

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

VIBRAÇÕES DE PLACAS E VIGAS ACOPLADAS PELO
MÉTODO DA MOBILIDADE

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

MARCUS ANTONIUS DA COSTA NUNES

FLORIANÓPOLIS, MAIO DE 2002

VIBRAÇÕES DE PLACAS E VIGAS ACOPLADAS PELO MÉTODO DA MOBILIDADE

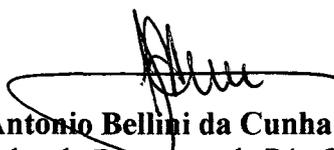
Marcus Antonius da Costa Nunes

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO VIBRAÇÕES E
ACÚSTICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

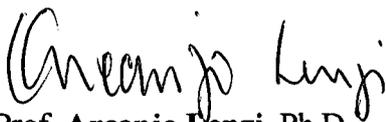


Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.
Orientador

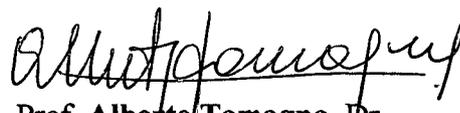


Prof. José Antonio Bellini da Cunha Neto, Dr.
Coordenador do Programa de Pós Graduação

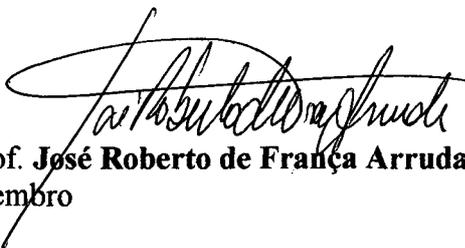
BANCA EXAMINADORA:



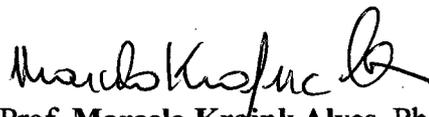
Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.
Presidente



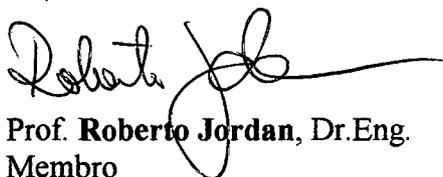
Prof. Alberto Tamagna, Dr.
Membro



Prof. José Roberto de França Arruda, D.Ing.
Membro



Prof. Marcelo Krajnk Alves, Ph.D.
Membro



Prof. Roberto Jordan, Dr.Eng.
Membro

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho para:

Rosangela, dedicada esposa, cristã fiel e exemplo de mãe,
pelo amor, compreensão, carinho, dedicação e incentivo.

Lucas, Tiago e Pedro, filhos amorosos, responsáveis,
cheios do amor de Cristo, aos quais tive o privilégio
de ganhar como presente de Deus.

José (*in memoriam*) e Ruth, meus pais, que “nunca deixaram a peteca cair”,
orientando-me no caminho do Senhor, dando-me
condições de chegar até aqui.

*“Se o meu povo que se chama pelo meu Nome, se humilhar,
e orar, e buscar a minha face, e se converter dos seus maus caminhos,
então, eu ouvirei dos céus, perdoarei os seus pecados e sararei a sua terra.”*

II Crônicas 7:14

AGRADECIMENTOS

- A Deus Pai, Deus Filho e Deus Espírito Santo por tudo.
- A Rosangela pelo amor, incentivo, confiança e dedicação.
- Ao meu filho Pedro pela ajuda nas figuras, paciência e incentivo nas horas difíceis.
- Aos meus filhos gêmeos Lucas e Tiago pelo apoio e encorajamento.
- Ao amigo e orientador Arcanjo Lenzi, pela orientação e ensinamentos.
- Ao Prof. Daniel J. Gorman, pela ajuda na programação e livro enviado.
- Ao Prof. Peter Hagedorn, pela ajuda com o livro e artigos enviados.
- Ao William, amigo de longa data, pelo incentivo, pelas cobranças, pela supervisão e principalmente pelo amor fraternal que nos une.
- Ao Paulo Boni, pela ajuda nos programas, nas medições e incentivo.
- Ao amigo Fabinho Fiates, pela revisão, “consultas” e incentivo.
- Aos amigos do LVA, João Bidi, Vinícius, Marcelo, Big, Parú, Renan, Paiotti, Pescador, Osni, Yoneda, Caletti e, Vitor, pela amizade, ajuda e momentos de lazer.
- Ao Prof. José João de Espíndola, pela ajuda com equipamentos e nas medições.
- Ao meu irmão, José Fernando, pelo incentivo.
- À Petrobrás pelo ajuda financeira e apoio através do Eng. Ernani L. Sztajnbok.
- Ao Capes, pelo apoio financeiro.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.
- Aos irmãos da Igreja de Florianópolis e Igreja em Vitória pelas orações e apoio.
- A todas as pessoas que tenham contribuído para a realização deste trabalho.

RESUMO

As vibrações geradas em estruturas compostas por placas e vigas acopladas são transmitidas ao longo desses componentes, fazendo com que vários estudos sejam realizados com o objetivo de compreender os caminhos de propagação da energia vibratória. Essas vibrações geram níveis indesejáveis de ruído, causando desconforto, estresse e até problemas auditivos. Entender o caminho de propagação da energia vibratória é uma ferramenta muito útil ao controle de ruído, que os pesquisadores buscam há muito tempo. Este trabalho apresenta um estudo das vibrações em placas finas, retangulares, com condição de contorno completamente livre nas bordas, acopladas com viga de reforço, através do Método da Mobilidade. Mostra que o fluxo de energia vibratória nas uniões entre placas e vigas é influenciado pela presença da viga, não apenas reduzindo de forma significativa todo o espectro, mas, também, alterando o comportamento das frequências de ressonância do sistema. Medições experimentais em várias configurações de placas e vigas, acompanhadas de predições obtidas através do Método de Elementos Finitos, comprovam a viabilidade do Método da Mobilidade como uma alternativa robusta e eficiente na obtenção de respostas precisas de funções de resposta em frequência, densidade modal e fatores de acoplamento, a serem posteriormente usados em modelos de Análise Estatística Energética.

ABSTRACT

The vibrations generated in structures composed by plates and beams are transmitted through these components, and several studies have been made with the objective of understanding the paths of energy propagation, as well as the types of which carry the most energy. These vibrations may generate undesirable noise levels, causing discomfort, stress and hearing problems. Understanding the paths of propagation of the vibratory energy is a very useful tool for noise control application, so researchers have been looking for it for a long time.

This work presents a study of the vibrations in thin rectangular plates, completely free, coupled and reinforced by beams, through the Mobility Method, showing that the vibratory energy is affected, in the unions between plates and beams, by the presence of the beam, and that the beam acts not only reducing the amplitude of the vibration but, also, altering the behavior of the natural frequencies of the system.

Experimental measurements in some configurations of plates and beams, accompanied of predictions using the from the Finite Element Method, check the viability of the Mobility Method as a robust, efficient and effective alternative for obtaining precise data of frequency response functions, modal density and coupling loss factors, used in studies through the Statistical Energy Analysis.

SUMÁRIO

RESUMO.....	v
ABSTRACT	vi
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xxiv

CAPÍTULO I

1.1) INTRODUÇÃO	01
1.2) MÉTODOS MAIS COMUNS DE PREDIÇÃO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS ACOPLADAS	06
1.3) OBJETIVOS GERAIS DESTE TRABALHO	08
1.4) REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	09
1.5) OBJETIVOS ESPECÍFICOS	15
1.6) CONTEÚDO DOS CAPÍTULOS	15

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS SOBRE O MÉTODO DA MOBILIDADE E DA ANÁLISE ESTATÍSTICA ENERGÉTICA	
2.1) FLUXO DE POTÊNCIA VIBRATÓRIA	17
2.2) MÉTODO DA MOBILIDADE	20

2.3) CONCEITOS BÁSICOS SOBRE ANÁLISE ESTATÍSTICO ENERGÉTICA	25
2.3.1) DENSIDADE MODAL	25
2.3.2) FATOR DE PERDA ESTRUTURAL	27
2.3.2.1) MÉTODO DO DECAIMENTO	27
2.3.2.2) MÉTODO DA MEDIÇÃO DA POTÊNCIA DE ENTRADA	28
2.3.3) FATOR DE ACOPLAMENTO	28
2.3.4) EQUAÇÕES DO BALANÇO DE ENERGIA	28

CAPÍTULO III

RESPOSTA DE PLACAS COM BORDAS LIVRES

3.1) INTRODUÇÃO	32
3.2) ANÁLISE DE PLACA LIVRE-LIVRE – MÉTODO PARTICIONADO	33
3.2.1) CONDIÇÕES DE CONTORNO	33
3.2.2) EQUAÇÃO DIFERENCIAL GOVERNANTE – VIBRAÇÕES LIVRES	35
3.2.3) VIBRAÇÕES SIMÉTRICAS E ANTI-SIMÉTRICAS	35
3.2.4) MODOS DUPLAMENTE SIMÉTRICOS	36
3.2.5) MODOS DUPLAMENTE ANTI-SIMÉTRICOS	41
3.2.6) MODOS SIMÉTRICOS/ANTI-SIMÉTRICOS	44

3.2.7) MODOS ANTI-SIMÉTRICOS/SIMÉTRICOS _____	46
3.3) ANÁLISE DE PLACA LIVRE-LIVRE-MÉT. DA SUPERPOSIÇÃO COMPLETO __	47
3.3.1) EQUAÇÃO DIFERENCIAL GOVERNANTE –VIBRAÇÕES FORÇADAS ____	47
3.3.2) CONDIÇÕES DE CONTORNO _____	48
3.3.3) PROCEDIMENTO MATEMÁTICO _____	49
3.4) VALIDAÇÃO DE RESULTADOS _____	59

CAPÍTULO IV

RESPOSTAS DE PLACAS LIVRES ACOPLADAS

4.1) INTRODUÇÃO _____	65
4.2) MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS _____	67
4.3) VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL _____	70
4.4) ANÁLISE DE DUAS PLACAS ACOPLADAS _____	76
4.4.1) CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS CAUSADOS PELA FORÇA EXTERNA _	78
4.4.2) CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS CAUSADOS PELO MOMENTO FLETOR _____	78
4.4.3) CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS CAUSADOS PELA FORÇA CORTANTE _____	79
4.5) CÁLCULO DAS MOBILIDADES _____	80

4.6) CÁLCULO DOS ESFORÇOS _____	83
4.7) CÁLCULO DAS POTÊNCIAS _____	85
4.8) RESULTADOS DE MOBILIDADES _____	86
4.8.1) MOBILIDADE PONTUAL – CONFIGURAÇÃO I _____	86
4.8.2) MOBILIDADE DE TRANSFERÊNCIA – CONFIG. I _____	89
4.8.3) MOBILIDADE PONTUAL – CONFIGURAÇÃO II _____	92
4.8.4) MOBILIDADE PONTUAL – CONFIGURAÇÃO III _____	94
4.8.5) MOBILIDADE DE TRANSFERÊNCIA – CONFIG. III _____	95
4.9) RESULTADOS DE DENSIDADE MODAL _____	99
4.10) RESULTADOS DAS POTÊNCIAS DE ENTRADA E TRANSFERIDA _____	101
4.11) RESULTADOS DE FATORES DE ACOPLAMENTO _____	105
4.12) ESFORÇOS, DESLOCAMENTOS E INTENSIDADE TRANSFERIDA AO LONGO DA LINHA DE UNIÃO _____	108
4.12.1) RESULTADOS DOS ESFORÇOS DE FLEXÃO _____	108
4.12.2) RESULTADOS DAS VELOCIDADES TRANSVERSAL E ANGULAR _____	110
4.12.3) RESULTADOS DA DISTRIBUIÇÃO DA POTÊNCIA TRANSFERIDA _____	111

CAPÍTULO V

ANÁLISE DE DUAS PLACAS ACOPLADAS COM UMA VIGA NA UNIÃO

5.1) INTRODUÇÃO	112
5.2) CONFIGURAÇÕES DAS PLACAS	116
5.3) ONDAS DE TORÇÃO EM VIGAS	117
5.4) ONDAS DE FLEXÃO EM VIGAS	120
5.5) CÁLCULO DA MOBILIDADE NA VIGA	122
5.6) CONSTRUÇÃO DE MODELOS EXPERIMENTAIS	122
5.7) RESULTADOS DE FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	124
5.7.1) MOBILIDADE PONTUAL – CONFIGURAÇÃO II	
VIGA QUADRADA DE 19,05 mm	124
5.7.2) MOBILIDADE DE TRANSFERÊNCIA - CONFIGURAÇÃO II	
VIGA QUADRADA DE 19,05 mm	127
5.8) ANÁLISES DOS EFEITOS DA VIGA DE REFORÇO	129
5.8.1) COMPARAÇÃO NA CONFIGURAÇÃO I	
COM VIGA ACOPLADA/SEM VIGA ACOPLADA	129
5.8.2) COMPARAÇÃO NA CONFIGURAÇÃO II	
COM VIGA ACOPLADA/SEM VIGA ACOPLADA	132
5.9) RESULTADOS DE DENSIDADE MODAL	134
5.10) RESULTADOS DA POTÊNCIA DE ENTRADA E TRANSMITIDA	136

5.11) RESULTADOS DE FATORES DE ACOPLAMENTO _____	140
5.12) ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS AO LONGO DA LINHA DE UNIÃO _____	142
5.12.1) RESULTADOS DOS ESFORÇOS DE FLEXÃO _____	142
5.12.2) RESULTADOS DAS VELOCIDADES ANGULAR E TRANSVERSAL _____	145
 CAPÍTULO VI	
CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	
6.1) CONCLUSÕES _____	147
6.2) SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS _____	149
 REFERÊNCIAS	
BIBLIOGRÁFICAS _____	150
 APÊNDICE I	
UM SUMÁRIO DAS SOLUÇÕES DE LÉVY UTILIZADAS NA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES _____	156
 APÊNDICE II	
BREVE RESUMO DS SÉRIES DE FOURIER UTILIZADAS E O USO DA FUNÇÃO DELTA DE DIRAC _____	159
 APÊNDICE III	
ALGORITMO E FLUXOGRAMA COMPUTACIONAL _____	162

ÍNDICE DE FIGURAS E TABELAS

CAPÍTULO I

Fig.1.1 Vista aérea da plataforma P19-Petrobrás na Bacia de Campos-RJ	02
Fig.1.2 (a) e (b) Vista de paredes típicas de uma plataforma submarina	03
(c) e (d) Vista inferior de pisos típicos de uma plataforma submarina	03
Fig.1.3 Espectro de vibração (velocidade) medido numa sala de computadores piso (1 e 2), parede (3)	04
Fig. 1.4 Nível de pressão sonora medido na sala de controle	04
Fig. 1.5 Espectro de vibração (velocidade) medido no piso (1 e 2) e numa parede (3) em um dormitório de uma plataforma	05
Fig. 1.6 Nível de pressão sonora medido num dormitório	05
Fig. 1.7 Comparação entre res. calculados através de SEA, pelo software SEA-LVA-UFSC, com valores de medições na Plataforma SS-44 (Marlim) da Petrobrás	07

CAPÍTULO II

Fig. 2.1 Sistema formado por dois componentes	18
Fig. 2.2 Sistema representando o balanço de potências	18
Fig. 2.3 Força aplicada em um sistema genérico	19
Fig. 2.4 Momento aplicado a um sistema genérico	19
Fig. 2.5 Sistema mecânico genérico	21
Fig. 2.6 Sistema mecânico genérico com vários carregamentos	22
Fig. 2.7 Estrutura complexa para a qual não se conhece as funções de mobilidade	22
Fig. 2.8 Divisão da estrutura em subsistemas mais simples	23
Fig. 2.9 Fluxo de energia entre dois subsistemas acoplados	29

CAPÍTULO III

Fig. 3.1 Placa Retangular e Sistema de Coordenadas	34
--	----

Fig. 3.2 Placa completamente livre, com sistema central de coordenadas	35
Fig. 3.3 Duplamente Simétrico	36
Fig. 3.4 Duplamente Anti-simétrico	36
Fig. 3.5 Simétrico/Anti-simétrico	36
Fig. 3.6 Anti-simétrico/Simétrico	36
Fig. 3.7 Blocos usados para analisar modos duplamente simétricos	37
Fig. 3.8 Blocos usados para analisar modos duplamente anti-simétricos	41
Fig. 3.9 Blocos usados para analisar modos simétricos/anti-simétricos e anti-simétricos/simétricos	45
Fig. 3.10 Placa Livre-Livre sob a ação de uma força pontual	48
Fig. 3.11 Representação esquemática de blocos utilizados para a análise de vibrações forçadas em uma placa completamente livre sob uma força transversal	50
Fig. 3.12 Representação esquemática do bloco W5	53
Tabela 3.1 Modos duplamente simétricos de uma placa livre-livre	60
Tabela 3.2 Modos duplamente anti-simétricos de uma placa livre-livre	61
Tabela 3.3 Modos simétricos/ anti-simétricos de uma placa livre-livre	62
Tabela 3.4 Modos anti-simétricos/ simétricos de uma placa livre-livre	63
Fig. 3.13 Mobilidade pontual de uma placa 0,8 m x 0,4 m com medições no ponto $x = 30$ cm e $y = 10$ cm. Método da Mobilidade e Elementos Finitos	64

CAPÍTULO IV

Fig. 4.1 Sistema de duas placas acopladas através de uma linha	66
Tabela 4.1 Características do material utilizado nas análises	66
Tabela 4.2 Características da configuração I	66
Tabela 4.3 Características da configuração II	66
Tabela 4.4 Características da configuração III	67
Fig. 4.2 Malha da placa de 2 m x 1 m, com a cond. de contorno livre nas quatro bordas	68
Tabela 4.5 Equipamentos utilizados na análise experimental	70
Fig. 4.3 Diagrama do sistema de medições usado para obtenção de Função de Resposta em Frequência – Mobilidade em Placas Livre-Livre	71
Fig. 4.4 Diagrama da montagem do shaker e da célula de força à placa	72

Fig. 4.5 Fotografia dos equipamentos usados na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Freqüência Mobilidade em Placas Livre-Livre _____	72
Fig. 4.6 Fotografia da posição da placa suspensa por fios usada na análise experimental para obtenção de FRF Mobilidade em Placas Livre-Livre _____	73
Fig. 4.7 Fotografia de acelerômetros colados na placa sendo usados na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Freqüência Mobilidade em Placas Livre-Livre _____	73
Fig. 4.8 Fotografia de equipamentos usados na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Freqüência Mobilidade em Placas Livre-Livre _____	74
Fig. 4.9 Fotografia do Shaker e célula de força usados na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Freqüência Mobilidade em Placas Livre-Livre _____	74
Fig. 4.10 Fotografia da Placa de Alumínio 0,8 m x 0,4 m usada na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Freqüência Mobilidade em Placas Livre-Livre _____	75
Fig. 4.11 Fotografia da Placa de Alumínio 1,0 m x 0,9 m usada na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Freqüência Mobilidade em Placas Livre-Livre - _____	75
Fig. 4.12 Fotografia da Placa de Alumínio 2,0 m x 1,0 m usada na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Freqüência Mobilidade em Placas Livre-Livre _____	76
Fig. 4.13 Sistema com duas placas acopladas _____	76
Tabela 4.6 Características das placas analisadas _____	77
Fig. 4.14 Sistema representando os esforços na placa I _____	78
Fig. 4.15 Sistema representando os esforços na placa II _____	78
Fig. 4.16 Força de excitação _____	78
Fig. 4.17 Distribuição do momento fletor _____	78
Fig. 4.18 Distribuição da força cortante _____	78
Fig. 4.19 Representação esquemática de blocos utilizados para a análise de vibrações forçadas em uma placa completamente livre sob um uma força cortante em uma borda ____	79
Fig. 4.20 Representação esquemática de blocos utilizados pra a análise de vibrações forçadas em uma placa completamente livre sob um momento em uma borda _____	80
Fig. 4.21 Esforços atuantes na união _____	83

Fig. 4.22 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 2,0 m x 1,0 m faixa de frequência 0 a 250 Hz _____	87
Fig. 4.23 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 2,0 m x 1,0 m faixa de frequência 250 a 500 Hz _____	87
Fig. 4.24 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 2,0 m x 1,0 m faixa de frequência 500 a 750 Hz _____	87
Fig. 4.25 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 2,0 m x 1,0 m faixa de frequência 750 a 1000 Hz _____	87
Fig. 4.26 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 2,0 m x 1,0 m faixa de frequência 0 a 1000 Hz _____	87
Fig. 4.27 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 0 a 250 Hz _____	88
Fig. 4.28 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 250 a 500 Hz _____	88
Fig. 4.29 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 500 a 750 Hz _____	88
Fig. 4.30 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 750 a 1000 Hz _____	88
Fig. 4.31 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 0 a 1000 Hz _____	89
Fig. 4.32 Mobilidade de transferência numérica e analítica placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 0 a 250 Hz _____	89
Fig. 4.33 Mobilidade de transferência numérica e analítica placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 250 a 500 Hz _____	89
Fig. 4.34 Mobilidade de transferência numérica e analítica placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 500 a 750 Hz _____	90
Fig. 4.35 Mobilidade de transferência numérica e analítica placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 750 a 1000 Hz _____	90
Fig. 4.36 Mobilidade de transferência numérica e analítica placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 0 a 1000 Hz _____	90
Fig. 4.37 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 0 a 250 Hz _____	91
Fig. 4.38 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 250 a 500 Hz _____	91

Fig. 4.39 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 500 a 750 Hz _____	91
Fig. 4.40 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 750 a 1000 Hz _____	91
Fig. 4.41 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m - faixa de frequência 0 a 1000 Hz _____	91
Fig. 4.42 Mobilidade pontual numérica e analítica placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 0 a 250 Hz _____	92
Fig. 4.43 Mobilidade pontual numérica e analítica placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 250 a 500 Hz _____	92
Fig. 4.44 Mobilidade pontual numérica e analítica placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 500 a 750 Hz _____	92
Fig. 4.45 Mobilidade pontual numérica e analítica placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 750 a 1000 Hz _____	92
Fig. 4.46 Mobilidade pontual numérica e analítica placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 0 a 1000 Hz _____	92
Fig. 4.47 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 0 a 250 Hz _____	93
Fig. 4.48 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 250 a 500 Hz _____	93
Fig. 4.49 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 500 a 750 Hz _____	93
Fig. 4.50 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 750 a 1000 Hz _____	93
Fig. 4.51 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 1,0 m x 0,9 m - faixa de frequência 0 a 1000 Hz _____	93
Fig. 4.52 Mobilidade pontual numérica e analítica placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 0 a 250 Hz _____	94
Fig. 4.53 Mobilidade pontual numérica e analítica placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 250 a 500 Hz _____	94
Fig. 4.54 Mobilidade pontual numérica e analítica placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 500 a 750 Hz _____	94
Fig. 4.55 Mobilidade pontual numérica e analítica placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 750 a 1000 Hz _____	94

Fig. 4.56 Mobilidade pontual numérica e analítica	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 0 a 1000 Hz	_____ 95
Fig. 4.57 Mobilidade de transferência numérica e analítica	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 0 a 250 Hz	_____ 95
Fig. 4.58 Mobilidade de transferência numérica e analítica	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 250 a 500 Hz	_____ 95
Fig. 4.59 Mobilidade de transferência numérica e analítica	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 500 a 750 Hz	_____ 96
Fig. 4.60 Mobilidade de transferência numérica e analítica	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 750 a 1000 Hz	_____ 96
Fig. 4.61 Mobilidade de transferência numérica e analítica	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 0 a 1000 Hz	_____ 96
Fig. 4.62 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 0 a 250 Hz	_____ 97
Fig. 4.63 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 250 a 500 Hz	_____ 97
Fig. 4.64 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 500 a 750 Hz	_____ 97
Fig. 4.65 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 750 a 1000 Hz	_____ 97
Fig. 4.66 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental	
placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 0 a 1000 Hz	_____ 97
Fig. 4.67 Gráficos comparativos entre densidades modais da placa 2,0 m x 1,0 m obtidos via mobilidade e elementos finitos	_____ 100
Fig. 4.68 Gráficos comparativos entre densidades modais da placa 1,0 m x 0,9 m obtidos via mobilidade e elementos finitos	_____ 101
Fig. 4.69 Gráficos comparativos entre densidades modais da placa 0,8 m x 0,4 m obtidos via mobilidade, elementos finitos, experimental e eq. 2.30	_____ 101
Fig. 4.70 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III	_____ 102
Fig. 4.71 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III	_____ 102
Fig. 4.72 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III	_____ 102
Fig. 4.73 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III	_____ 102
Fig. 4.74 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III	_____ 103
Fig. 4.75 Gráficos comparativos entre potências transmitidas da configuração III	_____ 103
Fig. 4.76 Gráficos comparativos entre potências transmitidas da configuração III	_____ 103

Fig. 4.77 Gráficos comparativos entre potências transmitidas da configuração III	103
Fig. 4.78 Gráficos comparativos entre potências transmitidas da configuração III	103
Fig. 4.79 Gráficos comparativos entre potências transmitidas da configuração III	104
Fig. 4.80 Razão entre potências da configuração III obtidas via método da mobilidade	104
Fig. 4.81 Representação esquemática da cadeia de medição	105
Fig. 4.82 Gráficos comparativos entre fatores de acoplamento da configuração I obtidos via mobilidade, elementos finitos e experimental	106
Fig. 4.83 Gráficos comparativos entre fatores de acoplamento da configuração II obtidos via mobilidade, elementos finitos e experimental	107
Fig. 4.84 Gráficos comparativos entre fatores de acoplamento da configuração III obtidos via mobilidade, elementos finitos e experimental	107
Fig. 4.85 Distribuições da força cortante	108
Fig. 4.86 Distribuições do momento fletor	109
Fig. 4.87 Distribuições do deslocamento transversal	110
Fig. 4.88 Distribuições do deslocamento angular	110
Fig. 4.89 Distribuições da transferência de potência transferida	111

CAPÍTULO V

Fig. 5.1 Sistema de duas placas acopladas com uma viga quadrada na união	113
Fig. 5.2 Vista lateral do sistema de duas placas acopladas com uma viga quadrada na união	113
Tabela 5.1 Características mecânicas da placas e vigas	116
Tabela 5.2 Dimensões da configuração I	116
Tabela 5.3 Dimensões da configuração II	117
Fig. 5.3 Seção transversal de uma viga quadrada	118
Fig. 5.4 Fotografia de uma placa sendo preparada para colagem de uma viga	124
Fig. 5.5 Fotografia de uma viga colada numa placa através de cola adesiva epóxi	124
Fig. 5.6 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm - faixa de frequência 0 a 250 Hz	125
Fig. 5.7 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm - faixa de frequência 250 a 500 Hz	125
Fig. 5.8 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm - faixa de frequência 500 a 750 Hz	125

Fig. 5.9 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 750 a 1000 Hz	125
Fig. 5.10 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 0 a 1000 Hz	125
Fig. 5.11 Mobilidade pontual numérica, analítica e exp.- placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 0 a 250 Hz	126
Fig. 5.12 Mobilidade pontual numérica, analítica e exp.- placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 250 a 500 Hz	126
Fig. 5.13 Mobilidade pontual numérica, analítica e exp.- placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 500 a 750 Hz	126
Fig. 5.14 Mobilidade pontual numérica, analítica e exp.- placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 750 a 1000 Hz	126
Fig. 5.15 Mobilidade pontual numérica, analítica e exp.- placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 0 a 1000 Hz	126
Fig. 5.16 Mobilidade de transferência numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 0 a 250 Hz	127
Fig. 5.17 Mobilidade de transferência numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 250 a 500 Hz	127
Fig. 5.18 Mobilidade de transferência numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 500 a 750 Hz	127
Fig. 5.19 Mobilidade de transferência numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 750 a 1000 Hz	127
Fig. 5.20 Mobilidade de transferência numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 0 a 1000 Hz	128
Fig. 5.21 Mobilidade de transferência num. anal. e exp. - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 0 a 250 Hz	128
Fig. 5.22 Mobilidade de transferência num. anal. e exp. - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 250 a 500 Hz	128
Fig. 5.23 Mobilidade de transferência num. anal. e exp. - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 500 a 750 Hz	128
Fig. 5.24 Mobilidade de transferência num. anal. e exp. - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 750 a 1000 Hz	128
Fig. 5.25 Mobilidade de transferência num. anal. e exp. - placa 0,8 m x 0,4 m	
viga 19,05 mm - faixa de frequência 0 a 1000 Hz	129

Fig. 5.26 Mobilidade pontual – placa 2,0 m x 1,0 m viga 50 mm faixa de frequência 0 a 250 Hz	130
Fig. 5.27 Mobilidade pontual – placa 2,0 m x 1,0 m viga 50 mm faixa de frequência 250 a 500 Hz	130
Fig. 5.28 Mobilidade pontual – placa 2,0 m x 1,0 m viga 50 mm faixa de frequência 500 a 750 Hz	130
Fig. 5.29 Mobilidade pontual – placa 2,0 m x 1,0 m viga 50 mm faixa de frequência 750 a 1000 Hz	130
Fig. 5.30 Mobilidade pontual – placa 2,0 m x 1,0 m viga 50 mm faixa de frequência 0 a 1000 Hz	130
Fig. 5.31 Mobilidade de transferência – configuração I com e sem a viga 50 mm acoplada	131
Fig. 5.32 Mobilidade de transferência – configuração I com e sem a viga 50 mm acoplada	132
Fig. 5.33 Mobilidade de transferência – configuração I com e sem a viga 50 mm acoplada	132
Fig. 5.34 Mobilidade de transferência – configuração II com e sem a viga 19,05 mm acoplada	133
Fig. 5.35 Gráficos comparativos entre densidades modais da configuração I com e sem reforço de uma viga de 19,05 mm calculadas pelo Método da Mobilidade e de uma placa plana calculada pela equação 2.30	134
Fig. 5.36 Gráficos comparativos entre densidades modais da configuração I, com e sem reforço de uma viga de 50,0 mm calculadas pelo Método da Mobilidade e de uma placa plana calculada pela equação 2.30	135
Fig. 5.37 Gráficos comparativos entre densidades modais da configuração I com e sem reforço da viga de 19,05 mm e da viga de 50 mm calculadas pelo Método da mobilidade e de uma placa plana calculada pela equação 2.30	135
Fig. 5.38 Gráficos comparativos entre densidades modais da configuração II com e sem reforço da viga de 50,0 cm calculadas pelo Método da Mobilidade e de uma placa plana calculada pela equação 2.30	136
Fig. 5.39 Potência de entrada – configuração I – com a viga 50 mm	137
Fig. 5.40 Potência transmitida - configuração I – com a viga 50 mm	137
Fig. 5.41 Potência de entrada e transm. – configuração I – com a viga 50 mm	137
Fig. 5.42 Razão entre potência transmitida/entrada – configuração I com a viga 50	138
Fig. 5.43 Potência de entrada – configuração II – com viga 19,05 mm	138

Fig. 5.44 Potência transmitida – configuração II – com viga 19,05 mm	139
Fig. 5.45 Potência de ent. e transm. – configuração II – com viga 19,05 mm	139
Fig. 5.46 Razão entre potência transm./entrada- configuração II com a viga 19,05 mm	140
Fig. 5.47 Fator de acoplamento – configuração I – sem viga, com viga 50 mm com viga 19,05 mm	141
Fig. 5.48 Fator de acoplamento – configuração II – com viga 19,05 mm	141
Fig. 5.49 Distribuições da força cortante	143
Fig. 5.50 Distribuições dos momentos torçores e fletores	144
Fig. 5.51 Distribuições do deslocamento transversal	145
Fig. 5.52 Distribuições do deslocamento angular	156

APÊNDICE AI

Fig. AI-1 Representação esquemática de um bloco	157
Fig. AI-2 Representação esquemática de um bloco	157
Fig. AI-3 Representação esquemática de um bloco	158
Fig. AI-4 Representação esquemática de um bloco	158

APÊNDICE AII

Fig. AII-1 Função $f(\xi)$ sobre o intervalo $\xi = 0$ até $\xi = 1$	159
Fig. AII-2 Representação esquemática da função Delta de Dirac usada para representar forças concentradas	161

SIMBOLOGIA

Os símbolos listados abaixo são utilizados no decorrer deste trabalho, sendo que os mais específicos encontram-se descritos ao longo do texto.

a, b	Dimensões da placa nas direções x e y respectivamente.
a_{acel}	Aceleração
A	Área
A_{ine}	Inertância
b_v	Espessura da viga
C_l	Velocidade de propagação de ondas longitudinais
C_b	Velocidade de propagação de ondas de flexão
D	Rigidez à flexão da placa
E	Módulo de elasticidade
E_{cin}	Energia cinética
E_{diss}	Energia dissipada
E_{pot}	Energia potencial
E_{vib}	Energia vibratória
E_1, E_2	Energia total
f	Frequência
f_c	Frequência central de uma dada banda
f_n	Frequência de ressonância
F	Vetor força
G	Módulo de elasticidade ao cisalhamento;
h	Espessura da placa
i, j	Unidade imaginária
i, j, k	Número inteiro

Im	Parte imaginária
I	Momento de inércia de massa por unidade de comprimento
J	Momento de inércia à torção da seção transversal da viga;
k	Termos de Fourier
k^*	$\frac{k}{2}$
L_x	Dimensão medida na direção x
L_y	Dimensão medida na direção y
m_v	Massa da viga
M_a	Massa
M	Momento
N	Número de modos
NI	Número de discretizações
$N_{\Delta f}$	Número de modos presentes na banda
n	Densidade modal
P	Força transversal pontual harmônica
P^*	Força P pontual adimensional, dada por $\frac{-2Pb^3}{Da^2}$
q	Coordenada generalizada
Q_t	Rigidez a torção;
rms	Raiz média quadrática
Re	Parte real
t	Tempo
T	Tempo de reverberação
$\{u_d\}$	Vetor de deslocamento;
$\{\ddot{u}_d\}$	Vetor de aceleração;
V	Reação vertical na borda da placa
V_v	Volume da viga
w	Deslocamento transversal da placa
W	Deslocamento transversal da placa dividido por a
W_{pot}	Potência
W_{in}	Potência de entrada

W_{diss}	Potência dissipada
W_{trans}	Potência transferida
x, y	Eixos de coordenadas retangulares
Y	Mobilidade
Y_{ii}	Mobilidade pontual
Y_{ij}	Mobilidade de transferência
Z_{ii}	Impedância pontual

Alfabeto Grego

α_{rec}	Receptância
ξ, η	Coordenadas sem dimensão, de valores $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$, respectivamente
λ	Autovalor adimensional dado por $(\omega a^2 \sqrt{\rho/D})^{1/2}$
η_1, η_2, η_a	Fator de perda estrutural
η_{12}, η_{21}	Fator de acoplamento
ρ	Densidade do material
ω	Frequência em rad/s
ψ	Fator de forma
ϕ	Razão entre as dimensões da placa, dada por $\frac{a}{b}$
θ	Rotação
ν	Coefficiente de Poisson
ν^*	$(2 - \nu)$

Convenções

Quando não houver outra indicação, o símbolo * indica complexo conjugado.

Um ponto sobre a variável indica derivada temporal

CAPÍTULO I

1.1) Introdução

O estudo da transmissão de energia vibratória em estruturas acopladas tem sido objeto de muitas pesquisas nos últimos anos. Tais estruturas são encontradas em navios, aeronaves, edifícios e plataformas de petróleo, entre outras aplicações. Em todos estes casos, a transmissão de energia vibratória através das estruturas e conversão em ruído irradiado é motivo de constante preocupação. Estas estruturas são compostas de elementos simples do tipo placas, vigas e barras acopladas, tornando a análise do comportamento dinâmico bastante complexa. Os poucos métodos de análise disponíveis apresentam restrições, normalmente relacionadas às faixas de frequência de aplicação, ou ao tempo de processamento, ou ainda às incertezas dos valores médios espaciais das respostas calculadas.

No caso específico de estruturas de plataformas *offshore* de prospecção e de produção de petróleo, a complexidade da análise é ainda maior pois envolve não somente o acoplamento entre placas e vigas mas, também, um grande número de máquinas pesadas e ruidosas tais como turbo-geradores, turbo-compressores e bombas de transferência operando

ininterruptamente [28]. Estas máquinas transferem quantidades consideráveis de energia vibratória para as estruturas que as suportam. Como estas vibrações se propagam com relativa facilidade tem-se, como consequência, nas regiões mais distantes da plataforma, como nos dormitórios por exemplo, geração de altos níveis de ruído, causando desconforto, estresse e até mesmo problemas auditivos nas pessoas que passam um grande número de horas diárias em ambientes que não possuem tratamento acústico nas paredes, piso e teto (como em almoxarifados e oficinas, por exemplo).



Figura 1.1 Vista aérea da Plataforma P19 – Petrobrás na Bacia de Campos-RJ;

A estrutura de uma plataforma (Figura 1.1), é composta de placas reforçadas por vigas, dispostas em forma de grelhas (Figura 1.2 a, b, c e d), que possuem a finalidade principal de suportar o peso de grandes máquinas.

As vigas de reforço, que são normalmente construídas em seção I, seção L, seção quadrada ou seção T invertida, têm as seguintes dimensões típicas: altura de 0,5 m, largura da base de 0,2 m, com alma de espessura de 0,02 m e comprimento podendo chegar a 5,0 m. As placas têm, em média, comprimento e largura de 5,0 m e espessura variando de 0,005 m a 0,01 m. As vigas de reforço estão localizadas a cada 0,5 m a 2,0 m, nas direções ortogonais.

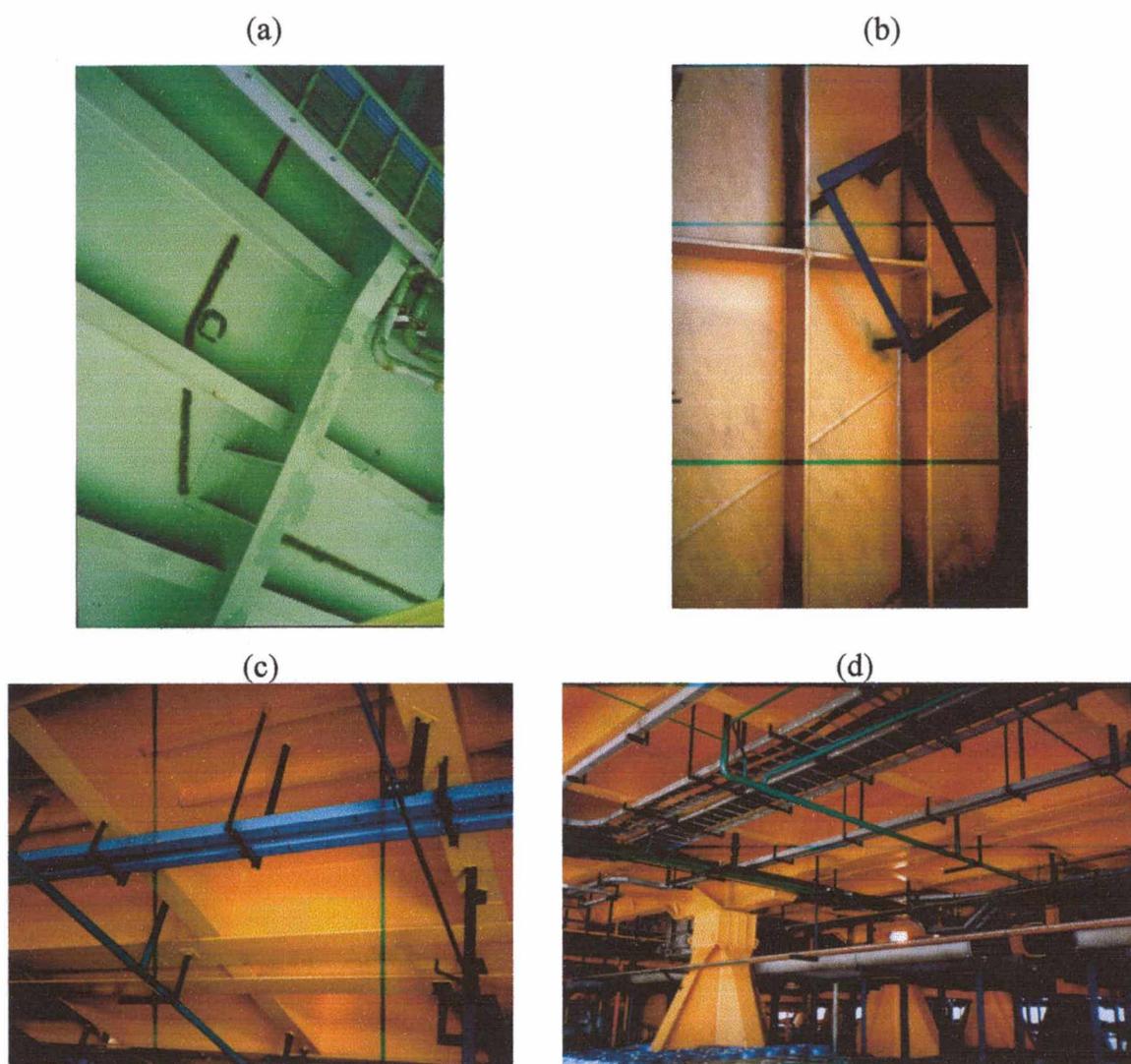


Figura 1.2 (a) e (b) Vista de paredes típicas de uma plataforma submarina
(c) e (d) Vista inferior de pisos típicos de uma plataforma submarina

As vibrações de baixa frequência geradas por máquinas e equipamentos nas plataformas propagam-se pela estrutura, gerando ruído através das ondas de flexão, ondas no plano e também ondas de torção, sendo que um dos fatores decisivos para que isso ocorra é o fator de acoplamento entre componentes estruturais, que apresenta tendência decrescente com a frequência [24].

Sabe-se que nas baixas frequências, os relativamente altos valores do fator de acoplamento propiciam grande transmissão de energia vibratória. Nas altas frequências, a transmissão é dificultada pelos baixos valores do fator de acoplamento. São esperados, portanto, níveis maiores de vibração nas baixas frequências nas regiões mais distantes (dormitórios) das áreas onde estão instaladas as máquinas e os equipamentos mais pesados.

Isto pode ser constatado através dos espectros de vibração e de ruído medidos em plataformas, em alguns ambientes distantes, mostrados a seguir.

As Figuras 1.3 a 1.6, mostram os resultados das medições de vibração (velocidade) em paredes de um dormitório e de Nível de Pressão Sonora em uma sala de controle. As medições foram feitas na Plataforma Piloto de Marlin - SS 33, pertencente à Petrobrás, fundada na Bacia de Campos, RJ [36].

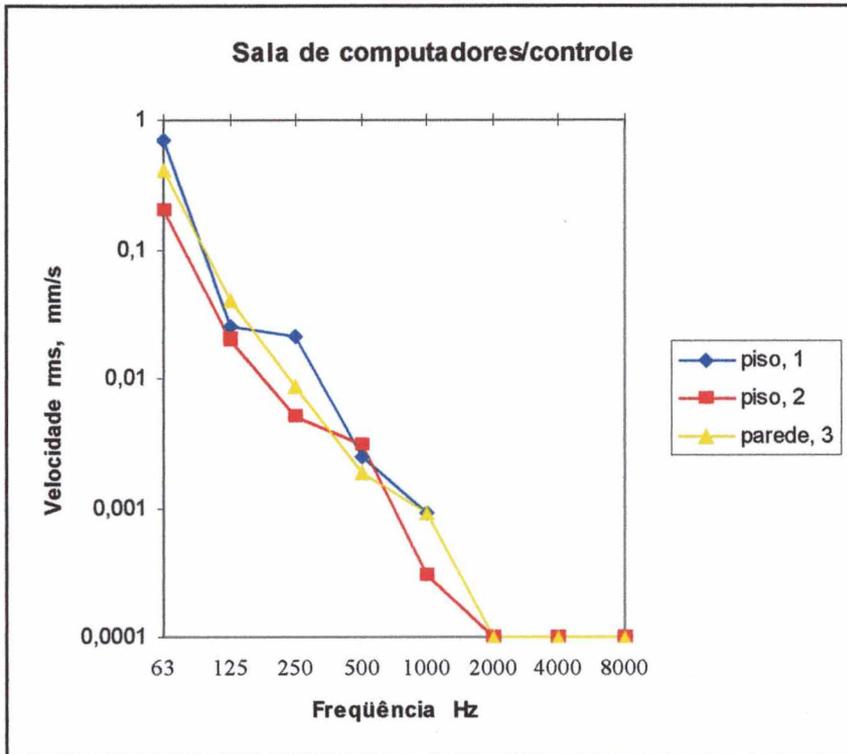


Figura 1.3 Espectro de vibração (velocidade) medido numa sala de computadores piso (1 e 2), parede (3).

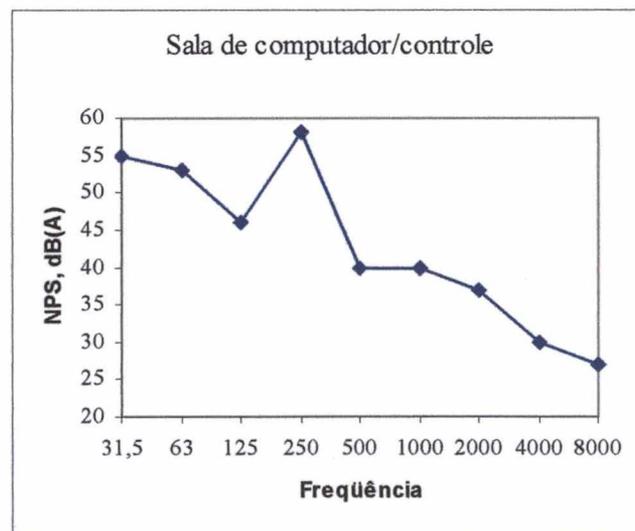


Figura 1.4 Nível de Pressão Sonora medido na Sala de Controle [36].

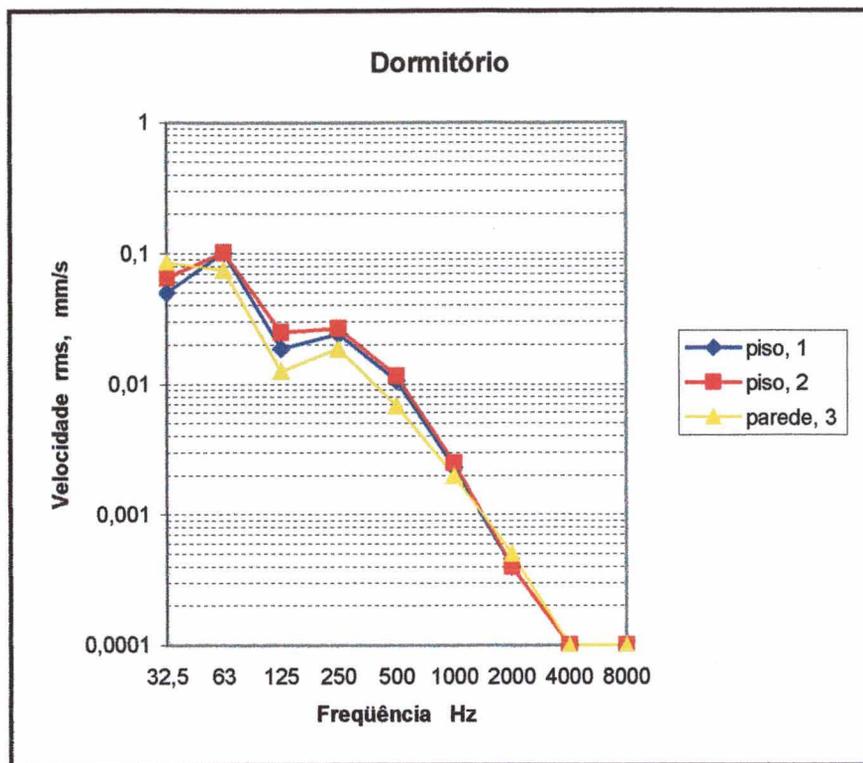


Figura 1.5 Espectro de Vibração (velocidade) medido no piso (1 e 2), e numa parede (3) em um dormitório de uma plataforma.

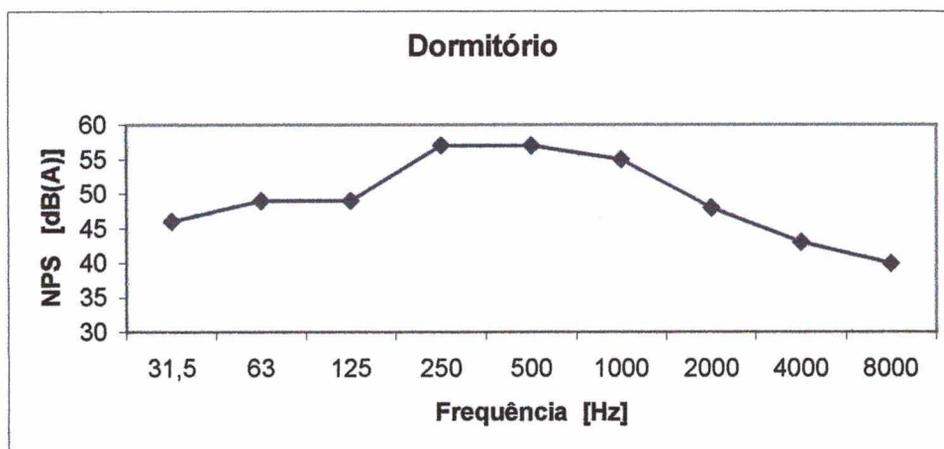


Figura 1.6 Nível de Pressão Sonora medido num dormitório de uma plataforma.[36]

Observa-se a concentração da energia vibratória nas baixas frequências, tornando o espectro da resposta estrutural, na forma de velocidade, decrescente com a frequência. Os espectros do ruído formado no interior dos dormitórios possuem mesma tendência. Entretanto, podem também sofrer contaminação do ruído gerado através do sistema de ventilação/climatização destes ambientes.

