

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PROJETO DE FILTROS ROBUSTOS PARA**  
**SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutora em Engenharia Elétrica.

**Karina Acosta Barbosa**

**Florianópolis, maio de 2003.**



# PROJETO DE FILTROS ROBUSTOS PARA SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES

Karina Acosta Barbosa

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Automação e Sistemas*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Prof. Alexandre Trofino, Dr  
Orientador

---

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Nome do Presidente da Banca  
Presidente

---

Nome do Membro da Banca

---

Nome do Membro da Banca

---

Nome do Membro da Banca



*Ainda que eu falasse as língua dos homens e dos anjo,  
se não tiver caridade(amor), sou como bronze que soa...  
Mesmo que eu tivesse o dom da profecia e toda a ciência,  
se não tiver caridade(amor) não sou nada*

*ICOR 13,1-5*



*À vó Ema pelos seus 100 anos de vida  
completados neste ano.*



# Agradecimentos

Neste período de quatro anos, muitas pessoas tiveram um papel importante no desenvolvimento deste trabalho, algumas pelo apoio técnico outras pelos questionamentos e sem dúvida a grande maioria pelo apoio moral. Por questão de espaço e também lapso de memória nem todos que deveriam ser agradecidos o serão de forma explícita.

Agradeço assim em primeiro lugar as pessoas em particular que tiveram uma influência direta na parte técnica deste trabalho: os meus orientadores Professores Alexandre Trofino e Carlos Emanuel de Souza, pela dedicação e empenho não só no desenvolvimento da tese, mas a confiança depositada em mim neste período. Dentre os muitos ensinamentos, um em especial foi o espírito de trabalho em grupo. Ao meu colega Daniel Coutinho, que muito me auxiliou na parte final da tese e com quem aprendi a ser um pouco mais organizada. À Sônia e Sezinho, pessoas que também fizeram parte deste grupo, com as quais quebramos as vezes a cabeça para entender as enigmáticas mensagens de erro do *Scilab*. Aos professores do DAS, em especial ao Prof. Edson De Piere, pelos momentos de apoio e descontração. Aos membros da banca pelas sugestões, e em especial ao Prof. Aguinaldo pela sua disposição em ler a tese e participar da banca em tão pouco tempo. Ao Wilson e ao Marcelo da secretaria da Pós, à Jeane secretária do LNCC e Luciano e Paulo (ex. e atual administradores da rede do DAS) pelo sempre pronto atendimento. À população brasileira que através do pagamento de impostos, possibilitou que durante este período eu usufruí-se de uma bolsa de estudos vinculada ao CNPq.

Em segundo as pessoas que compartilharam os momentos diários de companheirismo, festas, discussões, cafés, utilizações de Softwares, yoga, ou seja momentos de descontrações muito importante para o bom andamento deste trabalho (principalmente a minha saúde psicológica). Por isso agradeço aos muitos colegas do DAS, alguns distantes outros ainda por aqui: Brandão, Sumar, Bismark, Tati, Rafael, Fernando, Alberto, Lau, Jerusa, André entre outros. Aos amigos que fiz no LNCC, no período que lá estive em 2001: Ilca, Mônica, André,

Cláudia, Alcino, Esbel, Sabrina, Cláudio Prada, Saulo e Alexandre. Aos eternos amigos de Porto Alegre. À turma do GOU (grupo de oração universitário), onde fui várias vezes me abastecer espiritualmente para encarar as dificuldades.

Ao Júlio Gollin e Marcos Vallim pelas consultorias na hora das preparações das aulas, facilitando assim a minha vida iniciante de professora na reta final da tese.

À Léonice e Edileusa por terem se disposto a ler parte da tese, e sugerir valiosas correções.

Aos amigos Magali, Felipe, Rubelise, Michelle, Luiz, Hallthaman, Cristiane, César Torrico, Karen, Ana e Rodrigo pela amizade e por serem em muitos momentos a minha família aqui em Florianópolis.

Ao César Torrico, "meu maninho adotivo", muito obrigado pelo ombro e pelos bate papos nestes 6 anos de convivência.

Ao Ivair pelo amor, confiança e principalmente paciência em aguentar minha insegurança e freqüentes dúvidas nestes 3 anos.

À minha família como um todo (pais, irmão, sobrinho, tios, avós, primos...), que sempre confiaram em mim e me ensinaram a partir de exemplos a não desistir, lembrando sempre que é possível obter o que se almeja com dignidade.

Para finalizar gostaria de agradecer a Deus pela sua providência.

Resumo da tese de doutorado apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutora em Engenharia Elétrica.

## **PROJETO DE FILTROS ROBUSTOS PARA SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES**

**Karina Acosta Barbosa**

Maio/2003

Orientador: Alexandre Trofino Neto

Co-orientador: Carlos Emanuel de Souza

Área de Concentração: Automação e Sistemas

Palavras-chave: filtros robustos, sistemas incertos, LMIs, sistemas não lineares, funções de Lyapunov dependentes de parâmetros

Número de Páginas: 140

Nesta tese estuda-se o projeto de filtros robustos para diversas classes de sistemas lineares e não lineares incertos usando funções de Lyapunov que são dependentes de parâmetros. O projeto do filtro é baseado na minimização dos critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de estimação. Neste contexto, desigualdades matriciais lineares(LMIs) são utilizadas para descrever as condições do projeto do filtro. Assumindo que as incertezas presentes no sistema estão descritas na forma politópica, desenvolvem-se abordagens para sistemas a tempo contínuo e discreto no caso de sistemas lineares incertos e a tempo contínuo no caso de sistemas não lineares incertos com não linearidades de Lipschitz e racionais. Exemplos numéricos são apresentados para comprovar a eficiência dos métodos propostos.



Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

## **ROBUST FILTER DESIGN FOR LINEAR AND NON LINEAR SYSTEMS**

**Karina Acosta Barbosa**

May /2003

Advisor: Alexandre Trofino Neto

Co-advisor: Carlos Emanuel de Souza

Area of Concentration: Automation and Systems

Keywords: robust filter, uncertain systems, LMIs, non linear systems,  
parameter dependent Lyapunov function

Number of Pages: 140

This thesis addresses the design of robust filters for linear and non linear systems subject to parameter uncertainty in the state-space model. The uncertain parameters are supposed to belong to a given convex bounded polyhedral domain. Methods based on parameter-dependent Lyapunov functions are proposed for designing linear stationary asymptotically stable filters that assure asymptotic stability and a prescribed  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  performance, irrespective of the uncertain parameters. The proposed designs are in terms of linear matrix inequalities (LMIs). Numerical examples illustrates the significant improvement that can be achieved compared with the existing filter design methods.



# Sumário

Resumo	i
Abstract	iii
Lista de Figuras	vi
Notação	ix
Introdução	1
<b>1 Definições Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Sistemas Incertos e Noções de Estabilidade	5
1.1.1 Robustez	6
1.1.2 Estabilidade via Lyapunov	8
1.2 Critérios de Desempenho	11
1.2.1 Norma $\mathcal{H}_2$	11
1.2.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$	15
1.2.3 Desempenho Robusto	16
1.3 Sistemas a Tempo Discreto	18
<b>2 Sistemas a Tempo Contínuo</b>	<b>27</b>
2.1 Formulação do Problema	27
2.2 Sistemas Invariantes no Tempo	30
2.2.1 Filtros $\mathcal{H}_2$	30
2.2.2 Filtros $\mathcal{H}_\infty$	38
2.2.3 Exemplos Numéricos	42
2.3 Sistemas Variantes no Tempo	48

2.4	Notas Complementares . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Sistemas a Tempo Discreto</b>	<b>63</b>
3.1	Formulação do Problema . . . . .	63
3.2	Projeto do Filtro Robusto $\mathcal{H}_2$ . . . . .	65
3.3	Projeto do Filtro Robusto $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	74
3.4	Filtros Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	77
3.5	Exemplo . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Sistemas Não Lineares</b>	<b>83</b>
4.1	Formulação do Problema . . . . .	83
4.2	Sistemas com Ruídos Dependentes do Estado . . . . .	85
4.3	Sistemas com Não Linearidades do Tipo Lipschitz . . . . .	91
4.4	Sistemas Racionais . . . . .	95
4.4.1	Função de Lyapunov . . . . .	97
4.4.2	Modelo . . . . .	99
4.4.3	Projeto do Filtro . . . . .	101
4.4.4	Projeto de Filtros Não Lineares . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Resultados Diversos</b>	<b>111</b>
5.1	Sistemas com Modos Instáveis . . . . .	111
5.2	Sistemas Descritores . . . . .	117
5.3	Projeto de Filtros Dependente de Parâmetros . . . . .	122
5.4	Projeto de Filtros de Ordem Reduzida . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Comentários Finais</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Desigualdades Matriciais Lineares</b>	<b>129</b>
A.1	Breve Definição . . . . .	129
A.1.1	Complemento de Schur . . . . .	130
A.1.2	Lema de Finsler . . . . .	131
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>133</b>

# Lista de Figuras

2.1	$\mu$ versus $\epsilon$ para $ \alpha  \leq 2$ e $\beta = \alpha$ . . . . .	43
2.2	Limitante superior $\mu$ para $ \alpha  \leq \kappa$ e $ \beta  \leq 1$ . . . . .	44
2.3	Limitante superior $\mu$ para $ \alpha  \leq \kappa$ e $\beta = \alpha$ . . . . .	44
2.4	Percentagem de soluções factíveis para cada uma das três abordagens quando $\rho = 1$ e $\rho = 10$ . . . . .	46
2.5	Número de soluções não factíveis quando $\rho = 1$ e $\rho = 10$ . . . . .	48
2.6	Limitante superior $\mu$ para $ \theta  \leq 1.4$ e $ \dot{\theta}  \leq \alpha$ . . . . .	59
2.7	Limitante superior $\mu$ para $ \theta  \leq \beta$ e $ \dot{\theta}  \leq 1$ . . . . .	60
2.8	Histograma do valor ótimo de $\epsilon$ . . . . .	61
2.9	Valor ótimo de $\epsilon$ para cada $\alpha$ , caso (a) . . . . .	62
3.1	Dois politopos $\mathcal{D}$ para um escalar $\theta(k)$ . . . . .	64
3.2	Limitante superior ótimo $\mu$ de $\ S_e\ _2^2$ para $ \theta  \leq 0.3$ e $c \leq \alpha$ . . . . .	80
3.3	Limitante superior ótimo $\gamma$ de $\ S_e\ _\infty$ para $ \theta  \leq 0.3$ e $c \leq \alpha$ . . . . .	81



# Notação

$I_n$	matriz identidade de dimensão $n \times n$
$0_n$	matriz de zeros de dimensão $n \times n$
$A^T$	transposto da matriz $A$ .
$A^{-1}$	inversa da matriz $A$ .
$A^{-T}$	inversa do transposto da matriz $A$ .
$A > 0$	matriz simétrica positiva definida.
$\det(A)$	determinante de $A$ .
$\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$	matriz bloco diagonal com matrizes $A_1, \dots, A_n$ , na diagonal.
$\text{Tr}[A]$	traço da matriz $A$
$\ A\ _p$	norma $p$ da matriz $A$
$E[\cdot]$	esperança matemática
$\min \gamma$	problema de otimização, onde busca-se o mínimo de $\gamma$
$\sup \gamma$	supremo de $\gamma$
$\theta$	parâmetro incerto
$\dot{\theta}, \Delta\theta$	taxa de variação do parâmetro incerto no caso contínuo e discreto
$\bar{\theta}$	$\theta(k+1)$
$\mathcal{B}_\theta$	Politopo dos $\theta$ admissíveis
$\mathcal{B}$	Politopo dos $(\theta, \dot{\theta})$ admissíveis
$\mathcal{D}$	Politopo consistente dos $(\theta, \Delta\theta(k))$ admissíveis caso discreto
$\ell_\theta$	número total de vértices de $\mathcal{B}_\theta$
$\ell$	número total de vértices de $\mathcal{B}$
$\mathcal{V}(\mathcal{A})$	conjunto de vértices do politopo $\mathcal{A}$

<i>GAS</i>	Globalmente Assintoticamente estável
<i>LMI</i>	Desigualdades Matriciais Lineares
<i>LQG</i>	Linear Quadratic Control
<i>LTI</i>	Sistema Linear Invariante no Tempo

# Introdução

Um filtro pode ser visto intuitivamente como uma barreira que impede a passagem de “corpos (ou dados)” não desejáveis. Quando avaliam-se os filtros existentes e disponíveis, encontram-se diferentes tipos de aplicações para filtros, dentre elas, pode-se citar, os filtros solares que impedem a ação dos raios nocivos do sol, os filtros usados nos servidores de e-mail que impedem o recebimento de mensagens com vírus ou SPAMs e os filtros que impedem e/ou diminuem a ação de sinais indesejados (ruídos ou perturbações externas) nos sinais de interesse. Esta última aplicação para filtros está presente nas teorias de controle e de processamento de sinais, onde o termo filtragem está diretamente ligado à idéia de estimar um sinal desejado, normalmente não acessível ou corrompido por ruídos e/ou perturbações, através das informações conhecidas. Neste contexto, torna-se necessário desenvolver alternativas para o projeto de filtros que estimem estes sinais não acessíveis ou corrompidos por ruídos e/ou perturbações através dos sinais mensuráveis.

Este problema já vem sendo estudado há mais de três décadas, sendo que grande parte das soluções disponíveis na literatura é baseada nos filtros de Kalman-Bulcy [45, 46] e filtros  $\mathcal{H}_\infty$  [44, 51, 66, 68]. Os filtros de Kalman, desenvolvidos nos anos 60, fornecem a solução ótima para o projeto de filtros quando o sistema está sujeito a sinais do tipo ruído branco, ou seja, sinais com média nula e matriz de covariância unitária, através da minimização da variância do erro de estimação. Já os filtros  $\mathcal{H}_\infty$ , desenvolvidos no final da década de 80, são aplicados a sistemas com sinais desconhecidos através da utilização do critério de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . No entanto, apesar da relevância destes resultados, no caso de sistemas que possuem parâmetros incertos, estas abordagens não fornecem nenhuma garantia de desempenho, já que o projeto do filtro é baseado num modelo nominal, o que torna, em muitos casos, o desempenho do filtro insatisfatório na presença de erros de modelagem do sistema. Conseqüentemente, para o caso de sistemas incertos, ou seja, sistemas descritos por um modelo nominal sujeito a parâmetros incertos, uma nova formulação se faz necessária para garantir um desempenho prescrito para o

filtro independentemente das incertezas de modelagem. Os filtros que satisfazem esta condição são denominados filtros robustos.

Na última década, diversos resultados para o projeto de filtros robustos vem sendo publicados (veja por exemplo [31, 32, 34, 38, 37, 40, 49, 58, 59, 60, 61, 67, 69, 71, 81, 83]). Nestes resultados, o filtro é obtido pelo processo de minimização dos critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema dinâmico do erro de estimação. O grande inconveniente destas abordagens é que elas são baseadas na noção de estabilidade quadrática, ou seja, utilizam funções de Lyapunov que são independentes dos parâmetros incertos do sistema, levando a resultados que são, em muitos casos, restritivos dado que a estabilidade e o desempenho do filtro são garantidos mesmo quando os parâmetros variam arbitrariamente rápido. Para contornar este problema, já é possível encontrar alguns resultados da teoria de controle, inclusive para o caso de filtragem, que utilizam funções de Lyapunov afins ou polinomiais nos parâmetros dos sistema [30, 33, 35, 39, 73, 75, 76]. Estas abordagens têm se mostrado bem menos restritivas do que as que utilizam a noção de estabilidade quadrática, conforme apresentado nos comentários em [75].

Além do problema de filtragem robusta para sistemas lineares, outro tema de destaque é o projeto de filtros para sistemas não lineares. Neste contexto, é possível encontrar algumas abordagens que buscam principalmente estender os resultados obtidos do caso linear de Kalman e  $\mathcal{H}_\infty$  (veja por exemplo [2, 32, 53, 64, 69, 79, 85]). O problema é que muitas destas abordagens são restritivas ou de difícil solução numérica.

O objetivo do presente trabalho de doutorado é abordar o problema de filtragem robusta para sistemas lineares e não lineares, utilizando abordagens por funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros incertos do sistema. Este tipo de função tem a vantagem de permitir que seja levado em conta, no projeto do filtro, a taxa de variação dos parâmetros e uma maior informação das características dos sistemas. Conseqüentemente, tem-se uma melhora significativa no raio de abrangências dos resultados e na minimização dos índices de performance. As condições para a busca de solução do problema serão descritas através de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs).

O uso de técnicas LMIs, deve-se ao fato da mesma vir se consolidando nos últimos tempos como uma ferramenta poderosa para a busca de soluções para diversos problemas na teoria de controle, principalmente para sistemas lineares (veja [17, 42]). No caso de sistemas não lineares a aplicação de LMIs é mais recente, mas com os resultados apresentados em [73] existe

a possibilidade de utilização no projeto de filtros. A grande vantagem no uso de LMIs deve-se à flexibilidade que esta técnica proporciona no tratamento de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas de modelagem e, também, pela possibilidade de uma resolução numérica eficiente. Para o problema de filtragem, é possível encontrar alguns trabalhos que utilizam LMIs, entre eles [25, 30, 31, 38, 37, 39, 57, 76].

Na seqüência, tem-se a estrutura geral da tese:

- **Capítulo 1** - Neste capítulo, tem-se uma breve revisão sobre sistemas incertos, funções de Lyapunov dependente de parâmetros e os critérios de Desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Deseja-se, assim, caracterizar os índices que serão utilizados para quantificar o desempenho do filtro, isto é, quão rápido o estado estimado se aproxima do estado real.
- **Capítulo 2** - Neste capítulo, formula-se o problema de filtragem robusta para sistemas lineares a tempo contínuo. São abordados o problema de filtragem para sistemas incertos invariantes no tempo com entradas estocásticas conhecidas (Filtros  $\mathcal{H}_2$ ) e desconhecidas com sinais de entrada limitada (Filtros  $\mathcal{H}_\infty$ ). Finaliza-se com o projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$  para sistemas variantes no tempo.
- **Capítulo 3** - Projetam-se filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas a tempo discreto, assumindo que os parâmetros do sistema são variantes no tempo. Faz-se também o projeto de filtros mistos  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .
- **Capítulo 4** - O problema de filtragem robusta para sistemas não lineares é o enfoque deste capítulo. Inicialmente, formaliza-se o problema tentando apresentar as principais dificuldades encontradas na busca de filtros para esta classe de sistemas. Em seguida, tem-se o projeto do filtro robusto para três classes de sistemas não lineares: (i) sistemas bilineares, (ii) sistemas com não linearidades de Lipschitz e (iii) sistemas racionais nos parâmetros incertos e no estado.
- **Capítulo 5** - Neste capítulo, desenvolve-se o projeto de filtros robustos para sistemas com modos instáveis e sistemas descritores. Apresenta-se, também, uma extensão dos resultados para o projeto de filtros de ordem reduzida e dependentes de parâmetros, para algumas das classes de sistemas estudadas.
- **Capítulo 6** - Este capítulo apresenta um resumo dos resultados obtidos e as perspectivas de trabalhos futuros.

- **Apêndice A** -Este apêndice faz uma breve apresentação de LMIs e de dois lemas auxiliares úteis para a transposição de desigualdades matriciais em LMIs.

# Capítulo 1

## Definições Preliminares

Antes de apresentar o problema de filtragem robusta e os resultados obtidos nesta tese, faz-se necessário rever alguns conceitos importantes da teoria de controle. Para isso, neste capítulo, tem-se inicialmente uma breve revisão do problema de robustez e a noção de estabilidade via funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Na seqüência, apresentam-se as definições dos critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  que serão utilizadas nos próximos capítulos para o projeto de filtros robustos para sistemas dinâmicos incertos.

### 1.1 Sistemas Incertos e Noções de Estabilidade

Nesta seção, dois conceitos importantes da teoria de controle para sistemas incertos são apresentados: (i) a definição de robustez, caracterizando o tipo de incerteza utilizada nesta tese, e (ii) a verificação da estabilidade de sistemas dinâmicos por funções de Lyapunov. Antes de continuar, apresentam-se as seguintes definições de estabilidades.

**Definição 1.1 (Estabilidade Assintótica)** *O sistema linear invariante no tempo  $\dot{x} = Ax(t)$  é assintoticamente estável se a matriz  $A$  for Hurwitz.*  $\square$

**Definição 1.2 (Estabilidade Exponencial)** *O sistema linear variante no tempo  $\dot{x} = A(t)x$  é exponencialmente estável se existem números reais positivos  $\gamma$  e  $\beta$  tal que  $\|\Phi(t, \tau)\| < \gamma e^{-\beta(t-\tau)}$ ,  $\forall t \geq \tau$ , onde  $\Phi(t, \tau)$  é a matriz de transição do sistema.*  $\square$

Note que, para sistemas invariantes no tempo, a noção de estabilidade exponencial é equivalente a noção de estabilidade assintótica.

### 1.1.1 Robustez

Um sistema pode ser definido intuitivamente como um conjunto de objetos inter-relacionados com um objetivo específico ou um propósito lógico. Como exemplo de sistemas, cita-se, os sistemas econômicos, mecânicos e biológicos. Para poder compreender, estudar ou projetar um sistema, faz-se necessário buscar modelos, no caso aqui matemáticos, que representem ou simulem o comportamento do sistema real. Na prática, um modelo consegue ser apenas uma aproximação simplificada de um sistema. Como estas simplificações podem trazer erros significativos no desempenho do sistema projetado, buscam-se alternativas para modelar matematicamente o sistema, preservando as suas características essenciais. Uma forma de amenizar as discrepâncias que possam surgir entre o modelo matemático e o real é assumir que o sistema é incerto, isto é, que o modelo matemático seja constituído de um sistema nominal mais um conjunto de parâmetros incertos que representem as possíveis flutuações em torno do nominal. Surge, assim, a necessidade de verificar se um sistema é robusto, ou seja, se ele é capaz de continuar satisfazendo todos os requisitos de projeto, frente às incertezas presentes no modelo ou às perturbações externas que afetam o modelo.

Um ponto importante no estudo da robustez de um sistema é como as incertezas aparecem no modelo. Tem-se que, dependendo da estrutura dos parâmetros incertos e de como estes são inseridos no modelo matemático, diferentes tipos de restrições são incorporados ao problema. Dentre as diversas maneiras de se inserir as incertezas no problema, destacam-se:

- Incerteza Limitada em Norma - onde se considera que os parâmetros incertos são limitados em módulo.
- Restrições Integrais Quadráticas (IQC) - onde os valores admissíveis para os parâmetros satisfazem uma dada condição envolvendo uma integral quadrática.
- Politópica - Onde se considera que os parâmetros incertos admissíveis são pertencentes a um dado politopo<sup>1</sup>.

Neste trabalho assume-se que as incertezas presentes no modelo estão descritas na forma politópica.

---

<sup>1</sup>Politopo é um conjunto convexo fechado, que pode ser representado pela combinação convexa dos vértices, ou por inequações lineares (para mais detalhes sobre politopo veja [18]).

Assim, considera-se o sistema linear

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t), \quad x(0) = 0 \quad (1.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $\theta \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de parâmetros incertos que satisfaz a seguinte condição

$$\theta \in \mathcal{B}_\theta$$

onde  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p] \in \mathbb{R}^p$  e  $\mathcal{B}_\theta$  representa um politopo com  $\ell_\theta = 2^p$  vértices. Em algumas situações, assume-se também que  $\theta_i$  é um parâmetro variante no tempo com taxa de variação  $\dot{\theta}_i$ , e que  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ , um politopo com  $\ell$  vértices.

Por exemplo, supondo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  e  $A(\theta)$  afim em  $\theta$ , uma representação possível para a matriz  $A(\theta)$  é dada por

$$\mathcal{A} = \{A(\theta) = \sum_{i=1}^{\ell} q_i A_i, \quad \sum_{i=1}^{\ell} q_i = 1, q_i \geq 0\} \quad (1.2)$$

onde o conjunto  $\mathcal{A}$  é convexo fechado, as matrizes  $A_i$  são conhecidas como vértices e os escalares  $q_i$  são os elementos de combinação convexa.

Uma das grandes vantagens em descrever os parâmetros incertos na forma politópica é a convexidade do conjunto resultante. Desta forma, é possível garantir que, se um dado conjunto de condições estiver satisfeito nos vértices do politopo, então, estas mesmas condições também estão satisfeitas no interior desta região. O inconveniente desta abordagem é o problema da explosão exponencial, já que o número de LMIs é dado por uma função do tipo  $2^p$ , onde  $p$  é o número de parâmetros incertos no sistema. Por exemplo, para testar as condições de sistema com 3 elementos incertos, deve-se verificar as mesmas condições nos  $2^3$  vértices, ou seja, deve-se testar as condições para 8 valores diferentes da matriz  $A(\theta)$ .

O estudo da robustez pode ser dividido em:

- **Análise de Robustez** - Verificar o quanto as incertezas afetam a estabilidade e o desempenho do sistema.
- **Síntese Robusta** - Projeto de controladores que minimizem a influência das incertezas e das perturbações que atuam no sistema.

Grande parte das soluções propostas para estes problemas é baseada na teoria desenvolvida por Lyapunov para a análise da estabilidade de sistemas dinâmicos. A seguir, apresenta-se

uma breve revisão dos conceitos da teoria de Lyapunov, enfatizando o uso de funções de Lyapunov que são dependentes de parâmetros.

### 1.1.2 Estabilidade via Lyapunov

A teoria de Lyapunov, desenvolvida no final do século XIX, vem se firmando nas últimas décadas como uma ferramenta importante no estudo de sistemas dinâmicos no domínio do tempo. Isso se deve tanto ao fato da sua flexibilidade em tratar sistemas mais complexos com incertezas ou até mesmo não lineares quanto pelo desenvolvimento de métodos numéricos para a busca deste tipo de funções. A idéia central da teoria de Lyapunov é buscar uma função positiva definida que dependa dos estados do sistemas de forma que a sua energia decresça, ou seja, que a derivada temporal da função de Lyapunov seja estritamente negativa para todas as trajetórias do sistema. A escolha de uma função que satisfaça estas condições nem sempre é trivial e diversos trabalhos vem sendo desenvolvidos na tentativa de buscar funções mais genéricas. Uma das funções mais conhecidas é a forma quadrática dada por  $V(x) = x^T P x$ , onde  $P$  é uma matriz positiva definida constante. Aplicando esta função ao sistema nominal  $\dot{x} = Ax$ , tem-se a noção de estabilidade quadrática, apresentada na seqüência.

**Definição 1.3 (Estabilidade Quadrática)** *O sistema  $\dot{x} = Ax$  é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz  $P > 0$  que satisfaça*

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A) x < 0.$$

Este resultado fornece condições necessárias e suficientes para a análise da estabilidade do sistema nominal. Nas últimas décadas funções de Lyapunov quadrática vem sendo também aplicadas a sistemas incertos. No entanto, neste caso, é necessário verificar se o sistema é estável para todos os valores possíveis dos parâmetros incertos. Para o caso de um sistema com incertezas na forma politópica, como o dado em (1.1), pode-se verificar a estabilidade para todo  $A(\theta) \in \mathcal{A}$ , considerando-se que  $V(x) = x^T P x$  com  $P > 0$  seja a função de Lyapunov do sistema, através do seguinte lema.

**Lema 1.1** *O sistema (1.1) com incertezas politópicas é quadraticamente estável se existe uma matriz  $P > 0$  de forma que*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell \tag{1.3}$$

A prova deste resultado é consequência da convexidade do conjunto  $\mathcal{A}$  [17]. Note que, se cada LMI em (1.3) estiver satisfeita, multiplicando-a pelo respectivo escalar  $q_i$  em (1.2) e somando o resultado, tem-se:

$$A(\theta)^T P + PA(\theta) < 0,$$

que é a condição para que a derivada da função quadrática de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  seja negativa definida.

A noção de estabilidade quadrática para sistemas incertos pode ser restritiva em algumas aplicações, principalmente quando os parâmetros incertos do sistema tem taxa de variação pequena (lenta). Isto decorre do fato da noção de estabilidade quadrática ser baseada em uma função de Lyapunov que é independente dos parâmetros incertos. Já existem alternativas para a escolha de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, cujo uso no contexto de análise e projeto para sistemas com parâmetros incertos com taxa de variação limitada tem se mostrado menos restritivo. Estas funções são estudadas a seguir.

### Funções de Lyapunov Dependentes de Parâmetros

O interesse por funções de Lyapunov dependentes de parâmetros vem crescendo nos últimos anos, veja por exemplo, os trabalhos de [12, 33, 35, 75]. O objetivo é incluir, na função de Lyapunov, mais informações sobre o sistema ou os parâmetros incertos que afetam este sistema. Neste caso, assume-se que a função de Lyapunov é descrita por  $V(x, \theta) = x^T P(\theta(t))x$ , onde a matriz  $P(\theta(t))$  é uma função dos parâmetros incertos  $\theta(t)$  variante no tempo. Assim, para o sistema (1.1), tem-se o seguinte lema para verificar a estabilidade.<sup>2</sup>

**Lema 1.2** *O sistema incerto (1.1) é exponencialmente estável, se existe uma matriz  $P(\theta) > 0$  de forma que*

$$\dot{P}(\theta) + A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta)A(\theta) < 0, \quad \forall(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (1.4)$$

□ □ □

Note que, como a desigualdade (1.4) não é convexa no parâmetro incerto  $\theta$ , a sua resolução numérica não é uma tarefa trivial, já que é necessário, neste caso, verificá-la para cada um dos possíveis valores de  $\theta$ . No entanto, é possível encontrar na literatura resultados suficientes para a solução de (1.4) quando a função de Lyapunov é afim em  $\theta$ . Dentre estes resultados,

<sup>2</sup>A dependência do tempo  $t$  no parâmetro incerto e na sua taxa de variação não será explicitada.

cita-se os trabalhos de [33], para o caso de sistemas com incertezas limitadas em norma, e o resultado de [35], usando o critério de multiconvexidade. Nestes casos, assume-se que a função de Lyapunov é afim nos parâmetros incertos, onde a matriz  $P(\theta)$  é descrita por

$$P(\theta) = P_0 + \Theta P_1 + P_1^T \Theta^T \quad (1.5)$$

onde  $P_0 > 0$  e  $P_1$  são matrizes constantes e  $\Theta$  é uma matriz linear nos parâmetros, como, por exemplo,  $\Theta = [\theta_1 I, \theta_2 I, \dots, \theta_n I]^T$ .

Na tentativa de buscar diminuir o conservadorismo e tornar as abordagens mais eficientes para o caso de sistemas com incertezas variante no tempo, funções de Lyapunov mais complexas vem sendo desenvolvidas. Em [75] encontra-se a proposta de funções de Lyapunov polinomiais de grau 2 em  $\theta$ . Neste caso assume-se que

$$V(x, \theta) = x^T P(\theta) x, \quad (1.6)$$

no qual

$$P(\theta) = P_0 + \Theta^T P_1^T + P_1 \Theta + \Theta^T P_2 \Theta$$

com as matrizes  $P_0 > 0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  constantes. Esta função, conhecida como função bi-quadrática, tem se mostrado bem menos restritiva nos problemas de estabilidade e desempenho de sistemas incertos (veja, por exemplo, os trabalhos de [55] e [73]). É importante ressaltar que esta função tem como caso particular as funções afins e independentes de parâmetros, através de restrições estruturais na matriz  $P(\theta)$ .

Novamente, as condições para estabilidade usando este tipo de função não aparecem de forma convexa. No entanto, utilizando-se o Lema de Finsler<sup>3</sup> e algumas mudanças de variáveis, é possível obter condições convexas para o problema de análise da estabilidade considerando esta família de funções. Estas funções já foram generalizadas para funções polinomiais de grau  $2^r$  em  $(\theta, x)$ , sendo de grande utilidade para o desenvolvimento de novas abordagens para sistemas não lineares e híbridos, como por exemplo [19] e [22].

Em grande parte dos resultados para o projeto de filtros apresentados nesta tese, utilizam-se funções de Lyapunov que são bi-quadráticas em  $\theta$ , similares à descrita por (1.6).

---

<sup>3</sup>Veja [17, cap 2] ou o Apêndice A para mais detalhes sobre este lema.

## 1.2 Critérios de Desempenho

Além do problema de análise de estabilidade, outro importante problema na teoria de sistemas é como caracterizar o comportamento do sistema sujeito a perturbações externas. Neste problema, conhecido como problema de desempenho, procura-se verificar e/ou minimizar o quanto um sistema é afetado por estas perturbações. Neste caso, é necessário ter algum critério para medir o quanto uma certa perturbação aplicada sobre o sistema pode afetar a saída desejada. Um critério usual para medir a influência de uma relação entrada/saída pode ser dada pela norma do operador entrada/saída.

Considere o sistema nominal

$$\begin{aligned} S: \dot{x} &= Ax + B_w w, \quad x(0) = 0 \\ z &= C_z x + D_{zw} w \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é uma entrada externa e  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  representa a saída de desempenho. Deseja-se, então, analisar a influência do sinal de perturbação  $w$  sobre a saída  $z$ . Seja  $\mathcal{G}$  o operador que mapeia  $w$  para  $z$ , ou seja,  $z = \mathcal{G}w$ . No caso linear, tem-se que este operador, no domínio da frequência, é a própria função de transferência do sistema, ou seja,  $\mathcal{G} = G_{wz} = C_z(sI - A)^{-1}B_w + D_{zw}$ .

Necessita-se, então, ter algum critério para medir o ganho entrada/saída proporcionado pelo operador  $G_{wz}$ . No caso de sistemas lineares, os critérios mais utilizados são os critérios de norma  $\mathcal{H}_2$  e de norma  $\mathcal{H}_\infty$ . As definições destas duas normas e alguns comentários relativos a sistemas com perturbações estocásticas e sistemas não lineares são dados a seguir.

### 1.2.1 Norma $\mathcal{H}_2$

A norma  $\mathcal{H}_2$  de um sistema linear invariante no tempo (LTI) pode ser dada tanto em termos da sua função de transferência  $\mathcal{G}_{wz}(s)$  ou da sua anti-transformada  $G_{wz}(t)$ , como indicado a seguir:

$$\begin{aligned} \|G_{wz}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Tr}[\mathcal{G}_{wz}^*(jw)\mathcal{G}_{wz}(jw)]dw \\ &= \int_0^\infty \mathbf{Tr}[G_{wz}(t)^T G_{wz}(t)]dt \end{aligned} \tag{1.8}$$

Note que, para a norma  $\mathcal{H}_2$  de um sistema ser finita, o sistema (1.7) deve ser estritamente próprio, ou seja,  $D_{zw} = 0$ .

Existem diversas interpretações para a norma  $\mathcal{H}_2$ . Por exemplo, considerando o caso monovariável e assumindo que as perturbações que afetam o sistema são sinais conhecidos, pode-se incorporar a dinâmica destes sinais no próprio sistema  $G_{wz}$  e supor que o mesmo é excitado por sinais  $w(t)$  impulsivos. Assim, a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser definida como sendo a energia do sinal de saída obtida com um impulso [56].

A norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser calculada através dos Gramianos de Controlabilidade  $L_c$  e de Observabilidade  $L_o$ , como indicado a seguir:

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \mathbf{Tr}[C_z L_c C_z^T] = \mathbf{Tr}[B_w^T L_o B_w]$$

onde  $L_c$  e  $L_o$  são soluções de

$$\begin{aligned} AL_c + L_c A^T + B_w B_w^T &= 0 \\ A^T L_o + L_o A + C_z^T C_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

A prova deste resultado pode ser obtida pela aplicação do *Teorema de Parseval* e da teoria de Lyapunov. A prova completa pode ser encontrada, por exemplo, em [87].

É possível através das propriedades da equação de Lyapunov, obter uma formulação LMI para o cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$ . Este resultado é apresentado no próximo lema, cuja prova pode ser encontrada, por exemplo, em [17].

**Lema 1.3** *Considere o sistema (1.7) com  $D_{zw} = 0$ . A norma  $\mathcal{H}_2$  é dada pela solução de um dos seguintes problemas de minimização envolvendo LMIs*

- *Se existem matrizes  $P$  e  $W$  tais que*

$$\begin{aligned} \min \mathbf{Tr}[W] : \text{sujeito à} \\ \begin{bmatrix} A^T P + P A & C_z^T \\ C_z & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} W & B_w^T P \\ P B_w & P \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

*Então tem-se que  $\|G_{wz}\|_2^2 = \mathbf{Tr}[W] + \epsilon$ , onde  $\epsilon > 0$  é um escalar tão pequeno quanto se queira, que está associado à precisão com que as desigualdades (1.10) são resolvidas.*

- Se existem matrizes  $Q$  e  $W$  tais que

$$\begin{aligned} \min \text{Tr}[W] : \text{sujeito à} \\ \begin{bmatrix} AQ + QA^T & B_w \\ B_w^T & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} W & C_z Q \\ QC_z^T & Q \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Então tem-se que  $\|G_{wz}\|_2^2 = \text{Tr}[W] + \epsilon$ , onde  $\epsilon > 0$  é um escalar tão pequeno quanto se queira, que está associado à precisão com que as desigualdades (1.11) são resolvidas.

□□□

Estes mesmos resultados obtidos para a resposta ao impulso podem ser diretamente utilizados no caso estocástico onde  $w$  é um ruído branco de média nula e variância unitária, ou seja,  $E[ww^T] = I\delta(t)$ , onde  $\delta(t)$  é um impulso na origem. A norma 2 da saída neste caso é definida como sendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[z(t)z(t)^T] = \text{Tr}[C_z Q C_z^T]$$

onde  $Q$  é a solução de (1.11).

Outra interpretação da Norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser obtida via idéia de custo garantido. Neste caso, deseja-se analisar a energia da resposta do sistema para um estado inicial  $x_0$ . Esta interpretação é útil na extensão dos conceitos de norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas não lineares<sup>4</sup>.

### Sistemas variantes no tempo

O conceito de norma  $\mathcal{H}_2$  definido em (1.8) só é válido para sistemas invariantes no tempo e próprios. Na seqüência, apresenta-se a definição da norma  $\mathcal{H}_2$  para o caso de sistemas variantes no tempo. Neste caso, deseja-se minimizar o efeito de perturbações  $w$  do tipo ruído branco, no seguinte sistema:

$$\begin{aligned} S_1 : \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B_w(t)w(t), \quad x(0) = x_0 \\ z(t) &= C_z(t)x(t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

<sup>4</sup>Para mais detalhes sobre estas interpretações veja [17, 56].

**Definição 1.4** *Suponha que o sistema  $S_1$  é exponencialmente estável. A norma  $\mathcal{H}_2$  de  $S_1$  é definida como*

$$\|S_1\|_2^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbf{E} \left[ \int_0^t z^T(\tau) z(\tau) d\tau \right] \quad (1.13)$$

quando  $x(0) = 0$  e  $w(t)$  é sinal de ruído branco com média nula e matriz de covariância unitária.

As seguintes caracterizações podem ser feitas neste caso:

**Lema 1.4** ([43]) *Dado o sistema  $S_1$ , as seguintes condições são verificadas:*

(a) *Se o sistema  $S_1$  é exponencialmente estável, então*

$$\begin{aligned} \|S_1\|_2^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{Tr} [C_z(t) L_c(t) C_z^T(t)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{Tr} [B_w^T(t) L_o(t) B_w(t)] \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde  $L_c(t)$  e  $L_o(t)$  satisfazem a seguinte equação de Lyapunov

$$\dot{L}_c(t) = A(t)L_c(t) + L_c(t)A^T(t) + B_w(t)B_w^T(t), \quad L_c(0) = 0 \quad (1.15)$$

$$-\dot{L}_o(t) = A^T(t)L_o(t) + L_o(t)A(t) + C_z^T(t)C_z(t), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} L_o(T) = 0 \quad (1.16)$$

(b) *Se existem matrizes simétricas  $P(t)$  e  $W(t)$  tais que para todo  $t \in [0, \infty)$*

$$\begin{bmatrix} -\dot{P}(t) + P(t)A^T(t) + A(t)P(t) & B_w(t) \\ B_w^T(t) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.17)$$

$$\begin{bmatrix} W(t) & C_z(t)P(t) \\ P(t)C_z^T(t) & P(t) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.18)$$

então o sistema  $S_1$  é exponencialmente estável e

$$\|S_1\|_2^2 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{Tr} [W(\tau)] d\tau. \quad (1.19)$$

(c) *Se existem matrizes simétricas  $P(t)$  e  $W(t)$  tais que para todo  $t \in [0, \infty)$*

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) & C_z^T(t) \\ C_z(t) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.20)$$

$$\begin{bmatrix} W(t) & B_w^T(t)P(t) \\ P(t)B_w(t) & P(t) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.21)$$

então o sistema  $S_1$  é exponencialmente estável e

$$\|S_1\|_2^2 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{Tr} [W(\tau)] d\tau. \quad (1.22)$$

**Prova:** A prova deste resultado pode ser encontrada em [43, p.93].  $\square\square\square$

Note que,  $V_b(x, t) = x^T P^{-1}(t)x$  é uma função de Lyapunov para o sistema  $S_1$ , quando  $P(t)$  satisfaz a parte (b) do Lema 1.4 e  $V_c(x, t) = x^T P(t)x$  é a função de Lyapunov para o sistema  $S_1$  quando  $P(t)$  satisfaz a parte (c) do Lema 1.4.

### 1.2.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

A influência de uma perturbação sobre o sinal de saída também pode ser medida em termos da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do operador entrada/saída.

Seja o sistema dinâmico  $S_1$ , onde agora a entrada  $w \in \mathcal{L}_2^{n_w}$  e a saída  $z \in \mathcal{L}_2^{n_z}$ . Para cada sinal de entrada  $w \in \mathcal{L}_2^{n_w}$  pode-se calcular o ganho de energia deste sinal ao passar pelo sistema (1.7) calculando a energia da saída  $z = Gw$ , isto é,  $\|Gw\|_2$ , e dividindo pela energia da entrada  $\|w\|_2$ . O pior caso é o ganho  $\mathcal{L}_2$ , que representa o maior ganho obtido nesta relação entrada/saída.

O ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entrada/saída  $z = Gw$ , denotado por  $\|G_{wz}\|_{\mathcal{L}_2}$ , é definido formalmente como

$$\|G_{wz}\|_{\mathcal{L}_2} = \sup_w \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}, \quad \|w\|_2 \neq 0 \quad x_0 = 0.$$

O ganho  $\mathcal{L}_2$  expressa a maior amplificação possível que um dado sinal de entrada  $w$  pode sofrer ao passar pelo sistema. Aqui a amplificação é medida em termos da norma 2 de sinais na entrada e na saída do sistema.

Para o caso linear, o ganho  $\mathcal{L}_2$  é equivalente à norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência  $G_{wz}$ . Note que as diferenças entre as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  estão essencialmente nas características do sinal de entrada. A norma  $\mathcal{H}_2$  está associada à resposta ao impulso enquanto a norma  $\mathcal{H}_\infty$  considera a entrada que produz o maior ganho de energia que o sistema é capaz de produzir.

Não existe uma forma direta para o cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , mas um procedimento iterativo

para o cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  é obtido através do *bounded real lemma* (veja, por exemplo, [29]). No lema a seguir, apresenta-se a versão do *bounded real lemma* para sistemas variantes no tempo  $S_1$

**Lema 1.5** *Dado o sistema  $S_1$  e um escalar  $\gamma > 0$ , as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *existe uma matriz simétrica  $P(t) > 0$  tal que para todo  $t \in [0, \infty)$*

$$\begin{bmatrix} -\dot{P}(t) + P(t)A^T(t) + A(t)P(t) & P(t)C_z^T(t) & B_w(t) \\ C_z(t)P(t) & -\gamma I & 0 \\ B_w^T(t) & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.23)$$

(b) *existe uma matriz simétrica  $P(t) > 0$  tal que para todo  $t \in [0, \infty)$*

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) & P(t)B_w(t) & C_z^T(t) \\ B_w^T(t)P(t) & -\gamma I & 0 \\ C_z(t) & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.24)$$

(c) *o sistema  $S_1$  é exponencialmente estável e  $\|S_1\|_\infty < \gamma$ .*

□□□

### 1.2.3 Desempenho Robusto

Os problemas de análise e síntese robusta, tratados na Seção 1.1, incluem o problema de desempenho robusto, onde se deseja minimizar (ou verificar) a influência das perturbações na resposta de um sistema incerto. Neste caso, é possível aplicar os critérios de desempenho apresentados anteriormente.

Considere o sistema (1.7), onde assume-se que as matrizes do sistema são incertas, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_w(\theta)w, \quad x(0) = 0 \\ z &= C_z(\theta)x + D_{zw}(\theta)w, \end{aligned} \quad (1.25)$$

onde  $\theta$  é o vetor de parâmetros incertos e  $A(\theta)$ ,  $B_w(\theta)$ ,  $C_z(\theta)$  e  $D_{zw}(\theta)$  são matrizes afins em  $\theta$ . Assume-se que  $\theta$  pertence a um politopo  $\mathcal{B}_\theta$ .

Quando o sistema possui parâmetros incertos não é possível obter o valor exato da norma  $\mathcal{H}_2$ . Neste caso, através dos gramianos de controlabilidade e observabilidade, consegue-se calcular limitantes superiores para a norma 2. Ressalta-se, porém, que estes limitantes não

são equivalentes, para uma escolha particular da matriz  $P$ .

Na seqüência, apresenta-se o resultado para o cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$  através do gramiano de observabilidade. Não será apresentado o resultado baseado no gramiano de controlabilidade, conhecido também como o caso dual, que pode ser obtido de maneira similar.

**Lema 1.6** *Seja o sistema incerto (1.25) com  $D_{zw} = 0$  e  $\mathcal{B}_\theta$  um politopo dos  $\theta$  admissíveis. Um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$  é dado pela solução do seguinte problema convexo em  $P$  e  $W$  nos vértices do politopo  $\mathcal{B}_\theta$ .*

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{Tr}[W] : \text{sujeito à} \\ & \begin{bmatrix} A(\theta)^T P + PA(\theta) & C_z(\theta)^T \\ C_z(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} W & B_w(\theta)^T P \\ PB_w(\theta) & P \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Assim, tem-se que  $\|G_{wz}\|_2^2 < \mathbf{Tr}[W]$  para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ . □□□

A prova deste lema decorre da linearidade das condições no parâmetro  $\theta$ .

Para o caso da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , o resultado é obtido de forma semelhante e é apresentado a seguir:

**Lema 1.7** *Seja o sistema incerto (1.25) e  $\mathcal{B}_\theta$  um politopo dos  $\theta$  admissíveis. Um limitante para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é dado pela solução do problema convexo em  $P > 0$  e  $\gamma$  nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$ .*

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma : \text{sujeito à} \\ & \begin{bmatrix} PA(\theta) + A^T(\theta)P & PB_w(\theta) & C_z^T(\theta) \\ B_w^T(\theta)P & -\gamma I & D_{zw}^T(\theta) \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Assim, tem-se que  $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$  para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ . □□□

Estes resultados podem ser transpostos para funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, onde, agora, a matriz  $P$  é uma função de  $\theta$ , ou seja,  $P(\theta)$ . No entanto, as condições não são convexas no parâmetro incerto  $\theta$ . Ao longo desta tese, desenvolvem-se algumas soluções alternativas para este problema no contexto de filtragem robusta.

### 1.3 Sistemas a Tempo Discreto

As definições e as técnicas para o estudo dos critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  vistas, na seção anterior, para sistemas a tempo contínuo podem ser transpostas para sistemas a tempo discreto. Nesta seção, apresentam-se esses resultados para o caso de sistemas a tempo discreto variantes no tempo. Note que os resultados para sistemas invariantes no tempo são um caso particular desses resultados. Considere o seguinte sistema linear variante no tempo

$$\begin{aligned} S_D : \quad x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)w(k) \\ z(k) &= C(k)x(k) \end{aligned} \tag{1.28}$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada,  $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída e  $A(k)$ ,  $B(k)$  e  $C(k)$  são seqüências de matrizes reais e limitadas com dimensões apropriadas.

#### Norma $\mathcal{H}_2$

A seguir tem-se a definição da norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas a tempo discreto variantes no tempo.

**Definição 1.5** *Suponha que  $S_D$  é exponencialmente estável. A norma  $\mathcal{H}_2$  de  $S_D$  é definida como*

$$\|S_D\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z^T(k)z(k) \right]$$

quando  $x(0) = 0$  e  $w(k)$  é sinal de ruído branco com média nula e matriz de covariância unitária.

O próximo lema apresenta algumas caracterizações da norma  $\mathcal{H}_2$ .

**Lema 1.8 ([5])** *Considere o sistema  $S_D$ , as seguinte condições são verificadas:*

(a) *Se o sistema  $S_D$  é exponencialmente estável, então*

$$\begin{aligned} \|S_D\|_2^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Tr} [C(k)P(k)C^T(k)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Tr} [B^T(k-1)Q(k)B(k-1)] \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde  $P(k)$  e  $Q(k)$  satisfazem as seguintes equações à diferença de Lyapunov

$$P(k+1) = A(k)P(k)A^T(k) + B(k)B^T(k), \quad P(0) = 0 \quad (1.30)$$

$$Q(k) = A^T(k)Q(k+1)A(k) + C^T(k)C(k), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Q(N) = 0 \quad (1.31)$$

(b) Se existem seqüências limitadas de matrizes  $X(k)$  e  $W(k)$  tais que

$$\begin{bmatrix} X(k+1) - B(k)B^T(k) & A(k)X(k) \\ X(k)A^T(k) & X(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [0, \infty) \quad (1.32)$$

$$\begin{bmatrix} W(k) & C(k)X(k) \\ X(k)C^T(k) & X(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [1, \infty) \quad (1.33)$$

então o sistema  $S_D$  é exponencialmente estável e

$$\|S_D\|_2^2 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{Tr}[W(k)]. \quad (1.34)$$

(c) Se existem seqüências limitadas de matrizes  $Y(k)$  e  $W(k)$  tais que

$$\begin{bmatrix} Y(k) - C^T(k)C(k) & A^T(k)Y(k+1) \\ Y(k+1)A(k) & Y(k+1) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [0, \infty) \quad (1.35)$$

$$\begin{bmatrix} W(k) & B^T(k-1)Y(k) \\ Y(k)B(k-1) & Y(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [1, \infty) \quad (1.36)$$

então o sistema  $S_D$  é exponencialmente estável e

$$\|S_D\|_2^2 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{Tr}[W(k)]. \quad (1.37)$$

**Prova:** (a) Primeiro, note que a saída  $z(k)$  do sistema  $S_D$  com  $x(0) = 0$  é dada por

$$z(k) = \sum_{j=1}^k H(k, j-1)w(j-1), \quad k \geq 1 \quad (1.38)$$

onde

$$H(k, j) = C(k)\Phi(k, j+1)B(j), \quad j > k, \quad (1.39)$$

e  $\Phi(k, j)$  denota a matriz de transição de  $A(k)$ .

Assumindo que para um inteiro  $N > 0$  dado,  $w(k)$  é um ruído branco de média nula e matriz de covariância unitária, a função custo seja

$$J(N) = \mathbf{E} \left[ \sum_{k=1}^N z^T(k)z(k) \right].$$

e considerando (1.38) e (1.39), pode-se estabelecer que

$$\begin{aligned} J(N) &= \mathbf{E} \left[ \sum_{k=1}^N \mathbf{Tr} [z(k)z^T(k)] \right] \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \mathbf{Tr} [H(k, n-1)H^T(k, n-1)] \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbf{Tr} [C(k)M(k)C^T(k)] \end{aligned} \quad (1.40)$$

onde

$$M(k) = \begin{cases} \sum_{n=1}^k \Phi(k, n)B(n-1)B^T(n-1)\Phi^T(k, n), & k \geq 1 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

Além disso, verifica-se que  $M(k)$  satisfaz a equação à diferença de Lyapunov (1.30). Assim, como (1.30) tem uma solução única, conclui-se que  $M(k) = P(k)$  sobre  $[0, N]$ .

Agora, já que o sistema  $S_D$  é exponencialmente estável, segue que

$$\|S_D\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} J(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Tr} [C(k)P(k)C^T(k)].$$

Para provar a segunda expressão para a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema  $S_D$ , defina

$$R(k+1) = P(k+1)Q_N(k+1) - P(k)Q_N(k)$$

onde  $P(k)$  satisfaz (1.30) e  $Q_N(k)$  é a solução para

$$Q_N(k) = A^T(k)Q_N(k+1)A(k) + C^T(k)C(k), \quad Q_N(N+1) = 0. \quad (1.41)$$

Note que quando  $N \rightarrow \infty$ , tem-se que  $Q_N(k)$  coincide com  $Q(k)$  que satisfaz (1.31).

Com  $P(0) = 0$  e  $Q_N(N+1) = 0$ , segue que

$$\mathcal{R} = \sum_{k=0}^N R(k+1) = 0.$$

Levando em conta (1.30) e (1.41), isto implica que

$$\mathbf{Tr}[\mathcal{R}] = \sum_{k=0}^N \mathbf{Tr}[B^T(k)Q_N(k+1)B(k) - C(k)P(k)C^T(k)] = 0.$$

Resultando em

$$\|S_D\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Tr}[B^T(k-1)Q(k)B(k-1)].$$

(b) Primeiro, note que (1.32) implica que  $X(k) > 0$  sobre  $[0, \infty)$  e

$$\begin{bmatrix} X(k+1) & A(k) \\ A^T(k) & X^{-1}(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [0, \infty).$$

Além disto, pelo complemento de Schur, a desigualdade acima é equivalente à

$$A^T(k)X^{-1}(k+1)A(k) - X^{-1}(k) < 0, \quad \forall k \in [0, \infty).$$

Assim, segue que  $V(x, k) = x^T(k)X^{-1}(k)x(k)$  é uma função de Lyapunov para o sistema  $S_D$ , garantindo que este sistema é exponencialmente estável.

A seguir, pelo complemento de Schur, (1.32) e (1.33) são equivalentes, respectivamente, à

$$X(k+1) - A(k)X(k)A^T(k) - B(k)B^T(k) > 0$$

$$W(k) - C(k)X(k)C^T(k) > 0.$$

Isto implica que  $X(k) > P(k)$  sobre  $[0, \infty)$ , onde  $P(k)$  é a solução de (1.30), e assim o limitante superior  $\|S_D\|_2^2$  de (1.34) segue imediatamente.

(c) A prova é similar a da parte (b).  $\square\square\square$

Pode ser observado que  $V_X(x, k) = x^T(k)X^{-1}(k)x(k)$  e  $V_Y(x, k) = x^T(k)Y(k)x(k)$ , com  $X(k)$  e  $Y(k)$  satisfazendo as partes (b) e (c) do Lema 1.8, são funções de Lyapunov para o sistema não forçado associado à  $S_D$ .

Na seqüência, apresenta-se uma caracterização alternativa da norma  $\mathcal{H}_2$  no qual os produtos  $A(k)X(k)$  e  $C(k)X(k)$  que aparecem em (1.32) e (1.33) são substituídos por  $A(k)G(k)$  e  $C(k)G(k)$ , respectivamente, e os produtos  $Y(k+1)A(k)$  e  $Y(k)B(k-1)$  que aparecem em (1.35) e (1.36) são substituídos por  $G(k+1)A(k)$  e  $G(k)B(k-1)$ , respectivamente, onde  $G(k)$  é uma variável de folga. A parametrização  $G(k)$  foi proposta em [28] no contexto de análise da estabilidade de sistemas discretos invariantes no tempo. A novidade aqui é que os resultados são postos no contexto mais geral de sistemas variantes no tempo, permitindo que a função de Lyapunov seja agora dependente dos parâmetros variantes no tempo.

**Teorema 1.1** *Considere o sistema  $S_D$ , as seguintes condições são verificadas:*

(a) *Existem seqüências limitadas de matrizes  $X(k)$  e  $W(k)$  satisfazendo (1.32) e (1.33) se e somente se existirem seqüências limitadas de matrizes  $P(k) > 0$  e  $G(k)$  de forma que para a mesma matriz  $W(k)$*

$$\begin{bmatrix} P(k+1) - B(k)B^T(k) & A(k)G(k) \\ G^T(k)A^T(k) & G(k) + G^T(k) - P(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [0, \infty) \quad (1.42)$$

$$\begin{bmatrix} W(k) & C(k)G(k) \\ G^T(k)C^T(k) & G(k) + G^T(k) - P(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [1, \infty). \quad (1.43)$$

(b) *Existem seqüências limitadas de matrizes  $Y(k)$  e  $W(k)$  satisfazendo (1.35) e (1.36) se e somente se existirem seqüências limitadas  $P(k)$  e  $G(k)$  de forma que para a mesma matriz  $W(k)$*

$$\begin{bmatrix} P(k) - C^T(k)C(k) & A^T(k)G^T(k+1) \\ G(k+1)A(k) & G(k+1) + G^T(k+1) - P(k+1) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [0, \infty) \quad (1.44)$$

$$\begin{bmatrix} W(k) & B^T(k-1)G^T(k) \\ G(k)B(k-1) & G(k) + G^T(k) - P(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [1, \infty). \quad (1.45)$$

**Prova:** (a) A prova é inspirada na prova do Teorema 1 em [39].

*Necessidade:* Se existem matrizes  $X(k)$  e  $W(k)$  satisfazendo (1.32) e (1.33), então segue imediatamente que (1.42) e (1.43) estão satisfeitas com as matrizes  $W(k)$  e  $P(k) = G(k) = X(k)$ .

*Suficiência:* Primeiramente, segue de (1.42) que a matriz  $G(k)$  é não singular sobre  $[0, \infty)$ . Além disto, considerando que

$$[P(k) - G(k)]P^{-1}(k)[P(k) - G(k)]^T \geq 0, \quad \forall k \in [0, \infty)$$

resulta em

$$G(k) + G^T(k) - P(k) \leq G(k)P^{-1}(k)G^T(k).$$

Assim, (1.42) e (1.43) implicam que

$$\begin{bmatrix} P(k+1) - B(k)B^T(k) & A(k)G(k) \\ G^T(k)A^T(k) & G(k)P^{-1}(k)G^T(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [0, \infty)$$

$$\begin{bmatrix} W(k) & C(k)G(k) \\ G^T(k)C^T(k) & G(k)P^{-1}(k)G^T(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [1, \infty)$$

e o resultado segue imediatamente pela fato que  $G(k)$  é não singular sobre  $[0, \infty)$  e a aplicação do complemento de Schur.

(b) A prova é similar à prova da parte (a).

▽▽▽

### Norma $\mathcal{H}_\infty$

Nesta parte, apresenta-se a versão do *bounded real lemma* para o sistema a tempo discreto variante no tempo  $S_D$  dado em (1.28).

**Definição 1.6** *Suponha que o sistema  $S_D$  é exponencialmente estável. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $S_D$  é definida como*

$$\|S_D\|_\infty = \sup_w \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} : w \in \mathcal{L}_2, w \neq 0, x(0) = 0 \right\}$$

**Lema 1.9 ([84])** *Seja o sistema  $S_D$  e um escalar  $\gamma > 0$ , as seguintes condições são verificadas:*

(a) Se existe uma seqüência de matrizes limitada  $X(k)$  de forma que

$$\begin{bmatrix} X(k+1) & A(k)X(k) & B(k) & 0 \\ X(k)A^T(k) & X(k) & 0 & X(k)C^T(k) \\ B^T(k) & 0 & \gamma I & 0 \\ 0 & C(k)X(k) & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [0, \infty) \quad (1.46)$$

então o sistema  $S_D$  é exponencialmente estável e  $\|S_D\|_\infty < \gamma$

(b) Se existe uma seqüência de matrizes limitada  $Y(k)$  de forma que

$$\begin{bmatrix} Y(k) & A^T(k)Y(k+1) & 0 & C^T(k) \\ Y(k+1)A(k) & Y(k+1) & Y(k+1)B(k) & 0 \\ 0 & B^T(k)Y(k+1) & \gamma I & 0 \\ C(k) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall k \in [0, \infty) \quad (1.47)$$

então o sistema  $S_D$  é exponencialmente estável e  $\|S_D\|_\infty < \gamma$ . □□□

Pode ser notado que  $V_X(x, k) = x^T(k)X^{-1}(k)x(k)$  e  $V_Y(x, k) = x^T(k)Y(k)x(k)$ , com  $X(k)$  e  $Y(k)$  satisfazendo as partes (a) e (b) do Lema 1.9, são funções de Lyapunov para o sistema  $S_D$ .

Como no caso da norma  $\mathcal{H}_2$ , uma forma alternativa para o *Bounded real lemma* é apresentada na seqüência, na qual os produtos  $A_e(\theta)X(\theta)$  e  $C_e(\theta)X(\theta)$  que aparecem em (1.46) são substituídos por  $A_e(\theta)G(\theta)$  e  $C_e(\theta)G(\theta)$ , respectivamente, onde  $G(\theta)$  é uma variável de folga.

**Teorema 1.2** *Considere o sistema  $S_D$ , verificam-se as seguintes condições:*

(a) *Existe uma seqüência limitada de matrizes  $X(k)$  satisfazendo (1.46) se e somente se existirem duas seqüências limitadas de matrizes  $P(k) > 0$  e  $G(k)$  de forma que  $\forall k \in [0, \infty)$*

$$\begin{bmatrix} P(k+1) & A(k)G(k) & B(k) & 0 \\ G^T(k)A^T(k) & G(k) + G^T(k) - P(k) & 0 & G^T(k)C^T(k) \\ B^T(k) & 0 & \gamma I & 0 \\ 0 & C(k)G(k) & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (1.48)$$

(b) *Existe uma seqüência limitada de matrizes  $Y(k)$  satisfazendo (1.47) se e somente se*

existirem duas seqüências limitadas de matrizes  $P(k)$  e  $G(k)$  de forma que  $\forall k \in [0, \infty)$

$$\begin{bmatrix} P(k) & A^T(k)G^T(k+1) & 0 & C^T(k) \\ G(k+1)A(k) & G(k+1) + G^T(k+1) - P(k+1) & G(k+1)B(k) & 0 \\ 0 & B^T(k)G^T(k+1) & \gamma I & 0 \\ C(k) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (1.49)$$

**Prova:** A prova é similar à prova do Teorema 1.1.

▽▽▽



## Capítulo 2

# Sistemas a Tempo Contínuo

O intuito deste capítulo é o de formalizar o problema de filtragem robusta para sistemas lineares a tempo contínuo. Soluções alternativas são apresentadas para o projeto de filtros robustos baseado em funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros incertos do sistema. Aborda-se tanto o caso de sistemas invariantes no tempo quanto o de sistemas variantes no tempo, através de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). A característica básica é conseguir uma formulação convexa para o problema de filtragem através da utilização de transformações e mudanças de variáveis.

### 2.1 Formulação do Problema

O problema principal, a ser tratado nesta tese, é o projeto de filtros robustos para sistemas incertos usando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Inicialmente, estuda-se o problema de filtragem para sistemas lineares a tempo contínuo variantes no tempo descritos por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))w(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= C_z(\theta(t))x(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

com  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p] \in \mathbb{R}^p$ , onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $x_0$  é uma condição inicial,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é uma entrada externa, (que pode ser um sinal de ruído branco com média nula e variância conhecida ou um sinal limitado pertencente à  $\mathcal{L}_2$ ),  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  representa o sinal a ser estimado e  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida. As matrizes  $A, B, C, D, C_z$  são funções afins do parâmetro  $\theta_i$ , onde  $\theta_i, i = 1, \dots, p$  são parâmetros reais limitados com taxa de variação limitada  $\dot{\theta}_i(t)$ .

Assume-se que  $(\theta(t), \dot{\theta}(t)), \forall t \geq 0$  pertençam a um politopo  $\mathcal{B}$  com  $\ell$  conhecidos vértices e  $\theta(t)$  pertença ao politopo  $\mathcal{B}_\theta$  com  $\ell_\theta$  vértices.

Observe que a classe de sistemas onde os sinais de entrada e ruído de medida são distintos, é um caso particular do sistema (2.1). Isso pode ser verificado ao assumir que  $w(t) = [w'_1 \ w'_2]'$  e que as matrizes  $B$  e  $D$  são iguais à  $[B \ 0]$  e  $[0 \ D]$ , respectivamente.

O objetivo principal, deste trabalho, é projetar um filtro  $\mathcal{F}$  linear e assintoticamente estável que garanta uma estimativa  $\hat{z}$  do sinal  $z$  com um desempenho garantido no sentido  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  independente das incertezas presentes no modelo. Mais especificamente, busca-se projetar um filtro linear invariante no tempo de ordem  $n$  com a seguinte realização no espaço dos estados

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \dot{\hat{x}}(t) &= A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(t) &= C_f \hat{x}(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde as matrizes  $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_f \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  e  $C_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$  devem ser encontradas.

A dinâmica do erro de estimação  $e = z - \hat{z}$ , considerando o sistema (2.1) e o filtro (2.2), pode ser descrita pelo seguinte modelo no espaço de estados

$$\begin{aligned} S_e : \quad \dot{\xi}(t) &= A_a(\theta)\xi(t) + B_a(\theta)w(t) \\ e(t) &= C_a(\theta)\xi(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad A_a(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & 0 \\ B_f C(\theta) & A_f \end{bmatrix}, \\ B_a(\theta) &= \begin{bmatrix} B(\theta) \\ B_f D(\theta) \end{bmatrix}, \quad C_a(\theta) = \begin{bmatrix} C_z(\theta) & -C_f \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

O problema de filtragem consiste em encontrar um filtro  $\mathcal{F}$  que assegure a estabilidade exponencial do sistema  $S_e$ , de forma que o ganho entre o sinal de entrada  $w$  e o erro de estimação seja minimizado através de algum critério de desempenho. A escolha de qual critério de desempenho será utilizado depende da característica do sinal de perturbação  $w$ .

Quando o sinal de entrada  $w$  é um sinal do tipo ruído branco, com média nula e matriz de covariância unitária, utiliza-se o critério de desempenho  $\mathcal{H}_2$ , sendo que o problema de filtragem é dado por:

**Problema  $\mathcal{H}_2$**  : *Projetar um filtro  $\mathcal{F}$  que assegure a estabilidade exponencial para a dinâmica do erro de estimação  $S_e$  e minimize um limitante superior  $\mu(\mathcal{F})$  do quadrado da norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema  $S_e$ , isto é,*

$$\min_{\mathcal{F}} \mu(\mathcal{F}) : \|S_e\|_2^2 < \mu(\mathcal{F}) \quad \forall(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (2.5)$$

quando  $x_0$  é uma variável aleatória não correlacionada com  $w$ .

No entanto, se o sistema (2.1) for sujeito a perturbações arbitrárias com energia ou potência média limitada, busca-se uma solução para o seguinte problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ :

**Problema  $\mathcal{H}_\infty$**  : *Projetar um filtro  $\mathcal{F}$  que assegure a estabilidade exponencial para a dinâmica do erro de estimação  $S_e$  e minimize um limitante superior  $\mu_\infty(\mathcal{F})$  da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema  $S_e$ , isto é,*

$$\min_{\mathcal{F}} \mu_\infty(\mathcal{F}) : \|S_e\|_\infty \leq \mu_\infty(\mathcal{F}) \quad \forall(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (2.6)$$

Perceba que a solução dos problemas acima é obtida pela aplicação dos critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  vistos na Seção 1.2 para sistemas variantes no tempo, considerando o sistema do erro de estimação  $S_e$  e assumindo que a matriz  $P(t)$  seja uma função de  $\theta$ , dada por  $P(\theta)$ . Note que as desigualdades dos Lemas 1.4 e 1.5 com a matriz  $P(t) = P(\theta)$  são funções não convexas em  $\theta$ , nas matrizes do filtro e na matriz  $P(\theta)$ , mesmo quando  $P(\theta)$  for constante. Por isso, o problema de encontrar  $A_f$ ,  $B_f$  e  $C_f$  juntamente com a matriz  $P(\theta)$  dependente de parâmetros é uma tarefa complicada. Nos casos onde a matriz  $P(\theta)$  independe de  $\theta$ , métodos LMI para o projeto de filtros foram desenvolvidos em [31, 37, 38]. Por outro lado, em [76] tem-se a apresentação de um novo método  $\mathcal{H}_2$  baseado na parte (a) do Lema 1.4 usando uma matriz  $P(\theta)$  que depende de forma afim do parâmetro  $\theta$ , quando este é constante. O Exemplo 2.2 mostra que esta abordagem pode ser restritiva em algumas aplicações.

Ao longo deste capítulo, apresentam-se soluções para os **Problemas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$**  utilizando funções de Lyapunov que são dependentes de parâmetros. Primeiro, considera-se o projeto de filtros para sistemas que são invariantes no tempo, assumindo que os parâmetros  $\theta_i$  são constantes. Em seguida, apresentam-se os resultados obtidos para o caso de sistemas variantes no tempo, no qual considera-se a taxa de variação dos parâmetros.

## 2.2 Sistemas Invariantes no Tempo

Nesta seção, assume-se que o sistema incerto (2.1) é invariante no tempo, ou seja, que os parâmetros incertos tem taxa de variação nula. Inicialmente, aborda-se o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  e em seguida, o caso de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ . A solução proposta para o caso  $\mathcal{H}_2$  foi publicada em [4].

### 2.2.1 Filtros $\mathcal{H}_2$

O **Problema  $\mathcal{H}_2$**  para o caso de sistemas invariantes no tempo sujeito a perturbações do tipo ruído branco, como visto no Capítulo 1, pode ser interpretado como um problema de minimização do limitante superior  $\mu(\mathcal{F})$  do pior caso da variância assintótica do erro de estimação, garantindo que a dinâmica do erro de estimação  $S_e$  seja assintoticamente estável, isto é,

$$\min_{\mathcal{F}} \mu(\mathcal{F}) : \sup_{\theta \in \mathcal{B}_\theta} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[(z(t) - \hat{z}(t))^T(z(t) - \hat{z}(t))] \leq \mu(\mathcal{F}) \quad (2.7)$$

Os resultados propostos nesta seção são baseados nas partes (b) e (c) do Lema 1.4, aplicado ao sistema do erro de estimação  $S_e$ , com a matriz  $P(t) = P(\theta)$  com  $\dot{\theta} = 0$ . O primeiro problema a ser tratado busca projetar um filtro  $\mathcal{F}$  de forma que existam matrizes simétricas  $P(\theta)$  e  $W(\theta)$ , convexas em  $\theta$ , que satisfaçam as seguintes desigualdades para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ :

$$\begin{bmatrix} P(\theta)A_a^T(\theta) + A_a(\theta)P(\theta) & B_a(\theta) \\ B_a^T(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & C_a(\theta)P(\theta) \\ P(\theta)C_a^T(\theta) & P(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.9)$$

Pelo Lema 1.4(b), pode-se afirmar que o sistema do erro de estimação (2.3) é assintoticamente estável para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  e

$$\sup_{\theta \in \mathcal{B}_\theta} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] < \mu; \quad \mu = \sup_{\theta \in \mathcal{B}_\theta} \text{Tr}[W(\theta)]. \quad (2.10)$$

De forma semelhante, pode-se projetar o filtro através do gramiano de observabilidade. Neste caso, busca-se solucionar as desigualdades (1.20)-(1.21), ou seja, deseja-se encontrar as matrizes simétricas  $P(\theta)$  e  $W(\theta)$  e as matrizes do filtro de forma que para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  as

seguintes desigualdades sejam satisfeitas

$$\begin{bmatrix} P(\theta)A_a(\theta) + A_a^T(\theta)P(\theta) & C_a^T(\theta) \\ C_a(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & B_a^T(\theta)P(\theta) \\ P(\theta)B_a(\theta) & P(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.12)$$

Um ponto importante no projeto do filtro usando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros é a escolha da estrutura da matriz  $P(\theta)$  a ser utilizada. Nesta seção, os resultados são desenvolvidos considerando

$$P(\theta) = M^T N^{-1}(\theta) M > 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{B}_\theta \quad (2.13)$$

onde  $N(\theta)$  é uma matriz positiva definida afim em  $\theta$  e  $M$  é uma matriz inversível.

O primeiro resultado apresenta o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  baseado nas desigualdades (2.8) e (2.9) juntamente com a parte (b) do Lema 1.4, com a matriz  $P(\theta)$  definida em (2.13). Com isso, a função de Lyapunov é dada por  $V(\xi, \theta) = \xi^T P(\theta)^{-1} \xi$ , que é afim em  $\theta$ . A seguir, apresenta-se um lema auxiliar para o projeto de filtros baseado no Lema de Finsler, considerando essa função de Lyapunov:

**Lema 2.1** *Considere o sistema (2.1) e seja  $\epsilon$  um escalar positivo dado. Então as desigualdades (2.8) e (2.9) são satisfeitas com matrizes  $W(\theta)$  e  $P(\theta)$  da forma (2.13) se existirem matrizes  $W(\theta) > 0$ ,  $N(\theta) > 0$  e  $M$  de forma que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ .*

$$\begin{bmatrix} MA_a^T(\theta) + A_a(\theta)M^T & M^T - N(\theta) + \epsilon A_a(\theta)M^T & B_a(\theta) \\ M + \epsilon MA_a^T(\theta) - N(\theta) & -2\epsilon N(\theta) & 0 \\ B_a^T(\theta) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & C_a M^T \\ MC_a^T(\theta) & N(\theta) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.15)$$

**Prova:** Assumindo que as condições acima são satisfeitas, tem-se que  $N(\theta)$  é uma matriz regular. Defina assim a seguinte matriz

$$N_f = \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ N^{-1}(\theta)MA_a^T(\theta) & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Pré- e pós-multiplicando a desigualdade (2.14) por  $N_f^T$  e  $N_f$ , respectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} M^T N^{-1}(\theta)MA_a^T(\theta) + A_a(\theta)M^T N^{-1}(\theta)M & B_a(\theta) \\ B_a^T(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.17)$$

Pela definição de  $P(\theta)$  em (2.13), esta desigualdade implica em (2.8).

Considere (2.15), aplicando o complemento de Schur tem-se:

$$W(\theta) + C_a M^T N^{-1}(\theta) M C_a^T > 0,$$

pela definição de  $P(\theta)$ , esta desigualdade implica em (2.9), concluindo a prova.  $\square\square\square$

Observe que as condições (2.14) e (2.15) não são convexas na matriz  $M$  e nas matrizes do filtro, mas são convexas em  $\theta$ . Por isso, se as matrizes do filtro são dadas, estas desigualdades podem ser testadas via LMI. Como o objetivo é o projeto de filtro robusto  $\mathcal{H}_2$ , faz-se necessário, então, o uso de transformações de congruências e mudanças de variáveis de forma a linearizar as condições do Lema 2.1. O seguinte teorema apresenta este resultado

**Teorema 2.1** *Considere o sistema (2.1) e seja  $\mathcal{B}_\theta$  um politopo dos  $\theta$  admissíveis. Suponha que para algum escalar  $\epsilon > 0$  existam matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes simétricas  $\mathcal{N}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  e  $W_i \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $i = 1, \dots, \ell_\theta$  de forma que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$*

$$\begin{bmatrix} \Psi_A(\theta) + \Psi_A^T(\theta) & \star & \star \\ \Psi_M^T + \epsilon \Psi_A^T(\theta) - \mathcal{N}(\theta) & -2\epsilon \mathcal{N}(\theta) & \star \\ \Psi_B^T(\theta) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \Psi_C(\theta) \\ \Psi_C^T(\theta) & \mathcal{N}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.19)$$

onde  $W(\theta)$  e  $\mathcal{N}(\theta)$  são funções matriciais afins em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$  e  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{\ell_\theta}$ ,

respectivamente, nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$  e

$$\begin{aligned}\Psi_A(\theta) &= \begin{bmatrix} ZA(\theta) & ZA(\theta) \\ YA(\theta) + FC(\theta) + Q & YA(\theta) + FC(\theta) \end{bmatrix}, \\ \Psi_B(\theta) &= \begin{bmatrix} ZB(\theta) \\ YB(\theta) + FD(\theta) \end{bmatrix}, \\ \Psi_C(\theta) &= \begin{bmatrix} C_z(\theta) - R & C_z(\theta) \end{bmatrix}, \quad \Psi_M = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Y + S & Y \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Então o filtro  $\mathcal{F}$  com a matriz de transferência

$$G_{zy}(s) = RS^{-1}(sI - QS^{-1})^{-1}F\tag{2.21}$$

assegura que o sistema do erro de estimação (2.3) é assintoticamente estável para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  e a variância assintótica do erro de estimação satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] < \max_{i=1, \dots, \ell_\theta} \text{Tr}[W_i], \quad \forall \theta \in \mathcal{B}_\theta.\tag{2.22}$$

**Prova:** Primeiro, note que as desigualdades (2.18) e (2.19) são afins em  $\theta$  para um dado  $\epsilon > 0$ . Assim, pela propriedade de convexidade pode-se afirmar que estas desigualdades serão satisfeitas para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  se e somente se (2.18) e (2.19) estiverem satisfeitas para todos os vértices de  $\mathcal{B}_\theta$ .

O objetivo da prova é mostrar a equivalência entre as desigualdades (2.18) e (2.19) e as condições (2.14) e (2.15), garantindo assim pelo Lema 2.1 que as condições (2.8) e (2.9) também são satisfeitas.

Primeiro, mostra-se que as matrizes  $S$ ,  $Y$  e  $Z$  são não singulares. Para tal, pré- e pós-multiplique (2.18) por  $[\epsilon I \quad -I \quad 0]$  e sua transposta, respectivamente, resultando em

$$\Psi_M + \Psi_M^T = \begin{bmatrix} Z + Z^T & Y^T + S^T + Z \\ Y + S + Z^T & Y + Y^T \end{bmatrix} > 0,\tag{2.23}$$

o que implica que  $Z$  e  $Y$  são matrizes não singulares. Além disso, pré- e pós-multiplicando a desigualdade acima por  $[I \quad -I]$  e sua transposta, respectivamente, implica que  $S + S^T < 0$ , e assim,  $S$  é uma matriz não singular.

Inspirado por [37], defina as matrizes não singulares  $U$  e  $V$  de forma que  $VUZ^T = S$  e

$$M^T = \begin{bmatrix} Z^{-T} & \hat{U}^T \\ U & \hat{X}^T \end{bmatrix}, \quad M^{-T} = \begin{bmatrix} Y^T & \hat{V}^T \\ V^T & \hat{Y}^T \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Deve ser notado que dada as matrizes não singulares  $U$ ,  $V$ ,  $Y$  e  $Z$ , as matrizes  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$ ,  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  são unicamente definidas, através da relação de igualdade  $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ , obtendo

$$\hat{U} = V^{-1} - V^{-1}YZ^{-1}, \quad \hat{V} = U^{-T} - U^{-T}Z^{-1}Y, \quad \hat{X} = -V^{-1}YU^T, \quad \hat{Y} = -U^{-T}Z^{-1}V.$$

Além disto, defina a seguinte realização no espaço de estados para o filtro (2.21)

$$A_f = V^{-1}QS^{-1}V, \quad B_f = V^{-1}F, \quad C_f = RS^{-1}V \quad (2.25)$$

e sejam as matrizes não singulares

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} Z^T & Y^T \\ 0 & V^T \end{bmatrix}, \quad N(\theta) = \mathcal{T}^{-T}N(\theta)\mathcal{T}^{-1}. \quad (2.26)$$

Considerando as matrizes em (2.20), (2.24)-(2.26), tem-se que  $\Psi_A(\theta) = \mathcal{T}^T M^T A_a(\theta) M^T \mathcal{T}$ ,  $\Psi_B(\theta) = B_a(\theta)\mathcal{T}$  e  $\Psi_M(\theta) = \mathcal{T}^T M^T \mathcal{T}$ . É possível assim através de manipulações matriciais verificar que (2.17) é equivalente à

$$\mathcal{T}_a^T \Phi \mathcal{T}_a < 0 \quad (2.27)$$

onde  $\mathcal{T}_a = \text{diag}\{\mathcal{T}, \mathcal{T}, I_{n_w}\}$  e

$$\Phi = \begin{bmatrix} MA_a^T(\theta) + A_a(\theta)M^T & M^T - N(\theta) + \epsilon A_a(\theta)M^T & B_a(\theta) \\ M + \epsilon MA_a^T(\theta) - N(\theta) & -2\epsilon N(\theta) & 0 \\ B_a^T(\theta) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0.$$

Concluindo pelo Lema 2.1, que (2.8) é satisfeita com  $P(\theta) = M^T N^{-1}(\theta)M$ .

Por outro lado, usando o complemento de Schur, (2.19) é equivalente à

$$W(\theta) - \Psi_C(\theta)N^{-1}(\theta)\Psi_C^T(\theta) > 0. \quad (2.28)$$

Considerando as definições de  $\Psi_C(\theta)$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $M$  verifica-se que  $\Psi_C(\theta) = C_a(\theta)M^T\mathcal{T}$ . Resultando, então, que (2.28) é satisfeita se e somente se

$$W(\theta) - C_a(\theta)M^TN^{-1}(\theta)MC_a^T(\theta) > 0 \quad (2.29)$$

que é equivalente à desigualdade (2.9) com  $P(\theta) = M^TN^{-1}(\theta)M$ .

Finalizando, pelo Lema 1.4 conclui-se que para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ , o sistema do erro de estimação (2.3) é assintoticamente estável e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] < \sup_{\theta \in \mathcal{B}_\theta} \text{Tr}[W(\theta)] < \max_{i=1, \dots, \ell_\theta} \text{Tr}[W_i] \quad (2.30)$$

□□□

O Teorema 2.1 fornece um método LMI para o projeto de filtros robusto  $\mathcal{H}_2$  para sistemas incertos (2.1), usando uma função de Lyapunov que é racional nos parâmetros incertos. Observe que o limitante superior (2.22) da variância assintótica do erro de estimação é também dependente dos parâmetros incertos do sistema.

Note que, para um dado  $\epsilon > 0$ , o limitante superior da variância assintótica do erro de estimação é uma função convexa das variáveis de busca. Desta forma, o projeto do filtro que minimiza esse limitante, pode ser determinado via o seguinte problema de otimização convexa:

$$\begin{aligned} & \min \quad \mu \\ & \text{sujeito à (2.18) e (2.19), para } \theta \text{ nos vértices de } \mathcal{B}_\theta, \text{ e} \\ & \mu - \text{Tr}[W_i] \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Além disto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] < \mu$ . Observe que  $\mu$  depende do parâmetro  $\epsilon$  e assim, uma questão é como encontrar o valor de  $\epsilon > 0$  que minimize o limitante superior  $\mu$ .

É importante salientar que (2.18) não é convexa conjuntamente nas variáveis de busca e  $\epsilon$ , podendo, em alguns casos, não ser satisfeita para valores muito grandes de  $\epsilon$  ou muito pequenos. Uma alternativa para a escolha do valor de  $\epsilon > 0$  que minimize  $\mu$  pode ser dada através de uma busca unidimensional em  $\epsilon$ . Na última seção comenta-se mais sobre a escolha deste parâmetro.

Da prova do Teorema 2.1, é possível estabelecer que este teorema tem como caso particular o projeto de filtros baseado na noção de estabilidade quadrática, quando restringe-se a matriz  $\mathcal{N}(\theta)$  a ser independente do parâmetro incerto  $\theta$ , ou seja, fazendo  $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}$ ,  $i = 1, \dots, \ell_\theta$ .

Além disto, como será mostrado no próximo Lema, as condições do Teorema 2.1 com estas restrições são necessárias para (2.8) e (2.9) serem satisfeitas com a matriz  $P(\theta)$  independente de parâmetros.

