiva, ν_e , representa a soma entre a viscosidade molecular ν e a viscosidade de sub-malha, dada por ν_t .

O termo \bar{B} pode acomodar termos que não podem ser expressos nas outras parcelas da equação de transporte. Para a variável Φ , a discretização das equações de conservação pode ser obtida pela integração da equação de conservação em um volume de controle típico, conforme mostrado na figura 5.3.

Por simplicidade, considera-se, também, que os volumes são retângulos de comprimento Δx e altura Δy . Integrando a equação (5.17) no volume indicado na Figura 5.3, obtém-se a seguinte equação discretizada:

$$\left[\frac{(\Phi)_p - (\Phi)_p^o}{\Delta t} \right] + \left[\frac{(\bar{u}\Phi)_e - (\bar{u}\Phi)_w}{\Delta x} + \frac{(\bar{v}\Phi)_n - (\bar{v}\Phi)_s}{\Delta y} \right] = \frac{\left(\nu_e \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e - \left(\nu_e \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w}{\Delta x} + \frac{\left(\nu_e \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n - \left(\nu_e \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s}{\Delta y} + \bar{B} \quad (5.18)$$

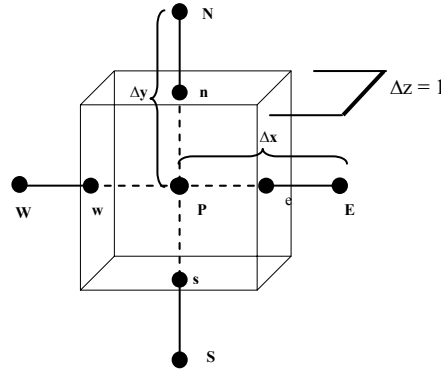


Figura 5.3: Volume de controle usado para a discretização das equações de conservação.

onde \bar{B} indica uma média do termo fonte no volume de controle. Multiplicando a equação (5.18) pelo volume da célula, $\Delta V = (\Delta x \Delta y \cdot 1)$, e discretizando os termos difusivos através de diferenças centrais, tem-se

$$\begin{aligned}
 [M_P/\Delta t] - [M_P^o/\Delta t] + (\bar{v}A)_n \Phi_n - (\bar{v}A)_s \Phi_s + (\bar{u}A)_e \Phi_e - (\bar{u}A)_w \Phi_w = \\
 \left(\frac{v_e A}{\Delta x} \right)_e (\Phi_E - \Phi_P) - \left(\frac{v_e A}{\Delta x} \right)_w (\Phi_P - \Phi_W) \\
 + \left(\frac{v_e A}{\Delta y} \right)_n (\Phi_N - \Phi_P) - \left(\frac{v_e A}{\Delta y} \right)_s (\Phi_P - \Phi_S) + \bar{B} \Delta V
 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Denotando

$$\begin{aligned}
 F_n = (\bar{v}A)_n; \quad D_n = \left(\frac{v_e A}{\Delta y} \right)_n \quad F_s = (\bar{v}A)_s; \quad D_s = \left(\frac{v_e A}{\Delta y} \right)_s \\
 F_e = (\bar{u}A)_e; \quad D_e = \left(\frac{v_e A}{\Delta x} \right)_e \quad F_w = (\bar{u}A)_w; \quad D_w = \left(\frac{v_e A}{\Delta x} \right)_w \\
 \bar{B} = S_P \Phi_P + S_\Phi
 \end{aligned} \quad (5.20)$$

e substituindo estas expressões na equação (5.19), obtém-se

$$\begin{aligned}
 [M_P/\Delta t] - [M_P^o/\Delta t] + F_e \Phi_e - F_w \Phi_w + F_n \Phi_n - F_s \Phi_s = \\
 D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_w (\Phi_P - \Phi_W) + D_n (\Phi_N - \Phi_P) - D_s (\Phi_P - \Phi_S) + (S_P \Phi_P + S_\Phi) \Delta V
 \end{aligned} \quad (5.21)$$

A avaliação do transporte advectivo nas faces de cada volume implica no uso de uma função de interpolação para as propriedades Φ nas faces do volume (w, e, s, n). Neste trabalho, o esquema de interpolação corresponde ao esquema QUICK (“Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics”) de Leonard (1979).

Finalmente, a equação algébrica resultante para a variável genérica Φ a ser resolvida em cada um dos volumes pode ser escrita como:

$$a_p \Phi_p = a_n \Phi_N + a_s \Phi_S + a_e \Phi_E + a_w \Phi_W + b \quad (5.22)$$

ou

$$a_p \Phi_p = \sum a_{nb} \Phi_{NB} + b \quad (5.23)$$

onde,

$$a_p = \sum a_{nb} - S_p \Delta V + \frac{M_p}{\Delta t}; \quad b = \frac{M_p^0 \Phi_p^0}{\Delta t} + S_\Phi \quad (5.24)$$

Nas equação (5.22) a (5.24) o termo $M_p (= \Delta V)$ representa a massa do volume e o superíndice “o” indica o valor da quantidade em questão no instante de tempo anterior.

As variáveis são armazenadas no centro do volume, de acordo um arranjo colocalizado para a malha computacional adotado no código Fluent v. 6.0 (2002), conforme ilustrado na figura 5.4.

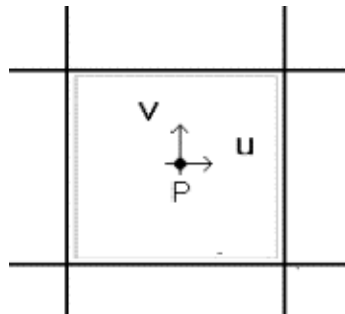


Figura 5.4: Arranjo colocalizado de variáveis

O acoplamento entre os campos de pressão e de velocidade foi realizado com o algoritmo SIMPLEC. Detalhes adicionais sobre o SIMPLEC para o arranjo colocalizado de variáveis podem ser obtidos em Maliska (1995).

A solução do sistema de equações algébricas resultantes da discretização foi realizada usando o método de Gauss-Seidel, juntamente com a estratégia “multigrid” desenvolvida por Hutchinson and Raithby (1986). Como as equações de conservação não são lineares, suas soluções requerem o uso de fatores de relaxação, cujo objetivo consiste em evitar

instabilidades numéricas durante o processo iterativo de solução. A maneira de introduzir o fator de relaxação nas equações pode ser ilustrada a partir da equação abaixo:

$$a_p \Phi_p = \sum a_{nb} \Phi_{nb} + b \quad (5.25)$$

onde Φ_p é a propriedade arbitrária. Uma outra forma de escrever a equação (5.24) é

$$\Phi_p = \frac{\sum a_{nb} \Phi_{nb} + b}{a_p} \quad (5.26)$$

Definindo Φ_p^* como o valor da propriedade Φ_p na iteração anterior e somando e subtraindo o seu valor no lado direito da equação (5.26), tem-se

$$\Phi_p = \Phi_p^* + \left(\frac{\sum a_{nb} \Phi_{nb} + b}{a_p} - \Phi_p^* \right) \quad (5.27)$$

O termo entre parênteses na equação (5.27) representa a variação da propriedade Φ_p na iteração corrente. Tal variação pode ser modificada através da introdução de um fator de relaxação α :

$$\Phi_p = \Phi_p^* + \alpha \left(\frac{\sum a_{nb} \Phi_{nb} + b}{a_p} - \Phi_p^* \right) \quad (5.28)$$

ou,

$$\frac{a_p}{\alpha} \Phi_p = \sum a_{nb} \Phi_{NB} + b + (1 - \alpha) \frac{a_p}{\alpha} \Phi_p^* \quad (5.29)$$

Observa-se na equação (5.28) que valores de α entre 0 e 1 correspondem à sub-relaxação do procedimento iterativo e valores acima de 1 fornecem um efeito de sobre-relaxação. Dado um problema de simulação numérica de escoamentos via volumes finitos, ainda não existe um método analítico através do qual seja possível a determinação dos valores adequados para os fatores de relaxação. Desse modo, a escolha de tais valores não consiste em uma tarefa simples e depende fortemente de um processo de experimentação numérica, semelhante a uma estratégia de tentativa e erro. Neste trabalho, o fator de relaxação adotado nas simulações corresponde à $\alpha = 0,85$, tanto para as equações da quantidade de movimento quanto para equação da correção da pressão.

Para a solução dos sistemas de equações, foi adotado um critério de convergência com o objetivo de finalizar o processo iterativo de cálculo. O critério é baseado na soma dos resíduos, obtidos do balanço das equações das propriedades, ao longo de todos os volumes de controle, η_{df} .

Considerando a equação (5.23), a soma dos resíduos para uma propriedade genérica Φ nos “ η_{df} ” volumes da malha computacional é dada por:

$$r^\Phi = \sum_{i=1}^{\eta_{df}} \left| \sum a_{nb} \Phi_{NB} + b - a_p \Phi_p \right| \quad (5.30)$$

onde o símbolo $| \quad |$ corresponde ao módulo do resíduo em todos os volumes da malha. O resíduo, r^Φ , é normalizado da seguinte forma:

$$R^\Phi = \frac{\sum_{i=1}^{\eta_{df}} \left| \sum a_{nb} \Phi_{NB} + b - a_p \Phi_p \right|}{\sum_{i=1}^{\eta_{df}} \left| a_p \Phi_p \right|} \quad (5.31)$$

O cálculo do resíduo da equação da conservação da massa, se dá por intermédio da equação (5.32), conforme segue:

$$r^m = \sum_{i=1}^{\eta_{df}} \left| \sum (V_{el} A)_k \right| \quad (5.32)$$

onde ρ , V_{el} e A representam a massa específica, a velocidade (que pode ser \bar{u} ou \bar{v}) e a área, na face do volume, respectivamente. O sub-índice, k , representa as faces do volume de controle ($k = w, e, s, n$).

O critério de convergência adotado no procedimento iterativo para soma dos resíduos de todos os volumes, em cada variável, conforme as equações (5.31) e (5.32), foi dado por $R^\Phi = 10^{-3}$, no caso correspondente a $Re = 400$, e $R^\Phi = 10^{-4}$, para os números de Reynolds dados por $Re = 3.000$, $Re = 7.200$. A malha utilizada nas simulações de jato plano contém 16.384 células retangulares (128 divisões ao longo da coordenada x ; 128 divisões ao longo da coordenada y), cujos comprimentos, Δx , e alturas, Δy , variam de acordo com a posição relativa entre a célula e a folga de saída do jato, conforme será apresentado em detalhe no capítulo 6.

O algoritmo para a obtenção da solução numérica das equações algébricas para a propriedade genérica Φ em todos os pontos $P = (x_i, y_i)$ ($i = 1, \dots, n_{df}$), onde n_{df} é número de graus de liberdade pode ser sintetizado, conforme a seguir:

1. Geração da malha para a simulação numérica do jato plano turbulento;
2. Atribuição dos respectivos valores para as propriedades físicas, fatores de relaxação e critérios de convergência;
3. Prescrição da condição inicial;
4. Prescrição das condições de contorno;
5. Cálculo da viscosidade efetiva $\nu_e = \nu + \nu_t$;
6. Avaliação dos coeficientes, dos termos fontes e resolução das equações algébricas para as componentes de velocidade \bar{u} , \bar{v} e para a pressão estática, \bar{p} , mediante a aplicação do método de Gauss-Seidel, juntamente com a estratégia “multigrid”, desenvolvida por Hutchinson e Raithby (1986);
7. Correção dos campos de velocidade e de pressão com o algoritmo SIMPLEC;
8. Verificação dos resíduos $R^\Phi = \bar{u}, \bar{v}$ e r^m . Caso os critérios de convergência não tenham sido alcançados, o procedimento é retornado ao passo 4 e os passos seguintes são então repetidos até a convergência. Caso contrário, o campo do escoamento é considerado convergido para um dado $t_n = n\Delta t$, onde n corresponde ao número inteiro correspondente ao passe de tempo atual.
9. Um incremento de tempo é somado até que a condição de tempo máximo estabelecido para a simulação seja verificada ($n = NPT$). Caso não tenha sido alcançada, o processo é repetido a partir do passo 4.

5.3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO CAMPO ACÚSTICO

5.3.1. Modelo Matemático

Conforme visto no capítulo 3, a analogia de Lighthill é representada pela seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \quad (5.33)$$

onde $\bar{\bar{T}}$ corresponde ao termo de não homogeneidade, dado por

$$\bar{\bar{T}} = \rho \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}} + (p - c_0^2 \rho) \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{P}} \quad (5.34)$$

e

$$\bar{\bar{P}} = -\frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{u}}) \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{D}} \quad (5.35)$$

De acordo com o capítulo 3, para jatos subsônicos isotérmicos apenas o tensor fluxo de quantidade de movimento ($\rho \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}$) é significativo e, além disso, a flutuação da massa específica pode ser desprezada para esse tensor, o que acarreta um erro na avaliação do mesmo da ordem do quadrado do número de Mach. Diante do considerado acima, a equação de Lighthill reduz-se a seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}) \quad (5.36)$$

A flutuação de massa específica pode ser obtida a partir da equação (5.36) através da inversão do operador onda mediante utilização da técnica de Green, cujo resultado é expresso pela equação (3.64).

Vale lembrar que o tensor expresso por $\bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}$, na equação (5.36), é diferente do tensor filtrado, $\overline{\bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}}$. Desse modo, é conveniente definir um tensor $\overline{\bar{\bar{M}}}$, tal que, $\overline{\bar{\bar{M}}} = \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}} - \overline{\bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}}$. Ainda não existe uma técnica que permita a recuperação da informação associada ao tensor $\overline{\bar{\bar{M}}}$, mas é possível afirmar que o mesmo se torna menos significativo na proporção em que se melhora a qualidade da simulação numérica, por meio do aumento do refino associado às discretizações espacial e temporal. Levando em conta os níveis de refino espacial e temporal adotados nas simulações numéricas de jatos planos realizadas no presente trabalho, considera-se como uma

boa hipótese assumir que a razão entre normas, dada por $\text{tr}(\overline{\overline{M}}^2) / \text{tr}[(\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}})^2]$ é bem inferior a unidade.

Dentre desse contexto, é válido afirmar que o tensor $\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}}$ é praticamente igual ao tensor $\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}}$. Adicionalmente, de acordo com o modelo SGE, descrito em detalhe no capítulo 4, o tensor de Leonard, $\overline{\overline{L}}$, e o tensor cruzado, $\overline{\overline{C}}$, podem ser negligenciados quando comparados com o tensor de sub-malha, $\overline{\overline{\pi}}$. Assim, o tensor $\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}}$ pode ser expandido como:

$$\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}} \cong \overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}} \cong \overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}} + \overline{\overline{\pi}} \quad (5.37)$$

onde $\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}}$, corresponde ao tensor fluxo de quantidade de movimento baseado no campo de velocidade filtrado e $\overline{\overline{\pi}} = \overline{\overline{u}}'\overline{\overline{u}}'$, representa o tensor de sub-malha.

Aplicando a relação de Boussinesq sobre o tensor de sub-malha na equação (5.37), obtém-se que

$$\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}} \cong \overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}} - 2\nu_t \overline{\overline{S}} \quad (5.38)$$

onde

$$\overline{\overline{S}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{\nabla}}\overline{\overline{u}} + \overline{\overline{\nabla}}^t\overline{\overline{u}}) \quad (5.39)$$

Do modelo de Smagorinsky, tem-se que

$$\nu_t = (C_s l) \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (5.40)$$

Aplicando duas vezes o operador $\overline{\overline{\nabla}} \cdot$ sobre a equação (5.38) e negligenciando os termos de ordem superior, obtém-se, finalmente, que

$$\overline{\overline{\nabla}} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \cdot (\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}}) \cong \overline{\overline{\nabla}} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \cdot (\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}}) - \overline{\overline{\nabla}}\nu_t \cdot \nabla^2 \overline{\overline{u}} \quad (5.41)$$

Assim, a equação (5.36) é reescrita como

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2 \rho = \rho_o (\overline{\overline{\nabla}} \cdot \overline{\overline{\nabla}} \cdot (\overline{\overline{u}}\overline{\overline{u}}) - \overline{\overline{\nabla}}\nu_t \cdot \nabla^2 \overline{\overline{u}}) \quad (5.42)$$

ou, em notação indicial,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_j} = \rho_o \left[\frac{\partial^2 (\overline{u}_i \overline{u}_j)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \nu_t}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right] \quad (5.43)$$

A solução para a equação (5.43) pode ser expressa da seguinte forma

$$\rho'(\bar{x}, t) = \frac{p(\bar{x}, t)}{c_o^2} = \rho_o \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi c_o^2 |\bar{x} - \bar{y}|} \left[\frac{\partial^2 (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial v_t}{\partial y_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial y_j \partial y_j} \right] (y, t^*) d\Omega \quad (5.44)$$

ou, alternativamente, combina-se (3.64) com (5.38), obtendo

$$\rho'(\bar{x}, t) = \frac{p(\bar{x}, t)}{c_o^2} = \rho_o \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi c_o^2 |\bar{x} - \bar{y}|} (\bar{u}_i \bar{u}_j - 2v_t S_{ij}) (\bar{y}, t^*) d\Omega \right\} \quad (5.45)$$

onde

$$t^* = t - \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{c_o} \quad (5.46)$$

Nas equações que seguem, o tensor de fluxo de quantidade de movimento será expresso, por simplicidade, na forma da equação (5.36). Considerando que, no campo afastado, são válidas as seguintes relações

$$|\bar{x} - \bar{y}| \cong |\bar{x}| = x \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial^2 (u_i u_j)(y, t^*)}{\partial x_i \partial x_j} \cong \frac{1}{c_o^2} \frac{x_i x_j}{x^2} \frac{\partial^2 (u_i u_j)(y, t^*)}{\partial t^2} \quad (5.48)$$

e aplicando (5.47) e (5.48) em (5.45), é fácil mostrar que:

$$\frac{p(\bar{x}, t)}{c_o^2} = \rho_o \left\{ \frac{1}{4\pi c_o^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega} (\bar{u}_i \bar{u}_j - 2v_t S_{ij}) (\bar{y}, t^*) d\Omega \right\} \quad (5.49)$$

Deste modo, as equações (5.42), (5.43), (5.44) e (5.45) constituem o conjunto de equações básicas sobre as quais podem ser aplicadas metodologias numéricas para a obtenção do campo acústico. A equação (5.49) também pode ser empregada. Todavia, a validade de (5.49) está restrita a regiões muito distantes do jato, em função da aplicação da hipótese de fonte sonora compacta (campo afastado), expressa pelas equações (5.47) e (5.48).

A metodologia numérica para o cálculo do campo acústico a ser descrita a seguir envolve, basicamente, o procedimento de integração numérica, que pode ser aplicado à forma integral dada pela equação (5.44), ou, com algumas modificações, para a equação (5.45). Por uma questão de simplicidade e de generalidade, escolheu-se a forma integral apresentada pela equação (5.44). Desse modo, sugere-se, para trabalhos futuros, a investigação de implementações numéricas para a forma integral expressa pela equação (5.45).

5.3.2. Metodologia Numérica

A metodologia numérica empregada para a previsão do campo acústico se baseia, em essência, na aplicação de uma técnica de integração sobre a solução analítica da equação de Lighthill, a qual precisa respeitar exigências mínimas relativas à precisão e desempenho computacional.

Define-se a transformada de Fourier sobre uma dada função $f(t)$ conforme abaixo

$$\hat{f}(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (5.50)$$

É conveniente apresentar a equação (5.44) no domínio da frequência, o que é obtido mediante a aplicação de (5.50) sobre (5.44). Assim, obtém-se,

$$\hat{p}(\bar{x}, \omega) = \rho_0 \int_{\Omega} \frac{\exp(-i\omega|\bar{x} - \bar{y}|/c_0)}{4\pi|\bar{x} - \bar{y}|} \hat{\Lambda}(\bar{y}, \omega) d\Omega \quad (5.51)$$

de tal forma que

$$\Lambda(\bar{y}, t) = \frac{\partial^2(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial y_j \partial y_j} \quad (5.52)$$

O aparecimento da exponencial complexa em (5.51) está relacionado à aplicação do teorema do deslocamento para transformadas de Fourier, que pode ser expresso como

$$\mathfrak{F}[f(t - \zeta)] = \exp(-i\omega\zeta) \hat{f}(\omega) \quad (5.53)$$

onde

$$\zeta = \|\bar{x} - \bar{y}\|/c_0 \quad (5.54)$$

A primeira etapa do método consiste no cálculo de Λ , definido na equação (5.52). As derivadas que aparecem no lado direito da equação (5.52) são avaliadas utilizando a técnica de diferenciação a Chebyshev, a ser descrita em detalhe no Apêndice A. A malha computacional que define os pontos de colocação a serem utilizados na técnica de diferenciação a Chebyshev, é gerada segundo os seguintes mapeamentos,

$$y_i^1 = L \left(\frac{1 + \cos \alpha_i}{2} \right); \quad \alpha_i = \frac{\pi i}{N} \quad (5.55)$$

$$y_j^2 = H \cos \beta_j; \quad \beta_j = \frac{\pi j}{N} \quad (5.56)$$

onde y_i^1 e y_j^2 são as variáveis representativas do domínio físico $\Omega = [0, L] \times [-H, H]$; α_i e β_j são as variáveis relativas ao domínio computacional; L e H correspondem ao comprimento e largura característicos do jato plano, e, finalmente, N e M representam o número de segmentos nas direções vertical e horizontal. Esses mapeamentos discretos, aplicados nas coordenadas longitudinal e transversal conforme (5.55) e (5.56), correspondem aos pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto (Canuto et al., 1988)

A segunda etapa corresponde à aplicação da transformada discreta de Fourier sobre a equação (5.52). Desse modo, é conveniente expressar a forma discreta da equação (5.52) em relação à coordenada temporal, conforme abaixo:

$$\Lambda_d(\bar{y}, k\Delta t) = \frac{\partial^2(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial y_j \partial y_j}; \quad k = 1, 2, \dots, NPT \quad (5.57)$$

onde Δt e NPT correspondem, respectivamente, ao tamanho e número de passes de tempo da série temporal, que, a rigor, corresponde ao período da simulação numérica do jato plano sobre o qual é realizado a coleta dos dados oriundos do escoamento.

Define-se a transformada discreta de Fourier sobre a equação (5.57), como

$$\hat{\Lambda}_d(\bar{y}, \omega_1) = \frac{1}{NPT} \sum_{k=1}^{NPT} \Lambda_d(\bar{y}, k\Delta t) \exp[-\omega_1(k-1)\Delta t]; \quad l=1, 2, \dots, NPT \quad (5.58)$$

onde

$$\omega_1 = \frac{2\pi(l-1)}{NPT\Delta t} \quad (5.59)$$

A terceira etapa do processo consiste na escolha do observador, representado por $\bar{x} = (x^1, x^2)$, na equação (5.51).

Na quarta etapa, realiza-se a integração discreta da equação (5.51) sobre a região Ω . A região Ω é definida como

$$\Omega = [0, L] \times [-H, H] \quad (5.60)$$

O ponto (0, 0) representa o centro da folga do jato. Considerando que y^1 e y^2 representam, respectivamente, a primeira e a segunda coordenada do domínio físico

bidimensional Ω , obtém-se que $d\Omega = dy^1 dy^2$. Levando em conta o mapeamento definido pelas equações (5.56) e (5.56), obtém-se que

$$d\Omega = \left(\frac{LH}{2}\right) \text{sen}\alpha \text{sen}\beta d\alpha d\beta \quad (5.61)$$

Combinando as equações (5.51) e (5.61), obtém-se que

$$\hat{p}(\bar{x}, \omega) = \rho_o \frac{LH}{2} \iint_0^\pi \frac{\exp(-i\omega|\bar{x}-\bar{y}|/c_o)}{4\pi|\bar{x}-\bar{y}|} \hat{\Lambda}_d(y^1, y^2, \omega) \text{sen}\alpha \text{sen}\beta d\alpha d\beta \quad (5.62)$$

Combinando as equações (5.52) e (5.57), as equações (5.51) e (5.58), e aplicando o método dos trapézios sobre a expressão integral que aparece na equação (5.62) nos pontos definidos pelas equações (5.55) e (5.56), obtém-se que:

$$\hat{p}(\bar{x}, \omega_1) = \frac{\rho_o \pi^2 LH}{2NM} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{M-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{N-1} Y(y_i^1, y_j^2, \omega_1) \right) + \left(\frac{Y(y_0^1, y_j^2, \omega_1) + Y(y_N^1, y_j^2, \omega_1)}{2} \right) \right] + \\ \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^{N-1} Y(y_i^1, y_0^2, \omega_1) \right) + \left(\frac{Y(y_0^1, y_0^2, \omega_1) + Y(y_N^1, y_0^2, \omega_1)}{2} \right) \right] + \\ \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^{N-1} Y(y_i^1, y_M^2, \omega_1) \right) + \left(\frac{Y(y_0^1, y_M^2, \omega_1) + Y(y_N^1, y_M^2, \omega_1)}{2} \right) \right] \end{array} \right\} \quad (5.63)$$

onde

$$Y(y_i^1, y_j^2, \omega_1) = \frac{\exp\{-i\omega_1[(x^1 - y_i^1)^2 + (x^2 - y_j^2)^2]^{1/2}/c_o\}}{4\pi[(x^1 - y_i^1)^2 + (x^2 - y_j^2)^2]^{1/2}} \hat{\Lambda}_d(y_i^1, y_j^2, \omega_1) \sqrt{1 - \left(\frac{2y_i^1}{L} - 1\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{y_j^2}{L}\right)^2} \quad (5.64)$$

Finalmente, a quinta etapa consiste da determinação do módulo do número complexo $\hat{p}(\bar{x}, \omega_1)$. Considerando que o complexo conjugado de $\hat{p}(\bar{x}, \omega_1)$ é representado por $\check{p}(\bar{x}, \omega_1)$, obtém-se

$$\check{p}(\bar{x}, \omega_1) = [\hat{p}(\bar{x}, \omega_1) \check{p}(\bar{x}, \omega_1)]^{1/2}; \quad 1 = 1, \dots, NPT \quad (5.65)$$

A quantidade $\check{p}(\bar{x}, \omega_1)$, representada na equação (5.65), corresponde ao espectro de pressão sonora em banda estreita. A avaliação de $\check{p}(\bar{x}, \omega_1)$ determina o ponto de partida para a obtenção dos resultados para o campo acústico, os quais serão apresentados no capítulo 6.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1. INTRODUÇÃO

No presente capítulo são apresentados resultados do escoamento de jatos planos subsônicos turbulentos e o ruído sonoro gerado pelos mesmos. A solução do escoamento é obtida através da simulação de grandes escalas, obtendo-se assim o comportamento transiente da turbulência. Para ilustrar a natureza transiente do escoamento, são apresentados campos instantâneos de vorticidade e de viscosidade de sub-malha. Por outro lado, procede-se também um tratamento estatístico do escoamento, de tal forma a se obterem perfis médios de velocidade, de tensões de Reynolds, bem como campos de intensidade turbulenta. A partir dos dados do escoamento, o espectro de frequência da pressão sonora é avaliado para diversos pontos de um observador.

6.2. O JATO PLANO TURBULENTO

O presente trabalho apresenta os resultados para quatro casos de jatos planos. O primeiro deles, cujos resultados serão apresentados na seção 6.2.1, foi escolhido como caso de validação, enquanto que para os demais casos, cujos resultados serão apresentados nas seções 6.2.2 e 6.2.3, é realizada uma discussão teórica e fenomenológica dos resultados.

O jato plano foi resolvido para números de Reynolds iguais a 400, 3000 e 7200. O número de Reynolds, $Re = \rho(U_F - U_S)d/\mu$, é definido com base na diferença entre a velocidade do escoamento principal na folga de saída do jato, U_F , e a velocidade do escoamento secundário, U_S , na largura da folga, d ($= 2,5$ mm), e nas propriedades físicas do ar a uma temperatura de 20 °C ($\rho_o = 1,17$ kg/m³, $\mu_o = 1,85 \times 10^{-5}$ Ns/m², $c_o = 343,2$ m/s). A escolha dos valores de Re foi motivada pela disponibilidade de resultados em outras referências, obtidos numericamente ou de experimentação. Os números de Mach são obtidos através da relação expressa abaixo:

$$M = \frac{Re\mu_o}{\rho_o c_o d} \quad (6.1)$$

Os casos de jato plano investigados no presente trabalho serão classificados de acordo com os parâmetros da função por meio da qual é prescrita a condição de contorno para a velocidade na fronteira 1, conforme ilustra a figura 5.2. A tabela 6.1, apresenta uma classificação dos casos simulados em função dos valores atribuídos aos parâmetros da condição de contorno de velocidade longitudinal na fronteira 1, conforme expresso nas equações (5.12) e (5.14).

CASOS				
	Seção 6.2.1	Seções 6.2.2 e 6.2.3		
Re	3000	400	3000	7200
r	0,1	0	0	0
d/θ	20	20	20	20
A	1	2	2	2

Tabela 6.1: Parâmetros da condição de contorno na fronteira 1.

A tabela 6.2 apresenta o número de Mach, definido na equação (6.1), e os parâmetros dimensionais calculados a partir dos valores adimensionais expressos na tabela 6.1.

CASOS				
	Seção 6.2.1	Seções 6.2.2 e 6.2.3		
Re	3000	400	3000	7200
M	0,055	0,007	0,055	0.132
U_F (m/s)	20,8	2,5	18,9	45,4
U_S (m/s)	1,9	0	0	0
θ (m)	$1,25 \times 10^{-4}$	$1,25 \times 10^{-4}$	$1,25 \times 10^{-4}$	$1,25 \times 10^{-4}$

Tabela 6.2: Números de Reynolds, números de Mach e parâmetros dimensionais.

Considerando a natureza do modelo de turbulência empregado na obtenção do escoamento, a determinação dos espaçamentos h_x e h_y nas direções x e y, respectivamente, da malha computacional é realizada com base nas relações de Kolmogorov, referentes às

estruturas turbulentas de pequena escala. De acordo com as ideias de Kolmogorov, as escalas de comprimento e tempo podem ser obtidas de acordo com as idéias expostas a seguir:

Inicialmente, toma-se uma estrutura de movimento turbulento com tamanho característico r e velocidade característica u_r em um fluido de viscosidade ν . Define-se, então, um número de Reynolds local, dado por:

$$Re_r^* = u_r r / \nu \quad (6.2)$$

Admite-se que a escala de comprimento r esteja em uma região do espectro onde a seguinte relação seja válida

$$u_r = (\epsilon r)^{1/3} \quad (6.3)$$

Substituindo (6.3) em (6.2), obtém-se

$$Re_r^* = (\epsilon r^4)^{1/3} / \nu \quad (6.4)$$

Quando os valores de r são tais que o número de Reynolds local, dado por Re_r^* , é menor do que a unidade, pode ser afirmar que os efeitos viscosos são mais importantes que os efeitos de inércia. Atribuindo o valor unitário a Re_r^* na equação (6.4) e determinando o valor de r correspondente, obtém-se a escala de comprimento dissipativa de Kolmogorov, denotada por l_d

$$l_d = (\nu^3 / \epsilon)^{1/4} \quad (6.5)$$

Considerando que a escala de velocidade para as pequenas estruturas turbulentas pode ser obtida substituindo (6.5) em (6.3), obtém-se

$$u_d = (\nu \epsilon)^{1/4} \quad (6.6)$$

Avaliando a escala de tempo $\tau_d = l_d / u_d$ através das equações (6.5) e (6.6), obtém-se

$$\tau_d = (\nu / \epsilon)^{1/2} \quad (6.7)$$

Para estruturas turbulentas com escala de comprimento inferior a l_d , é válida a hipótese de equilíbrio local, dada por

$$\phi = \epsilon \quad (6.8)$$

onde \wp representa a taxa de suprimento de energia para as estruturas turbulentas de pequena escala. Em sendo uma grandeza definida pelo comportamento das *grandes escalas*, a produção de energia \wp pode ser relacionada com escalas características das grandes estruturas turbulentas, da seguinte forma

$$\wp = \frac{(u^*)^3}{l^*} \quad (6.9)$$

onde u^* e l^* representam escalas de velocidade e comprimento para os movimentos turbulentos de grande escala.

