



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO TECNOLÓGICO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**ESTUDOS SOBRE A MODELAGEM DE LAJES PLANAS DE
CONCRETO ARMADO**

CARLOS ALEXANDRE HENNRICHS

**Dissertação apresentada ao Programa de
Pós Graduação em Engenharia Civil da
Universidade Federal de Santa Catarina,
como requisito parcial para a obtenção do
título de Mestre em Engenharia Civil.**

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Daniel Domingues Loriggio, Dr.

Florianópolis / SC - 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a dissertação intitulada:

ESTUDOS SOBRE A MODELAGEM DE LAJES PLANAS
ENGº CIVIL CARLOS ALEXANDRE HENNRICHS

Como requisito para a obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL

Prof. Daniel Domingues Loriggio, Dr. – Orientador.

Prof. Henriette Lebre La Rovere, PhD.

Prof. Ivo José Padaratz, PhD.

Prof. Túlio Nogueira Bittencourt, Dr.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me proporcionar à oportunidade de atingir este sonho.

Ao Professor Daniel Domingues Loriggio, pela incansável dedicação e apoio durante todo o programa de pós-graduação.

Aos professores do curso, pela assessoria e disponibilidade, especialmente os professores Ivo José Padaratz, Moacir Henrique de Andrade Carqueja e Henriette Lebre La Rovere pelo apoio neste trabalho, na graduação e na Pós-Graduação.

Ao Engenheiro Jano D´Araújo Coelho, pelos ensinamentos e imenso apoio.

A Toniolo Pré-Moldados, pela compreensão.

À minha mãe, por ter sido companheira e torcedora incansável.

Ao meu pai, pela força e criação.

Ao meu amigo Estevão, pelo incentivo.

À minha esposa Cíntia, pelo companheirismo.

Ao meu irmão Jean, pelo belo exemplo.

Aos amigos e familiares que me apoiaram em todas etapas de minha vida.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	8
LISTA DE TABELAS.....	16
LISTA DE SÍMBOLOS.....	18
RESUMO.....	21
ABSTRACT	22
1 INTRODUÇÃO	23
1.1 LAJES PLANAS	23
1.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS DAS LAJES PLANAS.....	29
1.2.1 VANTAGENS DAS LAJES PLANAS.....	29
1.2.2 DESVANTAGENS DAS LAJES PLANAS.....	30
1.3 HISTÓRICO.....	31
1.4 MOTIVAÇÃO	34
1.5 OBJETIVOS.....	34
2 CÁLCULO DE LAJES PLANAS.....	36
2.1 TEORIA DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO	36
2.1.1 INTRODUÇÃO.....	36
2.1.2 HIPÓTESES FUNDAMENTAIS	37
2.1.3 EQUAÇÃO DE LAGRANGE	38
2.1.4 SOLUÇÃO EXATA DO PROBLEMA	44
2.1.5 SOLUÇÃO POR SÉRIES DE FOURIER.....	47
2.2 CARGAS CONCENTRADAS EM PLACAS: INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE MOMENTO INFINITO	51
2.2.1 CARGA CONCENTRADA EM UMA PLACA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA..	51
2.2.2 MOMENTOS FLETORES EM UMA PLACA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA COM UMA CARGA CONCENTRADA	55

2.3	SOLUÇÕES NUMÉRICAS	66
2.3.1	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	66
2.3.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	67
2.3.3	ANALOGIA DE GRELHA	69
2.3.3.1	Introdução	69
2.3.3.2	ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS	70
2.3.3.3	MODELAGEM POR ANALOGIA DE GRELHA	74
3	APLICAÇÃO DOS MODELOS TEÓRICOS: EQUAÇÃO DIFERENCIAL DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO.....	83
3.1	INTRODUÇÃO	83
3.2	LAJE DE REFERÊNCIA	84
3.2.1	CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DA LAJE E CONDIÇÕES DE CONTORNO	84
3.2.2	AÇÕES	85
3.2.3	CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DO CONCRETO	86
3.3	MODELOS DE CARREGAMENTO EM PLACAS	87
3.3.1	PLACA COM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO	87
3.3.2	PLACA COM CARGA UNIFORME EM UM RETÂNGULO PARCIAL.....	90
3.3.3	PLACA COM CARGA CONCENTRADA	93
3.3.4	PLACA COM PILAR CENTRAL (PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS)	96
3.4	RESULTADOS	98
3.5	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	110
4	APLICAÇÕES - MODELOS EM ELEMENTOS FINITOS	112
4.1	INTRODUÇÃO	112
4.2	MODELAMENTO.....	112
4.2.1	DEFINIÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.....	112
4.2.2	PROPRIEDADES DAS BARRAS E ELEMENTOS “SHELL”	113

4.2.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO	113
4.2.4	CARREGAMENTO	114
4.2.5	REFINAMENTO.....	114
4.3	RESULTADOS	115
4.3.1	PILAR MODELADO COMO UM APOIO PONTUAL	115
4.3.2	PILAR MODELADO COMO ELEMENTO SÓLIDO.....	123
4.4	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	128
5	OUTROS MÉTODOS.....	131
5.1	MÉTODO DIRETO	131
5.2	MÉTODO DO EQUILÍBRIO	139
5.3	MÉTODO DOS PÓRTICOS EQUIVALENTES	142
5.4	RECOMENDAÇÕES DA NBR 6118	148
5.5	SOLUÇÃO PROPOSTA POR SZILARD	149
6	APLICAÇÕES - ANALOGIA DE GRELHA.....	155
6.1	INTRODUÇÃO	155
6.2	MODELOS ANALISADOS COM O PROGRAMA MIX.....	155
6.2.1	APLICAÇÃO DO PROGRAMA.....	155
6.2.2	RESULTADOS.....	157
6.2.3	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	162
6.3	MODELOS ANALISADOS COM O PROGRAMA ALTOQI EBERICK	164
6.3.1	APLICAÇÃO DO PROGRAMA.....	164
6.3.2	RESULTADOS.....	164
6.3.2.1	LAJE COM VIGAS DE RIGIDEZ EQUIVALENTE.....	164
6.3.2.2	LAJE COM CARGA SIMULANDO O PILAR	170
6.3.3	ANÁLISE DOS RESULTADOS	175

7	COMPARAÇÃO ENTRE OS DIFERENTES MÉTODOS	177
7.1	INFLUÊNCIA DA MALHA	177
7.2	DIMENSÕES DO PILAR	181
8	TÓPICOS ESPECIAIS.....	185
8.1	INTRODUÇÃO	185
8.2	PISO DE EDIFÍCIO	185
8.3	VIGAS DE BORDO	189
9	CONCLUSÕES	194
10	REFERÊNCIAS.....	197

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Pilares com capitel e “drop panel”.....	024
Figura 1.2. Sistema estrutural com laje plana e drop-panel (flat slab).....	025
Figura 1.3. Sistema estrutural com laje plana (flat plate).	025
Figura 1.4. Sistema estrutural convencional (two-way slab).....	026
Figura 1.5. Laje plana com vigas “chatas” (Projeto: Eng. Jano D’Araújo Coelho, Msc.).....	027
Figura 1.6. Laje sem vigas (Projeto: Eng. Giovanni Brisot, Msc. - RCA Engenharia de Estruturas).....	028
Figura 2.1. Equilíbrio de um elemento de placa para as forças cortantes.....	038
Figura 2.2. Equilíbrio de um elemento de placa para momentos fletores e torsões.....	039
Figura 2.3. Curvatura de um elemento de placa submetido a um momento m_x	041
Figura 2.4. Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento bisenoidal.....	045
Figura 2.5. Carga concentrada em uma placa retangular simplesmente apoiada.....	051
Figura 2.6. Carga concentrada ao longo do eixo X de uma placa retangular simplesmente apoiada.....	054
Figura 2.7. Carga concentrada ao longo do eixo X de uma placa retangular alongada.....	057
Figura 2.8. Distribuição de momentos fletores e cortantes em uma placa quadrada com carga concentrada aplicada no centro.....	064
Figura 2.9. Laje plana discretizada para aplicação do método das diferenças finitas.....	067
Figura 2.10. Laje plana discretizada em elementos finitos.....	068
Figura 2.11. Laje plana discretizada em uma grelha – malha de vigas ortogonais entre si.....	069
Figura 2.12. Graus de liberdade em um nó de grelha. δ_z representa a translação, θ_2 e θ_3 representam as rotações em torno dos eixos X e Y.....	071

Figura 2.13. Momentos fletores e reações em uma barra devidas ao deslocamento vertical em uma das extremidades.....	072
Figura 2.14. Momentos torsores em uma barra devidos a rotação em uma das extremidades.....	072
Figura 2.15. Momentos fletores e reações em uma barra devidas a rotação em uma das extremidades.....	072
Figura 2.16. Exemplo de grelha aplicada para uma placa, indicando deslocamentos nas duas direções para forças nodais unitárias.....	073
Figura 2.17. Laje plana modelada como grelha no plano XY.....	075
Figura 2.18. Barra representando uma "faixa" de laje.....	078
Figura 2.19. Carregamento uniformemente distribuído nas barras – carga p , e carga concentrada nos nós - carga nodal P1 – ou nas barras – P2.....	080
Figura 2.20. Esforços atuantes nas extremidades de uma barra de grelha.....	081
Figura 2.21. Modelagem de laje plana mostrando a grelha para aplicação do método.....	082
Figura 3.1. Planta de fôrmas da laje de referência.....	085
Figura 3.2. Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.....	087
Figura 3.3. Momentos m_y na laje para o caso de carga uniformemente distribuída (perspectiva).	089
Figura 3.4. Momentos m_y na laje para o caso de carga uniformemente distribuída (vista superior).	089
Figura 3.5. Placa retangular simplesmente apoiada com carga uniforme em um retângulo parcial.....	090
Figura 3.6. Momentos m_y na laje para carga uniforme em retângulo parcial (perspectiva).	092
Figura 3.7. Momentos m_y na laje para carga uniforme em retângulo parcial (vista superior).	092
Figura 3.8. Placa com carga concentrada.....	093
Figura 3.9. Momentos m_y na laje para carga concentrada (perspectiva).....	094

Figura 3.10. Momentos m_y na laje para carga concentrada (vista superior).....	095
Figura 3.11. Deslocamento em placa submetida a carregamento uniformemente distribuído.....	096
Figura 3.12. Carga concentrada aplicada no centro da placa.....	096
Figura 3.13. Princípio da superposição de efeitos.....	097
Figura 3.14. Configuração dos momentos fletores m_y ao longo da linha média da laje ($y = b/2$).	098
Figura 3.15. Momentos m_y na laje para o caso de carga concentrada (perspectiva).	099
Figura 3.16. Momentos m_y na laje para o caso de carga concentrada (vista superior).	100
Figura 3.17. Momentos ao longo da linha média da laje ($y = 5m$) para o caso de carga concentrada aplicada no centro da laje para simular o pilar central.....	100
Figura 3.18. Deslocamentos ao longo da linha média da laje ($y = 5m$) para o caso de carga concentrada aplicada no centro da laje para simular o pilar central.....	101
Figura 3.19. Valores de carga P no pilar para as diferentes seções.....	103
Figura 3.20. Momentos negativos m_y na laje sobre o pilar para as diferentes seções.....	103
Figura 3.21. Momentos positivos máximos para diferentes seções de pilares.....	104
Figura 3.22. Momentos na região próxima ao apoio para carga concentrada.....	105
Figura 3.23. Momentos na região próxima ao apoio para carga uniformemente distribuída, pilar 50x50 cm.	105
Figura 3.24. Diferença percentual do valor da carga P no pilar, comparada aos valores obtidos para carga concentrada.....	106
Figura 3.25. Diferença percentual do valor do momento negativo m_y no centro do pilar (MC) e no bordo (MB).	107
Figura 3.26. Diferença percentual do valor do momento positivo máximo m_y	108
Figura 3.27. Planilha de cálculo Excel, utilizada para a determinação através da Teoria das Placas.	109

Figura 4.1. Modelo de estrutura floor do SAP2000, utilizado para o cálculo de lajes planas.	114
Figura 4.2. Momentos fletores nas proximidades do pilar para uma malha sem (E) e com transição de elementos próximos ao refinamento (D).....	115
Figura 4.3. Malha de elementos finitos 250x250cm sem (E) e com refinamento 125x125 (D).....	116
Figura 4.4. Malha de elementos finitos 250x250cm com refinamento 62,5x62,5 (E) e 31,25x31,25 (D)	116
Figura 4.5. Malha de elementos finitos 100x100cm sem refinamento (E) e com refinamento 50x50 (D).....	117
Figura 4.6. Malha de elementos finitos 100x100cm com refinamento 25x25 (E) e 12,5x12,5 (D).....	117
Figura 4.7. Malha de elementos finitos 50x50cm sem refinamento (E) e com refinamento 25x25 (D).....	117
Figura 4.8. Malha de elementos finitos 50x50cm com refinamento 12,5x12,5 (E) e 6,25x6,25 (D).....	118
Figura 4.9. Malha de elementos finitos 50x50cm com refinamento 3,125x3,125 (E) e 1,5625x1,5625 (D).....	118
Figura 4.10. Malha de elementos finitos 25x25cm (E) e 12,5x12,5 (D), ambas sem refinamento.....	118
Figura 4.11. Carga no pilar para diferentes malhas, pilar modelado como ponto.....	121
Figura 4.12. Momento positivo máximo para diferentes malhas, pilar modelado como ponto.....	121
Figura 4.13. Momentos negativos no centro e a 25 cm do centro para diferentes malhas.....	122
Figura 4.14. Deslocamentos máximos para diferentes malhas, pilar modelado como ponto.....	122
Figura 4.15. Modelo com pilar definido como elemento sólido 25x100 cm, malha geral 50x50 cm, refinamento de 12,5 cm nas proximidades do pilar.....	123

Figura 4.16. Momentos em laje para pilar modelado como ponto e como elemento sólido.....	125
Figura 4.17. Momentos em planta para laje com pilar modelado como ponto (E) e como elemento sólido (D).....	125
Figura 4.18. Carga no pilar para diferentes seções, pilar modelado como elemento sólido.....	126
Figura 4.19. Momentos positivos para diferentes seções de pilar, modelado como elemento sólido.....	126
Figura 4.20. Momentos negativos para diferentes seções de pilar, modelado como elemento sólido.....	127
Figura 4.21. Deslocamentos na laje para diferentes seções de pilar, modelado como elemento sólido.....	127
Figura 4.22. Momentos fletores máximos nas proximidades de pilares com seções 25x100 cm (E) e 50x50 cm (D)	130
Figura 5.1. Divisão de painéis para uso do método direto (ACI 318R – 83).....	132
Figura 5.2. Seções quadradas equivalentes para pilares (ACI 318R – 83).....	134
Figura 5.3. Momentos de referências nas seções (ACI 318R – 83).....	136
Figura 5.4. Distribuição do momento total de referência em laje sem viga de bordo (ACI 318R – 83)	138
Figura 5.5. Distribuição do momento total de referência em laje com viga de bordo (ACI 318R – 83).	138
Figura 5.6. Estrutura típica de edifícios com lajes planas.....	139
Figura 5.7. Equilíbrio do pano médio de uma laje e coluna média separados da parte central.....	140
Figura 5.8. Pórtico equivalente em uma laje cogumelo.....	143
Figura 5.9. Divisão de um painel de laje cogumelo de acordo com a NBR6118.....	148
Figura 5.10. Laje plana apoiada sobre pilares (Szilard).....	149
Figura 5.11. Correção no momento negativo no centro do pilar em função do momento na face, da reação de apoio e da dimensão do pilar (Szilard).....	152

Figura 5.12. Valores de momentos sobre o pilar para diferentes dimensões de seção quadrada, aplicado em lajes de 5x5m até 20x20m.....	153
Figura 5.13. Diferença percentual do valor do momento negativo no centro do pilar através da solução de Szilard, comparado aos para carga concentrada através da Teoria das Placas.....	154
Figura 6.1. Malha 250x250cm sem refinamento (E) e com refinamento de 125x125cm (250ref125) nas faixas próximas ao pilar.....	157
Figura 6.2. Malha 250x250cm (250pil125) com refinamento 125x125cm nas proximidades do pilar (E) e malha 125x125cm sem refinamento.....	158
Figura 6.3. Malha 50x50cm (E) e malha 25x25cm (D), ambas sem refinamento.....	158
Figura 6.4. Carga no pilar central para diferentes malhas modeladas no MIX por Analogia de Grelha.	159
Figura 6.5. Momento positivo máximo para diferentes malhas modeladas no MIX por Analogia de Grelha.....	160
Figura 6.6. Momento negativo máximo para diferentes malhas modeladas no MIX por Analogia de Grelha.....	160
Figura 6.7. Deslocamento máximo para diferentes malhas modeladas no MIX por Analogia de Grelha.	161
Figura 6.8. Momentos M_y ao longo da linha média da laje até o centro, para malhas de 250x250 cm sem e com refinamento.....	161
Figura 6.9. Momentos M_y ao longo da linha média da laje até o centro, para malhas de 125x125 cm, 50x50 cm e 25x25 cm sem refinamento.....	162
Figura 6.10. Planta de fôrmas do modelo rodado no AltoQI Eberick para simular laje plana.....	165
Figura 6.11. Configuração deformada da laje e momentos fletores nas barras da grelha com malha de 50x50cm.....	167
Figura 6.12. Carga no pilar para diferentes malhas de grelha modeladas no Eberick.	168
Figura 6.13. Momentos positivos para diferentes malhas de grelha modeladas no Eberick.	168

Figura 6.14. Momentos negativos para diferentes malhas de grelha modeladas no Eberick.....	169
Figura 6.15. Deslocamentos para diferentes malhas de grelha modeladas no Eberick.....	169
Figura 6.16. Carga de parede simulando o pilar, com carga negativa uniformemente distribuída na placa.....	170
Figura 6.17. Configuração deformada da laje e momentos fletores nas barras da grelha com malha de 50x50cm, com pilar simulado como carga de parede.....	173
Figura 6.18. Momentos positivos para diferentes malhas e dimensões de pilar para modelos em grelha com pilar modelado como carga.	173
Figura 6.19. Momentos negativos para diferentes malhas e dimensões de pilar para modelos em grelha com pilar modelado como carga.....	174
Figura 6.20. Deslocamentos para diferentes malhas e dimensões de pilar para modelos em grelha com pilar modelado como carga.	174
Figura 7.1. Carga no pilar para diferentes malhas, com pilar modelado como ponto.....	178
Figura 7.2. Momentos positivos para diferentes malhas, com pilar modelado como ponto.....	178
Figura 7.3. Momentos negativos para diferentes malhas, com pilar modelado como ponto.....	179
Figura 7.4. Deslocamentos para diferentes malhas, com pilar modelado como ponto.....	179
Figura 7.5. Carga no pilar para diferentes seções de pilar.....	182
Figura 7.6. Momentos positivos para diferentes seções de pilar.....	182
Figura 7.7. Momentos negativos para diferentes seções de pilar.....	183
Figura 7.8. Deslocamentos para diferentes seções de pilar.....	183
Figura 8.1. Modelo de piso de edifício.....	186
Figura 8.2. Deformada do piso do edifício, modelado em Elementos Finitos, Com os momentos máximos atuantes na laje.....	188

Figura 8.3. Deformada do piso do edifício, modelado em Analogia de Grelha, com os momentos atuantes nas barras da grelha.....	188
Figura 8.4. Carga no pilar para diferentes seções de vigas de bordo.....	189
Figura 8.5. Momento positivo máximo da laje para diferentes seções de vigas de bordo.	190
Figura 8.6. Momento negativo máximo da laje para diferentes seções de vigas de bordo.	190
Figura 8.7. Deslocamento máximo da laje para diferentes seções de vigas de bordo.	191
Figura 8.8. Deformada em laje com viga de bordo com seção 15x20 cm.....	192
Figura 8.9. Deformada em laje com viga de bordo com seção 15x100 cm.....	192

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Fator α para deflexões em uma placa retangular carregada no centro.....	055
Tabela 2.2. Fatores γ_1 e γ_2	063
Tabela 2.3 Fator numérico n para forças reativas R junto aos cantos de placas retangulares sob carga central. $\nu = 0,3$	064
Tabela 3.1. Propriedades mecânicas do concreto e rigidez D da placa.....	086
Tabela 3.2. Valores da carga P, momentos fletores e deslocamentos para diferentes seções de pilares (u / v), onde a seção zero (0) representa os resultados para carga concentrada.....	102
Tabela 4.1. Resultados para modelos no SAP2000, onde o pilar foi modelado como ponto único, para a laje de referência.....	120
Tabela 4.2. Resultados para modelos no SAP2000, onde o pilar foi modelado como elemento sólido, para a laje de referência.....	124
Tabela 5.1. Coeficientes para distribuição de momentos (ACI 318-83).....	137
Tabela 5.2. Porcentagem de repartição dos momentos de referência entre as faixas distintas	146
Tabela 5.3. Porcentagem de repartição dos momentos de referência entre as faixas distintas.....	146
Tabela 5.4. Coeficientes para deflexão e momentos para o interior de pilares de lajes planas (Szilard).....	152
Tabela 6.1. Esforços e deslocamentos obtidos para diferentes malhas estudadas por Analogia de Grelha no software MIX.....	159
Tabela 6.2. Valores da carga P no pilar, momentos fletores e deslocamento máximo para diversas malhas na laje e momentos máximos nas vigas chatas.....	166
Tabela 6.3. Esforços e deslocamentos em laje modelada como grelha com carga simulando o pilar, para diferentes malhas e seções de pilar.....	172
Tabela 7.1. Esforços e deslocamentos em laje modelada em Elementos Finitos e Analogia de Grelha, para diferentes malhas, com pilar modelado como ponto.....	177

Tabela 7.2. Esforços e deslocamentos em laje cogumelo, para algumas seções de Pilar central.	181
Tabela 8.1. Resultados obtidos para o piso de edifício.....	187

LISTA DE SÍMBOLOS

a, b	lados da placa ou da laje
b	espessura da faixa da grelha
b_g	espaçamento entre as barras da grelha.
b_v	largura da seção da viga
c	raio de uma área circular
C	constante
d_x, d_y	dimensões de um elemento de placa
D	rigidez a flexão da placa
E	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young
E_c	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young do concreto
f	flecha da laje ou da viga
G	módulo de elasticidade transversal
h	espessura da placa ou da laje
h_v	altura da seção da viga, cm
I	momento de inércia axial da barra
J_p	momento de inércia polar
I_{yy}	momento de inércia axial da seção da faixa em relação ao eixo y
K_t	rigidez a torção da barra da grelha
L	comprimento da barra
l_x	lado menor da placa ou da laje
l_y	lado maior da placa ou da laje
m	momento fletor na extremidade de uma barra de grelha
M_x	momento fletor na direção X

M_y	momento fletor na direção Y
M_{xy}	momento de torção
M_d	momento fletor de cálculo
n	coeficiente que depende da relação entre as dimensões da placa
P	carga concentrada
p	carga uniformemente distribuída
p_o	carga uniformemente distribuída aplicada no centro da placa
Q_x	esforço cortante na direção X
Q_y	esforço cortante na direção Y
r	distância entre o ponto em estudo e o ponto de aplicação da carga
R	força de reação
t	momento torsor na extremidade de uma barra de grelha
S_{dim}	esforço de dimensionamento das barras da grelha
S_{bar}	esforço obtido na extremidade da barra da grelha
ϵ_x	deformação específica na direção X
ϵ_y	deformação específica na direção Y
γ_f	coeficiente de majoração
γ	relação entre a rigidez da viga de apoio e a rigidez da placa
γ_1, γ_2	coeficientes que dependem da relação entre as dimensões da placa
α_m	coeficiente que depende da relação entre as dimensões da placa
ν	coeficiente de Poisson
σ_x	tensão normal na direção X
σ_y	tensão normal na direção Y
τ_{xy}	tensão cisalhante

λ	espaçamento de malha para diferenças finitas
ω	deslocamento vertical da placa, flecha
Φ	rotação da barra em relação ao eixo 1
θ	rotação do nó da barra, em relação ao eixo 2
ξ, η	distância dos eixos X e Y ao ponto de aplicação da carga
$1/\rho$	curvatura
$\{F\}$	vetor coluna de cargas externas
$\{\delta\}$	vetor deslocamento dos nós
$[K]$	matriz de rigidez da estrutura
$\{d\}$	vetor de deslocamentos correspondente aos nós de extremidade da barra
$\{F_o\}$	vetor coluna dos esforços de imobilização dos nós da estrutura
$[r]$	matriz de rigidez do elemento de barra
$[R]$	matriz de rotação
$\{S\}$	esforços nas extremidades da barra
$\{S_o\}$	esforços de mobilização dos nós na extremidade das barras
z	distância de um elemento de placa até o eixo da placa

RESUMO

A utilização de lajes planas data do início do século, sendo que, no princípio tais lajes eram executadas empiricamente e, posteriormente, submetidas a ensaios de carga. Com o desenvolvimento da computação, a modelagem dessas estruturas tornou-se mais acessível aos projetistas e as vantagens inerentes ao sistema tornaram-se visíveis. Mas, ao mesmo tempo em que os computadores facilitaram o cálculo das lajes planas, começaram a surgir questionamentos sobre determinados resultados e problemas a serem solucionados.

Um deles é o fato que, teoricamente, quando uma carga concentrada é aplicada em uma laje, essa provoca momentos fletores que tendem ao infinito no seu ponto de aplicação. Por analogia, quando através de algum método numérico, os pilares de uma laje plana são modelados como pontos isolados para o apoio da laje, esses se comportam como cargas concentradas contrárias ao carregamento aplicado, tendendo também a gerar momentos negativos muito elevados nas suas proximidades. Da mesma forma, sabe-se que a malha adotada para discretizar a laje influencia nos esforços e deslocamentos dessa.

Nesse trabalho serão estudados processos teóricos e numéricos para o cálculo de lajes planas, bem como os principais fatores a serem considerados na sua modelagem. Será definida uma laje de referência, na qual serão modelados exemplos através da Teoria das Placas, do método dos Elementos Finitos e da Analogia de Grelha. Também serão descritos métodos aproximados utilizados na prática da engenharia. A comparação entre os procedimentos teóricos e numéricos é apresentada no final do trabalho.

A modelagem do pilar e da malha da laje nas suas proximidades mereceu atenção especial, inclusive as dimensões do pilar e a sua influência nos resultados. Concluindo, são feitas recomendações para modelagens de lajes planas por Analogia de Grelha e Elementos Finitos, quais os principais parâmetros que devem ser observados e as vantagens e desvantagens de cada processo.

ABSTRACT

The use of flat slabs date of the beginning of century, and, at initially such slabs were executed empirically and, afterwards, submitted to load tests. With the development of computers and softwares, modeling of such structures became more accessible to designers and their inherent advantages became visible. However, at the same time in that computers facilitated the analysis of flat slabs, some casues about determined results and new problems to be solved.

One of these problems is the fact that, theoretically, when a concentrated load is applied on a flat slab, the bending moments tend to infinite at the application point. For analogy, when through some numeric method, the column of a flat slab are modelled as points isolated for the support from the slab, these behave as contrary concentrates loads to the applied loading, also tending to generate negative bending moments very elevated in their proximities. In the same way, it is known that the mesh (or grid) adopted for divide the slab influences in the member forces and deflections.

In this work will be studied theoretical and numeric processes for the flat slabs calculation, as well the main factors to are considered in your modeling. It will be defined a reference slab, in which will be modelled examples through the Theory of the Plates, of the Method of the Finite Elements and of the Gridwork Analogy. They also will be described approximate methods used in the practice of the engineering. The comparison between theoretical and numeric procedures is presented at the end of the work.

The modeling of the column and of the mesh (or grid) of the slab in her proximities deserved special attention, inclusive the dimensions of the column and your influence in the results. Concluding, recommendations for flat slabs modelings are done for Gridwork Analogy and Finite Elements, which are the main parameters that should be observed and the advantages and disadvantages of each process.

1 INTRODUÇÃO

1.1 LAJES PLANAS

É do conhecimento de todos os profissionais e universitários da área da engenharia civil, as facilidades trazidas pelo avanço tecnológico, em especial o da computação, para o campo da engenharia de estruturas. No entanto, um dos grandes desafios da engenharia moderna é encontrar soluções para problemas que têm surgido com o advento do uso de programas computacionais e com as necessidades das construções modernas.

Dos exemplos de estrutura em que o uso da computação tornou-se fundamental podemos citar as lajes planas, ou seja, aquelas que apresentam teto liso. Anteriormente, o cálculo dessas lajes era feito através de métodos aproximados ou em programas computacionais que exigiam enorme quantidade de tempo e grandes computadores para o processamento dos dados. Entretanto, com o aprimoramento dos programas de cálculo e análise, e dos próprios computadores, o projeto das lajes planas tornou-se mais comum no ambiente dos calculistas, o que acentuou o uso dessas soluções estruturais e proporcionou a discussão de diversos assuntos sobre o seu uso. Um deles são os momentos negativos da laje sobre o pilar e nas suas proximidades, visto que, para diferentes métodos e considerações, os resultados obtidos mostram-se bastante diferentes entre si.

As lajes planas podem ser descritas como placas, as quais podem ser apoiadas sobre vigas (lajes planas com vigas), sendo que tais vigas apresentam altura igual à espessura da laje, ou diretamente sobre pilares (lajes planas sem vigas).

No caso de lajes sem vigas, os pilares podem ou não ter engrossamento de sua seção transversal nas proximidades da ligação com a laje. Esse engrossamento é definido como capitel (*Figura 1.1b*), cuja finalidade principal é reduzir as tensões de cisalhamento, evitando o puncionamento da laje. As lajes também podem apresentar um aumento de espessura próximo ao pilar, conhecido nos Estados Unidos como “drop

panel” (*Figura 1.1c*). Em outros casos, como a *Figura 1.1a* é adotada uma solução com os dois elementos. Deve-se procurar evitar os capitéis e “drop panels”, de modo que se tenha um teto liso e simplificação na execução das fôrmas.

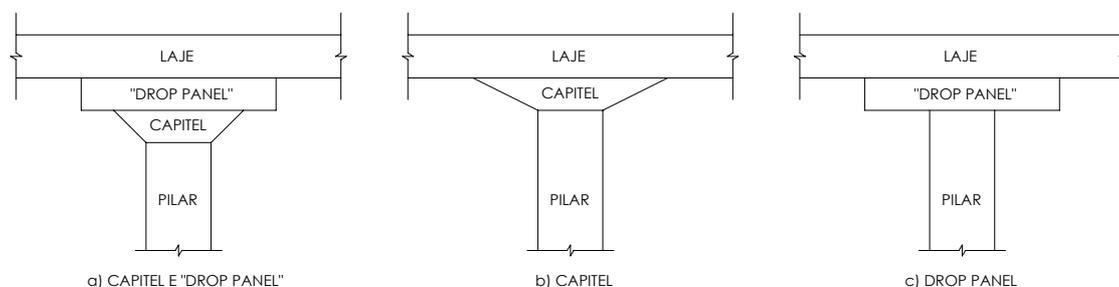


Figura 1.1 Pilares com capitel e painel de transição (drop panel).

Os sistemas com capitéis ou painéis de transição são conhecidas como “*lajes planas*” (*Figura 1.2*), e os sem capitéis e sem painéis de transição como “*placas planas*” (*Figura 1.3*). Os sistemas convencionais de “*lajes armadas nas duas direções*” são apresentados na *Figura 1.4*. No Brasil convencionou-se chamar de *laje-cogumelo* qualquer sistema de laje sem vigas e de *lajes planas com vigas* aquelas lajes onde as vigas ficam embutidas.

As lajes planas podem ser maciças ou nervuradas, podendo ainda a armadura ser passiva, protendida ou uma combinação das duas. Os capitéis e painéis de transição são mais comuns em lajes maciças, as quais apresentam, em geral, pequenas espessuras para resistir aos esforços de punção nas proximidades dos pilares. As lajes planas nervuradas apresentam trechos maciços junto aos pilares para combater a punção e os momentos negativos.

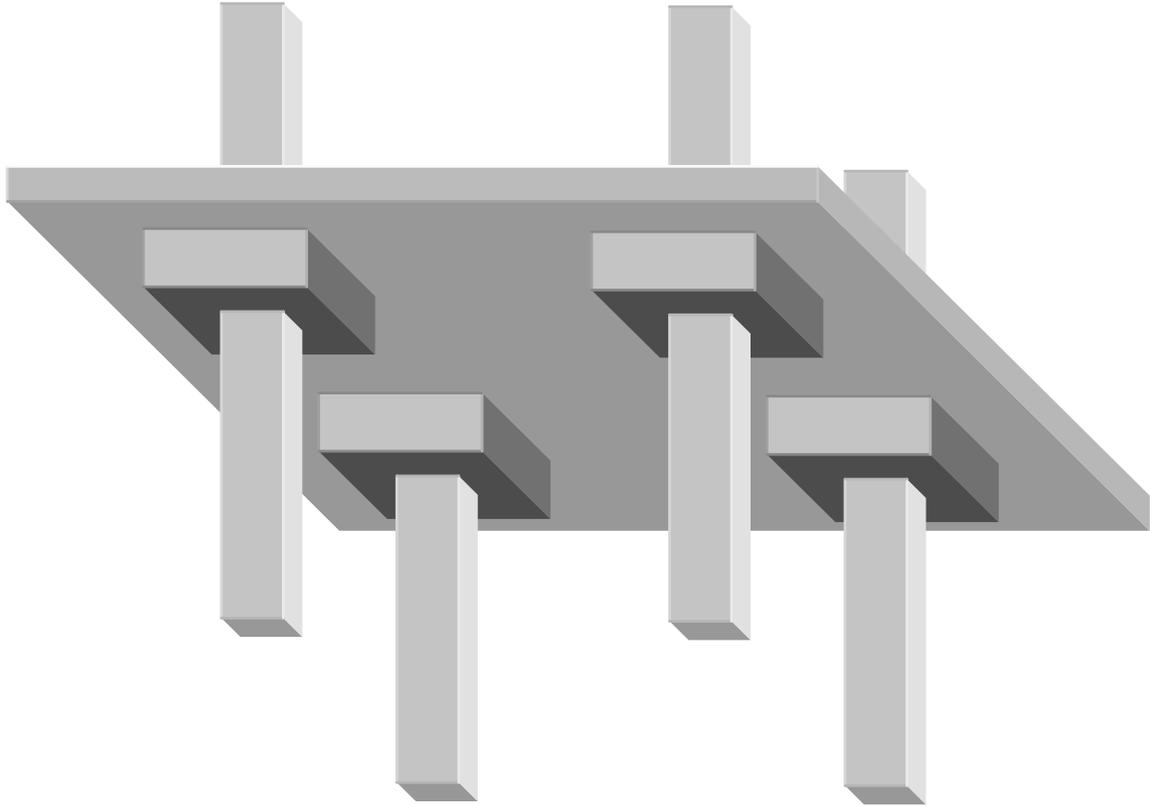


Figura 1.2 Sistema estrutural com laje plana (“flat slab”) e painel de transição (“drop-panel”).

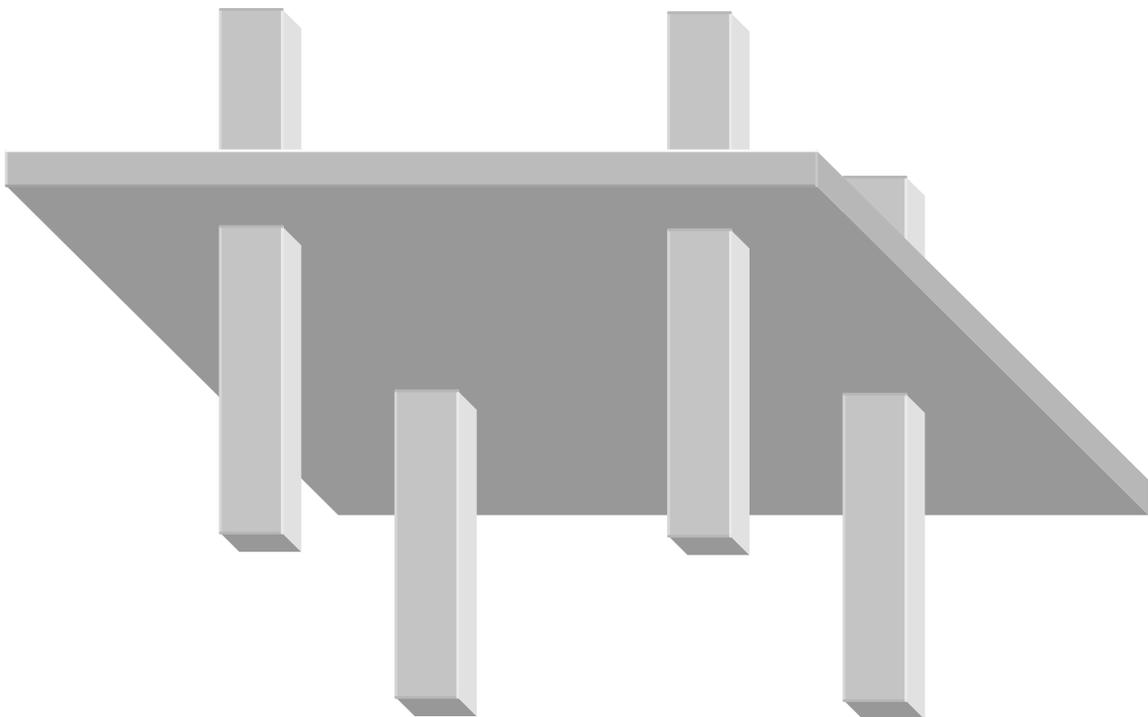


Figura 1.3 Sistema estrutural com laje plana (“flat plate”).

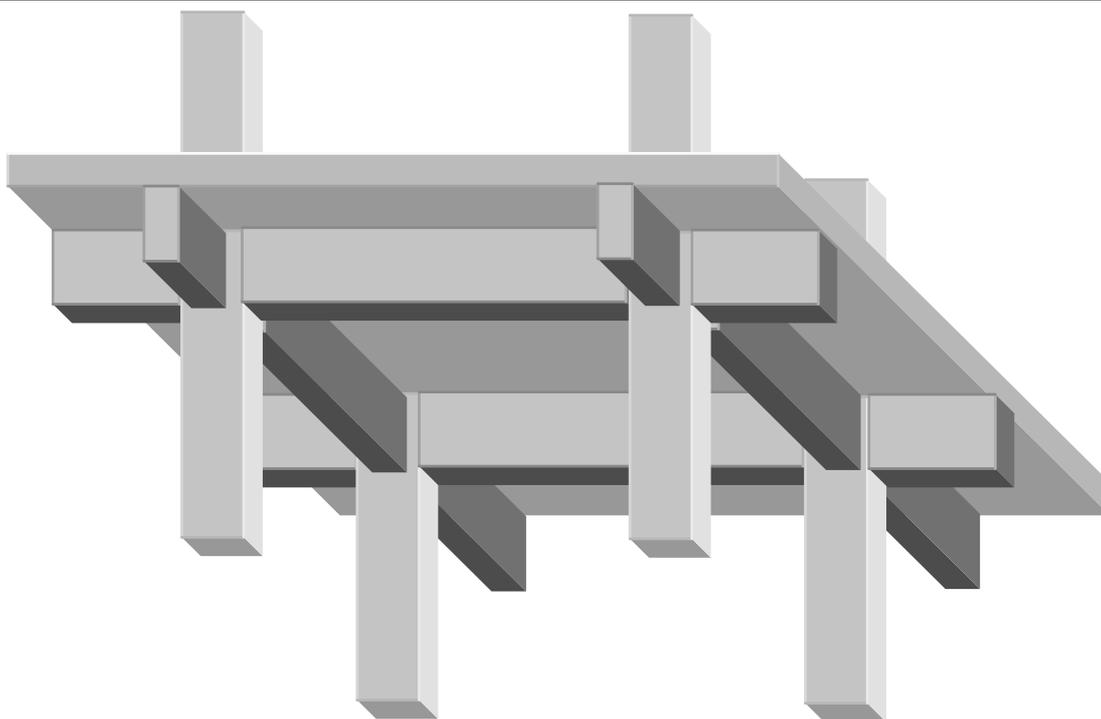


Figura 1.4 Sistema estrutural convencional laje armada em duas direções (“two-way slab”).

As lajes planas podem apresentar ou não vigas. No caso de *lajes planas com vigas*, elas se apóiam diretamente nas vigas e essas, por sua vez, se ligam aos pilares. Essa solução é muito empregada no caso de lajes nervuradas – lajes que são formadas por vigas (nervuras) transversais, com elemento de enchimento inerte entre nervuras de modo a reduzir o peso-próprio e consumo de concreto. A *Figura 1.5* ilustra um pavimento de edifício com laje plana nervurada apoiada sobre vigas “chatas”, as quais ficam “embutidas” nas lajes. No caso de lajes apoiadas sobre vigas “chatas”, essas últimas apresentam em geral armações de aço bastante “carregadas”, tanto no que se refere a estribos como armaduras longitudinais. Deve-se tomar cuidado especial no que se refere às deformações dessas vigas, as quais apresentam inércia reduzida em função da pouca altura. No entanto, tais lajes conferem, em geral, maior rigidez no plano aos pavimentos da edificação, melhor travamento dos pilares e, conseqüentemente, maior estabilidade global da edificação, se comparadas às lajes sem vigas.

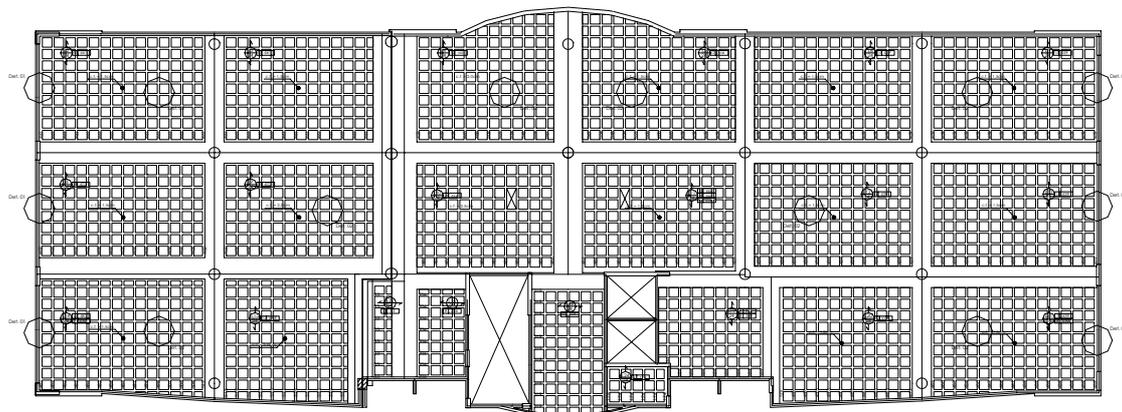


Figura 1.5 Laje plana com vigas “chatas” (Projeto: Eng. Jano D’Araújo Coelho, Msc.).

As lajes planas sem vigas apóiam-se diretamente sobre os pilares e são rigidamente ligadas a eles. Apresentam, em alguns casos, somente vigas de bordo, ou vigas de contorno. A Figura 1.6 ilustra um pavimento de edifício em que se adotou a solução de laje sem vigas, apresentando-se nesse caso aliviada com elementos de enchimento, sendo, portanto, uma laje nervurada. A região próxima dos apoios apresenta-se maciça, configuração comumente adotada para resistir aos esforços de punção e melhorar o desempenho da laje no que se refere a momentos negativos. No caso de lajes apoiadas diretamente sobre pilares, deve-se tomar cuidado especial na verificação da punção, das deformações no meio do vão, e na determinação dos momentos negativos das lajes sobre os pilares. Esses momentos, quando as lajes são modeladas inadequadamente, podem apresentar valores muito diferentes dos que atuam em serviço. Portanto, o dimensionamento de tais momentos pode ser equivocado, podendo agredir tanto a economia como a segurança da obra.

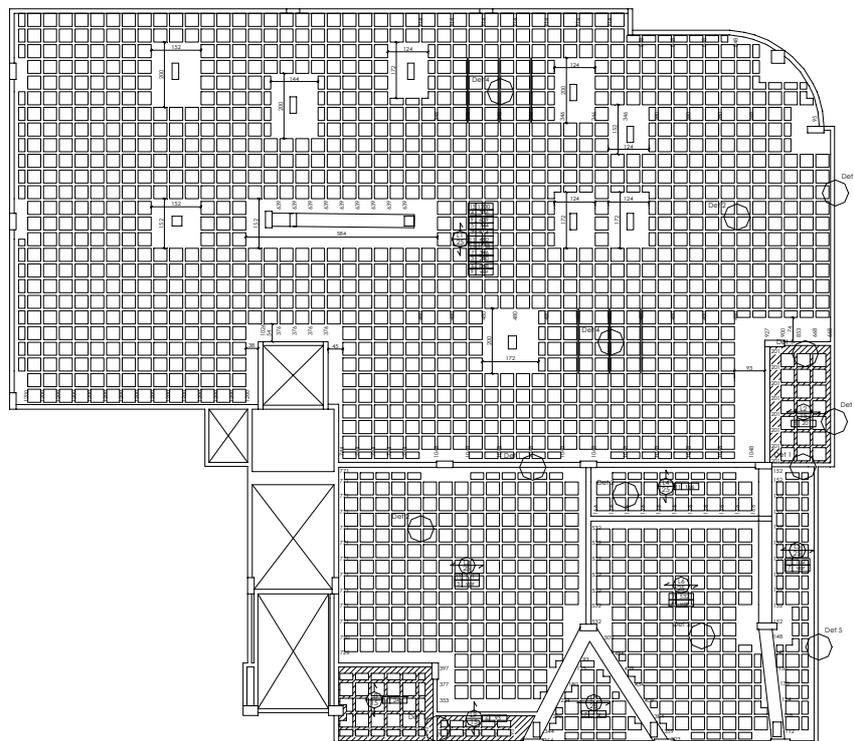


Figura 1.6 Laje sem vigas (Projeto: Eng. Giovanni Brisot, Msc. –RCA Engenharia de Estruturas).

No presente trabalho serão abordadas exclusivamente lajes de concreto armado maciças, com armadura passiva (não protendida), comportamento linear e no regime elástico. Não serão adotados capitéis nem painéis de transição (“drop panels”), pois serão estudados exclusivamente esforços da laje em serviço, e não a necessidade de reforços nessa para o dimensionamento. As cargas aplicadas na laje serão sempre normais ao seu plano médio, portanto cargas provenientes de esforços horizontais, como o vento, ou mesmo deslocamento da estrutura, não serão consideradas. O estudo se concentrará na modelagem da laje e na obtenção de resultados, especialmente momentos fletores e deslocamentos. A ligação laje-pilar não terá ênfase no trabalho, podendo essa ser objeto de estudos futuros.

1.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS DAS LAJES PLANAS

1.2.1 VANTAGENS DAS LAJES PLANAS

A solução de lajes planas tem sido cada vez mais utilizada nos pavimentos de edifícios, principalmente em virtude de diversas vantagens que o sistema apresenta se comparado aos sistemas estruturais convencionais compostos de lajes, vigas altas e pilares. As principais vantagens que podem ser citadas, conforme Moretto e, também Figueiredo (1989) são:

a) *Adaptabilidade de diversas formas ambientais*: grandes possibilidades de reformas e modificações futuras, racionalização de vedações e aberturas, execução de fachadas com grande liberdade;

b) *Simplificação das fôrmas*: menor consumo de materiais, as fôrmas apresentam um plano contínuo sem obstáculos, as espessuras das lajes podem ser uniformizadas, as fôrmas são montadas e desmontadas com maior facilidade, menor incidência de mão-de-obra, racionalização e padronização dos cimbramentos;

c) *Simplificação e racionalização das armaduras*: ausência de vigas, operações de corte, dobra e montagem facilitadas, facilidade de inspeção e conferência;

d) *Simplificação da concretagem*: poucos recortes nas lajes, facilitando o acesso de vibradores, reduzindo a possibilidade de falhas e melhorando o acabamento;

e) *Diminuição de revestimentos*: estruturas com ótimo acabamento, dispensando revestimento, redução da superfície a ser revestida, redução da mão-de-obra e consumo de materiais;

f) *Redução da quantidade de cimento*: na concretagem de sistemas convencionais onde há grande incidência de vigas pode ser necessário um concreto mais fluído;

g) *Redução da altura total do edifício*: se houver, por imposição do código de obras a limitação da altura de um edifício;

h) *Simplificação das instalações*: menor quantidade de condutos e fios necessários, menor incidência de cortes e emendas, melhor qualidade do produto final, redução de mão-de-obra, modificações futuras são facilitadas, racionalização das tarefas, possibilidade de perfuração da laje para passagem de tubulação;

i) *Melhoria das condições de habitabilidade*: a ausência de vigas facilita a insolação e ventilação dos ambientes, diminuindo a umidade, redução do acúmulo de sujeira e insetos;

j) *Redução do tempo de execução*: em função da simplificação nas fôrmas, armaduras, concretagem e instalações.

1.2.2 DESVANTAGENS DAS LAJES PLANAS

Mesmo apresentando muitas vantagens, existem algumas desvantagens que devem ser observadas, podendo inclusive ser decisivas para a adoção ou não do sistema estrutural com lajes planas, tais como:

a) *Punção das lajes*: é um dos principais problemas de tais lajes, podendo ser solucionado adotando-se uma espessura de laje adequada ou adotando uma armadura de punção, ou ambos;

b) *Deslocamentos transversais das lajes*: o deslocamento de lajes sem vigas, para uma mesma rigidez e um mesmo vão, é maior do que aqueles nas lajes sobre vigas;

c) *Estabilidade global do edifício*: no caso de edifícios altos, a ausência de vigas diminui a estabilidade global devido às ações horizontais, nesse caso deve-se vincular as lajes em paredes estruturais ou em núcleos rígidos.

1.3 HISTÓRICO

Com o desenvolvimento e as exigências das edificações de concreto armado, as lajes sem vigas passaram a ser uma solução interessante. Embora hoje seja um sistema amplamente utilizado, as lajes sem vigas foram, desde o início, objeto de questionamento tanto pelo meio técnico, como pelo meio executivo.

Por muitos séculos as construções foram executadas com madeira e pedra. Os assoalhos de madeira absorviam as cargas, as quais eram transferidas às vigas transversais em madeira, que então eram ligadas às vigas principais (vigas mestras) também de madeira ou a paredes ou pilares de pedras. Mesmo com o surgimento do aço como material de construção, os pisos de edifícios foram, no princípio, imitações dos antigos pisos construídos em madeira e pedra. Os perfis metálicos inicialmente passaram a substituir as vigas mestras ou principais. Com o surgimento do concreto armado, as estruturas também seguiram o mesmo sistema que era adotado em madeira e pedra. Entretanto, para as lajes planas, não ocorreu o mesmo, visto que a sua concepção era totalmente diferente dos sistemas até então adotados. (COELHO, 2000).

O primeiro edifício em lajes sem vigas foi o C.A. Bovey Building, construído por C.A.P. Turner, em 1906, Minneapolis, Minnesota. A obra foi executada em virtude da necessidade de se obter um teto totalmente liso. Não havendo método de cálculo disponível na época, a construção foi executada e submetida a testes de carga, antes de sua utilização, tendo se apresentado eficiente. (FILHO, 1989).

Entretanto, embora a estrutura tenha sido aprovada pelo teste de carga e a iniciativa de Turner aplaudida por muitos no meio técnico, não lhe faltaram críticas, principalmente após a publicação dos resultados de McMillan e Brayton (1910), os quais mostraram, para a mesma laje e carregamento, variações de até 400% na quantidade de armadura requerida por vários métodos de cálculo.

Em 1908, na União Soviética, o engenheiro A. F. Loleyt projetou e construiu um edifício de quatro pavimentos para depósito em Moscou. Maillart também executou um

edifício sem vigas em Zurique. E apesar das críticas, até 1913 mais de 1000 edificações sem vigas foram executadas em todo o mundo, utilizando o mesmo procedimento empírico. (FILHO, 1989).

O comportamento das lajes sem vigas pode ser mais bem entendido quando Lord (1910), fez medidas de deformações em um piso de edifício sem vigas. Os primeiros ensaios em laboratório de lajes sem vigas foram realizados por Bach e Graf, entre 1911 e 1914. Em 1914, o engenheiro Nichols apresentou um trabalho, partindo das condições de equilíbrio, criticando o método de Turner e mostrando valores de momento superiores aos obtidos por ele. Turner rebateu dizendo que os resultados de Nichols eram um absurdo, e os resultados estavam a seu favor, já que seus edifícios estavam em funcionamento e todos se comportaram bem ao teste de carga. (FILHO, 1989).

A fórmula de Nichols foi adotada pelo “First Joint Comitee”, em 1917. O Código da ACI de 1920 foi o que primeiro fez recomendações práticas sobre as lajes planas, muito embora o conhecimento do comportamento da estrutura e métodos para sua análise fosse uma incógnita para os engenheiros. (FILHO, 1989).

Em 1921, Westergaard e Slater publicaram um trabalho sobre análise e projeto de lajes, incluindo a teoria elástica das placas. O Código de 1956 da ACI ainda utilizava uma equação baseada na de Nichols, e chamou de método empírico. No Código de 1971 da ACI, o método empírico passou a se chamar método direto. No ACI 83 o método foi simplificado, e a transformação do momento total em positivos e negativos passou a ser executada em função das condições de apoio e existência ou não de vigas. No Código de 1971 a análise elástica das lajes sem vigas passou a se chamar de Método dos Pórticos Equivalentes, e abrangia o cálculo de todos os tipos de lajes armadas em duas direções, com ou sem vigas entre os apoios.

