

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

O COMPORTAMENTO CRÍTICO DE UM MODELO  
METAMAGNÉTICO COMPRESSÍVEL

ANTÔNIO FLÁVIO DA SILVA MOREIRA

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade  
Federal de Santa Catarina para obtenção do título de Doutor em Física

ORIENTADOR: PROF. DR. WAGNER FIGUEIREDO

Florianópolis, fevereiro de 2003

PARA MINHA MÃE, MARIA.

## AGRADECIMENTOS

- Aos professores Wagner Figueiredo e Vera B. Henriques, pela orientação e amizade. O trabalho de orientação foi inicialmente realizado pela professora Vera Henriques, na Universidade de São Paulo, onde foi proposto e estruturado a maior parte do conteúdo da tese. A conclusão da mesma e a publicação dos trabalhos foram realizados na Universidade Federal de Santa Catarina, sob orientação do professor Wagner Figueiredo.
- Ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina, pelas condições de trabalho oferecidas.
- Aos professores e colegas do departamento, pelo acolhimento e prestabilidade.
- À minha família, pelo incentivo em todos os momentos.
- À minha companheira Berenice, pela compreensão e paciência durante esses anos de trabalho.
- Às secretárias Sônia e Telma, pela amizade e permanente disposição em nos atender.
- À Universidade do Vale do Itajaí, na qual trabalho.

# Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento crítico de um sistema metamagnético compressível do tipo Ising, com tensão de cisalhamento infinita entre os sítios da rede. O sistema  $d$ -dimensional é dividido em hiperplanos de spins que têm interação ferromagnética entre si, enquanto que para spins em hiperplanos diferentes, a interação é antiferromagnética. A interação elástica é considerada na aproximação harmônica e a interação entre spins depende linearmente da distância inter-iônica. Integramos os graus de liberdade elásticos e obtivemos um hamiltoniano efetivo de spins, que contém interações de longo alcance entre pares de spins, no ensemble das pressões.

O modelo é estudado na aproximação de campo médio por meio de uma expansão de Landau. No caso particular onde o acoplamento spin-rede é isotrópico, obtém-se uma solução simples, na qual o sistema pode apresentar tanto o comportamento crítico geral do modelo rígido, como um comportamento mais complexo, onde em altas e baixas temperaturas a transição é de primeira ordem, e em temperaturas intermediárias a transição é contínua. No caso anisotrópico a solução só pode ser obtida considerando-se perturbativamente os efeitos da elasticidade, obtendo-se a superfície crítica no diagrama campo-pressão-temperatura. A dependência com relação à pressão dos principais pontos que definem o diagrama de fases é obtida, permitindo que sejam feitas comparações com dados experimentais de metamagnetos sob pressão.

O modelo foi investigado ainda através de um cálculo baseado no grupo de renormalização no espaço recíproco. O hamiltoniano foi expandido em torno da solução de campo médio, produzindo um hamiltoniano que, além dos termos que ocorrem nos modelos de Domb e metamagnético rígido, contém um termo quadrático relacionado à anisotropia do acoplamento spin-rede. Obtidas as equações de recorrência, os reescalamentos do espaço e das variáveis de spin revelam um hamiltoniano renormalizado mais simples, isento das variáveis irrelevantes. Contrariamente ao modelo de Domb, alguns pontos fixos são fisicamente acessíveis, devido ao termo novo relacionado à anisotropia. O comportamento crítico básico resultante é composto de duas linhas de transição de primeira ordem, em altas e baixas temperaturas, conectadas por dois pontos tricríticos a uma linha de transição contínua. Esta linha apresenta expoentes críticos renormalizados em relação àqueles de Ising, e o ponto tricrítico de baixa temperatura também apresenta expoentes renormalizados, mas em relação aos valores clássicos. O ponto tricrítico que ocorre em alta temperatura é do tipo Ising. A linha crítica pode colapsar em um único ponto sobre a linha de primeira ordem, como no caso isotrópico da aproximação de campo médio. O hamiltoniano renormalizado pode ser integrado naquelas variáveis de spin que são independentes das variáveis de momento, produzindo um hamiltoniano reduzido que contém, além do termo quadrático e quártico, um termo biquadrático.

A expansão de Landau da energia livre do modelo metamagnético rígido é revisitada, permitindo a sua obtenção até ordem doze no parâmetro de ordem. Os coeficientes são escritos em termos da razão entre os acoplamentos ferro e antiferromagnético e da temperatura reduzida, na condição de criticidade. Observamos que em muitos casos, coeficientes dos termos acima de quarta ordem são negativos, apesar da análise baseada na expansão de Lan-

dau vigente na literatura, considerar que os coeficientes dos termos de maior ordem sejam todos positivos. Entretanto, um estudo numérico dos diagramas de fases, mostra que, para quaisquer valores da razão entre os acoplamentos magnéticos, tal fato não produz modificações no diagrama e, portanto, nem sempre um coeficiente negativo altera a comportamento crítico.

# Abstract

In this work we study the critical behavior of an Ising metamagnetic compressible system, with infinite shear forces between the lattice sites and submitted to a hydrostatic pressure. The  $d$ -dimensional lattice is composed of ferromagnetic hyperplanes whose spins have antiferromagnetic interaction with their first neighbours in the adjacent hyperplanes. The elastic interaction is considered in the harmonic approximation and the magnetic interaction have a linear dependence on the inter-ionic distance. The integration of the elastic degrees of freedom gives an effective hamiltonian of spins in the pressure ensemble, which presents long-range interaction between pairs of spins.

Firstly, the mean field approximation and a Landau expansion of the free energy is considered. The isotropic spin-lattice case gives a closed solution, where the system can exhibit the usual metamagnetic phase diagram, or display a different behavior. In latter case there are two first order transition lines at high and low temperatures, and a continuous transition line at intermediate temperatures. In the anisotropic case, a simple solution is unavailable, but a perturbative expansion on the elastic constant, provides a critical surface on the field-temperature-pressure space. The dependence of the critical points on the pressure is obtained, allowing a comparison to experimental data of metamagnets under pressure.

The model is also investigated by the moment space renormalization group technique. The hamiltonian is expanded around the mean field solution and the resulting hamiltonian contains the Domb and the metamagnetic rigid models terms, as well as a new one which is related to the anisotropy of spin-lattice coupling. We generate the recursion relations and rescale the space and spin variables in order to get a simpler renormalized hamiltonian, without the irrelevant variables. Contrary to the Domb's model, some fixed points can be accessed within the physical domain of the variables, due to the presence of the new term. The ordinary basic phase diagram is composed of two first order lines, at high and low temperatures, linked to the continuous transition line by two tricritical points. The critical indices related to the continuous line are different from the Ising critical exponents, but presents Fisher's renormalization. The critical indices for the low temperature tricritical point are non-classical and those for high temperature are of Ising type. The critical line can collapse into a single point on the first order line, as in the mean field isotropic case. The renormalized hamiltonian can be integrated over the moment independent spin variables, resulting in a reduced hamiltonian which contains only terms of second, fourth and biquadratic in the spin variables.

The Landau expansion of the free energy of the metamagnetic rigid model is revisited in a different way, giving analytical expressions for the coefficients up to the twelfth order. They are written in terms of the ratio of ferro and antiferromagnetic couplings and the reduced temperature, at the criticality. We observed that some higher order coefficients are negative, despite the usual Landau expansion analysis. A numerical determination was also performed for many values of the ratio between the ferro and antiferromagnetic couplings. We argue that negative higher order coefficients at the critical



condition, can be of no consequence on the phase diagram.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>A solução de campo médio</b>	<b>9</b>
2.1	Introdução . . . . .	9
2.2	O modelo . . . . .	11
2.3	A aproximação de campo médio . . . . .	14
2.4	A expansão de Landau . . . . .	18
2.5	Acoplamento spin-rede isotrópico . . . . .	20
2.6	Caso anisotrópico no limite de baixa compressibilidade . . . . .	25
2.6.1	Diagrama de Fases . . . . .	25
2.6.2	Comparação com dados experimentais . . . . .	30
<b>3</b>	<b>O grupo de renormalização</b>	<b>33</b>
3.1	Introdução . . . . .	33
3.2	O hamiltoniano do modelo . . . . .	37
3.3	Aproximação de campo médio . . . . .	39
3.4	A expansão do hamiltoniano . . . . .	43
3.5	As transformações do grupo de renormalização . . . . .	48

3.6	As equações de recorrência . . . . .	55
3.7	Pontos fixos . . . . .	61
3.8	O diagrama de fluxos . . . . .	68
<b>4</b>	<b>A expansão de Landau do modelo metamagnético rígido</b>	<b>81</b>
4.1	Introdução . . . . .	81
4.2	Expansão de Landau . . . . .	82
4.3	Obtenção numérica dos diagramas . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>92</b>
<b>A</b>	<b>Os coeficientes da expansão de Landau</b>	<b>96</b>
<b>B</b>	<b>Equações de recorrência das variáveis irrelevantes</b>	<b>101</b>
<b>C</b>	<b>Cálculo das integrais</b>	<b>104</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama dos possíveis comportamentos críticos no plano $\xi_p \times \epsilon_p$ . As inserções representam diagramas de fase típicos das regiões A, D e F. A seta indica o sentido do crescimento da pressão. . . . .	22
2.2	Diagramas de fases campo-temperatura para $\epsilon = 1$ e $g_+ = 0.7$ para quatro valores da pressão. A linha dos pontos tricríticos é identificada pela letra $\gamma$ . Na pressão $\Pi = 0.6714$ o ponto tricrítico coincide com a temperatura de Néel. Para $h = 0$ o sistema comporta-se como o modelo de Domb. . . . .	25
2.3	Tipos de deslocamentos possíveis do ponto tricrítico em função da variação da pressão, para $j_A$ e $g_+$ positivos. As setas indicam o sentido do crescimento da pressão. . . . .	30
3.1	Diagrama de fluxos típico do modelo de Domb no espaço $B_- \times u_-$ .	69
3.2	Diagrama de fluxos do modelo metamagnético rígido no espaço $W \times u_-$ . . . . .	70
3.3	Fluxo nos planos (a) $(W_{IM} [W_{GT}], B_-, V = 0)$ e (b) $(W_{IM} [W_{GT}], B_- = 0, V)$ , onde $W_{IM} = 2u_- - \bar{\epsilon}/18$ e $W_{GT} = 2u_-$ . A forma dos fluxos é a mesma nos subespaços definidos por $W_{IM}$ e $W_{GT}$ , sendo esquematizadas nas mesmas figuras. Os pontos fixos de $W_{GT}$ estão escritos entre colchetes.	72

- 3.4 a) Vista superior do diagrama de fluxos, perpendicularmente às retas  $W_{IM} = 2u_- - \bar{\epsilon}/18$  e  $W_{GT} = 2u_-$ . Como na figura 3.3, os dois diagramas podem ser vistos na mesma figura, com os pontos fixos de  $W_{GT}$  escritos entre colchetes. b) Vista frontal do lado  $B_- > 0$ . . . . . 75
- 4.1 Diagrama de fases campo ( $h$ )  $\times$  temperatura ( $t$ ) para  $\epsilon = 0.8$ . As linhas tracejada e sólida representam, respectivamente, as transições de primeira e segunda ordem, que separam as fases para (P) e antiferromagnética (AF). . . . . 85
- 4.2 Mesma legenda da figura 4.1, mas com  $\epsilon = 0.5$ . O ponto de encontro das linhas de primeira e segunda ordem é mostrado na ampliação.  $\Gamma$  e  $\Lambda$  são regiões da linha de coexistência,  $C$  é o ponto crítico terminal e  $B$  é o ponto bicrítico terminal. . . . 85
- 4.3 Sinal dos coeficientes no plano  $t \times \epsilon$  na condição  $\Psi_2 = 0$ . Linha sólida:  $\Psi_4 = 0$ ; linha tracejada:  $\Psi_6 = 0$ ; linhas pontilhadas:  $\Psi_8 = 0$ . Abaixo das curvas cada respectivo coeficiente é negativo. No ponto  $X$ ,  $\epsilon = 0.62$ . A linha decorada (+) representa os pontos críticos terminais. . . . . 88
- 4.4 Mesma legenda que a figura 4.1, mas com  $\epsilon = 0.62$ . Ponto 1 é um ponto tricrítico e o ponto 2 fica sobre a linha crítica onde  $\Psi_4 > 0$ ,  $\Psi_6 < 0$  e  $\Psi_8 > 0$ . . . . . 89

# Capítulo 1

## Introdução

O diagrama de fases no plano campo-temperatura de sistemas metamagnéticos tem sido estudados tanto teórica [1-10] quanto experimentalmente [11-14]. O diagrama de fases exhibe transições de uma fase antiferromagnética para uma paramagnética, de primeira ordem em campos magnéticos altos e de segunda ordem em campos baixos. Essas duas linhas normalmente encontram-se no chamado ponto tricrítico, embora comportamentos mais complexos sejam possíveis. Um modelo metamagnético usual é aquele que considera a rede cristalina composta de planos, cujos spins têm interação ferromagnética com spins do mesmo plano e interação antiferromagnética com spins de planos adjacentes [12]. Em uma abordagem a nível de campo médio, o tipo do diagrama de fases do modelo é definido pela magnitude relativa entre os acoplamentos ferro e antiferromagnético [1]. Abaixo de um certo valor dessa razão, o ponto tricrítico desdobra-se em um ponto crítico terminal e um ponto bicrítico terminal. O ponto tricrítico é observado para os materiais metamagnéticos em geral [11, 12], mas os pontos crítico e bicrítico terminais não foram encontrados em sistemas reais. Simulações numéricas de Monte Carlo [2-6] não confirmam o desdobramento do ponto tricrítico, em-

bora uma abordagem a nível de grupo de renormalização em ordem  $\epsilon$ , mas considerando um hamiltoniano com coeficientes de alta ordem [10], permita outras possibilidades além do comportamento tricrítico usual. Nesta mesma ordem, um tratamento de grupo de renormalização, mostra que o comportamento tricrítico é descrito por uma competição entre o ponto fixo gaussiano e o ponto fixo de Ising. Os expoentes críticos são do tipo Ising para a linha crítica e clássicos para o ponto tricrítico [9].

Sistemas ferromagnéticos compressíveis do tipo Ising foram estudados em uma série de trabalhos teóricos [15-21] algum tempo atrás. Para uma constante de troca linearmente dependente da distância inter-iônica, a integração das variáveis elásticas, leva a uma interação de longo alcance entre pares de spins. O sinal deste termo biquadrático é crucial para a caracterização da transição magnética, que pode ser crítica com expoentes críticos de Ising (puros ou renormalizados) [16, 22] ou de primeira ordem [17, 20]. Dois casos limites mais simples são aqueles cujas forças de cisalhamento são nulas [16] ou infinitas [15]. No primeiro caso ambos os acoplamentos, elástico e magnético, dependem somente da componente longitudinal das posições relativas dos íons, ao passo que no segundo caso, flutuações nas posições estão ausentes, e as distâncias interiônicas são dependentes apenas do volume.

O modelo de Baker e Essam [16] apresenta expoentes críticos de Ising quando submetido a pressão constante e expoentes críticos de Ising renormalizados em volume constante [16, 22]. Para o modelo de Domb [15], uma aproximação de campo médio prevê um ponto tricrítico no diagrama pressão-temperatura, enquanto tratamentos de grupo de renormalização e a solução exata em duas dimensões prevêem somente coexistência de fases [17]. A inclusão de forças de cisalhamento finitas através da flutuação na distância inter-iônica [18, 19] não estabiliza o comportamento crítico e, por-

tanto, o comportamento do modelo de Domb prevalece, tornando a transição magnética descontínua devido à elasticidade da rede. Mais recentemente, simulações numéricas têm sido feitas em sistemas com um potencial elástico anisotrópico [23].

Um sistema metamagnético sob pressão foi considerado anteriormente [24] no espírito do modelo de Baker e Essam [16], onde o cisalhamento é nulo. O diagrama de fases é essencialmente o mesmo do modelo rígido e a temperatura do ponto tricrítico pode ser determinada em função da pressão. Trabalhos experimentais em compostos metamagnéticos sob pressão hidrostática [25-28], mostram que as linhas de transição e o ponto tricrítico são deslocados com a variação da pressão.

Em vista da discrepância entre o comportamento dos dois modelos extremos no caso do ferromagnetismo, é de interesse considerar o efeito da compressibilidade com cisalhamento nos metamagnetos. Neste trabalho, consideramos um modelo metamagnético no espírito do modelo de Domb (cisalhamento infinito), sob ação de uma pressão externa. O modelo é investigado sob duas abordagens, uma de campo médio e outra de grupo de renormalização. No primeiro caso, a energia livre de campo médio é obtida após a integração dos graus de liberdade elásticos e uma expansão de Landau é realizada. Dois casos particulares são abordados: acoplamento spin-rede isotrópico e o limite de baixa compressibilidade, onde os resultados são comparados com dados experimentais. Na abordagem via grupo de renormalização, é feita uma expansão do hamiltoniano em torno da solução de campo médio e uma transformação para o espaço de momentos. Obtidas as equações de recorrência, são feitos os reescalamentos do espaço e das variáveis de spin, que revelam quais campos são relevantes e quais são irrelevantes para o comportamento crítico, emergindo assim um hamiltoniano mais simples.



Obtidos os pontos fixos, o diagrama de fases é construído, permitindo analisar o comportamento crítico do modelo. Por fim, voltamos à questão da expansão de Landau da energia livre do modelo metamagnético rígido. A expansão é refeita com vistas à análise do papel dos coeficientes de mais alta ordem, que em muitos casos são negativos.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira: no *Capítulo 2* é apresentada uma abordagem baseada na teoria de campo médio para o modelo metamagnético compressível; no *Capítulo 3* é desenvolvida uma análise de grupo de renormalização; no *Capítulo 4* é analisada a expansão de Landau do modelo metamagnético rígido, considerando-se os termos de mais alta ordem. Por fim, apresentamos as nossas conclusões no *Capítulo 5*. No final do texto, incluímos três apêndices: no *Apêndice A* são listados os coeficientes da expansão de Landau necessários à análise dos modelos compressível e rígido; no *Apêndice B* são mostradas as equações de recorrência dos campos irrelevantes do grupo de renormalização e no *Apêndice C* abordamos as integrais relacionadas aos diagramas de Feynman.

# Capítulo 2

## A solução de campo médio

### 2.1 Introdução

Os sistemas metamagnéticos são aqueles que quando submetidos a um campo magnético na direção do eixo de anisotropia, exibem transição de fase contínua e baixos campos e transição de primeira ordem em campos altos. No diagrama campo versus temperatura as linhas de transição encontram-se num ponto tricrítico. Muitos modelos foram criados para explicar o comportamento metamagnético. O mais simples deles considera uma rede cúbica simples, composta de planos perpendiculares ao eixo de anisotropia, cujos spins têm interação ferromagnética com spins primeiros vizinhos do mesmo plano e interação antiferromagnética com spins primeiros vizinhos de planos adjacentes. Esta é a estrutura que vamos adotar neste trabalho, embora uma aproximação de campo médio como a que será feita aqui, seja indiferente à estrutura espacial considerada, e outros arranjos, como um sistema de sub-redes interpenetrantes, mostra-se completamente equivalente. A solução de campo médio do modelo rígido [1] mostra bons resultados em comparação com a experiência [12], e estabelece que a posição do ponto tricrítico no

diagrama de fases só depende da razão entre os acoplamentos ferro e antiferromagnéticos. Há também outras possibilidades, tal como o desdobramento do ponto tricrítico em um ponto crítico terminal e um ponto bicrítico terminal (ver *Capítulo 4*).

O comportamento magnético do sistema pode ser vinculado à compressibilidade da rede através do acoplamento spin-rede. O modelo de Domb considera um sistema ferromagnético em que a constante de troca varia linearmente com as variações de volume, enquanto que a distância inter-iônica permanece a mesma para qualquer par de spins da rede [15]. O modelo de Baker e Essam considera a rede como um conjunto de linhas de spins, paralelas ao eixo de anisotropia, que podem deformar-se axialmente, independentemente da deformação das linhas adjacentes [16]. Fisicamente, os dois modelos representam casos particulares extremos em relação às forças de cisalhamento entre os sítios da rede: no primeiro caso elas são infinitas e no último inexistentes, sendo, portanto, mecanicamente instável. Sob uma aproximação de campo médio, o modelo de Baker e Essam apresenta apenas transição contínua, enquanto que o modelo de Domb exibe em baixas pressões transição de primeira ordem e em altas pressões transição de segunda ordem.

O modelo metamagnético em uma rede compressível com cisalhamento nulo foi estudado anteriormente [24], mostrando o mesmo comportamento geral do modelo rígido, mas em que as linhas do diagrama campo-temperatura podem ser deslocadas pela pressão. Trabalhos experimentais com materiais metamagnéticos sob pressão [25-28] exibem este mesmo tipo de comportamento. Neste capítulo estudamos o modelo metamagnético em uma rede com cisalhamento infinito [29], típico do modelo de Domb, que apesar de não considerar flutuações nas posições dos spins, é mais realista que aquele com cisalhamento nulo, como anteriormente comentado. Uma aproximação de

campo médio e uma expansão de Landau são realizadas, possibilitando descrever o comportamento crítico em alguns casos ideais e fazer comparações com os dados experimentais disponíveis.

## 2.2 O modelo

O modelo metamagnético compressível que adotamos, tem as mesmas características elásticas do modelo de Domb. Devido as forças de cisalhamento serem infinitas, ele é considerado homogêneo e isotrópico para deformações da rede. Uma mudança no volume é sempre consequência da pressão aplicada, ou devida à própria interação magnética quando o sistema procura minimizar a sua energia livre. O modelo adotado também guarda as mesmas características gerais do modelo metamagnético acima descrito, mas cuja rede pode deformar-se. Consideramos que o sistema tem dimensão espacial  $d$ , composto de hiperplanos com dimensão  $d - 1$  cujos spins têm interação ferromagnética entre si, mas que na direção  $d$ , perpendicular aos hiperplanos, têm interação antiferromagnética. O hamiltoniano é

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_i [J_{ij} - j_{ij}(a - a_0)] \sigma_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{1}{2} K (a - a_0)^2 - \sum_i H_i \sigma_i, \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_i = \pm 1$  são as variáveis de spin;  $a_0$  é a constante de rede na ausência de pressão e interação magnética;  $H_i$  é o campo aplicado no  $i$ -ésimo sítio. Os fatores  $1/2$  evitam a dupla contagem de sítios. A energia elástica é representada pelo potencial harmônico existente entre os sítios da rede, sendo  $K$  a constante elástica e  $a$  a distância inter-iônica em um estado arbitrário. Foi feita uma aproximação linear para a dependência da constante de troca com a constante de rede,  $J_{ij}(a)$ , que foi escrita usando-se uma notação compacta,  $J_{ij} = J_{ij}(a_0)$  e  $j_{ij} = \left( \frac{\partial J_{ij}(a)}{\partial a} \right)_{a_0}$ . A justificativa para usarmos esta

aproximação linear é que a rede se deforma pouco, i.e., a constante elástica  $K$  é grande. Este princípio governa esta e outras aproximações que viermos a fazer, tendo papel importante na interpretação dos resultados.

Fazendo  $j_{ij} = 0$ , o hamiltoniano do modelo metamagnético rígido é recuperado. Podemos fazer a soma sobre  $i, j$  no termo do potencial elástico no hamiltoniano (2.1), que fica  $d n^d K (a - a_0)^2 / 2$ , considerando-se uma rede cúbica com cada spin tendo  $2d$  primeiros vizinhos. Há  $n$  sítios em cada direção, perfazendo um total de  $N = n^d$ .

A função de partição pode ser escrita como,

$$\mathcal{Z}_a(T, a, N, H) = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta \mathcal{H}) \quad , \quad (2.2)$$

onde  $\beta = 1/k_B T$  e a  $\sum_{\{\sigma\}}$  é a soma sobre todas as possíveis configurações dos spins. Para introduzir a pressão no problema nós fazemos uma transformada de Laplace para o ensemble das pressões,

$$\mathcal{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp(-\beta p v) \mathcal{Z}_a(T, a, N, H) \quad , \quad (2.3)$$

onde  $v$  é o volume do sistema e  $p$  é a pressão. Vamos expandir o volume em torno de  $N a_0^d$ , que fica,

$$v = N a^d = N a_0^d \left[ 1 + \frac{d}{a_0} (a - a_0) + \dots \right] \quad , \quad (2.4)$$

desprezando os termos de mais alta ordem pelos mesmos motivos expostos acima. Apesar da variável de integração no volume em (2.3) variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ , nós truncamos a expansão, mas isto também pode ser justificado pelo fato de  $K$  ter um valor alto e a exponencial em (2.3) cair rapidamente quando  $|a - a_0|$  cresce, tornando desprezível a probabilidade de ocorrência

de grandes variações no volume. Assim, teremos,

$$\mathcal{Z} \simeq dN a_0^{d-1} \sum_{\{\sigma\}} \int_{-\infty}^{+\infty} d(a - a_0) \exp \left\{ -\beta p N a_0^d \left[ 1 + \frac{d}{a_0} (a - a_0) \right] - \beta \mathcal{H} \right\} , \quad (2.5)$$

onde  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(T, p, N, H)$ .

Neste trabalho, recorreremos muitas vezes à transformação gaussiana, que vamos escrever da seguinte maneira:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp -(a_2 x^2 + a_1 x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a_2}} \exp \frac{a_1^2}{4a_2} . \quad (2.6)$$

Usando a fórmula acima, podemos integrar a função de partição (2.5) sobre  $(a - a_0)$ , obtendo,

$$\mathcal{Z}(T, p, N, H) = c \exp [-\beta N \mathcal{H}_0(p)] \sum_{\{\sigma\}} \exp (-\beta \mathcal{H}') , \quad (2.7)$$

onde

$$c = dN a_0^{d-1} \sqrt{\frac{2\pi}{dN\beta K}} , \quad \mathcal{H}_0(p) = p a_0^d - \frac{1}{2} dN \frac{a_0^{2(d-1)} p^2}{k} , \quad (2.8)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_i \left( J_{ij} + \frac{p a_0^{d-1}}{K} j_{ij} \right) \sigma_j - \frac{\beta}{2} \left( \sum_{ij} \sigma_i \frac{j_{ij}}{2\sqrt{dNK}} \sigma_j \right)^2 - \sum_i H_i \sigma_i . \quad (2.9)$$

Notemos que a transformação para o ensemble das pressões, introduz um termo biquadrático que representa uma interação entre todos os pares de spins sobre a rede, e que portanto, caracteriza a introdução da compressibilidade no sistema.

Para escrever o hamiltoniano numa forma mais apropriada, nós reduzimos o grau do termo biquadrático através de uma transformação gaussiana (2.6).

Deste ponto em diante, vamos trabalhar somente com a parte do hamiltoniano que contém variáveis de spin - o hamiltoniano efetivo de spins. Fazendo a transformação, podemos escrever a função de partição apropriada,

$$\mathcal{Z}_\sigma = \sum_{\{\sigma\}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp \left( -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_i L_{ij} \sigma_j + \beta \sum_i H_i \sigma_i \right) , \quad (2.10)$$

onde  $L_{ij}$  é a matriz de acoplamento, dada por

$$L_{ij} = \beta \left( J_{ij} + \frac{pa_0^{d-1}}{K} j_{ij} \right) + y \sqrt{\frac{\beta}{dNK}} j_{ij} . \quad (2.11)$$

## 2.3 A aproximação de campo médio

A equação (2.10) não pode ser resolvida exatamente, mas se fizermos uma transformação no hamiltoniano efetivo de forma que cada spin possa interagir com todos os spins da rede com a mesma amplitude, a solução será possível. Esta é a aproximação de campo médio de Curie-Weiss. Observemos que a noção da dimensão espacial é perdida devido à aproximação.

A rede originalmente é pensada como um empilhamento de hiperplanos, cujos spins têm acoplamento ferromagnético com spins do mesmo hiperplano  $L_{ij} = L_F$  (onde  $J_{ij} = J_F$ ,  $j_{ij} = j_F$ ) e acoplamento antiferromagnético com spins dos planos adjacentes  $L_{ij} = L_A$  (onde  $J_{ij} = -J_A$ ,  $j_{ij} = -j_A$ ). Para aplicar a transformação de campo médio, podemos considerar a sequência de hiperplanos como  $A, B, A, B, \dots$ , onde cada spin pertencente a um plano do tipo  $A$ , pode interagir com todos os spins de planos  $A$  da rede com interação  $L_F$  e com todos os spins de planos  $B$  com interação  $L_A$ . Identicamente, spins em planos do tipo  $B$ , têm interação  $L_A$  com os de  $A$  e interação  $L_F$  com outros spins de  $B$ . Assim, cada spin terá  $N$  interações no total, de forma que para mantermos finita a energia livre no limite termodinâmico, definimos a interação magnética efetiva de campo médio como  $\overline{L}_{ij} = L_{F,A}/N$ . Note

que, diferentemente do sistema originalmente proposto, o modelo de campo médio de Curie-Weiss não tem diferença no número de interações ferro e antiferromagnéticas. Por fim, além do campo magnético uniforme  $H$ , vamos definir um campo alternado  $H_s$ , que é positivo nos planos  $A$  e negativo nos planos  $B$ . Assim, a função de partição (2.10) fica,

$$\mathcal{Z}_\sigma = \sum_{\{\sigma\}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} + \frac{L_-}{2N} \left( \sum_{i \in A} \sigma_i + \sum_{j \in B} \sigma_j \right)^2 + \beta (H + H_s) \sum_{i \in A} \sigma_i + \frac{L_+}{2N} \left( \sum_{i \in A} \sigma_i - \sum_{j \in B} \sigma_j \right)^2 + \beta (H - H_s) \sum_{j \in B} \sigma_j \right\} , \quad (2.12)$$

onde definimos  $L_\pm = (L_F \pm L_A) / 2$ .

Antes de efetuar a soma sobre as variáveis de spin, vamos usar mais uma vez a transformação gaussiana (2.6) para linearizar as somatórias de spins, o que introduz duas novas variáveis  $x$  e  $w$ . Assim ficaremos com

$$\mathcal{Z}_\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dw \exp [-\Phi(y, x, w, T, p, H, H_s)] , \quad (2.13)$$

onde

$$\Phi = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{w^2}{2} - \frac{N}{2} \ln (2 \cosh Q_+) - \frac{N}{2} \ln (2 \cosh Q_-) \quad (2.14)$$

e

$$Q_\pm = x \sqrt{\frac{L_-}{N}} \pm w \sqrt{\frac{L_+}{N}} + \beta (H \pm H_s) . \quad (2.15)$$

No limite termodinâmico,  $N \rightarrow \infty$ , a principal contribuição para a função de partição advém do máximo muito pronunciado exibido pela função exponencial. Este máximo é definido pelo mínimo de  $\Phi$ ,

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\bar{y}, \bar{x}, \bar{w}} = 0 , \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\bar{y}, \bar{x}, \bar{w}} = 0 , \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right]_{\bar{y}, \bar{x}, \bar{w}} = 0 , \quad (2.16)$$



onde  $(\bar{y}, \bar{x}, \bar{w})$  são as coordenadas deste ponto extremo. Expandindo  $\Phi$  em torno dele e retendo termos até segunda ordem, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\sigma = & \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dw \exp\{-[\bar{\Phi} + \Phi_{\bar{x}\bar{x}}(x - \bar{x})^2 + \Phi_{\bar{y}\bar{y}}(y - \bar{y})^2 + \\ & + \Phi_{\bar{w}\bar{w}}(w - \bar{w})^2 + 2\Phi_{\bar{x}\bar{y}}(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + 2\Phi_{\bar{x}\bar{w}}(x - \bar{x})(w - \bar{w}) + \\ & + 2\Phi_{\bar{y}\bar{w}}(y - \bar{y})(w - \bar{w})]\} \quad , \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde definimos  $\Phi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} \right]_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ . Após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\mathcal{Z}_\sigma = \exp\left(-\bar{\Phi} - \frac{1}{2} \ln D\right) \quad , \quad (2.18)$$

$$D = \pi^{\frac{3}{2}} \left[ \Phi_{\bar{w}} \left( \Phi_{\bar{y}} - \frac{\Phi_{\bar{x}\bar{y}}^2}{\Phi_{\bar{x}}} \right) \left( \Phi_{\bar{x}} - \frac{\Phi_{\bar{x}\bar{w}}^2}{\Phi_{\bar{w}}} \right) - \Phi_{\bar{z}} \left( \Phi_{\bar{x}\bar{y}} - \frac{\Phi_{\bar{x}\bar{w}} \Phi_{\bar{y}\bar{w}}}{\Phi_{\bar{w}}} \right)^2 \right] \quad . \quad (2.19)$$

Pode ser mostrado que  $D$  é positivo, como esperado. A função  $\bar{\Phi}$  é proporcional a  $N$  e  $D$  a  $N^3$ , de forma que no limite termodinâmico, a energia livre de Gibbs normalizada torna-se,

$$g(T, p, H, H_s) = -\frac{1}{N\beta} \ln \mathcal{Z} = \frac{\bar{\Phi}}{N\beta} + \mathcal{H}_0(p) \quad , \quad (2.20)$$

onde  $\mathcal{H}_0(p)$  está definido em (2.8). Este resultado é típico da aproximação de campo médio, cuja energia livre é sempre proporcional ao argumento que maximiza a exponencial da função de partição.