Combinando (6.5), (6.6), (6.8) e (6.9), obtém-se que a relação entre os comprimentos das pequenas e das grandes escalas é:

$$\frac{l_d}{l^*} = \left(\frac{u^* l^*}{\nu} \right)^{-3/4} = (Re^*)^{-3/4} \quad (6.10)$$

Por outro lado, a relação entre as escalas de tempo é dada por:

$$\frac{\tau_d}{\tau^*} = (Re^*)^{-1/2} \quad (6.11)$$

Na prática, a escala de velocidade dada por u^* é identificada como a média quadrática local da flutuação do campo de velocidades, o que pode ser expresso através da seguinte equação

$$u^* = \sqrt{|\bar{u}'|^2} = \sqrt{(\bar{u} - \tilde{u}) \cdot (\bar{u} - \tilde{u})} \quad (6.12)$$

Na equação acima, \tilde{u} representa a média temporal do campo de velocidades \bar{u} . No caso de jatos turbulentos, aproximações satisfatórias para as escalas de velocidade u^* e de comprimento l^* são:

$$u^* = IU \quad (6.13)$$

e

$$l^* = d \quad (6.14)$$

onde I e U correspondem, respectivamente, à intensidade turbulenta e à velocidade na saída do jato.

Tipicamente, a intensidade turbulenta na saída de um jato oscila entre 2% e 4% de sua velocidade na saída, U .

Deste modo, pode-se escrever

$$l_d = d \left(\frac{I_p U d}{\mu} \right)^{-3/4} = d (I Re^*)^{-3/4} \quad (6.15)$$

$$\tau_d = \frac{d}{U} (I Re^*)^{-1/2} \quad (6.16)$$

Identificando a escala de comprimento l_d e a escala de tempo τ_d com o espaçamento de malha, h , e com o passe de tempo, Δt , obtém-se os parâmetros necessários para a geração da malha e para o avanço temporal da simulação.

O domínio físico empregado para a solução do escoamento corresponde a um retângulo de 3,75 cm de comprimento e 4 cm de largura. Matematicamente, pode se escrever que o domínio Ω é dado por

$$\Omega = [0;15d] \times [-8d;8d] \quad (6.17)$$

onde $d = 0,0025m$.

A malha empregada na discretização do domínio computacional para a realização das simulações de grandes escalas para os casos de jato plano tratados no presente trabalho é ilustrada na figura (6.1). O espaçamento da malha segue o mapeamento indicado abaixo:

Na coordenada longitudinal:

$$\begin{aligned} h_x &= 0,1d ; & x &\in [0;d] \\ h_x &= 0,1d \text{ a } 0,25d ; & x &\in [d;2d] \\ h_x &= 0,25d ; & x &\in [2d;12d] \\ h_x &= 0,25d \text{ a } 0,3d ; & x &\in [12d; \end{aligned} \quad (6.18)$$

Na coordenada transversal:

$$\begin{aligned} h_y &= 0,066d ; & y &\in [-d;d] \\ h_y &= 0,066d \text{ a } 0,5d ; & y &\in [0;d] \\ h_y &= 0,066d \text{ a } 0,5d ; & y &\in [-8d; \end{aligned} \quad (6.19)$$

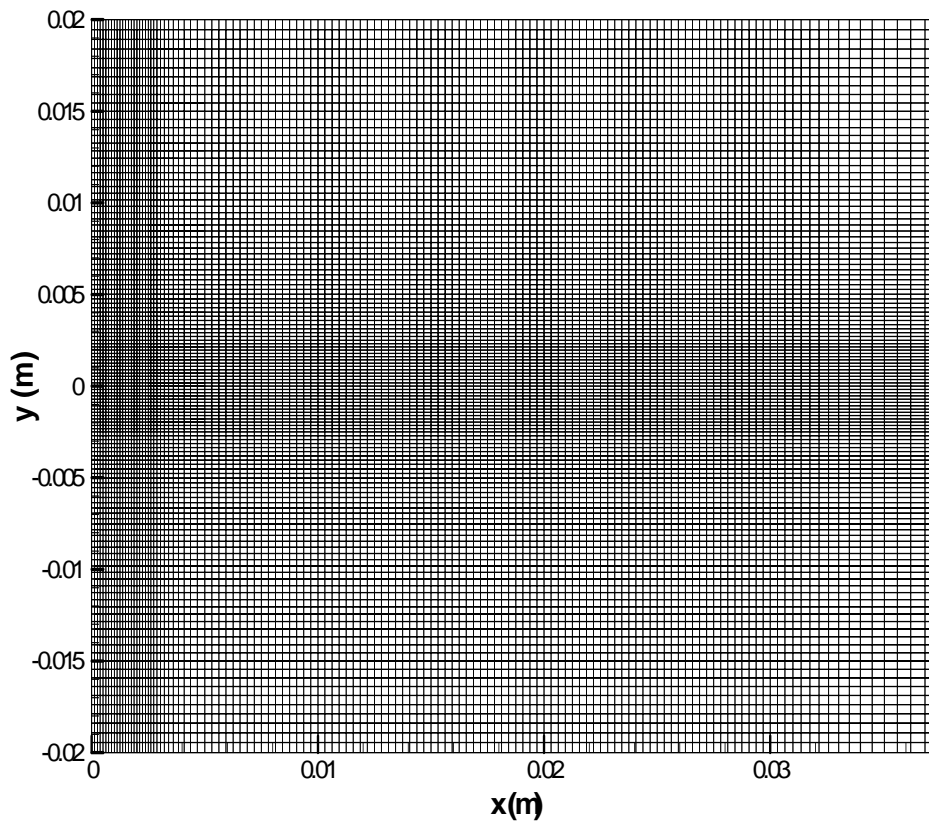


Figura 6.1: Malha computacional para a Simulação de Grandes Escalas.

6.2.1. Validação dos Resultados

Nesta seção, os resultados da SGE, cujos parâmetros correspondem à segunda coluna das tabelas 6.1 e 6.2, são comparados com os resultados obtidos por Le Ribault et al. (1999) e outras referências.

Antes de realizar a análise comparativa, alguns aspectos relativos à comparação dos resultados devem ser mencionados. Inicialmente, vale lembrar que o código computacional Fluent v. 6.0, (2002), utilizado para a simulação dos jatos planos no presente trabalho apresenta limitações quanto à prescrição da condição de contorno para as fronteiras livres do domínio computacional (fronteira 2, conforme indicado pela figura 5.2). Dentre as opções existentes, a mais adaptada ao problema em questão corresponde à condição de pressão prescrita, conforme expresso pelas equações (5.13) e (5.15). Por outro lado, Le Ribault et al. (1999) adotam condições de contorno não reflexivas, propostas por Thompson (1987), juntamente com as zonas de amortecimento, propostas por Hu (1996).

Le Ribault et al. (1999) adota $C_s = 0,13$ para as simulações que envolvem o modelo de Smagorinsky, valor que também é empregado na simulação cujos resultados são apresentados

na presente seção (6.2.1). Na condição de contorno aplicada à fronteira 1 (figura 5.2), conforme expresso pelas equações (5.12) e (5.14), o valor para a constante A é igual a 1, o que significa que a velocidade $\bar{u}(x = 0, y = \pm 0,5d) = 0,5(U_F + U_S)$, ou seja, o valor para a componente longitudinal de velocidade correspondente à média entre o escoamento principal, U_F , e o escoamento secundário, U_S , é assumido nas extremidades da folga, ou seja, em $x = 0$ e $y = \pm 0,5d$.

A comparação dos perfis médios de velocidade longitudinal obtidos por Le Ribault et al. (1999) com os obtidos neste trabalho são apresentados na figura (6.2), para as seções transversais $x/d = 8, 10$ e 11 . Para efeito de comparação, os perfis de velocidade média longitudinal são expressos na forma adimensional $u^{me} = (\bar{u} - U_S) / \Delta U_C$, onde $\Delta U_C = U_C - U_S$ é a diferença entre a velocidade média na linha central na posição considerada, U_C , e a velocidade do escoamento secundário, U_S , prescrita para o jato secundário. A coordenada transversal y é adimensionalizada em relação à largura de meia velocidade, $\delta_{0,5}$, resultando na coordenada transversal adimensional $\eta = y / \delta_{0,5}$. Dados experimentais de Bradbury (1965), Gutmark e Wygnanski (1976) e Ramaprian e Chandrasekhara (1985) estão também disponíveis para esta configuração de jato, mas não são incluídas uma vez que são bem representados pelos resultados de Le Ribault et al. (1999).

Pode ser observada uma concordância satisfatória entre os resultados deste trabalho e aqueles obtidos por Le Ribault et al. (1999) em todas as posições x/d apresentadas. As maiores diferenças aparecem no item (a), indicando que, do ponto de vista da simulação realizada no presente trabalho, o jato ainda não desenvolveu completamente as suas camadas cisalhantes na posição $x/d = 8$, o que é corroborado pelos resultados para a evolução da velocidade média longitudinal a ser comentado a seguir.

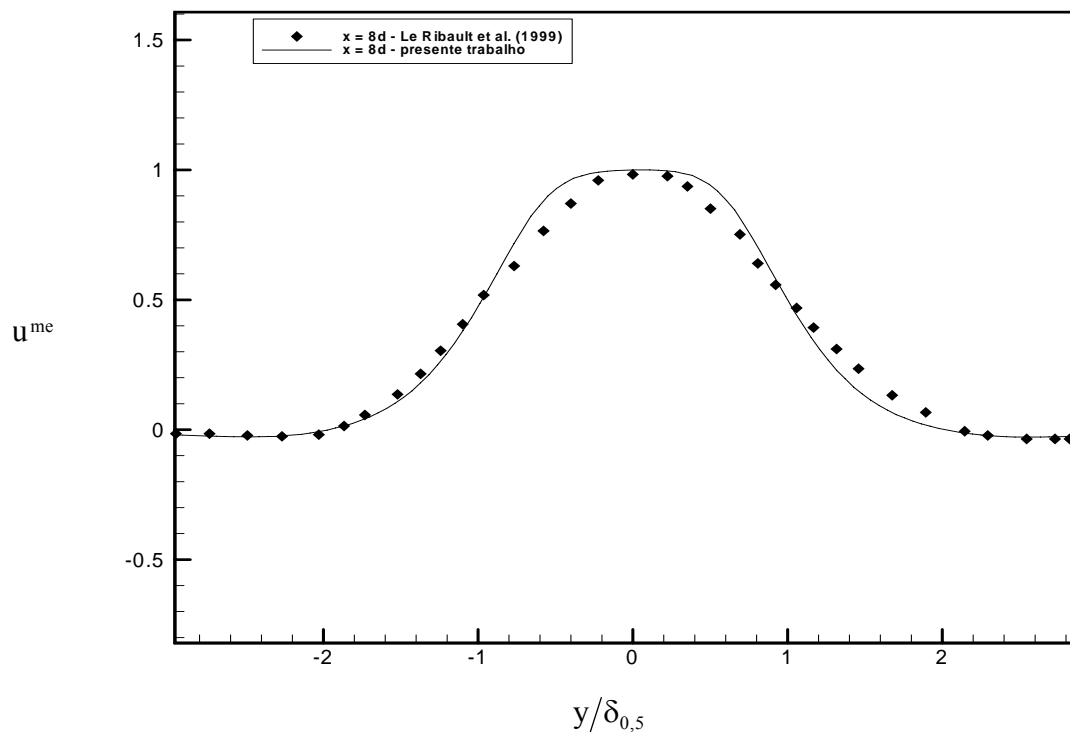
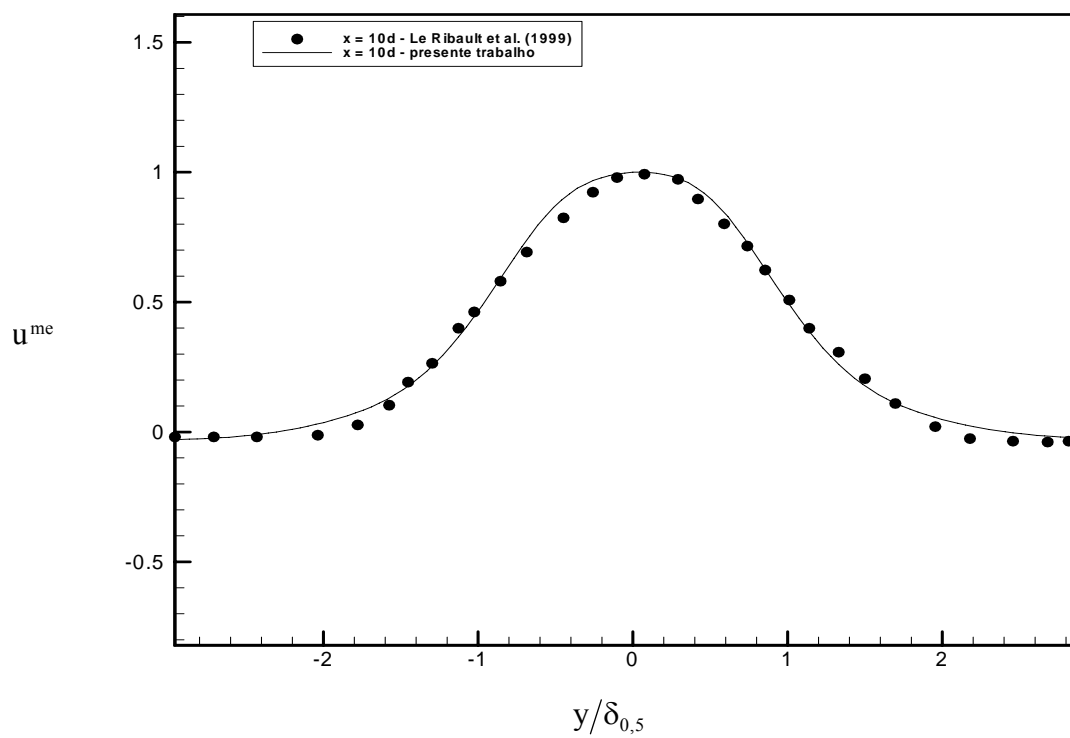
(a) $x/d = 8$ (b) $x/d = 10$

Figura 6.2: Comparação entre resultados de perfis de velocidade média.

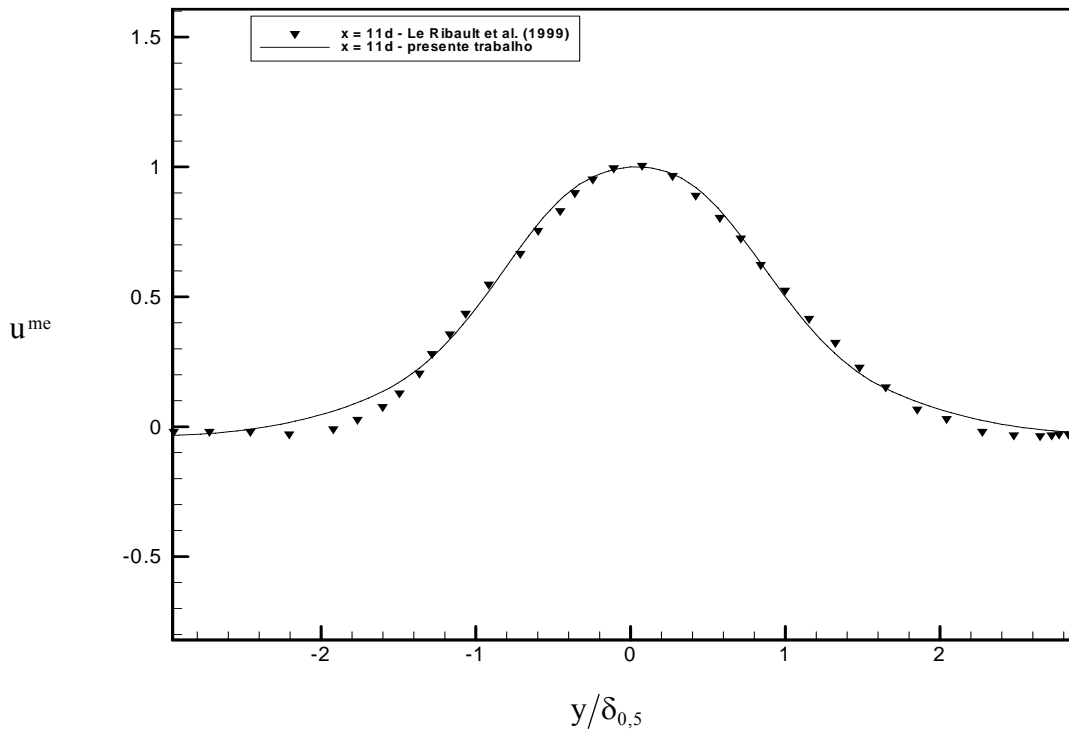
(c) $x/d = 11$

Figura 6.2: (continuação)

A evolução do valor médio da componente longitudinal de velocidade ao longo da linha de simetria é mostrada na figura (6.3), juntamente com os resultados de Le Ribault et al. (1999) e os dados experimentais de Browne et al. (1983) e Thomas e Chu (1989). Com o objetivo de evidenciar a relação de decaimento dada pela teoria de jatos planos (Tennekes e Lumley, 1972), representada por $\bar{u} \propto (x - x_0)^{-1/2}$, o resultado é expresso através da seguinte variável $u_{\text{inv}0}^{\text{me}} = (\Delta U_F / \Delta U_C)^2$, onde $\Delta U_F = U_F - U_S$ corresponde à diferença entre a velocidade média do escoamento principal e a velocidade do escoamento secundário na folga de saída do jato. A coordenada longitudinal x é adimensionalizada em relação à largura da folga, d , sendo expressa por $\xi = x/d$. Esta região é caracterizada pela predominância do transporte por advecção na porção central do jato. De fato, a magnitude da velocidade \bar{u} ao longo da linha de simetria ($y=0$) se mantém praticamente inalterada até a posição onde as camadas cisalhantes se encontram, o que de acordo com os resultados de Le Ribault et al. (1999), de Browne et al. (1983) e de Thomas e Chu (1989), ocorre para $x/d = 5$. A velocidade longitudinal na linha central praticamente não se altera entre as posições $x/d = 0$ e $x/d = 5$ para todos os resultados apresentados na figura 6.3, inclusive para o resultado correspondente à simulação realizada neste trabalho.

No entanto, percebe-se que os resultados apresentados por Le Ribault et al. (1999), Browne et al. (1983) e Thomas e Chu (1989) já esboçam uma tendência de decaimento da velocidade longitudinal na linha central em posições x/d inferiores a 5, o que não ocorre no resultado correspondente ao presente trabalho.

A partir de $x/d = 5$, todos os resultados, exceto aquele que corresponde à simulação realizada neste trabalho, apresentam um decaimento com o inverso da raiz quadrada da posição longitudinal, o qual toma a forma de um crescimento linear no gráfico devido ao uso da forma adimensional para a função que representa a velocidade longitudinal na linha central ($y = 0$). No entanto, percebe-se que o valor da inclinação que aparece a partir de $x/d = 5$ é diferente entre os resultados de Le Ribault et al. (1999), Browne et al. (1983) e Thomas e Chu (1989).

No resultado gerado por este trabalho, o que se observa é um decaimento praticamente nulo para a magnitude da velocidade na linha central até $x/d = 10$. É interessante notar que o resultado numérico baseado no modelo de Smagorinsky obtido por Le Ribault et al. (1999) também apresenta queda menos intensa nos níveis de velocidade média na linha central em comparação aos resultados experimentais. Segundo a opinião dos autores do artigo de Le Ribault et al. (1999), tal efeito provavelmente ocorre em virtude do caráter excessivamente dissipativo do modelo de Smagorinsky, o que também se aplicaria ao resultado do presente trabalho.

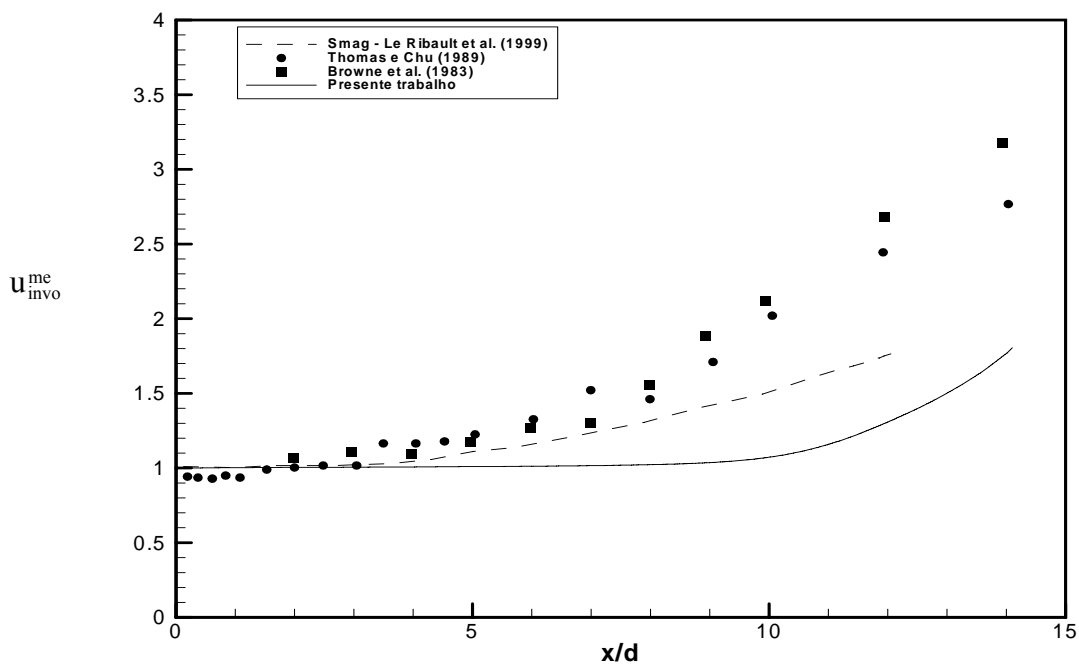


Figura 6.3: Evolução da velocidade média longitudinal na linha central.

Outro aspecto que deve ser mencionado tem relação com efeitos promovidos pelo esquema temporal empregado na simulação realizada no presente trabalho. O esquema empregado é implícito e de segunda ordem, bem inferior ao esquema utilizado em Le Ribault et al. (1999), que é explícito e apresenta precisão de 4ª ordem. A baixa ordem do esquema temporal utilizado no presente trabalho, juntamente com o seu caráter implícito, pode estar contribuindo no sentido de promover uma dissipação numérica artificial, tornando o esquema aqui empregado ainda mais dissipativo que o modelo de Smagorinsky utilizado por Le Ribault et al. (1999).

Embora o resultado correspondente ao presente trabalho não demonstrar diminuição significativa da velocidade média longitudinal até $x/d = 10$, observa-se que, a partir dessa posição, percebe-se um decaimento nos níveis de velocidade média com uma tendência proporcional ao inverso da raiz quadrada e, além disso, com uma inclinação bastante similar a observada nas linhas obtidas por Browne et al. (1983) e Thomas e Chu (1989).

A figura (6.4) apresenta resultados de perfis de intensidade turbulenta longitudinal, $u^{\text{rms}} = \sqrt{u'^2} / \Delta U_c$, obtidos em Le Ribault et al. (1999), Stanley et al. (2002) e Gutmark e Wygnanski (1976), comparados com as previsões numéricas do presente trabalho. A seção $x/d = 11$ é escolhida para a comparação por representar o início da região de similaridade.

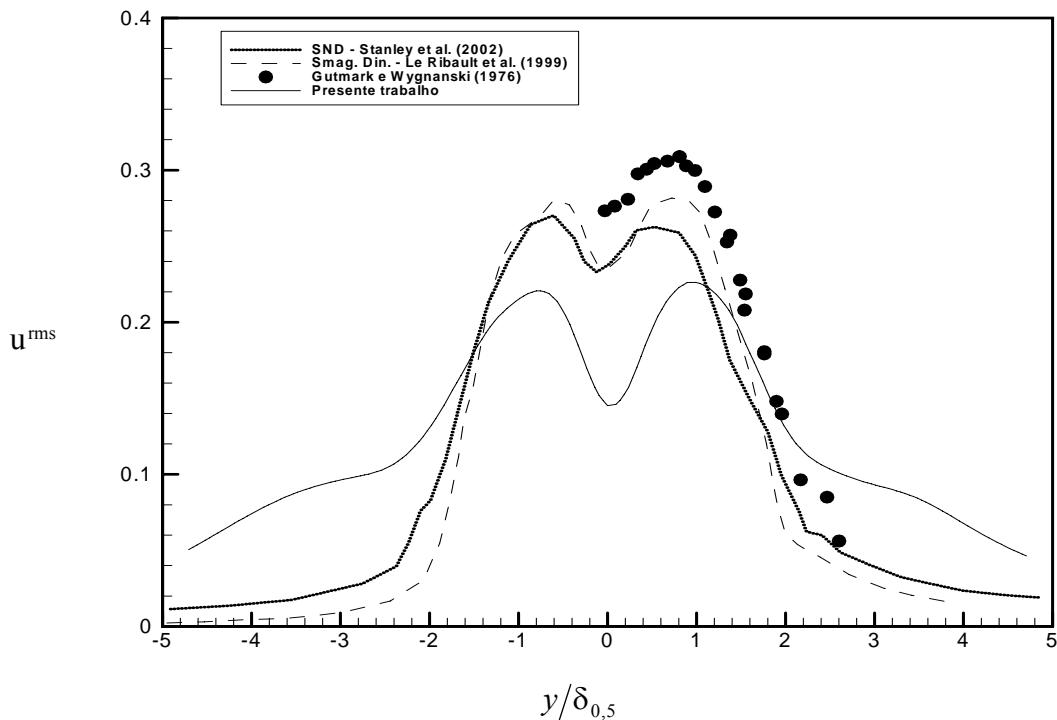


Figura 6.4: Perfis de intensidade turbulenta longitudinal em $x/d = 11$.

Deve ser mencionado que os resultados de Le Ribault et al. (1999) foram obtidos com um modelo dinâmico de sub-malha, enquanto que no caso de Stanley et al. (2002) as revisões foram fornecidas pela simulação numérica direta. Gutmark e Wygnanski (1976) fornecem dados experimentais.

De acordo com o presente trabalho, a intensidade turbulenta na região central do jato (entre $-2 \leq \eta \leq 2$) apresenta níveis menores quando comparada com os resultados obtidos por Le Ribault et al. (1999), Stanley et al. (2002) e Gutmark e Wygnanski (1976), o que é devido principalmente ao fato de que a simulação realizada neste trabalho prevê uma região mais longa para o cone potencial, significando maiores níveis para a velocidade média longitudinal na região central do jato o que contribui para diminuir a intensidade turbulenta. Esse fato é corroborado pelo resultado ilustrado na figura 6.3. É interessante notar que, a partir dos resultados referentes ao presente trabalho ilustrados nas figuras 6.3 e 6.4, pode-se concluir que, na região central do jato (entre $-2 \leq \eta \leq 2$), os níveis de tensão turbulenta longitudinal $\overline{u^2}$ prevista pela simulação conduzida no presente trabalho são muito parecidos com a previsão para $\overline{u^2}$ fornecida pelos demais autores.

É interessante notar, porém, que, nas regiões laterais ($\eta < -2$ e $\eta > 2$), os níveis de $\overline{u^2}$ previsto no presente trabalho são bem mais elevados quando comparados com as previsões fornecidas pelos demais trabalhos, o que acarreta forte superestimação da intensidade turbulenta nessas regiões. Pode-se afirmar que esse aspecto é fruto do elevado caráter dissipativo apresentado pelo modelo de sub-malha de Smagorinsky, e que se agrava com o emprego de esquemas temporais de baixa ordem, como o utilizado no presente trabalho.

Resultados da evolução da intensidade turbulenta longitudinal na linha de simetria ($y=0$), denotada por $u_0^{rms} = \sqrt{\overline{u^2}(y=0)/\Delta U_c}$, são apresentados na figura (6.5). O resultado do presente trabalho possui uma tendência evolutiva mais em linha com os dados do resultado baseado no modelo de Smagorinsky apresentado por Le Ribault et al. (1999). Na região compreendida entre $0 < x/d < 2$, os níveis de intensidade turbulenta longitudinal apresentados por todos os trabalhos são semelhantes (de 2% a 3%). Os dados experimentais de Browne et al. (1983) e Thomas e Chu (1989) indicam uma elevação brusca nos níveis da grandeza a partir de $x/d = 2$.

O resultado obtido no presente trabalho e o obtido por Le Ribault et al. (1999), utilizando o modelo de Smagorinsky, apresenta um comportamento semelhante aos demais resultados até aproximadamente $x/d = 3$.

A partir dessa posição, a taxa de elevação da intensidade turbulenta prevista (via modelo de Smagorinsky) por Le Ribault et al. (1999) se mantém inferior aos dados experimentais, da mesma que acontece com o resultado obtido pelo presente trabalho. Além disso, como é esperado, a previsão fornecida pelo presente trabalho e a fornecida por Le Ribault et al. (1999) apresentam boa concordância entre si ao longo de uma grande porção do jato (até $x/d = 11$).

Resultados de diferentes trabalhos para a evolução da linha de meia velocidade, denotada por $\delta_{0,5}/d$, são comparados na figura (6.6). Através do exame da figura, percebe-se que o resultado da presente análise apresenta o mesmo comportamento para a variação da velocidade indicada pelos dados experimentais de Browne et al. (1983) e Thomas e Chu (1989), exceto pelo atraso observado na posição onde se observa uma taxa positiva no crescimento dos níveis da grandeza em questão. O resultado da simulação de grandes escalas (via modelo de Smagorinsky) realizada por Le Ribault et al. (1999) indicam uma concordância muito boa com os resultados de Browne et al. (1983) e Thomas e Chu (1989) até a posição $x/d = 5$, a partir da qual a previsão se afasta dos dados experimentais, prevendo uma taxa de variação menor para a largura de meia velocidade.