O CEB 78 é a principal alternativa para o Código do ACI. O código europeu permite o uso da Teoria das Linhas de Ruptura, ou Teoria das Charneiras Plásticas. No caso de lajes não retangulares e para as lajes sem vigas com malha irregular de pilares, a Teoria das Linhas de Ruptura fornece uma boa alternativa. Essa teoria foi desenvolvida

por Ingerslev (1921) e, posteriormente por Johansen (1962). O Método das Faixas, proposto por Hillerborg (1975), forneceu uma alternativa plástica para a análise das lajes.

A NBR6118 de 1978, recomenda o cálculo das lajes sem vigas pela Teoria das Charneiras Plásticas, e quando os pilares estiverem em malha ortogonal e a espessura da laje obedecer aos limites especificados em norma, é permitido que se calcule a laje pelo Método dos Pórticos Múltiplos.

Atualmente, os métodos numéricos de análise e projeto de lajes têm sido muito difundidos no meio técnico, destacando-se o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método de Analogia de Grelha. O Método das Diferenças Finitas foi desenvolvido por Stüsse e Collatz, sendo que esse método foi, juntamente com o de Marcus (1929), amplamente utilizado para a elaboração de tabelas de dimensionamento de lajes. A deficiência desse método está no fato de o mesmo considerar as vigas como apoios indeslocáveis, sendo que, durante muito tempo, as estruturas eram executadas dessa maneira: com vigas de elevada rigidez ou alvenarias robustas de apoio. O Método dos Elementos Finitos, desenvolvido por Turner, Clough, Martin e Topp, em 1956, e o Método de Analogia de Grelha (Framework Method), desenvolvido inicialmente por Hrennikoff em 1941, não tiveram um desenvolvimento muito amplo em sua época devido à deficiência de recursos computacionais. Atualmente, com o avanço tecnológico e o desenvolvimento de computadores potentes, os dois métodos são amplamente utilizados em programas comerciais de análise e de cálculo estrutural.

Apesar das críticas sobre os edifícios de Turner, o sistema de lajes sem vigas se desenvolveu e, hoje em dia, é sabido que o sistema é seguro e eficiente, contudo busca-se solucionar e melhorar o modelamento e conseqüente dimensionamento das lajes planas sem vigas ou lajes cogumelo.

1.4 MOTIVAÇÃO

A crescente aplicação de lajes planas em estruturas de edifícios se deve basicamente a dois motivos:

a) Exigência de estruturas com melhor desempenho executivo, ou seja, de execução mais simples e rápida e com redução de custos; e melhor desempenho funcional, permitindo que se tenham ambientes mais confortáveis e personalizados;

b) Maior facilidade na elaboração de projetos com lajes planas, em virtude do desenvolvimento de programas avançados de cálculo estrutural, que utilizam análise por Elementos Finitos e Analogia de Grelha.

Atualmente, edifícios residenciais, comerciais e industriais, e até mesmo residências, têm utilizado as lajes planas como sistema estrutural para os seus pisos. A motivação desse trabalho baseia-se no fato de poder contribuir com informações e conclusões que possam ser adotadas como parâmetros de projeto, ou possam direcionar projetistas para o uso adequado das lajes planas. Ainda, pretende-se colocar em discussão assuntos importantes a respeito desse sistema estrutural, de modo que esses sejam objeto de estudos e trabalhos futuros.

1.5 OBJETIVOS

Embora as lajes planas sejam utilizadas na prática há muito tempo, os estudos acerca de seu comportamento em serviço não são muitos. O Método dos Elementos Finitos apresenta resultados pouco satisfatórios nas proximidades do pilar para momentos fletores quando o pilar é modelado como um ponto e/ou a malha da laje não é corretamente modelada. Por outro lado, a utilização do método de Analogia de Grelha aplicado a esse sistema estrutural não apresenta muitas publicações, e os seus resultados também podem ser equivocados, quando a laje é inadequadamente modelada e/ou analisada.

O objetivo principal do trabalho é comparar os resultados teóricos estudados pela Teoria das Placas, com o Método dos Elementos Finitos e a Analogia de Grelha, obtendo-se soluções satisfatórias para deslocamentos, momentos positivos e momentos negativos de lajes planas, esses últimos especialmente, na região sobre os pilares. Com isso, pretende-se definir uma modelagem adequada de grelha ou malha, para representar os esforços e deslocamentos reais, levando-se em conta as dimensões do pilar. Será também estudada na modelagem as dimensões do pilar e sua influência nos resultados, procurando-se definir o melhor modelo para o conjunto laje-pilar.

2 CÁLCULO DE LAJES PLANAS

2.1 TEORIA DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO

2.1.1 INTRODUÇÃO

As placas se encontram submetidas, fundamentalmente, a esforços de flexão, distinguindo-se das chapas, estruturas também planas, mas submetidas a cargas contidas no seu plano médio. O trabalho de flexão das placas exige que estas sejam delgadas; se a relação entre o lado menor e a espessura for inferior a 5, a placa pode ser considerada grossa, surgindo um estado triaxial de tensões de difícil estudo.

As placas podem diferenciar-se pela sua forma (de contorno poligonal ou circular, maciças ou com espaços vazios); pela disposição de seus apoios (placas apoiadas no seu contorno, placas em balanço, placas contínuas em uma ou duas direções); pela forma do apoio (pontual ou lineares); pelo tipo de apoio (apoio simples ou engastamento). Cada placa pode, além disso, estar submetida a diferentes tipos de carga, como por exemplo, carga pontual, uniforme, triangular, etc.

Para o cálculo dos esforços nas placas existem dois grupos de métodos. Os *métodos clássicos*, fundamentados na teoria da elasticidade, supondo que o material é homogêneo e isótropo e se comporta elasticamente, da mesma forma que se faz, para o cálculo de esforços em outros tipos de elementos estruturais. Já *métodos de ruptura*, fundamentados na teoria da plasticidade, supõem, ao contrário, que o material comporta-se como um corpo rígido - perfeitamente plástico.

Através dos métodos clássicos obtêm-se, com boa aproximação, os esforços na situação de serviço, a partir dos quais pode-se definir a distribuição das armaduras na placa, de modo que a mesma apresente um bom comportamento em serviço. Os métodos de ruptura não proporcionam informação de qual a distribuição de armaduras adequada, mas permitem a obtenção mais racional da carga última na situação de

esgotamento da placa. Ambos os sistemas são, portanto, de grande interesse, devendo-se escolher, em cada caso, o mais adequado para o objetivo que se pretende atingir.

2.1.2 HIPÓTESES FUNDAMENTAIS

O estudo das placas pode ser feito através de uma teoria simplificada, a *Teoria das Placas Delgadas*, que considera certas hipóteses fundamentais de cálculo, semelhantes às aplicadas as estruturas reticuladas, quando do estudo da Resistência dos Materiais. Tais hipóteses são conhecidas como hipóteses de *Kirchoff-Love*. São elas:

- a) O material da placa é homogêneo, isótropo e obedece à Lei de Hooke;
- b) A placa indeformada é plana;
- c) A espessura h é pequena em relação às dimensões da placa, da ordem de $1/10$;
- d) As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais tensões;
- e) Os pontos pertencentes antes da deformação a retas normais à superfície média encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares à superfície média deformada;
- f) Os deslocamentos verticais são muito pequenos em relação à espessura h , sendo possível desprezar a influência dos mesmos no estudo das condições de equilíbrio;
- g) As deformações devidas ao cisalhamento são desprezadas.

2.1.3 EQUAÇÃO DE LAGRANGE

A relação fundamental da teoria das placas elásticas delgadas é a *Equação de Lagrange* (eq. 2.1), válida para materiais em regime elástico linear.

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (2.1)$$

Para a definição da Equação de Lagrange será estudado um elemento de placa, com dimensões dx e dy , submetido a uma carga distribuída q . Os esforços internos atuantes são: momentos fletores M_x e M_y ; momentos torsores M_{xy} e M_{yx} e esforços cortantes Q_x e Q_y .

O equilíbrio do elemento é ilustrado nas *figuras 2.1 e 2.2*.

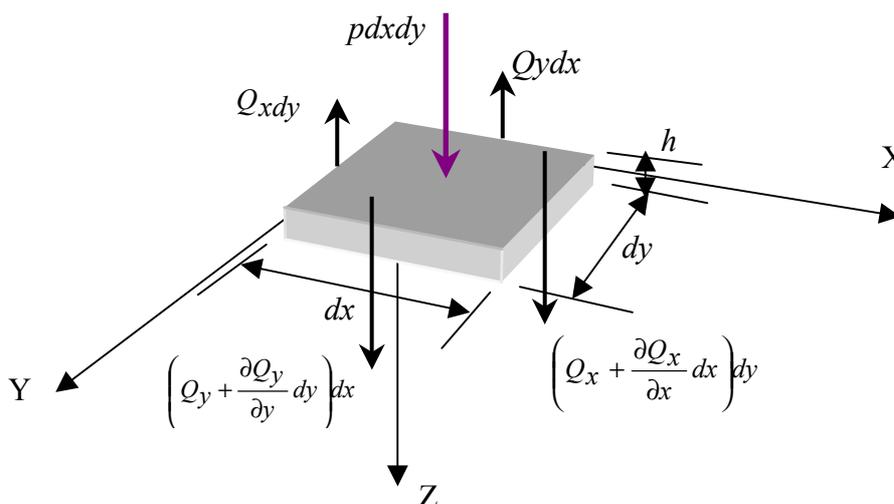


Figura 2.1 Equilíbrio de um elemento de placa para as forças cortantes.

A carga total resultante da carga distribuída p aplicada em todo o elemento é dada por:

$$Q = p dxdy \quad (2.2)$$

Fazendo o equilíbrio das forças verticais:

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx - Q_x dy - Q_y dx + p dx dy = 0 \quad (2.3)$$

que simplificando resulta em:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -p \quad (2.4)$$

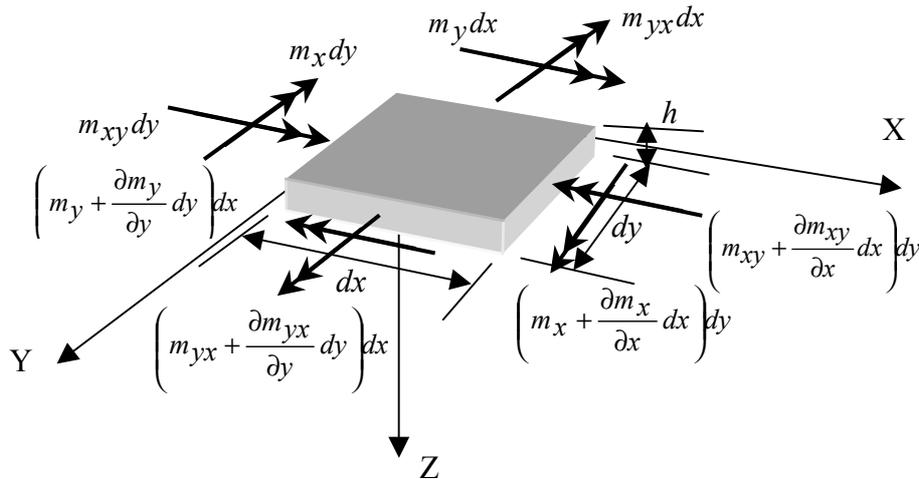


Figura 2.2 Equilíbrio de um elemento de placa para momentos fletores e torsores.

Fazendo o equilíbrio de momentos na direção X:

$$\left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx\right) dy - m_{xy} dy - \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy\right) dx - m_y dx - Q_y dx dy = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (2.6)$$

Fazendo o equilíbrio de momentos na direção Y:

$$\left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - m_{yx} dx + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx\right) dy - m_x dy - Q_x dy dx = 0 \quad (2.7)$$

que simplificando resulta em:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = Q_x \quad (2.8)$$

Como $m_{xy} = -m_{yx}$, pode-se obter:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (2.9)$$

Substituindo-se (2.6) e (2.9) em (2.4), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) = -p \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - \frac{\partial m^2_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial m^2_y}{\partial y^2} - \frac{\partial m^2_{xy}}{\partial x \partial x} = -p \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial m^2_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial m^2_{xy}}{\partial x \partial x} = -p \quad (2.12)$$

A equação 2.12 é a *Equação Geral de Equilíbrio das Placas*, válida para qualquer regime (plástico ou elástico), independente do coeficiente de Poisson, e independente se a placa é isotrópica ou ortotrópica.

Introduzindo-se a equação da linha elástica, ou seja, a curva do eixo da placa, imagina-se um elemento de uma placa com espessura h , a qual está submetida a um momento fletor m_x , o qual provoca uma curvatura $1/\rho$ (*Figura 2.3*).

A relação deformação-curvatura pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_x}{z} \quad (2.13)$$

onde

ε_x é a deformação específica de uma fibra localizada a uma distância z da superfície média da placa e ρ é o raio de curvatura.

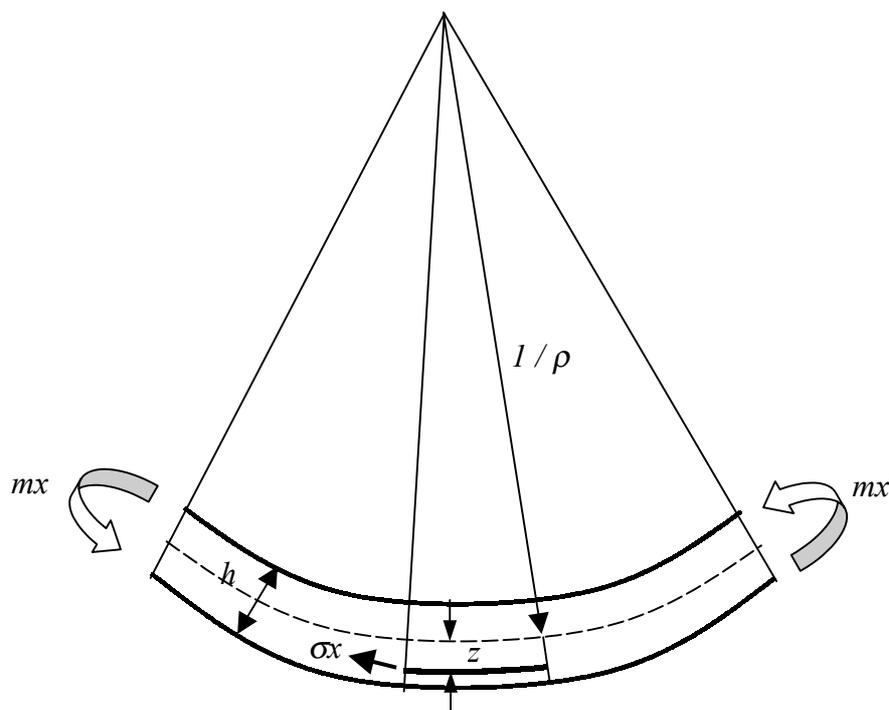


Figura 2.3 Curvatura de um elemento de placa submetido a um momento m_x .

Pode-se também escrever:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

onde

ω é o deslocamento da placa na direção z .

Substituindo (2.13) em (2.14), obtém-se:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

Como está se estudando uma placa, é válido para a outra direção escrever:

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

Para uma dimensão, a *Lei de Hooke* para material elástico linear é dada por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.17)$$

Ampliando o conceito para duas dimensões, obtém-se as seguintes relações:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.18)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (2.19)$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.20)$$

$$\sigma_x = -z \frac{E}{1-\nu^2} \quad (2.21)$$

$$\sigma_y = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dz \quad (2.22)$$

Observando-se a *Figura 2.3*, pode-se obter o momento m_x por unidade de comprimento:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z z dz \quad (2.23)$$

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dz \quad (2.24)$$

logo,

$$m_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.25)$$

Da mesma forma, para a direção Y , pode-se obter:

$$m_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (2.26)$$

Definindo-se D como sendo a rigidez da placa:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.27)$$

onde

E = módulo de deformação longitudinal do material da placa

h = espessura total da placa

ν = coeficiente de Poisson do material da placa

chega-se a:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.28)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (2.29)$$

As tensões de cisalhamento geram um momento de torção, o qual pode ser calculado por:

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.30)$$

Analogamente, pode ser obtido:

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (2.31)$$

Substituindo-se as equações (2.28), (2.29) e (2.31) na Equação Geral de Equilíbrio das Placas (equação 2.12), obtém-se:

$$\boxed{\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{p}{D}} \quad (2.32)$$

Que é a *Equação de Lagrange*, que define a relação fundamental da teoria das placas delgadas, válida para materiais em regime elástico-linear.

A equação pode ser escrita também na forma Laplaciana:

$$\nabla^4 \omega = \frac{p}{D} \quad \text{onde} \quad \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.33)$$

2.1.4 SOLUÇÃO EXATA DO PROBLEMA

O problema descrito pela Equação de Lagrange apresenta poucas soluções exatas, se restringindo somente a casos comuns de geometria da placa e do carregamento. Alguns exemplos em que se têm as soluções exatas são lajes circulares e retangulares simplesmente apoiadas com carregamento uniformemente distribuído. A solução exata da Equação de Lagrange foi proposta por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). Para uma placa retangular simplesmente apoiada, de dimensões a e b

(Figura 2.4), submetida a um carregamento bisenoidal distribuído sobre toda a sua superfície, dado por:

$$p = p_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (2.34)$$

onde

p_0 é o valor da carga distribuída no ponto central da placa.

Da Equação de Lagrange, se obtém:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{p_0}{D} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (2.35)$$

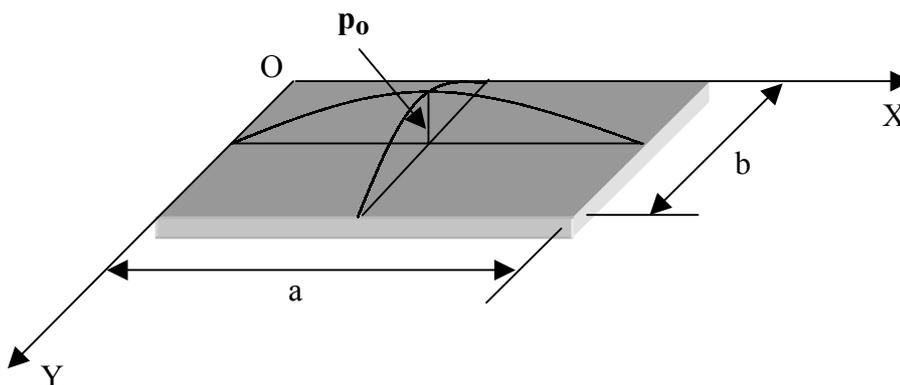


Figura 2.4 Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento bisenoidal.

As condições de contorno dessa equação diferencial vêm impostas pelas condições existentes nos apoios da placa.

Para $x = 0$ e $x = a$ se obtém $M_x = 0$ e $\omega = 0$

E, analogamente:

Para $y = 0$ e $y = b$ se obtém $M_y = 0$ e $\omega = 0$

Deve-se encontrar $\omega(x,y)$ tal que respeite a Equação de Lagrange, e as condições de contorno acima. Verifica-se a equação:

$$\omega(x, y) = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (2.36)$$

onde

C é uma constante que deve satisfazer a equação (2.34), a qual respeita imediatamente as condições de contorno de $\omega = 0$ para $x = 0$ e $x = a$ e para $y = 0$ e $y = b$. Substituindo-se (2.36) na equação (2.35) resulta:

$$\frac{p_0}{D} = \pi^4 C \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (2.37)$$

Assim,

$$C = \frac{p_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad (2.38)$$

Substituindo-se a equação (2.38) em (2.36) tem-se:

$$\omega(x, y) = \frac{p_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (2.39)$$

que representa o campo de deslocamentos para a placa.

Utilizando as equações (2.28), (2.29) e (2.31), as quais definem os momentos, são obtidos os campos de momentos fletores e torsões para a placa:

$$m_x = \frac{p_o}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \nu \frac{1}{b^2} \right) \text{sen} \frac{\pi x}{a} \text{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (2.40)$$

$$m_y = \frac{p_o}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \nu \frac{1}{a^2} \right) \text{sen} \frac{\pi x}{a} \text{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (2.41)$$

$$m_{xy} = \frac{p_o}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \frac{(1-\nu)}{ab} \text{sen} \frac{\pi x}{a} \text{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (2.42)$$

2.1.5 SOLUÇÃO POR SÉRIES DE FOURIER

Na análise de uma placa, uma carga $p(x,y)$ qualquer pode ser desenvolvida através de uma Série de Fourier infinita, em termos de senos, como a seguinte expressão:

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.43)$$

onde

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x,y) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (2.44)$$

Para a solução da equação diferencial das placas, Navier utilizou séries duplas trigonométricas para lajes retangulares simplesmente apoiadas. O campo de deslocamentos na placa é dado por:

$$\omega(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.45)$$

a qual satisfaz as condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada.

$$\omega_{x=0, x=a} = 0 \quad \omega_{y=0, y=b} = 0$$

$$m_x_{x=0, x=a} = 0 \quad m_y_{y=0, y=b} = 0$$

O carregamento $p(x,y)$ é expandido também em séries duplas trigonométricas:

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.46)$$

Aplicando-se as equações (2.45) e (2.46) na Equação de Lagrange, pode-se obter:

$$W_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (2.47)$$

Introduzindo-se (2.47) em (2.45), obtém-se:

$$\omega(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.48)$$

Substituindo-se a equação (2.48) em (2.25), (2.26) e (2.31), tem-se:

$$m_x(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.49)$$

$$m_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.50)$$

$$m_{xy}(x, y) = -(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \frac{mn}{ab}}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.51)$$

A resolução dessas equações para aplicação aos problemas da engenharia de estruturas é um tanto complexa e pouco prática, além do que, para condições de contorno, geometria e carregamento diferentes dos usuais, a utilização desse procedimento torna-se quase impossível.

As tabelas apresentam em geral soluções para os casos mais comuns de carregamento e geometria de placa, como por exemplo, lajes retangulares com carregamento uniformemente distribuído, embora existam tabelas para outras situações. Entretanto, existem bibliografias de tabelas que fornecem resultados para casos mais complexos, como por exemplo, as formuladas por Bares (1970).

Portanto, o cálculo de placas, em termos de projetos de engenharia, é feito através de métodos numéricos - geralmente com programas computacionais, métodos aproximados - descritos em normas e códigos e baseados na experiência e em resultados práticos, ou através de tabelas.

Os métodos aproximados também apresentam limitações, visto que, para a sua aplicação diversas condições de geometria e carregamento devem ser respeitadas, caso contrário os resultados obtidos podem não condizer com a realidade. A desvantagem das tabelas e métodos aproximados é que não é considerada a interação entre as lajes e os demais elementos da estrutura - vigas e pilares, no que se refere às dimensões e

rigidez dos mesmos, bem como a influência da laje no comportamento global da edificação.

No caso de lajes com geometrias, condições de contorno e carregamentos complexos, comum em lajes planas ou lajes cogumelo, a solução mais rápida e precisa do problema é obtida através de métodos numéricos. No entanto, quando são utilizados, deve-se ter o cuidado com determinados parâmetros de modelagem, os quais podem gerar resultados incorretos. Um exemplo é o caso de cargas concentradas aplicadas sobre lajes, ou analogamente, lajes planas apoiadas diretamente sobre pilares, onde os momentos negativos tendem ao infinito, se as dimensões do pilar tenderem a zero.

2.2 CARGAS CONCENTRADAS EM PLACAS: INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE MOMENTO INFINITO

Para o estudo do problema da região próxima aos pilares nas lajes planas é necessário definir os conceitos e comportamento das placas quando submetidas a cargas concentradas. Embora seja uma descrição essencialmente numérica, é fundamental para que se possa introduzir o conceito de momento infinito em placas submetidas a uma carga concentrada.

2.2.1 CARGA CONCENTRADA EM UMA PLACA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), usando o método de Navier em uma expressão na forma de séries duplas obtém-se a deflexão de uma placa carregada com uma carga concentrada P aplicada no ponto $x = \xi, y = \eta$ (Figura 2.5).

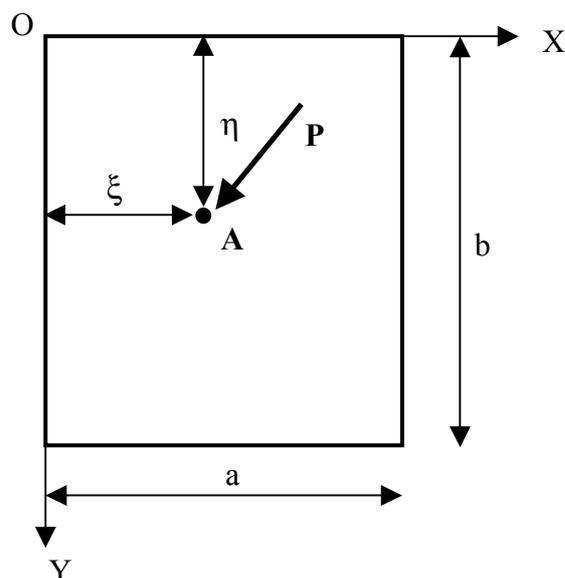


Figura 2.5 Carga concentrada em uma placa retangular simplesmente apoiada.

Para se obter uma solução equivalente na forma de séries simples, inicia-se representando a solução de Navier da seguinte maneira:

$$\omega = \frac{4Pb^3}{\pi^4 a} \sum_{m=1}^{\infty} S_m \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.52)$$

Onde o coeficiente S_m é dado por

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2 \right)^2} \quad (2.53)$$

Introduz-se a notação:

$$S'_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi(y-\eta)}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2 \right)^2} \quad \text{e} \quad S''_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi(y+\eta)}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2 \right)^2} \quad (2.54)$$

Pode-se também representar a expressão (2.53) na forma:

$$S_m = \frac{1}{2} (S'_m - S''_m) \quad (2.55)$$

Para avaliar as somas (2.54), pode-se usar as séries conhecidas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{\alpha^2 + n^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\cosh \alpha(\pi - z)}{\sinh \pi\alpha} \quad (2.56)$$

As quais valem para $0 \leq z \leq 2\pi$ e considera-se, primeiramente, como uma função $S(\alpha)$ de α . A segunda derivada da equação 2.56 com relação à α resulta:

$$\frac{\partial^2 S(\alpha)}{\partial \alpha^2} = -2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{\left(\alpha^2 + n^2 \right)^2} \quad (2.57)$$

Depois de derivar também o lado direito da equação e se substituir o resultado na equação 2.57, obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{\left(\alpha^2 + n^2\right)^2} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi}{4\alpha^3} \frac{\cosh \alpha(\pi-z)}{\sinh \pi\alpha} - \frac{\pi(\pi-z)}{4\alpha^2} - \frac{\sinh \alpha(\pi-z)}{\sinh \pi\alpha} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \frac{\cosh \alpha(\pi-z) \cosh \pi\alpha}{\sinh^2 \pi\alpha} \quad (2.58)$$

Para obter os valores das somas (2.54) aplica-se, na equação (2.58), primeiro $z = (\pi/b).(y - \eta)$, e então $z = (\pi/b).(y + \eta)$ e, em adição, $\alpha = m.b/a$. Usando esses valores nas equações (2.55) e (2.52), chega-se, finalmente, às expressões que seguem, para a deflexão na placa:

$$\omega = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \beta_m \coth \beta_m - \frac{\beta_m y_1}{b} \coth \frac{\beta_m y_1}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \coth \frac{\beta_m \eta}{b} \right) \frac{\sinh \frac{\beta_m \eta}{b} \sinh \frac{\beta_m y_1}{b} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \sinh \beta_m} \quad (2.59)$$

Na qual:

$$\beta_m = \frac{m\pi b}{a} \quad y_1 = b - y \quad y_1 \geq \eta \quad (2.60)$$

No caso de $y < \eta$, y_1 deve ser substituído por y e η por $\eta_1 = b - \eta$.

Considerando-se mais atentamente o caso de uma carga concentrada P aplicada no ponto A no eixo de simetria da placa, o qual pode ser considerado como o eixo X (Figura 2.6), para $\eta = b/2$ e a notação:

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} = \frac{\beta_m}{2} \quad (2.61)$$

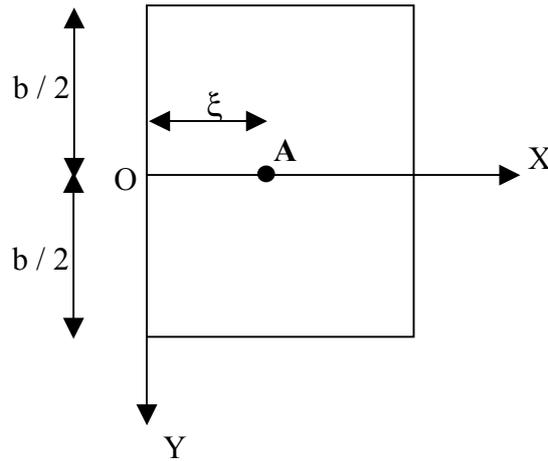


Figura 2.6 Carga concentrada ao longo do eixo x de uma placa retangular simplesmente apoiada.

a expressão geral para a deflexão na placa transforma-se em:

$$\omega = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(1 + \alpha_m \tanh \alpha_m) \sinh \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y)}{-\frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \cosh \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y)} \right] \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \cosh \alpha_m} \quad (2.62)$$

A qual é válida para $y \geq 0$, ou seja, abaixo do eixo X. Colocando, em particular, $y = 0$, obtém-se a deflexão da placa ao longo do eixo X na forma:

$$(\omega)_{y=0} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \quad (2.63)$$

Essa série converge rapidamente e os primeiros termos fornecem as deflexões com suficiente precisão. No caso de uma carga P aplicada no centro da placa, a deflexão máxima é obtida substituindo-se $x = \xi = a / 2$ na expressão (2.63), chegando-se à expressão:

$$\omega_{max} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) = \alpha \frac{Pa^2}{D} \quad (2.64)$$

Valores do fator numérico α para diversos valores de relação b/a são dados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 Fator α para deflexões em uma placa retangular carregada no centro.

b / a	1.0	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0	∞
α	0.01160	0.01265	0.01353	0.01484	0.01570	0.01620	0.01651	0.01690	0.01695

É visto que, com o aumento no comprimento da placa, a deflexão máxima se aproxima rapidamente daquela de uma placa alongada de comprimento infinito. A comparação da deflexão máxima de uma placa quadrada com a de uma placa circular carregada no centro indica que a deflexão da placa circular é maior do que a da correspondente placa quadrada. Esse resultado pode ser atribuído a ação das forças concentradas reativas junto aos cantos da placa quadrada, a qual tem a tendência de produzir uma deflexão na placa convexa para cima.

2.2.2 MOMENTOS FLETORES EM UMA PLACA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA COM UMA CARGA CONCENTRADA

Para determinar os momentos fletores ao longo do eixo central $y = 0$ de uma placa carregada, de acordo com a Figura 2.6, calcula-se a segunda derivada da expressão (2.62), a qual transforma-se em:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m} \quad (2.65)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m} \quad (2.66)$$

Substituindo essas derivadas para os momentos fletores, obtém-se:

$$(M_x)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left((1+\nu) \tanh \alpha_m - \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m} \quad (2.67)$$

$$(M_y)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left((1+\nu) \tanh \alpha_m - \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m} \quad (2.68)$$

Quando b é muito grande em comparação com a , pode-se fazer:

$$\tanh \alpha_m \approx 1 \quad \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \approx 1 \quad (2.69)$$

Então:

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (2.70)$$

Essas séries não convergem rapidamente para resultados satisfatórios dos momentos nas proximidades do ponto de aplicação da carga P , portanto é necessário derivar outra forma de representação dos momentos próximos aquele ponto. Para a discussão dos esforços de uma placa circular com uma carga aplicada no centro, sabe-se que os momentos fletores tornam-se infinitos no ponto de aplicação da carga.

A distribuição de tensões no interior de um círculo de pequeno raio e nas proximidades do centro de uma placa circular é a mesma, quando ambos são submetidos a uma carga concentrada P central. Os momentos fletores no interior do círculo podem ser considerados como consistindo de duas partes: uma é a mesma que o caso de uma placa circular de raio a carregada no centro, e outra representa a diferença entre as

tensões em uma placa circular e uma retangular. Como a distância r entre o ponto de aplicação da carga e o ponto de consideração torna-se muito pequena, a primeira parte das tensões varia como $\log (a / r)$ e torna-se infinito no centro, enquanto a segunda parte, representando o efeito da diferença nas condições de contorno das duas placas, permanece contínua.

Para obter as expressões para momentos fletores nas proximidades do ponto de aplicação da carga inicia-se com o caso mais simples de uma placa longa infinita (Figura 2.7). A deflexão de tal placa pode ser definida se derivada da expressão (2.62), por aumento do comprimento b e, conseqüentemente do valor de $\alpha_m = m\pi b / 2a$, indefinidamente, ou seja, colocando:

$$\tanh \alpha_m \approx 1 \qquad \cosh \alpha_m \approx \frac{1}{2} e^{\alpha_m}$$

$$\sinh \frac{\alpha_m}{b}(b-2y) \approx \cosh \frac{\alpha_m}{b}(b-2y) \approx \frac{1}{2} e^{(\alpha_m/b)(b-2y)} \qquad (2.71)$$

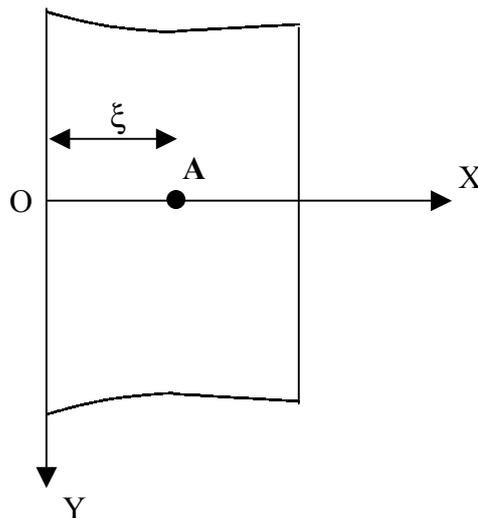


Figura 2.7 Carga concentrada ao longo do eixo x de uma placa retangular alongada.

Substituindo esses valores na equação (2.62) a deflexão na placa simplesmente apoiada com uma carga concentrada P situada em $x = \xi$ e $y = 0$ transforma-se em:

$$\omega = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) e^{-m\pi y/a} \quad (2.72)$$

A qual vale para $y \geq 0$, ou seja, abaixo do eixo X .

As expressões correspondentes para os momentos fletores e momentos torsões são:

$$M_x = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left(1 + \nu + (1-\nu) \frac{m\pi y}{a}\right) e^{-m\pi y/a} \quad (2.73)$$

$$M_y = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left(1 + \nu - (1-\nu) \frac{m\pi y}{a}\right) e^{-m\pi y/a} \quad (2.74)$$

$$M_{xy} = -\frac{P}{2a} y(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} e^{-m\pi y/a} \quad (2.75)$$

Outra vez, utilizando a expressão $M = (M_x + M_y) / (1 + \nu)$, tem-se:

$$M = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \frac{P}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} e^{-m\pi y/a} \quad (2.76)$$

Os momentos podem ser expressos agora em termos da função M , da maneira que segue:

$$M_x = \frac{1}{2} \left[(1+\nu)M - (1-\nu)y \frac{\partial M}{\partial y} \right] \quad (2.77)$$

$$M_y = \frac{1}{2} \left[(1+\nu)M + (1-\nu)y \frac{\partial M}{\partial y} \right] \quad (2.78)$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2}(1-\nu)y \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.79)$$

Desenvolvendo as séries, obtém-se a expressão:

$$M = \frac{P}{4\pi} \log \frac{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x+\xi)}{a}}{\cosh \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x-\xi)}{a}} \quad (2.80)$$

Usando as equações (2.77), (2.78) e (2.79), pode-se representar os momentos de uma placa longa infinita. Observando, além do mais, que $\Delta\Delta\omega = 0$ em qualquer lugar, exceto junto ao ponto $(x = \xi, y = 0)$ de aplicação da carga, conclui-se que a função $M = -D.\Delta\omega$ satisfaz (exceto junto ao ponto anteriormente mencionado) a equação $\Delta M = 0$. A condição de contorno $M = 0$ ao longo da linha $x = 0$ e $x = a$ é também satisfeita pela função M .

Para os pontos ao longo do eixo X as equações (2.77) e (2.78) fornecem $M_x = M_y$ e então:

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = (M)_{y=0} \frac{1+\nu}{2} \quad (2.81)$$

Usando a equação (2.80) no caso particular de carga aplicada junto ao centro do eixo da placa, $\xi = a/2$, obtém-se:

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{P(1+\nu)}{8\pi} \log \frac{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}} \quad (2.82)$$

Esse resultado também pode ser obtido pela soma das séries (2.53).

Retornando-se ao cálculo dos momentos fletores para pontos bem próximos ao ponto de aplicação da carga, mas não necessariamente no eixo X , tem-se que os valores $(x - \xi)$ e y são muito pequenos e, usando a expressão (2.53), pode-se escrever:

$$\cos \frac{\pi(x-\xi)}{a} \approx 1 - \frac{\pi^2(x-\xi)^2}{2a^2} \quad \text{e} \quad \cosh \frac{\pi y}{a} \approx 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} \quad (2.83)$$

Assim, tem-se como resultado:

$$M = \frac{P}{4\pi} \log \frac{1 - \cos \frac{2\pi\xi}{a}}{1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} - 1 + \frac{\pi^2(x-\xi)^2}{2a^2}} = \frac{P}{4\pi} \log \left(\frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} \right)^2 = \frac{P}{2\pi} \log \left(\frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} \right) \quad (2.84)$$

Na qual:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} \quad (2.85)$$

Onde r representa a distância do ponto de consideração até o ponto de aplicação da carga P . Agora, usando a expressão (2.84) como substituição nas equações (2.77), (2.78) e (2.79), obtém-se as expressões que seguem, válidas para pontos nas proximidades da carga concentrada:

$$M_x = \frac{1}{2} \left[(1+\nu) \frac{P}{2\pi} \log \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \frac{(1-\nu)Py^2}{2\pi r^2} \right] \quad (2.86)$$

$$M_y = \frac{1}{2} \left[(1+\nu) \frac{P}{2\pi} \log \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} - \frac{(1-\nu)Py^2}{2\pi r^2} \right] \quad (2.87)$$

Isso é interessante para a comparação desse resultado com aquele para uma carga aplicada no centro, em uma placa circular simplesmente apoiada. Tomando um raio r sob um ângulo α para o eixo X , encontra-se para uma placa circular:

$$M_x = M_n \cos^2 \alpha + M_t \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{P}{4\pi} (1+\nu) \log \frac{a}{r} + (1-\nu) \frac{Py^2}{4\pi r^2} \quad (2.88)$$

$$M_y = M_n \operatorname{sen}^2 \alpha + M_t \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{P}{4\pi} (1+\nu) \log \frac{a}{r} + (1-\nu) \frac{Px^2}{4\pi r^2} \quad (2.89)$$

Os primeiros termos das expressões (2.86), (2.87), (2.88) e (2.89) coincidirão ao se tomar o raio externo de uma placa circular igual a:

$$\frac{2a}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a} \quad (2.90)$$

Subordinados a essas condições, os momentos M_x são os mesmo para ambos os casos. O momento M_y para uma placa retangular alongada é obtido de uma placa circular por subtração do valor $(1 - \nu)P / 4\pi$. A partir disso pode-ser concluir que em uma placa retangular alongada a distribuição de tensões em torno do ponto de aplicação da carga é obtida por suposição das tensões de uma placa circular carregada no centro com raio $(2a / \pi) \operatorname{sen} (\pi\xi / a)$ com um simples esforço produzido pelo momento $M_y = - (1 - \nu)P / 4\pi$.

Pode-se admitir que a mesma relação entre os momentos da placa circular e da placa retangular alongada também é válida no caso de carga P uniformemente distribuída dentro de uma área circular de pequeno raio c . Nesse caso, para o centro de uma placa circular obtém-se:

$$M_{max} = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \log \frac{a}{c} + 1 \right] \quad (2.91)$$

Em conseqüência, junto ao centro de uma área circular carregada de uma placa retangular alongada, pode-se escrever:

$$M_x = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \log \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] \quad (2.92)$$

$$M_y = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \log \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] - \frac{(1-\nu)P}{4\pi} \quad (2.93)$$

Da comparação de uma placa retangular alongada com uma placa circular, pode ser concluído que toda informação a respeito das tensões locais junto ao ponto de aplicação da carga P , derivado de uma placa circular, podem também ser aplicadas ao caso de uma placa retangular alongada.

Quando a placa não é muito longa, a equação (2.52) deve ser usada em lugar da equação (2.53) no cálculo dos momentos M_x e M_y ao longo do eixo X . Desde que $\tanh \alpha_m$ se aproxime rapidamente de 1 e $\cosh \alpha_m$ torne-se um número grande quando m é incrementado, as diferenças entre a soma da série (2.52) e a soma da série (2.53) pode facilmente ser calculada. Assim, os momentos M_x e M_y ao longo do eixo X e próximo ao ponto de aplicação da carga podem ser representados da seguinte forma:

$$M_x = \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} = \frac{P(1+\nu)}{4\pi} \log \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} \quad (2.94)$$

$$M_y = \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + \gamma_2 \frac{P}{4\pi} = \frac{P(1+\nu)}{4\pi} \log \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \gamma_2 \frac{P}{4\pi} \quad (2.95)$$

No qual γ_1 e γ_2 são fatores numéricos cuja magnitude depende da relação b/a e a posição da carga no eixo X . Alguns valores desses fatores para aplicação central da carga são dados na *Tabela 2.2*.

Tabela 2.2 Fatores γ_1 e γ_2 .

b / a	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	∞
γ_1	-0.565	-0.350	-0.211	-0.125	-0.073	-0.042	0
γ_2	+0.135	+0.115	+0.085	+0.057	+0.037	+0.023	0

Além disso, a distribuição de tensões próxima ao ponto de aplicação da carga é substancialmente a mesma que a de uma carga circular carregada no centro, com raio $(2a / \pi) \text{sen}(\pi\xi / a)$. Para alcançar os momentos fletores próximos à carga, é necessário somente superpor os momentos da placa circular pelos momentos $M' = \gamma_1 P / 4\pi$ e $M' = -(1 - \nu - \gamma_2) P / 4\pi$. Admitindo que essa conclusão também vale quando a carga P é uniformemente distribuída dentro de um círculo de pequeno raio c , obtém-se para o centro do círculo:

$$M_x = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \log \frac{2a \text{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} \right] + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} \quad (2.96)$$

$$M_y = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \log \frac{2a \text{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} \right] - (1-\nu-\gamma_2) \frac{P}{4\pi} \quad (2.97)$$

Somente no caso de carga distribuída, as forças reativas são produzidas por cargas concentradas junto aos cantos das placas retangulares. As reações nos cantos são dadas por:

$$R = nP \quad (2.98)$$

Essas reações são causadas pela carga central P e os valores de n são dados na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 Fator numérico n para forças reativas R junto aos cantos de placas retangulares sob carga central. $\nu = 0,3$.

b/a	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0	∞
n	0.1219	0.1162	0.1034	0.0884	0.0735	0.0600	0.0180	0

A distribuição de momentos fletores e cortantes no caso particular de uma placa quadrada com uma carga central são mostradas na *Figura 2.8*. A porção tracejada das curvas é obtida para uma distribuição uniforme da carga P dentro da área circular com raio $c = 0,05a$.

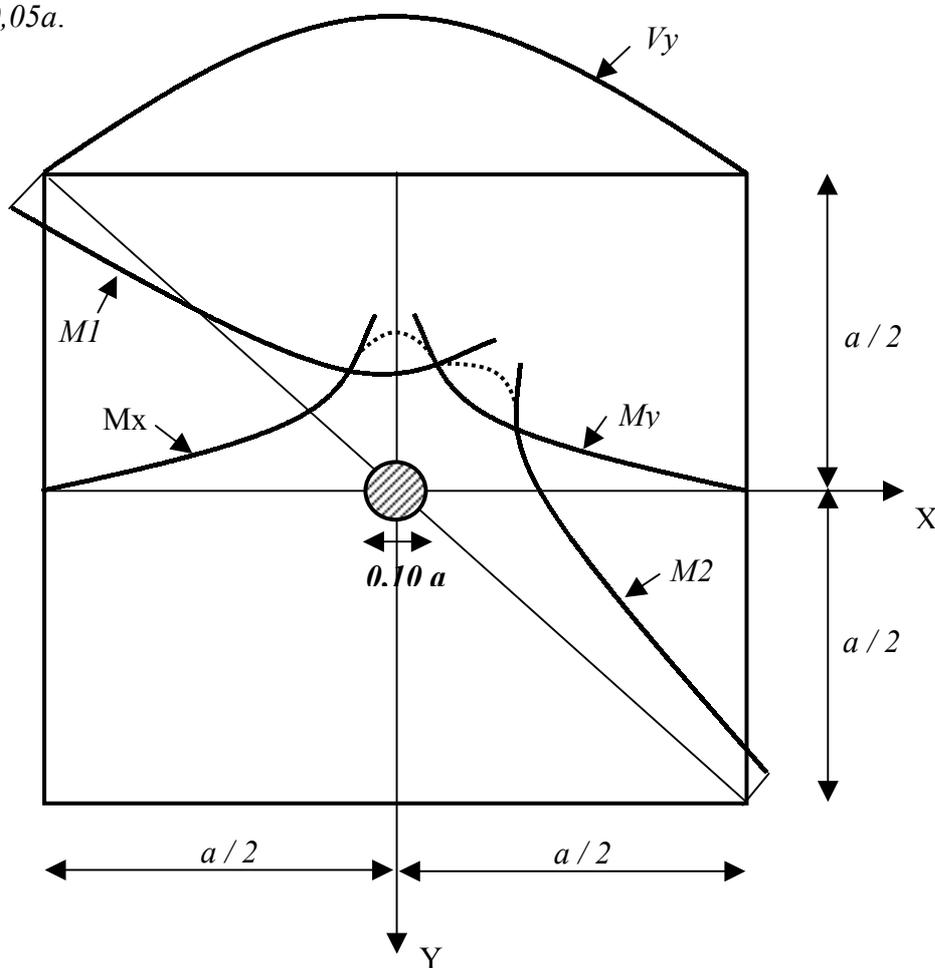


Figura 2.8 Distribuição de momentos fletores e cortantes em uma placa quadrada com carga concentrada aplicada no centro.

Pode-se facilmente concluir que o exemplo acima estudado por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), pode ser tranqüilamente aplicado para o caso de lajes planas ou lajes sem vigas. A única diferença se apresenta no sentido da carga concentrada, que no caso das lajes planas representa a reação dos pilares. Portanto, para o caso de lajes apoiadas diretamente sobre pilares, os momentos negativos teóricos também são infinitos no centro dos pilares, sendo necessário utilizar outros métodos para encontrar valores para o dimensionamento das lajes. O procedimento de tomar o momento na face do pilar (*figura 2.8*) e fazer uma correção até o centro é indicado por outros autores.

2.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

2.3.1 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O principal inconveniente da resolução de lajes planas através da Equação Diferencial das Placas é a necessidade de solucionar séries complexas, o que não é interessante para aplicações em projeto. Da mesma forma, as soluções exatas são poucas, limitando-se a determinados casos de geometria, carregamento e condições de contorno.

Com o advento do computador, surgiu a integração numérica pelo Método das Diferenças Finitas (M.D.F.). O método consiste em dividir a placa em uma malha que se adapte ao seu contorno. A equação de Lagrange é substituída por uma série de equações algébricas lineares, a partir das quais são definidos os deslocamentos w nos nós da malha. Em função desses deslocamentos podem ser expressas as suas derivadas, resultando em momentos fletores e esforços cortantes. Para os pontos próximos às bordas é necessário adotar deslocamentos em pontos fictícios situados fora da placa.

Os métodos clássicos se aplicam preferencialmente a elaboração de tabelas de esforços em placas. Com a ajuda dessas tabelas se obtém facilmente os esforços nas placas em condições de apoio mais usuais.

A *Figura 2.9* ilustra uma malha adotada para o cálculo de uma placa através do Método das Diferenças Finitas, no qual, cada nó recebeu uma nomenclatura própria. Para o caso de placas de formas mais complexas e condições de apoio variadas, tais métodos não são de aplicação prática. Nesses casos pode-se recorrer ao Método dos Elementos Finitos.

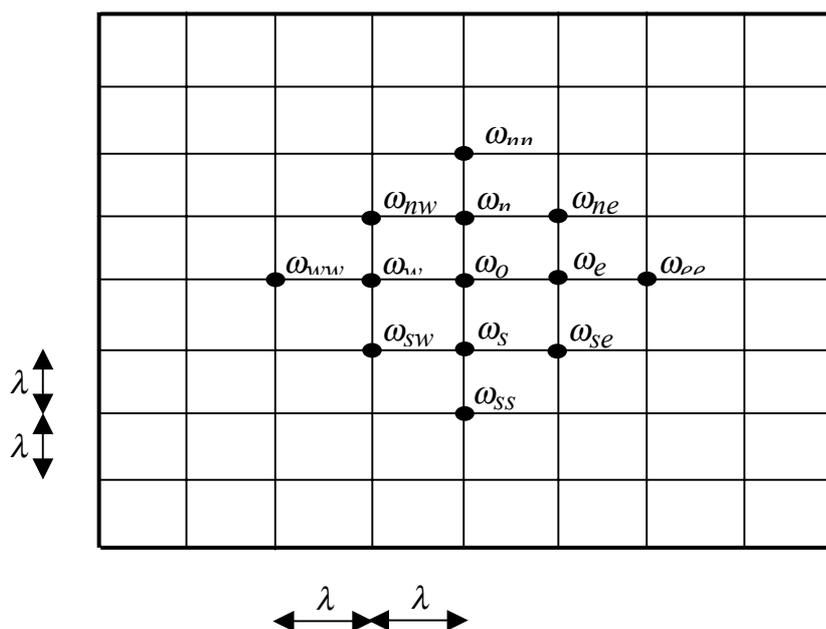


Figura 2.9 Laje plana discretizada para aplicação do método das diferenças finitas.

2.3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Embora o Método das Diferenças Finitas facilite o cálculo das placas, outros métodos numéricos, como Elementos Finitos e Analogia de Grelha, são mais utilizados para a formulação de programas de análise e projeto estrutural.

O Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) consiste em dividir o domínio de integração do problema contínuo em um número discreto de regiões pequenas de dimensões finitas denominadas *elementos finitos* (LA ROVERE, 2001). Ao conjunto de regiões se dá o nome de malha de elementos finitos.

No método a placa é substituída por uma série de elementos de forma quadrilátera ou triangular, podendo variar as dimensões e características elásticas de um elemento para outro. São tomadas como incógnitas os deslocamentos ω e os esforços m , e suas derivadas nos vértices dos elementos. Supõe-se que os deslocamentos ω dentro de cada elemento são dados por uma função simples (um polinômio, por exemplo), cujos coeficientes numéricos são fixados, uma vez conhecidos os valores da função ω e de suas derivadas nos vértices dos elementos. Dessa forma, sendo distintas as funções ω

e m e suas derivadas de um elemento para outro, se garante a compatibilidade de deformações entre elementos contínuos ao se igualar seus valores nos vértices.

As condições de equilíbrio de forças da estrutura (ou o que é equivalente, a condição de mínimo da energia potencial total, função das incógnitas escolhidas) proporcionam um sistema de equações lineares, que uma vez resolvido, fornece deslocamentos e permite o cálculo imediato dos esforços na placa. A *figura 2.10* ilustra uma laje plana modelada em elementos finitos.

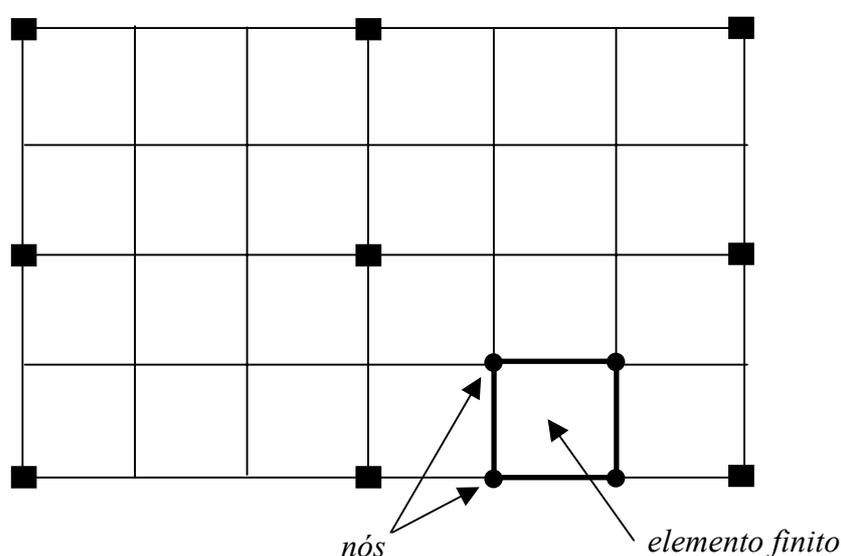


Figura 2.10 Laje plana discretizada em elementos finitos.

Por se tratar de um método numérico, geralmente processado por computadores, é de fundamental importância que o projetista que aplique o método tenha pleno conhecimento dos elementos, configurações e condições a serem aplicadas, caso contrário os resultados fornecidos podem onerar o custo da estrutura, e ainda pior, colocar em risco a segurança de seus usuários. “Embora o método dos elementos finitos possa tornar um bom engenheiro ainda melhor, ele pode tornar um mau engenheiro muito perigoso” (COOK, 1989).