Sendo  $m_A$  e  $m_B$  as magnetizações das subredes  $A$  e  $B$ , vamos definir as magnetizações total e alternada respectivamente por:

$$m = (m_A + m_B)/2 \quad , \quad m_s = (m_A - m_B)/2 \quad . \quad (2.21)$$

O campo magnético aplicado  $H$  é o conjugado de  $m$ , enquanto o campo alternado  $H_s$  é o conjugado de  $m_s$ , que por sua vez é o parâmetro de ordem do sistema. As equações de recorrência de campo médio podem ser obtidas

das relações termodinâmicas,

$$\begin{aligned} m &= \frac{\partial g}{\partial H} = \frac{1}{2} \tanh(Q_+) + \frac{1}{2} \tanh(Q_-) \quad , \\ m_s &= \frac{\partial g}{\partial H_s} = \frac{1}{2} \tanh(Q_+) - \frac{1}{2} \tanh(Q_-) \quad , \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $Q_+$  e  $Q_-$  são definidas em (2.15) (com  $y = \bar{y}$ ,  $x = \bar{x}$  e  $w = \bar{w}$ ).

Finalmente, usando as equações de minimização (2.16), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\sqrt{N\beta}}{2} (j_- m^2 + j_+ m_s^2) \quad , \\ \bar{x} &= \sqrt{N\beta} \left[ J_-(p) + \frac{j_-}{2} (j_- m^2 + j_+ m_s^2) \right] m \quad , \\ \bar{w} &= \sqrt{N\beta} \left[ J_+(p) + \frac{j_+}{2} (j_- m^2 + j_+ m_s^2) \right] m_s \quad , \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde foram usadas as definições,

$$J_{\pm} = \frac{J_F \pm J_A}{2} \quad , \quad j_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{dK}} \frac{j_F \pm j_A}{2} \quad , \quad J_{\pm}(p) = J_{\pm} + \sqrt{\frac{d}{K}} a_0^{d-1} j_{\pm} p \quad . \quad (2.24)$$

Fazendo uso de (2.23) e das definições acima, as relações (2.22) podem ser reescritas na seguinte forma,

$$\begin{aligned} H &= - \left[ J_-(p) + \frac{j_-}{2} (j_- m^2 + j_+ m_s^2) \right] m + \frac{1}{4\beta} \ln \left[ \frac{(1+m)^2 - m_s^2}{(1-m)^2 - m_s^2} \right] \quad , \\ H_s &= - \left[ J_+(p) + \frac{j_+}{2} (j_- m^2 + j_+ m_s^2) \right] m_s + \frac{1}{4\beta} \ln \left[ \frac{(1+m_s)^2 - m^2}{(1-m_s)^2 - m^2} \right] \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

A solução numérica destas equações acopladas minimiza a energia livre, definindo o estado do sistema para cada conjunto de valores  $T$ ,  $H$ ,  $H_s$  e  $p$ . Das equações (2.14) e (2.20) podemos obter a energia livre de Gibbs  $g(T, p, H, H_s)$ ,

$$\begin{aligned} g &= \mathcal{H}_0(p) + \frac{1}{2} J_-(p) m^2 + \frac{1}{2} J_+(p) m_s^2 + \frac{3}{8} (j_- m^2 + j_+ m_s^2)^2 + \quad (2.26) \\ &\quad + \frac{1}{4\beta} \ln [(1+m+m_s)(1+m-m_s)(1-m+m_s)(1-m-m_s)] \quad , \end{aligned}$$

onde  $m(T, p, H, H_s)$  e  $m_s(T, p, H, H_s)$ . Também nos será útil a energia livre de Helmholtz, obtida da anterior através de uma transformação de Legendre,

$$f(T, p, m, m_s) = g(T, p, H, H_s) + Hm + H_s m_s \quad . \quad (2.27)$$

Esta toma a seguinte forma,

$$\begin{aligned} f = & \mathcal{H}_0(p) - \frac{1}{2} J_-(p) m^2 - \frac{1}{2} J_+(p) m_s^2 - \frac{1}{8} (j_- m^2 + j_+ m_s^2)^2 + \\ & + \frac{1}{4\beta} [(1 + m + m_s) \ln(1 + m + m_s) + (1 + m - m_s) \ln(1 + m - m_s) + \\ & + (1 - m + m_s) \ln(1 - m + m_s) + (1 - m - m_s) \ln(1 - m - m_s)] \quad . \end{aligned} \quad (2.28)$$

## 2.4 A expansão de Landau

A expansão de Landau consiste em expandir a energia livre em uma série de potências do parâmetro de ordem, cujos coeficientes dependem somente de variáveis de campo [30]. Primeiramente, vamos fazer uma transformação de Legendre em (2.27), para ter a energia livre como função de  $m_s$ ,

$$\Psi(T, p, H, m_s) = g(T, p, H, H_s) + H_s m_s \quad , \quad (2.29)$$

onde  $m = m(T, p, H, m_s)$ . A expansão toma a forma,

$$\Psi(T, p, H, m_s) = \Psi_0 + \Psi_2 m_s^2 + \Psi_4 m_s^4 + \Psi_6 m_s^6 + O(m_s^8) \quad , \quad (2.30)$$

onde  $\Psi_i(T, H, p)$  é a derivada de ordem  $i$  em relação a  $m_s$ . Como  $\Psi$  é uma função par de  $m_s$ , só as derivadas de ordem par são não nulas. A expansão acima descreve a transição de fase de segunda ordem de uma fase paramagnética,  $m_s = 0$ , para uma fase antiferromagnética,  $m_s \neq 0$ , através da análise dos respectivos coeficientes. A expansão também pode abordar a

transição entre duas fases antiferromagnéticas, quando o parâmetro de ordem de ambas é pequeno, mas neste capítulo nós não estaremos interessados neste tipo de transição de fase.

O caminho mais simples para se calcular os coeficientes da expansão é observando que

$$H_s = \frac{\partial \Psi}{\partial m_s} = 2\Psi_2 m_s + 4\Psi_4 m_s^3 + 6\Psi_6 m_s^5 + O(m_s^7) \quad , \quad (2.31)$$

uma vez que é mais fácil expandir a equação (2.25) que a própria energia livre  $\Psi$ . Uma outra dificuldade é que não conseguimos isolar  $m(T, p, H, H_s)$  em (2.25). Mas no limite de pequenos valores de  $m_s$ , nós podemos escrever uma série de potências que represente  $m$  (função par de  $m_s$ ), da seguinte forma:

$$m(T, p, H, m_s) = \alpha_0 + \alpha_1 m_s^2 + \alpha_2 m_s^4 + \alpha_3 m_s^6 + O(m_s^8) \quad , \quad (2.32)$$

com  $\alpha_i = \alpha_i(T, p, H)$ . Se substituirmos  $m$  na primeira equação de (2.25) pela série acima e expandirmos em torno de  $m_s = 0$ , chegamos a uma expressão na forma:

$$H = \varphi_0 + \varphi_1 m_s^2 + \varphi_2 m_s^4 + \varphi_3 m_s^6 + O(m_s^8) \quad , \quad (2.33)$$

onde os coeficientes  $\varphi_i$  são funções de  $T, p$  e  $H$ . No entanto, tornamos  $T, p, H$  e  $m_s$  as variáveis independentes do problema, portanto, a operação acima não pode introduzir uma relação entre elas, de forma que os coeficientes  $\varphi_i$  devem satisfazer,

$$\varphi_0 = H \quad , \quad \varphi_i = 0 \quad \text{para todo } i \neq 0 \quad , \quad (2.34)$$

o que fornece as relações para o cálculo de  $\alpha_i(T, p, H)$ . Essas relações são mostradas no *Apêndice A*. Finalmente, os próprios coeficientes da expansão de Landau podem ser obtidos, inserindo (2.32) na equação para  $H_s$  (2.25), expandindo e comparando com a expressão (2.31), obtendo-se assim as expressões que fornecem  $\Psi_i$ . Estas também estão escritas no *Apêndice A*.

## 2.5 Acoplamento spin-rede isotrópico

Um caso solúvel que mostra os efeitos da compressibilidade, é aquele onde as constantes de troca ferro e antiferromagnética tem a mesma dependência no volume,  $j_F = j_A$  (i.e.  $j_- = 0$ ). A partir das definições (2.24), vamos definir novas variáveis normalizadas pela pressão,

$$t_p = \frac{k_B T}{J_+(p)} \quad , \quad h_p = \frac{H}{J_+(p)} \quad , \quad \epsilon_p = \frac{J_F + a_0^{d-1} j_{FP}/K}{J_A + a_0^{d-1} j_{AP}/K} \quad , \quad (2.35)$$

onde  $t_p$  e  $h_p$  são a temperatura e o campo reescalados, e  $\epsilon_p$  é o apropriado parâmetro de competição entre as interações ferro e antiferromagnética.

De acordo com a expansão de Landau, a transição contínua ocorre quando  $\Psi_2 = 0$ , definindo a correspondente relação entre  $t_p$ ,  $h_p$  e  $\epsilon_p$  que a caracteriza. Assim a equação (A.9) fornece,

$$[\alpha_0]_c = \sqrt{1 - [t_p]_c} \quad . \quad (2.36)$$

Substituindo em (A.6) obtemos,

$$[h_p]_c = -\frac{\epsilon_p - 1}{\epsilon_p + 1} [\alpha_0]_c + \frac{[t_p]_c}{2} \ln \frac{1 + [\alpha_0]_c}{1 - [\alpha_0]_c} \quad , \quad (2.37)$$

onde o índice  $c$  refere-se à criticalidade. A temperatura de Néel é aquela onde  $h_p = \alpha_{0c} = 0$ , que em nosso caso reduz-se a  $[t_p]_N = 1$ . Com exceção dos campos serem normalizados pela pressão, esta solução é a mesma do modelo rígido [31].

Os limites de validade da relação (2.37) são definidos pelo coeficiente de quarta ordem, (A.10), que pode ser escrito como

$$\frac{\Psi_4}{J_+(p)} = \frac{1}{4t_{pc}^2} \left( \epsilon_p t - \epsilon_p + \frac{1}{3} \right) - \frac{\xi_p}{4} \quad , \quad (2.38)$$

onde  $\xi_p = j_+^2/2J_+(p)$ , é uma medida do acoplamento spin-rede. A linha de transição, (2.37), é estável somente se  $\Psi_4 > 0$ . Quando  $\Psi_4 = 0$  ocorrerá um

ponto tricrítico, que separa as transições de segunda e de primeira ordem. Por sua vez, esse ponto é estável se o coeficiente de sexta ordem da expansão é positivo,  $\Psi_6 > 0$ . No presente caso, o coeficiente  $\Psi_6$  tem a mesma expressão que para o modelo rígido [31] (mas com campos normalizados pela pressão), que é positiva sempre que  $\epsilon_p > 0.6$ . Se  $\Psi_6 < 0$ , caso que não vamos tratar aqui, a linha de transição contínua do diagrama  $h_p \times t_p$ , termina em um ponto crítico terminal. Haverá um ponto tricrítico se  $\Psi_2 = \Psi_4 = 0$  e  $\epsilon_p > 0.6$ . Desta forma a equação (2.38) fornece duas possibilidades,

$$[t_p]_t^\pm = \frac{1}{2\xi_p} \left[ \epsilon_p \pm \sqrt{\epsilon_p^2 - 4\xi_p \left( \epsilon_p - \frac{1}{3} \right)} \right] . \quad (2.39)$$

O comportamento crítico do sistema pode ser sumarizado no diagrama  $\xi_p \times \epsilon_p$ , como mostrado na figura 2.1. O plano é dividido em regiões cujas topologias dos respectivos diagramas de fases são esquematizadas nas inserções. As linhas tracejada ( $\xi_p = \frac{1}{3}$ ) e sólida ( $\xi_p^0 = \frac{\epsilon_p^2}{4(\epsilon_p - \frac{1}{3})}$ ) separam as regiões. Na área (F) o sistema exhibe somente coexistência de fases, uma vez que nesta região  $\Psi_4 < 0$  não havendo solução com  $[t_p]_t^\pm < 1$  ou real. Para todo  $\xi_p < \frac{1}{3}$  (área A) a equação (2.39) fornece  $[t_p]_t^- < 1$  e o sistema exhibe um diagrama de fases típico do modelo metamagnético simples [1], com um ponto tricrítico e uma linha de transição contínua para  $t_p > [t_p]_t^-$  ( $\Psi_4 > 0$ ). A compressibilidade só causa mudança qualitativa no diagrama de fases na pequena região (D) do diagrama  $\xi_p \times \epsilon_p$ , compreendida entre a linha sólida e a linha tracejada. Nesta região a equação (2.39) permite dois pontos tricríticos com  $[t_p]_t^- < [t_p]_t^+ < 1$  e somente entre essas duas temperaturas temos  $\Psi_4 > 0$ , i.e. transição de segunda ordem. Neste caso, para  $t_p > [t_p]_t^+$  a transição é de primeira ordem e não temos mais a temperatura de Néel. Para que isto ocorra,  $\xi_p$  deve ser grande, ou seja, as constantes de troca devem ser suficientemente sensíveis às variações de volume. Quanto maior o valor de  $\xi_p$  dentro

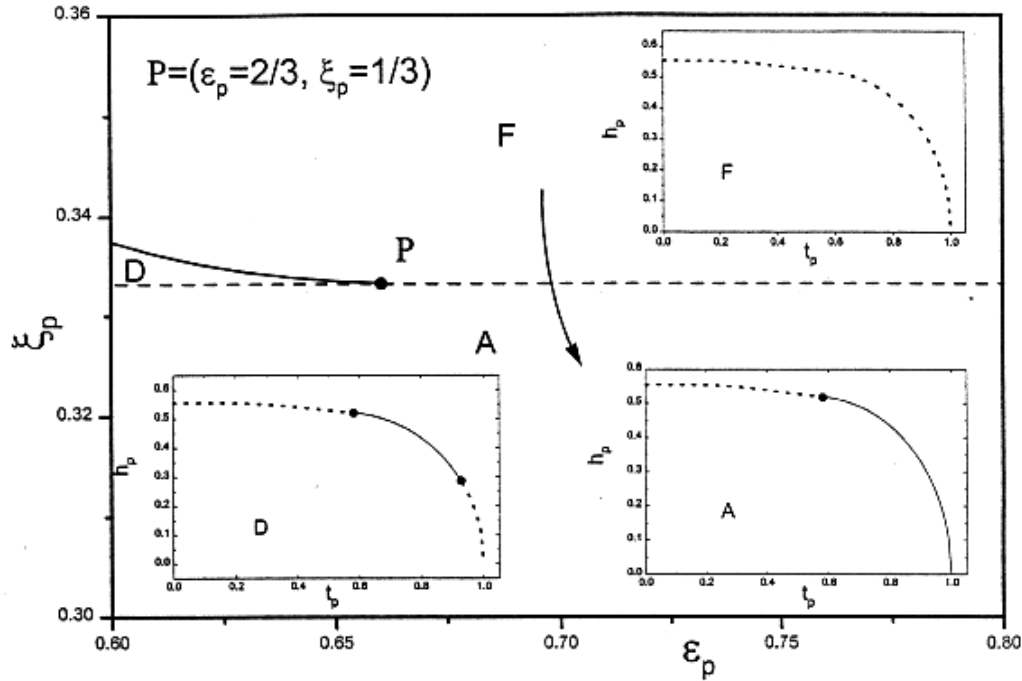


Figura 2.1: Diagrama dos possíveis comportamentos críticos no plano  $\xi_p \times \epsilon_p$ . As inserções representam diagramas de fase típicos das regiões A, D e F. A seta indica o sentido do crescimento da pressão.

da região (D), mais próximas são as temperaturas dos pontos tricríticos, de forma que sobre a linha sólida os dois pontos tricríticos colapsam em um único ponto com  $[t_p]_t^- = [t_p]_t^+$ . Então o correspondente diagrama de fases apresenta um ponto 'tricrítico' isolado sobre uma linha de primeira ordem.

Para ver diretamente o efeito da pressão no diagrama de fases, usando (2.24) vamos introduzir novas variáveis:

$$t = \frac{k_B T}{J_+}, \quad h = \frac{H}{J_+}, \quad \epsilon = \frac{J_F}{J_A},$$

$$g_{\pm} = \frac{j_{\pm}}{\sqrt{2J_+}} \quad , \quad \Pi = \sqrt{\frac{2d}{KJ_+}} a_0^{d-1} p \quad , \quad (2.40)$$

onde  $t$ ,  $h$  e  $\epsilon$  são variáveis reduzidas independentes da pressão e  $\Pi$  é a apropriada variável de pressão. Notemos que no caso isotrópico temos  $g_- = 0$ . Nós queremos relacionar a evolução do comportamento crítico dentro do diagrama  $\xi_p \times \epsilon_p$ , quando variamos a pressão aplicada ao sistema. Para tanto, vamos obter os principais pontos que definem o diagrama de fases em função da pressão.

Em temperatura zero, há uma coexistência entre a fase paramagnética ( $m = 1$ ,  $m_s = 0$ ) e a antiferromagnética ( $m = 0$ ,  $m_s = 1$ ). A energia livre  $\Psi$  das duas fases é igual sobre a linha de coexistência, de forma que (2.29) fornece,

$$h_{t=0} = \frac{1}{\epsilon + 1} + \frac{g_+^2}{4} + \frac{g_+ \Pi_{t=0}}{2} \quad . \quad (2.41)$$

Já no plano  $h = 0$ , se a transição for contínua, a temperatura de Néel exibe uma dependência linear com a pressão, que escrita em termos das novas variáveis fica  $t_N = 1 + g_+ \Pi_N$ . Mas se houver coexistência de uma fase paramagnética com uma fase ordenada, nós precisamos resolver as equações (2.25) para obtermos a respectiva relação entre a temperatura e a pressão. Fazendo  $H = H_s = 0$ , a primeira delas tem como solução  $m = 0$ , enquanto a segunda permite a obtenção da magnetização alternada da fase ordenada,

$$\frac{t_{h=0}}{2} \ln \frac{1 + m_s}{1 - m_s} - \left[ 1 + g_+ \Pi_{h=0} + g_+^2 m_s^2 \right] m_s = 0 \quad . \quad (2.42)$$

Por sua vez, a energia livre deve ser a mesma para as fases coexistentes,  $\Psi(T, p, H = 0, m_s = 0) = \Psi(T, p, H = 0, m_s)$ , o que fornece

$$(1 + g_+ \Pi_{h=0}) m_s^2 + \frac{g_+^2}{2} m_s^4 = t_{h=0} [(1 + m_s) \ln(1 + m_s) + (1 - m_s) \ln(1 - m_s)] \quad . \quad (2.43)$$



Expandindo (2.42) e (2.43) em uma série de potências em torno de  $m_s = 0$ , uma solução aproximada pode ser obtida,

$$1 + g_+ \Pi_{h=0} = t_{h=0} - \frac{5}{48t_{h=0}} \left( 3g_+^2 - t_{h=0} \right)^2, \quad (2.44)$$

definindo a relação entre a pressão e a temperatura a campo nulo, sobre a linha de coexistência da fase paramagnética com uma fase ordenada com pequeno  $m_s$ . Para valores não nulos do campo magnético e da temperatura, a linha de coexistência de fases deve ser encontrada resolvendo simultaneamente as equações (2.25) e verificando qual solução satisfaz  $\Psi(T, p, H, m_s = 0) = \Psi(T, p, H, m_s)$ , mas as relações (2.41) e (2.44) são suficientes para os nossos objetivos.

Na figura 2.2 exibimos os diagramas de fases do sistema para valores representativos da pressão  $\Pi$ . Foram fixados os valores de  $\epsilon = 1$  e de  $g_+ = 0.7$ , o que define uma linha vertical no diagrama  $\xi_p \times \epsilon_p$  (pois  $\epsilon_p = 1$  se  $\epsilon = 1$ ), que atravessa as regiões (A) e (F). Os correspondentes pontos tricríticos são ligados pela linha tracejada  $\gamma$ , que divide o diagrama entre uma região de transições contínuas (à direita) e outra de transições de primeira ordem. No plano  $h = 0$ , a equação (2.44) fornece as coordenadas do ponto tricrítico:  $\Pi^* = (3g_+^2 - 1)/g_+ = 0.6714$  e  $t^* = t_N = 3g_+^2 = 1.47$ . Notando que  $\xi_p = \frac{g_+^2}{1+g_+\Pi}$ , constatamos que o ponto tricrítico em  $h = 0$  é definido por  $\xi_p^* = 1/3$ , e para  $\xi_p < \xi_p^*$  sempre há transição de segunda ordem em  $h = 0$ , segundo o diagrama da figura 2.1. O modelo metamagnético compressível a campo zero apresenta as mesmas características do modelo de Domb: em baixas pressões a transição é de primeira ordem e em pressões altas a transição torna-se contínua, e a temperatura crítica cresce linearmente com a pressão. Um ponto tricrítico ( $t^*$ ,  $\Pi^*$ ) separa os dois regimes. Por fim, o enrijecimento do sistema,  $g_+ \rightarrow 0$ , sempre induz à transição de segunda ordem em  $h = 0$ .

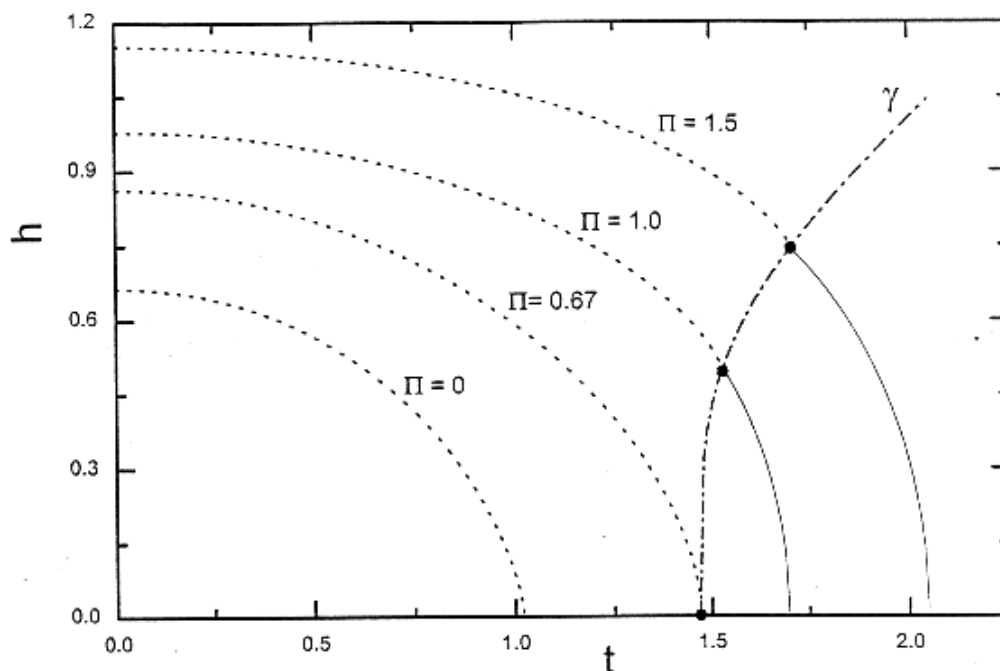


Figura 2.2: Diagramas de fases campo-temperatura para  $\epsilon = 1$  e  $g_+ = 0.7$  para quatro valores da pressão. A linha dos pontos tricríticos é identificada pela letra  $\gamma$ . Na pressão  $\Pi = 0.6714$  o ponto tricrítico coincide com a temperatura de Néel. Para  $h = 0$  o sistema comporta-se como o modelo de Domb.

## 2.6 Caso anisotrópico no limite de baixa compressibilidade

### 2.6.1 Diagrama de Fases

Vamos considerar agora o caso em que ambos  $g_-$  e  $g_+$  são diferentes de zero, mas no limite de baixa compressibilidade. Neste caso, somente o comportamento tricrítico é possível. Isto pode ser compreendido do diagrama da

figura 2.1 (que é um caso particular em relação ao caso anisotrópico), que mostra que outros comportamentos só são possíveis se o sistema é suficientemente sensível às variações de volume. Fazendo  $\Psi_2 = 0$  em (A.9) e usando as variáveis definidas em (2.40), podemos escrever

$$g_-g_+\alpha_{0c}^4 + (1 + g_+\Pi - g_-g_+)\alpha_{0c}^2 - 1 - g_+\Pi + t_c = 0 \quad , \quad (2.45)$$

onde o índice  $c$  se refere à linha crítica. Quando da transformação do ensemble canônico para o ensemble das pressões, nós expandimos o volume do sistema em torno de  $Na_0^d$  sob o argumento de que a constante elástica  $K$  fosse grande, e que, portanto, o sistema se deforma pouco. Na equação acima, termos que contém  $g_{\pm}^2$  e  $g_+\Pi$  são da ordem de  $K^{-1}$ . Assim teremos  $\xi_p = \frac{g_+^2}{1+g_+\Pi} \simeq g_+^2 < \frac{1}{3}$ , confirmando que as soluções neste caso estão na região A da figura 2.1. Assim, vamos resolver a equação acima para  $\alpha_{0c}$  e expandir o resultado mantendo somente os termos de primeira ordem em  $K^{-1}$ , obtendo,

$$\alpha_{0c} = \sqrt{1 - (1 - g_-g_+ - g_+\Pi)t_c - g_-g_+t_c^2} \quad . \quad (2.46)$$

Se esta última equação for substituída em (A.6), equação que define a superfície crítica no espaço  $(h, t, \Pi)$ , encontramos

$$h_c = - \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} + g_-\Pi \right) \alpha_{0c} - g_-\alpha_{0c}^3 + \frac{t_c}{2} \ln \frac{1 + \alpha_{0c}}{1 - \alpha_{0c}} \quad . \quad (2.47)$$

Fixando um valor para a pressão, teremos no diagrama  $(h, t)$  uma linha de pontos críticos, que tem como limites a temperatura de Néel e o ponto tricrítico. No diagrama  $(h, t, \Pi)$  passamos a ter uma ‘linha de temperaturas de Néel’ e uma ‘linha de pontos tricríticos’, como limitantes da superfície crítica.

Para obtermos as coordenadas do ponto tricrítico devemos resolver a equação  $\Psi_4 = 0$ , dada por (A.10), que fica

$$2 \left[ -g_-g_+ + \frac{t_t}{(1 - \alpha_{0t}^2)^2} \right] \alpha_{0t} \alpha_{1t} = g_+^2 - \frac{t_t}{3} \frac{1 + 3\alpha_{0t}^2}{(1 - \alpha_{0t}^2)^3} \quad , \quad (2.48)$$

onde o índice  $t$  indica o ponto tricrítico. Para calcular  $\alpha_{1t}$  recorreremos à equação (A.7), fornecendo

$$\alpha_{1t} = \left[ g_- g_+ - \frac{t_t}{(1 - \alpha_{0t}^2)^2} \right] \alpha_{0t} \left[ \frac{t_t}{(1 - \alpha_{0t}^2)} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} - g_- \Pi - 3g_-^2 \alpha_{0t}^2 \right]^{-1}. \quad (2.49)$$

Substituindo a expressão anterior e a equação (2.46) em (2.48), e expandindo até primeira ordem em  $g_{\pm}^2$  e  $g_{\pm}\Pi$ , após algumas manipulações algébricas finalmente obtemos

$$t_t = \left( 1 - \frac{1}{3\epsilon} \right) \left\{ 1 + \left[ \frac{5\epsilon^2 - 2\epsilon + 1}{2\epsilon(3\epsilon - 1)} g_+ + \frac{(\epsilon + 1)^2}{2\epsilon(3\epsilon - 1)} g_- \right] \Pi + \right. \\ \left. + \frac{21\epsilon^3 + 7\epsilon^2 + 17\epsilon + 5}{6\epsilon^2(3\epsilon - 1)} g_- g_+ + \frac{(\epsilon + 1)^2}{2\epsilon^2(3\epsilon - 1)} g_-^2 + \frac{(3\epsilon - 1)}{3\epsilon^2} g_+^2 \right\}. \quad (2.50)$$

O campo tricrítico pode ser calculado substituindo-se  $t_t$  na equação (2.47). Para reduzirmos a temperatura do ponto tricrítico (2.50) e a equação da linha crítica (2.47) àquelas do modelo rígido, fazemos  $g_- = g_+ = 0$ .

Para temperaturas  $t < t_t$  a transição é de primeira ordem e as fases paramagnética e antiferromagnética coexistem, sendo que a linha de transição no diagrama  $h \times t$  só pode ser obtida numericamente. Em  $t = 0$ , a entropia é nula e fica trivial obter o campo de coexistência. Como a energia livre é a mesma para as duas fases que coexistem,  $\Psi_{AF} = \Psi_P$ , usando a equação (2.28) obtemos,

$$h_{t=0} = \frac{1}{\epsilon + 1} + \frac{g_+ - g_-}{2} \Pi + \frac{g_+^2 - g_-^2}{4}. \quad (2.51)$$

Usando as definições (2.24) e (2.40) verificamos que  $\frac{g_+ - g_-}{2} = \frac{j_A}{\sqrt{2dKJ_+}}$ , portanto o campo  $h_{t=0}$  varia com a pressão  $\Pi$  de acordo com o sinal de  $j_A$ . Com base em trabalhos experimentais realizados com os materiais metamagnéticos  $FeCl_2$  (fases I e II) e  $Ni(NO_3)_2 \cdot 2H_2O$  [25-28], verifica-se o crescimento do campo  $h_0$  com o aumento da pressão, indicando que, para estes compostos,  $j_A$  é positivo.

A temperatura de Néel é facilmente obtida observando-se que se  $h_c = 0$  (2.47), a única solução é  $\alpha_{0c} = 0$ , que levada à equação (2.45), fornece,

$$t_N = 1 + g_+ \Pi_N \quad , \quad (2.52)$$

que tem a mesma forma do caso isotrópico anteriormente estudado. Comparando-se com os dados experimentais, os materiais metamagnéticos  $FeCl_2$  e  $Ni(NO_3)_2 \cdot 2H_2O$ , apresentam crescimento da temperatura de Néel com o aumento da pressão, indicando que para estes materiais,  $g_+$  é positivo.

Consideremos agora a variação da temperatura e do campo com a pressão no ponto tricrítico. Primeiramente, derivemos a equação (2.50) com relação a pressão,

$$\frac{dt_t}{d\Pi} = \left(1 - \frac{1}{3\epsilon}\right) \left[ \frac{5\epsilon^2 - 2\epsilon + 1}{2\epsilon(3\epsilon - 1)} g_+ + \frac{(\epsilon + 1)^2}{2\epsilon(3\epsilon - 1)} g_- \right] \quad . \quad (2.53)$$

No mesmo espírito que definimos  $\epsilon$  (2.40), vamos definir o parâmetro  $\mu = j_F/j_A$ , para reescrevermos a equação anterior,

$$\frac{dt_t}{d\Pi} = \frac{g_+ - g_-}{6\epsilon^2} \left[ (3\epsilon^2 + 1) \mu + 2\epsilon(\epsilon - 1) \right] \quad . \quad (2.54)$$

Assim, a temperatura do ponto tricrítico pode aumentar ou diminuir com o crescimento da pressão, sendo que

$$\left( \frac{dt_t}{d\Pi} \right)_{\mu^t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu^t = \frac{2\epsilon(1 - \epsilon)}{3\epsilon^2 + 1} \quad . \quad (2.55)$$

Como  $g_+ - g_- = 2j_A/\sqrt{2dKJ_+}$ , então,  $\frac{dt_t}{d\Pi}/j_A > (<) 0$  se  $\mu > (<) \mu^t$  (ver figura 2.3).