Quando ao resultado fornecido pelo presente trabalho, a largura de meia velocidade cresce a uma taxa ainda inferior a aquela verificada para o resultado obtido por Le Ribault et al. (1999) até a posição $x/d \cong 10$, quando, do ponto de vista da simulação realizada no presente trabalho, ocorre o encontro das camadas cisalhantes. A partir de $x/d \cong 10$, o crescimento da largura de meia velocidade com a posição longitudinal modifica gradativamente a sua taxa até a posição longitudinal $x/d = 12$, quando se estabelece uma nova taxa de crescimento, agora em linha com aquela obtida como resultado da implementação do modelo de Smagorinsky, em Le Ribault et al. (1999).

A malha utilizada para a Simulação de Grandes Escalas, cujos resultados foram apresentados nesta seção, é conforme expressa a equação (6.18).

Com base nas comparações realizadas entre os resultados obtidos neste trabalho e na literatura, pode-se afirmar que o nível de concordância é satisfatório. Considera-se assim que a solução numérica do jato obtida da simulação de grandes escalas apresenta consistência física e pode ser empregada para a previsão do campo acústico.

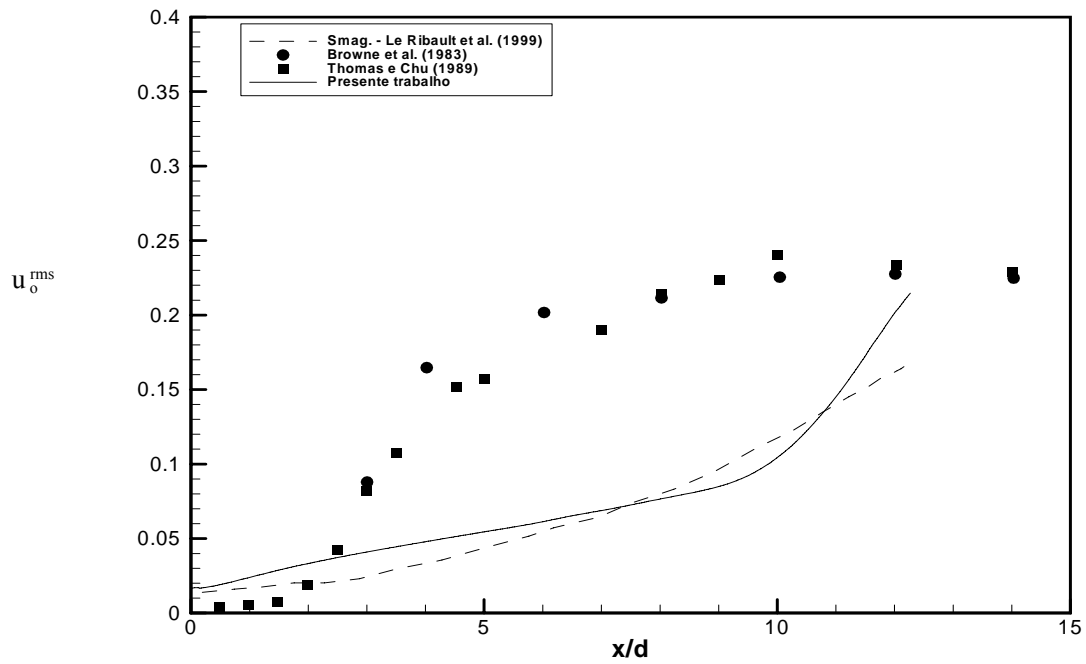


Figura 6.5: Evolução da intensidade turbulenta longitudinal na linha central.

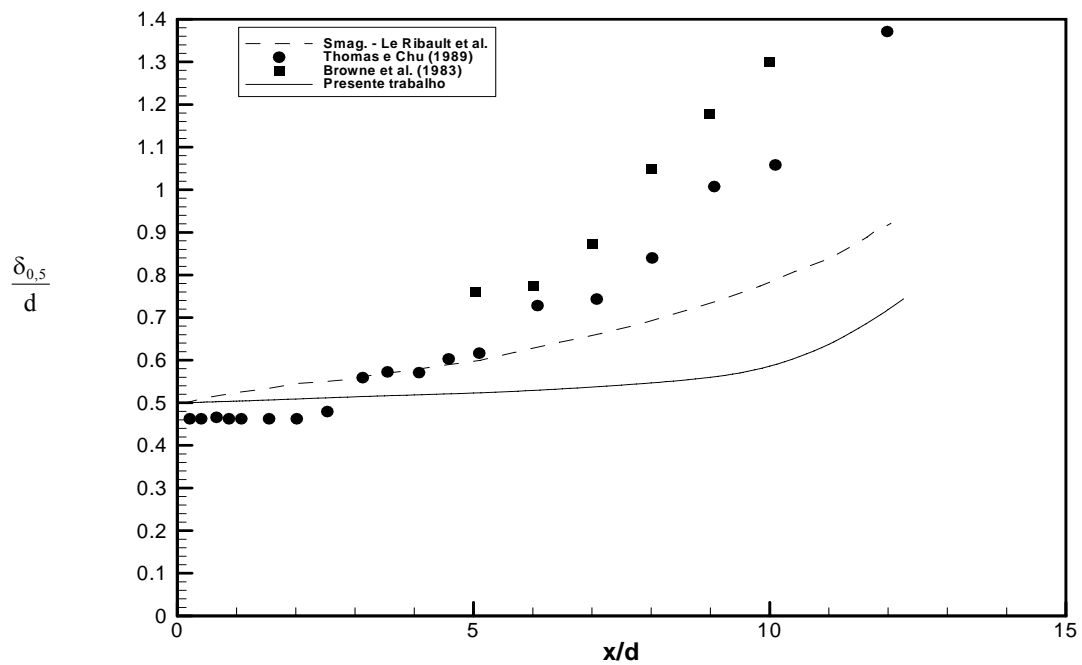


Figura 6.6: Evolução da largura de meia velocidade na linha central.

6.2.2. Perfis de Quantidades Médias

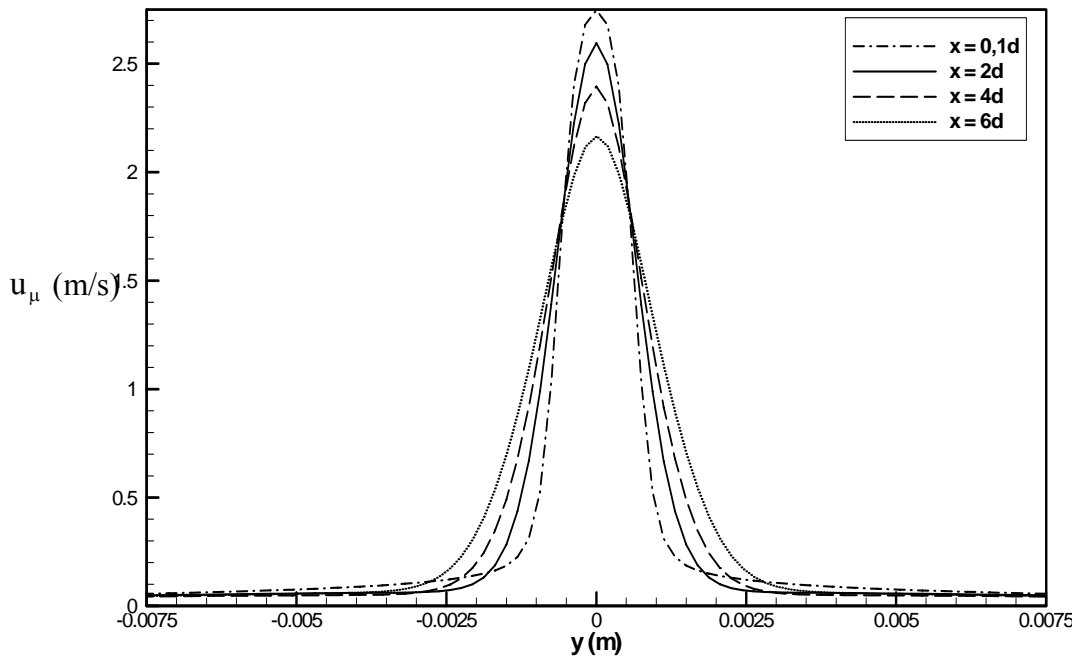
Nesta seção, são apresentados os resultados da SGE cujos parâmetros correspondem à terceira, quarta e quinta colunas das tabelas 6.1 e 6.2

Nos resultados presentes nesta seção, adota-se os valores de $C_s = 0,2$ para a constante de Smagorinsky e adota-se, também, $A = 2$, para o fator de forma presente na condição de contorno aplicada à fronteira 1 (figura 5.2), conforme expresso pelas equações (5.12) e (5.14). Isso significa que, diferentemente da situação discutida na seção (6.2.1), o valor pontual para a componente longitudinal de velocidade junto à folga que corresponde à média entre o escoamento principal, U_F , e o escoamento secundário, U_S , é assumido na posição transversal $x = 0$ e $y = \pm 0,25d$. O valor da constante A tem uma forte implicação sobre o comportamento dinâmico dos jatos, uma vez que altera a quantidade de movimento do fluido egresso da folga da saída, acelerando ou retardando o desenvolvimento das camadas cisalhantes. Valores maiores para a constante A significa menor quantidade de movimento para o fluido egresso da folga da saída. A condição de contorno para a fronteira 2 (figura 5.2) é uma condição sobre a pressão estática, conforme expresso nas equações (5.13) e (5.15)

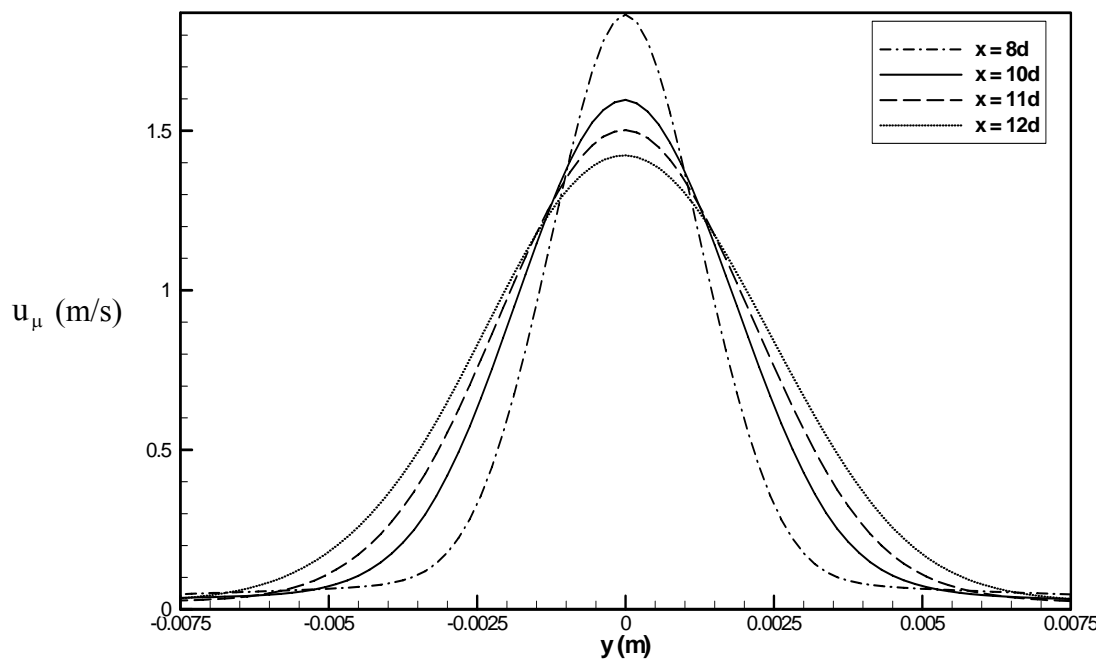
Perfis médios da componente longitudinal de velocidade, denotada por u_μ , para $Re = 400, 3.000$ e 7.200 são apresentados nas figuras (6.7), (6.8) e (6.9), respectivamente. Dada uma posição longitudinal ($x = 8d$, por exemplo) não é verificada uma variação significativa na forma dos perfis em função da alteração do número de Reynolds. Também não se verifica grande variação no decaimento da magnitude da velocidade média com a posição longitudinal. Em todos os casos, a razão entre o valor máximo para u_μ nas posições $x = 12d$ e $x = 0,1d$ oscila em torno de $0,5$.

Variações significativas com o número de Reynolds são percebidas no processo de difusão de quantidade de movimento, observando-se uma difusão bem mais intensa para $Re = 3.000$ e 7.200 em relação ao caso referente ao número de Reynolds 400 . Para $Re = 400$, percebe-se uma transição mais suave entre a região inicial e a região de transição, quando comparado aos casos de números de Reynolds mais elevados. Isto pode ser verificado pela taxa de abertura mais gradual dos perfis ao longo do escoamento, na região $0,1 < x/d < 8$. Além disto, para $Re = 400$, não se observa uma persistência na magnitude de u_μ ao longo da linha de simetria ($y=0$); uma característica típica da região inicial. Esse aspecto é corroborado pela figura (6.16).

Os demais casos ($Re = 3.000$ e 7.200), por possuírem níveis de velocidade com mesma ordem de grandeza, apresentam comportamento semelhante. Observa-se de forma bastante clara, através das figuras (6.8) e (6.9), que a difusão de quantidade de movimento é bem reduzida até a posição $x/d = 4$. Isto acontece porque esses escoamentos apresentam maior quantidade de movimento do que o caso $Re = 400$. Desta forma, o transporte por advecção nas regiões iniciais é bem mais intenso do que o transporte difusivo turbulento, dificultando a transferência de quantidade de movimento na direção transversal. No entanto, a partir de $x/d = 4$, existe um aumento brusco na difusão, refletido no aumento repentino na taxa de abertura dos perfis, com uma conseqüente diminuição do nível de velocidade na linha de simetria. A razão deste fenômeno está associada ao crescimento rápido das camadas cisalhantes e aos níveis elevados de taxa de deformação ali existentes. Uma vez que o mecanismo de produção da turbulência é justamente a deformação do escoamento, não é surpresa que este efeito eventualmente se manifeste.



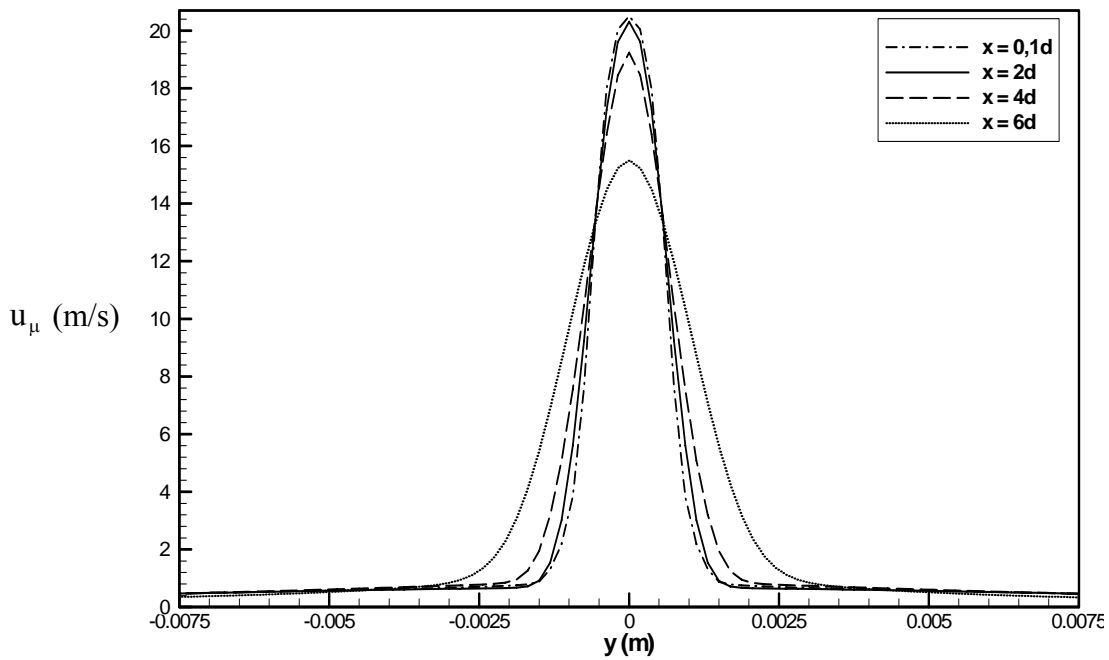
(a)



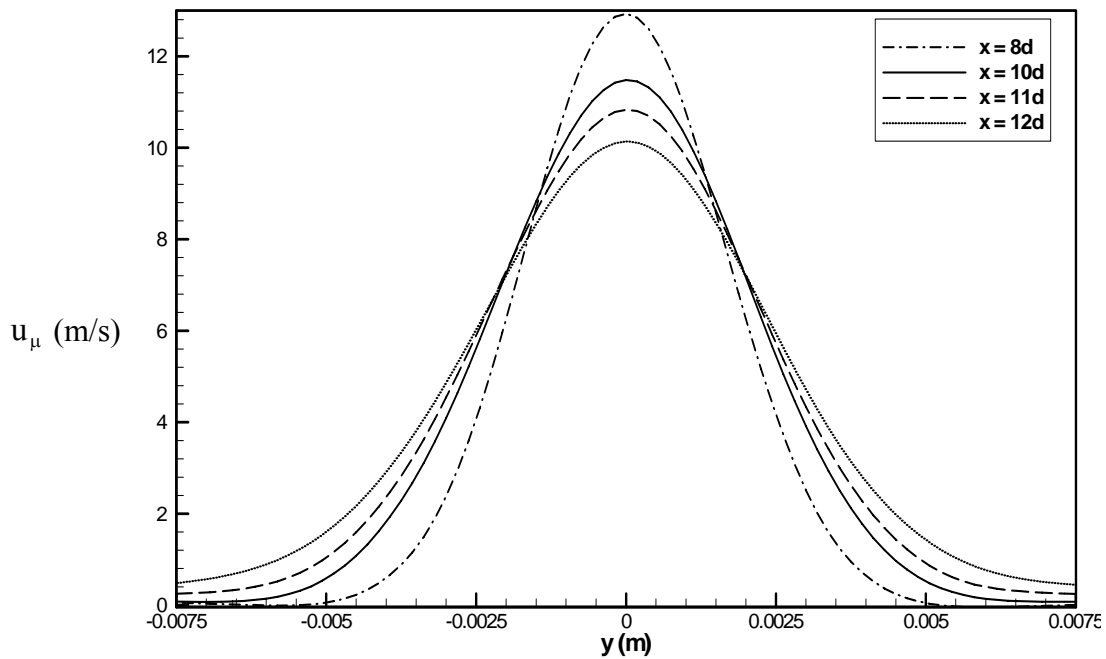
(b)

Figura 6.7: Perfis médios da componente longitudinal de velocidade para $Re = 400$:

(a) $0,1 \leq x/d \leq 6$; (b) $8 \leq x/d \leq 12$.

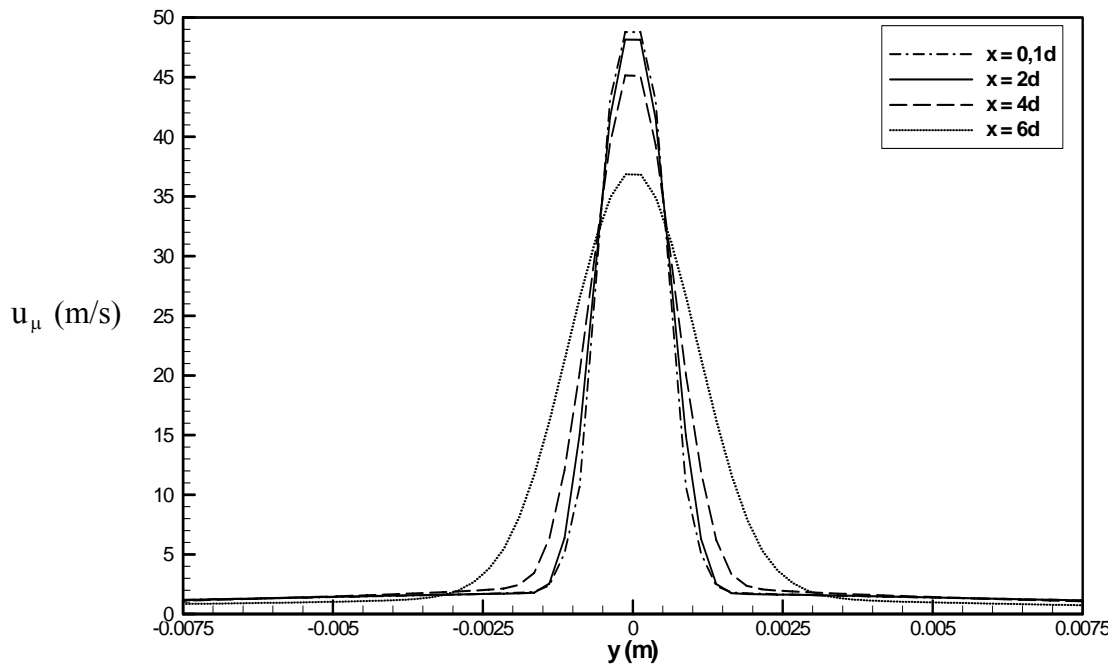


(a)

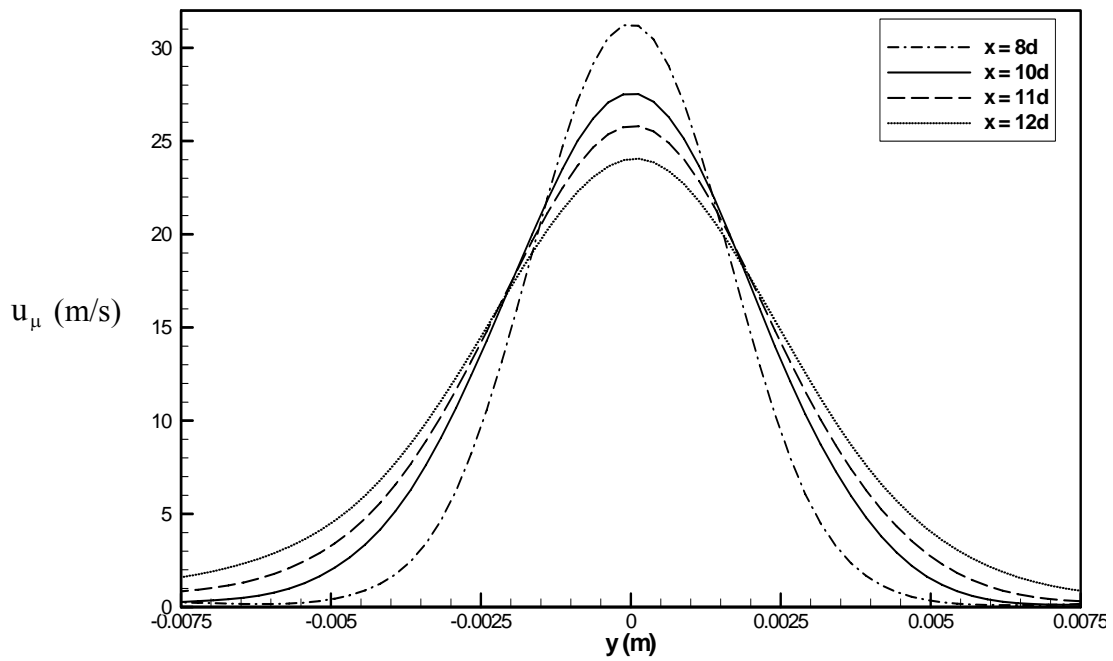


(b)

Figura 6.8: Perfis médios da componente longitudinal de velocidade para $Re = 3.000$:(a) $0,1 \leq x/d \leq 6$; (b) $8 \leq x/d \leq 12$.



(a)



(b)

Figura 6.9: Perfis médios da componente longitudinal de velocidade para $Re = 7.200$:

(a) $0,1 \leq x/d \leq 6$; (b) $8 \leq x/d \leq 12$.

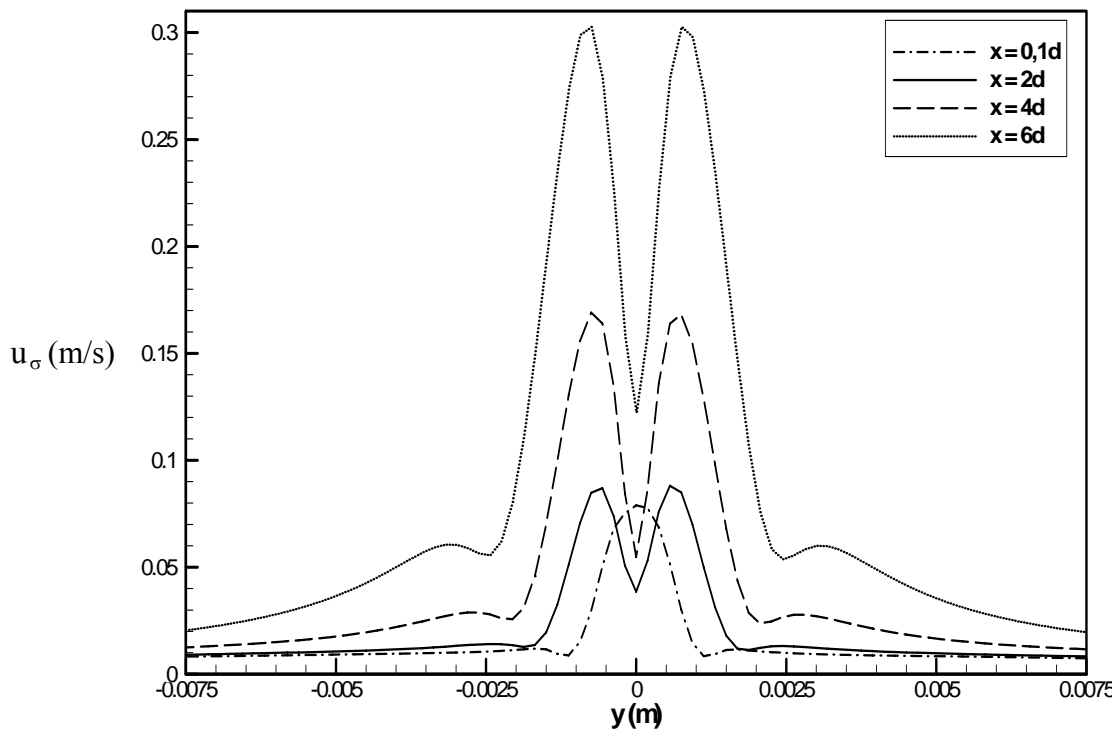
Resultados de perfis de tensão de Reynolds na direção longitudinal, $\overline{u^2}$, são apresentados nas figuras (6.10), (6.11) e (6.12), para $Re = 400$, 3.000 e 7.200 , respectivamente. Na região inicial do jato, fica evidente para todos os casos a formação de dois picos de máximo para $\overline{u^2}$, dispostos simetricamente em relação à linha de simetria. Tais máximos representam à região de máxima deformação nas camadas cisalhantes na borda do jato. Naturalmente, além da taxa de deformação do escoamento, a produção da turbulência depende também dos níveis das tensões de Reynolds. Desta forma, é natural observar que, apesar da diminuição da deformação do escoamento na camada cisalhante do jato, os níveis de $\overline{u^2}$ têm um aumento bem acentuado na região inicial do jato ($0,1 \leq x/d \leq 6$) devido à elevação dos níveis das tensões de Reynolds.

Apesar das semelhanças supracitadas para os casos simulados, percebe-se novamente uma grande diferença entre o desenvolvimento dos perfis para números de Reynolds baixos ($Re = 400$) e elevados ($Re = 3.000$ e $Re = 7.200$). Verifica-se, por exemplo, que a difusão de $\overline{u^2}$ é menos intensa em $Re = 400$, fazendo com que os dois picos de máximo permaneçam evidentes até $x/d = 12$, apesar de que suas posições se afastem em relação à linha de simetria e de que seus níveis decaiam; um indicativo do processo difusivo. O mesmo não ocorre para $Re = 3.000$ e 7.200 , como pode ser visto nas figuras (6.11) e (6.12), com os picos de $\overline{u^2}$ estando completamente difundidos para posições x/d superiores a 10, surgindo um novo máximo na região central do jato ($y = 0$). Tal efeito decorre da maior produção de turbulência nos casos de Reynolds mais elevados, trazendo como consequência uma maior difusão turbulenta.

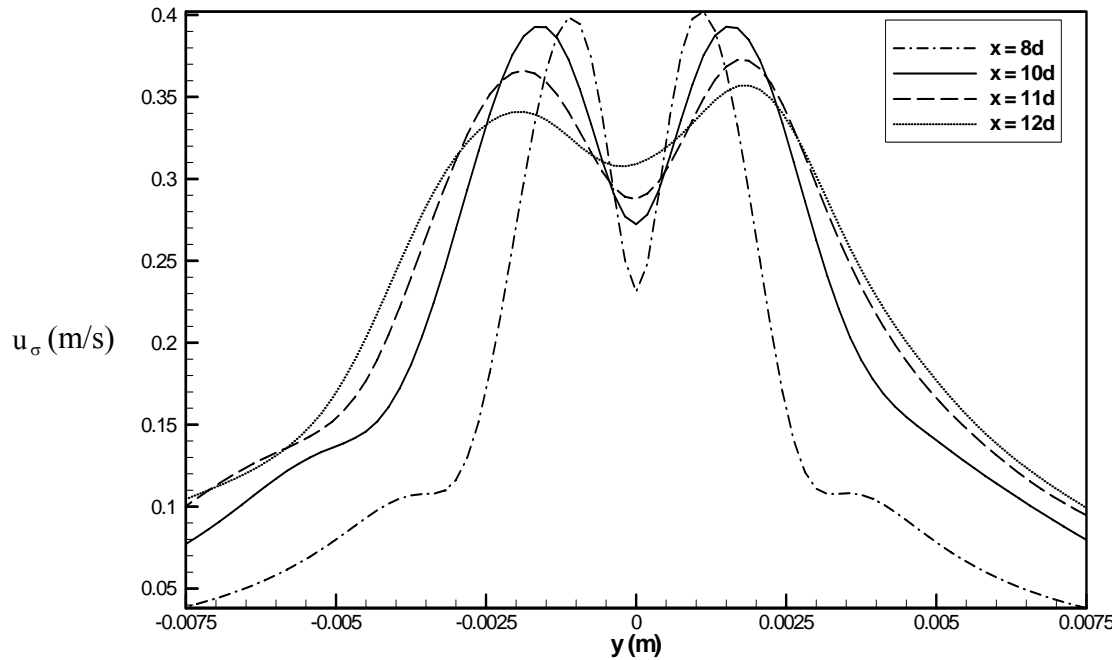
Os perfis de tensão de Reynolds transversal $\overline{v^2}$ são apresentados nas figuras (6.13), (6.14) e (6.15) para $Re = 400$, 3.000 e 7.200 , respectivamente. Em todos os casos, os perfis de $\overline{v^2}$ apresentam uma forma semelhante àqueles apresentados para a velocidade média, com o ponto de máximo localizado na linha de simetria. A forma do perfil se modifica devido ao transporte difusivo, tornando-o mais aberto à medida em que se avança na coordenada longitudinal.