**Lema 2.2** *Considere o sistema (2.1) e suponha que exista um filtro assintoticamente estável com realização no espaço de estados  $(A_f, B_f, C_f)$  de forma que o sistema do erro de estimação (2.3) satisfaça (2.8) e (2.9) com  $P(\theta) = Q_0$  e  $W(\theta)$  sendo uma função afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$  nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$ . Então as condições do Teorema 2.1 são satisfeitas com a mesma matriz  $W(\theta)$  e um  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno.*

**Prova:** Introduza a seguinte partição de  $Q_0$  e  $Q_0^{-1}$ , onde todos os blocos tem dimensão  $n \times n$ .

$$Q_0 = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}, \quad Q_0^{-1} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ \Xi_2^T & \Xi_3 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Sem perda de generalidade, assuma que as matrizes  $Q_2$  e  $\Xi_2$  são não singulares. Além disto, defina as matrizes

$$\begin{aligned} Z &= Q_1^{-1}, \quad Y = \Xi_1, \quad F = \Xi_2 B_f, \\ S &= \Xi_2 Q_2^T Q_1^{-1}, \quad Q = \Xi_2 A_f Q_2^T Q_1^{-1}, \\ R &= C_f Q_2^T Q_1^{-1}, \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} Q_1^{-1} & \Xi_1 \\ 0 & \Xi_2^T \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} = \mathcal{T}^T Q_0 \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como  $\theta$  pertence a um polítopo limitado, segue de (2.8) e (2.9) que existe um escalar  $\alpha > 0$  suficientemente pequeno de maneira que para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A_a(\theta)Q_0 + Q_0 A_a^T(\theta) + \frac{\alpha}{2} A_a(\theta) Q_0 A_a^T(\theta) & B_a(\theta) \\ B_a^T(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0, \\ &\begin{bmatrix} W(\theta) & C_a(\theta)Q_0 \\ Q_0 C_a^T(\theta) & Q_0 \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Com as matrizes  $F, \mathcal{N}, Q, R, S, Y$  e  $Z$  definidas em (2.32) e (2.31) e  $\epsilon = \alpha$ , conclui-se que o lado esquerdo de (2.18) e (2.19), denotado por  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , respectivamente, torna-se

$$\Phi_1 = \bar{T}^T \begin{bmatrix} Q_0 A_a^T(\theta) + A_a(\theta) Q_0 & \star & \star \\ \alpha Q_0 A_a^T(\theta) & -2\alpha Q_0 & \star \\ B_a^T(\theta) & 0 & -I \end{bmatrix} \bar{T} \quad (2.34)$$

$$\Phi_2 = \hat{T}^T \begin{bmatrix} W(\theta) & C_a(\theta) Q_0 \\ Q_0 C_a^T(\theta) & Q_0 \end{bmatrix} \hat{T} \quad (2.35)$$

onde  $\bar{T} = \text{diag}\{\mathcal{T}, \mathcal{T}, I_{n_w}\}$ ,  $\hat{T} = \text{diag}\{I_{n_z}, \mathcal{T}\}$ .

Aplicando o complemento Schur e considerando (2.33), tem-se que  $\Phi_1 < 0$  e  $\Phi_2 > 0$ , concluindo a prova.  $\square\square\square$

Pelo resultado apresentado no Lema 2.2, verifica-se que o método de filtragem  $\mathcal{H}_2$  proposto no Teorema 2.1 com  $\mathcal{N}(\theta)$  independente de  $\theta$  e com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno é equivalente ao projeto LMI de filtros baseados na noção de estabilidade quadrática, semelhante ao proposto por [37].

O próximo Teorema apresenta a versão “dual” do Teorema 2.1 para o projeto de filtros robusto  $\mathcal{H}_2$ . Este método é baseado nas desigualdades (2.11) e (2.12) e na parte (c) do Lema 1.4 com a matriz  $P(\theta)$  dada em (2.13), resultando que a função de Lyapunov utilizada seja racional nos parâmetros  $\theta$ . Um lema auxiliar semelhante ao Lema 2.1 pode ser descrito para este caso, mas neste texto apresenta-se na seqüência apenas o resultado principal.

**Teorema 2.2** *Considere o sistema (2.1) e seja  $\mathcal{B}_\theta$  um politopo dos  $\theta$  admissíveis. Suponha que para algum escalar  $\epsilon > 0$  existam matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes simétricas  $\mathcal{N}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  e  $W_i \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ ,  $i = 1, \dots, \ell_\theta$  de forma que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas para todos os vértices de  $\mathcal{B}_\theta$*

$$\begin{bmatrix} \Psi_A^T(\theta) + \Psi_A(\theta) & \star & \star \\ \Psi_M^T + \epsilon \Psi_A(\theta) - \mathcal{N}(\theta) & -2\epsilon \mathcal{N}(\theta) & \star \\ \Psi_C(\theta) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.36)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \Psi_B^T(\theta) \\ \Psi_B(\theta) & \mathcal{N}(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.37)$$

onde  $W(\theta)$  e  $\mathcal{N}(\theta)$  são matrizes afins em  $\theta$ , com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$  e  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{\ell_\theta}$ , respecti-

vamente, nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$  e  $\Psi_A(\theta)$ ,  $\Psi_B(\theta)$ ,  $\Psi_C(\theta)$  e  $\Psi_M$  estão definidas em (2.20). Então o filtro  $\mathcal{F}$  com matriz de transferência

$$G_{\hat{z}_y}(s) = RS^{-1}(sI - QS^{-1})^{-1}F \quad (2.38)$$

garante que o sistema do erro de estimação (2.3) é assintoticamente estável para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  e a variância assintótica do erro de estimação satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] < \max_{i=1, \dots, \ell} \text{Tr}[W_i], \quad \forall \theta \in \mathcal{B}. \quad (2.39)$$

**Prova:** A prova é similar à do Teorema 2.1, exceto que agora considera-se que

$$M^T = \begin{bmatrix} Y^T & \hat{V}^T \\ V^T & \hat{Y}^T \end{bmatrix}, \quad M^{-T} = \begin{bmatrix} Z^{-T} & \hat{U}^T \\ U & \hat{X}^T \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

e a matriz  $M^{-T}\mathcal{T}$  é usada ao invés de  $\mathcal{T}$ . ▽▽▽

Note que, as observações referentes ao Teorema 2.1 são também aplicáveis ao Teorema 2.2. O próximo resultado é similar ao o Lema 2.2.

**Lema 2.3** *Considere o sistema (2.1) e suponha que exista um filtro assintoticamente estável com realização no espaço de estados dado por  $(A_f, B_f, C_f)$  de forma que o sistemas do erro de estimação (2.3) satisfaça (2.11) e (2.12) com  $P(\theta) = Q_0$  e  $W(\theta)$ , que é afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_\ell$  nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$ . Então as condições do Teorema 2.2 estão satisfeitas com a mesma matriz  $W(\theta)$  e  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno. □□□*

É importante ressaltar que os métodos de filtragem propostos pelos Teoremas 2.1 e 2.2 não são equivalentes e, em geral, tem-se diferentes filtros e limitantes superiores para a variância assintótica do erro de estimação. Em aplicações, ambas as abordagens devem ser testadas e a que fornecer o melhor resultado, em termos do desempenho garantido  $\mathcal{H}_2$ , deverá ser adotada.

## 2.2.2 Filtros $\mathcal{H}_\infty$

Nesta subsecção, busca-se uma solução para o **Problema  $\mathcal{H}_\infty$**  utilizando funções de Lyapunov que são dependente de parâmetros. Este problema é solucionado através da aplicação do *Bounded Real Lemma* apresentado na Seção 1.2 no caso de sistemas variantes no tempo ao

sistema do erro de estimação  $S_e$ . O problema consiste em: dado um escalar  $\gamma > 0$ , projetar um filtro  $\mathcal{F}$  e encontrar matrizes simétricas  $P(\theta)$  e  $W(\theta)$ , convexas em  $\theta$ , de forma que a seguinte desigualdade seja satisfeita para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ :

$$\begin{bmatrix} P(\theta)A_a^T(\theta) + A_a(\theta)P(\theta) & P(\theta)C_a^T & B_a(\theta) \\ C_aP(\theta) & -\gamma I & 0 \\ B_a^T(\theta) & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.41)$$

Pelo Lema 1.5, tem-se que o sistema do erro de estimação (2.3) é assintoticamente estável para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  e  $\|S_e\|_\infty < \gamma$ .

De maneira similar ao projeto de filtro  $\mathcal{H}_2$ , assume-se que a matriz  $P(\theta)$  é descrita por (2.13). Considerando (2.41), a parte (a) do Lema 1.5 e esta descrição para matriz  $P(\theta)$  propõe-se o seguinte lema auxiliar para o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Lema 2.4** *Considere o sistema (2.1) e sejam os seguintes escalares positivos  $\gamma$ ,  $\epsilon$  e  $\epsilon_2$  dados. Então a desigualdade (2.41) é satisfeita com uma matriz  $P(\theta)$  da forma (2.13) e para o mesmo  $\gamma$  se existirem uma matriz  $N(\theta) > 0$  e uma matriz  $M$  de forma que a seguinte desigualdade seja satisfeita para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ .*

$$\begin{bmatrix} MA_a^T(\theta) + A_a(\theta)M^T & \star & \star & \star & \star \\ M + \epsilon MA_a^T(\theta) - N(\theta) & -2\epsilon N(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ C_a(\theta)M & 0 & -\gamma I & \star & 0 \\ M - N(\theta) & 0 & \epsilon_2 MC_a(\theta)^T & -2\epsilon_2 N(\theta) & 0 \\ B_a^T(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.42)$$

**Prova:** Assumindo que (2.42) seja satisfeita, garante-se que  $N(\theta)$  é uma matriz regular, sendo possível definir a seguinte matriz

$$N_h = \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 & 0 \\ N^{-1}(\theta)MA_a^T(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_z} & 0 \\ 0 & N^{-1}(\theta)MC_a^T(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Pré- e pós-multiplicando a desigualdade (2.45) por  $N_h^T$  e  $N_h$ , respectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} M^T N^{-1}(\theta) M A_a^T(\theta) + A_a(\theta) M^T N^{-1}(\theta) M & M^T N^{-1}(\theta) M C_a^T(\theta) & B_a^T(\theta) \\ C_a(\theta) M^T N^{-1}(\theta) M & -\gamma I & 0 \\ B_a^T(\theta) & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.44)$$

Pela definição de  $P(\theta)$  em (2.13) esta desigualdade implica em (2.41).  $\square\square\square$

Como a desigualdade (2.42) não é convexa em  $M$ ,  $N(\theta)$  e nas matrizes do filtro, apesar de ser convexa em  $\theta$ , este método serve apenas como um teste LMI quando as matrizes do filtro são dadas. O próximo teorema fornece condições suficientes para o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$ , e é baseado nas mesmas transformações e mudanças de variáveis usadas no caso  $\mathcal{H}_2$ .

**Teorema 2.3** *Considere o sistema (2.1) e seja  $\mathcal{B}_\theta$  um politopo dos  $\theta$  admissíveis e  $\gamma$  um escalar dado. Suponha que para algum escalar  $\epsilon > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$  existam matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes simétricas  $\mathcal{N}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$   $i = 1, \dots, \ell_\theta$  de forma que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$*

$$\begin{bmatrix} \Psi_A(\theta) + \Psi_A^T(\theta) & \star & \star & \star & \star \\ \Psi_M^T + \epsilon \Psi_A^T(\theta) - \mathcal{N}(\theta) & -2\epsilon \mathcal{N}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_C(\theta) & 0 & -\gamma I & \epsilon_2 \Psi_C & 0 \\ \Psi_M^T - \mathcal{N}(\theta) & 0 & \epsilon_2 \Psi_C^T & -2\epsilon_2 \mathcal{N}(\theta) & 0 \\ \Psi_B^T(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.45)$$

onde  $\mathcal{N}(\theta)$  é uma função matricial afim em  $\theta$  com valores  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{\ell_\theta}$  nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$  e  $\Psi_A(\theta)$ ,  $\Psi_B(\theta)$ ,  $\Psi_C(\theta)$  e  $\Psi_M(\theta)$  são definidas em (2.20). Então o filtro  $\mathcal{F}$  com a matriz de transferência

$$G_{\hat{z}y}(s) = RS^{-1}(sI - QS^{-1})^{-1}F \quad (2.46)$$

assegura que o sistema do erro de estimação (2.3) é assintoticamente estável e  $\|S_\epsilon\|_\infty < \gamma$  para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ .

**Prova:** Segue os mesmos passos do caso  $\mathcal{H}_2$  e será omitida.  $\nabla\nabla\nabla$

Como o Teorema 2.3 para um dado  $\epsilon$  e um  $\epsilon_2$  é convexo, o projeto do filtro robusto pode ser assim visto como um problema de otimização, dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{sujeito à} \quad & (2.45), \text{ para } \theta \text{ nos vértices de } \mathcal{B}_\theta. \end{aligned}$$

Além disto,  $\|S_e\|_\infty < \gamma$ . Observe que o valor de  $\gamma$  depende da escolha dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\epsilon_2$ . Desta forma, escolhas inadequadas dos parâmetros  $\epsilon > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$  podem dar a impressão de que o método proposto é restritivo. Uma sugestão para a escolha de  $\epsilon$  e  $\epsilon_2$  é fazer uma busca bidimensional, de forma a encontrar a combinação dos dois parâmetros que forneça o menor valor para  $\gamma$ . Uma outra alternativa, seria considerar  $\epsilon = \epsilon_2$  facilitando a escolha do parâmetro, que assim, pode ser feita através de uma busca unidimensional, como no caso  $\mathcal{H}_2$ . Neste caso, porém, pode-se estar inserindo algumas restrições ao problema. No próximo lema, mostra-se, que este método com  $\epsilon$  e  $\epsilon_2$  suficientemente pequenos e com  $\mathcal{N}(\theta)$  constante retorna ao resultado baseado em estabilidade quadrática apresentado em [38].

**Lema 2.5** *Considere o sistema (2.1) e um  $\gamma > 0$  dado, suponha que exista um filtro assintoticamente estável com realização no espaço de estados  $(A_f, B_f, C_f)$  de forma que o sistema do erro de estimação (2.3) satisfaça (2.41) com  $P(\theta) = Q_0$ . Então a LMI do Teorema 2.3 é satisfeita com o mesmo  $\gamma$  e com os escalares positivos  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  suficientemente pequenos.*

**Prova:** A prova é similar à do Lema 2.2. □□□

Resultados semelhantes para o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$  também podem ser obtidos considerando a desigualdade (1.24). Note que, para o caso de sistemas incertos a abordagem do Teorema 2.3 e do teorema apresentado a seguir podem fornecer diferentes valores para o limitante superior  $\gamma$ . Na seqüência, apresenta-se apenas o resultado principal.

**Teorema 2.4** *Considere o sistema (2.1) e seja  $\mathcal{B}_\theta$  um politopo dos admissíveis  $\theta$  e  $\gamma$  uma escalar dado. Suponha que para algum escalar  $\epsilon > 0$  existam matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes simétricas  $\mathcal{N}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$   $i = 1, \dots, \ell_\theta$  de forma que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$  e*

$$\begin{bmatrix} \Psi_A(\theta) + \Psi_A^T(\theta) & \star & \star & \star & \star \\ \Psi_M + \epsilon\Psi_A(\theta) - \mathcal{N}(\theta) & -2\epsilon\mathcal{N}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_B^T(\theta) & 0 & -\gamma I & \star & 0 \\ \Psi_M - \mathcal{N}(\theta) & 0 & \epsilon\Psi_B & -2\epsilon\mathcal{N}(\theta) & 0 \\ \Psi_C(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.47)$$

onde  $\mathcal{N}(\theta)$  é uma função matricial afim em  $\theta$  com valores  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{\ell_\theta}$  nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$  e  $\Psi_A(\theta)$ ,  $\Psi_B(\theta)$ ,  $\Psi_C(\theta)$  e  $\Psi_M(\theta)$  são definidas em (2.20). Então o filtro  $\mathcal{F}$  com a matriz de transferência

$$G_{\hat{z}y}(s) = RS^{-1}(sI - QS^{-1})^{-1}F \quad (2.48)$$

assegura que o sistema do erro de estimação (2.3) é assintoticamente estável e  $\|S_e\|_\infty < \gamma$  para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ .

### 2.2.3 Exemplos Numéricos

Nesta subsecção, consideram-se dois exemplos comparativos para o projeto de filtros robustos baseado no critério de desempenho  $\mathcal{H}_2$ , usando os Teoremas 2.1 e 2.2, os resultados de [76] e a abordagem baseada em estabilidade quadrática em [37].

#### Exemplo 2.1

Seja o seguinte sistema, já estudado em [37] e [76]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 + 0.3\alpha \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -100 + 10\beta & 100 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros incertos limitados.

Similar à [76], abordam-se os seguintes casos

- (a)  $|\alpha| \leq \kappa$  e  $|\beta| \leq 1$ ;
- (b)  $|\alpha| \leq \kappa$  e  $\beta = \alpha$ .

O objetivo é projetar filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  para diferentes valores de  $\kappa$ . Perceba que o sistema (2.49) é assintoticamente estável quando  $\alpha < 10/3$ , resultando que o valor máximo possível para  $\kappa$  seja  $10/3$ .

Filtros ótimos foram projetados para o sistema (2.49) usando os Teoremas 2.1 e 2.2. O ótimo  $\epsilon$  para cada  $\kappa$ , ou seja, o  $\epsilon$  que minimiza o limitante superior  $\mu$  da variância assintótica do erro, foi obtido via uma busca unidimensional. Fig. 2.1 ilustra o comportamento de  $\mu$  obtido através do Teorema 2.1 em função de  $\epsilon$  no caso (b) com  $\kappa = 2$ . Nesta situação, o valor ótimo para  $\epsilon$  é 1,61 e corresponde ao valor mínimo de  $\mu$  igual a 6,2846. Como, neste exemplo, os resultados obtidos pelo Teorema 2.1 são melhores que os do Teorema 2.2, somente apresentam-se os filtros projetados pelo Teorema 2.1, os quais são referidos como abordagem (N).

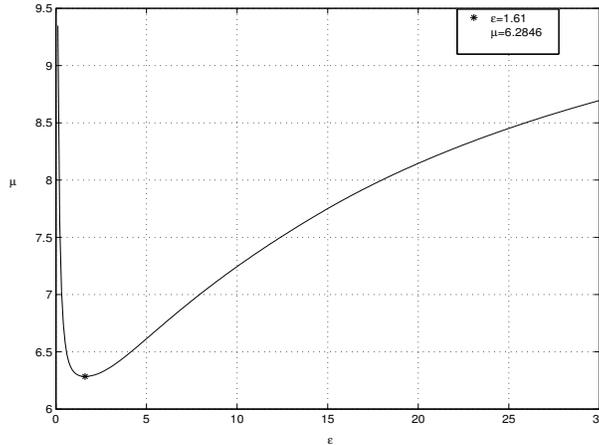


Figura 2.1:  $\mu$  versus  $\epsilon$  para  $|\alpha| \leq 2$  e  $\beta = \alpha$ .

Para fins de comparação, os seguintes métodos para o projeto de filtros robusto também são simulados:

- (i) a abordagem proposta por [76], a qual é baseada em funções de Lyapunov que são afins nos parâmetros do sistema- referida como (T);
- (ii) a abordagem de [37], baseada na noção de estabilidade quadrática - referida como (G).

Fig. 2.2 mostra o limitante superior  $\mu$  ótimo da variância assintótica do erro de estimação em função de  $\gamma$ , obtido a partir das três abordagens para o caso (a), enquanto que Fig. 2.3 refere-se ao caso (b).

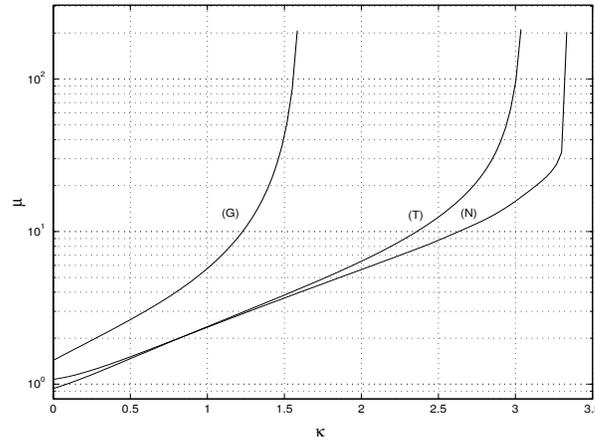


Figura 2.2: Limitante superior  $\mu$  para  $|\alpha| \leq \kappa$  e  $|\beta| \leq 1$ .

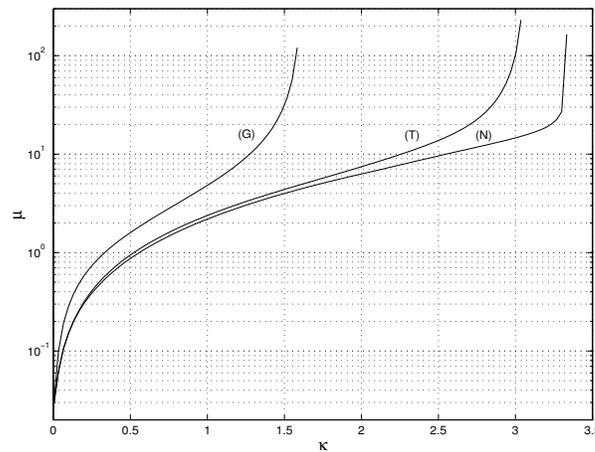


Figura 2.3: Limitante superior  $\mu$  para  $|\alpha| \leq \kappa$  e  $\beta = \alpha$ .

Observando as Figs. 2.2 e 2.3, pode-se facilmente concluir que os resultados obtidos pela abordagem (N) são superiores aos resultados apresentados pelo método baseado em estabilidade quadrática. Por outro lado, a abordagem (N) quando comparada a abordagem (T), fornece o melhor desempenho em grande parte dos valores de  $\kappa$  para o caso (a), enquanto que para o caso (b) a abordagem (N) fornece limitantes superiores  $\mu$  menores do que a abordagem (T) para todos os valores de  $\kappa$ . Além disto, pode ser observado que a abordagem (N) permite que o parâmetro incerto se aproxime do limite de estabilidade. De fato, tem-se que a abordagem (G) é restrita à  $\kappa < 1.613173$ , que é a faixa de incertezas admissíveis para estabilidade quadrática do sistema (2.49), enquanto que a abordagem (T) fornece solução somente para  $\kappa < 3.05$ . Em contraste, a abordagem (N) resolve o problema para qualquer  $\kappa < 10/3$ , ou seja, o limite em quem o sistema (2.49) é assintoticamente estável. Note que a

partir de  $\kappa \geq 2$  a abordagem ( $N$ ) fornece uma melhora significativa no critério de desempenho quando comparado com a abordagem ( $T$ ).

Pode ser observado que a variância assintótica do erro de estimação para o filtro de Kalman projetado para o sistema nominal (2.49) com  $\alpha = \beta = 0$  e aplicado ao sistema com  $\alpha = \beta = 1$  é 31,12, enquanto que para  $\alpha = \beta = 3$  torna-se 10037.

### Exemplo 2.2

Neste exemplo, faz-se um análise estatística dos resultados obtidos nesta seção, afim de ilustrar a vantagem da nova abordagem para o projeto de filtros robusto  $\mathcal{H}_2$  quando comparada aos resultados existentes na literatura. Para este propósito, sistemas lineares incertos do tipo (2.1) são aleatoriamente gerados, com as seguintes dimensões:  $n_x = 3$ ,  $n_w = 3$ ,  $n_z = 1$  e  $n_y = 1$ . Assume-se que as matrizes  $B(\theta)$ ,  $C_z(\theta)$  e  $D(\theta)$  são conhecidas e tenham a seguinte estrutura:

$$B = [10B_1 \ 0], \quad D = [0 \ 10D_1], \quad C_z = [C_{z1} \ 0 \ 0] \quad (2.50)$$

e as matrizes  $A(\theta)$  e  $C(\theta)$  são incertas e descritas por

$$A(\theta) = \theta_1 A_1 + (1 - \theta_1) A_2, \quad C(\theta) = 100(\theta_2 C_1 + (1 - \theta_2) C_2), \quad (2.51)$$

onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os parâmetros incertos pertencentes ao intervalo  $[0 \ 1]$ . Observe que, com esta consideração o politopo  $\mathcal{B}_\theta$  utilizado terá 4 vértices. As matrizes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{z1}$ , e  $D_1$ , são geradas randomicamente a partir de uma distribuição normal de média nula e variância unitária.

Uma condição necessária para o projeto de filtros robustos é que o sistema seja robustamente estável. Para verificar a estabilidade robusta de cada um dos sistemas gerados, seria necessário testar a estabilidade no sentido Hurwitz para cada matriz  $A(\theta)$  para todo  $\theta \in [0 \ 1]$ , através de uma busca unidimensional, ou seja, verificar se cada  $A(\theta)$  para  $\theta \in [0 \ 1]$  tem autovalores negativos. Caso a matriz não fosse estável modifica-se  $A(\theta)$  de forma a garantir a estabilidade. Neste exemplo, para diminuir a complexidade computacional, analisa-se a estabilidade apenas dos vértices de  $A(\theta)$ , isto é, de  $A_1$  e  $A_2$ . Neste caso, se as matrizes  $A_1$  e/ou  $A_2$  não são estáveis no sentido Hurwitz, subtraí-se o termo  $(\sigma + \rho)I_n$  de  $A_1$  e/ou  $A_2$ , onde  $\sigma$  é a parte real do maior autovalor de  $A_1$  e/ou  $A_2$  e  $\rho$  é uma escalar positivo que deve ser escolhido *a priori*. Embora este procedimento não garanta a estabilidade Hurwitz para

todo  $A(\theta)$ , com  $\theta \in [0, 1]$ , ele reduz o número de sistemas gerados que não são robustamente estáveis sobre a região. Neste exemplo, dois valores para  $\rho$  são considerados,  $\rho = 1$  e  $\rho = 10$ , sendo que 1000 sistemas são gerados para cada um.

Para cada sistema, de forma similar ao exemplo anterior, três filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  são projetados através dos seguintes métodos:

- (i) o Teorema 2.1, referido como (N)
- (ii) a abordagem de [76], referido como (T)
- (iii) a abordagem de [37] baseada em estabilidade quadrática, referida como (G)

O objetivo é analisar

P1- o número de vezes que cada abordagem tem solução factíveis.

P2- o número de vezes que cada abordagem, entre as três, fornece o limitante superior mínimo  $\mu$  da variância assintótica do erro de estimação.

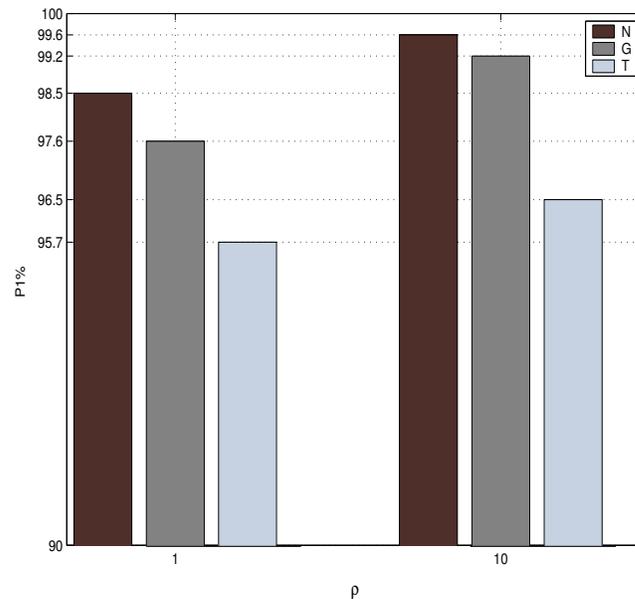


Figura 2.4: Percentagem de soluções factíveis para cada uma das três abordagens quando  $\rho = 1$  e  $\rho = 10$

Fig. 2.4 mostra a porcentagem de soluções factíveis para as abordagens (N), (T) e (G) quando  $\rho = 1$  e  $\rho = 10$ , enquanto que a Fig. 2.5 mostra a relação das soluções não factíveis dos métodos considerados, onde  $I$  representa o número de soluções não factíveis em conjunto dos

métodos (T) e (G). Observe que a abordagem (N) tem o maior número de soluções factíveis em ambos os casos. Além disso, nos 19 sistemas onde a abordagem (N) não é factível, é possível através de uma busca unidimensional fina, mostrar que apenas um sistema é robustamente estável. No entanto, para este sistema nenhuma das abordagens fornece uma solução factível (veja a Fig. 2.5). Comparando as abordagens (T) e (G), percebe-se pelos resultados obtidos, que embora a abordagem (T) seja baseada em uma função de Lyapunov mais complexa que a abordagem (G), o número de sistemas no qual a abordagem (T) não tem solução é menor que o da abordagem (G). Por exemplo, quando  $\rho = 10$  a abordagem (G) tem soluções factíveis em 99,2%, enquanto que a abordagem (T) tem em 96,5%. Perceba, também, pela Fig. 2.5, que dentre os 28 sistemas que a abordagem (T) é não factível, no caso de  $\rho = 1$ , a abordagem (G), baseada em estabilidade quadrática, obteve uma solução factível em 25. Esse fato ocorre, por exemplo, para o sistema formado pelas seguinte matrizes geradas aleatoriamente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.4237 & -0.4667 & 0.7247 \\ 0.3078 & -1.9260 & 0.0995 \\ 0.7462 & 2.0379 & -1.8272 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2.3937 & 0.1519 & -0.2442 \\ -0.2477 & -1.3659 & 2.7567 \\ 1.0454 & -2.4468 & -0.1843 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -9.5410 & -1.6456 & 0 \\ 13.7918 & -6.7142 & 0 \\ 14.6592 & 6.2019 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -83.0815 \\ -224.7866 \\ 3.0005 \end{bmatrix}^T, \quad C_2 = \begin{bmatrix} -164.4205 \\ -47.3450 \\ -67.3917 \end{bmatrix}^T,$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0.4916 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7.7818 \end{bmatrix},$$

onde foi possível projetar o filtro  $\mathcal{H}_2$  usando os métodos propostos em (N) e em (G), mas não foi possível projetar o filtro usando o método proposto em (T).

Esta aparente contradição, pode ser explicada pelo fato da abordagem (T) ser baseada no Lema da projeção (*Projection Lemma*), o qual não garante que os métodos baseados neste lema sejam menos conservadores que as abordagens baseadas em função de Lyapunov quadrática para sistemas com incertezas (para mais detalhes veja [1]).

Observando o número de sistemas que tem o melhor desempenho, em relação a minimização do mínimo limitante superior  $\mu^*$ , obtém-se os seguintes resultados: quando  $\rho = 1$  nos 985 sistemas factíveis a abordagem (N) apresentou o melhor desempenho. No caso de  $\rho = 10$  tem-se 972 casos para a abordagem (N), 4 para a abordagem (T), 11 para (N) e (T)

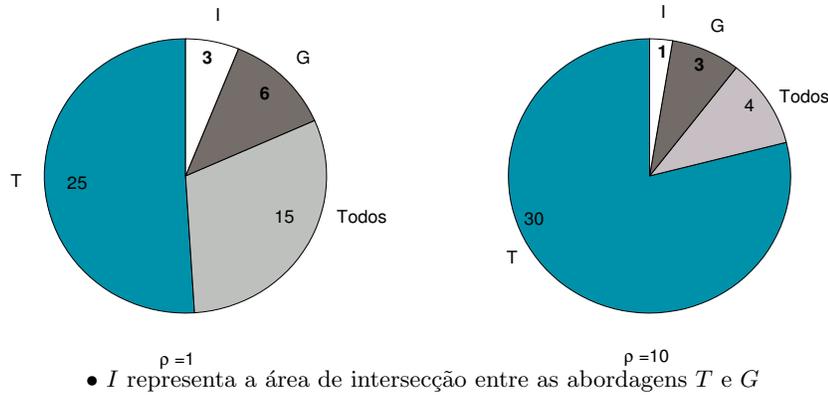


Figura 2.5: Número de soluções não factíveis quando  $\rho = 1$  e  $\rho = 10$ .

simultaneamente, 6 para (N) e (G) simultaneamente e 3 casos em que todas foram igualmente satisfeitas, comprovando a eficiência do novo método em relação aos já existentes.

Com este exemplo, comprova-se que esta nova abordagem apresenta uma significativa melhora quando comparada com as abordagens (T) e (G). E como esperado, em nenhum caso esta abordagem obteve um resultado pior do que o resultado baseado em estabilidade quadrática (G).

### 2.3 Sistemas Variantes no Tempo

Nesta seção, apresenta-se o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  para sistemas que são variantes no tempo<sup>1</sup>, publicado em [10]. Considera-se o sistema (2.1), assumindo que as matrizes B, D são agora constantes e que as matrizes incertas  $A(\theta)$  e  $C(\theta)$ , são dadas por

$$\begin{aligned} A(\theta(t)) &= A_0 + \sum_{i=1}^p \theta_i(t) A_i \\ C(\theta(t)) &= C_0 + \sum_{i=1}^p \theta_i(t) C_i \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde  $A_i$ , e  $C_i$ ,  $i = 0, \dots, p$ , são matrizes reais conhecidas de dimensão apropriada e  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  são os parâmetros incertos variantes no tempo com taxa de variação limitada  $\dot{\theta}_i(t)$ . Assume-se que  $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ ,  $\forall t \geq 0$  pertença a um politopo  $\mathcal{B}$  com  $\ell$  vértices conhecidos e  $\mathcal{B}_\theta$  denota o politopo dos admissíveis  $\theta(t)$  e  $\ell_\theta$  é o número de vértices de  $\mathcal{B}_\theta$ .

Assume-se, sem perda de generalidade, que  $\theta = 0$  pertença a  $\mathcal{B}_\theta$  e  $\mathcal{B}$ . Note que, é sempre possível satisfazer esta condição através de uma definição apropriada das matrizes  $A_0$  e  $C_0$ .

De forma similar ao caso de sistemas invariantes no tempo, apresentado na seção ante-

<sup>1</sup>O projeto de filtros robusto  $\mathcal{H}_\infty$  não será apresentado nesta tese, pois já foi desenvolvido em [30].

rior, o objetivo é buscar uma solução para o **Problema**  $\mathcal{H}_2$  usando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Considera-se aqui o projeto de filtros baseado no gramiano de observabilidade, parte (c) do Lema 1.4, ou seja, busca-se projetar um filtro  $\mathcal{F}$  e encontrar matrizes  $\mathcal{P}(\theta)$  e  $W(\theta)$ , convexas em  $\theta$  de forma que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{P}}(\theta) + \mathcal{P}(\theta)A_a(\theta) + A_a^T(\theta)\mathcal{P}(\theta) & C_a^T(\theta) \\ C_a(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0, \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (2.53)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & B_a^T \mathcal{P}(\theta) \\ \mathcal{P}(\theta)B_a & \mathcal{P}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \forall \theta \in \mathcal{B}_\theta \quad (2.54)$$

Pelo Lema 1.4 (b), pode-se afirmar que o sistema do erro de estimação (2.3) é exponencialmente estável para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$  e

$$\|S_e\|_2^2 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr}[W(\theta(\tau))] d\tau. \quad (2.55)$$

A seguir, apresentam-se soluções baseadas na norma  $\mathcal{H}_2$  para este problema considerando que a função de Lyapunov é bi-quadrática em  $\theta$ .

Para desenvolver o projeto do filtro robusto  $\mathcal{H}_2$ , a equação de estado do sistema (2.1) é reescrita como

$$\dot{x}(t) = [A_0 + \mathcal{A}\Theta(t)]x(t) + Bw(t) \quad (2.56)$$

onde  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times q}$  é uma matriz conhecida e  $\Theta(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$  é uma matriz cujas as colunas dependem linearmente dos parâmetros incertos  $\theta_i$ , onde o valor  $q$  depende da escolha de  $\Theta$ .

É sempre possível colocar o sistema (2.1) na representação (2.56), não impondo nenhuma perda de generalidade. Uma escolha natural e direta de  $\mathcal{A}$  e  $\Theta$  é

$$\mathcal{A} = [A_1 \dots A_p], \quad \Theta = [\theta_1 I_n \dots \theta_p I_n]^T. \quad (2.57)$$

Observe que  $q = np$ , para  $\Theta$  dado acima, é a maior dimensão possível para as linhas de  $\Theta$  de forma que esta matriz não tenha redundância.

Na seqüência, desenvolve-se uma nova abordagem para o projeto do filtro robusto  $\mathcal{H}_2$  para o sistema (2.1) usando uma função de Lyapunov quadrática em  $\theta$  dada por  $V(\xi, \theta) = \xi^T \mathcal{P}(\theta) \xi$ ,

com

$$\mathcal{P}(\theta) = \begin{bmatrix} P_0 + P_1\Theta + \Theta^T P_1^T + \Theta^T P_2\Theta & P_3 \\ P_3^T & P_4 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

onde  $P_0, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$  e  $P_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  e  $\xi = [x^T \hat{x}^T]^T$ .

Note que, como  $\mathcal{P}(\theta) > 0$  para  $\theta = 0$ , então as matrizes  $P_0, P_3$  e  $P_4$  devem satisfazer

$$\begin{bmatrix} P_0 & P_3 \\ P_3^T & P_4 \end{bmatrix} > 0. \quad (2.59)$$

Além disto, sem perda de generalidade, assume-se que a matriz  $P_3$  seja não singular<sup>2</sup>.

O primeiro resultado apresenta uma condição necessária e suficiente para a existência da matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  de forma que (2.58) satisfaça as condições (2.53) e (2.54). Este resultado é uma forma alternativa de reescrever as condições (2.53) e (2.54), através de relações de afins no parâmetro incerto  $\theta$ . Para este fim, introduza a seguinte notação

$$\begin{aligned} A_e(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} & 0 \\ \Theta A_0 + \dot{\Theta} & \Theta \mathcal{A} & 0 \\ B_f C(\theta) & 0 & A_f \end{bmatrix}, & B_e(\theta) &= \begin{bmatrix} B \\ \Theta B \\ B_f D \end{bmatrix}, \\ C_e &= [C_z \ 0 \ -C_f], & H(\theta) &= [\Theta \ -I_q \ 0], \\ H_1(\theta) &= [H(\theta) \ 0], & H_2(\theta) &= [0 \ H(\theta)]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

**Lema 2.6** *Existe uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  da forma (2.58) tal que as condições (2.53) e (2.54) são satisfeitas se e somente se existe uma matriz simétrica  $P \in \mathbb{R}^{(2n+q) \times (2n+q)}$  da forma*

$$P = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_3 \\ P_1^T & P_2 & 0 \\ P_3^T & 0 & P_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} P_0, P_3, P_4 &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ P_1 &\in \mathbb{R}^{n \times q}, P_2 \in \mathbb{R}^{q \times q} \end{aligned} \quad (2.61)$$

<sup>2</sup>Maiores detalhes podem ser obtidos em [31].

de modo que para todo  $\eta \in \mathbb{R}^{2n+q+n_z}$  e  $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{2n+q+n_w}$  as seguintes condições sejam garantidas:

$$\eta^T \Psi_A(\theta, \dot{\theta}) \eta < 0, \forall (\eta, \theta, \dot{\theta}) \text{ tal que } H_1(\theta) \eta = 0, \text{ com } \eta \neq 0 \text{ e } (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (2.62)$$

$$\tilde{\eta}^T \begin{bmatrix} W(\theta) & B_e^T P \\ PB_e & P \end{bmatrix} \tilde{\eta} > 0, \forall (\tilde{\eta}, \theta) \text{ tal que } H_2(\theta) \tilde{\eta} = 0, \text{ com } \tilde{\eta} \neq 0 \text{ e } \theta \in \mathcal{B}_\theta \quad (2.63)$$

onde

$$\Psi_A(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} A_e^T(\theta, \dot{\theta})P + PA_e(\theta, \dot{\theta}) & C_e^T \\ C_e & -I \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

**Prova:** Primeiro, factorize a matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  como

$$\mathcal{P}(\theta) = \Psi^T(\theta) P \Psi(\theta), \quad (2.65)$$

onde  $P$  é uma matriz simétrica definida em (2.61) e

$$\Psi(\theta) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \Theta & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Considerando (2.60), (2.65) e (2.66), pode-se facilmente mostrar que o lado esquerdo de (2.53) e (2.54), denotado por  $\Lambda_1(\theta)$  e  $\Lambda_2(\theta)$ , respectivamente, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\theta) &= \Psi_1^T(\theta) \Psi_A(\theta, \dot{\theta}) \Psi_1(\theta) \\ \Lambda_2(\theta) &= \Psi_2^T(\theta) \begin{bmatrix} \mathcal{N}(\theta) & B_e^T P \\ PB_e & P \end{bmatrix} \Psi_2(\theta) \end{aligned}$$

onde

$$\Psi_1(\theta) = \text{diag}\{\Psi(\theta), I_{n_z}\}, \quad \Psi_2(\theta) = \text{diag}\{I_{n_w}, \Psi(\theta)\}.$$

Além disso, observe que sendo  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{2n+n_z}$  e  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{2n+n_w}$  e pelas definições de  $\Psi_1(\theta)$ ,  $\Psi_2(\theta)$ ,  $H_1(\theta)$  e  $H_2(\theta)$ , as seguintes equivalências são garantidas:

$$\eta = \Psi_1(\theta) \xi_1, \quad \text{se e somente se } H_1(\theta) \eta = 0. \quad (2.67)$$

$$\tilde{\eta} = \Psi_2(\theta) \xi_2, \quad \text{se e somente se } H_2(\theta) \tilde{\eta} = 0. \quad (2.68)$$

Assim, segue que  $\Lambda_1(\theta) > 0$  para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$  se e somente se

$$\eta^T \Psi_A(\theta, \dot{\theta}) \eta < 0, \quad \eta = \Psi_1(\theta) \xi_1; \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R}^{2n+n_z}, \quad \xi_1 \neq 0$$

para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ , o qual por (2.67) é equivalente à (2.62).

Por outro lado,  $\Lambda_2(\theta) > 0, \forall \theta \in \mathcal{B}_\theta$ , se e somente se

$$\tilde{\eta}^T \begin{bmatrix} W(\theta) & B_e^T P \\ P B_e & P \end{bmatrix} \tilde{\eta} > 0, \quad \tilde{\eta} = \Psi_2(\theta) \xi_2, \quad \forall \xi_2 \in \mathbb{R}^{2n+n_w}, \quad \xi_2 \neq 0$$

para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ , o qual por (2.68) é equivalente à (2.63). ▽▽▽

O próximo resultado, baseado no Lema de Finsler, apresenta condições suficientes para testar as desigualdades (2.62) e (2.63) do Lema 2.6.