Consideremos agora o campo tricrítico, obtido pela substituição da equação (2.50) na (2.47). Derivando em relação à pressão teremos,

$$\frac{dh_t}{d\Pi} = -g_- \alpha_{0t} + \frac{1}{2} \frac{dt_t}{d\Pi} \ln \frac{1 + \alpha_{0t}}{1 - \alpha_{0t}} - \left[ \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} + g_- \Pi + 3g_-^2 \alpha_{0t}^2 - \frac{t_t}{1 - \alpha_{0t}^2} \right] \frac{d\alpha_{0t}}{d\Pi} \quad , \quad (2.56)$$

onde  $\alpha_0$  está definido em (2.46). Sendo  $K^{-1/2}$  a ordem dos termos da derivada acima, podemos obter uma expressão mais simples expandindo-a em uma série de potências e desprezando termos de ordem maior que  $K^{-1/2}$ , ficando,

$$\frac{dh_t}{d\Pi} = \frac{g_+ - g_-}{2} \left[ \frac{3\epsilon^2 + 1}{6\epsilon^2} \ln \frac{\sqrt{3\epsilon} + 1}{\sqrt{3\epsilon} - 1} - \frac{\epsilon + 1}{\epsilon\sqrt{3\epsilon}} \right] \mu + \frac{\epsilon - 1}{3\epsilon} \ln \frac{\sqrt{3\epsilon} + 1}{\sqrt{3\epsilon} - 1} + \frac{2}{\sqrt{3\epsilon}} \quad (2.57)$$

A derivada se anula para

$$\mu^h = 2\epsilon \frac{2\sqrt{3\epsilon} + (\epsilon - 1) \ln \frac{\sqrt{3\epsilon} + 1}{\sqrt{3\epsilon} - 1}}{2(\epsilon + 1)\sqrt{3\epsilon} - (3\epsilon^2 + 1) \ln \frac{\sqrt{3\epsilon} + 1}{\sqrt{3\epsilon} - 1}} \quad (2.58)$$

Neste caso, se  $\mu > \mu^h$ ,  $\frac{dh_t}{d\Pi}/j_A < 0$  e para  $\mu < \mu^h$ ,  $\frac{dh_t}{d\Pi}/j_A > 0$ .

O campo de coexistência de fases na temperatura zero (2.51) e a temperatura de Néel (2.52) variam linearmente com a pressão com coeficientes angulares proporcionais a  $j_A$  e  $g_+$  respectivamente. Como a superfície de transição é única, as linhas  $(h, t)$  não se cruzam, mas somente se afastam ( $j_A, g_+ > 0$ ) ou se aproximam ( $j_A, g_+ < 0$ ) da origem com o aumento da pressão. Independentemente disso, o ponto tricrítico sofre um deslocamento com a pressão segundo as equações equações (2.54) e (2.57). Na figura 2.3 sintetizamos em um diagrama  $(\mu, \epsilon)$  os três possíveis tipos de deslocamento do ponto tricrítico com o aumento da pressão, para um sistema em que  $j_A, g_+ > 0$ . Para tanto, plotamos as curvas de  $\mu^t$  e  $\mu^h$  em função de  $\epsilon$ , dividindo o diagrama em regiões, onde cada particular deslocamento é indicado nas inserções. As curvas têm início em  $\epsilon = 0.6$ , que assegura que  $\Psi_6 > 0$  e a estabilidade do ponto tricrítico está garantida. No caso do composto metamagnético  $FeCl_2$ , a fase romboédrica que ocorre em baixas pressões  $(FeCl_2)_I$  é um exemplo onde  $\frac{dt_t}{d\Pi} < 0$  e  $\frac{dh_t}{d\Pi} > 0$  (a); por sua vez a fase hexagonal que ocorre em pressões mais altas,  $(FeCl_2)_{II}$ , apresenta  $\frac{dt_t}{d\Pi}, \frac{dh_t}{d\Pi} > 0$  (b); já para o composto  $Ni(NO_3) \cdot 2H_2O$ , temos  $\frac{dt_t}{d\Pi} > 0$  e  $\frac{dh_t}{d\Pi} < 0$  (c).

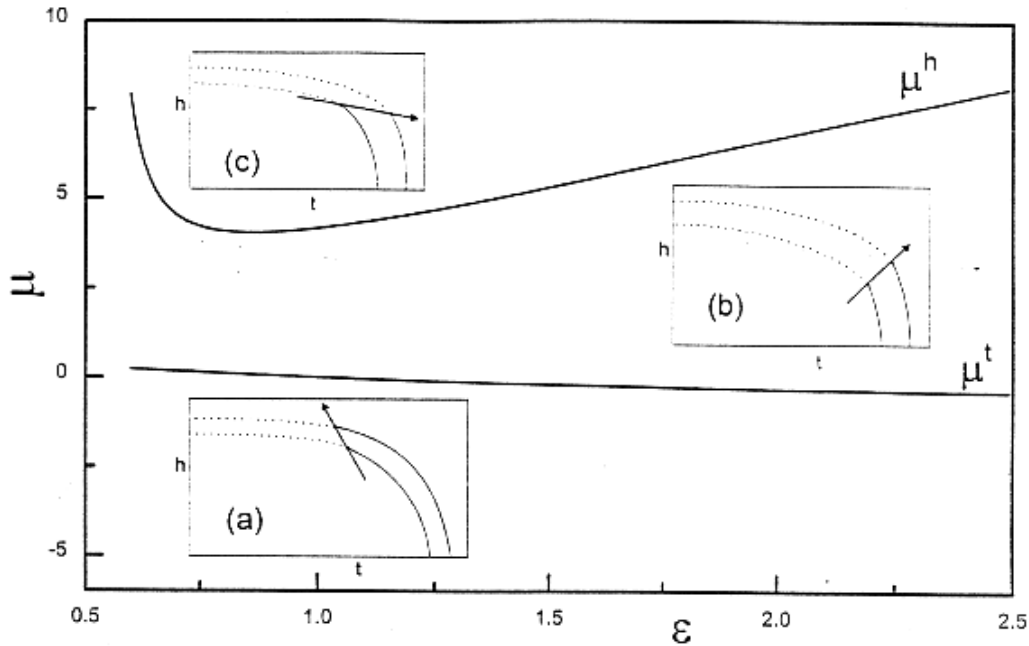


Figura 2.3: Tipos de deslocamentos possíveis do ponto tricrítico em função da variação da pressão, para  $j_A$  e  $g_+$  positivos. As setas indicam o sentido do crescimento da pressão.

### 2.6.2 Comparação com dados experimentais

Na tabela abaixo apresentamos alguns dados que foram obtidos de trabalhos experimentais e que serão usados na comparação.

	$T_N$	$T_t$	$\frac{10^2}{H_0} \frac{dH_0}{dp}$	$\frac{10^2}{T_N} \frac{dT_N}{dp}$	$\frac{10^2}{T_t} \frac{dT_t}{dp}$	$\frac{10^2}{H_t} \frac{dH_t}{dp}$
$FeBr_2$	14.10	4.60	5.90	5.80	4.00	5.80
$(FeCl_2)_I$	22.90	20.30	7.00	1.10	-2.50	14.30
$(FeCl_2)_{II}$	24.75	21.15	7.30	2.75	2.10	8.80
$Ni(NO_3)_2 \cdot 2H_2O$	4.20	3.97	2.27	0.48	1.06	2.28

As temperaturas são dadas em Kelvin e as pressões em Kbar. Os dados para o  $FeBr_2$  e o  $FeCl_2$  são simplesmente transcritos dos originais [25, 26], mas os dados relativos ao  $Ni(NO_3).2H_2O$  [27, 28] foram calculados a partir dos dados apresentados nos trabalhos. O  $FeCl_2$  possui duas diferentes fases cristalinas: a fase I (estrutura romboédrica) ocorre em baixas pressões e, em aproximadamente  $2\text{ Kbar}$ , ocorre uma transição de fase estrutural, passando à fase II, cuja estrutura é hexagonal. Portanto, os dados para a fase II em pressão zero, são extrapolados.

Pela nossa análise, o deslocamento do ponto tricrítico com a pressão depende basicamente de  $\epsilon$  e  $\mu$ . A comparação da teoria com a experiência será feita calculando-se  $\epsilon$  e  $\mu$  a partir dos dados experimentais, para então calcularmos o deslocamento do ponto tricrítico previsto pela teoria e compararmos com o respectivo deslocamento experimental. Usando as equações (2.50) e (2.52), e desprezando o efeito da compressibilidade, podemos escrever que

$$\frac{t_t}{t_N} = \frac{T_t}{T_N} \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{1}{3\left(1 - \frac{T_t}{T_N}\right)} \quad , \quad (2.59)$$

onde  $T_t$  e  $T_N$  podem ser lidos na tabela 2.1. Para calcular  $\mu$ , recorreremos às expressões (2.51) e (2.52), mostrando que  $\mu$  pode ser expresso em termos das quantidades tabeladas por

$$\mu = \frac{\frac{1}{T_N} \frac{dT_N}{dp}}{\frac{1}{H_0} \frac{dH_0}{dp}} (\epsilon + 1) - 1 \quad . \quad (2.60)$$

Agora o deslocamento do ponto tricrítico pode ser estimado pelas equações (2.53) e (2.57), mas ao invés de compararmos diretamente estas quantidades com os dados experimentais, vamos definir as quantidades  $R_t$  e  $R_h$  para fazer a comparação. Estas são

$$R_t = \frac{\frac{1}{T_T} \frac{dT_T}{dp}}{\frac{1}{T_N} \frac{dT_N}{dp}} = \frac{(3\epsilon^2 + 1)\mu + 2\epsilon(\epsilon - 1)}{\epsilon(3\epsilon - 1)(\mu + 1)} \quad (2.61)$$



e

$$R_h = \frac{\frac{1}{h_T} \frac{dh_T}{dp}}{\frac{1}{h_0} \frac{dh_0}{dp}} = \frac{\left[ (3\epsilon^2 + 1) \ln \frac{\sqrt{3\epsilon+1}}{\sqrt{3\epsilon-1}} - 2\sqrt{3\epsilon}(\epsilon + 1) \right] \mu + 4\epsilon\sqrt{3\epsilon} + (2\epsilon^2 - \epsilon) \ln \frac{\sqrt{3\epsilon+1}}{\sqrt{3\epsilon-1}}}{\epsilon(\epsilon + 1)(3\epsilon - 1) \ln \frac{\sqrt{3\epsilon+1}}{\sqrt{3\epsilon-1}} - 2\epsilon(\epsilon - 1)\sqrt{3\epsilon}}. \quad (2.62)$$

Os resultados são mostrados na tabela abaixo, onde os valores entre parênteses são os experimentais:

	$\epsilon$	$\mu$	$R_t$	$R_h$
<i>FeBr</i> <sub>2</sub>	0.49	0.46	0.89 (0.69)	0.99 (0.98)
( <i>FeCl</i> <sub>2</sub> ) <sub>I</sub>	2.94	-0.38	0.08 (-2.27)	1.51 (2.04)
( <i>FeCl</i> <sub>2</sub> ) <sub>II</sub>	2.29	0.24	0.59 (0.76)	1.39 (1.21)
<i>Ni(NO</i> <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> .2 <i>H</i> <sub>2</sub> <i>O</i>	6.09	0.49	1.92 (2.22)	1.44 (1.00)

Quanto aos resultados, para o *FeBr*<sub>2</sub>, verificamos que  $\epsilon < 0.6$ , o que implica em não ocorrência de ponto tricrítico segundo a aproximação de campo médio. Talvez o ponto que liga as linhas de primeira e segunda ordem, no diagrama de fases experimental do *FeBr*<sub>2</sub> seja realmente um ponto crítico terminal. Para reforçar esta hipótese, no trabalho de Vettier [26], especula-se que o diagrama de fases apresenta uma mudança de inclinação das linhas de primeira e segunda ordem no ponto de encontro entre elas (num ponto tricrítico as inclinações são iguais [38]). Entretanto, os valores teórico e experimental de  $R_t$  e  $R_h$  parecem coerentes. No geral, a concordância entre valores experimentais e teóricos é apenas razoável, mas lembremos que estamos considerando um cálculo de campo médio onde assumimos artificialmente pequeno o efeito da compressibilidade, além dos erros experimentais contidos nos dados.

# Capítulo 3

## O grupo de renormalização

### 3.1 Introdução

A grande maioria dos métodos da física teórica aplicam-se a problemas com um único grau de liberdade, embora grande parte dos problemas físicos do cotidiano são relativos a sistemas compostos de um número da ordem de  $10^{23}$  partículas. O grupo de renormalização, desenvolvido por K.G. Wilson [32], é um método de abordagem a problemas físicos que envolvem muitos graus de liberdade.

Primeiramente, devemos fazer a distinção entre aqueles problemas que podem ser tratados levando-se em conta apenas alguns graus de liberdade, daqueles cujo comportamento só pode ser entendido considerando o comportamento coletivo das partículas componentes. É fato que, por exemplo, um gás composto de um grande número de partículas, sob as mesmas condições de temperatura e pressão, apresenta as mesmas propriedades intensivas de um pequeno volume contendo, por exemplo, 1000 partículas. O menor número de partículas que assume o comportamento coletivo do sistema, só depende do comprimento de correlação  $\xi$ , que é, por sua vez, função do estado do sis-

tema. Um caso extremo é o gás ideal, para o qual  $\xi = 0$ , em qualquer estado. Quando  $\xi$  é da ordem de alguns poucos espaçamentos atômicos, há métodos como as expansões perturbativas, que representam boas aproximações. Mas quando  $\xi$  é muitas vezes maior que o espaçamento atômico, que é o caso quando o sistema se encontra próximo de uma transição de fase de segunda ordem, o grupo de renormalização encontra sua área de aplicação.

O modelo de Ising pode ser usado para descrevermos os principais passos da técnica. Seu hamiltoniano  $\mathcal{H}_0$  é escrito em termos da interação entre spins primeiros vizinhos sobre toda a rede. Podemos imaginar uma nova rede, composta de grupos de spins aglutinados segundo a simetria da rede original e que mantenha a forma da mesma. Uma transformação em  $\mathcal{H}_0$  deve ser feita para escrevê-lo em termos das novas variáveis. Denominando-o  $\mathcal{H}_1$ , este representa as interações entre os grupos de spin e que supomos guardar uma singular semelhança com o original. Matematicamente, as interações que ocorrem em  $\mathcal{H}_0$  são transformadas nas interações efetivas que compõem  $\mathcal{H}_1$ , pela transformação  $\mathcal{H}_1 = \Xi(\mathcal{H}_0)$ . O processo pode ser repetido um número indefinido de vezes, tal que num ‘passo’ qualquer,  $\mathcal{H}' = \Xi(\mathcal{H})$ . Se o modelo apresentar um ponto fixo não trivial  $\mathcal{H}^*$ , teremos  $\mathcal{H}^* = \Xi(\mathcal{H}^*)$  ao final de um grande número de iterações. A ocorrência de tal ponto só é possível na condição de criticalidade,  $\xi \rightarrow \infty$ , onde o sistema apresenta invariância por escala. A caracterização do estado crítico é feita a partir da solução do sistema de equações  $\mathcal{H}^* = \Xi(\mathcal{H}^*)$ . Normalmente há mais de um ponto fixo,  $\mathcal{H}_A^*$ ,  $\mathcal{H}_B^*$ , etc, que representam cada condição crítica, e que dividem o espaço de parâmetros em domínios de atração. O hamiltoniano de partida,  $\mathcal{H}_0$ , é representado por um ponto neste espaço e com as transformações  $\Xi(\mathcal{H})$  é ‘atraído’ para o respectivo ponto fixo da ‘bacia de atração’. O fato de não haver um diferente estado crítico  $\mathcal{H}^*$  para cada  $\mathcal{H}_0$ , indica que os detalhes

do hamiltoniano não são importantes na criticalidade, mas somente características mais fundamentais como a natureza das interações, as dimensões do sistema e do parâmetro de ordem. Daí advêm a noção de universalidade, que se deve ao comportamento coletivo das partes que compõem o sistema, lançando luzes sobre o fato de sistemas tão distintos quanto um material magnético e um sistema de partículas em um gás, poderem apresentar semelhantes comportamentos críticos.

O grupo de renormalização envolve algumas dificuldades técnicas, uma delas relativa à dimensão espacial do modelo sob estudo. Uma expansão de Landau representa fisicamente um sistema cujas flutuações não são importantes para o comportamento crítico. Mostra-se que isto ocorre se a dimensão espacial do sistema está acima da dimensão crítica superior, que para o modelo de Ising é  $d_{cs} = 4$ . A solução das equações de recorrência do grupo de renormalização passa por uma expansão em  $\epsilon = 4 - d$ , onde  $d$  é a dimensão do modelo, tendo portanto, validade limitada a  $d \lesssim 4$ . Chegam a ser surpreendentes os resultados obtidos para os expoentes críticos de modelos com  $d = 3$ , por serem tão próximos daqueles medidos experimentalmente.

O modelo metamagnético foi estudado sob o grupo de renormalização [9], mostrando o mesmo comportamento geral apresentado pelo modelo num cálculo de campo médio. Para pequenos valores do campo externo, as iterações levam a um ponto fixo com os mesmos expoentes críticos do modelo de Ising (em ordem  $\epsilon$ ). Para um certo valor máximo do campo, um diferente ponto fixo é acessado, e para valores superiores do campo, não há acesso a nenhum dos pontos fixos, indicando uma transição de primeira ordem. Este ponto é identificado com o ponto tricrítico do modelo metamagnético, cujos expoentes em ordem  $\epsilon$  são tipicamente clássicos. Há um considerável interesse nos expoentes críticos e multicríticos. Investigações anteriores em modelos

cujas variáveis de spin têm uma componente ( $n = 1$ ) [33][34], mostram que os expoentes tricríticos são clássicos em  $d = 3$ , exceto por correções logarítmicas. Por outro lado, modelos estudados com  $n = 2$  [35], exibem comportamento tricrítico não clássico para  $d < 4$ .

O fato de haver acoplamento magneto-elástico em certos sistemas magnéticos pode mudar a ordem da transição de fase magnética [15]. O modelo de Domb quando analisado sob a ótica do grupo de renormalização [19], confirma tais previsões: enquanto cálculos de campo médio apontam para uma transição de primeira ordem em pressões baixas e uma transição contínua em pressões altas, separadas por um ponto tricrítico, o grupo de renormalização não permite transição de segunda ordem. A análise do diagrama de fluxos mostra que nenhum ponto fixo não trivial poder ser acessado a partir do hamiltoniano inicial, a menos que o termo biquadrático tenha o seu sinal invertido, o que torna o modelo sem interpretação física.

O estudo da compressibilidade nos modelos ferromagnéticos com cisalhamento não nulo tem mostrado que se o expoente crítico  $\alpha$  do calor específico do modelo rígido for positivo (divergente), então o respectivo modelo compressível exhibe somente transição de primeira ordem. Se  $\alpha$  for negativo, o sistema compressível continua a ter transição de segunda ordem, com expoentes críticos do modelo rígido [19][22]. Estudos teóricos e experimentais também mostram que o expoente  $\alpha$  é geralmente positivo para sistemas com parâmetro de ordem escalar ( $n = 1$ ) e negativo para  $n \geq 2$ . Assim, o modelo de Ising ( $n = 1$ ) muda a ordem da transição se há acoplamento spin-rede, enquanto modelos como  $XY$  ou de Heisenberg, continuam a exhibir uma transição contínua apesar da compressibilidade. O modelo metamagnético compressível, alvo de estudo neste trabalho, apresenta um comportamento crítico bastante rico sob uma análise de campo médio, e há interesse em saber

se este comportamento é parcialmente preservado ou não sob um cálculo de grupo de renormalização. Com esta técnica, o hamiltoniano do modelo metamagnético rígido, como veremos, conta com duas variáveis de spin independentes (como nos modelos com  $n = 2$ ), mas as transformações do grupo de renormalização permitem escrever um hamiltoniano renormalizado com uma só variável de spin. Tornando-se agora o modelo compressível, será que ele se comporta como se tivesse uma ou duas variáveis de spin, para efeito da aplicação da regra estabelecida anteriormente? O estudo do modelo sob o grupo de renormalização, como realizado neste capítulo, visa esclarecer se existe transição contínua, e se for este o caso, classificar o comportamento crítico em geral.

## 3.2 O hamiltoniano do modelo

Seja o hamiltoniano do modelo metamagnético compressível (2.1), introduzido no *Capítulo 2*. Naquele ponto, foi feita a transformação para o ensemble das pressões e uma transformação gaussiana, obtendo-se a função de partição desejada. A parte da mesma que contém as variáveis de spin está na equação (2.10), cuja constante de troca efetiva é dada em (2.11).

O hamiltoniano alvo das transformações do grupo de renormalização precisa ser escrito em termos de variáveis contínuas que façam o papel das variáveis discretas de spin. Isto é feito através de uma transformação gaussiana mais geral, conhecida como transformação de Hubbard-Stratonovitch [36]:

$$\exp \left( \frac{1}{2} \sum_{ij} \sigma_i L_{ij} \sigma_j \right) = cte \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ij} x_i L_{ij}^{-1} x_j + \sum_i x_i \sigma_i \right] \quad . \quad (3.1)$$

Aplicando a transformação em (2.10) e fazendo a soma sobre  $\sigma_i$ , obtemos,

$$\mathcal{Z}_{ef} = cte \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i L_{ij}^{-1} x_j + \sum_i \ln [2 \cosh (x_i + \beta H_i)] \right\}, \quad (3.2)$$

onde o argumento da exponencial é o hamiltoniano efetivo do modelo. Doravante vamos nos referir aos  $x_i$  como variáveis de spin.

A passagem para o ensemble das pressões, feita no *Capítulo 2*, envolveu uma integração sobre as flutuações do volume ( $a - a_0$ ), mas a estrutura da rede não mudou. Como a constante elástica é grande, as flutuações de posição são pequenas em relação à constante de rede. Toda informação sobre a topologia da rede permanece contida em  $L_{ij}$ , cujos índices representam os vetores posição  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_j$  dos sítios da rede, medidos num referencial que acompanha as suas deformações. As componentes de  $\vec{r}$  têm como unidade o parâmetro de rede  $a$ , que desta forma continua a ocorrer indiretamente no hamiltoniano através da constante de troca, apesar da integração mencionada.

A inversão de  $L_{ij}$  é difícil no espaço real, pois a matriz é não diagonal. No entanto, se o hamiltoniano for escrito no espaço recíproco, a matriz de acoplamento será diagonal, o que torna a inversão trivial. Inicialmente, devemos notar que os elementos de  $L_{ij}$  só dependem das posições relativas entre spins  $\vec{\Delta}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ , permitindo que seja definida a transformada de Fourier de  $L_{ij}$  como,

$$\tilde{L}(\vec{q}) = \sum_{\vec{\Delta}_{ij}} L_{ij} \exp \left( -i \vec{q} \cdot \vec{\Delta}_{ij} \right) \quad . \quad (3.3)$$

As componentes do vetor  $\vec{q}$  são dadas por  $q_\nu = 2\pi n_\nu / n$ , em que  $n$  é o número de sítios da rede em cada dimensão e  $n_\nu$  é um número inteiro que varia entre 0 e  $n$ , dentro da primeira zona de Brillouin. Notemos que  $n^d = N$ . Nesta notação, omitimos a unidade de comprimento, que é o parâmetro de

rede  $a$ , mas fica implícito que  $n$  está em unidades de  $a$ , e  $q_\nu$  tem unidade de  $a^{-1}$ , assim como os vetores posição  $\vec{r}_i$  têm unidades de  $a$ . Alternativamente, podemos fazer  $a = 1$ .

O sistema metamagnético por nós considerado é composto por hiperplanos ferromagnéticos de dimensão  $d-1$  que se comunicam antiferromagneticamente na direção  $\vec{1}$ . Como exposto no *Capítulo 2*, os elementos  $L_{ij}$  da matriz de acoplamento serão dados por  $L_{ij} = L_F$  se  $i, j$  são primeiros vizinhos no mesmo hiperplano,  $\vec{\Delta}_{ij} = \pm \vec{v}$  com  $|\vec{v}| = 1$  e  $\vec{v} \neq \vec{1}$ , e  $L_{ij} = -L_A$  se são primeiros vizinhos em hiperplanos diferentes,  $\vec{\Delta}_{ij} = \pm \vec{1}$ . Para  $|\vec{\Delta}_{ij}| \neq 1$ ,  $L_{ij} = 0$ . Usando (3.3), podemos obter a matriz de interações no espaço de momentos,

$$\tilde{L}(\vec{q}) = 2L_F \sum_{\nu=2}^d \cos q_\nu - 2L_A \cos q_1 \quad . \quad (3.4)$$

Como  $\tilde{L}(\vec{q})$  é diagonal, podemos escrever  $\tilde{L}^\omega(\vec{q}) = [\tilde{L}(\vec{q})]^\omega$ , onde  $\omega$  é um número qualquer. Fazendo a transformada inversa de (3.3), podemos escrever em geral,

$$L_{ij}^\omega = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} [\tilde{L}(\vec{q})]^\omega \exp(i\vec{q} \cdot \vec{\Delta}_{ij}) \quad . \quad (3.5)$$

### 3.3 Aproximação de campo médio

O grupo de renormalização visa incluir o efeito das flutuações na análise do comportamento do sistema na criticalidade. Uma forma de fazê-lo é expandir o hamiltoniano do sistema em torno das variáveis de campo médio, no espaço de momentos. Para que possamos calcular as transformadas de Fourier, devemos definir a função delta de Dirac, representada aqui por,

$$\delta(\vec{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{r}} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \quad . \quad (3.6)$$



Vamos abordar agora uma sutileza no tratamento matemático do sistema metamagnético. O modelo conta com duas subredes e duas constantes de interação, por isso as transformadas de Fourier envolverão somas parciais sobre a rede, a saber, sobre os planos 'A' ou 'B'. Lembremos que a soma de uma série geométrica é dada por,

$$\sum_{i=0}^{l-1} b^i = \frac{1-b^l}{1-b} \quad . \quad (3.7)$$

Consideremos a direção  $\vec{1}$ , que é perpendicular aos hiperplanos. Sobre este eixo, pontos sobre os hiperplanos 'A' são dados por  $r_1^A = 2j$  e sobre 'B' por  $r_1^B = (2j+1)$ , onde  $j = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}-1$ , para um número  $n$  de hiperplanos. Por exemplo, uma soma parcial sobre 'A' na direção considerada, fica,

$$\sum_{r_1^A} \exp(i q_1 r_1) = \frac{1 - \exp(i 2\pi n_1)}{1 - \exp \frac{4\pi n_1}{n}} = \frac{n}{2} [\delta(q_1) + \delta(q_1 - \pi)] \quad , \quad (3.8)$$

lembrando que  $q_1 = 2\pi n_1/n$ . Se por outro lado, fazemos uma soma parcial sobre os sítios 'B', teremos que, a soma é igual a  $n/2$  se  $n_1 = 0$  e igual a  $-n/2$  se  $n_1 = n/2$ . Escrevamos explicitamente, em dimensão  $d$ , este importante resultado:

$$\sum_{\vec{r}_{A,B}} \exp(i \vec{q} \cdot \vec{r}) = \frac{N}{2} [\delta(\vec{q}) \pm \delta(\vec{q} - \pi \vec{1})] \quad , \quad (3.9)$$

onde o sinal superior (inferior) refere-se à soma parcial sobre A (B).

Vamos agora resgatar a solução de campo médio, modificando a matriz de acoplamento no mesmo espírito da transformação de Curie-Weiss, que considera que cada spin possa interagir da mesma forma com todos os spins da rede. Neste caso as interações normalizadas serão  $L_{ij} = L'_F/N$  se  $\Delta_1 (= \vec{\Delta}_{ij} \cdot \vec{1})$  é par e  $L_{ij} = -L'_A/N$  se  $\Delta_1$  é ímpar. Desta forma, a matriz de acoplamento no espaço recíproco não é mais (3.4), pois  $L_{ij} \neq 0$  para qualquer

$i, j$ . Usando a definição (3.3) e o resultado (3.9), podemos obter a matriz de acoplamento de campo médio,

$$\tilde{L}_{CM}(\vec{q}) = \frac{L'_F - L'_A}{2} \delta(\vec{q}) + \frac{L'_F + L'_A}{2} \delta(\vec{q} - \pi \vec{1}) \quad . \quad (3.10)$$

Como realizada no *Capítulo 2*, a aproximação de campo médio é feita unicamente na matriz de acoplamento. Realmente, escrevendo-se

$$L_{ij}^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} [\tilde{L}_{CM}(\vec{q})]^{-1} \exp(i \vec{q} \cdot \vec{\Delta}_{ij}) \quad , \quad (3.11)$$

e substituirmos em (3.2), vamos recuperar, após alguns cálculos, a energia livre de campo médio do *Capítulo 2*, (2.27).

Um desenvolvimento alternativo mais adequado aos nossos objetivos, é a transformação direta da matriz de acoplamento do modelo original (3.4), naquela de campo médio (3.10). Isto é feito multiplicando-se o lado direito da equação (3.4) por  $[\delta(\vec{q}) + \delta(\vec{q} - \pi \vec{1})]$ . Assim, a expressão (3.5) deve tomar a forma:

$$\tilde{L}_{CM}^{\omega}(\vec{q}) = [\tilde{L}(\vec{q})]^{\omega} [\delta(\vec{q}) + \delta(\vec{q} - \pi \vec{1})] \quad . \quad (3.12)$$

Devido as diferenças de dimensionalidade entre os modelos original e de campo médio, é preciso fazer uma transformação nas constantes de acoplamento, a saber,  $L_F = L'_F/4(d-1)$  e  $L_A = L'_A/4$ , mas isto só tem importância para recuperar-se exatamente os resultados do *Capítulo 2*.

Seja o argumento da função de partição (3.2), o hamiltoniano efetivo, doravante denominado  $\Phi(y, [x_i], T, p, [H_i])$ . Inicialmente sem qualquer aproximação, os valores das variáveis  $[x_i]$  e  $y$  que minimizam  $\Phi$  são obtidas a partir das derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(y, [x_i], T, p, H_k)}{\partial x_k} &= -\frac{1}{2} \sum_i x_i L_{ik}^{-1} - \frac{1}{2} \sum_j L_{kj}^{-1} x_j + \tanh(x_k + \beta H_k) \quad , \\ \frac{\partial \Phi(y, [x_i], T, p, [H_i])}{\partial y} &= -y + \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i x_j \frac{\partial L_{ij}^{-1}}{\partial y} \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Usando as equações (3.4), (3.5) e (2.11), podemos escrever

$$\frac{\partial L_{ij}^{-1}}{\partial y} = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{\vec{q}} \frac{\tilde{Q}(\vec{q})}{\tilde{L}^2(\vec{q})} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{\Delta}_{ij}) \quad , \quad (3.14)$$

$$\tilde{Q}(\vec{q}) = Q_F \sum_{\nu=2}^d \cos q_\nu - Q_A \cos q_1 \quad , \quad Q_{F,A} = 2\sqrt{\frac{\beta}{dK}} j_{F,A} \quad . \quad (3.15)$$

Agora sim, vamos obter a solução de campo médio. Primeiramente vamos definir a série de Fourier que representa as variáveis de spin,

$$x_i = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \tilde{x}(\vec{q}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}_i) \quad . \quad (3.16)$$

Os valores de  $[x_i]$  e  $y$  que anulam as derivadas em (3.13), definem o mínimo da energia livre. A aproximação de campo médio é feita quando se substitui  $\tilde{L}^\omega(\vec{q})$  por  $\tilde{L}_{CM}^\omega(\vec{q})$  em (3.13). Usando as equações (3.5), (3.12), (3.16) e (3.15) em (3.13), pode-se mostrar que,

$$-\frac{\tilde{x}(\vec{0})}{N\tilde{L}(\vec{0})} - \frac{\tilde{x}(\pi\vec{1})}{N\tilde{L}(\pi\vec{1})} \exp(i\pi k_1) + \tanh(\overline{x}_k + \beta H_k) = 0 \quad , \quad (3.17)$$

$$\overline{y} = \frac{1}{2N^{3/2}} \left[ \frac{\tilde{x}^2(\vec{0})}{\tilde{L}^2(\vec{0})} \tilde{Q}(\vec{0}) + \frac{\tilde{x}^2(\pi\vec{1})}{\tilde{L}^2(\pi\vec{1})} \tilde{Q}(\pi\vec{1}) \right] \quad . \quad (3.18)$$

onde  $\overline{x}_k$  e  $\overline{y}$  são as coordenadas do mínimo de campo médio. Em nossa notação  $\vec{k}$  é o vetor posição para  $\overline{x}_k$  e  $k_1$  é a sua componente na direção  $\vec{1}$ . Notemos que  $\overline{x}_k$  só pode assumir dois valores segundo a equação (3.17), dependendo apenas de  $k_1$  ser par ou ímpar. Por sua vez, a transformada inversa de (3.16) fornece  $\tilde{x}(\vec{0}) = \sum_i \overline{x}_i$  e  $\tilde{x}(\pi\vec{1}) = \sum_{i \in A} \overline{x}_i - \sum_{j \in B} \overline{x}_j$ . Baseados nisto, podemos relacionar as variáveis que ocorrem em (3.17) e (3.18) às magnetizações total  $m$  e alternada  $m_s$  definidas no *Capítulo 2* [ver equações (2.21-2.24)],

$$m = \frac{\tilde{x}(\vec{0})}{N\tilde{L}(\vec{0})} \quad , \quad m_s = \frac{\tilde{x}(\pi\vec{1})}{N\tilde{L}(\pi\vec{1})} \quad , \quad (3.19)$$

e

$$\bar{x}_k = \tilde{L}(\vec{0}) m \pm \tilde{L}(\pi \vec{1}) m_s \quad \text{e} \quad H_k = H \pm H_s \quad \text{se} \quad k_1 = \begin{cases} \text{par} \\ \text{impar} \end{cases} . \quad (3.20)$$

Da mesma forma, a energia livre  $-\bar{\Phi}/N\beta$ , onde  $\bar{\Phi} = \Phi(\bar{y}, \bar{x}, T, p, H, H_s)$ , pode ser escrita como aquela obtida no *Capítulo 2*, equação (2.27).