A influência dessas vibrações, propagando-se pela estrutura, na formação do campo sonoro nas salas de computadores/controle e também nos dormitórios, é altamente

significativa, o que motiva um estudo mais detalhado dos métodos de cálculo com boa precisão até frequências acima de 1000 Hz (altas frequências) para as quais a aplicação dos métodos numéricos ainda é muito dispendiosa e demorada, tornando-se quase inviável. A determinação dos caminhos de propagação da energia transferida em sistemas estruturais complexos, compostos de placas acopladas a vigas, é também importante para o êxito dos trabalhos de controle de ruído em tais estruturas.

Estruturas compostas de placas tendem a apresentar grande densidade modal [1], sendo este o principal fator que limita a análise pelos métodos baseados na análise modal, sejam eles numéricos, experimentais ou analíticos.

1.2) Métodos mais Comuns de Predição de Vibrações em Estruturas Acopladas

São dois os métodos mais comumente usados para analisar resposta dinâmica de estruturas acopladas: o Método de Elementos Finitos (MEF) que proporciona resultados precisos na faixa de frequências envolvendo as primeiras ressonâncias do sistema e a Análise Estatística Energética (SEA) aplicável com boa precisão nas frequências para as quais o fator de superposição modal (MOF) é suficientemente alto.

O Método de Elementos Finitos apresenta a grande vantagem de permitir uma ótima representação de geometrias complexas, porém calcula apenas os primeiros modos (as primeiras dezenas de modos) de uma estrutura complexa. Isso faz com que uma faixa limitada do espectro de interesse seja analisada, o que é insuficiente (aproximadamente 200 Hz para placas com dimensões normalmente usadas em plataformas).

O MEF requer um grande número de elementos no modelo, para resolução dos detalhes da resposta da estrutura nas médias e altas frequências e isso exige um esforço computacional muito grande. No caso de plataformas *offshore*, a faixa de frequência de interesse é de até 1000 Hz, no mínimo, fazendo com que o MEF necessite de um tempo muito grande de processamento, não sendo, portanto o método mais aconselhável, neste caso. Mesmo com os computadores de alta performance, como os existentes atualmente e usando-se um software comercial de elementos finitos, como Ansys ou Nastran, o tempo necessário para solucionar as imensas matrizes geradas devido ao grande número de graus de liberdade é muito grande, dificultando a utilização dos métodos numéricos nesse tipo de análise.

A Análise Estatística Energética - SEA é um método que se aplica a casos como o descrito anteriormente, pois, os componentes possuem alta densidade modal [25]. Bons resultados são obtidos usando-se a Análise Estatística Energética se a densidade modal for

alta, mínimo de 10 modos por banda de análise [29], o que torna este método uma importante ferramenta de análise em altas frequências, onde se tem grande densidade modal. A recomendação do número mínimo de 10 modos por faixa de frequência de análise, para cada subsistema de um modelo de SEA, baseia-se em observações de resultados de modelos desenvolvidos por vários pesquisadores e usuários. Obviamente que as incertezas estão relacionadas não somente à densidade modal dos subsistemas, mas também aos seus amortecimentos.

Um dos pontos centrais da Análise Estatística Energética é a possibilidade de se representar uma estrutura em vários subsistemas (subestruturas), acoplados entre si, sendo que parte da energia vibratória de cada subsistema pode ser transmitida a outros subsistemas com os quais estiver acoplado [19]. Fala-se em energia por ser a variável primária de modelos de SEA e a fração de energia que é transferida de um subsistema para outro é expressa em termos do fator de acoplamento. A eficiência de radiação e o fator de acoplamento são parâmetros ainda em estudo para componentes estruturais do tipo placas reforçadas.

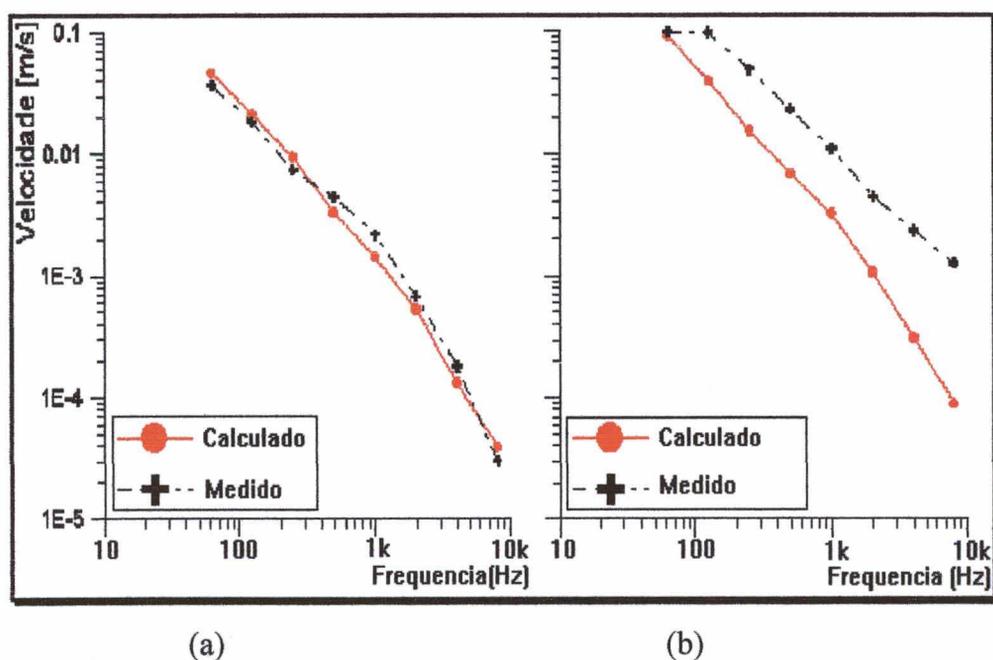


Figura 1.7 Comparação entre resultados calculados através de SEA, pelo software SEA-LVA-UFSC, com valores de medições na Plataforma SS-44 (Marlim) da Petrobrás [36].

Com o objetivo de mostrar a potencialidade do uso de SEA em análise de resposta dinâmica de estruturas, a Figura 1.6 mostra duas comparações entre valores de velocidade de vibração medidos na plataforma SS-44 da Petrobrás [36] e valores calculados por SEA, através de um software desenvolvido especificamente para esse fim [37], para duas paredes, de ambientes distintos. A Figura 1.6a mostra ótima concordância de uma das comparações,

enquanto que a Figura 1.6b indica o maior erro observado dentre as dezenas de comparações feitas com valores obtidos de medições.

1.3) Objetivos Gerais deste Trabalho

A precisão dos resultados obtidos pela Análise Estatística Energética depende da precisão dos parâmetros requeridos pelo sistema tais como: fatores de acoplamento e densidades modais, entre outros. No caso específico de placas reforçadas por vigas, encontra-se pouquíssima informação na literatura a respeito de funções de resposta em frequência, fatores de acoplamento e densidade modal. Com isto, as aplicações de SEA para estas estruturas usam valores aproximados destes parâmetros (disponíveis para estruturas geometricamente mais simples), ocasionando, em alguns casos, grandes erros nas predições.

O objetivo principal deste trabalho consiste em desenvolver um modelo determinístico de cálculo da resposta de placas planas retangulares, reforçadas por vigas, tendo as bordas livres. Os efeitos de acoplamento entre vigas e placas são considerados através do Método da Mobilidade, também denominado Método da Receptância, Método da Rigidez Dinâmica, ou Método do Fluxo de Potência.

Este método faz uso de funções resposta em frequência tipo mobilidade referentes aos esforços que são transmitidos na linha de união entre placas e vigas. Os esforços principais são de flexão e de cisalhamento.

Cada segmento de uma placa reforçada, como mostram as Figuras 1.2 a-d, possui acoplamento com vigas nas quatro bordas. A determinação das funções de mobilidade de cada borda deve considerar as demais bordas livres, o que aumenta enormemente a complexidade deste procedimento numérico, tendo em vista as dificuldades de determinação das respostas de placas retangulares com estas condições de contorno. Por este motivo, neste trabalho serão abordadas placas acopladas a vigas, tendo as demais bordas livres. O objetivo consiste em analisar a viabilidade de utilização deste método para modelar uma placa tipicamente reforçada por várias vigas, como um subsistema de um modelo de SEA. Desta forma, este procedimento poderá ser usado também para a determinação dos parâmetros intrínsecos aos modelos de SEA, tais como fatores de acoplamento e densidade modal, destas placas reforçadas.

Observa-se que a discretização ocorre somente ao longo da linha de união entre placas e vigas, enquanto que modelos numéricos como Elementos Finitos discretizam todo o

domínio, incluindo as placas. Esta é uma vantagem do método da mobilidade em relação aos demais métodos numéricos.

A seguir, será apresentada uma revisão dos principais trabalhos encontrados na literatura, relacionada ao comportamento dinâmico de placas reforçadas por vigas.

1.4) Revisão Bibliográfica

Embora muitos trabalhos já tenham sido publicados sobre o comportamento vibratório de placas planas retangulares com diversos tipos de condição de contorno, poucos foram encontrados sobre placas retangulares reforçadas e especialmente sobre placas planas retangulares totalmente livres nas bordas. Deve-se frisar que a grande maioria dos artigos sobre estruturas compostas de placas e vigas apresenta somente resultados de determinação de frequências naturais, não fornecendo valores de amplitude da resposta do sistema.

Em 1964, Wah [2] apresentou um procedimento para cálculo de frequências naturais de placas retangulares contínuas, reforçadas por vigas igualmente espaçadas, e simplesmente apoiadas em duas extremidades opostas e com outras condições de contorno nas duas outras extremidades da placa. Um dos objetivos do trabalho é a avaliação da faixa de aplicabilidade de formulações desenvolvidas para placas ortotrópicas em placas reforçadas e, uma de suas conclusões é a de que nas baixas frequências, a aproximação para placas ortotrópicas às placas com pequeno número de reforços fornece resultados razoavelmente precisos.

Leissa [13], em 1973, fez um trabalho minucioso e preciso sobre vibrações livres de placas retangulares. O autor estudou diversos casos que envolvem possíveis combinações de condição de contorno, entre borda com engaste, suporte simples e livre, calculando suas frequências naturais, como também mostrando que para a condição de contorno totalmente livre nas bordas, não existe uma solução analítica exata.

O trabalho de Olson e Hazell [3] realizado em 1976, mostra resultados de análise em placas reforçadas (duas placas com somente um reforço no meio e outras duas placas com dois reforços simetricamente espaçados), usando o MEF com elementos de alta precisão e faz comparação com resultados de experimentos em tempo real usando holografia a laser, sendo a placa excitada por um campo acústico. Os autores enfrentaram a mesma limitação comumente encontrada pelos usuários do MEF, ou seja, o tempo computacional demasiadamente longo para os cálculos e a limitação de resultados precisos às baixas frequências. Subentende-se, aqui, por baixas frequências, faixas de frequência envolvendo os primeiros modos de vibração, os quais requerem um número reduzido de graus de liberdade do sistema.

Em 1976, Gorman [9] estudou vibrações livres de placas retangulares com várias combinações de condições de contorno, usando o Método da Superposição, mostrou que esse método é uma ferramenta robusta, relativamente de fácil implementação e com boa precisão. Ainda Gorman [18], em 1978, demonstrou que o Método da Superposição pode ser utilizado para estudar placas retangulares com bordas livres, obtendo uma boa precisão no cálculo das frequências naturais, como também na forma desses modos.

O Método dos Elementos Finitos foi usado, também em 1996, por Orrenius e Finnveden [10] para estudar a propagação de ondas em placas reforçadas por vigas, e a influência do número de reforços na propagação da onda na placa. O autor mostrou que as ondas de flexão, numa estrutura, podem ser divididas em três grupos distintos de modos, com respeito a que parte da estrutura determina qual tipo de onda que propaga melhor o fluxo de energia, associado com a onda propagante.

O trabalho de Koko e Olson [6] em 1992, foi baseado no uso de uma nova formulação chamada de “Super Elementos Finitos” onde os campos de deslocamento dos elementos são representados por funções analíticas e polinomiais, em ambas as direções no plano e os elementos foram projetados para que somente um elemento de placa por espaço e um elemento de viga por vão sejam necessários para modelar a resposta. A precisão dos resultados é boa, porém este método é ainda grandemente limitado ao pequeno número de modos que são possíveis de serem calculados.

Em 1993, Sheikh e Mukhopadhyay [7] analisaram placas reforçadas através do chamado “Spline Finite Strip Method”. Neste método, “funções cúbicas spline” são adotadas numa direção e funções de forma de Elementos Finitos são adotadas numa outra direção, como funções de interpolação do campo de deslocamentos. Uma função cúbica *spline* pode ser descrita, aproximadamente, como sendo construída por partes, cada qual por um polinômio cúbico, de tal forma que $f(x)$ e suas primeiras derivadas são sempre contínuas. Como analogia, pode-se afirmar que é uma régua elástica podendo ser curvada de forma a passar por um dado conjunto de pontos (x,y) . As placas estudadas eram reforçadas por vigas em diversas posições arbitrárias. A desvantagem é que também, só consegue analisar poucos modos de vibração, como acontece com MEF tradicional.

Em 1985, Balendra e Shanmugam [4] apresentaram o Método da Grelha (*Grillage Method*) aplicado para placas reforçadas, com o qual estudaram a influência tanto da quantidade como das diferentes posições dos reforços acoplados à placa, sendo que o método apresenta uma melhor precisão para os primeiros modos. A placa foi dividida, tanto longitudinalmente quanto transversalmente, em um número individual de elementos de grelha.

Foram analisadas placas quadradas e retangulares com diferentes números de reforços tanto na direção transversal como em ambas as direções, transversal e longitudinal. Nas baixas frequências, o erro encontrado, no cálculo das frequências, chegou a 9,5% e 10,4% em relação aos valores encontrados por elementos finitos e medições experimentais, respectivamente. O erro nas altas frequências foi substancialmente maior, passando até de 20%.

Em 1996, Zhou Ding [8] trabalhou em placas retangulares, aplicando o método Rayleigh-Ritz. As funções básicas para o uso do método, consistem de um conjunto de funções de vigas estáticas, que são uma combinação de série de senos e polinômios, que são derivadas pela expansão das forças externas atuando na viga como uma série de senos. Os coeficientes das expressões polinomiais usadas são determinados pelas correspondentes condições de contorno da viga, correspondendo às condições de contorno de placas.

Em 1994, a importância do fator de acoplamento entre sistemas acoplados foi estudada por Mace [12], em sistemas lineares, dentro da hipótese de SEA de que a potência de acoplamento entre dois subsistemas é proporcional à diferença entre suas densidades de energia ou a diferença entre suas energias modais. O autor mostrou que o fator de acoplamento depende do nível específico de excitação aplicado a cada subsistema individualmente.

Em 1991, Clarkson [5] usou o Método de Receptância para investigar a transmissão de energia vibratória através de junções de estruturas de vigas e placas acopladas. O conceito principal da aproximação pela receptância é o uso da informação modal dos componentes da estrutura para construir as relações força/deslocamento nos contornos dos acoplamentos e no local de direção da força em termos de funções de receptância. A função da receptância é definida como a razão complexa de um componente de deslocamento numa posição específica para um componente de força na mesma ou em outra posição da estrutura. O deslocamento pode ser de translação ou de rotação e o esforço pode ser uma força ou um momento. As funções complexas da receptância contêm as informações sobre a amplitude e a fase entre a resposta e a força de excitação. Seu trabalho concluiu que o método é suficientemente adequado para resolver problemas de estruturas complexas acopladas.

Farag e Pan [14], em 1996, usaram também o Método da Receptância para determinar as forças internas e os deslocamentos de sistemas de vigas acopladas, em condições de contorno específicas, sofrendo somente carregamento no plano. Mesmo sendo o trabalho dedicado somente a acoplamentos entre vigas, os autores afirmaram que o Método da Receptância é suficientemente preciso na determinação dos esforços internos e das respostas em frequência de sistemas compostos de estruturas acopladas.

Shankar e Keane [34], em 1997, estudaram o comportamento de placas acopladas simplesmente apoiadas nas bordas, usando o Método da Receptância, modelando os subsistemas como subestruturas, analisando o fluxo de energia vibratória entre as subestruturas e comparando com Elementos Finitos.

Cuschieri [15] em 1987, estudando vigas unidas em L, utilizou o Método da Mobilidade, e mostrou que o mesmo pode ser utilizado em qualquer faixa de frequência, ou seja, é um método que não tem limite de frequência para sua utilização, sendo essa uma grande vantagem. Este método é idêntico ao da Receptância, utilizado por Clarkson [5] em 1991.

Em 1990 [16] o mesmo autor usou também o Método da Mobilidade em estruturas de vigas acopladas. Em outro trabalho [17], em 1990, o autor utiliza o mesmo método em placas finas acopladas em L, cujo movimento é descrito usando a equação de movimento para placa fina. Desta forma, ondas no plano são negligenciadas e, portanto, a potência é transmitida através da junção somente por ondas de flexão, através da rotação da junção. Ainda em 1990, num outro trabalho [20], a potência transmitida através da junção de placas em L é considerada, quando as ondas tanto no plano quanto fora do plano, podem transmitir essa potência.

Em 1992, Cuschieri [21] usa o Método da Mobilidade em duas placas finas acopladas em L, e a resposta da estrutura, potência de entrada e de transferência são analisadas, sendo que as placas apresentam características arbitrárias e, com esses resultados, é feita uma avaliação paramétrica incluindo áreas diferentes, espessuras, materiais e amortecimento estrutural, bem como avalia a resposta do sistema para diferentes pontos de excitação na placa. Os resultados obtidos pelo Método da Mobilidade são comparados com resultados obtidos através de SEA, apresentando boa concordância.

A formulação e os conceitos básicos sobre a transmissão de energia ao longo de estruturas do tipo barras e vigas, submetidos, respectivamente, às ondas longitudinais e de flexão, foram tratadas por Baars [22] em 1996. O autor utilizou o Método da Mobilidade para calcular o fluxo de potência através dos acoplamentos. Foram analisados os efeitos da rigidez de acoplamento, do amortecimento e da rigidez estrutural. O trabalho também apresenta uma formulação para a determinação experimental das potências de entrada, de transferência, e dos fluxos de potência ao longo do componente em campo próximo e distante. Entretanto o trabalho restringe-se apenas a acoplamentos entre vigas.

Estruturas compostas por vigas, formando grelhas, foi o tema do trabalho de Fiates [23] em 1996. O autor analisa, pelo Método da Mobilidade, os principais tipos de ondas na

transmissão de energia vibratória e a resposta dinâmica da estrutura. Foram estudadas as influências de ondas do tipo longitudinal, flexão e torção na transmissão de energia. As vantagens do método são a obtenção determinística da resposta, em todo espectro de frequências e a determinação dos esforços somente nas junções.

Souza [38], em 1999, utilizou o Método da Mobilidade em estruturas compostas por vigas, derivando as expressões de mobilidade para o acoplamento entre vigas, partindo das equações de onda longitudinal, de flexão e de torção. O autor analisou a contribuição de cada tipo de onda na estrutura e concluiu que as ondas de flexão concentram a maior parte da energia vibratória, e que as ondas longitudinal e de torção são importantes para o fluxo de potência entre componentes acoplados.

Juang [27], em 1993, usa o método da Transformada de Fourier para formular o deslocamento de placas infinitas reforçadas com apenas um reforço, sujeitas a uma pressão de excitação tipo onda plana, uma força pontual ou uma força atuando numa linha incidindo no reforço. Seus resultados comprovam que o reforço promove uma redução na resposta do deslocamento da placa reforçada quando comparada com a resposta de uma placa homogênea no caso de uma força de excitação na mesma linha ou no mesmo ponto. O autor estabelece uma relação, através da equação de Euler, entre a resposta do deslocamento e a resposta acústica, de uma placa com somente um reforço. Placas multi-reforçadas são também estudadas, quanto a influencia dos reforços na resposta do deslocamento.

Bonifácio [30], em 1998, faz uma análise do fluxo de energia vibratória entre placas retangulares simplesmente apoiadas pelo Método da Mobilidade, avaliando inicialmente duas placas unidas e, posteriormente, estendendo para placas com viga de reforço na união. Os resultados são comparados com o MEF, avaliando os caminhos de propagação da energia vibratória e a contribuição de cada estrutura, viga e placa, no processo de transmissão de energia.

Sardá [39], em 1999, analisou pelo Método de Elementos Finitos os caminhos de propagação de energia entre duas placas planas e retangulares apoiadas em vigas, analisando a contribuição das vigas e placas nessa transmissão, e determinando os esforços responsáveis pela transmissão da maior parte da energia. O autor também analisou o comportamento do fator de acoplamento entre placas apoiadas em vigas.

No trabalho de Ozelame [24], em 1997, a densidade modal e os fatores de acoplamento de placas reforçadas por vigas, são analisados usando-se o MEF. O autor mostra que a densidade modal da placa não é muito influenciada pelas vigas acopladas como reforços. Na ausência de qualquer metodologia disponível, as equações aplicadas às placas

planas produzem resultados considerados como uma primeira aproximação daqueles obtidos para placas reforçadas, o que valida a análise pelo método usado. O trabalho mostra que a energia vibratória está, quase que totalmente, contida na placa e que os fatores de acoplamento de placas tendem a valores pouco dependentes da frequência, no caso de reforços por vigas.

O trabalho de Langley e Bremner [54], mostra uma nova metodologia de análise e predição de respostas de sistemas mecânicos estruturais, no qual os modos de vibração são divididos em dois tipos: modos globais e modos locais. Os modos globais são oriundos de uma formulação determinística aplicada ao problema de forma geral. Os modos locais são abordados através de SEA. Este estudo avalia as respostas das estruturas considerando as diferentes densidades modais dos componentes acoplados e proporcionando bons resultados tanto nas altas como nas baixas frequências.

Em 2000, Barrete et alii [40] analisaram vibrações de placas reforçadas usando elementos finitos hierárquicos, com um conjunto de funções de interpolação trigonométricas. Este trabalho mostra que resultados mais precisos são obtidos quando são usados elementos pequenos e funções de interpolação de alta ordem e também que as funções trigonométricas dão grande estabilidade numérica e são potencialmente atrativas para análise de vibrações nas médias frequências.

Grice e Pinnington [11], em 2000, estudaram placas (engastadas) reforçadas por vigas usando uma combinação de Elementos Finitos e Impedância Analítica. Concluíram que esse método híbrido é robusto e eficiente para análise da resposta de placas reforçadas por vigas.

Em 1986, Hagedorn, Kelkel e Wallaschek [45] analisaram a resposta dinâmica de estruturas espaciais. Essas estruturas possuem apêndices, subestruturas auxiliares tais como abas e reforços, em alguns casos modelados como vigas e em outros como placas finas ou cascas, sendo que não devem ser consideradas estruturas rígidas e devem ter um efeito no comportamento dinâmico da estrutura espacial. Neste trabalho, os autores derivaram as matrizes de impedância necessárias para descrever o comportamento dinâmico de placas retangulares livres.

Shuyu [41], em 2001, apresentou um método analítico para vibração de flexão de placas retangulares com bordas livres, substituindo a vibração bidimensional de flexão da placa em duas unidimensionais de flexão de barra fina, fazendo com que a vibração de flexão de uma placa retangular com condição de contorno livre nas bordas, seja considerada como um acoplamento das duas unidimensionais de uma barra, através de um coeficiente de acoplamento. Sua conclusão foi que o método pode ser usado quando não se exige uma precisão muito grande na análise.

Em 2001, Hurlbaeus et alii [42] estudaram o uso de “filtros” de funções cosenoidais na equação diferencial de placas retangulares finas com condição de contorno livre em todas as bordas, para se calcular frequências naturais destas placas. Essa solução foi anteriormente lançada por Wang e Lin [43] em 1999. Sua conclusão foi que o método é simples, rápido e possui precisão razoável quando comparado a outros métodos existentes.

1.5) Objetivos Específicos

O objetivo específico deste trabalho é analisar a aplicabilidade do método da mobilidade para a determinação da resposta e do fluxo de energia vibratória em placas planas retangulares, acopladas a vigas, sendo as demais bordas consideradas livres. Para isso, inicialmente foram analisadas as respostas de placas totalmente livres e, em seguida, placas livres nas bordas, tendo uma viga de reforço. O objetivo consiste em possibilitar o uso futuro desta metodologia em placas com vários tipos de reforço e para quaisquer condições de contorno. A formulação das vibrações de placas livres nas bordas é sabidamente a mais complexa.

1.6) Conteúdo dos Capítulos

O Capítulo 1 apresenta uma introdução do trabalho, uma breve revisão dos métodos mais comuns para o estudo de vibrações em estruturas acopladas e uma revisão bibliográfica, onde são citados os principais trabalhos e seus autores, que servem de base para o presente trabalho.

O Capítulo 2 mostra os conceitos básicos do Método da Mobilidade e da formulação de modelos usando Análise Estatística Energética, juntamente com suas formulações.

O Capítulo 3 apresenta o algoritmo matemático para o cálculo das respostas de placas planas retangulares totalmente livre nas bordas, as formas dos modos de vibração e a análise de placas totalmente livre nas bordas, excitada por uma força pontual transversal à placa, usando o Método da Superposição Completo, que foi o método usado para o cálculo das respostas das placas em questão.

O Capítulo 4 mostra como se dá o acoplamento entre placas livre-livre. Os resultados foram comparados aos obtidos pelo Método de Elementos Finitos, bem como aos experimentais. Este capítulo mostra, também, resultados de mobilidade, densidade modal, fluxo de potência e fator de acoplamento de placas acopladas sem reforço, na condição

totalmente livre nas bordas, obtidos pelo Método da Mobilidade, Método de Elementos Finitos e experimentalmente.

O Capítulo 5 apresenta os resultados das análises realizadas em algumas configurações de placas e vigas acopladas, com gráficos de resposta em frequência, densidade modal, fluxo de potência e fator de acoplamento, obtidos através do Método da Mobilidade, usado no presente trabalho. Para efeito de validação, os valores foram devidamente comparados com os obtidos tanto por via experimental quanto através do Método de Elementos Finitos.

Finalmente, o Capítulo 6 contém as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

Após as Referências Bibliográficas, o Apêndice I trata das soluções de Lévy utilizadas neste trabalho, o Apêndice II apresenta um breve resumo das séries de Fourier da função Delta de Dirac e o Apêndice III apresenta o fluxograma computacional dos principais programas usados neste trabalho.

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS SOBRE O MÉTODO DA MOBILIDADE E ANÁLISE ESTATÍSTICA ENERGÉTICA

2.1) Fluxo de Potência Vibratória

A potência vibratória transmitida ao longo de meios contínuos através dos seus esforços internos é dissipada pelo amortecimento estrutural, sendo transformada em calor e/ou irradiada em forma de energia sonora. O fluxo de potência representa a taxa de trabalho realizado ou de energia fornecida para um sistema mecânico. A análise do fluxo de potência ao longo de componentes é de grande importância, já que o conhecimento dos mecanismos de propagação objetiva reduzir a resposta estrutural, principalmente nos casos em que a irradiação de ruído é significativa como mecanismo de dissipação da energia vibratória, como no caso de irradiação de ruído por estruturas submersas em água. No caso de acústica aérea, a dissipação de energia por irradiação de ruído é, em geral, desprezável frente à dissipação por outros mecanismos de amortecimento.

O comportamento dinâmico de sistemas mecânicos lineares, em regime permanente, pode ser representado por funções harmônicas de duração infinita. Fisicamente, essas funções são válidas no intervalo de tempo para o qual a resposta do sistema possa ser considerada como permanente. Tal comportamento se dá quando a energia total, que resulta da soma da energia cinética e da energia potencial, atinge um valor invariante no tempo.

Recorrendo, outra vez, a um sistema genérico, como o mostrado na Figura 2.1, para que seja mantido em regime permanente, a potência que é dissipada deve ser igual à fornecida pelos esforços de excitação. No regime transiente este balanço de potência não é válido, visto que a potência dissipada é diferente da fornecida (Figura 2.2), sendo que o excedente de energia irá aumentar as energias cinéticas e potencial até que, mantida a excitação constante, o equilíbrio seja atingido.

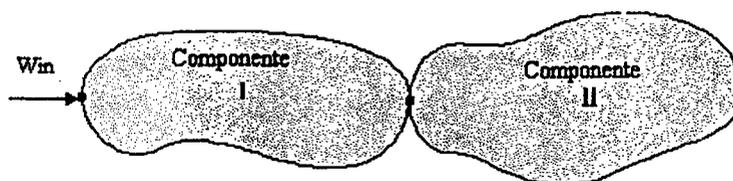


Figura 2.1 Sistema formado por dois componentes

O sistema da Figura 2.1, composto por dois componentes acoplados, pode ser representado em função das potências de entrada, transferida e dissipada conforme mostrado na Figura 2.2.

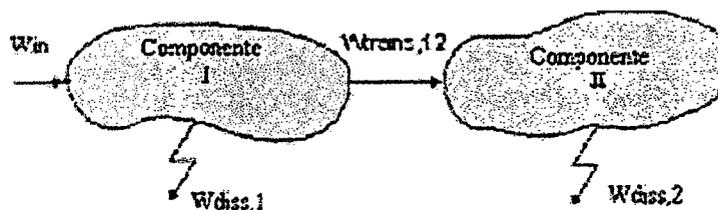


Figura 2.2 Sistema representando o balanço de potências

Considerando que o acoplamento é conservativo e que o regime seja permanente, tem-se, então, para o componente I, o balanço de potências dado por

$$W_{in} - W_{trans,12} - W_{diss,1} = 0 \quad (2.1)$$

e para o componente II

$$W_{trans,12} - W_{diss,2} = 0 \quad (2.2)$$

As energias vibratórias totais de cada componente podem ser escritas em função das potências de entrada e transferida:

$$E_2 = \frac{W_{trans,12}}{\omega\eta_2} \quad (2.3)$$

$$E_1 = \frac{W_{in} - W_{trans,12}}{\omega\eta_1} \quad (2.4)$$

sendo W_{in} , a potência de entrada; $W_{trans,12}$, a potência líquida transferida do componente I para o componente II; E_i , a energia vibratória do componente i , η_1 e η_2 são os fatores de perda correspondentes.



Figura 2.3 Força aplicada em um sistema genérico

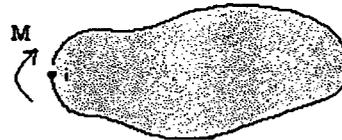


Figura 2.4 Momento aplicado a um sistema genérico

Considerando um esforço de excitação harmônico tipo força aplicado no ponto i , que causa uma velocidade instantânea V_i no mesmo ponto (Figura 2.3), este transmite uma potência W que pode ser expressa por:

$$W_i = \frac{1}{2} \text{Re}\{F_i V_i^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{F_i^* V_i\} \quad (2.5)$$

em que F_i é o esforço aplicado no ponto i ;

V_i a velocidade no ponto i .

Caso a excitação seja dada por um momento M e a resposta em função da velocidade angular $\dot{\theta}$ (Figura 2.4), a potência instantânea W_i é, então, dada por

$$W_i = \frac{1}{2} \text{Re}\{M_i^* \dot{\theta}_i\} \quad (2.6)$$

sendo: M_i o momento aplicado no ponto i ;

$\dot{\theta}_i$ a velocidade angular no mesmo ponto.

O fluxo de potência pode ser obtido, também, em função da mobilidade ou da impedância pontual

$$W_i = \frac{1}{2} |F_i|^2 \operatorname{Re}\{Y_{ii}\} = \frac{1}{2} |V_i|^2 \operatorname{Re}\{Z_{ii}\} \quad (2.7)$$

sendo: Y_{ii} a mobilidade pontual;

Z_{ii} a impedância pontual.

As equações apresentadas acima são válidas apenas para um esforço de excitação. Quando o sistema apresentar múltiplos esforços em pontos distintos, as dificuldades na obtenção da potência aumentam proporcionalmente.

2.2) Método da Mobilidade

O uso do conceito de impedância no estudo de vibrações de sistemas mecânicos se deu em 1919 através de Webster [52] e, por volta de 1933, Firestone [53] introduziu o termo mobilidade entre os pesquisadores de comportamento vibratório de estruturas e sistemas mecânicos. A analogia com sistemas elétricos, desde essa época, sempre foi muito enfocada por pesquisadores em todo o mundo.

Sabe-se que as características dinâmicas de uma estrutura podem ser definidas por funções resposta em frequência, as quais descrevem a relação causa/efeito entre dois pontos de um sistema. Esta função permite identificar as propriedades intrínsecas relacionadas à dinâmica do sistema. Vários tipos de funções resposta em frequência podem ser empregadas na análise de estruturas, dentre elas: Receptância (deslocamento/excitação), Mobilidade (velocidade/excitação), Inertância (aceleração/excitação) e suas recíprocas, todas inter-relacionadas algebricamente. Estas funções expressam módulo e fase em função da frequência, essenciais para se obterem as informações modais.

A mobilidade indica, portanto, o comportamento da resposta na forma de velocidade de um certo ponto da estrutura a uma dada excitação, podendo esta excitação ser de qualquer natureza: uma força, um momento flexor ou torçor. Da mesma forma o termo velocidade pode representar uma velocidade de translação ou angular.

O Método da Mobilidade é baseado no uso de funções de mobilidade, e utiliza os princípios da superposição dos efeitos e da reciprocidade, válidos para sistemas lineares. Funções de mobilidade, como são funções resposta em frequência, podem ser obtidas através de métodos experimentais, numéricos ou analíticos, conforme for mais conveniente. Pode-se utilizar, também, funções de receptância ou inertância, por isso o método também é conhecido como Método da Receptância ou Método da Inertância. Alguns autores o denominam também como Método da Rigidez Dinâmica.

A mobilidade pontual representa a resposta, em velocidade, de um ponto a uma dada excitação aplicada no mesmo ponto. Já para mobilidade de transferência, a resposta e a excitação estão em pontos diferentes.

A mobilidade é definida, então, através da seguinte equação:

$$Y_{ij} = \frac{V_j}{F_i} \quad (2.8)$$

sendo $i = j$ mobilidade pontual

$i \neq j$ mobilidade de transferência.

Para o sistema mostrado na Figura 2.5, que tem condições de contorno bem definidas, a velocidade no ponto 2 pode ser calculada a partir da função resposta em frequência, conforme mostrado na Equação (2.9).

$$V_2(f) = Y_{12}(f)F_1(f) \quad (2.9)$$

sendo $Y_{12}(f)$, a mobilidade de transferência entre os pontos 1 e 2;

$V_2(f)$, a velocidade no ponto 2 e

$F_1(f)$, a força de excitação no ponto 1.

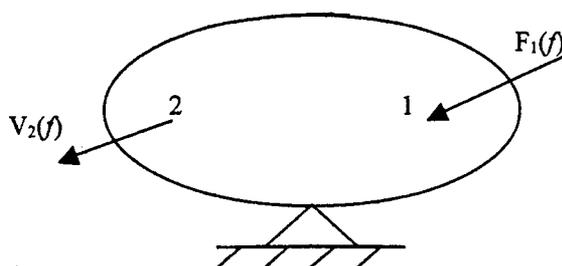


Figura 2.5 Sistema mecânico genérico

É importante observar que as mobilidades devem contemplar todas as condições de contorno. A resposta, em um ponto de interesse, quando atua mais de um esforço sobre o componente, é obtido por um simples somatório de efeitos, válido para sistemas lineares.

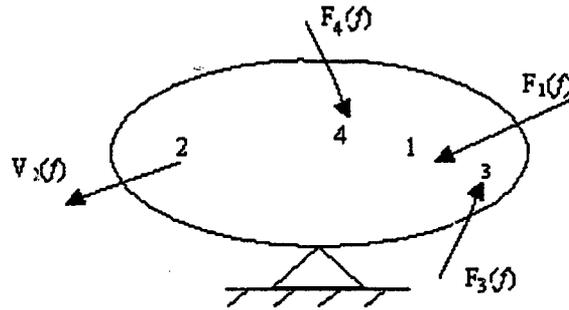


Figura 2.6 Sistema mecânico genérico com vários carregamentos

Então, para o sistema mostrado na Figura 2.6, pode-se calcular o vetor velocidade através da Equação (2.10).

$$V_2(f) = Y_{12}(f)F_1(f) + Y_{32}(f)F_3(f) + Y_{42}(f)F_4(f) \quad (2.10)$$

Caso seja inviável determinar a função de mobilidade em um ponto de uma estrutura qualquer, pode-se dividi-la em subsistemas de geometria mais simples, para os quais seja possível determinar as funções de mobilidade.

A Figura 2.7 mostra uma estrutura, excitada por uma força externa na extremidade esquerda (Ponto 1), para a qual deseja-se conhecer a velocidade na extremidade direita (Ponto 6). Supondo não ser viável determinar a mobilidade que relaciona a excitação no Ponto 1 com a resposta no Ponto 6, para a estrutura inteira, pode-se, por exemplo, dividi-la em três subsistemas, conforme mostra a Figura 2.8, para os quais se conhecem as respectivas funções de mobilidade.

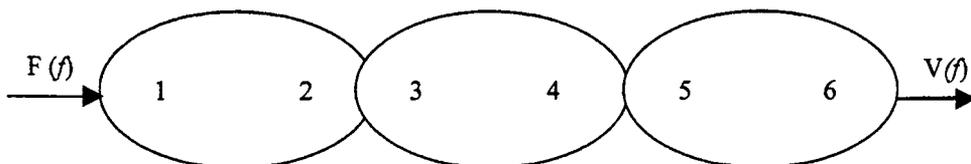


Figura 2.7 Estrutura complexa para a qual não se conhece as funções de mobilidade

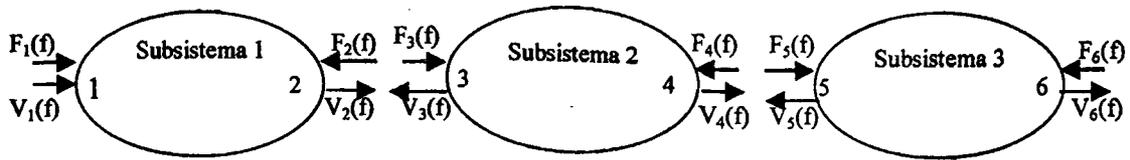


Figura 2.8 Divisão da estrutura em subsistemas mais simples

Para cada um dos subsistemas pode-se obter as velocidades a partir das funções de mobilidade e dos carregamentos, tal como mostram as Equações (2.13) a (2.18).

$$V_1(f) = F_1(f)Y_{11}(f) + F_2(f)Y_{21}(f) \quad (2.11)$$

$$V_2(f) = F_1(f)Y_{12}(f) + F_2(f)Y_{22}(f) \quad (2.12)$$

$$V_3(f) = F_3(f)Y_{33}(f) + F_4(f)Y_{43}(f) \quad (2.13)$$

$$V_4(f) = F_3(f)Y_{34}(f) + F_4(f)Y_{44}(f) \quad (2.14)$$

$$V_5(f) = F_5(f)Y_{55}(f) + F_6(f)Y_{65}(f) \quad (2.15)$$

$$V_6(f) = F_5(f)Y_{56}(f) + F_6(f)Y_{66}(f) \quad (2.16)$$

Considerando as condições de continuidade dos deslocamentos nas uniões, nas quais as velocidades devem ser iguais e a resultante dos esforços internos deve ser nula, pode-se escrever:

$$V_2 = V_3 = V_A \quad (2.17)$$

$$V_4 = V_5 = V_B \quad (2.18)$$

$$F_2 = F_3 = F_A \quad (2.19)$$

$$F_4 = F_5 = F_B \quad (2.20)$$

Considerando livre a extremidade 6, pode-se escrever:

$$F_6 = 0 \quad (2.21)$$

Aplicando as condições de contorno (2.17) a (2.21) podem-se reescrever as equações de velocidades, tal como é mostrado nas Equações (2.22) a (2.25).

$$V_1(f) = F_1(f)Y_{11}(f) + F_A(f)Y_{21}(f) \quad (2.22)$$

$$V_A(f) = F_1(f)Y_{12}(f) + F_A(f)Y_{22}(f) = F_A(f)Y_{33}(f) + F_B(f)Y_{43}(f) \quad (2.23)$$

$$V_B(f) = F_A(f)Y_{34}(f) + F_B(f)Y_{44}(f) = F_B(f)Y_{55}(f) \quad (2.24)$$

$$V_6(f) = F_B(f)Y_{56}(f) \quad (2.25)$$

Das Equações (2.23) e (2.24) pode-se montar, na forma matricial, um sistema de equações (2.26), com o qual determinam-se os esforços internos F_A e F_B .

$$\begin{bmatrix} (Y_{33} - Y_{22}) & Y_{43} \\ Y_{34} & (Y_{44} - Y_{55}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 Y_{12} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

De posse dos esforços internos, podem-se obter as velocidades a partir das Equações (2.24) a (2.27), incluindo $V_6(f)$, que era o objetivo inicial.

Em suma, para a aplicação do Método da Mobilidade, seguem-se as seguintes etapas:

- I) Divisão da estrutura em componentes mais simples, para os quais podem-se determinar as funções de mobilidade.
- II) Para cada subsistema são escritas equações de cálculo de velocidade em função das mobilidades e dos carregamentos.
- III) Escrevem-se as condições de contorno (condições físicas que devem ser obedecidas) correspondentes às uniões e às extremidades. Nas uniões deve-se ter a continuidade de velocidades e o somatório de esforços iguais ao carregamento externo na união. Nas extremidades deve-se obedecer às condições específicas para cada subsistema.

- IV) Aplicando as condições de contorno nas equações de velocidade, obtém-se um sistema de equações com o qual pode-se determinar os esforços internos nas uniões em função das mobilidades e dos esforços externos.
- IV) Com os esforços internos determinam-se as velocidades nas uniões entre os subsistemas.

Para o presente trabalho, especificamente, em função do desenvolvimento analítico de todas as expressões, a partir das velocidades nas uniões podem-se calcular as respostas bem como os esforços internos em qualquer seção transversal, de qualquer componente do sistema. Pode-se, também, calcular o fluxo de potência em qualquer ponto da estrutura.

Esta formulação também é válida para potências transmitidas através de vários esforços para os quais são considerados mais de um tipo de onda no componente. A resposta, de acordo com o princípio da superposição, é obtida pelo simples somatório dos efeitos provocados individualmente pelas excitações no componente. Uma das principais vantagens deste método consiste na liberdade de escolha do método de determinação das mobilidades: experimental, analítico, numérico ou mesmo uma combinação destes.

2.3) Conceitos Básicos Sobre Análise Estatística Energética

A Análise Estatística Energética foi inicialmente desenvolvida, por volta de 1960 [44], para se estudar problemas complexos de acústica e vibrações em aeronaves, com o intuito de se prever o comportamento vibratório de veículos lançadores de satélites e desde então tem sido aplicada em análises de problemas vibroacústicos em estruturas de navios, edifícios, automóveis, aviões e industriais. Alguns parâmetros necessários e fundamentais para o uso da Análise Estatística Energética serão destacados, a seguir.

2.3.1) Densidade Modal

Sabe-se que a troca de energia modal entre sistemas ocorre quando existe uma diferença de energia entre os sistemas em questão e a energia se desloca do sistema com maior para outro sistema com menor energia modal [25]. A densidade modal [1] é definida como a razão entre o número de modos em uma banda de frequência pela largura desta banda, expressa pela seguinte fórmula

$$n(f) = \frac{N_{\Delta f}}{\Delta f} \quad (\text{modos/Hz}) \quad (2.27)$$

sendo f a frequência central da banda de frequência considerada;

$N_{\Delta f}$ número de modos presentes na banda;

Δf a largura da banda.

Cada modo de um sistema dinâmico representa a capacidade de armazenar energia vibratória. Por isso, a densidade modal representa também a capacidade de absorver energia e a de transferir energia entre subsistemas.

A densidade modal para uma placa plana apoiada nos bordas pode ser calculada pela expressão [1]

$$n(f) = \frac{A\sqrt{3}}{hC_l} \quad (2.28)$$

em que A representa a área da placa;

h a espessura da placa;

C_l a velocidade de propagação da onda longitudinal, dada por [1]

$$C_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad [\text{m/s}] \quad (2.29)$$

sendo E o módulo de elasticidade

ρ a densidade do material da placa.

Clarkson [33] desenvolveu uma expressão que permite determinar a densidade modal de um componente estrutural através do valor médio espacial e na faixa de frequência Δf da parte real da mobilidade pontual, através da seguinte expressão:

$$n(f) = 4Ma \langle \text{Re}\{Y(f)\} \rangle \quad (2.30)$$

sendo: Ma a massa do componente estrutural;

$\langle \text{Re}\{Y(f)\} \rangle$ o valor médio espacial e na faixa de frequência Δ_f da parte real da mobilidade pontual do subsistema.

2.3.2) Fator de Perda Estrutural

O amortecimento estrutural, expresso pelo fator de perda (η), representa a razão entre a energia dissipada por radiano de oscilação e a máxima energia vibratória do componente (ou subsistema) [19].

$$\eta = \frac{E_{diss}}{2\pi f M a \langle v_{rms}^2 \rangle} \quad (2.31)$$

sendo E_{diss} a energia média dissipada em uma banda de frequência centrada em f ;

v a velocidade de vibração;

rms e $\langle \rangle$ denotam, respectivamente, raiz média quadrática e média espacial.

Os principais métodos para a determinação do fator de perda estão mostrados a seguir.

2.3.2.1) Método do Decaimento

Este método é, talvez, o mais usado por ser o de implementação mais rápida e simples. Consiste em registrar a taxa de decaimento das vibrações após a excitação ser subitamente desligada, a qual é expressa na forma de tempo de reverberação (T). Entretanto, tende a subestimar os resultados já que a resposta dos N modos contidos em uma faixa de frequência é fortemente influenciado pelos decaimentos dos modos de menor amortecimento.

A relação que expressa o fator de perda é [19]:

$$\eta = \frac{2,2}{f T} \quad (2.32)$$

em que T é o tempo de reverberação, em segundos.

f a frequência central da banda, em Hz.

2.3.2.2) Método da Medição da Potência de Entrada

Este método baseia-se na hipótese de que em regime permanente a potência dissipada pelo subsistema seja igual à potência aplicada ao mesmo, considerando-se adicionalmente que a energia perdida pelo subsistema, através dos apoios, seja desprezável. É uma aplicação direta da definição do fator de perda, expresso por [1]:

$$\eta = \frac{W_{diss}}{2\pi f E_{vib}} \quad (2.33)$$

em que W_{diss} é a potência dissipada pelo subsistema;

E_{vib} a energia vibratória ($M\langle v^2 \rangle$)

Este método é recomendado para aplicações em SEA porque permite a determinação do amortecimento médio de todos os modos contidos em uma faixa de frequência de análise.

2.3.3) Fator de Acoplamento

O fator de acoplamento está relacionado à energia transferida entre subsistemas através dos acoplamentos e pode ser considerado uma medida da força intermodal na junção do sistema, amostrada na frequência e nos modos que agem nos subsistemas.

É definido como sendo [1]

$$\eta_{ij} = \frac{W_{ij}}{2\pi f E_{vib_i}} \quad (2.34)$$

em que W_{ij} representa o fluxo de potência do i-ésimo para o j-ésimo subsistema.

2.3.4) Equações de Balanço de Potência

Numa análise do fluxo de energia entre subsistemas acoplados, são escritas equações de balanço de energia (potência) para cada subsistema e, com isso, determinam-se as energias de cada um, na faixa de frequência considerada.

A Figura 2.9 ilustra o caso de somente dois subsistemas, em que, $W_{in,1}$ e $W_{diss,1}$ são, respectivamente, as potências de entrada e dissipada do Subsistema 1 e, $W_{trans,12}$ e $W_{trans,21}$ as potências transmitidas do Subsistema 1 para o 2 e do Subsistema 2 para o 1, respectivamente. E, ainda, $W_{in,2}$ e $W_{diss,2}$ representam, respectivamente, a potência de entrada e dissipada no subsistema 2 devido ao amortecimento estrutural (η_2).

Pode-se expressar, genericamente, este balanço através da seguinte equação:

$$\text{Subsistema 1:} \quad W_{in,1} = W_{diss,1} + W_{trans,12} - W_{trans,21} \quad (2.35)$$

$$\text{Subsistema 2:} \quad W_{in,2} = W_{diss,2} + W_{trans,21} - W_{trans,12} \quad (2.36)$$

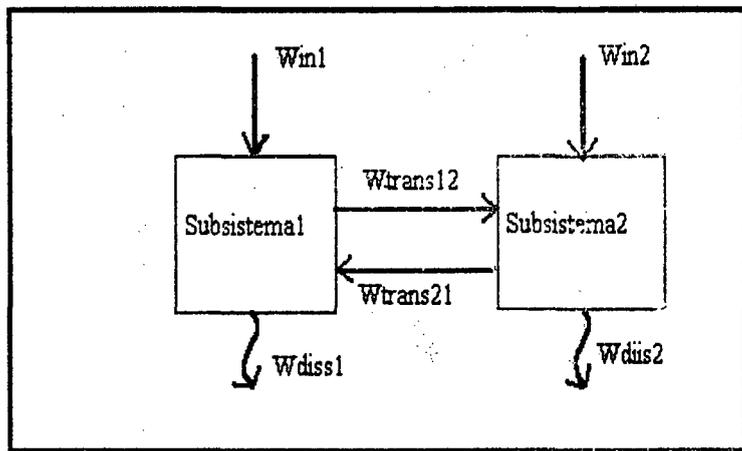


Figura 2.9 Fluxo de energia entre dois subsistemas acoplados.