**Lema 2.7** *Considere o sistema incerto do erro (2.3). Então as desigualdades (2.53) e (2.54) são satisfeitas com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  da forma (2.58) se existem uma matriz simétrica  $P \in \mathbb{R}^{(2n+q) \times (2n+q)}$  da forma (2.61) e matrizes  $M \in \mathbb{R}^{(2n+q+n_z) \times q}$  e  $G \in \mathbb{R}^{(2n+q+n_w) \times q}$  tais que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas*

$$\Psi_A(\theta, \dot{\theta}) + M H_1 + H_1^T M^T < 0, \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (2.69)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & B_e P \\ P B_e^T & P \end{bmatrix} + G H_2(\theta) + H_2^T(\theta) G^T > 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{B}_\theta \quad (2.70)$$

**Prova:** O resultado segue ao verificar que (2.69) e (2.70) implicam nas desigualdades (2.62) e (2.63) do Lema 2.6. □□□

As desigualdades deste lema, de forma similar ao Lema 2.1, são convexas apenas em  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ . Desta forma, no caso em que as matrizes do filtro  $A_f, B_f$  e  $C_f$  são dadas, (2.69) e (2.70) são LMIs em  $P, M$  e  $G$ , e assim a factibilidade destas desigualdades pode ser testada via algoritmos LMIs padrões.

No entanto, a metodologia para o projeto do filtro, proposta nesta seção, envolve encontrar as matrizes  $A_f, B_f$  e  $C_f$  juntamente com as matrizes  $P, M$  e  $G$  de forma que as desigualdades (2.69) e (2.70) sejam satisfeitas. Como estas desigualdades não são juntamente convexas em  $P, A_f$  e  $B_f$ , busca-se através de transformações apropriadas e mudanças de variáveis transformar

as desigualdades (2.69) e (2.70) em LMIs. Este resultado é apresentado no próximo teorema.

**Teorema 2.5** *Considere o sistema (2.1) e seja  $\mathcal{B}_\theta$  e  $\mathcal{B}$  politopos admissíveis de  $\theta$  e  $(\theta, \dot{\theta})$ , respectivamente. Suponha que existam matrizes simétricas  $P_0 > 0$ ,  $P_2$  e  $\Omega_P$ , e matrizes  $P_1$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_4$ ,  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$ ,  $\Omega_C$ ,  $\Omega_G$ ,  $\Omega_M$  e  $W_i$  para  $i = 1, \dots, \ell_\theta$  satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star & \star & \star \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \star & \star \\ \Phi_{31} & \Omega_P \mathcal{A} - \Omega_M & \Omega_A + \Omega_A^T & \star \\ C_z + M_4 \Theta & -M_4 & -\Omega_C & -I \end{bmatrix} < 0, \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{V}(\mathcal{B}) \quad (2.71)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \star & \star & \star \\ (P_0 + P_1 \Theta)B + \Omega_B D + \Theta^T G_1^T & P_0 + G_2 \Theta + \Theta^T G_2^T & \star & \star \\ (P_1^T + P_2 \Theta)B - G_1^T & P_1^T + G_3 \Theta - G_2^T & P_2 - G_3 - G_3^T & \star \\ \Omega_P B + \Omega_B D & \Omega_P + \Omega_G \Theta & -\Omega_G & \Omega_P \end{bmatrix} > 0, \forall \theta \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\theta) \quad (2.72)$$

onde  $W(\theta)$  é uma matriz afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$ , nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$  e

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_0^T P_0 + P_0 A_0 + \Omega_B C(\theta) + C^T(\theta) \Omega_B^T + P_1 \Upsilon + \Upsilon^T P_1^T + M_1 \Theta + \Theta^T M_1^T, \\ \Phi_{21} &= P_1^T A_0 + P_2 \Upsilon + (P_0 \mathcal{A} + P_1 \Theta \mathcal{A})^T - M_1^T + M_2 \Theta, \\ \Phi_{22} &= \mathcal{A}^T P_1 + P_1^T \mathcal{A} + P_2 \Theta \mathcal{A} + (P_2 \Theta \mathcal{A})^T - M_2 - M_2^T, \\ \Phi_{31} &= \Omega_P A_0 + \Omega_B C(\theta) + \Omega_A^T + \Omega_M \Theta, \quad \Upsilon = \Theta A_0 + \dot{\Theta}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

então o filtro  $\mathcal{F}$  com matriz de transferência

$$G_{zy}(s) = (\Omega_C \Omega_P^{-1}) [sI - (\Omega_A \Omega_P^{-1})]^{-1} \Omega_B \quad (2.74)$$

garante que o sistema do erro de estimação  $S_e$  satisfaz as desigualdades (2.53) e (2.54) com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  quadrática em  $\theta$  descrita por (2.58). Além disto,

$$\|S_e\|_2^2 < \max_{i=1, \dots, \ell_\theta} \text{Tr}[W_i], \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}. \quad (2.75)$$

**Prova:** Será mostrado que as desigualdades (2.69) e (2.70) são equivalente as LMIs de (2.71)

e (2.72), respectivamente. Primeiro, particionam-se as matrizes  $M$  e  $G$  de acordo com  $H_1(\theta)$  e  $H_2(\theta)$ ,

$$M = \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T & M_3^T & M_4^T \end{bmatrix}^T, \quad G = \begin{bmatrix} G_1^T & G_2^T & G_3^T & G_4^T \end{bmatrix}^T$$

onde  $M_1, M_3, G_2, G_4 \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $M_2, G_3 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $M_4 \in \mathbb{R}^{n_z \times q}$ , e  $G_1 \in \mathbb{R}^{n_w \times q}$

Pelas definições de  $A_e(\theta, \dot{\theta})$ ,  $B_e(\theta)$ ,  $C_e(\theta)$ ,  $H_1(\theta)$  e  $P$  em (2.60) e (2.61), as desigualdades em (2.69) podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} W_{11} & * & * & * \\ W_{21} & W_{22} & * & * \\ W_{31} & P_3^T \mathcal{A} - M_3 & P_4 A_f + A_f^T P_4 & * \\ C_z + M_4 \Theta & -M_4 & -C_f & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.76)$$

onde

$$W_{11} = A_0^T P_0 + P_0 A_0 + P_3 B_f C(\theta) + [P_3 B_f C(\theta)]^T + P_1 \Upsilon + \Upsilon^T P_1^T + M_1 \Theta + \Theta^T M_1^T,$$

$$W_{21} = P_1^T A_0 + P_2 \Upsilon + (P_0 \mathcal{A} + P_1 \Theta \mathcal{A})^T - M_1^T + M_2 \Theta,$$

$$W_{22} = \mathcal{A}^T P_1 + P_1^T \mathcal{A} + P_2 \Theta \mathcal{A} + (P_2 \Theta \mathcal{A})^T - M_2 - M_2^T,$$

$$W_{31} = P_3^T A_0 + P_4 B_f C(\theta) + A_f^T P_3^T + M_3 \Theta,$$

onde  $\Upsilon$  é definido em (2.73). A seguir, introduz-se a matriz

$$J_1 = \text{diag}\{I_n, I_q, P_4^{-1} P_3^T, I_{n_z}\}. \quad (2.77)$$

Note que, como as matrizes  $P_3$  e  $P_4$  não são singulares,  $J_1$  é bem definido e regular.

Pré- e pós-multiplicando (2.76) por  $J_1^T$  e  $J_1$ , respectivamente, e definindo as seguintes variáveis

$$\Omega_A = P_3 A_f P_4^{-1} P_3^T, \quad \Omega_B = P_3 B_f, \quad \Omega_C = C_f P_4^{-1} P_3^T, \quad (2.78)$$

$$\Omega_M = P_3 P_4^{-1} M_3, \quad \Omega_P = P_3 P_4^{-1} P_3^T$$

a desigualdade (2.76), ou equivalentemente (2.69), torna-se a LMI (2.71). Além disto, (2.78) implica que o mapeamento de  $(A_f, B_f, C_f, M, P_4)$  para  $(\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C, \Omega_M, \Omega_P)$  é inversível. Assim, (2.69) é equivalente à (2.71).

Agora, prova-se a equivalência entre as desigualdades de (2.70) e (2.72). Pela definição

de  $H_2(\theta)$  em (2.60) e a partição de  $G$ , a desigualdade (2.70) torna-se

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \star & \star & \star \\ (P_0 + P_1\Theta)B + P_3B_fD + \Theta^T G_1^T & P_0 + G_2\Theta + (G_2\Theta)^T & \star & \star \\ (P_1^T + P_2\Theta)B - G_1^T & P_1^T - G_2^T + G_3\Theta & -G_3 - G_3^T + P_2 & \star \\ P_3^T B + P_4 B_f D & P_3^T G_4 \Theta & -G_4 & P_4 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.79)$$

Pré- e pós-multiplicando (2.79) por  $J_2^T$  e  $J_2$ , respectivamente, onde

$$J_2 = \text{diag} \{I_{n_w}, I_n, I_q, P_4^{-1} P_3^T\} \quad (2.80)$$

e introduzindo a variável  $\Omega_G = P_3 P_4^{-1} G_4$ , pode-se verificar que (2.79) é equivalente à LMI de (2.72). A seguir, considerando (2.78), segue que

$$A_f = P_3^{-1} (\Omega_A \Omega_P^{-1}) P_3, \quad B_f = P_3^{-1} \Omega_B, \quad C_f = (\Omega_C \Omega_P^{-1}) P_3$$

e assim a matriz de transferência do filtro,  $G_{\hat{z}y}(s)$ , de (2.74) é facilmente obtida.

Finalmente, pelo Teorema 2.5 conclui-se que o filtro acima garante que para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ , o sistema do erro de estimação  $S_e$  é exponencialmente estável e

$$\|S_e\|_2^2 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{Tr} [W(\theta)] dt < \max_{i=1, \dots, \ell_\theta} \mathbf{Tr} [W_i].$$

Finalizando a prova. ▽▽▽

Note que, qualquer solução factível das LMIs (2.71) e (2.72) produz um filtro robusto apropriado. Além disto, o filtro que minimiza o limitante superior do quadrado da norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema do erro de estimação pode ser determinado via o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \\ \text{sujeito à} \quad & (2.71), (2.72), \text{ e } \mu - \text{Tr} [W_i] \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell_\theta. \end{aligned}$$

Além do que, resulta que  $\|S_e\|_2^2 < \mu$ .

**Observação 2.1** Note que, o Teorema 2.5 tem como caso particular o método de filtragem robusta  $\mathcal{H}_2$  baseado em estabilidade quadrática e em funções de Lyapunov que são afins nos parâmetros, ao se impor certas restrições nas partições da matriz  $P$  definida em (2.61).

Assim, ao se fixar  $P_1 = 0$  e  $P_2 = 0$ ,  $\mathcal{P}(\theta)$  torna-se independente de parâmetros e o Teorema 2.5 fornece uma abordagem baseada em estabilidade quadrática. Por outro lado, impondo que  $P_2 = 0$ , a matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  torna-se afim no parâmetro  $\theta$ .  $\square$

Deve ser notado que as condições do Teorema 2.5 com  $P_1 = 0$  e  $P_2 = 0$  são necessárias e suficientes para garantir que as condições (2.53) e (2.54) sejam satisfeitas com uma matriz de Lyapunov independente de parâmetros, ou seja,  $\mathcal{P}(\theta) = Q_0 > 0$ . A suficiência segue imediatamente da Observação 2.1, e a necessidade é apresentada no próximo lema.

**Lema 2.8** *Considere o sistema (2.1) e suponha que exista um filtro assintoticamente estável com realização no espaço de estados dada por  $(A_f, B_f, C_f)$ , tal que o sistema do erro de estimação (2.3) satisfaça (2.53) e (2.54) com  $\mathcal{P}(\theta) = Q_0$  e  $W(\theta)$ , que é afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$  nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$ . Então as condições do Teorema 2.5 são satisfeitas com a mesma matriz  $W(\theta)$ .*

**Prova:** Como  $(\theta, \hat{\theta})$  pertencem a um polítopo limitado, segue de (2.53) e (2.54) que existe um escalar  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$

$$\begin{bmatrix} Q_0 A_a(\theta) + A_a^T(\theta) Q_0 + \epsilon \tilde{\Theta} \tilde{\Theta}^T & C_a^T(\theta) \\ C_a(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.81)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & B_a^T Q_0 \\ Q_0 B_a & Q_0 - \epsilon \tilde{\Theta} \tilde{\Theta}^T \end{bmatrix} > 0 \quad (2.82)$$

onde  $\tilde{\Theta}^T = \begin{bmatrix} \Theta^T & 0 \end{bmatrix}$ . Introduza a seguinte partição para  $Q_0$ , onde todos os blocos são matrizes  $n \times n$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Sem perda de generalidade, a matriz  $Q_2$  pode ser assumida não singular. Além disto, defina as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & Q_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ Q_2^T & 0 & Q_3 \end{bmatrix}, \quad \Omega_A = Q_2 A_f Q_3^{-1} Q_2^T,$$

$$\Omega_B = Q_2 B_f, \quad \Omega_C = C_f Q_3^{-1} Q_2^T, \quad \Omega_P = Q_2 Q_3^{-1} Q_2^T,$$

$$\Omega_M = \Omega_P A, \quad \Omega_G = 0, \quad G_1 = 0, \quad G_2 = 0,$$

$$G_3 = -\epsilon I, \quad M_1 = Q_1 A, \quad M_2 = \epsilon I, \quad M_4 = 0.$$

Com as matrizes definida acima, pode ser facilmente estabelecido que o lado esquerdo de (2.71) e (2.72), denotado por  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , respectivamente, torna-se

$$\Phi_1 = J_1^T \begin{bmatrix} K_1 & \star & \star & \star \\ \epsilon \Theta & -2\epsilon I & \star & \star \\ K_3 & 0 & A_f^T Q_3 + Q_3 A_f & \star \\ C_z & 0 & -C_f & -I \end{bmatrix} J_1$$

$$\Phi_2 = J_2^T \begin{bmatrix} W(\theta) & \star & \star & \star \\ Q_1 B + Q_2 B_f D & Q_1 & \star & \star \\ 0 & -\epsilon \Theta & 2\epsilon I & \star \\ Q_2^T B + Q_3 B_f D & Q_2^T & 0 & Q_3 \end{bmatrix} J_2$$

onde  $J_1$  e  $J_2$  são dadas em (2.77) e (2.80) e

$$K_1 = Q_1 A(\theta) + A^T(\theta) Q_1 + Q_2 B_f C(\theta) + [Q_2 B_f C(\theta)]^T$$

$$K_3 = A^T(\theta) Q_2 + [Q_3 B_f C(\theta)]^T + Q_2 A_f.$$

Finalmente, usando o complemento de Schur's e considerando (2.81)-(2.83), pode ser verificado que  $\Phi_1 < 0$  e  $\Phi_2 > 0$ , o qual conclui-se a prova.  $\square \square \square$

### Exemplo 2.3

Neste exemplo, considera-se o sistema (2.49) com um parâmetro incerto  $\theta(t)$  variante no tempo, que afeta apenas a matriz de dinâmica do sistema, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 + 0.3\theta(t) \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -100 & 100 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{2.84}$$

onde  $|\theta(t)| \leq 1.4$  e  $|\dot{\theta}(t)| \leq \alpha$ , com  $\alpha \geq 0$ .

O objetivo é projetar um filtro robusto  $\mathcal{H}_2$  para o sistema (2.84) para diversos valores de  $\alpha$ . Para resolver este problema, aplica-se o Teorema 2.5 para diferentes tipos de funções de Lyapunov, afim de ilustrar a influência da função de Lyapunov no limitante superior da norma  $\mathcal{H}_2$ . Considera-se, os casos onde  $\mathcal{P}(\theta)$ , descrita em (2.58), depende quadraticamente ou afim de  $\theta$ , o qual são referidos como abordagens *bi-quadrática* ( $B$ ) e *afim-quadrática* ( $A$ ), respectivamente. Note que a abordagem afim-quadrática é obtida do Teorema 2.5 ao zerar a partição  $P_2$  da matriz  $P$  de (2.61). Os métodos de filtragem robusta  $\mathcal{H}_2$  baseados em estabilidade quadrática de [31] e [37] (baseados em (2.53) e (2.54)) também são aplicados para o sistema (2.84) e resultados idênticos, referidos como ( $Q$ ), foram obtidos. Fig. 2.6 mostra o limitante superior otimizado  $\mu$  do quadrado da norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema do erro de estimação em função de  $\alpha$  obtido pelo Teorema 2.5 para as abordagens ( $A$ ) e ( $B$ ) e para o método ( $Q$ ). Segue da Fig. 2.6 que a abordagem ( $B$ ) fornece o melhor resultado. Deve ser observado que as abordagens ( $A$ ) e ( $B$ ) são eficientes em uma maior faixa de valores para os parâmetros incertos que os métodos em ( $Q$ ). Além disto, os métodos de [31] e [37] são restritos a  $|\theta| < \sqrt{0,9375}/0,6 \approx 1,61374$ , o qual é a faixa teórica admissível de  $|\theta|$  para a estabilidade quadrática do sistema (2.84). Em contraste, as abordagens ( $A$ ) e ( $B$ ) resolvem o problema para  $|\theta| \leq 2.9$  e  $|\theta| \leq 3$ , respectivamente, quando  $|\dot{\theta}| \leq 1$ , e para  $|\theta| < 10/3$  quando  $\dot{\theta}(t) \equiv 0$ , o qual é a faixa de  $|\theta|$  para a estabilidade assintótica do sistema (2.84). A Fig. 2.7 mostra o limitante superior otimizado  $\mu$  em função de  $\beta$ , onde  $|\theta| \leq \beta$ , para os métodos ( $Q$ ), ( $A$ ) e ( $B$ ) sobre a restrição que  $|\dot{\theta}| \leq 1$ . Note que a abordagem ( $B$ ) é superior a abordagem ( $A$ ).

Observe que o filtro de Kalman projetado para o sistema nominal de (2.84) com  $\theta(t) \equiv 0$  e aplicado ao sistema (2.84) com  $\theta(t) \equiv 1,4$ , fornece  $\|S_e\|_2^2 = 36,3464$ .

Note que uma comparação entre esta abordagem e os resultados apresentados na seção anterior pode ser realizada apenas quando assume-se que  $\dot{\theta} = 0$ . Neste caso, aplicando o Teorema 2.2<sup>3</sup>, para  $\theta \leq 1,4$ ,  $\dot{\theta} = 0$  e  $\epsilon = 3,2$ , obtém-se  $\mu = 2,8667$ . Comparando com os valores de  $\mu$  da Fig. 2.6 (quando  $\alpha = 0$ ), percebe-se que, o Teorema 2.2 fornece um limitante superior menor que as abordagens bi-quadrática e afim. Esta aparente melhora do método proposto pelo Teorema 2.2 pode ser explicada pela estrutura da função de Lyapunov utilizada em cada uma das abordagens. Enquanto que no Teorema 2.5 considera-se apenas que parte da função de Lyapunov diretamente ligada a dinâmica do sistema seja dependente de parâmetro,

<sup>3</sup>baseado também no gramiano de observabilidade

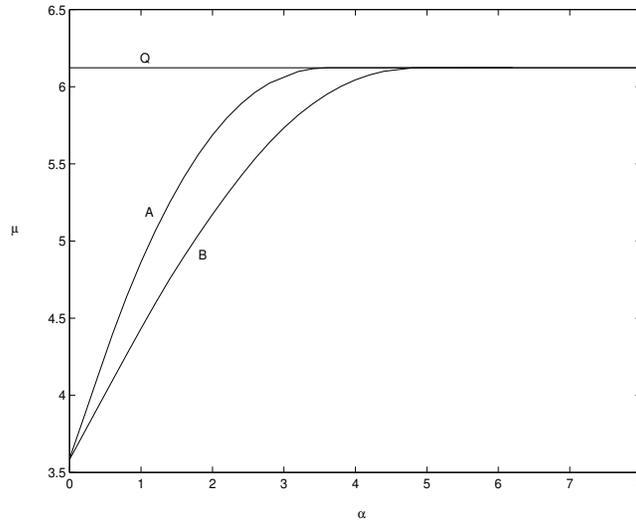


Figura 2.6: Limitante superior  $\mu$  para  $|\theta| \leq 1.4$  e  $|\dot{\theta}| \leq \alpha$ .

no Teorema 2.2 considera-se que toda a função de Lyapunov seja racional em  $\theta$ . No entanto, os métodos propostos nos Teoremas 2.1 e 2.2 são apenas aplicáveis a sistemas invariantes no tempo. As primeiras tentativas em estender estes resultados para sistemas variantes no tempo ainda são restritivas.

## 2.4 Notas Complementares

Para resolver o problema de filtragem através de uma formulação LMI é necessário o uso de transformações de congruências. Como pode ser reparado ao longo deste capítulo (e da tese), dois tipos de transformações estão sendo utilizadas, a proposta em [31] e a proposta em [37]. O uso de uma ou outra transformação neste trabalho se deve a facilidade que esta por ventura possa trazer no projeto de filtros robustos usando funções de Lyapunov dependente de parâmetros. Na realidade, quando se considera que os parâmetros do sistema são variantes no tempo, no contexto de sistemas a tempo contínuo, as transformações propostas em [31] são mais facilmente aplicáveis. Este fato fica mais evidente no caso de sistemas não lineares (Capítulo 4), onde verificou-se que para o caso de sistemas com não linearidades do tipo racionais, ao usar as transformações propostas em [37] não foi possível, com a metodologia aqui utilizada, obter condições convexas.

É importante ressaltar que a princípio não se pode ainda afirmar se o uso destas duas transformações fornecem ou não resultados equivalentes. Parece interessante que um estudo

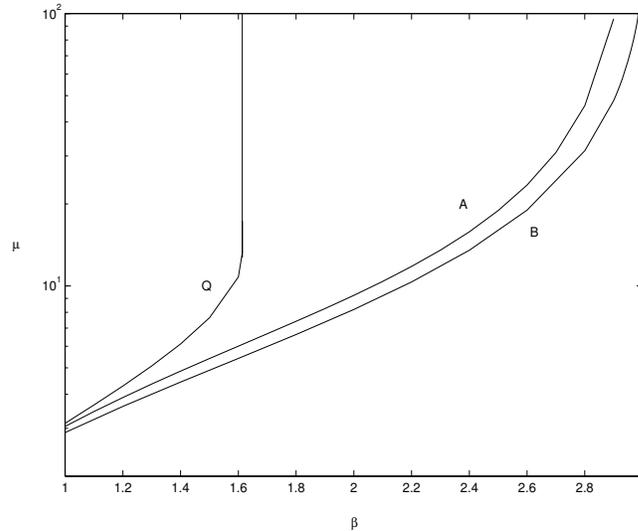


Figura 2.7: Limitante superior  $\mu$  para  $|\theta| \leq \beta$  e  $|\dot{\theta}| \leq 1$ .

mais detalhado entre estes dois tipos de transformação seja realizado. No entanto, as primeiras tentativas mostram que tentar fazer uma relação algébrica de equivalência entre estes resultados (se existir) não é uma tarefa fácil.

### Observações sobre $\epsilon$

A seguir faz-se uma breve discussão sobre a escolha do parâmetro  $\epsilon$ , necessário para aplicação do resultados propostos na Seção 2.2, que influencia o valor do limitante superior  $\mu$  ótimo da variância do erro de estimação. É importante ressaltar que o objetivo não é propor uma prova formal para a escolha deste parâmetro, mas sim apresentar alguns fatos interessantes observados durante a aplicação destes resultados. Talvez, destas considerações, surjam algumas idéias para a busca otimizada deste parâmetro.

A alternativa escolhida para a escolha do  $\epsilon$  ótimo, ou seja, o valor de  $\epsilon$  que forneça o valor ótimo de  $\mu$ , foi fazer uma busca unidimensional em  $\epsilon$ , conforme a Fig. 2.1. Ao efetuar esta busca verificou-se que tipicamente o comportamento de  $\mu \times \epsilon$  possui um único valor de mínimo, o que facilita o processo de otimização.

Fig. 2.8 mostra o histograma do número de sistemas versus o valor ótimo de  $\epsilon$  obtido para o Exemplo 2.2. É interessante observar que o valor ótimo de  $\epsilon$  para a maioria dos sistemas é menor que 2. Comparando os histogramas para os casos em que  $\rho = 1$  e  $\rho = 10$ , percebe-se também, que o valor médio de  $\epsilon$  parece crescer quando o sistema se aproxima da região de instabilidade (no caso  $\rho = 1$ ). Este mesmo comportamento pode ser visto na Fig. 2.9 que

apresenta o comportamento de  $\epsilon$  versus  $\alpha$  para o caso (a) do Exemplo 2.1. Analisando a curva, percebe-se que o valor ótimo de  $\epsilon$  cresce quando aumenta-se o valor de  $\alpha$ , que, neste caso, implica que o sistema tem um dos pólos se aproximando da região de instabilidade.

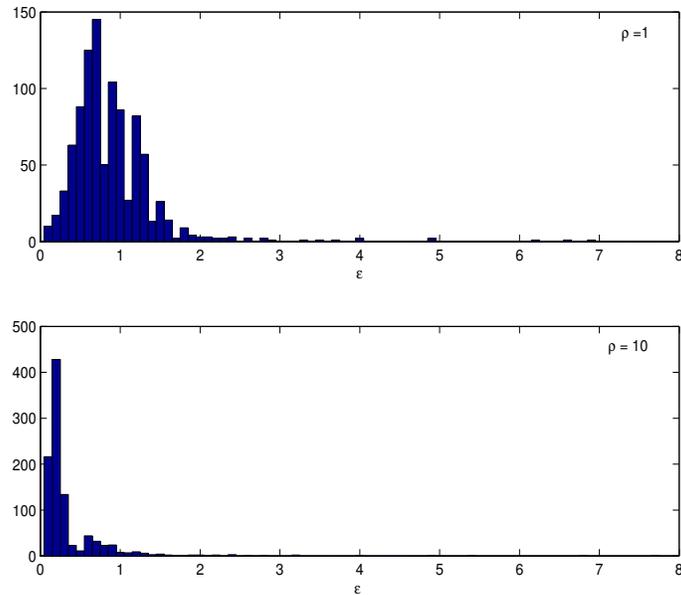


Figura 2.8: Histograma do valor ótimo de  $\epsilon$

Nos Lemas 2.2 e 2.3 provou-se que se os resultados baseado em estabilidade quadrática fossem satisfeito com uma função de Lyapunov independente de parâmetros onde  $P(\theta) = Q_0$ , então os Teoremas 2.1 e 2.2 com  $\epsilon$  suficientemente pequeno, também seriam satisfeito com a mesma função de Lyapunov. Sendo essa uma condição suficiente para assumir que a função de Lyapunov seja constante, ou seja,  $N(\theta) = M = Q_0$  para todo  $\theta$ . Ainda não foi possível mostrar a necessidade desse resultado, ou seja, que ao fixar  $\epsilon$  pequeno os Teoremas 2.1 e 2.2 só terão solução quando  $N(\theta) = M = Q_0$ . No entanto, verificou-se nos exemplos numéricos que nos casos no qual o resultado baseado em estabilidade quadrática não tinha solução, não era possível obter soluções factíveis para os Teoremas 2.1 e 2.2 quando fixava-se  $\epsilon$  pequeno (na ordem de  $1e^{-4}$ ). Esse fato também pode ser observado na expressão (2.14), no qual percebe-se que ao fixar  $\epsilon$  muito pequeno, a tendência é que este resultado só seja satisfeito quando  $N(\theta)$  tenda a  $M$ .

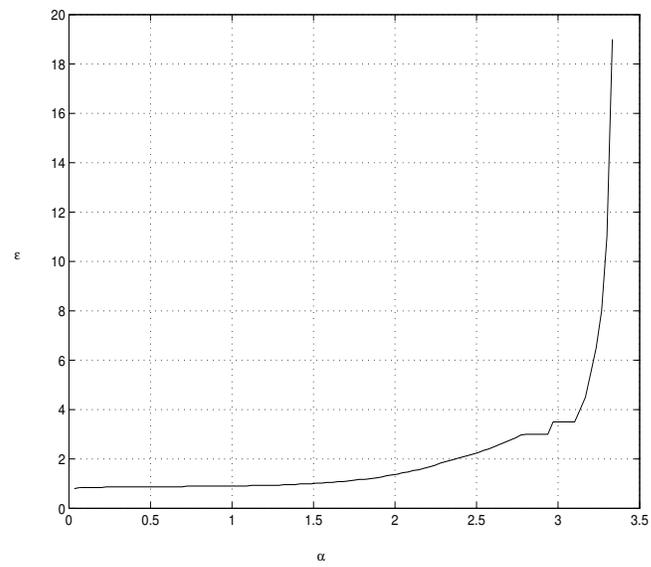


Figura 2.9: Valor ótimo de  $\epsilon$  para cada  $\alpha$ , caso (a)

## Capítulo 3

# Sistemas a Tempo Discreto

Neste capítulo aborda-se o projeto de filtros robustos para sistemas a tempo discreto com parâmetros incertos variantes no tempo. Como no caso de sistemas a tempo contínuo, o objetivo é o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  utilizando funções de Lyapunov que são dependentes dos parâmetros incertos. Os resultados apresentados neste capítulo são uma alternativa aos resultados existentes baseados em estabilidade quadráticas ([16, 40, 61, 70, 83]), os quais permitem uma variação arbitrária do parâmetro incerto, e o método de [39], o qual usa uma função de Lyapunov que depende de forma afim do parâmetro e é restrito para o caso de sistemas com parâmetros invariantes no tempo. Apresenta-se, também, o projeto de filtros mistos  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Os resultados apresentados nas Seções 3.2 e 3.3 foram publicados em [5] e [11], respectivamente.

### 3.1 Formulação do Problema

Considera-se o sistema incerto a tempo discreto descrito por

$$\begin{aligned} S : \quad x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) + B(\theta(k))w(k) \\ y(k) &= C(\theta(k))x(k) + D(\theta(k))w(k) \\ z(k) &= C_z(\theta(k))x(k) \end{aligned} \tag{3.1}$$

com  $\theta(k) = (\theta_1(k), \dots, \theta_p(k)) \in \mathbb{R}^p$ , onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada de ruído,  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida,  $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é o sinal a ser estimado,  $\theta_i(k)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , são parâmetros incertos limitados variantes no tempo com taxa de variação limitada  $\Delta\theta_i(k) =$

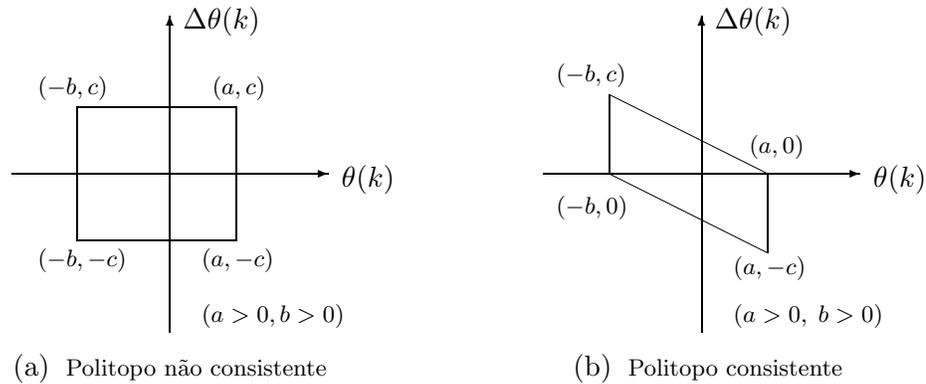


Figura 3.1: Dois polítopos  $\mathcal{D}$  para um escalar  $\theta(k)$ .

$\theta_i(k+1) - \theta_i(k)$ , e  $A(\theta)$ ,  $B(\theta)$ ,  $C(\theta)$ ,  $C_z(\theta)$  e  $D(\theta)$  são matrizes reais de dimensão apropriada que dependem de forma afim do vetor de parâmetros  $\theta(k)$ , que pertence a um polítopo  $\mathcal{D}_\theta$  com  $\ell_\theta$  vértices conhecidos.

Assume-se, também, que  $(\theta(k), \Delta\theta(k))$ ,  $\forall k \geq 0$ , pertença a um dado polítopo  $\mathcal{D}$  com  $\ell$  vértices conhecidos, onde  $\Delta\theta(k) = \theta(k+1) - \theta(k)$ . Note que os valores de  $\theta(k+1)$  dependem dos valores de  $\theta(k)$  e  $\Delta\theta(k)$ . Ao longo deste capítulo, assume-se que os valores admissíveis de  $\theta(k)$  são independentes do instante  $k$ , e assim são os mesmos valores admissíveis de  $\theta(k+1)$ , o que implica que os valores admissíveis de  $\Delta\theta(k)$  são os que satisfazem a seguinte restrição:  $\theta(k+1) = \theta(k) + \Delta\theta(k)$ . Um polítopo  $\mathcal{D}$  satisfazendo esta condição será chamado de um *polítopo consistente*. Fig. 3.1 (a) mostra um polítopo  $\mathcal{D}$  que não é consistente, pois se  $\theta(k) = a$  e  $\Delta\theta(k) > 0$ ,  $\theta(k+1)$  poderá estar fora de  $\mathcal{D}$ . Por outro lado, o polítopo da Fig. 3.1 (b) é consistente quando  $0 \leq c \leq a + b$ . Além disto, note que quando  $c = a + b$ , o parâmetro  $\theta(k)$  pode ir de um extremo a outro da faixa de valores admissíveis em uma iteração, o que corresponde ao caso de maior variação possível para o parâmetro.

De forma similar ao Capítulo 2, o objetivo é projetar um filtro linear  $\mathcal{F}$  estacionário a tempo discreto que obtenha uma estimativa  $\hat{z}$  do sinal  $z$  com um desempenho garantido através das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  independente dos parâmetros incertos  $\theta_i$ . Atenção é dada ao projeto de filtros lineares invariantes no tempo, assintoticamente estáveis e de ordem  $n$  com a seguinte realização no espaço de estados

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \hat{x}(k+1) &= A_f \hat{x}(k) + B_f y(k), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(k) &= C_f \hat{x}(k) \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde busca-se determinar as matrizes  $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_f \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  e  $C_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ .

A dinâmica do erro de estimação  $e = z - \hat{z}$  é descrita pelo seguinte modelo no espaço de estados

$$\begin{aligned} S_e : \quad \xi(k+1) &= A_a(\theta(k))\xi(k) + B_a(\theta(k))w(k) \\ e(k) &= C_a(\theta(k))\xi(k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix}, \quad A_a(\theta(k)) = \begin{bmatrix} A(\theta(k)) & 0 \\ B_f C(\theta(k)) & A_f \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$B_a(\theta(k)) = \begin{bmatrix} B_w(\theta(k)) \\ B_f D(\theta(k)) \end{bmatrix}, \quad C_a(\theta(k)) = \begin{bmatrix} C_z(\theta(k)) & -C_f \end{bmatrix}.$$

O objetivo, então, é encontrar soluções factíveis para os **Problemas**  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  apresentados no Capítulo 2, aplicados agora ao sistema  $S_e$  acima. Nas próximas seções apresentam-se soluções para estes problemas, baseadas em funções de Lyapunov, no qual a matriz  $P(\theta)$  é quadrática nos parâmetros incertos, do tipo (1.6). Para simplificar a notação, ao longo deste capítulo a dependência de  $\theta(k)$  no tempo  $k$  será omitida e  $\theta(k+1)$  será denotado por  $\bar{\theta}$ .

## 3.2 Projeto do Filtro Robusto $\mathcal{H}_2$

Esta seção apresenta o projeto de filtros robustos para o sistema incerto (3.1) via a norma  $\mathcal{H}_2$ . Dois métodos baseados em LMIs são desenvolvidos para o projeto de um filtro  $\mathcal{F}$  dado por (3.2) de forma que o sistema do erro de estimação  $S_e$  satisfaça as condições do Teorema 1.1 com uma matriz  $P(k)$  que depende quadraticamente de  $\theta(k)$ . O primeiro método busca projetar um filtro  $\mathcal{F}$  tal que existam matrizes reais  $\mathcal{P}(\theta) > 0$  e  $W(\theta) > 0$ , quadrática e afim em  $\theta$ , respectivamente, e uma matriz  $G$  de forma que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\bar{\theta}) - B_a(\theta)B_a^T(\theta) & A_a(\theta)G \\ G^T A_a^T(\theta) & G + G^T - \mathcal{P}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D} \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & C_a(\theta)G \\ G^T C_a^T(\theta) & G + G^T - \mathcal{P}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_\theta. \quad (3.6)$$

Pelo Lema 1.8 (b) e Teorema 1.1 (a), as condições (3.5) e (3.6) garantem que o sistema do erro de estimação (3.3) é exponencialmente estável para todos  $(\theta, \Delta\theta)$  em  $\mathcal{D}$  e sua norma  $\mathcal{H}_2$  satisfaz:

$$\|S_e\|_2^2 < \kappa, \quad \forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}; \quad \kappa = \sup_{\theta \in \mathcal{D}} \text{Tr}[W(\theta)].$$

Além disso,  $V(\xi, \theta) = \xi^T(k) \mathcal{P}^{-1}(\theta(k)) \xi(k)$  é uma função de Lyapunov dependente de parâmetros para o sistema do erro de estimação (3.3). Uma abordagem similar é usada para o segundo método, sendo que neste caso o resultado é baseado nas condições (1.44) e (1.45) do Teorema 1.1 (b), ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) - C_a^T(\theta)C_a(\theta) & A_a^T(\theta)G^T \\ GA_a(\theta) & G + G^T - \mathcal{P}(\bar{\theta}) \end{bmatrix} > 0, \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & B_a^T(\theta)G^T \\ GB_a(\theta) & G + G^T - \mathcal{P}(\bar{\theta}) \end{bmatrix} > 0. \quad (3.8)$$

É importante ressaltar que como tem-se apenas garantia de um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$ , estes dois resultados para o projeto de filtros fornecem diferentes limitantes superiores e diferentes filtros.

Neste capítulo, assume-se que  $\mathcal{P}(\theta)$  é uma matriz dependente dos parâmetros de forma quadrática, representada por

$$\mathcal{P}(\theta) = P_0 + P_1\Theta + \Theta^T P_1^T + \Theta^T P_2\Theta = \tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta} \quad (3.9)$$

onde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 I_{2n} \\ \vdots \\ \theta_p I_{2n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} I_{2n} \\ \Theta \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1^T & P_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q}, \quad \begin{array}{l} q = 2n + n_\theta \\ n_\theta = 2np \end{array} \quad (3.10)$$

O próximo teorema fornece um método LMI para o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  para

o sistema incerto (3.1). O método proposto leva em consideração a taxa de variação dos parâmetros incertos e é baseado em funções de Lyapunov, cuja matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  é quadrática nos parâmetros incertos. O resultado é obtido pela introdução de multiplicadores através do Lema de Finsler e pela aplicação de transformações de congruências, utilizando a seguinte notação

$$H_1(\theta, \Delta\theta) = \begin{bmatrix} \Theta & -I_{n_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta\Theta & 0 & -I_{n_\theta} \end{bmatrix}, \quad H_2(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Theta & -I_{n_\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$H_3(\theta) = \begin{bmatrix} \Theta & -I_{n_\theta} \end{bmatrix}, \quad \Delta\Theta(k) = \Theta(k+1) - \Theta(k), \quad (3.12)$$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} I_q & \tilde{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_\theta} \end{bmatrix}^T. \quad (3.13)$$

**Teorema 3.1** *Considere o sistema (3.1) e seja  $\mathcal{D}$  um politopo dos  $(\theta, \Delta\theta)$  admissíveis. Suponha que existam matrizes simétricas  $P$  e  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell_\theta$ , e matrizes  $F$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $Y$  e  $Z$  satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}^T P \mathcal{J} & \tilde{\Psi}_A(\theta) & \tilde{\Psi}_B(\theta) \\ \tilde{\Psi}_A^T(\theta) & \tilde{\Psi}_M - P & 0 \\ \tilde{\Psi}_B^T(\theta) & 0 & I \end{bmatrix} + L H_a(\theta, \Delta\theta) + H_a(\theta, \Delta\theta)^T L^T > 0 \quad \forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{V}(\mathcal{D}) \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \tilde{\Psi}_C(\theta) \\ \tilde{\Psi}_C^T(\theta) & \tilde{\Psi}_M - P \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} 0 & H_3(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & H_3(\theta) \end{bmatrix}^T M^T > 0 \quad \forall \theta \in \mathcal{V}(\mathcal{D}_\theta) \quad (3.15)$$

onde  $W(\theta)$  é uma matriz afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$  nos vértices de  $\mathcal{D}_\theta$  e

$$\tilde{\Psi}_A(\theta) = \begin{bmatrix} \Psi_A(\theta) & 0 \\ 0 & 0_{(2n_\theta \times n_\theta)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_B(\theta) = \begin{bmatrix} \Psi_B(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{\Psi}_C(\theta) = \begin{bmatrix} \Psi_C(\theta) & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_M = \begin{bmatrix} \Psi_M & 0 \\ 0 & 0_{n_\theta} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$H_a(\theta, \Delta\theta) = \begin{bmatrix} H_1(\theta, \Delta\theta) & H_2(\theta) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_M = \begin{bmatrix} Z + Z^T & Z + Y^T + S^T \\ Z^T + Y + S & Y + Y^T \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

onde  $\Psi_A(\theta)$ ,  $\Psi_B(\theta)$  e  $\Psi_C(\theta)$  estão definidas em (2.20). Então o filtro  $\mathcal{F}$  com matriz de transferência

$$G_{zy}(\varsigma) = RS^{-1}(\varsigma I - QS^{-1})^{-1}F \quad (3.19)$$

garante que o sistema do erro de estimação  $S_e$  satisfaz as desigualdades (3.5) e (3.6), com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  que depende quadraticamente de  $\theta$  e  $W(\theta)$  afim em  $\theta$ . Além disso,

$$\|S_e\|_2^2 < \max_i \text{Tr}[W_i], \quad \forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}.$$

**Prova:** Primeiro, note que, como as desigualdades de (3.14) e (3.15) dependem de forma afim de  $\theta$  e  $\Delta\theta$ . Então, pela propriedade de convexidade pode-se afirmar que estas condições são satisfeitas para todo  $(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$  e todo  $\theta \in \mathcal{D}_\theta$ , respectivamente, se e somente se (3.14) e (3.15) são satisfeitas.