### 3.4 A expansão do hamiltoniano

O passo seguinte é fazer uma expansão de  $\Phi(y, [x_i], T, p, [H_i])$  (3.2) em torno da solução de campo médio  $\bar{\Phi}$ . O modo mais fácil de fazê-lo é definir  $y = \bar{y} + \Delta y$  e  $x_i = \bar{x}_i + s_i$ , onde  $\Delta y$  e  $s_i$  são pequenos. Substituindo em (3.2) e expandindo em torno de  $\Delta y = 0$  e  $s_i = 0$ , o argumento da exponencial fica

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{\bar{y}^2}{2} - \rho_2 (\Delta y)^2 - \rho_1 \Delta y - \frac{1}{2} \sum_{i,j} (L_{ij}^{-1})_{\bar{y}} (\bar{x}_i \bar{x}_j + s_i s_j) + \\ & + \sum_i \ln [2 \cosh(z_i)] + \frac{1}{2} \sum_i \cosh^{-2}(z_i) s_i^2 - \frac{1}{3} \sum_i \cosh^{-2}(z_i) \tanh(z_i) s_i^3 \\ & - \frac{1}{12} \sum_i [\cosh^{-4}(z_i) - 2 \cosh^{-2}(z_i) \tanh^2(z_i)] s_i^4 \quad , \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $z_i = \bar{x}_i + \beta H_i$  e

$$\begin{aligned} \rho_2 = & \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\bar{x}_i + s_i) \left( \frac{\partial^2 L_{ij}^{-1}}{\partial y^2} \right)_{\bar{y}} (\bar{x}_j + s_j) \right] \quad , \\ \rho_1 = & \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial L_{ij}^{-1}}{\partial y} \right)_{\bar{y}} (2\bar{x}_i s_j + s_i s_j) \quad . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Uma expansão de  $L_{ij}^{-1}$  em  $\Delta y$  foi feita, sendo truncada em segunda ordem. Isto se justifica porque supomos que  $\Phi$  tenha um máximo pronunciado em  $\bar{y}$ , caindo bruscamente quando  $y$  afasta-se deste valor. Os termos lineares cancelaram-se devido as derivadas (3.13) anularem-se no ponto extremo de  $\bar{\Phi}$  [i.e. (3.17) e (3.18)]. A expansão considera termos até quarta ordem

em  $s_i$ , como usualmente é feito [32], visando estudar apenas os aspectos fundamentais da criticalidade do modelo, sem querer explorar todas as suas possibilidades.

Agora nós podemos integrar  $\Phi$  em  $\Delta y$ , fazendo uso da transformação gaussiana (2.6). O resultado será expresso no espaço de momentos, mas antes precisamos definir uma série de Fourier para as flutuações de spin,

$$s_i = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \tilde{s}(\vec{q}) \exp(i \vec{q} \cdot \vec{r}_i) \quad . \quad (3.23)$$

A expressão que vamos apresentar a seguir é o resultado de uma série de cálculos: integra-se em  $\Delta y$ ; usando as definições (3.16) e (3.23), além de (3.5) e (3.15), realiza-se a transformação de  $\Phi$  para o espaço de momentos; para escrever as variáveis  $\tilde{x}(\vec{q})$  e as funções hiperbólicas em função de  $m$  e  $m_s$ , recorre-se as expressões (3.17 - 3.20). Por fim, podemos escrever

$$\Phi = \bar{\Phi} - \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_{22} - \Phi_4 \quad , \quad (3.24)$$

onde

$$\Phi_2 = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{q}} \left[ L^{-1}(\vec{q}) - 1 + m^2 + m_s^2 \right] \tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{-q}^+ - \frac{mm_s}{N} \sum_{\vec{q}} \tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{-q}^- \quad , \quad (3.25)$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{3N^2} \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{q'}^+ \left[ m(1 - m^2 - 3m_s^2) \tilde{s}_{-q-q'}^+ + m_s(1 - 3m^2 - m_s^2) \tilde{s}_{-q-q'}^- \right] \quad , \quad (3.26)$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{2N\rho_{22}} \left[ \frac{Q(\vec{0})}{L(\vec{0})} m \tilde{s}_0^+ + \frac{Q(\pi \vec{1})}{L(\pi \vec{1})} m_s \tilde{s}_0^- + \frac{1}{2N} \sum_{\vec{q}} \frac{Q(\vec{q})}{L^2(\vec{q})} \tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{-q}^+ \right]^2 \quad , \quad (3.27)$$

$$\Phi_4 = \rho_4^+ \sum_{\vec{q}, \vec{q}', \vec{q}''} \tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{q'}^+ \tilde{s}_{q''}^+ \tilde{s}_{-q-q'-q''}^+ + \rho_4^- \sum_{\vec{q}, \vec{q}', \vec{q}''} \tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{q'}^+ \tilde{s}_{q''}^+ \tilde{s}_{-q-q'-q''}^- \quad , \quad (3.28)$$

e ainda,

$$\rho_{22} = -1 - \frac{Q^2(\vec{0})}{L(\vec{0})} m^2 - \frac{Q^2(\pi \vec{1})}{L(\pi \vec{1})} m_s^2 \quad ,$$

$$\begin{aligned}\rho_4^+ &= \frac{1}{12N^3} \left[ 4(m^2 + m_s^2) - 3(m^4 + 6m^2m_s^2 + m_s^4) - 1 \right] , \\ \rho_4^- &= \frac{1}{3N^3} mm_s (2 - 3m^2 + 3m_s^2) ,\end{aligned}\quad (3.29)$$

onde uma notação compacta foi usada:

$$\tilde{s}_q^+ = \tilde{s}(\vec{q}) \quad , \quad \tilde{s}_q^- = \tilde{s}(\vec{q} + \pi \vec{1}) \quad , \quad \tilde{s}_0^\pm = \tilde{s}_{q=0}^\pm . \quad (3.30)$$

Como comentado acima,  $\overline{\Phi}$  é proporcional à energia livre de campo médio (e independente de  $\tilde{s}_q$ ). Os termos dependentes de  $\tilde{s}_q$  que ocorrem em (3.24), são da forma  $\tilde{s}_q^p/N^{p-1}$ . Alguns termos oriundos de  $\rho_2$  (3.22) têm  $N$  elevado a uma potência maior e foram omitidos por serem desprezíveis no limite termodinâmico. Por último, os acoplamentos  $L(\vec{q})$ , dados por (3.4), têm agora  $L_F$  e  $L_A$ , equação (2.11), com  $y = \overline{y}$ .

As variáveis  $\tilde{s}_q$  representam as flutuações em torno das variáveis  $\overline{x}$ , que definem o mínimo local de campo médio. As configurações mais prováveis de  $\{\tilde{s}_q\}$ , são aquelas que definem o mínimo absoluto da energia livre. Vamos agora evidenciar o parâmetro de ordem do sistema. Sejam as relações (3.19):  $\tilde{x}(\vec{0}) = \sum_i \overline{x}_i$ , enquanto  $\tilde{x}(\pi \vec{1}) = \sum_{i \in A} \overline{x}_i - \sum_{i \in B} \overline{x}_i$ , é proporcional a diferença entre as variáveis de spin (de campo médio) das subredes  $A$  e  $B$ . Mas, considerando o modelo original, a medida de qualquer alinhamento que apresente o sistema é obtida de  $\langle \tilde{x}(\vec{q}) \rangle$ , e se houver algum alinhamento antiferromagnético das subredes, o mínimo da energia livre ocorrerá em torno de  $\vec{q} = \pi \vec{1}$ . O mínimo só estará exatamente neste valor, se o sistema comportar-se como um modelo de campo médio. Novas variáveis foram definidas por  $x_i = \overline{x}_i + s_i$ , para que pudessemos expandir o hamiltoniano em torno da solução clássica, que por fim passa a ser função de  $\tilde{s}_q$  (3.24). Agora  $\langle \tilde{s}_q \rangle$  representa o grau de coerência das flutuações em uma frequência  $\vec{q}$ . Considerando que o modelo metamagnético apresente um comportamento ‘quase de campo médio’, a energia livre terá a sua maior contribuição

em torno de  $\vec{q} = \vec{0}$  e  $\vec{q} = \pi \vec{1}$ , devido aos ordenamentos ferro e antiferromagnético das subredes. Portanto, o desvio de  $\vec{q}$  em torno destes valores deve ser necessariamente pequeno e a variável  $\tilde{s}_q^-$  fará o papel de parâmetro de ordem antiferromagnética no espaço das flutuações. Por esse motivo, será feita uma expansão das constantes efetivas de interação em torno dos valores mencionados de  $\vec{q}$ .

Para tanto, consideremos a transformação,

$$\sum_{\theta=0}^{2\pi} f(\theta) = \sum_{\theta=0}^{2\pi} f(\theta + \pi) = \frac{1}{2} \sum_{\theta=0}^{2\pi} [f(\theta) + f(\theta + \pi)] \quad , \quad (3.31)$$

que é válida para qualquer função periódica de período  $2\pi$ . Aplicando a transformação em  $\Phi$  (3.24), cada somatória em  $\tilde{s}_q$  se abrirá em duas, cada uma centrada em um valor de  $\vec{q}$  ( $\vec{0}$  ou  $\pi \vec{1}$ ). Teremos por exemplo,

$$\sum_{\vec{q}} L_{ef}(\vec{q}) \tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{-q}^+ = \frac{1}{2} \sum_{\vec{q}} [L_{ef}(\vec{q}) \tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{-q}^+ + L_{ef}(\vec{q} + \pi \vec{1}) \tilde{s}_q^- \tilde{s}_{-q}^-] \quad , \quad (3.32)$$

e

$$\sum_{\vec{q}, \vec{q}'} \tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{q'}^+ \tilde{s}_{-q-q'}^+ = \frac{1}{4} \sum_{\vec{q}, \vec{q}'} (\tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{q'}^+ \tilde{s}_{-q-q'}^+ + 3\tilde{s}_q^+ \tilde{s}_{q'}^- \tilde{s}_{-q-q'}^-) \quad , \quad (3.33)$$

onde  $L_{ef}(\vec{q})$  representa uma certa interação efetiva. Se agora fizermos uma expansão do hamiltoniano em torno de  $q = 0$ , teremos a forma desejada. Uma observação importante, é que não faz sentido em expandir as próprias variáveis de spin,  $\tilde{s}_q^+$  e  $\tilde{s}_q^-$ , pois são variáveis de integração. Também a dependência em  $\vec{q}$  do termos cúbico (com  $\tilde{s}_0^+$ ) e biquadrático será desprezada, concordando com a aproximação feita em trabalhos anteriores [19][9], sendo a expansão realizada somente nas interações efetivas que ocorrem nos termos de segunda ordem. Uma dependência em  $\vec{q}$  em outros termos representaria uma dificuldade técnica, mas em nosso caso, como veremos adiante, o reescalamento das variáveis de spin tornaria tais dependências irrelevantes para todo e qualquer ponto fixo do modelo. Antes disso, devemos tornar

contínua a variável  $\vec{q}$ , o que implica em transformar também as variáveis discretas  $\tilde{s}_q$  em uma ‘densidade de modos’ relacionados às variáveis de spin,

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \rightarrow \frac{1}{\Omega} \int d\vec{q} \equiv \int_{\vec{q}} , \quad (3.34)$$

onde  $\Omega = (2\pi)^d$  é o volume de integração. A notação compacta acima à direita será usada.

A criticalidade na aproximação vigente requer também que façamos  $m_s = 0$  em  $\Phi$  (3.24), pois o sistema encontra-se desordenado. Seja então o termo quadrático (3.32) que envolve  $\tilde{s}_q^-$ , após realizada a expansão,

$$\frac{1}{4} \int_{\vec{q}} \left[ (1 - m^2) - L^{-1}(\pi \vec{1}) \left( 1 + 2L_F \sum_{\nu=2}^d q_\nu^2 + 2L_A q_1^2 \right) \right] \tilde{s}_q^- \tilde{s}_{-q}^- , \quad (3.35)$$

onde  $L_F$  e  $L_A$  são os acoplamentos ferro e antiferromagnético (3.4). É usual que o termo entre colchetes seja escrito na forma  $(r + q^2)$ , necessitando mais duas transformações,

$$q_\nu = c_1 q'_\nu \quad , \quad \tilde{s}_q^- = c_2 s_q^- \quad , \quad (3.36)$$

onde  $\nu = 2, 3, \dots, d$  e

$$c_1 = \sqrt{\frac{L_A}{L_F}} \quad , \quad c_2 = \left[ c_1^{d-1} \frac{L_A}{L^2(\pi \vec{1})} \right]^{-\frac{1}{2}} . \quad (3.37)$$

Tudo o que foi exposto anteriormente conduzirá a um hamiltoniano na forma

$$\begin{aligned} \Phi = & \bar{\Phi} - \frac{1}{2} \int_{\vec{q}} \left[ r(\vec{0}) + e \left( \sum_{\nu=2}^d q_\nu^2 - q_1^2 \right) \right] s_q^+ s_{-q}^+ - \frac{1}{2} \int_{\vec{q}} [r(\pi \vec{1}) + \vec{q}^2] s_q^- s_{-q}^- \\ & + \frac{1}{2\Omega\kappa} \left[ c_2 \frac{Q(\vec{0})}{L(\vec{0})} m s_0^+ + \frac{1}{4} \int_{\vec{q}} \frac{eQ(\vec{0})}{L_A} s_q^+ s_{-q}^+ + \frac{1}{4} \int_{\vec{q}} \frac{Q(\pi \vec{1})}{L_A} s_q^- s_{-q}^- \right]^2 \\ & - w \int_{\vec{q}} \int_{\vec{q}'} (s_q^+ s_{q'}^+ s_{-q-q'}^+ + 3s_q^+ s_{q'}^- s_{-q-q'}^-) - u \int_{\vec{q}} \int_{\vec{q}'} \int_{\vec{q}''} (s_q^+ s_{q'}^+ s_{q''}^+ s_{-q-q'-q''}^+ \\ & + 6s_q^+ s_{q'}^+ s_{q''}^- s_{-q-q'-q''}^- + s_q^- s_{q'}^- s_{q''}^- s_{-q-q'-q''}^-) . \end{aligned} \quad (3.38)$$



onde omitimos o apóstrofo em  $\vec{q}$  e definimos,

$$\begin{aligned}
r(\vec{q}_0) &= \left[ L^{-1}(\vec{q}_0) - 1 + m^2 \right] c_1^{d-1} c_2^2 \quad , \quad e = \frac{L^2(\pi \vec{1})}{L^2(\vec{0})} \quad , \\
\kappa &= 2 \left( 1 + \frac{Q^2(0)}{L(0)} m^2 \right) \quad , \quad w = \frac{1}{3} m (1 - m^2) c_1^{2(d-1)} c_2^3 \quad , \\
u &= \frac{1}{96} (1 + 3m^4 - 4m^2) c_1^{3(d-1)} c_2^4 \quad . \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Um ponto delicado das transformações do grupo de renormalização é o reescalonamento das variáveis de spin, que serão definidas segundo o seu efeito sobre os termos quadráticos. A magnitude relativa desses termos será fundamental na escolha do reescalonamento apropriado. A matriz de acoplamento de campo médio (3.10) fornece  $L^{-1}(\vec{0}) = \frac{2}{L_F - L_A}$  e  $L^{-1}(\pi \vec{1}) = \frac{2}{L_F + L_A}$ . Seja então o caso isotrópico do acoplamento spin-rede ( $j_- = 0$ ) estudado no *Capítulo 2*: na criticalidade  $m_s = 0$  e pela equação (2.23),  $\bar{y} = 0$ . Assim pelas equações (2.11), (2.24) e (2.35),  $\frac{L_F - L_A}{2} = \beta J_-(p)$  e  $\frac{L_F + L_A}{2} = \beta J_+(p) = t_p$ . Devido à (2.32) temos  $m = \alpha_0$ , e a condição de criticalidade de campo médio (2.36) implica em  $r(\pi \vec{1}) = 0$ . O efeito das flutuações modificará tal condição, mas como  $L^{-1}(\vec{0}) > L^{-1}(\pi \vec{1})$ , ainda teremos  $r(\vec{0}) > r(\pi \vec{1})$ , no início das transformações do grupo de renormalização. Voltaremos a essa questão na definição do reescalonamento das variáveis de spin.

### 3.5 As transformações do grupo de renormalização

A idéia geral do grupo de renormalização é ‘integrar’ blocos de spins e estudar o comportamento crítico do sistema a partir da correspondente transformação

do hamiltoniano. Na prática, a integração é feita no espaço de momentos, sobre os  $s_q$  que estão na região de valores grandes de  $q$ . Integrar sobre as frequências altas é equivalente a reescrever o hamiltoniano  $\mathcal{H}$  em termos de pequenos blocos de spins, segundo a idéia de Kadanoff [32],  $\mathcal{H}' = \Xi(\mathcal{H})$ . Paralelamente a isto, o comprimento de correlação será reduzido,  $\xi' = \xi/b$ , na razão inversa do tamanho dos blocos. Na criticalidade, o comprimento de correlação diverge,  $\xi \rightarrow \infty$ , significando fisicamente que apesar do traço parcial,  $\xi' = \xi$ . Se isto é verdade, também deveremos ter  $\mathcal{H}' = \Xi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ , o que define os pontos fixos do modelo e fornece a informação física de interesse. Isso é possível porque na criticalidade o sistema comporta-se indiferentemente à unidade física do spin, considerando um bloco como se fosse um único spin.

Detalhando um pouco mais, consideremos um hamiltoniano sobre o qual já foi realizado muitas vezes a transformação do grupo de renormalização. Se  $\vec{q}$  está limitado a uma esfera de raio  $\Lambda$ , as integrações são feitas sobre as variáveis de spin que estão na zona externa, ou seja,  $\Lambda/b < q \leq \Lambda$ , onde  $b > 1$ . Assim, o hamiltoniano efetivo se transforma segundo a relação:

$$\exp \Phi' = \int_s^> \exp \Phi \quad , \quad (3.40)$$

onde  $\int_s^>$  representa a integração sobre  $s_q$  com  $q > \Lambda/b$ . Toda a informação que procuramos, vêm da comparação do hamiltoniano transformado com o original. Para tanto, vamos fazer com que o hamiltoniano depois da integração parcial, tenha a mesma aparência geral de antes. Isto é feito por meio de duas mudanças de escala: a primeira para restaurar os limites de integração,  $q' = bq$ , e a segunda sobre as variáveis de spin  $s'_q = \zeta s_q$ . Normalmente  $\zeta$  é escolhido para manter fixa a dependência em  $\vec{q}$  do termo de segunda ordem no parâmetro de ordem, o que implica em uma transformação específica dos demais coeficientes. Por fim, teremos as relações de recorrência dos coeficientes do hamiltoniano, cuja solução depende crucial-

mente da dimensão  $d$  do sistema. Para  $d \geq 4$  só a solução trivial (ponto fixo do modelo gaussiano) é possível, mas para  $\epsilon = 4 - d \gtrsim 0$ , outros tipos de comportamento são permitidos, daí a necessidade da expansão em  $\epsilon$ . Tudo isto fará por reduzir o hamiltoniano do sistema àquelas variáveis que são fundamentais na criticalidade. Para cada ponto fixo, haverá em particular, um conjunto de campos importantes chamados relevantes, enquanto os demais serão irrelevantes.

Vamos agora escrever o hamiltoniano do sistema, (3.38), em uma forma apropriada à renormalização e a obtenção das equações de recorrência. Consideremos que houve uma integração sobre as variáveis de spin com  $|\vec{q}|$  grandes, ou seja na camada externa da primeira zona de Brillouin, restando uma pequena região não integrada em torno de  $\vec{q}_0 = \vec{0}$  e  $\vec{q}_0 = \pi \vec{d}$  (as mudanças de escala em  $\vec{q}$  restituem os limites de integração). Ou melhor, as transformações do grupo de renormalização já foram realizadas muitas vezes. Assim, o hamiltoniano (3.38) foi profundamente modificado e seus coeficientes não são mais os mesmos. Também supomos que a inclusão de um termo de sexta ordem não se torne necessária, estando assegurada a estabilidade termodinâmica. Então, o hamiltoniano efetivo das flutuações  $s_q$  fica,

$$\begin{aligned}
\Phi_r = & -\frac{1}{2} \int_{\vec{q} \neq 0} \left[ r_+ + e_+ \left( \sum_{\nu=2}^d q_\nu^2 - q_1^2 \right) \right] s_q^+ s_{-q}^+ - \frac{1}{2} \int_{\vec{q}} \left[ r_- + e_- \vec{q}^2 \right] s_q^- s_{-q}^- \\
& - w_+ \int_{\vec{q} \neq 0} \int_{\vec{q}' \neq 0} s_q^+ s_{q'}^+ s_{-q-q'}^+ - w_- \int_{\vec{q} \neq 0} \int_{\vec{q}'} s_q^+ s_{q'}^- s_{-q-q'}^- + \\
& + \frac{B_+}{\Omega} \left( \int_{\vec{q} \neq 0} s_q^+ s_{-q}^+ \right)^2 + \frac{B_\pm}{\Omega} \left( \int_{\vec{q} \neq 0} s_q^+ s_{-q}^+ \right) \left( \int_{\vec{q}'} s_{q'}^- s_{-q'}^- \right) + \\
& + \frac{B_-}{\Omega} \left( \int_{\vec{q}} s_q^- s_{-q}^- \right)^2 - \Phi_{4r} + \Phi_0 \quad , \tag{3.41}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_{4r} = & u_+ \int_{\vec{q} \neq 0} \int_{\vec{q}' \neq 0} \int_{\vec{q}'' \neq 0} s_q^+ s_{q'}^+ s_{q''}^+ s_{-q-q'-q''}^+ + \\ & + u_\pm \int_{\vec{q} \neq 0} \int_{\vec{q}' \neq 0} \int_{\vec{q}''} s_q^+ s_{q'}^+ s_{q''}^- s_{-q-q'-q''}^- + u_- \int_{\vec{q}} \int_{\vec{q}'} \int_{\vec{q}''} s_q^- s_{q'}^- s_{q''}^- s_{-q-q'-q''}^- \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{0r} = & -\frac{1}{2\Omega} r_0 s_0^{+2} - \frac{v_+}{\Omega} s_0^+ \int_{\vec{q} \neq 0} s_q^+ s_{-q}^+ - \frac{v_-}{\Omega} s_0^+ \int_{\vec{q}} s_q^- s_{-q}^- + \quad (3.43) \\ & -\frac{v_0}{\Omega^2} s_0^{+3} + \frac{\alpha_+ s_0^{+2}}{\Omega} \int_{\vec{q} \neq 0} s_q^+ s_{-q}^+ + \frac{\alpha_- s_0^{+2}}{\Omega} \int_{\vec{q}} s_q^- s_{-q}^- + \frac{\alpha_0}{\Omega^3} s_0^{+4} + \\ & -z_+ \frac{s_0^+}{\Omega} \int_{\vec{q} \neq 0} \int_{\vec{q}' \neq 0} s_q^+ s_{q'}^+ s_{-q-q'}^+ - z_- \frac{s_0^+}{\Omega} \int_{\vec{q} \neq 0} \int_{\vec{q}'} s_q^+ s_{q'}^- s_{-q-q'}^- \quad , \end{aligned}$$

e  $e_- = 1$ , como fizemos em (3.38). Os termos que contém a contribuição de  $s_0^+$  foram escritos em separado, guardando conjuntamente as contribuições de  $q = 0$  de termos com  $s_q^+$ , com aqueles termos que originalmente têm  $s_0^+$  em evidência. Por exemplo, o termo de coeficiente  $r_0$  guarda toda a contribuição em  $s_0^{+2}$  e os de coeficiente  $v$  recebem toda contribuição do tipo  $s_0^+ s_q^\pm s_{-q}^\pm$ . Isto é feito, devido ao hamiltoniano original (3.38) conter termos com  $s_0^+$  em evidência, que produz uma diferente classe de contribuições no processo de renormalização. O coeficiente  $v$  pode ser positivo, negativo ou nulo, e, os coeficientes  $B_+$  e  $B_-$  são necessariamente positivos. Além disso, termos novos em relação a (3.38) foram escritos em  $\Phi_0$ . Aqueles de coeficientes  $\alpha_\pm$ , guardam toda a contribuição de quarta ordem (termo ordinário e biquadrático) com  $s_0^2$ , enquanto o termo de coeficiente  $\alpha_0$  guarda toda contribuição em  $s_0^4$ . Os de coeficientes  $z$  só têm contribuição devido aos termos ordinários de quarta ordem.

Desejamos agora, realizar traços parciais sobre os  $s(\vec{q})$  que se encontram dentro da região de integração,  $\Lambda/b < q < \Lambda$ . Para tanto, vamos escrever o hamiltoniano efetivo como  $\Phi_r = \Phi_2^+ + \Phi_2^- + \Phi_I$ , onde à direita estão, respectivamente, os termos quadráticos em  $s_q^+, s_q^-$  e a soma dos termos de

ordem maior. A física não trivial deve-se a  $\Phi_I$ , que pode ser investigada considerando-o perturbativamente. Assim podemos fazer,

$$\mathcal{Z}_s = cte \int_s^< \exp(\Phi_2^+ + \Phi_2^-)^< \left[ \int_s^> \left( 1 + \Phi_I + \frac{1}{2!} \Phi_I^2 + \dots \right) \exp(\Phi_2^+ + \Phi_2^-)^> \right], \quad (3.44)$$

onde o superescrito  $< (>)$  denota  $q < (>) \Lambda/b$ . O problema, no momento, está em trabalhar com integrais do tipo:

$$\int_{\vec{q}} \Omega \delta \left( \sum_{i=1}^l \vec{q}_i \right) \prod_{j=1}^p s(\vec{q}_j) \int_s^> \prod_{k=p+1}^l s(\vec{q}_k) \exp(\Phi_2^+ + \Phi_2^-)^>, \quad (3.45)$$

que podem ser resolvidas considerando a fórmula [32]:

$$\frac{1}{Z_0} \int_{\sigma}^> \sigma_{q_1} \sigma_{q_2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{\vec{q}} (q^2 + r) \sigma_q \sigma_{-q} \right] = \Omega \frac{\delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)}{q^2 + r}, \quad (3.46)$$

onde  $Z_0$  é a integral funcional da exponencial sozinha. Fazendo a expansão de  $\Phi_r$  como em (3.44) e aplicando a fórmula acima, podemos integrar os  $s_q^{\pm}$  com  $q > \Lambda/b$ . A integração produzirá ‘contrações’ nos termos de (3.44), a saber,  $\widehat{s_{q_1}^{\pm} s_{q_2}^{\pm}} = \Omega G_{\pm}(\vec{q}) \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)$ , onde  $G_{\pm}(\vec{q})$  são os inversos dos coeficientes dos respectivos termos quadráticos de (3.41), denominados propagadores. Obviamente, só ocorrerão contrações  $\widehat{s_{q_1}^+ s_{q_2}^+}$  e  $\widehat{s_{q_1}^- s_{q_2}^-}$  devido a diferença entre os domínios de  $\vec{q}$ . Genericamente, teremos,

$$\mathcal{Z}_s = cte \int_s^< \left[ Z_0 \left( 1 + \Theta[\Phi_I] + \frac{1}{2!} \Theta[\Phi_I^2] + \dots \right) \right] \exp(\Phi_2^+ + \Phi_2^-), \quad (3.47)$$

onde  $\Theta[\Phi_I^j]$  representa a  $j$ -ésima potência de  $\Phi_I$  na expansão em (3.44), após a integração em  $q > \Lambda/b$ . Para recuperar a forma do hamiltoniano original, expandimos o logaritmo do termo entre parênteses da expressão anterior,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_s = & cte Z_0 \int_s^< \exp \left\{ \Phi_2^+ + \Phi_2^- + \left( \Theta[\Phi_I] + \frac{1}{2!} \Theta[\Phi_I^2] + \dots \right) + \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( \Theta[\Phi_I] + \frac{1}{2!} \Theta[\Phi_I^2] + \dots \right)^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Por fim, fazendo as mudanças de escala em  $\vec{q}$  e  $s_q$ , as equações de recorrência poderão ser escritas.

Para facilitar as operações que resultam em (3.48), podemos associar os termos de  $\Phi_r$  (3.41) a diagramas primitivos, que combinados através da integração em  $s_q$ , representarão os termos de (3.48) em forma gráfica, com maior clareza que a representação literal. Estes são os diagramas de Feynman. Vamos representar por uma linha tracejada os  $s_q^+$  (e  $s_0^+$ ) e por uma linha cheia os  $s_q^-$ . Assim, o hamiltoniano  $\Phi_r$  poderá ser representado pelos seguintes termos:

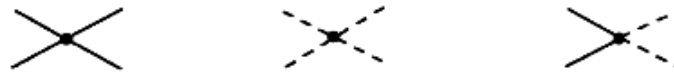
- quadráticos:



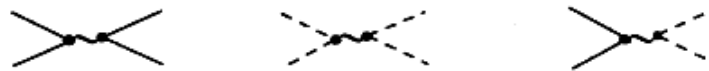
- cúbicos ( $w$  e  $v$ ):



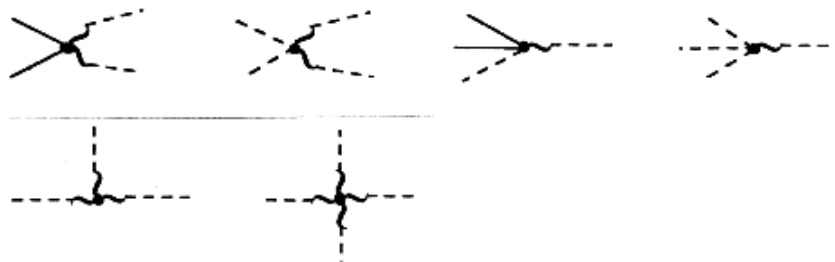
- de quarta ordem comuns ( $u$ ):





- biquadráticos ( $B$ ):



- outros ( $\alpha, z, v_0, \alpha_0$ ):



Há dois tipos de vértices: o primeiro representado por um ponto (  $\bullet$  ) e o segundo por (  $\sim$  ). O primeiro é o vértice usual, que ocorre no tratamento dos modelos de Ising e metamagnético rígido. A soma dos momentos que passam por ele é igual a zero. Já o segundo está associado à compressibilidade, que dá origem ao termo biquadrático. Este vértice não conduz momento.

A integração em  $s_q$  é traduzida em ligações entre as pernas dos diagramas primitivos. Aqueles sem pernas livres são chamados de diagramas de vácuo, como por exemplo: . Estes só contribuem para a energia livre, mas não têm importância para as equações de recorrência. Diagramas conexos são aqueles em que todos os vértices componentes estão ligados a pelo menos um outro vértice (por exemplo ). Diagramas desconexos são aqueles que podem ser vistos como o produto de dois ou mais diagramas conexos, com ou sem pernas externas. Todos os diagramas desconexos, devido a expansão em (3.48), se anulam. Portanto, só os diagramas conexos são importantes no atual contexto.