As potências transmitidas são de vital importância porque determinam as energias dos subsistemas excitados indiretamente (em que $W_{in,i} = 0$), e são também importantes na determinação da resposta de subsistemas excitados diretamente.

Para o exemplo de acoplamento entre subsistemas (Figura 2.9), considere que apenas o Subsistema 1 esteja recebendo potência externa (ou seja $W_{in,2} = 0$). Assim, pode-se escrever que:

$$W_{in,1} = \omega\eta_1 E_1 + \omega\eta_{12} E_1 - \omega\eta_{21} E_2 \quad (2.37)$$

$$0 = \omega\eta_2 E_2 + \omega\eta_{21} E_2 - \omega\eta_{12} E_1 \quad (2.38)$$

A razão entre as energias E_1 e E_2 , fica

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\eta_{12}}{\eta_2 + \eta_{21}} \quad (2.39)$$

em que η_{12} e η_{21} são, respectivamente, fator de acoplamento do Subsistema 1 para o Subsistema 2 e vice-versa;

E_1 e E_2 são as energias totais dos Subsistemas 1 e 2, respectivamente;

η_2 o fator de perda do Subsistema 2.

A potência líquida transmitida do Subsistema 1 para o Subsistema 2, $W_{liq,12}$, relacionada através dos fatores de acoplamento, pode ser expressa [25], como segue:

$$W_{liq,12} = W_{trans,12} - W_{trans,21} = \omega \eta_{12} \left[E_1 - \frac{N_1}{N_2} E_2 \right] \quad (2.40)$$

onde N_1 e N_2 são, respectivamente número de modos dos Subsistemas 1 e 2, na banda considerada. A Equação 2.40 pode ser reescrita

$$W_{liq,12} = W_{trans,12} - W_{trans,21} = \omega \eta_{12} E_1 - \omega \eta_{12} \frac{N_1}{N_2} E_2 \quad (2.41)$$

de onde se pode concluir que, o fator de acoplamento η_{21} pode ser calculado pela relação

$$\eta_{21} = \eta_{12} \frac{N_1}{N_2} \quad (2.42)$$

Pode-se, ainda, expressar os fatores de acoplamento através das densidades modais n_1 e n_2 , dividindo-se a equação acima pela largura da banda Δ_f , resultando na seguinte equação

$$\eta_{21} = \eta_{12} \frac{n_1}{n_2} \quad (2.43)$$

e, substituindo esse resultado na Equação 2.42, tem-se uma relação envolvendo as energias dos subsistemas

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\eta_{21}}{(\eta_2 + \eta_{21})} \quad (2.44)$$

Considerando uma das hipóteses fundamentais de SEA de que a energia vibratória está igualmente distribuída entre os N modos, da faixa de frequência de análise, pode-se definir a energia modal E_i^* , como divisão da energia total E_i pelo número de modos contidos na banda de frequência, ou seja

$$E_i^* = \frac{E_i}{N_i} \quad (2.45)$$

As equações de balanço de potência podem, ainda, serem representadas na forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_{12} & -\eta_{21} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} W_{m,1} \\ W_{m,2} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Observa-se, claramente, da matriz acima, que no caso de forte acoplamento $\eta_{ij} \gg \eta_i$ e η_j , a matriz tende a tornar-se singular e, neste caso, o sistema de equações não possui solução. Assim, SEA não é aplicável neste caso, pois todos os subsistemas apresentariam mesma energia modal, não havendo fluxo líquido de energia entre os subsistemas. Deve-se ter em mente que são considerados valores médios para os parâmetros modais como fator de perda e a energia modal. Por isso a alta densidade modal minimiza os erros atribuídos às aproximações feitas.

O sistema de equações acima resultou da aplicação de SEA para um sistema estrutural/dinâmico modelado por dois subsistemas apenas. Caso o sistema seja representado por N subsistemas, o sistema de equações resultante seria de ordem N . Torna-se evidente a necessidade de serem determinados, com precisão, os parâmetros citados, para cada subsistema.

Componentes estruturais simples, tais como vigas, placas e cavidades acústicas, podem ser analisados individualmente, por métodos analíticos/numéricos vastamente conhecidos, facilitando a determinação destes parâmetros.

Estruturas “offshore”, entretanto, possuem componentes de geometrias complexas, como por exemplo, placas reforçadas por vigas. A Análise Estatística Energética é aplicável para os estudos de propagação da energia vibratória através deste tipo de estrutura, para frequências acima de 50 Hz, aproximadamente [1].

A aplicação de SEA para estas estruturas, portanto, requer o conhecimento preciso dos fatores de acoplamento, da densidade modal e da resposta em frequência de placas reforçadas, sofrendo a ação de forças concentradas.

CAPÍTULO III

RESPOSTA DE PLACAS COM BORDAS LIVRES

3.1) Introdução

A análise de vibrações livres ou forçadas de placas finas, de qualquer geometria, constitui essencialmente um problema de valor de contorno. Em geral, procura-se uma solução para o deslocamento transversal da placa e este deslocamento deve satisfazer uma equação diferencial e, além disso, a solução deve satisfazer às condições de contorno prescritas ao longo das bordas da placa.

Para uma placa retangular com condições de contorno completamente livre nas quatro bordas, doravante denominada simplesmente de placa livre-livre, não existe [13] uma solução analítica exata para a equação diferencial do movimento e, por essa razão, suas frequências naturais não podem ser calculadas analiticamente. Alguns métodos analíticos aproximados têm sido desenvolvidos para esse fim, mas a precisão ainda deixa a desejar, como, por

exemplo, a solução por uma série de produtos de autovetores de uma viga livre-livre [41]. Sabe-se, na verdade, que essas funções não satisfazem totalmente às condições de borda livre de uma placa retangular. Métodos numéricos são os mais comumente usados, mas um elevado número de equações algébricas é necessário para o processamento e, neste caso, o tempo de computação é um fator que restringe seu uso.

O método analítico de aproximação usado neste trabalho, desenvolvido por Gorman [18], e denominado Método da Superposição, baseia-se na escolha de placas auxiliares, com soluções precisas e fáceis de implementar, superpondo estas mesmas soluções e combinando-as para satisfazer às condições de contorno de interesse em cada caso específico, de acordo com a teoria de sistemas lineares.

O método se baseia na divisão da placa em blocos e o foco de atenção passa a concentrar-se somente em um bloco de cada vez, cada um com seus respectivos momentos e forças que atuam sobre ele e, depois de calculadas, as suas respectivas respostas são somadas e representam com precisão a resposta da placa completa.

A seguir, será fornecida uma explicação dos tipos de análises que podem ser feitas. Se o interesse for uma análise da forma do modo (simétrico ou anti-simétrico em relação aos eixos ortogonais), deve-se escolher o Método da Superposição Particionado, ou seja, cada forma de modo será estudada separadamente e, depois de calculadas, as respostas são somadas. Se o interesse não é o de se estudar cada forma de modo separadamente, deve-se escolher o Método da Superposição Completo, ou seja, escolhem-se placas que representem o comportamento da placa como um todo e obtém-se a resposta da placa.

O método escolhido para esse trabalho foi o Método da Superposição Completo, com o qual placas submetidas a forças pontuais foram estudadas. Com o propósito de mostrar a potencialidade do método, foram analisadas também as vibrações livres pelo Método da Superposição Particionado.

3.2) Análise de Placa Livre-Livre – Método da Superposição Particionado

3.2.1) Condições de Contorno

As condições de contorno clássicas de placas retangulares, como também a equação diferencial [35] que rege problemas desse tipo foram desenvolvidas de forma adimensional, e o sistema de coordenadas adimensional, estão representados abaixo, onde $\xi = \frac{x}{a}$ e $\eta = \frac{y}{b}$.

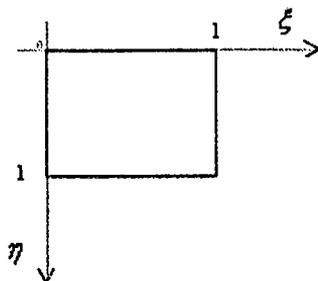


Figura 3.1 - Placa Retangular e Sistema de Coordenadas.

Considerando a Figura 3.1, os momentos de flexão associados com η e ξ são, respectivamente [46]:

$$\frac{Mb^2}{aD} = -\left\{ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right\} \quad (3.1)$$

e

$$\frac{Ma}{D} = -\left\{ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right\} \quad (3.2)$$

As forças de reação vertical associadas às direções η e ξ são, respectivamente:

$$\frac{Vb^3}{aD} = -\left\{ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi^2} \right\} \quad (3.3)$$

e

$$\frac{Va^2}{D} = -\left\{ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right\} \quad (3.4)$$

sendo

a, b dimensões da placa, nas direções x e y , respectivamente;

ξ, η coordenadas adimensionais, que correspondem a $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$, respectivamente;

W deslocamento transversal da placa dividido por a ;

D Rigidez à flexão da placa, dado por $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$;

E Módulo de elasticidade do material da placa;

ν Coeficiente de Poisson;

ν^* $(2-\nu)$;

M Momento de flexão distribuído ao longo da borda da placa;

V Reação vertical na borda da placa;

ϕ razão entre as dimensões da placa, dada por $\phi = \frac{b}{a}$;

3.2.2) Equação Diferencial Governante – Vibrações Livres

Sabe-se que para placas retangulares finas, as ondas de flexão são as mais importantes por gerarem maiores valores de deflexões na direção transversal (maior energia modal) e por apresentarem maior densidade modal. Por estes motivos, as ondas de flexão exercem um papel preponderante no fluxo de energia vibratória entre subsistemas, bem como na irradiação sonora por estas estruturas.

A equação da onda de flexão em placas finas, sem excitação externa pode ser escrita da seguinte forma [46]:

$$\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^4} + \frac{2\phi^2 \partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{\phi^4 \partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} - \phi^4 \lambda^4 W(\xi, \eta) = 0 \quad (3.5)$$

3.2.3) Vibrações Simétricas e Anti-simétricas

Uma placa retangular com bordas livres possui duas linhas de simetria, que correspondem aos eixos ξ e η , respectivamente. Sabe-se que, todos os possíveis modos de vibração da placa completamente livre mostrada na Figura 3.2, podem ser classificados em: simétricos em relação a cada um dos eixos, anti-simétricos em relação a cada um dos eixos e simétrico sobre um e anti-simétrico sobre outro eixo central de coordenadas.

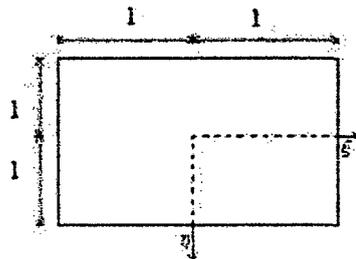


Figura 3.2 - Placa completamente livre, com sistema central de coordenadas.

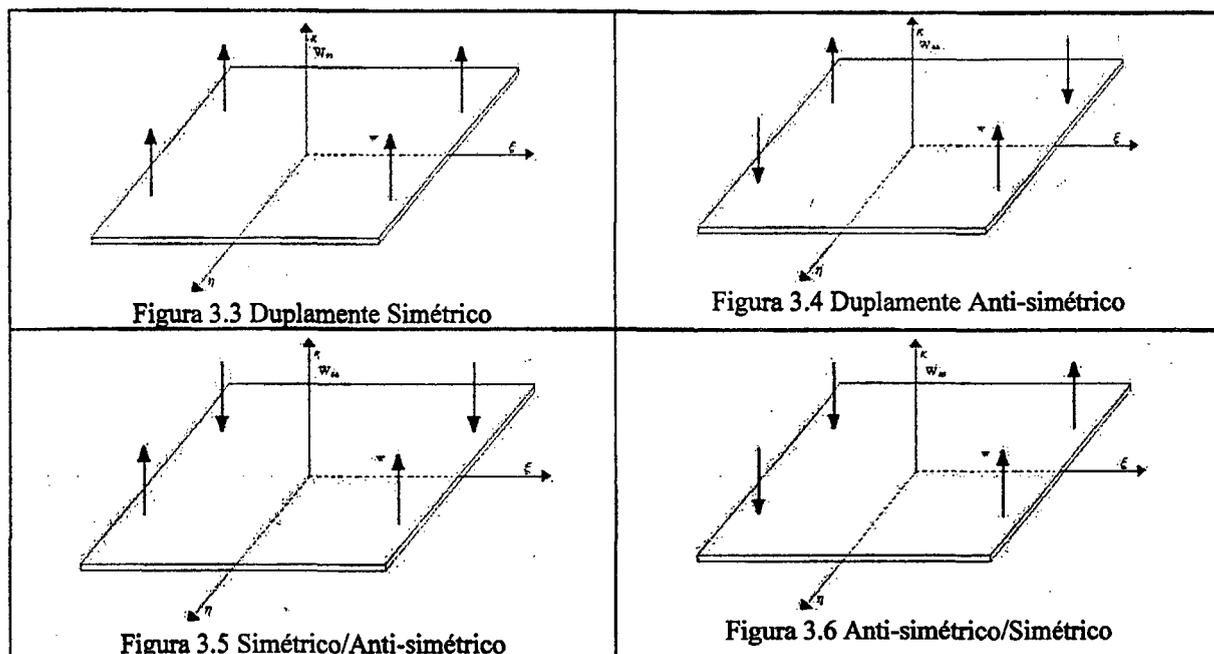
A formas modais de uma placa retangular completamente livre podem, então, ser representadas da seguinte forma em relação aos eixos de coordenadas ξ e η :

Duplamente simétricas	$W_{ss}(\xi, \eta) = W_{ss}(\xi, -\eta) = W_{ss}(-\xi, \eta)$
Duplamente anti-simétricas	$W_{aa}(\xi, \eta) = -W_{aa}(\xi, -\eta) = -W_{aa}(-\xi, \eta)$
Simétrico e Anti-simétrico	$W_{sa}(\xi, \eta) = W_{sa}(\xi, -\eta) = -W_{sa}(-\xi, \eta)$
Anti-simétrico e Simétrico	$W_{as}(\xi, \eta) = -W_{as}(\xi, -\eta) = W_{as}(-\xi, \eta)$

Então, a resposta da placa será representada pela soma de cada forma modal,

$$W(\xi, \eta) = W_{ss}(\xi, \eta) + W_{aa}(\xi, \eta) + W_{sa}(\xi, \eta) + W_{as}(\xi, \eta)$$

As Figuras 3.3 a 3.6 a seguir mostram, como exemplo, a simetria da deflexão de uma placa completamente livre.



E, tendo em vista a simetria, pode-se focar a atenção somente num quarto ($\frac{1}{4}$) da placa em questão.

Para a implementação do método, a placa é dividida em 4 partes, sendo a análise realizada somente num quarto da mesma, como mostrado em Figura 3.2. A seguir, uma análise de cada tipo de forma modal será apresentada.

3.2.4) Modos Duplamente Simétricos

Ao focalizar-se a atenção somente na quarta parte da placa, mostrada na Figura 3.7, pode-se dividir o caso em outros dois: os blocos $W1(\xi, \eta)$ e $W2(\xi, \eta)$ que na verdade são dois problemas de vibrações forçadas de placas retangulares.

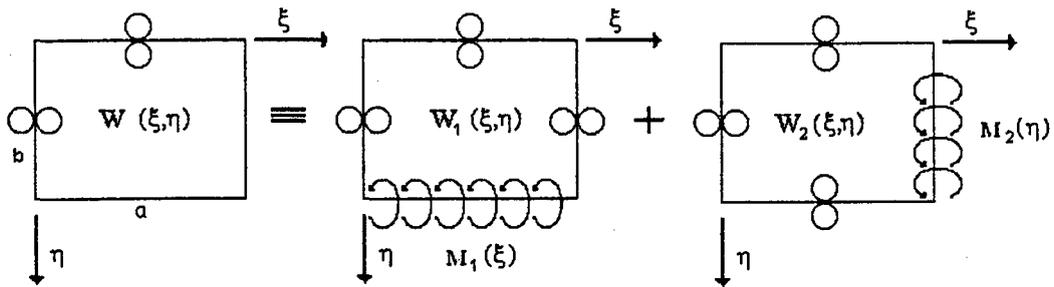


Figura 3.7 – Blocos usados para analisar modos duplamente simétricos

As soluções desses blocos serão superpostas, para a obtenção da solução geral dos modos duplamente simétricos.

Existe, obviamente, o tipo de ideal de condição de contorno que deve ser usado ao longo das bordas mencionadas acima, quando o segmento da placa é usado para examinar modos duplamente simétricos de uma placa totalmente livre.

As condições de apoio ao longo dos eixos $\xi = 0$ e $\eta = 0$, para este segmento, devem ser de apoio simples ou uma condição denominada aqui como “*slip-shear*”, o que significa que, nesta borda não existe nenhuma reação vertical e também nenhum deslocamento angular. A condição “*slip-shear*” está identificada Figura 3.7 por um par de círculos pequenos (oo) adjacentes nas extremidades. As condições ao longo dos eixos $\xi = 1$ e $\eta = 1$, devem, é claro, ser de bordas livres. Existe somente um outro tipo de condição de contorno que é utilizada ao longo dos eixos $\xi = 1$ e $\eta = 1$ dos blocos $W_1(\xi, \eta)$ e $W_2(\xi, \eta)$, ou seja, nestes eixos atuam um momento de flexão como indicado, ao longo de seus contornos, e a reação vertical é zero.

Focando, agora, a atenção no bloco $W_1(\xi, \eta)$, a solução pode ser escrita na forma proposta por Lévy [46] como,

$$W_1(\xi, \eta) = \sum_{m=0,1}^{\infty} Y_m(\eta) \cos m\pi \xi \quad (3.6)$$

Pode-se demonstrar que cada termo da série de co-senos da Equação (3.6) satisfaz exatamente às condições de contorno “*slip-shear*” prescritas nas suas extremidades $\xi = 0$ e $\xi = 1$. Esta é uma exigência para todas as soluções do tipo Lévy [46].

Substitui-se, agora, a Equação (3.6) na Equação diferencial (3.5). As variáveis, ξ e η , são determinadas separadamente e para cada valor de m pode-se escrever

$$\frac{\partial^4 Y_m(\eta)}{\partial \eta^4} - \frac{2\phi^2 (m\pi)^2 \partial^2 Y_m(\eta)}{\partial \eta^2} + \phi^4 \{ [m\pi]^2 - \lambda^4 \} Y_m(\eta) = 0 \quad (3.7)$$

onde $\lambda^2 = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{D}}$ é o autovalor adimensional.

Esta é uma equação diferencial ordinária de 4ª. ordem, cuja solução é bastante conhecida. Sua forma depende do sinal do terceiro coeficiente da equação, isto é:

→ Para $\lambda^2 > (m\pi)^2$, tem-se:

$$Y_m(\eta) = A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta + C_m \cos \gamma_m \eta + D_m \sin \gamma_m \eta \quad (3.8)$$

→ Para $\lambda^2 < (m\pi)^2$, tem-se:

$$Y_m(\eta) = A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta + C_m \cosh \gamma_m \eta + D_m \sinh \gamma_m \eta \quad (3.9)$$

onde A_m, B_m, C_m e D_m são constantes a serem determinadas;

$$\beta_m^2 = \phi^2 [\lambda^2 + (m\pi)^2];$$

$$\gamma_m^2 = \phi^2 [\lambda^2 - (m\pi)^2] \text{ ou } \gamma_m^2 = \phi^2 [(m\pi)^2 - \lambda^2] \text{ são sempre positivos.}$$

A borda $\eta = 1$ está livre de reação vertical mas o momento de flexão harmônico $M_1(\xi)$ é diferente de zero, e dado por.

$$\frac{b^2 M_1(\xi)}{aD} = \sum_{m=0,1}^{k-1} E_m \cos m\pi\xi \quad (3.10)$$

Para facilitar, usa-se a mesma série de co-senos utilizada na Equação (3.6).

O próximo passo para o desenvolvimento da resposta do bloco $W_1(\xi, \eta)$ consiste em avaliar as Equações (3.8) e (3.9) quanto às condições de contorno prescritas. Por exemplo, para se ter simetria nas bordas $\xi = 0$ e $\eta = 0$, do segmento da placa em questão, o segundo e o quarto termos das Equações (3.8) e (3.9) devem ser nulos. Estes termos são anti-simétricos em relação à borda $\eta = 0$.

Conforme já mencionado, como não existe reação vertical, substituindo as Equações (3.8) e (3.9), que agora já não mais contém senos ou senos hiperbólicos, na Equação (3.3) e considerando reação vertical igual a zero na borda

→ Para $\lambda^2 > (m\pi)^2$, tem-se:

$$Y_m(\eta) = A_m \{ \cosh \beta_m \eta - \theta_{1m} \cos \gamma_m \eta \} \quad (3.11)$$

→ Para $\lambda^2 < (m\pi)^2$, tem-se:

$$Y_m(\eta) = A_m \{ \cosh \beta_m \eta - \theta_{2m} \cosh \gamma_m \eta \} \quad (3.12)$$

onde

$$\theta_{1m} = \frac{-\beta_m (\beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2) \sinh \beta_m}{\gamma_m (\gamma_m^2 + v^* \phi^2 (m\pi)^2) \sin \gamma_m}$$

$$\theta_{2m} = \frac{-\beta_m (\beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2) \sinh \beta_m}{\gamma_m (\gamma_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2) \sinh \gamma_m}$$

O passo final relacionado ao bloco W1(ξ, η) envolve a Equação (3.10). Ao substituírem-se as Equações (3.11) e (3.12) no lado esquerdo desta equação, pode-se expressar $Y_m(\eta)$ em termos dos coeficientes E_m , assim:

Para $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$Y_m(\eta) = E_m \{ \theta_{11} \cosh \beta_m \eta - \theta_{31m} \cos \gamma_m \eta \} \quad (3.13)$$

em que

$$\theta_{11m} = \frac{1}{\left(\frac{\beta_m - ZZ1 \gamma_m}{ZZ2} \right) \sin \beta_m}$$

$$\theta_{13} = \frac{ZZ1}{\left(ZZ2 \left(\beta_m - \frac{ZZ1 \gamma_m}{ZZ2} \right) \right) \sin \gamma_m}$$

com

$$ZZ1 = -\beta_m (\beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2)$$

$$ZZ2 = \gamma_m (\gamma_m^2 + v^* \phi^2 (m\pi)^2)$$

e para $\lambda^2 < (m\pi)^2$, tem-se

$$Y_m(\eta) = E_m \{ \theta_{22} \cosh \beta_m \eta + \theta_{23} \cos \gamma_m \eta \} \quad (3.14)$$

em que

$$\theta_{22m} = \frac{1}{\left(\frac{\beta_m - ZZ1 \gamma_m}{ZZ2} \right) \cosh \beta_m}$$

$$\theta_{23m} = \frac{ZZ1}{\left(ZZ2 \left(\beta_m + \frac{ZZ1 \gamma_m}{ZZ2} \right) \right) \cosh \gamma_m}$$

com

$$ZZ1 = -\beta_m (\beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2)$$

$$ZZ2 = \gamma_m (\gamma_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2)$$

e a Equação (3.1) fica:

$$\begin{aligned}
 W1(\xi, \eta) = & \sum_{m=0,1}^{k^*} \frac{E_m}{\theta_{11m}} \{ \cosh \beta_m \eta + \theta_{1m} \cos \gamma_m \eta \} \cos m\pi \xi + \\
 & + \sum_{m=k^*+1}^{k-1} \frac{E_m}{\theta_{22m}} \{ \cosh \beta_m \eta + \theta_{2m} \cos \gamma_m \eta \} \cos m\pi \xi \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

sendo $\beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + (m\pi)^2}$;

$\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - (m\pi)^2}$, para o primeiro somatório, $\lambda^2 > (m\pi)^2$;

$\gamma_m = \phi \sqrt{(m\pi)^2 - \lambda^2}$, para o segundo somatório, $\lambda^2 < (m\pi)^2$;

$\theta_{1m} = -\{(\beta_m \sinh \beta_m) / (\gamma_m \sin \gamma_m)\} \{ \beta_m^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2 \} / \{ \gamma_m^2 + \nu^* \phi^2 (m\pi)^2 \}$;

$\theta_{2m} = -\{(\beta_m \sinh \beta_m) / (\gamma_m \sinh \gamma_m)\} \{ \beta_m^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2 \} / \{ \gamma_m^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2 \}$;

$\theta_{11m} = \theta_{1m} \{ \gamma_m^2 + \nu \phi^2 (m\pi)^2 \} \cos \gamma_m - \{ \beta_m^2 - \nu^* \phi^2 (m\pi)^2 \} \cosh \beta_m$;

$\theta_{22m} = -\{ (\beta_m^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2) \cosh \beta_m + \theta_{2m} \{ \gamma_m^2 - \nu \phi^2 (m\pi)^2 \} \cosh \gamma_m \}$;

$$k^* = \frac{k}{2}$$

A seguir, será analisado o segundo bloco $W2(\xi, \eta)$ da Figura 3.7. Nota-se imediatamente que a forma da solução é idêntica à usada no bloco $W1(\xi, \eta)$, porém devem ser observadas algumas pequenas mudanças, tais como o momento de flexão $M_2(\eta)$ ao longo de $\xi = 1$ que é expresso como

$$\frac{M_2(\eta)a}{D} = \sum_{n=0,1}^{k-1} E_n \cos n\pi \eta \quad (3.16)$$

Desta vez, o índice n substitui o m , e o η substitui o ξ . Refazendo toda a manipulação matemática, conforme já realizada para o cálculo de $W1(\xi, \eta)$, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}
 W2(\xi, \eta) = & \sum_{n=0,1}^{k^*} \frac{E_n}{\theta_{11n}} \{ \cosh \beta_n \xi + \theta_{1n} \cos \gamma_n \xi \} \cos n\pi \eta \\
 & + \sum_{n=k^*+1}^{k-1} \frac{E_n}{\theta_{22n}} \{ \cosh \beta_n \xi + \theta_{2n} \cos \gamma_n \xi \} \cos n\pi \eta \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

sendo $\beta_n = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 + (n\pi)^2}$;

$$\gamma_n = 1/\phi\sqrt{\lambda^2\phi^2 - (n\pi)^2}, \text{ para o primeiro somatório, } \lambda^2 > (n\pi)^2;$$

$$\gamma_n = 1/\phi\sqrt{(n\pi)^2 - \lambda^2\phi^2}, \text{ para o segundo somatório, } \lambda^2 < (n\pi)^2;$$

$$\theta_{1n} = -\{(\beta_n \sinh \beta_n)/(\gamma_n \sin \gamma_n)\}\{\beta_n^2 - \nu^*\phi^2(n\pi)^2\}/\{\gamma_n^2 + \nu^*\phi^2(n\pi)^2\};$$

$$\theta_{2n} = -\{(\beta_n \sinh \beta_n)/(\gamma_n \sinh \gamma_n)\}\{\beta_n^2 - \nu^*\phi^2(n\pi)^2\}/\{\gamma_n^2 - \nu^*\phi^2(n\pi)^2\}$$

$$\theta_{11n} = \theta_{1n}\{\gamma_n^2 + \nu\phi^2(n\pi)^2\} \cos \gamma_n - \{\beta_n^2 - \nu^*\phi^2(n\pi)^2\} \cosh \beta_n;$$

$$\theta_{22n} = -\{(\beta_n^2 - \nu\phi^2(n\pi)^2) \cosh \beta_n + \theta_{2n}\{\gamma_n^2 - \nu\phi^2(n\pi)^2\} \cosh \gamma_n\}$$

A resposta do modo duplamente simétrico é, então, dada pela soma da resposta de cada bloco, ou seja:

$$W_{ss}(\xi, \eta) = W1(\xi, \eta) + W2(\xi, \eta) \quad (3.18)$$

3.2.5) Modos Duplamente Anti-simétricos

Pode-se observar, pela Figura 3.8, que os blocos usados nesta análise são diferentes dos usados para os modos duplamente simétricos. A análise deve ser feita de modo análogo, sendo que a série trigonométrica usada neste caso deve ser de funções senoidais. Aqui, as bordas $\xi = 0$ e $\eta = 0$ tem apoio simples (representado pela letra s), ou seja, os deslocamentos e momentos de flexão ao longo destas bordas são sempre nulos e, nas outras bordas a condição ou é a mesma já mostrada no item anterior, dois círculos adjacentes (oo) que indicam borda com condição “slip-shear” ou bordas com momento de flexão.

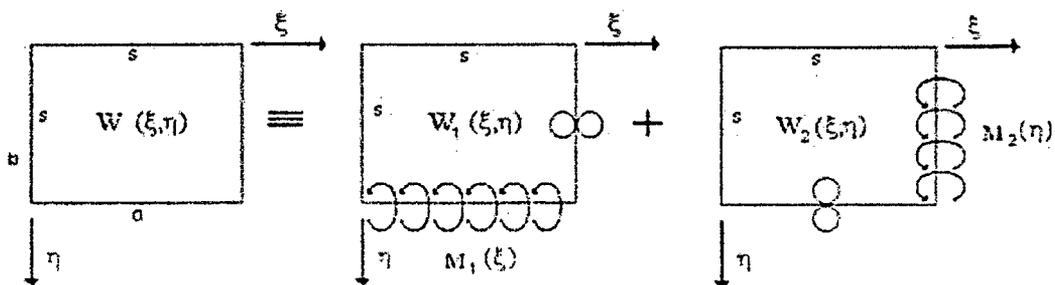


Figura 3.8 - Blocos usados para analisar modos duplamente anti-simétricos

Com relação ao bloco W1 da Figura 3.8, a solução proposta por Lévy [46] é:

$$W1(\xi, \eta) = \sum_{m=1,3,5}^{2k-1} Y_m(\eta) \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{2} \quad (3.19)$$

sendo que a borda $\eta=1$ está livre de reação vertical, porém o momento de flexão harmônico $M_1(\xi)$ está atuando e é diferente de zero. Expandindo na mesma série de senos, tem-se:

$$\frac{b^2 M_1(\xi)}{aD} = \sum_{m=1,3,5}^{2k-1} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{2} \quad (3.20)$$

Seguindo um procedimento idêntico ao feito anteriormente, pode-se demonstrar que $W1$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W1(\xi, \eta) = & \sum_{m=1,3,5}^{k^*} (A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta + C_m \operatorname{sen} \gamma_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta) \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{2} + \\ & + \sum_{m=k^*+2}^{2k+1} (A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta + C_m \operatorname{sen} \gamma_m \eta + D_m \cos \gamma_m \eta) \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde o primeiro somatório, em que $m \leq k^*$, refere-se aos termos $\lambda^2 > (\frac{m\pi}{2})^2$ e o segundo somatório refere-se aos termos em que $\lambda^2 < (\frac{m\pi}{2})^2$.

Usando da condição de apoio simples na borda $\eta = 0$ e a condição de reação vertical zero na borda $\eta = 1$, três constantes podem ser avaliadas. Usando também do momento de flexão ao longo da borda $\eta = 1$, pode-se obter a resposta do bloco $W1$,

$$\begin{aligned} W1(\xi, \eta) = & \sum_{m=1,3,5}^{k^*} \frac{E_m}{\theta_{11m}} (\theta_{1m} \sinh \beta_m \eta + \operatorname{sen} \gamma_m \eta) \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{2} \\ & + \sum_{m=k^*+2}^{2k+1} \frac{E_m}{\theta_{22m}} (\theta_{2m} \sinh \beta_m \eta + \operatorname{sen} \gamma_m \eta) \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

sendo $\beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + (m\pi)^2}$;

$\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - (m\pi)^2}$, para o primeiro somatório onde $\lambda^2 > (m\pi)^2$;

$$\gamma_m = \phi \sqrt{(m\pi)^2 - \lambda^2}, \text{ para o segundo somatório onde } \lambda^2 < (m\pi)^2;$$

$$\theta_{1m} = (\gamma_m / \beta_m) \{ (\gamma_m^2 + (\frac{m\pi}{2})^2 v^* \phi^2) \cos \gamma_m \} / \{ (\beta_m^2 - (\frac{m\pi}{2})^2 v^* \phi^2) \cosh \beta_m \};$$

$$\theta_{2m} = -(\gamma_m / \beta_m) \{ (\gamma_m^2 - (\frac{m\pi}{2})^2 v^* \phi^2) \cosh \gamma_m \} / \{ (\beta_m^2 - (\frac{m\pi}{2})^2 v^* \phi^2) \cosh \beta_m \}$$

$$\theta_{11m} = \{ \gamma_m^2 + v\phi^2 (\frac{m\pi}{2})^2 \} \text{sen } \gamma_m - \theta_{1m} \{ \beta_m^2 - v\phi^2 (\frac{m\pi}{2})^2 \};$$

$$\theta_{22m} = \{ v\phi^2 (\frac{m\pi}{2})^2 - \gamma_m^2 \} \text{senh } \gamma_m + \theta_{2m} \{ v\phi^2 (\frac{m\pi}{2})^2 - \beta_m^2 \} \text{senh } \beta_m$$

Com relação ao segundo bloco $W2(\xi, \eta)$ da Figura 3.8, nota-se também que a forma da solução é idêntica à usada no bloco $W1(\xi, \eta)$, porém devem ser observadas algumas pequenas mudanças, tais como o momento de flexão $M_2(\eta)$ ao longo de $\xi = 1$ que é expresso como

$$\frac{M_2(\eta)a}{D} = \sum_{n=1,3,5}^{2k-1} E_n \text{sen } \frac{n\pi\eta}{2} \quad (3.23)$$

Aqui, está também sendo usado n em substituição a m e η em substituição a ξ . Refazendo a manipulação matemática já feita para o cálculo de $W1(\xi, \eta)$, obtém-se

$$\begin{aligned} W2(\xi, \eta) = & \sum_{n=1,3,5}^k \frac{E_n}{\theta_{11n}} (\theta_{1n} \text{senh } \beta_n \xi + \text{sen } \gamma_n \xi) \text{sen } \frac{n\pi\eta}{2} + \\ & + \sum_{n=k^*+2}^{2k+1} \frac{E_n}{\theta_{22n}} (\theta_{2n} \text{senh } \beta_n \xi + \text{senh } \gamma_n \xi) \text{sen } \frac{n\pi\eta}{2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

sendo $\beta_n = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 + (\frac{n\pi}{2})^2};$

$$\gamma_n = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 - (\frac{n\pi}{2})^2}, \text{ para o primeiro somatório onde } \lambda^2 > (\frac{n\pi}{2})^2;$$

$$\gamma_n = 1/\phi \sqrt{(\frac{n\pi}{2})^2 - \lambda^2 \phi^2}, \text{ para o segundo somatório onde } \lambda^2 < (\frac{n\pi}{2})^2;$$

$$\theta_{1n} = -\{ (\beta_n \text{senh } \beta_n) / (\gamma_n \text{sen } \gamma_n) \} \{ \beta_n^2 - v^* \phi^2 (\frac{n\pi}{2})^2 \} / \{ \gamma_n^2 + v^* \phi^2 (\frac{n\pi}{2})^2 \};$$

$$\theta_{2n} = -\{(\beta_n \sinh \beta_n)/(\gamma_n \sinh \gamma_n)\} \{ \beta_n^2 - \nu^2 \phi^2 (\frac{n\pi}{2})^2 \} / \{ \gamma_n^2 - \nu^2 \phi^2 (\frac{n\pi}{2})^2 \}$$

$$\theta_{11n} = \theta_{1n} \{ (\gamma_n^2 + \nu \phi^2 (\frac{n\pi}{2})^2 \} \cos \gamma_n - \{ \beta_n^2 - \nu^2 \phi^2 (\frac{n\pi}{2})^2 \} \cosh \beta_n;$$

$$\theta_{22n} = -\{ (\beta_n^2 - \nu \phi^2 (\frac{n\pi}{2})^2 \} \cosh \beta_n + \theta_{2n} \{ \gamma_n^2 - \nu \phi^2 (\frac{n\pi}{2})^2 \} \cosh \gamma_n \}$$

Então, a resposta do modo duplamente anti-simétrico é dada pela soma da resposta de cada bloco, ou seja:

$$W_{AA}(\xi, \eta) = W1(\xi, \eta) + W2(\xi, \eta) \quad (3.25)$$

3.2.6) Modos Simétricos/Anti-simétricos

Os blocos utilizados para analisar a família de modos simétricos/anti-simétricos estão mostrados na Figura 3.9. Eles diferem pouco dos usados para os duplamente simétricos e duplamente anti-simétricos. A maior diferença envolve as funções de Fourier utilizadas.

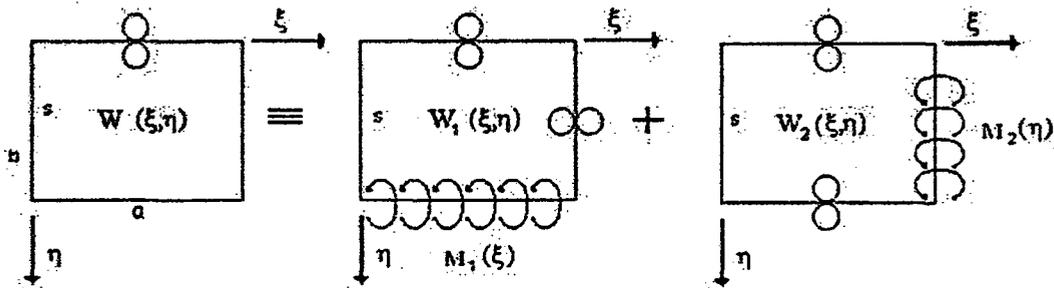


Figura 3.9 – Blocos usados para analisar modos simétricos/anti-simétricos e anti-simétricos/simétricos

Analisando o bloco W1 e em analogia ao que já foi apresentado até aqui, o momento de flexão $M_1(\xi)$ ao longo de $\eta=1$, expresso por,

$$M_1(\xi) = \sum_{m=1,3}^{2k-1} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{2} \quad (3.26)$$

e, a resposta do bloco W1 fica

$$W1(\xi, \eta) = \sum_{m=0,1,3}^{2k-1} \frac{E_m}{\theta_{11m}} \{ \cosh \beta_m \eta + \theta_{1m} \cos \gamma_m \eta \} \cos \frac{m\pi\xi}{2} + \\ + \sum_{m=0,1,3}^{2k-1} \frac{E_m}{\theta_{22m}} \{ \cosh \beta_m \eta + \theta_{2m} \cos \gamma_m \eta \} \cos \frac{m\pi\xi}{2} \quad (3.27)$$

$$\text{sendo } \beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2};$$

$$\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2}, \text{ para o primeiro somatório, } \lambda^2 > \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2;$$

$$\gamma_m = \phi \sqrt{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 - \lambda^2}, \text{ para o segundo somatório, } \lambda^2 < \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2;$$

$$\theta_{1m} = -\{(\beta_m \sinh \beta_m)/(\gamma_m \sin \gamma_m)\} \{\beta_m^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\} / \{\gamma_m^2 + v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\};$$

$$\theta_{2m} = -\{(\beta_m \sinh \beta_m)/(\gamma_m \sinh \gamma_m)\} \{\beta_m^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\} / \{\gamma_m^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\}$$

$$\theta_{11m} = \theta_{1m} \{(\gamma_m^2 + v\phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2) \cos \gamma_m - \{\beta_m^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\}\} \cosh \beta_m;$$

$$\theta_{22m} = -\{(\beta_m^2 - v\phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2) \cosh \beta_m + \theta_{2m} \{\gamma_m^2 - v\phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\}\} \cosh \gamma_m$$

Voltando a atenção para o bloco W2, o momento $M_2(\eta)$ tem a seguinte expressão

$$M_2(\eta) = \sum_{n=0,1}^{k-1} E_n \cos n\pi\eta \quad (3.28)$$

e, a resposta do bloco W2 será:

$$\begin{aligned} W2(\xi, \eta) = & \sum_{n=0,1,2}^{k-1} \frac{E_n}{\theta_{11n}} (\theta_{1n} \sinh \beta_n \xi + \sin \gamma_n \xi) \sin n\pi\eta + \\ & + \sum_{n=0,1,2}^{k-1} \frac{E_n}{\theta_{22n}} (\theta_{2n} \sinh \beta_n \xi + \sinh \gamma_n \xi) \sin n\pi\eta \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\text{sendo } \beta_n = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 + (n\pi)^2};$$

$$\gamma_n = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 - (n\pi)^2}, \text{ para o primeiro somatório, } \lambda^2 > (n\pi)^2;$$

$$\gamma_n = 1/\phi \sqrt{(n\pi)^2 - \lambda^2 \phi^2}, \text{ para o segundo somatório, } \lambda^2 < (n\pi)^2;$$

$$\theta_{1n} = -\{(\beta_n \sinh \beta_n)/(\gamma_n \sin \gamma_n)\} \{\beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\} / \{\gamma_n^2 + v^* \phi^2 (n\pi)^2\};$$

$$\theta_{2n} = -\{(\beta_n \sinh \beta_n)/(\gamma_n \sinh \gamma_n)\} \{\beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\} / \{\gamma_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\}$$

$$\theta_{11n} = \theta_{1n} \left\{ (\gamma_n^2 + v\phi^2 (n\pi)^2) \cos \gamma_n - \left\{ \beta_n^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2 \right\} \right\} \cosh \beta_n;$$

$$\theta_{22n} = - \left\{ (\beta_n^2 - v\phi^2 \left(\frac{n\pi}{2} \right)^2) \cosh \beta_n + \theta_{2n} \{ \gamma_n^2 - v\phi^2 (n\pi)^2 \} \cosh \gamma_n \right\}$$

Então, a resposta do modo simétrico/anti-simétrico é a soma da resposta de cada bloco, ou seja:

$$W_{SA}(\xi, \eta) = W1(\xi, \eta) + W2(\xi, \eta) \quad (3.30)$$

3.2.7) Modos Anti-simétricos/Simétricos

Deve-se notar que existem modos simétricos em relação a ξ e anti-simétricos em relação a η , mas também existem os modos anti-simétricos em relação a ξ e simétricos em relação a η . Fazendo-se uma analogia em relação ao item anterior (Figura 3.9), para os simétricos/anti-simétricos usa-se $\phi = \frac{b}{a}$ e para o anti-simétricos/simétricos usa-se $\phi = \frac{a}{b}$,

como também o autovalor λ , inicialmente $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{D}}$ ou $\lambda^* = \omega b^2 \sqrt{\frac{\rho}{D}}$.

Então, a resposta do primeiro bloco para os modos anti-simétrico/simétricos fica:

$$W1(\xi, \eta) = \sum_{m=0,1,2}^{k-1} \frac{E_m}{\theta_{11m}} (\theta_{1m} \sinh \beta_m \eta + \sinh \gamma_m \eta) \sin n\pi \xi$$

$$+ \sum_{m=0,1,2}^{k-1} \frac{E_m}{\theta_{22m}} (\theta_{2m} \sinh \beta_m \eta + \sinh \gamma_m \eta) \sin n\pi \xi \quad (3.31)$$

sendo $\beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2}$;

$\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2}$, para o primeiro somatório, $\lambda^2 > \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2$;

$\gamma_m = \phi \sqrt{\left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 - \lambda^2}$, para o segundo somatório, $\lambda^2 < \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2$;

$\theta_{1m} = - \left\{ (\beta_m \sinh \beta_m) / (\gamma_m \sinh \gamma_m) \right\} \left\{ \beta_m^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \right\} / \left\{ \gamma_m^2 + v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \right\}$;

$\theta_{2m} = - \left\{ (\beta_m \sinh \beta_m) / (\gamma_m \sinh \gamma_m) \right\} \left\{ \beta_m^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \right\} / \left\{ \gamma_m^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2} \right)^2 \right\}$

$$\theta_{11m} = \theta_{1m} \left\{ (\gamma_m^2 + v\phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2) \cos \gamma_m - \{\beta_m^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\} \cosh \beta_m \right\};$$

$$\theta_{22m} = -\{(\beta_m^2 - v\phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2) \cosh \beta_m + \theta_{2m} \{\gamma_m^2 - v\phi^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\} \cosh \gamma_m\}$$

e, a resposta do bloco W2 será:

$$W_n(\xi, \eta) = \sum_{n=0,1,3}^{2k-1} \frac{E_n}{\theta_{11n}} \{ \cosh \beta_n \xi + \theta_{1n} \cos \gamma_n \xi \} \cos \frac{n\pi\eta}{2} +$$

$$+ \sum_{n=0,1,3}^{2k-1} \frac{E_n}{\theta_{22n}} \{ \cosh \beta_n \xi + \theta_{2n} \cos \gamma_n \xi \} \cos \frac{n\pi\eta}{2} \quad (3.32)$$

sendo $\beta_n = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 + (n\pi)^2}$;

$\gamma_n = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 - (n\pi)^2}$, para o primeiro somatório, $\lambda^2 > (n\pi)^2$;

$\gamma_n = 1/\phi \sqrt{(n\pi)^2 - \lambda^2 \phi^2}$, para o segundo somatório, $\lambda^2 < (n\pi)^2$;

$\theta_{1n} = -\{(\beta_n \sinh \beta_n)/(\gamma_n \sin \gamma_n)\} \{\beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\} / \{\gamma_n^2 + v^* \phi^2 (n\pi)^2\}$;

$\theta_{2n} = -\{(\beta_n \sinh \beta_n)/(\gamma_n \sinh \gamma_n)\} \{\beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\} / \{\gamma_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\}$

$\theta_{11n} = \theta_{1n} \{(\gamma_n^2 + v\phi^2 (n\pi)^2) \cos \gamma_n - \{\beta_n^2 - v^* \phi^2 \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\} \cosh \beta_n\}$;

$\theta_{22n} = -\{(\beta_n^2 - v\phi^2 \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2) \cosh \beta_n + \theta_{2n} \{\gamma_n^2 - v\phi^2 (n\pi)^2\} \cosh \gamma_n\}$

e a resposta do modos anti-simétrico/simétricos é dada pela soma da resposta de cada bloco, ou seja:

$$W_{AS}(\xi, \eta) = W1(\xi, \eta) + W2(\xi, \eta) \quad (3.33)$$

3.3) Análise de Placa Livre-Livre – Método da Superposição Completo

3.3.1) Equação Diferencial Governante – Vibrações Forçadas

A resposta de uma placa fina, submetida a uma onda de flexão, provocada por uma força variando harmonicamente no tempo e concentrada em um ponto, como mostrada na Figura 3.10, pode ser obtida pela seguinte equação diferencial [46]:

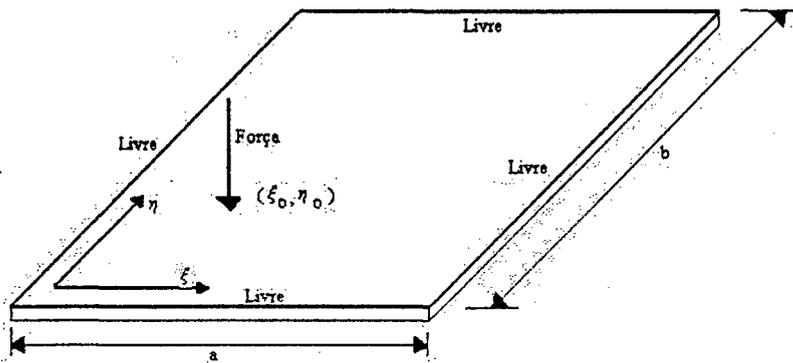


Figura 3.10 Placa Livre-Livre sob a ação de uma força pontual

$$D\left(\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4}\right) - \rho h \omega^2 w(x, y, t) = P(x, y, t) \quad (3.34)$$

sendo P a força transversal pontual harmônica.

Com vistas ao programa que foi implementado para o cálculo da resposta de uma placa livre-livre, decidiu-se que tanto o sistema de coordenadas, quanto as equações diferenciais e suas implicações, seriam adimensionalizadas. Para isso, os eixos cartesianos ortogonais x e y foram substituídos por $\xi = \frac{x}{a}$ e $\eta = \frac{y}{b}$, como mostrado na Figura 3.10 e considerando que as condições de contorno são as mesmas para todos os valores de t , pode-se simplificar a Equação (3.34), como segue

$$\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^4} + \frac{2\phi^2 \partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{\phi^4 \partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} - \phi^4 \lambda^4 W(\xi, \eta) = P(\xi, \eta) \quad (3.35)$$

3.3.2) Condições de contorno

Para uma placa finita, a condição de contorno livre nas bordas é:

I - para as bordas localizadas em $\xi = 0$ e $\xi = a$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} = 0 \quad (3.37)$$

II – para as bordas localizadas $\eta = 0$ e $\eta = b$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial \eta \partial \xi^2} = 0 \quad (3.39)$$

Considerando a Figura 3.6, os momentos de flexão adimensionalizados, associados com η e ξ são, respectivamente:

$$\frac{Mb^2}{aD} = -\left\{ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu \phi^2 \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right\} \quad (3.40)$$

e

$$\frac{Ma}{D} = -\left\{ \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\phi^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right\} \quad (3.41)$$

As forças de reação vertical associados com η e ξ são, respectivamente:

$$\frac{Va^2}{aD} = -\left\{ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \nu^* \phi^2 \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi^2} \right\} \quad (3.42)$$

e

$$\frac{Va^2}{D} = -\left\{ \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + \frac{\nu^*}{\phi^2} \frac{\partial^3 W(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \right\} \quad (3.43)$$

sendo $\nu^* = (2-\nu)$;

M Momento de flexão distribuído ao longo da borda da placa;

V Reação vertical na borda da placa;

3.3.3) Procedimento Matemático

Para a análise da resposta de uma placa livre-livre sob a ação de uma força transversal harmônica num ponto arbitrário, pelo Método da Superposição, necessitam-se de cinco blocos, que representam a placa em questão, sob a ação de momentos nas bordas e da força de excitação atuante sobre ela, como mostrado na Figura 3.11.