Observe que as colunas de  $\mathcal{N}_{H_1} = [I \ \Theta^T \ \Delta\Theta^T]^T$  e  $\tilde{\Theta}$  formam uma base para o espaço nulo de  $H_1(\theta, \Delta\theta)$  e  $H_2(\theta)$ , respectivamente. Pós- e pré-multiplicando (3.14) por  $\text{diag}\{\mathcal{N}_{H_1}, \tilde{\Theta}, I\}$  e sua transposta, respectivamente, e considerando (3.16) e (3.17), segue que

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\Theta} + \Delta\tilde{\Theta})^T P (\tilde{\Theta} + \Delta\tilde{\Theta}) & \Psi_A(\theta) & \Psi_B(\theta) \\ \Psi_A^T(\theta) & \Psi_M - \tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta} & 0 \\ \Psi_B^T(\theta) & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}. \quad (3.20)$$

Por outro lado, como as colunas de  $\mathcal{N}_3 = \text{diag}\{I, \tilde{\Theta}\}$  formam uma base para o núcleo de  $[0 \ H_3(\theta)]$ , pré- e pós-multiplicando (3.15) por  $\mathcal{N}_3^T$  e  $\mathcal{N}_3$ , respectivamente, e considerando (3.17), tem-se

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \Psi_C(\theta) \\ \Psi_C^T(\theta) & \Psi_M - \tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_\theta. \quad (3.21)$$

Note que (3.20) garante que  $\tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta} > 0$ ,  $\forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$  e  $\Psi_M > 0$ , o que implica que  $Z$  e  $Y$  são matrizes não singulares. Além disto, pré- e pós-multiplicando  $\Psi_M$  por  $[I \ -I]$  e sua transposta, respectivamente, implica que  $S + S^T < 0$ , e assim segue que  $S$  é uma matriz não singular.

Defina as matrizes não singulares  $U$  e  $V$  tal que  $VU^T Z^T = S$  e, similarmente como em

[37], introduza as seguintes matrizes não singulares

$$G = \begin{bmatrix} Z^{-T} & \bullet \\ U^T & \bullet \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} Y^T & \bullet \\ V^T & \bullet \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} Z^T & Y^T \\ 0 & V^T \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

onde os elementos  $\bullet$  são determinados unicamente pelas seguintes relações de igualdade  $GG^{-1} = G^{-1}G = I$ . Além disto, defina a seguinte realização no espaço de estados para o filtro (3.19)

$$A_f = V^{-1}QS^{-1}V, \quad B_f = V^{-1}F, \quad C_f = RS^{-1}V. \quad (3.23)$$

Note que, a partir de (3.22), (3.23), (3.16) e (3.17) obtém-se:  $\Psi_A(\theta) = T^T A_a(\theta)GT$ ,  $\Psi_B(\theta) = T^T B_a(\theta)$ ,  $\Psi_C(\theta) = C_a(\theta)GT$ ,  $\Psi_M = T^T(G + G^T)T$ .

Pós- e pré-multiplicando (3.20) por  $J_1 = \text{diag}\{T^{-1}, T^{-1}, I\}$  e  $J_1^T$ , respectivamente, tem-se que (3.20) é equivalente a desigualdade (3.5) com  $G$  definido em (3.22) e

$$\mathcal{P}(\theta) = \tilde{\Theta}^T \tilde{P} \tilde{\Theta}, \quad \mathcal{P}(\bar{\theta}) = (\tilde{\Theta} + \Delta \tilde{\Theta})^T \tilde{P} (\tilde{\Theta} + \Delta \tilde{\Theta}), \quad \tilde{P} = \tilde{T}^{-T} P \tilde{T}^{-1}, \quad \tilde{T} = \text{diag}\{T, T, \dots, T\}. \quad (3.24)$$

Por outro lado, pós- e pré-multiplicando (3.21) por  $J_2 = \text{diag}\{I, T^{-1}\}$  e  $J_2^T$ , respectivamente, obtém-se que (3.21) é equivalente a desigualdade (3.6) com as mesmas definições para as matrizes  $G$  e  $\mathcal{P}(\theta)$ .

Finalmente, usando o Teorema 1.1 (a) juntamente com o Lema 1.8 (b), as desigualdades (3.5) e (3.6) implicam que

$$\|S_e\|_2^2 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \text{Tr}[W(\theta(k))] < \max_i \text{Tr}[W_i], \quad \forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$$

concluindo a prova. ▽▽▽

Note que, como o limitante superior do quadrado da norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema do erro de estimação do Teorema 3.1 é uma função afim nas matrizes de busca, o problema de obter o filtro que minimiza este limitante superior pode ser resolvido via o seguinte problema de otimização convexa.

$$\begin{aligned} & \min \quad \mu \\ & \text{sujeito à (3.14) e (3.15), e } \mu - \text{Tr}[W_i] \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Além disto, tem-se que  $\|S_e\|_2^2 < \mu$ .

Note que a Observação 2.1 também é válida para o Teorema 3.1.

Na seqüência, observa-se que dependendo da classe de sistema a ser considerada ou do tipo de função de Lyapunov utilizada, o Teorema 3.1 pode ser modificado para uma versão mais simples através da eliminação de alguns graus de liberdade, reduzindo assim o número de variáveis.

- (a) Se o sistema (3.1) tem parâmetros incertos  $\theta(k)$  constantes no tempo, ou seja,  $\Delta\theta(k) = 0$ , e  $\mathcal{P}(\theta)$  é quadrática em  $\theta$  as desigualdades (3.14) e (3.15) do Teorema 3.1 podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{\Psi}_A(\theta) & \tilde{\Psi}_B(\theta) \\ \tilde{\Psi}_A^T(\theta) & \tilde{\Psi}_M - P & 0 \\ \tilde{\Psi}_B^T(\theta) & 0 & I \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} H_1(\theta) & H_2(\theta) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1(\theta) & H_2(\theta) & 0 \end{bmatrix}^T L^T > 0 \quad (3.25)$$

onde

$$\tilde{\Psi}_A(\theta) = \begin{bmatrix} \Psi_A(\theta) & 0 \\ 0 & 0_{n_\theta} \end{bmatrix} \quad H_1(\theta) = \begin{bmatrix} \Theta & -I_{n_\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Theta & -I_{n_\theta} \end{bmatrix}$$

- (b) Se o sistema é variante no tempo e a função de Lyapunov é afim em  $\theta$ , ou seja,  $P_2 = 0$  em  $P$ , então as condições do Teorema 3.1 podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\Theta} + \Delta\tilde{\Theta})^T P (\tilde{\Theta} + \Delta\tilde{\Theta}) & \Psi_A(\theta) & \Psi_B(\theta) \\ \Psi_A^T(\theta) & \Psi_M - \tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta} & 0 \\ \Psi_B^T(\theta) & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \Psi_C(\theta) \\ \Psi_C^T(\theta) & \Psi_M - \tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.27)$$

- (c) Quando assume-se que  $\theta(k)$  é constante e  $\mathcal{P}(\theta)$  afim em  $\theta$ , pode ser mostrado que o método do Teorema 3.1 é equivalente ao método proposto em [37].

Observe que, as condições do Teorema 3.1 com  $P_1 = 0$  e  $P_2 = 0$  são necessárias e suficientes para que (3.5) e (3.6) sejam satisfeitas com uma matriz independente de parâmetros  $\mathcal{P}(\theta) = P_q > 0$  e uma matriz  $G = P_q$ . A suficiência segue imediatamente da Observação 2.1, e a

necessidade é apresentada no próximo lema, garantindo que este método de filtragem é no pior caso tão conservador quanto o método baseado em estabilidade quadrática.

**Lema 3.1** *Considere o sistema (3.1) e suponha que exista um filtro assintoticamente estável com realização no espaço de estados dada por  $(A_f, B_f, C_f)$  tal que o sistema do erro de estimação (3.3) satisfaça as desigualdades (3.5) e (3.6) com  $\mathcal{P}(\theta) = P_q > 0$ ,  $G = P_q$ , e  $W(\theta) > 0$  uma função afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_\ell$  nos vértices de  $\mathcal{D}$ . Então as condições do Teorema 3.1 são garantidas com a mesma matriz  $W(\theta)$ .*

**Prova:** Introduza a seguinte partição das matrizes  $P_q$  e  $P_q^{-1}$ , onde todos os blocos são matrizes  $n \times n$

$$P_q = \begin{bmatrix} P_{q1} & P_{q2} \\ P_{q2}^T & P_{q3} \end{bmatrix}, \quad P_q^{-1} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ \Xi_2^T & \Xi_3 \end{bmatrix}.$$

Além disto, sem perda de generalidade, as matrizes  $P_{q2}$  e  $\Xi_2$  podem ser assumidas não singulares. Defina, também, as matrizes

$$\begin{aligned} Z &= P_{q1}^{-1}, \quad Y = \Xi_1, \quad S = \Xi_2 P_{q2}^T P_{q1}^{-1}, \quad Q = \Xi_2 A_f P_{q2}^T P_{q1}^{-1}, \quad F = \Xi_2 B_f, \\ R &= C_f P_{q2}^T P_{q1}^{-1}, \quad T = \begin{bmatrix} P_{q1}^{-1} & \Xi_1 \\ 0 & \Xi_2^T \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_0 = T^T P_q T, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon I \end{bmatrix}.$$

Como  $\theta$  e  $\Delta\theta$  pertencem a um politopo, segue de (3.5) e (3.6) que existe um escalar  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno de forma que:

$$\begin{bmatrix} P_q - B_a(\theta)B_a^T(\theta) & A_a(\theta)P_q \\ P_q A_a^T(\theta) & P_q \end{bmatrix} - 0.5\varepsilon \begin{bmatrix} T^{-T}(\Theta^T \Theta + \Delta\Theta^T \Delta\Theta)T^{-1} & 0 \\ 0 & T^{-T}\Theta^T \Theta T^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D} \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & C_a(\theta)P_q \\ P_q C_a^T(\theta) & P_q \end{bmatrix} - 0.5\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^{-T}\Theta^T \Theta T^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}_\theta \quad (3.30)$$

Com as matrizes  $F, L, M, P, Q, R, S, Y$  e  $Z$  definidas em (3.28), pode-se estabelecer que

o lado esquerdo de (3.14) e (3.15), denotado por  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ , respectivamente, torna-se:

$$\Phi_1 = J_1^T \begin{bmatrix} P_q & \Omega_1 & A_a(\theta)P_q & \Omega_2 \\ \Omega_1^T & \Lambda_1 & 0 & 0 \\ P_q A_a^T(\theta) & 0 & P_q & \Omega_3 \\ \Omega_2^T & 0 & \Omega_3^T & \Lambda_2 \end{bmatrix} J_1,$$

$$\Phi_2 = J_2^T \begin{bmatrix} W(\theta) & C_a(\theta)P_q & 0 \\ P_q C_a^T(\theta) & P_q & -\varepsilon T^{-T} \Theta^T \\ 0 & -\varepsilon \Theta T^{-1} & 2\varepsilon I \end{bmatrix} J_2$$

onde

$$J_1 = \text{diag}\{T, I, T, I\}, \quad J_2 = \text{diag}\{I, T, I\}, \quad \Omega_1 = -\varepsilon T^{-T} \begin{bmatrix} \Theta^T & \Delta \Theta^T \end{bmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_a(\theta) \end{bmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{bmatrix} -\varepsilon T^{-T} \Theta^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = \text{diag}\{2\varepsilon I, 2\varepsilon I\}, \quad \Lambda_2 = \text{diag}\{2\varepsilon I, I\}.$$

Finalmente, usando o complemento de Schur e considerando (3.29) e (3.30), estabelece-se que  $\Phi_1 > 0$  e  $\Phi_2 > 0$ , concluindo assim a prova.  $\nabla\nabla\nabla$

Com este resultado, comprova-se que o método do Teorema 3.1 não é mais restritivo que os métodos baseados em estabilidade quadrática.

Na seqüência, apresenta-se outro método para o projeto de filtros baseado nas desigualdades (3.7) e (3.8), utilizando as matrizes introduzidas em (3.13) e a seguinte notação

$$H_4(\theta) = \begin{bmatrix} \Theta & -I_{n_\theta} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_5(\theta, \Delta\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Theta & -I_{n_\theta} & 0 \\ \Delta\Theta & 0 & -I_{n_\theta} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$H_6(\theta, \Delta\theta) = \begin{bmatrix} \Theta & -I_{n_\theta} & 0 \\ \Delta\Theta & 0 & -I_{n_\theta} \end{bmatrix} \quad H_b(\theta, \Delta\theta) = \begin{bmatrix} H_4(\theta) & H_5(\theta, \Delta\theta) & 0 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 3.2** *Considere o sistema (3.1) e seja  $\mathcal{D}$  um politopo dos  $(\theta, \Delta\theta)$  admissíveis. Suponha que existam matrizes simétrica  $P$  e  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , e matrizes  $F, L, M, Q, R, S$ ,*

$Y$  e  $Z$  que satisfazem as seguintes LMIs para todos os vértices de  $\mathcal{D}$

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{\Psi}_A^T(\theta) & \tilde{\Psi}_C^T(\theta) \\ \tilde{\Psi}_A(\theta) & \tilde{\Psi}_M - \mathcal{J}^T P \mathcal{J} & 0 \\ \tilde{\Psi}_C(\theta) & 0 & I \end{bmatrix} + L H_b(\theta, \Delta\theta) + H_b(\theta, \Delta\theta)^T L^T > 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \tilde{\Psi}_B^T(\theta) \\ \tilde{\Psi}_B(\theta) & \tilde{\Psi}_M - \mathcal{J}^T P \mathcal{J} \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} 0 & H_6(\theta, \Delta\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & H_6(\theta, \Delta\theta) \end{bmatrix}^T M^T > 0 \quad (3.33)$$

onde  $W(\theta)$  é uma matriz afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_\ell$  nos vértices de  $\mathcal{D}$  e  $\tilde{\Psi}_A(\theta)$ ,  $\tilde{\Psi}_B(\theta)$ ,  $\tilde{\Psi}_C(\theta)$  e  $\tilde{\Psi}_M(\theta)$  são definidas em (3.16)-(3.18). Então o filtro  $\mathcal{F}$  com matriz de transferência

$$G_{\hat{z}_y}(\varsigma) = R S^{-1} (\varsigma I - Q S^{-1})^{-1} K \quad (3.34)$$

garante que o sistema do erro de estimação  $S_e$  satisfaz as desigualdades (3.7) e (3.8) com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  que depende quadraticamente de  $\theta$  e  $W(\theta)$  como acima. Além disto,

$$\|S_e\|_2^2 < \max_i \text{Tr}[W_i], \quad \forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}.$$

**Prova:** A prova é similar à do Teorema 3.1, exceto que agora

$$G^T = \begin{bmatrix} Y^T & \hat{V}^T \\ V^T & \hat{Y}^T \end{bmatrix}, \quad G^{-T} = \begin{bmatrix} Z^{-T} & \hat{U}^T \\ U^T & \hat{X}^T \end{bmatrix}$$

e a matriz de transformação  $G^{-T}T$  é usada em vez de  $T$ . ▽▽▽

O próximo resultado é paralelo ao Lema 3.1 e pode ser provado usando argumentos similares.

**Lema 3.2** *Considere o sistema (3.1), e suponha que exista um filtro assintoticamente estável com realização no espaço de estados  $(A_f, B_f, C_f)$  tal que o sistema do erro de estimação (3.3) satisfaça as desigualdades (3.7)-(3.8) com  $\mathcal{P}(\theta) = P_q > 0$ ,  $G = P_q$ , e  $W(\theta) > 0$ , o qual é afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_\ell$  nos vértices de  $\mathcal{D}$ . Então as condições do Teorema 3.2 estão satisfeitas com a mesma matriz  $W(\theta)$ . □□□*

Comentários similares aos do Teorema 3.1 se aplicam também a este resultado. Em particular, este método de filtragem robusta  $\mathcal{H}_2$  é no pior caso tão conservador quanto a

abordagem de [40] baseada em estabilidade quadrática.

### 3.3 Projeto do Filtro Robusto $\mathcal{H}_\infty$

Esta seção discute sobre o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema incerto (3.1), e segue a mesma estrutura do caso  $\mathcal{H}_2$ .

Na seqüência, apresenta-se o projeto do filtro robusto (3.2) de forma que (1.48) aplicado ao sistema do erro de estimação (3.3) seja satisfeita com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta) > 0$ , quadrática em  $\theta$ , e uma matriz fixa  $G$  juntamente com as matrizes do filtro, ou seja, projeta-se um filtro  $\mathcal{F}$  tal que exista uma matriz real  $\mathcal{P}(\theta) > 0$ , dada em (3.9), um escalar  $\gamma$  e uma matriz  $G$  de forma que a seguinte desigualdade seja satisfeita para todos  $(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\bar{\theta}) & A_a(\theta)G & B_a(\theta) & 0 \\ G^T A_a^T(\theta) & G + G^T - \mathcal{P}(\theta) & 0 & G^T C_a^T(\theta) \\ B_a^T(\theta) & 0 & \gamma I & 0 \\ 0 & C_a(\theta)G & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.35)$$

Pelo Lema 1.9 (a) e Teorema 1.2 (a), (3.35) implica que o sistema do erro de estimação (3.3) é exponencialmente estável para todos  $(\theta, \Delta\theta)$  em  $\mathcal{D}$  e sua norma  $\mathcal{H}_\infty$  satisfaz:

$$\|S_e\|_\infty < \gamma, \quad \forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D};$$

Além disto,  $V(\xi, \theta) = \xi^T(k)\mathcal{P}^{-1}(\theta(k))\xi(k)$  é uma função de Lyapunov dependente de parâmetro para o sistema do erro de estimação (3.3). O método LMI para o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$  é apresentado a seguir, onde considera-se a notação introduzida em (3.11)-(3.13).

**Teorema 3.3** *Considere o sistema (3.1) e seja  $\mathcal{D}$  um politopo dos  $(\theta, \Delta\theta)$  admissíveis e um escalar  $\gamma > 0$  dado. Suponha que exista uma matriz simétrica  $P$ , e matrizes  $F, L, Q, R, S, Y$  e  $Z$  satisfazendo as seguintes LMIs nos vértices de  $\mathcal{D}$*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}^T P \mathcal{J} & \tilde{\Psi}_A(\theta) & \tilde{\Psi}_B(\theta) & 0 \\ \tilde{\Psi}_A^T(\theta) & \tilde{\Psi}_M - P & 0 & \tilde{\Psi}_C^T(\theta) \\ \tilde{\Psi}_B^T(\theta) & 0 & \gamma I & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_C(\theta) & 0 & \gamma I \end{bmatrix} + L H_a(\theta, \Delta\theta) + H_a(\theta, \Delta\theta)^T L^T > 0 \quad (3.36)$$

onde  $\tilde{\Psi}_A(\theta)$ ,  $\tilde{\Psi}_B(\theta)$ ,  $\tilde{\Psi}_C(\theta)$ ,  $\tilde{\Psi}_M(\theta)$  e  $H_a(\theta, \Delta\theta)$  são definidas em (3.16)-(3.18). Então o filtro  $\mathcal{F}$  com matriz de transferência

$$G_{zy}(\varsigma) = RS^{-1}(\varsigma I - QS^{-1})^{-1}F \quad (3.37)$$

garante que o sistema do erro  $S_e$  satisfaz o Teorema 1.2(a) com  $\mathcal{P}(\theta) = \tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta}$  e assim, o sistema  $S_e$  é exponencialmente estável e  $\|S_e\|_\infty < \gamma$  para todos  $(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$ .

**Prova:** Primeiro, note que, como a desigualdade (3.36) depende de forma afim de  $\theta$  e  $\Delta\theta$ , então ela é satisfeita para todos  $(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$  se e somente se (3.36) estiver satisfeita para todos os vértices de  $\mathcal{D}$ .

A seguir, observe que as colunas de  $\mathcal{N}_{H_1} = [I \ \Theta^T \ \Delta\Theta^T]^T$  formam uma base para o espaço nulo de  $H_1(\theta, \Delta\theta)$ . Pós- e pré-multiplicando (3.36) por  $\text{diag}\{\mathcal{N}_{H_1}, \tilde{\Theta}, I, I\}$  e sua transposta, respectivamente, e considerando (3.16) e (3.17), segue que

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\Theta} + \Delta\tilde{\Theta})^T P (\tilde{\Theta} + \Delta\tilde{\Theta}) & \Psi_A(\theta) & \Psi_B(\theta) & 0 \\ \Psi_A^T(\theta) & \Psi_M - \tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta} & 0 & \Psi_C^T(\theta) \\ \Psi_B^T(\theta) & 0 & \gamma I & 0 \\ 0 & \Psi_C(\theta) & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}. \quad (3.38)$$

Note que, de forma similar ao caso  $\mathcal{H}_2$ , (3.38) garante que  $\tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta} > 0$ ,  $\forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$  e  $\Psi_M > 0$ , o que implica que  $Z$ ,  $Y$  e  $S$  são matrizes não singulares. Agora, considere as matrizes  $G$ ,  $G^{-1}$  e  $T$  definidas em (3.22) e a realização no espaço de estados para o filtro (3.37) dada em (3.23).

Pós- e pré-multiplicando (3.38) por  $J_1 = \text{diag}\{T^{-1}, T^{-1}, I, I\}$  e  $J_1^T$ , respectivamente, pode-se estabelecer que (3.38) é equivalente à desigualdade (3.35) com  $G$  em (3.22) e  $\mathcal{P}(\theta)$  em (3.24). Finalmente, a prova é concluída usando o Teorema 1.2 (a).  $\nabla\nabla\nabla$

O Teorema 3.3 fornece um método para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para o modelo (3.1) em termos da factibilidade de LMIs. Como no caso  $\mathcal{H}_2$ , leva-se em conta no projeto a taxa de variação dos parâmetros incertos e o resultado é baseado em funções de Lyapunov que são dependentes de parâmetros para o sistema do erro de estimação.

Note que, o filtro com o mínimo valor de  $\gamma$  obtido pelo Teorema 3.3 pode ser resolvido

via o seguinte problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \min \quad \gamma \\ & \text{sujeito à (3.36), para } (\theta, \Delta\theta) \text{ nos vértices de } \mathcal{D} \end{aligned}$$

A Observação 2.1 e uma versão do Lema 3.1 podem ser aplicadas a este resultado, garantindo assim que este método, com uma escolha adequada das matrizes de busca, forneça condições necessárias e suficientes para que a desigualdade da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de (3.35) seja satisfeita com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta) = P_q > 0$ .

A seguir, apresenta-se o segundo método de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  baseado nas condições (1.49) do Teorema 1.2 (b), com  $\mathcal{P}(\theta) > 0$ , dada em (3.9), um escalar  $\gamma$  e uma matriz  $G$  fixa de forma que a seguinte desigualdade seja satisfeita para todos  $(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & A_a^T(\theta)G^T & C_a^T(\theta) & \\ GA_a(\theta) & G + G^T - \mathcal{P}(\bar{\theta}) & GB_a(\theta) & 0 \\ 0 & B_a^T(\theta)G^T & \gamma I & 0 \\ C_a(\theta) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.39)$$

O próximo teorema propõe uma solução para este problema, utilizando as matrizes introduzidas em (3.13) e (3.31).

**Teorema 3.4** *Considere o sistema (3.1), e seja  $\mathcal{D}$  um politopo  $(\theta, \Delta\theta)$  admissíveis e um escalar  $\gamma > 0$  dado. Suponha que exista uma matriz simétrica  $P$  e matrizes  $F, L, Q, R, S, Y$  e  $Z$  satisfazendo as seguintes LMIs para todos os vértices de  $\mathcal{D}$*

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{\Psi}_A^T(\theta) & 0 & \tilde{\Psi}_C^T(\theta) \\ \tilde{\Psi}_A(\theta) & \tilde{\Psi}_M - \mathcal{J}^T P \mathcal{J} & \tilde{\Psi}_B(\theta) & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_B^T(\theta) & \gamma I & 0 \\ \tilde{\Psi}_C(\theta) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} + LH_b(\theta, \Delta\theta) + H_b(\theta, \Delta\theta)^T L^T > 0 \quad (3.40)$$

onde  $\tilde{\Psi}_A(\theta)$ ,  $\tilde{\Psi}_B(\theta)$ ,  $\tilde{\Psi}_C(\theta)$  e  $\tilde{\Psi}_M(\theta)$  estão definidas em (3.16)-(3.18). Então o filtro  $\mathcal{F}$  com matriz de transferência

$$G_{\hat{z}_y}(\varsigma) = RS^{-1}(\varsigma I - QS^{-1})^{-1}F \quad (3.41)$$

garante que o sistema de erro  $S_e$  satisfaz o Teorema 1.2(b) com  $\mathcal{P}(\theta) = \tilde{\Theta}^T P \tilde{\Theta}$  e assim, o

sistema  $S_e$  é exponencialmente estável e  $\|S_e\|_\infty < \gamma$  para todos  $(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$ .

**Prova:** A prova é similar à do Teorema 3.3, assumindo que

$$G^T = \begin{bmatrix} Y^T & \hat{V}^T \\ V^T & \hat{Y}^T \end{bmatrix}, \quad G^{-T} = \begin{bmatrix} Z^{-T} & \hat{U}^T \\ U^T & \hat{X}^T \end{bmatrix}$$

e que a matriz de transformação  $G^{-T}T$  é usada no lugar de  $T$ . ▽▽▽

Os comentários feitos ao Teorema 3.3 são também aplicados a este teorema.

### 3.4 Filtros Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Diferente das seções anteriores, onde buscam-se soluções para os **Problemas**  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  assumindo que o sistema é perturbado por apenas uma tipo de ruído, nesta seção, objetiva-se projetar filtros para sistemas que são perturbados ao mesmo tempo por sinais de ruídos branco e sinais com espectro desconhecido, mais limitados pertencentes a  $\ell_2$ . Sistemas com estas característica podem ser encontrados, por exemplo, em modelos aeroespaciais [65]. Neste contexto, então, surge a necessidade de projetar filtros robustos que minimizem ao mesmo tempo o efeito deste dois sinais de perturbações. Estes filtros, conhecidos como filtros mistos  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , vem sendo estudado desde os trabalhos de [14, 48], mas somente nos últimos anos abordagens convexas surgiram com os trabalhos de [58, 80, 86]. No entanto, o inconveniente é que nestas abordagens faz-se necessário o uso da mesma função de Lyapunov para a medida dos dois critérios, o que pode tornar o método restritivo. Usando, então, os resultados apresentados nas seções anteriores, apresentam-se nesta seção condições LMIs para o projeto de filtros mistos, usando funções de Lyapunov distintas que são dependentes dos parâmetros incertos do sistema.

Para tal, reescreva o sistema (3.1) como

$$\begin{aligned} S: \quad x(k+1) &= A(\theta(k))x(k) + B_1(\theta(k))w_1(k) + B_2(\theta(k))w_2(k) \\ y(k) &= C(\theta(k))x(k) + D_1(\theta(k))w_1(k) + D_2(\theta(k))w_2(k) \\ z_1(k) &= C_{z_1}(\theta(k))x(k) \\ z_2(k) &= C_{z_2}(\theta(k))x(k) \end{aligned} \tag{3.42}$$

onde  $w_1$  é um sinal de ruído branco e  $w_2$  é um sinal de perturbação pertencente a  $\ell_2$ . Definindo

$e_1 = z_1 - \hat{z}$  e  $e_2 = z_2 - \hat{z}$  e dado um escalar positivo  $\gamma$ , o problema a ser considerado é o projeto de filtros robustos do tipo  $\mathcal{F}$  que minimizem um limitante superior  $\mu$  da norma  $\mathcal{H}_2$  do operador de  $w_1$  para  $e_1$ , quando a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do operador de  $w_2$  para  $e_2$  é limitada superiormente por  $\gamma$ . Ou seja, dado um escalar positivo  $\gamma$ , busca-se encontrar um filtro  $\mathcal{F}$  de forma que

$$\begin{aligned} \min \mu : \quad & \|G_{w_1 e_1}\| < \mu \quad e \\ & \|G_{w_2 e_2}\| < \gamma \end{aligned}$$

Note que, pode-se construir o sistema aumentado  $S_e$  modificado, assumindo que:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}, \quad e D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

O próximo teorema apresenta um resultado para o projeto de filtros robusto, no qual busca-se uma solução conjunta para os **Problemas**  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema  $S_e$ .

**Teorema 3.5** *Considere o sistema (3.42) e seja  $\mathcal{D}$  um politopo dos  $(\theta, \Delta\theta)$  admissíveis e um escalar  $\gamma > 0$  dado. Suponha que existam matrizes simétricas  $P_2, P_\infty$  e matrizes  $F, L_2, L_\infty, Q, R, S, Y, Z$  satisfazendo o seguinte problema de otimização:*

$\min \mu : \text{sujeito à}$

$$\mu - \text{Tr}[W(\theta)] > 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{V}(\mathcal{D}_\theta),$$

$$(3.14) \text{ e } (3.15) \text{ com } P = P_2, \quad e \quad L = L_2, \quad B = B_1 \quad e \quad D = D_1$$

$$(3.36), \quad \forall (\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{V}(\mathcal{D}) \text{ com } P = P_\infty, \quad L = L_\infty, \quad B = B_2 \quad e \quad D = D_2$$

Então o filtro  $\mathcal{F}$  com a matriz de transferência

$$G_{\hat{z}y}(\varsigma) = RS^{-1}(\varsigma I - QS^{-1})^{-1}F \quad (3.43)$$

garante que o sistema do erro  $S_e$  modificado é exponencialmente estável e satisfaz conjuntamente as desigualdades de (3.5) e (3.6) com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta) = \tilde{\Theta}^T P_2 \tilde{\Theta}$  e o Teorema 1.2 (a) com  $\mathcal{P}(\theta) = \tilde{\Theta}^T P_\infty \tilde{\Theta}$  e a mesma matriz  $G$  constante. Além disso,  $\|G_{w_1 e_1}\|_2^2 < \mu$ , e  $\|G_{w_2 e_2}\|_\infty < \gamma$  para todo  $(\theta, \Delta\theta) \in \mathcal{D}$ . ▽▽▽

A grande vantagem desta abordagem é que consegue-se resolver o problema de forma desacoplada. Esta idéia já foi utilizada em [26] no problema de estabilização via realimentação

de saída. Os comentários apresentados nas seções anteriores continuam válidos e de forma semelhante este resultado pode ser obtido para o projeto de filtros baseados nas desigualdades (3.7) e (3.8) juntamente com o Teorema 1.2 (b). De forma similar, pode-se também estender este resultado para o caso de sistemas a tempo contínuo, ressalta-se no entanto que para o caso de sistemas invariantes no tempo, deve-se ter a preocupação a mais com a escolha dos valores de  $\epsilon$  de forma que os resultados obtidos sejam ótimos.

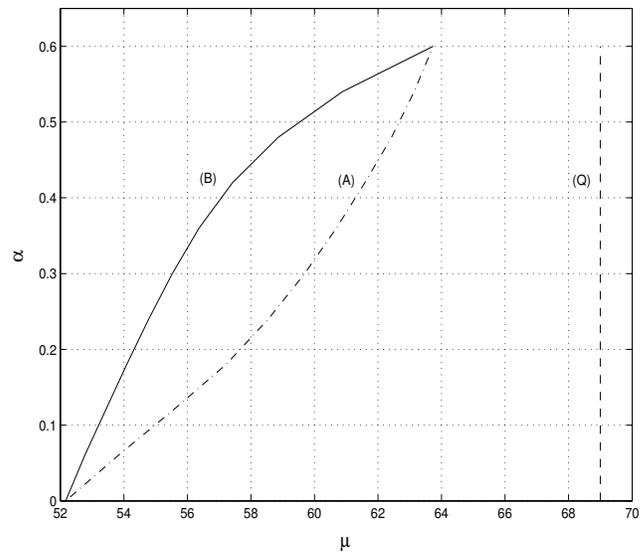
### 3.5 Exemplo

Neste exemplo, projetam-se filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para o seguinte sistema incerto estudado em [83],

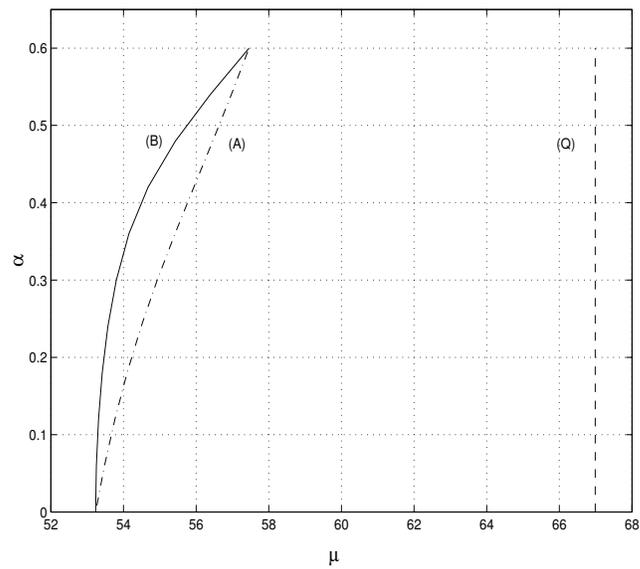
$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 + \theta(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} -100 & 10 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(k) \\ z(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned} \tag{3.44}$$

onde  $\theta(k)$  é um parâmetro incerto variante no tempo satisfazendo  $|\theta(k)| \leq 0.3$  para todo  $k$ .

O primeiro problema a ser tratado neste exemplo é o projeto de filtros robusto  $\mathcal{H}_2$  para o sistema (3.44) considerando diferentes valores para  $\Delta\theta$ , onde  $(\theta, \Delta\theta)$  pertencem a um polítopo consistente  $\mathcal{D}$ , similar ao da Fig. 3.1 (b), com  $a = b = 0.3$  (o qual fornece a estabilidade quadrática para este sistema) e  $c \leq \alpha$ , onde  $0 \leq \alpha \leq 0.6$ . Com o objetivo de ilustrar a dependência do limitante superior da norma  $\mathcal{H}_2$  pelo tipo de função de Lyapunov utilizada, aplica-se neste exemplo os Teoremas 3.1 e 3.2 com a matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  quadrática e afim nos parâmetros incertos, o qual são referidos como abordagens *bi-quadrática* ( $B$ ) e *afim-quadrática* ( $A$ ), respectivamente. Note que a abordagem afim-quadrática é obtida pelos Teoremas 3.1 e 3.2 zerando-se a partição  $P_2$  da matriz  $P$  em (3.10), similar ao resultado apresentado na equação (3.27). A abordagem baseada em estabilidade quadrática ( $Q$ ) de [40] também foi aplicada ao sistema (3.44). Fig. 3.2 (a) mostra o limitante superior  $\mu$  otimizado do quadrado da norma  $\mathcal{H}_2$  do erro de estimação em função de  $\alpha$  obtido pelo Teorema 3.1 para abordagens ( $A$ ) e ( $B$ ) e para o método de estabilidade quadrática de [40] baseado em (1.42) e (1.43). Fig. 3.2 (b) apresenta o resultado obtido pelo Teorema 3.2 e o método de estabilidade quadrática baseado em (1.44) e (1.45). Para comparação, projeta-se também o filtro



(a) Método do Teorema 3.1



(b) Método do Teorema 3.2

Figura 3.2: Limitante superior ótimo  $\mu$  de  $\|S_e\|_2^2$  para  $|\theta| \leq 0.3$  e  $c \leq \alpha$ .

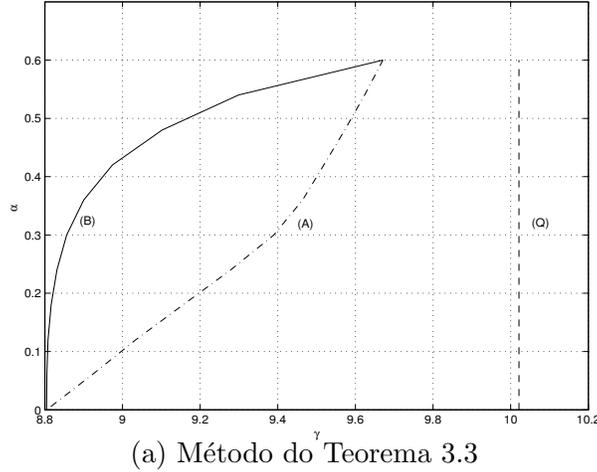


Figura 3.3: Limitante superior ótimo  $\gamma$  de  $\|S_e\|_\infty$  para  $|\theta| \leq 0.3$  e  $c \leq \alpha$ .

de Kalman para o sistema nominal (3.44) com  $\theta(k) \equiv 0$  obtendo-se  $\|S_e\|_2^2 = 36$ . No entanto, quando aplica-se este filtro para o sistema (3.44) com  $\theta(k) \equiv 0.3$ , obtém-se  $\|S_e\|_2^2 = 8352$ .

Observe que os resultados para as abordagens afim e bi-quadrática são melhores que os resultados para os métodos baseados em estabilidade quadrática, mesmo quando  $\alpha = 0,6$ , que corresponde ao máximo valor possível para a variação do parâmetro  $\Delta\theta$  quando  $\|\theta(k)\| \leq 0,3$  e assim pode ser visto como o caso onde o parâmetro é arbitrariamente rápido. Note que, o método de estabilidade quadrática permite que  $\Delta\theta(k) > 0,6$ , o qual é uma situação irreal para a restrição que  $\|\theta(k)\| \leq 0,3$ . Além disto, este método considera que os parâmetros incertos  $(\theta, \Delta\theta)$  pertençam a politopos não-consistentes  $\mathcal{D}$  da Fig. 3.1 (a) com  $c \rightarrow \infty$ , o que pode ser muito conservador.

Pelas Figs. 3.2 (a) e (b) pode-se observar que a abordagem bi-quadrática provê o menor limitante superior. Observa-se também que, para este exemplo, os resultados obtidos pelo Teorema 3.2 são melhores que os do Teorema 3.1.

Sobre as mesmas condições adotadas para o projeto de filtro  $\mathcal{H}_2$ , os teoremas apresentados na Seção 3.3 são usados para o projeto do filtro robusto  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema (3.44). Fig. 3.3 mostra o menor limitante superior  $\gamma$  atingido da  $\|S_e\|_\infty$  em função de  $\alpha$  obtido pelas aplicação do Teorema 3.3 casos: (A), (B); e pela abordagem (Q). Ressalta-se que os resultados obtidos pelo Teorema 3.4 são idênticos aos do Teorema 3.3, e por isso não são apresentados. De maneira semelhante ao caso  $\mathcal{H}_2$ , percebe-se pela Fig. 3.3 que a abordagem bi-quadrática fornece o menor limitante superior.



## Capítulo 4

# Sistemas Não Lineares

Nos capítulos anteriores, apresentou-se o projeto de filtros robustos para sistemas lineares pela minimização dos critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Neste capítulo, parte destes resultados são estendidos para o projeto de filtros para sistemas não lineares incertos a tempo contínuo. A metodologia de filtragem usada consiste, como no caso anterior, em descrever o problema de filtragem como um problema de factibilidade de LMIs usando funções de Lyapunov que são dependentes dos parâmetros incertos do sistema e dos estados. O projeto de filtros robustos é feito para três classes de sistemas não lineares: (i) sistemas com ruídos dependentes do estado (sistema bilinear), (ii) sistemas com não linearidades do tipo Lipschitz e (iii) um caso mais geral de sistemas, no qual a dinâmica é descrita por funções racionais nos parâmetros incertos e no estado. O item (i) foi publicado em [3] e o último resultado foi realizado em conjunto com Daniel Coutinho e foi submetido a publicação [20].

### 4.1 Formulação do Problema

Nesta seção, apresenta-se a formulação geral do problema de filtragem para sistemas não lineares. Considerando o sistema não linear descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta) + g(x, \theta, w_1) \\ y &= c(x, \theta) + d(x, \theta, w_2) \\ z &= h(x, \theta), \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $\theta \in \mathbb{R}^p$  o vetor de parâmetros incertos,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  o sinal de ruído (incluindo o sinal de perturbação  $w_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  e a ruído de medida  $w_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ),  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  o sinal de saída medido, e  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  o sinal a ser estimado,  $x_0$  é o estado inicial e  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$ ,  $c(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  são funções que definem a dinâmica do sistema.

As seguintes hipóteses são formuladas em relação ao sistema (4.1).

**H4.1** *Os parâmetros incertos  $\theta$  e sua taxa de variação  $\dot{\theta}$  pertencem a um politopo dado  $\mathcal{B}$ , i.e.  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .*

**H4.2** *O lado direito da equação diferencial é contínuo em seus argumentos e limitado para todo conjunto  $x$ ,  $\theta$  e  $w_1$  de interesse.*

**H4.3** *A origem,  $x = 0$ , é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$  e  $w_1 \equiv 0$ .*

**H4.4**  *$\mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$  é um politopo conhecido que especifica a vizinhança desejada do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema.*

De forma semelhante ao caso linear, assume-se, neste capítulo, que a estimativa  $\hat{z}$  do vetor de estados real  $z$  seja determinado através de um sistema dinâmico linear

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \dot{\hat{x}} &= A_f \hat{x} + B_f y \\ \hat{z} &= C_f \hat{x} \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $A_f$ ,  $B_f$  e  $C_f$  são matrizes constantes que devem ser determinadas de forma que o erro dado por  $e = z - \hat{z}$  tenda a zero assintoticamente independente dos parâmetros incertos  $\theta$ .

Uma condição necessária para a existência do filtro (4.2) é que o sistema (4.1) seja detectável, por exemplo, veja [36]. Perceba que em um sistema não linear a questão observabilidade está diretamente ligada ao sinal de entrada, já que entradas singulares podem tornar o sistema não linear não observável, veja mais em [36, 47].

Note que a idéia central para a busca de solução é semelhante ao resultado proposto nos capítulos anteriores, ou seja, encontrar um filtro dado por (4.2) que garanta que o estado estimado  $\hat{z}$  convirja assintoticamente para o estado original  $z$ , o mais rápido possível independente dos parâmetros incertos.

Nas próximas seções, apresentam-se soluções para este problema considerando três diferentes classes de sistemas (4.1).