Definindo as mudanças de escala em  $\vec{q}$  e  $s_q^\pm$  poderemos escrever as equações de recorrência. Primeiramente, os limites de integração em  $\vec{q}$  devem ser restaurados,

$$|\vec{q}'| = b|\vec{q}| \quad , \quad (3.49)$$

fazendo  $q'$  variar como antes,  $0 < q' < \Lambda$ . A mudança de escala nas variáveis de spin é mais sutil, uma vez que o hamiltoniano conta com três diferentes densidades de spin  $s_q^+$ ,  $s_q^-$  e  $s_0^+$ . Na aplicação do grupo de renormalização ao modelo metamagnético rígido [9], são feitas apenas duas mudanças de escala (em  $s_q^+$  e  $s_q^-$ ), mas no presente caso, há uma contribuição específica





$$\bar{e}_{\pm} = \zeta_{\pm}^2 b^{-d-2} [e_{\pm} + O(\epsilon^2)] \quad , \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 = & \zeta_0^2 b^{-d} [r_0 - 2v_+^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - 2v_-^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ & -2\alpha_+ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + -2\alpha_{\pm} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + O(\epsilon^2)] \quad , \quad (3.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_- = & \zeta_0 \zeta_-^2 b^{-2d} [v_- + 2v_+ B_{\pm} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 4v_- B_- \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ & + 4v_- w_-^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 4v_+ w_-^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ & -12v_- u_- \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - 2v_+ u_{\pm} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ & + 4w_- z_- \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + O(\epsilon^{\frac{5}{2}})] \quad , \quad (3.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_- = & \zeta_+ \zeta_-^2 b^{-2d} [w_- - 12w_- u_- \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - 6w_+ u_{\pm} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ & -8w_- v_{\pm} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 12w_+ w_-^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ & + 4w_-^3 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + O(\epsilon^{\frac{5}{2}})] \quad , \quad (3.56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_- = & \zeta_-^4 b^{-3d} [B_- + 4B_-^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + B_{\pm}^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ & -24B_- u_- \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - 2B_{\pm} u_{\pm} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ & + 4B_{\pm} w_-^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + 8B_- w_-^2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + O(\epsilon^3)] \quad , \quad (3.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_- = & \zeta_-^4 b^{-3d} [u_- - 36u_-^2 \text{ (diagram)} - u_\pm^2 \text{ (diagram)} + \\
 & + 24u_- w_-^2 \text{ (diagram)} + 4u_\pm w_-^2 \text{ (diagram)} - 4w_-^4 \text{ (diagram)} + \\
 & + O(\epsilon^3)] \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

As demais equações de recorrência encontram-se no *Apêndice B*.

Se realizada no espaço real, cada transformação do grupo de renormalização divide a rede em blocos de spins de lado  $b$ , segundo a construção de Kadanoff [32]. Assim, a constante de rede do sistema transformado é  $b$  vezes maior que a original, e portanto, o volume do sistema fica  $b^d$  vezes menor, em unidades da nova constante de rede. Os termos provenientes do acoplamento spin-rede apresentam no denominador o volume do sistema  $\Omega$  (no espaço de momentos). Devido ao reescalonamento de  $\vec{q}$ , ocorre um fator  $b^{-d}$  nas respectivas equações de recorrência ( $\Omega = b^d \Omega'$ ). A ordem da correção de  $\bar{v}$  é justificada pelo fato das integrais que ocorrem nas relações de recorrência dos termos quadráticos não dependerem de  $\vec{q}$ , como mostrado no *Apêndice C*.

Além destas equações há produção de um termo linear ( $s_0^+$ ),

$$-\zeta_0 [v_+ \text{ (diagram)} + v_- \text{ (diagram)} + O(\epsilon^{3/2})] \quad (3.59)$$

Tal termo descaracteriza o hamiltoniano, produzindo uma instabilidade, mas pode ser eliminado através de uma transformação secundária das variáveis de spin, a saber,

$$s_0^+ = s_0^{+'} + \Omega M \quad (3.60)$$

Agora serão gerados novos termos de primeira, segunda e terceira ordens [considerando  $\Phi_r$  na forma (3.41)] e  $M$  deverá ser escolhido de tal forma que cancele a soma dos termos lineares.

As variáveis  $\zeta$  serão fixadas de forma a encaminhar as transformações de  $\Phi_r$  em uma direção que conduza a um hamiltoniano representativo do comportamento crítico. É comum escolher-se um reescalonamento das variáveis de spin [32] que mantenha o coeficiente de  $\vec{q}^2$  constante. No presente caso, a variável  $\vec{q}$  aparece explicitamente em dois termos de (3.41) e se tal procedimento for seguido, deveremos manter  $e_+$  e  $e_-$  constantes ( $e_- = 1$ ). Inspeccionando as relações (3.51) e (3.52), vemos que neste caso ambos  $r_+$  e  $r_-$  escalam-se com  $\sim b^2$ , mas como no hamiltoniano inicial,  $r_+ > r_-$  (ver discussão anterior),  $r_+$  deve divergir quando  $r_-$  estiver na criticalidade. Paralelamente o propagador  $G_+(\vec{q})$  aproxima-se de zero. Isto significa que perdeu-se o controle sobre as variáveis  $s_q^+$ . Para evitar este efeito indesejável, vamos fixar  $r_+$  ao invés de  $e_+$ , e manter  $e_- = 1$  como usual. Quanto a  $s_0^+$ , o reescalonamento será igualmente feito para fixar  $r_0$ .

A transformação secundária das variáveis de spin (3.60), modificará as equações de recorrência, mas não tornará relevante um campo que não o seja, como poderemos constatar. Então, ao invés de reescrever todas as equações de recorrência corrigidas, vamos obter as constantes de reescala  $\zeta$  em ordem  $\epsilon^0$ , e verificar quais campos são irrelevantes para podermos descartá-los. Isto diminuirá sensivelmente o número de variáveis, poupando um trabalho considerável. Usando (3.60) em (3.41), podemos escrever explicitamente os coeficientes dos termos que definirão  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} r'_+ &= \bar{r}_+ + 2\bar{v}_+M - 2\bar{\alpha}_+M^2 \quad , \\ r'_0 &= \bar{r}_0 + 6\bar{v}_0M + 12\bar{\alpha}_0M^2 \quad , \quad e'_- = \bar{e}_- \quad . \end{aligned} \quad (3.61)$$

A solução para  $M$  que implica na eliminação dos termos lineares, fornece  $M = O(\epsilon^{1/2})$ , como veremos adiante. Assim, toda dependência em  $M$  nas equações acima pode ser temporariamente desconsiderada. Assim, usando

(3.51), (3.53) e (3.54), em ordem  $\epsilon^0$  teremos,

$$\begin{aligned} r'_+ &= \zeta_+^2 b^{-d} [r_+ + O(\epsilon)] \quad \Rightarrow \quad \zeta_+ = b^{2-\frac{\epsilon}{2}} [1 + O(\epsilon)] \quad , \\ e'_- &= \zeta_-^2 b^{-d-2} [e_- + O(\epsilon^2)] \quad \Rightarrow \quad \zeta_- = b^{3-\frac{\epsilon}{2}} [1 + O(\epsilon^2)] \quad , \\ r'_0 &= \zeta_0^2 b^{-d} [r_0 + O(\epsilon)] \quad \Rightarrow \quad \zeta_0 = b^{2-\frac{\epsilon}{2}} [1 + O(\epsilon)] \quad , \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde fizemos  $d = 4 - \epsilon$ . Se agora considerarmos as equações de recorrência na mesma ordem das variáveis acima, podemos verificar que os seguintes campos são fortemente irrelevantes:

$$\begin{aligned} e'_+ &= b^{-2} [e_+ + O(\epsilon^2)] \quad , \quad w'_+ = b^{-2+\frac{\epsilon}{2}} [w_+ + O(\epsilon^{3/2})] \quad , \\ v'_0 &= b^{-2+\frac{\epsilon}{2}} [v_0 + O(\epsilon^{3/2})] \quad , \quad v'_+ = b^{-2+\frac{\epsilon}{2}} [v_+ + O(\epsilon^{3/2})] \quad , \\ B'_+ &= b^{-4+\epsilon} [B_+ + O(\epsilon^2)] \quad , \quad B'_\pm = b^{-2+\epsilon} [B_\pm + O(\epsilon^2)] \quad , \\ u'_+ &= b^{-4+\epsilon} [u_+ + O(\epsilon^2)] \quad , \quad u'_\pm = b^{-2+\epsilon} [u_\pm + O(\epsilon^2)] \quad , \\ \alpha'_+ &= b^{-4+\epsilon} [\alpha_+ + O(\epsilon^2)] \quad , \quad \alpha'_- = b^{-2+\epsilon} [\alpha_- + O(\epsilon^2)] \quad , \\ z'_+ &= b^{-4+\epsilon} [z_+ + O(\epsilon^2)] \quad , \quad z'_- = b^{-2+\epsilon} [z_- + O(\epsilon^2)] \quad , \\ \alpha'_0 &= b^{-4+\epsilon} [\alpha_0 + O(\epsilon^2)] \quad . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Embora as equações acima tenham contribuições de ordem  $\epsilon^2$  ou  $\epsilon^{3/2}$ , o fator  $b$  é maior que a unidade, tornando os respectivos campos cada vez menores com as iterações. No hamiltoniano (3.24) há dependências em  $\vec{q}$  em outros termos, que foram posteriormente desconsideradas, mas de qualquer forma, elas também seriam irrelevantes, como se pode verificar.

Finalmente, o hamiltoniano (3.41) após um grande número  $k$  de iterações, ficará renormalizado na forma,

$$\begin{aligned} \Phi_k &= -\frac{1}{2} r_+ \int_{\vec{q} \neq 0} s_q^+ s_{-q}^+ - \frac{1}{2} \int_{\vec{q}} (r_- + \vec{q}^2) s_q^- s_{-q}^- - \frac{1}{2\Omega} r_0 s_0^{+2} + \\ &\quad - \frac{v_-}{\Omega} s_0^+ \int_{\vec{q}} s_q^- s_{-q}^- - w_- \int_{\vec{q} \neq 0} \int_{\vec{q}'} s_q^+ s_{q'}^- s_{-q-q'}^- + \frac{B_-}{\Omega} \left( \int_{\vec{q}} s_q^- s_{-q}^- \right)^2 + \\ &\quad - u_- \int_{\vec{q}} \int_{\vec{q}'} \int_{\vec{q}''} s_q^- s_{q'}^- s_{q''}^- s_{-q-q'-q''}^- \quad . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Se  $r_+ = r_0 = v_- = w_- = 0$ , temos o hamiltoniano do modelo de Domb, e se  $B_- = 0$ ,  $v_- = w_-$  e  $r_0 = r_+$ , o hamiltoniano é aquele do modelo metamagnético rígido. Porém, o hamiltoniano acima não pode ser reduzido aquele do modelo de Baker e Essam, uma vez que as características elásticas desse último são intrinsecamente diferentes do nosso.

-As integrais representadas pelos diagramas de Feynman são consideradas no *Apêndice C*, em dimensão  $d = 4$ . Mostra-se que as integrais que ocorrem no problema são fracamente dependentes de  $\vec{q}$ , podendo-se considerá-las independentes e assim escrever

$$I_{kl} = \int_{\vec{q}}^> [G_+(\vec{q})]^k [G_-(\vec{q})]^l . \quad (3.65)$$

Mas, além de não haver dependência de  $q \leq \Lambda/b$ , a variável  $e_+$  é irrelevante como vimos anteriormente e a integral fica

$$I_{kl} = \frac{I_{0l}}{r_+^k} = (r_+)^{-k} \int_{\vec{q}}^> [G_-(\vec{q})]^l . \quad (3.66)$$

Vamos agora corrigir para ordem  $\epsilon$  os fatores de escala  $\zeta_+$  e  $\zeta_0$ . Uma vez  $\overline{v_+}, \overline{\alpha_+}, \overline{v_0}$  e  $\overline{\alpha_0}$  são irrelevantes, teremos  $r'_+ = \overline{r_+}$  e  $r'_0 = \overline{r_0}$  [ver (3.61), (3.51) e (3.54)], fornecendo

$$\begin{aligned} \zeta_+ &= b^{2-\frac{\epsilon}{2}} \left[ 1 + I_{02} \frac{w_-^2}{r_+} + O(\epsilon^2) \right] , \\ \zeta_0 &= b^{2-\frac{\epsilon}{2}} \left[ 1 + I_{02} \frac{v_-^2}{r_0} + O(\epsilon^2) \right] . \end{aligned} \quad (3.67)$$

A translação das variáveis de spin (3.60) só produz termos não nulos quando aplicada aos termos em  $s_0^{+2}$  e  $s_0 \int_{\vec{q}} s_q^- s_{-q}^-$ . O primeiro contribui com o termo em  $M$  (abaixo) que servirá para eliminar o campo indesejável (3.59), exigindo-se que

$$-\zeta_0 I_{01} v_- - \frac{\overline{r_0}}{2\Omega} (2\Omega M) = 0 . \quad (3.68)$$

Usando (3.54) obtemos,

$$M = -b^{2-\frac{\epsilon}{2}} \left[ I_{01} \frac{v_-}{r_0} + O(\epsilon^{3/2}) \right] , \quad (3.69)$$

e, a ordem de  $M$  é  $\frac{\epsilon}{2}$ , como anunciado anteriormente.

As equações de recorrência para as variáveis relevantes podem ser re-escritas. Usando (3.69) e mantendo  $e_- = 1$  (3.62),  $r_+$  e  $r_0$  fixos (3.67), obtemos,

$$r'_- = \overline{r_-} + 2Mv_- = b^2 \left[ r_- - 4I_{01}B_- + 12I_{01}u_- - 4I_{01} \frac{w_-^2}{r_+} - 2I_{01} \frac{v_-^2}{r_0} + O(\epsilon^2) \right] , \quad (3.70)$$

$$v'_- = \overline{v_-} = b^{\frac{\epsilon}{2}} \left[ v_- + 4I_{02}B_-v_- - 12I_{02}u_-v_- + 4I_{02} \frac{w_-^2}{r_+}v_- + I_{02} \frac{v_-^3}{r_0} + O(\epsilon^{5/2}) \right] , \quad (3.71)$$

$$w'_- = \overline{w_-} = b^{\frac{\epsilon}{2}} \left[ w_- - 12I_{02}u_-w_- + 5I_{02} \frac{w_-^3}{r_+} + O(\epsilon^{5/2}) \right] , \quad (3.72)$$

$$B'_- = \overline{B_-} = b^\epsilon \left[ B_- + 4I_{02}B_-^2 - 24I_{02}u_-B_- + 8I_{02} \frac{w_-^2}{r_+}B_- + O(\epsilon^3) \right] , \quad (3.73)$$

$$u'_- = \overline{u_-} = b^\epsilon \left[ u_- - 36I_{02}u_-^2 + 24I_{02} \frac{w_-^2}{r_+}u_- - 4I_{02} \frac{w_-^4}{r_+^2} + O(\epsilon^3) \right] . \quad (3.74)$$

### 3.7 Pontos fixos

O estudo do diagrama de fases requer uma interpretação física dos campos. Comentamos que a variável  $r_-$  do hamiltoniano original (3.38) anula-se na condição crítica de campo médio, e é função da temperatura. A solução não trivial para o modelo de Ising [32] ocorre para  $d = 4 - \epsilon$ , quando o hamiltoniano renormalizado apresenta um ponto fixo com  $u^* = O(\epsilon)$ , o que implica em  $r_-^* = O(\epsilon)$ . Então,  $u$  representa o efeito das flutuações no modelo de Ising. Uma inspeção no mesmo hamiltoniano (3.38) mostra

que  $B_- \sim [Q(\pi \vec{1})]^2 \sim (j_F + j_A)^2$ , sendo uma medida da magnitude do acoplamento spin-rede [19], representando a compressibilidade no comportamento crítico. O campo  $w_-$  é proporcional à magnetização,  $w_- \sim m$ , sendo, portanto, proporcional a pequenos campos magnéticos  $H$ . Por fim, o campo  $v_-$  é a soma de dois campos,  $v_- = w_- - cte m(j_F^2 - j_A^2)$ , devido a forma como foi escrito o hamiltoniano transformado (3.41). O termo novo [ $\sim m(j_F^2 - j_A^2)$ ] representa o efeito conjunto do campo ( $m \sim H$ ) com a anisotropia do acoplamento spin-rede (sendo  $j_F^2 - j_A^2$  uma particular medida dessa anisotropia). Assim, como o campo  $H$  favorece o alinhamento dos spins (magnetização total) através do termo de terceira ordem, de coeficiente  $w_-$ , a anisotropia do acoplamento spin-rede favorece ou diminui o alinhamento promovido pelo campo, de acordo com o sinal de  $j_F^2 - j_A^2$ . Alternativamente, podemos dizer que o campo aplicado, induzirá a rede a deformar-se de acordo com a anisotropia do acoplamento spin-rede. Ambos os campos  $w_-$  e  $v_-$  só fazem sentido na presença de um campo magnético. A pressão não pode ser isolada em uma variável, pois ela está na matriz de acoplamento ( $L_F$  e  $L_A$ ), que por sua vez está inicialmente em todos os coeficientes. O papel da pressão será o de reescalar os campos, como no caso isotrópico do *Capítulo 2*. Naquele ponto, foi possível estudar a sua influência no diagrama de fases, inclusive podendo mudar a ordem da transição, por intermédio da alteração das magnitudes relativas das variáveis  $g_+$  e  $\epsilon$ , lá definidas. Isto pode até ser possível, mas não poderemos vislumbrar tal efeito aqui.

Para facilitar o trabalho com as equações de recorrência, vamos definir duas novas variáveis,

$$W = \frac{w_-^2}{r_+} \quad , \quad V = \frac{v_-^2}{r_0} \quad , \quad (3.75)$$

que têm a mesma interpretação de  $w_-$  e  $v_-$  respectivamente. Observemos que  $W$  e  $V$  só podem ser positivos ou nulos, para ter sentido físico. Elevando

ao quadrado ambos os lados de (3.71) e (3.72) e dividindo por  $r_0$  e  $r_+$  respectivamente, em primeira ordem em  $\epsilon$  poderemos reescrever as equações de recorrência como,

$$\begin{aligned}
\delta r_- &= r'_- - r_- = (b^2 - 1) r_- - b^2 I_{01} (4B_- - 12u_- + 4W + 2V) \quad , \\
\delta V &= V' - V = V (\epsilon \ln b + 8I_{02} B_- - 24I_{02} u_- + 8I_{02} W + 2I_{02} V) \quad , \\
\delta W &= W' - W = W (\epsilon \ln b - 24I_{02} u_- + 10I_{02} W) \quad , \\
\delta B_- &= B'_- - B_- = B_- [\epsilon \ln b + 4I_{02} B_- - 24I_{02} u_- + 8I_{02} W] \quad , \\
\delta u_- &= u'_- - u_- = u_- [\epsilon \ln b - 36I_{02} u_- + 24I_{02} W] - 4I_{02} W^2 \quad . \quad (3.76)
\end{aligned}$$

Na forma final das equações de recorrência todas as variáveis são de ordem  $\epsilon$ . As equações recursivas acima anulam-se nos respectivos pontos fixos do modelo, listados na tabela 3.1.

*	$u^*$	$W^*$	$B_-^*$	$V^*$	$r_-^*$
$G_0$	0	0	0	0	0
$G_V$	0	0	0	$-\frac{\bar{\epsilon}}{2}$	$-c\bar{\epsilon}$
$G_B$	0	0	$-\frac{\bar{\epsilon}}{4}$	0	$-c\bar{\epsilon}$
$G_{VB}$	0	0	$-\frac{\bar{\epsilon}}{4}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{2}$	0
$I_0$	$\frac{\bar{\epsilon}}{36}$	0	0	0	$-\frac{c\bar{\epsilon}}{3}$
$I_V$	$\frac{\bar{\epsilon}}{36}$	0	0	$-\frac{\bar{\epsilon}}{6}$	$-\frac{2c\bar{\epsilon}}{3}$
$I_B$	$\frac{\bar{\epsilon}}{36}$	0	$-\frac{\bar{\epsilon}}{12}$	0	$-\frac{2c\bar{\epsilon}}{3}$
$I_{VB}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{36}$	0	$-\frac{\bar{\epsilon}}{12}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{6}$	$-\frac{c\bar{\epsilon}}{3}$

*	$u^*$	$W^*$	$B_-^*$	$V^*$	$r_-^*$
$M_0$	$\frac{\bar{\epsilon}}{9}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{6}$	0	0	$-\frac{2c\bar{\epsilon}}{3}$
$M_V$	$\frac{\bar{\epsilon}}{9}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{6}$	0	$\frac{\bar{\epsilon}}{6}$	$-\frac{c\bar{\epsilon}}{3}$
$M_B$	$\frac{\bar{\epsilon}}{9}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{6}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{12}$	0	$-\frac{c\bar{\epsilon}}{3}$
$M_{VB}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{9}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{6}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{12}$	$-\frac{\bar{\epsilon}}{6}$	$-\frac{2c\bar{\epsilon}}{3}$
$T_0$	$\frac{\bar{\epsilon}}{4}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{2}$	0	0	$-c\bar{\epsilon}$
$T_V$	$\frac{\bar{\epsilon}}{4}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{2}$	0	$\frac{\bar{\epsilon}}{2}$	0
$T_B$	$\frac{\bar{\epsilon}}{4}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{2}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{4}$	0	0
$T_{VB}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{4}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{2}$	$\frac{\bar{\epsilon}}{4}$	$-\frac{\bar{\epsilon}}{2}$	$-c\bar{\epsilon}$

Tabela 3.1: Pontos fixos em função de  $\bar{\epsilon} = 8\pi^2\epsilon$  e  $c\bar{\epsilon} = \frac{\pi^2}{2}\epsilon$ .

Os pontos fixos são escritos em unidades de  $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon \ln b}{I_{02}} = 8\pi^2\epsilon$  e  $c\bar{\epsilon} = \frac{b^2 I_{01} \ln b}{(b^2 - 1) I_{02}} \epsilon = \frac{1}{2}\pi^2\epsilon$  (ver Apêndice C) e são independentes de  $b$ , como era esperado. A denominação dos pontos deve-se ao modelo metamagnético rígido, em que  $r_0 = r_+$ ,  $B_- = 0$  e  $V = W$ , apresentando quatro pontos fixos: o



trivial gaussiano,  $G_0$ ; o ponto fixo do modelo de Ising,  $I_0$ ; o ponto fixo que governa a transição metamagnética,  $M_V$ , e o ponto fixo relacionado ao ponto tricrítico,  $T_V$ . A compressibilidade tem o efeito de multiplicar por quatro cada um dos pontos fixos do modelo rígido, produzindo casos como o modelo gaussiano com  $B_- \neq 0$  e  $V \neq 0$ , cuja criticalidade é representada por  $G_{VB}$ .

Uma linearização das equações de recorrência em torno dos pontos fixos, definindo-se os respectivos autovalores e autovetores da transformação, possibilita a construção esquemática do diagrama de fases. Seja a equação de recorrência para uma variável qualquer  $\varphi$ ,

$$\delta\varphi = \left[ \frac{\partial\varphi'}{\partial r_-} \right]_* \delta r_- + \left[ \frac{\partial\varphi'}{\partial W} \right]_* \delta W + \left[ \frac{\partial\varphi'}{\partial V} \right]_* \delta V + \left[ \frac{\partial\varphi'}{\partial B_-} \right]_* \delta B_- + \left[ \frac{\partial\varphi'}{\partial u_-} \right]_* \delta u_-, \quad (3.77)$$

onde  $\delta\varphi = \varphi' - \varphi^*$ , com  $\varphi^*$  seu valor no ponto fixo. Uma vez linearizadas, as equações recursivas podem ser expressas pela equação matricial,  $\vec{v}' = \Xi \vec{v}$ , onde  $\vec{v} = [\varphi - \varphi^*]$  são vetores e  $\Xi$  é a matriz da transformação. Cada ponto fixo tem a ele associado um conjunto de fluxos no espaço de parâmetros  $\varphi$ , que representam a aproximação ou afastamento dos mesmos, face a aplicação da transformação  $\Xi$ . Os autovetores e autovalores de  $\Xi$ , que definem respectivamente a direção e o sentido dos fluxos em cada ponto fixo, são obtidos exigindo-se que  $(\Xi - b^\lambda I) \vec{v}_\lambda = 0$ , onde  $I$  é a matriz identidade,  $\vec{v}_\lambda$  são os autovetores e  $b^\lambda$  os autovalores da transformação. Se há solução não trivial, teremos  $\det[\Xi - b^\lambda I] = 0$ , o que permite o cálculo de  $\lambda$ . Os autovetores serão expressos em termos de quatro componentes,  $\vec{v}_\lambda = (\delta u_-, \delta W, \delta B_-, \delta V)$ . O campo  $r_-$  não necessita ser incluído, porque nenhuma das variáveis depende dele e  $r_- \rightarrow r_-^*$  sempre que  $\varphi \rightarrow \varphi^*$ , ou seja, o ponto fixo de  $r_-$  é definido pelos demais campos. Na tabela 3.2, são listados os valores de  $\lambda$  e  $\vec{v}_\lambda$  para os respectivos pontos fixos da tabela 3.1. A dependência de  $I_{01}$  em  $r_-$  é responsável pela correção de ordem  $\epsilon$  no cálculo de  $\lambda_r$ , uma vez

que  $\frac{\partial I_{01}}{\partial r_-} = -I_{02}$ . Para os demais autovalores, a correspondente derivada  $\frac{\partial I_{02}}{\partial r_-} = -2 I_{03}$  está ligada a termos de maior ordem.

Um ponto fixo é caracterizado pela classe de universalidade a que ele pertence, definida pelos expoentes críticos. Devido à teoria de escala são necessários apenas dois deles para se determinar os demais. Em grupo de renormalização é usual calcular os expoentes  $\nu$  e  $\eta$ , definidos por,

$$\xi \sim |t|^{-\nu} \quad , \quad \Gamma(\vec{q}) \sim \frac{1}{q^{2-\eta}} \quad , \quad (3.78)$$

onde  $\xi$  é o comprimento de correlação,  $t$  é proporcional à diferença entre a temperatura e a temperatura crítica, e  $\Gamma$  é a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos. Mostra-se que  $\nu$  está relacionado ao maior autovalor da transformação [32], que neste caso é  $b^{\lambda_r}$ , na forma  $\nu = 1/\lambda_r$ . Os valores de  $\nu$  estão listados na tabela 3.2. O expoente crítico  $\eta$  é calculado [32] à partir da relação de escala para  $e_-$  (3.62), sendo da mesma ordem da correção desta variável, portanto  $\epsilon^2$ . Assim,  $\eta = O(\epsilon^2)$ , e, em primeira ordem, a classe de universalidade fica definida pelo expoente crítico  $\nu$ . Devido à importância do expoente crítico  $\alpha$  na análise dos sistemas compressíveis, vamos obtê-lo quando necessário através da seguinte relação entre os expoentes críticos:  $\alpha = 2 - d\nu$ .

*	$G_0$	$G_V$	$G_B$	$G_{VB}$
$\lambda_1$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
$v_1$	$(1, 0, 0, 0)$	$(1, 0, 0, 6)$	$(1, 0, 3, 0)$	$(1, 0, 3, 0)$
$\lambda_2$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
$v_2$	$(0, 1, 0, 0)$	$(0, 1, 0, -2)$	$(0, 1, -1, 0)$	$(0, 1, -1, 0)$
$\lambda_B$	$\epsilon$	$\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
$v_B$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 1, -2)$
$\lambda_V$	$\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$\epsilon$
$v_V$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$
$\lambda_r$	2	$2 - \epsilon$	$2 - \epsilon$	2
$\nu$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4}$	$\frac{1}{2}$

*	$I_0$	$I_V$	$I_B$	$I_{VB}$
$\lambda_1$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
$v_1$	$(1, 0, 0, 0)$	$(1, 0, 0, -6)$	$(1, 0, -3, 0)$	$(1, 0, -3, 0)$
$\lambda_2$	$\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{3}$
$v_2$	$(1, 2, 0, 0)$	$(1, 2, 0, 2)$	$(1, 2, 1, 0)$	$(1, 2, 1, 0)$
$\lambda_B$	$\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{3}$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$-\frac{\epsilon}{3}$
$v_B$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 1, -2)$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 1, -2)$
$\lambda_V$	$\frac{\epsilon}{3}$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{3}$
$v_V$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$
$\lambda_r$	$2 - \frac{\epsilon}{3}$	$2 - \frac{2\epsilon}{3}$	$2 - \frac{2\epsilon}{3}$	$2 - \frac{\epsilon}{3}$
$\nu$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}$

*	$M_0$	$M_V$	$M_B$	$M_{VB}$
$\lambda_1$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
$\nu_1$	$(2, 3, 0, 0)$	$(2, 3, 0, 3)$	$(2, 3, \frac{3}{2}, 0)$	$(2, 3, \frac{3}{2}, -3)$
$\lambda_2$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$-\frac{\epsilon}{3}$
$\nu_2$	$(1, 2, 0, 0)$	$(1, 2, 0, 2)$	$(1, 2, 1, 0)$	$(1, 2, 1, 0)$
$\lambda_B$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{3}$
$\nu_B$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 1, -2)$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 1, -2)$
$\lambda_V$	$-\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{3}$	$\frac{\epsilon}{3}$	$-\frac{\epsilon}{3}$
$\nu_V$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$
$\lambda_r$	$2 - \frac{2\epsilon}{3}$	$2 - \frac{\epsilon}{3}$	$2 - \frac{\epsilon}{3}$	$2 - \frac{2\epsilon}{3}$
$\nu$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{6}$

*	$T_0$	$T_V$	$T_B$	$T_{VB}$
$\lambda_1$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
$\nu_1$	$(1, 3, 0, 0)$	$(1, 3, 0, 0)$	$(1, 3, 0, 0)$	$(1, 3, 0, 0)$
$\lambda_2$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$-\epsilon$
$\nu_2$	$(1, 2, 0, 0)$	$(1, 2, 0, 2)$	$(1, 2, 1, 0)$	$(1, 2, 1, 0)$
$\lambda_B$	$-\epsilon$	$-\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
$\nu_B$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 1, -2)$	$(0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 1, -2)$
$\lambda_V$	$-\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$-\epsilon$
$\nu_V$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 1)$
$\lambda_r$	$2 - \epsilon$	$2$	$2$	$2 - \epsilon$
$\nu$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4}$

Tabela 3.2: Autovalores e autovetores relacionados aos pontos fixos da tabela 3.1. Também são listados os expoentes críticos  $\nu$  em ordem  $\epsilon$ .

### 3.8 O diagrama de fluxos

Cada um dos dezesseis pontos fixos apresentados pelo modelo, está em uma das quatro classes de universalidade existentes neste caso. Um ponto fixo clássico é aquele com  $\nu = 1/2$ , o mesmo valor fornecido por uma expansão de Landau. O grupo de renormalização também fornece  $\nu = 1/2$  em alguns casos: no modelo gaussiano e na análise de pontos tricríticos de alguns modelos com  $n = 1$  [9][33], onde  $n$  é o número de componentes espaciais do parâmetro de ordem. Na tabela 3.2 há quatro pontos fixos com  $\nu = 1/2$ . Uma outra classe bem definida é a do modelo de Ising, com  $\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12}$  [32], valor de outros quatro pontos fixos do modelo. Os demais pontos fixos têm expoente  $\nu$  que não são clássicos e nem são típicos do modelo de Ising.