Da mesma forma como verificado para os perfis de $\overline{u^2}$, os níveis de $\overline{v^2}$ aumentam de forma mais rápida para $Re = 3.000$ e 7.200 . No entanto, ao contrário do observado para a tensão longitudinal, para posições superiores a $x/d = 8$ os níveis de $\overline{v^2}$ diminuem. Por outro lado, para $Re = 400$ isto não ocorre e os níveis de $\overline{v^2}$ aumentam monotonicamente com a coordenada longitudinal.

Fazendo uma análise comparativa entre os perfis de $\overline{u^2}$ e $\overline{v^2}$, verifica-se que os seus níveis aumentam praticamente na mesma proporção. No entanto, os mecanismos de geração das duas grandezas são bastante distintos. A tensão de Reynolds longitudinal $\overline{u^2}$ é fruto, essencialmente, da energia produzida por ocasião dos altos níveis de taxa de deformação nas camadas cisalhantes. Já os níveis de $\overline{v^2}$ são sustentados através de um processo de redistribuição de energia entre as três componentes de flutuação de velocidade. Os resultados apresentam as tensões de Reynolds normais $\overline{u^2}$ e $\overline{v^2}$ sob a forma de suas raízes quadradas, denotadas por $u_\sigma = \sqrt{\overline{u^2}}$ e $v_\sigma = \sqrt{\overline{v^2}}$, respectivamente, conforme se observa nas figuras, a seguir.

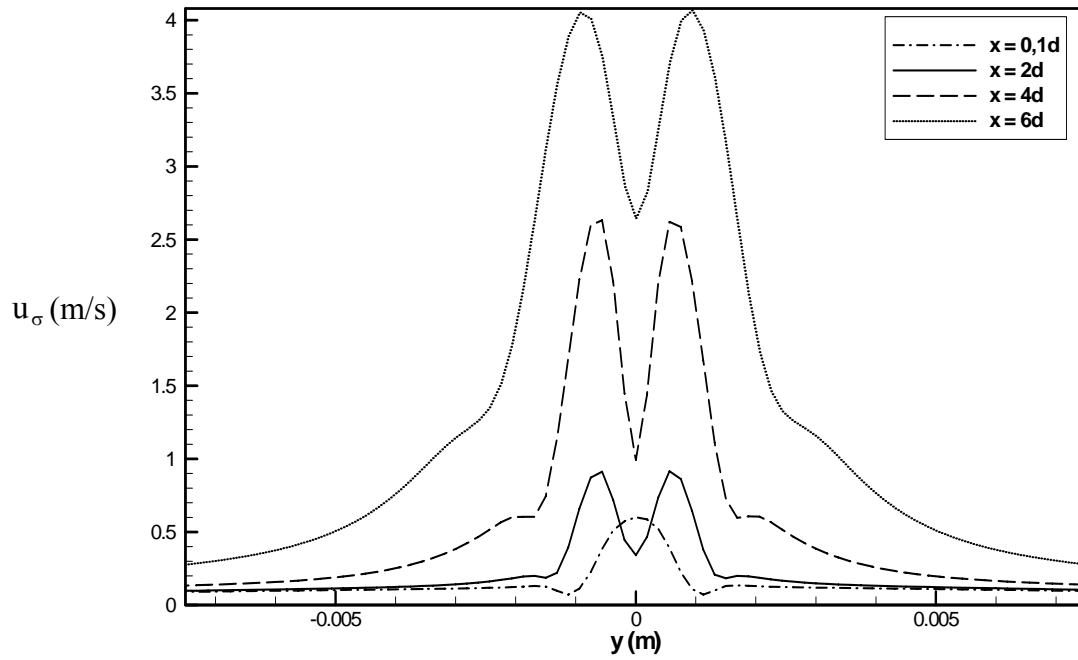


(a)

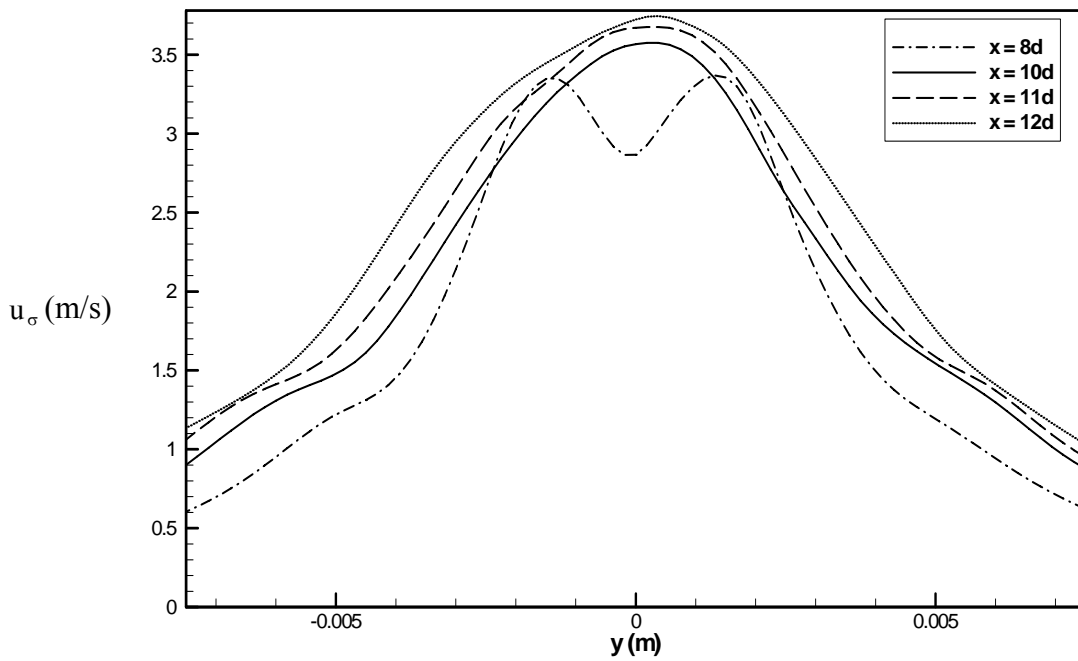


(b)

Figura 6.10: Perfis médios da tensão de Reynolds longitudinal $\overline{u^2}$ para $Re = 400$:(a) $0,1 \leq x/d \leq 6$; (b) $8 \leq x/d \leq 12$.



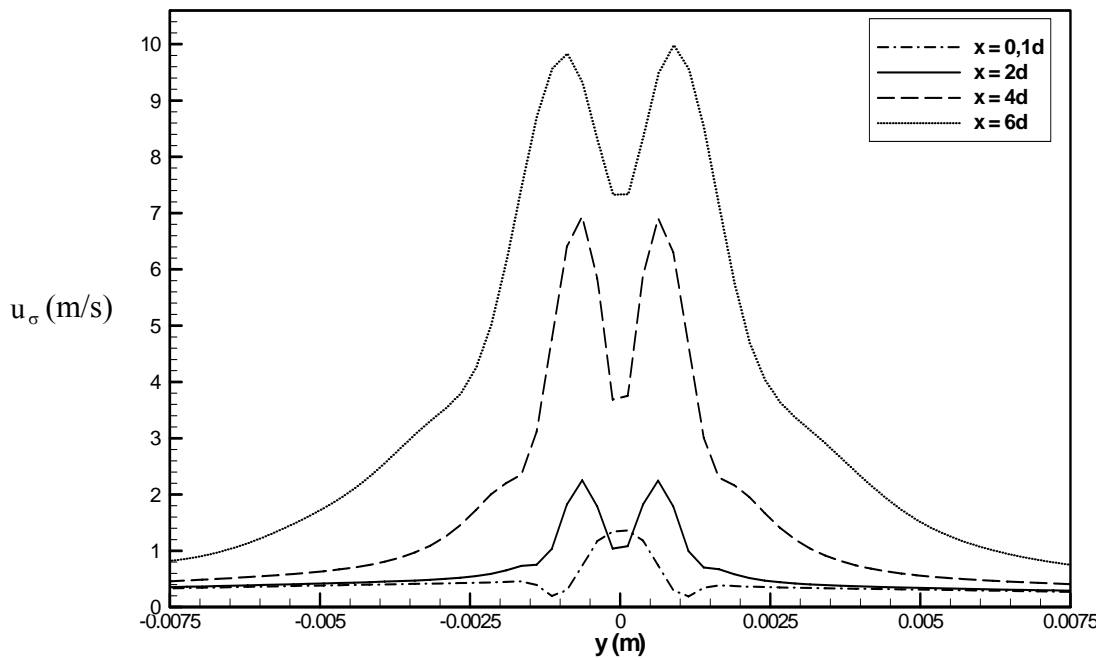
(a)



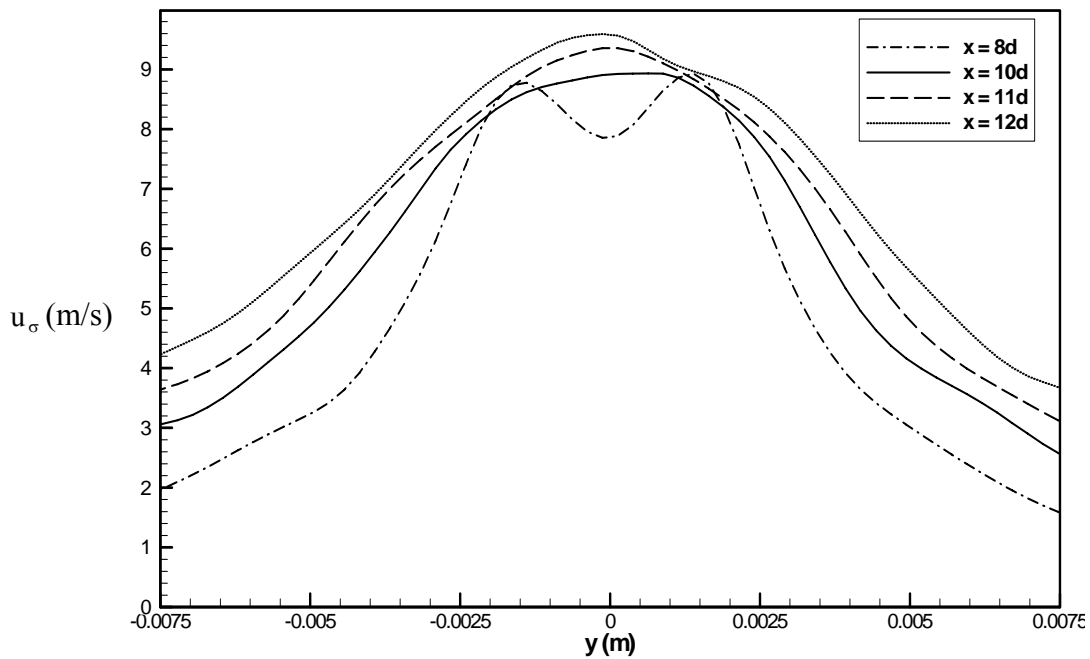
(b)

Figura 6.11: Perfis médios da tensão de Reynolds longitudinal $\overline{u^2}$ para $Re = 3.000$:

(a) $0,1 \leq x/d \leq 6$; (b) $8 \leq x/d \leq 12$.

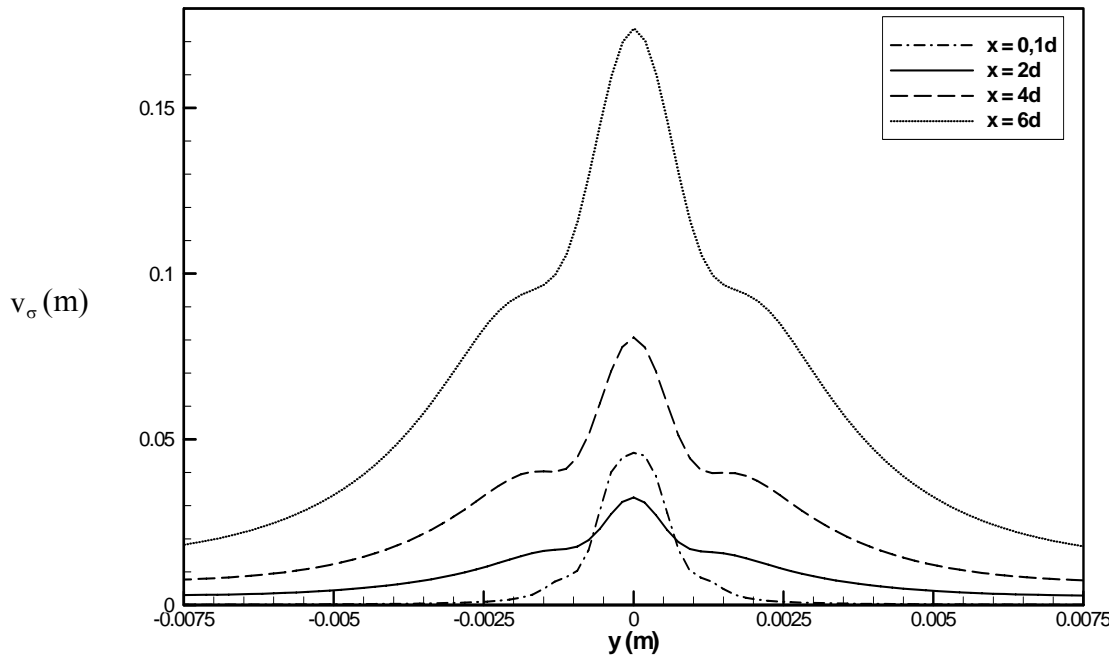


(a)

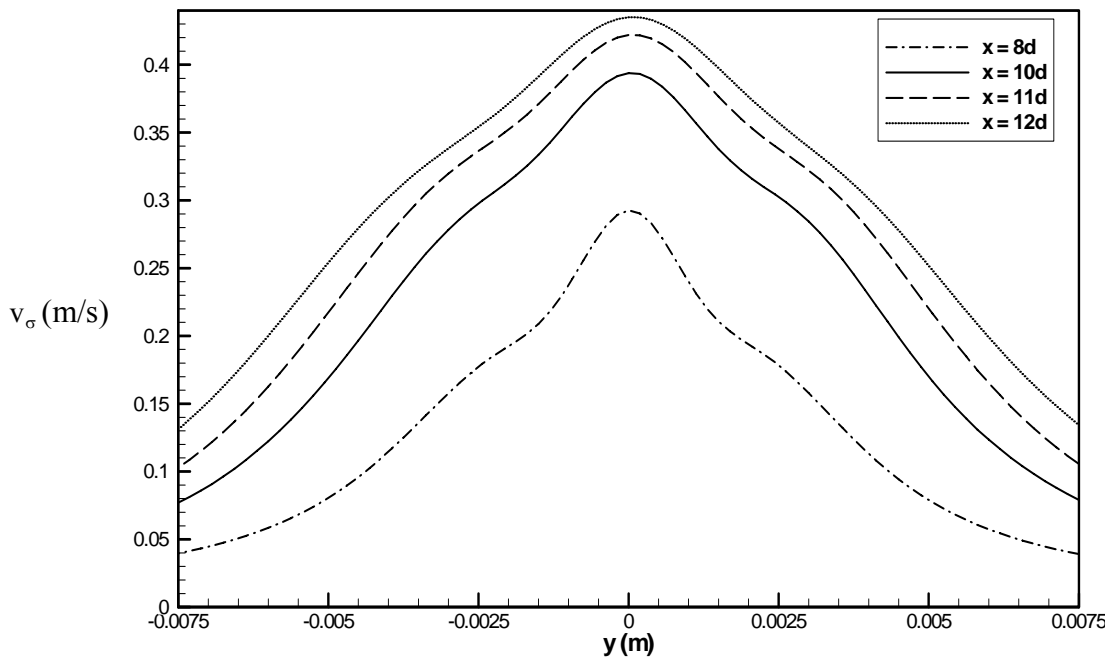


(b)

Figura 6.12: Perfis médios da tensão de Reynolds longitudinal $\overline{u^2}$ para $Re = 7.200$:(a) $0,1 \leq x/d \leq 6$; (b) $8 \leq x/d \leq 12$.



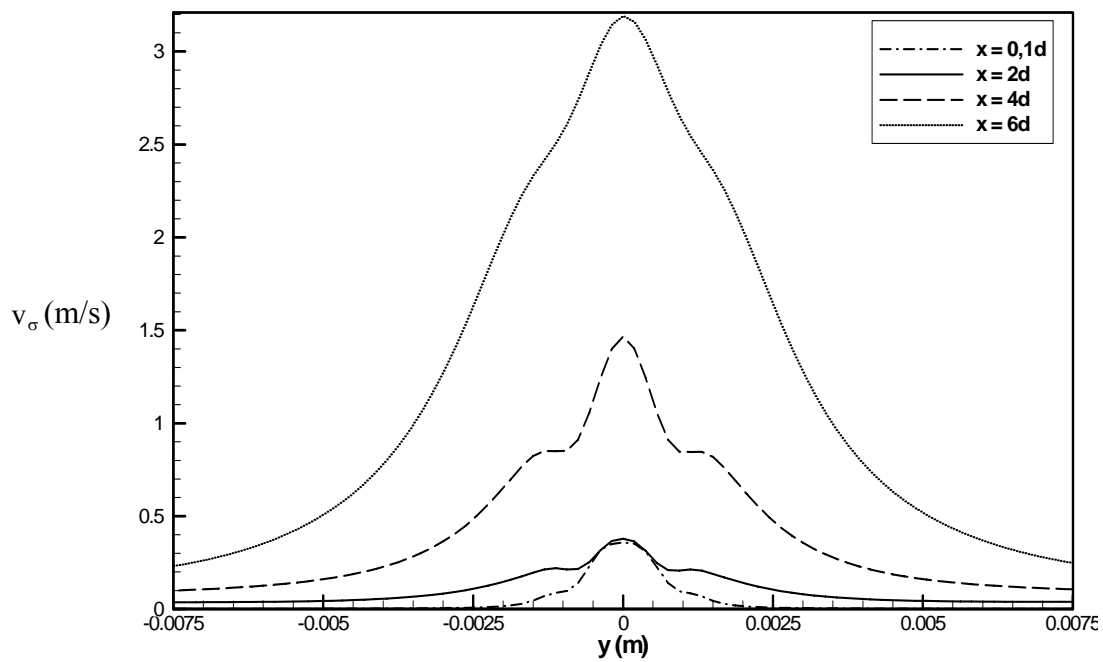
(a)



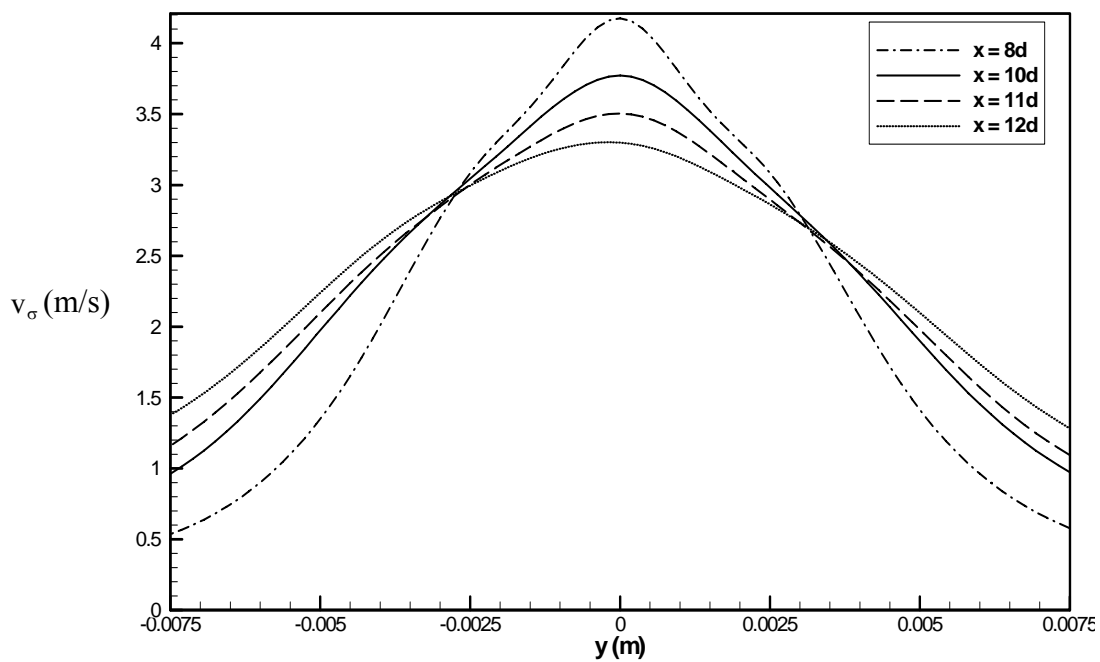
(b)

Figura 6.13: Perfis médios da tensão de Reynolds transversal $\overline{v^2}$ para $Re = 400$:

(a) $0,1 \leq x/d \leq 6$; (b) $8 \leq x/d \leq 12$.

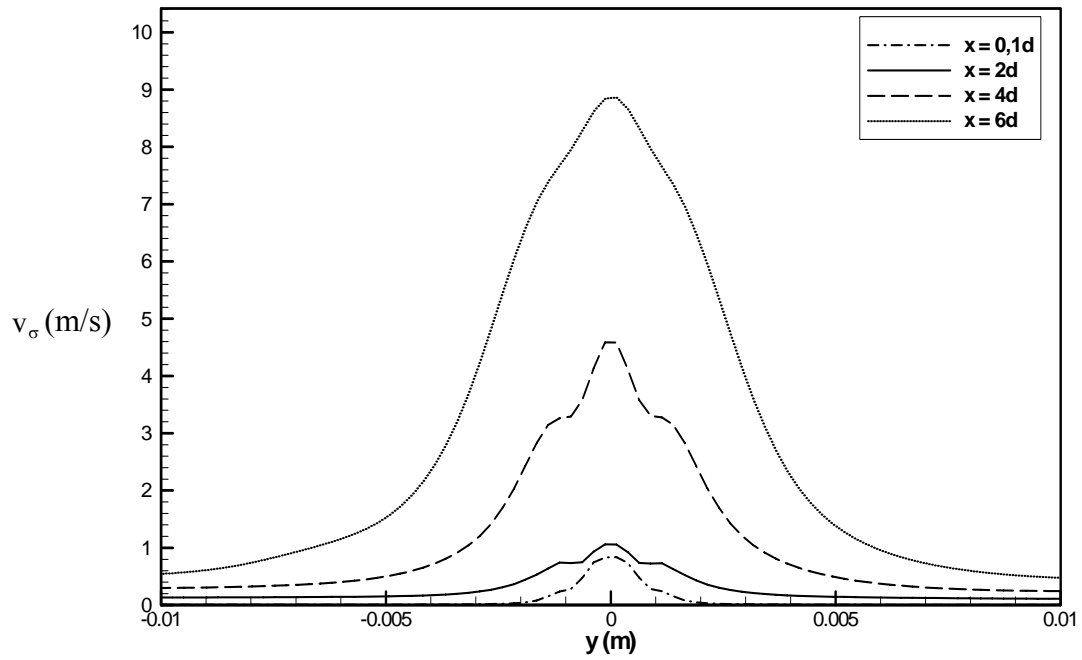


(a)

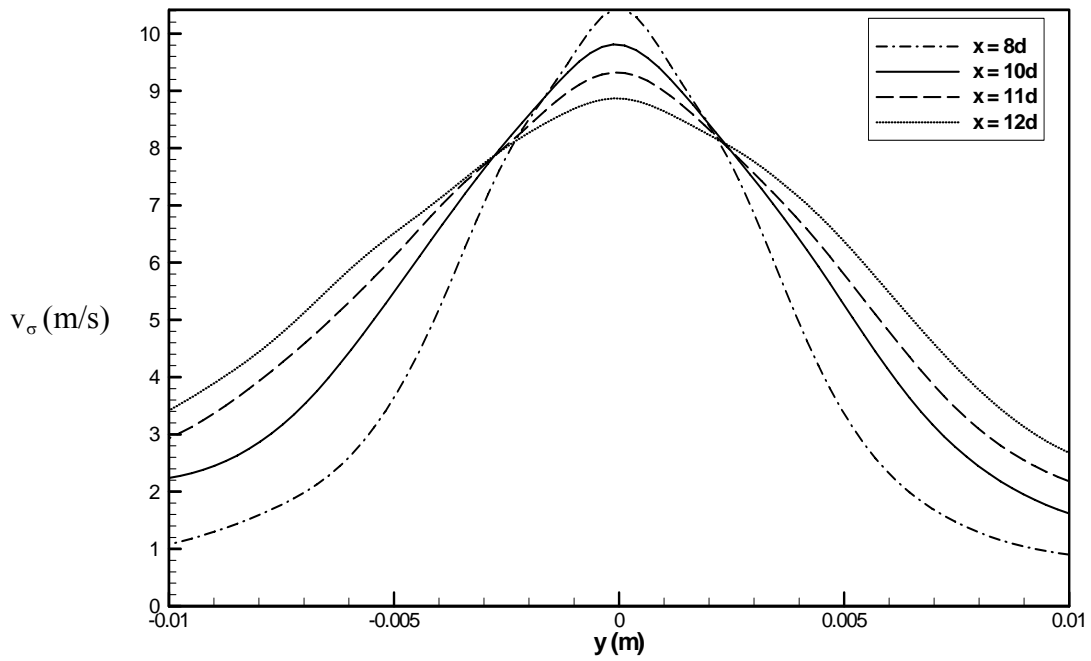


(b)

Figura 6.14: Perfis médios da tensão de Reynolds transversal $\overline{v^2}$ para $Re = 3.000$:(a) $0,1 \leq x/d \leq 6$; (b) $8 \leq x/d \leq 12$.



(a)



(b)

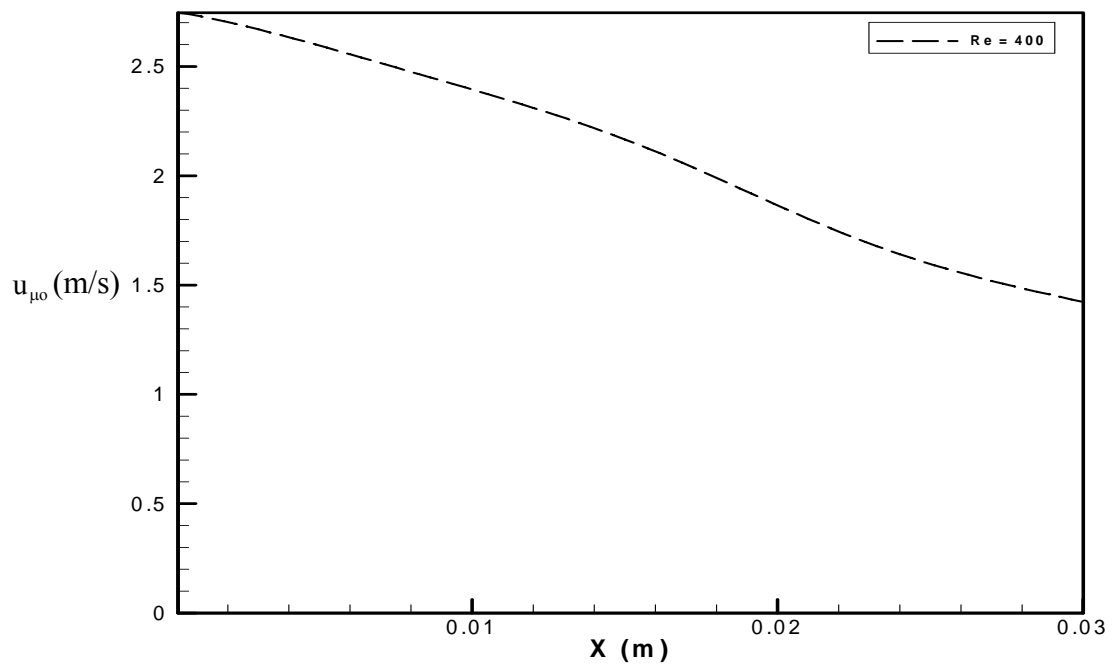
Figura 6.15: Perfis médios da tensão de Reynolds transversal $\overline{v^2}$ para $Re = 7.200$:

(a) $0,1 \leq x/d \leq 6$; (b) $8 \leq x/d \leq 12$.

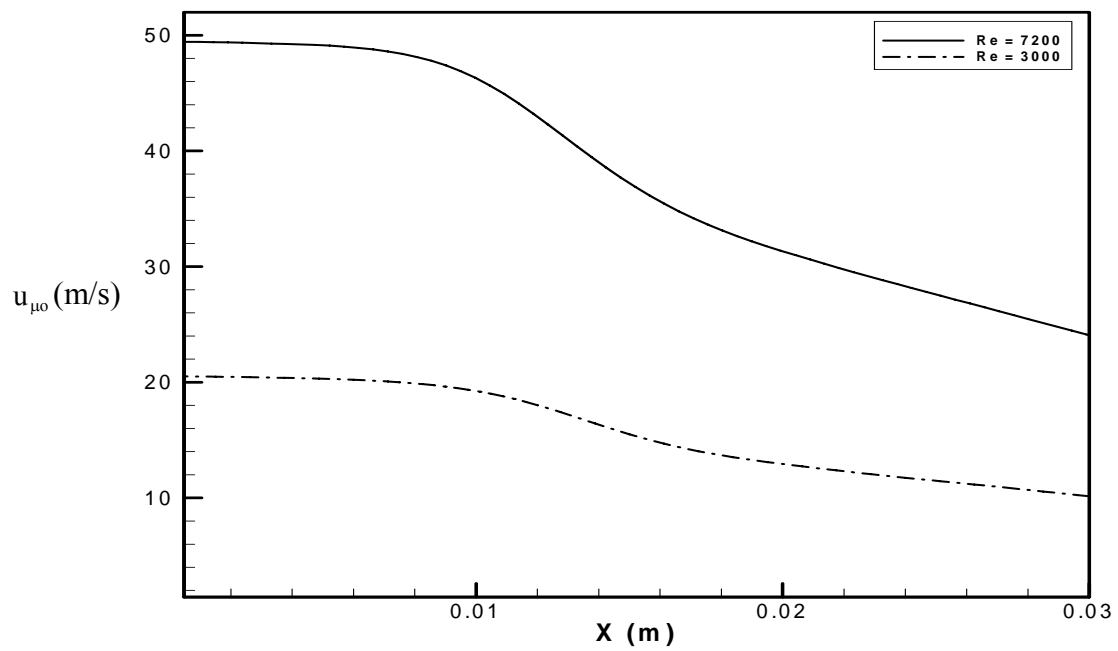
A figura (6.16) apresenta a evolução da velocidade média longitudinal (denotada por $u_{\mu 0}$) ao longo da linha de simetria ($y = 0$), para $Re = 400, 3.000$ e 7.200 . Para $Re = 400$, percebe-se um decaimento monotônico de $u_{\mu 0}$, consistente com a difusão gradual de quantidade de movimento identificada a partir dos resultados de perfis de velocidade média da figura (6.7). Por outro lado, para $Re = 3.000$ e 7.200 , a velocidade média longitudinal sobre a linha de simetria segue praticamente inalterada (característica típica da região inicial), ocorrendo mudança significativa somente a partir da posição $x/d \cong 4$ ($d = 0,0025$ m), quando é verificado um aumento sensível da difusão de quantidade de movimento, em concordância com os resultados de perfis de velocidade das figuras (6.8) e (6.9).