Primeiro, aborda-se o projeto de filtros robustos para a classe de sistemas com incertezas do tipo determinísticas e estocásticas. Em particular, assume-se que as incertezas estocásticas são dependentes dos estados do sistema, dando origem a um sistema do tipo bilinear. O projeto do filtro, neste caso, é feito através da minimização da variância do erro de estimação pelo critério de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

Em seguida considera-se o problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas sujeitos a não linearidade do tipo Lipschitz e para sistemas não lineares racionais nos estados e nos parâmetros incertos.

Note que, de forma similar ao **Problema**  $\mathcal{H}_\infty$  para o caso de sistemas lineares, busca-se minimizar o ganho  $\mathcal{L}_2$  entre o sinal de perturbação  $w$  e o erro de estimação  $e$ . Observa-se, ainda, que nos últimos anos existe um grande interesse dos pesquisadores por este problema [29, 34, 59, 51, 52, 54]. No decorrer deste capítulo apresentam-se soluções para este problema, usando funções de Lyapunov que são dependentes de parâmetros.

## 4.2 Sistemas com Ruídos Dependentes do Estado

Nesta seção, considera-se o projeto de filtros robustos para sistemas bilineares estocásticos, conhecidos também como sistemas com ruídos dependentes do estado ou sistemas com incertezas estocásticas. Esta classe de sistema aparece naturalmente em diversas áreas, como por exemplo, economia, ecologia entre outros (veja [50]). Neste caso, o sistema (4.1) é modelado por uma equação diferencial de Itô:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_I: \quad dx &= A(\theta)xdt + G(\theta)x d\beta + B(\theta)dw \\ dy &= C(\theta)xdt + J(\theta)x d\nu + D(\theta)dw \\ z &= C_z(\theta)x \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  é o sinal de ruído (incluindo ruídos de processos e medidas), o qual é assumido ser um processo de Wiener com uma matriz de covariância  $I dt$  não correlacionado com  $x_0$  para todo  $t \geq 0$ , e  $\beta(t)$  e  $\nu(t)$  são processos escalares de Wiener, independentes de  $x_0$  que satisfazem

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[d\beta^2(t)] &= dt, \quad \mathbf{E}[d\nu^2(t)] = dt, \\ \mathbf{E}[d\beta(t)d\nu(t)] &= \alpha dt, \quad |\alpha| < 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Assume-se que  $\theta_i, i = 1, \dots, p$ , são os parâmetros incertos limitados constantes,  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  com  $\ell_\theta$  vértices conhecidos, e  $A(\theta), B(\theta), C(\theta), C_z(\theta), D(\theta), G(\theta)$  e  $J(\theta)$  são matrizes reais afins em  $\theta$ .

Utilizando o mesmo procedimento da Seção 2.2, busca-se, nesta seção, uma solução para o **Problema  $\mathcal{H}_2$** , ou seja, projetar um filtro  $\mathcal{F}$ , dado em (4.2), com uma garantida performance em termos da minimização de um limitante da variância assintótica do erro de estimação. Da equação do filtro (4.2) e do sistema (4.3), a dinâmica do erro de estimação é descrita por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_e : \quad d\xi &= A_a(\theta)\xi dt + [D_1(\theta)d\beta + D_2(\theta)d\nu]\xi + B_a(\theta)dw \\ e &= C_a(\theta)\xi \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde  $A_a(\theta), B_a(\theta)$  e  $C_a(\theta)$  estão descritos em (2.4) e

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad D_1(\theta) = \begin{bmatrix} G(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_f J(\theta) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

O problema, então, pode ser resumido em encontrar um filtro  $\mathcal{F}$  que garanta a *estabilidade interna* do sistema  $\mathcal{S}_e$  para todo  $\mathcal{B}_\theta$ , isto é,

$$\mathbf{E}[\|\xi(t)\|^2] \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty, \forall x_0, \theta \in \mathcal{B}_\theta; w(t) \equiv 0,$$

e otimize um limitante superior da variância do erro de estimação. Na seqüência, apresenta-se a versão do Lema 1.4, para garantir a estabilidade assintótica do sistema do erro de estimação (4.5).

**Lema 4.1** ([41]) *Dado o sistema  $\mathcal{S}_e$  e um filtro da forma (4.2), então as seguintes condições são verificadas:*

(a) *Se para um dado  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  o sistema  $\mathcal{S}_e$  é internamente estável, então a variância assintótica do erro de estimação é dada por*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] &= \mathbf{Tr}[C_a(\theta)X_\theta C_a^T(\theta)] \\ &= \mathbf{Tr}[B_a^T(\theta)Y_\theta B_a(\theta)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $X_\theta$  e  $Y_\theta$  são matrizes simétricas que dependem do parâmetro  $\theta$  e satisfazem as seguintes

equações algébricas

$$\begin{aligned} A_a(\theta)X_\theta + X_\theta A_a^T(\theta) + D_1(\theta)X_\theta D_1^T(\theta) + D_2(\theta)X_\theta D_2^T(\theta) + B_a(\theta)B_a^T(\theta) \\ + \alpha[D_1(\theta)X_\theta D_2^T(\theta) + D_2(\theta)X_\theta D_1^T(\theta)] = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} A_a^T(\theta)Y_\theta + Y_\theta A_a(\theta) + D_1^T(\theta)Y_\theta D_1(\theta) + D_2^T(\theta)Y_\theta D_2(\theta) + C_a^T(\theta)C_a(\theta) \\ + \alpha[D_1^T(\theta)Y_\theta D_2(\theta) + D_2^T(\theta)Y_\theta D_1(\theta)] = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

(b) Se existem matrizes  $P(\theta) > 0$  e  $W(\theta) > 0$  de forma que  $\forall \theta \in \mathcal{B}_\theta$ :

$$A_a(\theta)P(\theta) + P(\theta)A_a^T(\theta) + D_1(\theta)P(\theta)D_1^T(\theta) + D_2(\theta)P(\theta)D_2^T(\theta) \quad (4.10)$$

$$+ \alpha[D_1(\theta)P(\theta)D_2^T(\theta) + D_2(\theta)P(\theta)D_1^T(\theta)] + B_a(\theta)B_a^T(\theta) < 0$$

$$W(\theta) - C_a(\theta)P(\theta)C_a^T(\theta) > 0 \quad (4.11)$$

então o sistema  $\mathcal{S}_e$  é internamente estável para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  e a variância assintótica do erro de estimação satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] < \mu, \quad \mu = \sup_{\theta \in \mathcal{B}_\theta} \text{Tr}[W(\theta)]. \quad (4.12)$$

(c) Se existem matrizes  $P(\theta) > 0$  e  $W(\theta) > 0$  de forma que  $\forall \theta \in \mathcal{B}_\theta$ :

$$A_a^T(\theta)P(\theta) + P(\theta)A_a(\theta) + D_1^T(\theta)P(\theta)D_1(\theta) + D_2^T(\theta)P(\theta)D_2(\theta) \quad (4.13)$$

$$+ \alpha[D_1^T(\theta)P(\theta)D_2(\theta) + D_2^T(\theta)P(\theta)D_1(\theta)] + C_a^T(\theta)C_a(\theta) < 0$$

$$W(\theta) - B_a^T(\theta)P(\theta)B_a(\theta) > 0 \quad (4.14)$$

então o sistema  $\mathcal{S}_e$  é internamente estável para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  e a variância assintótica do erro de estimação satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] < \mu, \quad \mu = \sup_{\theta \in \mathcal{B}_\theta} \text{Tr}[W(\theta)]. \quad (4.15)$$

□□□

O projeto do filtro robusto para o sistema (4.3) segue as mesmas linhas do projeto de filtros para sistemas contínuos invariantes no tempo apresentado na Seção 2.2. Na seqüência,

apresenta-se o projeto de filtros baseado nas desigualdades (4.10) e (4.11), assumindo que a matriz  $P(\theta)$  é descrita por (2.13).

**Lema 4.2** *Considere o sistema (4.3) e seja  $\epsilon$  um escalar positivo dado. As desigualdades (4.10) e (4.11) são satisfeitas com uma matriz  $W(\theta)$  e uma matriz  $P(\theta)$  da forma (2.13) se existirem matrizes  $W(\theta) > 0$ ,  $N(\theta) > 0$  e  $M$  de forma que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$ .*

$$\begin{bmatrix} MA_a^T(\theta) + A_a(\theta)M^T & M^T - N(\theta) + \epsilon A_a(\theta)M^T & (D_1 + \alpha D_2)M & \bar{\alpha}D_2M & B_a(\theta) \\ M + \epsilon MA_a^T(\theta) - N(\theta) & -2\epsilon N(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ M^T(D_1 + \alpha D_2)^T & 0 & -N(\theta) & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}M^T D_2^T & 0 & 0 & -N(\theta) & 0 \\ B_a^T(\theta) & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & C_a M^T \\ MC_a^T(\theta) & N(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.17)$$

onde  $\bar{\alpha} = \sqrt{1 - \alpha^2}$ .

**Prova:** Primeiramente, note que como

$$D_1 P D_1^T + D_2 P D_2^T + \alpha D_1 P D_2^T + \alpha D_2 P D_1^T = (D_1 + \alpha D_2) P (D_1 + \alpha D_2)^T + \bar{\alpha}^2 D_2 P D_2^T$$

a desigualdade (4.10) é equivalente à

$$A_a P + P A_a^T + (D_1 + \alpha D_2) P (D_1 + \alpha D_2)^T + \bar{\alpha}^2 D_2 P D_2^T + B_a B_a^T < 0.$$

Aplicando o complemento de Schur, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A_a P + P A_a^T & \star & \star & \star \\ P(D_1 + \alpha D_2)^T & -P & \star & \star \\ \bar{\alpha} P D_2^T & 0 & -P & \star \\ B_a^T & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.18)$$

Assumindo que as desigualdades do Lema 4.1 são satisfeitas, pode-se afirmar que  $N(\theta)$  é uma matriz regular. Desta forma, define-se a seguinte matriz

$$N_f(\theta) = \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 & 0 \\ N^{-1}(\theta)MA_a^T(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}^{-1}(\theta)\bar{M} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde  $\bar{N}(\theta) = \text{diag}\{N(\theta), N(\theta)\}$  e  $\bar{M} = \text{diag}\{M, M\}$ . Pré- e pós-multiplicando a desigualdade (4.16) por  $N_f^T$  e  $N_f$ , respectivamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} M^T N^{-1}(\theta)MA_a^T(\theta) + A_a(\theta)M^T N^{-1}(\theta)M & \star & \star & \star \\ M^T N^{-1}(\theta)M(D_1 + \alpha D_2)^T & -M^T N^{-1}(\theta)M & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}M^T N^{-1}(\theta)MD_2^T & 0 & -M^T N^{-1}(\theta)M & 0 \\ B_a^T(\theta) & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

Pela definição de  $P(\theta)$  em (2.13), esta desigualdade implica em (4.18).

Considere (4.17), aplicando o complemento de Schur tem-se:

$$W(\theta) + C_a M^T N^{-1}(\theta)M C_a^T > 0$$

pela definição de  $P(\theta)$ , essa desigualdade implica em (4.11), concluindo a prova.  $\nabla\nabla\nabla$

Como as condições apresentadas no Lema 4.2 não são convexas na matriz  $M$  e nas matrizes do filtro, torna-se necessário linearizá-las, através do uso de transformações e mudanças de variáveis para poder descrevê-las na forma de LMIs. O próximo teorema apresenta este resultado, utilizando as transformações introduzidas por [40]. Ressalta-se que é possível também obter um resultado para o projeto de filtros robustos usando as transformações propostas por [31].

**Teorema 4.1** *Considere o sistema (4.3) e seja  $\mathcal{B}_\theta$  um politopo dos  $\theta$  admissíveis. Suponha que para algum escalar  $\epsilon > 0$  existam matrizes  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes simétricas  $\mathcal{N}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  e  $W_i \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $i = 1, \dots, \ell_\theta$  de forma que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$*

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \Psi_C(\theta) \\ \Psi_C^T(\theta) & \mathcal{N}(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_A(\theta) + \Psi_A^T(\theta) & * & * & * \\ \Psi_{AM}^T(\theta) & -2\epsilon\mathcal{N}(\theta) & * & * \\ \Psi_D^T(\theta) & 0 & -\bar{\mathcal{N}}(\theta) & * \\ \Psi_B^T(\theta) & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.22)$$

onde  $W(\theta)$  e  $\mathcal{N}(\theta)$  são funções matriciais afins em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$  e  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{\ell_\theta}$ , respectivamente, nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$ , as matrizes  $\Psi_A$ ,  $\Psi_B$ ,  $\Psi_C$  e  $\Psi_M$  são definidas em (2.20) e

$$\bar{\mathcal{N}}(\theta) = \text{diag}\{\mathcal{N}(\theta), \mathcal{N}(\theta)\}, \quad \Psi_{AM}(\theta) = \Psi_M + \epsilon\Psi_A(\theta) - \mathcal{N}(\theta),$$

$$\Psi_D(\theta) = \begin{bmatrix} \Psi_{D_1}(\theta) & \Psi_{D_2}(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{D_1}(\theta) = \begin{bmatrix} ZG(\theta) & ZG(\theta) \\ YG(\theta) + \alpha FJ(\theta) & YG(\theta) + \alpha FJ(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{D_2}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\alpha}FJ(\theta) & \bar{\alpha}FJ(\theta) \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha} = \sqrt{1 - \alpha^2},$$

Então o filtro  $\mathcal{F}$  com a matriz de transferência

$$G_{zy}(s) = RS^{-1}(sI - QS^{-1})^{-1}F$$

garante que o sistema  $\mathcal{S}_e$  é internamente estável para todo  $\theta \in \mathcal{B}_\theta$  e a variância assintótica do erro de estimação satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] < \max_{i=1, \dots, \ell_\theta} \text{Tr}[W_i], \forall \theta \in \mathcal{B}_\theta$$

**Prova:** A prova é semelhante à do Teorema 2.1 e pode ser encontrada em [3], por isso será omitida. ▽▽▽

Os comentários feitos ao Teorema 2.1 são também aplicáveis a este teorema. Em particular, como para um dado  $\epsilon$ , as condições do Teorema 4.1 são convexas nas variáveis de busca, pode-se projetar o filtro ótimo através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito à (4.22) e (4.21), para } \theta \text{ nos vértices de } \mathcal{B}_\theta, \text{ e} \\ & \mu - \text{Tr}[W_i] \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Além disto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^T(t)e(t)] < \mu$ .

É possível observar que esse resultado, com uma escolha particular da matriz  $N(\theta)$ , recupera o caso em que a função de Lyapunov é independente de parâmetros. O próximo lema mostra que na realidade as condições do Teorema 4.1 são condições necessárias para que as condições baseadas em estabilidade quadrática sejam satisfeitas.

**Lema 4.3** *Considere o sistema (4.3) e suponha que exista um filtro assintoticamente estável com realização no espaço de estados  $(A_f, B_f, C_f)$  de forma que o sistema do erro de estimação (4.5) satisfaça (4.10) e (4.11) com  $P(\theta) = Q_0$  e  $W(\theta)$  uma função afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$  nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$ . Então, as condições do Teorema 4.1 são satisfeitas com a mesma matriz  $W(\theta)$  e um  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno.  $\square\square\square$*

Resultados semelhantes podem ser obtidos utilizando a parte (c) do Lema 4.1, o que conduz a diferentes filtros e limitantes superiores para a variância do erro de estimação. Para mais detalhes sobre este resultado veja [3]. Usando o resultado para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas a tempo contínuo, apresentado na Seção 2.2, e a extensão do *bounded real lemma* para sistemas com incerteza estocásticas em [41] é possível, também, obter o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para esta classe de sistemas. Este resultado foi submetido a publicação em [6].

### 4.3 Sistemas com Não Linearidades do Tipo Lipschitz

No projeto de filtros e observadores para sistemas não lineares, muitos dos trabalhos existentes na literatura são desenvolvidos para sistemas com não linearidades de Lipschitz, veja [15, 29, 62, 63, 64, 88]. No entanto, no contexto de filtragem robusta usando LMIs poucos resultados são encontrados na literatura. Nesta seção, apresenta-se o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para esta classe de sistemas, assumindo que os parâmetros incertos afetam a dinâmica do sistema e a sua saída, ou seja, considera-se aqui a classe de sistemas (4.1), no qual

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= A(\theta)x + G\hat{g}(x), & g(x, \theta, w) &= Bw, \\ c(x, \theta) &= C(\theta)x, & d(x, \theta, w) &= Dw, & h(x, \theta) &= C_z(\theta)z \end{aligned} \tag{4.23}$$

onde  $A(\theta)$ ,  $C(\theta)$  são matrizes afins em  $\theta$ , descritas em (2.52);  $B, G, D$ , e  $C_z$  são matrizes conhecidas e  $\hat{g}(x)$  é uma função que satisfaz a seguinte hipótese.

**H4.5** *Existe uma matriz  $K_g > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  de forma que*

$$\|\hat{g}(x)\| \leq \|K_g x\|$$

Note que a função  $\hat{g}(\theta)$  pode representar erros de modelagem, ou linearizações em torno do ponto de operação de um dado sistema.

O objetivo é o projeto de filtros (4.2) de forma que o erro de estimação seja minimizado pelo critério de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . Note que a partir da dinâmica do sistema e da equação do filtro tem-se o seguinte sistema aumentado para o erro de estimação:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_e : \quad \dot{\xi} &= A_a(\theta)\xi + G_a\bar{g}(\xi) + B_a dw \\ e &= C_a(\theta)\xi \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde  $A_a, B_a$  e  $C_a$  estão descritos em (2.4) e

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad G_a(\theta) = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{g}(\xi) = \begin{bmatrix} g(x) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

O problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  pode então ser visto como um **Problema  $\mathcal{H}_\infty$**  para o sistema aumentado  $\mathcal{S}_e$ . Este problema tem solução conhecida através de uma generalização do *Bounded real Lemma* apresentado a seguir.

**Lema 4.4 ([79])** *Considere o sistema (4.1) e (4.23) satisfazendo as hipóteses H4.1 e H4.5, e o filtro (4.2). Seja  $\gamma$  um escalar positivo dado. Se existe uma matriz simétrica  $P(\theta) > 0$  que satisfaça a seguinte desigualdade para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .*

$$\dot{P}(\theta) + A_a^T(\theta)P(\theta) + P(\theta)A_a(\theta) + C_a^T(\theta)C_a(\theta) + K_a^T K_a + P(\theta)(\gamma^{-2}B_a B_a^T + G_a G_a^T)P(\theta) < 0 \tag{4.26}$$

onde  $K_a = \begin{bmatrix} K_g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Então o sistema do erro de estimação (4.24) é exponencialmente estável e sob condições iniciais nulas o ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema satisfaz  $\|S_e\|_\infty < \gamma$  para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .  $\square\square\square$

A metodologia proposta para a solução do Problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  é similar à usada na Seção 2.3 para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$  para sistemas lineares variantes no tempo. Assume-se, assim, que a matriz  $P(\theta)$  é descrita por (2.58) e que no sistema (4.1) e (4.23) a matriz  $A(\theta) = A_0 + \mathcal{A}\Theta$ , na qual  $\mathcal{A}$  e  $\Theta$  são definidas em (2.57). O primeiro resultado apresenta condições suficientes para verificar a factibilidade de (4.26) com  $P(\theta) = \mathcal{P}(\theta) > 0$ .

**Lema 4.5** *Dado um escalar  $\gamma > 0$  e uma matriz  $K_g$ , existe uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  da forma (2.58) que satisfaça a desigualdade (4.26), se e somente se existir uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{(2n+q) \times (2n+q)}$  na forma (2.61) de modo que para todo  $\eta \in \mathbb{R}^{2n+q}$  e  $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{3n+q+n_z+n_w}$  as seguintes desigualdades sejam satisfeitas*

$$\eta^T P \eta > 0, \quad \forall (\eta, \theta) \text{ tal que } H(\theta)\eta = 0, \quad \eta \neq 0, \quad e \theta \in \mathcal{B}_\theta \quad (4.27)$$

$$\tilde{\eta}^T \Psi_A(\theta, \dot{\theta}) \tilde{\eta} < 0, \quad \forall (\tilde{\eta}, \theta, \dot{\theta}) \text{ tal que } \begin{bmatrix} H(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\eta} = 0 \quad \tilde{\eta} \neq 0, \quad e (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (4.28)$$

onde

$$\Psi_A(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} A_e^T(\theta, \dot{\theta})P + PA_e(\theta, \dot{\theta}) + K_a^T K_a & C_e^T & PG_e(\theta) & PB_e(\theta) \\ C_e & -\gamma I & 0 & 0 \\ G_e^T(\theta)P & 0 & -I & 0 \\ B_e^T(\theta)P & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}$$

e as matrizes  $A_e(\theta, \dot{\theta})$ ,  $B_e(\theta)$ ,  $C_e$ ,  $H(\theta)$  são dadas por (2.60) e  $G_e(\theta) = \begin{bmatrix} G^T & G^T \theta^T & 0 \end{bmatrix}^T$

**Prova:** A prova segue a mesma linha da prova do Lema 2.6.  $\nabla \nabla \nabla$

Na seqüência, apresenta-se o resultado para o projeto de filtros considerando o uso de multiplicadores introduzidos pelo Lema de Finsler.

**Lema 4.6** *Dado um escalar  $\gamma > 0$  e uma matriz  $K_g$ , a desigualdade (4.26) é satisfeita com uma matriz  $P(\theta)$  na forma (2.58) se existirem matrizes simétricas  $P \in \mathbb{R}^{(2n+q) \times (2n+q)}$  na forma (2.61) e matrizes  $L \in \mathbb{R}^{(2n+q) \times q}$  e  $M \in \mathbb{R}^{(3n+q+n_z+n_w) \times q}$  de maneira que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas*

$$P + LH(\theta) + H^T(\theta)L^T > 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{B}_\theta \quad (4.29)$$

$$\Psi_A(\theta, \dot{\theta}) + M \begin{bmatrix} H(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T M^T < 0, \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (4.30)$$

As expressões (4.29) e (4.30) não são convexas na matriz  $P$  e nas matrizes do filtro, mas através de transformações de congruências é possível torná-las convexas. Este resultado é apresentado no próximo teorema.

**Teorema 4.2** *Considere o sistema (4.1) e (4.23) satisfazendo as hipóteses **H4.1** e **H4.5** com a matriz  $K_g$  dada e seja  $\mathcal{B}$  um politopo dos  $(\theta, \dot{\theta})$  admissíveis. Suponha que existam matrizes simétricas  $P_0 > 0$ ,  $P_2$  e  $\Omega_P$ , e matrizes  $P_1$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_4$ ,  $M_5$ ,  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$ ,  $\Omega_C$ ,  $\Omega_L$  e  $\Omega_M$ , e um escalar positivo  $\gamma$  de forma que o seguinte problema de otimização seja satisfeito nos vértices do politopo  $\mathcal{B}$ :*

min  $\gamma$  sujeito à

$$\begin{bmatrix} P_0 + L_1\Theta + \Theta^T L_1 & P_1^T - L_1 + (L_2\Theta)^T & \Omega_P + \Theta^T \Omega_L^T \\ P_1 - L_1^T + L_2\Theta & P_2 - L_2 - L_2^T & -\Omega_L^T \\ \Omega_P + \Omega_L\Theta & -\Omega_L & \Omega_P \end{bmatrix} > 0 \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{21}^T & \Phi_{31}^T & R^T + \Theta^T M_4^T & \Phi_{51}^T & \Phi_{61}^T \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{32}^T & -M_4 & \Phi_{52}^T & \Phi_{62}^T \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & -\Omega_C^T & \Phi_{53}^T & \Phi_{63}^T \\ R + M_4\Theta & -M_4 & -\Omega_C & -\gamma I & 0 & \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & 0 & -I & 0 \\ \Phi_{61} & \Phi_{62} & \Phi_{63} & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.32)$$

onde

$$\Phi_{11} = A_0^T P_0 + P_0 A_0 + \Omega_B C(\theta) + C^T(\theta) \Omega_B^T + P_1 \Upsilon + \Upsilon^T P_1^T + M_1 \Theta + \Theta^T M_1^T + K_g^T K_g$$

$$\Phi_{21} = P_1^T A_0 + P_2 \Upsilon + (P_0 \mathcal{A} + P_1 \Theta \mathcal{A})^T - M_1^T + M_2 \Theta,$$

$$\Phi_{22} = \mathcal{A}^T P_1 + P_1^T \mathcal{A} + P_2 \Theta \mathcal{A} + (P_2 \Theta \mathcal{A})^T - M_2 - M_2^T,$$

$$\Phi_{31} = \Omega_P A_0 + \Omega_B C(\theta) + \Omega_A^T + \Omega_M \Theta, \quad \Phi_{32} = \Omega_P \mathcal{A} - \Omega_M, \quad \Phi_{33} = \Omega_A + \Omega_A^T,$$

$$\Phi_{51} = G^T (P_0 + P_1 \Theta)^T + M_6 \Theta, \quad \Phi_{52} = G^T (P_1 + \Theta^T P_2) - M_5, \quad \Phi_{53} = G^T \Omega_P,$$

$$\Phi_{61} = B^T (P_0 + P_1 \Theta)^T + D^T \Omega_B^T + M_6 \Theta, \quad \Phi_{62} = B^T (P_1 + \Theta^T P_2) - M_6,$$

$$\Phi_{63} = B^T \Omega_P + D^T \Omega_B^T, \quad \Upsilon = \Theta A_0 + \dot{\Theta}.$$

Então o filtro  $\mathcal{F}$  com matriz de transferência

$$G_{zy}(s) = (\Omega_C \Omega_P^{-1})(sI - (\Omega_A \Omega_P^{-1}))^{-1} \Omega_B \quad (4.33)$$

garante que o sistema de erro  $S_e$  é exponencialmente estável e  $\|S_e\|_\infty < \gamma$  para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .

**Prova:** A prova segue os mesmos passos usados na prova do Teorema 2.5. ▽▽▽

O Teorema 4.2 fornece condições LMIs para o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas com não linearidades de Lipschitz, usando funções de Lyapunov que são quadráticas nos parâmetros incertos. É interessante observar que este resultado é uma alternativa aos resultados existentes na literatura, que são na sua grande maioria baseados na busca de observadores através das soluções de equações de Riccati, ou soluções analíticas que nem sempre são fáceis de serem satisfeitas, veja [88] e referências deste.

Note que, de forma similar aos resultados anteriores, o Teorema 4.2 com a escolha particular das matrizes  $P_1 = 0$  e  $P_2 = 0$  retorna ao projeto de filtros baseado em estabilidade quadrática, ou quando apenas  $P_2 = 0$  ao projeto de filtros com funções de Lyapunov afim nos parâmetros incertos.

## 4.4 Sistemas Racionais

Nesta seção, desenvolve-se o projeto de filtros robusto para sistemas não lineares racionais nos parâmetros incertos e nos estados. Estes resultados foram desenvolvidos em cooperação com Daniel Coutinho e são baseados nos novos resultados para a análise de estabilidade de sistemas não lineares desenvolvidos em [74] e no artigo sobre controle  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas não lineares em [23].

O objetivo é o projeto de filtros robustos para o sistema não linear (4.1) cujas funções são descritas por:

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= A(x, \theta)x & g(x, \theta, w_1) &= [ B(x, \theta) \quad 0 ]w \\ c(x, \theta) &= C(x, \theta)x & d(x, \theta, w_2) &= [ 0 \quad D(x, \theta) ]w & h(x, \theta) &= H(x, \theta)x \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde  $A(x, \theta), B(x, \theta), C(x, \theta), D(x, \theta), H(x, \theta)$  são funções racionais dos parâmetros incertos e do estado.

Observe que, quando a origem do sistema não é globalmente assintoticamente estável (GAS) o sinal de perturbação  $w_1$  pode levar o sistema a instabilidade. Por isto, considera-se a seguinte definição para a estabilidade regional (veja [23] para maiores detalhes):

**Definição 4.1** ([23]) *Considere o sistema não linear (4.1) e (4.34), satisfazendo **H4.1-H4.4**, e um conjunto de perturbações  $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{L}_2$  dadas. O sistema é chamado regionalmente estável, com respeito a  $\mathcal{W}_1$  e  $\mathcal{B}_x$ , se  $x(t) \in \mathcal{B}_x$  para todo  $t \geq 0$  e todo  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ . O correspondente conjunto  $\mathcal{W}_1$  é chamado o conjunto das perturbações admissíveis na entrada.*

Para simplificar a notação, ao longo deste capítulo formula-se a seguinte hipótese em relação ao vetor de perturbações  $w$ :

**H4.6** *Os componentes do sinal de ruído  $w_1$  e  $w_2$  pertencem aos conjuntos  $\mathcal{W}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ , respectivamente, onde  $\mathcal{W}_1$  é um conjunto admissível.*

O intuito desta seção é o projeto de filtros lineares do tipo (4.2), que garantam uma estimativa  $\hat{z}$  de  $z$  com a minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  do operador entre o sinal de perturbação  $w$  e o erro de estimação  $e$ . Para isso, constrói-se o sistema do erro de estimação:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(x, \theta) & 0 \\ B_f C(x, \theta) & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(x, \theta) & 0 \\ 0 & B_f D(x, \theta) \end{bmatrix} w \\ e &= \begin{bmatrix} H(x, \theta) & -C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.35}$$

O problema de filtragem a ser resolvido pode assim ser visto como um **Problema  $\mathcal{H}_\infty$**  apresentado em (2.6) para o sistema aumentado (4.35). O seguinte lema fornece a base para a busca de uma solução para este problema no caso de sistemas não lineares.

**Lema 4.7** ([47]) *Considere o sistema (4.1) e (4.34) com **H4.1-H4.4** e **H4.6** e o sistema aumentado (4.35). Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}$  dois politopos dados,  $\mathcal{W}_1$  um conjunto de entrada admissíveis de perturbações e  $\gamma$  um escalar positivo dado. Suponha que existam dois escalares positivos  $\epsilon_1, \epsilon_2$  e uma função continuamente diferenciável  $V : \mathcal{B}_x \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  satisfazendo às seguintes*

*desigualdades:*

$$\epsilon_1 \xi^T \xi \leq V(x, \theta, \hat{x}) \leq \epsilon_2 \xi^T \xi, \quad \forall (x, \theta, \hat{x}) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \quad (4.36)$$

$$\dot{V}(x, \theta, \hat{x}) + e^T e - \gamma w^T w < 0, \quad \forall (x, (\theta, \dot{\theta}), \hat{x}) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n \quad (4.37)$$

onde  $\xi = [x^T \quad \hat{x}^T]^T$ . Então, a origem do sistema não forçado (4.1) e (4.34),  $w_1 \equiv 0$ , é localmente exponencialmente estável. Além disto, o ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema (4.35) satisfaz  $\|\mathcal{G}_{we}\|_\infty^2 < \gamma$  para todo  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ ,  $w_2 \in \mathcal{L}_2$  e todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .  $\square\square\square$

Para encontrar de uma solução factível via LMI para o Lema 4.7, faz-se necessário inserir duas subseções auxiliares. Na primeira, apresenta-se o tipo de função de Lyapunov utilizada no projeto do filtro robusto. Esta função tem uma estrutura similar à função de Lyapunov utilizada nas Seções 2.3 e 4.3, na qual apenas parte da matriz  $P$  é dependente do parâmetros. O diferencial é que nesta seção assume-se que esta parte da função de Lyapunov também é dependente dos estados do sistema. Na seqüência, apresenta-se uma nova representação para o sistema não linear, onde elimina-se as não linearidades através da inserção de variáveis auxiliares. Definidas a função de Lyapunov e a nova representação para o sistema, apresenta-se na Subseção 4.4.3 o projeto de filtros robustos para esta classe de sistemas. O projeto do filtro segue os mesmos procedimentos já utilizados para o caso de sistemas com não linearidades do tipo Lipschitz, ou seja, inclusão de variáveis de folga através do Lema de Finsler, transformações de similaridade e mudanças de variáveis. Para finalizar, na última subseção apresenta-se o projeto de filtros não lineares para esta classe de sistemas.

#### 4.4.1 Função de Lyapunov

Nesta parte do trabalho descreve-se a função de Lyapunov utilizada para o projeto de filtros robustos. Diferentemente das condições anteriores, assume-se que a matriz  $P$  da função de Lyapunov seja também dependente dos estados do sistemas. Este tipo de função de Lyapunov vem sendo utilizada no estudo de diversos problemas da teoria de controle para sistemas não lineares, como análise da estabilidade [74], critérios de desempenho [22] e sistemas híbridos [19].

Considera-se então a seguinte classe de funções de Lyapunov

$$V(x, \theta, \hat{x}) = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}(x, \theta) & P_3 \\ P_3^T & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}(x, \theta) = \begin{bmatrix} \Theta(x, \theta) \\ I_n \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \Theta(x, \theta) \\ I_n \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

onde a matriz  $\Theta(x, \theta) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma função afim de  $(x, \theta)$ ;  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$ ,  $P_4 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$  e  $P$  são matrizes constantes que devem ser determinadas. Considera-se também que a matriz  $P$  é particionada como:

$$P = \begin{bmatrix} P_2 & P_1^T \\ P_1 & P_0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

com  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $P_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Para facilitar o calculo da derivada da função de Lyapunov, define-se o seguinte vetor auxiliar:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \zeta_1 = \Theta(x, \theta)x. \quad (4.40)$$

Com essa consideração, a função de Lyapunov é agora representada por

$$V(x, \theta, \hat{x}) = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ x \\ \hat{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_2 & P_1^T & 0 \\ P_1 & P_0 & P_3 \\ 0 & P_3^T & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ x \\ \hat{x} \end{bmatrix},$$

e sua derivada no tempo por

$$\dot{V}(x, \theta, \hat{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_2 & P_1^T & 0 \\ P_1 & P_0 & P_3 \\ 0 & P_3^T & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ x \\ \hat{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_2 & P_1^T & 0 \\ P_1 & P_0 & P_3 \\ 0 & P_3^T & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Para obter  $\dot{V}(x, \theta, \hat{x})$  é necessário ter os termos  $\dot{x}$ ,  $\dot{\hat{x}}$  e  $\dot{\zeta}_1$ . Como os dois primeiros termos saem diretamente da dinâmica do sistema e do filtro, é necessário, então, encontrar uma forma de calcular o termo  $\dot{\zeta}_1$ . Para isso, sem perda de generalidade, considera-se que a matriz afim  $\Theta(x, \theta)$  tenha a seguinte estrutura:

$$\Theta(x, \theta) = \sum_{i=1}^n R_i x_i + \sum_{i=1}^{n_\theta} S_i \theta_i + U \quad (4.42)$$

onde  $x_i, \theta_i$  são respectivamente as entradas dos vetores  $x$  e  $\theta$ ,  $R_i$  (para  $i = 1, \dots, n$ ),  $S_i$  (para  $i = 1, \dots, n_\theta$ ) e  $U$  são matrizes constantes com a mesma dimensão de  $\Theta(x, \theta)$ .

Das equações (4.40) e (4.42), a derivada temporal de  $\zeta_1$  é descrita por:

$$\dot{\zeta}_1 = \sum_{i=1}^n R_i \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n_\theta} S_i \dot{\theta}_i + \Theta(x, \theta) \dot{x} = \left( \tilde{\Theta}(x) + \Theta(x, \theta) \right) \dot{x} + \hat{\Theta}(\dot{\theta})x$$

onde as matrizes  $\tilde{\Theta}(x)$  e  $\hat{\Theta}(\dot{\theta})$  são dadas por:

$$\tilde{\Theta}(x) = \sum_{i=1}^n R_i x r_i \quad \text{e} \quad \hat{\Theta}(\dot{\theta}) = \sum_{i=1}^{n_\theta} S_i \dot{\theta}_i, \quad (4.43)$$

com  $r_i$  denotando a  $i$ -ésima linha da matriz identidade  $I_n$ .

Note que, como nas seções anteriores, a função de Lyapunov polinomial definida em (4.38) tem o caso independente de parâmetros e afim como casos particulares, ao se impor certas restrições na matriz  $P$  definida em (4.39). Quando  $P_1 = 0$  e  $P_2 = 0$ , resulta-se que  $\mathcal{P}(x, \theta)$  torna-se independente de parâmetros. Por outro lado, impondo  $P_2 = 0$ ,  $\mathcal{P}(x, \theta)$  torna-se afim no parâmetro  $\theta$  e no estado  $x$ .

#### 4.4.2 Modelo

Para projetar o filtro robusto usando técnicas LMIs, faz-se necessário reescrever o sistema (4.1) e (4.34) em uma forma linear através da introdução de variáveis auxiliares. Nesta seção, apresenta-se esta nova descrição para o sistema não linear. Na realidade, descreve-se o sistema não linear (4.1) e (4.34) como um sistema algébrico-diferencial descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + A_2 \pi + B_1 w + B_2 \phi, \\ y &= C_1 x + C_2 \pi + D_1 w + D_2 \phi, \\ z &= H_1 x + H_2 \pi, \\ 0 &= \Delta_1(x, \theta)x + \Delta_2(x, \theta)\pi, \\ 0 &= \Phi_1(x, \theta)w + \Phi_2(x, \theta)\phi \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde  $\pi \in \mathbb{R}^{n_\pi}$  e  $\phi \in \mathbb{R}^{n_\phi}$  são funções vetoriais não lineares de  $(x, \theta)$ ;  $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_\pi}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_\phi}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_\pi}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_\phi}$ ,  $H_1 \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$  e  $H_2 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_\pi}$  são matrizes constantes; e  $\Delta_1(x, \theta) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\Delta_2(x, \theta) \in \mathbb{R}^{p \times n_\pi}$ ,  $\Phi_1(x, \theta) \in \mathbb{R}^{q \times n_w}$  e  $\Phi_2(x, \theta) \in \mathbb{R}^{q \times n_\phi}$  são matrizes afins em  $(x, \theta)$ .

Para ter o sistema (4.44) equivalente à (4.1) e (4.34), formula-se a seguinte hipótese:

**H4.7** A matrizes  $\Delta_2(x, \theta)$  e  $\Phi_2(x, \theta)$  tem posto completo por coluna para todo  $x$  e  $\theta$  de interesse, isto é,  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .

A hipótese acima é similar à hipótese para garantir a regularidade de sistemas descritores, por exemplo [13], e implica que  $\pi(x, \theta)$  e  $\phi(x, \theta)$  podem ser eliminados de (4.44) retornando a representação original do sistema (4.1) e (4.34), ou seja,  $\pi = -(\Delta_2^T \Delta_2)^{-1} \Delta_2^T \Delta_1 x$  e  $\phi = -(\Phi_2^T \Phi_2)^{-1} \Phi_2^T \Phi_1 w$ .

Para ilustrar esta decomposição, apresenta-se o seguinte exemplo.

**Exemplo 4.1** Considere o seguinte sistema incerto baseado na equação de Van der Pol [23]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & (0.8 + 0.2\theta)(x_1^2 - 1) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_1, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ y &= x_1 + w_2, \quad w_1 \in \mathcal{W}_1, \quad w_2 \in \mathcal{L}_2 \\ z &= x_1, \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Este sistema satisfaz **H4.1-H4.4** e **H4.6** e pode ser representado pelo seguinte sistema algébrico-diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + A_2 \pi + B_1 w, \\ y &= C_1 x + D_1 w, \\ z &= H_1 x, \\ \Delta_1(x, \theta)x + \Delta_2(x, \theta)\pi &= 0 \end{aligned} \tag{4.46}$$

onde as matrizes e vetores auxiliares são representados por

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}^T, \\ \Delta_1(x, \theta) &= \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_2(x, \theta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \pi = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ \theta x_2 \\ x_1^2 x_2 \\ \theta x_1^2 x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que a matriz  $\Delta_2(x, \theta)$  satisfaz a hipótese **H4.7**, com isto tem-se que (4.46) é equivalente à (4.45).

É importante salientar que a decomposição algébrico-diferencial (4.44) para um sistema não linear não é única. Ressalta-se, também, que dependendo da escolha utilizada pode-se estar inserindo mais ou menos restrições ao problema. Mais detalhes sobre a discussão de uma escolha adequada desta representação pode ser encontrada em [23].

### 4.4.3 Projeto do Filtro

Neste parte, desenvolve-se o projeto de filtros robustos para o sistema (4.1) e (4.34). O resultado é baseado na função de Lyapunov e na nova descrição algébrico diferencial para o sistema não linear, apresentados nas subseções anteriores, aplicado ao Lema 4.7.