2.3.3 ANALOGIA DE GRELHA

2.3.3.1 INTRODUÇÃO

O método de resolução numérica por Analogia de Grelha consiste em substituir a placa por uma malha, formando uma grelha, a qual é composta por vigas ortogonais entre si, sendo essas barras paralelas e transversais aos eixos principais da placa (*Figura 3.1*). Todas as barras e nós da grelha situam-se no mesmo plano, o que facilita a análise e processamento do método. A cada viga se atribui uma inércia à flexão e uma inércia à torção.

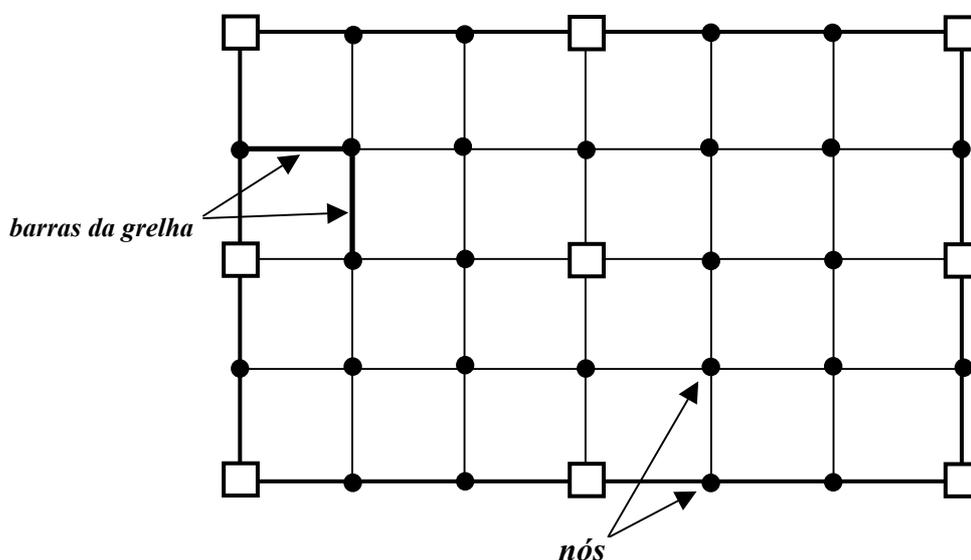


Figura 2.11 Laje plana discretizada em uma grelha – malha de vigas ortogonais entre si.

A resolução do problema é feita através de análise matricial, sendo, portanto, um método de fácil elaboração e resolução rápida, principalmente quando auxiliado por computador. Os efeitos de flexão são os mais importantes para a análise da grelha, entretanto, os efeitos de torção também devam ser considerados.

O método consiste em definir a matriz de rigidez da grelha, em função das propriedades das barras, aplicar as cargas nos nós ou transformar os carregamentos nos elementos em cargas nodais equivalentes, e então por análise matricial são obtidos os

deslocamentos da grelha. Em função dos deslocamentos obtidos são calculados, também matricialmente, os esforços – momentos fletores, momentos torsores e esforços cortantes, nas extremidades das barras da grelha.

Nesse trabalho foi dada ênfase a parte teórica de Analogia de Grelha por dois motivos:

a) Primeiramente, é um método numérico de aplicação mais recente, o qual apresenta pouca bibliografia a respeito, além do que, os resultados acerca do método não foram ainda tão estudados como é o caso do Método dos Elementos Finitos;

b) Embora programas de projeto estrutural como o CYPECAD e o TQS tenham formulação em Elementos Finitos e sejam conhecidos nacionalmente, o programa mais difundido no Estado de Santa Catarina e que vêm se expandindo no ambiente dos projetistas em todo o país é o AltoQI Eberick, cuja formulação das lajes é feita por Analogia de Grelha. No entanto, as versões disponíveis até o momento não efetuam o cálculo diretamente de lajes sem vigas, sendo, portanto necessário fazer determinadas considerações e aproximações para a utilização do programa para esse fim.

O estudo da grelha é feito através da análise matricial, aplicando-se o método dos deslocamentos ou da rigidez. Aqui são introduzidos os conceitos de matriz de rigidez, esforços e deslocamentos e suas relações.

Posteriormente será descrito como é feita a modelagem da grelha, em função das propriedades físicas e geométricas das barras e as condições de contorno do problema, bem como a forma de aplicação do carregamento e obtenção de esforços nas extremidades das barras.

2.3.3.2 ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

A análise matricial de estruturas é de grande aplicação na engenharia, visto que, a maioria dos casos práticos é composta por estruturas hiperestáticas e/ou estruturas em

que a análise individual de cada elemento não é suficiente e torna-se indispensável o conhecimento de seu comportamento global. Um dos métodos que se utiliza a análise matricial é o método dos deslocamentos, ou método da rigidez.

O método dos deslocamentos consiste em obter os deslocamentos da estrutura, através da resolução de equações de compatibilidade, e a partir de tais deslocamentos obter os esforços na estrutura. Primeiramente, fixam-se todos os graus de liberdade da estrutura, obtendo-se o sistema principal.

No caso de elementos de grelha, em cada nó da barra os coeficientes de rigidez são obtidos introduzindo-se um deslocamento unitário - rotação ou translação - na direção dos graus de liberdade, impedindo-se os deslocamentos nas demais direções. No caso da grelha, cada nó apresenta apenas três graus de liberdade, ou seja, duas rotações - θ_x e θ_y , e uma translação - δ_z e, conseqüentemente, cada barra apresenta quatro rotações e duas translações. Para os nós no interior da grelha, pode-se liberar tanto rotações como deformações. A *figura 2.12* mostra os graus de liberdade em um nó de encontro de duas barras de uma grelha.

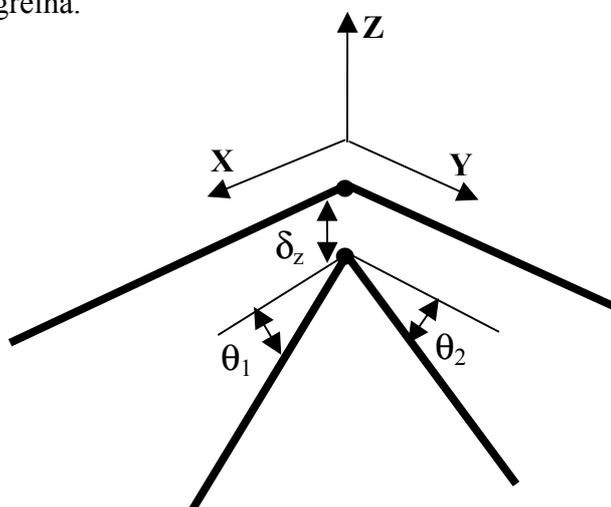


Figura 2.12 Graus de liberdade em um nó de grelha. δ_z representa a translação, θ_1 e θ_2 representam as rotações em torno dos eixos X e Y.

Por definição, as forças produzidas por esses deslocamentos são os coeficientes de rigidez das barras (figuras 2.13, 2.14 e 2.15).

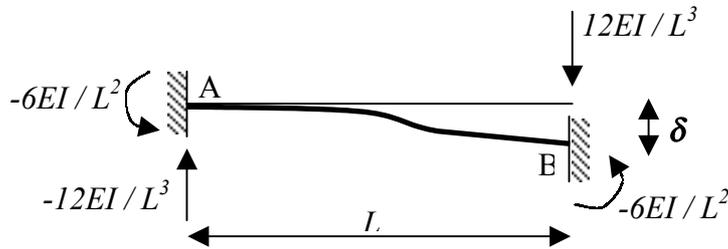


Figura 3.13 Momentos fletores e reações em uma barra devidas ao deslocamento vertical em uma das extremidades.

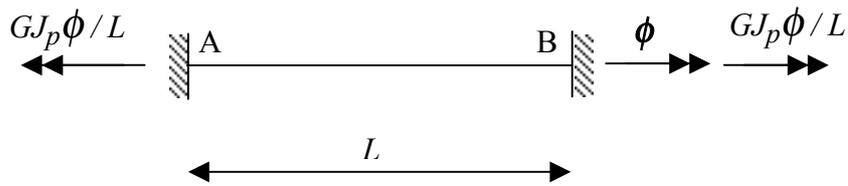


Figura 2.14 Momentos torsores em uma barra devidos à rotação em uma das extremidades.

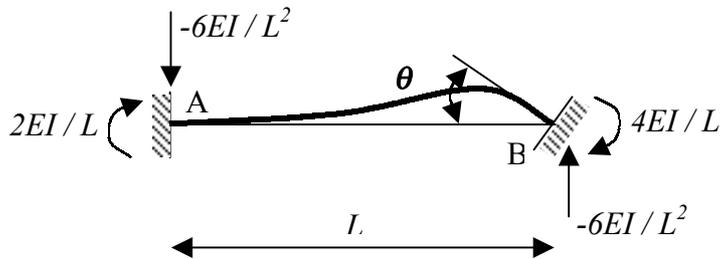


Figura 2.15 Momentos fletores e reações em uma barra devidas a rotação em uma das extremidades.

Em seguida montam-se as equações de equilíbrio de forças em torno dos nós, tendo-se como incógnitas os deslocamentos e compondo-se a matriz de rigidez de cada barra. Para a grelha, o deslocamento axial das barras pode ser desprezado, sendo assim, algumas linhas e colunas da matriz podem ser canceladas.

Para obter-se a matriz de rigidez do sistema é necessário sobrepor os coeficientes dos elementos que compartilham do mesmo nó. A solução das grelha requer a solução dos deslocamentos nos nós, dados por:

$$\{F\} - \{F_0\} = [K] \cdot \{\delta\} \quad (2.99)$$

$$\{\delta\} = [K]^{-1} (\{F\} - \{F_0\}) \quad (2.100)$$

onde

$\{\delta\}$ são os deslocamentos

$[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura

$\{F\}$ são os esforços nodais

$\{F_0\}$ são os esforços de mobilização dos nós, devidos aos carregamentos aplicados nas barras.

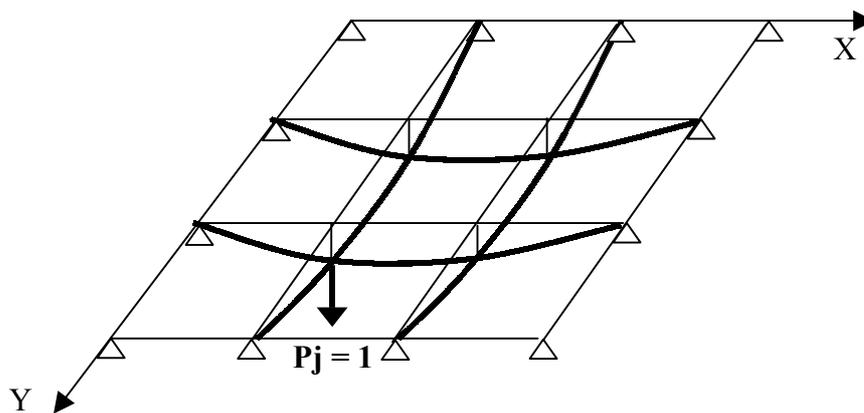


Figura 2.16 Exemplo de grelha aplicada para uma placa, indicando deslocamentos nas duas direções para forças nodais unitárias.

Os esforços internos nas extremidades dos nós são obtidos pela solução da equação (2.101).

$$\{S\} - \{S_0\} = [r] \cdot \{d\} \quad (2.101)$$

onde

$[r]$ é a matriz de rigidez do elemento de barra

$\{d\}$ é o vetor de deslocamentos na extremidade da barra

$\{S\}$ são os esforços nas extremidades da barra

$\{S_0\}$ são os esforços de mobilização dos nós nas extremidades das barras

2.3.3.3 MODELAGEM POR ANALOGIA DE GRELHA

Definição da Malha

Para a modelagem da grelha e posterior obtenção dos resultados, torna-se conveniente a adoção de um sistema de coordenadas, sendo a grelha modelada no plano XY por exemplo, e os esforços externos atuantes na direção Z . É interessante também que cada barra tenha um eixo de coordenadas locais, visto que cada elemento de uma grelha pode estar orientado em qualquer direção no plano XY . Cada nó irá apresentar suas correspondentes coordenadas. A *Figura 2.17* ilustra uma grelha adotada para laje plana, com sistema de coordenadas no plano XY .

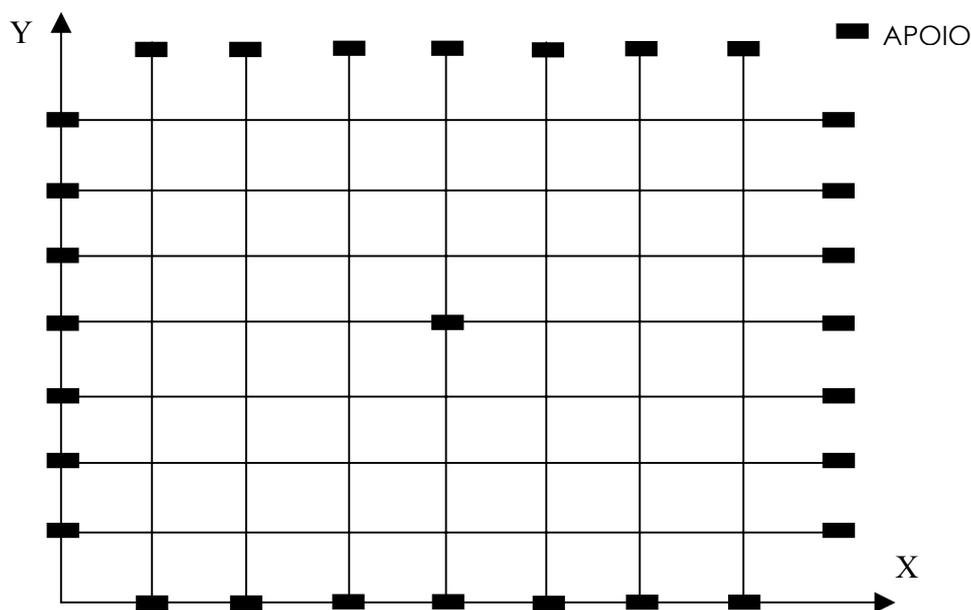


Figura 2.17 Laje plana modelada como grelha no plano XY.

Para a definição da malha da grelha devem ser seguidas certas regras básicas, citadas por Hambly (1976), Takeya (1985) e Figueiredo e Woinowsky-Krieger (1989):

- a) Colocar vigas do reticulado em posições pré-determinadas pelo projeto, tais como em linhas de apoio, ao longo de vigas de borda ou de outras que existirem, que contenham uma ação específica, etc;
- b) Para placas isótropas, cada barra deve ter uma largura no máximo $1/4$ do vão transversal ao seu eixo;
- c) Para placas ortótropas, na direção da menor inércia, deve-se considerar a largura das barras no máximo 40% do vão transversal ao seu eixo;
- d) Quanto menores forem as larguras das barras e, portanto mais densa a malha, melhores serão os resultados; entretanto, essa melhora cessa quando a largura das barras for menor que 2 ou 3 vezes a espessura da placa;

e) Para as porções em balanço das lajes é necessário se colocar pelo menos duas barras transversais ao seu vão;

f) Deve-se colocar sempre uma barra com contorno livre da placa, cuja largura para o cálculo do momento de inércia à torção deve ser diminuída de $0,3h$, pois é nessa distância, a partir da borda que, aproximadamente, a força cortante vertical, resultante das tensões verticais de cisalhamento devidas à torção, atua (h é a altura da placa nessa região);

g) Junto às regiões de grande concentração de esforços, tais como apoios ou cargas concentradas, é recomendável que a largura das barras não seja superior a 3 ou 4 vezes a espessura da placa;

h) Orifícios na laje cuja maior dimensão não exceda a $3h$ não precisam ser considerados, a não ser que estejam muito próximos dos pilares;

i) Aberturas de grande tamanho na laje devem ser tratadas como bordo livre, valendo as recomendações anteriores;

j) Os espaçamentos das barras em cada uma das direções não devem ser muito diferentes, para permitir uma distribuição uniforme de cargas.

É importante salientar que essas regras devem ser adaptadas a cada situação de laje plana, em função da grande variação nas formas, dimensões e condições de contorno existentes.

Graus de Liberdade

Em seguida torna-se necessário definir os graus de liberdade nos nós, os quais representam em cada encontro de barras, os deslocamentos possíveis naquele nó. Para uma estrutura tridimensional têm-se seis graus de liberdade em cada nó – três rotações e três translações.

Na modelagem da grelha, para os pilares pode-se restringir apenas deformação vertical, no caso de placas simplesmente apoiadas, mas deve-se ter em mente que as lajes planas certamente introduzem momentos nos pilares, principalmente os pilares de bordo ou nos casos em que se trata de lajes com assimetria de dimensões e/ou carregamento. Tais momentos devem ser, essencialmente, considerados no dimensionamento dos pilares.

No caso de lajes apoiadas em vigas no contorno, pode-se também restringir unicamente a deformação vertical, no entanto deve-se estar ciente que as vigas apresentam uma rigidez à torção, e que as lajes irão apresentar um valor de momento na ligação entre os dois elementos – laje-viga. Para o dimensionamento das vigas, a torção gerada pela laje deve ser considerada.

Como a Teoria das Placas apresenta fundamentalmente placas apoiadas no contorno, e visando adotar o mesmo modelo para o cálculo através de métodos numéricos, as hipóteses citadas acima serão adotadas – pilar com restrição apenas de deslocamento vertical, e vigas de contorno com rigidez à torção desprezada – de modo que se tenha a possibilidade de comparação entre os resultados para modelos semelhantes.

Propriedades Físicas e Geométricas das Barras

As propriedades das barras influenciam diretamente nos resultados. Cada barra da grelha irá representar uma certa "faixa" da placa, apresentando a espessura da laje e a largura, a qual é dependente da malha da grelha. Portanto, as barras devem apresentar propriedades que representem geométrica e fisicamente a placa em estudo. A *figura 2.18* mostra uma barra de grelha, que representa uma "faixa" da placa, com espessura h e largura b_g .

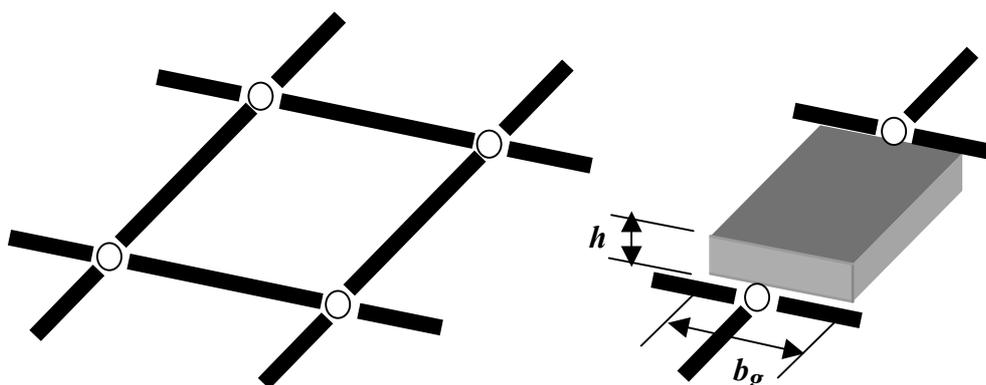


Figura 2.18 Barra representando uma "faixa" de laje.

As propriedades físicas das barras dependem do material da placa. No presente estudo serão analisadas placas de concreto armado, sendo necessário definir o módulo de deformação longitudinal E , e o módulo de deformação ao cisalhamento G . O valor de G é obtido diretamente, através de relação definida pela Resistência dos Materiais, dependendo unicamente do valor do coeficiente de Poisson.

O Módulo de deformação longitudinal a ser adotado para o concreto armado é o módulo secante do concreto E_c , definido no item 4.2.3.1 da NBR6118 como sendo igual a 0,9 do módulo na origem - E_o , dado no item 8.2.5 da NBR 6118 (equação 2.102).

$$\begin{aligned} E_c &= 0,9 \cdot E_0 \\ E_0 &= 6600 \cdot \sqrt{f_{ck} + 3,5} \end{aligned} \quad (2.102)$$

A relação que define o valor do módulo de deformação ao cisalhamento G , de acordo com o valor de ν adotado, é dada por,

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.103)$$

De acordo com Hambly (1976) e Takeya (1985), no cálculo da grelha devem ser definidas as seguintes propriedades geométricas para as barras:

a) O momento de inércia à flexão dos elementos longitudinais e transversais é calculado considerando que cada um representa uma largura b_g de laje igual à distância entre os vãos adjacentes, assim,

$$I = \frac{b_g h^3}{12} \quad (2.104)$$

b) O momento de inércia à torção, por unidade de largura de uma placa isótropa é dado por:

$$j_t = \frac{h^3}{6} \quad (2.105)$$

E para uma viga do reticulado que representa uma largura b de laje,

$$J_t = \frac{b_g h^3}{6} \quad (2.106)$$

Pode-se concluir que:

$$J_t = 2I \quad (2.107)$$

Ou seja, segundo o autor, o momento de inércia à torção pode ser tomado como sendo duas vezes o momento de inércia à flexão.

Carregamento das Barras

O carregamento na laje, proveniente do peso-próprio, revestimento, paredes e cargas acidentais, bem como outras cargas, pode ser representado de diversas maneiras: através de cargas uniformemente distribuídas ou através de cargas concentradas.

No caso de cargas uniformemente distribuídas, essas são aplicadas ao longo das barras. Para as cargas concentradas, as mesmas podem ser aplicadas nos nós ou nas

barras. Para cada um dos casos a carga a ser considerada e aplicada deve ser analisada de acordo com a área de influência da carga – barra ou nó (Figura 2.19).

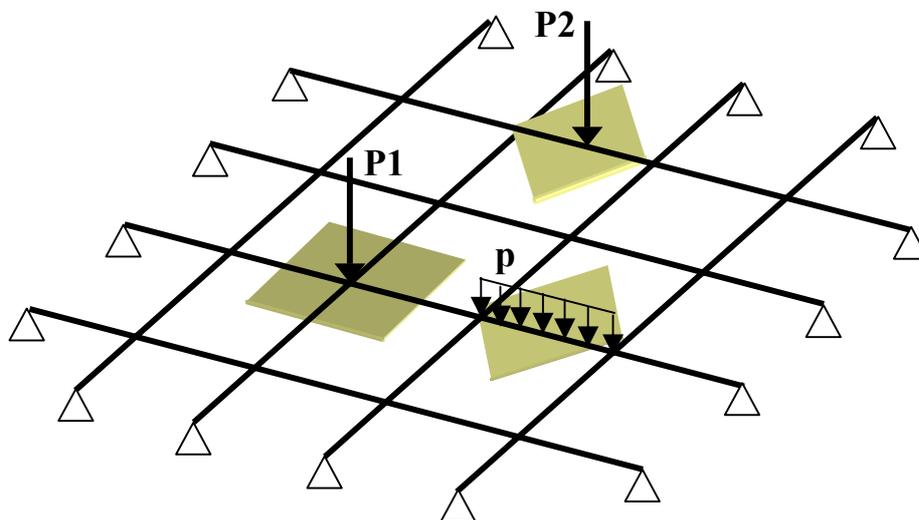


Figura 2.19 Carregamento uniformemente distribuído nas barras – carga p , e carga concentrada nos nós - carga nodal $P1$ – ou nas barras – $P2$.

Esforços nas Barras

O carregamento atuante nas barras provoca rotações e deslocamentos horizontais, bem como esforços nodais. Os esforços nodais que surgem nas barras são três:

- a) Momentos fletores, no sentido do eixo da barra – m ;
- b) Esforços cortantes, no sentido do eixo z – v ;
- c) Momentos torsores, no sentido transversal ao eixo das barras – t .

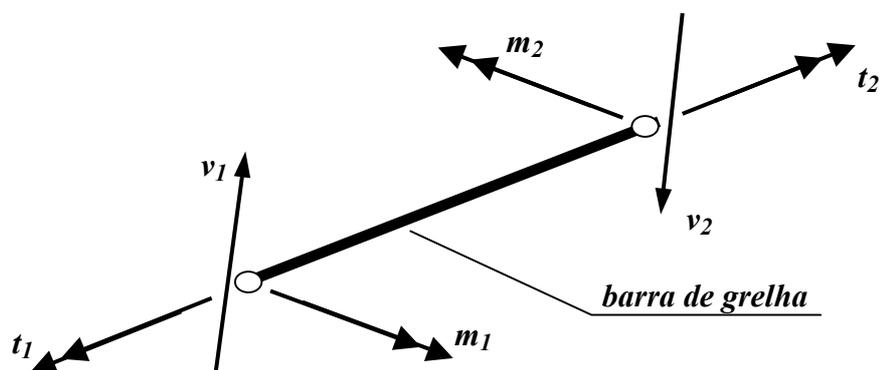


Figura 2.20 Esforços atuantes nas extremidades de uma barra de grelha.

Cuidado especial deve ser tomado na obtenção dos esforços para o dimensionamento da laje, devendo ser considerada a largura b da barra para a conversão dos esforços obtidos nas barras da grelha em esforços de dimensionamento. O esforço de dimensionamento é obtido diretamente dividindo-se o encontrado na grelha pela largura da “faixa” considerada – b (equação 2.108).

$$S_{dim} = \frac{S_{bar}}{b_g} \quad (2.108)$$

onde

S_{dim} é o esforço de dimensionamento por unidade de comprimento

S_{bar} é o esforço obtido na extremidade da barra da grelha

b_g é o espaçamento entre as barras da grelha.

Aplicações em lajes planas

Como visto, após a definição das condições de apoio da laje, da sua geometria e carregamento, a aplicação do método é simples (Figura 2.21). Comparado aos métodos

teóricos baseados na Equação de Lagrange, esse método mostra-se muito mais prático para problemas reais de engenharia, para os quais a solução através de séries trigonométricas (método teórico) torna-se mais complexa e demorada. Os métodos aproximados, que serão definidos posteriormente, necessitam também que a laje respeite determinadas condições. Já se comparado aos demais métodos numéricos, a Analogia de Grelha é mais simples, principalmente quando aplicada à programação.

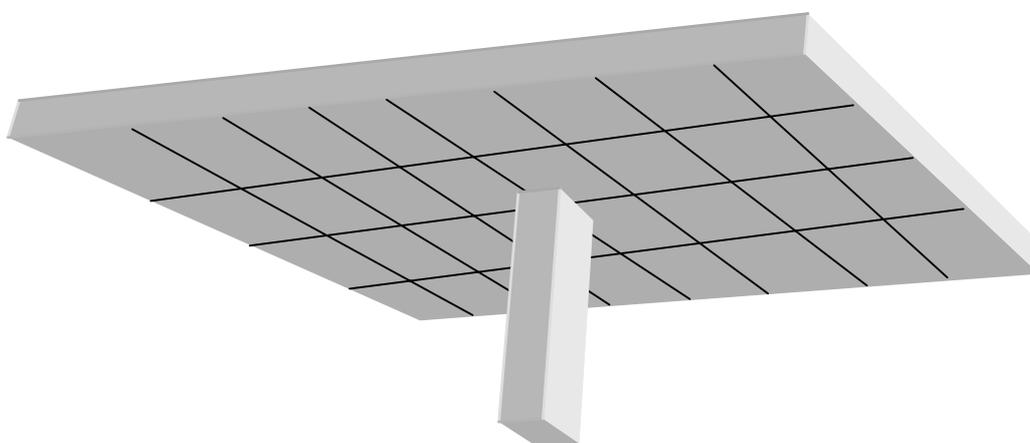


Figura 2.21 Laje plana mostrando a grelha para aplicação do método.

A obtenção dos resultados, como todos métodos numéricos, depende da correta modelagem da laje, das suas propriedades e condições de contorno. Da mesma forma, a análise dos resultados deve ser criteriosa e crítica. Quando necessário, a laje deve ser remodelada ou modificada em determinados trechos críticos, para que os resultados apresentem a precisão desejada.

3 APLICAÇÃO DOS MODELOS TEÓRICOS: EQUAÇÃO DIFERENCIAL DAS PLACAS EM REGIME ELÁSTICO

3.1 INTRODUÇÃO

A Equação de Lagrange pode ser resolvida para outros casos de carregamento e condições de contorno, que não sejam lajes retangulares com cargas uniformemente distribuídas. Para que seja feita uma analogia ao problema em estudo, onde se tem uma laje plana com um apoio pontual, optou-se pela adoção do princípio da superposição de efeitos, já que não são encontradas na bibliografia equações com séries de Fourier para a resolução de placas com apoio interno pontual e seria fundamental ter-se resultados teóricos para se comparar aos obtidos por métodos numéricos.

Nesse capítulo serão descritas algumas equações de deslocamentos e momentos, desenvolvidas em séries de Fourier a partir da Equação Geral de Lagrange, para os casos de carregamento necessários para a solução do problema de laje plana apoiada diretamente sobre pilares.

A solução geral da Equação Geral de Lagrange, desenvolvida em séries de Fourier para um carregamento qualquer, é dada por:

$$\omega(x, y) = \sum_m \sum_n \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{Timoshenko, 1959}) \quad (2.47)$$

Posteriormente essa equação será desenvolvida para os casos estudados. Todos os casos tratam de lajes retangulares simplesmente apoiadas em todo o contorno.

3.2 LAJE DE REFERÊNCIA

Para o presente trabalho, será adotada uma “laje de referência” para o estudo dos esforços e deslocamentos. Posteriormente serão feitas aplicações em outras lajes. A adoção de uma laje de referência teve como objetivo aplicar diversos métodos a um mesmo caso, com as mesmas condições de contorno, carregamento e propriedades, de modo que os resultados obtidos pudessem ser comparados entre si.

É importante citar que, apesar de em alguns modelos o pilar ser modelado como um apoio pontual, na prática o pilar apresenta dimensões e essa situação não ocorre. A adoção dessa hipótese visou o estudo teórico do problema que ocorre durante a modelagem quando se adota o pilar como um apoio pontual.

3.2.1 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DA LAJE E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Foi adotada inicialmente uma laje plana de concreto armado com 20 cm de espessura, sem vigas internas, com dimensões de 10x10 metros e um pilar central, apresentando no contorno vigas rígidas, com seção 15x50 cm. Aqui foi utilizado o termo rígido por se tratar de vigas que apresentem pouca deformação – da ordem de $L / 2000$. Esta deformação será desprezada e as apoias serão então indeslocáveis. Ensaios com alturas de vigas superiores a essa não mostraram diferenças significativas nos esforços das lajes. A planta de fôrmas da laje estudada apresenta-se ilustrada na *Figura 3.1*.

Para o cálculo da placa através da Teoria das Placas no Regime Elástico, é necessário conhecer o valor da rigidez da placa D , definida em função do módulo de deformação transversal E , da espessura da placa h e do coeficiente de Poisson ν (equação 2.27).

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.27)$$

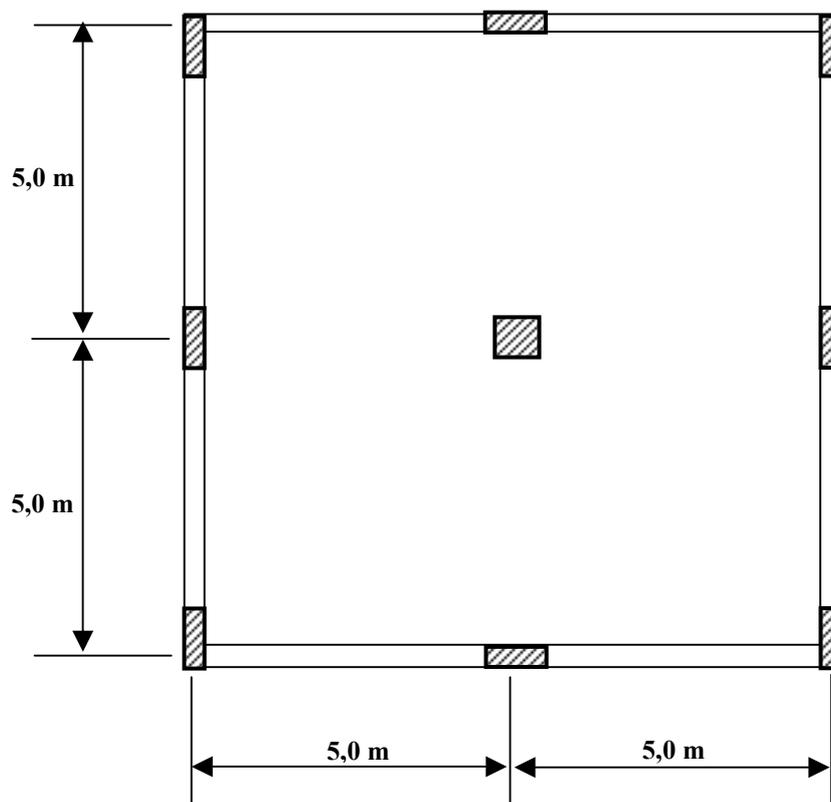


Figura 3.1 Planta de fôrmas da laje de referência.

3.2.2 AÇÕES

Foi adotado unicamente carregamento vertical, sendo portanto desconsideradas quaisquer cargas horizontais. A carga total atuante sobre a laje foi definida como sendo 10 kN/m², compreendendo todas as cargas – permanente de revestimento e peso-próprio e cargas acidentais.

Não foi feita distinção do carregamento em parcelas de carga permanente e acidental, o que é essencial para uma análise de deformações a longo prazo da laje, pois

procura-se unicamente esforços e deslocamentos imediatos. Vale citar que as deformações obtidas mesmo a longo prazo, para a laje configurada, permitem que a mesma se enquadre nas hipóteses de Kirchoff-Love.

3.2.3 CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DO CONCRETO

As propriedades mecânicas do concreto de interesse para o presente estudo são: resistência característica à compressão f_{ck} , o módulo de deformação longitudinal E , o módulo de deformação ao cisalhamento G , o coeficiente de Poisson ν . Tais parâmetros estão definidos na *Tabela 3.1*, incluindo inclusive a rigidez da placa D .

Tabela 3.1 Propriedades mecânicas do concreto e rigidez D da placa.

Parâmetro	Valor
fck	20 Mpa
Ec	$E_c = 0,9 \cdot 6600 \cdot \sqrt{f_{ck} + 3,5} = 0,9 \cdot 6600 \cdot \sqrt{20 + 3,5} = 28795 \text{ MPa}$
\nu	0,2
G	$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{28795}{2 \cdot (1+0,2)} = 11998 \text{ MPa}$
D	$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{28795 \cdot 10^5 \cdot 0,20^3}{12 \cdot (1-0,2^2)} = 19.996,68 \text{ kN.m}$

3.3 MODELOS DE CARREGAMENTO EM PLACAS

3.3.1 PLACA COM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO

As equações desenvolvidas em séries de Fourier e aplicadas nesse capítulo são citadas por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). A *Figura 3.2* ilustra o caso de placa retangular simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído. Primeiramente, é necessário definir o valor da carga p_{mn} .

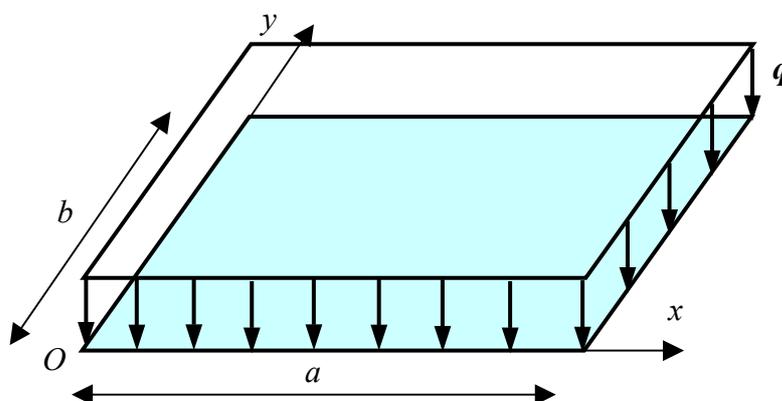


Figura 3.2 Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.

Sabe-se que:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (2.44)$$

Como $p(x, y)$ é constante, assume que $p(x, y) = p$, logo:

$$p_{mn} = \frac{4p}{ab} \int_0^b \int_0^a \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3.1)$$

$$p_{mn} = \frac{4p}{ab} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^a \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy \quad (3.2)$$

$$p_{mn} = \frac{4p}{mn\pi^2} (-\cos m\pi + 1)(-\cos n\pi + 1) \quad (3.3)$$

Se m e n forem pares, então:

$$p_{mn} = \frac{4p}{mn\pi^2} (-1 + 1)(-1 + 1) = 0 \quad (3.4)$$

Se m e n forem ímpares, então:

$$p_{mn} = \frac{4p}{mn\pi^2} (1 + 1)(1 + 1) = \frac{16p}{mn\pi^2} \quad (3.5)$$

Portanto, para o caso de placa retangular com carregamento uniformemente distribuído p , os deslocamentos ω , nas coordenadas (x,y) de uma placa com dimensões (a,b) , são obtidos da equação (3.6), e os momentos fletores das equações (3.7) e (3.8).

$$\omega(x,y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.6)$$

$$m_x(x,y) = \frac{16p}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.8)$$

$$m_y(x,y) = \frac{16p}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right)}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.9)$$

O desenvolvimento dos momentos fletores m_y ao longo de toda a superfície da laje de referência para o presente caso de carregamento estão ilustrados nas *figuras 3.3 e 3.4*. Foram utilizados $m = n = 19$ termos.

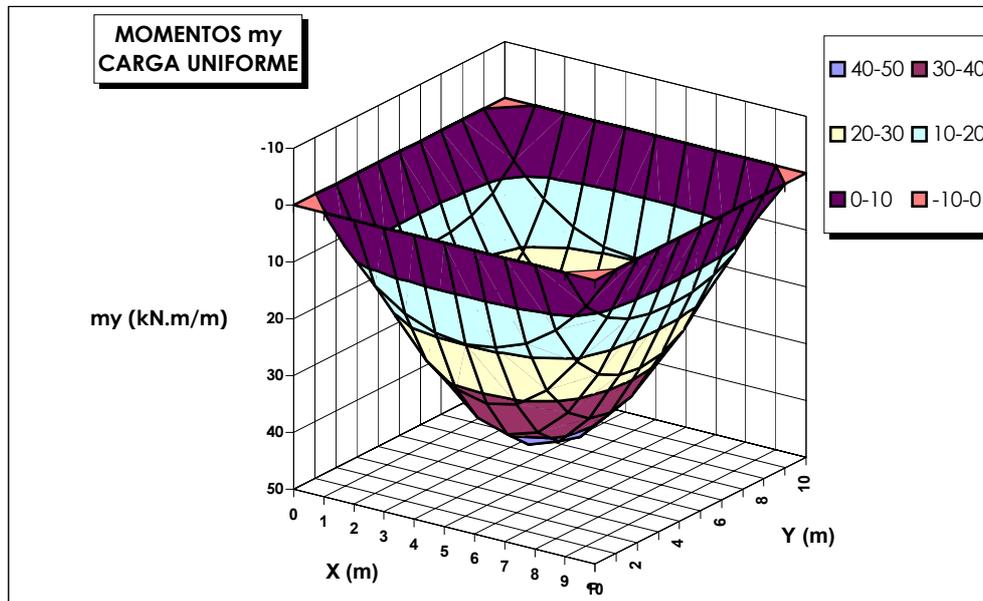


Figura 3.3 Momentos m_y na laje para o caso de carga uniformemente distribuída (perspectiva).

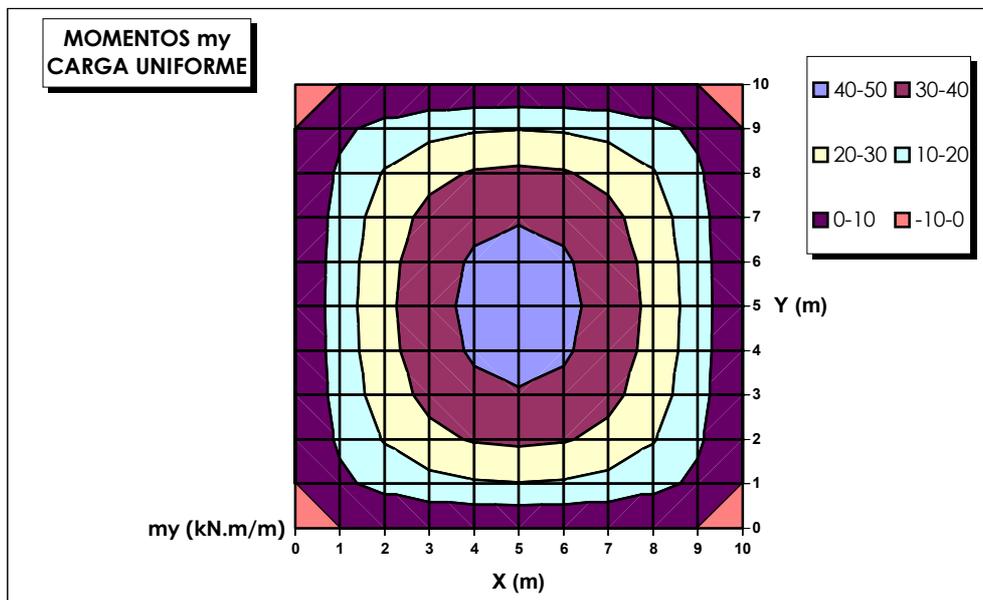


Figura 3.4 Momentos m_y na laje para o caso de carga uniformemente distribuída (vista superior).

3.3.2 PLACA COM CARGA UNIFORME EM UM RETÂNGULO PARCIAL

A *Figura 3.5* ilustra o caso de placa retangular com carregamento uniformemente distribuído. De maneira análoga ao caso de carga uniforme distribuída em toda a placa, é efetuada a integração de p_{mn} de modo a se obter o seu valor.

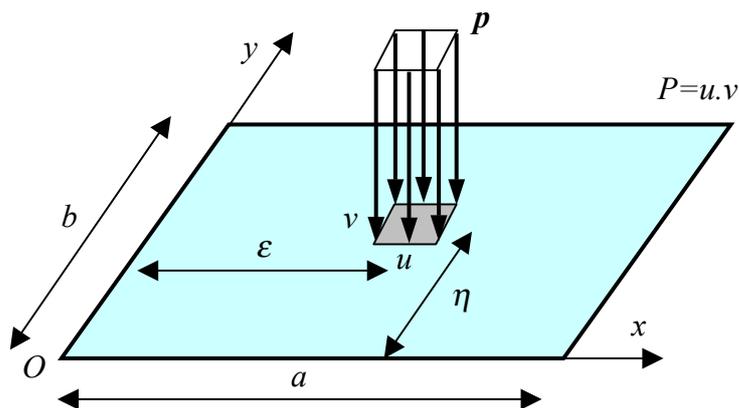


Figura 3.5 Placa retangular simplesmente apoiada com carga uniforme em um retângulo parcial.

$$p_{mn} = \frac{4P}{abuv} \int_{\xi-u/2}^{\xi+u/2} \int_{\eta-v/2}^{\eta+v/2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3.9)$$

$$p_{mn} = \frac{16P}{\pi^2 mn uv} \text{sen} \frac{m\pi \epsilon}{a} \text{sen} \frac{n\pi \eta}{b} \text{sen} \frac{m\pi u}{2a} \text{sen} \frac{n\pi v}{2b} \quad (3.10)$$

Portanto, para o caso de placa retangular com carga uniforme p aplicada em um retângulo parcial com dimensões (u,v) simétrico em relação ao centro, ou seja, $(\epsilon = a/2, \eta = b/2)$, os deslocamentos w , nas coordenadas (x,y) de uma placa com dimensões (a,b) , são obtidos da equação (3.11), e os momentos fletores das equações (3.12) e (3.13).

$$\omega(x, y) = \frac{16P}{\pi^6 D_{uv}} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \text{sen} \frac{m\pi u}{2a} \text{sen} \frac{n\pi v}{2b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.11)$$

$$m_x(x, y) = \frac{16P}{\pi^4 uv} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \text{sen} \frac{m\pi u}{2a} \text{sen} \frac{n\pi v}{2b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.12)$$

$$m_y(x, y) = \frac{16P}{\pi^4 uv} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \text{sen} \frac{m\pi u}{2a} \text{sen} \frac{n\pi v}{2b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.13)$$

O desenvolvimento dos momentos fletores m_y ao longo de toda a superfície da laje de referência, com uma carga aplicada num retângulo de 20x20 cm, estão ilustrados nas *figuras 3.6 e 3.7*. Foram utilizados $m = n = 19$ termos.

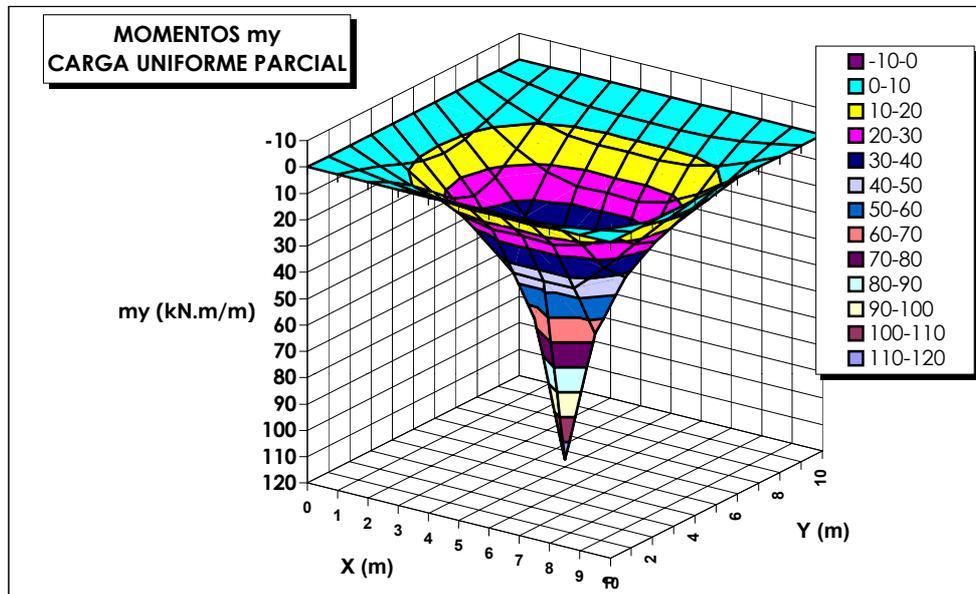


Figura 3.6 Momentos m_y na laje para carga uniforme em retângulo parcial (perspectiva).

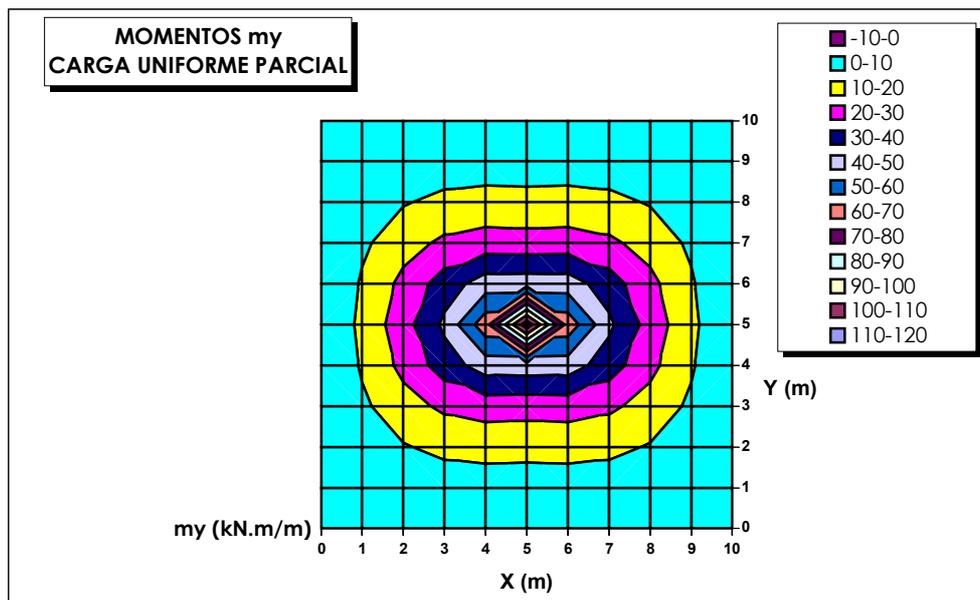


Figura 3.7 Momentos m_y na laje para carga uniforme em retângulo parcial (vista superior).

3.3.3 PLACA COM CARGA CONCENTRADA

A *Figura 3.8* ilustra o caso de placa retangular com carregamento uniformemente distribuído. O caso de carga concentrada é um caso particular do anterior, onde $(u,v) \rightarrow 0$.

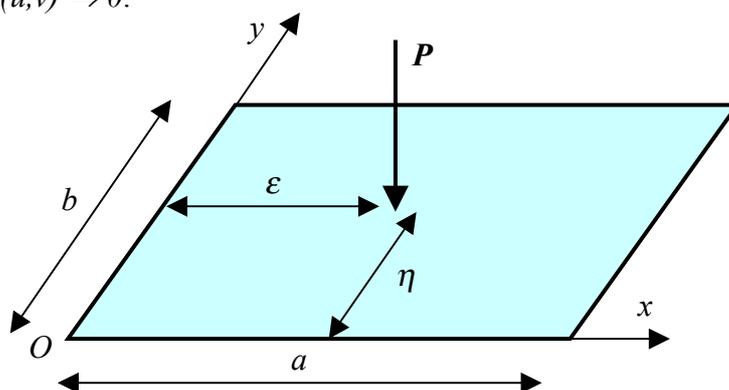


Figura 3.8 Placa com carga concentrada.

$$p_{mn} = \frac{4P}{ab} \operatorname{sen} \frac{m\pi\epsilon}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \quad (3.14)$$

Portanto, para o caso de placa retangular com carga concentrada P aplicada na posição (ϵ, η) , os deslocamentos ω , nas coordenadas (x, y) de uma placa com dimensões (a, b) , são obtidos da equação (3.15), e os momentos fletores das equações (3.16) e (3.17).

$$\omega(x, y) = \frac{4 \cdot P}{\pi^4 abD} \sum_m \sum_n \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\epsilon}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.15)$$

$$m_x(x,y) = \frac{4P}{\pi^2 ab} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2}\right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.16)$$

$$m_y(x,y) = \frac{4P}{\pi^2 ab} \sum_m \sum_n \frac{\left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2}\right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.17)$$

O desenvolvimento dos momentos fletores m_y ao longo de toda a superfície da laje de referência para o presente caso de carregamento, estão ilustrados nas *figuras 3.9* e *3.10*. Foram utilizados $m = n = 19$ termos.

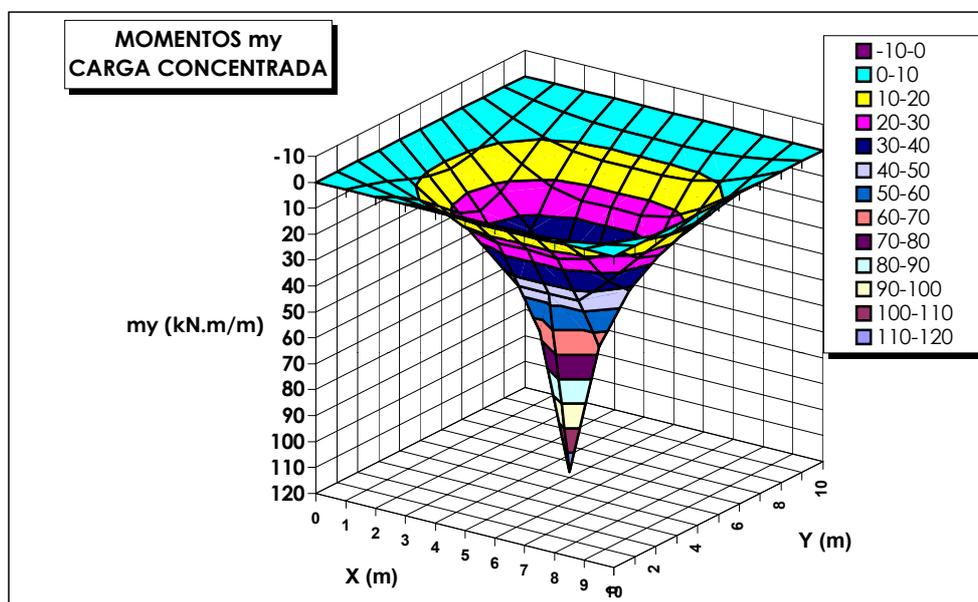


Figura 3.9 Momentos m_y na laje para carga concentrada (perspectiva).

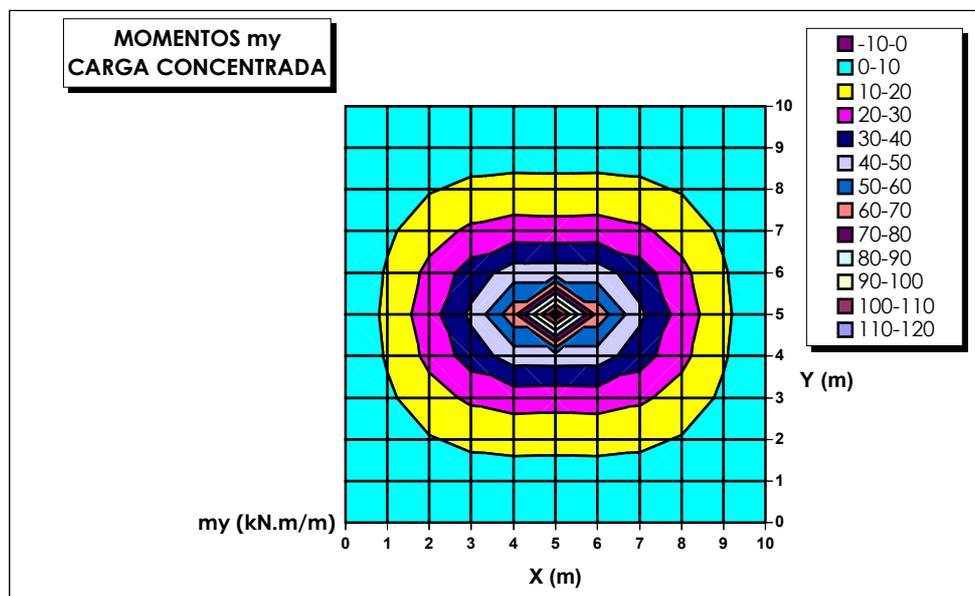


Figura 3.10 Momentos m_y na laje para carga concentrada (vista superior).