A evolução da tensão de Reynolds longitudinal $\overline{u^2}$ ao longo da linha de simetria, representada por $u_{\sigma 0} = \sqrt{\overline{u^2}(y=0)}$ e ilustrada na figura (6.17), demonstra que os níveis de $\overline{u^2}$ crescem em uma tendência quase monótona nos três casos de números de Reynolds considerados neste trabalho. Em todos os casos, a evolução dos níveis de $\overline{u^2}$ se comporta de forma bastante similar até $x/d = 4$ para então, no intervalo $4 \leq x/d \leq 5$, haver um aumento repentino na magnitude de $\overline{u^2}$ nos números de Reynolds mais levados ($Re = 3.000$ e 7.200). Este efeito está associado à maior produção de energia cinética turbulenta junto às camadas cisalhantes superior e inferior em situações de velocidades mais elevadas. A partir de $x/d = 5$, a magnitude da tensão continua a crescer mas, porém, havendo uma diminuição na taxa de crescimento devido ao decréscimo da produção de energia cinética turbulenta, bem como do transporte difusivo de energia da camada cisalhante para o centro do jato. Para $Re = 400$ o crescimento nos níveis de $\overline{u^2}$ ocorre de forma gradativa, indicando que a geração de turbulência acontece de forma menos intensa e, desta forma, resultando em um transporte difusivo turbulento menos efetivo.

As observações anteriores se aplicam também à evolução da tensão de Reynolds transversal $\overline{v^2}$ ao longo da linha de simetria, representada por $v_{\sigma 0} = \sqrt{\overline{v^2}(y=0)}$, conforme mostrado na figura (6.18). No entanto, em torno de $x/d = 8$, os níveis de $\overline{v^2}$ para $Re = 3.000$ e 7.200 atingem o seu nível máximo, seguindo então um processo de decaimento do valor da tensão. Este processo decorre de uma combinação dos processos de produção e difusão de energia cinética turbulenta, não podendo ser quantificado pelos resultados aqui apresentados.



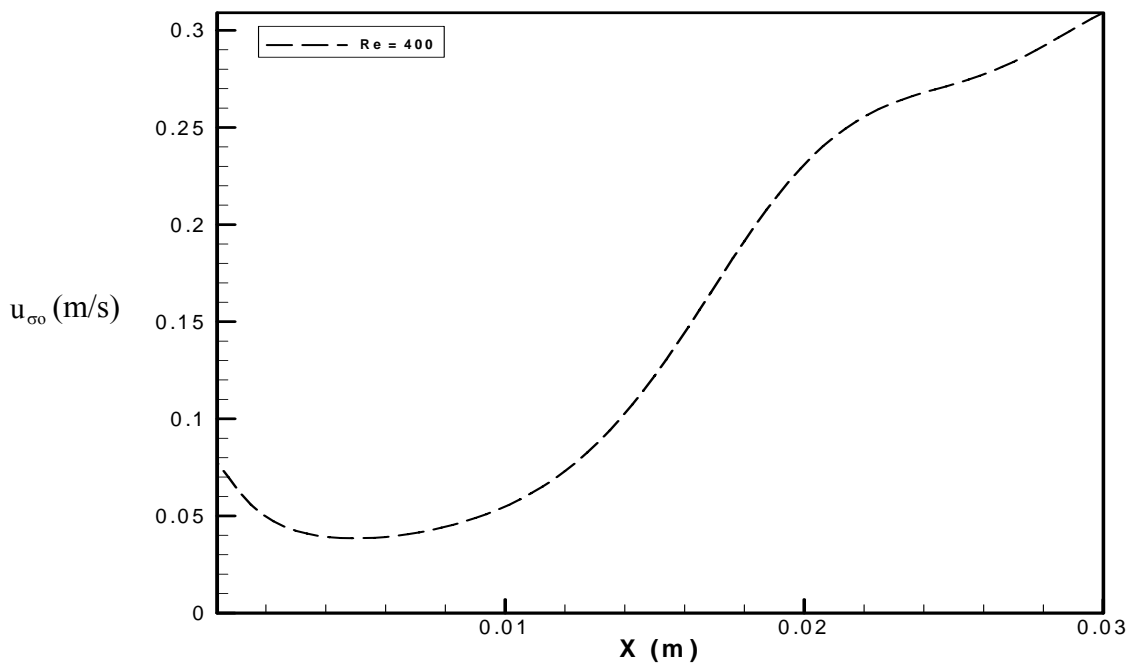
(a)



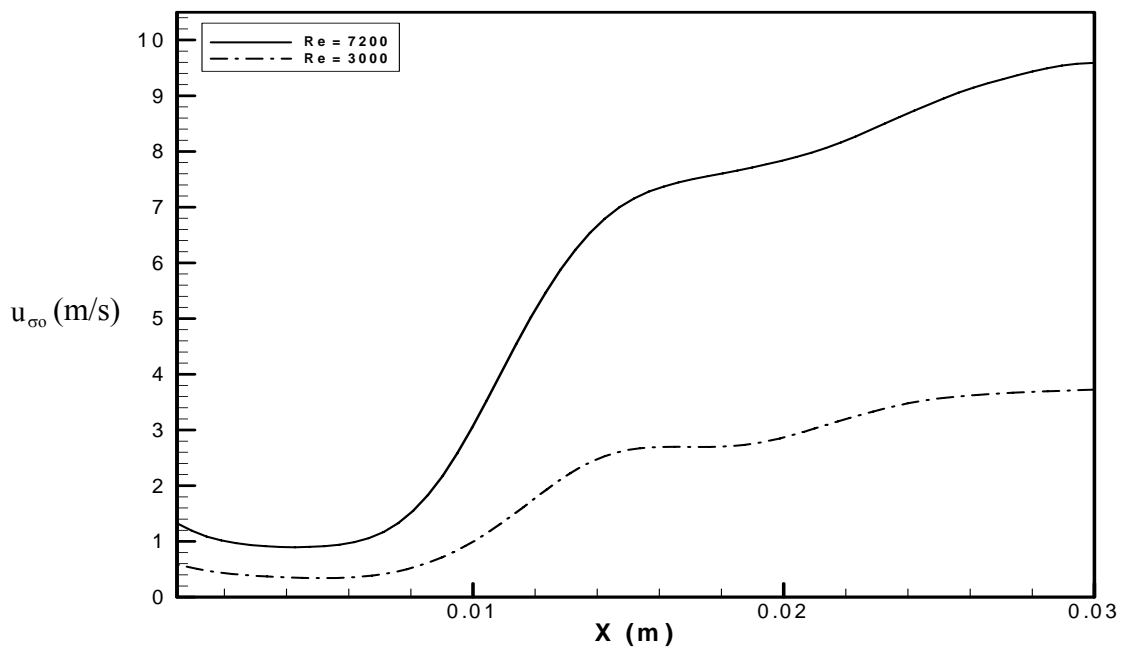
(b)

Figura 6.16: Decaimento da velocidade longitudinal média ao longo da linha de simetria:

(a) $Re = 400$; (b) $Re = 3.000$ e 7.200 .



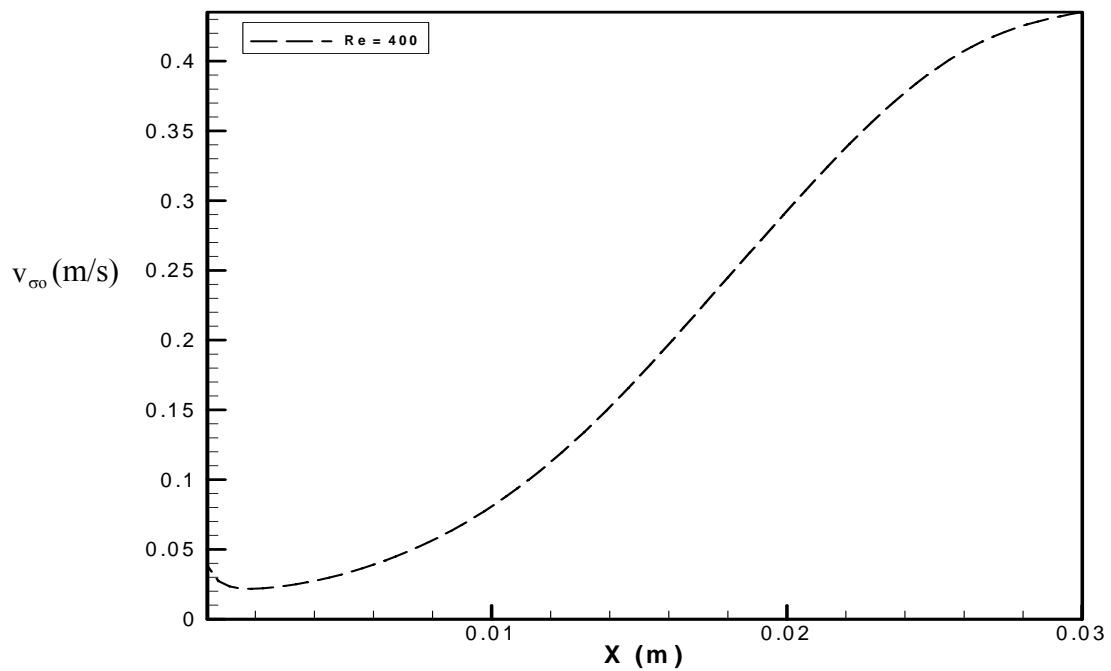
(a)



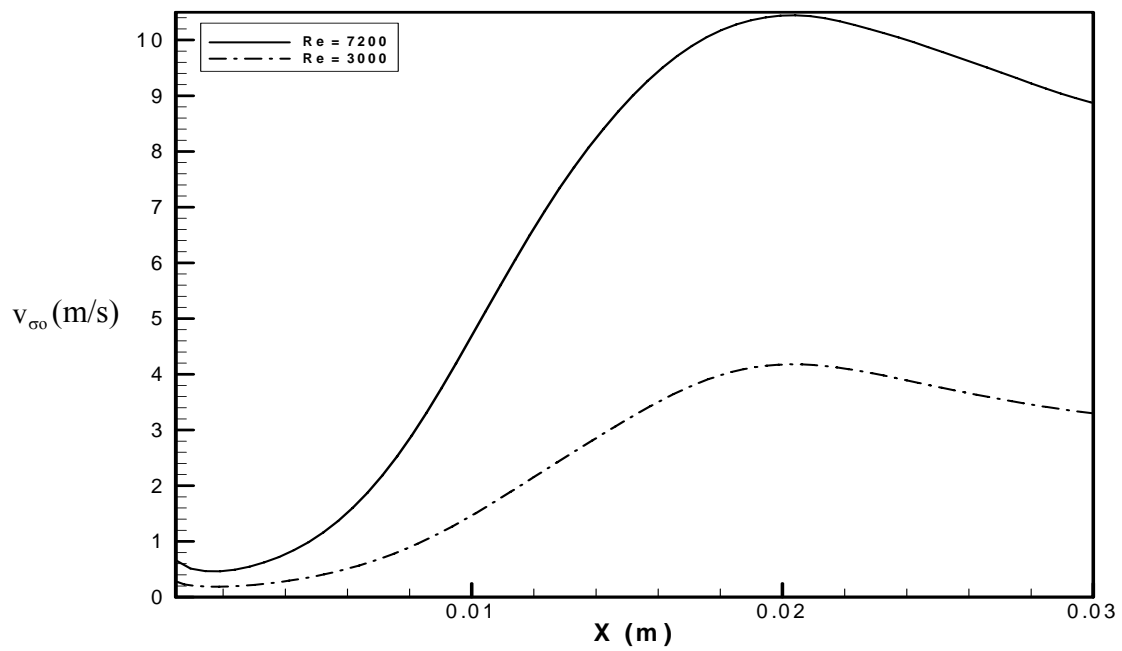
(b)

Figura 6.17: Decaimento da tensão de Reynolds longitudinal $\overline{u^2}$ ao longo da linha de simetria:

(a) $Re = 400$; (b) $Re = 3.000$ e 7.200 .



(a)



(b)

Figura 6.18: Decaimento da tensão de Reynolds longitudinal $\overline{v^2}$ ao longo da linha de simetria:

(a) $Re = 400$; (b) $Re = 3.000$ e 7.200

6.2.3. Campos

Do mesmo modo como ocorrido na seção 6.2.2, os resultados a serem apresentados nesta seção, são referentes aos casos de simulação cujos parâmetros correspondem à terceira, quarta e quinta colunas das tabelas 6.1 e 6.2. As considerações sobre o valor da constante de Smagorinsky, C_S , e sobre o valor do fator de forma, A , também são conforme a seção 6.2.2.

Para complementar a análise dos jatos planos turbulentos resolvidos através de Simulação de Grandes Escalas (SGE) e já discutidos na seção 6.2.2, foram preparadas figuras referentes aos campos de vorticidade, viscosidade de sub-malha e de intensidade turbulenta. Para as duas primeiras quantidades, os campos se referem a um determinado instante de tempo da simulação e, assim, revelam a estrutura turbulenta instantânea do jato. Já para a intensidade da turbulência, procede-se um tratamento estatístico da energia cinética ao longo de um período suficientemente longo para que o conceito de média possa ser aplicado.

Os campos de vorticidade apresentados na figura (6.19) para os três casos simulados ($Re = 400, 3.000$ e 7.200), indicam que os maiores níveis de vorticidade estão contidos inicialmente nas duas camadas cisalhantes. Este é um resultado esperado, uma vez que é justamente nessas regiões onde ocorrem as maiores taxas de deformação do escoamento. Ao longo do desenvolvimento das camadas cisalhantes, as regiões de vorticidade elevada (onde vórtices quase não são observados), transformam-se, gradativamente, em regiões de vorticidade menor, as quais contêm vórtices. Os primeiros vórtices são pequenas estruturas rotativas que apresentam elevados níveis de vorticidade em seu interior, crescendo de tamanho (e diminuindo os seus níveis de vorticidade) na medida em que são consideradas regiões mais afastadas da folga de saída do jato.

É notória a influência do número de Reynolds sobre os níveis de vorticidade, sendo que o seu aumento provoca deformações mais intensas nas camadas cisalhantes, traduzindo-se assim em níveis de vorticidade mais elevados. Outra característica do escoamento observada na figura (6.19) é a formação mais rápida de estruturas vorticosas para os jatos com números de Reynolds mais elevados, decorrente das maiores instabilidades do escoamento.

A formação de vórtices é uma manifestação da turbulência no escoamento e tem o efeito de aumentar o transporte difusivo turbulento. De fato, pode-se observar nas figuras anteriores, para perfis de velocidade e de grandezas turbulentas, que, justamente na posição onde surgem os vórtices, ocorre o aumento acentuado na difusão das propriedades. Para o menor número de Reynolds investigado ($Re = 400$) as estruturas vorticosas são bem menos

definidas e, assim, o processo de difusão acontece de forma muito mais gradativa ao longo do comprimento do domínio computacional.

A região de interação dos vórtices denomina-se região de transição e é caracterizada por níveis de turbulência elevados e, como consequência, o mesmo acontecendo para difusão elevada de quantidade de movimento. Após a região de transição, a turbulência vai decaindo em função da dissipação viscosa e da diminuição do termo de produção.

Finalmente, outra característica importante de ser observada é a assimetria dos campos de vorticidade apresentados na figura (6.19), decorrente do comportamento aleatório do escoamento turbulento. Os vórtices caracterizados na figura (6.19) representam as grandes escalas turbulentas resolvidas pela SGE. Naturalmente, a malha computacional utilizada não permite que todas as menores escalas turbulentas do jato possam ser resolvidas. O efeito destas sobre o desenvolvimento do jato é avaliado através de modelos ditos de sub-malha.

Resultados de campos de viscosidade turbulenta sub-malha adimensional $\mu_t^* = \mu_t / \mu$ são apresentados na figura (6.20). De acordo com o modelo de Smagorinsky, a viscosidade de sub-malha é proporcional à taxa de deformação, de modo que os seus maiores valores ocorrem nas camadas cisalhantes. É importante também ressaltar que os níveis de μ_t^* aumentam fortemente com o número de Reynolds, como consequência das maiores taxas de deformação do escoamento. Novamente, deve ser observada a assimetria dos campos em função da natureza turbulenta do escoamento.

A viscosidade de sub-malha é um indicativo do quanto adequada é a malha computacional, ou de quanto pequenas são as estruturas de pequena escala. Deste modo, em função das observações supracitadas sobre os níveis de μ_t^* , fica evidente que as regiões das camadas cisalhantes são aquelas que necessitam de maior refino local da malha. Para todos os casos analisados, considera-se que os níveis obtidos para μ_t^* são indicativos de que a malha é adequada para a simulação.

A intensidade turbulenta é uma grandeza estatística importante na caracterização de escoamentos turbulentos, sendo expressa por:

$$I = \frac{\sqrt{(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})}/3}{U_F} \quad (6.20)$$

onde U_F corresponde à velocidade média no centro da folga de saída do jato. Como as simulações numéricas realizadas no presente trabalho são bidimensionais, não é resolvida

uma equação de transporte para componente de velocidade na direção z (w). Assim, propõe-se uma estimativa para a flutuação $\overline{w'w'}$, através da seguinte equação:

$$\overline{w'w'} = \frac{\overline{u'u'} + \overline{v'v'}}{2} \quad (6.21)$$

Considerando que a energia cinética turbulenta, k_t , é definida como:

$$k_t = \frac{(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})}{2} \quad (6.22)$$

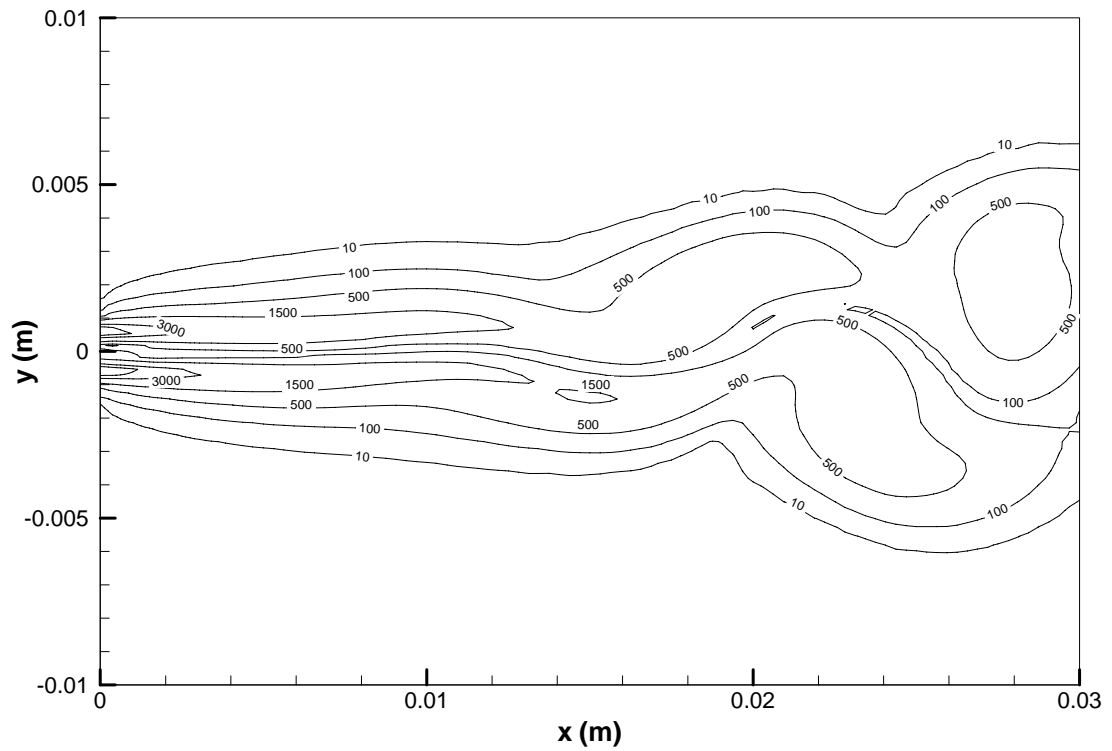
a intensidade turbulenta, definida na equação (6.20), pode ser expressa de forma sintética como

$$I = \frac{1}{U_F} \sqrt{\frac{2k}{3}} \quad (6.23)$$

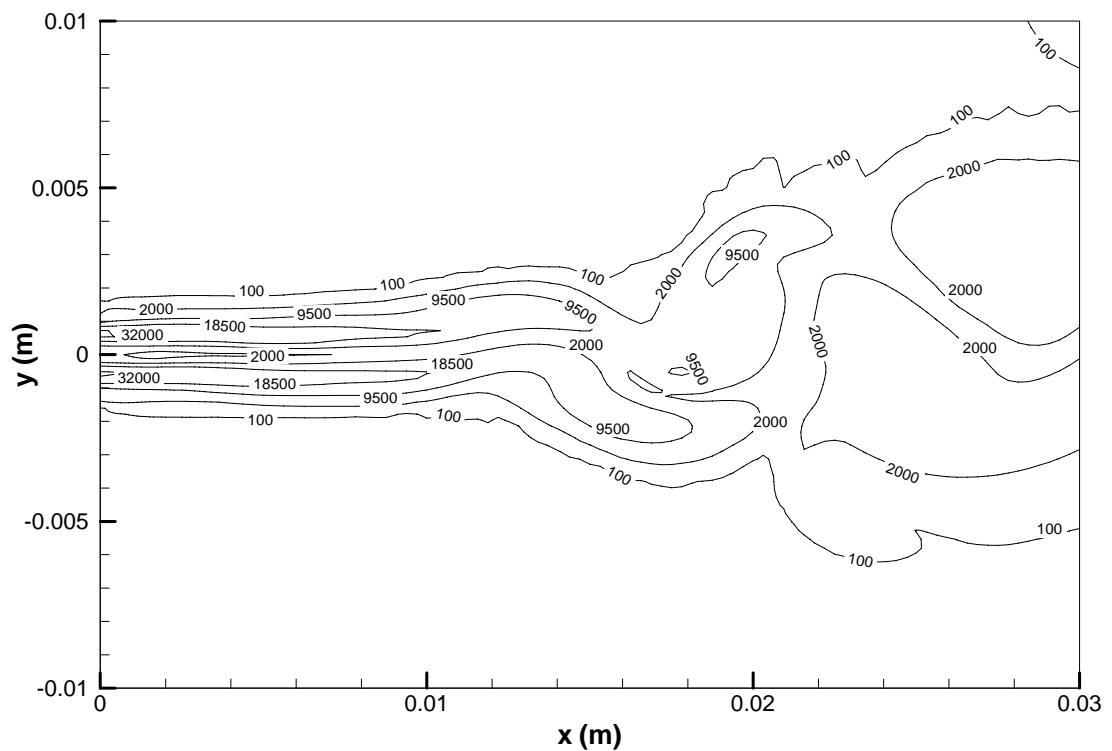
Considerando os resultados apresentados para as tensões de Reynolds, não é surpresa observar que os campos de intensidade turbulenta, apresentados na figura (6.21), refletem um comportamento similar, com os picos de máximo ficando bem visíveis. Os níveis de intensidade para $Re = 3.000$ e 7.200 são em torno de 30% maiores que aqueles encontrados para $Re = 400$.

Apesar da ocorrência de maiores taxas de deformação na região inicial do jato, o mesmo não acontece com os níveis de turbulência. Deve ser lembrado que a produção da energia cinética turbulenta deve-se ao produto de tensões de Reynolds pela taxa de deformação e, desta forma, a sua magnitude depende de ambas as quantidades. De fato, à medida que o jato se desenvolve, os níveis de turbulência aumentam junto às camadas cisalhantes, fazendo com que a produção da energia cinética turbulenta vá aumentando também.

Com o encontro das camadas cisalhantes, o efeito de difusão de quantidade de movimento se amplifica e os níveis turbulência crescem na região central do jato, conforme pode ser observado na figura (6.21), principalmente para $Re = 3.000$ e 7.200 . Este resultado está em acordo com os resultados de perfis de velocidade e de tensões de Reynolds, apresentados anteriormente.

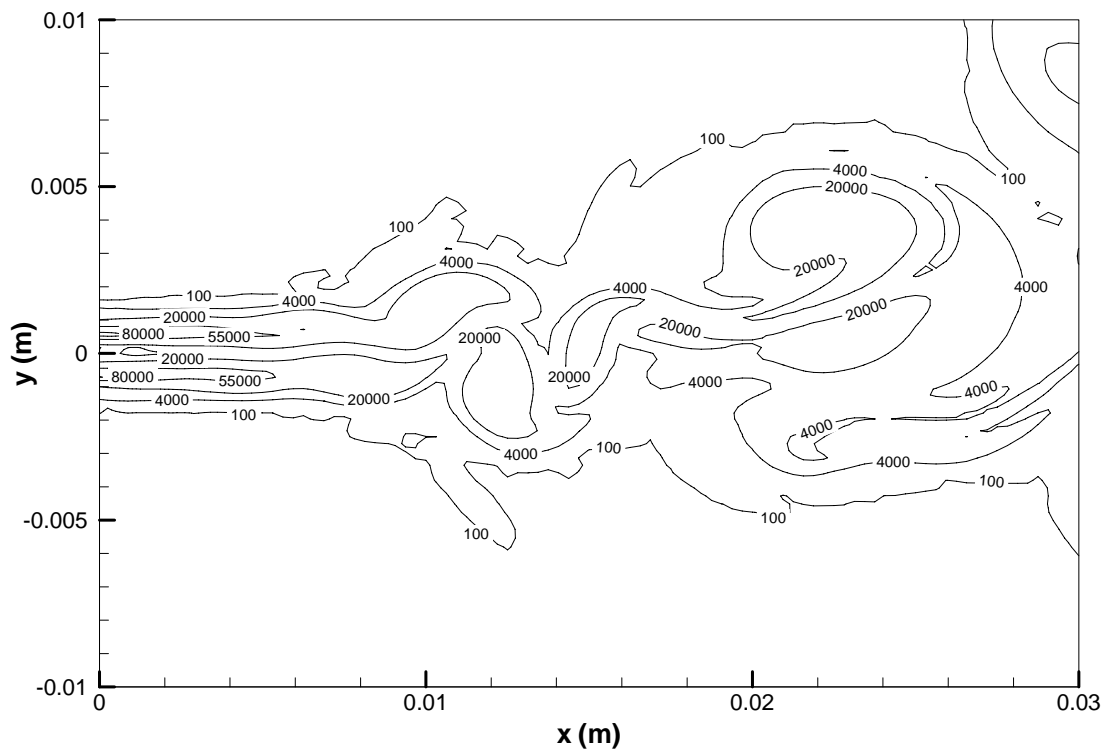


(a) $Re = 400$



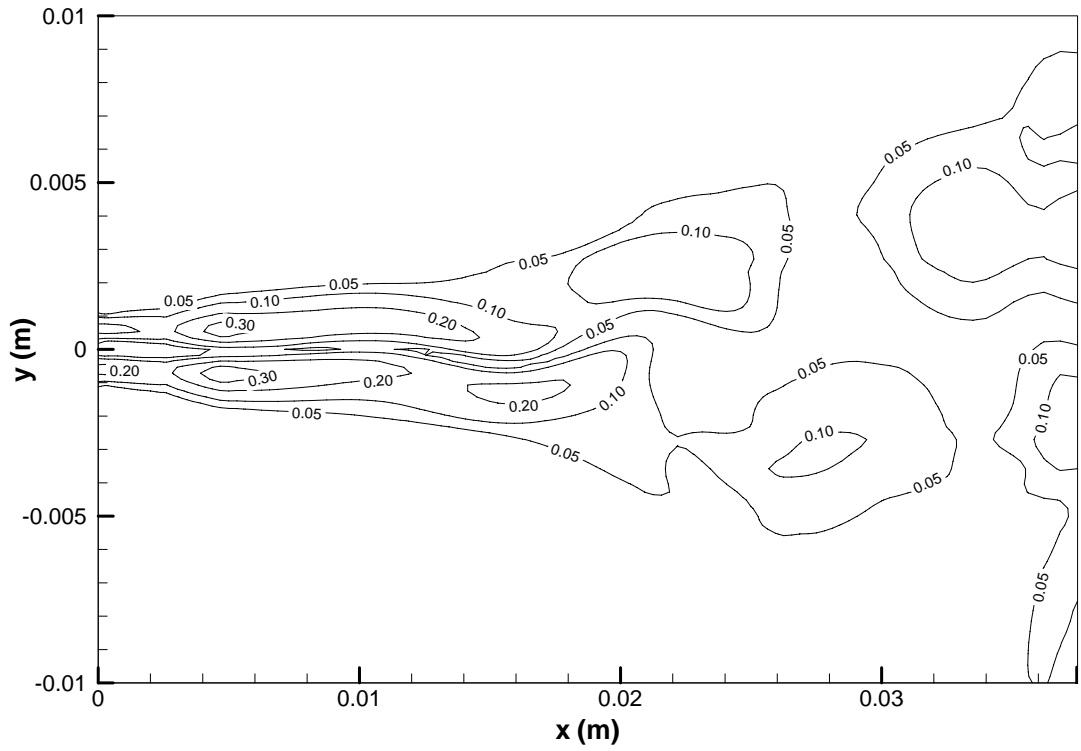
(b) $Re = 3.000$

Figura 6.19: Campos de vorticidade: (a) $Re = 400$; (b) $Re = 3.000$; (c) $Re = 7.200$.

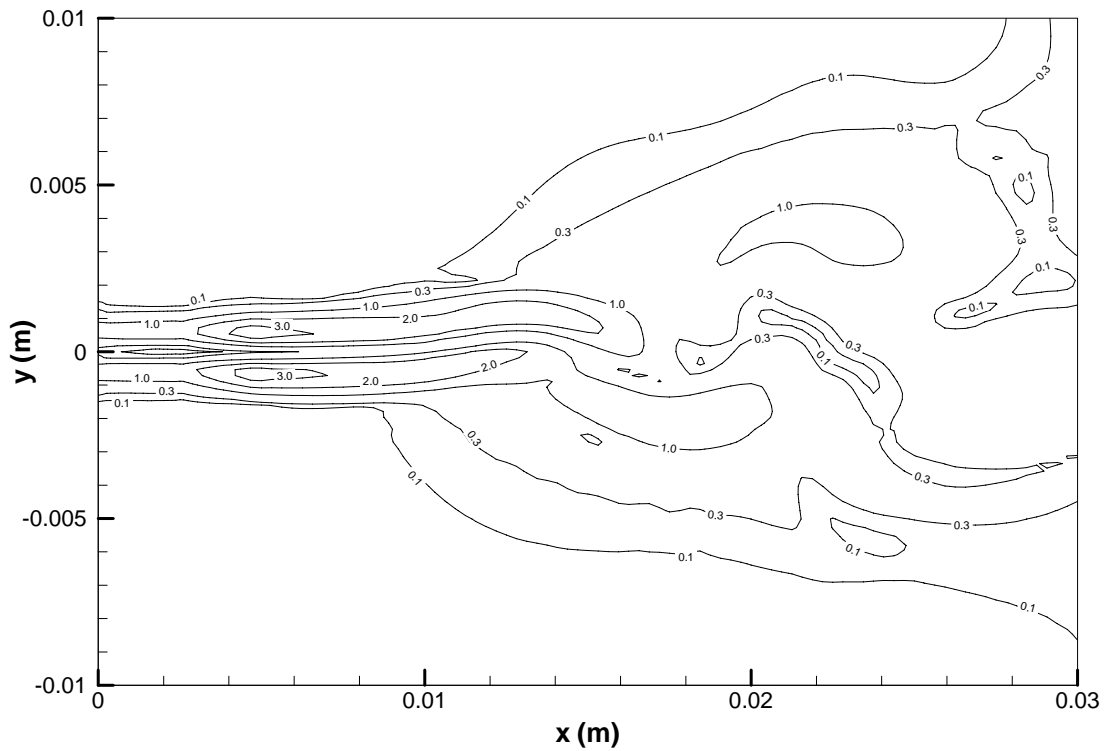


(c) $Re = 7.200$

Figura 6.19: (continuação).