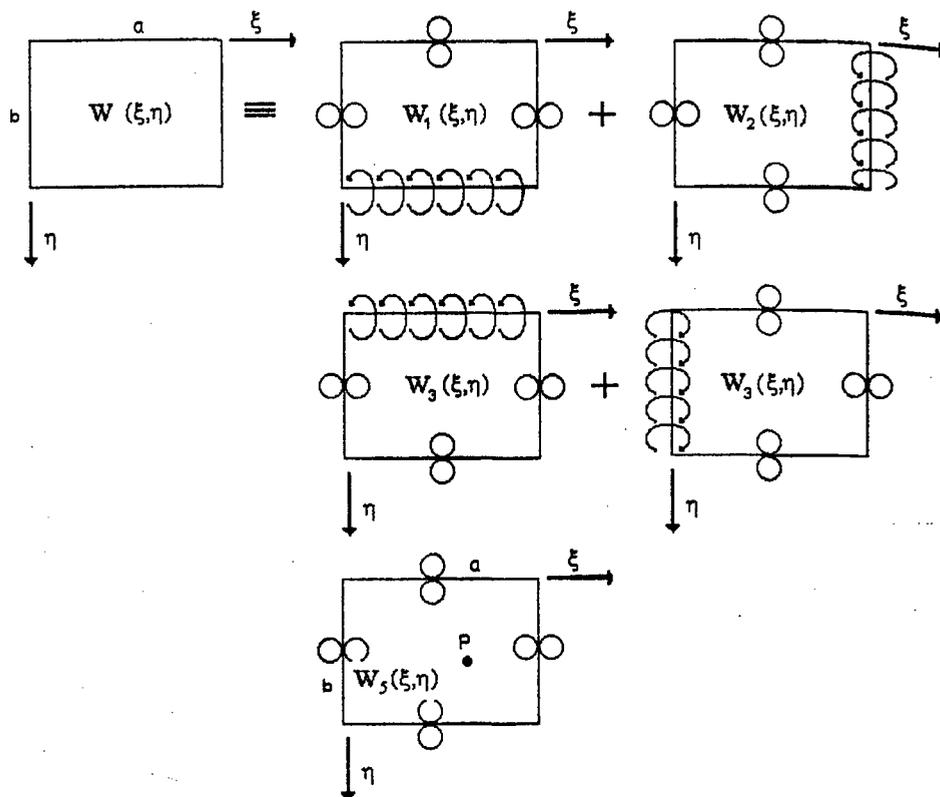


Figura 3.11 Representação esquemática de blocos utilizados para a análise de vibrações forçadas em uma placa completamente livre sob uma força transversal.

Nota-se claramente que os dois primeiros blocos já foram analisados no Item 3.2.4. e, suas respostas já foram calculadas.

Então

$$\begin{aligned}
 W1(\xi, \eta) = & \sum_{m=0,1}^{k^*} \frac{E_m}{\theta_{11m}} \{ \cosh \beta_m \eta + \theta_{1m} \cos \gamma_m \eta \} \cos m\pi\xi + \\
 & + \sum_{m=k^*+1}^{k-1} \frac{E_m}{\theta_{22m}} \{ \cosh \beta_m \eta + \theta_{2m} \cos \gamma_m \eta \} \cos m\pi\xi
 \end{aligned} \quad (3.44)$$

e

$$\begin{aligned}
 W2(\xi, \eta) = & \sum_{n=0,1}^{k^*} \frac{E_n}{\theta_{11n}} \{ \cosh \beta_n \xi + \theta_{1n} \cos \gamma_n \xi \} \cos n\pi\eta + \\
 & + \sum_{n=k^*+1}^{k-1} \frac{E_n}{\theta_{22n}} \{ \cosh \beta_n \xi + \theta_{2n} \cos \gamma_n \xi \} \cos n\pi\eta
 \end{aligned} \quad (3.45)$$

sendo k o número de termos na expansão de Fourier ;

$$k^* = \frac{k}{2}$$

$$\beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + (m\pi)^2};$$

$$\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - (m\pi)^2}, \text{ para o primeiro somatório, } \lambda^2 > (m\pi)^2;$$

$$\begin{aligned}
\gamma_m &= \phi\sqrt{(m\pi)^2 - \lambda^2}, \text{ para o segundo somatório, } \lambda^2 < (m\pi)^2; \\
\theta_{1m} &= -\{(\beta_m \sinh \beta_m)/(\gamma_m \sin \gamma_m)\}\{\beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2\}/\{\gamma_m^2 + v^* \phi^2 (m\pi)^2\}; \\
\theta_{2m} &= -\{(\beta_m \sinh \beta_m)/(\gamma_m \sinh \gamma_m)\}\{\beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2\}/\{\gamma_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2\} \\
\theta_{11m} &= \theta_{1m} \{(\gamma_m^2 + v\phi^2 (m\pi)^2) \cos \gamma_m - \{\beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2\} \cosh \beta_m\}; \\
\theta_{22m} &= -\{(\beta_m^2 - v\phi^2 (m\pi)^2) \cosh \beta_m + \theta_{2m} \{\gamma_m^2 - v\phi^2 (m\pi)^2\} \cosh \gamma_m\} \\
\beta_n &= 1/\phi\sqrt{\lambda^2 \phi^2 + (n\pi)^2}; \\
\gamma_n &= 1/\phi\sqrt{\lambda^2 \phi^2 - (n\pi)^2}, \text{ para o primeiro somatório, } \lambda^2 > (n\pi)^2; \\
\gamma_n &= 1/\phi\sqrt{(n\pi)^2 - \lambda^2 \phi^2}, \text{ para o segundo somatório, } \lambda^2 < (n\pi)^2; \\
\theta_{1n} &= -\{(\beta_n \sinh \beta_n)/(\gamma_n \sin \gamma_n)\}\{\beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\}/\{\gamma_n^2 + v^* \phi^2 (n\pi)^2\}; \\
\theta_{2n} &= -\{(\beta_n \sinh \beta_n)/(\gamma_n \sinh \gamma_n)\}\{\beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\}/\{\gamma_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\} \\
\theta_{11n} &= \theta_{1n} \{(\gamma_n^2 + v\phi^2 (n\pi)^2) \cos \gamma_n - \{\beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2\} \cosh \beta_n\}; \\
\theta_{22n} &= -\{(\beta_n^2 - v\phi^2 (n\pi)^2) \cosh \beta_n + \theta_{2n} \{\gamma_n^2 - v\phi^2 (n\pi)^2\} \cosh \gamma_n\}
\end{aligned}$$

A seguir, o foco de atenção se torna o bloco W3(ξ, η). Analisando, agora, o terceiro bloco W3(ξ, η) da Figura 3.11, nota-se que a forma da solução é idêntica à usada no bloco W1(ξ, η), substituindo-se, porém, η por $(1-\eta)$ e m por p , a solução do terceiro bloco fica

$$\begin{aligned}
W3(\xi, \eta) &= \sum_{p=0,1}^k \frac{E_p}{\theta_{11p}} \{ \cosh \beta_p (1-\eta) + \theta_{1p} \cos \gamma_p (1-\eta) \} \cos p\pi\xi + \\
&+ \sum_{p=k^*+1}^{k-1} \frac{E_p}{\theta_{22p}} \{ \cosh \beta_p (1-\eta) + \theta_{2p} \cos \gamma_p (1-\eta) \} \cos p\pi\xi \quad (3.46)
\end{aligned}$$

sendo $\beta_p = \phi\sqrt{\lambda^2 + (p\pi)^2}$;

$\gamma_p = \phi\sqrt{\lambda^2 - (p\pi)^2}$, para o primeiro somatório, $\lambda^2 > (p\pi)^2$;

$\gamma_p = \phi\sqrt{(p\pi)^2 - \lambda^2}$, para o segundo somatório, $\lambda^2 < (p\pi)^2$;

$\theta_{1p} = -\{(\beta_p \sinh \beta_p)/(\gamma_p \sin \gamma_p)\}\{\beta_p^2 - v^* \phi^2 (p-\pi)^2\}/\{\gamma_p^2 + v^* \phi^2 (p\pi)^2\}$;

$\theta_{2p} = -\{(\beta_p \sinh \beta_p)/(\gamma_p \sinh \gamma_p)\}\{\beta_p^2 - v^* \phi^2 (p\pi)^2\}/\{\gamma_p^2 - v^* \phi^2 (p\pi)^2\}$;

$\theta_{11p} = \theta_{1p} \{(\gamma_p^2 + v\phi^2 (p\pi)^2) \cos \gamma_p - \{\beta_p^2 - v^* \phi^2 (p\pi)^2\} \cosh \beta_p\}$;

$$\theta_{22p} = -\{(\beta_p^2 - v\phi^2(p\pi)^2) \cosh \beta_p + \theta_{2p} \{\gamma_p^2 - v\phi^2(p\pi)^2\} \cosh \gamma_p\};$$

E esta é a resposta do bloco W3(ξ, η).

E, obviamente, para o quarto bloco W4(ξ, η), a solução é idêntica à usada no bloco W2(ξ, η), substituindo-se, porém, ξ por $(1-\xi)$ e n por q , a solução do quarto bloco fica

$$\begin{aligned} W4(\xi, \eta) = & \sum_{q=0,1}^k \frac{E_q}{\theta_{11q}} \{ \cosh \beta_q (1-\xi) + \theta_{1q} \cos \gamma_q (1-\xi) \} \cos q\pi\eta + \\ & + \sum_{q=k+1}^{k-1} \frac{E_q}{\theta_{22q}} \{ \cosh \beta_q (1-\xi) + \theta_{2q} \cos \gamma_q (1-\xi) \} \cos q\pi\eta \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que $\beta_q = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 + (q\pi)^2}$;

$$\gamma_q = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 - (q\pi)^2}, \text{ para o primeiro somatório, } \lambda^2 > (q\pi)^2;$$

$$\gamma_q = 1/\phi \sqrt{(q\pi)^2 - \lambda^2 \phi^2}, \text{ para o segundo somatório, } \lambda^2 < (q\pi)^2;$$

$$\theta_{1q} = -\{(\beta_q \sinh \beta_q)/(\gamma_q \sinh \gamma_q)\} \{\beta_q^2 - v\phi^2(q\pi)^2\} / \{\gamma_q^2 + v\phi^2(q\pi)^2\};$$

$$\theta_{2q} = -\{(\beta_q \sinh \beta_q)/(\gamma_q \sinh \gamma_q)\} \{\beta_q^2 - v\phi^2(q\pi)^2\} / \{\gamma_q^2 - v\phi^2(q\pi)^2\};$$

$$\theta_{11q} = \theta_{1q} \{(\gamma_q^2 + v\phi^2(q\pi)^2) \cos \gamma_q - \{\beta_q^2 - v\phi^2(q\pi)^2\}\} \cosh \beta_q;$$

$$\theta_{22q} = -\{(\beta_q^2 - v\phi^2(q\pi)^2) \cosh \beta_q + \theta_{2q} \{\gamma_q^2 - v\phi^2(q\pi)^2\} \cosh \gamma_q\}$$

O quinto e último bloco tem as chamadas condições de contorno “*slip-shear*” ao longo de todas as bordas.

Sobre o bloco em questão, atua uma força transversal, concentrada e harmônica, posicionada nas coordenadas u e v , como mostrada na Figura 3.12. Divide-se o bloco em dois segmentos separados por uma linha comum em $\eta = v$. Dois conjuntos de coordenadas são montados, como indicados na Figura 3.12, um para cada segmento, aos quais serão denominados de segmento $W_{s1}(\xi, \eta)$ (o segmento superior) e $W_{s2}(\xi, \eta)$ (o segmento inferior).

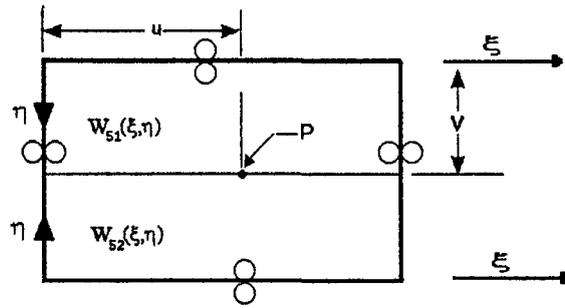


Figura 3.12 Representação esquemática do bloco W5

A solução para o segmento superior $W_{51}(\xi, \eta)$, pode ser expressa como [46]

$$W_{51}(\xi, \eta) = \sum_{l=0,1}^{\infty} Y_m(\eta) \cos l\pi\xi \quad (3.48)$$

e, além disso, comparando com o estudo feito para o primeiro bloco $W_1(\xi, \eta)$, pode-se escrever que:

para $\lambda^2 > (l\pi)^2$

$$Y_l(\eta) = A_l \cosh \beta_l \eta + B_l \cos \gamma_l \eta \quad (3.49)$$

e para $\lambda^2 < (l\pi)^2$

$$Y_l(\eta) = A_l \cosh \beta_l \eta + B_l \cosh \gamma_l \eta \quad (3.50)$$

sendo $\beta_l = \phi \sqrt{\lambda^2 + (l\pi)^2}$;

$\gamma_l = \phi \sqrt{\lambda^2 - (l\pi)^2}$, para o primeiro somatório, $\lambda^2 > (l\pi)^2$;

$\gamma_l = \phi \sqrt{(l\pi)^2 - \lambda^2}$, para o segundo somatório, $\lambda^2 < (l\pi)^2$;

A solução para o segmento inferior $W_{52}(\xi, \eta)$ pode ser determinada de forma idêntica.

Basta somente mudar o subscrito 1 por 2, assim

$$W_{52}(\xi, \eta) = \sum_{l=0,1}^{\infty} Y_l(\eta) \cos l\pi\xi \quad (3.51)$$

e, mais ainda, para $\lambda^2 > (l\pi)^2$

$$Y_l(\eta) = C_l \cosh \beta_l \eta + D_l \cos \gamma_l \eta \quad (3.52)$$

e para $\lambda^2 < (l\pi)^2$

$$Y_l(\eta) = C_l \cosh \beta_l \eta + D_l \cosh \gamma_l \eta \quad (3.53)$$

sendo $\beta_l = \phi \sqrt{\lambda^2 + (l\pi)^2}$;

$\gamma_l = \phi \sqrt{\lambda^2 - (l\pi)^2}$, para o primeiro somatório, $\lambda^2 > (l\pi)^2$;

$\gamma_l = \phi \sqrt{(l\pi)^2 - \lambda^2}$, para o segundo somatório, $\lambda^2 < (l\pi)^2$;

Deve-se escolher, para representar a amplitude da força harmônica concentrada, a função impulso Delta de Dirac, distribuída ao longo da reta comum aos dois segmentos, porém concentrada na coordenada u . Esta função pode ser expandida numa série tipo co-seno [46], ou seja, a força transversal harmônica concentrada pode ser escrita como

$$P(\xi) = \frac{2P}{a} \sum_{l=0,1}^{\infty} \frac{\cos l\pi u}{\delta_l} \cos l\pi \xi \quad (3.54)$$

sendo $\delta_l = 2, \quad l = 0$
 $\delta_l = 1, \quad l > 0$

Para quaisquer “ l ” termos (Fourier) da força, haverá uma resposta envolvendo “ l ” termos das Equações (3.49) (3.50) e (3.52) (3.53). Isto significa que existem quatro coeficientes A_l, B_l, C_l e D_l que devem ser avaliados. As Equações necessárias relacionando esses coeficientes são obtidas com as condições de continuidade através da linha comum de interseção.

Estas condições são [46]:

- 1) Continuidade do deslocamento lateral;
- 2) Continuidade do deslocamento angular da normal no contorno;
- 3) Continuidade do momento de flexão M_η através do contorno;
- 4) Continuidade ditada pelo equilíbrio dinâmico.

Existem, então, quatro equações algébricas não homogêneas, baseadas nas condições de continuidade da reta comum aos dois segmentos, habilitadas a calcular os quatro coeficientes desconhecidos das Equações (3.49), (3.50), (3.52) e (3.53) em termos da amplitude da força adimensional atuante. A seguir, será examinado este conjunto de equações. As equações de continuidade podem ser escritas da seguinte maneira [46]

para $\lambda^2 > (l\pi)^2$

$$A_1 \cosh \beta_1 v + B_1 \cos \gamma_1 v - C_1 \cosh \beta_1 v^* - D_1 \cos \gamma_1 v^* = 0 \quad (3.55)$$

$$A_1 \beta_1 \sinh \beta_1 v - B_1 \gamma_1 \sin \gamma_1 v + C_1 \beta_1 \sinh \beta_1 v^* - D_1 \gamma_1 \sin \gamma_1 v^* = 0 \quad (3.56)$$

$$A_1 \beta_1^2 \cosh \beta_1 v - B_1 \gamma_1^2 \cos \gamma_1 v - C_1 \beta_1^2 \cosh \beta_1 v^* + D_1 \gamma_1^2 \cos \gamma_1 v^* = 0 \quad (3.57)$$

$$A_1 \beta_1^3 \sinh \beta_1 v + B_1 \gamma_1^3 \sin \gamma_1 v + C_1 \beta_1^3 \sinh \beta_1 v^* + D_1 \gamma_1^3 \sin \gamma_1 v^* = \left(\frac{P^*}{\delta_1}\right) \cos l\pi u \quad (3.58)$$

e, para $\lambda^2 < (l\pi)^2$

$$A_1 \cosh \beta_1 v + B_1 \cosh \gamma_1 v - C_1 \cosh \beta_1 v^* - D_1 \cosh \gamma_1 v^* = 0 \quad (3.59)$$

$$A_1 \beta_1 \sinh \beta_1 v + B_1 \gamma_1 \sinh \gamma_1 v + C_1 \beta_1 \sinh \beta_1 v^* + D_1 \gamma_1 \sinh \gamma_1 v^* = 0 \quad (3.60)$$

$$A_1 \beta_1^2 \cosh \beta_1 v + B_1 \gamma_1^2 \cosh \gamma_1 v - C_1 \beta_1^2 \cosh \beta_1 v^* - D_1 \gamma_1^2 \cosh \gamma_1 v^* = 0 \quad (3.61)$$

$$A_1 \beta_1^3 \sinh \beta_1 v + B_1 \gamma_1^3 \sinh \gamma_1 v + C_1 \beta_1^3 \sinh \beta_1 v^* + D_1 \gamma_1^3 \sinh \gamma_1 v^* = \left(\frac{P^*}{\delta_1}\right) \cos l\pi u \quad (3.62)$$

sendo $u^* = (1-u)$ e $v^* = (1-v)$

Resolvendo esse conjunto de equações, pode-se mostrar que:

para $\lambda^2 > (l\pi)^2$

$$A_1 = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \beta_1 v^*}{\delta_1 (\beta_1^2 + \gamma_1^2) \beta_1 \sinh \beta_1} \quad (3.63)$$

$$B_1 = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \gamma_1 v^*}{\delta_1 (\beta_1^2 + \gamma_1^2) \gamma_1 \sin \gamma_1} \quad (3.64)$$

$$C_1 = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \beta_1 v}{\delta_1 (\beta_1^2 + \gamma_1^2) \beta_1 \sinh \beta_1} \quad (3.65)$$

$$D_1 = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \gamma_1 v}{\delta_1 (\beta_1^2 + \gamma_1^2) \gamma_1 \sin \gamma_1} \quad (3.66)$$

e para $\lambda^2 < (l\pi)^2$

$$A_1 = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \beta_1 v^*}{\delta_1 (\beta_1^2 - \gamma_1^2) \beta_1 \sinh \beta_1} \quad (3.67)$$

$$B_1 = \frac{-P^* \cos l\pi u \cosh \gamma_1 v^*}{\delta_1 (\beta_1^2 - \gamma_1^2) \gamma_1 \sinh \gamma_1} \quad (3.68)$$

$$C_1 = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \beta_1 v}{\delta_1 (\beta_1^2 - \gamma_1^2) \beta_1 \sinh \beta_1} \quad (3.69)$$

$$D_l = \frac{-P^* \cos l\pi u \cosh \gamma_l v}{\delta_l (\beta_l^2 - \gamma_l^2) \gamma_l \sinh \gamma_l} \quad (3.70)$$

Agora, com as soluções exatas para os coeficientes A_l, B_l, C_l e D_l , pode-se mostrar que a solução para o quinto e último bloco da Figura 3.12 é

$$W5(\xi, \eta) = \sum_{l=0,1}^{\infty} (A_l \cosh \beta_l \eta + B_l \cos \gamma_l \eta + C_l \cosh \beta_l \eta + D_l \cos \gamma_l \eta) \cos l\pi \xi + \quad (3.71)$$

$$\sum_{l=0,1}^{\infty} (A_l \cosh \beta_l \eta + B_l \cosh \gamma_l \eta + C_l \cosh \beta_l \eta + D_l \cosh \gamma_l \eta) \cos l\pi \xi$$

onde, para o primeiro somatório, os coeficientes A_l, B_l, C_l e D_l estão expostos no conjunto de Equações (3.63) a (3.66) e, para o segundo somatório, os coeficientes A_l, B_l, C_l e D_l são os mostrados no conjunto de Equações (3.67) a (3.70).

Todos os blocos foram, então, analisados e conseguiu-se a resposta de cada um deles. Com isso, somando-se as respostas de cada bloco, tem-se a resposta de uma placa retangular livre-livre, sob a atuação de uma força pontual P, dada pela equação abaixo

$$W_{placa}(\xi, \eta) = W1(\xi, \eta) + W2(\xi, \eta) + W3(\xi, \eta) + W4(\xi, \eta) + W5(\xi, \eta) \quad (3.72)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} W_{placa}(\xi, \eta) = & \sum_{m=0,1}^{k'} \frac{E_m}{\theta_{11m}} \{ \cosh \beta_m \eta + \theta_{1m} \cos \gamma_m \eta \} \cos m\pi \xi + \\ & \sum_{m=k'+1}^{k-1} \frac{E_m}{\theta_{22m}} \{ \cosh \beta_m \eta + \theta_{2m} \cos \gamma_m \eta \} \cos m\pi \xi + \\ & \sum_{n=0,1}^k \frac{E_n}{\theta_{11n}} \{ \cosh \beta_n \xi + \theta_{1n} \cos \gamma_n \xi \} \cos n\pi \eta + \\ & \sum_{n=k'+1}^{k-1} \frac{E_n}{\theta_{22n}} \{ \cosh \beta_n \xi + \theta_{2n} \cos \gamma_n \xi \} \cos n\pi \eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0,1}^k \frac{E_p}{\theta_{11p}} \{ \cosh \beta_p (1-\eta) + \theta_{1p} \cos \gamma_p (1-\eta) \} \cos p\pi\xi + \\
& \sum_{p=k^*+1}^{k-1} \frac{E_p}{\theta_{22p}} \{ \cosh \beta_p (1-\eta) + \theta_{2p} \cos \gamma_p (1-\eta) \} \cos p\pi\xi + \\
& \sum_{q=0,1}^k \frac{E_q}{\theta_{11q}} \{ \cosh \beta_q (1-\xi) + \theta_{1q} \cos \gamma_q (1-\xi) \} \cos q\pi\eta + \\
& \sum_{q=k^*+1}^{k-1} \frac{E_q}{\theta_{22q}} \{ \cosh \beta_q (1-\xi) + \theta_{2q} \cos \gamma_q (1-\xi) \} \cos q\pi\eta + \\
& \sum_{i=0,1}^{\infty} (A_i \cosh \beta_i \eta + B_i \cos \gamma_i \eta + C_i \cosh \beta_i \eta + D_i \cos \gamma_i \eta) \cos i\pi\xi + \\
& \sum_{i=0,1}^{\infty} (A_i \cosh \beta_i \eta + B_i \cosh \gamma_i \eta + C_i \cosh \beta_i \eta + D_i \cosh \gamma_i \eta) \cos i\pi\xi
\end{aligned} \tag{3.73}$$

em que,

$$\beta_m = \phi \sqrt{\lambda^2 + (m\pi)^2} \tag{3.74}$$

$$\gamma_m = \phi \sqrt{\lambda^2 - (m\pi)^2}, \text{ para o primeiro, } \lambda^2 > (m\pi)^2 \tag{3.75}$$

$$\gamma_m = \phi \sqrt{(m\pi)^2 - \lambda^2}, \text{ para o segundo, } \lambda^2 < (m\pi)^2 \tag{3.76}$$

$$\theta_{1m} = -\{(\beta_m \sinh \beta_m) / (\gamma_m \sin \gamma_m)\} \{ \beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2 \} / \{ \gamma_m^2 + v^* \phi^2 (m\pi)^2 \} \tag{3.77}$$

$$\theta_{2m} = -\{(\beta_m \sinh \beta_m) / (\gamma_m \sinh \gamma_m)\} \{ \beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2 \} / \{ \gamma_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2 \} \tag{3.78}$$

$$\theta_{11m} = \theta_{1m} \{ (\gamma_m^2 + v\phi^2 (m\pi)^2) \cos \gamma_m - \{ \beta_m^2 - v^* \phi^2 (m\pi)^2 \} \} \cosh \beta_m \tag{3.79}$$

$$\theta_{22m} = -\{ (\beta_m^2 - v\phi^2 (m\pi)^2) \cosh \beta_m + \theta_{2m} \{ \gamma_m^2 - v\phi^2 (m\pi)^2 \} \cosh \gamma_m \} \tag{3.80}$$

$$\beta_n = 1 / \phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 + (n\pi)^2} \tag{3.81}$$

$$\gamma_n = 1 / \phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 - (n\pi)^2}, \text{ para o terceiro, } \lambda^2 > (n\pi)^2 \tag{3.82}$$

$$\gamma_n = 1 / \phi \sqrt{(n\pi)^2 - \lambda^2 \phi^2}, \text{ para o quarto, } \lambda^2 < (n\pi)^2 \tag{3.83}$$

$$\theta_{1n} = -\{(\beta_n \sinh \beta_n) / (\gamma_n \sin \gamma_n)\} \{ \beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2 \} / \{ \gamma_n^2 + v^* \phi^2 (n\pi)^2 \} \tag{3.84}$$

$$\theta_{2n} = -\{(\beta_n \sinh \beta_n) / (\gamma_n \sinh \gamma_n)\} \{ \beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2 \} / \{ \gamma_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2 \} \tag{3.85}$$

$$\theta_{11n} = \theta_{1n} \{ (\gamma_n^2 + v\phi^2 (n\pi)^2) \cos \gamma_n - \{ \beta_n^2 - v^* \phi^2 (n\pi)^2 \} \} \cosh \beta_n \tag{3.86}$$

$$\theta_{22n} = -\{(\beta_n^2 - v\phi^2(n\pi)^2) \cosh \beta_n + \theta_{2n} \{\gamma_n^2 - v\phi^2(n\pi)^2\} \cosh \gamma_n\} \quad (3.87)$$

$$\beta_p = \phi \sqrt{\lambda^2 + (p\pi)^2} \quad (3.88)$$

$$\gamma_p = \phi \sqrt{\lambda^2 - (p\pi)^2}, \text{ para o quinto somatório, } \lambda^2 > (p\pi)^2 \quad (3.89)$$

$$\gamma_p = \phi \sqrt{(p\pi)^2 - \lambda^2}, \text{ para o sexto somatório, } \lambda^2 < (p\pi)^2 \quad (3.90)$$

$$\theta_{1p} = -\{(\beta_p \sinh \beta_p) / (\gamma_p \sinh \gamma_p)\} \{\beta_p^2 - v^* \phi^2(p-\pi)^2\} / \{\gamma_p^2 + v^* \phi^2(p\pi)^2\} \quad (3.91)$$

$$\theta_{2p} = -\{(\beta_p \sinh \beta_p) / (\gamma_p \sinh \gamma_p)\} \{\beta_p^2 - v^* \phi^2(p\pi)^2\} / \{\gamma_p^2 - v^* \phi^2(p\pi)^2\} \quad (3.92)$$

$$\theta_{11p} = \theta_{1p} \{(\gamma_p^2 + v\phi^2(p\pi)^2) \cos \gamma_p - \{\beta_p^2 - v^* \phi^2(p\pi)^2\}\} \cosh \beta_p \quad (3.93)$$

$$\theta_{22p} = -\{(\beta_p^2 - v\phi^2(p\pi)^2) \cosh \beta_p + \theta_{2p} \{\gamma_p^2 - v\phi^2(p\pi)^2\} \cosh \gamma_p\} \quad (3.94)$$

$$\beta_q = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 + (q\pi)^2} \quad (3.95)$$

$$\gamma_q = 1/\phi \sqrt{\lambda^2 \phi^2 - (q\pi)^2}, \text{ para o sétimo somatório, } \lambda^2 > (q\pi)^2 \quad (3.96)$$

$$\gamma_q = 1/\phi \sqrt{(q\pi)^2 - \lambda^2 \phi^2}, \text{ para o oitavo somatório, } \lambda^2 < (q\pi)^2 \quad (3.97)$$

$$\theta_{1q} = -\{(\beta_q \sinh \beta_q) / (\gamma_q \sinh \gamma_q)\} \{\beta_q^2 - v^* \phi^2(q\pi)^2\} / \{\gamma_q^2 + v^* \phi^2(q\pi)^2\} \quad (3.98)$$

$$\theta_{2q} = -\{(\beta_q \sinh \beta_q) / (\gamma_q \sinh \gamma_q)\} \{\beta_q^2 - v^* \phi^2(q\pi)^2\} / \{\gamma_q^2 - v^* \phi^2(q\pi)^2\} \quad (3.99)$$

$$\theta_{11q} = \theta_{1q} \{(\gamma_q^2 + v\phi^2(q\pi)^2) \cos \gamma_q - \{\beta_q^2 - v^* \phi^2(q\pi)^2\}\} \cosh \beta_q \quad (3.100)$$

$$\theta_{22q} = -\{(\beta_q^2 - v\phi^2(q\pi)^2) \cosh \beta_q + \theta_{2q} \{\gamma_q^2 - v\phi^2(q\pi)^2\} \cosh \gamma_q\} \quad (3.101)$$

para o nono somatório, onde $\lambda^2 > (l\pi)^2$

$$A_l = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \beta_l v^*}{\delta_l(\beta_l^2 + \gamma_l^2) \beta_l \sinh \beta_l} \quad (3.102)$$

$$B_l = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \gamma_l v^*}{\delta_l(\beta_l^2 + \gamma_l^2) \gamma_l \sinh \gamma_l} \quad (3.103)$$

$$C_l = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \beta_l v}{\delta_l(\beta_l^2 + \gamma_l^2) \beta_l \sinh \beta_l} \quad (3.104)$$

$$D_l = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \gamma_l v}{\delta_l(\beta_l^2 + \gamma_l^2) \gamma_l \sinh \gamma_l} \quad (3.105)$$

e para o décimo e último somatório, onde $\lambda^2 < (l\pi)^2$

$$A_i = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \beta_i v^*}{\delta_i(\beta_i^2 - \gamma_i^2) \beta_i \sinh \beta_i} \quad (3.106)$$

$$B_i = \frac{-P^* \cos l\pi u \cosh \gamma_i v^*}{\delta_i(\beta_i^2 - \gamma_i^2) \gamma_i \sinh \gamma_i} \quad (3.107)$$

$$C_i = \frac{P^* \cos l\pi u \cosh \beta_i v}{\delta_i(\beta_i^2 - \gamma_i^2) \beta_i \sinh \beta_i} \quad (3.108)$$

$$D_i = \frac{-P^* \cos l\pi u \cosh \gamma_i v}{\delta_i(\beta_i^2 - \gamma_i^2) \gamma_i \sinh \gamma_i} \quad (3.109)$$

Assim, uma vez calculada a equação do deslocamento transversal de uma placa livre-livre, excitada por uma força pontual, pode-se pensar em um acoplamento entre duas placas nas mesmas condições, com ou sem viga de reforço ao longo desse acoplamento.

3.4) Validação de Resultados

Com o propósito de apresentar e validar os resultados obtidos pelo Método da Superposição, de placas planas na condição livre-livre, as Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 mostram, respectivamente, os cinco (05) primeiros autovalores duplamente simétricos, duplamente anti-simétricos, simétricos/anti-simétricos e anti-simétricos/simétricos, de uma placa plana de alumínio, com 2,0 m de comprimento, 1,0 m de largura e 3,0 mm de espessura, densidade igual a 2660 Kg/m^3 , amortecimento $\eta = 0,01$, coeficiente de Poisson igual a 0,3 e módulo de elasticidade $7,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, calculados através do Método da Superposição Particionado, que identifica as famílias dos modos. Como comparação, as tabelas apresentam resultados de autovalores calculados através de Elementos Finitos e as respectivas formas modais.

A programação através do Método de Elementos Finitos se deu através do software Ansys 5.3, utilizando-se o elemento de placa SHELL 63 [47], com dimensão de 2 cm, garantindo mais de 8 elementos por meio comprimento de onda.

Para a obtenção dos modos através do Método da Superposição Particionado utilizaram-se as Equações (3.15), (3.17), (3.22), (3.24), (3.27), (3.29), (3.31) e (3.32). Nestas equações tomou-se $k=15$, que corresponde ao número de termos dos blocos, sendo que esse valor foi obtido através de sucessivas tentativas de cálculo, proporcionando resultados com precisão. Na programação, a procura dos modos se dá através de um autovalor inicial, a partir do qual todos os outros autovalores, na faixa de frequência escolhida, são calculados.

CAPÍTULO IV

RESPOSTAS DE PLACAS LIVRES ACOPLADAS

4.1) Introdução

Neste capítulo, é calculada a resposta de um sistema composto de duas placas planas iguais, acopladas através de uma linha comum, sem nenhum tipo de reforço no acoplamento. Com o propósito de comprovar que o Método da Mobilidade, usando-se o Método da Superposição [18] escolhido para a obtenção de respostas de placas livre-livre, fornece resultados precisos, decidiu-se, também, determinar as respostas do mesmo sistema pelo Método de Elementos Finitos e experimentalmente.

Por causa das dificuldades inerentes às medições experimentais, escolheu-se trabalhar com placas de alumínio, por serem mais leves e de fácil manuseio.

A Figura 4.1 ilustra o sistema composto de duas placas acopladas, e a Tabela 4.1, apresenta as características mecânicas das mesmas.

Tabela 3.1 Modos duplamente simétricos de uma placa livre-livre

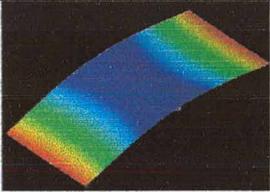
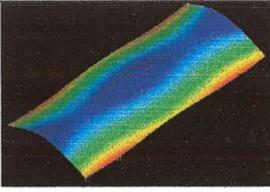
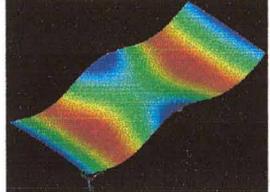
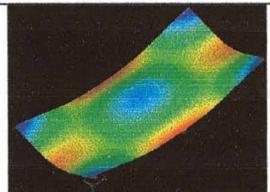
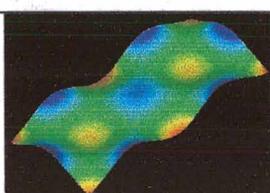
Número do modo	Autovalor [Hz] Método da Superposição	Autovalor [Hz] Método Elementos Finitos	Forma Modal
01	4,00	4,00	
02	16,49	16,50	
03	22,21	22,23	
04	26,88	26,89	
05	49,73	49,76	

Tabela 3.2 Modos duplamente anti-simétricos de uma placa livre-livre

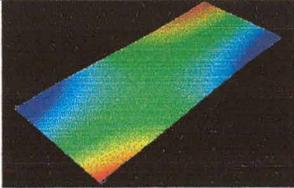
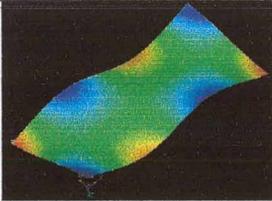
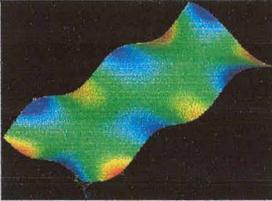
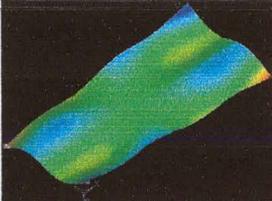
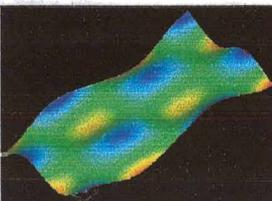
Número do modo	Autovalor [Hz] Método da Superposição	Autovalor [Hz] Método Elementos Finitos	Forma Modal
01	4,87	4,89	
02	18,83	18,83	
03	43,73	43,74	
04	48,94	48,95	
05	66,53	66,57	

Tabela 3.3 Modos simétricos/anti-simétricos de uma placa livre-livre

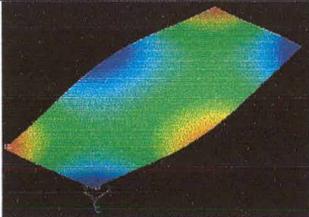
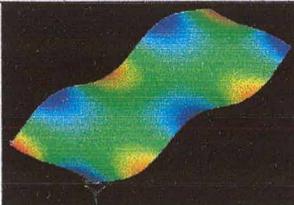
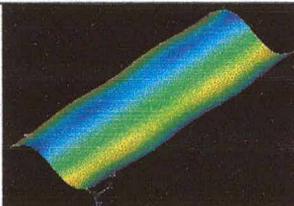
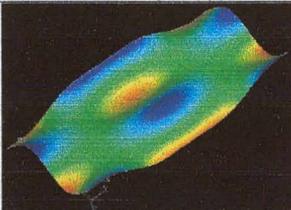
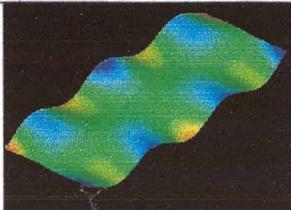
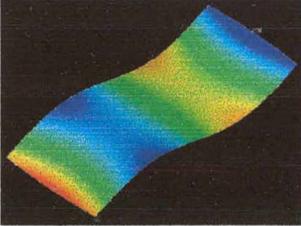
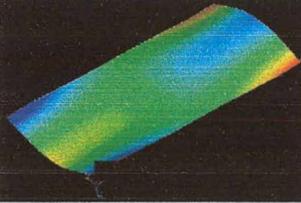
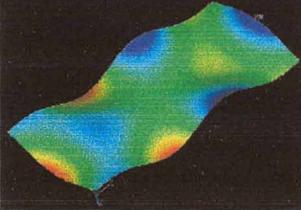
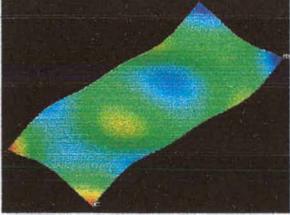
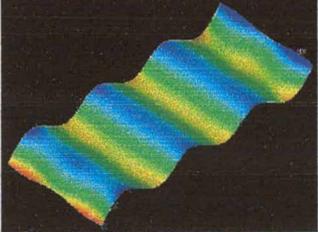
Número do modo	Autovalor [Hz] Método da Superposição	Autovalor [Hz] Método Elementos Finitos	Forma Modal
01	10,80	10,81	
02	29,80	29,80	
03	46,01	46,03	
04	55,21	55,23	
05	63,09	63,12	

Tabela 3.4 Modos anti-simétricos/simétricos de uma placa livre-livre

Número do modo	Autovalor [Hz] Método da Superposição	Autovalor [Hz] Método Elementos Finitos	Forma Modal
01	11,11	11,12	
02	19,44	19,44	
03	36,11	36,12	
04	37,88	37,89	
05	77,40	77,42	

A Figura 3.14 mostra curvas de mobilidade pontual de uma placa de alumínio, plana, sem reforço, com espessura de 2,0 mm, comprimento de 80,0 cm e 40,0 cm de largura, obtidas tanto pelo Método da Mobilidade quanto por Elementos Finitos. A força de excitação está localizada no ponto $x = 30$ cm e $y = 10$ cm, sendo a resposta medida no mesmo ponto.

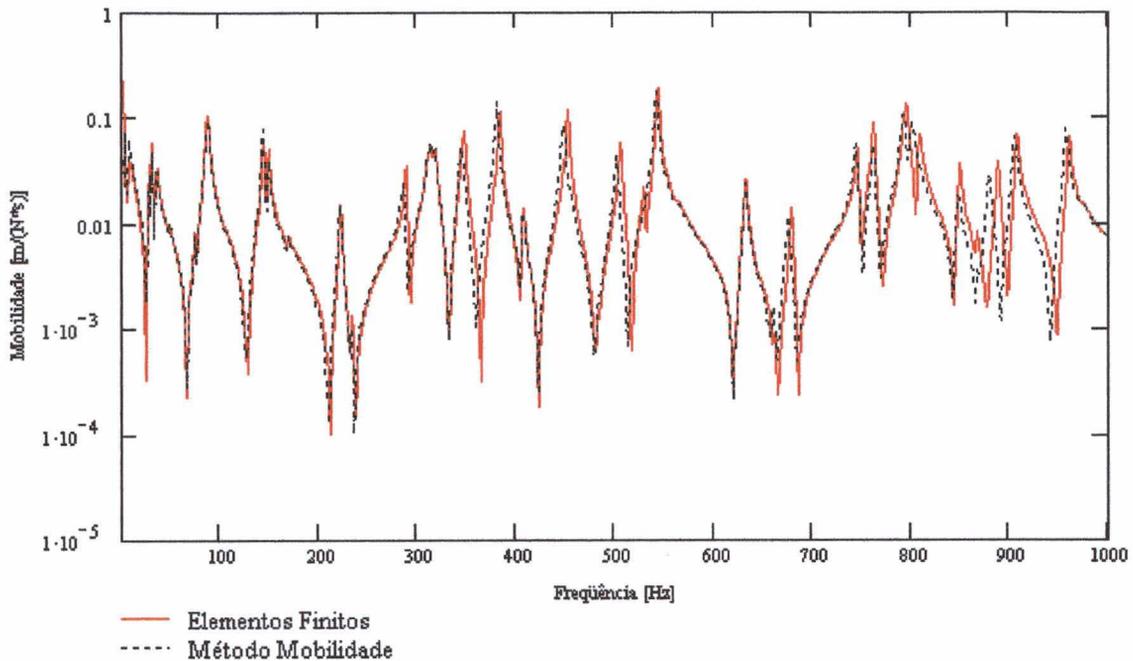


Figura 3.13 Mobilidade pontual de uma placa 0,8 m x 0,4 m com medições no ponto $x = 30$ cm e $y = 10$ cm Método da Mobilidade e Elementos Finitos.

As tabelas e figuras mostradas acima comprovam que o Método da Superposição, proposto para calcular respostas de placas livre-livre, através do Método da Mobilidade, fornece respostas precisas, podendo ser usado para análise de comportamento vibratório de placas completamente livres.

A programação de todas as equações deste trabalho foi realizada em linguagem Fortran, e a obtenção das equações foi feita no software de cálculo Mathematica 3.0. O algoritmo e o fluxograma do programa principal deste trabalho estão anexados no Apêndice III. A programação para o uso do Método de Elementos Finitos neste trabalho é apresentada no Capítulo IV.

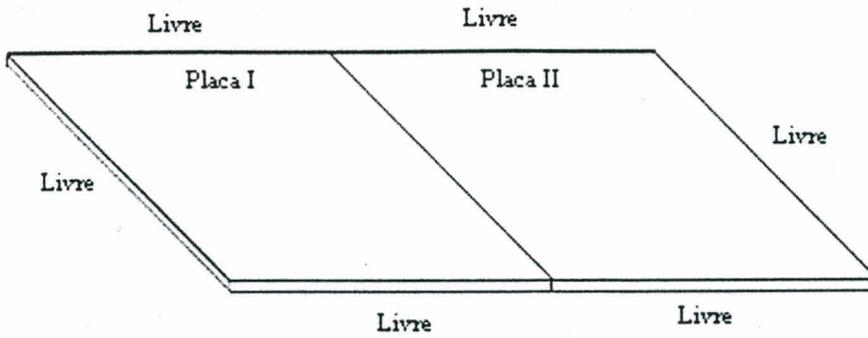


Figura 4.1 Sistema de duas placas acopladas através de uma linha

Tabela 4.1 Características do material utilizado nas análises

Material	Alumínio
Densidade	2660 Kg/m ³
Módulo de Elasticidade	7,1.10 ¹⁰ Pa
Coefficiente de Poisson	0,3
Amortecimento	0,01

As seguintes configurações de placas foram analisadas nas predições:

Tabela 4.2 Características da configuração I

Espessura da placa I	0,003 m
Espessura da placa II	0,003 m
Comprimento da placa I	1,0 m
Comprimento da placa II	1,0 m
Largura da placa I	1,0 m
Largura da placa II	1,0 m

Tabela 4.3 Características da configuração II

Espessura da placa I	0,002 m
Espessura da placa II	0,002 m
Comprimento da placa I	0,5 m
Comprimento da placa II	0,5 m
Largura da placa I	0,9 m
Largura da placa II	0,9 m

Tabela 4.4 Características da configuração III

Espessura da placa I	0,002 m
Espessura da placa II	0,002 m
Comprimento da placa I	0,4 m
Comprimento da placa II	0,4 m
Largura da placa I	0,4 m
Largura da placa II	0,4 m

4.2) Método de Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos é utilizado nesta parte do trabalho para a determinação da resposta em frequência, tipo mobilidade, tanto pontual quanto de transferência de uma placa plana, lisa e sem reforços.

Todas as análises foram realizadas até a frequência de 1000 Hz, utilizando-se o software de Elementos Finitos ANSYS, versão 5.3. As placas foram modeladas utilizando-se o elemento de placa SHELL 63 [47] da biblioteca do programa ANSYS, elemento este com quatro nós e seis graus de liberdade por nó, sendo três de translação e três de rotação. Para a configuração I, a dimensão do elemento utilizado é de 2 cm, garantindo, para essa configuração, mais de 8 elementos por meio comprimento de onda e para as configurações II e III, o elemento tem 1 cm, garantindo mais de 10 elementos por meio comprimento de onda. A força de excitação tem valor unitário.

A aplicação do MEF para a estrutura a ser analisada consiste em [39]:

- geração da malha utilizando-se elementos de placa;
- análise modal ou resolução do problema de autovalores não amortecido;
- análise harmônica, usando-se os autovalores e autovetores do problema anterior;
- pós-processamento dos resultados.

Para facilitar o cálculo da energia vibratória média de cada subsistema, foram usados elementos de placa retangulares, com dimensões constantes ao longo de toda a placa. Assim, obtém-se elementos de mesma massa, facilitando o cálculo da média espacial da resposta ao longo da superfície [39].

A discretização de frequência utilizada para o cálculo das respostas em todas as configurações é de 0,5 Hz na faixa de 0 a 1000 Hz, tendo em vista a grande quantidade de

modos. Todas as avaliações foram realizadas em um microcomputador Pentium III 1G Hz, com Winchester de 40 Gb e 512 Mb de memória RAM.

A Figura 4.2 mostra a malha usada para a configuração I, sendo que, na programação desta malha, usou-se a condição de contorno totalmente livre, ou seja, sem restrições. Sabe-se que as frequências naturais dos seis primeiros modos de vibração de uma placa retangular, totalmente livre em todas as bordas, devem ser iguais a zero, ou seja, correspondem à translação e rotação em relação aos três eixos de coordenadas [13]. Deve-se observar que a excitação consiste de uma força pontual localizada num ponto específico sobre a placa.

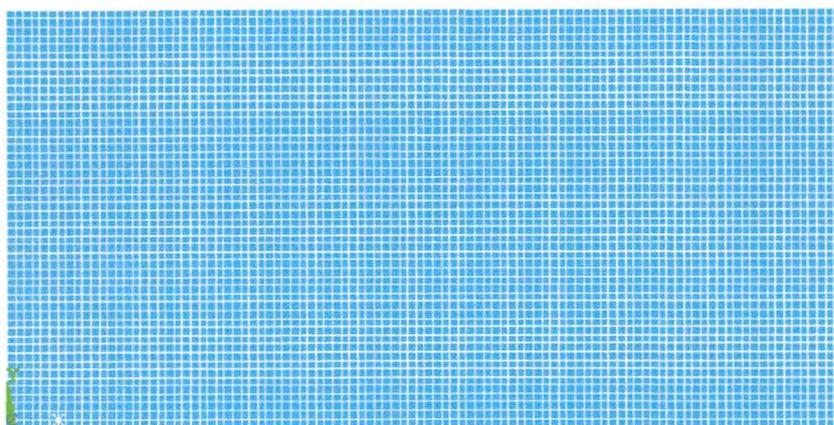


Figura 4.2 Malha da placa de 2m x 1m, com a condição de contorno livre nas quatro bordas.

A análise modal parte da resolução da equação diferencial

$$[Ma]\{\ddot{u}_d\} + [K]\{u_d\} = \{0\} \quad (4.1)$$

em que $[Ma]$ é a matriz de massa,
 $[K]$ é a matriz de rigidez;
 $\{u_d\}$ é o vetor de deslocamento;
 $\{\ddot{u}_d\}$ é o vetor de aceleração;
 $\{0\}$ é o vetor nulo.

São realizadas as hipóteses de que: a estrutura tem propriedades constantes (no tempo) de massa e rigidez (densidade e modo de elasticidade), não há amortecimento e não existem forças aplicadas, ou seja, trata-se, inicialmente, de vibrações livres.

Considerando-se o sistema linear, as vibrações livres podem ser expressas na forma:

$$\{u_d\} = \{\varphi\}_i \cos \omega_i t \quad (4.2)$$

sendo $\{\varphi\}_i$ o autovetor que representa o modo da i -ésima frequência natural;

ω_i é a i -ésima frequência natural

t é o tempo.