Uma inspeção nas equações de recorrência (3.76) mostra que se inicialmente  $B_-$ ,  $W$  ou  $V$  são nulos, eles permanecem nulos com as iterações do grupo de renormalização. Assim, o modelo metamagnético compressível apresenta como casos particulares vários outros modelos. Vamos inicialmente, recuperar a análise do diagrama de fases do modelo de Domb, representado por um hamiltoniano com  $r_+ = r_0 = v_- = w_- = 0$  (3.64), apresentando quatro pontos fixos:  $G_0, G_B, I_0, I_B$  [19]. Na figura 3.1 esquematizamos o diagrama de fluxos no espaço  $B_- \times u_-$  (com  $r_- = r_-^*$ ), representando as trajetórias das iterações no espaço destes parâmetros.  $G_0$  é o ponto fixo gaussiano e dele partem as linhas de fluxo que chegam aos outros pontos fixos da figura. Se inicialmente  $B_- = 0$  e  $u_- > 0$  o fluxo aponta para  $I_0$  [ $\lambda_1 = -\epsilon$ ,  $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ ], que é o ponto fixo estável, correspondente a transição de segunda ordem do modelo de Ising (antiferromagnético, neste caso). Para  $u_- = 0$  e  $B_- < 0$ , o ponto fixo estável é  $G_B$ , que controla o comportamento crítico, com  $\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4}$ . Em se tratando de um hamiltoniano do modelo gaussiano com termo biquadrático vamos denominá-lo tipo

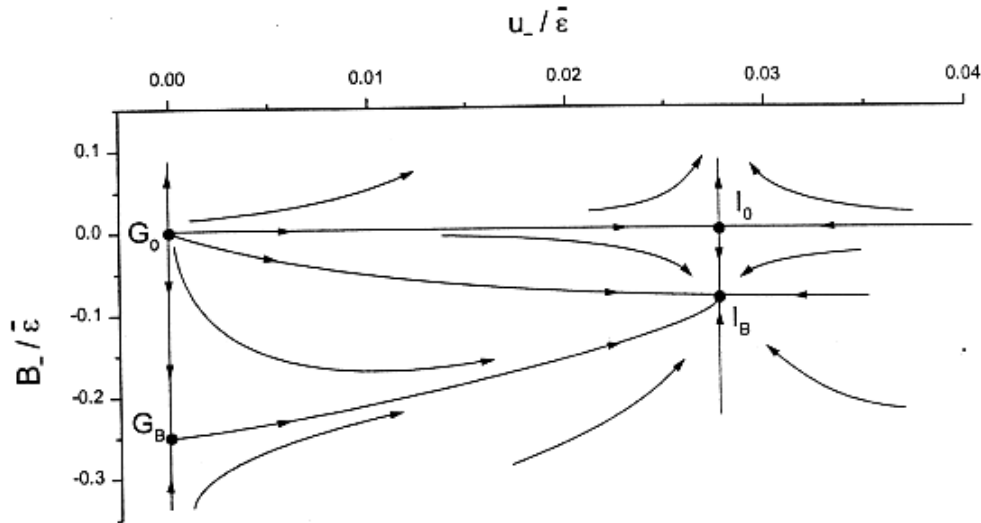


Figura 3.1: Diagrama de fluxos típico do modelo de Domb no espaço  $B_- \times u_-$ .

‘gaussiano compressível’. Com exceção dessas duas linhas de fluxo, todas as demais convergem para  $I_B$ , que comanda o comportamento crítico para  $u_- > 0$ ,  $B_- < 0$ . Este ponto, que define o comportamento tipo ‘Ising compressível’ (com  $\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{6}$ ), representaria o comportamento crítico do modelo de Domb, não fosse o fato de  $B_-$  ser inicialmente positivo e não haver passagem do fluxo de  $B_- > 0$  para  $B_- < 0$ . Ademais, se  $B_- > 0$ , os fluxos levam os campos  $u_-$  e  $B_-$  a se afastarem cada vez mais dos pontos fixos, indicando uma transição de primeira ordem. Assim, pela análise de grupo de renormalização conclui-se que o modelo de Domb não apresenta transição de fase contínua.

O modelo metamagnético rígido, como comentamos, tem hamiltoniano (3.64) com  $r_0 = r_+$ ,  $v_- = w_-$  ( $V = W$ ) e  $B_- = 0$ , apresentando quatro pontos fixos:  $G_0$ ,  $I_0$ ,  $M_V$ ,  $T_V$  [9]. O respectivo diagrama de fluxos é um corte no plano  $V = W$  do espaço de parâmetros, que representamos no sistema de

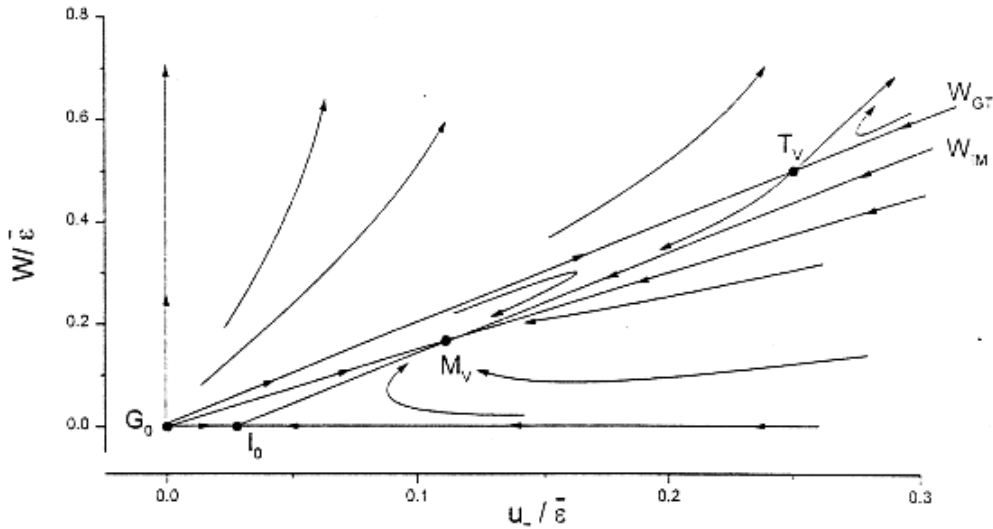


Figura 3.2: Diagrama de fluxos do modelo metamagnético rígido no espaço  $W \times u_-$ .

eixos  $W \times u_-$ , como pode ser visto na figura 3.2. Em campo nulo,  $W = 0$ , se  $u_- > 0$ , o fluxo que sai do ponto fixo gaussiano  $G_0$ , dirige-se para  $I_0$ , que é o ponto fixo do modelo de Ising. Se agora o sistema for caracterizado por um certo valor inicial de  $u_-$ , a aplicação de um pequeno campo ( $W > 0$ ) induz ao ponto fixo  $M_V$ , para onde as linhas de fluxo convergem. Este ponto representa a transição metamagnética e tem expoentes críticos do tipo Ising. Quando o campo for suficientemente alto, tal que  $W = 2u_-$ , o ponto fixo estável passa a ser  $T_V$ , que indica o ponto tricrítico. Este tem expoentes críticos do modelo gaussiano, como obtido em alguns modelos com  $n = 1$  [33][34], comentado anteriormente. Abaixo da linha  $W = 2u_-$  os fluxos sempre convergem para o ponto fixo  $M_V$ , enquanto acima da linha,  $W$  cresce indefinidamente e  $u_-$  fica negativo, indicando uma transição de primeira ordem se  $W > 2u_-$ . Desta forma, qualitativamente, as análises de grupo

de renormalização e campo médio concordam para o modelo metamagnético, contrariamente ao que ocorre para o modelo de Domb.

A visualização do diagrama de fluxos do modelo metamagnético compressível é difícil, dado que há quatro parâmetros,  $u_-$ ,  $W$ ,  $B_-$  e  $V$ , mas podemos entendê-lo por meio de cortes, como aqueles das figuras 3.1 e 3.2. Cortes elucidativos do diagrama geral são aqueles cujas linhas de fluxo ficam aprisionadas, uma vez que estejam no subespaço definido pelo corte. Um hamiltoniano de partida representado por um ponto num desses subespaços, é renormalizado de forma a permanecer contido nos mesmos. Devido as equações de recorrência para  $u_-$  e  $W$  serem independentes de  $B_-$  e  $V$ , o diagrama geral de fluxos deve ser estudado a partir daquele da figura 3.2. Em nosso caso a direção  $\delta W = 2\delta u_-$  faz um papel fundamental. Usando as equações (3.76), teremos como soluções as equações das retas  $W = W_{GT} = 2u_-$  e  $W = W_{IM} = 2u_- - \bar{\epsilon}/18$ , que ligam, respectivamente, os pontos  $G_0 - T_V$  e  $I_0 - M_V$ , no referido diagrama. Isto significa que os fluxos não saem dessas retas, uma vez que lá estejam, definindo dois subespaços,  $(W_{GT}, B_-, V)$  e  $(W_{IM}, B_-, V)$ , no espaço de quatro parâmetros, que contém respectivamente os pontos fixos dos tipos  $G - T$  e  $I - M$ . Uma particularidade que facilita a análise, diz respeito a topologia do diagrama de fluxos, que é idêntica para os dois subespaços, permitindo que sejam visualizados dois diagramas no mesmo desenho.

Na figura 3.3 (a) estão esquematizados os diagramas de fluxos nos planos  $(W_{IM}, B_-, V = 0)$  e  $(W_{GT}, B_-, V = 0)$ . O primeiro contém os pontos fixos  $(I_B, I_0, M_0, M_B)$  e o segundo  $(G_B, G_0, T_0, T_B)$  (entre colchetes), mas como os fluxos entre os respectivos pontos fixos são idênticos, os dois diagramas podem ser vistos na mesma figura. Da mesma forma, na figura 3.3 (b) são mostrados os diagramas de fluxos nos planos  $(W_{IM} [W_{GT}], B_- = 0, V)$ .



Da figura 3.3 (a) vê-se que para  $B_- < 0$  os pontos fixos  $I_B$  e  $G_B$  só são acessados se  $W = 0$ , pois se  $W > 0$  os fluxos sempre dirigem-se para  $M_0 [T_0]$ . Para  $B_- > 0$  a linha  $B_- = W/2$  (que liga  $I_0 [G_0]$  a  $M_B [T_B]$ ) separa os dois regimes possíveis: para  $B_- > W/2$  o fluxo é divergente e não ocorre transição de segunda ordem, enquanto para  $B_- < W/2$  o ponto fixo  $M_0 [T_0]$  é sempre estável, governando o comportamento crítico. Somente quando  $W = 2B_-$  o ponto  $M_B [T_B]$  é acessado, tratando-se de um ponto tricrítico

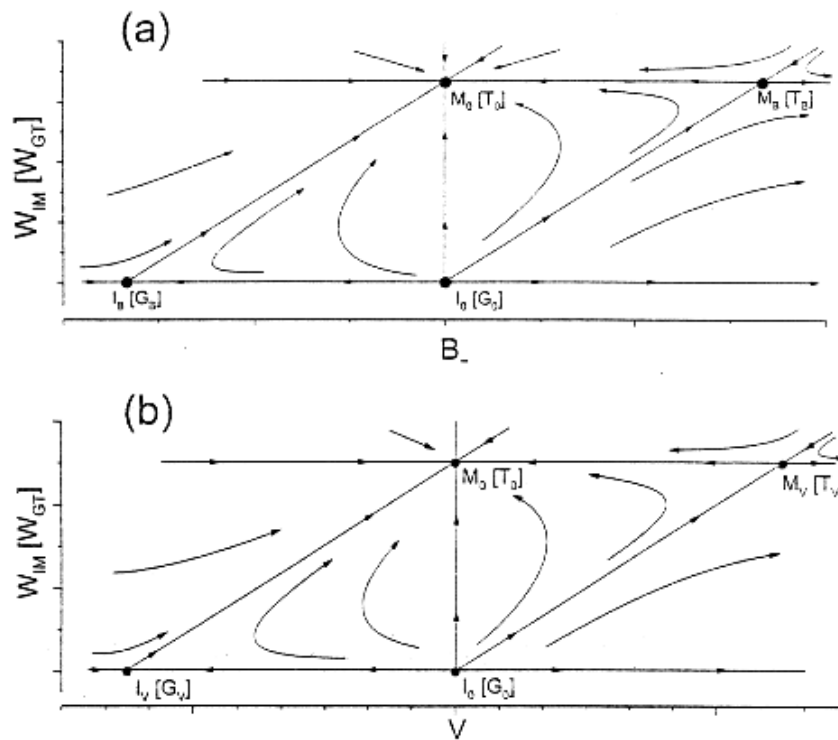


Figura 3.3: Fluxo nos planos (a)  $(W_{IM} [W_{GT}], B_-, V = 0)$  e (b)  $(W_{IM} [W_{GT}], B_- = 0, V)$ , onde  $W_{IM} = 2u_- - \bar{\epsilon}/18$  e  $W_{GT} = 2u_-$ . A forma dos fluxos é a mesma nos subespaços definidos por  $W_{IM}$  e  $W_{GT}$ , sendo esquematizadas nas mesmas figuras. Os pontos fixos de  $W_{GT}$  estão escritos entre colchetes.

(ver discussão abaixo). O diagrama de fluxos no plano  $W \times V$ , exibido em (b) tem um desenho semelhante ao anterior, onde o ponto fixo mais estável é igualmente  $M_0 [T_0]$ . Da mesma forma, se  $B_- > W/2$  o fluxo é divergente e  $M_V [T_V]$  é um ponto tricrítico, por ser acessado somente no limite da região de convergência.

Uma visão mais geral dos fluxos pode ser obtida, desenhando-se diagramas tridimensionais, perpendiculares às retas  $W_{GT} = 2u_-$  e  $W_{IM} = 2u_- - \bar{\epsilon}/18$  (e portanto, aos diagramas da figura 3.3), como mostramos na figura 3.4 (a). Novamente, superpomos os diagramas, com os pontos fixos de  $W_{GT}$  escritos entre colchetes. Os pontos fixos do tipo  $I [G]$  ficam abaixo e os pontos  $M [T]$  acima, em relação ao plano da folha. Vamos usar a seguinte convenção: as linhas tracejadas indicam fluxos nos planos de pontos do tipo  $I [G]$ ; as linhas cheias os fluxos nos planos definidos por  $M [T]$ ; linhas pontilhadas definem fluxos entre pontos do tipo  $I - M [G - T]$ ; linhas traço-ponto legendadas indicam fluxos mais gerais. Iniciando pelo lado esquerdo da figura ( $B_- < 0$ ), os pontos fixos  $I_V [G_V]$ ,  $I_B [G_B]$  e  $I_{VB} [G_{VB}]$  estão no plano de  $I_0 [G_0]$  (com  $W = 0$ ) e só são acessados pelos fluxos que ocorrem dentro deste plano, segundo o esquema do desenho. Acima deste ( $W > 0$ ), os fluxos de quase todo espaço convergem para  $M_0 [T_0]$  (linhas traço-ponto), com excessão de uma pequena região delimitada pelo plano  $V = W - 2B_-$  (que contém os pontos  $I_0 [G_0]$ ,  $I_{VB} [G_{VB}]$ ,  $M_V [T_V]$  e  $M_B [T_B]$ ): acima dele os fluxos convergem para  $M_0 [T_0]$ , dentro convergem para  $M_V [T_V]$  e abaixo os fluxos divergem dos pontos fixos. Inspecionemos agora o lado direito do gráfico ( $B_- > 0$ ), onde os fluxos do quadrante superior também são separados pelo plano  $V = W - 2B_-$ . Acima dele ( $V < W - 2B_-$ ) o ponto fixo estável é também  $M_0 [T_0]$ , e abaixo os fluxos divergem. Dentro do plano o ponto fixo mais estável é  $M_V [T_V]$ , ao passo que  $M_B [T_B]$  só é acessível na

condição  $B_- = W/2$ ,  $V = 0$ . Por fim, no quadrante direito inferior o plano  $B_- = W/2$  é quem divide os fluxos: acima dele ( $B_- < W/2$ ) o ponto de convergência também é  $M_0 [T_0]$  e abaixo os fluxos escapam dos pontos fixos. Dentro do plano o ponto fixo mais estável é  $M_{VB} [T_{VB}]$ . Uma vista frontal do diagrama (para  $B_- > 0$ ) pode ser apreciada na figura 3.4 (b).

Fora das condições  $W_{IM} = 2u_- - \bar{\epsilon}/18$  e  $W_{GT} = 2u_-$  os fluxos apresentam formas espaciais complicadas, mas podemos resolver o problema observando que a regra estabelecida pelo diagrama  $W \times u_-$  (figura 3.2) é respeitada: se  $W > 2u_-$ , o fluxo é divergente; se  $W = 2u_-$  as linhas de fluxo ficam confinadas neste subespaço ( $W_{GT}$ ); se  $W < 2u_-$  as linhas sempre convergem para a condição  $W_{IM}$ . Desta forma fica completamente determinado o diagrama de fluxos, pois para  $W \leq 2u_-$ , poderemos sempre nos basear na figura 3.4. Como observamos anteriormente,  $V$  precisa ser positivo ou nulo para ter sentido físico, enquanto  $B_-$  é inicialmente positivo. Então, o quadrante superior direito da figura 3.4 (a) [quadrante direito da figura 3.4 (b)] é aquele que contém a descrição do comportamento crítico do modelo metamagnético compressível. Podemos, portanto, afirmar que a transição de segunda ordem é em geral governada pelo ponto fixo  $M_0$ , que é acessado sempre que  $W < 2u_-$  e  $0 < V < W - 2B_-$ . Todos os demais pontos fixos que podem ser acessados estão nas fronteiras da região de convergência, representando, portanto, pontos tricríticos. São eles:  $M_V$  e  $M_B$ , na condição  $W = W_{IM}$ ,  $V = W - 2B_-$ ;  $T_0$  na condição  $W = W_{GT}$ ,  $V < W - 2B_-$ ;  $T_V$  e  $T_B$  na fronteira  $W = W_{GT}$ ,  $V = W - 2B_-$ . Cada um desses pontos é representativo de um particular hamiltoniano inicial.

O comportamento crítico do modelo metamagnético rígido está representado na figura 3.4 pela linha pontilhada  $V = W$ , que liga  $I_0 [G_0]$  a  $M_V [T_V]$ . Se  $W = 0$  o sistema está em  $I_0 [G_0]$ , mas aplicando-se um pequeno campo, o

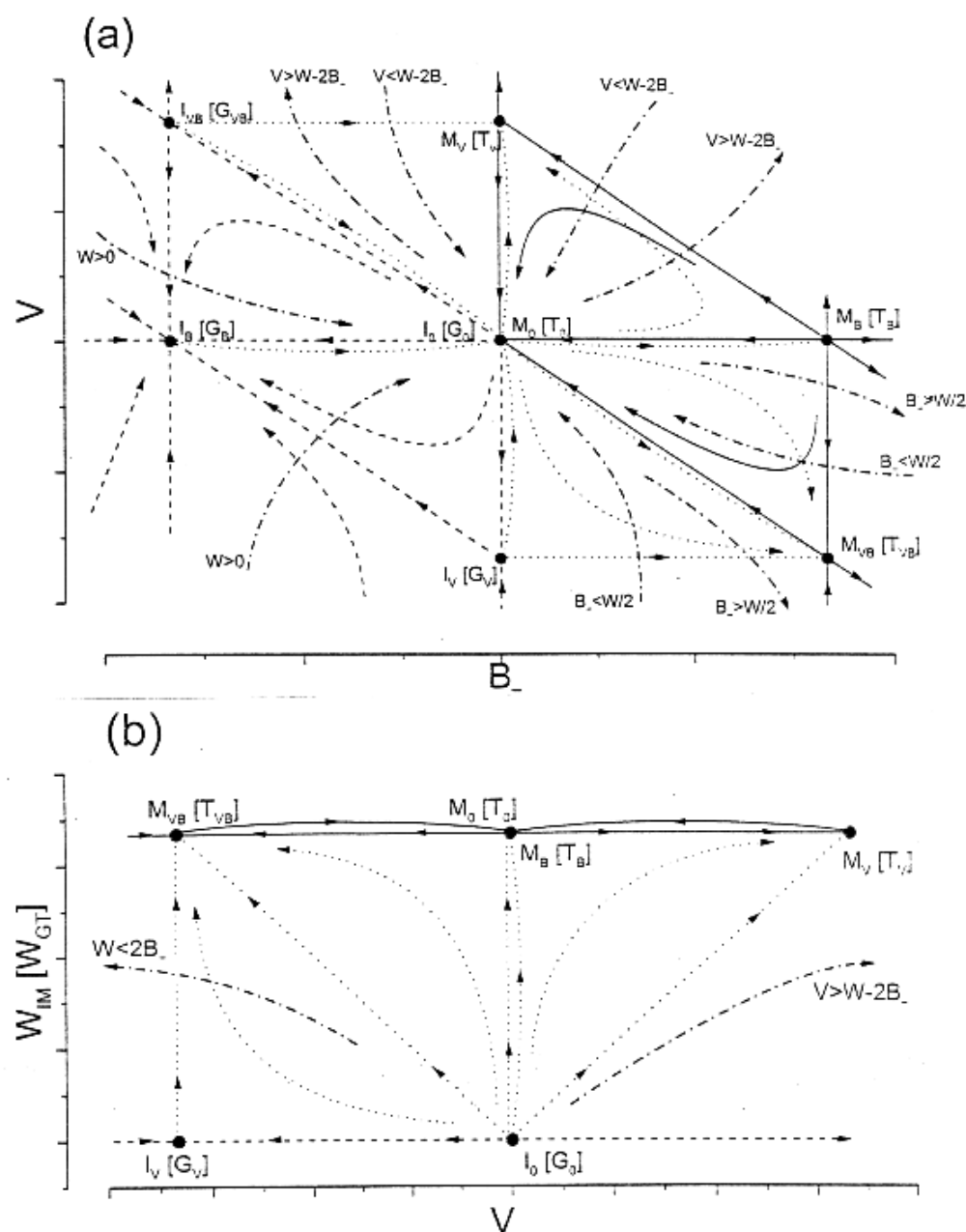


Figura 3.4: a) Vista superior do diagrama de fluxos, perpendicularmente às retas  $W_{IM} = 2u_- - \bar{\epsilon}/18$  e  $W_{GT} = 2u_-$ . Como na figura 3.3, os dois diagramas podem ser vistos na mesma figura, com os pontos fixos de  $W_{GT}$  escritos entre colchetes. b) Vista frontal do lado  $B_- > 0$ .

fluxo leva ao ponto fixo  $M_V (I_V)$ , como na figura 3.2. Se agora o hamiltoniano inicial tiver  $V = W$ , mas com uma compressibilidade  $B_- > 0$ , os fluxos serão divergentes ( $V > W - 2B_-$ ) e a transição será de primeira ordem. Portanto, a elasticidade - representada pelo termo biquadrático - desestabiliza a transição contínua do modelo metamagnético, tal como no modelo de Domb. Mas no presente caso, poderá haver transição contínua se houver anisotropia no acoplamento spin-rede,  $(j_F^2 - j_A^2) \neq 0$  (i.e.  $V \neq W$ ) e um campo aplicado, de forma que  $0 \leq V \leq W - 2B_-$ , tornando acessível um dos pontos fixos. Portanto, no modelo compressível, se o campo for baixo  $W < 2u_-$ , mas suficientemente alto para satisfazer  $0 < V < W - 2B_-$ , haverá um ponto fixo estável,  $M_0$ , representando a linha de transição contínua no diagrama campo-temperatura. Essa linha é composta de legítimos pontos críticos do tipo Ising compressível (definido anteriormente).

Para construir o diagrama de fases campo-temperatura, devemos estabelecer o comportamento crítico correspondente para cada particular valor do campo magnético. Este comportamento pode ser deduzido do diagrama de fluxos, representando nele o hamiltoniano inicial e verificando se existe convergência para algum ponto fixo. O hamiltoniano é definido por  $u_-$ ,  $B_- \sim (j_F + j_A)^2$ , além de  $V$  e  $W$  que dependem do campo. Lembrando que  $v_- = w_- - cte m(j_F^2 - j_A^2)$  e que  $w_- \sim m \sim H$ , podemos escrever  $v_- \sim w_-(1 - \Sigma)$ , onde  $\Sigma \sim (j_F^2 - j_A^2)$ . Das definições (3.75),  $V = cte W(1 - \Sigma)^2$ , mas para facilitar a análise, vamos supor que fizemos um reescalonamento das variáveis de spin, para que as variáveis  $V$  e  $W$  no início das transformações possam ser exatamente relacionadas por  $V = W(1 - \Sigma)^2$ . Agora sim, o hamiltoniano inicial (3.64) passa a ser representado por variáveis independentes  $u_-$ ,  $B_-$ ,  $\Sigma$  e  $w_-$ , esta última linearmente dependente do campo magnético. Logicamente se  $\Sigma = 0$ ,  $V = W$  e o modelo é isotrópico. Baseados nos diagramas das figuras

3.2, 3.3 e 3.4 com  $u_-, B_-, W, V \geq 0$ , as condições de criticalidade  $W \leq 2u_-$  e  $V < W - 2B_-$  podem ser expressas por (i)  $2u_- \geq W \geq \frac{2B_-}{1-(1-\Sigma)^2}$ . Adicionalmente devemos ter (ii)  $B_- \leq [1 - (1 - \Sigma)^2]u_-$  e (iii)  $0 \leq \Sigma \leq 2$ . Supondo que  $\Sigma$  e  $B_-$  satisfaçam, respectivamente, as desigualdades (ii) e (iii) (não as igualdades), a campo nulo ( $W = 0$ ) a transição será de primeira ordem devido a condição (i) não satisfeita. Aumentando-se o campo até satisfazer (i) como igualdade, o ponto fixo  $M_V$  será estável, que é um ponto tricrítico. Acima desse valor do campo tricrítico o ponto fixo  $M_0$  é estável, definindo uma linha de transição contínua. O campo pode continuar crescendo até que se atinja  $W = 2u_-$ , onde ocorre um outro ponto tricrítico,  $T_0$ . Desta forma, fora os casos especiais, o diagrama de fases do modelo em campos altos e baixos apresenta coexistência de fases, e em campos intermediários transição de segunda ordem. A linha de transição contínua tem expoentes críticos tipo Ising compressível, o ponto tricrítico que ocorre a campos baixos ( $M_V$ ) expoentes críticos de Ising, e o ponto tricrítico de campos altos ( $T_0$ ) expoentes do tipo gaussiano compressível.

Há varios casos particulares a serem considerados. Pela condição (iii) o limite inferior da anisotropia elástica é  $\Sigma = 0$ , implicando em  $V = W$ , e pela condição (ii)  $B_- = 0$  ( $j_F = j_A = 0$ ), o modelo deve ser rígido para haver transição contínua. O efeito estabilizador da anisotropia elástica tem um ponto de saturação,  $\Sigma = 2$ , que também implica em  $V = W$  e  $B_- = 0$ , o que fisicamente significa alta compressibilidade mas com  $j_F = -j_A$ . A presente abordagem mostra que este caso extremo apresenta o mesmo comportamento crítico do modelo rígido (figura 3.2). Para  $0 < \Sigma < 2$  e  $B_-$  satisfazendo a condição (ii), o sistema normalmente exhibe o comportamento crítico usual do modelo metamagnético compressível, com dois pontos tricríticos ( $M_V$  e  $T_0$ ) e uma linha de transição contínua intermediária ( $M_0$ ). Mas quando a condição

(ii) é satisfeita como igualdade, a condição (i) só permite  $W = 2u_-$ , o que representa um colapso da linha crítica, que fica reduzida a um único ponto tricrítico,  $T_V$  ou  $T_B$  (gaussianos), sobre a linha de primeira ordem, como ocorre no caso isotrópico do modelo de campo médio, estudado no *Capítulo 2*. Por fim, se  $\Sigma = 1$  a condição (ii) fica  $B_- \leq u_-$ , permitindo transição de segunda ordem para os mais altos valores da compressibilidade  $B_-$ . Neste caso  $V = 0$ , o que caracteriza um comportamento tricrítico especial, cujo ponto tricrítico de baixos campos é  $M_B$ , de Ising, enquanto em campos altos é  $T_B$ , do tipo gaussiano. Também aqui pode haver o colapso da linha crítica, sobre o ponto tricrítico  $T_B$ .

Devemos enfatizar, que os comportamentos críticos previstos pela aproximação de campo médio e pelo grupo de renormalização são discordantes. Em campo médio, no caso do acoplamento spin-rede isotrópico, é previsto, normalmente, comportamento metamagnético simples, e extraordinariamente, quando o acoplamento spin-rede ( $\xi_p$ ) é alto e a razão entre os acoplamentos ferro e antiferromagnético ( $\epsilon$ ) é baixa, dois pontos tricríticos com transição contínua em temperaturas intermediárias. No caso anisotrópico em baixa compressibilidade, só é esperado comportamento tricrítico usual (ver *Capítulo 2*). Contrariamente, o grupo de renormalização prevê que o modelo compressível só exibirá transição de segunda ordem, se houver anisotropia no acoplamento spin-rede e um campo aplicado. neste caso, haverá ordinariamente transição contínua em campos intermediários e coexistência de fases para campos suficientemente baixos ou altos.

Dependendo das condições de contorno usadas, o modelo de Baker e Essam [16] apresenta um ponto fixo com renormalização de Fisher [37], ou seja, os expoentes críticos são modificados em relação aos do modelo de Ising, de maneira particular. A saber, o expoente crítico  $\alpha$  do calor específico fica

$\alpha_r = -\alpha_I/(1 - \alpha_I)$ , onde  $\alpha_I$  é o respectivo expoente crítico para o modelo de Ising. A transição ordinária de segunda ordem do modelo metamagnético rígido ( $M_V$ ) tem expoentes tipo Ising,  $\alpha_I = \epsilon/6$ , fornecendo um expoente renormalizado  $\alpha_r = -\epsilon/6$ , que é exatamente o valor de  $\alpha$  para a transição correspondente do modelo compressível,  $M_0$ . Da mesma forma, o ponto tricrítico do modelo rígido ( $T_V$ ) apresenta  $\alpha = \epsilon/2$ , enquanto que o ponto tricrítico de campos altos do caso compressível,  $T_0$ , tem  $\alpha = -\epsilon/2$ , identicamente renormalizado em relação ao do modelo rígido, embora não se trate de um ponto fixo de Ising, como originalmente tratado no trabalho de Fisher. Assim, o modelo metamagnético compressível pode exibir dois pontos fixos com expoentes críticos renormalizados em relação ao modelo rígido, como ocorre para o modelo de Baker e Essam.

O hamiltoniano renormalizado (3.64) é somente quadrático nas variáveis  $s_0^+$  e  $s_q^+$ , e, não há correspondente dependência em  $\vec{q}$ . Assim, podemos recorrer à transformação gaussiana (2.6) para fazer a integração nas respectivas variáveis de spin e reescrever um hamiltoniano reduzido na forma:

$$\begin{aligned} \Phi_{red} = & -\frac{1}{2} \int_{\vec{q}} (r_- + \vec{q}^2) s_{\vec{q}}^- s_{-\vec{q}}^- + \frac{1}{\Omega} \left( B_- + \frac{V}{2} - \frac{W}{2} \right) \left( \int_{\vec{q}} s_{\vec{q}}^- s_{-\vec{q}}^- \right)^2 + \\ & - \left( u_- - \frac{W}{2} \right) \int_{\vec{q}} \int_{\vec{q}'} \int_{\vec{q}''} s_{\vec{q}}^- s_{\vec{q}'}^- s_{\vec{q}''}^- s_{-\vec{q}-\vec{q}'-\vec{q}''}^- \quad . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Na ausência de compressibilidade  $r_0 = r_+$ ,  $V = W$  e  $B_- = 0$ , recuperando-se o hamiltoniano reduzido do modelo metamagnético rígido [9].

Notemos que os coeficientes dos termos de quarta ordem de (3.79) anulam-se exatamente nos pontos tricríticos [ver condição (i)], lembrando uma expansão de Landau. Inspecionando a equação de recorrência da variável  $r_-$  (3.76), podemos constatar que  $r_-^*$  é linearmente dependente dos mesmos coeficientes de quarta ordem de (3.79). Esta contribuição, por sua vez, define a correção de ordem  $\epsilon$  do expoente crítico  $\nu$ , e somente quando todos os ter-



mos de quarta ordem anulam-se, tem-se  $\nu$  do tipo gaussiano,  $\nu = 1/2 + O(\epsilon^2)$ , como ocorre para os pontos fixos  $T_V$  e  $T_B$ .

Comentamos que modelos com  $n = 2$ , anteriormente estudados, apresentam comportamento tricrítico não clássico para  $d < 4$  [9]. O modelo metamagnético rígido apresenta expoentes tricríticos do modelo gaussiano em  $d = 3$  (além das correções logarítmicas), apesar do hamiltoniano não renormalizado contar com duas variáveis de spin independentes (que é equivalente a ter  $n = 2$ ). Realmente, o hamiltoniano renormalizado tem a mesma forma do modelo de Ising [9]. Já o hamiltoniano renormalizado do modelo metamagnético compressível, não pode ser reduzido ao de Ising, e, apesar de contar com apenas uma variável de spin (ou com  $n = 1$ ), apresenta (com exceção dos casos particulares) pontos tricríticos com expoentes não clássicos. Da irrelevância dos campos em (3.63), depende o hamiltoniano reduzido acima, e tais variáveis permanecem irrelevantes para  $\epsilon = 4 - d < 2$ , permitindo afirmar-se que tais conclusões valem em  $d = 3$  (da mesma forma que o modelo metamagnético rígido).