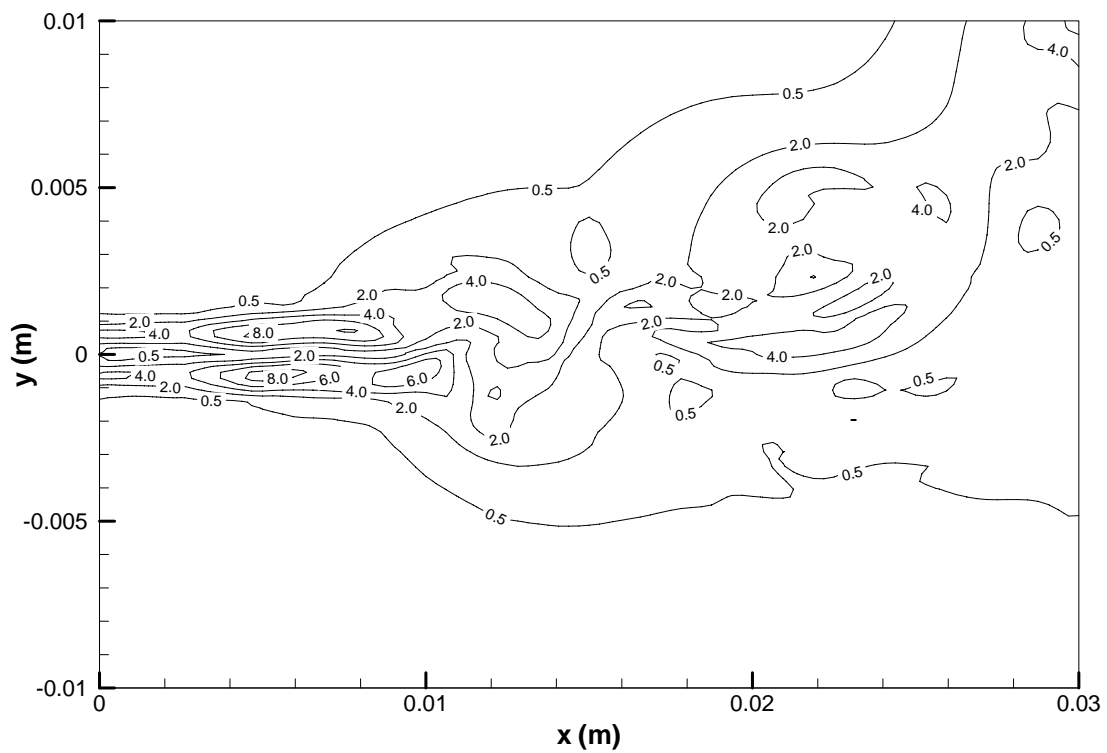


(a) $Re = 400$



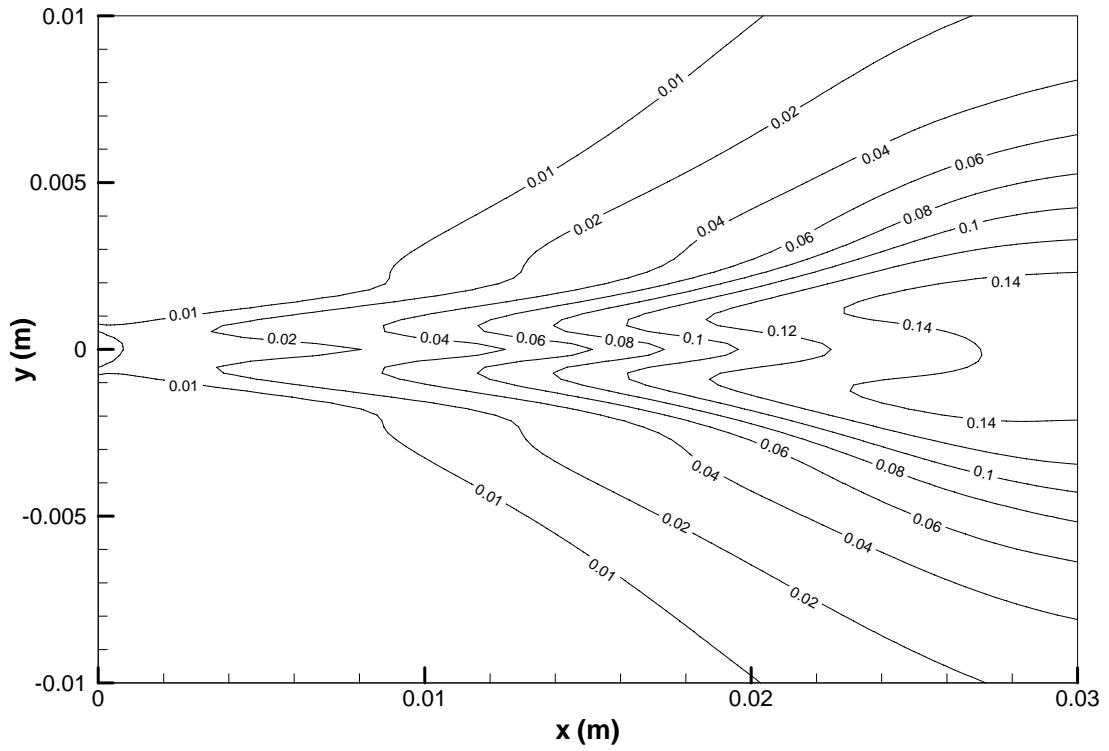
(b) $Re = 3.000$

Figura 6.20: Campos de viscosidade sub-malha: (a) $Re = 400$; (b) $Re = 3.000$; (c) $Re = 7.200$.

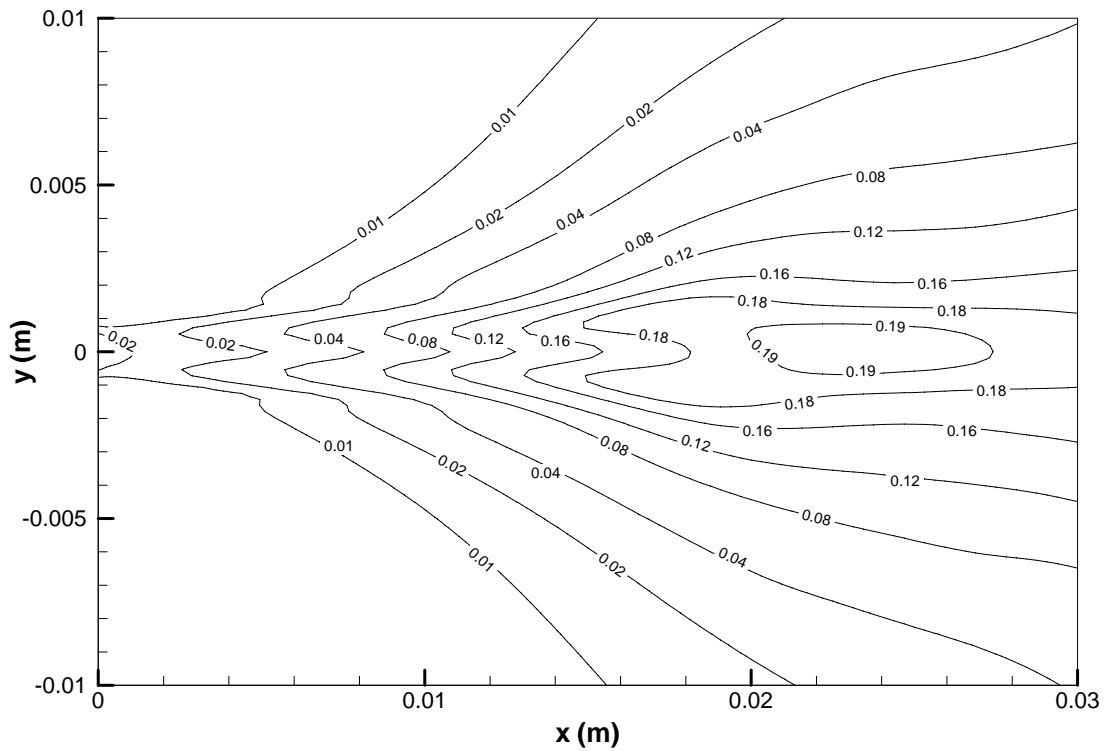


(c) $Re = 7.200$

Figura 6.20: (continuação).

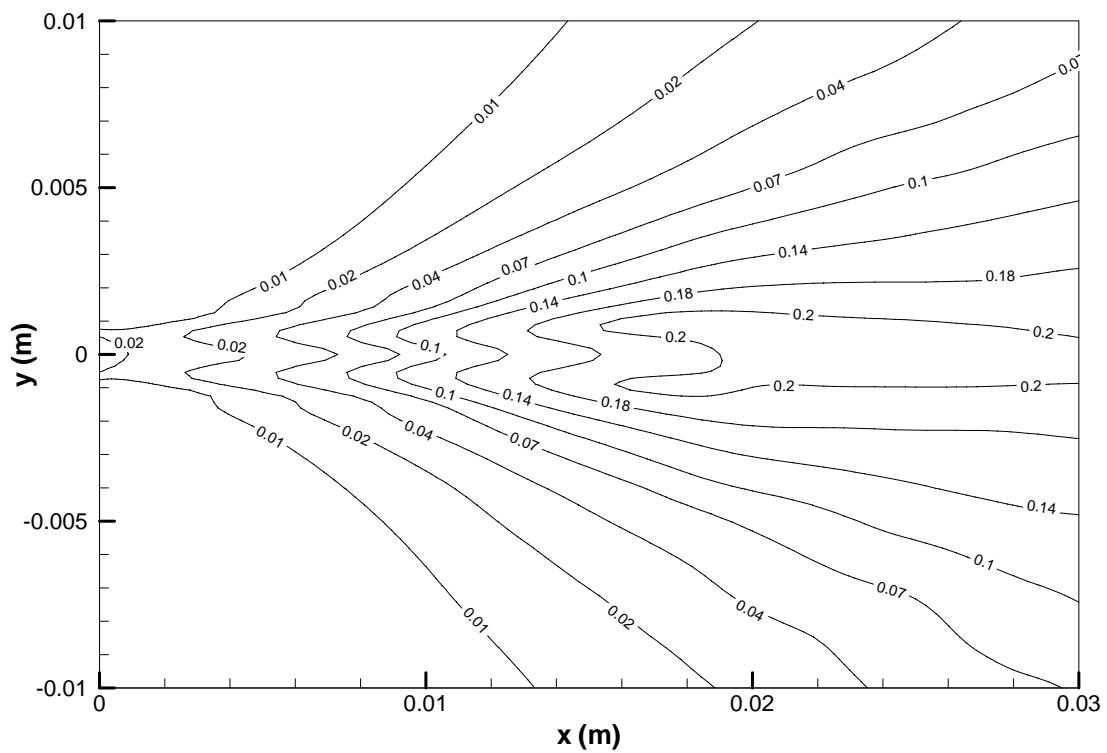


(a) $Re = 400$



(b) $Re = 3.000$

Figura 6.21: Campos de intensidade turbulenta: (a) $Re = 400$; (b) $Re = 3.000$; (c) $Re = 7.200$.



(c) $Re = 7.200$

Figura 6.21: (continuação).

6.3. O CAMPO ACÚSTICO

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos para o campo acústico, com base nos resultados de simulação transiente de jatos planos, cujos casos são os apresentados nas seções 6.2.2 e 6.2.3.

A determinação do campo acústico se deu através da implementação de uma rotina de cálculo para a relação integral que expressa a solução da equação da onda não homogênea de Lighthill. O termo de não homogeneidade foi descrito em detalhes nos capítulos 3 e 5.

Antes da apresentação dos resultados do campo acústico, apresenta-se a seguir o algoritmo empregado na sua obtenção.

Inicialmente, os resultados do escoamento obtidos através da simulação de grandes escalas (SGE) são armazenados em uma seqüência de arquivos, cujos nomes fazem referência a informações básicas do caso simulado (número de Reynolds, número de volumes da malha) e o instante de tempo dos dados contidos no arquivo. Por exemplo, o arquivo jp-Re3000-128128-0026 contém os dados no instante de tempo dado por $26\Delta t$, em uma simulação de jato plano com número de Reynolds igual a 3.000 e malha 128x128. Cada arquivo contém as coordenadas dos pontos nodais da malha, as componentes longitudinal e transversal do campo instantâneo de velocidade e a viscosidade de sub-malha. Assim, o primeiro passo consiste na leitura de cada um desses arquivos da série temporal para o escoamento sob análise.

Uma vez lidos, os dados dos arquivos são rearranjados para de tal forma a se obter uma indexação estruturada para a malha. Este passo torna-se necessário exclusivamente pelo fato de que o código Fluent v.6.0 (2002) adota malhas não-estruturadas, estabelecendo uma indexação para os pontos nodais com base na construção da malha, e não em uma seqüência que considere a posição dos nós.

Após realizar a indexação adequada dos dados, o segundo passo consiste na interpolação dos campos instantâneos de velocidade e de viscosidade turbulenta sobre uma nova malha computacional (figuras 6.22 e 6.23) cujos pontos são definidos pelas equações (5.55) e (5.56), tomando como base os pontos definidos na malha computacional utilizada para a SGE, conforme definido nas equações (6.18) e (6.19) e ilustrado na figura (6.1). Para cada ponto (y_i^1, y_j^2) , cujas coordenadas y_i^1 e y_j^2 são definidas, respectivamente, pelas equações (5.55) e (5.56), faz-se uma busca pela célula que contém o ponto (y_i^1, y_j^2) , na malha definida pelas equações (6.18) e (6.19). Feito isso, procede-se uma interpolação bilinear local das propriedades definidas em cada um dos quatro pontos que definem a célula contidora de

(y_i^1, y_j^2) e determina-se os valores para os campos de velocidade e para a viscosidade de sub-malha em cada ponto (y_i^1, y_j^2) , definido pelas equações (5.55) e (5.56).

O terceiro passo consiste na avaliação do termo de não homogeneidade da equação de Lighthill para todos os pontos nodais e instantes de tempo, através das rotinas de diferenciação à Chebyshev. Os resultados desta avaliação são armazenados em um conjunto de matrizes, uma para cada instante de tempo.

A equação (5.44) representa o sinal de pressão sonora no tempo sob a forma de uma representação integral da solução da equação de Lighthill. Aplicando-se o operador transformada de Fourier sobre a equação (5.44), obtém-se a transformada de Fourier complexa da pressão sonora, conforme exposto na seção 5.3.2. Vale lembrar que a transformada de Fourier é aplicada sobre a coordenada temporal, o que permite a obtenção da pressão sonora percebida por um observador localizado em uma determinada posição do espaço diretamente em função da frequência. No lado direito da equação (5.44), o operador transformada de Fourier comuta com a integral e, deste modo, é aplicado diretamente sobre o integrando do termo de não homogeneidade.

O quarto passo consiste na aplicação da transformada de Fourier discreta, na forma de transformada rápida de Fourier, sobre a série temporal para o termo de não homogeneidade indicado pela equação (5.57), em cada ponto da malha construída a partir do mapeamento definido pelas equações (5.55) e (5.56), conforme descrito na seção 5.3.2. As figuras (6.22) (6.23) ilustram dois exemplos de malha que podem ser definidos a partir desse mapeamento. Uma vez que os pontos do mapeamento definidos pelas equações (5.55) e (5.56) podem ser entendidos como a posição das fontes sonoras locais, esta operação permite a obtenção do sinal associado a cada uma dessas fontes diretamente no domínio da frequência.

No quinto passo, faz-se a escolha da posição do observador. No presente trabalho, as posições do observador usadas para a obtenção da pressão sonora são indicadas na tabela (6.3).

No sexto passo, calcula-se, para cada fonte sonora local, o produto entre o sinal gerado pela mesma (obtido na etapa anterior) e uma função, expressa como uma exponencial complexa, que tem por objetivo considerar o tempo de retardo, ou seja, o tempo necessário para o sinal percorrer a distancia entre a fonte e o observador. Essa operação tem como resultado a quantidade representada na equação (5.64), a qual pode ser entendida como o sinal de pressão sonora gerado pela fonte sonora local, no domínio da frequência.

O sétimo passo consiste em processar a integração numérica no domínio espacial ($\Omega=[0;0,0375\text{m}] \times [0;0,04\text{m}]$) para a obtenção da pressão sonora diretamente no domínio da frequência, a partir dos pontos definidos pelas equações (5.55) e (5.56). Assim, a pressão sonora sobre o observador corresponderá à soma discreta do sinal de pressão sonora gerado por cada fonte sonora local (já no domínio da frequência), conforme ilustra a equação (5.63).

O módulo da transformada de Fourier, conforme expresso na equação (5.65), representa o espectro de frequência da flutuação de pressão acústica percebido pelo observador, em uma determinada posição.

Posição do Observador	R (m)	θ (graus)
1	3	15
2	30	15
3	3	45
4	30	45

Tabela 6.3: Posições do observador em relação à entrada do jato.

As figuras (6.22) e (6.23) mostram as malhas computacionais utilizadas para a determinação do campo acústico, conforme o mapeamento definido pelas equações (5.55) e (5.56) descrito no capítulo 5, tendo 33×33 pontos nodais ($N=32$; $M=32$) e 65×65 pontos nodais ($N=64$; $M=64$), respectivamente.

Nos resultados apresentados pelas figuras (6.24), (6.25) e (6.26), o espectro da pressão acústica, em cada observador \bar{x} expresso pela tabela (6.3), ao longo de cada frequência ω_1 e conforme definido na equação (5.65), é apresentado sob a forma de nível de pressão sonora ($=20\log[\tilde{p}(\bar{x},\omega_1)/p_{\text{ref}}]$), em dB, cujo valor de referência, p_{ref} , corresponde a $20 \mu\text{Pa}$.

Com o objetivo de minimizar efeitos associados ao transiente do desenvolvimento do jato, utiliza-se o modelo de turbulência $k-\varepsilon$ para a obtenção de um campo inicial do escoamento para a simulação de grandes escalas. Além disto, antes da gravação dos arquivos dos campos instantâneos para a avaliação do campo acústico, a simulação de grandes escalas é executada por um período de tempo correspondente a 100 vezes o tempo característico da maior escala turbulenta $\tau^* = d/u^*$.

Assim, para $Re = 400$, a escala de tempo das maiores estruturas turbulentas, τ^* , é dada por:

$$\tau^* = \frac{d}{u^*} = \frac{0,0025\text{m}}{0,05 * 2,5\text{m/s}} = 0,02\text{s} \quad (6.24)$$

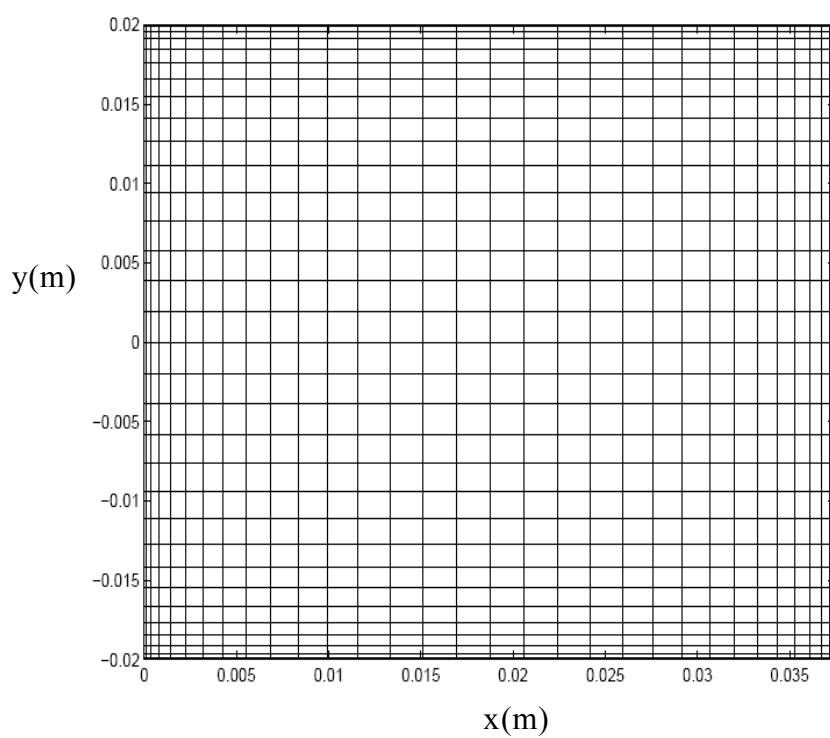


Figura 6.22: Malha computacional com pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto (33 x 33 pontos).

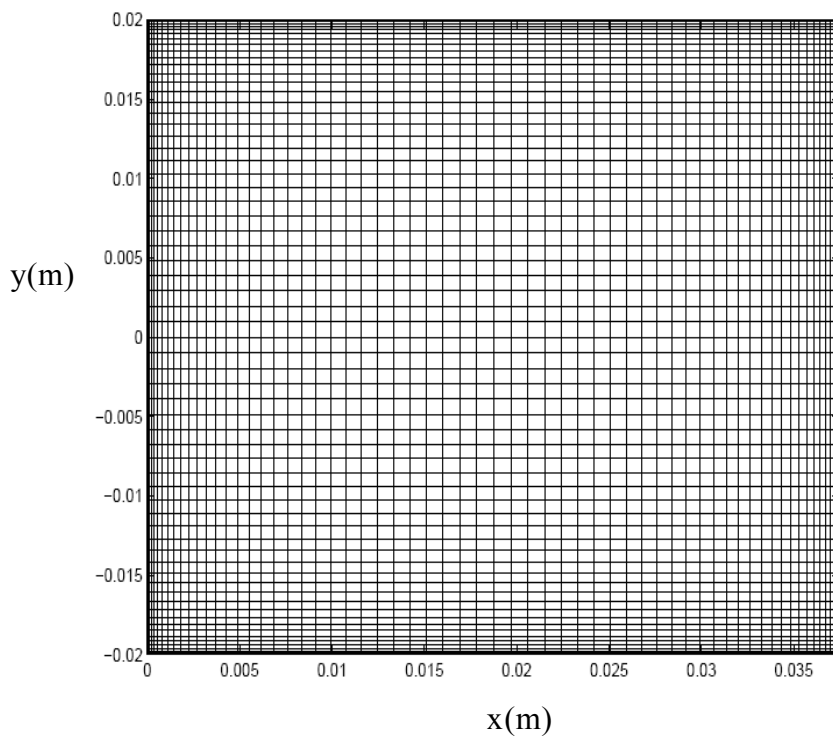


Figura 6.23: Malha computacional com pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto (65x65 pontos).

É conveniente definir outra escala de tempo, TT , que corresponde a 100 vezes o tempo característico da maior escala turbulenta. Assim, para $Re = 400$, obtém-se que

$$TT = 100\tau^* = 100 \frac{d}{u^*} = \frac{0,0025m}{0,05 * 2,5m/s} = 2s \quad (6.25)$$

O período de simulação no qual é realizada a coleta da informação sobre os campos instantâneos do escoamento (os quais serão posteriormente processados para a construção da fonte sonora) também corresponde à escala de tempo TT . Como o passo de tempo utilizado para a simulação de grandes escalas para o caso $Re = 400$ correspondente a $\Delta t = 0,00195$ s, pode-se verificar que 1024 arquivos com informações do campo instantâneo turbulento são gravados. A frequência máxima, de acordo com o critério de Nyquist, é dada por

$$f_{\max} = \frac{1}{2 * \Delta t} = 250\text{Hz} \quad (6.26)$$

No entanto, o espectro de frequência tem significado físico até a frequência f_k , que corresponde ao inverso da escala de tempo das menores escalas. De acordo com a equação (6.16), a escala de tempo do movimento turbulento de pequena escala pode ser avaliada como:

$$\tau_d = \tau^* (IRe)^{-1/2} = \frac{0,0025m}{0,05 * 2,5m/s} (0,05 * 400)^{-1/2} \cong 0,007s \quad (6.27)$$

Assim, para $Re = 400$, a frequência máxima é estimada em:

$$f_k = \frac{1}{\tau} \cong 135\text{Hz} \quad (6.28)$$

Finalmente, a resolução espectral para $Re = 400$ é dada por

$$\Delta f = \frac{1}{TT} \cong 0,5\text{Hz} \quad (6.29)$$

O mesmo procedimento é adotado para determinar o tempo de gravação dos dados e avaliar o valor máximo e a resolução do espectro de frequência para os demais casos ($Re = 3.000$ e 7.200). Os resultados dessas estimativas são resumidos na tabela (6.4).

Re	τ^*	TT	τ_d	f_k	Δt	Δf
400	20 ms	2 s	7 ms	135 Hz	2 ms	0,5 Hz
3.000	2,6 ms	0,26 s	0,22 ms	4,5 kHz	0,17 ms	4 Hz
7.200	1,83 ms	0,183 s	50 μ s	17,3 kHz	20 μ s	5,5 Hz

Tabela 6.4: Parâmetros para a simulação transiente do escoamento e para o cálculo do campo acústico.

A figura (6.24) apresenta o espectro de frequência da pressão sonora para $Re = 400$, percebida por um observador nas diferentes posições indicadas na tabela (6.2). O espectro resultante para a pressão sonora é característico de um ruído branco e o nível da pressão decai aproximadamente 10dB, desde a frequência 0 Hz até a frequência máxima f_k , indicada na tabela (6.4). Observa-se também que a lei do inverso da distância é verificada, ou seja, um afastamento da fonte de 10 vezes corresponde a uma diminuição de 20 dB na pressão sonora.

De acordo com os resultados, não há mudança significativa no espectro de frequência com o ângulo do observador em relação ao eixo longitudinal do jato.

Os resultados de pressão sonora para $Re = 3.000$ são apresentados na figura (6.25). Novamente, todos os cuidados relacionados ao transiente inicial do desenvolvimento do jato são realizados de maneira similar ao exposto para $Re = 400$. Conforme indicado na tabela (6.4), a escala de tempo TT, a escala representante das maiores estruturas turbulentas τ^* e a escala representante das menores estruturas turbulentas τ_d , são iguais a 0,26s, 2,6ms e 0,22ms, respectivamente. O passo de tempo utilizado para a simulação foi $\Delta t = 0,17$ ms, fornecendo uma série temporal registrada em 2.048 arquivos com os dados dos campos instantâneos de velocidades e de viscosidade de sub-malha.

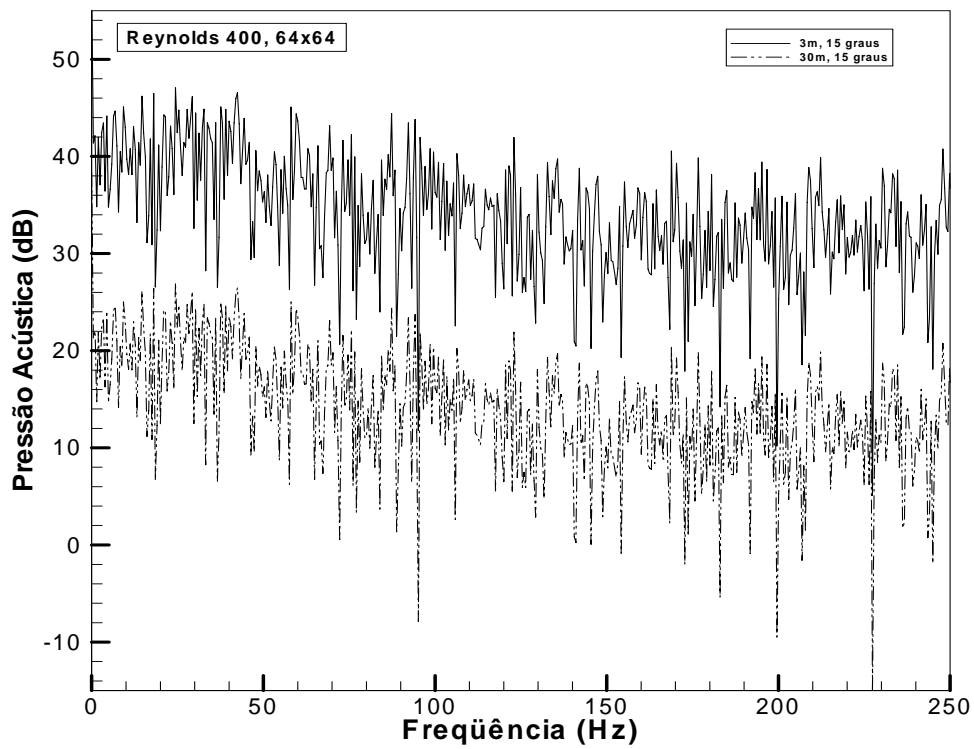
Observa-se que os níveis de pressão sonora são em torno de 15 dB maiores do que aqueles referentes a $Re = 400$. Também como no caso anterior, fica evidente a característica de ruído branco do espectro de frequência e o decaimento do nível de pressão sonora com o inverso da distância. Embora haja um decaimento no nível da pressão sonora com o aumento da frequência, deve ser notada uma elevação inicial até a frequência de 250 Hz. Nenhuma diferença sensível no comportamento do espectro de frequência é percebida com a variação da posição angular do observador em relação ao eixo principal do jato.

Para o jato de maior velocidade ($Re = 7200$) as escalas de tempo TT, τ^* e τ_d são iguais a 0,183s, 1,83ms e 50 μ s, respectivamente. O passo de tempo $\Delta t = 20\mu$ s resulta em um número de 4096 arquivos com as informações instantâneas do escoamento.