Assim, a Equação 4.1 pode ser escrita na forma,

$$(-\omega_i^2 [Ma] + [K])\{\varphi\}_i = \{0\} \quad (4.3)$$

e, como se deseja a solução não trivial, então o determinante

$$|[K] - \omega_i^2 [Ma]| = 0 \quad (4.4)$$

Este é um problema de autovalores que deve ser solucionado para n valores de ω^2 e n autovetores que satisfaçam às Equações (4.3) e (4.4).

Na análise modal, para a obtenção dos autovetores e autovalores do problema, utilizou-se o Método dos Blocos de Lanczos [47], que é utilizado em problemas grandes de autovalores simétricos, possuindo uma velocidade de processamento maior que o Método de Subespaço e com a mesma precisão nos resultados.

Para a análise harmônica, a equação é dada por

$$([K] - \omega^2 [Ma] + i\omega [C])\{u_{d1}\} + i\{u_{d2}\} = \{F_1\} + \{F_2\} \quad (4.5)$$

em que ω é a frequência angular;

$[C]$ a matriz de amortecimento;

$\{u_d\}$ o vetor deslocamento composto da parte real $\{u_{d1}\}$ e parte imaginária $\{u_{d2}\}$;

$\{F\}$ é o vetor força composto da parte real $\{F_1\}$ e imaginária $\{F_2\}$, respectivamente.

Dentre os métodos disponíveis, para a análise harmônica, o escolhido foi o Método da Superposição Modal, que usa os autovalores e autovetores para determinar a resposta a uma

excitação harmônica e possui uma velocidade de processamento bem maior que o Método “Full” e melhor precisão que o Método Reduzido.

4.3) Validação Experimental

A comprovação final de que o Método da Mobilidade, usado em placas livre-livre, é um método preciso para a análise de placas sob esta condição de contorno foi também obtida através de medições experimentais, nas configurações de placas anteriormente mencionadas. Para isso, foi montado um sistema de medições (Figura 4.3) utilizando-se os equipamentos mostrados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 Equipamentos utilizados na análise experimental

Analizador de Sinais – PULSE – Type 3560 B&K com PULSE LabShop Version 6.0 3.22 B&K
Amplificador de Potência Type 2706 B&K
Célula de Força Type 8200 B&K
Shaker Type 4810 B&K
Pré-amplificador Type 2626B&K
Acelerômetro Type 4397 B&K
Acelerômetro Type 4397 B&K
Acelerômetro Type 4393 B&K

Na montagem do sistema para a medição experimental, como as placas eram iguais, utilizou-se uma placa de alumínio inteira, com a mesma largura das placas I e II, mas com o dobro do comprimento, ou seja, utilizou-se o artifício de imaginar uma linha de união perfeita entre as placas constituintes do sistema a ser estudado. Outras formas possíveis de união entre as placas, tais como: parafusos, rebites, solda tipo ponto ou soldagem com deposição de material, foram descartadas, pois neste caso a união não é contínua e introduz grande amortecimento estrutural provocado pelo atrito relativo entre as duas partes unidas. A fim de aumentar o amortecimento da placa, foi introduzida em sua superfície, uma fita autocolante de

alumínio, com espessura e peso desprezáveis e após diversas medições, chegou-se à quantidade ideal de fita adesiva, em que as medições mostravam uma curva de coerência suficientemente razoável para a realização das comparações.

Toda a cadeia de medição foi calibrada através da comparação da curva de resposta obtida quando somente a célula de força está conectada ao excitador eletrodinâmico e o valor de massa dinâmica fornecida pela carta de calibração da célula de força. Todos os acelerômetros usados também foram calibrados antes de cada medição.

A Figura 4.4 mostra o esquema de fixação da célula de força ao excitador e à placa.

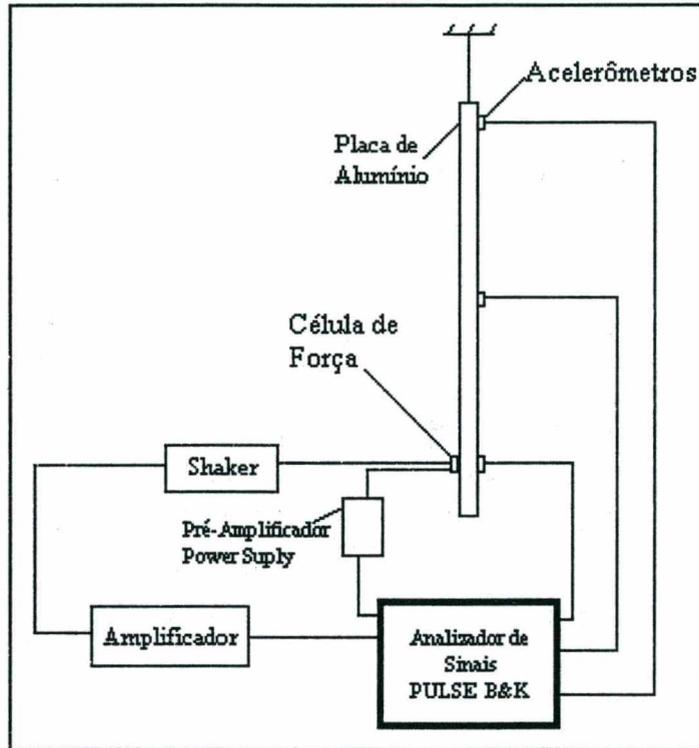


Figura 4.3 Diagrama do sistema de medições usado para obtenção de Função de Resposta em Frequência – Mobilidade em Placas Livre-Livre.

Utilizou-se, para a conexão entre o excitador eletrodinâmico (Shaker) e a célula de força, um arame fino de aço para garantir que a força fosse aplicada somente em uma direção e para assegurar a integridade física do transdutor, atuando como um fusível mecânico.

As Figuras 4.5 a 4.9 mostram a montagem das placas com os equipamentos usados na medição. As fotografias das placas utilizadas nesta análise estão mostradas nas Figuras 4.10 a 4.12.

Inicialmente, as placas foram suspensas através de dois fios finos, resistentes, e de massa desprezável, presos em dois cantos da placa e fixados no teto através de grampos especiais. Posteriormente, também foram feitas medições nas quais a placa foi suspensa através de um único fio preso num canto da placa. Nos modelos numérico e analítico, não

foram considerados esses fios, ou seja, as placas constituintes do sistema não apresentavam nenhuma restrição como o realizado no modelo experimental. O Shaker foi suspenso somente por um fio, montado num cavalete, paralelo a placa, e preso no mesmo ficava a célula de força, colada na placa através de cola tipo superbonder. Os acelerômetros foram fixados na placa através de cera de abelha. Usou-se três acelerômetros em cada medição e tomaram-se as respostas em no mínimo 15 pontos em cada placa. Os sinais foram filtrados pela janela Hanning e as medições se deram na faixa de frequência entre 0 e 1600 Hz.

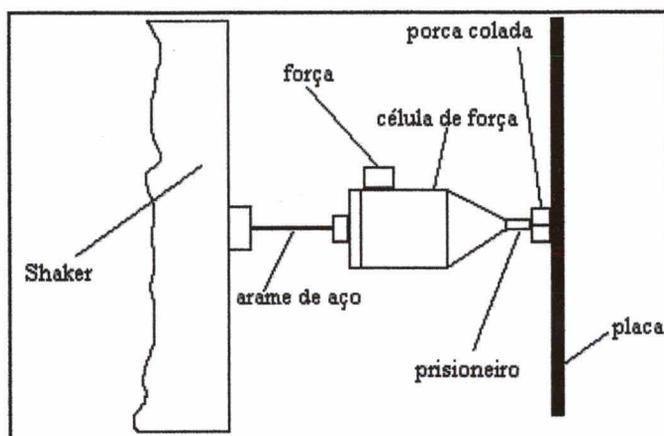


Figura 4.4 Diagrama da montagem do shaker e da célula de força à placa.

O sinal de força em forma de ruído branco (sinal com densidade de energia constante com a frequência), na faixa de 0 até 1600 Hz, era gerado pelo próprio analisador de sinais. Tomou-se uma média de 500 amostras dos sinais, para cada ponto medido.



Figura 4.5 Fotografia dos equipamentos usados na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Frequência – Mobilidade em Placas Livre-Livre.

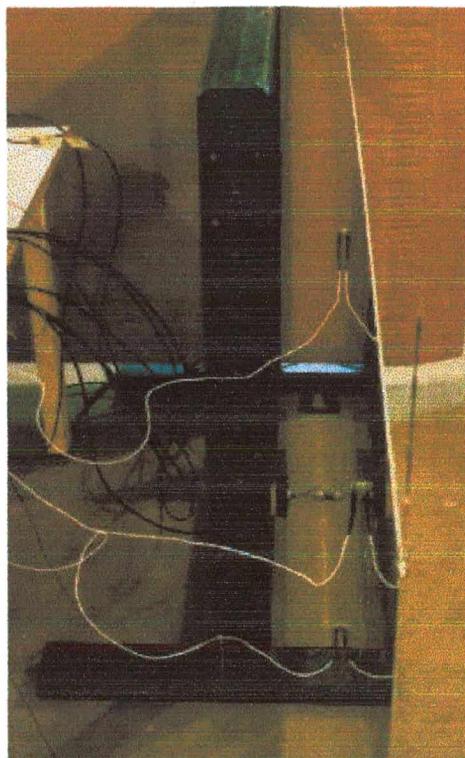


Figura 4.6 Fotografia da posição da placa suspensa por fios usada na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Frequência – Mobilidade em Placas Livre-Livre.

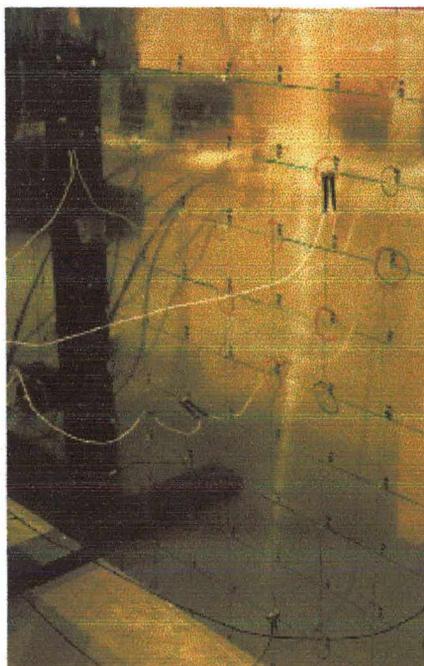


Figura 4.7 Fotografia de acelerômetros colados na placa sendo usados na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Frequência – Mobilidade em Placas Livre-Livre.

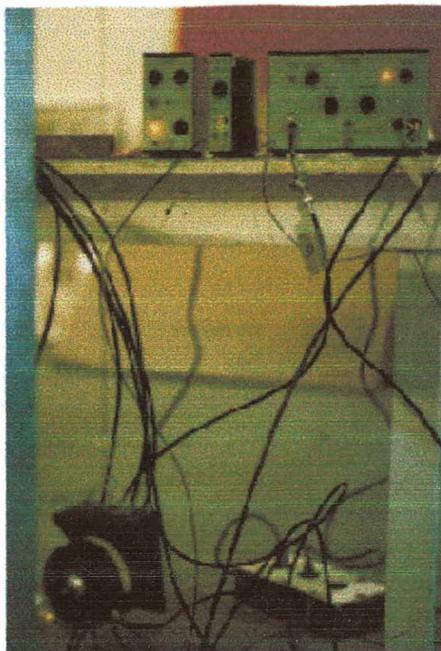


Figura 4.8 Fotografia de equipamentos usados na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Frequência – Mobilidade em Placas Livre-Livre.

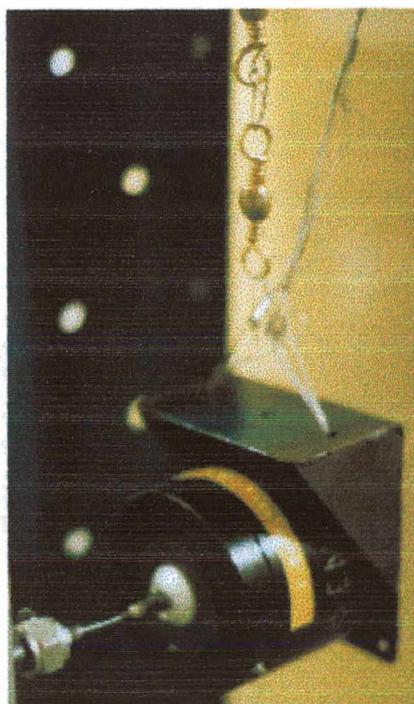


Figura 4.9 Fotografia do Shaker e célula de força usados na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Frequência – Mobilidade em Placas Livre-Livre.

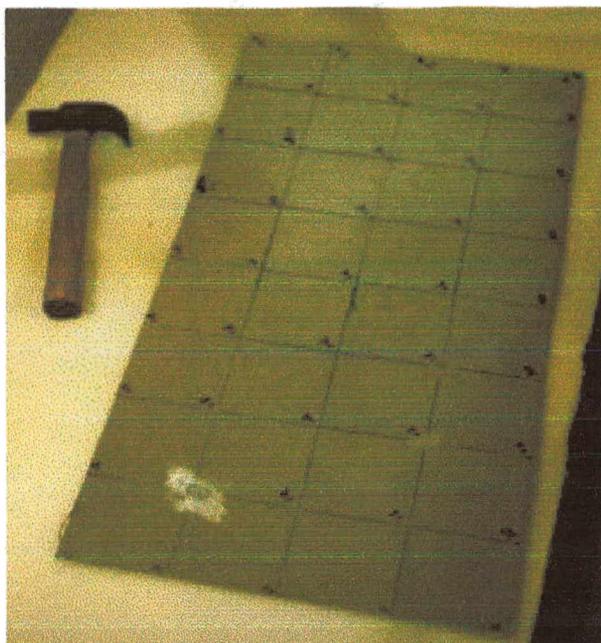


Figura 4.10 Fotografia da Placa de Alumínio 0,8 m x 0,4 m usada na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Frequência – Mobilidade em Placas Livre-Livre.

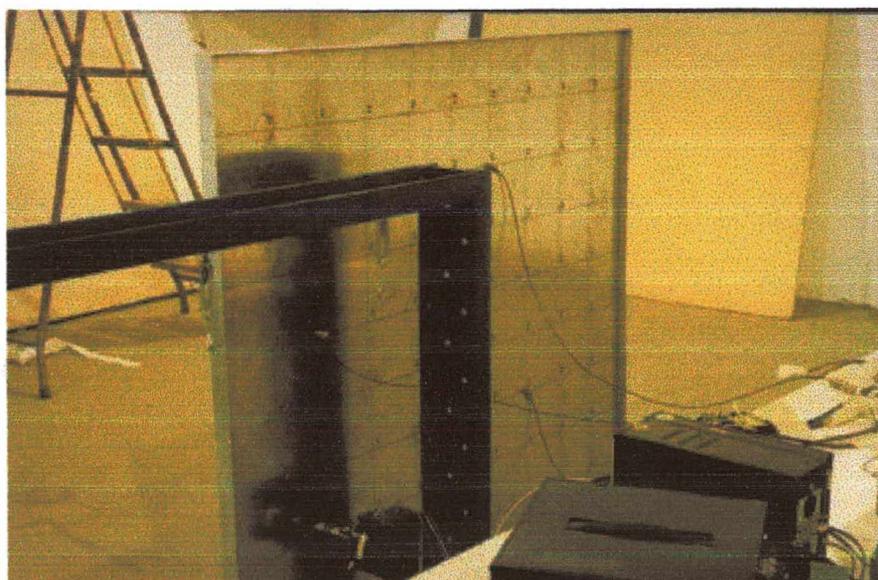


Figura 4.11 Fotografia da Placa de Alumínio 1,0 m x 0,9 m usada na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Frequência – Mobilidade em Placas Livre-Livre.

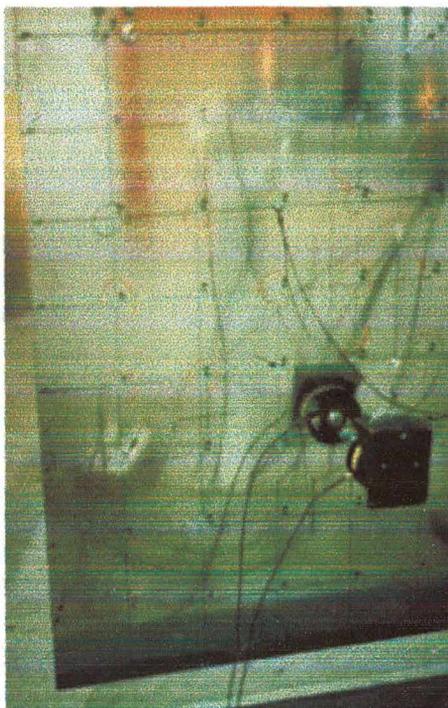


Figura 4.12 Fotografia da Placa de Alumínio 2,0 m x 1,0 m usada na análise experimental para obtenção de Função de Resposta em Freqüência – Mobilidade em Placas Livre-Livre.

4.4) Análise de Duas Placas Acopladas

Seja, para uma análise inicial, um sistema composto de duas placas acopladas, conforme mostrado na Figura 4.13, totalmente livres nas bordas, com uma força de excitação harmônica pontual atuando em uma delas.

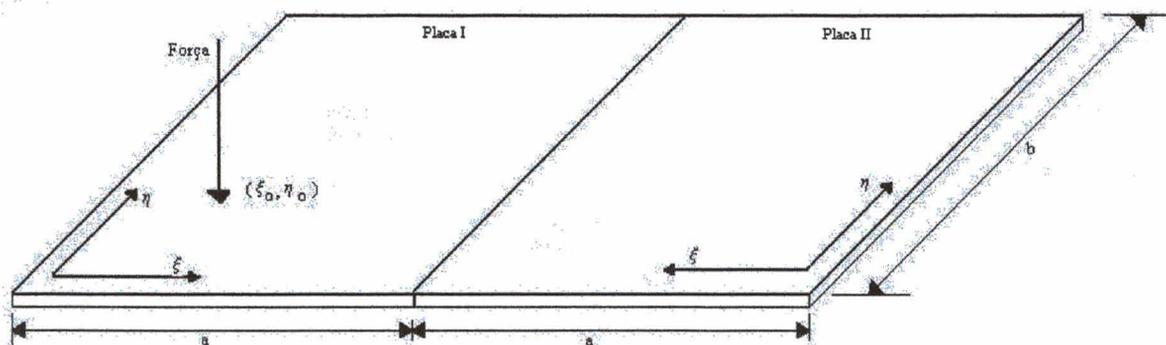


Figura 4.13 Sistema com duas placas acopladas.

O interesse é estudar a transmissão de energia que se dá pelos esforços de flexão: momento fletor e força cortante.

O Método da Mobilidade é utilizado, aplicando-se uma discretização ao longo da união, e com isso, consegue-se obter resultados para os esforços na linha de união e, conseqüentemente, da potência transmitida em cada intervalo discretizado. Algumas hipóteses devem ser consideradas para esta análise:

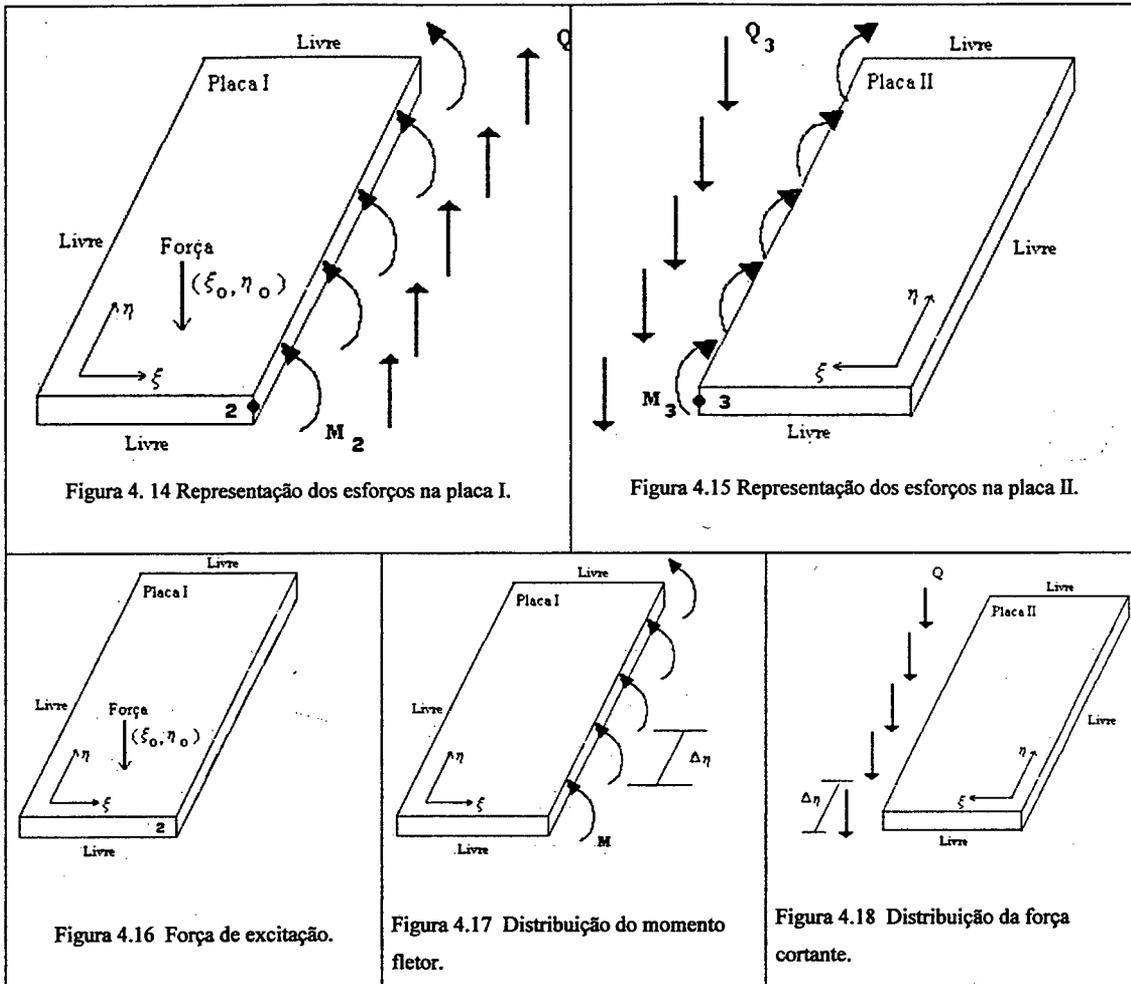
- a) As placas são consideradas finas comparando-se o comprimento de onda gerado pela maior frequência de análise (1000 Hz).
- b) O sistema é linear.
- c) A distribuição do momento na união entre as placas é expresso de forma discretizada, sendo M_i o momento que atua no i -ésimo intervalo, sendo considerados NI intervalos.
- d) A distribuição da força cortante na união entre as placas é expresso de forma discretizada, sendo Q_i a força que atua no i -ésimo intervalo, sendo considerados NI intervalos.
- e) Cada intervalo $\Delta\xi$, da discretização, é considerado constante.

Para a realização desta análise, o sistema é composto de duas placas com as seguintes propriedades e características geométricas (Tabela 4.6):

Tabela 4.6 – Características das Placas Analisadas

<i>Material Alumínio</i>	$\rho = 2660 \text{ kg/m}^3$
$\eta = 0.01$	$\nu = 0.3$
$E = 7,1.10^{10} \text{ N/m}^2$	

Para uma melhor visualização, a estrutura é dividida em subestruturas, como mostradas nas Figuras 4.14 a 4.18. Em cada subestrutura são considerados separadamente os efeitos da força pontual de excitação, do momento fletor e da força cortante para, em seguida, ser feita a superposição dos efeitos desses esforços.



Com isso, o deslocamento da placa I pode ser obtido da superposição dos três esforços mostrados nas Figuras 4.16, 4.17 e 4.18, enquanto que para a placa II pode-se obter o deslocamento através dos esforços mostrados nas Figuras 4.17 e 4.18.

4.4.1) Cálculo dos Deslocamentos Causados pela Força Externa

Considera-se uma placa com condições de contorno livre em todas as bordas e com a presença de uma força de excitação harmônica pontual (Figura 4.16), em que o deslocamento pode ser obtido através da Equação 3.74, já anteriormente calculado.

4.4.2) Cálculo dos Deslocamentos Causados pelo Momento Fletor

Considera-se também uma placa com condições de contorno livre em todas as bordas, submetida a um esforço tipo momento fletor em um de seus contornos. A resposta desse subsistema pode ser obtida através dos blocos da Figura 4.19.

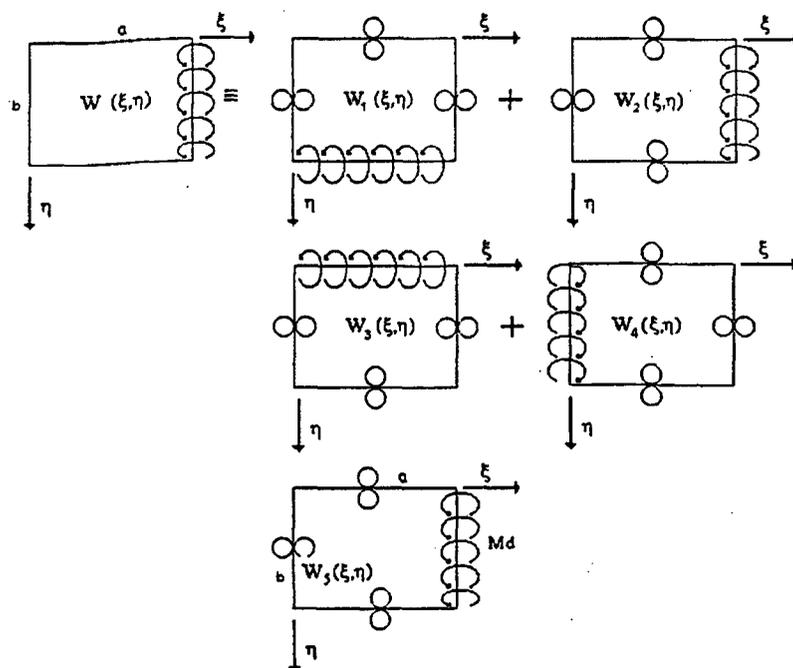


Figura 4.19 Representação esquemática de blocos utilizados para a análise de vibrações forçadas em uma placa completamente livre sob um momento em uma borda.

Pode-se notar que todos os cinco blocos são idênticos aos já mostrados no Capítulo III e, portanto, o procedimento é feito de maneira similar através do Método da Superposição Completo. Utilizando k termos nas soluções para cada um dos quatro primeiros blocos, obtém-se um conjunto de $3k$ equações algébricas relacionando os $4k$ coeficientes de Fourier e o coeficiente do momento prescrito no último bloco. Portanto, para os quatro primeiros blocos, para se encontrar as respostas, basta manipular algebricamente as soluções que são encontradas nas Equações 3.45, 3.46, 3.47 e 3.48, respectivamente. Finalmente, faz-se uma expansão para a contribuição do momento fletor atuando ao longo da borda $\xi = 1$, que é o quinto e último bloco. Entretanto, ao invés de se fazer o momento líquido igual a zero, deseja-se que a resultante seja exatamente a amplitude do momento de excitação M_d . Isto dá lugar à k equações adicionais não homogêneas que relacionam os coeficientes de Fourier e o coeficiente de Fourier do momento fletor M_d atuante na borda.

4.4.3) Cálculo dos Deslocamentos Causados pelo Esforço Cortante

Considera-se novamente uma placa com condições de contorno livre em todas as bordas, submetida, desta vez, a um esforço tipo força cortante em uma de suas bordas. A resposta desse subsistema pode ser obtida através dos blocos da Figura 4.20.

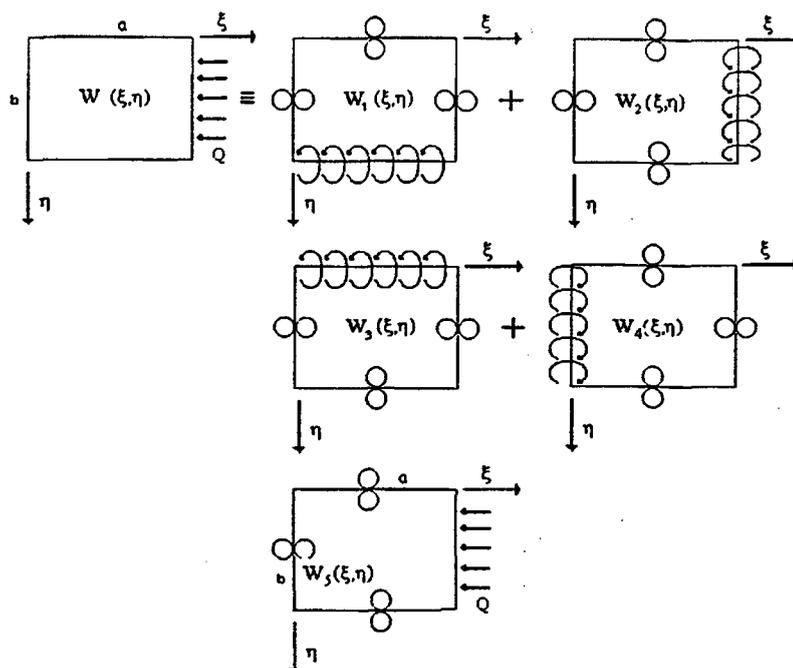


Figura 4.20 Representação esquemática de blocos utilizados para a análise de vibrações forçadas em uma placa completamente livre sob uma força cortante em uma borda.

Novamente nota-se que os quatro primeiros blocos são idênticos aos apresentados no Capítulo III com a diferença que sobre o quinto e último bloco, atua uma força distribuída. O procedimento é similar ao já realizado no item anterior. Utilizando k termos nas soluções para cada um dos quatro primeiros blocos, obtém-se um conjunto de $3k$ equações algébricas relacionando os $4k$ coeficientes de Fourier e o coeficiente da força distribuída prescrita no último bloco. Portanto, para os quatro primeiros blocos, para se encontrar as respostas, são operados algebricamente as soluções que são encontradas nas Equações 3.45, 3.46, 3.47 e 3.48, respectivamente. Finalmente, faz-se uma expansão para a contribuição da força cortante Q atuando ao longo da borda $\xi = 1$, que é o quinto e último bloco. Neste caso, a posição das variáveis u e v , como mostrado na Figura 3.12, coincide exatamente com as coordenadas da borda a qual a força cortante está atuando, sendo que agora não somente uma força pontual está atuando, mas a força está distribuída ao longo da borda, fazendo com que cada ponto apresente coordenadas u e v distintas, associadas à posição da força cortante distribuída.

4.5) Cálculo das Mobilidades

Funções resposta em frequência representam relações entre a resposta e a excitação, ambas no domínio da frequência, para um sistema qualquer. Estas funções caracterizam um

sistema vibratório, tornando possível a previsão de sua resposta quando submetido a uma excitação com um espectro genérico de frequências.

As funções de resposta em frequência deste trabalho são do tipo mobilidade. Entretanto, outras funções resposta em frequência podem ser usadas, tais como a receptância e a inertância, dadas pelas Equações 4.6 e 4.7, respectivamente.

$$\alpha_{rec} = \frac{W}{P} \quad (4.6)$$

$$A_{ine} = \frac{a_{ace}}{P} \quad (4.7)$$

em que α_{rec} é a receptância;

A_{ine} é a inertância;

W é o deslocamento;

a_{ace} é a aceleração;

P é a força.

A relação entre as funções resposta em frequência mostradas acima é:

$$Y = j\omega \alpha_{ace} \quad (4.8)$$

$$Y = \frac{A_{ine}}{j\omega} \quad (4.9)$$

Neste trabalho, as funções resposta em frequência, na forma de mobilidade, podem ser determinadas a partir dos deslocamentos das placas, obtidas no Item 3.3. Após a obtenção dos deslocamentos, as velocidades ao longo de toda a placa podem ser calculadas e, então, as funções de mobilidade podem ser determinadas.

Contudo, as mobilidades envolvidas nesta análise não são somente mobilidades pontuais, mas também mobilidades de transferência, pois envolvem excitação em um ponto e resposta em outros, ao longo da linha de união, fazendo-se necessário expressar a função mobilidade de maneira discreta, já que a linha de união está sendo representada por NI segmentos. A discretização realizada consiste em dividir a linha de união em intervalos constantes de forma que seja possível aplicar o Método da Mobilidade para cada intervalo. Disto, posteriormente, resulta um sistema de equações que possibilita determinar os esforços (momento fletor e força cortante) que atuam em cada intervalo, sendo que o número de

segmentos da discretização deve ser suficiente para descrever a distribuição dos esforços na união em toda a faixa de frequência de interesse.

Os números mostrados nos índices de cada mobilidade se referem aos pontos de excitação e resposta, correspondentes a cada mobilidade. A mobilidade Y_{11} , por exemplo, indica que a resposta foi obtida no ponto 1, correspondente ao mesmo ponto da excitação, caracterizando assim, uma mobilidade pontual; A mobilidade Y_{12} é de transferência, pois a resposta em forma de velocidade na linha de união (ponto 2) não foi obtida no mesmo ponto de excitação (ponto 1). A mobilidade Y_{22} , que é uma mobilidade pontual, envolve o esforço atuando na linha de união (ponto 2) e a velocidade no mesmo ponto.

Pode-se determinar a expressão da mobilidade Y_{12} a partir do deslocamento calculado no Capítulo III, considerando uma excitação conhecida $P(\xi_0, \eta_0)$ harmônica e de valor unitário (módulo).

$$Y_{12}^{F\theta}(\xi) = \frac{\dot{\theta}_2(\xi, \eta)}{P(\xi_0, \eta_0)} \quad (4.10)$$

Esta mobilidade (Equação 4.10) relaciona a velocidade angular na linha de união provocada pela excitação da força atuando na placa I.

$$Y_{12}^{Fv_2}(\xi) = \frac{\dot{W}_2(\xi, \eta)}{P(\xi_0, \eta_0)} \quad (4.11)$$

Esta mobilidade (Equação 4.11) relaciona a velocidade transversal na linha de união provocada pela excitação da força atuando na placa I.

As mobilidades $Y_{22}^{M\theta}$ e $Y_{22}^{Mv_2}$ são determinadas pelas respostas (velocidade angular e transversal) no ponto 2 e pelo momento que atua no mesmo ponto, na linha de união, assim

$$Y_{22}^{M\theta}(\xi) = \frac{\dot{\theta}_2(\xi_j)}{M_2(\xi_i)} \quad (4.12)$$

$$Y_{22}^{Mv_2}(\xi) = \frac{\dot{W}_2(\xi_j)}{M_2(\xi_i)} \quad (4.13)$$

As mobilidades $Y_{22}^{Q\theta}$ e $Y_{22}^{Qv_2}$ são determinadas pelas respostas (velocidade angular e transversal) no ponto 2 e pela força cortante que atua no mesmo ponto, na linha de união, ou seja,

$$Y_{22}^{Q_\theta}(\xi) = \frac{\dot{\theta}_2(\xi_j)}{Q(\xi_i)} \quad (4.14)$$

$$Y_{22}^{Q_{v_2}}(\xi) = \frac{\dot{W}_2(\xi_j)}{Q(\xi_i)} \quad (4.15)$$

Os esforços que atuam em cada intervalo da linha de união provocam velocidades em todos os outros intervalos, fazendo com que as mobilidades possam ser representadas pela matriz que contém informações da dinâmica do sistema.

4.6) Cálculo dos esforços

A resposta completa é obtida através da superposição dos efeitos de cada esforço. Parte-se do princípio de que na linha de união, que é uma linha comum às duas placas, as velocidades (angulares e transversais) são iguais, obedecendo à continuidade dos deslocamentos na união. Considera-se, também, que a resultante dos esforços, na mesma linha, são nulos, caracterizando a reciprocidade dos esforços no acoplamento. No caso de placas idênticas, tem-se que $Y_{22} = Y_{33}$, qualquer que seja o esforço. A Figura 4.21 mostra a disposição dos esforços na linha de união.

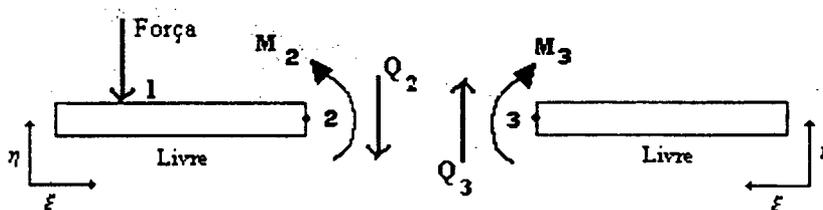


Figura 4.21 Esforços atuantes na união.

Pode-se, então, desenvolver as seguintes relações:

a) Continuidade das velocidades angulares e transversais.

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 \quad (4.16)$$

$$\dot{v}_2 = \dot{v}_3 \quad (4.17)$$

de onde se obtém as seguintes equações:

$$I) \quad \text{para } \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3; \quad Y_{12}^{F_\theta} P + Y_{22}^{M_\theta} M_2 + Y_{22}^{Q_\theta} Q_2 = Y_{33}^{M_\theta} M_3 + Y_{33}^{Q_\theta} Q_3 \quad (4.18)$$

$$II) \quad \text{para } \dot{v}_2 = \dot{v}_3; \quad Y_{12}^{F_{v_2}} P + Y_{22}^{M_{v_2}} M_2 + Y_{22}^{Q_{v_2}} Q_2 = Y_{33}^{M_{v_2}} M_3 + Y_{33}^{Q_{v_2}} Q_3 \quad (4.19)$$

b) Do equilíbrio de esforços.

$$\text{III)} \quad M_2 - M_3 = 0 \quad (4.20)$$

$$\text{IV)} \quad Q_2 - Q_3 = 0 \quad (4.21)$$

em que $Y_{12}^{F\theta}$ é a mobilidade de transferência entre o ponto 1, no qual é aplicado um força unitária, e o ponto 2, levando-se em consideração a velocidade angular;

$Y_{12}^{Fv_2}$ é a mobilidade de transferência entre o ponto 1 no qual é aplicado um força unitária, e o ponto 2, levando-se em consideração a velocidade transversal;

$Y_{22}^{M\theta}$ é a mobilidade pontual no ponto 2, levando-se em consideração o momento atuando no contorno da união da placa I, e a velocidade angular;

$Y_{22}^{Q\theta}$ é a mobilidade pontual no ponto 2 levando-se em consideração a força cortante atuando no contorno da união da placa I, e a velocidade angular;

$Y_{33}^{M\theta}$ é a mobilidade pontual no ponto 3 levando-se em consideração o momento atuando no contorno da união da placa II, e a velocidade angular;

$Y_{33}^{Q\theta}$ é a mobilidade pontual no ponto 3 levando-se em consideração a força cortante atuando no contorno da união da placa II, e a velocidade angular;

$Y_{22}^{Mv_2}$ é a mobilidade pontual no ponto 2 levando-se em consideração o momento atuando no contorno da união da placa I, e a velocidade transversal;

$Y_{23}^{Qv_2}$ é a mobilidade pontual no ponto 2 levando-se em consideração a força cortante atuando no contorno da união da placa I, e a velocidade transversal;

$Y_{33}^{Mv_3}$ é a mobilidade pontual no ponto 3 levando-se em consideração o momento atuando no contorno da união da placa II, e a velocidade transversal;

$Y_{33}^{Qv_3}$ é a mobilidade pontual no ponto 3 levando-se em consideração a força cortante atuando no contorno da união da placa II, e a velocidade transversal;

Assim, pode-se constituir um sistema de equações para a determinação dos esforços

$M_2, M_3, Q_2, e Q_3$

$$Y_{12}^{F\theta} P + Y_{22}^{M\theta} M_2 + Y_{22}^{Q\theta} Q_2 - Y_{33}^{M\theta} M_3 - Y_{33}^{Q\theta} Q_3 = 0 \quad (4.20)$$

$$Y_{12}^{Fv_2} P + Y_{22}^{Mv_2} M_2 + Y_{22}^{Qv_2} Q_2 - Y_{33}^{Mv_3} M_3 - Y_{33}^{Qv_3} Q_3 = 0 \quad (4.21)$$

$$M_2 - M_3 = 0 \quad (4.22)$$

$$Q_2 - Q_3 = 0 \quad (4.23)$$

e, considerando uma força de excitação P aplicada na placa, pode-se escrever este sistema de equações em forma matricial

$$\begin{bmatrix} Y_{22}^{M_\theta} & Y_{22}^{Q_\theta} & -Y_{33}^{M_\theta} & -Y_{33}^{Q_\theta} \\ Y_{22}^{M_{v2}} & Y_{22}^{Q_{v2}} & -Y_{33}^{M_{v3}} & -Y_{33}^{Q_{v3}} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ Q_2 \\ M_3 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{12}^{F_\theta} P \\ -Y_{12}^{F_{v2}} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

de onde os esforços são simultaneamente calculados. Observa-se que este sistema deve ser resolvido para cada frequência de excitação.

Deve-se frisar que, cada elemento da matriz de coeficientes deste sistema é constituído de uma matriz, por exemplo: $Y_{33}^{M_\theta} = [Y_{22}^{M_\theta}]_{NI \times NI}$ ou $Y_{33}^{M_\theta} = [Y_{33}^{M_\theta}]_{NI \times NI}$.

Da mesma forma, os vetores deste sistema que constituem as incógnitas possuem a ordem determinada também pelo número de discretizações, por exemplo $M_2 = \{M_2\}_{NI}$ ou $M_3 = \{M_3\}_{NI}$, sabendo-se que cada componente destes vetores representa o esforço que atua em cada intervalo discretizado. Portanto, este sistema pode ser resolvido para NI discretizações na linha de união, gerando um sistema de equações de ordem $2NI$. Assim, $2NI$ incógnitas devem ser calculadas. Quanto maior o número de discretizações, maior obviamente será a precisão na estimativa dos esforços e no cálculo da potência transferida. Para o cálculo do espectro de potência transferida, é necessário que este sistema consiga descrever a distribuição dos esforços na união para cada frequência, tornando-se necessário resolvê-lo para cada frequência na faixa de interesse.

Neste trabalho, utilizaram-se 25 discretizações na união, ou seja, ao longo da união foram obtidos 25 valores de cada esforço para o sistema da Equação 4.24. Este número é considerado suficiente para descrever a resposta dos acoplamentos constantes desta análise, em toda a faixa de frequência, baseado no recomendado pelo manual do software de Elementos Finitos Ansys, que indica o uso mínimo de seis (06) discretizações por meio comprimento de onda e, neste trabalho, 25 discretizações atende a esta recomendação.

4.7) Cálculo das Potências

Considerando que a forma do acoplamento das duas placas seja numa linha comum e que a força de excitação se dê em um ponto, numa das placas em questão, as expressões para as potências de entrada e transmitida podem ser computadas através de:

$$W_{in}(f) = \frac{1}{2} \text{Re}[P(f) \dot{W}(\xi_0, \eta_0, f)] \quad (4.19)$$

em que $P(f)$ é o espectro de potência da força de excitação;

$$e \quad W_{trans}(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NI} \text{Re}[M(\xi_i, f) \dot{\theta}(\xi_i, f) + Q(\xi_i, f) \dot{W}(\xi_i, f)] \quad (4.20)$$

A energia vibratória é dada pela seguinte expressão

$$E_{vib\ i,j} = \frac{1}{\omega} \eta_a^{-1} P_{i,j} \quad (4.21)$$

em que η_a é o fator de perda.

Está sendo considerado que toda a potência transferida à placa através da força externa é dissipada pelo amortecimento estrutural.

Os resultados comparativos de potência de entrada e transmitida estão mostrados mais adiante neste capítulo, nas Figuras 4.73 a 4.75.

4.8) Resultados de Mobilidades

Primeiramente serão mostrados os resultados de resposta em frequência tipo mobilidade pontual e de transferência, de alguns pontos nas placas constantes das configurações I, II e III.

4.8.1) Mobilidade Pontual – Configuração I

As Figuras 4.22 a 4.26 mostram a mobilidade pontual, num sistema constituído de duas placas iguais, acopladas através de uma linha comum, com dimensões 1,0 m x 1,0 m e espessura de 3 mm, cada uma, perfazendo um comprimento total de 2,0 m. O sistema foi excitado por uma força unitária, localizada no ponto $x = 30$ cm e $y = 50$ cm e a resposta sendo medida no mesmo ponto. Para uma melhor visualização, os resultados são mostrados em faixas de frequência diferentes e complementares. A Figura 4.26 mostra a mesma curva de 0 a 1000 Hz.

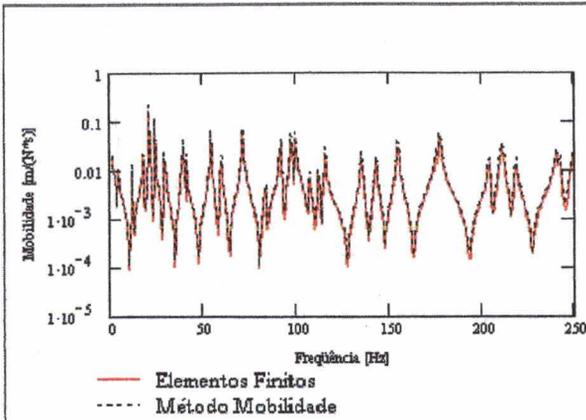


Figura 4.22 Mobilidade pontual numérica e analítica – placa 2,0 m x 1,0 m – faixa de frequência 0 a 250 Hz.

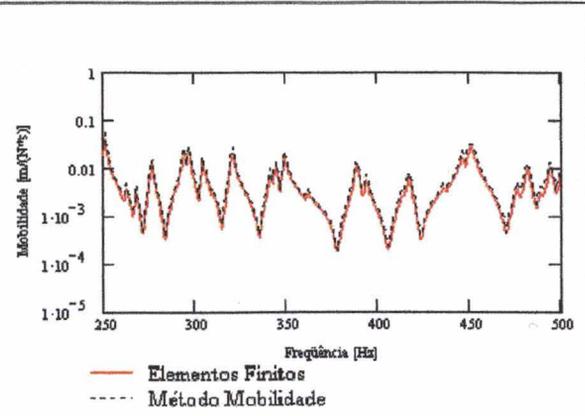


Figura 4.23 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 2,0 m x 1,0 m – faixa de frequência 250 a 500 Hz.

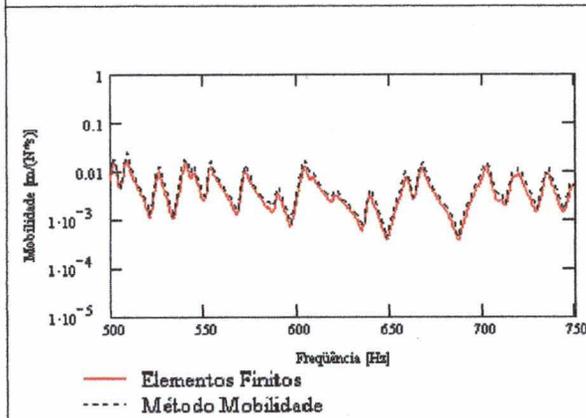


Figura 4.24 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 2,0 m x 1,0 m – faixa de frequência 500 a 750 Hz.

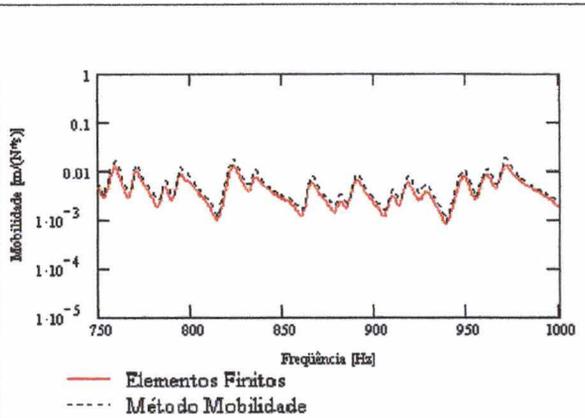


Figura 4.25 Mobilidade pontual numérica e analítica – placa 2,0 m x 1,0 m – faixa de frequência 750 a 1000 Hz.

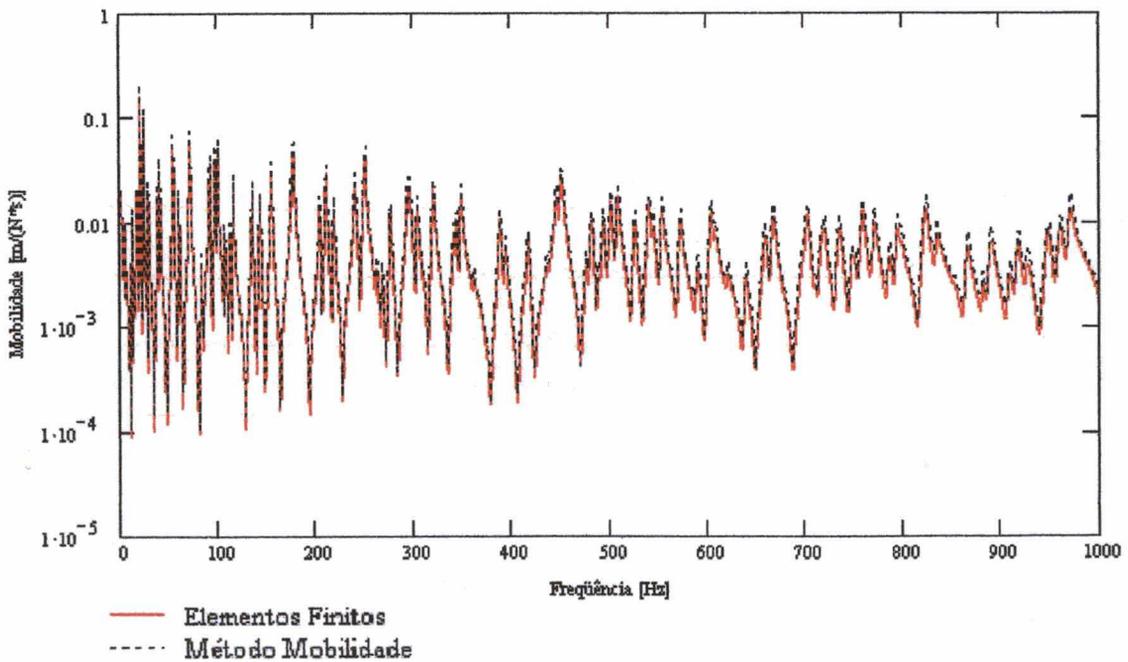


Figura 4.26 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 2,0 m x 1,0 m – 0 a 1000 Hz

Pode-se notar que, as curvas obtidas pelo Método da Mobilidade coincidem exatamente com as obtidas pelo Método de Elementos Finitos, mostrando que a precisão do método é excelente.