Também comentamos que a compressibilidade (com cisalhamento) em sistemas com  $n = 1$  ( $\alpha > 0$ ) faz mudar a ordem da transição de fase, ao passo que se  $n \geq 2$  ( $\alpha < 0$ ), a transição permanece de segunda ordem, com os mesmos expoentes críticos do modelo rígido. Mas para o modelo metamagnético, cujo hamiltoniano reduzido tem  $n = 1$ , a compressibilidade ( $B_- > 0$ ) não impede em geral a transição de segunda ordem. A explicação disso já foi dada acima, onde se concluiu que a elasticidade da rede muda a ordem da transição metamagnética, a menos que haja uma anisotropia no acoplamento spin-rede ( $\Sigma \neq 0$ ), mantendo estável a transição de segunda ordem. Por fim, o modelo metamagnético compressível representa um caso diferente, que não se enquadra exatamente em nenhuma das regras previamente estabelecidas.

# Capítulo 4

## A expansão de Landau do modelo metamagnético rígido

### 4.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar a expansão de Landau do modelo metamagnético rígido, considerando expoentes de mais alta ordem que na análise feita para o modelo compressível, no *capítulo 2*. Sabemos que o modelo metamagnético apresenta um diagrama de fases campo-temperatura, com uma linha de transição de segunda ordem para campos baixos e uma linha de primeira ordem em campos altos. A forma como essas linhas se encontram é o assunto deste capítulo.

A expansão de Landau realizada aqui, tem uma versão diferente das expansões realizadas anteriormente [1]. Além de permitir a obtenção de coeficientes de mais alta ordem, estes são reduzidos a uma forma mais simples, permitindo verificar os limites da análise analítica, pela comparação com o comportamento crítico obtido numericamente. Concluimos que nem sempre um coeficiente negativo na expansão tem uma implicação no comportamento

crítico [31]. Realmente, a expansão apresenta coeficientes de alta ordem que são negativos, mas não têm efeito algum sobre o diagrama de fases. A análise numérica teve o objetivo de fazer esta verificação a partir da construção do diagrama de fases.

## 4.2 Expansão de Landau

Na obtenção da solução de campo médio do modelo metamagnético, vamos retornar ao cálculo feito para o modelo compressível, *no capítulo 2*. Os dois modelos são basicamente os mesmos, com exceção da compressibilidade da rede. Assim, o hamiltoniano é

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_i J_{ij} \sigma_j - \sum_i H_i \sigma_i \quad , \quad (4.1)$$

onde  $\sigma_i$  são as variáveis de spin,  $J_{ij}$  é ferromagnético ( $J_F$ ) dentro dos planos e antiferromagnético ( $-J_A$ ) entre os planos.  $H_i$  nos planos  $A$  é igual a  $H + H_s$  e nos planos  $B$ ,  $H - H_s$ .

Se na aproximação de campo médio para o modelo compressível, realizada no *capítulo 2*, fizermos  $j_F = j_A = 0$ , teremos a solução para o modelo rígido. A energia livre de Helmholtz (2.28) fica,

$$\begin{aligned} f(m, m_s, T) = & -\frac{J_-}{2} m^2 - \frac{J_+}{2} m_s + \frac{1}{4\beta} [ (1+m+m_s) \ln(1+m+m_s) + \\ & + (1+m-m_s) \ln(1+m-m_s) + (1-m+m_s) \times \\ & \ln(1-m+m_s) + (1-m-m_s) \ln(1-m-m_s) ] , \quad (4.2) \end{aligned}$$

enquanto que as equações de recorrência serão,

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{\partial f}{\partial m_s} = -J_+ m_s + \frac{1}{4\beta} \ln \frac{(1+m+m_s)(1-m+m_s)}{(1+m-m_s)(1-m-m_s)} \quad , \\ H &= \frac{\partial f}{\partial m} = -J_- m + \frac{1}{4\beta} \ln \frac{(1+m+m_s)(1+m-m_s)}{(1-m+m_s)(1-m-m_s)} \quad . \quad (4.3) \end{aligned}$$

Lembremos que  $m = (m_A + m_B)/2$ , e  $m_s = (m_A - m_B)/2$  é o parâmetro de ordem, além das constantes efetivas de troca, que neste caso são,

$$J_- = J_F - J_A \quad , \quad J_+ = J_F + J_A \quad . \quad (4.4)$$

Vamos considerar a expansão de Landau da energia livre  $\Psi(T, H, m_s)$  em potências de  $m_s$ , cujo procedimento foi descrito no *capítulo 2*. No *Apêndice A*, é feito o cálculo dos coeficientes da expansão de Landau do modelo rígido até ordem doze. A condição de criticalidade,  $\Psi_2 = 0$ , implica na igualdade (A.12)

$$\alpha_{0c} = \sqrt{1 - t_c} \quad , \quad (4.5)$$

onde  $t_c = k_B T_c / J_+$  é a temperatura crítica reduzida e  $\alpha_{0c} = \alpha_0(T_c)$ . Se este é substituído na relação (A.6) do *Apêndice A*, teremos a equação da linha crítica do diagrama campo-temperatura,

$$h_c = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \sqrt{1 - t_c} + \frac{t_c}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t_c}}{1 - \sqrt{1 - t_c}} \quad , \quad (4.6)$$

onde  $h_c = H_c / J_+$  é o campo reduzido e  $\epsilon = J_F / J_A$  (se  $J_F, J_A > 0$  a interação é ferromagnética nos planos e antiferromagnética entre eles). A temperatura de Néel é aquela para a qual  $h_c = 0$ , que pela equação acima é

$$t_N = 1 \quad \Rightarrow \quad k_B T_N = J_+ \quad . \quad (4.7)$$

Um ponto  $(h_c, t_c)$  definido por (4.6) é um ponto crítico, se todos os coeficientes  $\Psi_i(t_c, h_c)$  dos termos de mais alta ordem forem positivos. Portanto, vamos analisar outros coeficientes da expansão, que foram obtidos na condição de criticalidade ( $\Psi_2 = 0$ ). O coeficiente de quarta ordem (A.18) é:

$$\Psi_4 = \frac{J_+}{4t_c^2} \left( \epsilon t_c - \epsilon + \frac{1}{3} \right) \quad . \quad (4.8)$$

Segundo a teoria, quando  $\Psi_2 = 0$  e  $\Psi_4 = 0$ , um ponto tricrítico ocorre se os coeficientes de maior ordem  $\Psi_6, \Psi_8$ , etc, forem todos positivos. Se esta

condição for verificada, teremos,

$$t_t = 1 - \frac{1}{3\epsilon} \quad , \quad (4.9)$$

onde  $t_t$  é a temperatura tricrítica. O correspondente campo tricrítico é calculado pela substituição de  $t_t$  em (4.6). Assim se  $\Psi_6 > 0$ , para  $t_c > t_t$ ,  $\Psi_4 > 0$  e a transição é contínua, enquanto que para  $t_c < t_t$ ,  $\Psi_4 < 0$ , a transição é de primeira ordem. O caso limite ocorre para  $\epsilon = 1/3$ , onde  $t_t = 0$  e não há coexistência de fases.

Seja agora o coeficiente de sexta ordem escrito para  $\Psi_2 = 0$ , que pode ser visto em (A.19) do *Apêndice A*. Se substituirmos  $t_c$  pela temperatura do ponto tricrítico (4.9),  $\Psi_6$  toma a forma,

$$[\Psi_6]_{t_t} = \frac{J_+}{\left(1 - \frac{1}{3\epsilon}\right)^4} \left(\frac{\epsilon}{27} - \frac{1}{45}\right) \quad , \quad (4.10)$$

e para  $\epsilon = \frac{3}{5}$ ,  $[\Psi_6]_{t_t} = 0$ . Então, teremos  $\Psi_2 = \Psi_4 = \Psi_6 = 0$  em  $\epsilon^* = \frac{3}{5}$  e  $t^* = \frac{4}{9}$ , denominado ponto crítico de alta ordem [1]. Este ponto separa dois tipos de comportamentos críticos: para  $\epsilon > \frac{3}{5}$ , o diagrama de fases apresenta um ponto tricrítico, mas para  $\epsilon < \frac{3}{5}$ , o ponto tricrítico fica instável e desdobra-se em um ‘ponto crítico terminal’ e um ‘ponto bicrítico terminal’. O assunto deste trabalho está relacionado com esta última análise, pois mesmo para  $\epsilon > \frac{3}{5}$  existe uma região crítica ( $\Psi_2 = 0$ ,  $\Psi_4 > 0$ ) com  $\Psi_6 < 0$ , como veremos adiante. Nas figuras 4.1 e 4.2 são mostrados diagramas de fases para  $\epsilon = 0.8$  e  $\epsilon = 0.5$  respectivamente, onde as linhas de coexistência foram obtidas numericamente (ver abaixo). Na figura 4.2, é mostrada numa ampliação, a linha de coexistência que termina no ponto bicrítico terminal  $B$  e que encontra a linha de segunda ordem em  $C$ , que indica o ponto crítico terminal.

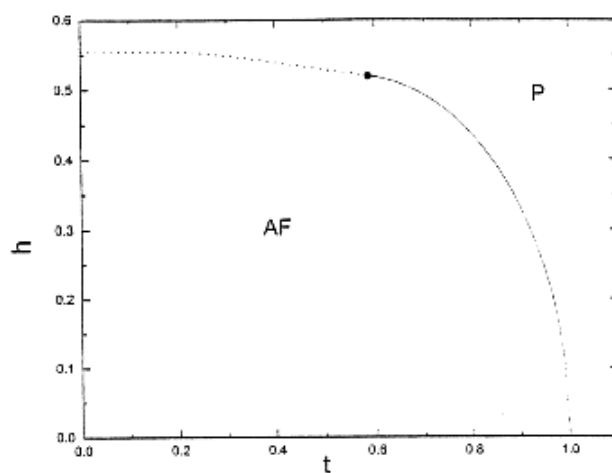


Figura 4.1: Diagrama de fases campo ( $h$ )  $\times$  temperatura ( $t$ ) para  $\epsilon = 0.8$ . As linhas tracejada e sólida representam, respectivamente, as transições de primeira e segunda ordem, que separam as fases para (P) e antiferromagnética (AF).

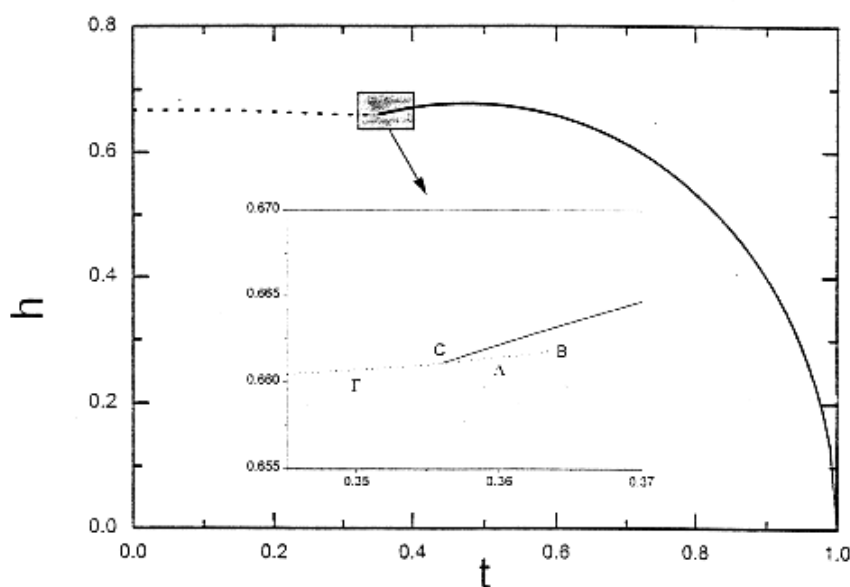


Figura 4.2: Mesma legenda da figura 4.1, mas com  $\epsilon = 0.5$ . O ponto de encontro das linhas de primeira e segunda ordem é mostrado na ampliação.  $\Gamma$  e A são regiões da linha de coexistência, C é o ponto crítico terminal e B é o ponto bicrítico terminal.

### 4.3 Obtenção numérica dos diagramas

Sejam as equações de recorrência de campo médio (4.3). Fazendo-se  $H_s = 0$ , elas podem ser manipuladas para que o sistema de equações acopladas tenha a forma,

$$M_2 = (\epsilon + 1) \left( h + \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} M_1 - \frac{t}{2} \ln \frac{1 + M_1}{1 - M_1} \right) , \quad (4.11)$$

onde se  $M_1 = m_A$ ,  $M_2 = m_B$  e se  $M_1 = m_B$ ,  $M_2 = m_A$ . A solução numérica consiste em fixar  $\epsilon, t$  e  $h$ , para obter-se simultaneamente  $m_A$  e  $m_B$  que satisfazem o sistema (4.11). As diversas soluções são as coordenadas de pontos extremos de  $\Psi(T, H, m_s)$ , de forma que o estado em que o sistema se encontra é definido pela solução de menor energia livre  $\Psi$ .

Seja o diagrama da figura 4.1. Em temperaturas altas, abaixo de  $t_N$ , e em pequenos campos, as soluções de (4.11) que minimizam  $\Psi$ , fornecem  $m_s \neq 0$ . Aumentando-se o campo, a magnetização alternada diminui até anular-se sobre a linha crítica  $(t_c, h_c)$ . Fixando uma temperatura baixa, quando aumentamos o campo, as energias de uma solução com  $m_s \neq 0$  e de outra com  $m_s = 0$  aproximam-se continuamente, até se igualarem no valor do campo que define o ponto de coexistência de fases sobre a linha de primeira ordem (assim como a linha  $\Gamma$  da figura 4.2). Uma outra possibilidade é a linha de coexistência  $\Lambda$  da figura 4.2. Nas proximidades dela, o sistema (4.11) permite duas soluções  $m'_s \neq 0$  e  $m''_s \neq 0$ , cujas energias livres se igualam sobre  $\Lambda$ . Aumentando-se o campo acima de  $\Lambda$ , a magnetização que minimiza  $\Psi$  vai diminuindo até anular-se sobre a linha de segunda ordem.

Até aqui só confirmamos o que esperávamos a respeito do comportamento crítico previsto pela teoria de Landau. Pela análise dos coeficientes, se  $\epsilon > 0.6$ , sempre haverá uma linha de segunda ordem que termina em um ponto tricrítico. Então, na linha crítica devemos ter primeiramente  $\Psi_2 = 0$

e  $\Psi_4 > 0$ . Mas, se nesse caso houver algum coeficiente de maior ordem negativo, que efeito isso poderia ter sobre diagrama de fases? Para abordar o problema, nós mostramos na figura 4.3 um diagrama  $t \times \epsilon$  na condição  $\Psi_2 = 0$ , contendo as linhas correspondentes a  $\Psi_4 = 0$  (solida),  $\Psi_6 = 0$  (tracejada) e  $\Psi_8 = 0$  (pontilhada) que dividem o diagrama em regiões (ver *Apêndice A*). Por exemplo, a curva  $\Psi_4 = 0$  que é a linha dos pontos tricríticos, define uma região para a qual  $\Psi_4 < 0$ , como indicado. A linha cheia decorada (+) representa os pontos críticos terminais. Esta linha termina no ponto crítico de alta ordem, que fica no cruzamento das linhas  $\Psi_4 = 0$  e  $\Psi_6 = 0$ , como definido anteriormente.

O diagrama de fases de um sistema com um particular  $\epsilon$  pode ser ‘visualizado’ no diagrama da figura 4.3, imaginando-se o eixo dos campos  $h$  perpendicular ao plano da figura. Por exemplo, a linha de segunda ordem do diagrama da figura 4.1, com  $\epsilon = 0.8$  seria representado na figura 4.3 como uma linha vertical, que se inicia em  $t = t_N = 1$  e termina em  $t = t_t$ , sobre a curva  $\Psi_4 = 0$ . A linha de primeira ordem não está no plano do diagrama ( $\Psi_2 = 0$ ), uma vez que sobre ela  $\Psi_2 > 0$ ,  $\Psi_4 < 0$  e  $\Psi_6 > 0$  (sem contar os coeficientes de ordem maior). Mas podemos imaginar uma extrapolação do diagrama para  $\Psi_2 \gtrsim 0$ , de forma que uma parte da linha de primeira ordem seja nele representada como uma continuação da linha crítica, para  $t < t_t$  (dentro região de  $\Psi_4 < 0$ ). Observemos que a linha de segunda ordem atravessa uma região com  $\Psi_8 < 0$ , mas este fato não tem efeito sobre ela, como mostrado pelo levantamento numérico do referido diagrama, que concorda inteiramente com a previsão analítica.

Vamos analisar o diagrama de fases para  $\epsilon = 0.5$  (figura 4.2) pelo diagrama  $t \times \epsilon$ . Neste, a linha de segunda ordem é representada por uma vertical, iniciando em  $t = t_N = 1$  e terminando em  $t = t_{ct}$ , onde  $t_{ct}$  é a temperatura



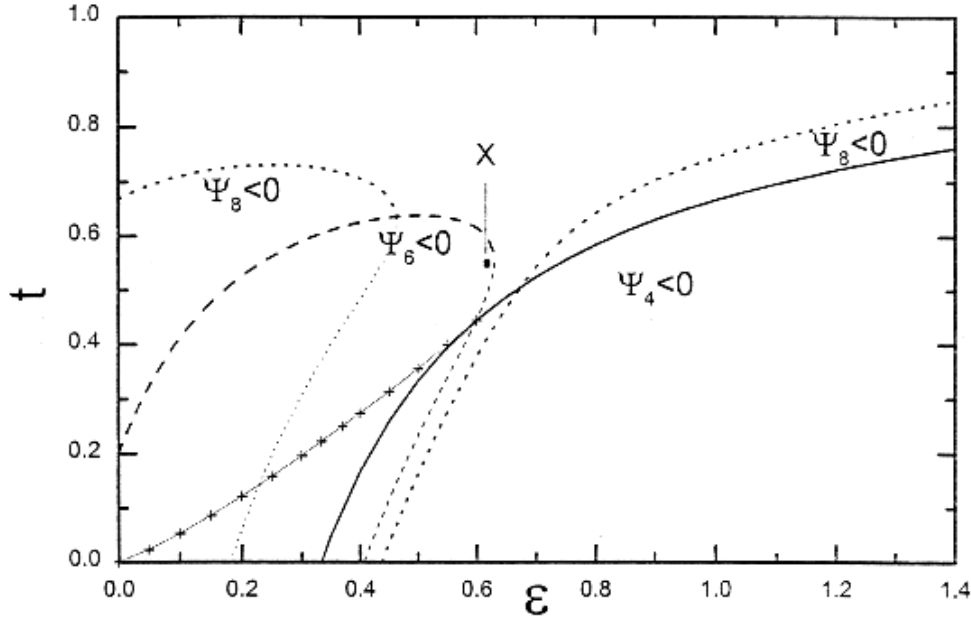


Figura 4.3: Sinal dos coeficientes no plano  $t \times \epsilon$  na condição  $\Psi_2 = 0$ . Linha sólida:  $\Psi_4 = 0$ ; linha tracejada:  $\Psi_6 = 0$ ; linhas pontilhadas:  $\Psi_8 = 0$ . Abaixo das curvas cada respectivo coeficiente é negativo. No ponto  $X$ ,  $\epsilon = 0.62$ . A linha decorada (+) representa os pontos críticos terminais.

do ponto crítico terminal  $C$ , que é um ponto sobre a linha decorada (+) da figura 4.3. A linha de transição de primeira ordem da figura 4.2 é dividida pelo ponto  $C$  em uma linha  $\Gamma$  e outra  $\Lambda$ , que representam diferentes tipos de coexistência de fases. Realmente, a linha de coexistência atravessa a linha de segunda ordem em  $C$ , e portanto, sobre  $\Gamma$  temos  $\Psi_2 > 0$  e sobre  $\Lambda$  temos  $\Psi_2 < 0$ . Por fim, para que a energia livre exiba dois mínimos absolutos com diferentes  $m_s \neq 0$  em  $\Lambda$  devemos ter  $\Psi_2 < 0$ ,  $\Psi_4 > 0$ ,  $\Psi_6 < 0$  e  $\Psi_8 > 0$ . Sobre a linha  $\Gamma$  teremos  $\Psi_2 > 0$ ,  $\Psi_4 > 0$ ,  $\Psi_6 < 0$  e  $\Psi_8 > 0$  (produzindo uma coexistência de fases com  $m_s \neq 0$  e  $m_s = 0$ ). Considerando as linhas

$\Gamma$  e  $\Lambda$  nas proximidades do ponto  $C$ , teremos  $\Psi_2 \approx 0$ , de forma a podermos considerar o diagrama da figura 4.3. Nesta, a linha de coexistência cruza verticalmente a linha decorada (+), estando acima  $\Lambda$  e abaixo  $\Gamma$ . Nesta região,  $\Psi_4 > 0$ ,  $\Psi_6 < 0$  e  $\Psi_8 > 0$  para ambas as linhas, estando a diferença apenas no sinal de  $\Psi_2$ .

Um caso mais intrigante é o diagrama de fases para  $\epsilon = 0.62$ , mostrado na figura 4.4. Imaginando a linha vertical que representa este diagrama na figura 4.3, podemos ver que a linha de segunda ordem atravessa a região identificada por um  $X$ , onde  $\Psi_6 < 0$ . O ponto  $X$  equivale ao ponto 2 sobre a linha de transição na figura 4.4. Mais uma vez, não foi encontrado nenhum desvio do diagrama obtido numericamente em relação ao esperado pela análise de Landau realizada.

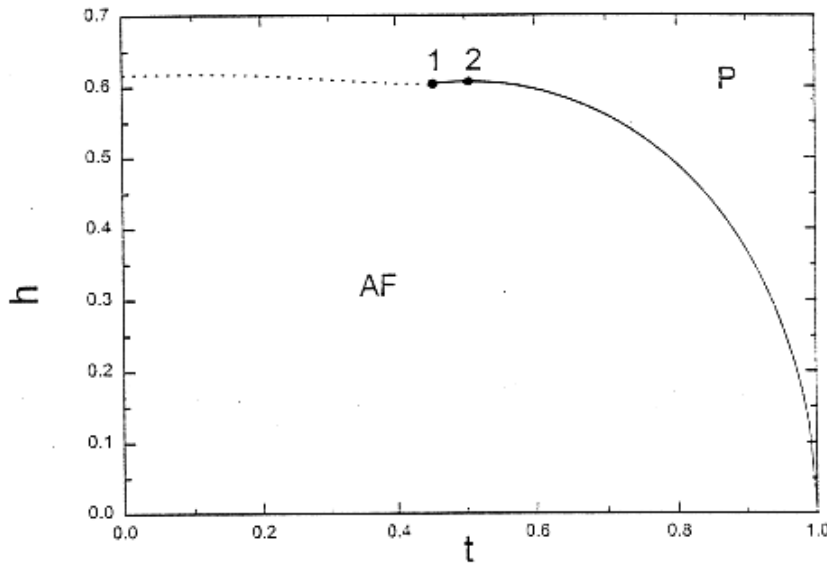


Figura 4.4: Mesma legenda que a figura 4.1, mas com  $\epsilon = 0.62$ . Ponto 1 é um ponto tricrítico e o ponto 2 fica sobre a linha crítica onde  $\Psi_4 > 0$ ,  $\Psi_6 < 0$  e  $\Psi_8 > 0$ .

Um teste para sabermos se um verdadeiro ponto tricrítico ocorre no sistema, é calcular as inclinações das linhas de transição à esquerda e a direita do ponto de encontro. Se a inclinação for a mesma, o ponto de encontro é um ponto tricrítico [38]. Por esse critério, obviamente, o ponto  $C$  que aparece na figura 4.2 não é um ponto tricrítico. Sobre a linha de segunda ordem, à direita do ponto, a inclinação é calculada pela derivada

$$\frac{dh_t}{dt_t} = \frac{-1}{(\epsilon + 1)\sqrt{1-t_t}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1-t_t}}{1 - \sqrt{1-t_t}} \quad , \quad (4.12)$$

enquanto à esquerda, sobre a linha de coexistência, a inclinação deve ser obtida numericamente. Aplicando o teste ao ponto 1 da figura 4.4 ( $\epsilon = 0.62$ ), a inclinação é a mesma à esquerda e à direita, tratando-se, portanto, de um legítimo ponto tricrítico, embora a derivada  $dh_t/dt_t$  seja positiva, o que pode parecer estranho (em  $\epsilon = 0.8$  a inclinação é negativa neste ponto).

Pelo exposto acima, para  $\epsilon = 0.8$  e  $\epsilon = 0.62$  a linha de transição contínua e o ponto tricrítico não são afetados pelo fato dos coeficientes de alta ordem serem negativos, mas a conclusão sobre o papel desses coeficientes requer mais cuidado. Na região  $0.6 < \epsilon < 0.631$  do diagrama da figura 4.3, a linha de segunda ordem ( $\Psi_2 = 0$ ,  $\Psi_4 > 0$ ) passa por uma região de temperaturas onde  $\Psi_6 < 0$ . Isto poderia afetar a posição do ponto tricrítico de cada respectivo diagrama, e portanto, alterar a posição do ponto crítico de alta ordem,  $\epsilon = 0.6$ . Realmente, na região considerada temos  $\Psi_4 > 0$ ,  $\Psi_6 < 0$  e  $\Psi_8 > 0$ , assim poderia ser que para  $\Psi_2 < 0$  esse quadro se mantivesse, criando condições para a ocorrência de um linha de coexistência do tipo  $\Lambda$  (figura 4.2). No entanto, o levantamento numérico dos diagramas parece apenas confirmar a previsão analítica. Todos os diagramas de fases obtidos numericamente com  $\epsilon \leq 0.595$  tem a topologia daquele da figura 4.2, enquanto que para  $\epsilon > 0.6$ , todos apresentam um ponto tricrítico, sem qualquer linha de coexistência

não prevista analiticamente. Mesmo o ponto crítico de alta ordem,  $\epsilon = 0.6$ , apresenta idênticas inclinações nas linhas de transição à esquerda e à direita, iguais a  $dh_t/dt_t = 0.1239$ , sendo também um ponto tricrítico. A suspeita de que poderia haver uma linha de coexistência separada das linhas de transição conhecidas, também não foi confirmada.

Como comentamos anteriormente, o coeficiente  $\Psi_8$  é negativo sobre uma vasta região (figura 4.3) de altos valores de  $\epsilon$ , que inclui uma região crítica. Nós analisamos também coeficientes de ordem maior, como  $\Psi_{10}$  (A.21) e  $\Psi_{12}$  (A.22), que também são negativos sobre regiões críticas do diagrama  $t \times \epsilon$ , sem ter implicação no comportamento crítico. A razão disso parece ser devido ao domínio do termo de quarta ordem sobre os outros quando  $\Psi_2 = 0$ , sendo que, somente quando  $\Psi_4 \rightarrow 0$ , outros termos ficam importantes. Mas com exceção do entorno do ponto  $X$ , temos sempre  $\Psi_6 > 0$  para  $\Psi_4 \rightarrow 0$ , o que garante a estabilidade do ponto tricrítico.

# Capítulo 5

## Conclusões

Consideramos um modelo metamagnético compressível composto de planos ferromagnéticos que têm interação antiferromagnética entre si. A constante de acoplamento entre spins primeiros vizinhos é considerada dependente do volume na aproximação linear, como no modelo ferromagnético de Domb. Assumindo que o sistema deforma-se pouco devido ao alto valor da constante elástica, uma transformação para o ensemble das pressões pôde ser feita, produzindo um termo biquadrático típico do hamiltoniano efetivo dos modelos compressíveis

O hamiltoniano é primeiramente estudado numa aproximação de campo médio de Curie-Weiss e a energia livre é obtida em função da temperatura, do campo magnético e da pressão. O comportamento crítico é analisado em termos dos coeficientes da expansão de Landau da energia livre na magnetização alternada - o parâmetro de ordem do sistema. Um caso particular de solução simples é aquele em que as constantes de troca ferro e antiferromagnética apresentam a mesma dependência funcional com relação ao volume (caso isotrópico). O comportamento crítico usual é o mesmo do modelo rígido, mas a compressibilidade pode produzir mudanças. Para certas combinações

de valores do acoplamento spin-rede e da razão entre as constantes ferro e antiferromagnética ( $\epsilon$ ), o diagrama de fases pode exibir uma linha de transição de primeira ordem na região de baixos campos e altas temperaturas, onde haveria uma linha de segunda ordem no diagrama usual. Neste caso, o diagrama teria duas linhas de coexistência, uma em baixas e outra em altas temperaturas, ligadas por uma linha de transição contínua, havendo portanto dois pontos tricríticos. Em campo nulo, o comportamento do modelo ferromagnético de Domb é recuperado, onde a transição muda de primeira ordem para contínua, com o aumento da pressão, exibindo um ponto tricrítico no diagrama pressão-temperatura. Para valores arbitrários dos acoplamentos spin-rede não há uma solução analítica simples, mas considerando que a constante elástica da rede é grande, pode-se tratar perturbativamente o efeito da elasticidade, com relação à solução para o modelo rígido. Neste caso, sempre há transição contínua a campo nulo. O efeito da pressão é determinado em termos de  $\epsilon$  e da razão entre os acoplamentos spin-rede ferro e antiferromagnético ( $\mu$ ). A comparação com resultados experimentais permite associar o comportamento de materiais metamagnéticos sujeitos a pressão, aos parâmetros microscópicos  $\epsilon$  e  $\mu$ . A comparação do comportamento do modelo em estudo com aquele do modelo com cisalhamento nulo, indica que a presença de forças de cisalhamento não é crucial para os metamagnéticos na aproximação de campo médio (no ensemble das pressões).

Motivados pelas divergências entre os resultados obtidos para o modelo de Domb, na aproximação de campo médio e no cálculo com grupo de renormalização, aplicamos esta técnica ao modelo metamagnético compressível. Uma expansão do hamiltoniano em torno da solução de campo médio foi realizada, sendo o hamiltoniano resultante transformado para ser representado no espaço de momentos. A expansão é feita em torno de duas particu-

lares frequências, relacionadas às variáveis de spin de campo médio, produzindo um hamiltoniano que além dos termos que ocorrem nos modelos de Domb e metamagnético rígido, contém um termo quadrático relacionado à anisotropia do acoplamento spin-rede. Obtidas as equações de recorrência, foram feitos convenientes reescalamentos do espaço e das variáveis de spin, que revelam quais campos são relevantes e quais são irrelevantes para o comportamento crítico, emergindo um hamiltoniano mais simples. Obtidos os pontos fixos, o diagrama de fluxos foi construído, permitindo analisar o comportamento crítico do modelo. Devido ao termo novo relacionado à anisotropia, o hamiltoniano renormalizado dispõe de pontos fixos que são fisicamente acessíveis. O diagrama de fases ordinário resultante é composto de duas linhas de primeira ordem, em altas e baixas temperaturas, ligadas por dois pontos tricríticos a uma linha de transição contínua intermediária. A transição contínua tem os mesmos expoentes críticos do ponto fixo mais estável do modelo de Domb, não acessível fisicamente. O ponto tricrítico que ocorre em campos baixos é de Ising, enquanto o de campos altos não é de Ising nem clássico. Na realidade este último ponto tricrítico e a linha de segunda ordem são pontos fixos que apresentam renormalização de Fisher em relação aos expoentes das respectivas transições que ocorrem no modelo rígido. A linha crítica pode colapsar em um único ponto sobre a linha de transição de primeira ordem, com expoentes críticos clássicos. O hamiltoniano renormalizado pôde ser integrado naquelas variáveis de spin que são independentes das variáveis de momento, produzindo um hamiltoniano reduzido que contém, além do termo quadrático e quártico, um termo biquadrático. É sabido que em sistemas com variáveis de spin escalares, a compressibilidade não permite o surgimento de uma transição de segunda ordem, mas para o modelo metamagnético, isto não ocorre, apesar do hamiltoniano renorma-

lizado contar com somente uma variável de spin.

Revisitamos a expansão de Landau da energia livre do modelo metamagnético rígido. A expansão no parâmetro de ordem é levada até ordem doze, com o objetivo de verificar o sinal dos termos de alta ordem na condição de criticalidade. Os coeficientes são escritos em termos da razão entre os acoplamentos ferro e antiferromagnético ( $\epsilon$ ) e da temperatura reduzida, de forma que num diagrama em termos dessas variáveis, podemos mapear as regiões onde os coeficientes são negativos. Neste mesmo diagrama, a linha de transição contínua (para um certo  $\epsilon$ ) pode ser representada por uma linha vertical, constatando-se que em geral ela atravessa regiões onde um ou mais coeficientes de mais alta ordem são negativos, o que poderia alterar a posição do ponto tricrítico. Um levantamento numérico dos diagramas de fases, mostra que mesmo nos casos mais duvidosos, a análise de Landau encontrada na literatura prevê corretamente os diagramas de fases para todos os valores de  $\epsilon$ . Mostramos portanto, que coeficientes negativos em uma expansão de Landau, nem sempre têm correspondência no diagrama de fases, embora em muitos casos, seja mais seguro a sua obtenção numérica a partir da energia livre original.