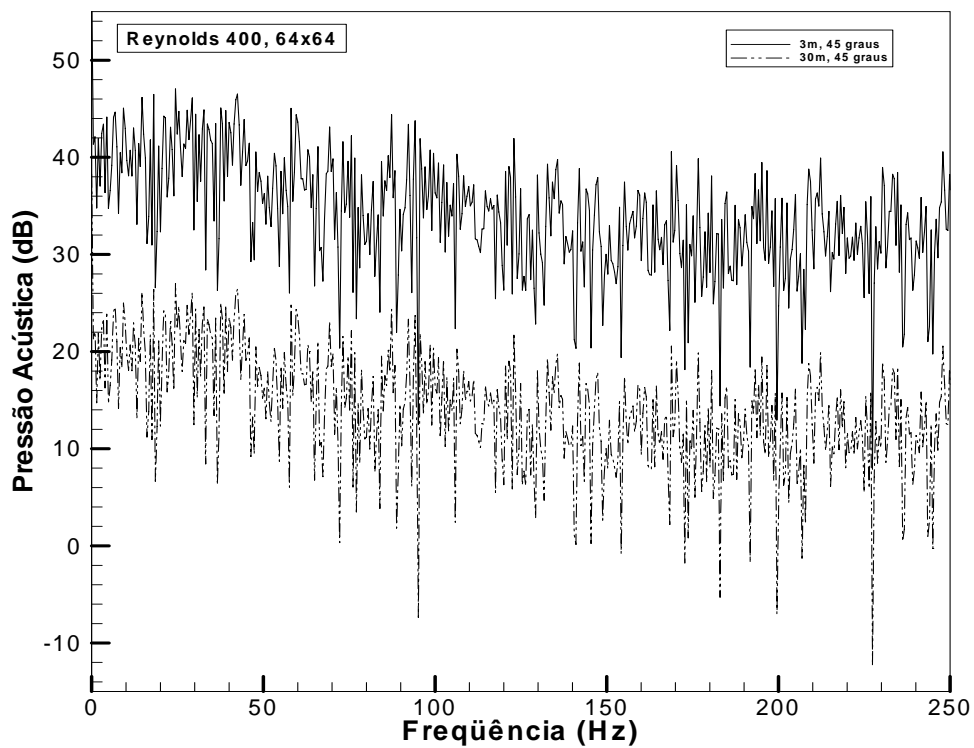
A figura (6.26) indica que para $Re = 7.200$ ocorre um aumento nos níveis de pressão sonora em torno de 17 dB, quando comparados aos resultados para $Re = 3.000$. Neste caso também se observa o decaimento do nível de pressão sonora com o inverso da distância em relação à fonte. Já o posicionamento angular do observador em relação à fonte não produz alterações significativas nos resultados.

Contrastando com os casos anteriores, o espectro de frequência mostra-se um pouco mais limpo, principalmente para as frequências mais elevadas. Uma possível explicação deste aspecto são os maiores níveis de pressão sonora em $Re = 7.200$, fazendo com que a parcela espúria do resultado de pressão, decorrente de erros de truncamento numérico, tenha uma contribuição menor sobre o valor total. Outra justificativa poderia ser a menor resolução espectral obtida para $Re = 7200$, cujo efeito é o de suavizar o espectro de frequência, funcionando como um filtro para as componentes espúrias.

A evolução dos níveis de pressão sonora ao longo da frequência (espectro) apresenta, para o caso correspondente a $Re = 7200$, algumas características particulares em relação aos outros casos. Os níveis de pressão sonora partem de aproximadamente 75 dB e percebe-se um decaimento suave até o nível de 70 dB, na frequência de 2000 Hz. Diferentemente do que ocorre nos outros casos, os níveis de pressão sonora voltam a crescer a partir da frequência de 2000 Hz, em uma taxa lenta, atingindo níveis de pressão sonora em torno de 80 dB, por volta de 10000 Hz. Os níveis de pressão sonora se mantêm praticamente constantes, em um nível de aproximadamente 80 dB, para frequências acima de 10000 Hz.

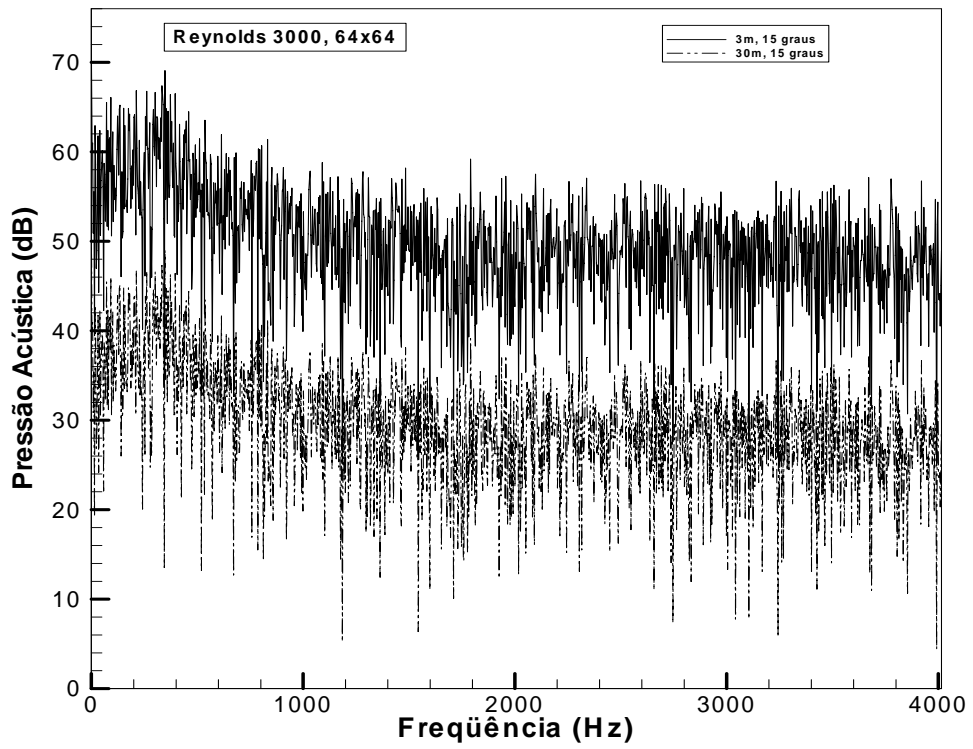


(a)

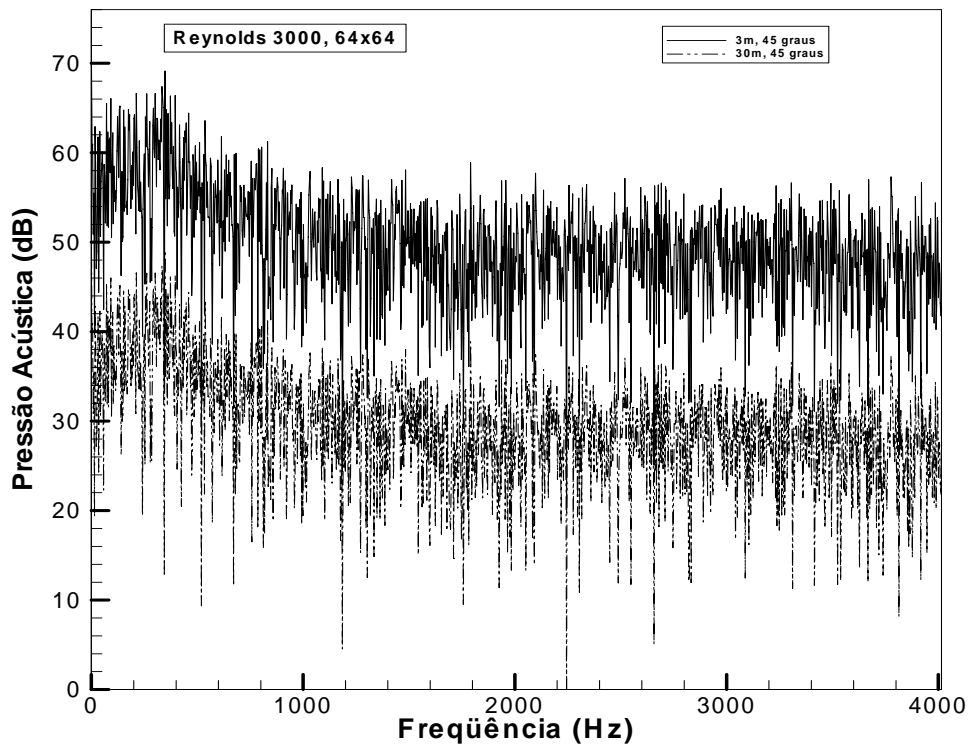


(b)

Figura 6.24: Espectro de frequência da pressão sonora; $Re = 400$.

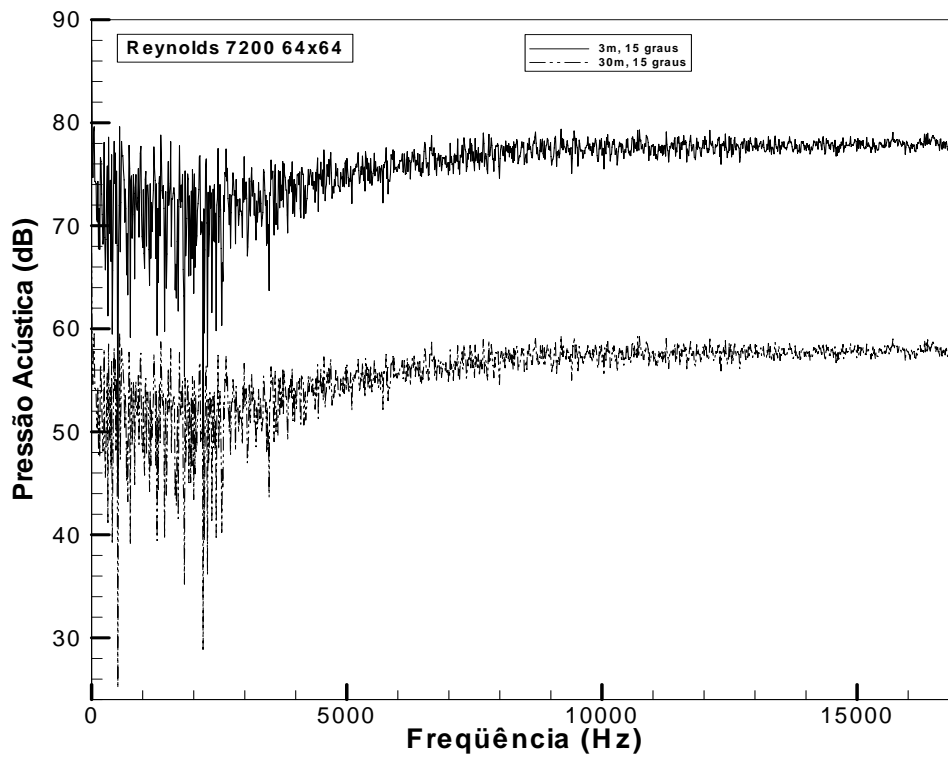


(a)

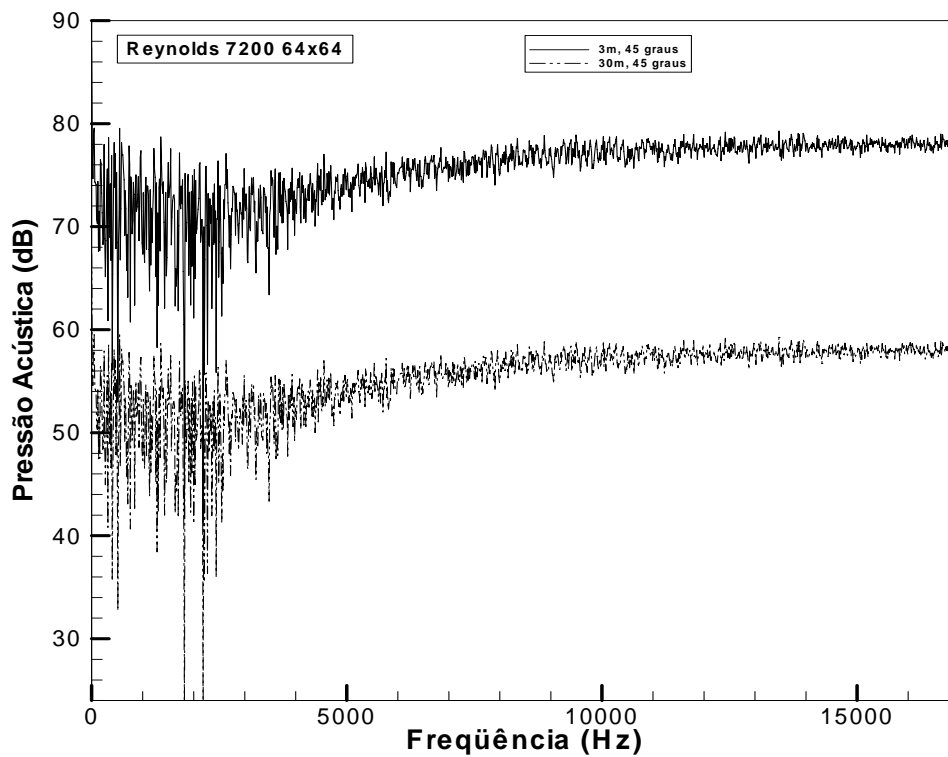


(b)

Figura 6.25: Espectro de frequência da pressão sonora; $Re = 3.000$.



(a)



(b)

Figura 6.26: Espectro de frequência da pressão sonora; $Re = 7.200$

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

7.1. COMENTÁRIOS PRELIMINARES

O presente trabalho propõe-se a atingir dois objetivos principais:

- i) Resolução numérica de jatos planos subsônicos turbulentos através da Simulação de Grandes Escalas (SGE);
- ii) Previsão numérica do ruído gerado pelos referidos jatos através da analogia acústica de Lighthill, utilizando os resultados de campos instantâneos do escoamento obtidos no item i) .

A metodologia de Simulação de Grandes Escalas (SGE) torna possível a obtenção do comportamento transiente das maiores estruturas turbulentas. Isto é realizado mediante a aplicação de um operador filtro sobre o campo de velocidades, com o intuito de estabelecer um número de onda de corte, o qual estabelece a menor escala de movimento a ser resolvida.

De acordo com o exposto no capítulo 4, a aplicação do filtro sobre as equações de Navier-Stokes gera um novo sistema de equações, onde as incógnitas de interesse são o campo de velocidades filtrado e o campo de pressão filtrado. As equações desse novo sistema são muito semelhantes às equações de Navier-Stokes, sendo que a diferença fundamental consiste na presença de tensores de segunda ordem (tensor de sub-malha, tensor de Leonard e tensor Cruzado), que necessitam de modelação.

Dentre os tensores citados, o mais importante do ponto de vista de caracterização do escoamento é o tensor de sub-malha, o qual, via de regra, é modelado de acordo com a hipótese de Boussinesq. Diferentemente da interpretação adotada em modelos baseados nas equações médias de Reynolds, a viscosidade de sub-malha é um parâmetro dependente do tempo, uma vez que é avaliada a partir da taxa de deformação instantânea do campo de velocidades filtrado.

Quando se utiliza o método de volumes finitos para a solução das equações filtradas, é prática comum assumir o filtro como sendo determinado pela própria malha computacional

empregada na discretização das equações. Assim, a largura do filtro (que define a menor escala possível de ser resolvida) corresponde a uma medida do espaçamento da malha e o campo de velocidade filtrado é representado pelos valores de velocidade calculados em cada um dos volumes da malha.

Após a obtenção da série temporal discreta para os campos de velocidade filtrada e de viscosidade de sub-malha, torna-se possível a construção da fonte sonora que será empregada no cálculo do campo acústico.

O campo acústico é determinado através da resolução da Analogia Acústica de Lighthill, representada por uma equação de onda não homogênea, cujo termo de não homogeneidade é função do campo instantâneo de velocidade e da massa específica na região compreendida pelo escoamento. Assim, o campo de velocidade determinado a partir da resolução das equações de Navier-Stokes filtradas fornece, em última instância, os dados necessários para a avaliação da fonte sonora do ruído.

Conforme visto no capítulo 3, para jatos isotérmicos e com baixo número de Mach, a dependência do termo de não homogeneidade em relação à massa específica pode ser desconsiderada. Assim, para esta categoria de escoamentos, o termo de não homogeneidade da equação de Lighthill depende exclusivamente do campo de velocidades determinado pelo escoamento, o que permite o desacoplamento entre o problema de mecânica dos fluidos e o problema acústico. Deste modo, é possível a aplicação do operador inverso sobre a equação de Lighthill, o que permite a obtenção da pressão acústica na forma de um potencial retardado através de uma relação integral que envolve a convolução entre o termo de não homogeneidade de Lighthill e a função de Green referente ao problema hiperbólico definido pelo operador de onda clássico, com condições de fronteira livre.

Para a solução do jato plano turbulento adotou-se um domínio computacional de comprimento longitudinal $x = 15d$, onde $d (= 0,0025 \text{ m})$ corresponde a largura do jato na região de entrada. Para a direção transversal empregou-se uma dimensão $y = 16d$. O jato foi resolvido para diferentes valores de número de Reynolds $Re (= 400, 3.000 \text{ e } 7.200)$, definido com base na largura e na velocidade média na entrada do jato. A malha utilizada para a simulação do escoamento consiste em um total de 16.384 volumes (128 na direção x e 128 na direção y).

Resultados de diversas grandezas médias foram obtidos das simulações, tais como perfis de velocidade, perfis de tensões de Reynolds e campo de intensidade turbulenta. Além disto, campos instantâneos de vorticidade e de viscosidade de sub-malha foram também apresentados para ilustrar a natureza transiente do escoamento.

De posse dos campos do escoamento nos diversos instantes de tempo para $Re = 400$, 3.000 e 7.200, foi possível então realizar a previsão do campo acústico. O algoritmo utilizado no processo de obtenção do campo acústico compreende a seguinte seqüência de operações:

- i. Leitura dos dados referentes aos campos de velocidade e de viscosidade turbulenta contidos em cada arquivo da série temporal;
- ii. Obtenção, mediante interpolação, de um novo conjunto de arquivos para a série temporal, representando os valores das propriedades do escoamento na malha a ser empregada para o cálculo do termo de não homogeneidade, ilustrada nas figuras 6.22 e 6.23. A nova malha é constituída por pares ordenados, cujas coordenadas correspondem aos pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto, conforme expresso pelas equações (5.55) e (5.56);
- iii. Obtenção da série temporal para o termo de não homogeneidade de Lighthill em todos os pontos da nova malha computacional gerada para o cálculo do campo acústico, através das rotinas de diferenciação a Chebyshev;
- iv. Aplicação da transformada de Fourier discreta sobre a série temporal compreendida pelo valor do termo de não homogeneidade de Lighthill nos pontos cujas coordenadas são espessadas pelas equações (5.55) e (5.56);
- v. Escolha da posição do observador;
- vi. Correção de fase, devido aos tempos de retardo associados a cada ponto pertencente à região na qual o jato é resolvido (domínio físico do jato);
- vii. Integração numérica dentro do domínio físico do jato, utilizando como base a malha os pontos cujas coordenadas são definidas pelas equações (5.55) e (5.56);
- viii. Obtenção do espectro de freqüência da pressão sonora, através da determinação do módulo do número complexo, obtido do processo de integração numérica.

A partir desta metodologia, foram obtidos os espectros de freqüência para várias posições do observador, sob diferentes condições de operação do jato (terceira, quarta e quinta colunas das tabelas 6.1 e 6.2)

7.2. PRINCIPAIS CONCLUSÕES

A análise dos resultados referentes a grandezas médias obtidas para os jatos através da simulação de grandes escalas, bem como a comparação com resultados da literatura, mostra que os mesmos são fisicamente consistentes.

Os resultados indicam que a metodologia empregada apresenta um grande potencial para a resolução de jatos, apesar de algumas limitações encontradas. A primeira delas está relacionada ao caráter altamente dissipativo do modelo de Smagorinsky, utilizado para a determinação da viscosidade de sub-malha. Esta deficiência pode ser verificada através da comparação entre a evolução da velocidade média e da tensão de Reynolds longitudinal com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

Outra limitação da metodologia decorre do fato de que o código utilizado para a resolução do jato não oferece opções de condição de contorno muito apropriadas para as superfícies livres do problema em análise. Dentre as disponíveis, a mais satisfatória é a de condição de pressão prescrita. Deve ser mencionado que a resolução do campo acústico requer que a solução do escoamento seja obtida a partir de condições de contorno não-reflexivas, a fim de evitar a geração de fontes de ruído espúrias que comprometam a quantificação do campo acústico.

Apesar dos resultados obtidos para o campo acústico carecerem de validação, os níveis de pressão sonora previstos numericamente apresentam consistência física. Por exemplo, a ‘lei do inverso da distância’ é rigorosamente observada em quase todas as faixas de frequência. Além disto, os resultados do espectro de frequência da pressão sonora apresentam, em quase todos os casos, características semelhantes a ruídos brancos, conforme é previsto pela teoria.

Apesar das observações acima, é de se esperar que os resultados contenham uma parcela significativa de ruído espúrio, decorrente de erros de truncamento e pelo uso de condições de contorno de caráter reflexivo na resolução dos casos de jato plano investigados no presente trabalho. Uma segunda fonte de erro na metodologia está associada ao processo de interpolação realizado sobre os dados obtidos da simulação de grandes escalas, tendo em vista que a mesma é linear. Outras possíveis fontes de erro correspondem ao processo de integração numérica no espaço e à transformada de Fourier discreta aplicada sobre o termo de não homogeneidade de Lighthill, na coordenada temporal.

Uma grande dificuldade encontrada para a validação da metodologia desenvolvida neste trabalho está associada à carência de dados sobre o ruído gerado por jatos turbulentos na faixa de número de Reynolds e número de Mach englobados pelos casos simulados.

As restrições indicadas acima são fortes o suficiente para que se tenha cautela na interpretação dos resultados do campo acústico aqui apresentados. No entanto, apesar de suas limitações, a metodologia possui grande potencial para desenvolvimentos futuros, principalmente pelo fato de ser de natureza híbrida e, desta forma, requerer recursos computacionais reduzidos quando comparada a metodologias diretas (Wang et al., 1996).

7.3. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com base nos resultados obtidos com metodologia desenvolvida neste trabalho, e em função das limitações encontradas, propõem-se vários tópicos a serem analisados em trabalhos futuros:

- i. Implementação do código computacional para a resolução do jato turbulento a fim de reduzir os erros de truncamento. Sugere-se o emprego de métodos de diferenças finitas de alta ordem ou métodos espectrais, devido a grande disponibilidade de esquemas espaciais de elevada precisão testados para esses métodos, o que não ocorre com o método de volumes finitos;
- ii. O esquema de discretização no tempo para a resolução do jato deve ser, também, de alta ordem. Esquemas com avanço explícito são opções dignas de menção, considerando a sua rapidez computacional. Vale lembrar que esquemas implícitos introduzem efeitos difusivos, podendo prejudicar a previsão do campo acústico;
- iii. Implementação de condições de contorno não-reflexivas, a partir dos trabalhos de Thompson (1987) e Giles (1990), e de zonas de amortecimento, de acordo com o trabalho de Hu (1996);
- iv. O modelo de grandes escalas mostrou-se bem sucedido na previsão do jato turbulento. Porém, o caráter excessivamente dissipativo do modelo de Smagorinsky indica que o modelo de sub-malha deve ser substituído por

- alternativas como, por exemplo, modelos de sub-malha dinâmica, os quais apresentam melhores resultados, de acordo com Le Ribault et al (1999);
- v. Solução do jato para uma formulação tridimensional, de tal forma a capturar os aspectos não lineares da turbulência nas três direções espaciais;
 - vi. Na metodologia desenvolvida com o objetivo de previsão do campo acústico, sugere-se a implementação de esquemas de interpolação de maior ordem sobre a malha utilizada nas rotinas de diferenciação a Chebyshev e no processo de integração numérica, além do uso de esquemas de integração numérica mais precisos;
 - vii. Investigação de implementações numéricas para a forma integral expressa pela equação (5.45);
 - viii. Na presente metodologia, o sinal de pressão sonora é obtido no espaço de frequência. Sugere-se a obtenção do sinal de pressão no domínio do tempo, através da aplicação de transformada de Fourier inversa, para posterior emprego e teste de janelas acústicas, as quais têm o objetivo de minimizar os efeitos de truncamento do sinal, e a obtenção então do sinal do domínio de frequência;
 - ix. Determinação da Densidade Espectral de Potência e espectros de intensidade de 1/3 de oitava;
 - x. Previsão do sinal de pressão acústica utilizando a hipótese de jato compacto no código computacional e comparação com o presente código, que não faz uso da referida hipótese;
 - xi. Utilização de técnicas de remoção do ruído espúrio gerado pela condição de fronteira de saída de massa, conforme as idéias expostas no trabalho de Wang et al. (1996);
 - xii. Utilização da função de Green associada ao problema de valor inicial e de contorno envolvendo o operador onda bidimensional em domínio ilimitado e avaliação do impacto desta medida sobre a previsão do campo acústico.

- xiii. Resolução da equação de Lighthill utilizando métodos de diferenças finitas ou métodos espectrais com esquemas espaciais e temporais de alta ordem, fronteiras com condições de contorno não-reflexivas, utilizando os dados do jato previstos pela simulação de grandes escalas;
- xiv. Resolução da analogia de Lighthill utilizando métodos de transformação integral (transformadas de Fourier, Hankel);
- xv. Estudo de outras analogias acústicas.

REFERÊNCIAS

- Akselvoll K., Moin P., “Large-Eddy Simulation of Turbulent Confined Coannular Jets”, *J. Fluid Mech.*, vol. 315, pp. 387-411, 1996.
- Antonia, R.A., Browne, L.W.B., Rajagopalan, S. and Chambers, A.J., “On the Organized Motion of a Turbulent Plane Jet”, *J. Fluid Mech.* vol. 134, pp. 49-66, 1983.
- Antonopoulos-Domis, “Large-Eddy Simulation of a Passive Scalar in Isotropic Turbulence”, *J. Fluid Mechanics*, vol. 104, pp. 55-79, 1981.
- Armstrong Jr, R.R., “Influence of Mach Number on Coherent Structure Relevant to Jet Noise”, *AIAA J.*, vol. 19, No 6, pp. 677-683, 1981.
- Bailly, C., Lafon, P., Candel, S.; “Subsonic and Supersonic Jet Noise Predictions from Statistical Source Models”, *AIAA Journal*. Vol. 35(11), pp. 1688 – 1696, 1997.
- Bastin, F., Lafon, P., Candel, S.; “Computation of Jet Mixing Noise Due to Coherent Structures: the Plane Jet Case”, *J. Fluid Mech.* Vol. 335, pp. 261 – 304, 1997.
- Bogey, C.: "Calcul Direct Du Bruit Aerodynamique et Validation de Modeles Acoustiques Hybrides" – Tese de Doutorado. Laboratoire de Mecanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509, Ecole Centrale de Lyon, 2000.
- Boris et al., “New Insights into Large Eddy Simulation”, *Fluid Dyn. Res.*, vol. 10 (4-6), pp. 199-228, 1992.
- Bradbury, L.J.S.; “The Structure of a Self-Preserving Turbulent Plane Jet”, *J. Fluid Mech.* Vol. 23, No1, pp. 31-64, 1965.
- Bridges J., Hussain F., “Direct Evaluation of Aeroacoustic Theory of Jet”, *J. Fluid Mech.*, vol. 240, pp. 469-501, 1992.
- Browne L.W.B., Antonia, R.A., Rajagopalan, S., Chambers, A.J.; “Interaction Region of a Two-Dimensional Turbulent Jet in still air,” em *Structure of Complex Turbulent Shear Flow*, editado por R. Dumas and L. Fulachier IUTAM Symp. Marseille (Springer, New York), pp. 411-419, 1983
- Canuto, C.; Hussaini, M. Y.; Quarteroni, A.; Zang, T. A.: “Spectral Methods in Fluid Dynamics”. Springer-Verlag, New York, 1988.
- Clark, R.A., Ferziger, J.H., Reynolds, W.C., “Evaluation of Sub-Grid-Scale Models using an Accurately Simulated Turbulent-Flow”, *J. Fluid Mech.*, vol. 91, pp. 1-16, 1979.
- Curle, N.; “The Influence of Solid Boundaries upon Aerodynamic Sound”, *Proc. Roy. Soc.* Vol. A231, No 1187, pp. 505 – 514, 1955.
- Crow, S.C., “Aerodynamic Sound Emission as a Singular Perturbation Problem”, *Stud. Appl. Math.*, vol. XLIX, n. 1, pp. 60-83, 1970.

Dai, Y., Kobayashi, T., Taniguchi, N. ; “Investigation of Organized Structures in Plane Turbulent Jet Flow by Using Large Eddy Simulation”, Proceedings, 10th Symposium on Turbulent Shear Flows, Vol. 1, 1995.

Deardorff, J.M., “A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow at large Reynolds Number”, J. Fluid. Mechanics, vol. 41, pp. 453-480, 1970.

Doak, P. E.; “Analysis of Internally Generated Sound in Continuous Materials: 2. A Critical Review of the Conceptual Adequacy and Physical Scope of Existing Theories of Aerodynamic Noise, With Special Reference to Supersonic Jet Noise”, J. Sound and Vibr., Vol. 25(2), pp. 263–335, 1972.

Dowling, A. P.; Ffowcs Williams, J. E. and Golsdstein M. E.; “Sound Production in a Moving Stream”, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. A288, No 1353, pp. 321 – 349, 1978.

Ferziger, J.H. & Peric, M., “Computational Methods for Fluid Dynamics”, Springer-Verlag, 1996.

Ffowcs Williams, J. E.; “The Noise from Turbulence Convected at a High Speed”, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. A255, No 1061, pp. 469–503, 1963.

Ffowcs Williams, J. E.; “On Vortex Sound Radiation from Turbulent Boundary Layers Formed on Compliant Surfaces”, J. Fluid. Mech., Vol. 22(2), pp. 347–358, 1965.

Ffowcs Williams, J.E., “Noise Mechanisms”, Technical Evaluation Report, AGARD-CP-131, pp. vii-xx, 1974.

Ffowcs Williams, J. E. and Hawkings, D.L.; “Sound Generated by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion”, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. A264, No 1511, pp. 321 – 342, 1969.

Findikakis, A.N., Street, R. L., “Algebraic Model for Subgrid-Scale Turbulence in Stratified Flows”, J. Atmos. Sci., vol. 36 (10), pp. 1934-1949, 1979.

Fluent v6.0, Fluent Incorporate Inc., Centerra Resource Park, 10, Cavendish Court, Lebanon, New Hampshire, USA, 03766, 2002.

Germano, M.; “A Proposal for a Redefinition of the Turbulent Stresses in Filtered Navier-Stokes Equations”, Phys. Fluids, vol. 29(7), pp. 2323-2324, 1986.

Giles, M. B.; “Nonreflecting Boundary Conditions for Euler Equation Calculations”, AIAA Journal. Vol. 28(12), pp. 2050 – 2057, 1990.

Gutmark, E., Wignanski, I.; “The Planar Turbulent Jet”, J. Fluid Mech. Vol. 73(3), pp. 465-495, 1976.

Howe, M.S., “The generation of sound by aerodynamic sources in a homogeneous steady flow”, J. Fluid Mech., 67(3), pp. 597-610, 1975.

Hu, F.Q.; “On Absorbing Boundary Conditions for Linearized Euler Equations in a Perfect Matched Layer” *J. Comp. Physics*, vol. 129, pp. 201-219, 1996.

Hutchinson B. R.; Raithby, G. D.: “A Multigrid Method Based on the Additive Correction Strategy”. *Numerical Heat Transfer*, vol. 9, pp. 511-537, 1986.

Jones, W.P., Launder, B.E.; “The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena With a Two-Equation Model of Turbulence”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 16, 1119-1130, 1973.