As Figuras 4.27 a 4.31 mostram a mesma mobilidade pontual, porém, acrescentada da resposta medida experimentalmente, em que a força de excitação foi do tipo ruído branco.

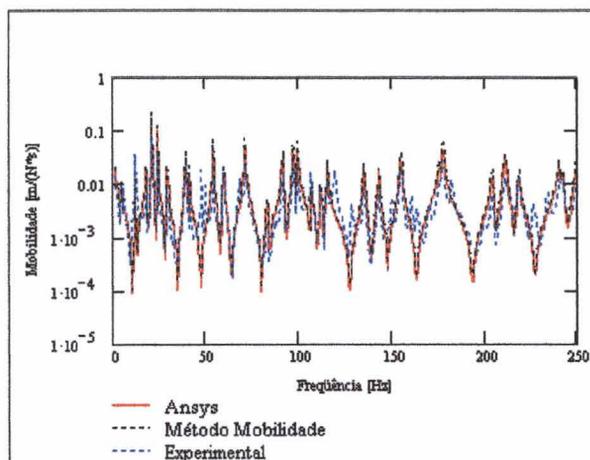


Figura 4.27 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m, 0 a 250 Hz.

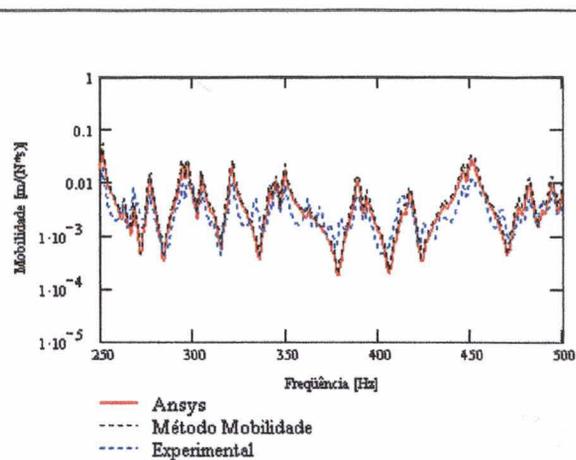


Figura 4.28 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m, 250 a 500Hz.

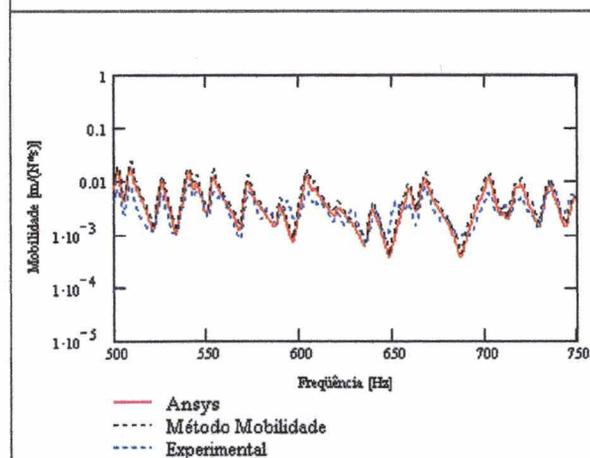


Figura 4.29 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m, 500 a 750Hz.

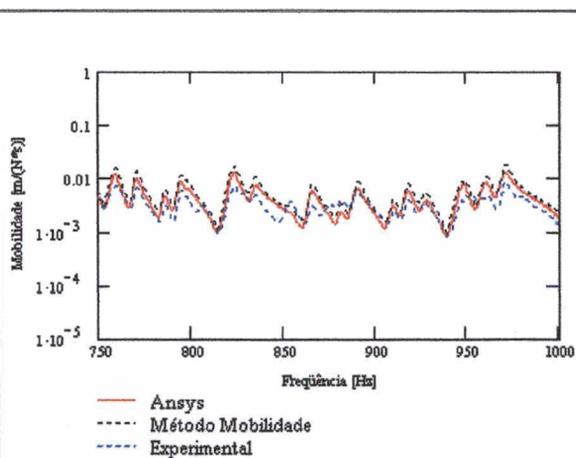


Figura 4.30 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m, 750 a 1000 Hz

Observa-se uma pequena diferença entre as curvas obtidas pelos métodos da mobilidade e elementos finitos e a obtida experimentalmente. Esta pequena diferença pode ser explicada, levando-se em conta as dificuldades de se obter uma simulação experimental de uma placa totalmente livre nas bordas.

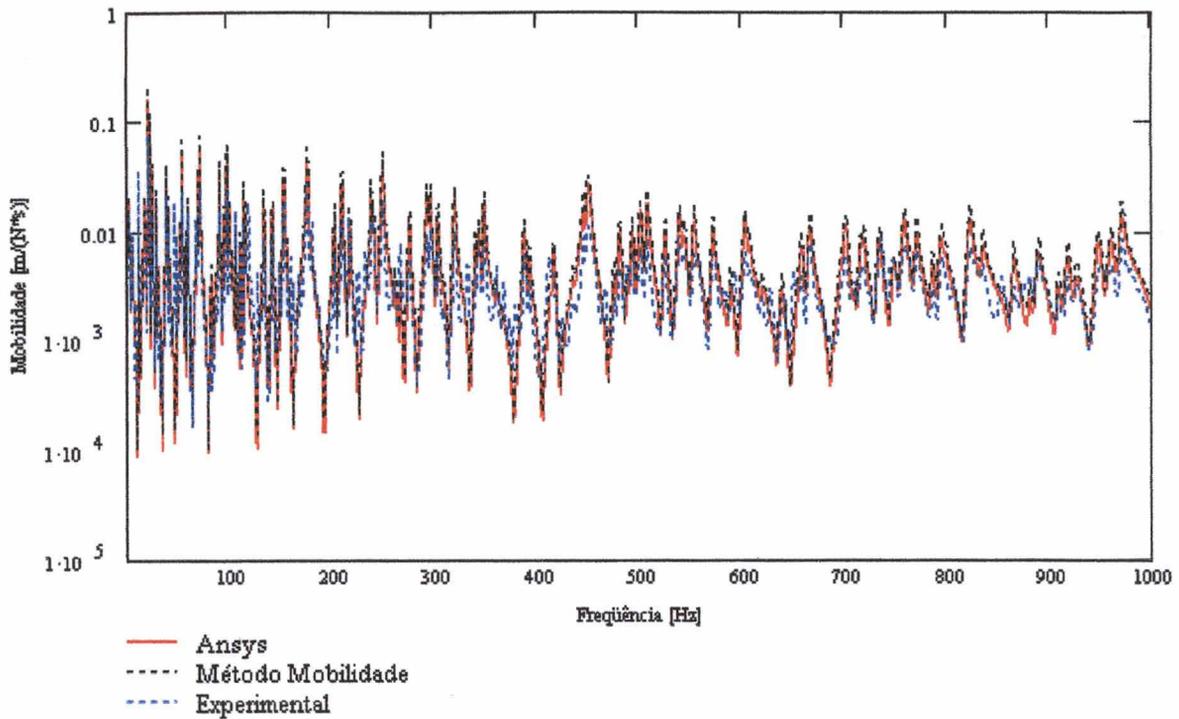


Figura 4.31 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental - placa 2,0 m x 1,0 m – 0 a 1000 Hz.

4.8.2) Mobilidade de Transferência – Configuração I

As Figuras 4.32 a 4.36 mostram a mobilidade de transferência, num sistema constituído de duas placas iguais acopladas, com dimensões 1,0 m x 1,0 m e espessura de 3 mm. A força foi aplicada no ponto $x = 30$ cm e $y = 50$ cm e a resposta sendo medida após a metade da placa, no ponto $x = 170$ cm e $y = 30$ cm. A Figura 4.36 mostra a mesma curva de 0 a 1000 Hz.

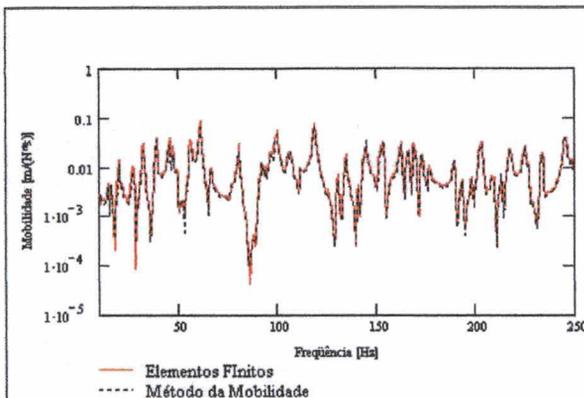


Figura 4.32 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 2,0 m x 1,0 m faixa de freq. 0 a 250 Hz.

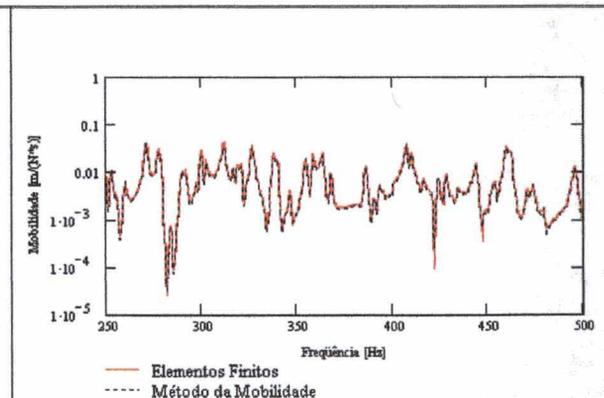


Figura 4.33 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 2,0 m x 1,0 m faixa de freq. 250 a 500 Hz.

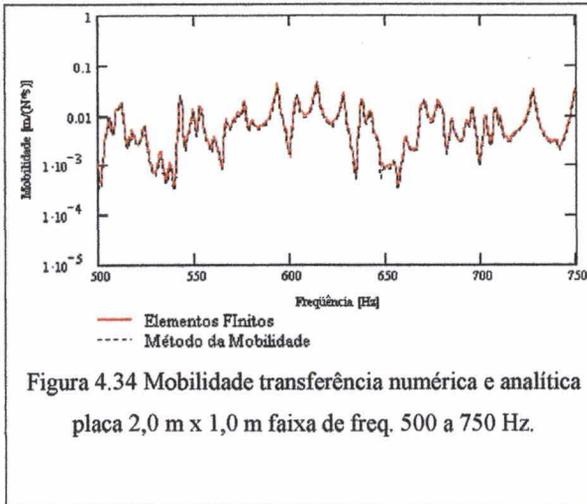


Figura 4.34 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 2,0 m x 1,0 m faixa de freq. 500 a 750 Hz.

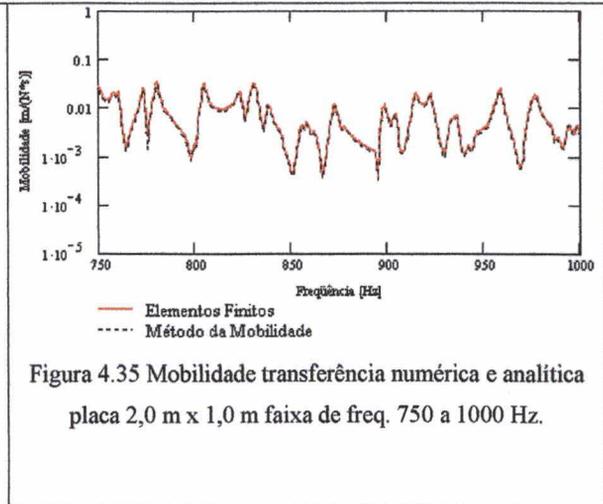


Figura 4.35 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 2,0 m x 1,0 m faixa de freq. 750 a 1000 Hz.

Essa curva mostra que a resposta obtida via método da mobilidade, comparada com a obtida por elementos finitos, também apresenta uma excelente similaridade, mesmo sendo uma mobilidade de transferência.

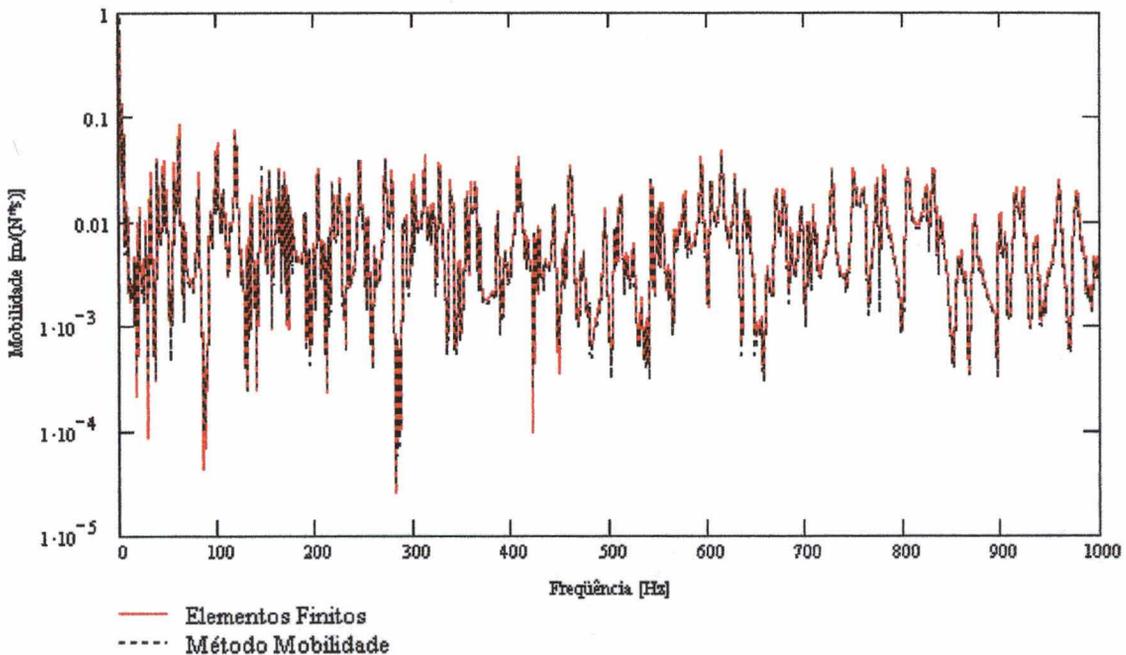


Figura 4.36 Mobilidade de transferência numérica e analítica - placa 2,0 m x 1,0 m - 0 a 1000 Hz

As Figuras 4.37 a 4.41 mostram a mesma mobilidade de transferência, porém acrescentada da resposta medida experimentalmente, em que a força de excitação foi do tipo ruído branco.

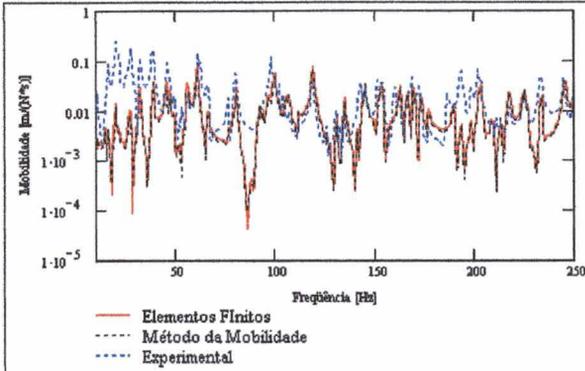


Figura 4.37 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m, 0 a 250 Hz.

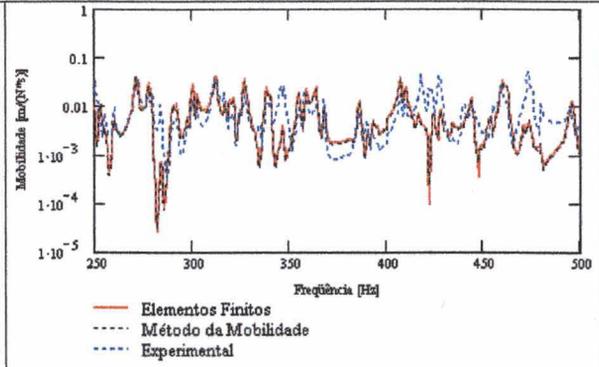


Figura 4.38 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m, 250 a 500 Hz.

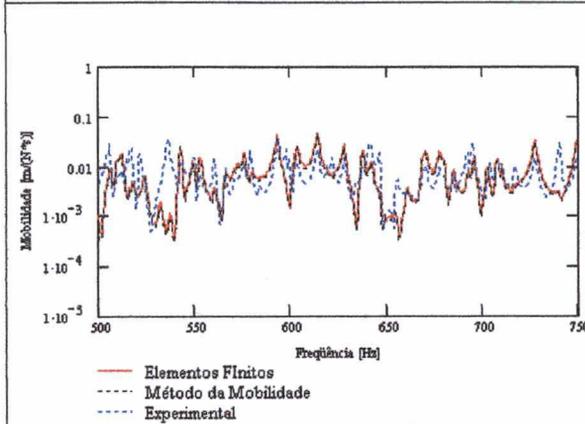


Figura 4.39 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m, 500 a 750 Hz.

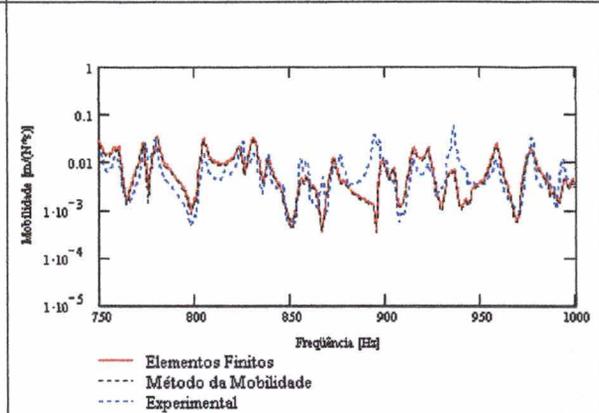


Figura 4.40 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m, 750 a 1000 Hz.

A resposta obtida experimentalmente mostra, também, uma grande similaridade com as preditas numérica e analiticamente, apesar de mesma apresentar diferenças de amplitude.

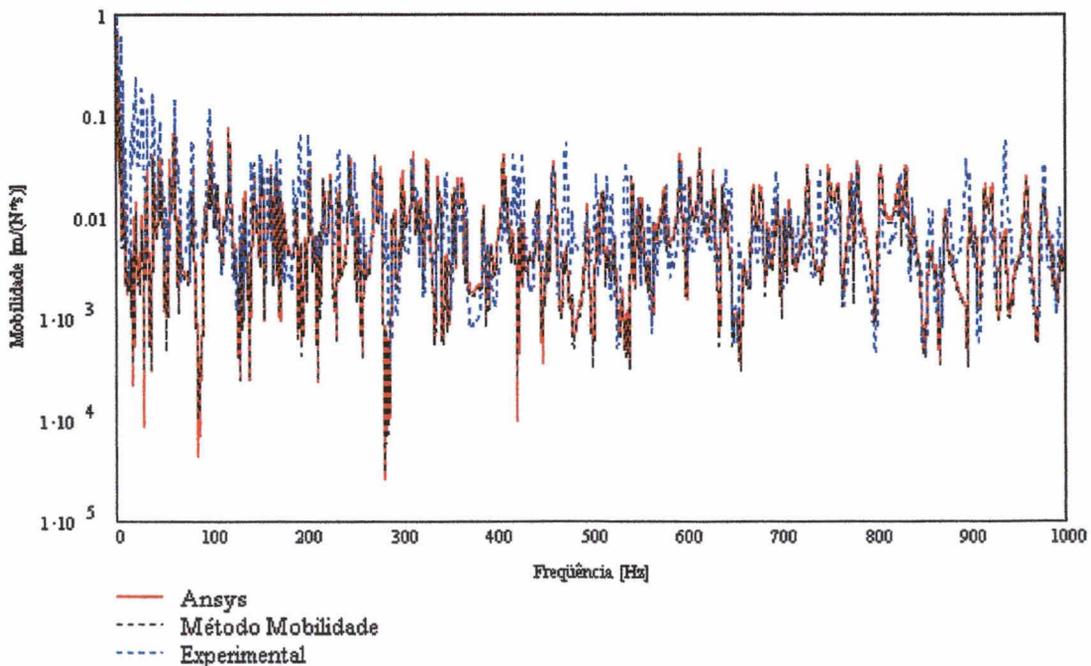


Figura 4.41 Mobilidade transf. numérica, analítica e experimental placa 2,0 m x 1,0 m, 0 a 1000 Hz.

4.8.3) Mobilidade Pontual – Configuração II

As Figuras 4.42 a 4.46 mostram a mobilidade pontual num sistema constituído de duas placas de iguais acopladas, com dimensões 0,5 m x 0,9 m e espessura de 3 mm, resultando numa placa de 1,0 m x 0,9 m, excitado por uma força unitária no ponto $x = 20$ cm e $y = 20$ cm e a resposta sendo medida no mesmo ponto.

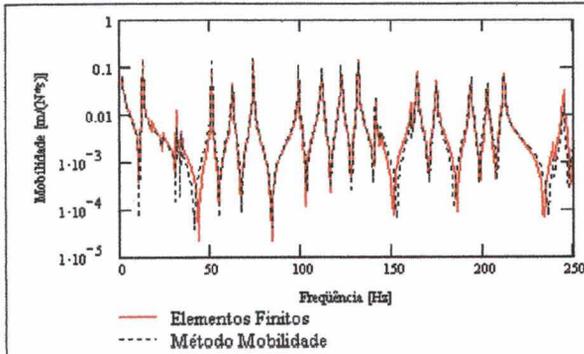


Figura 4.42 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 1,0 m x 0,9 m – faixa de frequência 0 a 250 Hz.

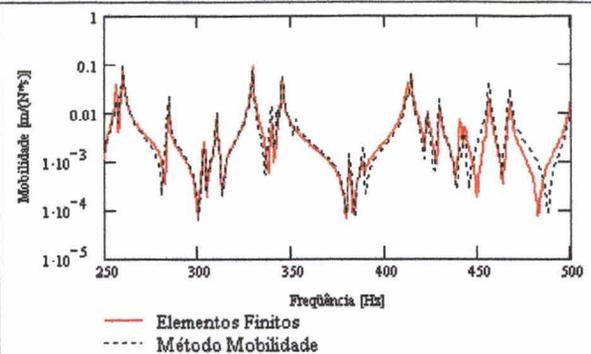


Figura 4.43 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 1,0 m x 0,9 m – faixa de frequência 250 a 500 Hz.

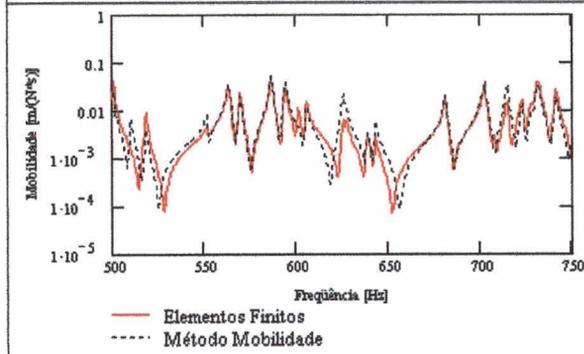


Figura 4.44 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 1,0 m x 0,9 m – faixa de frequência 500 a 750 Hz.

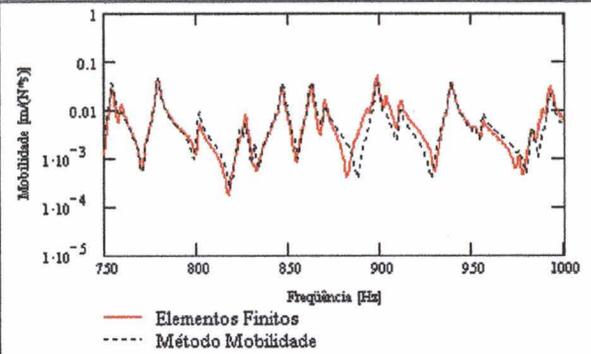


Figura 4.45 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 1,0 m x 0,9 m – faixa de frequência 750 a 1000 Hz.

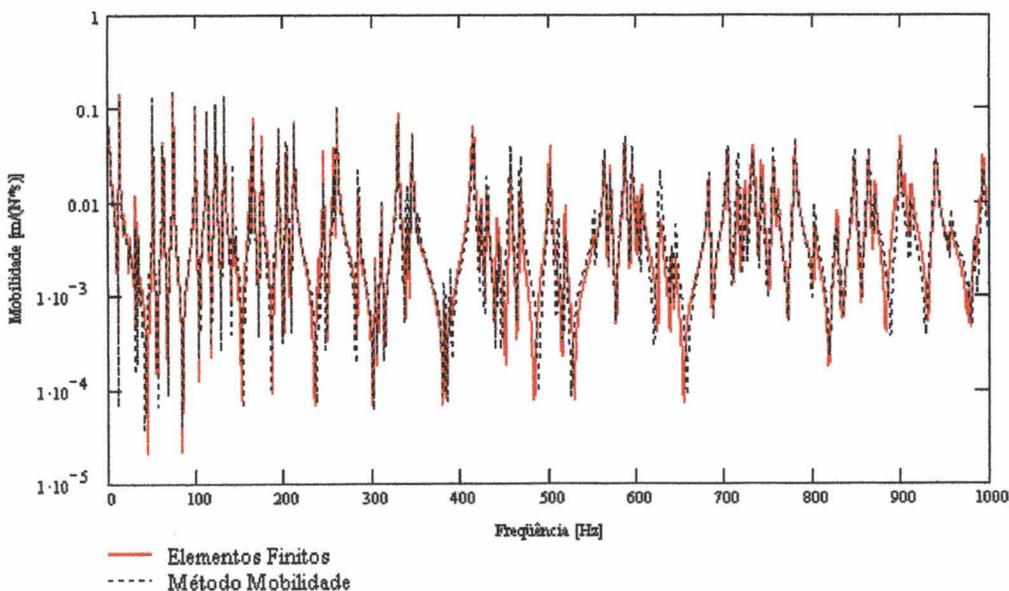


Figura 4.46 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 1,0 m x 0,9 m – faixa de frequência 0 a 1000 Hz.

As Figuras 4.47 a 4.51 mostram a mesma mobilidade pontual, porém acrescentada da resposta medida experimentalmente.

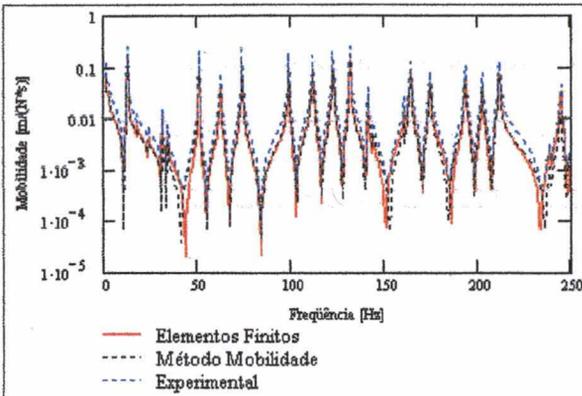


Figura 4.47 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 1,0 m x 0,9 m, 0 a 250 Hz.

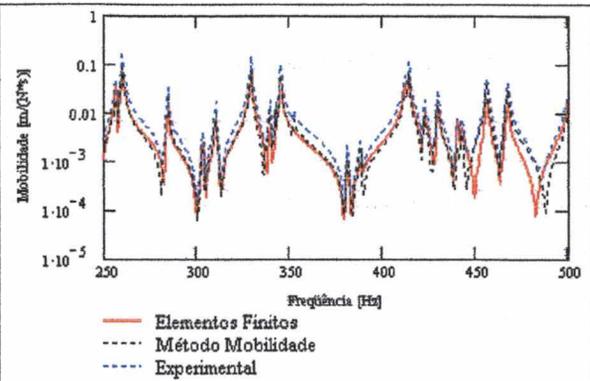


Figura 4.48 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 1,0 m x 0,9 m, 250 a 500 Hz.

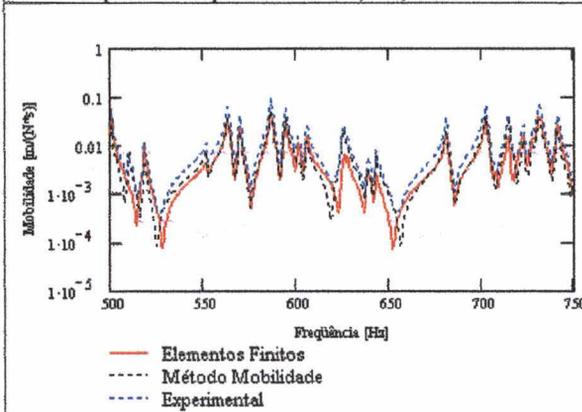


Figura 4.49 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 1,0 m x 0,9 m, 500 a 750 Hz.

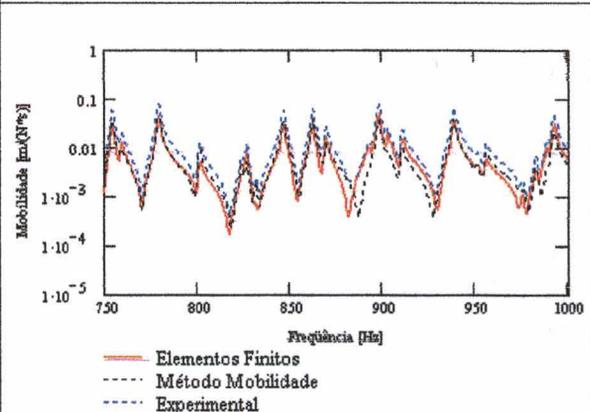


Figura 4.50 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental placa 1,0 m x 0,9 m, 750 a 1000 Hz.

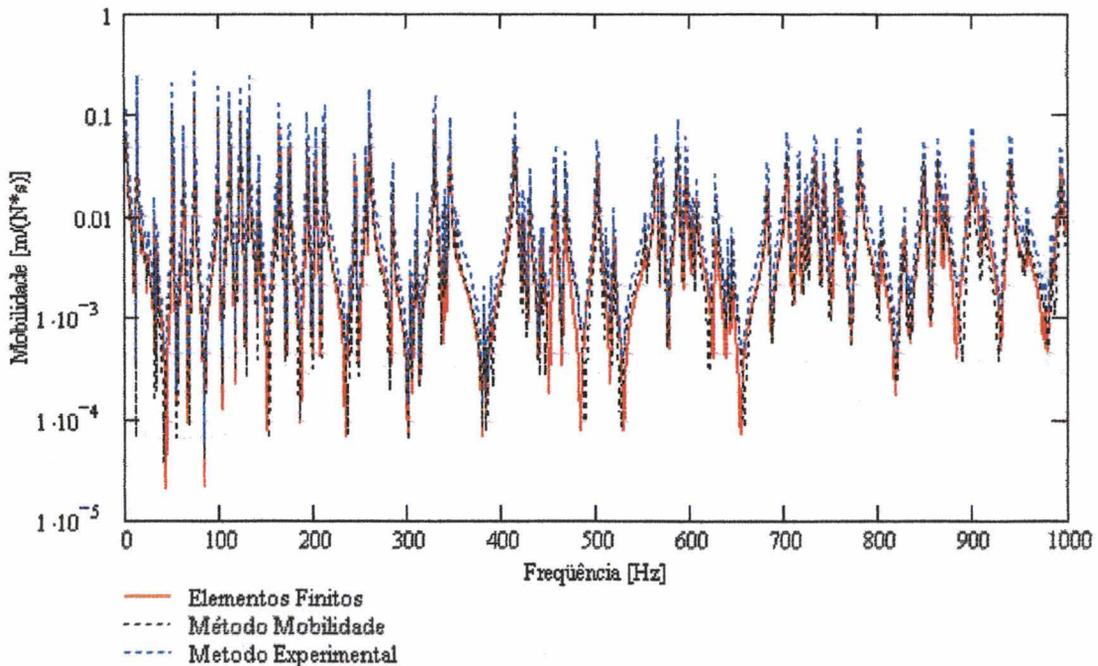


Figura 4.51 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental - placa 1,0 m x 0,9 m - 0 a 1000 Hz

Percebe-se nestas figuras que a concordância entre as curvas é boa, mesmo com a resposta da medição experimental apresentando algumas mínimas diferenças de amplitude.

4.8.4) Mobilidade Pontual – Configuração III

As Figuras 4.52 a 4.56 mostram a mobilidade pontual num sistema de duas placas iguais acopladas, cada uma com 0,40 m x 0,40 m e espessura de 2 mm, resultando numa placa de 0,8 m x 0,4 m, sendo excitada por uma força unitária, localizada no ponto $x = 30$ cm e $y = 10$ cm, e a resposta sendo medida no mesmo ponto.

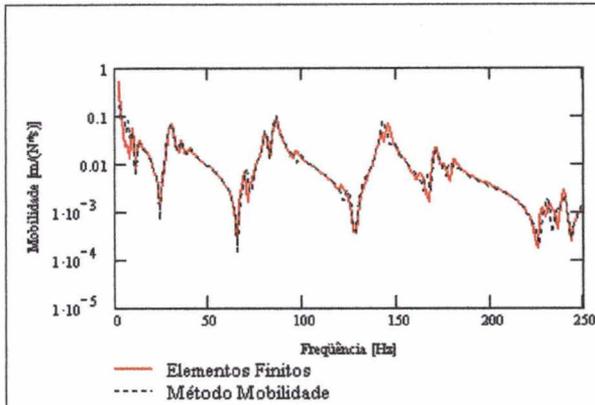


Figura 4.52 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m – faixa de frequência 0 a 250 Hz.

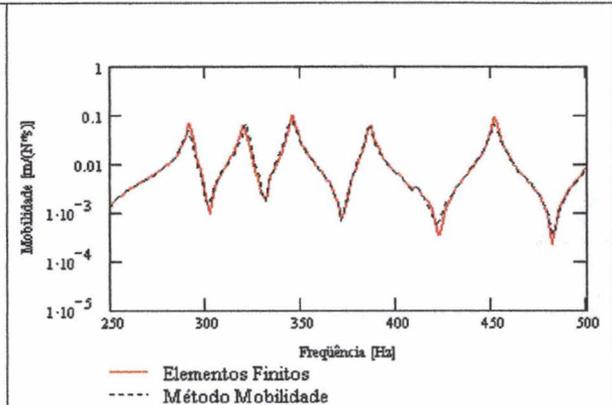


Figura 4.53 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m – faixa de frequência 250 a 500 Hz.

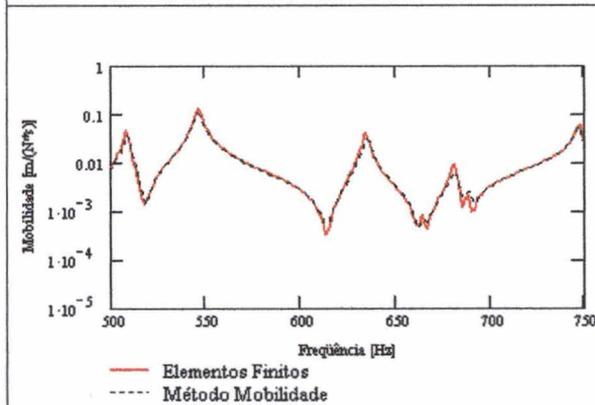


Figura 4.54 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m – faixa de frequência 500 a 750 Hz.

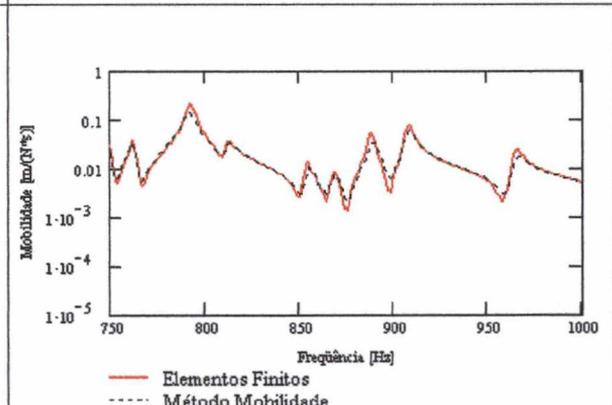


Figura 4.55 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m – faixa de frequência 750 a 1000 Hz

Essas figuras acima mostram a concordância excelente entre as respostas obtidas através do Método da Mobilidade e Elementos Finitos.

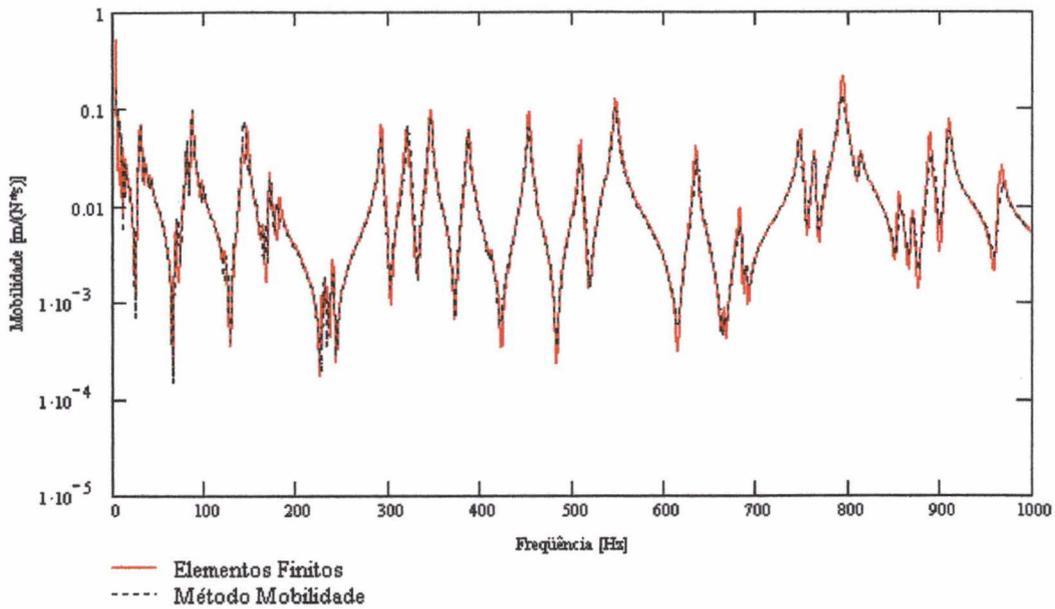


Figura 4.56 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m – faixa de frequência 0 a 1000 Hz

4.8.5) Mobilidade Transferência – Configuração III

As Figuras 4.57 a 4.61 mostram a mobilidade de transferência, no mesmo sistema do item anterior, agora com a força localizada no ponto $x = 30$ cm e $y = 10$ cm e a resposta sendo medida no ponto $x = 70$ cm e $y = 40$ cm. Aqui, somente as curvas obtidas pelo Método da Mobilidade e Elementos Finitos são mostradas.

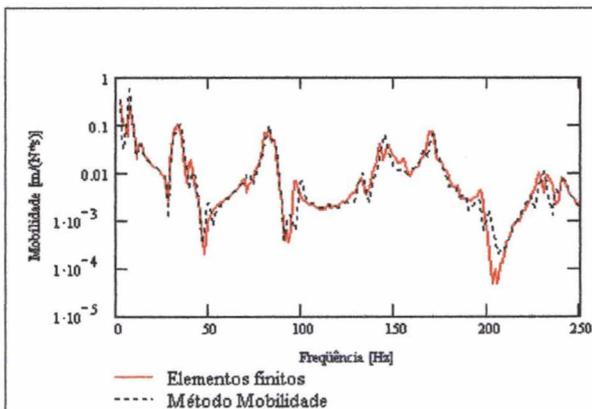


Figura 4.57 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 0,8 m x 0,4 m faixa de freq. 0 a 250 Hz.

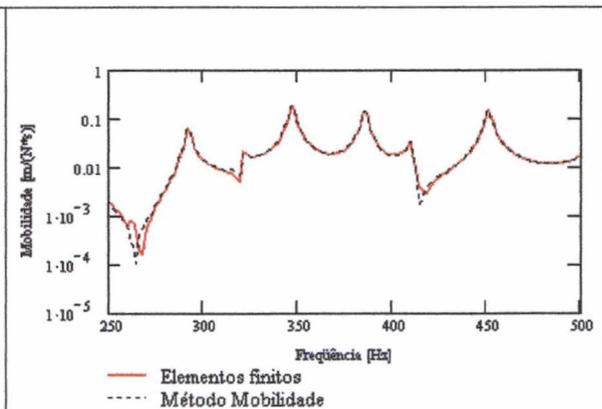


Figura 4.58 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 0,8 m x 0,4 m faixa de freq. 250 a 500 Hz

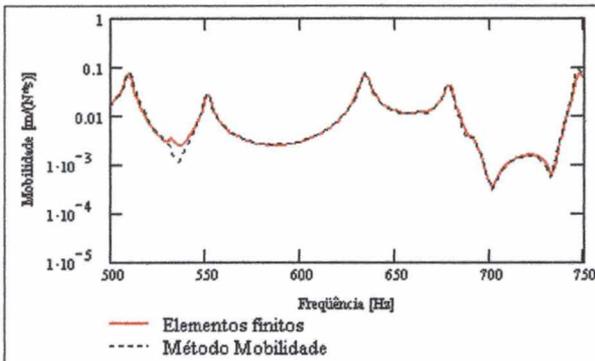


Figura 4.59 Mobilidade transferência numérica e analítica
placa 0,8 m x 0,4 m faixa de freq. 500 a 750 Hz.

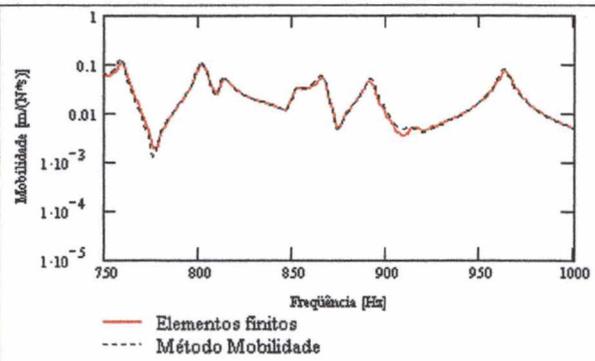


Figura 4.60 Mobilidade transferência numérica e analítica
placa 0,8 m x 0,4 m faixa de freq. 750 a 1000 Hz.

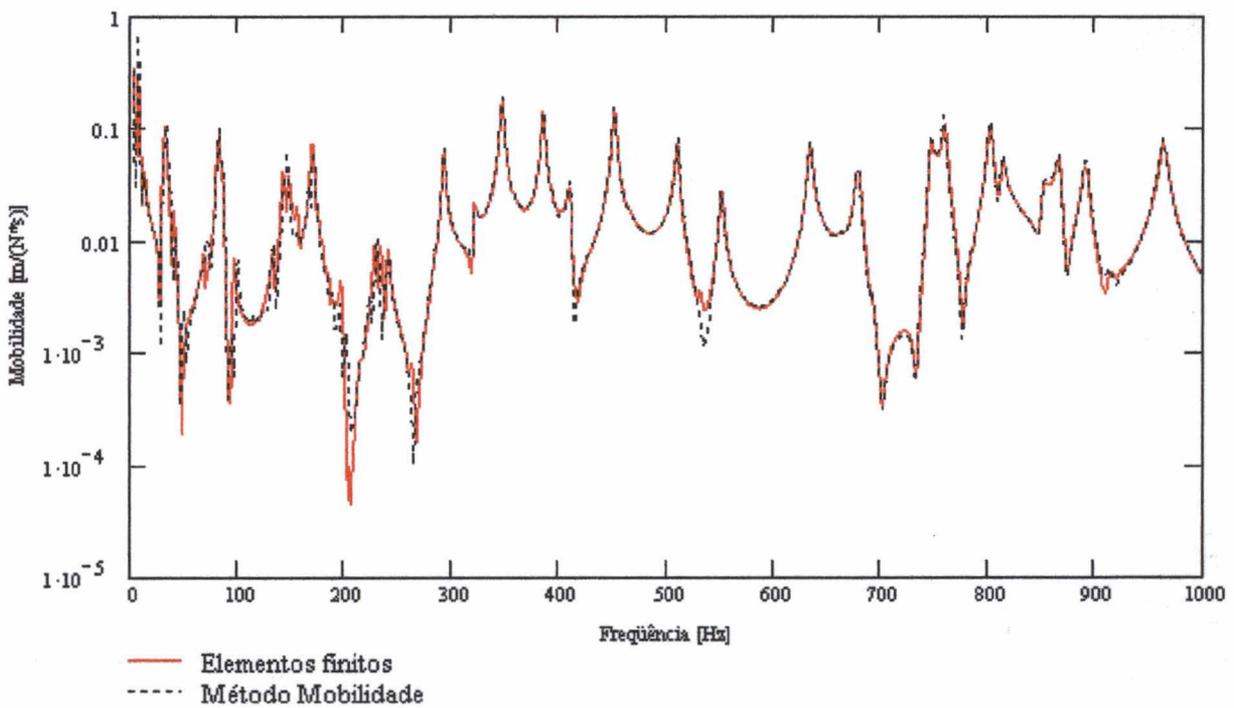


Figura 4.61 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m - faixa de frequência 0 a 1000Hz.

As Figuras 4.62 a 4.66 mostram a mesma mobilidade de transferência, porém acrescentada da resposta medida experimentalmente.

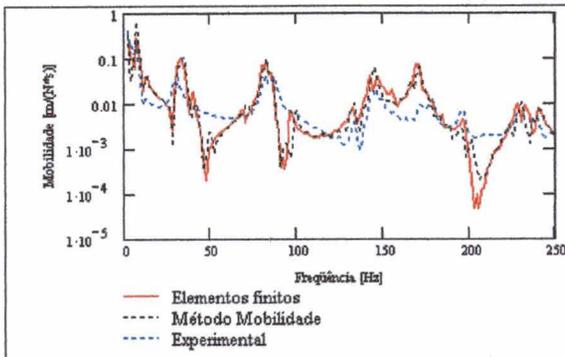


Figura 4.62 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental placa 0,8 m x 0,4 m, 0 a 250 Hz.

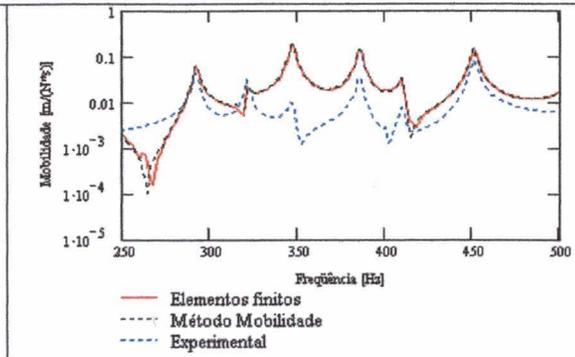


Figura 4.63 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental placa 0,8 m x 0,4 m, 250 a 250 Hz

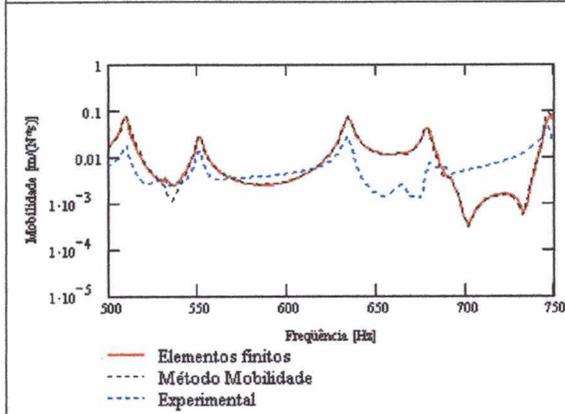


Figura 4.64 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental placa 0,8 m x 0,4 m, 500 a 750 Hz.

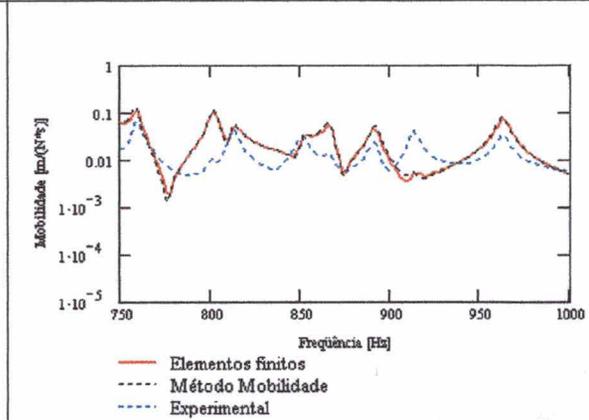


Figura 4.65 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental placa 0,8 m x 0,4 m, 750 a 1000 Hz.