Vale citar que, para esse caso, o momento não tende ao infinito no centro da placa, pois esse procedimento é um desenvolvimento do processo da carga uniformemente distribuída em um retângulo parcial, fazendo-se $(u,v) \rightarrow 0$, mesmo porque é tomado um número finito de termos da série. O resultado teórico real, desenvolvendo a Equação de Lagrange para esse caso particular, realmente tende a ser infinito.

Os resultados aqui ilustrados para carga uniformemente distribuída em um retângulo parcial e carga concentrada são bastante próximos em consequência de que, para o primeiro caso, a carga foi aplicada em um retângulo de 20x20 cm, que por se tratar de um retângulo pequeno, tende a apresentar resultados muito semelhantes aos de carga concentrada.

3.3.4 PLACA COM PILAR CENTRAL (PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS)

Para utilizar a Teoria das Placas no cálculo do problema, adota-se o princípio da superposição de efeitos, combinando-se uma placa com carregamento uniformemente distribuído, primeiramente submetido a uma carga concentrada e em seguida submetida a uma carga distribuída em um retângulo parcial, procurando simular o pilar central.

Inicialmente admite-se uma laje retangular com um carregamento uniformemente distribuído, obtendo-se então o deslocamento máximo ω_1 no meio do vão da placa, conforme a *Figura 3.11*.

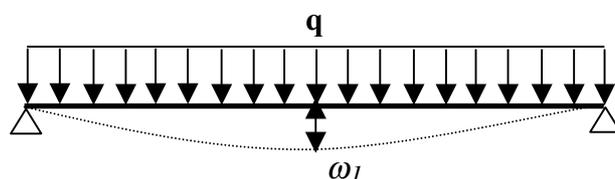


Figura 3.11 Deslocamento em placa submetida a carregamento uniformemente distribuído.

Escreve-se também a equação para a mesma placa, mas agora com uma carga concentrada no meio do vão, aplicada exatamente no ponto onde foi definido o deslocamento, mas no sentido contrário (na posição do pilar central a simular), conforme a *Figura 3.12*.

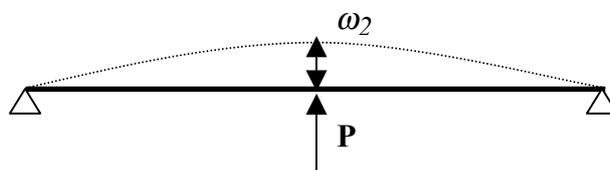


Figura 3.12 Carga concentrada aplicada no centro da placa.

Conhecido o deslocamento ω_1 para a carga uniformemente distribuída, aplica-se então a superposição de efeitos, igualando-se ambas as equações de deslocamentos $\omega_1 = \omega_2$ (3.18), ou seja, define-se o valor da carga concentrada P , para a qual o deslocamento central fosse nulo (posição do pilar). Essa carga P corresponde à reação de apoio no pilar, conforme mostra a *Figura 3.13*.

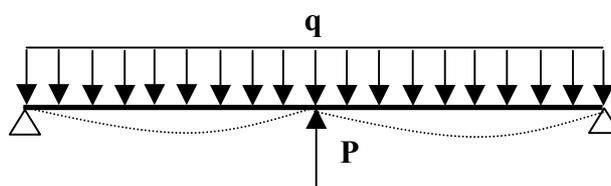


Figura 3.13 Princípio da superposição de efeitos.

$$\omega_1(x, y) = \omega_2(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.18)$$

A equação (3.19) descreve a reação de apoio (ou carga concentrada P), em função do deslocamento ω_1 .

$$P = \frac{\omega_1(x, y) \pi^4 abD}{4 \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}} \quad (3.19)$$

Para o caso de carga uniformemente distribuída em um retângulo parcial, o raciocínio é análogo, como mostra a equação (3.20).

$$P = \frac{16}{\omega_I(x, y) \pi^6 uvD} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \text{sen} \frac{m\pi u}{2a} \text{sen} \frac{n\pi v}{2b}}{mnuv \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3.20)$$

Com o valor da reação de apoio determinado pode-se obter os valores dos momentos fletores e deslocamentos em quaisquer pontos da placa, adotando-se também a superposição dos efeitos. A *figura 3.14* mostra a configuração de momentos m_y ao longo da linha média da laje.

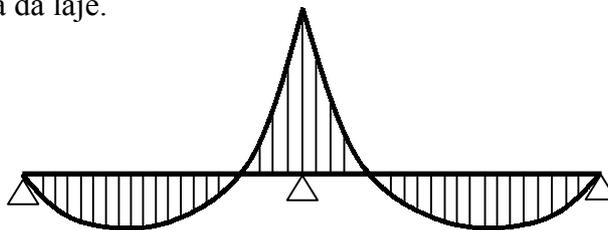


Figura 3.14 Configuração dos momentos fletores m_y ao longo da linha média da laje ($y = b/2$).

3.4 RESULTADOS

Abaixo são descritos os resultados obtidos para a laje de referência. Utilizando-se a equação para placa com carregamento uniformemente distribuído, obteve-se um deslocamento no meio do vão $\omega_I = 2,032$ cm. Adotando-se o princípio da superposição de efeitos, calculou-se o valor da carga concentrada P , de modo que o deslocamento provocado no centro da laje fosse igual a ω_I . Dessa forma a carga P corresponde à reação de apoio no pilar, visto que se combinando ambos os casos o deslocamento resultante é nulo.

$$P = \frac{0,0232 \cdot \pi^4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 19.996,68}{4 \cdot 2821,625} = 350,67 \text{ kN} \quad (3.21)$$

Para o cálculo dos momentos fletores da laje junto ao pilar central - m' , adotou-se também o princípio da superposição de efeitos dos momentos gerados pela carga uniformemente distribuída m_1 e dos momentos gerados pela carga concentrada m_2 .

$$m'(x,y) = m_1(x,y) - m_2(x,y) \quad (3.22)$$

Com as equações foi possível definir o valor do momento negativo no ponto central do pilar, cujo valor encontrado foi de $m_x = m_y = -73,61 \text{ kN.m / m}$. A figura 3.15 mostra a variação do momento m_y ao longo da laje. Já a figura 3.16 mostra os mesmos momentos, agora plotados no plano. Foram utilizados $m = n = 19$ termos.

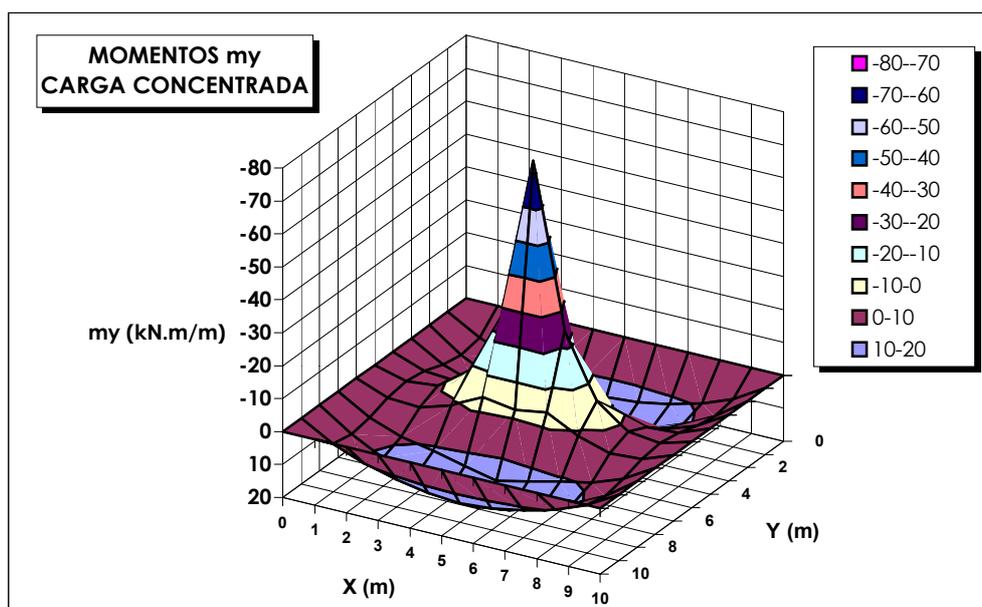


Figura 3.15 Momentos m_y na laje para o caso de carga concentrada (perspectiva).

A figura 3.17 ilustra a variação dos momentos m_x e m_y de $x = 0$ a $x = 10 \text{ m}$, para $y = 5 \text{ m}$, ou seja, os momentos nas duas direções na linha central da laje, no caso adotado de carga concentrada aplicada no centro da laje para simular o pilar central.

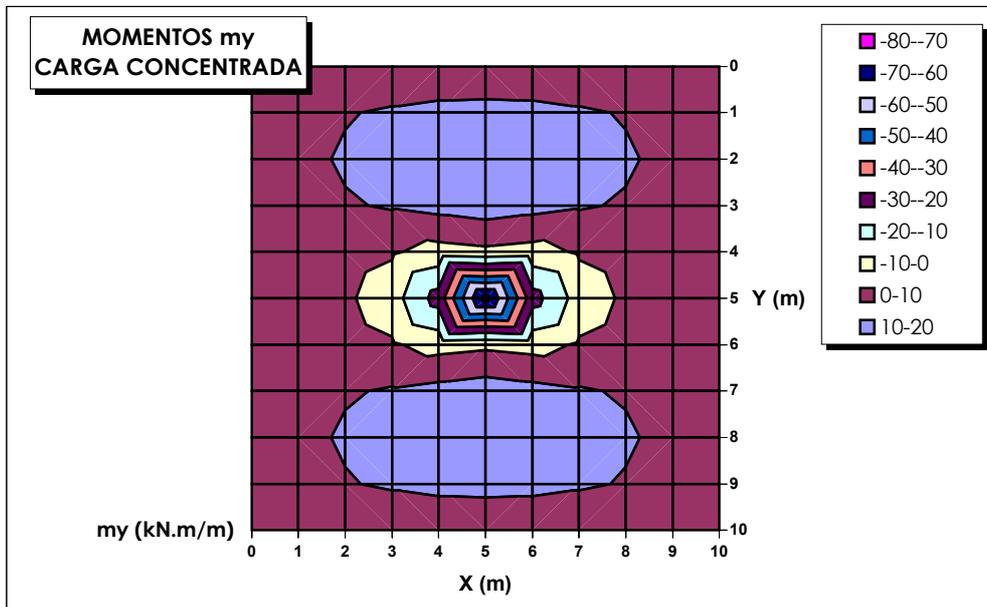


Figura 3.16 Momentos m_y na laje para o caso de carga concentrada (vista superior).

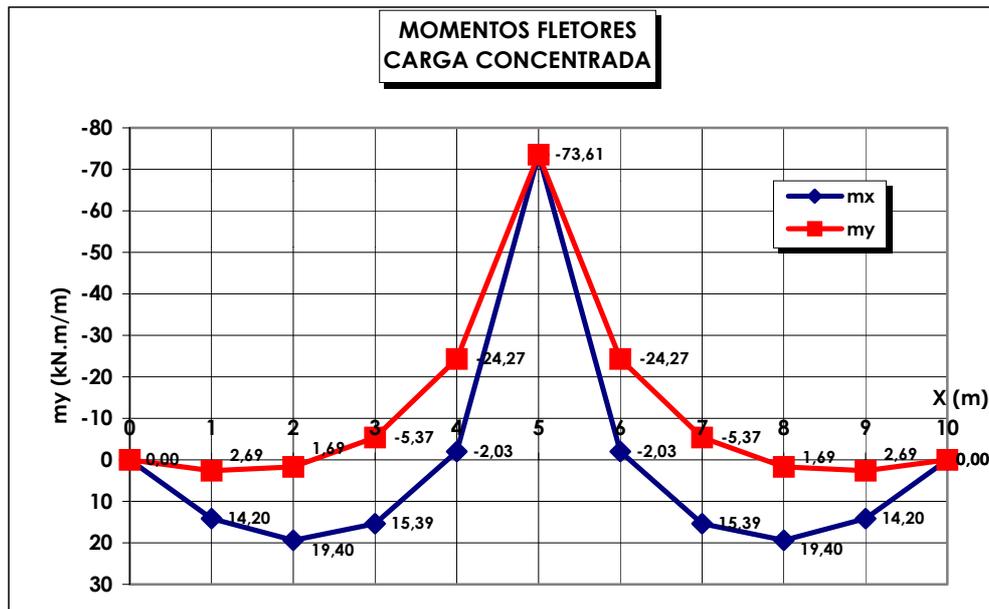


Figura 3.17 Momentos ao longo da linha média da laje ($y = 5m$) para o caso de carga concentrada aplicada no centro da laje para simular o pilar central.

Os deslocamentos ao longo da laje foram obtidos igualmente aplicando-se o princípio da superposição de efeitos. A *Figura 3.18* representa os deslocamentos ao longo da linha média ($y = 5m$) combinando-se o carregamento uniformemente distribuído com a carga concentrada central simulando o pilar.

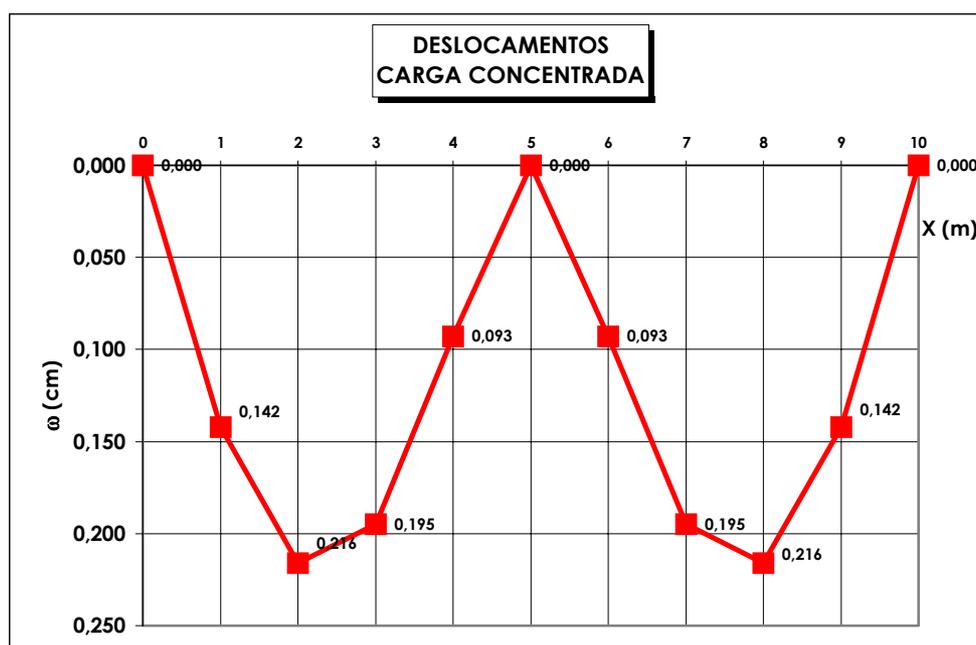


Figura 3.18 Deslocamentos ao longo da linha média da laje ($y = 5m$) para o caso de carga concentrada aplicada no centro da laje para simular o pilar central.

Foi também executado o cálculo para o caso de carga uniforme em um retângulo parcial (u,v), cujas dimensões representam o tamanho do pilar central. Inicialmente adotou-se um pilar com dimensões 25x25 cm, sendo que a carga obtida para P foi de 351,17 kN, valor muito próximo ao encontrado para o caso de carga concentrada, o que já era de se esperar, visto que o caso anterior é uma derivação desse. O valor do momento negativo obtido no centro do pilar foi $m_y = m_x = -71,63 \text{ kN.m} / m$, valor esse também muito próximo ao encontrado no caso anterior. Reduzindo-se as dimensões do

pilar o valor encontrado aproximou-se do caso de carga concentrada. Os resultados encontrados para as diferentes seções apresentam-se descritos na *Tabela 3.2*.

Tabela 3.2 Valores da carga P, momentos fletores e deslocamentos para diferentes seções de pilares (u / v), onde a seção zero (0) representa os resultados para carga concentrada.

u / v (cm)	Carga no pilar (kN)	Momento positivo máximo (kN.m/m)	Momento negativo centro (kN.m/m)	Momento negativo no bordo (kN.m/m)	Flecha máx. (cm)
0	350,67	19,40	-73,61	-73,61	0,240
10x10	350,81	19,39	-73,30	-72,94	0,239
25x25	351,17	19,37	-71,63	-69,51	0,238
50x50	352,44	19,29	-66,21	-59,73	0,236
75x75	354,50	19,14	-58,74	-49,12	0,232
100x100	357,24	18,93	-50,81	-40,40	0,227
50x10	351,64	19,35	-70,73	-63,48	0,237
100x10	354,12	19,24	-64,12	-48,89	0,233
100x50	354,89	19,17	-60,34	-46,51	0,231
10x100	354,07	19,08	-56,53	-56,30	0,233
10x50	351,62	19,33	-68,49	-68,17	0,237

Os valores apresentados na tabela acima são ilustrados nas figuras que seguem abaixo. Os valores de carga P para o pilar em função das suas dimensões são ilustrados na *Figura 3.19*. A *Figura 3.20* mostra os momentos negativos da laje sobre o pilar, tanto no centro da laje como no bordo do pilar, para as diferentes seções.

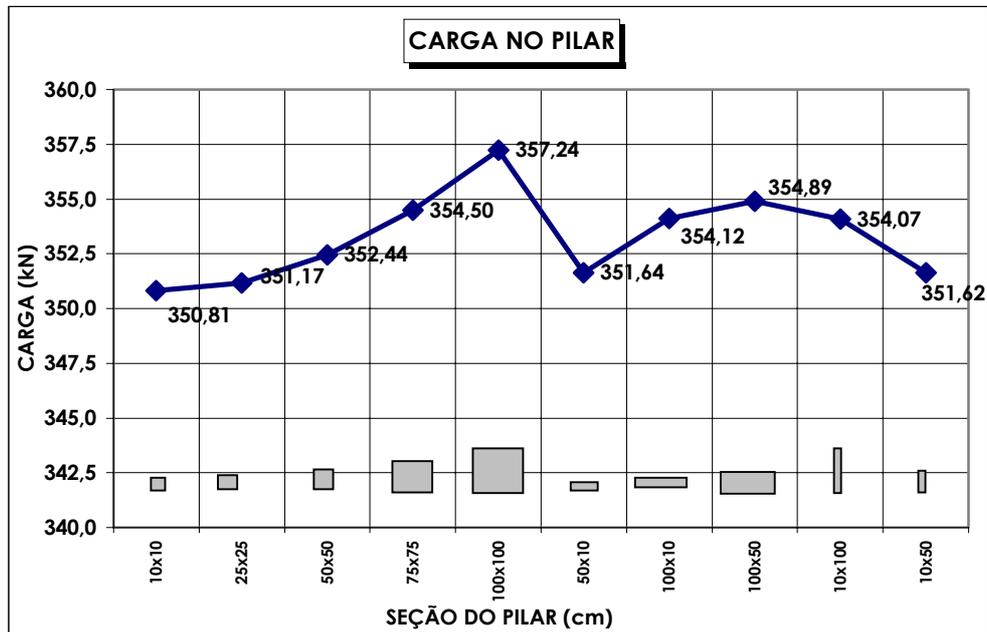


Figura 3.19 Valores de carga P no pilar para as diferentes seções.

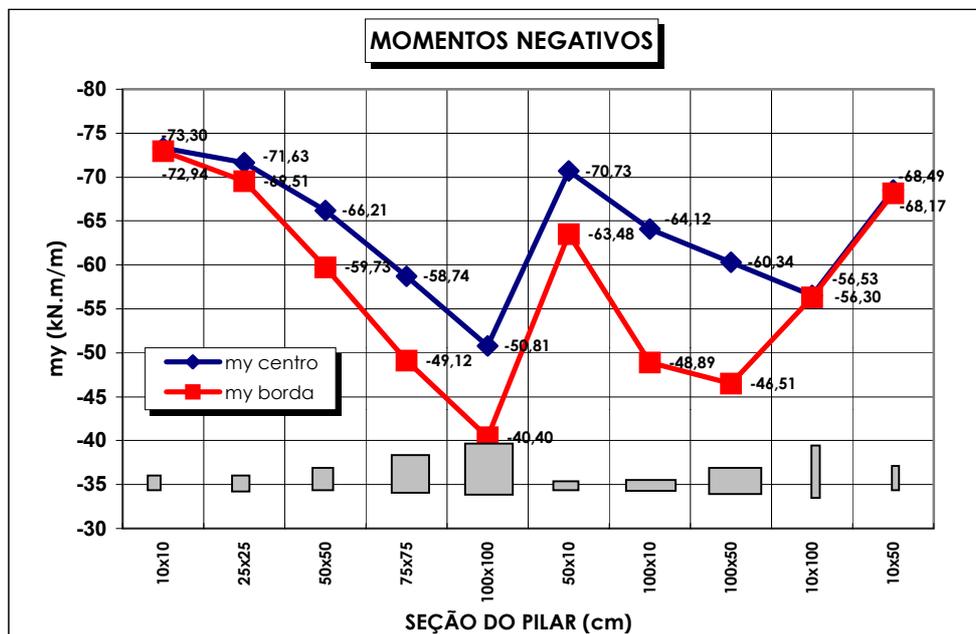


Figura 3.20 Momentos negativos m_y na laje sobre o pilar para as diferentes seções.

Os momentos positivos m_y , na posição citada anteriormente, são ilustrados na *Figura 3.21*, verificados para diferentes seções de pilares.

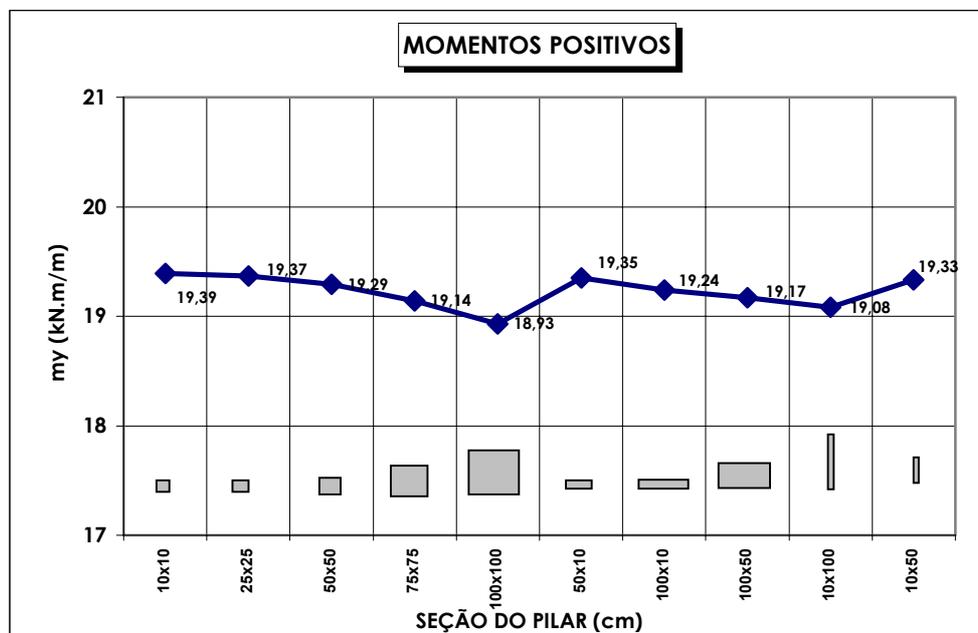


Figura 3.21 Momentos positivos máximos para diferentes seções de pilares.

Os deslocamentos máximos na laje, para as diferentes seções de pilares e para carga concentrada, mostraram-se muito próximos e, portanto, não estão ilustrados.

O desenvolvimento dos momentos na região próxima aos pilares para o caso de carga concentrada e carga uniformemente distribuída em um retângulo parcial (50x50 cm) é ilustrado nas *Figuras 3.22* e *3.23*, respectivamente.

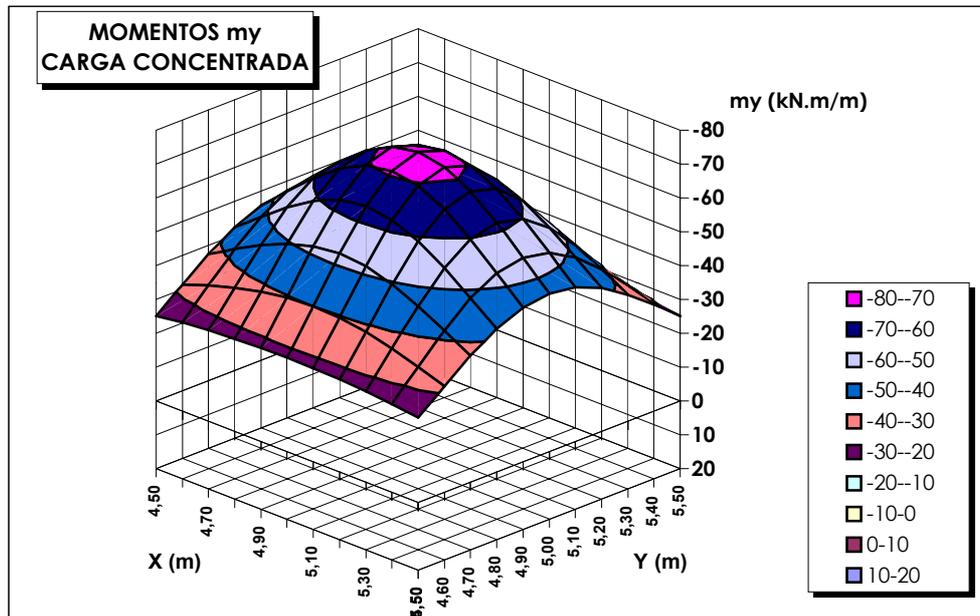


Figura 3.22 Momentos na região próxima ao apoio para carga concentrada.

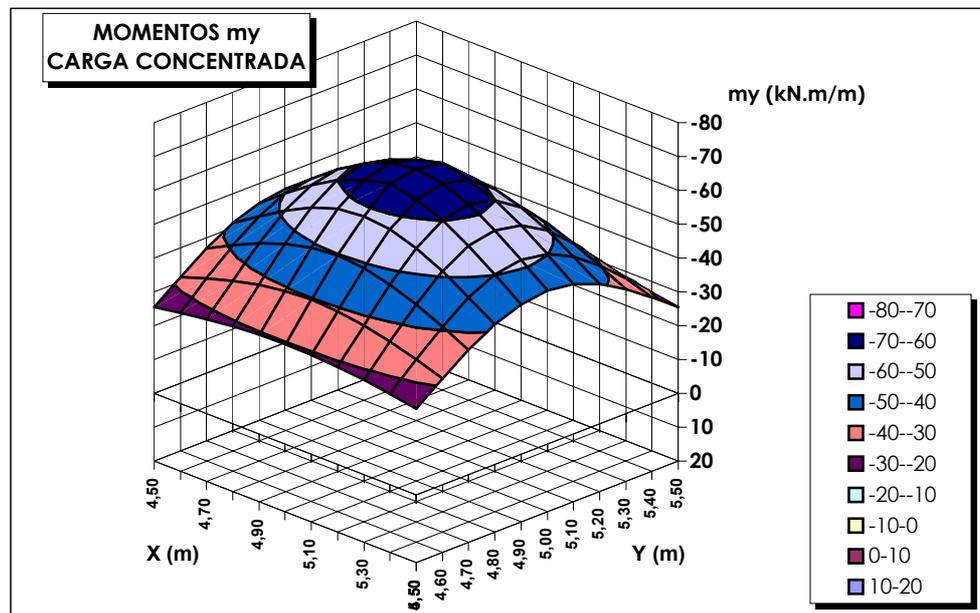


Figura 3.23 Momentos na região próxima ao apoio para carga uniformemente distribuída, pilar 50x50 cm.

Também foram estudadas lajes de 5x5 m, 15x15 m e 20x20 m, de modo a analisar-se a relação entre as dimensões da laje e dos pilares nos valores da carga no pilar, dos momentos fletores positivos e negativos e deslocamentos. Os resultados são comparados ao caso de carregamento simulado por carga concentrada, visto que, na maioria dos processos numéricos o pilar é modelado como um ponto.

A *Figura 3.24* ilustra a diferença relativa percentual dos valores de carga P no pilar, se comparados aos resultados obtidos para carga concentrada. Por exemplo, a carga P obtida para um pilar de seção 100x100 cm, em uma laje de 5x5 m, se comparada com a mesma laje, mas com carga concentrada, é de aproximadamente 6,7%.

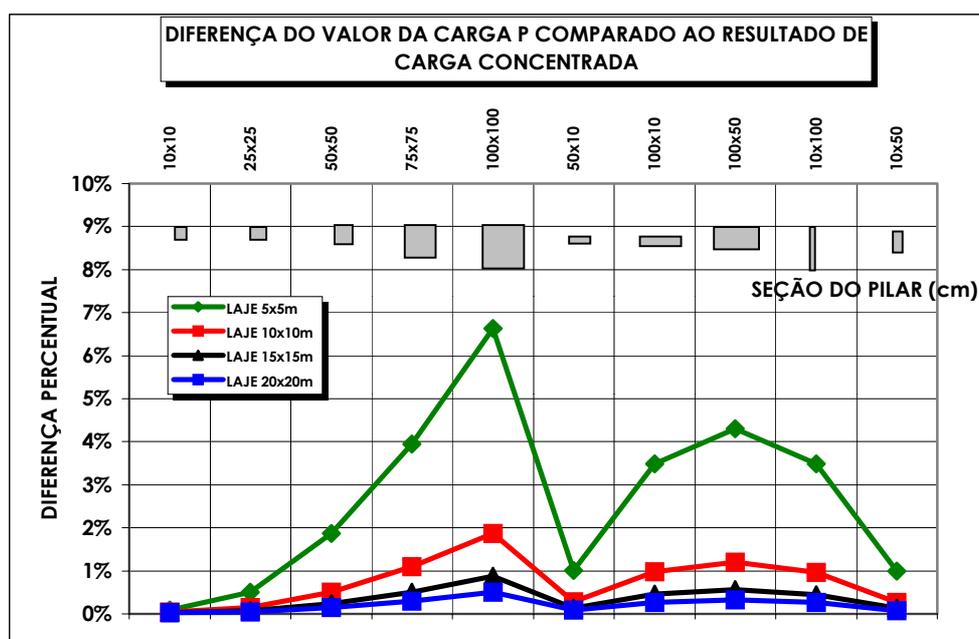


Figura 3.24 Diferença percentual do valor da carga P no pilar, comparada aos valores obtidos para carga concentrada.

A Figura 3.25 ilustra a diferença relativa percentual do valor dos momentos negativos m_y o pilar (para o centro e a borda), se comparados aos resultados obtidos para carga concentrada.

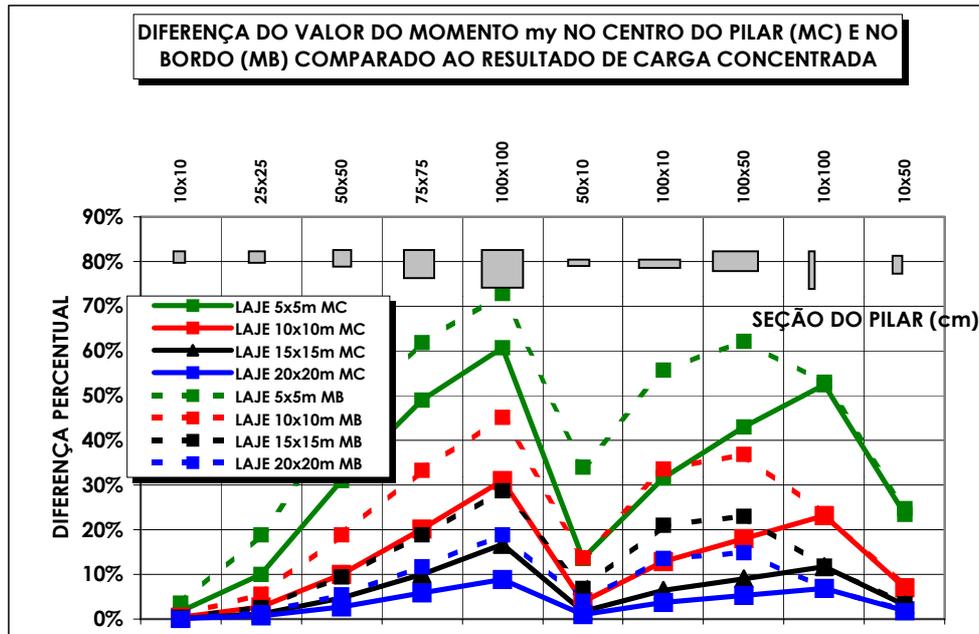


Figura 3.25 Diferença percentual do valor do momento negativo m_y no centro do pilar (MC) e no bordo (MB).

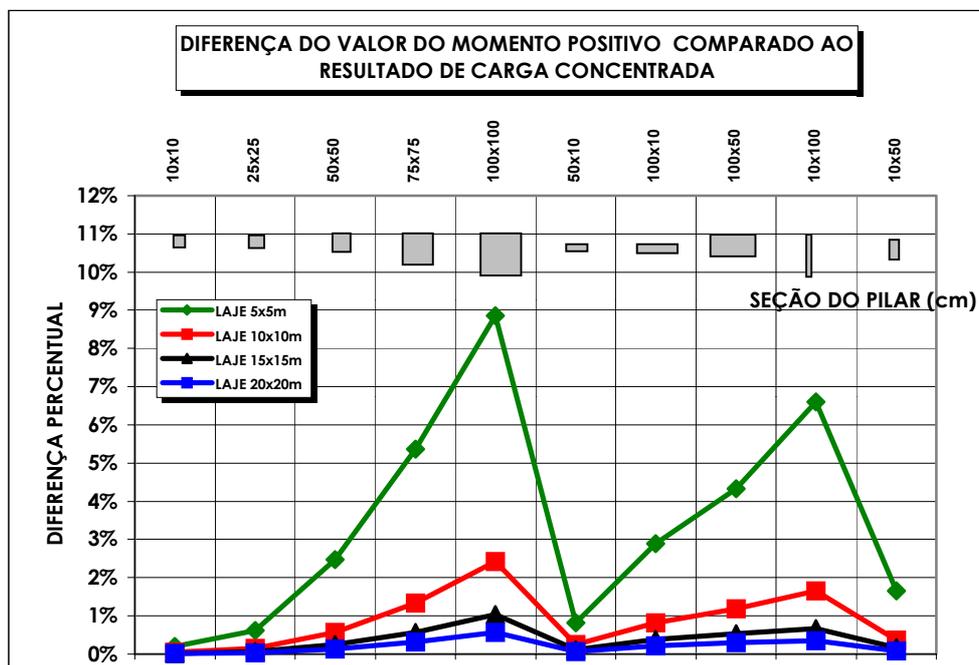


Figura 3.26 Diferença percentual do valor do momento positivo máximo m_y .

A diferença percentual dos momentos positivos máximos m_y encontrados para as diversas lajes, comparadas aos resultados obtidos para carga concentrada, são ilustrados na figura 3.26.

Os deslocamentos e os momentos fletores determinados através das equações desenvolvidas em séries de Fourier foram calculados utilizando-se planilhas eletrônicas tipo Excel, como o exemplo da Figura 3.27, para carga uniformemente distribuída em um retângulo parcial. Foi desenvolvida uma planilha também para carga concentrada.

Inicialmente são fornecidos os dados da laje, então a planilha determina os valores para carga uniformemente distribuída e, pela superposição de efeitos, determina o valor da carga P (reação do pilar central). Por fim, são definidos os momentos fletores no ponto desejado da laje.

CARGA UNIFORME EM RETÂNGULO	Geometria da laje e carga P		Geometria do pilar	
	a	10,00 m	u	10 cm
	b	10,00 m	v	10 cm
	x	5,00 m	Deslocamentos e Esforços para Carga Uniforme	
	y	5,00 m	ω	2,032 cm
	ξ	5,00	mx	4419 kgf.m/m
	η	5,00	my	4419 kgf.m/m
	Carregamento e propriedades		Deslocamentos e Esforços para Carga Concentrada	
	p	1000 kgf/m ²	P	35075 kgf
	fck	20 MPa	ω	0,000 cm
	h	20 cm	mx	-11748 kgf.m/m
	v	0,20	my	-11748 kgf.m/m
	D	1999668 kgf.m	Superposição de Efeitos	
	E	28795 MPa	mx	-7328 kgf.m/m
			my	-7328 kgf.m/m

Figura 3.27 Planilha de cálculo Excel, utilizada para a determinação através da Teoria das Placas.

Nesta planilha são introduzidos os seguintes valores:

- a e b : dimensões da laje;
- x e y : ponto de interesse para o conhecimento dos momentos fletores;
- ε e η : centro de aplicação da carga;
- p : valor da carga uniformemente distribuída sobre a laje;
- fck : resistência característica à compressão do concreto;
- h : espessura da laje;
- v : coeficiente de Poisson.
- u e v : dimensões do pilar.

3.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Analisando-se a *Figura 3.19*, pode-se perceber que o valor da carga P (reação no pilar), apresenta pouca variação, independente da seção de pilar (carga uniforme em um retângulo parcial) adotada. Entretanto, pode-se concluir que à medida que a área da seção transversal cresce, o valor da reação P do pilar é maior. A diferença entre os valores, para a laje 10x10 metros, fica no máximo da ordem de 2%.

Analisando agora a *Figura 3.20*, que indica os valores de momentos negativos, observa-se que os momentos no centro do pilar são maiores que na borda, o que já era de se esperar. Conclui-se também que a diferença é maior à medida que as dimensões dos pilares aumentam, excepcionalmente na direção em estudo. Outrossim, os momentos negativos tendem a ser maiores em lajes onde o pilar central apresenta seção transversal menor, sendo que, para essas seções os momentos na face e no centro do pilar são muito próximos. Essa tendência dos momentos negativos crescerem com a redução da seção, afirma o fato de que, no modelo teórico real os momentos para cargas concentradas tendem ao infinito. Portanto, o modelamento de pilares como pontos únicos pode ser equivocado, sendo necessário avaliar as suas dimensões e influência nos momentos negativos.

Quanto aos momentos positivos, ilustrados na *Figura 3.21*, conclui-se que esses apresentam pouca variação em função das dimensões do pilar, entretanto tendem a diminuir com o aumento da área da seção.

Analisando-se as *Figuras 3.22 e 3.23* pode-se perceber que, quando a carga concentrada é aplicada tem-se um “pico” maior dos momentos negativos da laje sobre o pilar, quando comparada ao mesmo caso com carga uniformemente distribuída em um retângulo parcial. Os deslocamentos máximos para as lajes permaneceram praticamente constantes, independentemente das dimensões do pilar.

Analisando a influência das dimensões da laje nos esforços, concluiu-se que, para pilares com dimensão menor que $L / 10$ (onde L é a distância entre pilares, ou do

pilar a borda), podem ser modelados como um ponto (carga concentrada), apresentando reações P muito próximas do que se modelados como uma carga uniformemente distribuída em um retângulo parcial (*figura 3.24*).

Os momentos negativos, por outro lado, dependem além das dimensões do pilar, das dimensões da placa. Pode-se visualizar isso na *figura 3.25*, onde em uma laje de 5x5 m, o momento na borda (MB) de um pilar de 100x100 cm chega a diferir mais de 70% do momento encontrado para a mesma laje, mas aplicando-se uma carga concentrada.

Para os momentos positivos, cuidado especial deve ser tomado somente para lajes de pequenas dimensões com pilares de grandes dimensões, para as quais os momentos positivos tendem a ser menores do que o caso onde é aplicado carga concentrada. Para os demais casos os momentos positivos permanecem praticamente constantes (*figura 3.26*).

4 APLICAÇÕES - MODELOS EM ELEMENTOS FINITOS

4.1 INTRODUÇÃO

Para o trabalho, os modelos em elementos finitos foram definidos e processados no programa SAP2000. Quanto ao pilar, para o estudo da laje de referência foram inicialmente estudados exemplos com o pilar modelado como um ponto e em seguida utilizando elementos sólidos para simular o apoio. No primeiro caso o modelamento do problema é feito de forma gráfica, já no segundo através de arquivos de texto. A laje foi modelada utilizando-se elementos de casca (Shell), os quais foram carregados utilizando-se uma pressão (carga uniformemente distribuída).

Posteriormente serão feitos comparativos entre os resultados obtidos para esse método com a Analogia de Grelha e os resultados teóricos anteriores.

4.2 MODELAMENTO

4.2.1 DEFINIÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

Para a aplicação do método é necessário, primeiramente, escolher uma malha de elementos finitos. A malha, para o estudo de placas ou lajes planas, pode ser situada, por exemplo, no plano XY , portanto não apresenta dimensão de profundidade. A malha adotada define o espaço de abrangência de cada elemento “*shell*”, os quais representam a laje.

Para uma laje de 10x10 metros, por exemplo, pode ser introduzida uma malha menos refinada e, posteriormente, serem feitos os refinamentos necessários de modo a se obter resultados mais satisfatórios em determinados pontos. Outrossim, pode ser feito um modelamento utilizando uma malha de 1x1 m e, da mesma forma, serão feitos os refinamentos necessários. A malha é considerada adequada quando não apresentar descontinuidade significativa de tensões entre elementos.

Nos modelos apresentados, iniciou-se o estudo com malhas “grosseiras”, dividindo-se a laje a cada 2,5 metros. Procurou-se refinar na proximidade dos pilares para tais modelos. Em seguida foram sendo modeladas malhas com elementos cada vez menores, e procedendo-se da mesma forma o refinamento.

4.2.2 PROPRIEDADES DAS BARRAS E ELEMENTOS “SHELL”

Definida a malha, é preciso estabelecer as propriedades dos elementos que vão compor e representar a laje. Para o problema em questão, foram adotadas vigas rígidas à flexão no contorno. As propriedades das vigas são definidas em “*frame sections*”. Adotaram-se vigas de concreto com seção transversal 15x50cm. A laje foi construída com elementos “*shell*”, cujas propriedades são definidas como “*shell sections*”. Para a laje de 10x10 metros foram adotados elementos “*shell*” com espessura de 0,20 metros (20 cm), escolhendo-se o tipo “placa delgada” (sem deformação por cisalhamento).

4.2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As restrições nodais são informadas em “*joint restraints*”, onde se definem quais os nós são apoiados e quais os graus de liberdade daquele nó. Podem ser restringidas translações e rotações nas três direções.

Para a laje em estudo o nó central, que representa o pilar, bem como os demais apoios (nos cantos e intermediários) foram restringidos somente às translações. Foram adotadas em todo o contorno da laje vigas de seção transversal de 15x50 cm, as quais apresentaram pequena deformação, podendo assim os valores ser comparados aos resultados obtidos para a Teoria das Placas, a qual considera os apoios indelocáveis.

Mesmo para o caso de estudo de pilares representados por elementos sólidos (*solid*), esses apresentam apoios somente restringidos à translação.

4.2.4 CARREGAMENTO

O carregamento adotado para a laje, como carga uniformemente distribuída, pode ser considerado como a soma do peso-próprio mais uma carga na forma de pressão, a qual é definida como “*shell uniform load*”.

4.2.5 REFINAMENTO

O programa dispõe de modelo próprio para cálculo de lajes planas, onde o refinamento nas proximidades do pilar já está definido. O SAP2000 define esse tipo de estrutura, composta unicamente por pilares e lajes apoiadas diretamente sobre eles de “*floor*”. A *Figura 4.1* ilustra um modelo padrão do programa, diferente da laje de referência estudada, no qual é fácil visualizar um maior refinamento da malha de elementos finitos nas proximidades dos apoios (pilares). É importante citar que, no caso da estrutura “*floor*” do SAP2000, não há viga no contorno da laje, diferindo, portanto dos modelos estudados anteriormente e não servindo como parâmetro de comparação.

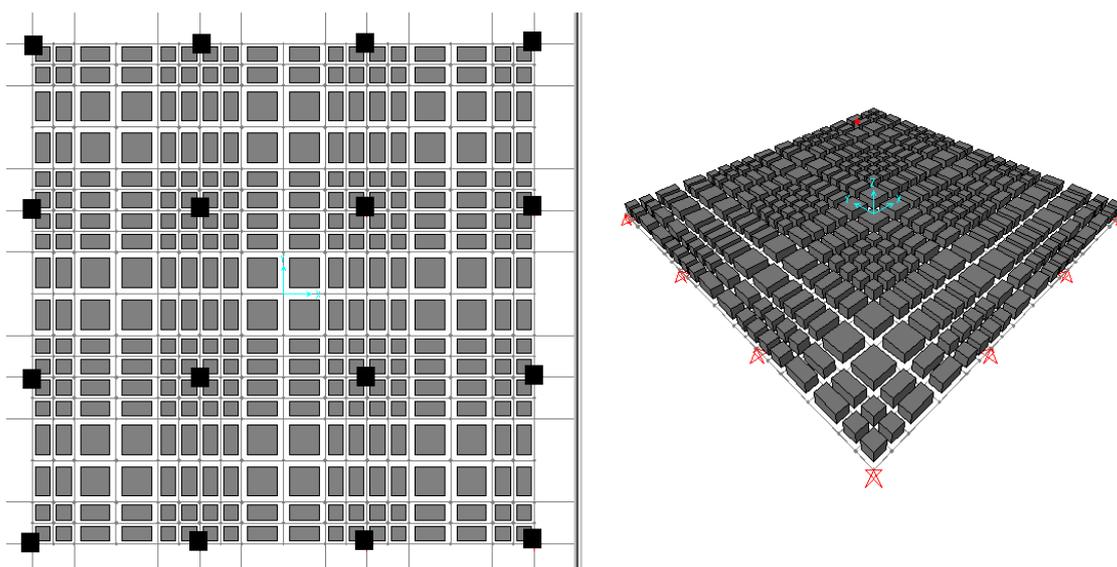


Figura 4.1 Modelo de estrutura “floor” do SAP2000, utilizado para o cálculo de lajes planas.

É importante observar que, nos exemplos analisados para a laje em estudo, para o refinamento nas proximidades do pilar é necessário adotar elementos “shell” triangulares, de modo a fazer a transição entre elementos maiores e elementos menores, trabalhando-se em cima de uma malha pré-definida inicialmente. A não adoção desse procedimento torna o modelo inadequado, fazendo surgirem esforços “confusos” nessa transição, prejudicando a análise dos valores nas suas proximidades (*Figura 4.2*). Em ambos os casos não se tomaram à média das tensões para visualização da distribuição. Vale citar que, no programa SAP2000, não se dispõem de elementos de placa de 5 a 9 nós, apenas elementos triangulares (3 nós) e quadriláteros (4 nós).

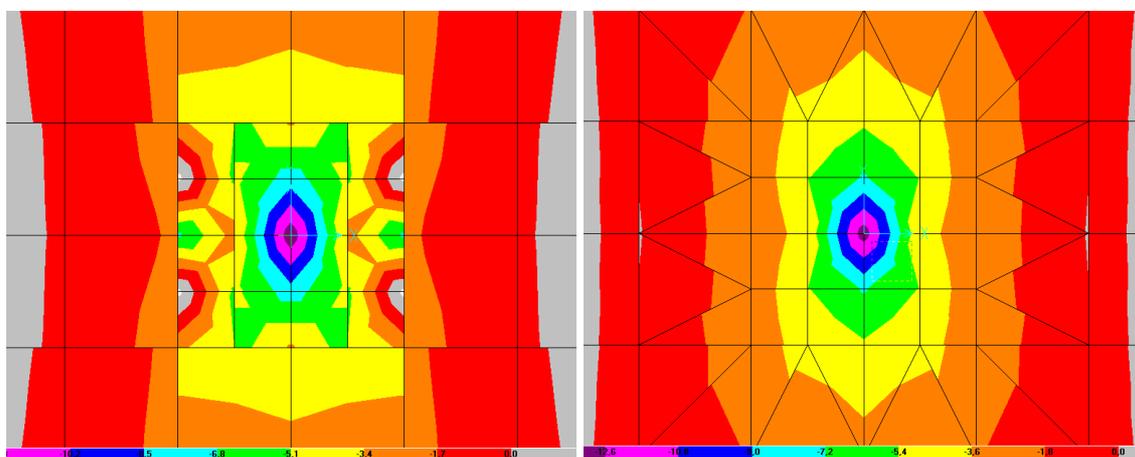


Figura 4.2 Momentos fletores nas proximidades do pilar para uma malha sem (E) e com transição de elementos próximos ao refinamento (D).

4.3 RESULTADOS

4.3.1 PILAR MODELADO COMO UM APOIO PONTUAL

Inicialmente o pilar central e os de apoio das vigas de contorno forma modelados como um único ponto, ou seja, um dos nós da malha de elementos finitos (nó central), apresenta restrição quanto às três translações.

A seguir são ilustrados os modelos que foram analisados no programa SAP2000. É mostrada a malha de elementos finitos e indicado se foi ou não feito refinamento nas proximidades do pilar central.

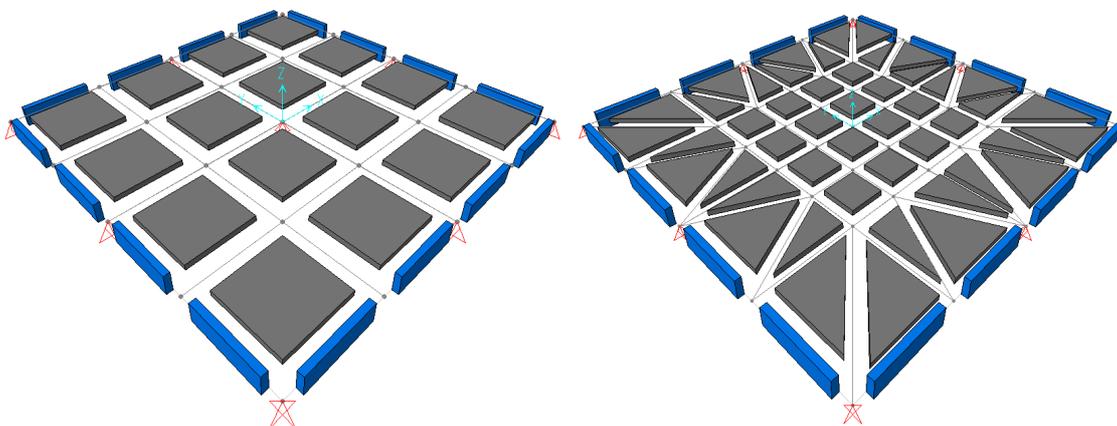


Figura 4.3 Malha de elementos finitos 250x250cm sem (E) e com refinamento 125x125 (D).

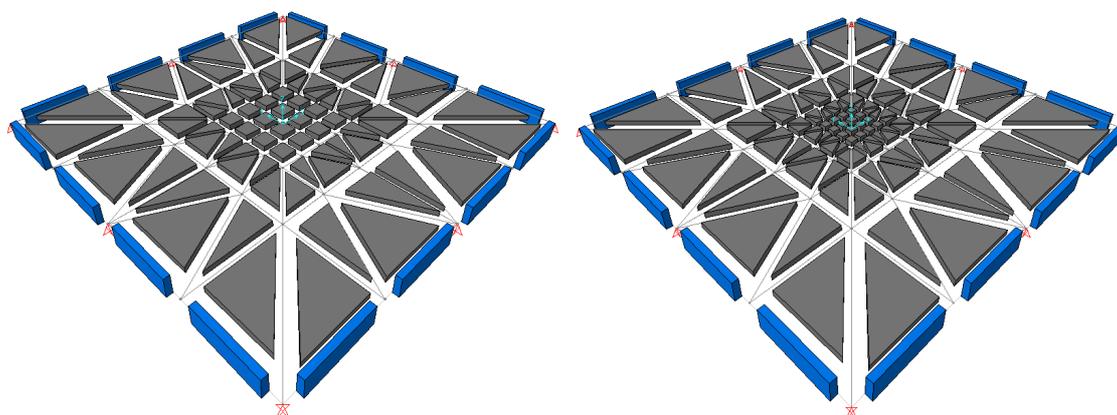


Figura 4.4 Malha de elementos finitos 250x250cm com refinamento 62,5x62,5 (E) e 31,25x31,25 (D).