Antes de apresentar o filtro, note que, considerando a definição da função de Lyapunov apresentada na Subseção 4.4.1 e a nova formulação para o sistema não linear dada em (4.44), tem-se a seguinte formulação para a derivada temporal de  $V(x, \theta, \hat{x})$ , onde as matrizes  $\Theta(x, \theta)$ ,  $\tilde{\Theta}(x)$ ,  $\hat{\Theta}(\dot{\theta})$ ,  $A(x, \theta)$ ,  $B(x, \theta)$ ,  $C(x, \theta)$  e  $D(x, \theta)$  são consideradas sem as suas dependências em  $x$ ,  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .

$$\dot{V}(\zeta, \hat{x}) = \begin{bmatrix} \zeta \\ \pi \\ \hat{x} \\ w \\ \Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{a1}^T P + P A_{a1} + J_{a1} & \star & \star & \star & \star \\ A_{a2}^T P + J_{a2}^T & 0 & \star & 0 & 0 \\ J_{a2}^T & P_3 A_2 + P_4 B_f C_2 & A_f^T P_4 + P_4 A_f & \star & \star \\ B_{a1}^T P + J_{a4}^T & 0 & B_1^T P_3 + D_1^T B_f^T P_4 & 0 & 0 \\ B_{a2}^T P + J_{a5}^T & 0 & B_2^T P_3 + D_2^T B_f^T P_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \pi \\ \hat{x} \\ w \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\forall (\zeta, \pi, \hat{x}, w, \Phi) : \Lambda \zeta = 0, \Delta_{a1} \zeta + \Delta_{a2} \pi = 0 \text{ e } \Phi_1 w + \Phi_2 \phi = 0.$$

no qual as restrições de igualdade saem diretamente do sistema (4.44) e

$$A_{a1} = \begin{bmatrix} 0_m & (\Theta + \tilde{\Theta})A_1 + \hat{\Theta} \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, A_{a2} = \begin{bmatrix} (\Theta + \tilde{\Theta})A_2 \\ A_2 \end{bmatrix}, J_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_3 B_f C_1 + C_1^T B_f^T P_3^T \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
B_{a1} &= \begin{bmatrix} (\Theta + \tilde{\Theta})B_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \quad B_{a2} = \begin{bmatrix} (\Theta + \tilde{\Theta})B_2 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad J_{a2} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_1^T P_3 + C_1^T B_f^T P_4 + P_3 A_f \end{bmatrix}, \\
J_{a3} &= \begin{bmatrix} 0 \\ P_3 B_f C_2 \end{bmatrix}, \quad J_{a4} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_3 B_f D_1 \end{bmatrix}, \quad J_{a5} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_3 B_f D_2 \end{bmatrix}, \quad (4.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_x &= \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_n & -x_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{a1} = \begin{bmatrix} 0_{p \times m} & \Delta_1 \\ 0 & \Delta_x \end{bmatrix}, \\
\Lambda &= \begin{bmatrix} I_n & -\Theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tendo definido como fica  $\dot{V}(\zeta, \hat{x})$ , o projeto do filtro  $\mathcal{F}$  é feito buscando encontrar a função de Lyapunov em (4.38), juntamente com as matrizes do filtro, de forma que as condições (4.36) e (4.37) sejam satisfeitas. O seguinte lema apresenta a primeira parte do resultado, sendo baseado na aplicação do Lema de Finsler, onde buscam-se soluções quando o filtro  $\mathcal{F}$  é conhecido. Para tal, utiliza-se a notação introduzida em (4.49) e define-se que:

$$H_{a1} = \begin{bmatrix} 0_{n_z \times m} & H_1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

**Teorema 4.3** *Considere o sistema (4.1) e (4.34) com **H4.1-H4.4** e **H4.6**, e (4.2) com  $A_f$ ,  $B_f$  e  $C_f$ . Considere a decomposição não linear (4.44) do sistema (4.1) e (4.34) com **H4.7**. Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}$  politopos dados. Suponha que as matrizes simétricas  $P_i$  (para  $i = 0, 2, 4$ ), e matrizes  $P_i$  (para  $i = 1, 3$ ),  $G_i$  (para  $i = 1, 2, 3$ ) e  $L_{ij}$  (para  $i = 1, \dots, 5$  e  $j = 1, 2, 3$ ) e o escalar positivo  $\gamma$  sejam uma solução para o problema de otimização onde as LMIs são construídas nos vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}$ :*

$$\begin{aligned}
\min \quad & \gamma \quad \text{sujeito à} \\
& \begin{bmatrix} P_2 + G_1 + G_1^T & \star & \star \\ P_1 - \Theta^T G_1^T + G_2 & P_0 - G_2 \Theta - \Theta^T G_2^T & \star \\ G_3 & P_3^T - G_3 \Theta & P_4 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & H_{a1}^T \\ \star & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & H_2^T \\ \star & \star & J_{33} & J_{34} & J_{35} & -C_f^T \\ \star & \star & \star & J_{44} & J_{45} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & J_{55} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.52)$$

onde  $P$  é dada em (4.39) e

$$\begin{aligned} J_{11} &= A_{a1}^T P + P A_{a1} + L_{11} \Lambda + \Lambda^T L_{11}^T + L_{12} \Delta_{a1} + \Delta_{a1}^T L_{12}^T + J_{a1}, \\ J_{12} &= P A_{a2} + L_{12} \Delta_2 + \Lambda^T L_{21}^T + \Delta_{a1}^T L_{22}^T + J_{a2}, \\ J_{13} &= \Lambda^T L_{31}^T + \Delta_{a1}^T L_{33}^T + J_{a3}, \\ J_{14} &= P B_{a1} + L_{13} \Phi_1 + \Lambda^T L_{41}^T + \Delta_{a1}^T L_{42}^T + J_{a4}, \\ J_{15} &= P B_{a2} + L_{13} \Phi_2 + \Lambda^T L_{51}^T + \Delta_{a1}^T L_{52}^T + J_{a5}, \\ J_{22} &= L_{22} \Delta_2 + \Delta_2^T L_{22}^T, \quad J_{23} = A_2^T P_3 + C_2^T B_f^T P_4 + \Delta_2^T L_{32}^T, \\ J_{24} &= L_{23} \Phi_1 + \Delta_2^T L_{42}^T, \quad J_{25} = L_{23} \Phi_2 + \Delta_2^T L_{52}^T, \\ J_{33} &= A_f^T P_4 + P_4 A_f, \quad J_{34} = P_3^T B_1 + P_4 B_f D_1 + L_{33} \Phi_1, \\ J_{35} &= P_3^T B_2 + P_4 B_f D_2 + L_{33} \Phi_2, \quad J_{44} = L_{43} \Phi_1 + \Phi_1^T L_{43}^T - \gamma I_{n_w}, \\ J_{45} &= L_{43} \Phi_2 + \Phi_1^T L_{53}^T, \quad J_{55} = L_{53} \Phi_2 + \Phi_2^T L_{53}^T. \end{aligned}$$

Então, a origem do sistema não forçado (4.1) e (4.34) é localmente exponencialmente estável. Além disto, o ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema (4.35) satisfaz  $\|\mathcal{G}_{we}\|_\infty^2 < \gamma$  para todo  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ ,  $w_2 \in \mathcal{L}_2$  e todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .

**Prova:** Suponha que as LMIs (4.51) e (4.52) sejam satisfeitas nos vértices de  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}$ . Então, por convexidade, elas são também satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ . Considere o sistema (4.35), a decomposição não linear em (4.44), a função de Lyapunov em (4.38), os vetores auxiliares  $\zeta$  e  $\zeta_1$  em (4.40), e defina a matriz  $\Psi$  de forma que  $\Psi \begin{bmatrix} \zeta^T & \hat{x}^T \end{bmatrix}^T = \xi$ , por exemplo:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} & I_n & I_n \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \xi = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}.$$

Por conveniência, reescreve-se a LMI (4.51) como  $\Gamma_a > 0$ , onde

$$\Gamma_a = \begin{bmatrix} P_2 & P_1^T & 0 \\ P_1 & P_0 & P_3 \\ 0 & P_3^T & P_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -\Theta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n \\ -\Theta^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1^T & G_2^T & G_3^T \end{bmatrix}$$

Seja  $\epsilon_1$  algum escalar positivo pequeno. Como  $\Gamma_a$  é estrita, é possível acrescentar o termo  $-\epsilon_1 \Psi^T \Psi$  em  $\Gamma_a > 0$  sem trocar o seu sinal, ou seja, a condição  $\Gamma_a - \epsilon_1 \Psi^T \Psi \geq 0$  é ainda satisfeita. Pré- e pós-multiplicando  $\Gamma_a - \epsilon_1 \Psi^T \Psi \geq 0$  por  $[\zeta^T \hat{x}^T]$  e sua transposta respectivamente tem-se:

$$V(x, \theta, \hat{x}) = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}(x, \theta) & P_3 \\ P_3^T & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \geq \epsilon_1 \xi^T \xi, \quad \forall (x, \theta, \hat{x}) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n, \quad (4.53)$$

desde  $\zeta_1 - \Theta x = 0$ .

Como  $x$ ,  $\theta$  são limitados e  $P$ ,  $P_4$  são matrizes constantes, é possível encontrar dois escalares positivos suficientemente pequenos  $\lambda_a$  e  $\lambda_b$  de forma que  $\lambda_a I_n \geq \mathcal{P}(x, \theta)$  e  $\lambda_b I_n \geq P_4$ . Definindo  $\epsilon_2 = \max \{\lambda_a, \lambda_b\}$ , tem-se

$$V(x, \theta, \hat{x}) = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}(x, \theta) & P_3 \\ P_3^T & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \leq \epsilon_2 \xi^T \xi, \quad \forall (x, \theta, \hat{x}) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n. \quad (4.54)$$

Por outro lado, aplicando o complemento de *Schur* na desigualdade (4.52), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} \\ \star & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} \\ \star & \star & J_{33} & J_{34} & J_{35} \\ \star & \star & \star & J_{44} & J_{45} \\ \star & \star & \star & \star & J_{55} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{a1}^T \\ H_2^T \\ -C_f^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{a1}^T \\ H_2^T \\ -C_f^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0$$

Pré- e pós-multiplicando esta LMI por  $[\zeta^T \pi^T \hat{x}^T w^T \phi^T]$  e sua transposta respecti-

vamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \pi \\ \hat{x} \\ w \\ \phi \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} Y_{11} & \star & \star & \star & \star \\ Y_{21} & 0 & \star & 0 & 0 \\ J_{a3}^T & Y_{32} & Y_{33} & \star & \star \\ Y_{41} & 0 & Y_{43} & -\gamma I_{n_w} & 0 \\ Y_{51} & 0 & Y_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{a1}^T \\ H_2^T \\ -C_f^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{a1}^T \\ H_2^T \\ -C_f^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} \zeta \\ \pi \\ \hat{x} \\ w \\ \phi \end{bmatrix} < 0$$

onde

$$\begin{aligned} Y_{11} &= PA_{a1} + A_{a1}^T P + J_{a1}, & Y_{21} &= A_{a2}^T P + J_{a2}^T, \\ Y_{32} &= P_3^T A_2 + P_4 B_f C_2, & Y_{33} &= P_4 A_f + A_f^T P_4, & Y_{41} &= B_{a1}^T P + J_{a4}^T, \\ Y_{43} &= B_1^T P_3 + D_1^T B_f^T P_4, & Y_{51} &= B_{a2}^T P + J_{a5}^T, & Y_{53} &= B_2^T P_3 + D_2^T B_f^T P_4 \end{aligned}$$

Note que pela construção do sistema algébrico-diferencial (4.44), tem-se  $\Lambda\zeta = 0$ ,  $\Delta_{a1}\zeta + \Delta_2\pi = 0$  e  $\Phi_1 w + \Phi_2\phi = 0$ .

De (4.44), (4.47) e (4.49), a desigualdade acima é equivalente à:

$$\dot{V}(x, \theta, \hat{x}) + e^T e - \gamma w^T w < 0, \quad \forall (x, (\theta, \dot{\theta}), \hat{x}) \in \mathcal{B}_x \times \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n. \quad (4.55)$$

Pelo Lema 4.7, as condições (4.53), (4.54) e (4.55) implicam que a origem do sistema não forçado (4.1) e (4.34) é localmente exponencialmente estável. Além disso, o ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema (4.35) satisfaz  $\|\mathcal{G}_{we}\|_\infty^2 < \gamma$  para todo  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ ,  $w_2 \in \mathcal{L}_2$  e todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .  $\nabla\nabla\nabla$

O próximo resultado apresenta um método LMI para o projeto de filtros robustos para o sistema (4.1) e (4.34), usando funções de Lyapunov que são quadráticas nos parâmetros incertos e no estado.

**Teorema 4.4** *Considere o sistema (4.1) e (4.34) com **H 4.1-H 4.4** e **H 4.6**, sua decomposição não linear (4.44) com **H 4.7** e a notação do Teorema 4.3. Sejam  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}$  dois politopos dados. Suponha que as matrizes simétricas  $P_0$ ,  $P_2$  e  $\Omega_P$  e matrizes  $P_1$ ,  $G_i$  (para  $i = 1, 2$ ),  $L_{ij}$  (para  $i = 1, 2, 4, 5$  e  $j = 1, 2, 3$ ),  $\Omega_i$  (para  $i = A, B, C, G$ ) e  $N_i$  (para  $i = 1, 2, 3$ ) e um escalar positivo  $\gamma$  sejam uma solução para o seguinte problema de otimização, cujas LMIs são construídas em todos os vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}$ :*

min  $\gamma$  sujeito à

$$\begin{bmatrix} P_2 + G_1 + G_1^T & \star & \star \\ P_1 - \Theta^T G_1^T + G_2 & P_0 - G_2 \Theta - \Theta^T G_2^T & \star \\ \Omega_G & \Omega_P - \Omega_G \Theta & \Omega_P \end{bmatrix} > 0 \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & \hat{J}_{12} & \hat{J}_{13} & \hat{J}_{14} & \hat{J}_{15} & H_{a1}^T \\ \star & J_{22} & \hat{J}_{23} & J_{24} & J_{25} & H_2^T \\ \star & \star & \hat{J}_{33} & \hat{J}_{34} & \hat{J}_{35} & -\Omega_C \\ \star & \star & \star & J_{44} & J_{45} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & J_{55} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.57)$$

onde

$$\hat{J}_{11} = A_{a1}^T P + P A_{a1} + L_{11} \Lambda + \Lambda^T L_{11}^T + L_{12} \Delta_{a1} + \Delta_{a1}^T L_{12}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1^T \Omega_B^T + \Omega_B C_1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{J}_{12} = P A_{a2} + L_{12} \Delta_2 + \Lambda^T L_{21}^T + \Delta_{a1}^T L_{22}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_B C_2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{J}_{13} = \Lambda^T N_1 + \Delta_{a1}^T N_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ A_1^T \Omega_P + C_1^T \Omega_B^T + \Omega_A \end{bmatrix},$$

$$\hat{J}_{14} = P B_{a1} + L_{13} \Phi_1 + \Lambda^T L_{41}^T + \Delta_{a1}^T L_{42}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_B D_1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{J}_{15} = P B_{a2} + L_{13} \Phi_2 + \Lambda^T L_{51}^T + \Delta_{a1}^T L_{52}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_B D_2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{J}_{23} = A_2^T \Omega_P + C_2^T \Omega_B^T + \Delta_2^T N_2, \quad \hat{J}_{33} = \Omega_A^T + \Omega_A,$$

$$\hat{J}_{34} = \Omega_P B_1 + \Omega_B D_1 + N_3 \Phi_1, \quad \hat{J}_{35} = \Omega_P B_2 + \Omega_B D_2 + N_3 \Phi_2.$$

Então o filtro  $\mathcal{F}$  com matriz de transferência

$$G_{zy}(s) = \Omega_C^T \Omega_P^{-1} (sI_n - \Omega_A \Omega_P^{-1})^{-1} \Omega_B \quad (4.58)$$

garante que o ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema (4.35) satisfaz  $\|\mathcal{G}_{we}\|_\infty^2 < \gamma$  para todo  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ ,  $w_2 \in \mathcal{L}_2$  e todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .

**Prova:** Considere a prova do Teorema 4.3 e defina as matrizes

$$J_1 = \text{diag}\{I_{m+n}, P_3 P_4^{-1}\} \quad \text{e} \quad J_2 = \text{diag}\{I_{n+m+n_\pi}, P_3 P_4^{-1}, I_{n_w+n_\phi+n_z}\} \quad (4.59)$$

Note que  $P_3$  e  $P_4$  são não singulares, garantido que  $J_1$  e  $J_2$  sejam matrizes regulares.

Suponha que exista uma solução factível do Teorema 4.4 e defina as matrizes de busca como:

$$\begin{aligned} \Omega_B &= P_3 B_f, \quad \Omega_P = P_3 P_4^{-1} P_3^T, \quad \Omega_A = P_3 A_f P_4^{-1} P_3^T, \quad \Omega_C = P_3 P_4^{-1} C_f^T, \\ \Omega_G &= P_3 P_4^{-1} G_3, \quad N_1 = L_{31}^T P_4^{-1} P_3^T, \quad N_2 = L_{32}^T P_4^{-1} P_3^T \quad \text{e} \quad N_3 = P_3 P_4^{-1} L_{33}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Por conveniência, defina as LMIs (4.51) e (4.52) do Teorema 4.3 como  $\Gamma_a > 0$  e  $\Gamma_b < 0$  respectivamente. Considerando (4.60), perceba que (4.56) e (4.57) podem ser representadas, respectivamente por:

$$J_1 \Gamma_a J_1^T > 0 \quad \text{e} \quad J_2 \Gamma_b J_2^T < 0.$$

Como  $J_1$  e  $J_2$  são regulares, tem-se que se as condições do Teorema 4.3 são satisfeitas, então, o Teorema 4.3 também será satisfeito. Conseqüentemente, tem-se

$$\|\mathcal{G}_{we}\|_\infty^2 < \gamma, \quad \forall w_1 \in \mathcal{W}_1, \quad w_2 \in \mathcal{L}_2, \quad (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}_\theta.$$

Finalmente, de (4.60) tem-se que  $A_f = P_3^{-T} \Omega_A \Omega_P^{-1} P_3$ ,  $B_f = P_3^{-T} \Omega_B$  e  $C_f = \Omega_C^T \Omega_P^{-1} P_3$ , ou seja, a matriz de transferência  $G_{zy} = C_f (sI_n - A_f)^{-1} B_f$  é equivalente à (4.58).  $\nabla \nabla \nabla$

O Teorema 4.4 provê um método baseado em LMI para o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema não linear (4.1) e (4.34). O método proposto leva em consideração a taxa de variação de parâmetros incertos e é baseado em funções de Lyapunov polinomiais, onde a matriz de Lyapunov é uma função quadrática do estado e dos parâmetros incertos para o sistema do erro de estimação.

**Observação 4.1** Note que, se o sistema (4.1) e (4.34) for um sistema linear, pode-se mostrar que o método de filtragem robusta  $\mathcal{H}_\infty$  do Teorema 4.4 é equivalente ao resultado em [30].

**Exemplo 4.2** *Aplica-se os resultados obtidos nesta seção ao sistema usado no Exemplo 4.1. Assume-se aqui que  $\mathcal{B}_x = \{x : |x_i| \leq 0.7, i = 1, 2\}$ ,  $\mathcal{B}_\theta = \{\theta : |\theta| \leq 1\}$  e  $\dot{\theta} = 0$  e na função de Lyapunov (4.38) escolhe-se*

$$\Theta = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & x_2 \end{bmatrix} \\ \theta I_2 \end{bmatrix}.$$

Com isso, tem-se que

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x_2 \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\Theta} = 0.$$

Aplicando o Teorema 4.4 ao sistema (4.46), obtém-se  $\|\mathcal{G}_{we}\|_\infty^2 < 0.8455731$  com a seguinte realização para filtro  $\mathcal{F}$ :

$$A_f = \begin{bmatrix} -64.276912 & -178.97932 \\ 0.9953897 & -0.0307550 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -0.8455720 \\ 0.0000036 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } C_f = [ -64.275432 \quad -178.09758 ]$$

#### 4.4.4 Projeto de Filtros Não Lineares

O enfoque principal, até o momento, foi o projeto de filtros robustos lineares para sistemas racionais nos estados. Na seqüência, mostra-se que inserindo-se algumas restrições a mais nos resultados apresentados nesta seção é possível também projetar filtros não lineares.

Considera-se agora a seguinte classes de filtros bilineares, descritos por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_b : \quad \dot{\hat{x}}(t) &= A_f \hat{x}(t) + B_f(\hat{x})y(t), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(t) &= C_f \hat{x}(t) \end{aligned} \tag{4.61}$$

onde  $B_f(\hat{x})$  é uma função afim do estado  $\hat{x}$ . O objetivo é minimizar o erro de estimação através da minimização de um limitante superior do ganho  $\mathcal{L}_2$ . Para o projeto do filtro é necessário supor que o estado  $\hat{x}$  seja limitado, ou seja, assume-se que  $\hat{x}$  pertença a um politopo conhecido  $\mathcal{B}_{\hat{x}}$  com  $\ell_{\hat{x}}$  vértices.

O projeto do filtro bilinear é desenvolvido utilizando os mesmos argumentos usados na

busca do filtro linear na Seção 4.4, ou seja, busca-se uma solução para o **Problema**  $\mathcal{H}_\infty$ , assumindo que a função de Lyapunov para o sistema do erro de estimação seja (4.38). O próximo teorema apresenta o resultado principal para o projeto do filtro bilinear para o sistema (4.1) e (4.34).

**Teorema 4.5** *Considere o sistema (4.1) e (4.34) com **H4.1-H4.4** e **H4.6**, sua decomposição não linear (4.44) com **H4.7** e a notação do Teorema 4.3. Seja  $\mathcal{B}_x$ ,  $\mathcal{B}_{\hat{x}}$  e  $\mathcal{B}$  três politopos dados. Suponha que as matrizes simétricas  $P_0$ ,  $P_2$  e  $\Omega_P$  e matrizes  $P_1$ ,  $G_i$  (para  $i = 1, 2$ ),  $L_{ij}$  (para  $i = 1, 2, 4, 5$  e  $j = 1, 2, 3$ ),  $\Omega_i$  (para  $i = A, C, G$ ),  $\Omega_B(\hat{x})$  e  $N_i$  (para  $i = 1, 2, 3$ ) e um escalar positivo  $\gamma$  sejam uma solução para o seguinte problema de otimização, cujas LMIs são construídas em todos os vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_{\hat{x}} \times \mathcal{B}$ :*

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \quad \text{sujeito à} \\ & (4.56) \quad \text{e} \quad (4.57) \end{aligned}$$

onde agora  $\Omega_B = \Omega_B(\hat{x})$  é uma função convexa em  $\hat{x}$  com valores  $\Omega_{B_i}$  para  $i = 1, \dots, \ell_{\hat{x}}$  nos vértices de  $\mathcal{B}_{\hat{x}}$ .

Então o filtro bilinear  $\mathcal{F}_b$  com a seguinte parametrização

$$A_f = P_3^{-T} \Omega_A \Omega_P^{-1} P_3, \quad B_f(\hat{x}) = P_3^{-T} \Omega_B(\hat{x}), \quad \text{e} \quad C_f = \Omega_C^T \Omega_P^{-1} P_3$$

onde  $P_3$  é uma matriz inversível arbitrária, garante que o ganho  $\mathcal{L}_2$  do sistema (4.35) satisfaça  $\|\mathcal{G}_{we}\|_\infty^2 < \gamma$  para todo  $w_1 \in \mathcal{W}_1$ ,  $w_2 \in \mathcal{L}_2$  e todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .

**Prova:** A prova deste teorema segue as mesmas linhas da prova do Teorema 4.4.  $\nabla\nabla\nabla$

Note que, para a aplicação do Teorema 4.5 é necessário escolher *a priori* a região de abrangência do estado do filtro  $\hat{x}$ . Uma alternativa bastante razoável seria considerar que o politopo  $\mathcal{B}_{\hat{x}}$  fosse similar ao politopo  $\mathcal{B}_x$  dos estados.



# Capítulo 5

## Resultados Diversos

Este capítulo apresenta o projeto de filtros robusto para duas classes particulares de sistemas lineares: o caso de sistemas com modos instáveis e o de sistemas descritores. Na seqüência, apresenta-se a extensão de alguns dos resultados obtidos nesta tese para o projeto de filtros dependentes de parâmetros e de filtros de ordem reduzida.

### 5.1 Sistemas com Modos Instáveis

Nesta seção, projeta-se um filtro robusto para sistemas com modos instáveis, ou seja, sistemas no qual parte da dinâmica é instável. Considera-se que o sistema tenha a seguinte realização no espaço dos estados

$$\begin{aligned} S: \quad \dot{x}_1(t) &= A_1(\theta(t))x_1(t) + B_1w(t), \quad x_1(0) = x_0 \\ \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_2x_2(t) + B_2w(t), \\ y(t) &= C_1(\theta(t))x_1(t) + C_2x_2(t) + Dw(t) \\ z(t) &= C_{z1}(\theta(t))x_1(t) + C_{z2}x_2(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  é o estado ligado à parte estável do sistemas e  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$  é o estado relacionado aos modos instáveis. Assume-se que as matrizes  $A_{21}$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D$  e  $C_{z2}$  sejam constantes e que as matrizes  $A_1(\theta)$ ,  $C_1(\theta)$  e  $C_{z1}(\theta)$  sejam incertas e descritas por (2.52) e que  $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ ,  $\forall t \geq 0$  pertença a um politopo  $\mathcal{B}$  com  $\ell$  vértices conhecidos e  $\theta(t) \in \mathcal{B}_\theta$  com  $\ell_\theta$  vértices. A seguinte hipótese é formulada em relação ao sistema (5.1)

**H5.1**  $A_2$  não é Hurwitz

Pode-se reescrever o sistema (5.1) em uma forma mais compacta, dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))w(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= C_z(\theta(t))x(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, & A(\theta) &= \begin{bmatrix} A_1(\theta) & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \\ C(\theta) &= \begin{bmatrix} C_1(\theta) & C_2 \end{bmatrix}, & C_z(\theta) &= \begin{bmatrix} C_{z1}(\theta) & C_{z2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O objetivo é projetar um filtro linear invariante no tempo e assintoticamente estável de ordem  $n$  com a seguinte realização no espaço dos estados

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \quad \dot{\hat{x}}(t) &= A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), & \hat{x}(0) &= 0 \\ \hat{z}(t) &= C_f \hat{x}(t) \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde as matrizes  $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_f \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  e  $C_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$  devem ser encontradas de forma a garantir uma estimativa  $\hat{z}$  do sinal  $z$  com um desempenho garantido  $\mathcal{H}_2$ .

Para solucionar esse problema, inicialmente particiona-se o estado do filtro conforme o vetor de estados  $x(t)$ , como proposto em [82]:

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \hat{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1} \\ \hat{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2} \end{array},$$

sendo que as matrizes do filtro são particionadas como:

$$A_f = \begin{bmatrix} A_{f11} & A_{f12} \\ A_{f21} & A_{f22} \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} B_{f1} \\ B_{f2} \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} C_{f1} & C_{f2} \end{bmatrix}$$

Para garantir que o erro de estimação seja limitado e que o filtro  $\mathcal{F}$  seja assintoticamente estável, assume-se que a parte do filtro ligada aos modos instáveis satisfaça as seguintes condições:

$$A_{f12} = -B_{f1}C_2, \quad A_{f22} = A_2 - B_{f2}C_2, \quad e \quad C_{f2} = C_{z2} \tag{5.4}$$

Note que, estas restrições seguem a estrutura do filtro de Kalman, que é o filtro ótimo no caso de sistemas sem parâmetros incertos.

A partir da dinâmica do sistema  $S$ , do filtro  $\mathcal{F}$  e das restrições (5.4), constrói-se o seguinte sistema aumentado para o erro de estimação:

$$\begin{aligned} S_e: \quad \dot{\xi}(t) &= A_a(\theta)\xi(t) + B_a(\theta)w(t) \\ e(t) &= C_a(\theta)\xi(t), \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad A_a(\theta) = \begin{bmatrix} A_1(\theta) & 0 & 0 \\ B_{f1}C_1(\theta) & A_{f11} & B_{f1}C_2 \\ A_{21} - B_{f2}C_1(\theta) & -A_{f21} & A_2 - B_{f2}C_2 \end{bmatrix}, \\ B_a(\theta) &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_{f1}D \\ B_2 - B_{f2}D \end{bmatrix}, \quad C_a(\theta) = \begin{bmatrix} C_{z1}(\theta) & -C_{f1} & C_{z2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para o projeto do filtro busca-se solucionar o **Problema**  $\mathcal{H}_2$  considerando o sistema  $S_e$ . O problema então é encontrar matrizes  $\mathcal{P}(\theta)$  e  $W$  de forma que as equações (2.53) e (2.54) com a notação inserida em (5.6) sejam satisfeitas para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ . Desta forma, pelo Lema 1.4 (b), garante-se que o sistema do erro de estimação (5.5) é exponencialmente estável para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$  e

$$\|S_e\|_2^2 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr}[W(\theta(\tau))] d\tau. \quad (5.7)$$

Os passos para o projeto do filtro robusto são similares aos utilizados na Seção 2.3. Inicialmente, particiona-se a matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  como:

$$\mathcal{P}(\theta) = \begin{bmatrix} P(\theta) & P_3 & P_5 \\ P_3^T & P_4 & P_7 \\ P_5^T & P_7^T & P_6 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

onde  $P(\theta) = P_0 + P_1\Theta + \Theta^T P_1^T + \Theta^T P_2\Theta \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ;  $P_0, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $P_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times q}$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $P_6 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ,  $P_5 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  e  $P_7 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ .

Com o objetivo de obter condições convexas, assume-se que na função de Lyapunov as matrizes  $P_5$  e  $P_7$  são nulas e que a matriz  $A_1(\theta) = [A_0 + \mathcal{A}\Theta(t)]$  onde  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times q}$  é uma

matriz conhecida e  $\Theta(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$  é uma matriz cujas as colunas dependem linearmente dos parâmetros incertos  $\theta_i$ , onde o valor  $q$  depende da escolha de  $\Theta$  como descrita em (2.57).

Na seqüência, desenvolve-se o projeto do filtro robustos para este sistema, buscando uma solução para o **Problema**  $\mathcal{H}_2$  através da factibilidade das desigualdades (2.53) e (2.54) aplicada ao sistema (5.6) com as considerações feitas no parágrafo anterior. Para solucionar este problema utiliza-se a seguinte notação

$$A_e(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} A_0 & \mathcal{A} & 0 & 0 \\ \Theta A_0 + \dot{\Theta} & \Theta \mathcal{A} & 0 & 0 \\ B_{f1}C_1(\theta) & 0 & A_{f11} & B_{f1}C_2 \\ A_{21} - B_{f2}C_1 & 0 & -A_{f21} & A_2 - B_{f2}C_2 \end{bmatrix}, \quad B_e(\theta) = \begin{bmatrix} B_1 \\ \Theta B_1 \\ B_{f1}D \\ B_2 - B_{f2}D \end{bmatrix},$$

$$C_e = \begin{bmatrix} C_z & 0 & -C_{f1} & C_{z2} \end{bmatrix}, \quad H(\theta) = \begin{bmatrix} \Theta & -I_q & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$H_1(\theta) = \begin{bmatrix} H(\theta) & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & H(\theta) \end{bmatrix}.$$

**Lema 5.1** *Existe uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  da forma (5.8) com  $P_5 = 0$  e  $P_7 = 0$  tal que as condições (2.53) e (2.54) sejam satisfeitas se e somente se existir uma matriz simétrica  $P \in \mathbb{R}^{(2n_1+q+n_2) \times (2n_1+q+n_2)}$  com a seguinte estrutura*

$$P = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_3 & 0 \\ P_1^T & P_2 & 0 & 0 \\ P_3^T & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_6 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &P_0, P_3, P_4 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \\ &P_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times q}, P_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}; P_6 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

de forma que para todo  $\eta \in \mathbb{R}^{2n_1+q+n_z+n_2}$  e  $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{2n_1+q+n_w+n_2}$  as seguintes condições sejam garantidas:

$$\eta^T \Psi_A(\theta, \dot{\theta}) \eta < 0, \forall (\eta, \theta, \dot{\theta}) \text{ tal que } H_1(\theta)\eta = 0, \text{ com } \eta \neq 0 \text{ e } (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (5.11)$$

$$\tilde{\eta}^T \begin{bmatrix} W(\theta) & B_e^T(\theta)P \\ PB_e(\theta) & P \end{bmatrix} \tilde{\eta} > 0, \forall (\tilde{\eta}, \theta) \text{ tal que } H_2(\theta)\tilde{\eta} = 0, \text{ com } \tilde{\eta} \neq 0 \text{ e } \theta \in \mathcal{B}_\theta \quad (5.12)$$

onde

$$\Psi_A(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} A_e^T(\theta, \dot{\theta})P + PA_e(\theta, \dot{\theta}) & C_e^T \\ C_e & -I \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

**Prova:** A prova deste lema é similar à prova do Lema 2.6.

Outro lema auxiliar nos moldes do Lema 2.7 pode também ser enunciado para este problema. No entanto, aqui apresenta-se apenas o resultado principal, para o projeto do filtro robusto.

**Teorema 5.1** *Considere o sistema (5.1) e sejam  $\mathcal{B}_\theta$  e  $\mathcal{B}$  politopos admissíveis de  $\theta$  e  $(\theta, \dot{\theta})$ , respectivamente. Suponha que existam matrizes simétricas  $P_0 > 0$ ,  $P_2$ ,  $P_6$  e  $\Omega_P$ , e matrizes  $P_1$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_4$ ,  $M_5$ ,  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$ ,  $\Omega_C$ ,  $\Omega_G$  e  $\Omega_M$  de modo que o seguinte problema de otimização seja satisfeito:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu \quad \text{sujeito à} \\ & \begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * \\ \Phi_{31} & \Omega_P \mathcal{A} - \Omega_M & \Omega_A + \Omega_A^T & * & * \\ \Phi_{41} & -M_4 & C_2 \Omega_{B1}^T - \Omega_{A2} & \Phi_{44} & * \\ C_z + M_5 \Theta & -M_5 & -\Omega_C & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{V}(\mathcal{B}) \quad (5.14) \\ & \begin{bmatrix} W(\theta) & * & * & * & * \\ (P_0 + P_1 \Theta)B_1 + \Omega_{B1}D + \Theta^T G_1^T & P_0 + G_2 \Theta + \Theta^T G_2^T & * & * & * \\ (P_1^T + P_2 \Theta)B_1 - G_1^T & P_1^T + G_3 \Theta - G_2^T & P_2 - G_3 - G_3^T & * & * \\ \Omega_P B_1 + \Omega_{B1}D & \Omega_P + \Omega_G \Theta & -\Omega_G & \Omega_P & * \\ P_6 B_2 - \Omega_{B2}D & 0 & 0 & * & P_6 \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\theta) \quad (5.15) \end{aligned}$$

onde  $W(\theta)$  é uma matriz afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$ , nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$  e

$$\Phi_{11} = A_0^T P_0 + P_0 A_0 + \Omega_{B1} C_1(\theta) + C_1^T(\theta) \Omega_{B1}^T + P_1 \Upsilon + \Upsilon^T P_1^T + M_1 \Theta + \Theta^T M_1^T,$$

$$\Phi_{21} = P_1^T A_0 + P_2 \Upsilon + (P_0 \mathcal{A} + P_1 \Theta \mathcal{A})^T - M_1^T + M_2 \Theta,$$

$$\Phi_{22} = \mathcal{A}^T P_1 + P_1^T \mathcal{A} + P_2 \Theta \mathcal{A} + (P_2 \Theta \mathcal{A})^T - M_2 - M_2^T,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{31} &= \Omega_P A_0 + \Omega_{B1} C_1(\theta) + \Omega_A^T + \Omega_M \Theta, \\
\Phi_{41} &= P_6 A_{21} - \Omega_{B2} C_1 + C_2^T \Omega_{B1}^T + M_4 \Theta, \\
\Phi_{44} &= P_6 A_2 - \Omega_{B2} C_2 + A_2^T P_6^T - C_2^T \Omega_{B2}^T, \quad \Upsilon = \Theta A_0 + \dot{\Theta},
\end{aligned} \tag{5.16}$$

então o filtro  $\mathcal{F}$  com a seguinte parametrização

$$\begin{aligned}
A_{f1} &= P_3^{-T} \Omega_{A1} \Omega_P^{-1} P_3, \quad B_{f1} = P_3^{-T} \Omega_{B1}, \quad C_{f1} = \Omega_{C1} \Omega_P^{-1} P_3, \\
B_{f2} &= P_6^{-1} \Omega_{B2}, \quad A_{f21} = P_6^{-1} \Omega_{A2} \Omega_P^{-1} P_3
\end{aligned} \tag{5.17}$$

juntamente com (5.4), onde  $P_3$  é uma matriz inversível arbitrária, garante que o sistema do erro de estimação  $S_e$  satisfaz as desigualdades (2.53) e (2.54) com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  quadrática em  $\theta$  descrita por (5.8), com  $P_5 = 0$  e  $P_7 = 0$ . Além disso,

$$\|S_e\|_2^2 < \max_{i=1, \dots, \ell_\theta} \text{Tr}[W_i], \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}. \tag{5.18}$$

**Prova:** A prova deste teorema é similar à do Teorema 2.5, considerando

$$J_1 = \text{diag}\{I_{n_1}, P_4^{-1} P_3^T, I_{n_2}, I_{n_z}\}, \quad J_2 = \text{diag}\{I_{n_w}, I_{n_1}, P_4^{-1} P_3^T, I_{n_2}\} \tag{5.19}$$

▽▽▽

O Teorema 5.1 apresenta condições LMIs para o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_2$  para sistemas incertos onde parte da dinâmica é instável, usando funções de Lyapunov dependente de parâmetros. Considera-se que os modos instáveis não são afetados pelos parâmetros incertos. Perceba que, o projeto do filtro pode ser visto como o projeto do filtro robusto para a parte estável e incerta do sistema, e o projeto do filtro de Kalman para a parte instável, que não possui parâmetros incertos, em conjunto para o sistema. Através de argumentos similares é possível desenvolver metodologias para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$ .

Os comentários feitos ao Teorema 2.5 continuam válidos para este resultado. É importante salientar que a matriz  $P_3$ , não influencia na parametrização final do filtro, resultando que a sua escolha pode ser arbitrária, como, por exemplo,  $P_3 = I$ .

## 5.2 Sistemas Descritores

Sistemas com restrições algébricas, conhecidos também como sistemas descritores ou sistemas singulares, são representados por

$$E\dot{\zeta} = A\zeta \quad (5.20)$$

onde  $\zeta \in R^{n_\zeta}$ , representa o vetor de estados do sistema e  $A \in R^{n_\zeta \times n_\zeta}$  e  $E \in R^{n_\zeta \times n_\zeta}$  são as matrizes de dinâmica do sistema, com o posto( $E$ )  $< n_\zeta$ , caracterizando a singularidade do sistema.

O objetivo nesta seção é o projeto de filtros robustos para o sistema (5.20), já na forma algébrico-diferencial desacoplada, ou seja, uma equação diferencial do tipo  $\dot{x} = A_1x + A_2\zeta$  com uma restrição algébrica do tipo  $0 = A_3x + A_4\zeta$ . Frequentemente, sistemas descritores não aparecem na forma de um conjunto desacoplado de equações algébrico-diferenciais. No entanto, este desacoplamento pode ser obtido através de trocas de coordenadas como feito em [24]; ou, parcialmente, por transformações ortogonais, como proposto em [77].

Considera-se assim o sistema (5.20) na forma algébrico-diferencial desacoplada com a seguinte representação:

$$S : \begin{aligned} \dot{x} &= J_1(\theta)x + J_2(\theta)\zeta + B_1w \\ 0 &= J_3(\theta)x + J_4(\theta)\zeta \\ y &= C_1(\theta)x + C_2\zeta + Dw \\ z &= C_zx \end{aligned}, \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

onde  $x \in R^n$  representa os estados e  $\zeta \in R^{n_\zeta}$  representa as variáveis algébricas do sistema, isto é, algebricamente dependente do estado e  $J$  é a matriz jacobiana do sistema. No estudo de sistemas descritores, tem-se a necessidade de introduzir a seguinte definição:

### Definição 5.1

- O sistema descritor (5.20) é regular, ou seja, tem uma solução única para qualquer condição inicial, se  $\det(sE - A) \neq 0$ .
- O sistema (5.20), regular, não tem modos impulsivos se:  $\text{rank}E = \deg \det(sE - A)$ .
- O sistema (5.20) é dito ser admissível, se ele é regular e livre de modos impulsivos.

Pelo resultado apresentado em [78], tem-se que um sistema na forma (5.21) será admissível se e somente se a matriz  $J_4$  for inversível.

Os resultados propostos nesta seção são inspirados nas técnicas de estabilidade e desempenho via norma  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas algébricos diferenciais propostas em [7] e [9]. O objetivo é o projeto do filtro linear  $\mathcal{F}$  de forma que o erro de estimação  $e = z - \hat{z}$  seja minimizado através do critério de desempenho  $\mathcal{H}_2$ . Da dinâmica do erro de estimação e da equação do filtro constrói-se o seguinte sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_e : \dot{\xi} &= A_a(\theta)\xi + A_2\zeta + B_a w \\ e &= C_a(\theta)\xi \\ 0 &= J_3 x + J_4 \zeta = [J_3 \ 0]\xi + J_4 \zeta. \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde

$$\begin{aligned} A_a(\theta) &= \begin{bmatrix} J_1(\theta) & 0 \\ B_f C_1 & A_f \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} J_2 \\ B_f C_2 \end{bmatrix}, \\ B_a &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_f D \end{bmatrix}; C_a = \begin{bmatrix} C_z & -C_f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Busca-se, assim, uma solução factível para o **Problema**  $\mathcal{H}_2$  para o sistema algébrico-diferencial  $\mathcal{S}_e$ . Ressalta-se que o problema de desempenho/controlado  $\mathcal{H}_2$  para sistemas com restrições algébricos já foi estudado em [7] no contexto de funções de Lyapunov constantes. O próximo lema apresenta uma extensão deste resultado, considerando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.

**Lema 5.2** *Considere o sistema (5.21) e o filtro (2.2). Se existirem matrizes simétricas  $\mathcal{P}(\theta)$ ,  $W$  e uma matriz  $L$  que satisfaçam as seguintes desigualdades para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$ .*

$$\begin{bmatrix} 0 & A_2^T \mathcal{P}(\theta) & 0 \\ \mathcal{P}(\theta) A_2 & \dot{\mathcal{P}}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_a(\theta) + A_a^T(\theta) \mathcal{P}(\theta) & C_a(\theta)^T \\ 0 & C_a(\theta) & -I \end{bmatrix} + L J_a + J_a^T L^T < 0, \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (5.24)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & B_a^T \mathcal{P}(\theta) \\ \mathcal{P}(\theta) B_a & \mathcal{P}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \forall \theta \in \mathcal{B}_\theta \quad (5.25)$$

onde  $J_a = [J_4 \ J_3 \ 0]$ . Então o sistema do erro de estimação (5.22) é admissível e exponen-

cialmente estável para todo  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}$  e

$$\|S_e\|_2^2 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr} [W(\theta(\tau))] d\tau. \quad (5.26)$$

**Prova:** A prova deste resultado é uma extensão do resultado apresentado em [7]. Note que a matriz  $V(\xi, \theta) = \xi^T P(\theta) \xi$  é função de Lyapunov para o sistema  $S_e$ .  $\square\square\square$

O próximo passo é buscar uma solução para o Lema 5.2, ao considerar que a matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  seja quadrática nos parâmetros incertos da forma (2.58). Para isso, uma abordagem similar a proposta na Seção 2.3 é utilizada, assumindo que a matriz  $J_1(\theta) = J_0 + \mathcal{A}\Theta$ , onde  $\mathcal{A}$  e  $\Theta$  são definidas em (2.57). Para simplificar, assume-se que a matriz  $L$  tenha a seguinte estrutura:

$$L = \begin{bmatrix} L_1^T & L_2^T & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.27)$$

com  $L_1 \in \mathbb{R}^{n_\zeta \times n_\zeta}$ ,  $L_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_\zeta}$ .