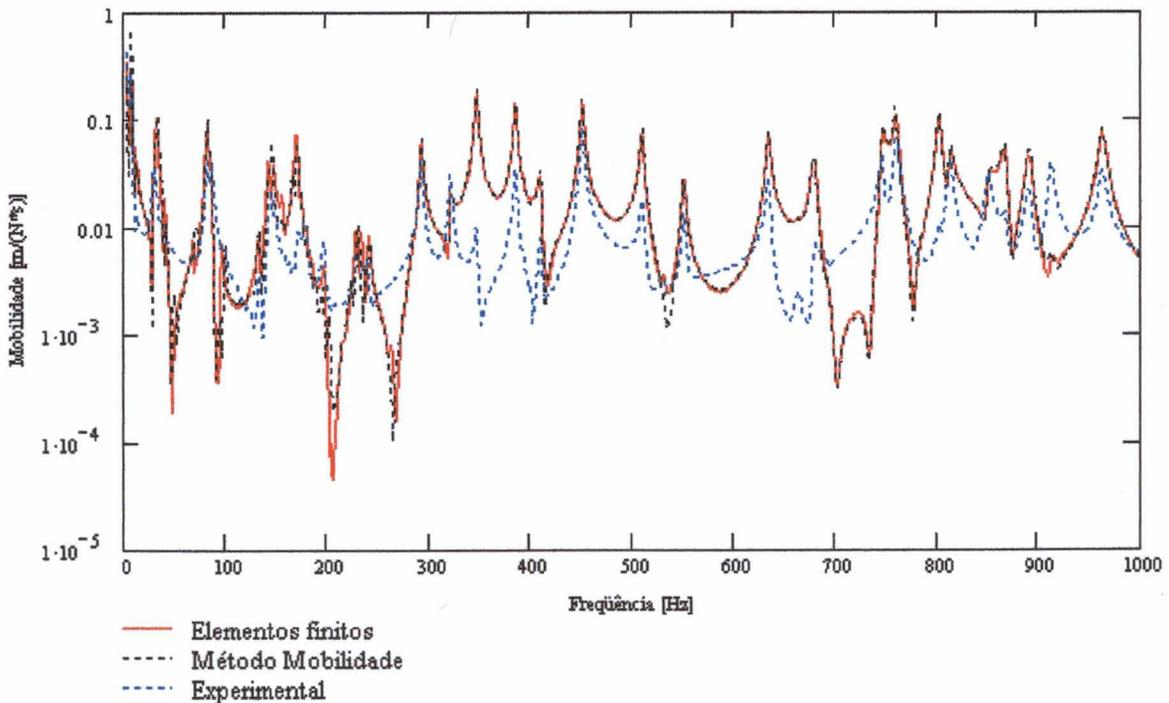


Figura 4.66 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental placa 0,8 m x 0,4 m – 0 a 1000Hz

Pode-se notar, através das Figuras 4.22 a 4.26, 4.32 a 4.36, 4.42 a 4.46, 4.52 a 4.56 e 4.57 a 4.61, que os resultados obtidos pelo Método da Mobilidade são bastante similares aos obtidos pelo Método de Elementos Finitos e, que os resultados obtidos experimentalmente, mostrados nas Figuras 4.27 a 4.31, 4.37 a 4.41, 4.47 a 4.50 e 4.62 a 4.66, comprovam que o Método da Mobilidade é um método preciso na obtenção de respostas de placas.

As respostas obtidas experimentalmente mostram algumas diferenças em relação às obtidas numericamente e pelo procedimento proposto. Uma explicação para este fato decorre da impossibilidade de, experimentalmente, obter-se uma simulação perfeita de uma placa totalmente livre nas bordas. As melhores respostas foram obtidas quando a placa estava presa somente através de um fio, num canto da placa.

A grande quantidade de modos presentes na faixa de frequência estudada, também dificulta uma melhor aproximação entre as respostas obtidas por elementos finitos e pelo método da mobilidade, com as repostas obtidas via método experimental.

O sistema composto das duas placas 1,0 m x 1,0 m (Configuração I) possui, na faixa de frequência entre 0 e 1000 Hz, aproximadamente 200 modos de vibração, o que faz com que a sua densidade modal seja bastante significativa. A visualização de todos os modos dessa placa, num gráfico em toda essa faixa de frequência, é bastante prejudicada por causa desse grande número de modos. Por isso os resultados foram apresentados em faixas de frequência diferentes e complementares, para que as curvas possam ser melhor observadas e analisadas.

O sistema composto das duas placas 0,5 m x 0,9 m (Configuração II) possui, na faixa de frequência entre 0 e 1000 Hz, aproximadamente 155 modos de vibração. Ao compararem-se predições ou mesmo medições deste mesmo sistema, mas com condição de contorno de apoio simples [55], verifica-se que a quantidade de modos é bem mais significativa, ou seja, a mesma placa, sob condições de contorno totalmente livre, possui número de modos que é significativamente maior que se estivesse na condição de contorno tipo apoio simples. Valores de densidade modal chegam a ser 20% maiores, aproximadamente (0,8 dB).

Por último, o sistema composto das duas placas de 0,4 m x 0,4 m possui, na faixa de frequência de 0 a 1000 Hz, aproximadamente 63 modos de vibração, ou seja, para uma placa com essa dimensão, a sua densidade modal é, também, bastante significativa.

As respostas obtidas pelo método apresentam ótima precisão quando comparadas com as respostas determinadas tanto numericamente (Elementos Finitos), bem como experimentalmente.

As figuras a seguir, apresentam comparações entre resultados obtidos da densidade modal pelo Método da Mobilidade, Elementos Finitos e por medições experimentais, de um sistema composto de duas placas acopladas sem nenhuma viga de reforço, na faixa de frequência de 1/3 oitava. Elas apresentam também, a curva da mesma placa, porém na condição de contorno simplesmente apoiada, calculada através da Equação 2.30, para efeito de comparação, apenas. Em estudos usando SEA, essa aproximação é utilizada quando não se tem valores calculados de densidade modal da estrutura em análise. A densidade modal da configuração I é mostrada na Figura 4.67, e percebe-se que, como as curvas são praticamente iguais, o método usado neste trabalho consegue obter resultados semelhantes aos obtidos via elementos finitos. Nota-se também que a curva da densidade modal obtida experimentalmente apresenta uma grande semelhança com as previstas numérica e analiticamente.

Em relação à configuração II, a Figura 4.68 mostra a densidade modal entre valores obtidos via mobilidade, elementos finitos e experimental, na faixa de frequência de 1/3 oitava.

Na Figura 4.69, são apresentados os valores de densidade modal obtidas da configuração III.

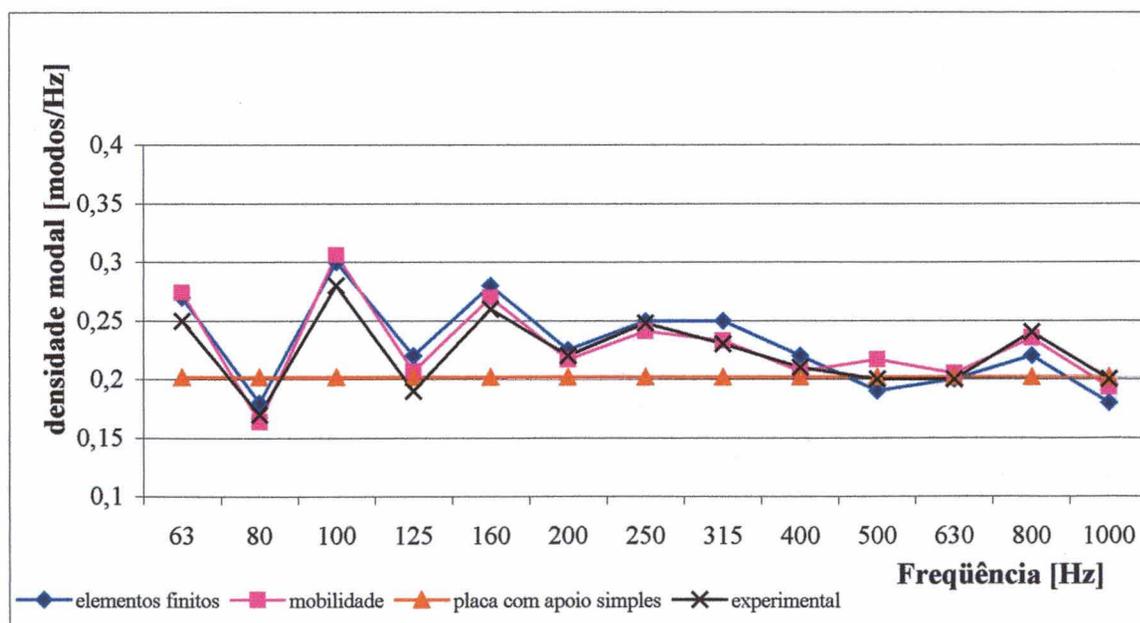


Figura 4.67 Gráficos comparativos entre densidades modais da placa 2 m x 1 m obtidos pelo método da mobilidade, elementos finitos, experimental e placa com apoio simples pela equação 2.30.

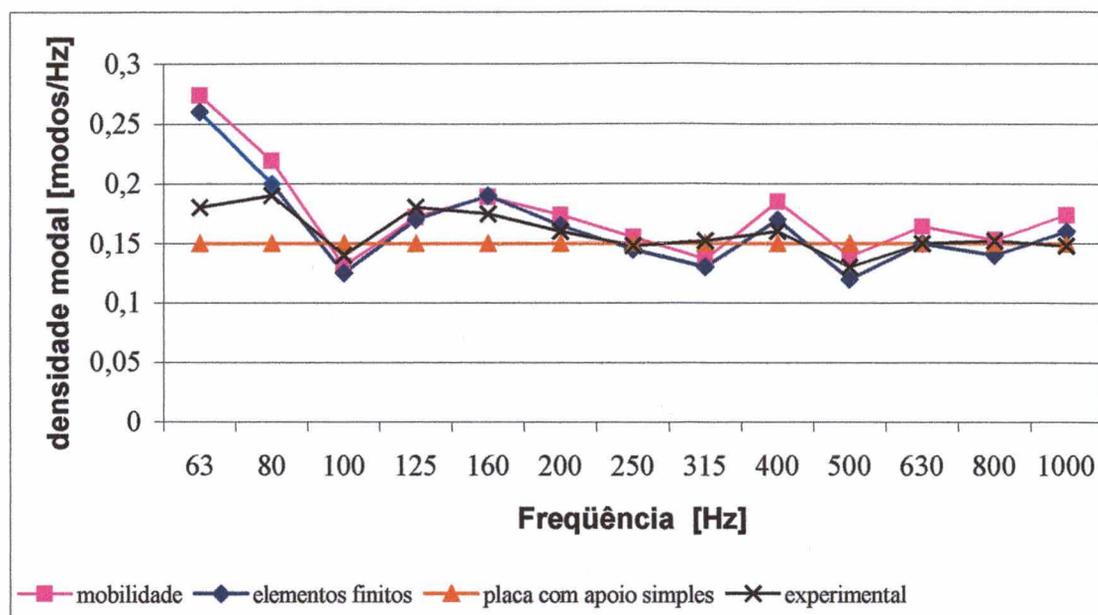


Figura 4.68 Gráficos comparativos entre densidades modais da placa 1,0 m x 0,9 m obtidos pelo método da mobilidade, elementos finitos, experimental e placa com apoio simples pela equação 2.30.

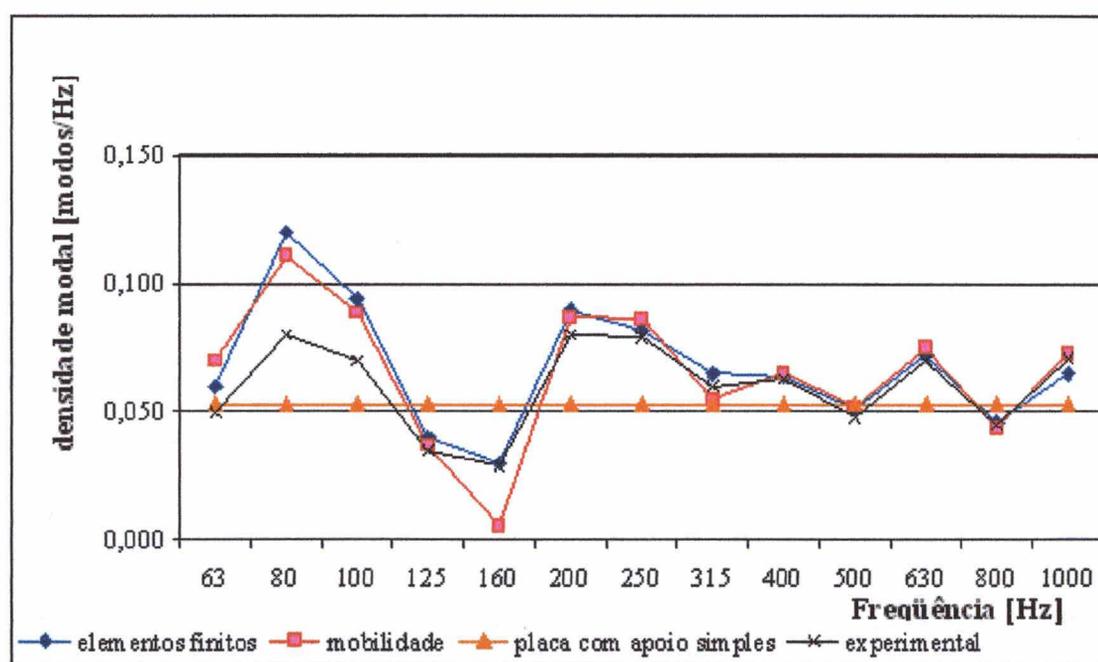


Figura 4.69 Gráficos comparativos entre densidades modais da placa 0,8 m x 0,4 m obtidos pelo método da mobilidade, elementos finitos, experimental e placa com apoio simples pela equação 2.30.

4.10) Resultados das Potências de Entrada e Transferida

A determinação do fluxo de energia através da linha de união entre as duas placas acopladas é importante para entender o comportamento do fator de acoplamento. Com este

propósito, foram determinadas através da Equação 2.9, as potências de entrada e transferida, referentes à configuração III.

As Figuras 4.70 e 4.74 apresentam a potência de entrada, obtida pelo método proposto neste trabalho e por elementos finitos, desta configuração III. Por causa da grande quantidade de ressonâncias deste sistema, optou-se por mostrar as curvas em faixas de frequência distintas e complementares, afim de que a visualização não seja prejudicada como também a análise. A Figura 4.74 apresenta a mesma curva de 0 a 1 kHz.

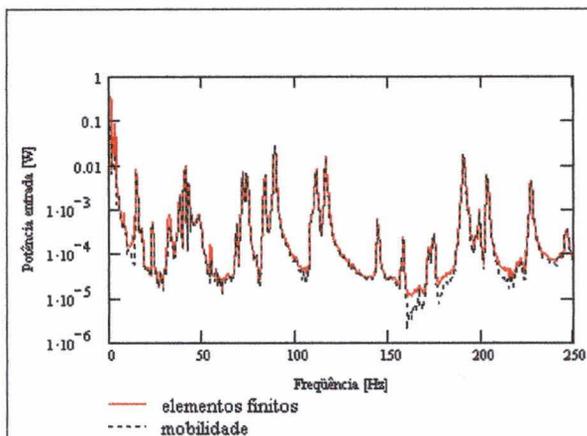


Figura 4.70 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III.

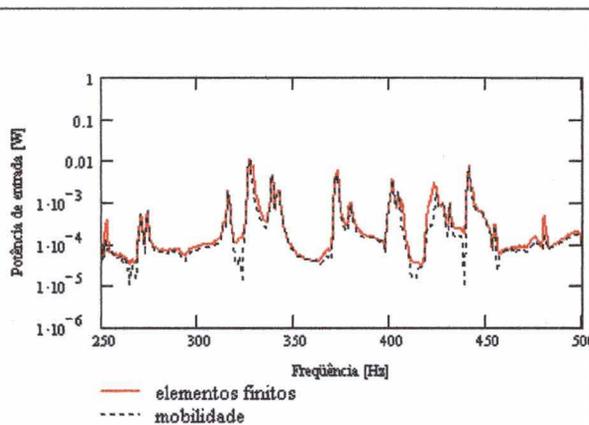


Figura 4.71 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III.

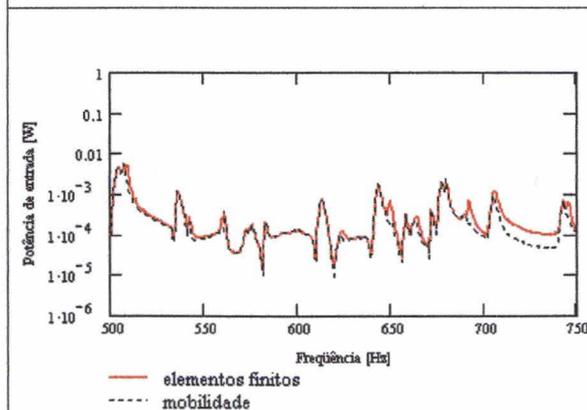


Figura 4.72 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III.

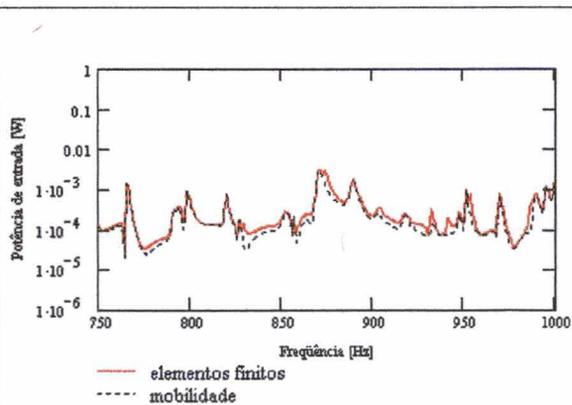


Figura 4.73 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III.

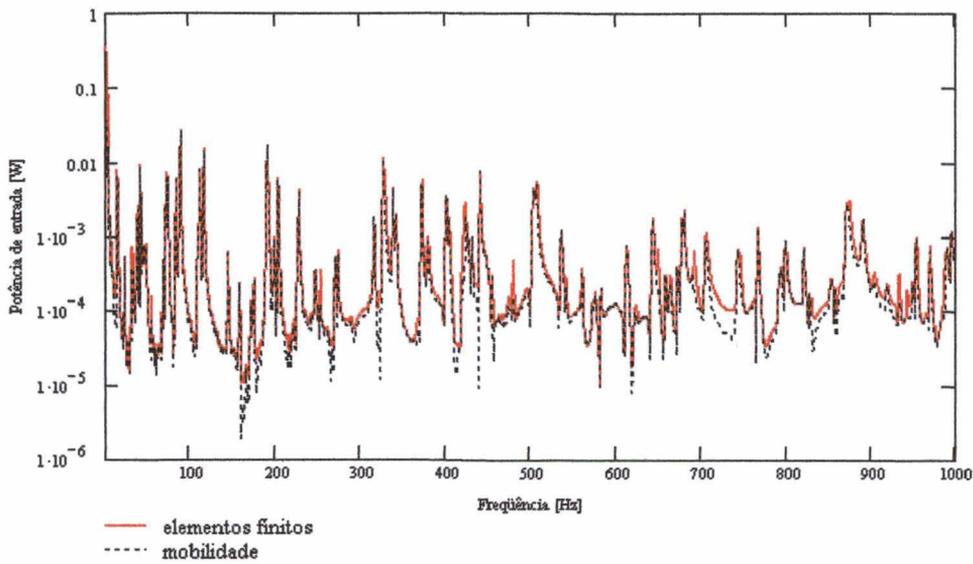


Figura 4.74 Gráfico comparativo entre potências de entrada da configuração III obtidos pelo método da mobilidade e por elementos finitos.

As Figuras 4.75 a 4.79 apresenta a potência transmitida, também obtida pelo método da mobilidade e por elementos finitos, da mesma configuração III.

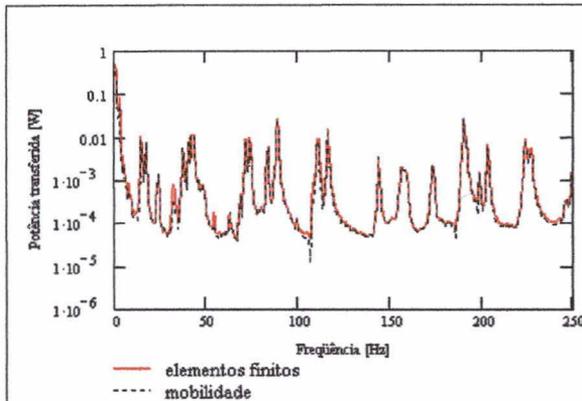


Figura 4.75 Gráficos comparativos entre potências transmitidas da configuração III.

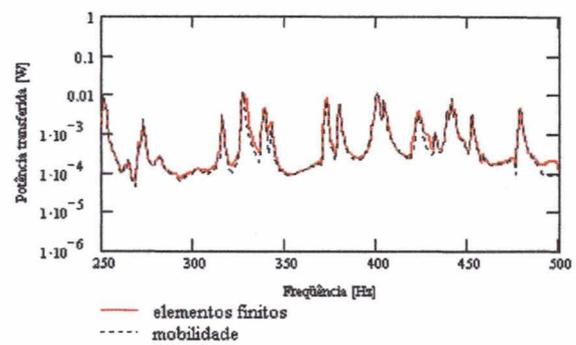


Figura 4.76 Gráficos comparativos entre potências transmitidas da configuração III.

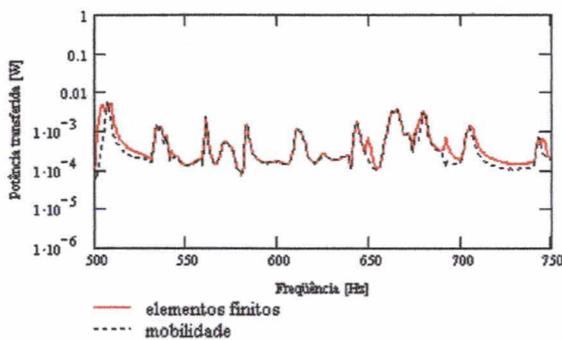


Figura 4.77 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III.

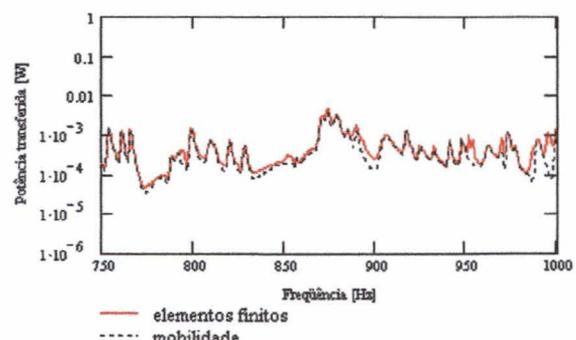


Figura 4.78 Gráficos comparativos entre potências de entrada da configuração III.

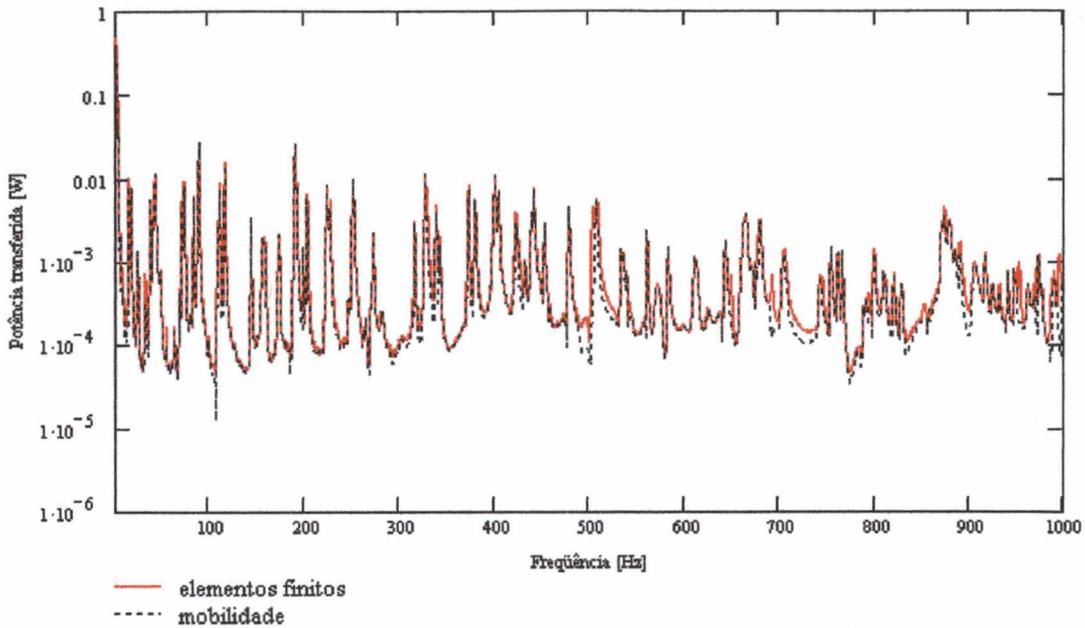


Figura 4.79 Gráfico comparativo entre potências transmitidas da configuração III obtidos pelo método da mobilidade e por elementos finitos.

Os resultados apresentados pelas Figuras 4.74 e 4.79 mostram que o fluxo de energia entre as placas acopladas, particularmente neste caso onde não foi incluída nenhuma viga de reforço no acoplamento, é muito grande, ou seja, a quantidade de energia transferida da placa I para a placa II é elevada.

A Figura 4.80 apresenta a razão entre as potências transmitida/entrada, obtida pelo método da mobilidade. As frequências onde a maior parte da energia é transmitida é aquela em que o valor da razão se aproxima da unidade, ou seja, nessas frequências a maior parte da potência de entrada é quase que toda transferida da placa I para a placa II.

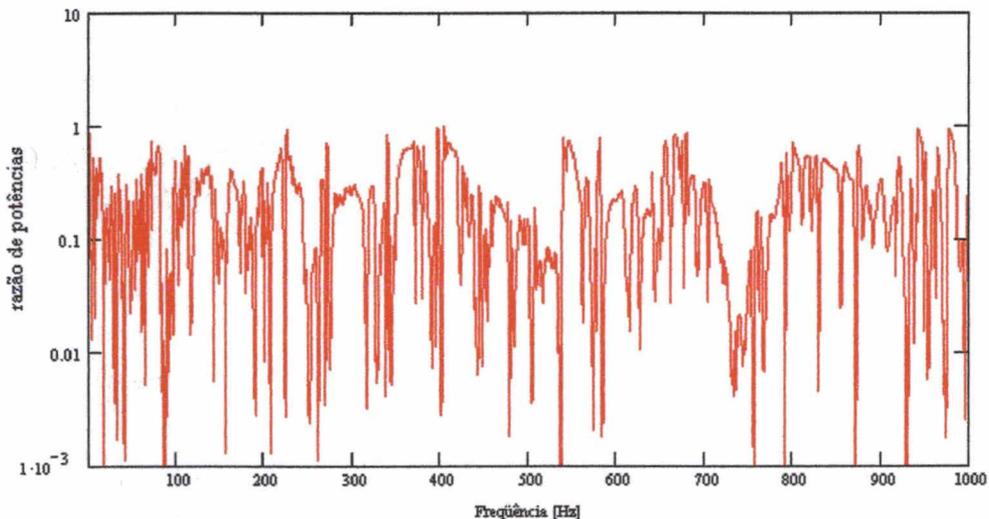


Figura 4.80 Razão entre potências da configuração III, obtidas via método da mobilidade.

4.9) Resultados de Densidade Modal

Para uma placa lisa, sem reforço, apoiadas nas bordas, a expressão da densidade modal é dada pela Equação 2.30 [1]. Pode-se também determinar a densidade modal das seguintes formas:

- Método da Contagem, que consiste em contar o número de modos contidos em uma determinada faixa de frequência e dividir pela largura desta faixa de frequência. Os modos devem se apresentar suficientemente afastados, para que se possa identificar claramente, em curvas de resposta em frequência, a quantidade de modos. Esta função resposta em frequência pode ser obtida numérica ou experimentalmente. Este procedimento não tem proporcionado resultados adequados tendo em vista, que muitas vezes, modos localizados não contribuem de forma significativa como armazenador de energia vibratória, para o fluxo de energia entre componentes, além de talvez não ser um bom modo irradiador de energia sonora.
- Método da Mobilidade, no qual a densidade modal é obtida a partir da parte real da mobilidade. Este método é comumente empregado pelo fato de considerar de forma mais adequada a participação de cada modo.

Para a obtenção de resultados confiáveis, Bonilha [29] recomenda que a leitura da resposta se dê em, no mínimo, três pontos. Clarkson [32] apresenta resultados de densidade modal obtidos através de três pontos distintos, medidos numa estrutura tipo cilindro reforçado por vigas. Ozelame [24] calculou a densidade modal de placas apoiadas, reforçadas por vigas, através de vários pontos de leitura, obtendo uma boa concordância com valores obtidos numericamente.

Neste trabalho, os resultados de densidade modal, foram obtidos pelo procedimento proposto por Clarkson [32], fazendo uso das funções resposta em frequência obtidas pelo Método da Mobilidade, por Elementos Finitos e experimentalmente. Usou-se a parte real da média espacial da mobilidade pontual, através da Equação 2.32. Como as curvas de mobilidade foram obtidas em banda estreita, 0,5 Hz de discretização, os dados também foram posteriormente convertidos em banda 1/3 oitava, para apresentação dos resultados. Obtiveram-se respostas de mobilidade em no mínimo 15 pontos em cada sistema de placa acoplada, e com isto, os resultados aqui mostrados, através da parte real da mobilidade, representam curvas com boa precisão.

Os gráficos mostram também que a comparação entre resultados obtidos pelo Método da Mobilidade e pelo Método de Elementos Finitos apresentam boa concordância.

4.11) Resultados de Fatores de Acoplamento

Este é outro parâmetro muito importante para a aplicação da Análise Estatística Energética. Este fator expressa a quantidade de energia perdida por um sistema através do acoplamento.

Os fatores de acoplamento, obtidos pelos métodos experimental, numérico e da mobilidade, foram calculados através da Equação 2.47. Este procedimento faz uso das energias vibratórias dos subsistemas, que podem ser determinadas com boa precisão em qualquer dos métodos mencionados acima. Observa-se que é adequado também para uso em sistemas estruturais de geometria complexa, como é o caso de placas reforçadas por vigas ou nervuradas.

A Figura 4.81 mostra o esquema de medição montado para a obtenção dos fatores de acoplamento.

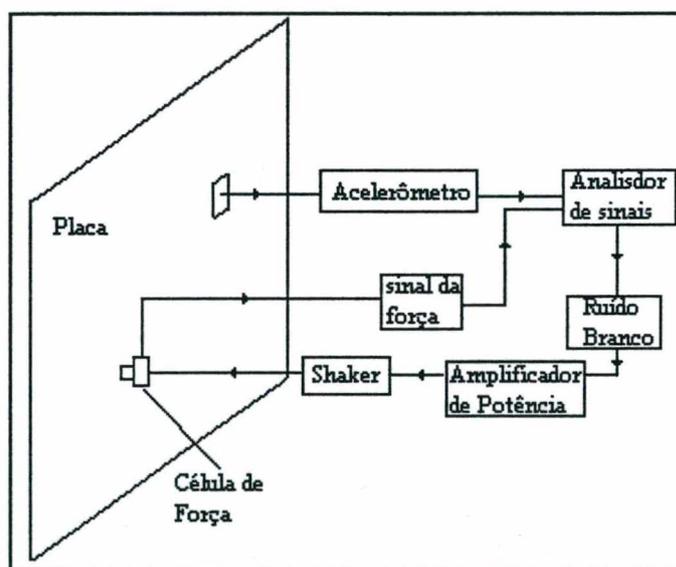


Figura 4.81 Representação esquemática da cadeia de medição

A estrutura é excitada por um excitador eletrodinâmico, com um ruído branco gerado pelo próprio analisador de sinais. A leitura, feita pelo acelerômetro, é enviada para o analisador de sinais, e armazenada em forma de velocidade.

Como nos casos estudados, as placas são iguais, logo, para efeito de simplificação, as densidades modais de cada placa foram consideradas iguais.

Para a obtenção das curvas de fatores de acoplamento, as mesmas configurações de placas acopladas, que consistem em duas placas planas iguais com uma borda comum, utilizadas para o cálculo das densidades modais e fluxo de energia, foram usadas. A placa I é aquela que sofre a ação da força de excitação unitária. A placa II é aquela considerada imediatamente à direita da linha de união entre as mesmas. Na verdade, nas medições experimentais, utilizou-se uma placa com o dobro da dimensão de cada placa do sistema, simulando um acoplamento perfeito entre elas, ou seja, por exemplo, a configuração I, que consiste de duas placas iguais com as dimensões de 1,0 m x 1,0 m, tratava-se de uma única placa de 2,0 m x 1,0 m. Utilizou-se este artifício para que nenhum problema no tipo de junção escolhida para o acoplamento entre as placas menores tivesse influência nas medições. Para os cálculos dos fatores de acoplamento, utilizou-se a Equação 2.47.

As Figuras 4.82 a 4.84 mostram os fatores de acoplamento da placa I para a placa II, nos casos das configurações I, II e III estudadas, com dados obtidos através do método da mobilidade e elementos finitos, na faixa de frequência de 1/3 oitava.

Pode-se conferir que as curvas dos fatores de acoplamento calculadas através do método da mobilidade apresentam, praticamente, os mesmos valores das obtidas por elementos finitos.

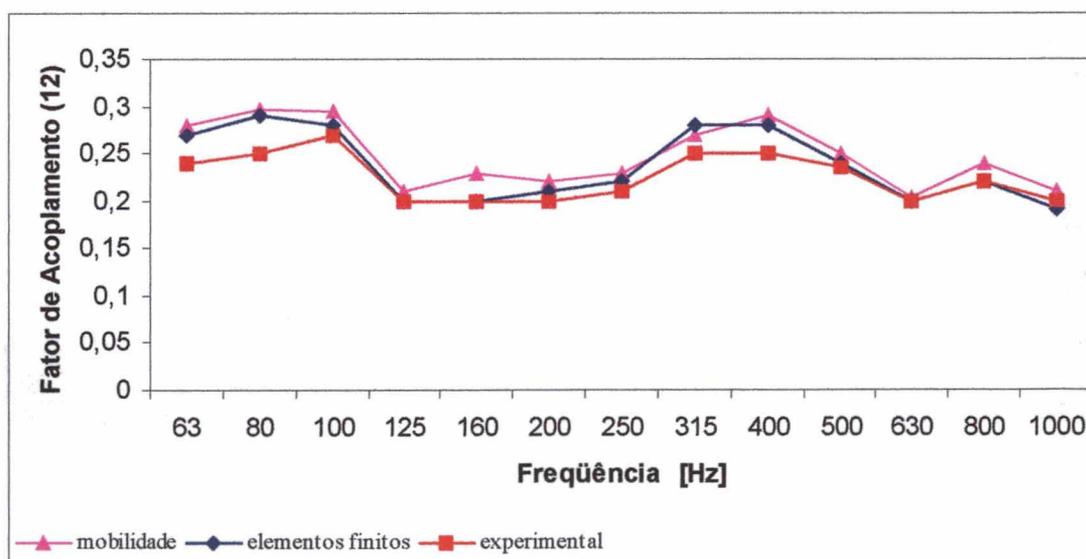


Figura 4.82 Gráficos comparativos entre fatores de acoplamento da configuração I obtidos via mobilidade, elementos finitos e experimental.

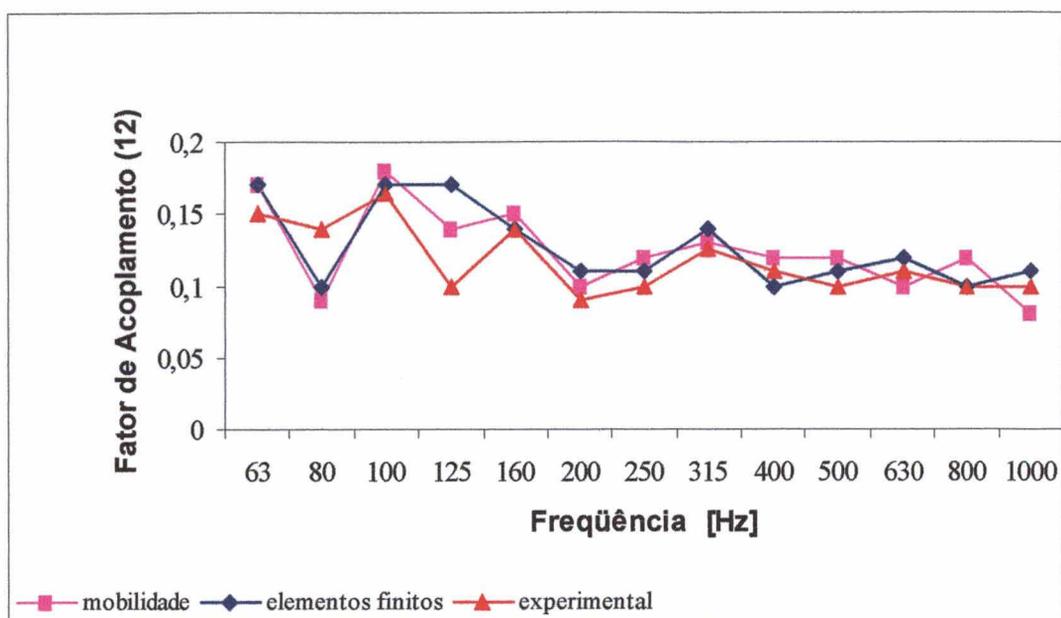


Figura 4.83 Gráficos comparativos entre fatores de acoplamento da configuração II obtidos via mobilidade, elementos finitos e experimental.

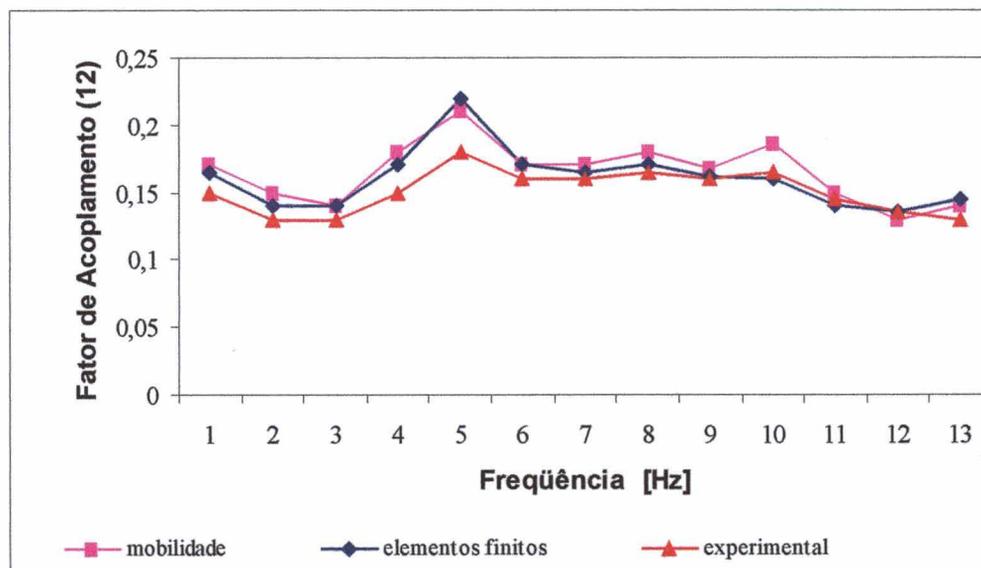


Figura 4.84 Gráficos comparativos entre fatores de acoplamento da configuração III obtidos via mobilidade, elementos finitos e experimental.

Observa-se, como era esperado [25], que o fator de acoplamento apresenta um leve decréscimo com o aumento da frequência. No Capítulo V, a seguir, serão mostradas comparações entre o fator de acoplamento entre algumas configurações de placas com viga de reforço acoplada na linha de união entre as mesmas.

4.12) Esforços, Deslocamentos e Intensidade Transferida ao Longo da Linha de União

Foram calculados valores de todos os esforços ao longo da linha de união, através de um programa computacional, usando-se uma discretização de 25 intervalos ao longo do acoplamento. Assim, 25 valores de cada esforço foram calculados e, as figuras a seguir mostram alguns desses resultados. Deve-se frisar que os resultados foram obtidos nas primeiras freqüências de ressonância do sistema e comparados com resultados obtidos por elementos finitos.

4.12.1) Resultados dos Esforços de Flexão

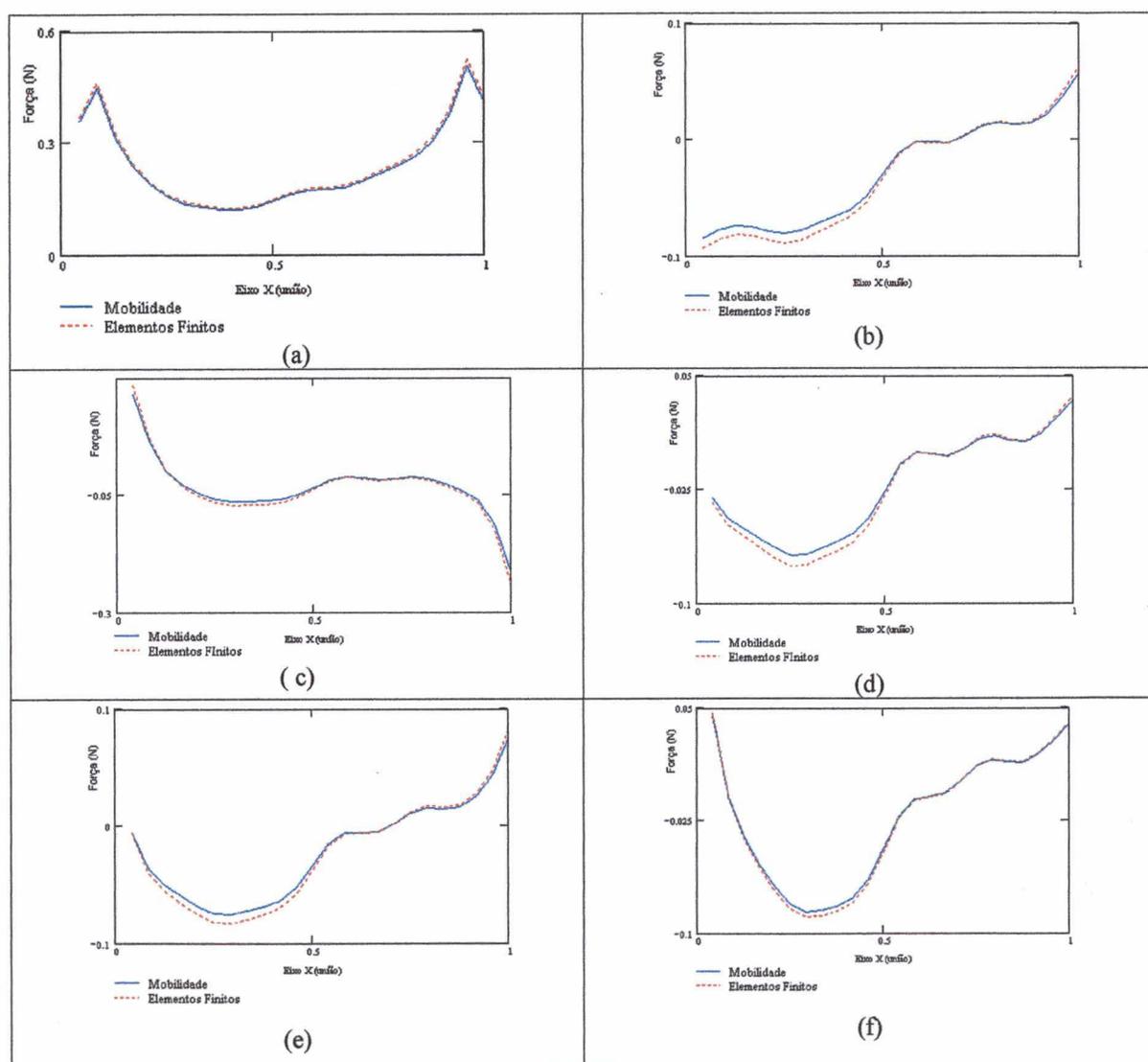


Figura 4.85 Distribuições da força cortante (a) freqüência = 4,0 Hz

(b) freqüência = 4,8 Hz

(c) freqüência = 10,8 Hz

(d) freqüência = 11,1 Hz

(d) freqüência = 16,4 Hz

(d) freqüência = 18,8 Hz

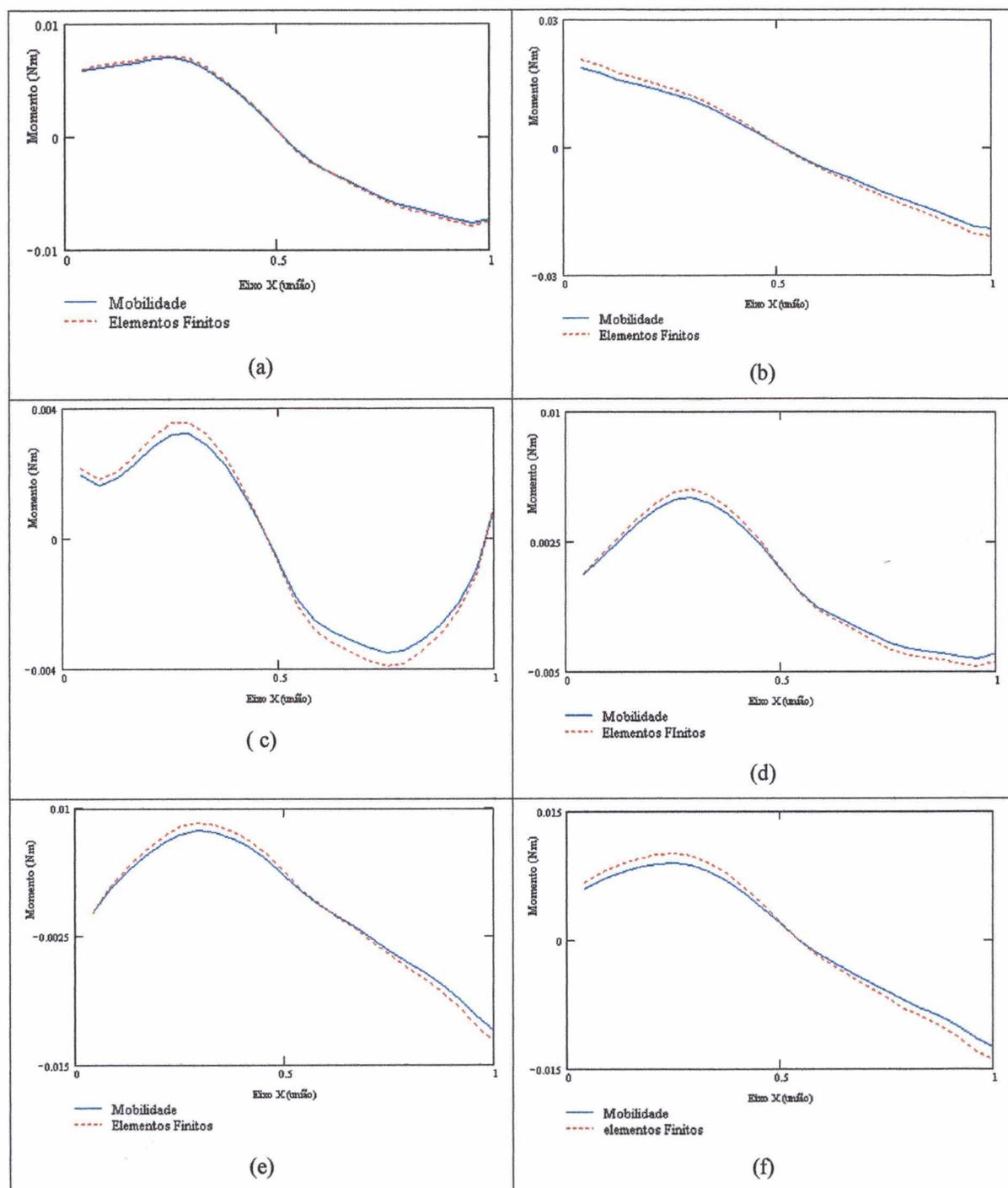


Figura 4.86 Distribuições do momento fletor (a) frequência = 4,0 Hz (d) frequência = 11,1 Hz
 (b) frequência = 4,8 Hz (d) frequência = 16,4 Hz
 (c) frequência = 10,8 Hz (d) frequência = 18,8 Hz

4.12.2) Resultados das Velocidades Transversal e Angular

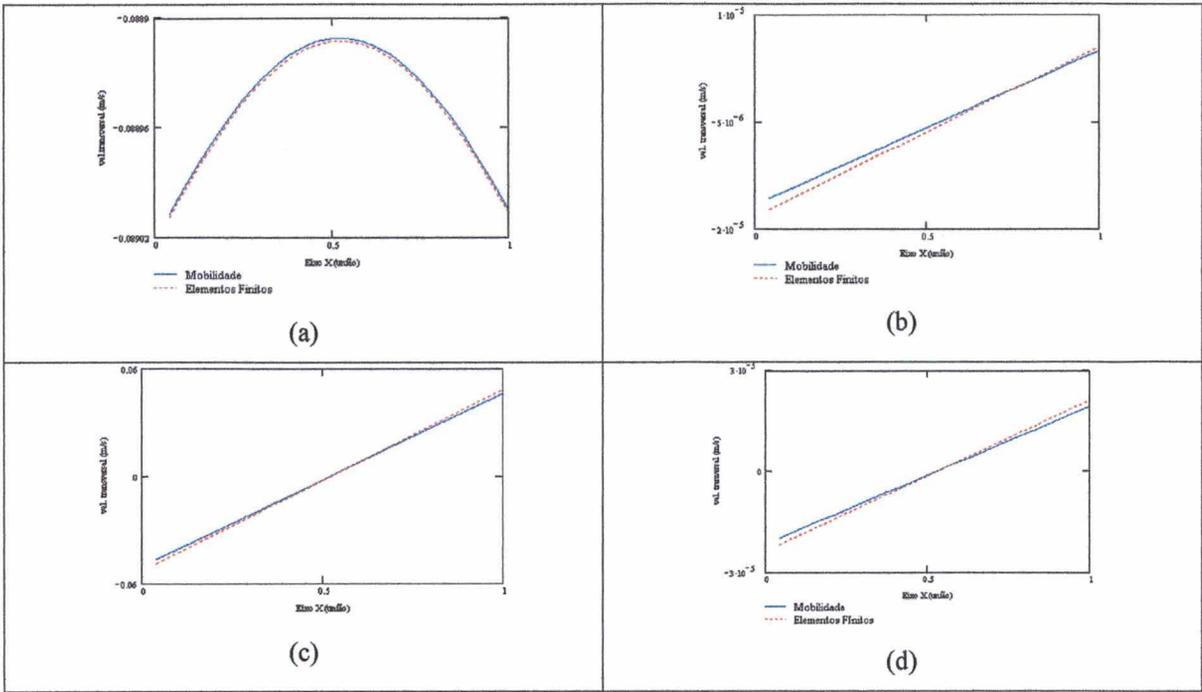


Figura 4.87 Distribuições da velocidade transversal (a) frequência = 4,0 Hz (c) frequência = 10,8 Hz
 (b) frequência = 4,8 Hz (d) frequência = 11,1 Hz

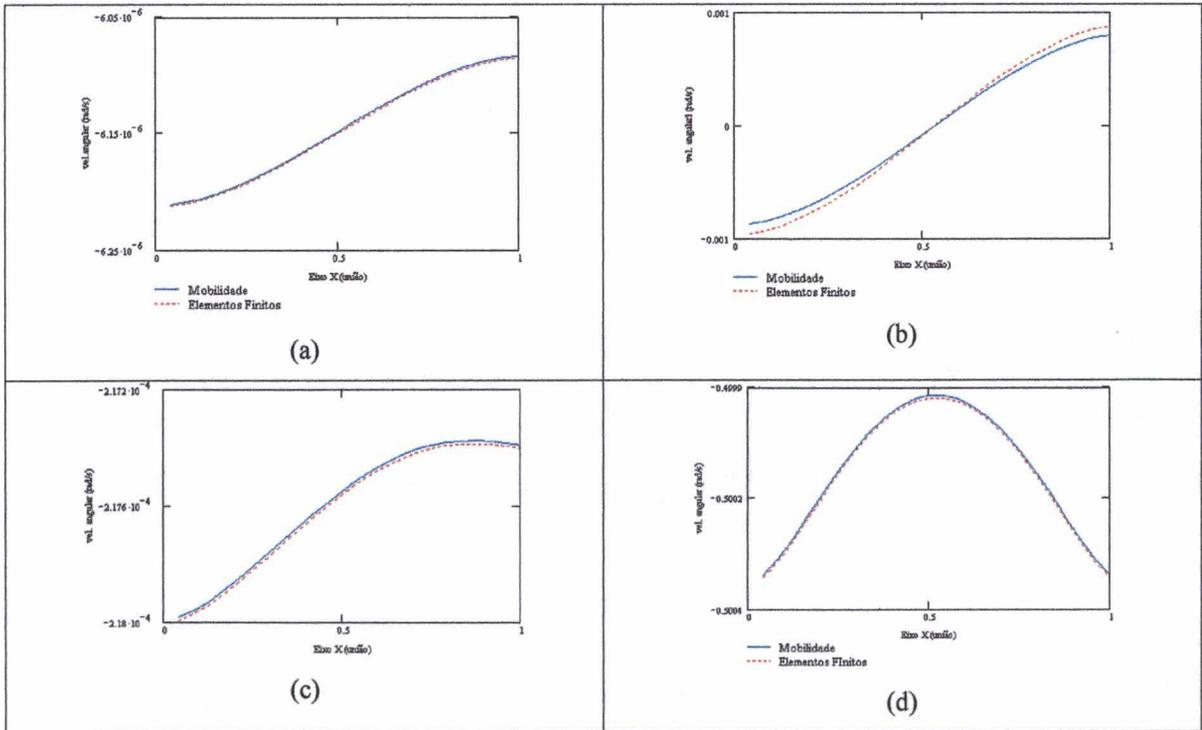


Figura 4.88 Distribuições do velocidade angular (a) frequência = 4,0 Hz (c) frequência = 10,8 Hz
 (b) frequência = 4,8 Hz (d) frequência = 11,1 Hz

4.12.3) Resultados da Distribuição de Potência Transferida

A Figura 4.89 apresenta os resultados do fluxo de potência ao longo da união, mostrando como a energia vibratória se transfere da placa I para a placa II como também como o fluxo de energia se apresenta, para uma determinada frequência. Assim, o caminho preferencial da energia vibratória, em cada modo de vibração, é identificado e pode ser estudado a fim de usar essa informação em trabalhos de controle de vibrações e ruído em estruturas compostas de placas e vigas acopladas.