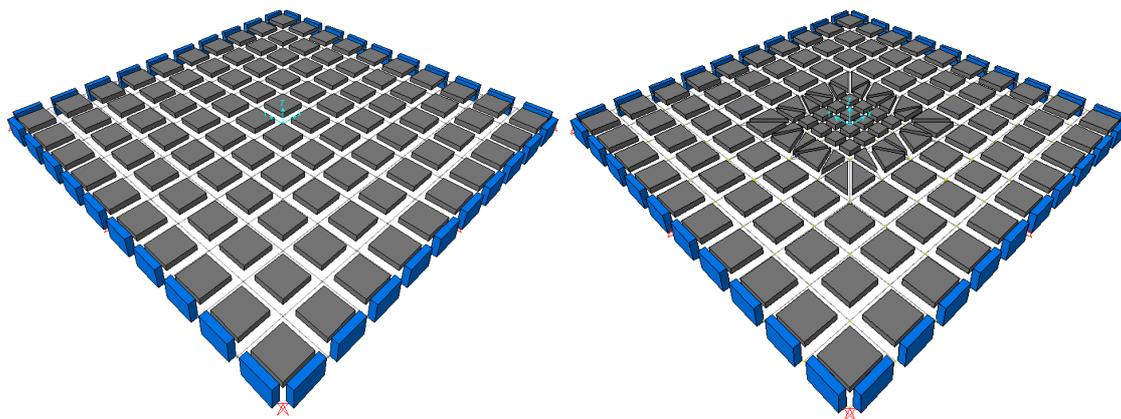


Figura 4.5 Malha de elementos finitos 100x100cm sem refinamento (E) e com refinamento 50x50 (D).

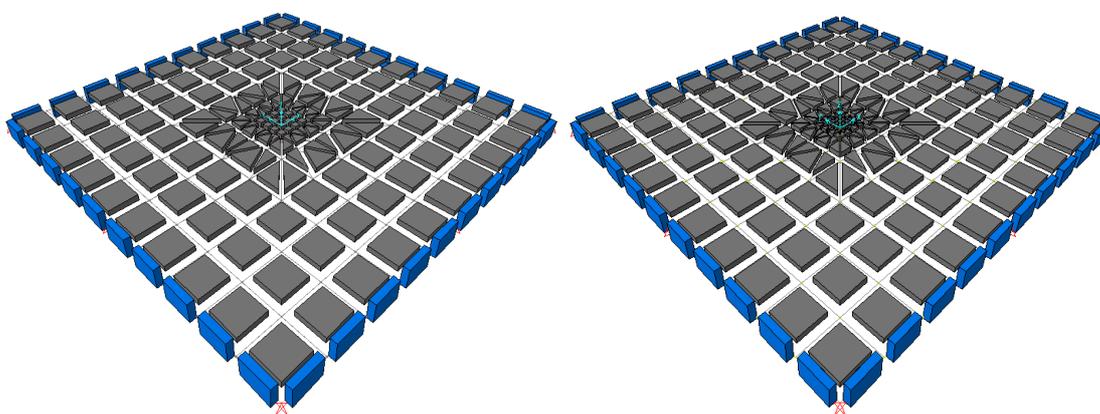


Figura 4.6 Malha de elementos finitos 100x100cm com refinamento 25x25 (E) e 12,5x12,5 (D).

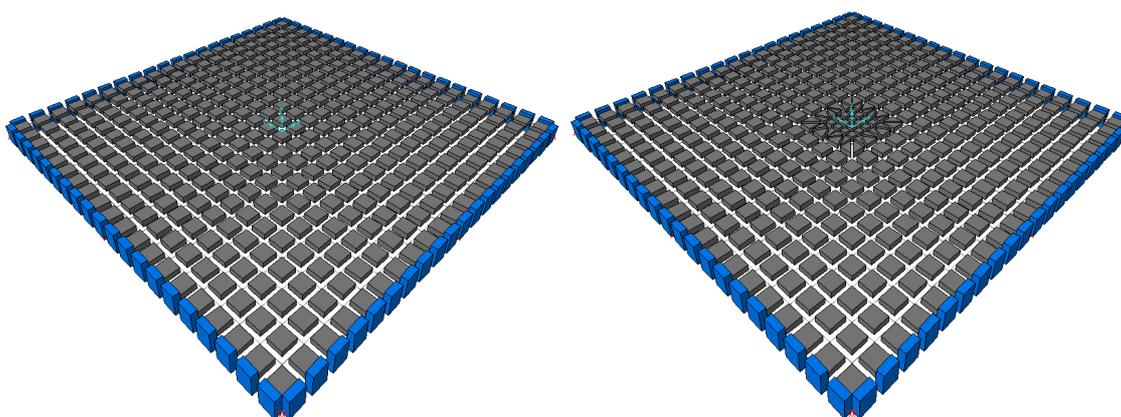


Figura 4.7 Malha de elementos finitos 50x50cm sem refinamento (E) e com refinamento 25x25 (D).

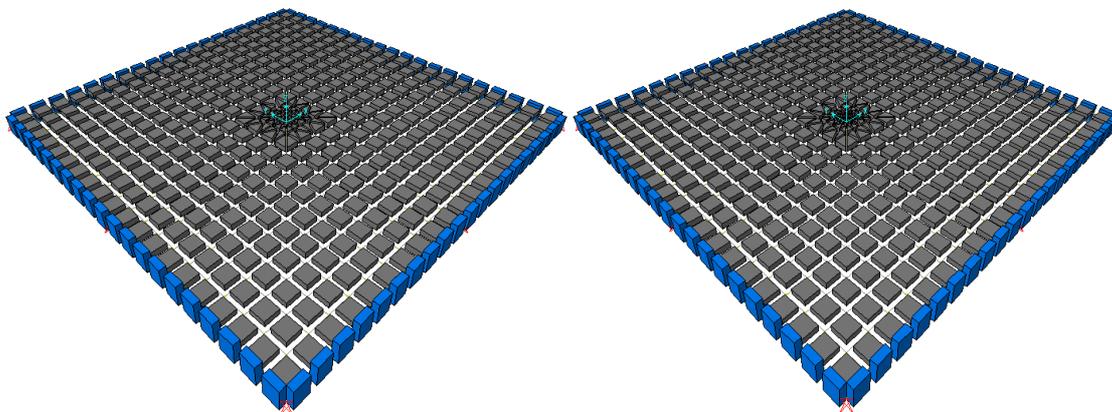


Figura 4.8 Malha de elementos finitos 50x50cm com refinamento 12,5x12,5 (E) e 6,25x6,25 (D).

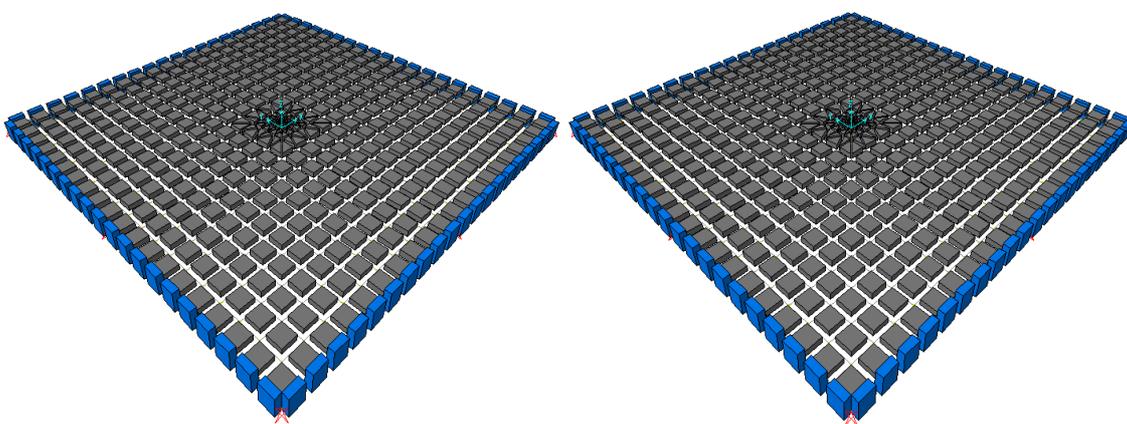


Figura 4.9 Malha de elementos finitos 50x50cm com refinamento 3,125x3,125 (E) e 1,5625x1,5625 (D).

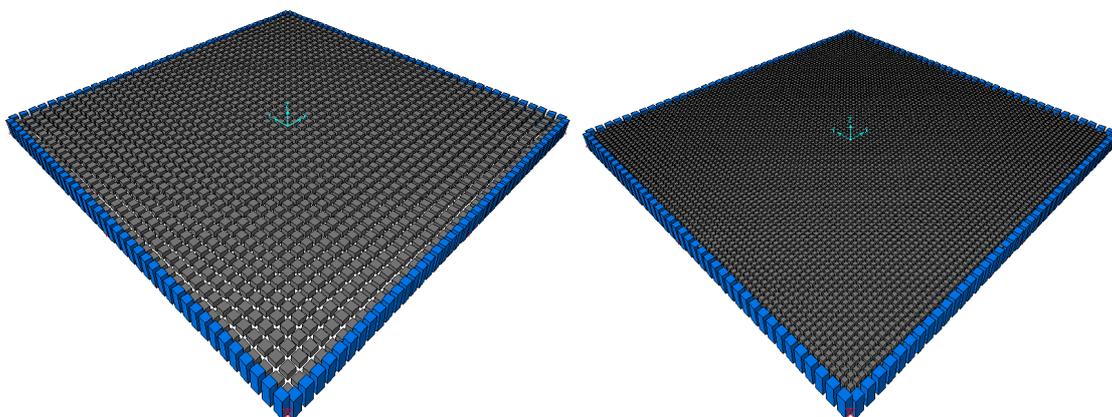


Figura 4.10 Malha de elementos finitos 25x25cm (E) e 12,5x12,5 (D), ambas sem refinamento.

Os resultados obtidos para os modelos acima estão descritos na *tabela 4.1*. Na *tabela* estão definidos a malha e o refinamento, quando esse foi adotado. Estão definidos os valores da reação no pilar central, o momento positivo máximo m_y , os momentos negativos m_y no centro do pilar e a uma distância de 25 cm do centro e o deslocamento máximo. O valor do momento a 25 cm do centro foi obtido de modo a verificar-se como era o comportamento dos momentos negativos nas proximidades do pilar. É também descrito o tempo gasto em cada um dos processamentos.

A variação da carga sobre o pilar, dos momentos positivo e negativo e dos deslocamentos na laje, de acordo com a malha e refinamento adotado, será ilustrada nas *figuras 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14*, respectivamente.

Tabela 4.1 Resultados para modelos no SAP2000, onde o pilar foi modelado como ponto único, para a laje de referência.

Malha x refinamento	Tempo de process. (s)	Carga pilar (kN)	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo centro (kN.m/m)	Momento negativo 0,25cm (kN.m/m)	Flecha máxima (cm)
250	4	329,80	30,90	-46,50	-39,30	0,241
250x125	4	359,60	21,00	-77,20	-57,30	0,255
250 x 62,5	4	364,80	21,80	-102,90	-64,50	0,251
250 x 31,25	5	365,80	21,90	-125,90	-49,30	0,249
100	5	356,60	21,30	-86,20	-62,30	0,275
100 x 50	5	359,70	21,20	-110,60	-60,90	0,270
100 x 25	5	360,30	21,30	-134,00	-39,40	0,268
100 x 12,5	6	360,40	21,20	-156,80	-49,00	0,268
50	9	361,60	20,90	-111,50	-64,20	0,285
50 x 25	10	362,20	20,90	-135,80	-40,60	0,281
50 x 12,5	11	362,40	20,90	-159,20	-50,30	0,283
50 x 6,25	11	362,40	20,90	-182,60	-47,80	0,283
50 x 3,125	12	362,40	20,90	-206,00	-47,70	0,283
50 x 1,5625	12	362,40	20,90	-229,00	-47,70	0,283
25	31	362,80	20,80	-136,70	-41,70	0,285
12,5	488	363,60	20,70	-160,30	-50,40	0,285

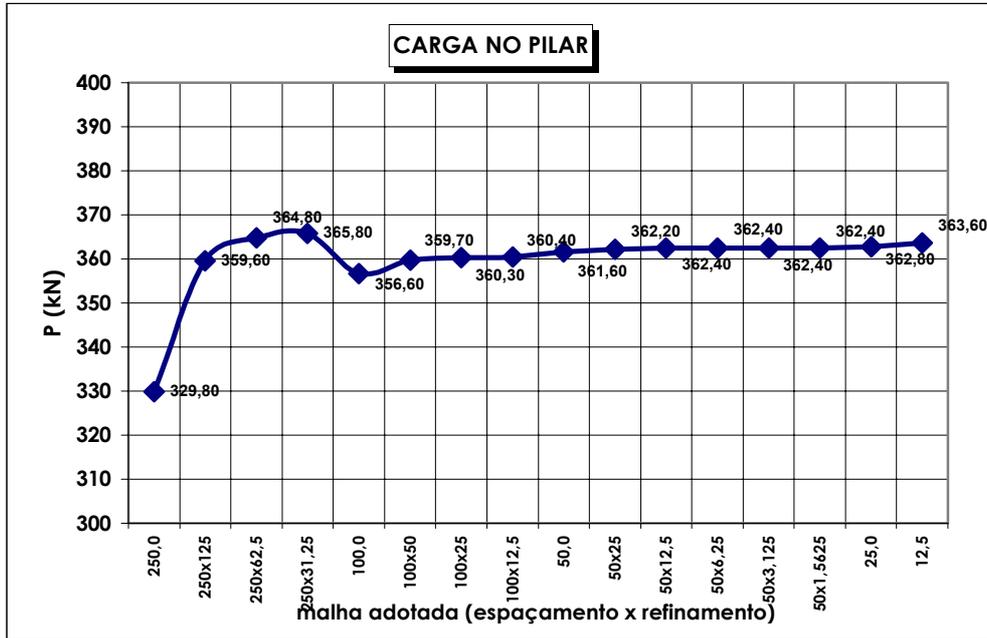


Figura 4.11 Carga no pilar para diferentes malhas, pilar modelado como apoio pontual.

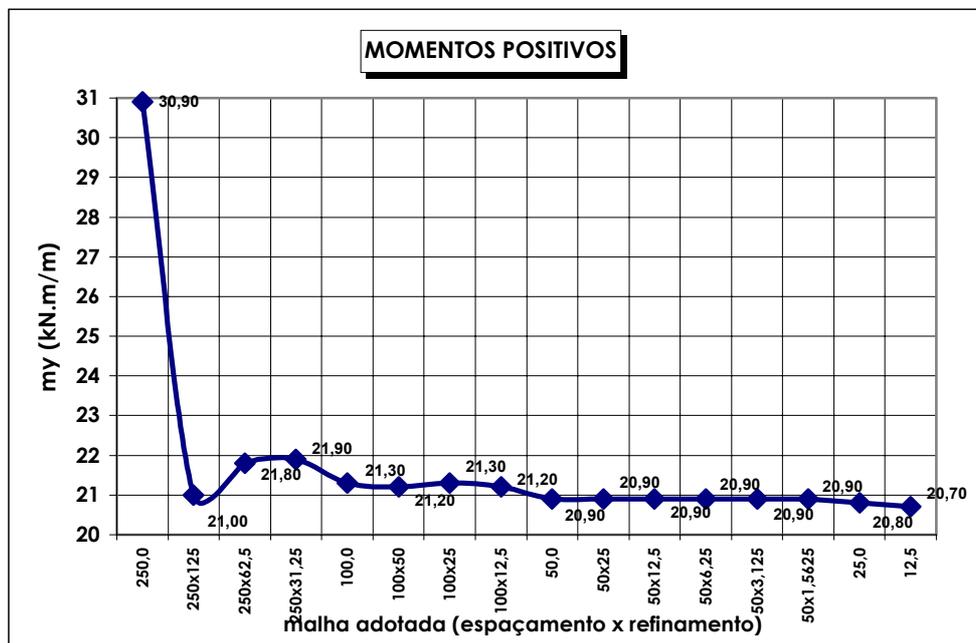


Figura 4.12 Momento positivo máximo para diferentes malhas, pilar modelado como apoio pontual.

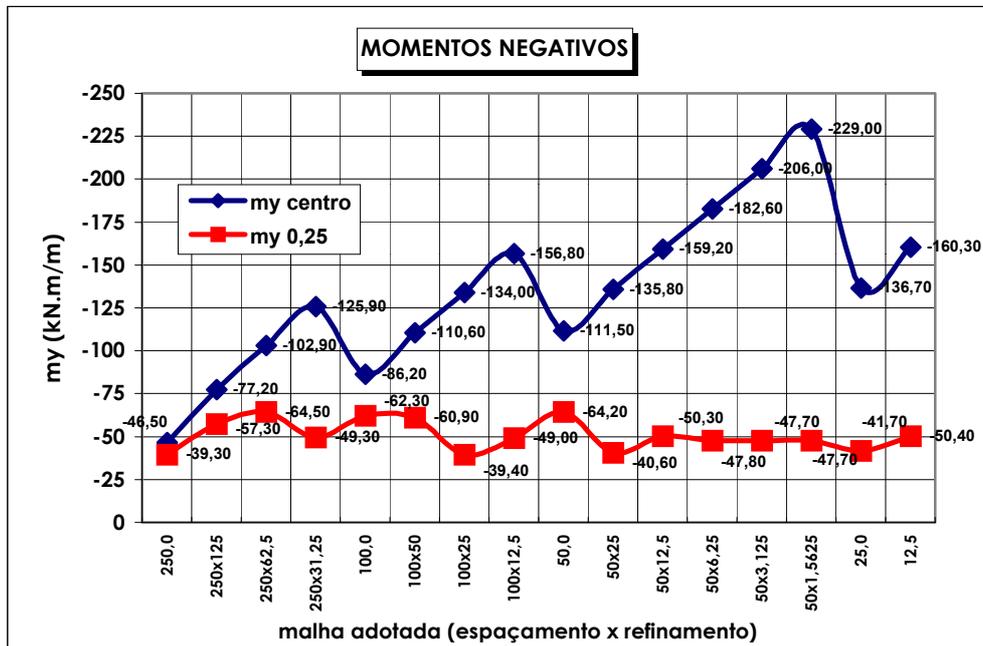


Figura 4.13 Momentos negativos no centro e a 25 cm do centro para diferentes malhas.

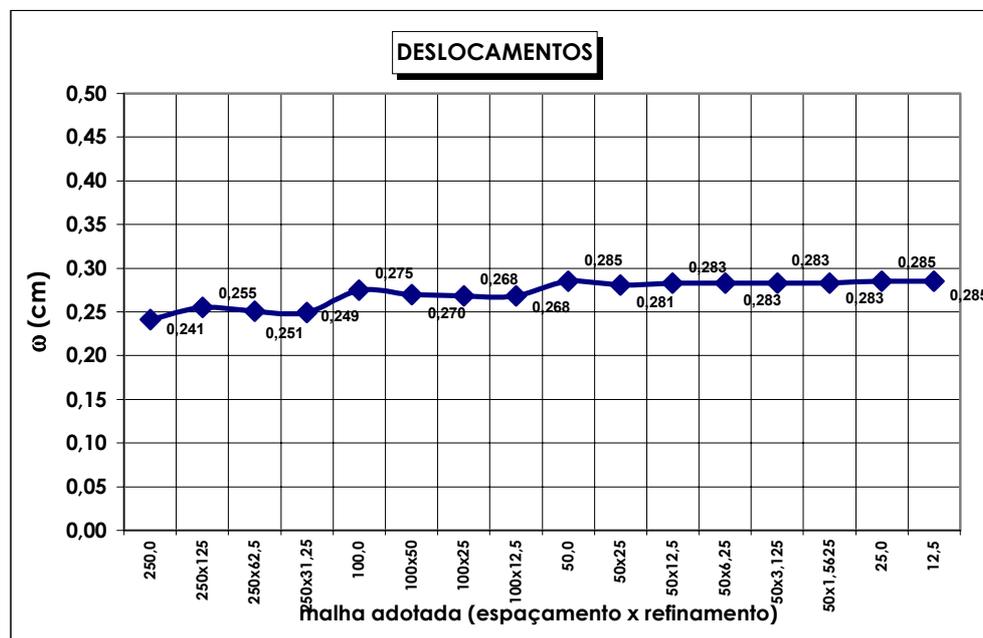


Figura 4.14 Deslocamentos máximos para diferentes malhas, pilar modelado como ponto.

4.3.2 PILAR MODELADO COMO ELEMENTO SÓLIDO

O modelamento do pilar como elemento sólido é uma aproximação melhor da realidade do problema, e isso pode ser comprovado através dos resultados mostrados a seguir. Por outro lado, o modelamento como elemento sólido é feito através de arquivo de texto, necessitando, portanto, de maior tempo para a montagem do modelo.

Para os modelos em que o pilar foi simulado como elemento sólido, adotou-se como padrão a laje com malha de 50x50 cm, a qual, para os exemplos de pilar modelado como um ponto, apresentou bons resultados com um pequeno tempo de processamento. Foi também feito um modelo com malha 12,5x12,5cm, para verificar se é interessante reduzir a malha para melhorar os resultados, o que não foi comprovado para os casos já estudados. A *Figura 4.15* ilustra um dos modelos estudados.

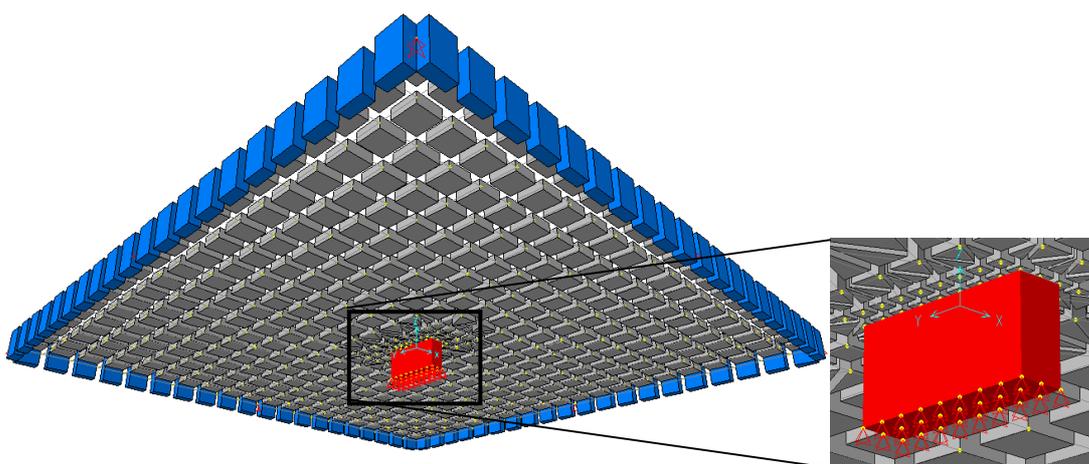


Figura 4.15 Modelo com pilar definido como elemento sólido 25x100 cm, malha geral 50x50 cm, refinamento de 12,5 cm nas proximidades do pilar.

Para a mesma malha, foram estudadas diversas seções de pilares - quadradas e retangulares, de modo a verificar-se os resultados encontrados e avaliar a influência das dimensões e da forma do pilar nos esforços e deslocamentos obtidos. A *Tabela 4.2* mostra os valores obtidos para pilar modelado como elemento sólido.

Tabela 4.2 Resultados para modelos no SAP2000, onde o pilar foi modelado como elemento sólido, para a laje de referência.

Malha x refinamento	Seção do pilar (cm)	Tempo de process. (s)	Carga pilar (kN)	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Flecha (cm)
50x12,5	25x25	10	363,40	20,80	-82,30	0,283
50x12,5	25x50	10	367,90	20,70	-69,10	0,276
50x12,5	50x25	10	367,90	20,60	-75,20	0,276
50x12,5	50x50	10	373,70	20,40	-63,70	0,268
50x12,5	25x100	10	379,80	20,30	-67,60	0,259
50x12,5	100x25	10	379,80	19,70	-72,80	0,259
50x12,5	75x75	12	379,60	19,60	-57,60	0,250
50x12,5	100x100	13	408,80	18,70	-49,80	0,230
12,5	25X25	490	364,80	20,70	-84,20	0,285

Nota-se que, para a tabela acima não estão descritos os momentos no centro do pilar, visto que, os momentos máximos surgiram nas faces dos pilares, onde há uma concentração de tensões. A *figura 4.16* ilustra o desenvolvimento dos momentos m_y ao longo da linha média ($y = 5$ m) de uma laje cujo pilar foi modelado como um ponto (malha 50x50 cm) e com elemento sólido de 100x25 cm (malha 50x50 cm). Pela figura percebe-se, no entanto que, o comportamento quanto a momentos positivos é muito próximo, nas proximidades do pilar, enquanto o modelo de pilar como apoio pontual apresenta um pico de esforço no centro, o modelo como sólido apresenta o maior esforço na face do pilar. Já a *figura 4.17* ilustra a distribuição desses momentos em planta, nas proximidades do pilar. Pode-se verificar claramente que, no primeiro caso os momentos crescem continuamente, e no segundo, quando o pilar é modelado como elemento sólido, os momentos atingem um pico na face do pilar e, posteriormente, sofrem um decréscimo.

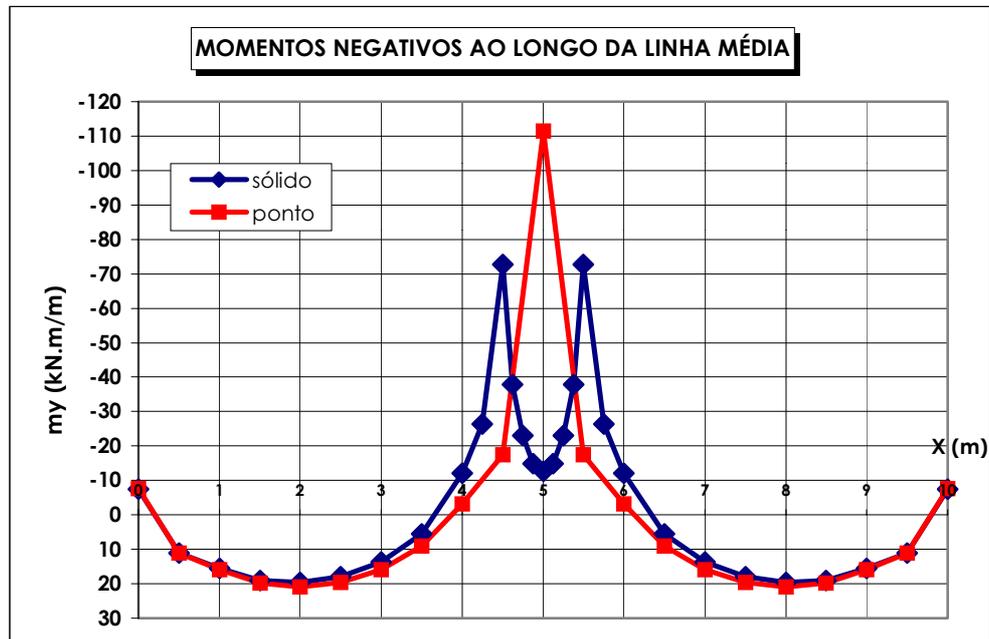


Figura 4.16 Momentos em laje para pilar modelado como ponto e como elemento sólido.

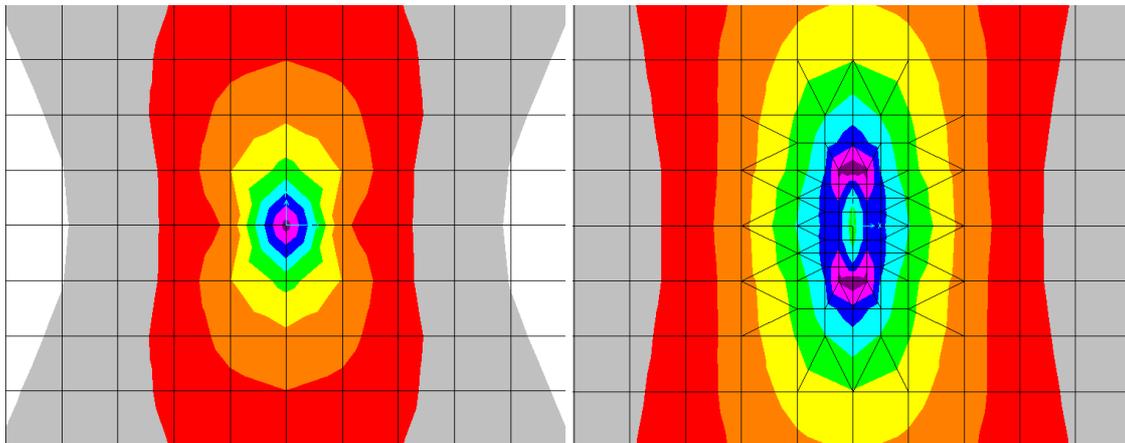


Figura 4.17 Momentos em planta para laje com pilar modelado como ponto (E) e como elemento sólido (D).

As Figuras 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21 ilustram os resultados mostrados na tabela 4.2, mostrando a carga no pilar, momentos positivos e negativos máximos e deslocamentos para a laje, quando o pilar é modelado como elemento sólido.

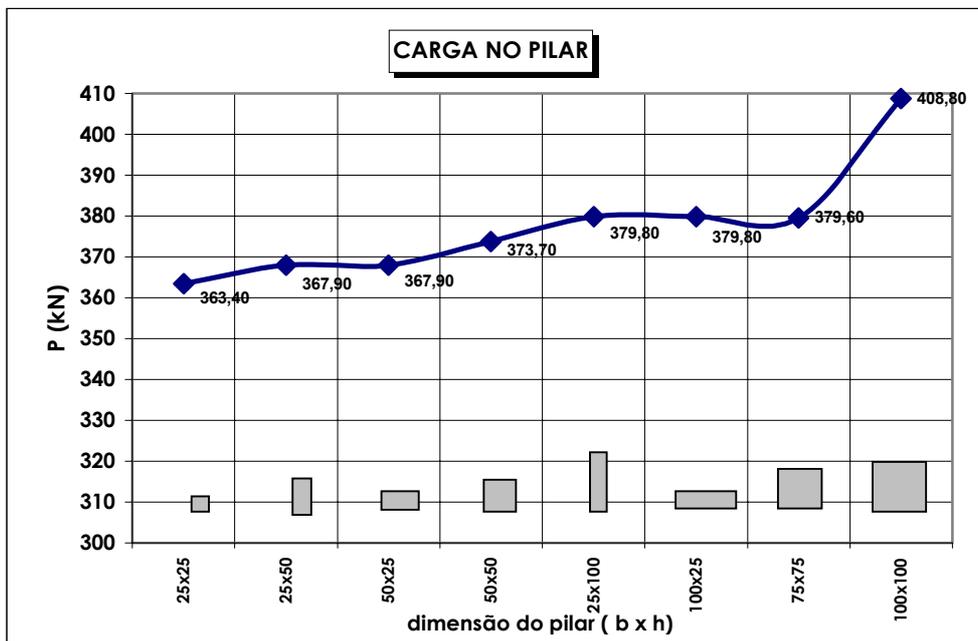


Figura 4.18 Carga no pilar para diferentes seções, pilar modelado como elemento sólido.

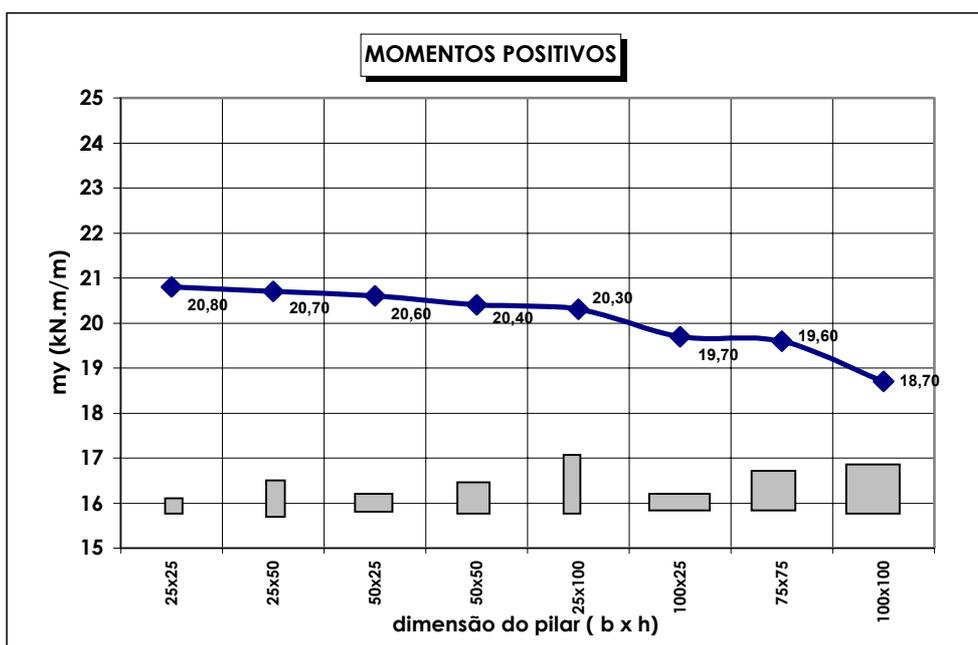


Figura 4.19 Momentos positivos para diferentes seções de pilar, modelado como elemento sólido.

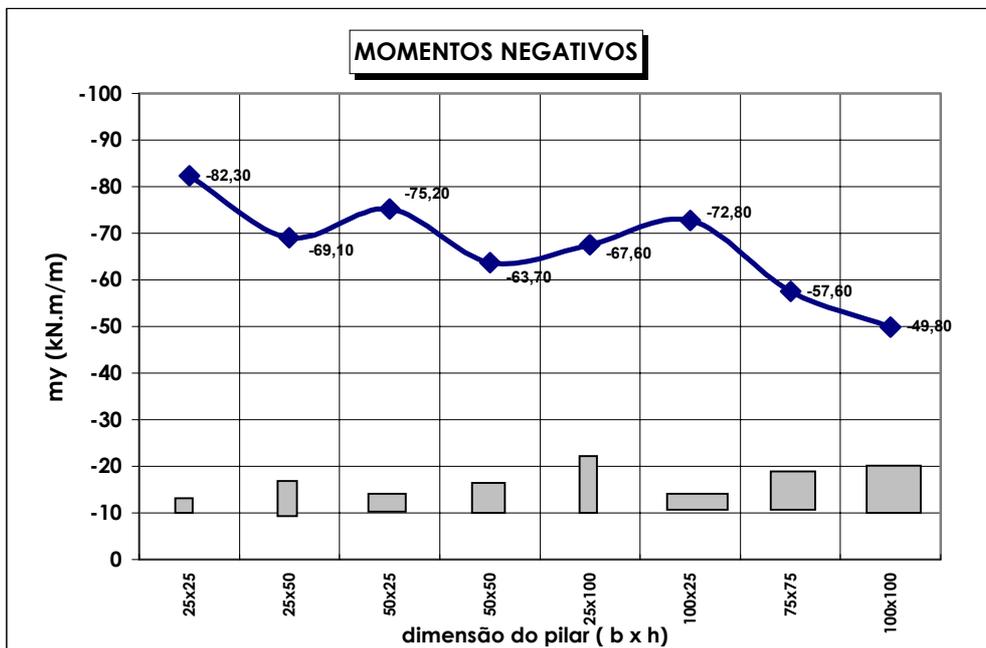


Figura 4.20 Momentos negativos para diferentes seções de pilar, modelado como elemento sólido.

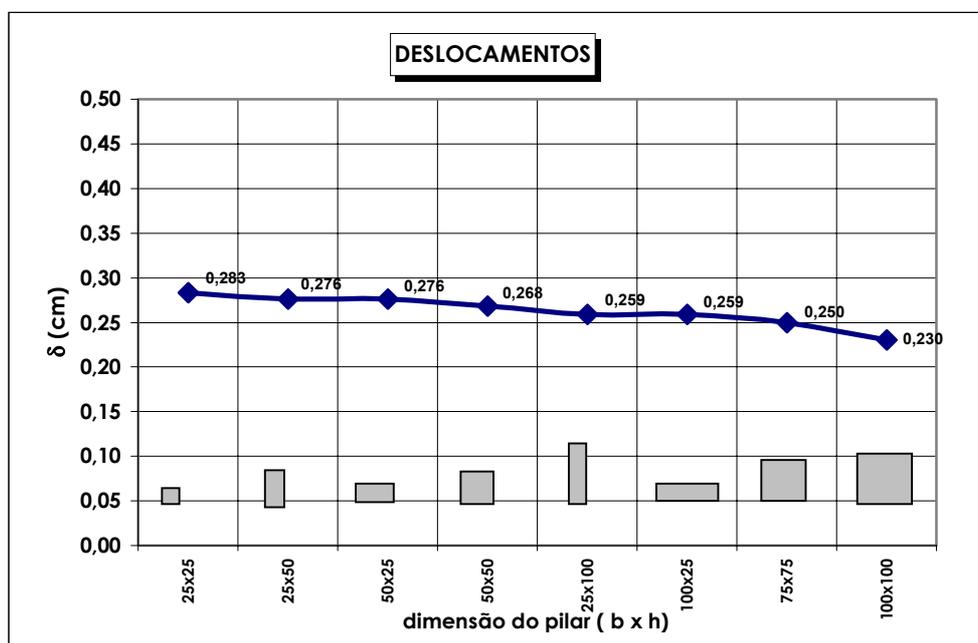


Figura 4.21 Deslocamentos na laje para diferentes seções de pilar, modelado como elemento sólido.

4.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para o caso de pilar modelado como ponto único, a carga sobre o pilar é praticamente constante para todas as malhas adotadas, independentemente do refinamento nas proximidades do pilar (*figura 4.11*). A diferença na carga sobre o pilar de uma malha de 100x100 cm, para uma malha sem refinamento para uma malha de 12,5x12,5 cm, são da ordem de 2%.

Outrossim, os momentos positivos, bem como os deslocamentos máximos, ainda para o caso de pilar modelado como um ponto, apresentam também valores muito próximos, mesmo com o refinamento das malhas gerais e das proximidades do pilar. A diferença no momento positivo de uma malha de 100x100 cm sem refinamento para uma malha de 12,5x12,5 cm, são da ordem de 3% (*figura 4.12*). Já para os deslocamentos a diferença ficou em torno de 4% (*figura 4.14*).

Entretanto, para os momentos negativos sobre o pilar (simulado como um apoio pontual), as diferenças chegaram até a 86% comparando-se as malhas 100x100 cm com 12,5x12,5 cm, citadas anteriormente para os demais resultados. Observando-se a *figura 4.13*, conclui-se facilmente que, à medida que a malha é mais refinada, os momentos no centro do pilar aumentam. De maneira análoga, quanto maior o refinamento nas proximidades ao pilar, os momentos também crescem. Para a malha de 50x50 cm, a diferença no momento dessa sem refinamento, para o caso de refinamento de 1,5625 cm nas proximidades ao pilar é de aproximadamente 105%.

Observando-se os momentos a 25 cm do centro ($m_y, 0,25$), percebe-se que o comportamento não difere tanto como para o centro. Isso reforça a afirmação teórica de que os momentos tendem ao infinito no centro e que, crescem rapidamente no ponto de aplicação da carga (reação do pilar).

Quanto ao tempo para processamento, pode-se concluir que, adotar uma malha muito refinada não melhora significativamente os resultados e, por outro lado, aumenta muito o tempo para o processamento do modelo. Modelos com refinamento somente em

determinadas regiões onde se espera concentrações de tensões, são mais interessantes. Por exemplo, o modelo com malha 12,5x12,5 cm levou um tempo para processamento quase quatro vezes maior que o tempo de processamento de todos os outros modelos, não apresentando, entretanto, valores mais significativos.

Para os modelos em que o pilar foi simulado como elemento sólido, os resultados apresentam bastante semelhança com os obtidos para a Teoria das Placas. No caso da carga no pilar (*Figura 4.18*), a tendência foi a mesma da obtida pela teoria, ou seja, os valores foram bastante próximos e, aumentaram de acordo com o crescimento da seção do pilar.

Analogamente, os momentos positivos (*Figura 4.19*) e os deslocamentos máximos (*Figura 4.21*), também apresentaram pequena variação, mas percebe-se que os mesmos diminuem de acordo com o aumento da seção do pilar, o que também era de se esperar, pois já havia sido obtido resultado similar pelas Séries de Fourier.

Os resultados mais interessantes, ainda para pilar simulado como elemento sólido, foram obtidos para os momentos negativos (*figura 4.20*). Como já citado esses esforços apresentaram picos de valores nas bordas dos pilares. Tais picos são maiores ainda para os momentos em pilares alongados, por exemplo, seção 100x25 cm (*figura 4.22*). Na figura percebe-se os picos maiores para momentos máximos negativos no pilar alongado – na sua menor seção (25 cm). Para o pilar com seção quadrada ocorrem picos nos cantos, embora menores. No entanto, os valores obtidos para o modelo sólido não se apresentaram tão elevados como para os casos anteriormente estudados, onde o pilar foi modelado como um apoio pontual. Pode-se visualizar também que, com o aumento da seção dos pilares, os momentos negativos também reduzem, conclusão que também havia sido obtida pela análise teórica.

Para esse caso de modelamento de pilar, concluiu-se novamente que, o refinamento excessivo de toda a malha somente resulta em alto custo de processamento, visto que para a malha de 12,5x12,5 cm os resultados foram muito semelhantes aos da malha de 50x50 cm, com refinamento apenas na região central (ver *Tabela 4.2*).

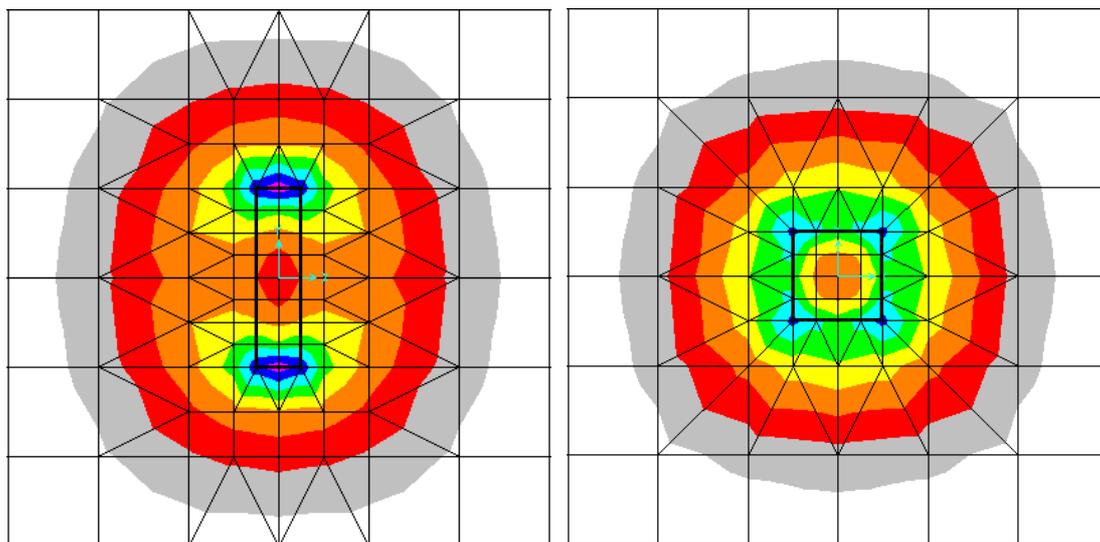


Figura 4.22 Momentos fletores máximos nas proximidades de pilares com seções 25x100 cm (E) e 50x50 cm (D).

Comparando-se os dois modelos de elementos finitos para o pilar, conclui-se que o modelamento do pilar como um apoio pontual fornece resultados satisfatórios em termos de carga no pilar, momentos positivos e deslocamentos, mas resultados desfavoráveis em termos de momentos negativos. Já o modelamento do pilar como sólido, embora seja um processo um pouco mais demorado, fornece valores muito melhores e próximos da realidade, principalmente no que se refere a momentos negativos nas proximidades do pilar.

5 OUTROS MÉTODOS

5.1 MÉTODO DIRETO

O método direto para a determinação de momentos em lajes cogumelo foi preconizado pelo código ACI, sendo que os esforços em cada pano de laje são obtidos de maneira simples e rápida, sem considerar as dimensões e carregamentos dos panos restantes da laje. O método apresentado aqui é baseado no código ACI 318-83, e nos seus comentários – ACI 318R – 83, e também em Montoya et al (1976).

Os momentos são determinados a partir de um momento total de referência, calculado para cada painel nas duas direções. Esse momento total de referência é transformado, por meio de coeficientes, em um momento de referência positivo e dois negativos nas seções central e dos apoios respectivamente; em seguida os momentos nas seções são divididos entre as faixas dos pilares e as centrais de cada painel.

Esse método se aplica a sistemas de lajes armadas em duas direções, tanto para aqueles com vigas entre todos os apoios como para os sem vigas. A utilização do método envolve três passos fundamentais:

- a) Determinação de um momento total de referência M_0 ;
- b) Transformação de momento M_0 em momentos de referência negativos nas seções A e C na face dos apoios, e positivo na seção B no meio do vão (*figura 5.1*);
- c) Distribuição dos momentos positivo e negativo de referência para as faixas de laje que contém os pilares, para as centrais e para as vigas, se houver (*figura 5.1*).

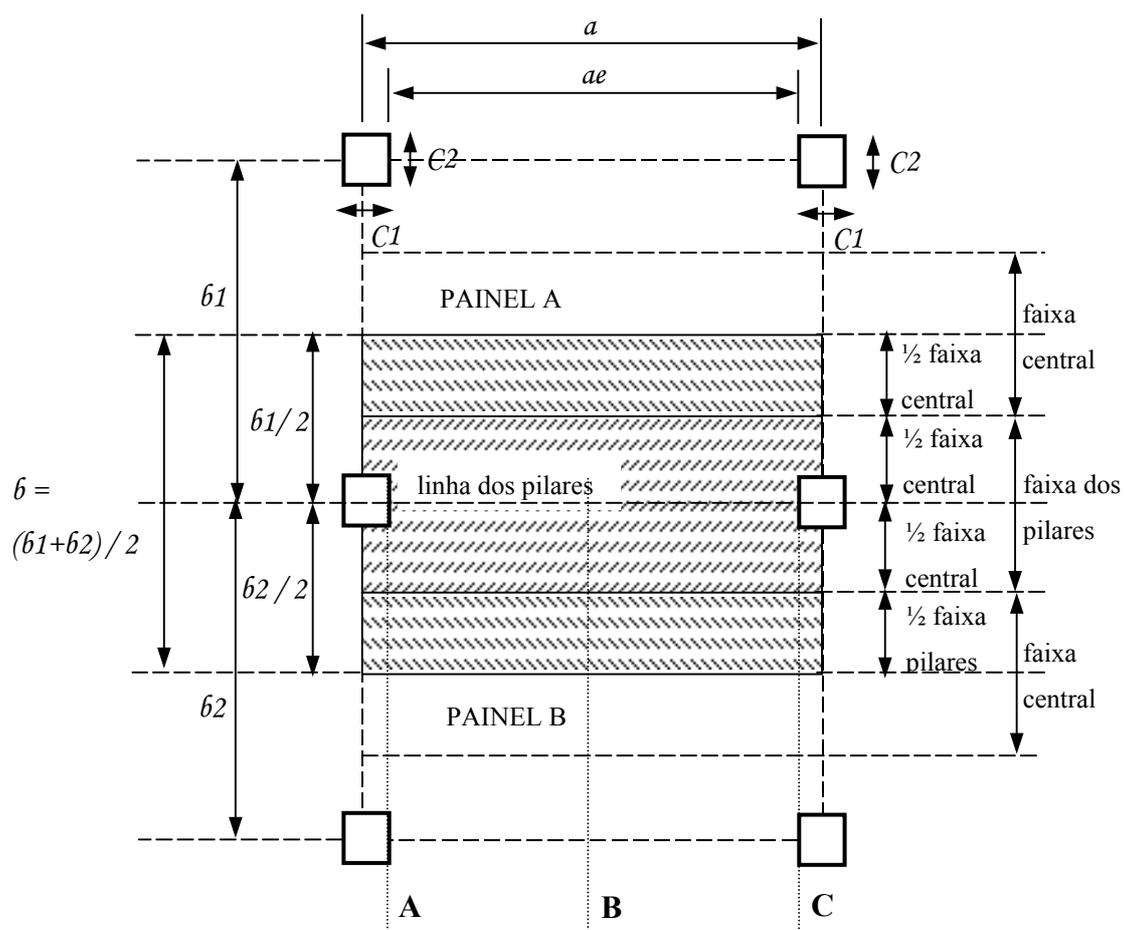


Figura 5.1 Divisão de painéis para uso do método direto (ACI 318R – 83).

Por ser este um método aproximado, para que se possa aplicá-lo impõem-se algumas restrições aos pavimentos:

d) Deve haver um mínimo de três vãos em cada direção, a razão para essa limitação é o maior valor dos momentos negativos em apoios internos de estruturas com apenas dois vãos contínuos;

e) A relação entre as dimensões do maior e do menor vão, medidos de centro a centro de pilar, não deve ser maior que 2, caso contrário a laje trabalha predominantemente em uma direção;

f) Os comprimentos dos vãos sucessivos em cada direção, medidos de centro a centro de pilar, não podem diferir em mais que 1/3 do maior vão; essa limitação garante que não se tenham momentos negativos em regiões sem armaduras destinadas para esse fim;

g) A sobrecarga não pode ter valor superior ao triplo da carga permanente;

h) As ações devem ser unicamente gravitacionais, e uniformemente distribuídas sobre o painel, sendo que as ações laterais requerem análise de pórtico;

i) Se existirem vigas, a rigidez relativa das mesmas nas duas direções perpendiculares é dada por:

$$\frac{\alpha_a \cdot a^2}{\alpha_b \cdot b^2} \quad (5.1)$$

a qual não deve ser menor que 0,2 nem maior que 5,0, onde:

a é o vão do painel na direção em que os momentos estão sendo calculados, medido de centro a centro dos pilares;

b é o vão do painel na direção perpendicular a a , medido de centro a centro dos pilares;

α é a relação entre a rigidez à flexão da viga e a rigidez à flexão de uma largura da laje (sem as vigas) delimitada pelas linhas centrais dos painéis adjacentes a cada lado da viga;

$$\alpha = \frac{(E \cdot I)_{viga}}{(E \cdot I)_{placa}} \quad (5.2)$$

O momento total de referência M_0 para um vão (a_e) deve ser determinado para o carregamento total em uma faixa de largura b , delimitada de cada lado da linha de centro dos pilares pela linha central dos painéis adjacentes.

A soma dos valores absolutos do momento positivo de referência (M_B na *Figura 5.1*) com a média dos momentos negativos de referência (M_A e M_C na *Figura 5.1*) não deve ser menor que o momento total de referência M_0 dado por

$$M_o = (g + q) \cdot \frac{b \cdot a_e^2}{8} \quad (5.3)$$

onde

($g + q$) é a carga total (permanente + acidental) por unidade de área;

b é a largura da faixa (área de contribuição da carga);

a_e é o vão livre na direção em que os momentos estão sendo considerados, medidos de face a face dos pilares.

Se o vão é considerado uma borda livre, o valor de b deve ser substituído pela distância d aborda à linha de centro do painel. O valor de a_e na equação (5.3) não deve ser menor que $0,65a$, e pilares circulares ou poligonais devem ser tratados como sendo quadrados de mesma área, como mostra a *Figura 5.2*.

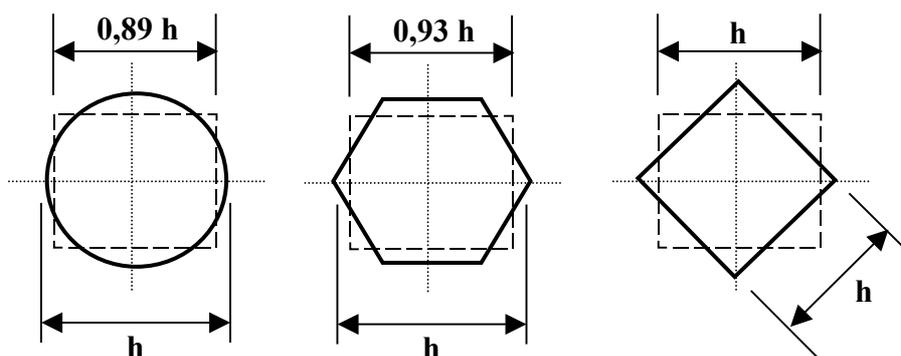


Figura 5.2 Seções quadradas equivalentes para pilares (ACI 318R – 83).

Os momentos de referência negativos, considerados na face de pilares retangulares (seções A e C, *Figura 5.1*) ou equivalentes, e o positivo no meio do vão

(seção B, *Figura 5.1*), para vãos internos e vãos extremos, são obtidos a partir do momento de referência M_0 .

a) Vão internos: em um vão interno o momento total M_0 deve ser substituído da seguinte forma:

$$\text{Momento negativo (seções A e C)} \quad M_A = M_C = 0,65M_0 \quad (5.4)$$

$$\text{Momento positivo (seção B)} \quad M_B = 0,35M_0 \quad (5.5)$$

b) Vãos extremos: em um vão extremo o momento total M_0 deve ser substituído como se segue:

$$\text{Momento negativo externo (seção A)} \quad M_A = \left(\frac{0,65}{1 + \frac{1}{\alpha_{pe}}} \right) M_0 \quad (5.6)$$

$$\text{Momento positivo (seção B)} \quad M_B = \left(0,63 - \frac{0,28}{1 + \frac{1}{\alpha_{pe}}} \right) M_0 \quad (5.7)$$

$$\text{Momento negativo interior (seção C)} \quad M_C = \left(0,75 - \frac{0,10}{1 + \frac{1}{\alpha_{pe}}} \right) M_0 \quad (5.8)$$

onde

α_{pe} é a rigidez relativa entre o pilar externo equivalente e a laje (e viga, se houver).

A *figura 5.3* ilustra a distribuição de momentos M_0 definida nos itens *a* e *b*, acima.