O primeiro resultado desenvolve condições suficientes para checar a factibilidade das desigualdades do Lema 5.2, com  $\mathcal{P}(\theta) > 0$  descrita em (2.58). Para este fim, introduza a seguinte notação

$$\begin{aligned} A_e(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} J_0 & \mathcal{A} & 0 \\ \Theta J_0 + \dot{\Theta} & \Theta \mathcal{A} & 0 \\ B_f C(\theta) & 0 & A_f \end{bmatrix}, & J_e(\theta) &= \begin{bmatrix} J_2 \\ \Theta J_2 \\ B_f C_2 \end{bmatrix}, & J_{e2} &= \begin{bmatrix} L_2 J_4 + J_3^T L_1^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ B_e(\theta) &= \begin{bmatrix} B \\ \Theta B \\ B_f D \end{bmatrix}, & J_{e3} &= \begin{bmatrix} J_3^T L_2^T + L_2 J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C_e &= [C_z \ 0 \ -C_f], & H(\theta) &= [\Theta \ -I_q \ 0], \\ H_1(\theta) &= [0 \ H(\theta) \ 0], & H_2(\theta) &= [0 \ H(\theta)]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

**Lema 5.3** *Existe uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  da forma (2.58) e uma matriz  $L$  da forma (5.27) que satisfaça as desigualdades (5.24)-(5.25), se e somente se existir uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{(2n+q) \times (2n+q)}$  da forma (2.61) tal que para todo  $\eta \in \mathbb{R}^{2n+q+n_z+n_\zeta}$  e  $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^{2n+q+n_w}$  as seguintes desigualdades sejam satisfeitas*

$$\eta^T \Psi_A(\theta, \dot{\theta}) \eta < 0, \forall (\eta, \theta, \dot{\theta}) \text{ tal que } H_1(\theta) \eta = 0, \text{ com } \eta \neq 0 \text{ e } (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B} \quad (5.29)$$

$$\tilde{\eta}^T \begin{bmatrix} W(\theta) & B_e^T(\theta)P \\ PB_e(\theta) & P \end{bmatrix} \tilde{\eta} > 0, \forall (\tilde{\eta}, \theta) \text{ tal que } H_2(\theta) \tilde{\eta} = 0, \text{ com } \tilde{\eta} \neq 0 \text{ e } \theta \in \mathcal{B}_\theta \quad (5.30)$$

onde

$$\Psi_A(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} L_1 J_4 + J_4^T L_1 & J_e^T(\theta)P + J_{e2}^T & 0 \\ P J_e(\theta) + J_{e2} & A_e^T(\theta, \dot{\theta})P + P A_e(\theta, \dot{\theta}) + J_{e3} & C_e^T \\ 0 & C_e & -I \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

□□□

Note que uma condição necessária para que as desigualdades acima sejam satisfeita é que a matriz  $J_4$  seja inversível, o que garante então que o sistema (5.20) seja admissível.

Um lema similar ao Lema 2.7 pode também ser enunciado para este problema, e da mesma forma que o anterior consiste em eliminar as restrições de igualdade através da aplicação do Lema de Finsler, inserindo-se multiplicadores. Na seqüência, apresenta-se o resultado principal para o projeto de filtros para sistemas algébricos-diferenciais, baseado em transformações de congruências.

**Teorema 5.2** *Considere o sistema (5.21) e seja  $\mathcal{B}$  um politopo dos  $(\theta, \dot{\theta})$  admissíveis. Suponha que existam matrizes simétricas  $P_0 > 0$ ,  $P_2$  e  $\Omega_P$ , e matrizes  $P_1$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_4$ ,  $M_5$ ,  $G_1$ ,  $G_3$ ,  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$ ,  $\Omega_C$ ,  $\Omega_G$  e  $\Omega_M$ ,  $W_i$  para  $i = 1, \dots, \ell_\theta$  e um escalar positivo  $\mu$  de forma que o seguinte problema de otimização seja satisfeito:*

min  $\mu$

sujeito à  $\mu - \text{Tr}[W(\theta)] > 0 \quad \forall \theta \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\theta)$

$$\left[ \begin{array}{cccccc} L_1 J_4 + J_4^T L_1 & \star & \star & \star & \star & \\ (P_0 + P_1 \Theta) J_2 + \Omega_B C_2 + \Theta^T M_0 & \Phi_{11} & \star & \star & \star & \\ (P_1^T + P_2 \Theta) J_2 - M_0 & \Phi_{21} & \Phi_{22} & \star & \star & \\ \Omega_P J_2 + \Omega_b C_2 & \Phi_{31} & \Omega_P \mathcal{A} - \Omega_M & \Omega_A + \Omega_A^T & \star & \\ C_z + M_4 \Theta & -M_4 & -\Omega_C & -I & & \end{array} \right] < 0, \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{V}(\mathcal{B}) \quad (5.32)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} W(\theta) & * & * & * \\ (P_0 + P_1\Theta)B + \Omega_B D + \Theta^T G_1^T & P_0 + G_2\Theta + \Theta^T G_2^T & * & * \\ (P_1^T + P_2\Theta)B - G_1^T & P_1^T + G_3\Theta - G_2^T & P_2 - G_3 - G_3^T & * \\ \Omega_P B + \Omega_B D & \Omega_P + \Omega_G \Theta & -\Omega_G & \Omega_P \end{array} \right] > 0, \forall \theta \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\theta) \quad (5.33)$$

onde  $W(\theta)$  é uma matriz afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$ , nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$  e

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= J_0^T P_0 + P_0 J_0 + \Omega_B C(\theta) + C^T(\theta) \Omega_B^T + P_1 \Upsilon + \Upsilon^T P_1^T + M_1 \Theta + \Theta^T M_1^T + J_3^T L_2^T + L_2 J_3, \\ \Phi_{21} &= P_1^T J_0 + P_2 \Upsilon + (P_0 \mathcal{A} + P_1 \Theta \mathcal{A})^T - M_1^T + M_2 \Theta, \\ \Phi_{22} &= \mathcal{A}^T P_1 + P_1^T \mathcal{A} + P_2 \Theta \mathcal{A} + (P_2 \Theta \mathcal{A})^T - M_2 - M_2^T, \\ \Phi_{31} &= \Omega_P J_0 + \Omega_B C(\theta) + \Omega_A^T + \Omega_M \Theta, \quad \Upsilon = \Theta J_0 + \dot{\Theta}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

então o filtro  $\mathcal{F}$  com matriz de transferência

$$G_{zy}(s) = (\Omega_C \Omega_P^{-1}) [sI - (\Omega_A \Omega_P^{-1})]^{-1} \Omega_B \quad (5.35)$$

garante que o sistema do erro de estimação  $S_e$  satisfaça as desigualdades (2.53) e (2.54) com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  quadrática em  $\theta$  descrita por (2.58). Além disto, o sistema (5.21) é admissível e

$$\|S_e\|_2^2 < \max_{i=1, \dots, \ell_\theta} \text{Tr}[W_i] < \mu, \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}. \quad (5.36)$$

▽▽▽

Este teorema fornece uma alternativa para o projeto de filtros robustos para sistemas descritores na forma algébrico diferencial via critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$ , usando uma função de Lyapunov que é quadrática nos parâmetros incertos. Utilizando os resultados de [8] e as mesmas transformações de variáveis utilizadas nesta seção é possível também fazer o projeto de filtros robustos  $\mathcal{H}_\infty$  para essa classe de sistemas. Observa-se, também, que o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$ , neste caso, pode ser obtido a partir de simplificações estruturais no resultado apresentado na Seção 4.4 para o caso de sistemas racionais. Estas simplificações são realizadas na função de Lyapunov e na descrição algébrico diferencial do sistema.

Note que os comentários relativos ao Teorema 2.5, continuam válidos para este resultado.

### 5.3 Projeto de Filtros Dependente de Parâmetros

O enfoque desta tese foi o projeto de filtros invariantes no tempo e independente dos parâmetros incertos que afetam o sistema. No entanto, como as matrizes da dinâmica do filtro aparecem sem a influência direta do parâmetro  $\theta$  é possível estender estas abordagens para o projeto de filtros dependente de parâmetros, ou seja, um filtro  $\mathcal{F}$  cujas matrizes  $A_f(\theta)$ ,  $C_f(\theta)$  são afins em  $\theta$ , que é admitido ser conhecido em tempo real como no caso de sistemas LPV<sup>1</sup>, e  $B_f$  é constante.

Deste modo, o projeto do filtro dependente de parâmetros para os sistemas estudados nas Seções 2.2 e 4.2 e no Capítulo 3, é obtido ao supor que as matrizes  $Q$  e  $R$  usadas na parametrização do filtro são agora funções afins em  $\theta$ . Define-se assim que  $Q(\theta)$  e  $R(\theta)$  são funções do tipo  $Q_0 + \Theta^T Q_1^T + Q_1 \Theta$  e  $R_0 + \Theta^T R_1^T + R_1 \Theta$ , respectivamente, no qual  $\Theta$  é uma função afim dos parâmetros  $\theta_i$ , similar à descrita em (2.57). Isso implica que no filtro  $\mathcal{F}$  as matrizes  $A_f$  e  $C_f$  sejam também funções do parâmetro incerto  $\theta$ .

Para os sistemas estudados nas Seções 2.3, 4.3, 4.4, 5.1 e 5.2 o filtro dependente de parâmetros pode ser obtido de forma semelhante ao considerar que as matrizes  $\Omega_A$  e  $\Omega_C$  são funções afins de  $\theta$  do tipo  $\Omega_{A_0} + \Theta^T \Omega_{A_1}^T + \Omega_{A_1} \Theta$  e  $\Omega_{C_0} + \Theta^T \Omega_{C_1}^T + \Omega_{C_1} \Theta$  respectivamente. Resultando que  $A_f$  e  $C_f$  sejam funções de  $\theta$ .

O filtro robusto é projetado pela inserção destas restrições nos respectivos teoremas, buscando encontrar juntamente com as demais variáveis de decisão as matrizes  $Q_0$ ,  $Q_1$ ,  $R_0$  e  $R_1$  ou  $\Omega_{A_0}$ ,  $\Omega_{A_1}$ ,  $\Omega_{C_0}$  e  $\Omega_{C_1}$  nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$ .

Ressalta-se que este filtro é subótimo, sendo que o filtro ótimo é dado pelo filtro de Kalman resolvido de forma iterativa para cada parâmetro  $\theta_i$ . Isto é possível, pois assume-se que os parâmetros do sistema são conhecidos. Uma das vantagens da abordagem proposta neste seção é que pode-se projetar o filtro *off line*, simplificando o processo de projeto e diminuindo o custo em algumas aplicações.

### 5.4 Projeto de Filtros de Ordem Reduzida

Nos resultados anteriores projetou-se filtros robustos da mesma ordem do sistema original, ou seja, um filtro de ordem  $n$  para diferentes classes de sistemas dinâmicos. Nesta seção, mostra-se que é possível desenvolver filtros  $\mathcal{F}$  de ordem reduzida  $n_f$ , isto é, filtros onde

<sup>1</sup>Do inglês *Linear Parameter Varying*, veja por exemplo [33] para mais detalhes sobre sistemas LPV

$\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_f}$ , com  $n_f < n$ , para as classes de sistemas abordadas nas Seções 2.3, 4.3, 4.4, 5.1 e 5.2. O projeto do filtro robusto de ordem reduzida para estes sistemas é obtido de forma similar aos resultados já apresentados, bastando introduzir algumas restrições estruturais nas matrizes do filtro e na função de Lyapunov, similar à proposta em [31]. Assume-se assim, que na matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  da função de Lyapunov (descrita em (4.38) na Seção 4.4 e (2.58) nos demais casos), a matriz  $P_4 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$  e

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_5 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_f}; \quad (5.37)$$

onde  $P_5 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ .

Na seqüência, apresenta-se o resultado principal para o projeto de filtros robusto de ordem reduzida para sistemas variantes no tempo do tipo (2.1). A abordagem proposta segue o mesmo raciocínio usado para o projeto de filtros de ordem completa apresentado na Seção 2.3, isto é, busca-se uma solução factível para o **Problema**  $\mathcal{H}_2$  com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  biquadrática em  $\theta$  com a restrição dada em (5.37).

**Teorema 5.3** *Considere o sistema (2.1) e sejam  $\mathcal{B}_\theta$  e  $\mathcal{B}$  politopos dados indicando os valores admissíveis de  $\theta$  e  $(\theta, \dot{\theta})$ , respectivamente. Suponha que existam matrizes simétricas  $P_0 > 0$ ,  $P_2$  e  $\Omega_P$ , e matrizes  $P_1, G_1, G_2, G_3, M_1, M_2, M_4, \Omega_A, \Omega_B, \Omega_C, \Omega_G, \Omega_M$  e  $W_i, i = 1, \dots, \ell_\theta$  satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star & \star & \star \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \star & \star \\ \Phi_{31} & \bar{\Omega}_P^T \mathcal{A} - \Omega_M & \Omega_A + \Omega_A^T & \star \\ C_z + M_4 \Theta & -M_4 & -\Omega_C & -I \end{bmatrix} < 0, \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{V}(\mathcal{B}) \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta) & \star & \star & \star \\ (P_0 + P_1 \Theta)B + \bar{\Omega}_B D + \Theta^T G_1^T & P_0 + G_2 \Theta + \Theta^T G_2^T & \star & \star \\ (P_1^T + P_2 \Theta)B - G_1^T & P_1^T + G_3 \Theta - G_2^T & P_2 - G_3 - G_3^T & \star \\ \bar{\Omega}_P^T B + \Omega_B D & \bar{\Omega}_P^T + \Omega_G \Theta & -\Omega_G & \Omega_P \end{bmatrix} > 0, \forall \theta \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\theta) \quad (5.39)$$

onde  $W(\theta)$  é uma matriz afim em  $\theta$  com valores  $W_1, \dots, W_{\ell_\theta}$ , nos vértices de  $\mathcal{B}_\theta$  e

$$\bar{\Omega}_P = \begin{bmatrix} \Omega_P \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_f}, \quad \bar{\Omega}_A = \begin{bmatrix} \Omega_A \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_f}, \quad \bar{\Omega}_B = \begin{bmatrix} \Omega_B \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A_0^T P_0 + P_0 A_0 + \bar{\Omega}_B C(\theta) + C^T(\theta) \bar{\Omega}_B^T + P_1 \Upsilon + \Upsilon^T P_1^T + M_1 \Theta + \Theta^T M_1^T, \\ \Phi_{21} &= P_1^T A_0 + P_2 \Upsilon + (P_0 A + P_1 \Theta A)^T - M_1^T + M_2 \Theta, \\ \Phi_{22} &= A^T P_1 + P_1^T A + P_2 \Theta A + (P_2 \Theta A)^T - M_2 - M_2^T, \\ \Phi_{31} &= \bar{\Omega}_P^T A_0 + \Omega_B C(\theta) + \bar{\Omega}_A^T + \Omega_M \Theta, \quad \Upsilon = \Theta A_0 + \dot{\Theta}, \end{aligned} \tag{5.40}$$

então o filtro  $\mathcal{F}$  de ordem  $n_f < n$  com a matriz de transferência

$$G_{zy}(s) = (\Omega_C \Omega_P^{-1}) [sI - (\Omega_A \Omega_P^{-1})]^{-1} \Omega_B \tag{5.41}$$

garante que o sistema do erro de estimação  $S_e$  satisfaça as desigualdades (2.53) e (2.54) com uma matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  quadrática em  $\theta$  descrita por (2.58) e (5.37). Além disso,

$$\|S_e\|_2^2 < \max_{i=1, \dots, \ell_\theta} \text{Tr}[W_i], \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{B}. \tag{5.42}$$

**Prova:** Note que a prova é similar à do Teorema 2.5 assumindo que as matrizes de transformação  $J_1$  e  $J_2$  são agora descritas por:

$$J_1 = \text{diag}\{I_n, I_q, P_4^{-1} P_5^T, I_{n_z}\} \quad J_2 = \text{diag}\{I_{n_w}, I_n, I_q, P_4^{-1} P_5^T\} \tag{5.43}$$

E a parametrização do filtro é dada por:

$$\begin{aligned} \Omega_A &= P_5 A_f P_4^{-1} P_5^T, \quad \Omega_B = P_5 B_f, \quad \Omega_C = C_f P_4^{-1} P_5^T, \\ \Omega_M &= P_5 P_4^{-1} M_3, \quad \Omega_P = P_5 P_4^{-1} P_5^T \end{aligned} \tag{5.44}$$

▽▽▽

De forma similar pode-se obter o projeto de filtros de ordem reduzida para os sistemas não lineares (4.1)/(4.23) e (4.1)/(4.34) e para os sistema lineares (5.1) e (5.2). No caso do sistema (4.1)/(4.34) este resultado pode ser visto em [20]. Como não foram feitas simulações com estes resultados, não se sabe ao certo, se a restrição na estrutura da matriz  $\mathcal{P}(\theta)$  torna ou não a abordagem restritiva. Uma opção, além de testar esta formulação, é tentar desenvolver novas abordagens para resolver este problema.

## Capítulo 6

# Comentários Finais

O enfoque principal desta tese foi o projeto de filtros robustos para diversas classes de sistemas lineares e não lineares usando funções de Lyapunov que são dependentes dos parâmetros incertos do sistema. Neste contexto, metodologias LMIs foram propostas para o projeto de filtros robustos através da minimização dos critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  quando as incertezas presentes no modelo estão descritas na forma politópica. Estes resultados foram obtidos através da utilização do Lema de Finsler, transformações de congruências e mudanças de variáveis. No decorrer da tese, dois tipos de transformações foram utilizadas, a proposta em [31] e a proposta em [37]. Conforme visto na Seção 2.4, a escolha de uma ou outra transformação depende do tipo de função de Lyapunov e do sistema a serem considerados. Ressalta-se, também, que não se pode afirmar se os resultados obtidos, pela aplicação destas transformações são ou não equivalentes.

Uma das vantagens dos métodos propostos pode ser vista nos exemplos apresentados, onde observa-se uma melhora significativa na minimização dos limitantes superiores do erro de estimação, quando comparado com os resultados já existentes na literatura para o projeto de filtros robustos. Outra vantagem, é que prova-se que estes resultados não são mais restritivos que os resultados baseados nas noções de estabilidade quadrática, ou seja, sempre que for possível resolver um problema de filtragem, tratado nesta tese, pelos resultados baseados em estabilidade quadrática, os métodos propostos nesta tese também serão factíveis e pelo menos com o mesmo valor do limitante superior para os índices de desempenho utilizados. No caso de sistemas não lineares do tipo racionais, este resultado não foi apresentado, mas é possível obtê-los através de escolhas adequadas para as variáveis de Finsler.

Na seqüência, tem-se um sumário dos resultados apresentados neste trabalho:

⇨ **Projeto de filtros para sistemas lineares:**

- ✓ *Sistemas a tempo contínuo* - (i) projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas invariantes no tempo com uma classe de funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros incertos, racionais no caso “primal” e afim no caso “dual”; (ii) projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$  para sistemas variantes no tempo usando funções de Lyapunov cujas matrizes são quadráticas nos parâmetros incertos.
- ✓ *Sistemas a tempo discreto* - projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para sistemas variantes no tempo usando funções de Lyapunov cujas matrizes são quadráticas nos parâmetros incertos.
- ✓ *Sistemas com modos instáveis* - projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$  para sistemas incertos a tempo contínuo variantes no tempo, no qual parte da dinâmica é instável. Assume-se que a parte instável não possui incertezas e que a parte estável pode ser incerta. Os resultados são obtidos utilizando funções de Lyapunov cujas matrizes são quadráticas nos parâmetros incertos.
- ✓ *Sistemas descritores* - projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$  para sistemas descritores incertos a tempo contínuo na forma algébrico-diferencial, usando funções de Lyapunov cujas matrizes são quadráticas nos parâmetros incertos.

⇨ **Projeto de filtros para sistemas não lineares:**

- ✓ *Sistemas com ruídos dependentes do estado* - projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$  para sistemas invariantes no tempo, com funções de Lyapunov afins (dual) e racionais (primal) nos parâmetros incertos.
- ✓ *Sistemas com não linearidades do tipo Lipschitz* - projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas variantes no tempo, usando uma função de Lyapunov cuja matriz é quadrática nos parâmetros incertos.
- ✓ *Sistemas racionais* - projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas racionais nos estados e nos parâmetros incertos variantes no tempo. Usa-se aqui uma função de Lyapunov polinomial nos estados e nos parâmetros incertos. Apresenta-se também o projeto de filtros não lineares para esta classe de sistemas.

⇨ **Outros Resultados:**

- ✓ *Filtros dependentes de parâmetros* - Apresenta-se uma extensão dos resultados obtidos para o projeto de filtros dependentes dos parâmetros incertos do sistema, onde as matrizes  $A_f(\theta)$  e  $C_f(\theta)$  são funções afins do parâmetro  $\theta$ .
- ✓ *Filtros de ordem reduzida* - projeto de filtros de ordem reduzida para os sistemas a tempo contínuo variantes no tempo, sistemas com não linearidades de Lipschitz, sistemas racionais, sistemas com modos instáveis e sistemas descritores, através de restrições estruturais na matriz da função de Lyapunov.

Ressalta-se que no contexto de sistemas não lineares, os resultados apresentados são apenas iniciais apesar dos avanços em se conseguir tratar este problema de forma numérica. Observa-se, também, que devido ao fato de ser considerado sistemas com incertezas do tipo politópicas o número de LMIs do problema cresce de forma exponencial com o número de parâmetros incertos. Sendo que esta explosão computacional pode ser agravada pelo fato de termos a inclusão de novas variáveis de folga introduzidas pelo Lema de Finsler. Assim, se a ordem do sistema for muito elevada, podem ocorrer problemas numéricos na solução das LMIs. A experiência nas simulações mostra, que estes problemas são mais frequentes no caso de sistemas a tempo discreto, decorrentes também do mal condicionamento numérico destes sistemas.

Além dos projetos de filtros formalmente apresentados neste trabalho pode-se, através de extensões dos resultados obtidos, obter os seguintes resultados:

- ✓ No caso de sistemas estocásticos, projetam-se filtros  $\mathcal{H}_\infty$  de maneira similar ao caso  $\mathcal{H}_2$  juntamente com o resultado do projeto do filtro  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas invariantes no tempo. Este resultado foi submetido a publicação em [6]. Resultados semelhantes podem ser também obtidos para o caso de sistemas bilineares a tempo discreto, utilizando a versão discreta do Lema 2.2, em [41].
- ✓ O projeto de filtros mistos  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  pode ser estendido para o caso de sistemas a tempo contínuo invariantes no tempo de forma similar ao caso discreto. Tem-se neste caso, apenas que se preocupar com a escolha dos valores ótimos para os parâmetros  $\epsilon_i$ . Este resultado pode também ser diretamente aplicado para o casos de sistemas bilineares.
- ✓ O projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas com modos instáveis e sistemas descritores pode ser obtido de forma similar ao projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas de Lipschitz.

Além destes itens, apresenta-se na seqüência algumas sugestões de trabalhos que podem ser realizados com base nos resultados propostos:

- ↔ Transpor os resultados apresentados para o projeto de filtros para sistemas com incertezas limitadas em norma.
- ↔ Uso de novas formulações de parametrização da função de Lyapunov e/ou condições de estabilidade para a busca de condições convexas no caso de sistemas a tempo contínuo, principalmente quando o parâmetro incerto é variante no tempo.
- ↔ Projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas não lineares a tempo discreto, tendo como base os resultados apresentados em [21].
- ↔ No caso de sistemas não lineares, a busca de soluções baseadas no custo garantido, talvez com uma interpretação determinística como a proposta em [59, cap.4].
- ↔ Projeto de filtros para sistemas descritores a tempo discreto.
- ↔ Aplicação destes resultados em processos reais.

Durante a realização desta tese os seguinte artigos foram publicados [3], [4], [5], [10], e [11]; e [6] e [20] foram submetidos ao CDC03. Espera-se que este trabalho possa ajudar a solidificar e incentivar o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e LMIs, na solução de problemas da Teoria de Controle e da Teoria de Processamento de Sinais, em especial no contexto de filtragem robusta.

# Apêndice A

## Desigualdades Matriciais Lineares

Neste apêndice, apresenta-se uma breve definição de Desigualdades matriciais Lineares (LMIs) e das ferramentas utilizadas nesta tese para transpor o problema de filtragem em LMIs. Maiores informações sobre LMIs e sua aplicação na Teoria de Controle e Sistemas pode ser obtido, por exemplo, em [17] e [42].

### A.1 Breve Definição

Desigualdades matriciais Lineares(LMIs) surgiram na teoria de controle no final do século XIX, quando Lyapunov formulou a condição  $A^T P + P A < 0$  com  $P > 0$  para verificar a estabilidade de sistemas dinâmicos, do tipo  $\dot{x} = Ax$ . No entanto, até o início dos anos 80 a aplicação de LMIs era limitada a sistemas de pequenos portes, pois a sua resolução era feita de forma manual ou analítica.

Foi a partir do final da década de 80 com a criação e aperfeiçoamento de algoritmos de otimização convexa, como pontos interiores, que os pesquisadores voltaram a se interessar pelo uso de LMIs na Teoria de Controle. Desde então muitos dos resultados usuais da teoria de controle e sistemas, estão sendo reescritos como LMIs. A vantagem é que com o uso de LMIs é possível tratar com mais facilidades sistemas mais complexos, como sistemas incertos e até mesmo sistemas não lineares<sup>1</sup>.

Matematicamente, uma LMI é definida como:

---

<sup>1</sup>Veja, por exemplo, [17] e [42] e referências destes.

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (\text{A.1})$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  é o vetor de variáveis de decisão;  $F_i \in R^{n \times n}$  para  $i = 0, \dots, m$  são matrizes simétricas dadas.

No entanto, dificilmente usa-se esta definição para declarar um problema LMI, pois normalmente uma LMI é posta na forma matricial como, por exemplo, a desigualdade de Lyapunov:  $A^T P + P A < 0$ , com  $P > 0$ . Para reescrever esta desigualdade na forma (A.1), deve-se encontrar os valores de  $F_i$  de forma que:

$$F(P) = A^T P + P A = F_0 + \sum x_i F_i \quad (\text{A.2})$$

onde  $x$  é um vetor contendo os elementos da matriz  $P$  que devem ser determinados. Mais detalhes sobre LMI e aplicação desta em controle podem ser encontrados, por exemplo em [17] e [42].

Apesar da grande utilização de LMIs na teoria de controle, é raro encontrar problemas que apareçam naturalmente na forma de uma desigualdade matricial linear, por isso, em muitas situações se faz necessário o uso de ferramentas que possibilitem transpor muitos dos resultados da teoria de controle e sistemas em LMIs. Na seqüência, apresentam-se dois resultados que são utilizados nesta tese para obter condições convexas para o projeto de filtros robustos.

### A.1.1 Complemento de Schur

O Complemento de Schur é um resultado da Teoria de Matrizes, amplamente utilizado na teoria de controle para a transformação de desigualdades não lineares em LMIs.

**Lema A.1 (Complemento de Schur)** *Sejam  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  matrizes de dimensões compatíveis, com  $Q$ ,  $R$  simétricas. Então*

$$Q - S R^{-1} S' > 0, \quad \text{com } R > 0, \quad (\text{A.3})$$

*se e somente se*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.4})$$

**Prova:** A prova deste resultado pode ser encontrada em [17, cap 2].

□□□

### A.1.2 Lema de Finsler

O resultado a seguir é uma particularidade do Lema de Finsler [17, cap 2]. Este resultado era comumente utilizado para a eliminação de variáveis, como o visto em [17, cap 2]. Nesta tese, no entanto, utiliza-se este lema para a inclusão de restrições de igualdades ao problema, através da inserção de novos graus de liberdade. Estes graus de liberdades são inseridos a partir da inclusão de novas variáveis de decisões oriundas da aplicação deste lema. Neste contexto, o Lema de Finsler vem sendo aplicado a diversas classes de sistemas lineares com parâmetros incertos e também no caso de sistemas não lineares (veja, por exemplo, [9, 27, 72, 73, 75]).

**Lema A.2 (Lema de Finsler - Particularidade)** *Dada a matriz simétrica  $\Psi$  e a matriz  $C_a$  de dimensões compatíveis e seja  $X$  uma matriz tal que  $C_a X = 0$ . Então tem-se que*

$$X' \Psi X < 0 \tag{A.5}$$

se e somente se  $\exists L$  tal que

$$\Psi + LC_a + C_a' L' < 0 \tag{A.6}$$

□□□

Um versão mais completa do Lema de Finsler e a sua prova pode ser vista em [27], onde encontra-se alguns resultados da teoria de controle que podem ser obtidos pela aplicação deste lema.



# Referências Bibliográficas

- [1] P. Apkarian, H. Tuan, and J. Bernussou. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and  $\mathcal{H}_2$  synthesis with enhanced linear matrix inequalities(LMI) characterizations. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 12(46):1941–1946, 2001.
- [2] M. Arcak and P. Kokotović. Nonlinear observers: a circle criterion design. In *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4872–4876, Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- [3] K. A. Barbosa, C. E. de Souza, and A. Trofino. Guaranteed variance robust filtering for uncertain systems with state-dependent noise. In *Proc. XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, RN, 2002.
- [4] K. A. Barbosa, C. E. de Souza, and A. Trofino. Robust  $\mathcal{H}_2$  filter design via parameter-dependent Lyapunov functions. In *Proc. 15th IFAC*, Barcelona, Spain, 2002. Submetido à revista *System & Control Letters* em dezembro de 2002.
- [5] K. A. Barbosa, C. E. de Souza, and A. Trofino. Robust  $\mathcal{H}_2$  filtering for discrete-time uncertain linear systems using parameter-dependent Lyapunov functions. In *Proc. 2002 American Control Conference*, Alaska, USA, 2002.
- [6] K. A. Barbosa, C. E. de Souza, and A. Trofino. Robust Filtering for Uncertain Linear Systems with State-Dependent Noise. Technical Report, Department of Systems and Automation, UFSC, Brazil(submitted to CDC03), February 2003.
- [7] K. A. Barbosa and A. Trofino. Síntese  $\mathcal{H}_2$  para sistemas com restrições algébricas. In *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, Florianópolis, SC, 2000.

- [8] K. A. Barbosa and A. Trofino. Síntese  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas com restrições algébricas no estado. In *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, Florianópolis, SC, 2000. Aceito para publicação na Revista *Controle & Automação* em fev/03.
- [9] K. A. Barbosa and A. Trofino. Técnicas LMI para análise de sistemas com restrições algébricas no estado. *Controle & Automação*, 13(1), 2002.
- [10] K. A. Barbosa, A. Trofino, and C. E. de Souza. Robust  $\mathcal{H}_2$  filtering for linear system with uncertain time-varying parameters. In *Proc. of the 41th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, USA, 2002.
- [11] K. A. Barbosa, A. Trofino, and C. E. de Souza. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for linear discrete-time state-space models with uncertain time-varying parameters. In *Proc. of 2002 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Orlando, Florida, USA, 2002.
- [12] B. R. Barmish and C. L. DeMarco. A new method for improvement of robustness bounds for linear state equations. In *Proc. of Conference on Information Sciences and Systems*, Princeton University, 1986.
- [13] D. J. Bender and a. J. Laub. The linear quadratic optimal regulator for descriptor systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 32(8):672–688, 1997.
- [14] D. S. Bernstein and W. M. Haddad. Steady-state Kalman filtering with an  $\mathcal{H}_\infty$  error bounded. *System & Control Letters*, 12(1):9–16, 1989.
- [15] G. Besancon and H. Hammouri. On uniform observation of nonuniformly observable systems. *System & Control Letters*, 29(-):9–19, 1996.
- [16] P. Bolzern, P. Colaneri, and G. de Nicolao. Optimal design of robust predictors for linear discrete-time systems. *System & Control Letters*, 26(-):25–31, 1995.
- [17] S. Boyd, L. El. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [18] S. Boyd and L. Vandenberghe. Convex optimization. Course Reader for EE364, August 1999.

- [19] S. E. P. Castro, D. F. Coutinho, A. Trofino, and J. E. R. Cury. Stability analysis and guaranteed domain of attraction for a class of hybrid systems: an LMI approach. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2002.
- [20] D. F. Coutinho, K. A. Barbosa, A. Trofino, and C. E. de Souza. Linear  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for a class of uncertain nonlinear systems. Technical Report, Department of Systems and Automation, UFSC, Brazil(submitted to conference), February 2003.
- [21] D. F. Coutinho, M. Fu, and A. Trofino. Regional stability analysis and performance for a class of nonlinear discrete-time systems. In *Proc. of the 41th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, 2002.
- [22] D. F. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu. Guaranteed cost control of uncertain nonlinear systems via polynomial Lyapunov functions. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2002.
- [23] D. F. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu. Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  control: an LMI approach. In *Proc. of the 15th IFAC World Congress*, Barcelona, 2002.
- [24] L. Dai. *Singular Control System*. Springer-Verlag, 1989.
- [25] M. C. de Oliveira. Controle de sistemas lineares baseados nas desigualdades matriciais lineares. Tese de Doutorado, FEE, UNICAMP, Brasil, March 1999.
- [26] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time system. In *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 47, pages 3611–3616, December 1999.
- [27] M. C. de Oliveira and R. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer-Verlag, 2001.
- [28] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *System & Control Letters*, 36:135–141, 1999.
- [29] C. E. de Souza.  $\mathcal{H}_\infty$  and robust estimation. *Controle e Automação da SBA*, 5:4–46, 1994.
- [30] C. E. de Souza, M. Fu, and A. Trofino. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filter design via parameter dependent lyapunov functions. In *IFAC - ROCOND*, Prague, june 2000.

- [31] C. E. de Souza and A. Trofino. An LMI approach to the design of robust  $\mathcal{H}_2$  filters. In Laurant El Ghaoui and Silviu-Iulian Niculescu, editors, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Siam, 2000.
- [32] C. E. de Souza, L. Xie, and Y. Wang.  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for a class of uncertain nonlinear systems. *System & Control Letters*, 20:419–426, 1993.
- [33] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(7):1041–1046, 1996.
- [34] M. Fu, C. E. de Souza, and L. Xie.  $\mathcal{H}_\infty$  estimation for uncertain systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2:87–105, 1992.
- [35] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions for real parametric uncertainty. In *Proc. of the 33th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2026–2031, Lake Buena Vista, December 1994.
- [36] J. P. Gauthier and I. A. K. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *Int. Journal of Control*, 32(4):975–994, 1994.
- [37] J. C. Geromel. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(1):168–175, 1999.
- [38] J. C. Geromel and M. C. de Oliveira.  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  robust filtering for convex bounded uncertain systems. In *Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 146–151, December 1998.
- [39] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and J. Bernussou. Robust filtering of discrete-time system with parameter dependent Lyapunov functions. In *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 47, pages 570–575, December 1999.
- [40] J.C. Geromel, J. Bernussou, and M. C. de Oliveira.  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  robust filtering for discrete-time for uncertain linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 38:1353–1368, 2000.
- [41] E. Gershon, D. J. N. Limebeer, U. Shaked, and I. Yaesh. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering of stationary continuous-time linear systems with stochastic uncertainties. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(11):1788–1793, 2001.

- [42] L. El Ghaoui and S. Niculescu. *Advances in Linear Matrix Inequalities Methods in Control*. SIAM, 2000.
- [43] M. Green and D. J. N. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice Hall, 1995.
- [44] M. J. Grimble.  $\mathcal{H}_\infty$  Design of Optimal Linear Filters. In C. F. Martin C. I. Byrnes and R. E. Saeks, editors, *Linear Circuits, Systems and Signal Processing: Theory and Application*, pages 533–540. North-Holland, 1988.
- [45] R. E. Kalman. A New approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. of the ASME Journal of Basic Engineering*, 82:34–45, 1960.
- [46] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction problems. *Trans. of the ASME Journal of Basic Engineering*, 83:95–107, 1961.
- [47] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [48] P. P. Khargonekar, M. a. Rotea, and E. Baeyens. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  filtering. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:313–330, 1996.
- [49] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for linear systems. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45:2338–2350, 1997.
- [50] R. R. Mohler and W.J. Kolodziej. An overview of stochastic bilinear control processes. *IEEE Trans. Man. and Cyber.*, 10:913–919, 1980.
- [51] K.M. Nagpal and P.P Khargonekar. Filtering and smoothing in an  $\mathcal{H}_\infty$  setting. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 36:152–166, 1991.
- [52] S. K. Nguang and M. Fu.  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for known and uncertain nonlinear systems. In *Proc. of IFAC, Symposium Robust Control Design*, pages 347–352, Brazil, 1994.
- [53] S. K. Nguang and M. Fu. Robust nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  filtering. *Automatica*, 32(8):1195–1199, 1996.
- [54] S. K. Nguang and M. Fu. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for a class of nonlinear systems: a LMI approach. In *Proc. of 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, 1998.
- [55] J. Oliveira, A. Trofino, and C. E. Souza. Análise e síntese  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas LPV. *Controle & Automação*, 13(1), 2002.

- [56] F. Paganini and E. Feron. Linear Matrix inequality methods for robust  $\mathcal{H}_2$  analysis: a survey with comparisons. In Laurant El Ghaoui and Silviu-Iulian Niculescu, editors, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Siam, 2000.
- [57] R. Palhares. Filtragem robusta: uma abordagem por desigualdades matriciais lineares. Tese de Doutorado, FEE, UNICAMP, Campinas, SP, 1998.
- [58] R.M. Palhares and P. L. D. Peres. LMI approach to the mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  filtering design for discrete-time uncertain systems. *IEEE Trans. on aerospace and electronic systems.*, 37:292–296, 2001.
- [59] I. R. Petersen and A. V. Savkin. *Robust Kalman Filtering for Signals and Systems with Large Uncertainties*. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [60] I. R. Petersen and D. C. MacFarlane. Robust estimation for uncertain systems. In *Proc. of 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2630–2631, Brighton, U.K., 1991.
- [61] I. R. Petersen and D. C. McFarlane. Optimal guaranteed cost filtering for uncertain discrete-time systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:267–280, 1996.
- [62] S. Raghavan and J. K. Hedrik. Observers design for a class of nonlinear systems. *Int. Journal of Control*, 59:515–528, 1994.
- [63] R. Rajamani. Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 43(3):397–400, March 1998.
- [64] R. Rajamani and Y. M. Cho. Existence and design of observers for nonlinear systems: relation to distance to unobservability. *Int. Journal of Control*, 69(5):717–731, 1998.
- [65] H. Rotstein, M. Sznaier, and M. Idan.  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  filtering theory and an aerospace application. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(4):347–366, 1996.
- [66] U. Shaked.  $\mathcal{H}_\infty$ -minimum error state estimation of linear stationary processes. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35:554–558, 1990.
- [67] U. Shaked and C. E. de Souza. Robust minimum variance filtering. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43:2474–2483, 1995.

- [68] U. Shaked and I. Yaesh. Variance and  $\mathcal{H}_\infty$  Estimation Error Minimization of Stationary Processes with Perfect Measurements. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35:310–314, 1990.
- [69] M. Shergei, U. Shaked, and C. E. de Souza. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  nonlinear estimation. *Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 10:395–408, 1996.
- [70] Y. Theodor and U. Shaked. Robust discrete-time minimum variance filtering. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 44:181–189, 1996.
- [71] Y. Theodor, U. Shaked, and C. E. de Souza. A game theory approach to robust discrete time  $\mathcal{H}_\infty$  estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42:1486–1495, 1994.
- [72] A. Trofino. Abordagem LMI para problemas de controle com funções de lyapunov dependente de parâmetros. In *Mini Cursos do XII Congresso Brasileiro de Automática*. Sociedade Brasileira de Automática, Uberlândia, MG, 1998.
- [73] A. Trofino. Bi-quadratic stability for nonlinear systems. In *Proc. of 3th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Prague, República Tcheca, 2000.
- [74] A. Trofino. Robust stability and domain of attraction of uncertain nonlinear systems. In *Proc. of the American Control Conference*, Chicago, 2000.
- [75] A. Trofino and C. E. de Souza. Bi-quadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 46:1303–1307, 2001.
- [76] H. D. Tuan, P. Apkarian, and T. Q. Nguyen. Robust and reduced-order filtering: new LMI-based characterizations and methods. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(12):2975–2984, 2001.
- [77] A. Varga. On stabilization methods of descriptor systems. *Systems and Control*, Vol. 24:133–138, 1995.
- [78] G. C. Verghese, B. C. Lévi, and T. Kailath. A generalized state-space for singular systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 26(No 4):811–831, August 1981.
- [79] Y. Wang, L. Xie, and C. E. de Souza. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *System & Control Letters*, 19:139–149, 1992.

- 
- [80] Z. Wang, Z. Guo, and H. Unbehauen. Robust  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  state estimation for discrete-time systems with error variance constraints. *System & Control Letters*, 42:1431–1435, 1997.
- [81] L. Xie, C. E. de Souza, and M. Fu.  $\mathcal{H}_\infty$  estimation for discrete-time linear uncertain systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1:111–123, 1991.
- [82] L. Xie, C. E. de Souza, and Y. C. Soh. Robust filtering for uncertain system with unstable modes. In *Proc. of 33rd Conference on Decision and Control*, pages 3929–3930, Lake Buena Vista, FL, 1994.
- [83] L. Xie, C. E. de Souza, and Y.C. Soh. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 39:1310–1314, 1994.
- [84] L. Xie, C. E. de Souza, and Y. Wang. Robust control of discrete time dynamical systems. *Automatica*, 29:1133–1137, 1993.
- [85] L. Xie, C. E. de Souza, and Y. Wang. Robust filtering for discrete-time uncertain nonlinear systems: an  $\mathcal{H}_\infty$  approach. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:297–312, 1996.
- [86] F. Yang and Y. S. Hung. Robust mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  filtering with regional pole assignment for uncertain discrete-time systems. *IEEE Trans. on circuits and systems*, 49(8):1236–1241, 2002.
- [87] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essential of Robust Control*. Prentice Hall, 1998.
- [88] F. Zhu and Z. Han. A note on observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47:1751–1754, 2002.