Laufer, J., Yen, T.; “Noise Generation by a Low-Mach Number Jet”, *J. Fluid Mech.*, 134, 1-31, 1983.

Leonard, B. P., “A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation”, *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, vol. 19, pp. 59-98, 1979.

Le Ribault, C., Sarkar, S., Stanley, S.A.; “Large Eddy Simulation of a Plane Jet”, *Physics of Fluids*, vol. 11, No 10, pp. 3069-3083, 1999.

Liepmann, H.W.; “Aspects of the Turbulence Problem. Part II.”, *Angew. Math. Mech.*, vol. 3, pp. 407-426, 1952.

Lighthill, M. J.; “On Sound Generated Aerodynamically: I. General Theory”, *Proc. Roy. Soc. Vol. A211*, No 1107, pp. 564 – 587, 1952.

Lighthill, M. J.; “On Sound Generated Aerodynamically: II. Turbulence as a Source of Sound”, *Proc. Roy. Soc. Vol. A222*, No 1148, pp. 1–32, 1954.

Lighthill, M. J.; “The Bakerian Lecture 1961: Sound Generated Aerodynamically”, *Proc. Roy. Soc. Vol. A26A*, No 1329, pp. 147–182, 1962.

Lighthill, M. J.; “Jet Noise”, *AIAA Journal*. Vol. 1(7), pp. 1507 – 1517, 1963.

Lilley, G.M., The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol. IV – Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Part II: Generation of sound in a mixing region, Air Force Aero Propulsion Laboratory, AFAPL-TR-72-53, Vol. 4., 1972.

Lilley, G.M., “On the Noise from Jets”, *Noise Mechanisms*, AGARD-CP-131, pp. 13.1-13.12, 1974.

Lilley, G.M., The radiated noise from isotropic turbulence with applications to the theory of jet noise, *J. Sound Vib.*, 190(3), 463-476, 1996.

Lilly, D.K., “The Representation of Small-Scale Turbulence in Numerical Simulation Experiments”, *Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Environmental Sciences*”, Goldstine, H.H., ed., pp. 195-210, IBM Form n. 320-1951, 1967.

Lyrantzis, A. S.; “Review: The Use of Kirchhoff’s Method in Computational Aeroacoustics”, *J. Fluids Engineering*, Vol. 116, pp. 665–676, 1994.

Lush, P. A.; “Measurements of Subsonic Jet Noise and Comparison With Theory”, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 46(3), pp. 477–500, 1971.

MacGregor, G.R., Ribner .H.S, Lam H. ; “ “Basic” Jet Noise Patterns After Delection of Convection and Refraction Effects”, *J. Sound Vib.*, 27, 437-454, 1973.

Maliska, C. R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1995.

Meecham, W. C. and Ford G.W.; “Acoustic Radiation from Isotropic Turbulence”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 30(4), pp. 318-322, 1958.

Mitchell, B.E., Lele, S.K., Moin, P.; “Direct Computation of Mach Wave Radiation in an Axissymmetric Supersonic Jet ”, *AIAA Journal*. Vol. 35(10), pp. 1574 – 1580, 1997.

Möhring, W.; “On Vortex Sound at Low Mach Number”, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 85(4), pp. 685–691, 1978.

Mollo-Christensen, E., Kolpin, M. A., Martucelli, J.R.; “Experiments on Jet Flows and Jet Noise for Field Spectra and Directivity Patterns”, *Massachussets Institute of Technology ASRL TR 1007*, 1963.

Musafir, R. E.: “Geração de Ruído por Jatos Turbulentos” – Dissertação de Mestrado. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1984.

Nachbin, A.: “Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos”. 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2001

Phillips, O.M., “On the Generation of Sound by Supersonic Turbulent Shear Layers, *J. Fluid Mech.*, 9(1), 1-28, 1960.

Pilon, R., Lyrantzis, A.S.; “Development of an Improved Kirchhoff Method for Jet Aeroacoustics”, *AIAA Journal*. Vol. 36(5), pp. 783 – 790, 1998.

Pope, S. B.: “Turbulent Flows”. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Powell, A., “Aerodynamic Noise and the Plane Boundary”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 32(8), pp. 982-990, 1960.

Powell, A.; “Vortex Sound”, U. Calif, Los Angeles, Dept. Eng. Rep. No. 61–70, 1961.

Powell, A.; “Three-Sound-Pressure Theorem, and its Application, in Aerodynamically Generated Sound”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 34(7), pp. 902-906, 1962.

Powell, A.; “Theory of Vortex Sound”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. 36(1), pp. 117-195, 1964.

- Proudman, I.; “The Generation of Noise by Isotropic Turbulence”, Proc. Roy. Soc. Vol. A, No 214, 119-132, 1952.
- Ramaprian, B. R, Chandrasekara, M.S.; “LDA Measurements in Plane Turbulent Jets”, J. Fluids Engineering, Vol. 107, pp. 264–271, 1985.
- Reynolds, O.: “On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination the Criterion”, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. 186, Parte 1, pp. 122 – 164, 1969.
- Reynolds, W.C.; “The Potential and Limitations of Direct and Large Eddy Simulation”, in J. L. Lumley (Ed.), *Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads*, pp. 313–343, Springer-Verlag, Berlim, 1990.
- Ribner, H. S.; “New Theory of Jet Noise Generation”, J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 31(11), pp. 245-246, 1959.
- Ribner, H. S.; “Aerodynamic Sound from Fluid Dilatations: A Theory of Sound from Jets and Other flows”, Univ. of Toronto, Institute of Aero physics, Rep. No 86, (AFOSRTN 3430), 1962.
- Ribner, H. S.; “The Generation of Sound by Turbulent Jets”, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. VIII, pp. 103 – 182, Academic Press, New York, 1964.
- Ribner, H.S., “Perspectives on Jet Noise”, AIAA-81-0428, 1981.
- Sagaut, P.: “Large Eddy Simulation for Incompressible Flows” 2^a edição. Springer, Berlim, 2002.
- Schubert, L.K., “Numerical Study of Sound Refraction by a Jet Flow I. Ray Acoustics,” J. Acoust. Soc. Amer., vol. 51, pp. 439-446, 1972.
- Schubert, L.K., “Numerical Study of Sound Refraction by a Jet Flow II. Wave Acoustics,” J. Acoust. Soc. Amer., vol. 51, pp. 447-463, 1972.
- Shaanan S., Ferziger, J.H. and Reynolds, W.C., “Numerical Simulation of Turbulence in Presence of Shear”, Rep. TF-6, Dept. Mechanical Engineering, Stanford University, 1975.
- Silveira Neto, A., Grand, D., Metais, O. and Lesieur, M., “A Numerical Investigation of the Coherent Structures of Turbulence Behind a Backward-Facing Step”, *Int. J. Fluid Mech*, vol. 256, 1-25, 1993.
- Silveira Neto, A.: “Simulação de grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos”, I Escola de Primavera de Transição e Turbulência, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1998.
- Smagorinsky, J.S., “General Circulation Experiments with the Primitive Equations: I. The Basic Experiment”, *Mon. Weath. Rev.*, 91, 99-163, 1963.
- Stanley, S.A., Sarkar, S. and Mellado, J.P. “A Study of The Flow-Field Evolution and Mixing in a Planar Turbulent Jet using Direct Numerical Simulation”, vol. 450 , pp. 377 – 407, 2002.

Stolz, S.; Adams, N. A.; Kleiser, L.: “An approximate deconvolution model for large-eddy simulation with application to incompressible wallbounded flows”. *Phys. Fluids*, 13(4), 997–1015, 2001.

Tam, C.K.W.; “Directional Acoustic Radiation from a Supersonic Jet Generated by a Shear Layer Instability”, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 46, pp. 757–768, 1971.

Tam, C.K.W., Burton, D.E.; “Sound Generated by Instability Waves of Supersonic Flows”, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 138, pp. 273–295, 1984.

Tennekes, H.; Lumley, J. L.: “A First Course in Turbulence”. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.

Thomas F.O., Chu, H.C.; “An Experimental Investigation of the Transition of a Planar Jet: Subharmonic Suppression and Upstream Feedback”, *Physics of Fluids A*, vol. 1, pp. 1566-1587, 1989.

Thomas F.O., Prakash K.M.K.; “An Experimental Investigation of the Natural Transition of an Untuned Planar Jet”, *Phys Fluids A-Fluid*, vol. 3 (1), pp. 90-105, 1991.

Thompson, K.W; “Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems” *J. Comp. Physics*, vol. 68, 1-24, 1987.

Versteeg, H. K. & Malalasekera, W., “An Introduction to Computational Fluid Dynamics”, Longman Scientific & Technical, 1995.

Wang, M., Lele, S.K., Moin, P.; “Computation of Quadrupole Noise Using Acoustic Analogy”, *AIAA Journal*. Vol. 34(11), pp. 2247 – 2254, 1996.

Weinberger, C., Rewerts, J., Janicka, J.; “The influence of Inlet Conditions on a Large Eddy Simulation of a Turbulent Plane Jet”, *Proceedings, 11th Symposium on Turbulent Shear Flows*, 1997.

Yates, J.E. and Sandri, G., “Bernoulli Enthalpy: A Fundamental Concept in the Theory of Sound”, *Progress in Aeronautics and Astronautics*, vol. 43, pp. 65-89, 1976

APÊNDICE A – DIFERENCIAÇÃO À CHEBYSHEV

Neste trabalho, a equação de Lighthill é resolvida através da solução numérica das equações (5.64) e (5.63), que dependem do cálculo de Λ_d , definido na equação (5.57). Por comodidade, reescreve-se conforme abaixo a equação (5.57):

$$\Lambda_d(\bar{y}, k\Delta t) = \Lambda_d(y^1, y^2, k\Delta t) = \frac{\partial^2(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial y_i \partial y_j} - \frac{\partial v_t}{\partial y_i} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial y_j \partial y_j}; \quad k = 1, 2, \dots, \text{NPT} \quad (\text{A.1})$$

A equação acima já se apresenta em sua forma discreta na coordenada temporal, o que se justifica em função da transformada de Fourier Discreta, a ser aplicada para a obtenção do campo acústico no espaço de frequência. No entanto, é necessário o emprego de uma metodologia numérica para a avaliação das derivadas espaciais na equação (5.57), e, também, para que o processo de integração numérica expresso na equação (5.63) possa ser realizado.

Em função da qualidade da aproximação numérica e da sua eficiência computacional, escolhe-se um esquema de diferenciação à Chebyshev do tipo colocação, que faz uso da técnica conhecida como Transformada Rápida de Fourier (TRF) (Fast Fourier Transform, em inglês).

A qualidade da aproximação é aqui entendida como sendo a elevada precisão da estimativa numérica e a taxa de convergência de ordem exponencial (superior a taxa de convergência alcançada por esquemas algébricos, independentemente da ordem dos mesmos), o que, para o presente esquema numérico, é, em última instância, fruto do emprego dos polinômios de Chebyshev.

Quanto ao seu desempenho computacional, este é similar ao verificado para a técnica da Transformada Rápida de Fourier, cujo número de operações é proporcional ao número definido como $N \log N$, onde N corresponde ao número de graus de liberdade da aproximação.

A técnica da TRF pode ser empregada devido a uma escolha apropriada dos pontos de colocação, conforme expresso nas equações (5.55) e (5.56), reescritas abaixo:

$$y_1^1 = L\left(\frac{1 + \cos \alpha_1}{2}\right); \quad \alpha_1 = \frac{\pi l}{N} \quad (\text{A.2})$$

$$y_m^2 = H \cos \beta_m; \quad \beta_m = \frac{\pi m}{M} \quad (\text{A.3})$$

Os esquemas de colocação definidos em (A.2) e (A.3), conforme será visto a seguir, correspondem ao esquema de colocação de Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Desse modo, é conveniente reescrever a equação (A.1), substituindo as expressões definidas em (A.2) e (A.3), levando em conta que $\bar{y} = (y^1, y^2)$ e que os campos são bidimensionais (índices i e j dados por: $i = 1, 2; j = 1, 2$).

$$\Lambda_d(y_1^1, y_m^2, k\Delta t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2[(\bar{u}_1)^2]}{\partial(y^1)^2} + 2 \frac{\partial^2[(\bar{u}_1)(\bar{u}_2)]}{\partial(y^1)\partial(y^2)} + \frac{\partial^2[(\bar{u}_2)^2]}{\partial(y^2)^2} - \\ \left[\frac{\partial v_t}{\partial y^1} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial(y^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial(y^2)^2} \right) + \frac{\partial v_t}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial(y^1)^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial(y^2)^2} \right) \right] \end{array} \right\} (y_1^1, y_m^2) \quad (\text{A.4})$$

Para a avaliação das derivadas parciais que aparecem em (A.4) sobre o campo de velocidade filtrado $\bar{\bar{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ e sobre o campo de viscosidade de sub-malha, v_t , será utilizado o esquema de diferenciação à Chebyshev conforme será descrito a seguir.

Por simplicidade, considera-se uma função real de um único argumento, $f(x)$. Considera-se, então, que se deseja obter uma aproximação numérica para a derivada de $f(x)$, denotada por $f'(x) = df/dx$, nos pontos de colocação de Chebyshev-Gauss-Lobatto, definidos conforme a seguinte equação:

$$x_1 = \cos \theta_1; \quad \theta_1 = \frac{\pi l}{M} \quad (\text{A.5})$$

Considera-se, também, que a função $f(x)$ pode ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x); \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\text{A.6})$$

onde $T_n(x)$ corresponde ao polinômio de Chebyshev de grau n , que pode ser expresso como:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos(x)] \quad (\text{A.7})$$

onde $\arccos(x)$ corresponde à função arco-cosseno de x . Substituindo (A.7) em (A.6) e derivando, obtém-se que:

$$\frac{df}{dx}(x) = \sum_{n=0}^N a_n T'_n(x) = \frac{\sum_{n=0}^N na_n \sin[n \arccos(x)]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.5) em (A.8), obtém-se a forma discreta de $f'(x) = df/dx$, conforme abaixo:

$$\frac{df}{dx}(x_1 = \cos \theta_1) = \begin{cases} \frac{\sum_{n=0}^N na_n \sin[n \arccos(x_1)]}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{\sum_{n=0}^N na_n \sin\left[\frac{\pi ln}{N}\right]}{\sin\left[\frac{\pi l}{N}\right]}; & l = 1, \dots, N-1 \\ \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n n^2 a_n; & l = 0, N \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

A equação acima expressa o esquema de diferenciação à Chebyshev, cuja estratégia de colocação é dada pelos pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto. Vale lembrar que a equação (A.9) é exata, apesar do seu caráter discreto.

Mediante a utilização do mapeamento dado por $x = \cos \theta$ nas equações (A.7) e (A.6), reescreve-se a função $f(x)$ como $f_0(\theta)$, de acordo com a equação abaixo:

$$f_0(\theta) = f(x(\theta)) = f(\cos \theta) = \sum_{n=0}^N a_n \cos n\theta \quad (\text{A.10})$$

onde a_n representa os coeficientes de Fourier da função $f_0(\theta)$. Os coeficientes de Fourier, a_n , podem ser escritos como:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_0(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (\text{A.11})$$

Definindo $b(\kappa)$ como sendo a transformada de Fourier de $f_0(\theta)$, no sentido das funções periódicas de período 2π , onde $\theta \in [-\pi, \pi]$, conforme abaixo

$$b(\kappa) = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta) \exp(-i\kappa\theta) d\theta \quad (\text{A.12})$$

é fácil ver que

$$b(\kappa) = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta) \exp(-i\kappa\theta) d\theta = \sum_{n=0}^N a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \exp(-i\kappa\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n [\delta(n-\kappa) + \delta(-n-\kappa)] \quad (\text{A.13})$$

onde $\delta(n-\kappa)$ e $\delta(-n-\kappa)$ correspondem a distribuições do tipo delta de Dirac, centradas em n e em $-n$, respectivamente.

Definindo $b'(\kappa)$ como sendo a transformada de Fourier de $f'_p(\theta) = df_p / d\theta$

$$b'(\kappa) = \int_{-\pi}^{\pi} f'_p(\theta) \exp(-i\kappa\theta) d\theta \quad (\text{A.14})$$

e integrando (A.14) por partes, obtém-se que

$$b'(\kappa) = i\kappa b(\kappa) \quad (\text{A.15})$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa em (A.15), obtém-se que

$$\frac{df_\theta}{d\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} i\kappa b(\kappa) \exp(i\theta\kappa) d\kappa \quad (\text{A.16})$$

Aplicando a discretização para θ , conforme expresso na equação (A.5), obtém-se que

$$\frac{df_\theta}{d\theta} \left(\theta_l = \frac{l\pi}{N} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} i\kappa b(\kappa) \exp\left(\frac{i l \pi \kappa}{N}\right) d\kappa = \quad (\text{A.17})$$

Combinando as equações (A.13) e (A.17), obtém que

$$\frac{df_\theta}{d\theta} \left(\theta_l = \frac{l\pi}{N} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} i\kappa \left(\sum_{n=0}^N a_n [\delta(n-\kappa) + \delta(-n-\kappa)] \right) \exp\left(\frac{i l \pi \kappa}{N}\right) d\kappa \quad (\text{A.18})$$

Colocando as constantes em evidência e aplicando as propriedades da distribuição delta de Dirac, obtém-se, finalmente, que,

$$\frac{df_\theta}{d\theta} \left(\theta_l = \frac{l\pi}{N} \right) = - \sum_{n=0}^N n a_n \sin\left(\frac{\pi l n}{N}\right) \quad (\text{A.19})$$

correspondendo exatamente ao numerador da fração expressa na equação (A.9), na situação em que $l = 1, \dots, N-1$.

É importante ressaltar que, a despeito do seu caráter discreto, a equação (A.9) é uma expressão exata para $f'(x_l)$, onde $x_l = \cos(\pi l/N)$, do mesmo modo que a expressão ilustrada na equação (A.8) expressa de modo exato a função $f'(x)$, onde $-1 \leq x \leq 1$.

Assim, a aproximação numérica do coeficiente de Fourier é necessária justamente pelo fato de que a função $f(x)$, e por conseqüência, $f(\cos\theta)$, só são conhecidas nos pontos de colocação de Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Nesse momento, define-se a aproximação numérica para os coeficientes a_n , denotada por \tilde{a}_n , como:

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{N} \left(\frac{f_\theta(\theta_0) + (-1)^n f_\theta(\theta_N)}{2} + \sum_{l=1}^{N-1} f_\theta(\theta_l) \cos(n\theta_l) \right) \quad (\text{A.20})$$

A equação (A.20) é simplesmente uma versão de integração numérica a trapézios da integral expressa pela equação (A.11).

Define-se, também, a aproximação discreta para $df_\theta / d\theta$, denotada por $\delta f_\theta / \delta\theta$, conforme abaixo:

$$\frac{\delta f_\theta}{\delta\theta} \left(\theta_l = \frac{l\pi}{N} \right) = - \sum_{n=0}^N n \tilde{a}_n \sin \left(\frac{\pi l n}{N} \right) \quad (\text{A.21})$$

E, por fim, define-se a aproximação numérica para a $f'(x)$, denotada por $\delta f / \delta x$, conforme a expressão a seguir:

$$\frac{\delta f}{\delta x} (x_l = \cos \theta_l) = \begin{cases} \frac{\sum_{n=0}^N n \tilde{a}_n \sin[n \arccos(x_l)]}{\sqrt{1-x_l^2}} = \frac{\sum_{n=0}^N n \tilde{a}_n \sin \left[\frac{\pi l n}{N} \right]}{\sin \left[\frac{\pi l}{N} \right]}; & l=1, \dots, N-1 \\ \sum_{n=0}^N (\pm 1)^n n^2 \tilde{a}_n; & l=0, N \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Nesse momento, é conveniente definir a seguinte função discreta, $f_p(l)$, conforme abaixo:

$$f_p(l) = \begin{cases} f_\theta(\theta_l); & l=0, \dots, N-1 \\ f_\theta(\theta_{2N-1}); & l=N, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

onde θ_l e θ_{2N-1} são conforme a equação (A.5).

Define-se a Transformada Discreta de Fourier (TDF) da função discreta $f_p(l)$ conforme abaixo:

$$\hat{f}_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{2N} f_p(l) \exp \left(-i \frac{2\pi(l-1)(n-1)}{2N} \right); \quad n=1, \dots, 2N \quad (\text{A.24})$$

A TRF nada mais é do que um algoritmo eficiente para resolver a TDF, que aparece na equação (A.24). Um das possíveis técnicas para a sua resolução foi desenvolvida por Cooley e Tukey (1965).

Para o fechamento da descrição da metodologia de diferenciação à Chebyshev, resta agora demonstrar que: (I), a expressão para $\hat{f}_p(n)$, de acordo com a equação (A.24), e para \tilde{a}_n , e expressa pela equação (A.20) são idênticas quando $n = 0, 1, \dots, N$; (II), que a expressão mostrada pela equação (A.21) é exatamente igual a

$$\frac{\delta f_\theta}{\delta \theta} \left(\theta_{(l-1)} = \frac{\pi(l-1)}{N} \right) = \sum_{n=1}^{2N} i(n-1) \hat{f}_p(n-1) \exp \left(i \frac{2\pi(n-1)(l-1)}{2N} \right); \quad l=1, \dots, 2N \quad (\text{A.25})$$

para $l = 1, \dots, N-1$.

Desse modo, segue a demonstração para (I):

Combinando (A.23) e (A.24), obtém-se que

$$\hat{f}_p(n) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{l=1}^N f_\theta(\theta_l) \exp \left(-i \frac{2\pi(l-1)(n-1)}{2N} \right) + \sum_{l=N+1}^{2N} f_\theta(\theta_{2N-l}) \exp \left(-i \frac{2\pi(l-1)(n-1)}{2N} \right) \right\} \quad (\text{A.26})$$

Aplicando uma reindexação definida como $m = 2N+1 - l$ para o segundo somatório, em (A.26), obtém-se que:

$$\hat{f}_p(n) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{l=1}^N f_\theta(\theta_l) \exp \left(-i \frac{2\pi(l-1)(n-1)}{2N} \right) + \sum_{m=1}^N f_\theta(\theta_m) \exp \left(-i \frac{2\pi(2N-m)(n-1)}{2N} \right) \right\} \quad (\text{A.27})$$

Desenvolvendo um pouco mais a equação (A.27), obtém-se

$$\hat{f}_p(n) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{l=1}^N f_\theta(\theta_l) \exp \left(-i \frac{2\pi(l-1)(n-1)}{2N} \right) + \sum_{m=1}^N f_\theta(\theta_m) \exp(-i2\pi(n-1)) \exp \left(+i \frac{2\pi(m-1)(n-1)}{2N} \right) \right\} \quad (\text{A.28})$$

Identificando a expressão $\exp(-i2\pi(n-1))$ como sendo igual a unidade e substituindo o índice mudo, m, pelo índice mudo, l, obtém-se que:

$$\hat{f}_p(n) = \frac{1}{N} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=1}^N f_\theta(\theta_l) \exp\left(-i \frac{2\pi(1-l)(n-1)}{2N}\right) + \\ \sum_{l=1}^N f_\theta(\theta_l) \exp\left(+i \frac{2\pi(1-l)(n-1)}{2N}\right) \end{array} \right\} \quad (\text{A.29})$$

Aplicando as propriedades da exponencial complexa e agrupando os fatores comuns, obtém-se que:

$$\hat{f}_p(n) = \frac{2}{N} \sum_{l=1}^N f_\theta(\theta_l) \cos\left(\frac{\pi(1-l)(n-1)}{N}\right) \quad (\text{A.30})$$

Lembrando que $f_\theta(\theta_0) = f_\theta(\theta_N)$ e reindexando o somatório, obtém-se, finalmente, que:

$$\hat{f}_p(n) = \frac{2}{N} \left[\left(\frac{f_\theta(\theta_0) + (-1)^n f_\theta(\theta_N)}{2} \right) + \sum_{l=1}^{N-1} f_\theta(\theta_l) \cos\left(\frac{\pi ln}{N}\right) \right] = \tilde{a}_n; \quad n = 0, \dots, N \quad (\text{A.31})$$

A demonstração de (II), segue abaixo:

Considerando a equação (A.25) e aplicando um procedimento análogo ao desenvolvido para a obtenção da equação (A.31), obtém-se que:

$$\frac{\delta f_\theta}{\delta \theta} \left(\theta_{(l-1)} = \frac{\pi(l-1)}{N} \right) = - \sum_{n=1}^N (n-1) \hat{f}_p(n-1) \sin\left(\frac{\pi(n-1)(l-1)}{N}\right); \quad l=1, \dots, N \quad (\text{A.32})$$

Reindexando o somatório em “n”, substituindo o índice “l-1” por “l”, lembrando que $\sin(\pi N/N) = \sin(\pi) = 0$ e utilizando o resultado expresso pela equação (A.31), obtém-se, que

$$\frac{\delta f_\theta}{\delta \theta} \left(\theta_l = \frac{\pi l}{N} \right) = - \sum_{n=0}^N n \tilde{a}_n \sin\left(\frac{\pi n l}{N}\right); \quad l=1, \dots, N-1 \quad (\text{A.33})$$

conforme se queria demonstrar.

Assim, a rotina de diferenciação à Chebyshev por colocação, via quadratura de Chebyshev-Gauss-Lobatto, pode ser sintetizada através do algoritmo descrito abaixo (Trefethen, 1996).

- (a) construção da função discreta $f_\theta(\theta_l)$, onde θ_l é conforme a equação (A.5);
- (b) construção da função discreta $f_p(l)$, conforme a equação (A.23);
- (c) cálculo da TDF de $f_p(l)$, conforme expresso pela equação (A.24), que pode ser realizada através do algoritmo de TRF desenvolvido por Cooley e Tukey;

- (d) obtenção da derivada aproximada de $f_0'(\theta_t)$, através do cálculo da Transformada Discreta de Fourier Inversa, expressa na equação (A.25), e que também pode ser realizada conforme o algoritmo de Cooley e Tukey;
- (e) obtenção da derivada aproximada da função $f(x)$, de forma idêntica a expressa na equação (A.22).

A aplicação da rotina de diferenciação à Chebyshev sobre a equação (A.4) é feita para cada termo individualmente e se dá de forma direta. As equações (A.2) e (A.3) definem uma matriz de pontos de colocação sobre os quais serão estimadas as derivadas parciais e os valores associados aos campos \bar{u}_1 , \bar{u}_2 e v_t são conhecidos nos pares ordenados (y_i^1, y_j^2) , definidos na equação (A.5).

Utilizando como motivação as equações (A.20), (A.21) e (A.22), define-se o operador de diferenciação parcial (em relação a y^1) à Chebyshev aplicado a um campo bidimensional discreto $f(y_i^1, y_j^2)$ como sendo:

$$\frac{\delta f}{\delta y^1}(y_i^1, y_m^2) = \begin{cases} \frac{\sum_{p=0}^N p \tilde{a}_p \sin[p \arccos(y_i^1)]}{\sqrt{1 - (y_i^1)^2}} = - \frac{\sum_{p=0}^N p \tilde{a}_p \sin\left[\frac{\pi p}{N}\right]}{\sin\left[\frac{\pi i}{N}\right]}; & i = 1, \dots, N-1 \\ \sum_{p=0}^N (\pm 1)^p p^2 \tilde{a}_p; & i = 0, N \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

onde \tilde{a}_p é dado por

$$\tilde{a}_p = \frac{2}{N} \left[\left(\frac{f_{\alpha,\beta}(\alpha_0, \beta_m) + (-1)^p f_{\alpha,\beta}(\alpha_N, \beta_m)}{2} \right) + \sum_{l=1}^{N-1} f_{\alpha,\beta}(\alpha_l, \beta_m) \cos(p\alpha_l) \right] \quad (\text{A.35})$$

e $f_{\alpha,\beta}(\alpha_l, \beta_m) = f(y_l^1, y_m^2)$. As coordenadas α_l e β_m correspondem exatamente às definições dadas em (A.2) e (A.3).

De forma análoga, define a diferenciação à Chebyshev em relação à coordenada y^2 como:

$$\frac{\delta f}{\delta y^2}(y_1^1, y_m^2) = \begin{cases} \frac{\sum_{p=0}^M p \tilde{a}_p \sin[p \arccos(y_m^2)]}{\sqrt{1 - (y_m^2)^2}} = \frac{\sum_{p=0}^M p \tilde{a}_p \sin\left[\frac{\pi p m}{M}\right]}{\sin\left[\frac{\pi m}{N}\right]}; & m = 1, \dots, M-1 \\ \sum_{p=0}^M (\pm 1)^p p^2 \tilde{a}_p; & m = 0, M \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

onde \tilde{a}_p é dado por

$$\tilde{a}_p = \frac{2}{M} \left[\left(\frac{f_{\alpha, \beta}(\alpha_1, \beta_0) + (-1)^p f_{\alpha, \beta}(\alpha_1, \beta_M)}{2} \right) + \sum_{m=1}^{M-1} f_{\alpha, \beta}(\alpha_1, \beta_m) \cos(p\beta_m) \right] \quad (\text{A.37})$$

As derivadas parciais discretas de ordem superior são definidas de forma análoga à empregada na derivação parcial exata, ou seja:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta (y^1)^2}(y_1^1, y_m^2) = \frac{\delta}{\delta y^1} \left(\frac{\delta f}{\delta y^1} \right) (y_1^1, y_m^2) \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta (y^2)^2}(y_1^1, y_m^2) = \frac{\delta}{\delta y^2} \left(\frac{\delta f}{\delta y^2} \right) (y_1^1, y_m^2) \quad (\text{A.39})$$

ou ainda

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^1 \delta y^2}(y_1^1, y_m^2) = \frac{\delta}{\delta y^1} \left(\frac{\delta f}{\delta y^2} \right) (y_1^1, y_m^2) \quad (\text{A.40})$$

Desse modo, o campo discreto das fontes sonoras, Λ_d , pode ser representado em termos da aplicação do operador diferencial parcial à Chebyshev sobre os campos \bar{u}_1 , \bar{u}_2 e v_t conforme a equação abaixo:

$$\Lambda_d(y_1^1, y_m^2, k\Delta t) = \frac{\delta^2(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\delta (y^i) \delta (y^j)} - \frac{\partial v_t}{\partial (y^i)} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial y^j \partial y^j}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2; & l = 0, \dots, N; \\ j = 1, 2; & m = 0, \dots, M; \end{matrix} \quad k = 1, \dots, \text{NPT}. \quad (\text{A.41})$$

Ainda que seja possível reproduzir o procedimento expresso nas equações (A.34), (A.35), (A.36) e (A.37), vale lembrar que a definição do operador de diferenciação à Chebyshev não corresponde ao procedimento de cálculo utilizado, no presente trabalho, para a obtenção de Λ_d . De fato, o procedimento numérico utilizado é conforme descrito nas alíneas “a)”, “b)”, “c)”, “d)”, e “e)”, em concordância com o trabalho de Trefethen (1996).

REFERÊNCIAS

Cooley, J. W.; Tukey, J. W.: "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Math. Comput.* vol. 19, 297–301 (1965).

Trefethen, L. N.: "Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations", 1996.

Disponível em <http://www.comlab.ox.ac.uk/nick.trefethen/pdetext.html>.