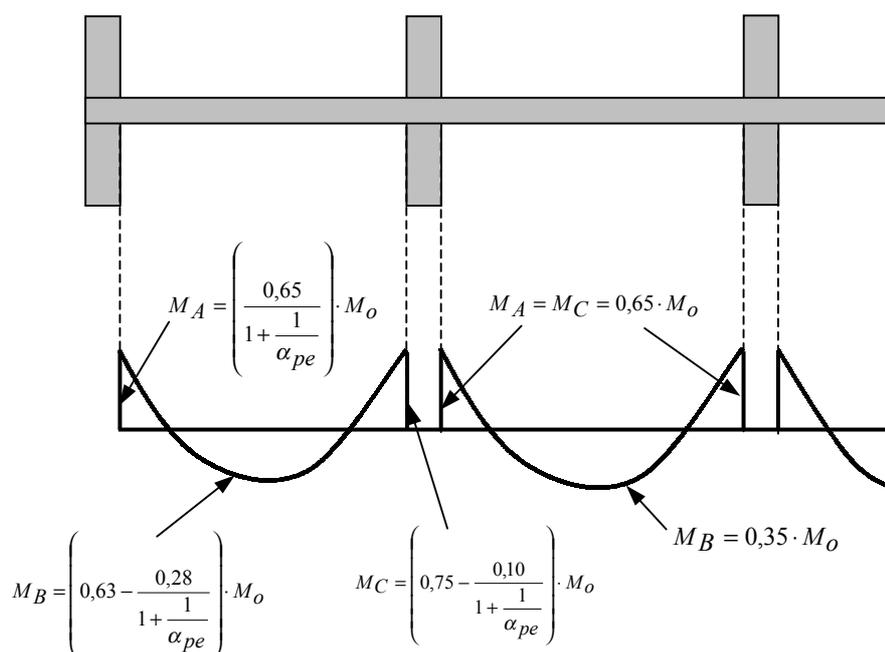


Figura 5.3 Momentos de referências nas seções (ACI 318R – 83).

Os efeitos e momentos introduzidos no pilar devido a essa ligação, bem como a ligação entre pilar e laje não serão estudados no presente trabalho. Maiores detalhes estão contidos no ACI 318R (1983) e Figueiredo (1989).

Uma versão simplificada do método direto foi apresentada pelo ACI 318-83, onde a principal mudança introduzida é na determinação dos momentos de referência positivos e negativos em um vão extremo, com grande simplificação nos cálculos.

As expressões dadas nos códigos anteriores para a distribuição do momento total de referência em um vão extremo, que eram função das rigidezes dos elementos, foram substituídas pelos coeficientes da *Tabela 5.1*, o que elimina todos os cálculos para a determinação da rigidez do pilar equivalente.

Os coeficientes das colunas 1 e 5 (*tabela 5.1*) para bordas exteriores simplesmente apoiadas e totalmente engastadas, são baseados nas expressões originais de α_{pe} igual a zero e infinito, respectivamente.

Os coeficientes dos momentos para as outras situações foram estabelecidos pela análise de diversos sistemas de lajes, com diferentes geometrias e condições de apoio, usando o método dos pórticos equivalentes, que transforma o sistema tridimensional em uma série de pórticos bidimensionais.

Finalmente todos os coeficientes foram ajustados de modo que a soma dos valores absolutos do momento positivo com a média dos negativos fosse igual a M_0 .

A distribuição do momento total de referência em momentos negativos e positivos em um vão extremo e um interno, com e sem vigas de borda, é ilustrada nas *figuras 5.4* e *5.5*. O vão extremo é referente ao caso de laje sem vigas entre pilares interiores.

Tabela 5.1 Coeficientes para distribuição de momentos (ACI 318-83).

	Borda exterior simplesmente apoiada	Laje com vigas entre os pilares	Lajes sem vigas entre os pilares		Borda exterior engastada
			Sem viga de borda	Com viga de borda	
Momento interior negativo	0,75	0,70	0,70	0,70	0,65
Momento positivo	0,63	0,57	0,52	0,50	0,35
Momento exterior negativo	0	0,16	0,26	0,30	0,65

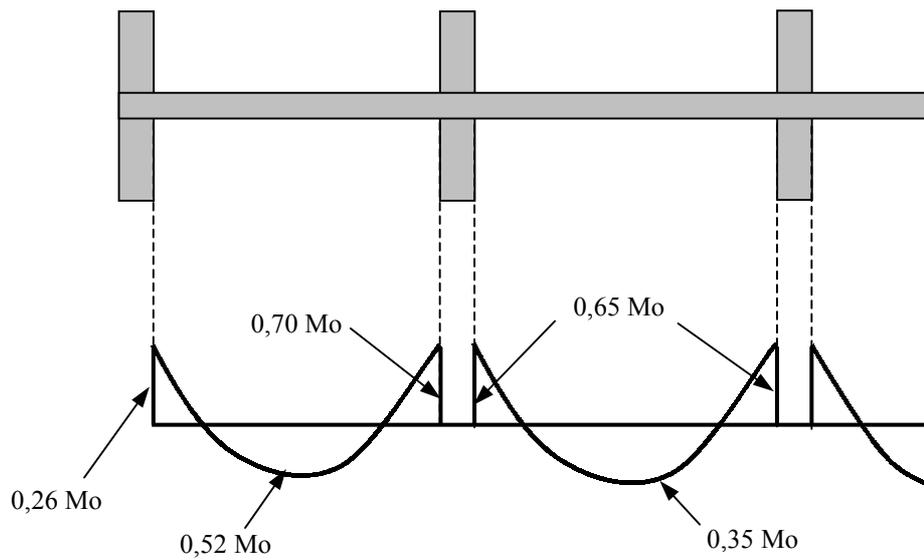


Figura 5.4 Distribuição do momento total de referência em laje sem viga de bordo (ACI 318R – 83).

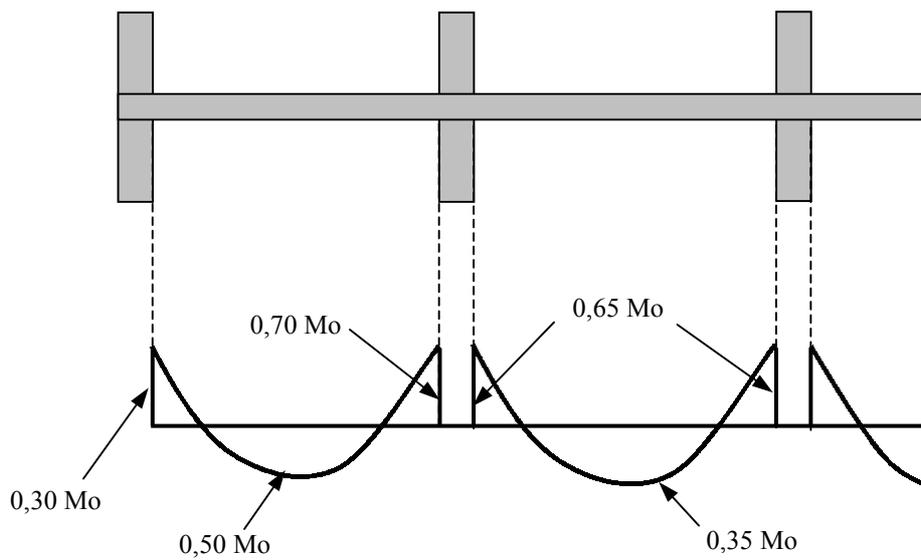


Figura 5.5 Distribuição do momento total de referência em laje com viga de bordo (ACI 318R – 83).

5.2 MÉTODO DO EQUILÍBRIO

Segundo Moretto, para determinar a forma de cálculo é indispensável visualizar o comportamento da estrutura. A maneira mais simples de fazê-lo consiste em imaginar as lajes solicitadas por uma carga uniformemente distribuída aplicada sobre todos os panos. Sob a ação dessas cargas, a laje flexiona e adquire uma forma côncava para cima no centro do pano e convexa sobre as colunas e nas linhas imaginárias que ligam as mesmas. Na união com as colunas, a laje é solicitada também a uma ação de puncionamento, fenômeno esse que não é abordado no presente trabalho. A *Figura 5.6* ilustra em planta e em corte um exemplo de edificação composta por colunas e lajes planas sem vigas.

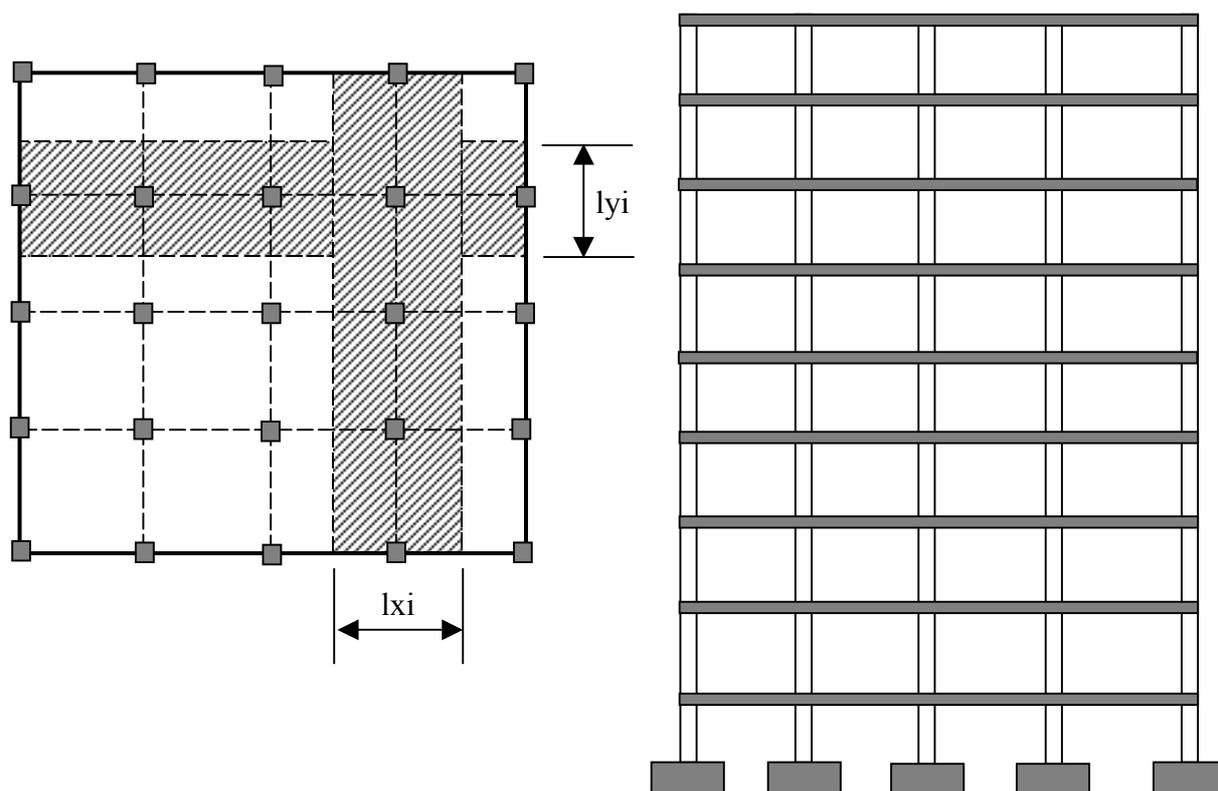


Figura 5.6 Estrutura típica de edifícios com lajes planas.

A maneira com que a placa flexiona indica a forma de distribuição dos momentos. A magnitude desses é deduzida das equações de equilíbrio estático. Considerando-se um pano quadrado, situado simetricamente no centro de uma laje formado por um grande número de panos, solicitado por uma carga uniforme $p = g + q$ aplicada sobre toda a laje, o momento total é deduzido analisando o equilíbrio do pano médio de altura l e largura $l/2$, isolado do restante da estrutura como indica a *figura 5.7*.

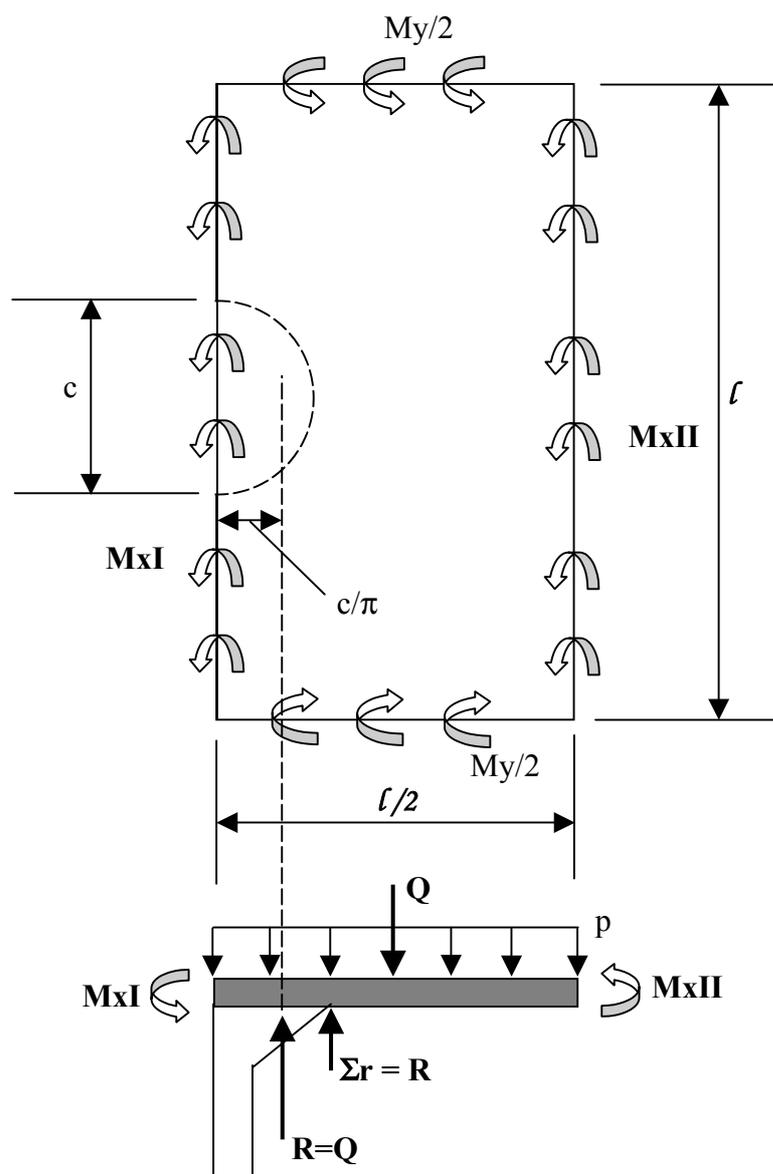


Figura 5.7 Equilíbrio do pano médio de uma laje e coluna média separados da parte central.

Por razões de simetria, não existem esforços cortantes ao longo das seções retilíneas que separam o pano médio do restante do piso. Tais seções se encontram, portanto, solicitadas somente pela ação de momentos fletores m_x na direção X , e $m_y / 2$ na direção Y . Supondo para os esforços cortantes citados uma repartição uniforme linear em forma circular, desenvolvida ao longo do contato entre o bordo externo do capitel ou da coluna e a placa, o equilíbrio na direção X conduz a expressão:

$$M_{xI} + M_{xII} = M_o = p \frac{l^2}{2} \left(\frac{l}{4} - \frac{c}{\pi} \right) - \frac{\pi c^2}{8} p \left(\frac{c}{\pi} - \frac{2c}{3\pi} \right) \quad (5.9)$$

$$M_o = q \frac{l^3}{8} \left(1 - 1,27 \frac{c}{l} + 0,33 \frac{c^3}{l^3} \right) \quad (5.10)$$

$$M_o = \frac{Ql}{8} \left(1 - 1,27 \frac{c}{l} + 0,33 \frac{c^3}{l^3} \right) \quad (5.11)$$

que representa o momento estático total que atua em um pano de dimensão $l \times l$ no qual $Q = ql^2$. A fórmula pode ser substituída com suficiente aproximação pela seguinte:

$$M_o = \frac{Ql}{8} \left(1 - \frac{2c}{3l} \right)^2 \quad (5.12)$$

Essa expressão se utiliza para determinar o momento estático total que solicita um pano qualquer. Quando o pano não é simétrico, se substitui Q por $ql_x l_y$.

5.3 MÉTODO DOS PÓRTICOS EQUIVALENTES

O método empírico para o cálculo de lajes era o único permitido nos primeiros códigos do ACI, sendo aplicável somente para lajes com dimensões similares às que tinham sido construídas no início do século. Para a análise de lajes com diferentes dimensões, formas e carregamentos daquelas para as quais o método empírico era aplicável, lançou-se o método dos pórticos equivalentes.

Esse método consiste em representar a estrutura através de uma série de pórticos múltiplos – pórticos equivalentes. Os pórticos correspondentes às duas direções ortogonais recebem a totalidade da carga nas lajes, e então são calculados para as ações verticais aplicadas em suas áreas de influência, agindo no seu plano. Os pórticos são centrados nas linhas que unem os centros dos pilares e têm largura delimitada pelas linhas centrais dos painéis adjacentes.

A *Figura 5.8* ilustra uma laje cogumelo onde está destacada uma faixa de influência de um pórtico, formando o pórtico equivalente.

Para a análise das cargas verticais, pode-se admitir cada pórtico como apenas em um piso, com as extremidades dos pilares engastadas nos pavimento superior e inferior. Cada pórtico equivalente é composto por três partes:

- a) A faixa de laje horizontal, incluindo vigas, se existirem, na direção em que os momentos estão sendo calculados;
- b) Os pilares ou outros apoios verticais, acima e abaixo da laje;
- c) Elementos da estrutura que possibilitem a transferência de momentos entre as partes horizontal e vertical.

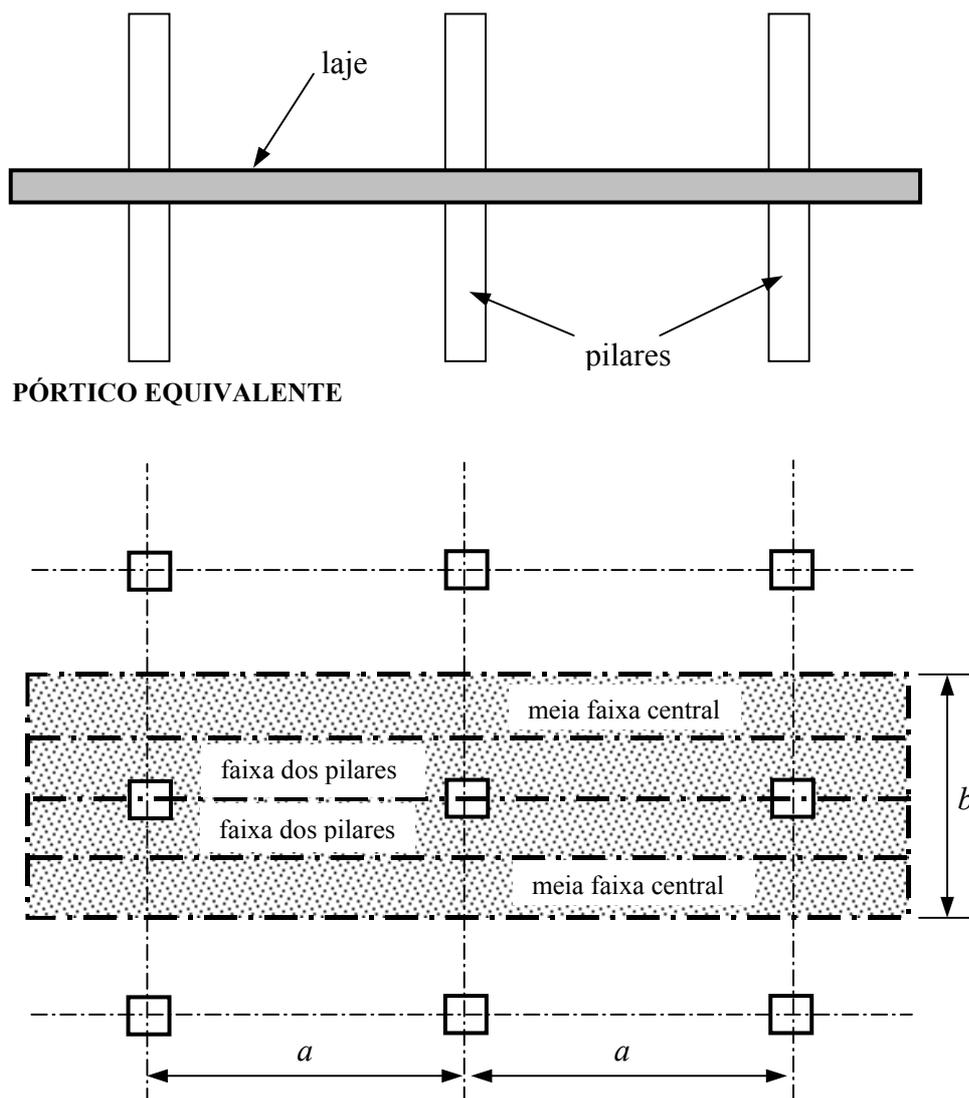


Figura 5.8 Pórtico equivalente em uma laje cogumelo.

Segundo Figueiredo (1989), se os elementos verticais forem paredes que abrangem toda a largura da faixa da laje, a ligação é total na transferência dos momentos entre a laje e a parede, e o pórtico equivalente deve ser tratado como um pórtico plano convencional. Por outro lado, se o apoio for um pilar ligado à laje apenas na sua dimensão, a capacidade em transferir os momentos é bastante pequena.

Para os casos intermediários, a eficácia na transmissão dos momentos é parcial, e sua flexibilidade deve ser considerada na análise do pórtico equivalente para ações

verticais ou gravitacionais. Esse procedimento é realizado admitindo-se os pilares vinculados à laje através de elementos de torção, transversais à direção em que os momentos estão sendo calculados; a rigidez da ligação é determinada considerando a rigidez desses elementos mais a dos pilares superior e inferior - rigidez do pilar equivalente.

Se o painel contiver uma viga na direção em que os momentos estão sendo calculados, o valor da rigidez do elemento de torção K_t , que é utilizado na determinação da rigidez do pilar equivalente, deve ser aumentado, devido à presença da viga, para K_{ta} , dada por:

$$K_{ta} = K_t \frac{I_{tv}}{I_t} \quad (5.13)$$

onde

I_t é o momento de inércia da porção da laje de largura b sem considerar a viga;

I_{tv} é o momento de inércia da seção composta pela laje, de largura b , mais a viga.

Os momentos de inércia das lajes, vigas e pilares devem ser determinados para a área total da seção transversal, e variações de seções ao longo das peças precisam ser consideradas. No caso de pilares com capitéis considera-se que o momento de inércia varie linearmente desde a base do capitel até a face interior da laje.

O código ACI admite que a sobrecarga acidental não deve superar $\frac{3}{4}$ da carga permanente, e que se considere como única hipótese de cálculo a carga total em todos os vãos. Nos casos em que não se cumpra essa condição, deve-se estudar, além da hipótese de carga total, as seguintes:

a) Carga permanente em todos os vãos e $\frac{3}{4}$ da sobrecarga em vãos alternados, para a determinação dos momentos positivos de referência;

b) Carga permanente em todos os vãos e $\frac{3}{4}$ da sobrecarga nos vãos adjacentes, para a determinação dos momentos negativos de referência;

A razão pela qual não é necessário aplicar o total da sobrecarga às hipóteses mais desfavoráveis de cálculo é que, não se apresentando todas as sobrecargas simultaneamente, sempre é possível uma certa redistribuição entre os momentos positivos e negativos.

Obtidos os momentos de referência positivos e negativos, pelo método direto ou dos pórticos equivalentes, é necessário reparti-los entre as faixas dos pilares e as faixas centrais.

Se a relação entre o comprimento a na direção em que se calculam os momentos, e a largura b normal à mesma, é menor ou igual a $\frac{4}{3}$ no pano considerado, os momentos se distribuem nas proporções indicadas na *Tabela 5.2*.

Por outro lado, quando a relação entre o comprimento a de um pano e a largura b do mesmo for superior a $\frac{4}{3}$, devem distinguir-se os seguintes casos:

a) Se for calculado na direção do lado maior, os momentos de referência se distribuirão entre as faixas distintas do vão, de acordo com a *Tabela 5.2*;

b) Se for calculado na direção do lado menor, com $a / b > \frac{4}{3}$, os momentos de referência se distribuem entre as faixas distintas, nas proporções indicadas na *Tabela 5.3*.

Quando a faixa de suporte apresenta viga, o momento da mesma deve-se repartir entre a placa e a viga, correspondendo a esta:

$$M_b = 0,85M_{faixa} \cdot \alpha_a \cdot \frac{b}{2a} \geq 0,85M_{faixa} \quad (5.14)$$

Tabela 5.2 Porcentagem de repartição dos momentos de referência entre as faixas distintas.

Para $a/b \leq 4/3$ e se calcula na direção de a	Faixas internas		Faixas externas (Momento negativo sobre o último apoio)	
	Momento negativo	Momento positivo	Caso A	Caso B
Faixa dos pilares	76	60	80	60
Faixa central	24	40	20	40
Faixa exterior (A)	38	30	40	30
Faixa exterior (B)	30	15	20	15

Caso A: Placa sem viga de bordo.

Caso B: Placa com parede no bordo, ou sobre apoios com vigas com altura maior ou igual a três vezes a espessura da placa.

Tabela 5.3 Porcentagem de repartição dos momentos de referência entre as faixas distintas.

Para $a/b > 4/3$ e se calcula na direção de a	Faixas internas		Faixas externas (Momento negativo sobre o último apoio)	
	Momento negativo	Momento positivo	Caso A	Caso B
Faixa dos pilares	66	50	73	50
Faixa central	34	50	27	50
Faixa exterior (A)	33	25	36	25
Faixa exterior (B)	16	12	18	12

Caso A: Placa sem viga de bordo.

Caso B: Placa com parede no bordo, ou sobre apoios com vigas com altura maior ou igual a três vezes a espessura da placa.

Se o cálculo dos esforços se faz pelo método direto, os esforços axiais nos pilares se determinam por áreas de influência, incrementando em 15% a carga do vão extremo, para levar em conta o efeito hiperestático. O momento fletor em um apoio extremo é igual ao momento negativo de referência MA . Nos apoios internos pode tomar-se o momento fletor:

$$M = \frac{0,08}{1 + \frac{1}{\alpha_{pe}}} \left[(g + 0,5 \cdot q) a_{e1}^2 - g \cdot a_{e2}^2 \right] \frac{b_1 + b_2}{2} \quad (5.15)$$

onde

α_{pe} é a rigidez relativa do pilar equivalente;

g e q são a carga permanente e a sobrecarga, respectivamente;

a_{e1} é o vão livre do maior dos vãos adjacentes;

a_{e2} é o vão livre do menor dos vãos adjacentes;

b_1 e b_2 são os vãos dos panos adjacentes a direção transversal.

Se o cálculo dos esforços é feito pelo método dos pórticos equivalentes, os esforços axiais e momentos fletores são obtidos diretamente, devendo-se tomar o cuidado especial com a carga axial nos pilares, pois a carga do pavimento é considerada duas vezes na análise dos pórticos (uma vez em cada direção); recomenda-se que seja tomada a média das forças obtidas em um pilar pertencente a dois pórticos, seja dividida por dois (CORLEY, 1983). Mesmo que um cálculo rigoroso exija dimensionar, a priori, todos os pilares à flexão oblíqua, é prática habitual dimensionar os interiores à compressão simples, sendo admissível para os casos de cargas verticais e vãos comportados. Nos pilares extremos é necessário dimensionar à flexão composta e, nos pilares dos cantos, à flexão oblíqua.

5.4 RECOMENDAÇÕES DA NBR 6118

As lajes apoiadas diretamente sobre os pilares serão calculadas em regime elástico ou rígido-plástico de acordo com os itens 3.3.2.1 e 3.3.2.2.

Quando os pilares estiverem dispostos em filas ortogonais e a espessura da laje respeitar o mínimo do item 6.1.1.1, será permitido calcular em regime elástico o conjunto laje-pilares como pórticos múltiplos, admitindo-se a laje dividida em duas séries ortogonais de vigas e considerando-se no cálculo de cada série o total das cargas. A distribuição dos momentos, ao se dividirem os painéis das lajes, com os cantos correspondendo aos pilares, em quatro faixas iguais, será feita do seguinte modo:

- 45% dos momentos positivos para as duas faixas internas
- 27,5% dos momentos positivos para cada uma das faixas externas
- 25% dos momentos negativos para as duas faixas internas
- 37,5% dos momentos negativos para cada uma das faixas externas

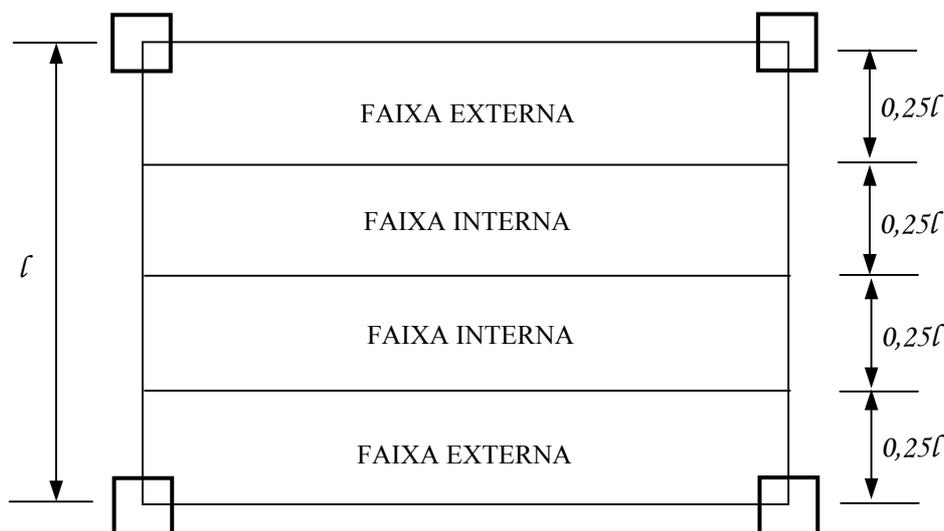


Figura 5.9 Divisão de um painel de laje cogumelo de acordo com a NBR6118.

5.5 SOLUÇÃO PROPOSTA POR SZILARD

Outra alternativa para a solução do problema é proposta por Szilard. O comportamento estrutural das lajes planas e placas pode ser idealizado admitindo-se que essas atuam como placas contínuas, apoiadas sobre linhas de colunas de rigidez à flexão desprezada. Além do mais, pode-se admitir que as reações na coluna são uniformemente distribuídas sobre uma pequena área. Se as dimensões da placa forem grandes em relação ao espaçamento entre as colunas (*Figura 5.10*), a simetria da configuração estrutural e carregamento reduz o problema da placa para análise no interior de um painel.

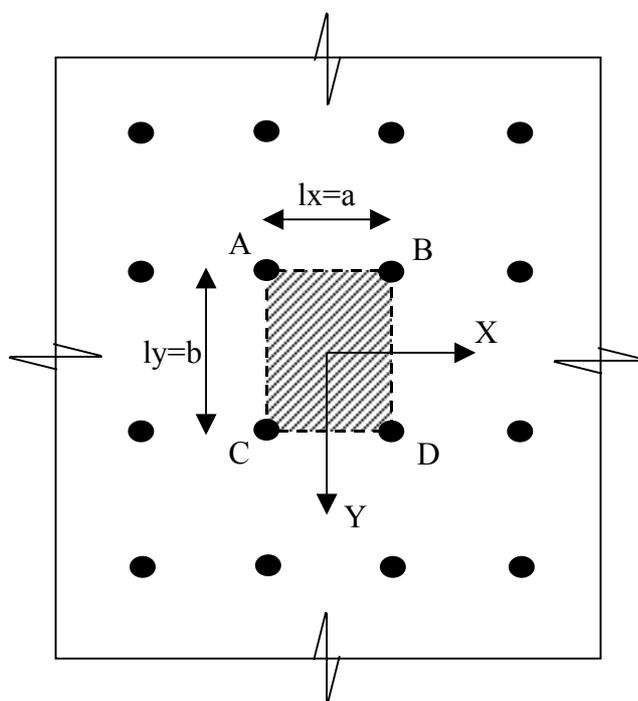


Figura 5.10 Laje plana apoiada sobre pilares (Szilard).

Além disso, a solução geral é obtida pela soma de uma solução particular ω_p com ω_h , a qual representa a solução da equação da placa homogênea (equação das placas); assim:

$$\omega(x, y) = \omega_P + \omega_H \quad (5.16)$$

A equação (5.16) deve satisfazer as condições de contorno no interior do painel. Essas condições de contorno na direção X são:

$$\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_{x=\pm a/2} = 0 \quad \text{e} \quad (q_x)_{x=\pm a/2} = \left(-D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega\right)_{x=\pm a/2} = 0 \quad (5.17)$$

As reações são zero para todos pontos ao longo da extremidade do painel, exceto para as proximidades do ponto de suporte. Equações similares podem ser escritas para os outros contornos do painel.

Para uma solução particular, a deflexão de uma placa uniformemente carregada, pode ser usada como:

$$\omega_P = \frac{p_0 b^4}{384D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 \quad (5.18)$$

Enquanto a solução da equação da placa homogênea ($\nabla^4 \omega$) pode ser escrita como:

$$\omega_H = A_0 + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(A_m \cos \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi y}{a} \quad (5.19)$$

Para a condição de contorno, $\delta\omega / \delta x = 0$ ao longo da extremidade AC e BD (Figura 5.10), obtém-se as constantes B_m . As condições de contorno para as reações, as quais são:

$$q_y = 0 \quad \text{para } 0 < x < \left(\frac{a}{2} - c\right) \quad (5.20)$$

$$\int_{a/2-c}^{a/2} q_y dx = -\frac{p_0 ab}{4} \quad (5.21)$$

Fornecem então as constantes A_m . Por isso, a equação (5.16) pode ser escrita na forma explícita, como se segue:

$$\omega(x, y) = \frac{p_0 b^4}{384D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right) + A_0 + \frac{p_0 a^3 b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2} \cos \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \sinh \alpha_m \tanh \alpha_m} \cdot \left[\tanh \alpha_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - (\alpha_m + \tanh \alpha_m) \cos \frac{m\pi y}{a} \right] \quad (5.22)$$

Para a condição a qual a deflexão é zero para os pontos A, B, C e D , tem-se:

$$A_0 = -\frac{p_0 a^3 b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha_m - \frac{\alpha_m + \tanh \alpha_m}{\tanh^2 \alpha_m} \right) \quad (5.23)$$

onde

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (5.24)$$

Se admitir-se que as reações são uniformemente distribuídas sobre uma área circular, então os momentos negativos sobre as colunas podem ser calculados por:

$$(m_x)_{x=a/2; y=b/2} = -\frac{p_0 ab}{4\pi} \cdot \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c^*} - (\alpha + \beta\nu) \right] \quad (5.25)$$

$$(m_y)_{x=a/2; y=b/2} = -\frac{p_0 ab}{4\pi} \cdot \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c^*} - (\beta + \alpha\nu) \right] \quad (5.26)$$

Onde c^* denota o raio de um círculo para uma seção transversal circular de área equivalente à da coluna. Na *Tabela 5.4* são dados os valores de α e β , coeficientes para o cálculo dos momentos no centro e as deflexões no centro para várias relações b/a .

Tabela 5.4 Coeficientes para deflexão e momentos para o interior de pilares de lajes planas (Szilard).

b/a	$(\omega)_{x=0,y=0}$	$(m_x)_{x=0,y=0}$	$(m_y)_{x=0,y=0}$	α	β
1,0	0,0670	0,0331	0,0331	0,811	0,811
1,1	0,0561	0,0316	0,0352	0,822	0,698
1,2	0,0494	0,0303	0,0363	0,829	0,588
1,3	0,0445	0,0296	0,0375	0,833	0,481
1,4	0,0412	0,0292	0,0384	0,835	0,374
1,4	0,0388	0,0294	0,0387	0,836	0,268
2,0	0,0336	0,0368	0,0411	0,838	-0,256
Fator multiplicador	$p_0 b^4 / Eh^3$	$p_0 a^2$	$p_0 b^2$	Coeficientes das equações 6.1 e 6.2	

As reações máximas nas colunas podem ser estimadas dividindo-se a carga total sobre a coluna pelo seu perímetro. O valor de pico do momento sobre o apoio, calculado pelas equações (5.25) e (5.26), pode ser reduzido se considerando a largura do capitel da coluna, como ilustrado na *Figura 5.11*.

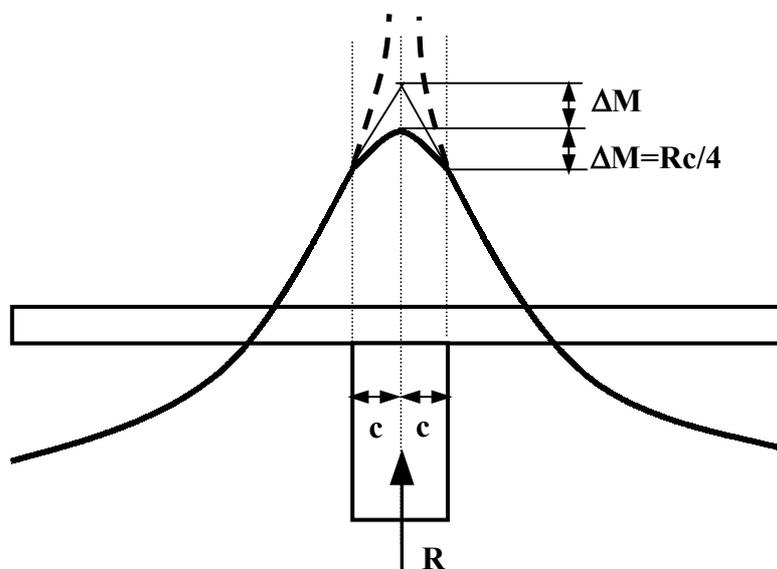


Figura 5.11 Correção no momento negativo no centro do pilar em função do momento na face, da reação de apoio e da dimensão do pilar (Szilard).

Pode-se concluir que, cargas uniformemente distribuídas sobre os panos produzem momentos negativos elevados sobre as colunas. Para esse carregamento, as extremidades da placa podem ser, além disso, consideradas como simplesmente apoiadas. Conseqüentemente, a Solução de Navier é aplicável.

Utilizando as equações (5.25) e (5.26) e com o auxílio de planilha eletrônica, foram determinados os valores de momentos negativos da laje sobre o pilar, para diferentes seções quadradas de pilares. No estudo foram adotadas lajes de 5x5 m, 10x10 m, 15x15 m e 20x20 m. Os momentos obtidos através das equações para o centro do pilar são corrigidos (momentos corrigidos) em função da carga sobre o pilar e da sua seção transversal. Tais momentos estão ilustrados na *Figura 5.12*.

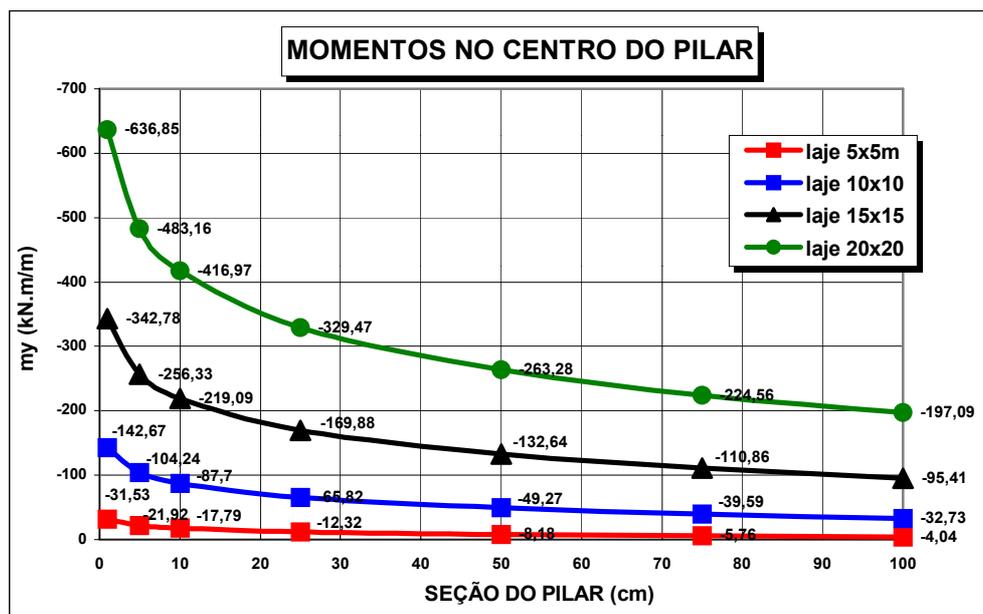


Figura 5.12 Valores de momentos sobre o pilar para diferentes dimensões de seção quadrada, aplicado em lajes de 5x5m até 20x20m.

A figura acima ilustra claramente o fato de que, conforme a seção do pilar diminui, os valores dos momentos negativos aumentam. Isso já havia sido concluído para a Teoria das Placas e nos modelos estudados em Elementos Finitos. Percebe-se também que, para as lajes com maior dimensão, onde os momentos são maiores, a tendência do momento de apresentar um valor infinito é maior.

As diferenças relativas percentuais nos valores encontrados para os momentos, comparados aos valores encontrados para o caso de carga concentrada utilizando a Teoria da Placas (Séries de Fourier), apresentam-se ilustrados na *Figura 5.13*.

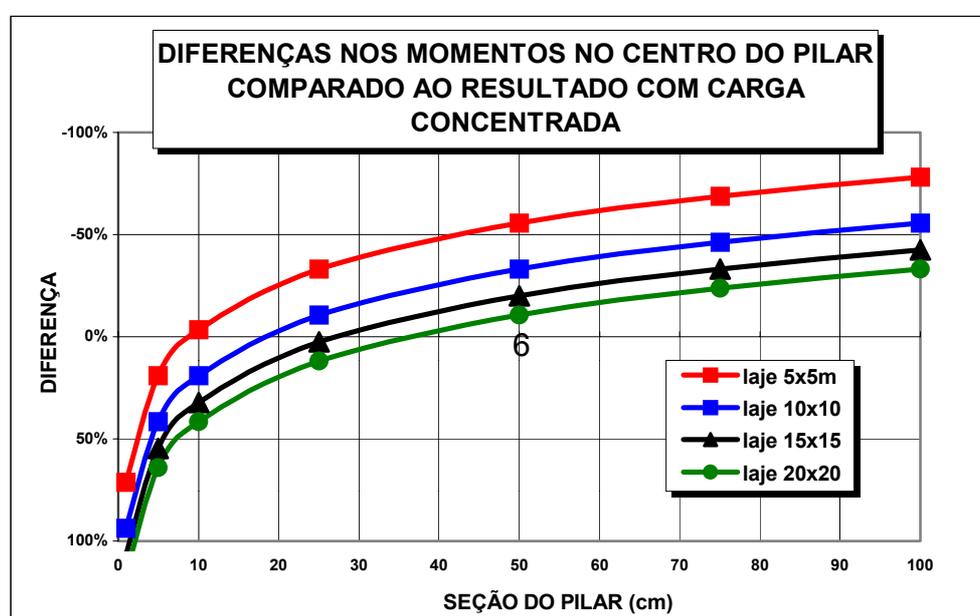


Figura 5.13 Diferença relativa percentual do valor do momento negativo no centro do pilar através da solução de Szilard, comparado ao obtido para carga concentrada através da Teoria das Placas.

6 APLICAÇÕES - ANALOGIA DE GRELHA

6.1 INTRODUÇÃO

Para o modelamento das lajes e cálculo com analogia de grelha utilizou-se os softwares MIX e AltoQI Eberick.

Ambos programas fornecem os esforços nas extremidades de cada barra da grelha. No MIX pode-se visualizar esforços através de saída gráfica ou de uma lista apresentada no vídeo. No AltoQI Eberick os esforços obtidos em cada barra são visualizados através da saída gráfica, a qual, por tratar-se de um programa de dimensionamento, apresenta melhor qualidade se comparada ao software anterior, mesmo porque o primeiro trabalha em ambiente DOS e o último em WINDOWS.

6.2 MODELOS ANALISADOS COM O PROGRAMA MIX

6.2.1 APLICAÇÃO DO PROGRAMA

Para a entrada de dados no programa MIX, deve-se escolher a opção *GRELHA*. Em seguida precisam ser definidas as posições dos nós e barras da grelha, as propriedades das barras, os graus de liberdade dos nós e o carregamento atuante na grelha. Posteriormente faz-se o processamento para a obtenção dos resultados.

Coordenadas: Para a entrada de dados primeiramente define-se os nós da grelha, os quais devem ser numerados e atribuídas coordenadas. As grelhas foram modeladas no plano xy , portanto a coordenada z de todos os nós é zero.

Incidências: Em seguida definem-se as incidências, ou barras, que são definidas de acordo com os nós aos quais estão vinculadas.

Propriedades: São definidas as propriedades do material das barras e as propriedades geométricas das mesmas. As propriedades do material a serem definidas

são o módulo de deformação longitudinal E , e módulo de deformação ao cisalhamento G . As propriedades do material a serem atribuídas são a inércia à flexão I , a inércia à torção Jt e a área da seção transversal A , sendo necessário atribuir valor a essa última propriedade, somente no caso de interesse de consideração de deformação devido ao cisalhamento. É importante salientar que cada barra deve representar uma “faixa” da placa devendo ter propriedades definidas de acordo com a malha.

Condições de apoio: O próximo passo é definir os graus de liberdade da estrutura nos apoios. Para o presente caso, considerou-se nos apoios a impossibilidade de deslocamento vertical, inclusive para o apoio central. Como citado anteriormente, a consideração do apoio central permitindo rotação livre da grelha é uma simplificação, válida para o caso simplificado de laje aqui estudado – com simetria de carregamento e geometria. Na realidade, em situações normais de projeto, onde há assimetria de carregamento e geometria das lajes, bem como nos pilares de bordo de edifícios, as lajes geram momentos fletores nos pilares, os quais devem ser fundamentalmente considerados.

Carregamento: O carregamento foi definido como uniformemente distribuído ao longo das barras da grelha, para o qual foi apresentada a solução que forneceu melhores resultados, principalmente se comparada à aplicação de carga concentrada nos nós. Para o caso de malha com espaçamento entre barras não uniforme, o carregamento deve ser considerado de acordo com a área representativa de cada barra.

Processamento: Terminada a entrada de dados faz-se o processamento, sendo que nessa etapa o programa faz a verificação de possíveis erros de concepção da grelha.

Impressão de resultados: a visualização dos resultados pode ser feita diretamente no vídeo, disponibilizando os deslocamentos nos nós, os esforços nas extremidades das barras e as reações de apoio.

6.2.2 RESULTADOS

As propriedades do material das barras para a modelagem da grelha são as mesmas citadas na *Tabela 3.1* (laje de referência).

O momento de inércia à flexão depende da malha da grelha, ficando esse definido em função do espaçamento b_g da malha (7.1).

$$I = \frac{b_g h^3}{12} = \frac{b_g 0,20^3}{12} = 0,0006667b_g \quad (7.1)$$

O momento de inércia a torção foi inicialmente adotado como sendo duas vezes o momento de inércia à flexão, de acordo com Montoya (1987).

$$J_t = 2I = 2 \cdot 0,0006667b_g = 0,001333b_g \quad (7.2)$$

As *Figuras 6.1*, *6.2* e *6.3* ilustram as malhas das grelhas utilizadas para o estudo. Não foram modeladas vigas no contorno, de modo que, a rigidez à torção das mesmas não influenciasse nos esforços e deslocamentos da laje, visto que, para os modelos anteriores, as lajes foram sempre modeladas como simplesmente apoiadas.

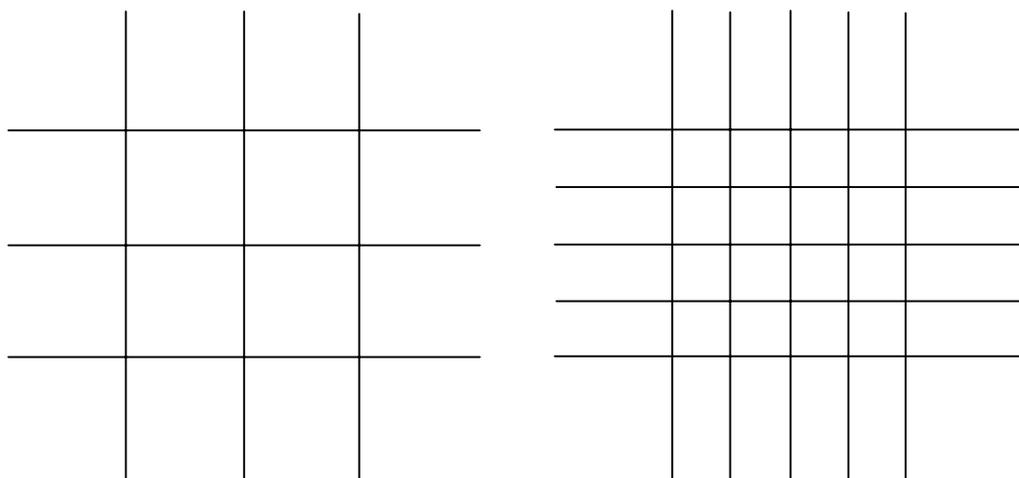


Figura 6.1 Malha 250x250cm sem refinamento (E) e com refinamento de 125x125cm (250ref125) nas faixas próximas ao pilar (D).

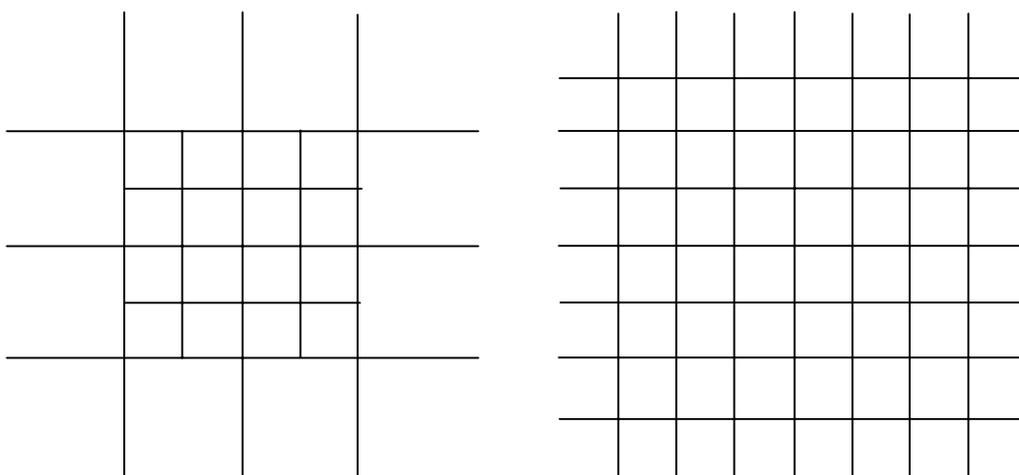


Figura 6.2 Malha 250x250cm (250pil125) com refinamento 125x125cm nas proximidades do pilar (E) e malha 125x125cm sem refinamento (D).

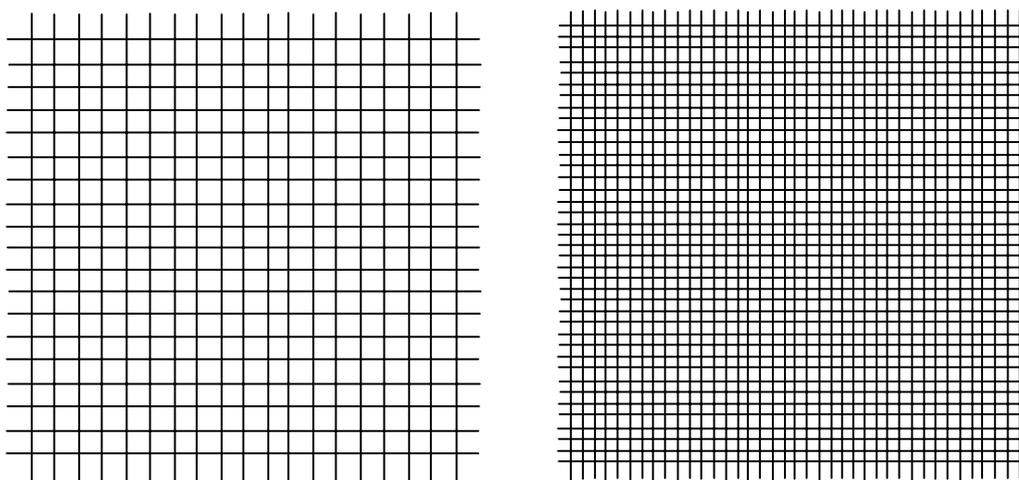


Figura 6.3 Malha 50x50cm (E) e malha 25x25cm (D), ambas sem refinamento.

Os esforços e deslocamentos obtidos para as malhas acima, modeladas no MIX, estão descritos na *Tabela 6.1*. Os valores da tabela estão ilustrados nas *Figuras 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7*. Para as *Figuras*, a malha 250ref125 é a malha 250x250 cm com refinamento nas faixas internas e a malha 250pil125 é a malha 250x250 cm com refinamento nas proximidades do pilar.

Tabela 6.1 Esforços e deslocamentos obtidos para diferentes malhas estudadas por Analogia de Grelha no software MIX.