# Apêndice A

## Os coeficientes da expansão de Landau

Consideremos o termo logarítmico genérico de (2.25). Substituindo a expansão proposta para representar  $m$ , (2.32), nós podemos escrever,

$$\begin{aligned} \ln(1 + a m_s + b m) = & \\ = \ln(1 + b \alpha_0) + A_0 m_s + \left(-\frac{A_0^2}{2} + A_1\right) m_s^2 + \left(\frac{A_0^3}{6} - A_0 A_1\right) m_s^3 + & \\ + \left(A_2 - \frac{A_1^2}{2} - \frac{A_0^4}{4} + A_0^2 A_1\right) m_s^4 + \left(\frac{A_0^5}{5} + A_0 A_1^2 - A_0^3 A_1 + A_0 A_2\right) m_s^5 + & \\ + \left(A_3 - A_1 A_2 + \frac{A_1^3}{3} + A_0^2 A_2 - \frac{3A_0^2 A_1}{2} + A_0^4 A_1 - \frac{A_0^6}{6}\right) m_s^6 + & \\ + \left(-A_0 A_3 + 2A_0 A_1 A_2 - A_0^3 A_2 + A_0 A_1^3 + 2A_0^3 A_1^2 - A_0^5 A_1 + \frac{A_0^7}{7}\right) m_s^7 + & \\ + C_8 m_s^8 + C_9 m_s^9 + C_{10} m_s^{10} + C_{11} m_s^{11} + \dots \quad , & \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} C_8 = A_4 - A_1 A_3 - \frac{A_2^2}{2} + A_0^2 A_3 + A_1^2 A_2 - 3A_0^2 A_1 A_2 + \frac{A_1^4}{4} + A_0^4 A_2 + & \\ + 2A_0^2 A_1^3 - \frac{5A_0^4 A_1^2}{2} + A_0^6 A_1 - \frac{A_0^8}{8} \quad , & \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} C_9 = \frac{A_0^9}{9} - A_0^7 A_1 + 3A_0^5 A_1^2 - \frac{10A_0^3 A_1^3}{3} + A_0 A_1^4 - A_0^5 A_2 + 4A_0^3 A_1 A_2 + & \\ - 3A_0 A_1^2 A_2 + A_0 A_2^2 - A_0^3 A_3 + 2A_0 A_1 A_3 - A_0 A_4 \quad , & \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 C_{10} = & -\frac{A_0^{10}}{10} + A_0^8 A_1 - \frac{7A_0^6 A_1^2}{2} + 5A_0^4 A_1^3 - \frac{5A_0^2 A_1^4}{2} + \frac{A_1^5}{5} + A_0^6 A_2 + \\
 & -5A_0^4 A_1 A_2 + 6A_0^2 A_1^2 A_2 - A_1^3 A_2 - \frac{3A_0^2 A_2^2}{2} + A_1 A_2^2 + A_0^4 A_3 + \\
 & -3A_0^2 A_1 A_3 + A_1^2 A_3 - A_2 A_3 + A_0^2 A_4 - A_1 A_4 + A_5 \quad ,
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 C_{11} = & \frac{A_0^{11}}{11} - A_0^9 A_1 + 4A_0^7 A_1^2 - 7A_0^5 A_1^3 + 5A_0^3 A_1^4 - A_0 A_1^5 - A_0^7 A_2 + \\
 & + 6A_0^5 A_1 A_2 - 10A_0^3 A_1^2 A_2 + 4A_0 A_1^3 A_2 + 2A_0^3 A_2^2 - 3A_0 A_1 A_2^2 - A_0^5 A_3 \\
 & + 4A_0^3 A_1 A_3 - 3A_0 A_1^2 A_3 + 2A_0 A_2 A_3 - A_0^3 A_4 + 2A_0 A_1 A_4 - A_0 A_5 \quad ,
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

onde  $a = \pm 1$ ,  $b = \pm 1$  e

$$A_0 = \frac{a}{1 + b \alpha_0} \quad , \quad A_i = \frac{b \alpha_i}{1 + b \alpha_0} \quad .$$

Os coeficientes na expansão (2.33), que devem obedecer as relações  $H = \varphi_0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = 0$ , são

$$H = -J_-(p)\alpha_0 - \frac{j_-^2}{2}\alpha_0^3 + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1 + \alpha_0}{1 - \alpha_0} \quad , \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 = & -J_-(p)\alpha_1 - \frac{3}{2}j_-^2\alpha_0^2\alpha_1 - \frac{j_-j_+}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2\beta} \left\{ \alpha_0 \left[ \frac{1}{(1 + \alpha_0)} + \frac{1}{(1 - \alpha_0)} \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1 + \alpha_0)^2} - \frac{1}{(1 - \alpha_0)^2} \right] \right\} \quad ,
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 = & -J_-(p)\alpha_2 - \frac{3}{2}j_-^2(\alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_0\alpha_1^2) - j_-j_+\alpha_1 + \\
 & + \frac{1}{2\beta} \left\{ -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(1 + \alpha_0)^4} - \frac{1}{(1 - \alpha_0)^4} \right] + \alpha_1 \left[ \frac{1}{(1 + \alpha_0)^3} + \frac{1}{(1 - \alpha_0)^3} \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{\alpha_1^2}{2} \left[ \frac{1}{(1 + \alpha_0)^2} - \frac{1}{(1 - \alpha_0)^2} \right] + \alpha_2 \left[ \frac{1}{(1 + \alpha_0)} + \frac{1}{(1 - \alpha_0)} \right] \right\} \quad .
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Finalmente, os próprios coeficientes da expansão de Landau, representada pela expansão (2.31), são obtidos,

$$2\Psi_2 = -J_+(p) - \frac{j_-j_+}{2}\alpha_0^2 + \frac{1}{2\beta} \left[ \frac{1}{(1 + \alpha_0)} + \frac{1}{(1 - \alpha_0)} \right] \quad , \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
 4\Psi_4 = & -\frac{j_+^2}{2} - j_-j_+\alpha_0\alpha_1 + \frac{1}{2\beta} \left\{ \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{(1+\alpha_0)^3} + \frac{1}{(1-\alpha_0)^3} \right] + \right. \\
 & \left. -\alpha_1 \left[ \frac{1}{(1+\alpha_0)^2} - \frac{1}{(1-\alpha_0)^2} \right] \right\} , \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6\Psi_6 = & -\frac{j_-j_+}{2} (2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2) + \frac{1}{2\beta} \left\{ \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{(1+\alpha_0)^5} + \frac{1}{(1-\alpha_0)^5} \right] \right. \\
 & -\alpha_1 \left[ \frac{1}{(1+\alpha_0)^4} - \frac{1}{(1-\alpha_0)^4} \right] + \alpha_1^2 \left[ \frac{1}{(1+\alpha_0)^3} + \frac{1}{(1-\alpha_0)^3} \right] + \\
 & \left. -\alpha_2 \left[ \frac{1}{(1+\alpha_0)^2} - \frac{1}{(1-\alpha_0)^2} \right] \right\} . \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

Para o cálculo de campo médio do modelo compressível, realizado no *Capítulo 2*, é suficiente termos os coeficientes acima, mas para o estudo feito no *Capítulo 4*, precisamos dos coeficientes de mais alta ordem do modelo metamagnético rígido. Então, devemos tomar primeiramente  $j_F = j_A = 0$  no desenvolvimento acima. Os coeficientes não podem ser obtidos no caso geral, mas somente a partir da condição  $\Psi_2 = 0$ . Segundo a teoria de Landau, esta é a condição de criticalidade, desde que os coeficientes de mais alta ordem sejam positivos. Então, definindo  $\epsilon = J_F/J_A$  e  $t = k_B T/J_+$ , e fazendo  $\Psi_2 = 0$  em (A.9), teremos,

$$\alpha_{0c} = \sqrt{1-t_c} , \tag{A.12}$$

onde o índice  $c$  indica a condição crítica. A linha de transição contínua no diagrama campo versus temperatura é obtida pela substituição de (A.12) em (A.6).

Vamos inicialmente escrever os  $\alpha_i$ , obtidos pela substituição de (A.12) nas equações de recorrência (A.7) e (A.8) e nas de ordem mais alta não escritas anteriormente. Assim teremos,

$$\alpha_{1c} = \frac{-(\epsilon + 1)\sqrt{1-t_c}}{2t_c} , \tag{A.13}$$

$$\alpha_{2c} = \frac{-(\epsilon + 1)\sqrt{1-t_c}}{8t_c^3} \left[ (-\epsilon^2 + 4\epsilon + 1) t_c + \epsilon^2 - 6\epsilon + 1 \right] \quad , \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{3c} = & \frac{(\epsilon+1)\sqrt{1-t_c}}{48t_c^5} \left[ (-3\epsilon^4 + 18\epsilon^3 - 30\epsilon^2 - 30\epsilon - 3) t_c^2 + \right. \\ & \left. + (6\epsilon^4 - 46\epsilon^3 + 114\epsilon^2 + 30\epsilon - 8) t_c - 3\epsilon^4 + 28\epsilon^3 - 90\epsilon^2 + 12\epsilon + 5 \right] \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{4c} = & \frac{(\epsilon+1)\sqrt{1-t_c}}{3840t_c^7} \left[ (15\epsilon^6 - 120\epsilon^5 + 339\epsilon^4 - 192\epsilon^3 - 723\epsilon^2 - 264\epsilon - 15) t_c^3 + \right. \\ & + (-45\epsilon^6 + 430\epsilon^5 - 1567\epsilon^4 + 1924\epsilon^3 + 2165\epsilon^2 + 46\epsilon - 73) t_c^2 + \\ & + (45\epsilon^6 - 500\epsilon^5 + 2205\epsilon^4 - 3856\epsilon^3 - 1417\epsilon^2 + 612\epsilon + 31) t_c + \\ & \left. - 15\epsilon^6 + 190\epsilon^5 - 977\epsilon^4 + 2148\epsilon^3 - 97\epsilon^2 - 322\epsilon + 33 \right] \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{5c} = & \frac{-(\epsilon+1)\sqrt{1-t_c}}{3840t_c^9} \left[ (105\epsilon^8 - 1050\epsilon^7 + 4080\epsilon^6 - 6150\epsilon^5 - 3570\epsilon^4 + 16890\epsilon^3 + \right. \\ & + 13680\epsilon^2 + 2790\epsilon + 105) t_c^4 + (-420\epsilon^8 + 4830\epsilon^7 - 22650\epsilon^6 + 48310\epsilon^5 \\ & - 15690\epsilon^4 - 94150\epsilon^3 - 31150\epsilon^2 + 2610\epsilon + 790) t_c^3 + (630\epsilon^8 - 8190\epsilon^7 + \\ & + 44680\epsilon^6 - 119482\epsilon^5 + 104720\epsilon^4 + 156270\epsilon^3 - 4880\epsilon^2 - 12470\epsilon + 2) t_c^2 \\ & + (-420\epsilon^8 + 6090\epsilon^7 - 37730\epsilon^6 + 119434\epsilon^5 - 154330\epsilon^4 + -85490\epsilon^3 + \\ & + 41450\epsilon^2 + 4510\epsilon - 1034) t_c + 105\epsilon^8 + -1680\epsilon^7 - 11620\epsilon^6 - 42112\epsilon^5 \\ & \left. + 68990\epsilon^4 + 6000\epsilon^3 - 18380\epsilon^2 + 2080\epsilon + 257 \right] \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Agora, os próprios coeficientes da expansão de Landau podem ser calculados, substituindo-se os  $\alpha_i$  nas equações (A.10), (A.11) e nas outras não escritas acima, obtendo-se,

$$\Psi_4 = \frac{J_+}{4t_c^2} \left( \epsilon t_c - \epsilon + \frac{1}{3} \right) \quad , \quad (\text{A.18})$$

$$\Psi_6 = \frac{J_+}{2t_c^4} \left[ \left( -\frac{\epsilon^3}{12} + \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon}{4} \right) t_c^2 + \left( \frac{\epsilon^3}{6} - \frac{5\epsilon^2}{2} + \frac{1}{12} \right) t_c - \frac{\epsilon^3}{12} + \frac{3\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon}{4} - \frac{1}{60} \right] \quad , \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \Psi_8 = \frac{J_+}{1344t_c^6} [ & (21\epsilon^5 - 168\epsilon^4 + 378\epsilon^3 + 504\epsilon^2 + 105\epsilon) t_c^3 + (-63\epsilon^5 + 595\epsilon^4 + \\ & -1778\epsilon^3 - 966\epsilon^2 + 161\epsilon + 35)t_c^2 + (63\epsilon^5 - 686\epsilon^4 + 2506\epsilon^3 + 168\epsilon^2 + \\ & -385\epsilon + 14)t_c - 21\epsilon^5 + 259\epsilon^4 - 1106\epsilon^3 + 294\epsilon^2 + 119\epsilon - 25 ] \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \Psi_{10} = \frac{J_+}{5760t_c^8} [ & 7 + 645\epsilon - 2685\epsilon^2 - 2055\epsilon^3 + 12405\epsilon^4 - 4497\epsilon^5 + 705\epsilon^6 - 45\epsilon^7 \\ & + (-177 - 270\epsilon + 8925\epsilon^2 - 6240\epsilon^3 - 34695\epsilon^4 + 14682\epsilon^5 - 2565\epsilon^6 + 180\epsilon^7)t_c + \\ & + (129 - 1800\epsilon - 6105\epsilon^2 + 23010\epsilon^3 + 33615\epsilon^4 - 17484\epsilon^5 + 3465\epsilon^6 - 270\epsilon^7)t_c^2 \\ & + (105 + 1110\epsilon - 2745\epsilon^2 - 19800\epsilon^3 - 12585\epsilon^4 + 8910\epsilon^5 - 2055\epsilon^6 + 180\epsilon^7)t_c^3 + \\ & + (315\epsilon + 2610\epsilon^2 + 5085\epsilon^3 + 1260\epsilon^4 - 1611\epsilon^5 + 450\epsilon^6 - 45\epsilon^7)t_c^4 ] \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \Psi_{12} = \frac{J_+}{253440t_c^{10}} [ & (2833 - 14267\epsilon - 118140\epsilon^2 + 534820\epsilon^3 + 52030\epsilon^4 + \\ & -1563738\epsilon^5 + 782452\epsilon^6 - 180620\epsilon^7 + 21945\epsilon^8 - 1155\epsilon^9 + (-4224 + \\ & +101871\epsilon - 17160\epsilon^2 - 1923900\epsilon^3 + 1759560\epsilon^4 + 5081274\epsilon^5 - 3009336\epsilon^6 \\ & +768900\epsilon^7 - 101640\epsilon^8 + 5775\epsilon^9)t_c + (-7986 - 98406\epsilon + 694320\epsilon^2 + \\ & +1702800\epsilon^3 - 5600100\epsilon^4 - 5964684\epsilon^5 + 4473216\epsilon^6 - 1288320\epsilon^7 + \\ & +187110\epsilon^8 - 11550\epsilon^9)t_c^2 + (7832 - 61138\epsilon - 696300\epsilon^2 + 624800\epsilon^3 + \\ & +6174740\epsilon^4 + 2876148\epsilon^5 - 3171652\epsilon^6 + 1057760\epsilon^7 - 170940\epsilon^8 + \\ & +11550\epsilon^9)t_c^3 + (3465 + 61545\epsilon + 8580\epsilon^2 - 1376100\epsilon^3 - 2827770\epsilon^4 + \\ & -368610\epsilon^5 + 1048740\epsilon^6 - 423060\epsilon^7 + 77385\epsilon^8 - 5775\epsilon^9)t_c^4 + (10395\epsilon + \\ & +128700\epsilon^2 + 437580\epsilon^3 + 441540\epsilon^4 - 60390\epsilon^5 - 123420\epsilon^6 + 65340\epsilon^7 + \\ & -13860\epsilon^8 + 1155\epsilon^9)t_c^5 ] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

# Apêndice B

## Equações de recorrência das variáveis irrelevantes

Neste apêndice, vamos escrever as equações de recorrência para as variáveis irrelevantes, identificadas no *Capítulo 3*. Para tanto, ao invés de expressá-las em termos dos diagramas de Feynman, como fizemos para as variáveis relevantes, vamos escrevê-las diretamente em termos das integrais. Usaremos a definição (3.65) discutida no referido capítulo, para expressar as integrais.

$$\begin{aligned} \overline{v}_+ &= \zeta_0 \zeta_+^2 b^{-2d} [v_+ + 4v_+ B_+ I_{20} + 2v_- B_{\pm} I_{02} + 36v_+ w_+^2 I_{30} + 4v_- w_-^2 I_{03} + \\ &\quad - 12v_+ u_+ I_{20} - 2v_- u_{\pm} I_{02} + 18w_+ z_+ I_{20} + 2w_- z_- I_{02} + O(\epsilon^{\frac{5}{2}})] . \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\overline{v}_0 = \zeta_0^3 b^{-2d} [v_0 + 4v_+^3 I_{30} + 4v_-^3 I_{03} + 2v_+ \alpha_+ I_{20} + 2v_- \alpha_- I_{02} + O(\epsilon^{\frac{5}{2}})] . \quad (\text{B.2})$$

$$\overline{w}_+ = \zeta_+^3 b^{-2d} [w_+ - 36w_+ u_+ I_{20} - 2w_- u_{\pm} I_{02} + 36w_+^3 I_{30} + \frac{4}{3}w_-^3 I_{03} + O(\epsilon^{\frac{5}{2}})] . \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \overline{B}_+ &= \zeta_+^4 b^{-3d} [B_+ + 4B_+^2 I_{20} + B_{\pm}^2 I_{02} - 24B_+ u_+ I_{20} - 2B_{\pm} u_{\pm} I_{02} + \\ &\quad + 72B_+ w_+^2 I_{30} + 4B_{\pm} w_{\pm}^2 I_{03} + O(\epsilon^3)] . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
 \overline{B}_{\pm} &= (\zeta_+ \zeta_-)^2 b^{-3d} [B_{\pm} + 4B_{\pm} B_+ I_{20} + 4B_{\pm} B_- I_{02} - 4B_+ u_{\pm} I_{20} + \\
 &\quad - 4B_- u_{\pm} I_{02} - 12B_{\pm} u_- I_{02} - 12B_{\pm} u_+ I_{20} + 16B_+ w_-^2 I_{21} + \\
 &\quad - 16B_- w_-^2 I_{03} + 36B_{\pm} w_+^2 I_{30} + 4B_{\pm} w_-^2 I_{12} + O(\epsilon^3)] \quad . \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{u}_+ &= \zeta_+^4 b^{-3d} [u_+ - 36u_+^2 I_{20} - u_{\pm}^2 I_{02} + 216u_+ w_+^2 I_{30} + 4u_- w_-^2 I_{03} + \\
 &\quad - 162w_+^4 I_{40} - 2w_-^4 I_{04} + O(\epsilon^3)] \quad . \quad (B.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{u}_{\pm} &= \zeta_+^2 \zeta_-^2 b^{-3d} [u_{\pm} - 12u_{\pm} u_- I_{02} - 12u_+ u_{\pm} I_{20} - 8u_{\pm}^2 I_{20} + 24u_- w_-^2 I_{03} + \\
 &\quad + 36u_{\pm} w_+^2 I_{30} + 24u_+ w_-^2 I_{21} + 4u_{\pm} w_-^2 I_{12} - 4w_-^4 I_{13} - 72w_+^2 w_-^2 I_{31} + \\
 &\quad - 24w_+ w_-^3 I_{22} + O(\epsilon^3)] \quad . \quad (B.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{z}_+ &= \zeta_0 \zeta_+^3 b^{-3d} [z_+ - 36z_+ u_+ I_{20} - 2z_- u_{\pm} I_{02} + 108z_+ w_+^2 I_{30} + 4z_- w_-^2 I_{03} + \\
 &\quad - 216w_+^3 v_+ I_{40} - 8w_-^3 v_- I_{04} + 144u_+ w_+ v_+ I_{30} + 8u_- w_- v_- I_{03} + \\
 &\quad + O(\epsilon^3)] \quad . \quad (B.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{z}_- &= \zeta_0 \zeta_+ \zeta_-^2 b^{-3d} [z_- - 12z_- u_- I_{02} - 4z_- u_{\pm} I_{11} - 4z_+ u_{\pm} I_{20} + 12z_+ w_-^2 I_{21} + \\
 &\quad + 4z_- w_-^2 I_{12} - 8w_-^3 v_- I_{04} - 8w_-^3 v_+ I_{22} - 48v_+ w_+ w_-^2 I_{31} + 36u_{\pm} w_+ v_+ I_{30} \\
 &\quad + 48u_- w_- v_- I_{03} + 24z_- w_+ w_- I_{21} + 4z_- w_-^2 I_{12} + O(\epsilon^3)] \quad . \quad (B.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\alpha}_0 &= \zeta_0^4 b^{-3d} [\alpha_0 + 2v_+^4 I_{40} + 2v_-^4 I_{04} + \alpha_+^2 I_{20} + \alpha_-^2 I_{02} + 4\alpha_+ v_+^2 I_{30} + \\
 &\quad + 4\alpha_- v_-^2 I_{03} + O(\epsilon^3)] \quad . \quad (B.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\alpha}_+ &= \zeta_0^2 \zeta_+^2 b^{-3d} [\alpha_+ + 4\alpha_+ B_+ I_{20} + 2\alpha_- B_{\pm} I_{02} - 12\alpha_+ u_+ I_{20} - 2\alpha_- u_{\pm} I_{02} + \\
 &\quad + 36\alpha_+ w_+^2 I_{30} + 4\alpha_- w_-^2 I_{03} + 72v_+^2 w_+^2 I_{40} + 36v_+^2 w_+^2 I_{40} + 12v_-^2 w_-^2 I_{04} + \\
 &\quad + 4v_-^2 w_-^2 I_{40} + 9z_+^2 I_{20} + z_-^2 I_{02} - 24u_+ v_+^2 I_{30} - 4u_{\pm} v_-^2 I_{03} + 8B_+ v_+^2 I_{30} + \\
 &\quad + 4B_{\pm} v_-^2 I_{03} - 36z_+ v_+ w_+ I_{30} - 12z_- v_- w_- I_{03} + O(\epsilon^3)] \quad . \quad (B.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha_-} = & \zeta_0^2 \zeta_-^2 b^{-3d} [\alpha_- + 4\alpha_- B_- I_{02} + 2\alpha_+ B_{\pm} I_{20} - 12\alpha_- u_- I_{02} - 2\alpha_+ u_{\pm} I_{20} + \\
& + 2\alpha_+ w_-^2 I_{21} + 4\alpha_- w_-^2 I_{12} + 8v_+^2 w_-^2 I_{31} + 4v_-^2 w_-^2 I_{13} + 2z_-^2 I_{11} + \\
& - 24u_- v_-^2 I_{03} - 4u_{\pm} v_+^2 I_{30} + 8B_- v_-^2 I_{03} + 4B_{\pm} v_+^2 I_{30} - 8z_- v_- w_- I_{12} + \\
& + O(\epsilon^3)] \quad . \quad (B.12)
\end{aligned}$$



## Apêndice C

### Cálculo das integrais

Neste apêndice faremos o cálculo de alguns diagramas de Feynman e das integrais  $I_{01}$  e  $I_{02}$ . Da forma como foram escritas as equações de recorrência, os diagramas de Feynman representam apenas as integrais e as variáveis de spin, embora estejam implícitos os respectivos coeficientes, como discutido anteriormente. Seja por exemplo o diagrama abaixo, que ocorre na equação de recorrência de  $r_-$ ,

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \int_{\vec{q}_1} \int_{\vec{q}_2} \int_{\vec{q}_3} \int_{\vec{q}_4} \Omega \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 + \vec{q}_4) s_{q_1}^- s_{q_2}^- \Omega \delta(\vec{q}_3 + \vec{q}_4) G_-(\vec{q}_3), \quad (\text{C.1})$$

onde  $\Omega$  é o volume da região de integração,  $\delta$  é a função delta de Dirac e  $G_-$  é o propagador [ver (3.45, 3.46)]. Observando as regras de Feynman [32], chegaremos ao fator multiplicativo que aparece em (3.52), aqui omitido. Integrando a equação acima, obtemos

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \int_{\vec{q}} s_{q_1}^- s_{q_2}^- I_{01} \quad , \quad I_{01} = \int_{\vec{p}} G_-(\vec{p}) = \int_{\vec{p}} \frac{1}{r_- + p^2} \quad , \quad (\text{C.2})$$

onde  $|\vec{q}| \leq \pi/b$  e  $|\vec{p}| > \pi/b$ . A solução da integral  $I_{01}$  em dimensão  $d = 4$  é simples, se observarmos que há invariância rotacional no sistema, e fizermos uma transformação de coordenadas ortogonais para esféricas. A

transformação fica,

$$\int_{\vec{p}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} dp_1 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} dp_4 = \int_{\pi/b}^{\pi} p^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta_3 \int_0^{\pi} d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{\pi} d\theta_1 \sin^2 \theta_1. \quad (\text{C.3})$$

Considerando que  $r_- = O(\epsilon)$ , este pode ser desprezado em relação a  $p$ , sendo que

$$I_{01} = \frac{1}{16} \frac{b^2 - 1}{b^2}. \quad (\text{C.4})$$

Seja agora um diagrama que ocorre em (3.51),

$$\begin{aligned} \text{---} \circ \text{---} = & \int_{\vec{q}_1} \int_{\vec{q}_2} \int_{\vec{q}_3} \Omega \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) s_{q_1}^+ \int_{\vec{q}_4} \int_{\vec{q}_5} \int_{\vec{q}_6} \Omega \delta(\vec{q}_4 + \vec{q}_5 + \\ & + \vec{q}_6) s_{q_6}^+ \Omega \delta(\vec{q}_2 + \vec{q}_4) G_-(\vec{q}_2) \Omega \delta(\vec{q}_3 + \vec{q}_5) G_-(\vec{q}_3) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Fazendo as integrações,

$$\text{---} \circ \text{---} = \int_q s_q^- s_{-q}^- I_{02} \quad , \quad I_{02} = \int_{\vec{p}} G_-(\vec{p}) G_-(\vec{-p} - \vec{q}) \quad (\text{C.6})$$


Se igualmente desconsiderarmos  $r_-$ , a transformação (C.3) leva a,

$$I_{02} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{\pi/b}^{\pi} p I_{\theta} dp \quad , \quad I_{\theta} = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta_1 d\theta_1}{p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta_1} \quad (\text{C.7})$$

Como  $q \leq \pi/b$ ,  $p$  assume valores acima de  $\pi/b$  e a solução de  $I_{\theta}$  poder ser expressa em termos de  $q^2/p^2$ , nós podendo-se escrever

$$I_{\theta} = \frac{p^2 + q^2}{(2pq)^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{(2pq)^2}{(p^2 + q^2)^2} \right) \right] \approx \frac{\pi}{2p^2} \quad (\text{C.8})$$

Assim mostramos que  $I_{\theta}$  é independente de  $\vec{q}$ , o que nos dá  $I_{02} = \ln b/8\pi^2$ .

Os demais diagramas que ocorrem nas equações de recorrência dos campos relevantes, são todos proporcionais a  $I_{01}$  ou a  $I_{02}$ . Por exemplo, o diagrama representado por , que ocorre em (3.52), tem coeficiente

$I_{01}/\tau_+$ . Seja por último, um diagrama mais complexo, que contribui para o termo de quarta ordem,

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} &= \int_{\bar{q}} \int_{\bar{q}'} \int_{\bar{q}''} s_{\bar{q}}^- s_{\bar{q}'}^- s_{\bar{q}''}^- s_{-\bar{q}-\bar{q}'-\bar{q}''}^- \times \\
 &\times \int_{\bar{p}} G_+(p) G_-(-p-q) G_+(p-q') G_-(-p-q-q'') \quad .
 \end{aligned}
 \tag{C.9}$$

Como  $G_+(p) = 1/\tau_+$ , teremos uma integral que pode ser escrita em termos de  $I_{02}$ , (C.6), independente, portanto, de  $q \leq \pi/b$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] J. M. Kincaid e E. G. D. Cohen, Phys. Rep., Phys. Lett. **22C**, 57 (1975).
- [2] H. J. Herrmann, E. B. Rasmussen e D. P. Landau, J. Appl. Phys. **53**, 7994 (1982).
- [3] D. P. Landau e R. H. Swendsen, Phys. Rev. Lett. **46**, 1437 (1987).
- [4] H. J. Herrmann e D. P. Landau, Phys. Rev. B **48**, 239 (1993).
- [5] W. Selke, Z. Phys. B **101**, 145 (1996).
- [6] M. Pleimling e W. Selke, Phys. Rev. B **56**, 8855 (1997).
- [7] M. Santos e W. Figueiredo, Phys. Rev. B **58**, 9321 (1998).
- [8] M. Zukovic e T. Idogaki, Phys. Rev B **61**, 50 (2000).
- [9] D. R. Nelson e M. E. Fisher, Phys. Rev. B **11** 1030 (1975).
- [10] T. A. L. Ziman, D. J. Amit, G. Grinstein e C. Jayaprakash, Phys. Rev. B **25**, 1, 319 (1982).
- [11] V. A. Schmidt e S. A. Friedberg, Phys. Rev. B **1**, 2250 (1970).
- [12] E. Stryjewski e N. Giordano, Adv. Phys. **26**, 487 (1977).

- [13] K. Katsumata, H. Aruga Katori, S. M. Shapiro e G. Shirane, Phys. Rev. B **55**, 11466 (1997); C. Binek, T. Kato, W. Kleemann, O. Petracci, D. Bertrand, F. Bourdarot, P. Burlet, H. Aruga Katori, K. Katsumata, K. Prokes e S. Welzel, Eur. Phys. J. B **15**, 35 (2000).
- [14] W. P. Wolf, Braz. J. Phys. **30**, 794 (2000).
- [15] C. Domb, J. Chem. Phys. **25**, 783 (1956).
- [16] G. Baker e J. W. Essam, Phys. Rev. Lett. **24**, 447 (1970).
- [17] J. Oitmaa e M. N. Barber, J. Phys. C: Solid State Phys. **8**, 3653 (1975).
- [18] D. J. Bergman e B. I. Halperin, Phys. Rev B **13**, 2145 (1976).
- [19] J. Bruno e J. Sak, Phys. Rev. B **22**, 3302 (1980).
- [20] B. K. Chakrabarti, N. Bhattacharyya e S. K. Sinha, J. Phys. C - Solid State Physics **15**, L777 (1982).
- [21] V. B. Henriques e S. R. Salinas, J. Phys. C - Solid State Phys. **20**, 2415 (1987).
- [22] V. B. Henriques, Tese de Doutorado: *Modelo de Ising Compressível - Flutuações Elásticas e Ordem da Transição Magnética*, USP, 1988.
- [23] B. Grossmann e D. G. Rancourt, Phys. Rev. B **54**, 12294 (1996); P. Massimino e H. T. Diep, J. Appl. Phys. **87**, 7043 (2000); E. H. Boubcher, P. Massimino e H. T. Diep, J. Mag. Mat. **223**, 163 (2001).
- [24] S. S. Uda e W. Figueiredo, Phys. Lett. A **117**, 372 (1986).
- [25] C. Vettier, H. L. Alberts e D. Bloch, Phys. Rev. Lett. **31**, 1414 (1973).
- [26] C. Vettier, Phys. Rev. B **11**, 4700 (1975).

- [27] S. Salem-Sugui, W. A. Ortiz and A. D. Alvarenga, Phys. Rev. B **40**, 2589 (1989).
- [28] S. Salem-Sugui and W. A. Ortiz, Phys. Rev. B **43**, 5784 (1991).
- [29] A. F. S. Moreira, W. Figueiredo e V. B. Henriques, Phys. Rev. B **66**, 224425 (2002).
- [30] L. D. Landau, *Collected Papers*, Gordon and Breach, 1967.
- [31] A. F. S. Moreira, W. Figueiredo e V. B. Henriques, Eur. Phys. J. B **27**, 153 (2002).
- [32] K. G. Wilson e J. Kogut, Phys. Rep. **12**, 2, 75 (1974).
- [33] E. K. Riedel e J. F. Wegner, Phys. Rev. Lett. **29**, 349 (1972).
- [34] J. F. Wegner e E. K. Riedel, Phys. Rev. B **7**, 248 (1973).
- [35] K. G. Wilson e M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).
- [36] D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, McGraw-Hill, New York, 1984.
- [37] M. E. Fisher, Phys. Rev. **176**, 257 (1968).
- [38] R. B. Griffiths, Phys. Rev. Lett. **24**, 715 (1970).