Malha (cm)	Refinamento (cm)	Carga no pilar (kN)	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	$\delta_{\text{máx}}$ (cm)
250 x 250	-	412,50	38,20	-49,30	0,31
250 x 250	125	408,90	31,60	-74,40	0,35
250 x 250	125 (pilar)	427,00	43,50	-78,50	0,36
125 x 125	-	384,40	28,20	-69,00	0,29
50 x 50	-	358,50	22,00	-91,40	0,30
25 x 25	-	358,20	22,00	-112,80	0,28

O desenvolvimento dos momentos fletores m_y ao longo da linha média da laje ($y = 5$ m), para as malhas estudadas, pode ser visto na *Figura 6.8*.

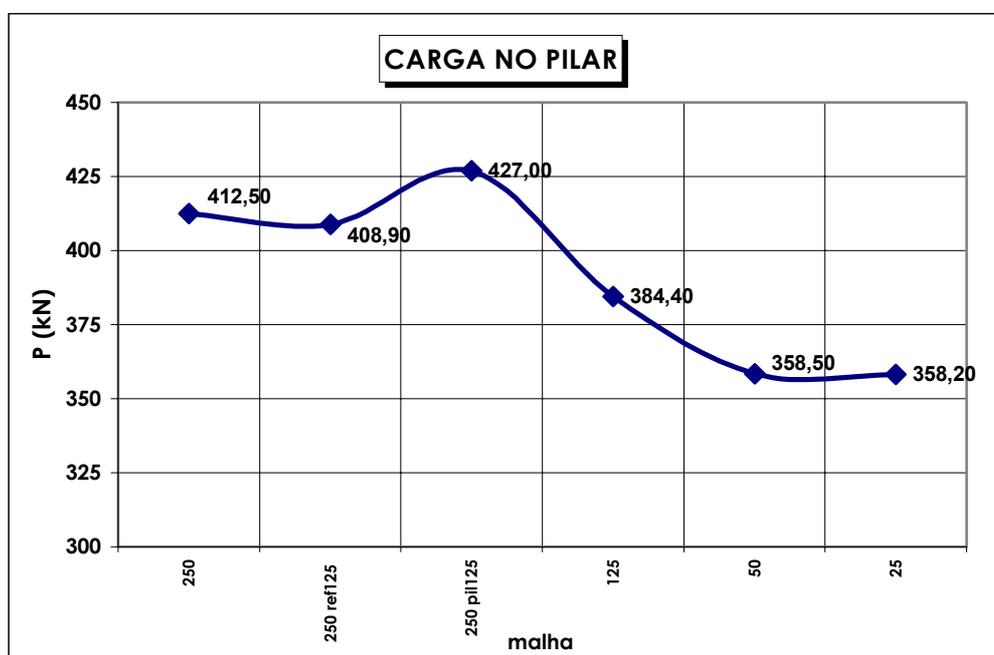


Figura 6.4 Carga no pilar central para diferentes malhas modeladas no MIX por Analogia de Grelha.

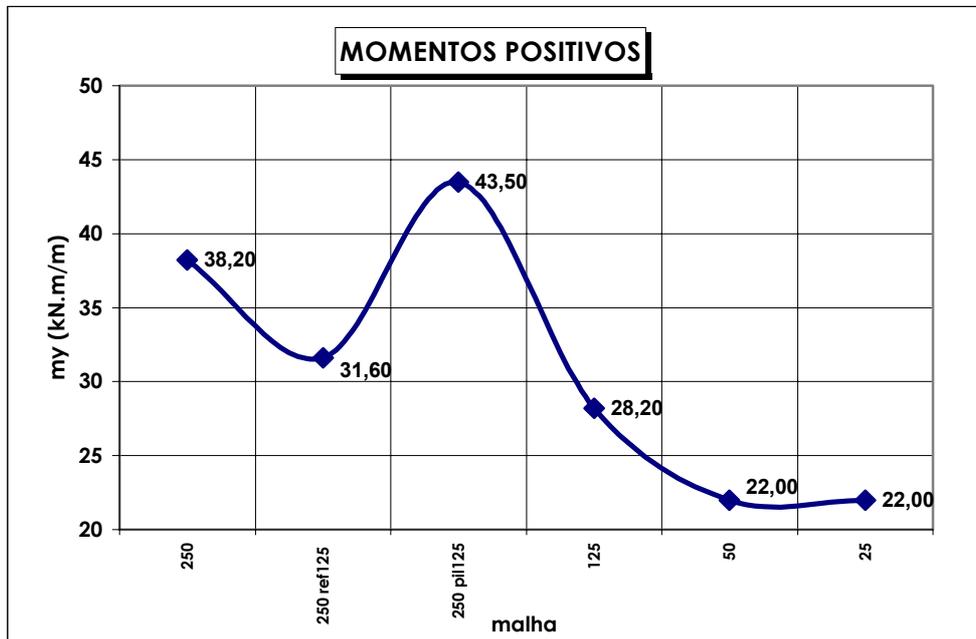


Figura 6.5 Momento positivo máximo para diferentes malhas modeladas no MIX por Analogia de Grelha.

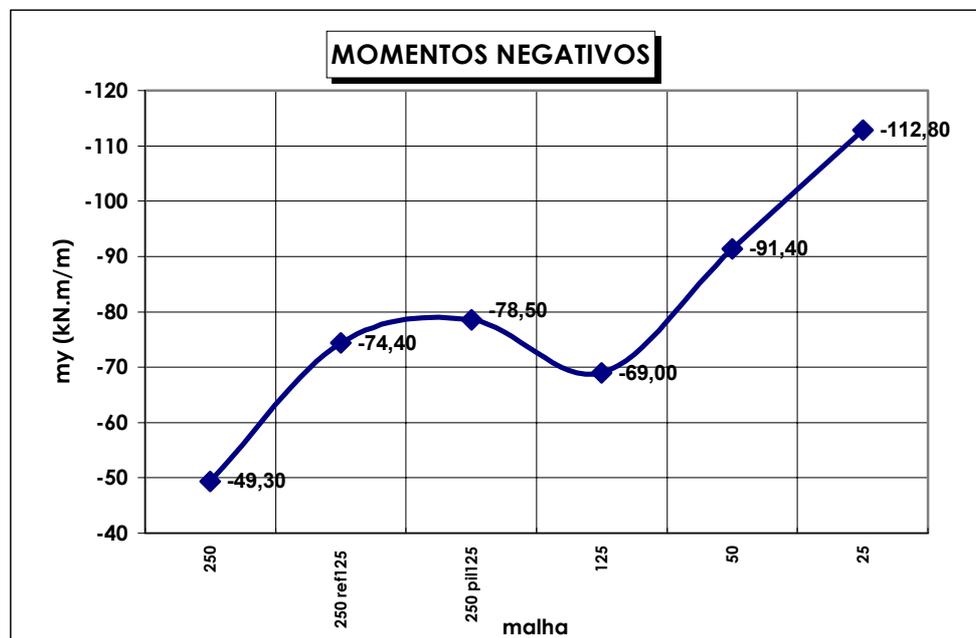


Figura 6.6 Momento negativo máximo para diferentes malhas modeladas no MIX por Analogia de Grelha.

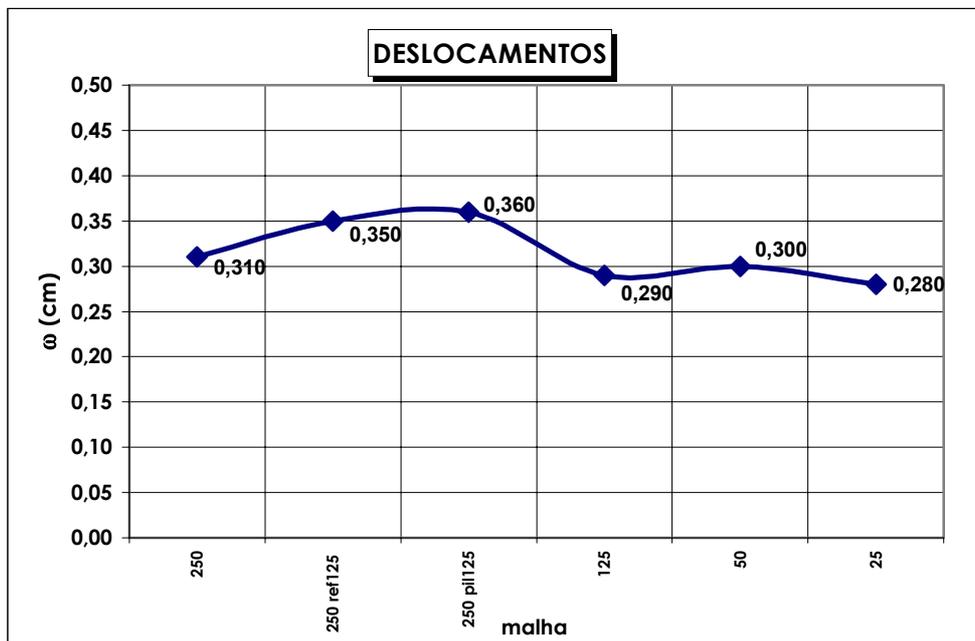


Figura 6.7 Deslocamento máximo para diferentes malhas modeladas no MIX por Analogia de Grelha.

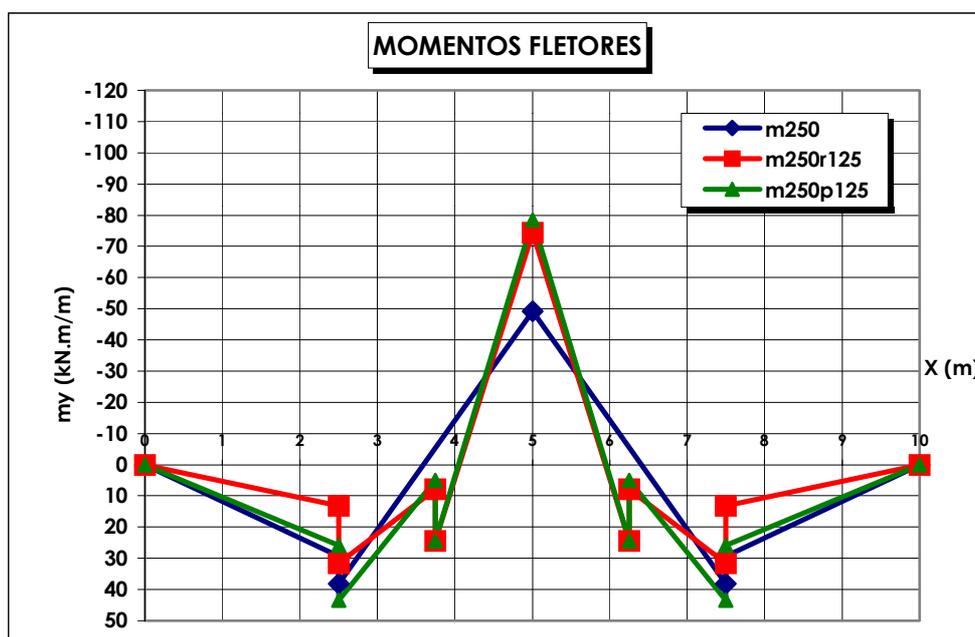


Figura 6.8 Momentos m_y ao longo da linha média da laje até o centro, para malhas de 250x250 cm sem e com refinamento.

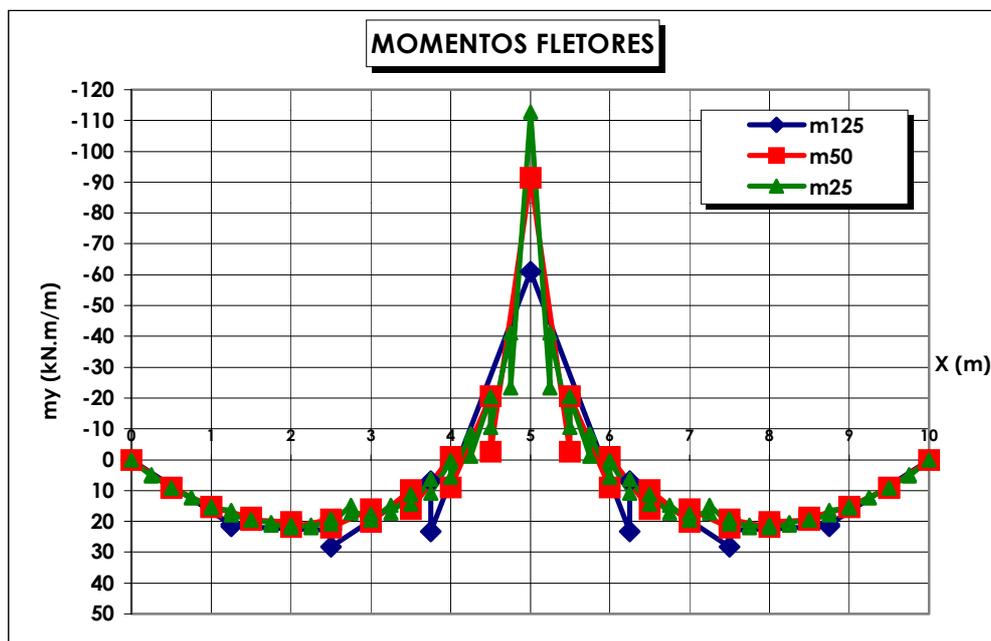


Figura 6.9 Momentos m_y ao longo da linha média da laje até o centro, para malhas de 125x125 cm, 50x50 cm e 25x25 cm sem refinamento.

6.2.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos para o processo de Analogia de Grelha apresentaram-se semelhantes aos obtidos para os estudos anteriores. Da mesma forma, os momentos negativos são os resultados menos confiáveis de serem obtidos diretamente, uma vez que não é considerada a dimensão da seção transversal do pilar, visto que nesse programa – o MIX, o pilar é modelado como um apoio pontual.

No caso da carga sobre o pilar, os valores obtidos são maiores para as malhas mais grosseiras, apresentando resultados inadequados para esses casos. Para malhas de 50x50 cm e 25x25 cm os resultados são muito próximos aos obtidos para outros métodos (Figura 6.4). Também se observa que, para as malhas citadas acima, os valores da carga sobre o pilar tendem a um valor constante.

De maneira análoga, os momentos positivos, conforme ilustra a Figura 6.5, apresentam resultados satisfatórios, comparando com a Teoria das Placas, para as

malhas 50x50 cm e 25x25 cm. Para as demais malhas os valores são maiores. Já para os deslocamentos, malhas de 125x125 cm ou menores apresentaram os melhores resultados, sendo que, para as malhas mais espaçadas os deslocamentos obtidos são maiores (*Figura 6.7*).

Para os momentos negativos, o refinamento da malha mostra um crescimento no valor do momento máximo, tendência também confirmada para refinamento nas proximidades do pilar, conforme ilustra a *Figura 6.6*. Nas *Figuras 6.8 e 6.9*, as quais mostram a evolução dos momentos fletores m_y ao longo da linha média da laje, pode-se facilmente observar que os momentos negativos crescem à medida que se vai refinando a malha da grelha. Tais resultados já haviam sido observados pela análise por Elementos Finitos, e ambos afirmam a tendência dos momentos de apresentarem valor infinito no centro do pilar, especialmente quando esse é modelado como um apoio pontual.

O refinamento somente nas proximidades do pilar não apresentou resultados satisfatórios, o que também ocorrera anteriormente naqueles modelos em Elementos Finitos em que não foi feita uma transição da malha, portanto, se tratando de um modelo inadequado (ver *Figura 4.2*).

6.3 MODELOS ANALISADOS COM O PROGRAMA ALTOQI EBERICK

6.3.1 APLICAÇÃO DO PROGRAMA

O ALTOQI Eberick é um programa para cálculo de estruturas de concreto armado, o qual permite que a estrutura seja calculada por pavimentos isolados ou como pórtico espacial.

Para o cálculo das lajes, os métodos disponíveis são o Método de Marcus, o Método de Ruptura ou o Método de Grelha. Para o cálculo das lajes como grelha, são fornecidos os momentos máximos – fletores e torsões, para os panos de lajes, sendo também possível visualizar os esforços nodais nas barras da grelha, através de visualização gráfica.

Como o programa não realiza, na versão disponível até o momento, o cálculo de lajes planas sem vigas, foram executadas diversas simulações para verificar a que melhor representa o modelo de uma laje plana sem vigas.

6.3.2 RESULTADOS

6.3.2.1 LAJE COM VIGAS DE RIGIDEZ EQUIVALENTE

O grande desafio em adotar vigas de rigidez equivalente foi determinar o lançamento correto de toda a estrutura – laje, vigas e pilares, de modo que esse modelo representasse da melhor forma possível a situação de lajes planas sem vigas. Tal lançamento não inclui somente a definição da seção dos elementos, mas também as vinculações dos mesmos, divisão das vigas em tramos, continuidades entre lajes, etc.

Foram modeladas lajes com vigas “chatas”, com altura igual a espessura da laje – no caso 20 cm, e a largura em função da malha da grelha para cada simulação – por exemplo, malha 50x50 cm, viga de 50x20 cm, unindo os pilares de contorno ao pilar central. Tais vigas foram modeladas como contínuas sobre o pilar central e rotuladas

junto às extremidades. Os quatro panos de lajes foram considerados contínuos entre si (Figura 6.10).

As propriedades das vigas de contorno, das lajes e do material – o concreto armado – foram as mesmas consideradas para os modelos estudados anteriormente (laje de referência). Para as vigas foi considerado carregamento negativo igual ao peso próprio das mesmas, de modo que, a carga da laje naquela faixa não fosse considerada duas vezes.

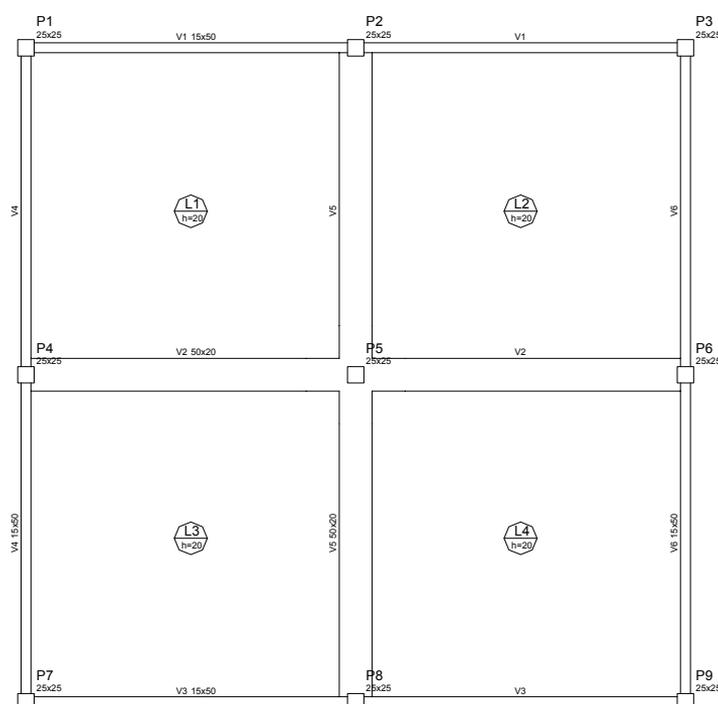


Figura 6.10 Planta de fôrmas do modelo rodado no AltoQI Eberick para simular laje plana.

Para as vigas “chatas”, foi necessário dividi-las em trechos, de modo que o carregamento aplicado pela laje sobre as mesmas tivesse uma melhor distribuição. A quantidade de trechos das vigas foi definida em função da malha em estudo. Por exemplo, para malha de 50x50 cm, os trechos das vigas apresentam tamanho de 50 cm,

ou seja, cada um dos 5,0 m da viga foi dividido em 10 partes. Para as malhas mais refinadas trechos menores, e para as menos refinadas, trechos maiores.

Os valores da carga no pilar central – P5, máximo momento positivo, máximo momento negativo e deformação máxima imediata, estão descritos na *Tabela 6.2* e são ilustrados nas *Figuras 6.12, 6.13, 6.14 e 6.15*.

Tabela 6.2 Valores da carga P no pilar, momentos fletores e deslocamento máximo para diversas malhas na laje e momentos máximos nas vigas chatas.

Malha (cm)	Carga no pilar (kN)	Momento positivo laje (kN.m/m)	Momento negativo laje (kN.m/m)	Momento positivo viga (kN.m/m)	Momento negativo viga (kN.m/m)	Flecha (cm)
100x100	348,90	20,50	-18,90	23,00	-59,90	0,295
75x75	346,50	22,00	-19,00	38,50	-97,30	0,325
50x50	340,80	23,80	-25,50	29,82	-94,20	0,330
25x25	344,50	24,60	-37,20	34,10	-134,30	0,335
10x10	352,50	24,60	-61,50	38,70	-198,40	0,325

Pelos resultados obtidos acima, e comparando-os aos modelos já estudados, conclui-se que, adotando-se vigas chatas para se modelar uma laje plana, os resultados em termos de esforços devem ser analisados considerando-se as lajes e vigas. Para os momentos positivos, os resultados de momentos obtidos para a laje são satisfatórios e se aproximam tanto da análise teórica como dos modelos em Elementos Finitos. Já para os momentos negativos, pode-se observar que os resultados para momentos nas lajes não são bons, uma vez que a malha da laje é dividida em função da posição das vigas. Considerando-se a grelha formada por lajes e vigas, percebe-se facilmente que o momento negativo máximo da laje sobre o pilar, para o modelo em estudo, é o momento

negativo da viga e não da laje (*Figura 6.11*). Nessa figura pode-se observar que a adoção de vigas chatas provoca um enrijecimento na sua posição.

Resumindo, os resultados obtidos do programa, e válidos para a laje são:

- Momento positivo = momento positivo máximo da laje;
- Momento negativo = momento negativo máximo da viga;
- Deslocamento = deslocamento máximo da laje.

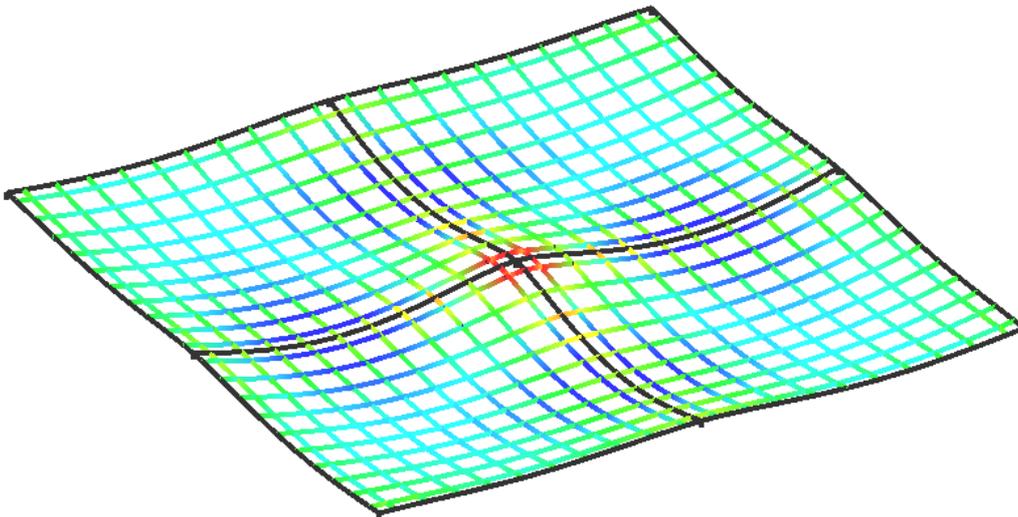


Figura 6.11 Configuração deformada da laje e momentos fletores nas barras da grelha com malha de 50x50 cm.

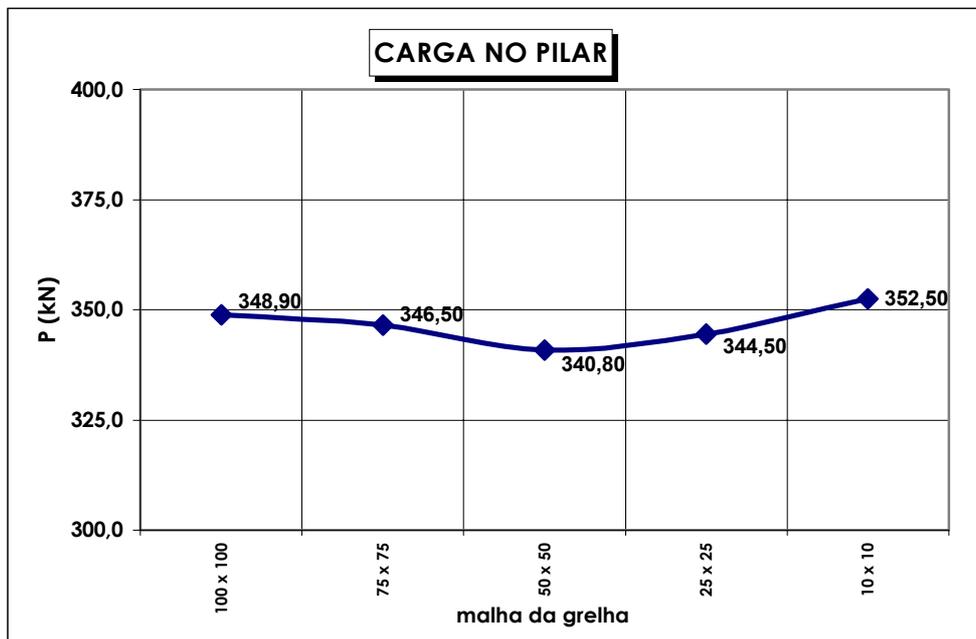


Figura 6.12 Carga no pilar para diferentes malhas de grelha modeladas no Eberick.

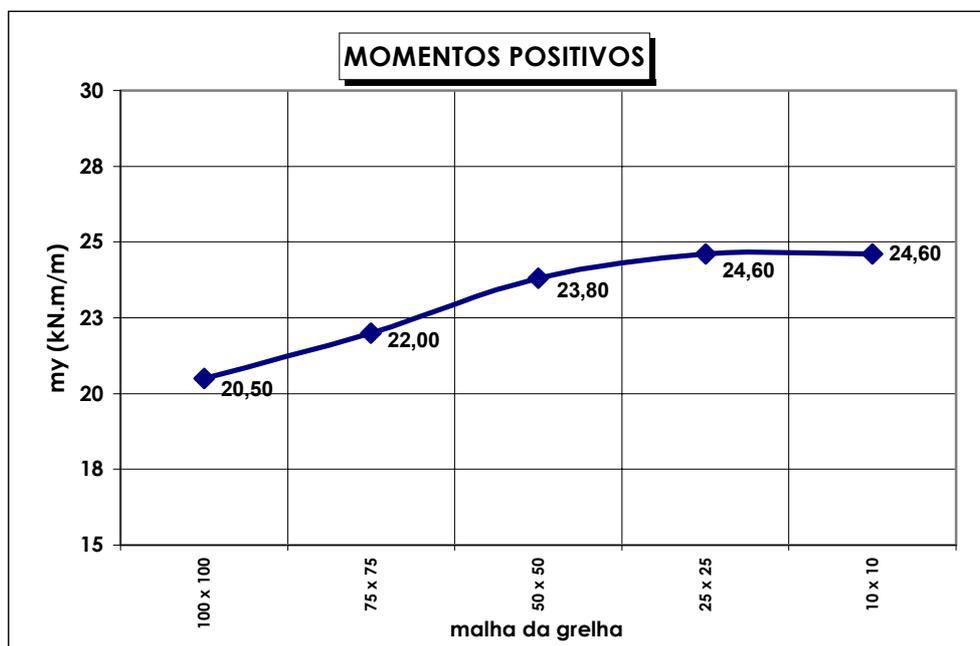


Figura 6.13 Momentos positivos para diferentes malhas de grelha modeladas no Eberick.

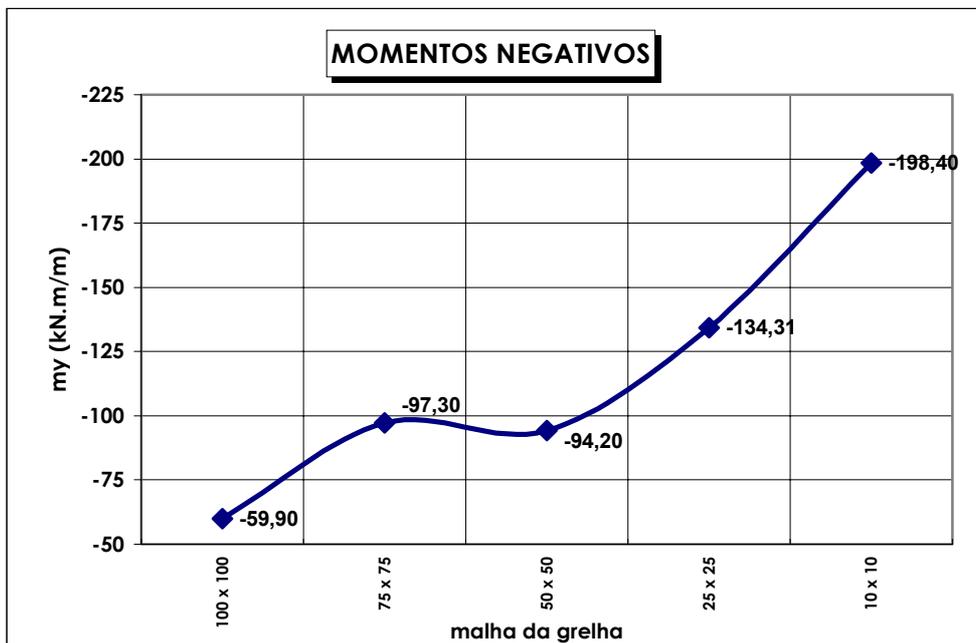


Figura 6.14 Momentos negativos para diferentes malhas de grelha modeladas no Eberick.

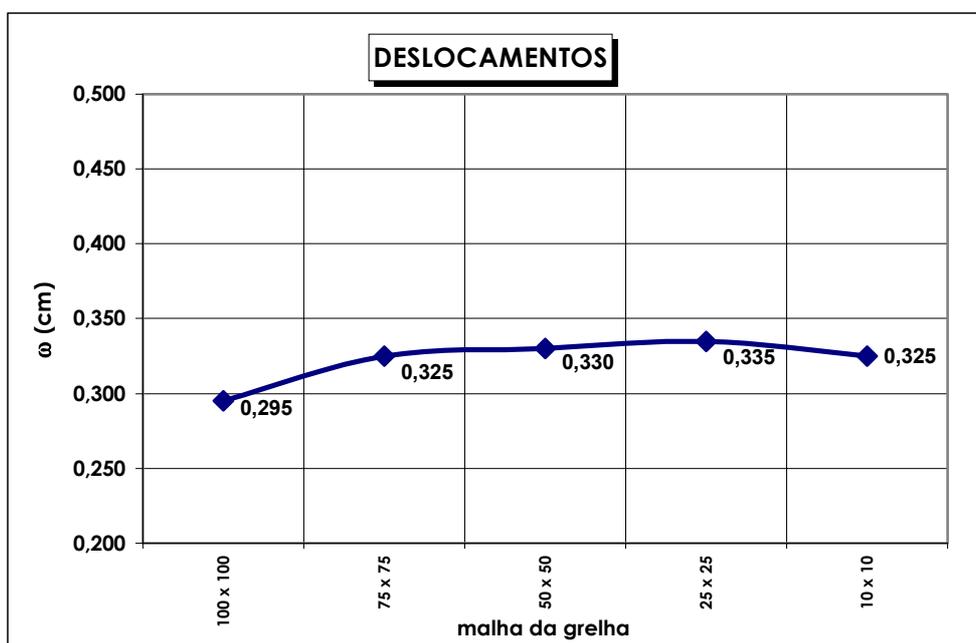


Figura 6.15 Deslocamentos para diferentes malhas de grelha modeladas no Eberick.

6.3.2.2 LAJE COM CARGA SIMULANDO O PILAR

Outro modelo feito no programa foi aplicado aproveitando a possibilidade de se lançar carga de parede diretamente sobre as lajes. A partir do valor da reação do pilar central P , obtida através da superposição de efeitos utilizando a Teoria da Elasticidade, foi feita uma analogia ao problema.

A carga P foi aplicada como carga de parede no centro da laje, ao longo do perímetro de um quadrado, de modo a simular o pilar. O carregamento da laje foi admitido como sendo negativo, logo os esforços e deslocamentos fornecidos teriam na verdade sinal contrário. A carga na laje foi adotada como sendo $-15,00 \text{ kN/m}^2$ ($10,00 \text{ kN/m}^2$ de carga, mais $5,00 \text{ kN/m}^2$ para anular o peso-próprio da laje), a qual apresentasse, portanto aplicada no sentido contrário à carga do pilar (*Figura 6.16*).

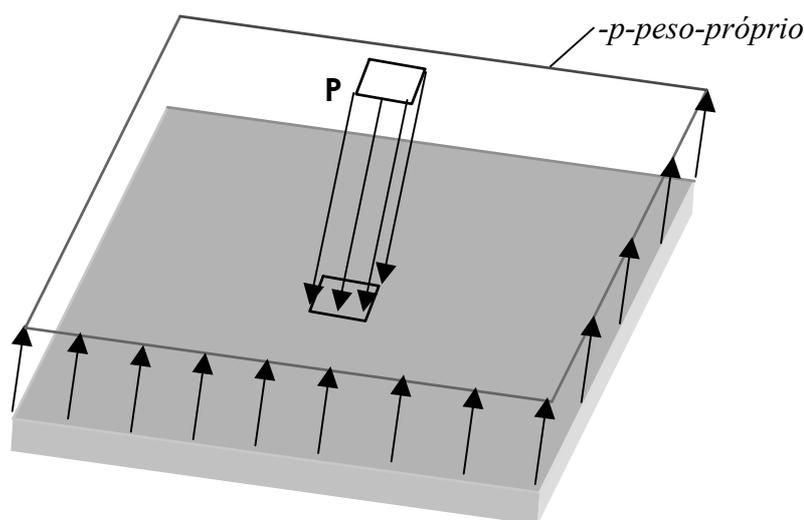


Figura 6.16 Carga de parede simulando o pilar, com carga negativa uniformemente distribuída na placa.

A diferença desse modelo para o anterior é que, nesse caso é preciso saber-se a reação do pilar. Por outro lado, com esse tipo de simulação foi possível se utilizar o

processo de Analogia de Grelha considerando-se, ainda que de maneira aproximada, as dimensões do pilar.

Como verificação desse modelo simulado, o deslocamento central na laje, no ponto de aplicação da carga simulando o pilar, deve ser nulo. Nesse modelamento, quando for definida a carga de parede, deve ser adotada aquela correspondente à dimensão de pilar equivalente, definida pela teoria da elasticidade. Ou seja, pilares de seção maior apresentam maior reação de apoio. Vale citar que, nesse modelamento, a carga de parede atua unicamente no perímetro do pilar, o que também é uma aproximação. A configuração da deformada da laje, para o modelamento feito, é ilustrada na *Figura 6.17*, onde também são definidos por cores os esforços nas barras da grelha.

Os esforços para o modelo descrito acima, para diferentes malhas de grelha e dimensões de carga (seção do pilar), estão descritos na *Tabela 6.3* e ilustrados nas *Figuras 6.18, 6.19, 6.20*.

Tabela 6.3 Esforços e deslocamentos em laje modelada como grelha com carga simulando o pilar, para diferentes malhas e seções de pilar.

Carga (cm)	Malha (cm)	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Flecha (cm)
1x1	100 x 100	27,65	-40,01	0,46
	75 x 75	25,02	-77,09	0,39
	50 x 50	25,15	-62,40	0,38
	25 x 25	24,03	-84,18	0,30
	12,5 x 12,5	23,53	-105,76	0,33
25x25	100 x 100	26,69	-45,60	0,38
	75 x 75	24,48	-81,43	0,29
	50 x 50	24,77	-65,77	0,32
	25 x 25	23,58	-88,26	0,30
	12,5 x 12,5	23,06	-84,38	0,28
50x50	100 x 100	27,62	-40,26	0,46
	75 x 75	24,98	-77,44	0,34
	50 x 50	25,12	-62,71	0,37
	25 x 25	23,87	-57,58	0,34
	12,5 x 12,5	23,36	-54,56	0,33
100x100	100 x 100	27,43	-41,70	0,43
	75 x 75	23,57	-27,64	0,35
	50 x 50	22,81	-22,36	0,34
	25 x 25	22,50	-25,71	0,32
	12,5 x 12,5	22,34	-28,20	0,31

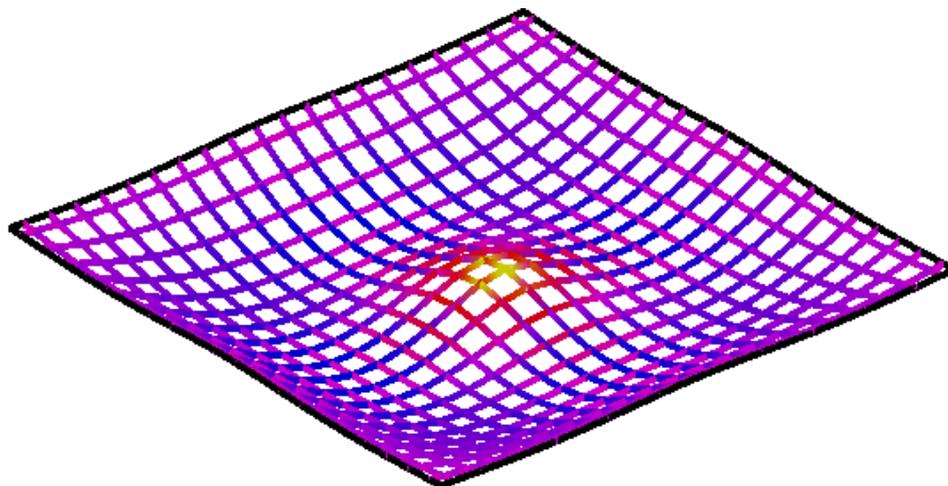


Figura 6.17 Configuração deformada da laje e momentos fletores nas barras da grelha com malha de 50x50cm, com pilar simulado como carga de parede.

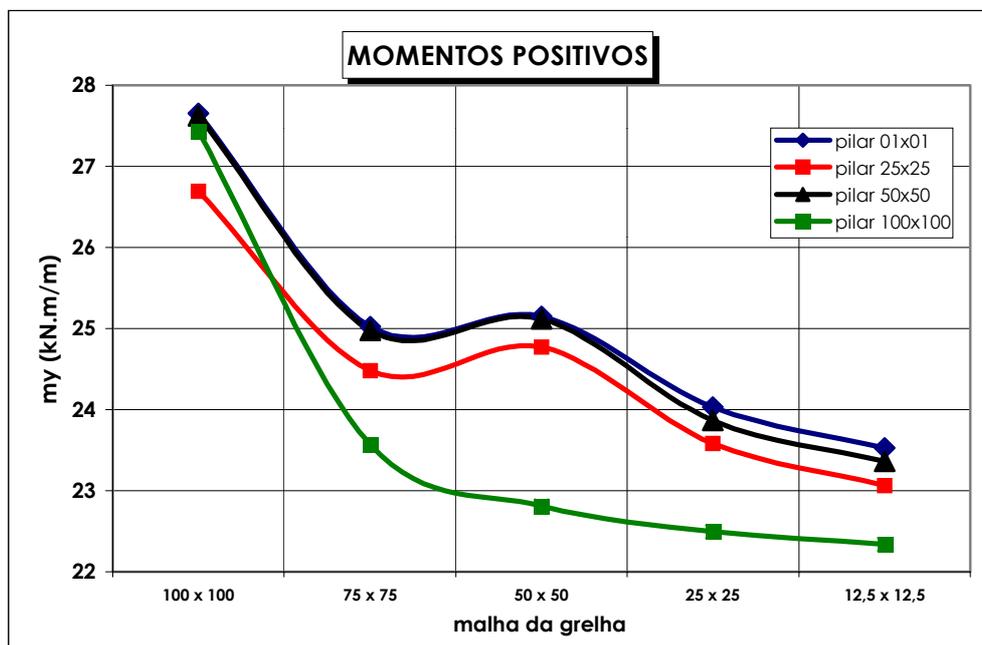


Figura 6.18 Momentos positivos para diferentes malhas e dimensões de pilar para modelos em grelha com pilar modelado como carga.

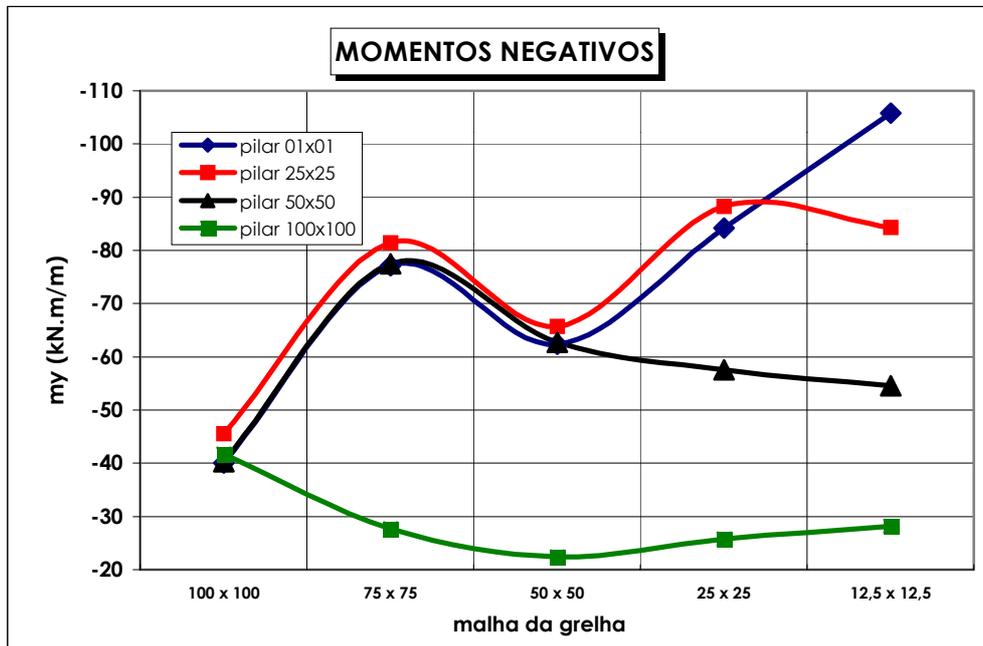


Figura 6.19 Momentos negativos para diferentes malhas e dimensões de pilar para modelos em grelha com pilar modelado como carga.

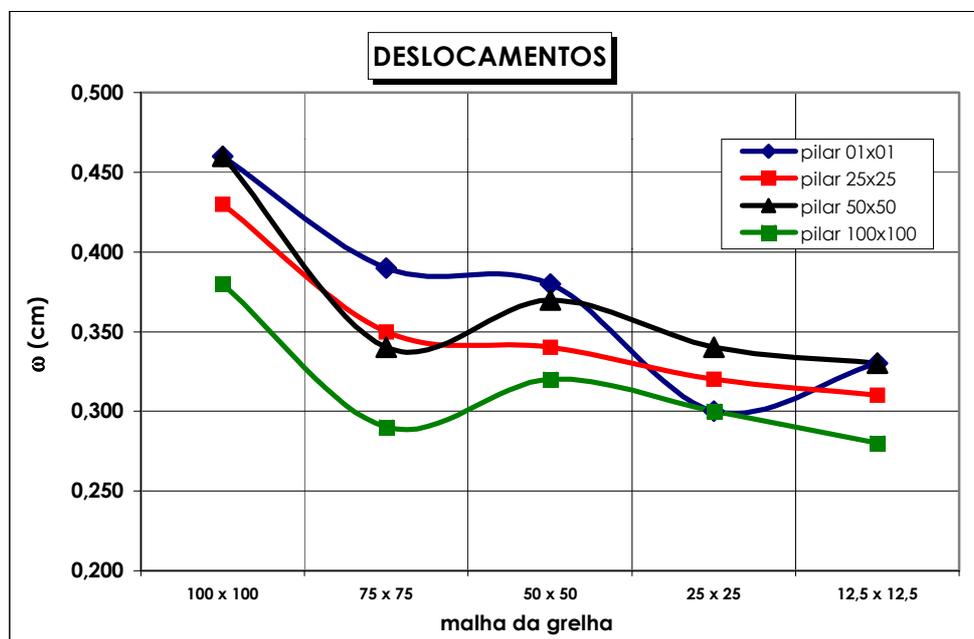


Figura 6.20 Deslocamentos para diferentes malhas e dimensões de pilar para modelos em grelha com pilar modelado como carga.

6.3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Com base nos resultados obtidos para a laje com vigas de rigidez equivalente, pode-se observar que, para os modelos em Analogia de Grelha, o comportamento das lajes foi semelhante aos modelos estudados pela Teoria das Placas e aos modelos em Elementos Finitos.

Quanto à carga no pilar, percebe-se que os valores variam pouco em função da malha (*Figura 6.12*), resultado que também foi visto para os modelos em Elementos Finitos. Para os momentos positivos pode-se concluir que os valores sofrem pequenos acréscimos a cada refinamento, no entanto tendem a se estabilizar a partir da malha de 50x50 cm, como mostra a *Figura 6.13*.

Os momentos negativos, como os demais exemplos em que os pilares foram modelados como um único apoio pontual, apresentaram valores que tendem a aumentar com o maior refinamento da malha (*Figura 6.14*).

Para os deslocamentos, analisando-se ainda o exemplo de laje com viga de rigidez equivalente, os valores obtidos são bons e são muito próximos para todas as malhas (*Figura 6.15*).

Analisando-se o exemplo de carga equivalente simulando o pilar, pode-se observar na *Figura 6.18* que os momentos positivos da laje reduzem com o aumento da seção do pilar, resultado esse já obtido tanto pela análise teórica através da Teoria das Placas como pelos modelos em Elementos Finitos nos quais o pilar foi modelado como elemento sólido. Os valores dos momentos positivos também são maiores para as malhas mais grosseiras, tendendo a se estabilizar para malhas mais refinadas.

Os momentos negativos não se apresentam valores próximos entre si, como ocorre com os positivos, mas também apresentam tendência para valores constantes nas malhas mais refinadas, como ilustra a *Figura 6.19*. Entretanto, esse comportamento só é observado para as seções de pilares 25x25 cm ou maiores, visto que, para seções muito pequenas, como também foi visto nos modelos em Elementos Finitos, os momentos

tendem a crescer com o maior refinamento. Pode-se observar o valor muito baixo de momento negativo para o pilar 100x100 cm, em virtude da simplificação adotada, onde a carga é aplicada somente no perímetro do pilar.

Os deslocamentos máximos se apresentaram maiores para as menores seções de pilares (*Figura 6.20*), o que já havia sido obtido também para outros modelos. Com o maior refinamento da malha os deslocamentos apresentaram uma pequena redução.

Comparando os dois modelos estudados no AltoQI Eberick, pode-se concluir que, para a carga no pilar, momentos positivos e deslocamentos, o modelo como laje com viga de rigidez equivalente apresenta-se confiável, fornecendo bons resultados. Para os momentos negativos, os valores apresentam a mesma tendência apresentada para os métodos estudados anteriormente, de crescerem com o refinamento da malha, em virtude do tipo de modelamento do pilar.

A vantagem desse modelo é a facilidade de sua montagem, rapidez na análise dos resultados e viabilidade das lajes serem analisadas em conjunto com todos os pilares do pavimento e com todos os pavimentos do edifício.

Por outro lado, o modelo com carga simulando o pilar apresenta valores um pouco melhores, inclusive com relação a momentos negativos, desde que a seção do pilar não tenha lado maior que 10% do vão entre o pilar e o bordo. Mas a aplicação do modelo na prática não é muito interessante, visto que a carga no pilar precisa ser conhecida, impossibilitando também a análise dos momentos introduzidos pela laje nos pilares, especialmente quando se tem assimetria geométrica e/ou de carregamento. Além disso, nesse modelo não é possível que uma estrutura seja analisada em conjunto – através de pórtico espacial com lajes modeladas como grelhas planas, por exemplo, especialmente para edifícios de múltiplos pavimentos.

7 COMPARAÇÃO ENTRE OS DIFERENTES MÉTODOS

7.1 INFLUÊNCIA DA MALHA

Inicialmente foi feito um estudo para verificar se o comportamento das lajes, de acordo com a malha adotada, apresenta semelhança entre os métodos de Elementos Finitos e Analogia de Grelha, esse último com resultados dos dois programas (MIX e AltoQI Eberick). Foram tomados os resultados para lajes cujo pilar foi modelado como um apoio pontual, visto que as diferentes malhas foram estudadas para esses casos. Os resultados são apresentados na *Tabela 7.1* e ilustrados nas *Figuras 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4*.

Tabela 7.1 Esforços e deslocamentos em laje modelada em Elementos Finitos e Analogia de Grelha, para diferentes malhas, com pilar modelado como um apoio pontual.

Método	Malha (cm)	Carga no pilar (kN)	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Flecha (cm)
Elementos Finitos	100	356,60	21,30	-86,20	0,275
	50	361,60	20,90	-111,50	0,285
	25	362,80	20,80	-136,70	0,285
	12,5	363,60	20,70	-160,30	0,285
Analogia de Grelha AltoQI Eberick	100	348,90	20,50	-59,90	0,295
	50	340,80	23,80	-94,20	0,330
	25	344,50	24,60	-134,31	0,335
	12,5	352,50	24,60	-198,40	0,325
Analogia de Grelha MIX	125	384,40	28,20	-69,00	0,290
	50	358,50	22,00	-91,40	0,300
	25	358,20	22,00	-112,80	0,280

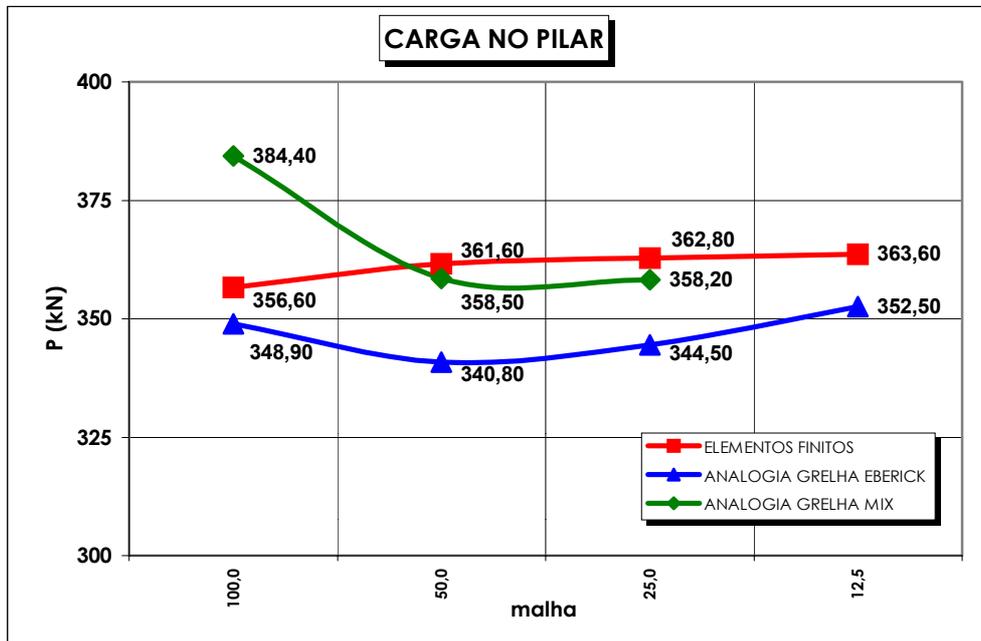


Figura 7.1 Carga no pilar para diferentes malhas, com pilar modelado como apoio pontual.

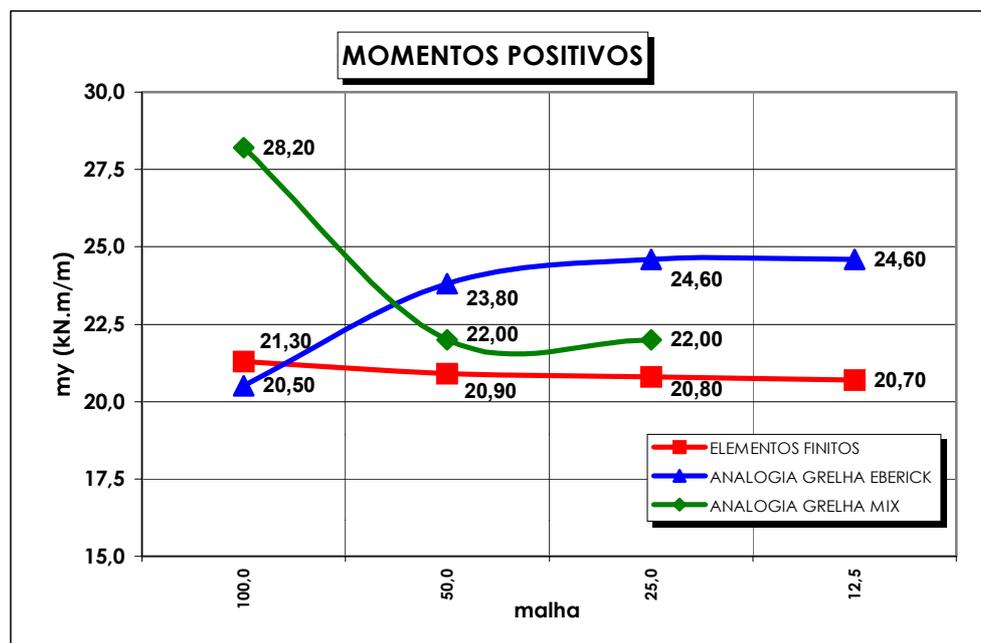


Figura 7.2 Momentos positivos para diferentes malhas, com pilar modelado como apoio pontual.

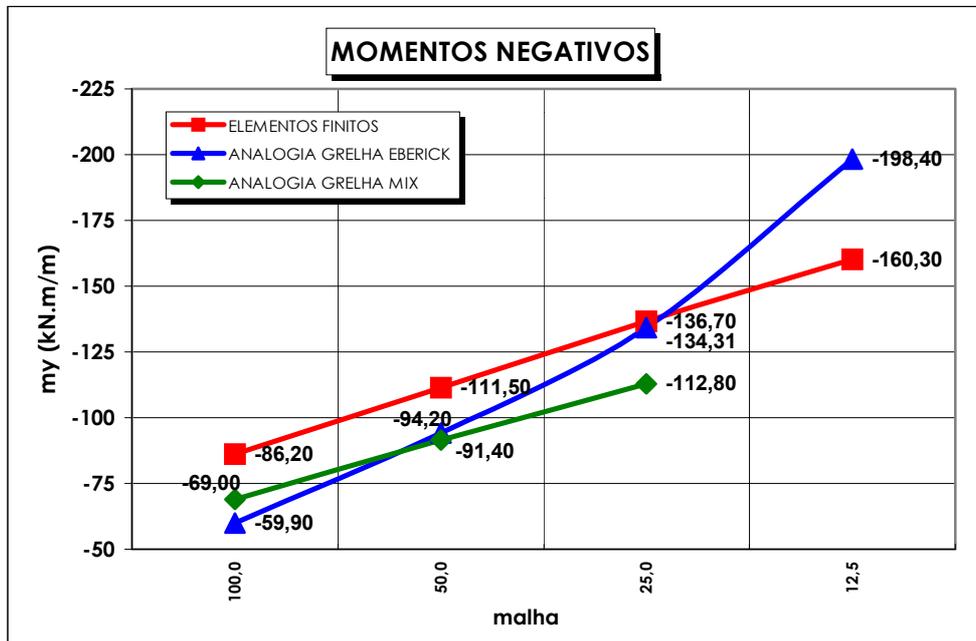


Figura 7.3 Momentos negativos para diferentes malhas, com pilar modelado como apoio pontual.

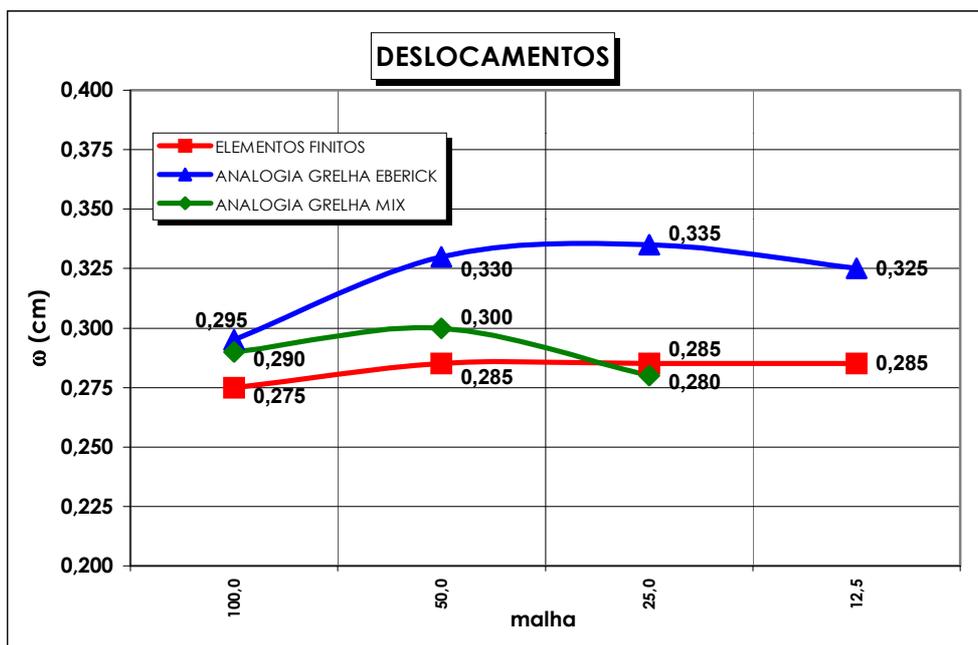


Figura 7.4 Deslocamentos para diferentes malhas, com pilar modelado como apoio pontual.

Observando as figuras acima, diversas conclusões podem ser tomadas. A carga no pilar (*Figura 7.1*), apresenta resultados bastante semelhantes para todas as malhas em Elementos Finitos. Já os modelos em Analogia de Grelha mostram resultados melhores a partir da malha 50x50 cm. A diferença na carga do pilar entre os dois modelos em Analogia de Grelha se deve ao fato que, para o exemplo estudado no AltoQI Eberick foram utilizadas vigas de rigidez equivalentes, as quais, conforme já citado, provocam um certo enrijecimento da faixa da laje onde passam.

Os momentos positivos apresentam valores que tendem para uma constante a partir da malha 50x50 cm, para as malhas mais refinadas (*Figura 7.2*). A Analogia de Grelha fornece valores de momentos mais conservadores que os modelos em Elementos Finitos. Os deslocamentos apresentam comportamento bastante semelhante, conforme indica a *Figura 7.4*, apresentando também nesse caso, o método de Analogia de Grelha valores mais conservadores.

Percebe-se que, em todos os gráficos, os valores em Analogia de Grelha modelados no MIX apresentam resultados mais próximos que os modelados em Elementos Finitos. Isso se deve ao fato citado anteriormente, da simplificação feita para a análise no AltoQI Eberick. Entretanto, os resultados ainda assim permanecem próximos.

Para ambos os métodos os momentos negativos têm a mesma tendência: aumentam de acordo com o maior refinamento da malha (*Figura 7.3*). Isso já havia sido observado anteriormente, inclusive que, refinando-se exclusivamente nas proximidades do pilar os momentos também aumentam.

De acordo com os resultados para ambos os métodos pode-se verificar que, malhas de 50x50 cm já apresentam resultados bons para a reação no pilar, momentos positivos e deslocamentos. Entretanto, para os momentos negativos, os resultados para pilar modelado como ponto único não são satisfatórios.

7.2 DIMENSÕES DO PILAR

Como já foi visto, as dimensões do pilar central influenciam nos esforços e até mesmo nos deslocamento das lajes planas. Para os modelos teóricos, a seção do pilar foi considerada fazendo-se uma carga uniformemente distribuída aplicada em um retângulo parcial. No Método dos Elementos Finitos foram modelados elementos sólidos com as dimensões dos pilares, de modo a melhor representá-los. Para os modelos em Analogia de Grelha foi feita uma simulação na qual, conhecida a carga do pilar, aplicou-se essa carga no sentido contrário ao carregamento da laje.

Os resultados obtidos para algumas seções de pilar e para os três métodos, estão descritos na *Tabela 7.2* e ilustrados nas *Figuras 7.5, 7.6, 7.7 e 7.8*. A seção do pilar definida como 0 (zero) representa o caso de carga concentrada. Para os modelos numéricos foram adotados os resultados obtidos para malha 50x50 cm.

Tabela 7.2 Esforços e deslocamentos em laje cogumelo, para algumas seções de pilar central.

Método	Seção do pilar (cm)	Carga no pilar (kN)	Momento positivo (kN.m/m)	Momento negativo (kN.m/m)	Flecha (cm)
Teoria das Placas	0	350,67	19,40	-73,61	0,240
	25x25	351,17	19,37	-69,51	0,238
	50x50	352,44	19,29	-59,73	0,236
	100x100	357,24	18,93	-40,40	0,227
Elementos Finitos	0	361,60	20,90	-111,50	0,285
	25x25	363,40	20,80	-82,30	0,283
	50x50	373,70	20,40	-63,70	0,268
	100x100	408,80	18,70	-49,80	0,230
Analogia de Grelha	0	359,40	24,30	-112,40	0,340
	25x25	351,17	24,77	-65,77	0,340
	50x50	352,44	25,12	-62,71	0,370
	100x100	357,24	22,81	-22,36	0,320

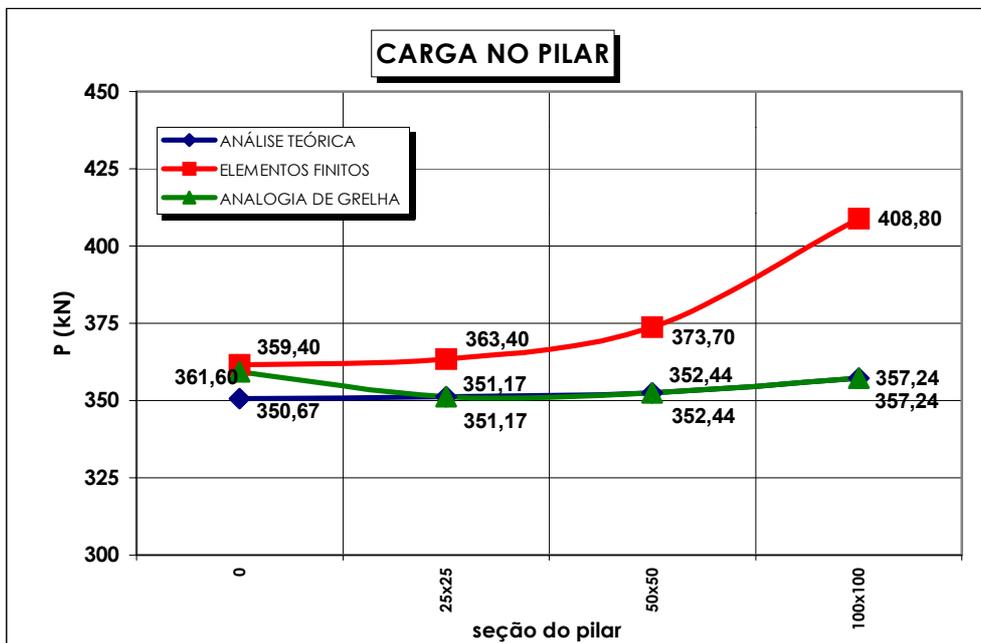


Figura 7.5 Carga no pilar para diferentes seções de pilar.

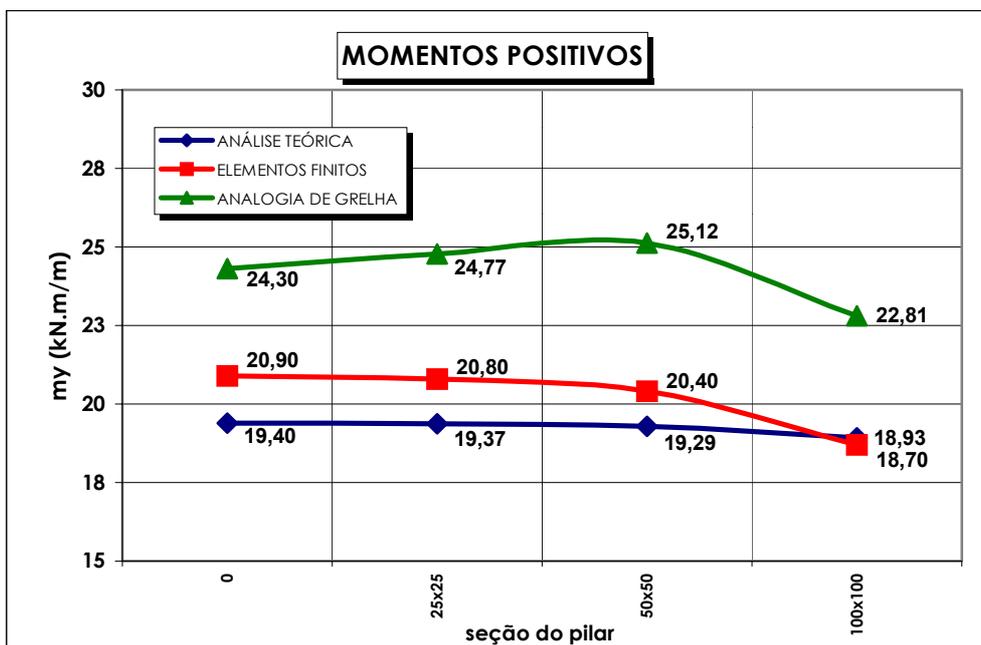


Figura 7.6 Momentos positivos para diferentes seções de pilar.

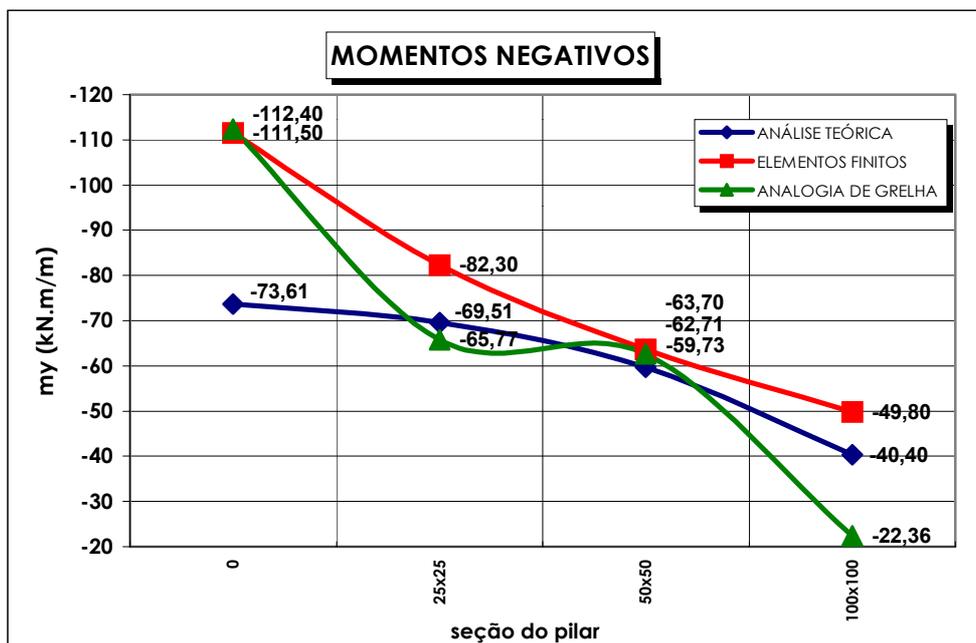


Figura 7.7 Momentos negativos para diferentes seções de pilar.

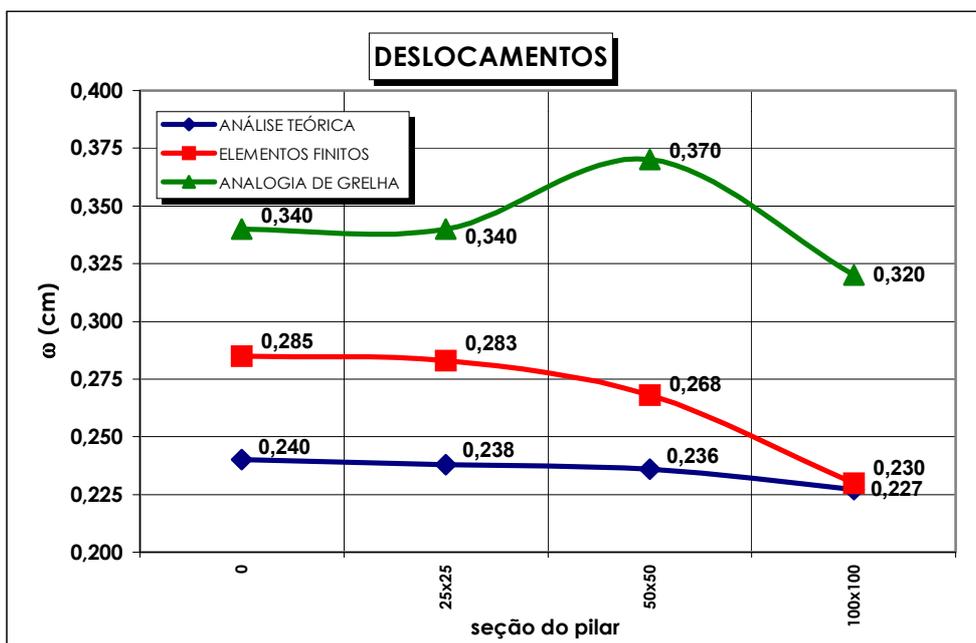


Figura 7.8 Deslocamentos para diferentes seções de pilar.

A carga no pilar apresentada pelos modelos em Analogia de Grelha foi retirada dos modelos teóricos, como ilustra a *Figura 7.5*, de modo que essa carga foi simulada como sendo o pilar. Os modelos em Elementos Finitos apresentaram cargas um pouco maiores, especialmente para o pilar de 100x100 cm.

Os momentos positivos para os modelos teóricos e de Elementos Finitos ficaram muito próximos, enquanto o modelo de Analogia de Grelha apresentou, como visto anteriormente no estudo da malha, resultados mais conservadores (*Figura 7.6*). Para os deslocamentos, ilustrados na *Figura 7.8*, o comportamento para os três modelos foi análogo ao que ocorreu para os momentos positivos.

Já os momentos negativos, conforme a *Figura 7.7*, reduzem em todos os métodos com o aumento da seção do pilar.

De acordo com os resultados, pode-se concluir que, quando as dimensões do pilar são consideradas no modelamento da laje, e adota-se uma malha adequada – malhas da ordem de 1/10 do vão da laje se comportaram melhor, os esforços e deslocamentos, utilizando-se qualquer modelo, apresentam bons resultados.

Em todos os modelos, a Analogia de Grelha mostrou resultados mais a favor da segurança que os demais métodos. Por outro lado, a Teoria das Placas forneceu valores menores, muito embora a diferença entre os resultados não tenha sido grande.

No trabalho não são feitas comparações com as recomendações feitas pelas normas e códigos, visto que, o objetivo é comparar esforços e deslocamentos em serviço, e não valores para dimensionamento.

8 TÓPICOS ESPECIAIS

8.1 INTRODUÇÃO

Os estudos até o momento se concentraram na laje de referência, para a qual foram feitos modelos utilizando a Teoria das Placas ou análise elástica, modelos em Elementos Finitos e Modelos em Analogia de Grelha. Para esses modelos foram estudados as malhas, as dimensões dos pilares e o modelo do pilar, bem como a influência desses parâmetros nos esforços e deslocamentos das lajes. Entretanto, a solução da laje de referência é um modelo ideal, no qual há simetria geométrica e de carregamento da laje.

Até agora foi também adotada a simplificação de que os bordos das lajes são indeslocáveis. Na verdade para os exemplos numéricos foram adotadas vigas de rigidez tal que, os esforços e deslocamentos na laje não fossem influenciados e esses resultados pudessem ser comparados aos modelos teóricos.

8.2 PISO DE EDIFÍCIO

Os resultados obtidos para o modelo simplificado são importantes, mas necessitam ser convenientemente extrapolados para os casos de pisos reais de edifícios, onde há uma determinada quantidade de fileiras de pilares, os quais nem sempre estão alinhados.

Outrossim, os carregamentos aplicados nos panos entre os pilares nem sempre são os mesmos. Essa diferença de geometria e carregamento implica em momentos fletores nos pilares, os quais, em algumas recomendações, são erroneamente desprezadas para os pilares centrais. No presente trabalho, a ligação laje-pilar não foi objeto de estudo, mas vale citar que para um modelo que analise a estrutura espacial, tal ligação merece atenção especial.

Foi modelado um piso de 15,0 x 20,0 metros, com fileiras de pilares espaçadas a cada 5,0 metros nas duas direções (*Figura 8.1*). Nesse estudo não foram adotadas vigas no bordo da laje. A influência da presença de vigas em lajes planas pode ser vista no *item 8.3*.

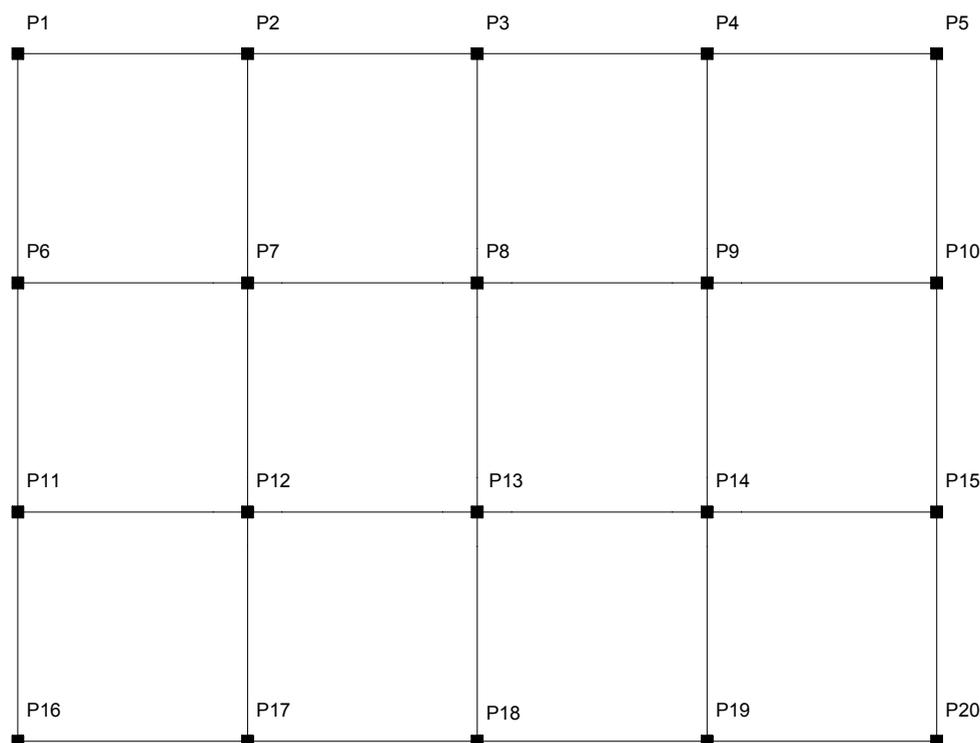


Figura 8.1 Modelo de piso de edifício.

Estudou-se o modelo acima em Elementos Finitos e Analogia de Grelha. Para os dois métodos foram adotadas malhas de 50x50 cm, visto que foram as que apresentaram melhores resultados com baixo custo de processamento para os exemplos da laje de referência. Visto que, para o modelo em Analogia de Grelha o pilar é modelado como um apoio pontual, optou-se para o modelo em Elementos Finitos em simular o pilar também como um apoio pontual, de modo que os resultados pudessem ser comparados com base em modelos próximos. Outrossim, os programas de engenharia de cálculo

estrutural também utilizam em geral o pilar modelado como ponto. Resultados para pilares modelados como elemento sólido, para a laje de referência, podem ser vistos no item 5.3.2.

Embora o exemplo de piso de edifício do presente trabalho seja um modelo ideal e simplificado, o que se pretende é mostrar o comportamento dos dois métodos para exemplos de panos contínuos.

A Tabela 8.1 descreve alguns resultados obtidos para os dois modelos.

Tabela 8.1 Resultados obtidos para o piso de edifício.

Método	Carga no pilar P7 (kN)	Momento positivo máximo (kN.m/m)	Momento negativo máximo (kN.m/m)	Flecha (cm)
Elementos Finitos	306,40	23,60	-94,00	0,486
Analogia de Grelha	335,20	25,00	-125,80	0,420

Com base nos valores acima, as conclusões tomadas para a laje de referência também podem ser aplicadas. A carga nos pilares, momentos positivos e deslocamentos são razoavelmente próximos para os dois métodos, apresentando diferenças em função da formulação do próprio método, das considerações no modelamento e das próprias malhas adotadas. Para o modelo em Elementos Finitos são utilizados elementos shell, e para Analogia de Grelha são utilizadas barras, inclusive com barras ligando os pilares.

A deformada para a laje modelada em Elementos Finitos, ilustrando os momentos fletores máximos, pode ser observada na Figura 8.2. A figura 8.3 ilustra o piso modelado em Analogia de Grelha, mostrando os momentos fletores nas barras que formam a grelha. Nesse último pode-se notar as barras (vigas chatas) utilizadas como equivalência aos trechos entre os pilares.

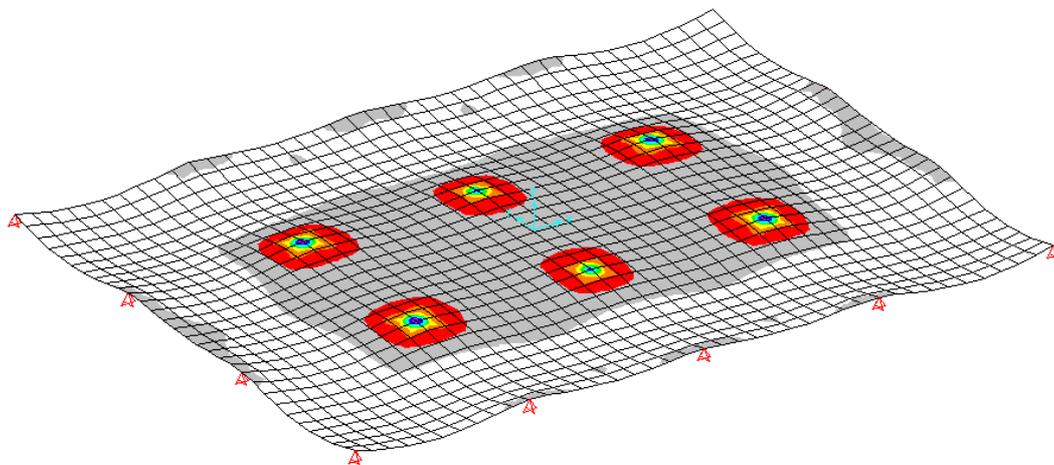


Figura 8.2 Deformada do piso do edifício, modelado em Elementos Finitos, com os momentos máximos atuantes na laje.

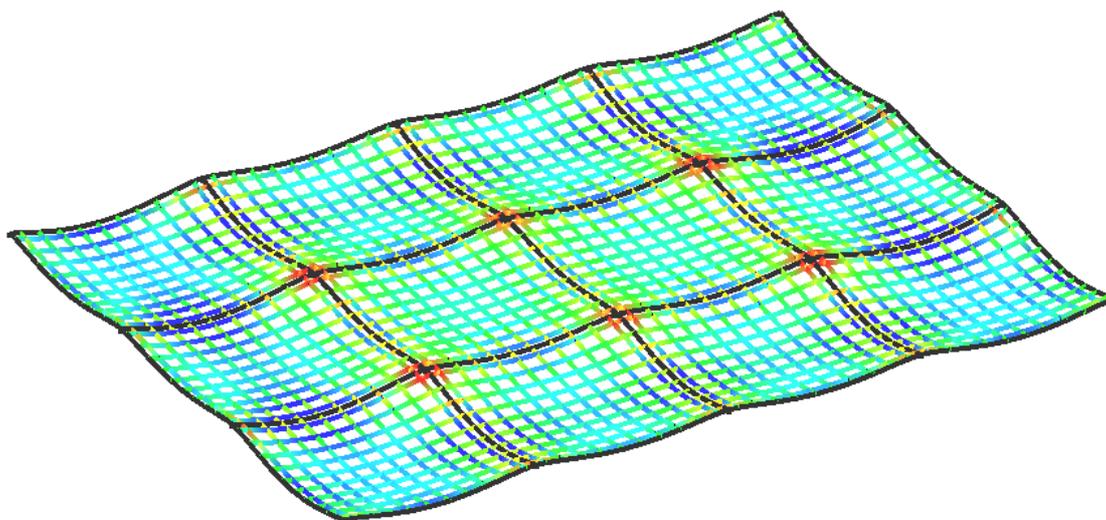


Figura 8.3 Deformada do piso do edifício, modelado em Analogia de Grelha, com os momentos atuantes nas barras da grelha.

Observa-se que, em ambos os casos os picos de momentos negativos crescem rapidamente muito próximo aos pilares gerando, portanto, valores muito elevados.

8.3 VIGAS DE BORDO

A adoção de vigas de bordo em lajes cogumelo é um procedimento comum, especialmente para os casos de edifícios de múltiplos pavimentos, nos quais essas vigas garantem um maior travamento nos pilares, melhorando a estabilidade global da edificação. Outro motivo pelo qual são adotadas vigas de bordo é reduzir os deslocamentos nas lajes, visto que, os panos extremos são os mais críticos para flechas, em virtude de não apresentarem continuidade com outros panos.

Para o estudo da influência das vigas de contorno nas lajes planas, adotou-se a laje de referência e fez-se uma variação na seção da viga, mais precisamente na sua altura. Foram modeladas lajes sem vigas de bordo, até vigas de grande inércia (15x100).

Os resultados obtidos estão ilustrados nas *Figuras 8.4, 8.5, 8.6 e 8.7*, para modelos em Analogia de Grelha utilizando o AltoQI Eberick e Elementos Finitos, tanto para pilar modelado como ponto como para elemento sólido.

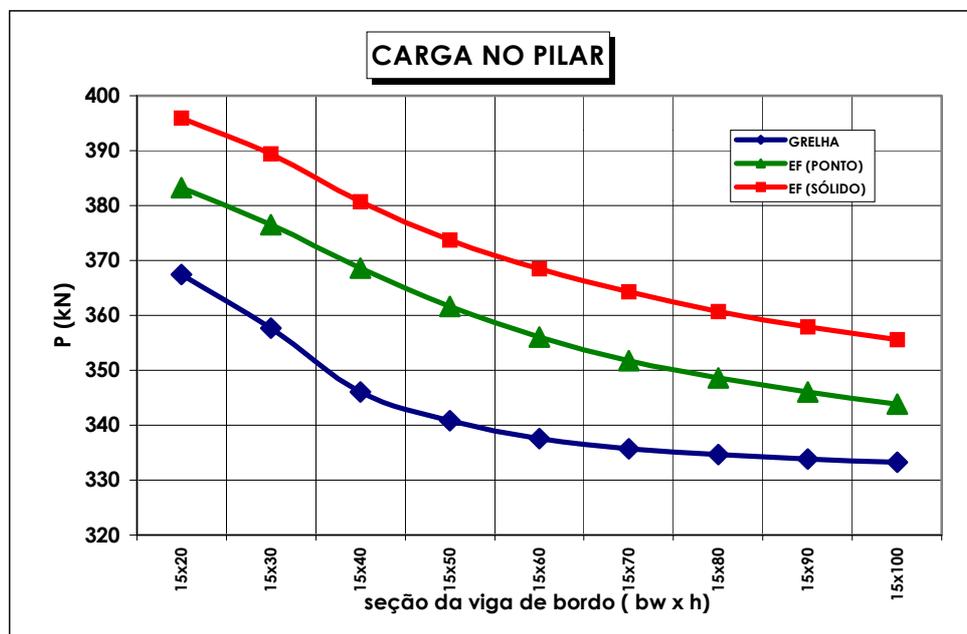


Figura 8.4 Carga no pilar para diferentes seções de vigas de bordo.

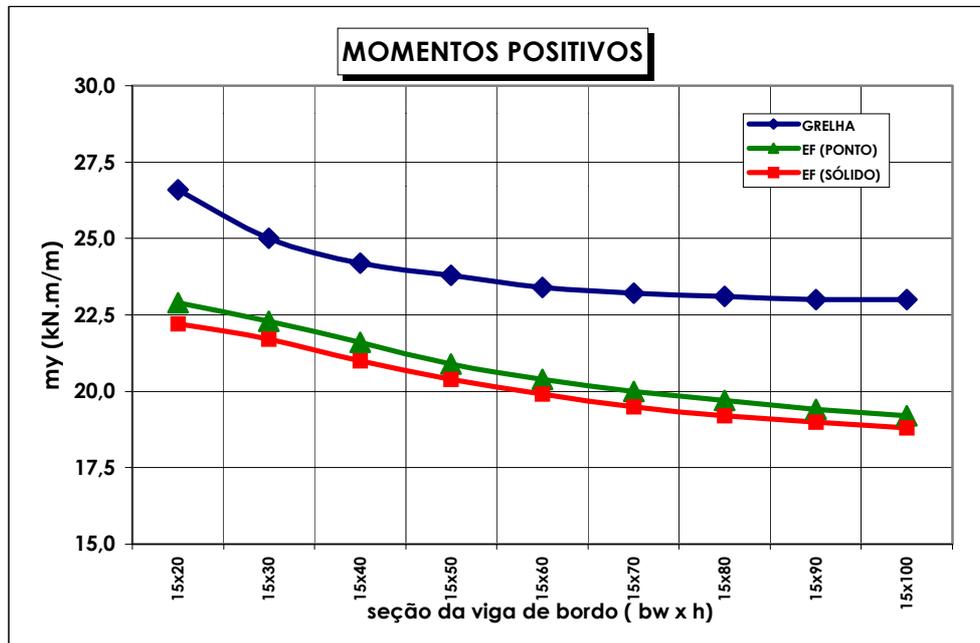


Figura 8.5 Momento positivo máximo da laje para diferentes seções de vigas de bordo.

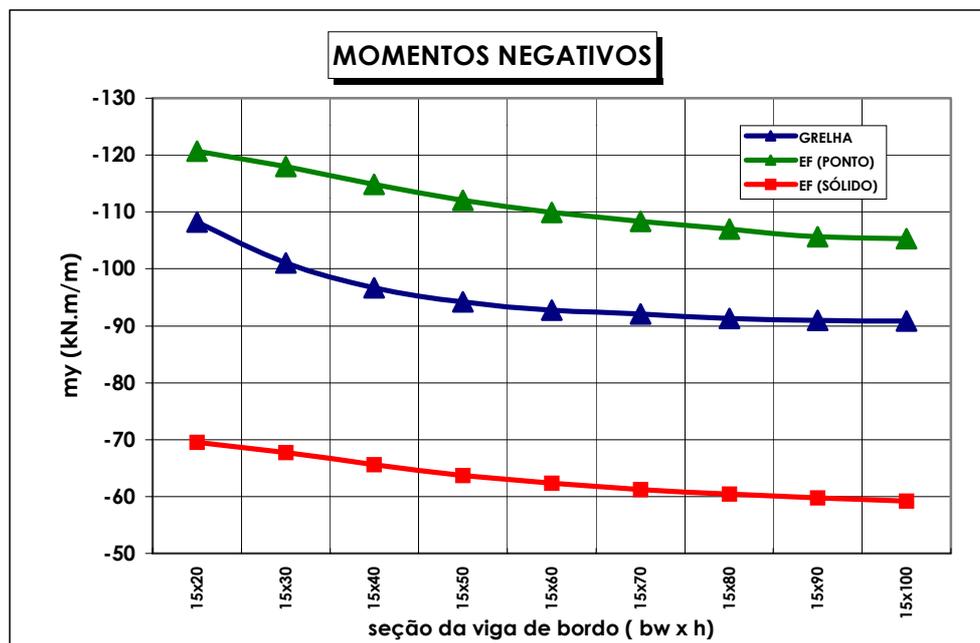


Figura 8.6 Momento negativo máximo da laje para diferentes seções de vigas de bordo.

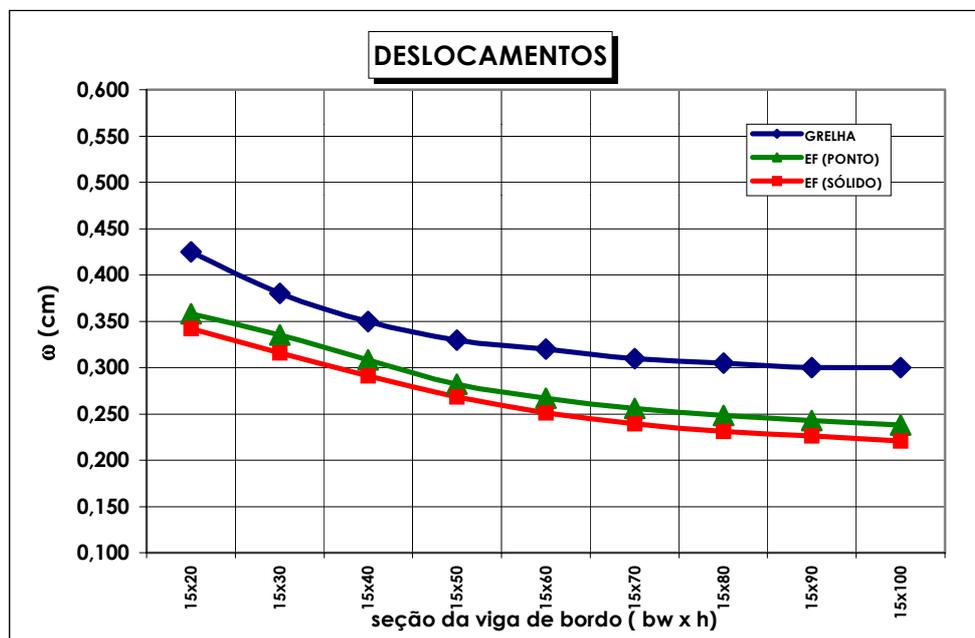


Figura 8.7 Deslocamento máximo da laje para diferentes seções de vigas de bordo.

Observando-se as figuras, verifica-se que, para os três modelos – grelha, elementos finitos com pilar modelado como ponto e como sólido, os resultados apresentam a mesma tendência, embora ocorram diferenças nos valores. Conforme a Figura 8.4, pode-se observar que, para os três modelos, a carga sobre o pilar reduz com o aumento da seção das vigas de bordo.

Os momentos positivos (Figura 8.5) e os deslocamentos (Figura 8.7) apresentam comportamento muito semelhante. Com o aumento da seção da viga de bordo os deslocamentos na laje reduzem. As Figuras 8.8 e 8.9 ilustram, respectivamente, as deformadas para lajes com vigas de bordo 15x20 cm e com vigas de bordo 15x100 cm, sendo a deformação ampliada em ambos os casos em 50 vezes.

Os momentos positivos também decrescem com o aumento da altura das vigas de bordo. Para esses dois parâmetros os modelos em Analogia de Grelha se mostram mais conservadores, conforme já havia sido observado nas Figuras 7.2 e 7.4, onde

foram feitas comparações entre diversas malhas modeladas em Elementos Finitos e Analogia de Grelha.

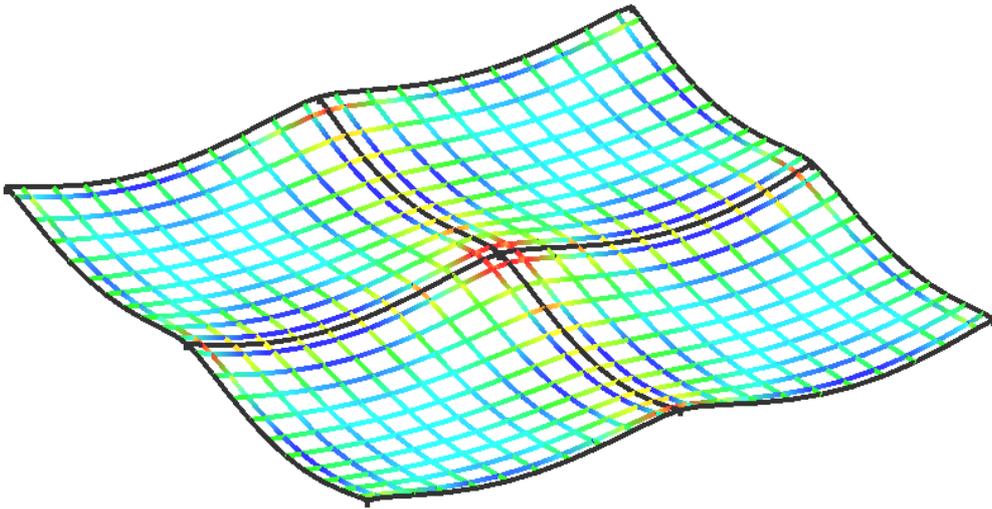


Figura 8.8 Deformada em laje com viga de bordo com seção 15x20 cm.

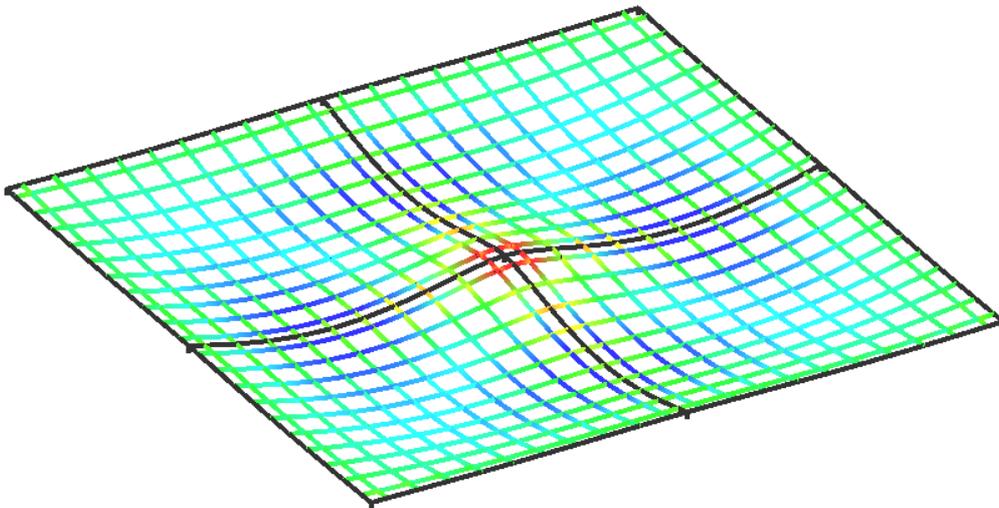


Figura 8.9 Deformada em laje com viga de bordo com seção 15x100 cm.

Os momentos negativos também decrescem com o aumento da seção das vigas, sendo que, os resultados para grelha e para elementos finitos como ponto foram muito parecidos. Para elementos finitos com pilar modelado como sólido, os valores obtidos foram muito menores.

Pode-se observar que, os resultados para as seções 15x50 cm e 15x100 cm são bastante próximos, portanto, a consideração para a laje de referência de utilizar vigas de 15x50 cm no contorno forneceu valores bons para o interesse do trabalho.

9 CONCLUSÕES

As condições de convergência e a precisão do Método dos Elementos Finitos dependem não apenas da formulação, mas também da escolha da malha e do tipo de elemento utilizado na discretização do problema. Não basta utilizar programas bem desenvolvidos, com bons algoritmos numéricos, é necessário também que a modelagem seja adequada. Essas afirmações podem ser estendidas para outros métodos numéricos, como por exemplo, a Analogia de Grelha. Isso foi confirmado ao longo dos inúmeros modelos estudados nesse trabalho, em que, para lajes semelhantes, alterações em determinados parâmetros significaram grandes modificações nos resultados.

Para os casos em que o pilar foi modelado como um apoio pontual, os resultados obtidos para a carga sobre o pilar, os momentos positivos e os deslocamentos da laje foram muito bons, independentemente do método adotado para o cálculo. Os resultados obtidos por Analogia de Grelha mostraram-se um pouco mais conservadores do que os por Elementos Finitos. Para lajes de 10 x 10 m, esses resultados começaram a convergir para determinado valor a partir de malhas de 50 x 50 cm, as quais foram as que apresentaram resultados melhores com menor tempo de processamento. Malhas mais “grosseiras” não apresentam resultados muito aceitáveis e, por outro lado, malhas mais discretizadas não apresentam melhora significativa nos resultados, necessitando somente muito tempo para que o computador efetuasse o processamento.

Quanto aos momentos negativos da laje sobre o pilar, os valores aumentam rapidamente à medida que é feito um maior refinamento da malha da laje. Isso foi verificado para os dois métodos numéricos estudados, onde, por exemplo, para o mesmo modelo em Elementos Finitos, o momento negativo foi quase cinco vezes maior para uma malha mais refinada do que para uma menos refinada. Mesmo refinamentos localizados somente nas proximidades do pilar apresentam valores muito elevados de momentos negativos, embora apresentem tempo de processamento reduzido.

Portanto, os momentos negativos obtidos para modelos de pilar como um apoio pontual não podem ser utilizados diretamente, visto que dependem muito da malha adotada para o cálculo. Embora na prática esse modelo de apoio pontual não exista, ele pode ser utilizado em projeto estrutural, desde que sejam tomados alguns cuidados na análise e, principalmente, na modelagem.

Os modelos em Elementos Finitos com o pilar modelado como elemento sólido comprovaram os resultados obtidos para os modelos analisados através da Teoria das Placas. As dimensões do pilar alteram significativamente os esforços na laje, principalmente os momentos negativos, os quais aumentam com a redução da seção do pilar. Mesmo com o pilar modelado como um sólido, ocorre uma concentração de tensões nos seus cantos, quando são usadas seções retangulares. Esse problema pode ser tratado através de uma análise plástica, considerando uma redistribuição de esforços ao longo da laje. A modelagem do pilar como sólido, embora apresente bons resultados, no caso do SAP2000 é demorada, em virtude da necessidade do pilar ser definido em arquivos de texto.

Os modelos em Analogia de Grelha modelados no AltoQI Eberick apresentaram resultados muito bons, com exceção dos momentos negativos. A consideração de vigas de rigidez equivalente cria uma faixa mais rígida da laje nas suas proximidades, alterando um pouco os esforços e deslocamentos. Os momentos negativos, quando se pretende dimensionar uma laje plana sem vigas utilizando os resultados desse programa, devem ser tomados das vigas, visto que são essas que se apóiam diretamente sobre o pilar central.

Uma solução bastante razoável para o problema dos momentos negativos da laje sobre o pilar seria adotar o momento atuante na face do pilar, e fazer um incremento no seu valor, como propõem a solução de Szilard (1974), por exemplo. Isso no caso de modelos nos quais o pilar é definido como um sólido ou quando as suas dimensões são consideradas no processamento. Para os casos em que o pilar é representado por um único ponto para o apoio da laje, pode-se adotar o momento negativo a uma distância

equivalente à posição da face do pilar e, analogamente, fazer um acréscimo no momento negativo.

Uma das propostas do presente trabalho era desenvolver rotinas de programação para o cálculo de esforços em lajes planas através de Analogia de Grelha, especialmente nas proximidades dos pilares, visando estudar os momentos fletores negativos. Deixa-se essa proposta para trabalhos futuros, assim como sugestão do estudo das lajes planas através de Analogia de Grelha, utilizando o Programa AltoQI Eberick, simulando o pilar através de barras rígidas, muito embora, até as versões disponíveis do programa, ainda se fará necessário utilizar-se vigas planas. Seria também interessante analisar os resultados de programas de dimensionamento que utilizem como princípio o Método dos Elementos Finitos, como o CYPECAD e o TQS.

10 REFERÊNCIAS

ACI COMMITTEE 318 (1983). **Building code requirements for reinforced concrete** (ACI 318-83). American Concrete Institute, Detroit, 1983.

ACI COMMITTEE 318 (1983). **Commentary on building code requirements for reinforced concrete** (ACI 318R-83). American Concrete Institute, Detroit, 1983.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e execução de estruturas de concreto armado**. NBR 6118. Rio de Janeiro, 1978.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e execução de estruturas de concreto armado**. NBR 6118. Rio de Janeiro, 2003.

BARES, Richard. **Tablas para el calculo de placas y vigas pared**, Editorial Gustavo Gili, S.A Barcelona, 1970.

BRAYTON, L. F. **Methods for the computation of reinforced concrete flat slabs**. Engineering News, 1910.

BROTCHIE, J. F. **General method for analysis of the flat slabs and plates**. ACI Journal, 1957.

BROTCHIE, J. F. **General elastic analysis of the flat slabs and plates**. ACI Journal, 1959.

BROTCHIE, J. F. **On elastic-plastic behavior in flat plate structures**. Tese de Doutorado, Berkeley, Universidade da Califórnia, 1961.

CASTELO BRANCO, A. F. V. **Contribuição para o projeto de lajes cogumelo**. Dissertação de Mestrado. São Carlos, 1989.

COELHO, Jano d'Araújo. **Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha**. Dissertação de Mestrado. Florianópolis, 2000.

COELHO, Jano d'Araújo. **Introdução ao projeto e análise de edifícios de múltiplos andares**. Florianópolis, 1997.

COOK, Robert D; MALKUS, David S.; PLESHA, Michael E. **Concepts and applications of finite element analysis**. Hamilton Printing Company. Third Edition. United States of América, 1989.

DI STASIO, J. & VAN BUREN, M. P. **Transfer of bending moments between flat plate floor and column**. ACI Journal, 1960.

DIRIGENTE CONSTRUTOR. **Vigas são dispensáveis? Especialistas dizem que sim**. Volume XXCIII, São Paulo, 1987.

ELIAS, Z. M. **Sidesway analysis of flat plate structures**. ACI Journal, 1979.

ELIAS, Z. M. & GEORGIAIDS, C. **Flat slab analysis using equivalent beams**. ACI Journal, 1979.

ELSTNER, R. C. **Test os elastic models of flat plate and flat slab floor system**. ACI Publication (1970).

FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. **Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para o projeto e execução**. Tese de Doutorado, São Carlos, 1989.

FRANCA, Argemiro B. M. & FUSCO, Péricles Brasiliense. **As Lajes Nervuradas na Moderna Construção de Edifícios**. São Paulo.

GAMBLE, W. L.; SOZEN, M. A.; SIESS, C. P. **Test of a two-way reinforced concrete floor slab**. Journal of Structural Division, ASCE, 1969.

GRAF, O. **Tests of reinforced concrete slabs under concentrated load applied near one support**. Deutscher Ausschuss fur eisenbeton. Berlim, 1933.

GUERRIN, A. **Tratado de concreto armado, Volume 3**. Hemus Editora Limitada, São Paulo.

GOLDENHÖRN, Simon. **Calculista de estruturas**. H. F. Martinez de Murguia S.A.C. y E., 13ª Edição, Buenos Aires, 1973.

HAMBLY, Edmund C. **Bridge deck behaviour**. John Wiley & Sons, Inc., London, 1976.

HATCHER, D. S.; SOZEN, M. A.; SIESS, C. P. **Test of a reinforced concrete flat plate**. Journal of Structural Division, ASCE, 1965.

HOGNESTAD, E. **Yield-line theory for the ultimate flexural strength on reinforced concret slabs**. ACI Journal, 1953.

JENKINS, B. R. **Test on a flat plate floor**, Civil Engineering Transactions, Barton, 1974.

KALMANOK, A. S. **Manual para calculo de placas**. Editora Inter Ciência. Montevideo, 1961.

LA ROVERE, Henriette Lebre. **Notas de Aula “Elementos finitos” do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil**. Florianópolis, 2001.

LA ROVERE, Henriette Lebre. **Análise Matricial e Modelagem de Estruturas**. Florianópolis, 2000.

LEONHARDT, F e MONNIG, E. **Construções de concreto Vols 1 e 5** – Editora Livraria Interciência, Rio de Janeiro, 1977

LIGHTFOOT, E & SAWKO, F. **Structural frame analysis by eletronic computer: grid frameworks resolved by generalised slope deflection**. 1959.

LORD, A. R. **A test of a flat slab floor in a reinforced concrete building**. National Association of Cement Users, 1910.

LORIGGIO, D. **Notas de Aula “Placas e lajes em concreto armado” do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil**, UFSC, Florianópolis, 2001.

LORIGGIO, D. **Notas de Aula “Estruturas em regime elasto-plástico” do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil**, UFSC, Florianópolis, SC, 2001.

MARTINELLI, Dante A. O., MONTANARI, Ílio & SAVASSI, Walter. **Placas elásticas**. São Carlos, 1986.

MAST, P. E. **Stresses in flat plates near columns**. ACI Journal, 1970.

MAST, P. E. **Plate stresses at columns near the free edge**. ACI Journal, 1970.

Mc. MILLAN, A. B. **A comparison of methods of computing the strenght of flat reinforced plates**. Engineering News, 1910.

MONTOYA, Jimenez; Meseguer, A. Garcia e Cabre, F. Moran **Hormigon armado**, Editorial Gustavo Gili, S.A Barcelona, 1973.

MORETTO, Oreste; **Curso de hormigon armado**. Libreria El Ateneo, 2ª Edição, Buenos Aires.

NILSON, A. A.; ARTHUR, A.; WALTERS, D. B. Jr. **Deflection of two-way floor systems by teh equivalent frame method**. ACI Journal, 1975.

PECKNOLD, D. A. **Slab effective width for equivalent frame analysis**. ACI Journal, 1975.

PARK, R. e GAMBLE, W.L. **Reinforced concrete slabs** – Editora John Wiley & Sons- New York, 1980

REGAN, P. E. **Behaviour of reinforced concrete flat slabs**. Ciria Report, Londres, 1980.

RICHART, F. E. & KLUGE, R. W. **Tests of reinforced concrete slabs subjectd to concentrated loads**. University of Illinois, Engineeirng Experiment Station, 1939.

ROSENTHAL, I. **Experimental investigation of flat plate floors**. ACI Journal, 1959.

- SHTAERMAN, M. I. & IVIANSKI, A. M. **Entrepisos sin vigos**. Montevidéo, 1960.
- SIMMONDS, S. H. **Flat slabs supported on columns elongated in plan**. ACI Journal, 1970.
- SUSSEKIND, J.C. **Curso de Concreto Armado Vols. 1 e 2** – Editora Globo, São Paulo, 1979.
- SZILARD, Rudolph. **Theory and analysis of plates**, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- TAKEYA, T. **Estudo experimental da ruína de ligações laje-pilar em bordas de lajes-cogumelo**. Dissertação de Mestrado, São Carlos, EESC – USP, 1985.
- TIMOSHENKO, S.P. e Woinowsky-Krieger, S. **Theory of plates and shells**, McGraw-Hill Kogakusha Ltda, 1959.
- WESTERGAARD, H. M. & SLATER, W. A. **Moments and stresses in slabs**. ACI Journal, 1921.