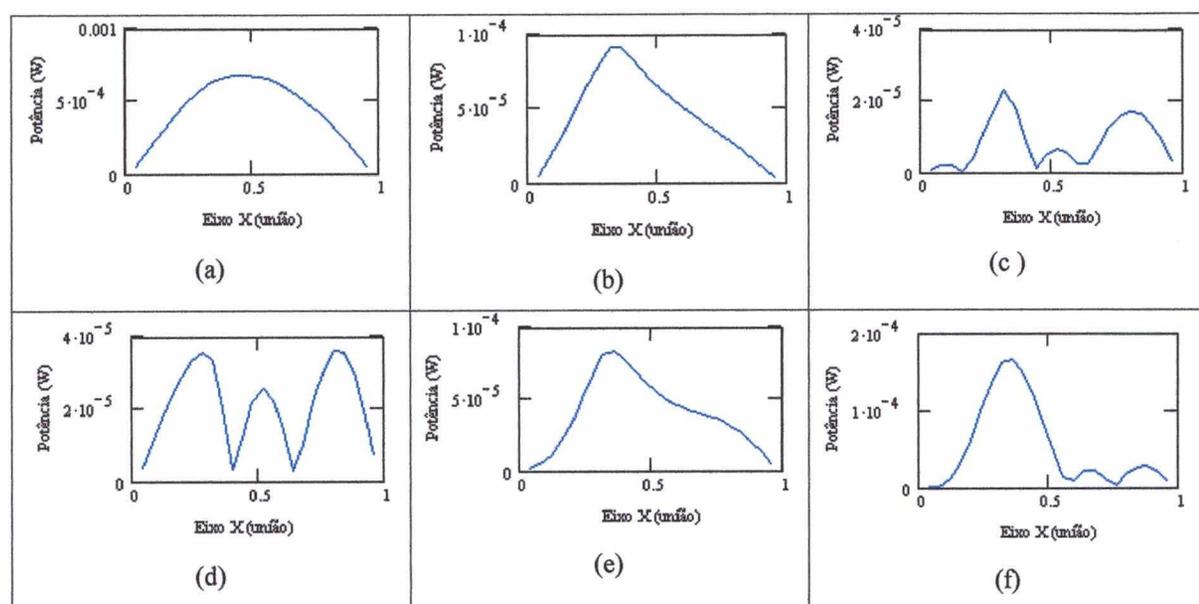


Figura 4.89 Distribuições da transferência de potência ao longo da união

(a) frequência = 4,0 Hz

(b) frequência = 4,8 Hz

(c) frequência = 10,8 Hz

(d) frequência = 11,1 Hz

(d) frequência = 16,4 Hz

(d) frequência = 18,8 Hz

CAPÍTULO V

ANÁLISE DE DUAS PLACAS ACOPLADAS COM UMA VIGA NA UNIÃO

5.1) Introdução

Neste capítulo, é analisado o sistema composto de duas placas acopladas, livres nas bordas, sendo o acoplamento feito através de uma viga de seção quadrada. Nesta análise, novamente utilizou-se o Método da Mobilidade e os resultados comparados com os obtidos por Elementos Finitos e experimentalmente.

Esta análise consiste em estudar duas placas acopladas com uma viga na união, com a transmissão de energia dada apenas pelos esforços que ocorrem em ondas de flexão, ou seja, a transferência de energia se dá através do momento fletor e força cortante na união. Este modelo caracteriza a maioria dos acoplamentos que envolvem placas e vigas.

Como visto no capítulo anterior, esta análise se baseia no princípio da superposição dos efeitos, já que o sistema é linear, permitindo que seja inserido o efeito de mais uma subestrutura no sistema, neste caso o efeito da viga.

Algumas hipóteses importantes são consideradas:

- As placas são consideradas finas comparando-se com o comprimento de onda gerado pela maior frequência de análise, no caso 1000 Hz.
- A energia é transferida apenas pelos esforços causados por ondas de flexão nas placas, que são o esforço cortante e o momento fletor. Na viga surgem os esforços de torção e de flexão.
- A distribuição do momento na união entre placas e viga, é expresso de forma discretizada, sendo M_i o momento que atua no i -ésimo intervalo, sendo considerados NI intervalos.
- Cada intervalo, Δx , da discretização é considerado constante.
- O sistema é linear.

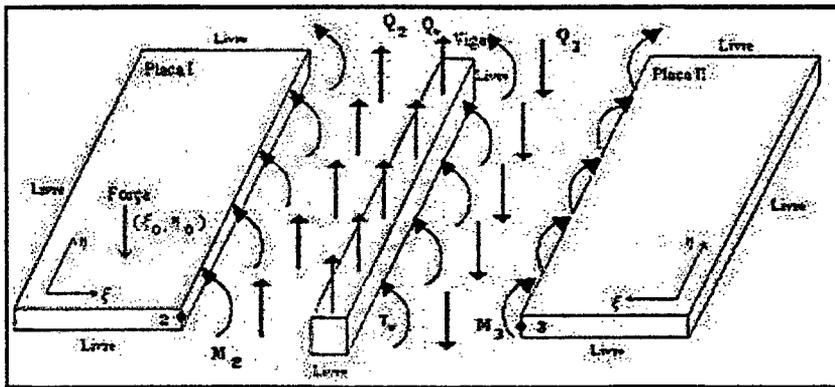


Figura 5.1 Sistema de duas placas acopladas com uma viga quadrada na união

Um esquema do sistema está mostrado na Figura 5.1. As ondas de flexão, geradas na placa I pela força de excitação P atuante sobre a mesma, propagam-se ao longo de toda a placa, atingem a viga excitando-a com esforços cortante e de torção. Estes mesmos tipos de esforços excitam ondas de flexão na placa II. Existe, então, na união, o equilíbrio de seis esforços: o momento na placa I, força cortante na placa I, momento torçor na viga, força cortante na viga, momento na placa II e a força cortante na placa II.

A Figura 5.2 ilustra os tipos de esforços considerados na união.

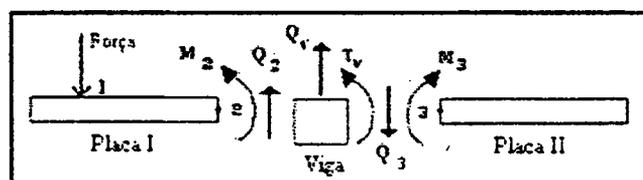


Figura 5.2 Vista lateral do sistema de duas placas acopladas com uma viga quadrada na união

Para calcular estes seis (06) esforços, devem ser respeitadas as seguintes condições na união:

a) Continuidade das velocidades angulares e transversais.

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_v = \dot{\theta}_3 \quad (5.1)$$

$$\dot{v}_2 = \dot{v}_v = \dot{v}_3 \quad (5.2)$$

de onde podem-se obter as seguintes equações:

$$\text{I) para } \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_v; \quad Y_{12}^{F\theta} P + Y_{22}^{M\theta} M_2 + Y_{22}^{Q\theta} Q_2 = Y_v^T T_v \quad (5.3)$$

$$\text{II) para } \dot{\theta}_v = \dot{\theta}_3; \quad Y_{33}^{M\theta} M_3 + Y_{33}^{Q\theta} Q_3 = Y_v^T T_v \quad (5.4)$$

$$\text{III) para } \dot{v}_2 = \dot{v}_v; \quad Y_{12}^{Fv} P + Y_{22}^{Mv_2} M_2 + Y_{22}^{Qv_2} Q_2 = Y_v^Q Q_v \quad (5.5)$$

$$\text{IV) para } \dot{v}_v = \dot{v}_3; \quad Y_{33}^{Mv_3} M_3 + Y_{33}^{Qv_3} Q_3 = Y_v^Q Q_v \quad (5.6)$$

b) Do equilíbrio de esforços.

$$\text{V) } M_2 + T_v - M_3 = 0 \quad (5.7)$$

$$\text{VI) } Q_2 + Q_v - Q_3 = 0 \quad (5.8)$$

em que $Y_{12}^{F\theta}$ é a mobilidade de transferência entre o ponto 1, no qual é aplicado um força unitária, e o ponto 2, levando-se em consideração a velocidade angular;

$Y_{12}^{Fv_2}$ é a mobilidade de transferência entre o ponto 1 no qual é aplicado um força unitária, e o ponto 2, levando-se em consideração a velocidade transversal;

$Y_{22}^{M\theta}$ é a mobilidade pontual no ponto 2, levando-se em consideração o momento atuando no contorno da união da placa I, e a velocidade angular;

$Y_{22}^{Q\theta}$ é a mobilidade pontual no ponto 2 levando-se em consideração a força cortante atuando no contorno da união da placa I, e a velocidade angular;

$Y_{33}^{M\theta}$ é a mobilidade pontual no ponto 3 levando-se em consideração o momento atuando no contorno da união da placa II, e a velocidade angular;

$Y_{33}^{Q\theta}$ é a mobilidade pontual no ponto 3 levando-se em consideração a força cortante atuando no contorno da união da placa II, e a velocidade angular;

$Y_{22}^{M_{v2}}$ é a mobilidade pontual no ponto 2 levando-se em consideração o momento atuando no contorno da união da placa I, e a velocidade transversal;

$Y_{22}^{Q_{v2}}$ é a mobilidade pontual no ponto 2 levando-se em consideração a força cortante atuando no contorno da união da placa I, e a velocidade transversal;

$Y_{33}^{M_{v3}}$ é a mobilidade pontual no ponto 3 levando-se em consideração o momento atuando no contorno da união da placa II, e a velocidade transversal;

$Y_{33}^{Q_{v3}}$ é a mobilidade pontual no ponto 3 levando-se em consideração a força cortante atuando no contorno da união da placa II, e a velocidade transversal;

Y_v^T é a mobilidade pontual na viga levando-se em consideração o momento torsor atuando ao longo da viga;

$Y_v^{Q_v}$ é a mobilidade pontual na viga levando-se em consideração a força cortante atuando ao longo da viga;

Assim, pode-se constituir um sistema de equações para a determinação dos esforços

M_2 , M_3 , Q_2 , Q_3 , Q_v e T_v .

$$Y_{12}^{F_\theta} P + Y_{22}^{M_\theta} M_2 + Y_{22}^{Q_\theta} Q_2 - Y_v^T T_v = 0 \quad (5.9)$$

$$Y_{33}^{M_\theta} M_3 + Y_{33}^{Q_\theta} Q_3 - Y_v^T T_v = 0 \quad (5.10)$$

$$Y_{12}^{F_{v2}} P + Y_{22}^{M_{v2}} M_2 + Y_{22}^{Q_{v2}} Q_2 - Y_v^{Q_v} Q_v = 0 \quad (5.11)$$

$$Y_{33}^{M_{v3}} M_3 + Y_{33}^{Q_{v3}} Q_3 - Y_v^{Q_v} Q_v = 0 \quad (5.12)$$

$$M_2 + T_v - M_3 = 0 \quad (5.13)$$

$$Q_2 + Q_v - Q_3 = 0 \quad (5.14)$$

e, considerando a força de excitação P aplicada na placa I, pode-se escrever o sistema de equações acima em forma matricial

$$\begin{bmatrix} Y_{22}^{M_\theta} & Y_{22}^{Q_\theta} & 0 & 0 & 0 & -Y_v^T \\ 0 & 0 & Y_{33}^{M_\theta} & Y_{33}^{Q_\theta} & 0 & -Y_v^T \\ Y_{22}^{M_{v2}} & Y_{22}^{Q_{v2}} & 0 & 0 & 0 & -Y_v^{Q_v} \\ 0 & 0 & Y_{33}^{M_{v3}} & Y_{33}^{Q_{v3}} & 0 & -Y_v^{Q_v} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ Q_2 \\ M_3 \\ Q_3 \\ Q_v \\ T_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{12}^\theta P \\ 0 \\ -Y_{12}^\theta P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

A partir deste sistema, todos os esforços são simultaneamente calculados.

Deve-se frisar que, cada componente da matriz dos coeficientes deste sistema é constituído de uma matriz, por exemplo: $Y_{22}^{M_\theta} = [Y_{22}^{M_\theta}]_{NI \times NI}$ ou $Y_v^{T_v} = [Y_v^{T_v}]_{NI \times NI}$.

Da mesma forma, os vetores deste sistema que constituem as incógnitas possuem a ordem determinada também pelo número de discretizações, por exemplo $M_2 = \{M_2\}_{NI}$ ou $T_v = \{T_v\}_{NI}$, sabendo que cada componente destes vetores representa exatamente o esforço que atuam em cada intervalo discretizado. Portanto, este sistema pode ser resolvido para NI discretizações na linha de união, gerando um sistema de equações de ordem $2NI$. Assim, $2NI$ incógnitas devem ser calculadas. Novamente aqui, como no Capítulo IV, utilizaram-se 25 discretizações ao longo da união.

5.2) Configurações das Placas

As placas e vigas possuem as seguintes características, mostradas na Tabela 5.1:

Tabela 5.1 Características mecânicas da placas e vigas

Material	Alumínio
Densidade	2660 Kg/m ³
Módulo de Elasticidade	7,1.10 ¹⁰ Pa
Coefficiente de Poisson	0,3
Amortecimento	0,01

As seguintes configurações de placas e vigas foram analisadas:

Tabela 5.2 Dimensões da configuração I

Espessura da placa I e II	3,0 mm
Comprimento da placa I e II	1,0 m
Largura da placa I e II	1,0 m
Viga quadrada de espessura	19,05 mm
Viga Quadrada de espessura	50,00 mm

Tabela 5.3 Dimensões da configuração II

Espessura da placa I e II	2 mm
Comprimento da placa I e II	0,40 m
Largura da placa I e II	0,40 m
Viga quadrada de espessura	19,05 mm

5.3) Ondas de Torção em Vigas

As ondas de torção ocorrem em uma barra quando excitada por um torque, isto é, por um momento em que o eixo coincide com o eixo da mesma. Em estruturas compostas por placas e vigas, devido ao acoplamento existente entre ondas de flexão e torção, é comum surgirem estes tipos de onda.

A equação que descreve o deslocamento angular de uma viga submetida a um esforço de torção é dada por [49]

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{c_t^2 \partial t^2} \quad (5.16)$$

onde a velocidade das ondas de torção c_t pode ser calculada pela seguinte equação [1]:

$$c_t = \sqrt{\frac{G J}{I}} \quad (5.17)$$

ou ainda

$$c_t = \sqrt{\frac{\Lambda_t}{I}} \quad (5.18)$$

em que, Λ_t é a rigidez à torção;

G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento;

J é o momento de inércia à torção da seção transversal da viga;

I é o momento de inércia de massa por unidade de comprimento da viga.

O módulo de elasticidade ao cisalhamento pode ser calculado por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.19)$$

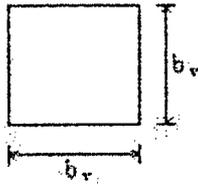


Figura 5.3 Seção transversal de uma viga quadrada

O momento de inércia à torção J de uma viga de seção quadrada (Figura 5.3), é dado por [31]

$$J = 0,1406 b_v^4 \quad (5.20)$$

A resposta da viga pode ser calculada através das Equações de Lagrange [50]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_{viga}}{\partial \dot{q}_n} \right] - \frac{\partial E_{viga}}{\partial q_n} + \frac{\partial U_{viga}}{\partial q_n} = F_n \quad (5.21)$$

O movimento da viga pode ser descrito através dos modos normais $\phi_n(x)$, e o deslocamento angular é dado através de uma combinação linear destes modos

$$\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \quad (5.22)$$

onde $q_n(t) = q_n e^{j\omega t}$.

Considerando as condições de contorno da viga como totalmente livre, a solução pode ser representada por uma família de cossenos

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \cos k_n x \quad (5.23)$$

A energia potencial de uma viga submetida a ondas de torção é dada por [50],

$$U_{viga} = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} GJ(x) \left[\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (5.24)$$

e como a viga tem seção uniforme, $J(x) = J$.

Substituindo a Equação 5.22 na Equação 5.24, tem-se

$$U_{viga} = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} GJ \left[\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) k_x \text{sen}(k_x x) \right]^2 dx \quad (5.25)$$

e, então

$$U_{viga} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} GJ k_x^2 L q_n^2(t) \quad (5.26)$$

Derivando a energia potencial em relação à n-ésima coordenada generalizada, tem-se

$$\frac{\partial U_{viga}}{\partial q_n} = GJ k_x^2 L q_n(t) \quad (5.27)$$

A energia cinética de uma viga submetida às ondas de torção, é dada por [50]

$$E_{viga} = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} I(x) \left[\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (5.28)$$

e, como a seção é constante, então $I(x) = I$.

Substituindo a solução proposta, obtêm-se

$$E_{viga} = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} I \left[\sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \text{sen}(k_x x) \right]^2 dx \quad (5.29)$$

logo

$$E_{viga} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} I \left[\dot{q}(t) \right]^2 L_x \quad (5.30)$$

Derivando a energia cinética em relação à n-ésima velocidade generalizada \dot{q}_n , e em relação ao tempo, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_{viga}}{\partial \dot{q}_n} \right] = \frac{1}{2} I \ddot{q}(t) L \quad (5.31)$$

Agora, fixando a atenção no último termo da Equação 5.21, tem-se que, a equação da força generalizada, representada através da torção distribuída ao longo da viga, é dada por

$$F_n = T_n = \int_0^L T(x_i) \phi_n(x) dx = \int_0^L T(x,t) \cos(k_x x_i) dx \quad (5.32)$$

onde $T(x,t)$ representa o torque distribuído atuando ao longo da viga.

Agora, substituindo as equações da energia potencial (Equação 5.27), energia cinética (Equação 5.31) e forças generalizadas (Equação 5.32), na Equação de Lagrange, obtêm-se

$$\frac{LI \ddot{q}}{2} + \frac{GJK_x^2 L q_n}{2} = T_n \quad (5.33)$$

logo, as coordenadas generalizadas podem ser calculadas pela seguinte equação

$$q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_n}{L(GJK_x^2 - \omega^2 I)} \quad (5.34)$$

Portanto, a resposta da estrutura, pode ser escrita na forma [51]

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_n}{L(GJK_x^2 - \omega^2 I)} \cos(k_x x) e^{j\omega t} \quad (5.35)$$

5.4) Ondas de Flexão em Vigas

No caso de um acoplamento, as ondas de flexão são as que mais transmitem energia entre os sistemas acoplados e, no caso de união de placas e vigas, a influência desse tipo de onda é fundamental para descrever o comportamento da transmissão dessa energia. O modelo de viga utilizado neste trabalho foi o de “viga Euler-Bernoulli”. Este modelo aplica-se com boa precisão quando a seção transversal é pequena em relação ao comprimento de onda de flexão.

A equação que governa este movimento é dada por:

$$c_f^2 \frac{\partial^4 W_v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 W_v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.36)$$

em que

$$c_f = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.37)$$

onde c_f a velocidade do som para ondas de flexão.

A mesma equação, quando escrita no domínio da frequência é expressa por

$$\frac{\partial^4 W_v(x,f)}{\partial x^4} = k_f W_v(x,f) \quad (5.38)$$

sendo k_f o número de onda de flexão, dado por $k_f = \frac{\omega}{c_f}$ (5.39)

A solução da Equação 5.38 é dada por [26]:

$$W_v(x) = A \cosh(k_f x) + B \sinh(k_f x) + C \cos(k_f x) + D \sin(k_f x) \quad (5.40)$$

As condições de contorno de uma viga livre nas bordas são:

$$\left. \frac{\partial^2 W_v(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W_v(x)}{\partial x^3} = 0 \right|_{\substack{x=0 \\ x=L}} \quad (5.41)$$

então, pode-se escrever que [58]

$$W_v(x) = \sin(k_f x) + \sinh(k_f x) + \Phi(\cos(k_f x) + \cosh(k_f x)) \quad (5.42)$$

onde $\Phi = \frac{\sin(k_f L) - \sinh(k_f L)}{\cosh(k_f L) - \cos(k_f L)}$ (5.43)

A solução proposta para representar o movimento da viga é:

$$W_v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin(k_f x) + \sinh(k_f x) + \Phi(\cos(k_f x) + \cosh(k_f x)) \quad (5.44)$$

As expressões das energias potencial e cinética da viga, devido ao movimento lateral são, respectivamente

$$U_{viga} = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} EI \left[\frac{\partial^2 w_v(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (5.45)$$

$$E_{viga} = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} m \left[\frac{\partial w_v(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (5.46)$$

As forças generalizadas podem ser representadas por

$$F_n = Q_n = \int_0^{L_x} Q(x,t) \phi_n(x) dx = \int_0^{L_x} Q(x,t) W_v(x) dx \quad (5.47)$$

onde $Q(x,t)$ é o esforço distribuído que atua ao longo da viga. Fazendo uso das Equações de Lagrange, pode-se calcular as coordenadas generalizadas

$$q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4IkxQ}{(2(Ekx^2 + IMv\omega^2) \frac{\cosh 2kxL(\sin kxL - \sinh kxL)}{\cosh kxL - \cos kxL} - 4(Ekx^2 - IMv\omega^2) \cos kx(-1 + \frac{(\sin kxL - \sinh kxL)^2}{\cos kxL - \cosh kxL} \sinh kxL + \frac{(Ekx^4 + IMv\omega^2) (\frac{2(\sin kxL - \sinh kxL)(\cos kxL - \cosh kxL + 2kxL \sin kxL - 2kxL \sinh kxL)}{(\cos kxL - \cosh kxL)^2} + (1 + \frac{(\sin kxL - \sinh kxL)^2}{(\cos kxL - \cosh kxL)^2} \sinh 2kxL))}{(5.48)}$$

portanto, a resposta pode ser escrita assim:

$$W_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4IkxQ}{(2(Ekx^2 + IMv\omega^2) \frac{\cosh 2kxL(\sin kxL - \sinh kxL)}{\cosh kxL - \cos kxL} - 4(Ekx^2 - IMv\omega^2) \cos kx(-1 + \frac{(\sin kxL - \sinh kxL)^2}{\cos kxL - \cosh kxL} \sinh kxL + \frac{(Ekx^4 + IMv\omega^2) (\frac{2(\sin kxL - \sinh kxL)(\cos kxL - \cosh kxL + 2kxL \sin kxL - 2kxL \sinh kxL)}{(\cos kxL - \cosh kxL)^2} + (1 + \frac{(\sin kxL - \sinh kxL)^2}{(\cos kxL - \cosh kxL)^2} \sinh 2kxL))}{(5.49)} e^{i\omega t}$$

5.5) Cálculo da Mobilidade na Viga

Em cada um dos pontos x_i da discretização na viga, atua um torque T_i provocando uma velocidade angular $\dot{\theta}_j$, como também em todos esses mesmos pontos atua uma força cortante Q_v , provocando um deslocamento transversal. As funções de mobilidade são calculadas através das expressões

$$\text{Para o torque} \quad Y_v^T(x_i, x_j) = \frac{\dot{\theta}(x_j)}{T(x_i)} \quad (5.50)$$

$$\text{E para a força cortante,} \quad Y_v^{Q_v}(x_i, x_j) = \frac{\dot{W}_v(x_j)}{Q_v(x_i)} \quad (5.51)$$

5.6) Construção dos Modelos Experimentais

As placas das configurações I e II, desta parte do trabalho, foram preparadas para que o acoplamento com a viga fosse o mais perfeito possível. Na verdade, a viga foi fixada no meio de uma placa de 2,0 m x 1,0 m resultando em um sistema composto por duas placas de 1,0 m x 1,0 m com uma viga entre elas. Da mesma forma, partindo-se de uma única placa de 0,8 m x 0,4 m, sendo fixada uma viga no meio, resultou em um sistema considerado de duas placas iguais de 0,4 m x 0,4 m com uma viga no meio. A viga foi colada na placa através de adesivo estrutural de base epóxi, que proporciona elevada aderência e rigidez na união. Verificou-se que a placa estivesse totalmente plana, e evitou-se qualquer tipo de esforço sobre

a mesma e também o cuidado na forma de armazenamento, para que não houvesse nenhum empenamento.

Como mencionado no Capítulo 4, outras formas possíveis de união entre a viga e as placas, tais como: parafusos, rebites, solda tipo ponto ou soldagem com deposição de material, foram descartadas pois, como a união não é contínua, o aparecimento de grande amortecimento estrutural provocado pelo atrito relativo entre as duas partes unidas, modifica as condições ideais do sistema de medições.

A união através de solda, por deposição de material (solda elétrica com eletrodo revestido, Mig ou Mag), apresenta o inconveniente de favorecer o aparecimento de empenamento da placa, podendo prejudicar a análise, sendo por isso descartada.

Para que a adesão entre vigas e placas fosse a melhor possível, tanto as vigas quanto as placas foram preparadas cuidadosamente, sendo lixadas e limpas, com solvente mineral, para garantir completa ausência de oleosidade e poeira que poderiam afetar a aderência. Durante o processo de cura do adesivo (aproximadamente 24 horas) as superfícies coladas foram mantidas numa superfície horizontal, totalmente lisa e plana (piso), e foram mantidas unidas através da utilização de pesos distribuídos sobre as vigas.

A estrutura foi suspensa por um único fio, fino e leve, preso num canto de uma das bordas, através de um grampo especial, e pendurado no teto juntamente com um distorcedor, para compensar possíveis rotações da estrutura montada. O furo feito na placa, para acondicionar o grampo com o fio, tinha um diâmetro de apenas 2 mm, para não influenciar na resposta da estrutura. Na análise através do Método da Mobilidade e Elementos Finitos não se levou em conta a existência de nenhum vínculo tal como o fio usado nas medições experimentais.

Para que houvesse concordância entre os pontos usados nas medições e os usados tanto pelo Método da Mobilidade e Elementos Finitos, a estrutura foi mapeada, em linhas horizontais e verticais, equidistantes 10 cm entre si e os pontos de interseção foram cuidadosamente marcados com canetas especiais, sem nenhum tipo de marca estrutural no sistema.

As placas e as vigas foram medidas e pesadas no Laboratório de Metrologia da UFSC, a fim de determinar sua densidade com precisão.

Foram incluídas na superfície das placas fitas autocolantes de alumínio, com espessura e peso desprezáveis, a fim de se aumentar o amortecimento da mesma.

A Figura 5.6 mostra uma placa sendo preparada para receber a colagem da viga e, a Figura 5.7 mostra uma viga já colada numa placa.

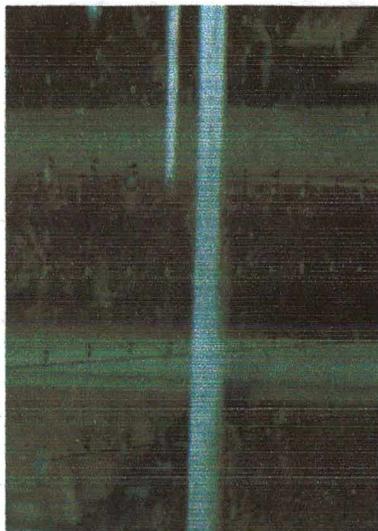


Figura 5.4 Fotografia de uma placa sendo fixada para colagem de uma viga

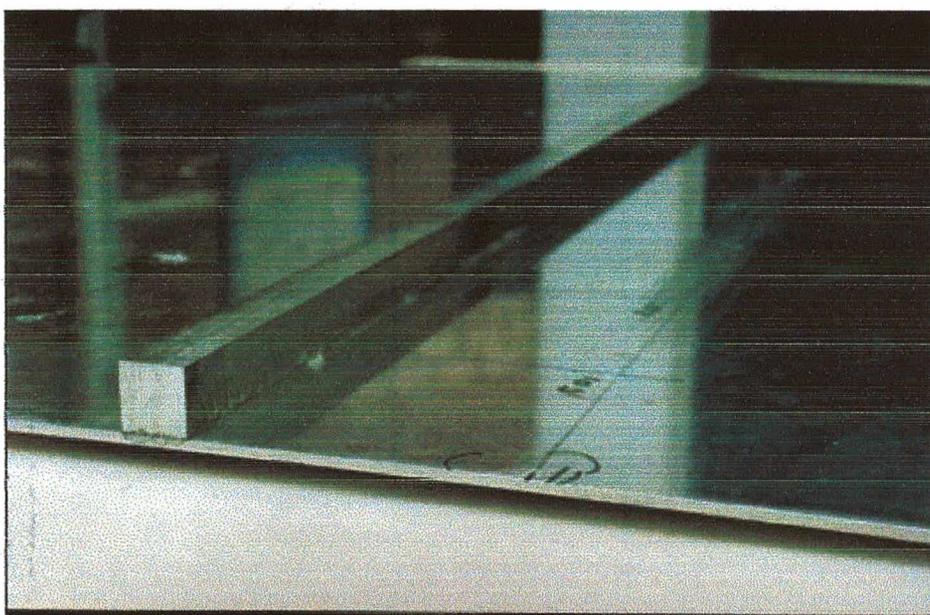


Figura 5.5 Fotografia de uma viga colada numa placa através de cola adesiva epóxi.

5.7) Resultados de Funções de Resposta em Frequência

5.7.1) Mobilidade Pontual – Configuração II – Viga Quadrada 19,05 mm

As Figuras 5.6 a 5.10 mostram a mobilidade pontual, num sistema constituído de duas placas de alumínio acopladas entre si, com dimensões 0,4 m x 0,4 m e espessura de 2 mm cada uma, com uma viga quadrada de 19,05 mm de lado da seção transversal, colada na linha de acoplamento entre as placas. A excitação considerada, nos métodos da mobilidade e elementos finitos, foi uma força harmônica de magnitude unitária, localizada no ponto

$x = 20 \text{ cm}$ e $y = 10 \text{ cm}$ e a resposta sendo medida no mesmo ponto, sendo mostradas em faixas de frequência diferentes e complementares, para uma melhor visualização. A Figura 5.10 mostra a mesma curva na faixa total de 0 a 1000 Hz.

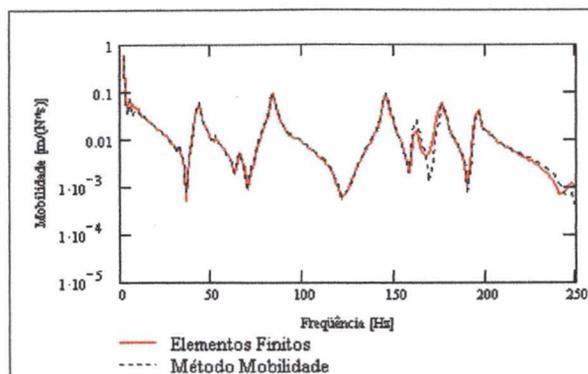


Figura 5.6 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,40 m - viga 19,05 mm, 0 a 250 Hz.

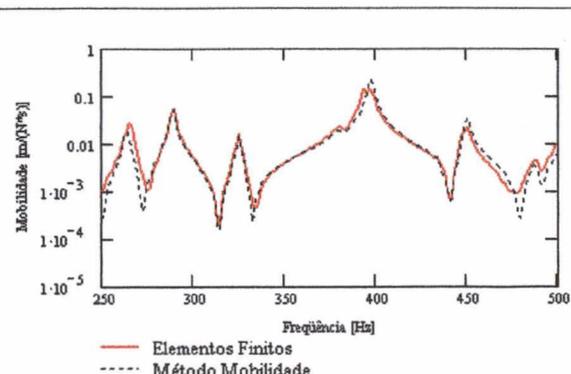


Figura 5.7 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4m viga 19,05 mm, 250 a 500 Hz.

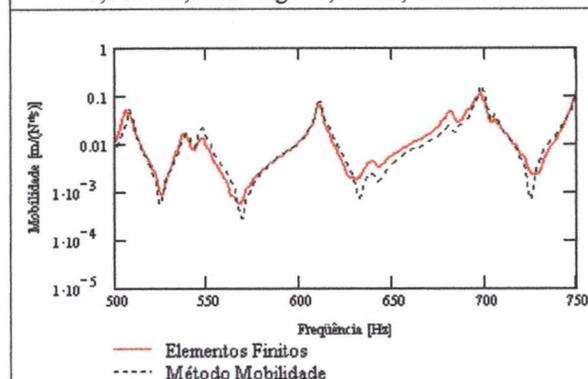


Figura 5.8 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm, 500 a 750 Hz.

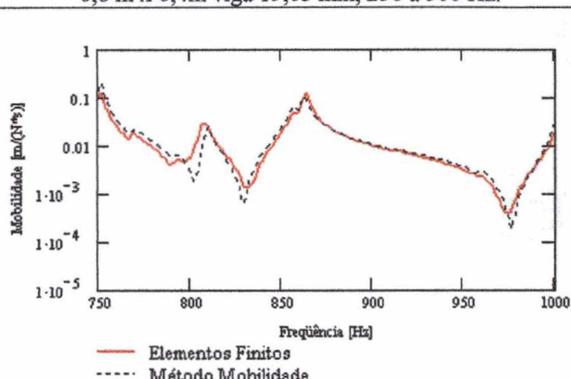


Figura 5.9 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm, 750 a 1000 Hz.

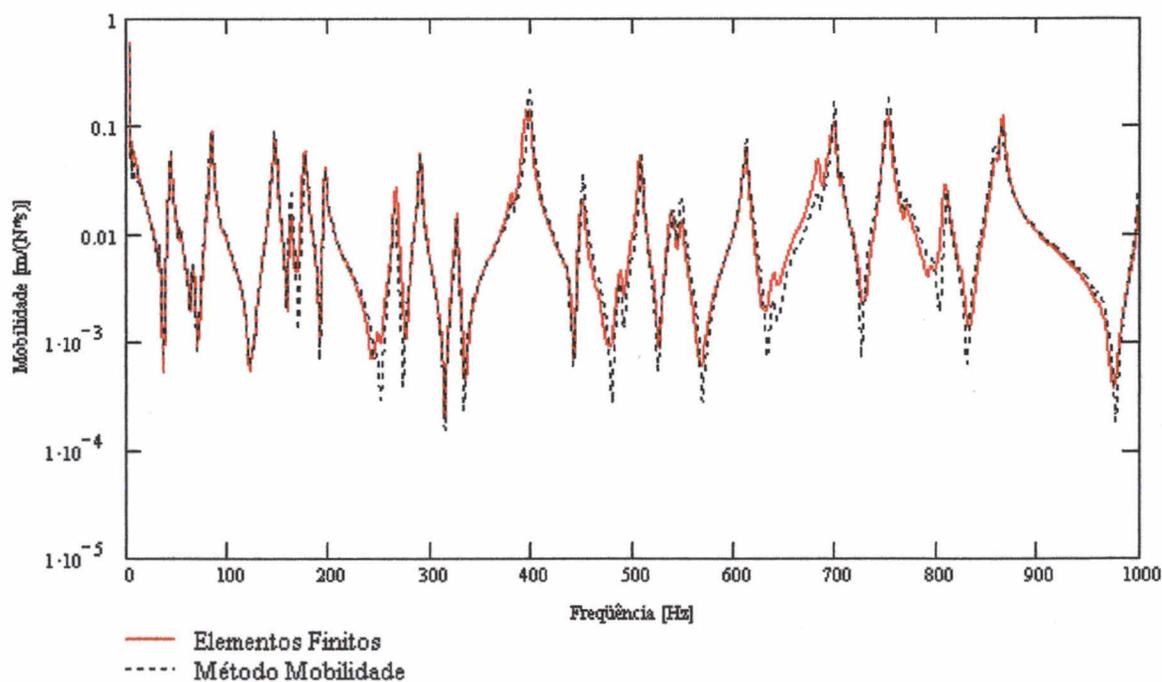


Figura 5.10 Mobilidade pontual numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4m - viga 19,05 mm - 0 a 1000 Hz.

As Figuras 5.11 a 5.15 mostram a mesma mobilidade pontual, porém acrescentada da resposta medida experimentalmente.

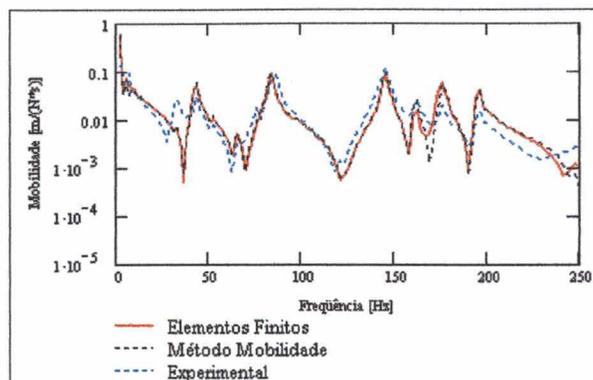


Figura 5.11 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,40 m viga 19,05 m frequência 0 a 250 Hz.

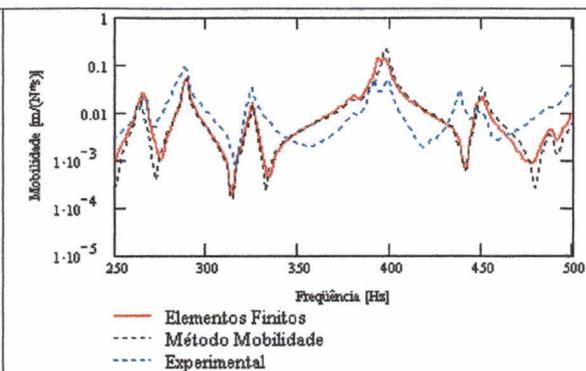


Figura 5.12 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm frequência 250 a 500 Hz.

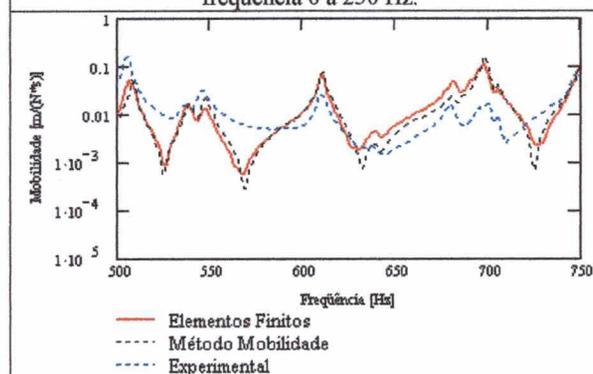


Figura 5.13 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm frequência 500 a 750 Hz.

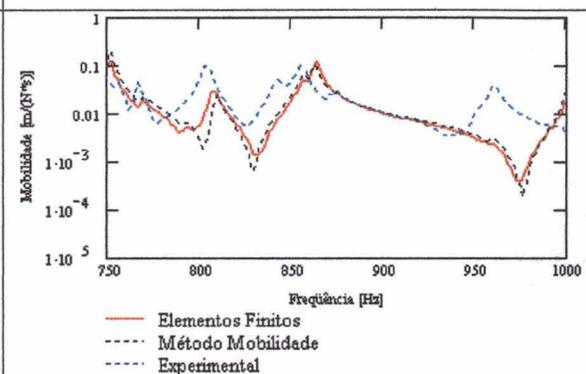


Figura 5.14 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm frequência 750 a 1000 Hz.

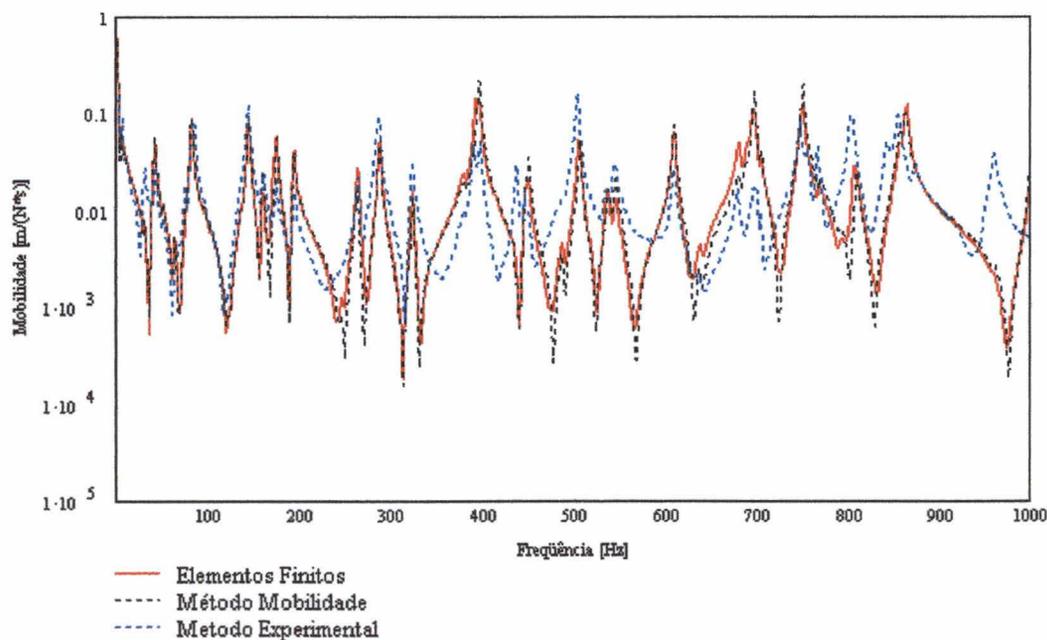


Figura 5.15 Mobilidade pontual numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,4 m - viga 19,05 mm. frequência 0 a 1000 Hz

Pode-se conferir, pelas figuras, que a resposta obtida através do método da mobilidade apresenta uma boa concordância em comparação com a resposta obtida por elementos finitos e, mais ainda, a resposta medida experimentalmente, apresenta a mesma forma e praticamente os mesmos picos de ressonância, podendo-se afirmar então que a comparação mostrada na Figura 5.15 é bastante razoável.

5.7.2) Mobilidade de Transferência – Configuração II – Viga Quadrada 19,05 mm

As Figuras 5.16 a 5.20 apresentam a mobilidade de transferência, do mesmo sistema anterior (Item 5.7.1). A força de excitação está localizada no ponto $x = 20$ cm e $y = 10$ cm e a resposta foi medida no ponto $x = 40$ cm e $y = 30$, portanto medida na viga, exatamente no meio das placas.

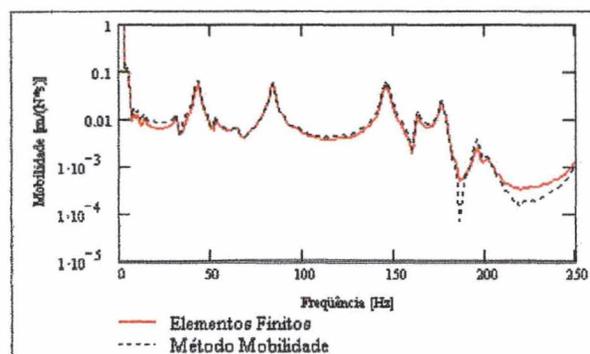


Figura 5.16 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 0,8 m x 0,4 m faixa de freq. 0 a 250 Hz.

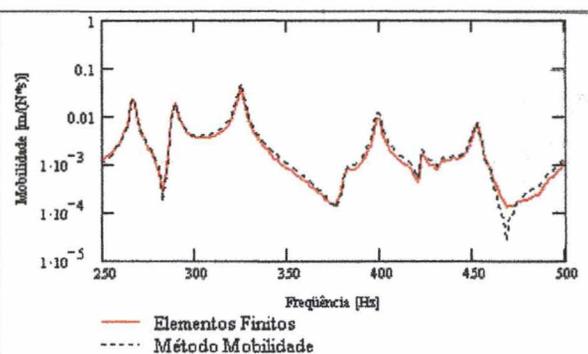


Figura 5.17 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 0,8 m x 0,4 m faixa de freq. 250 a 500 Hz.

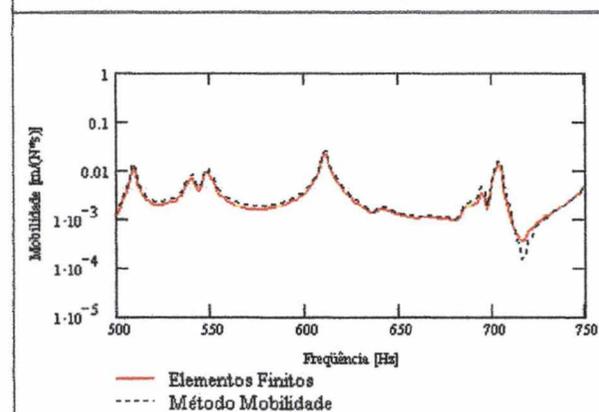


Figura 5.18 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 20,8 m x 0,4 m faixa de freq. 500 a 750 Hz.

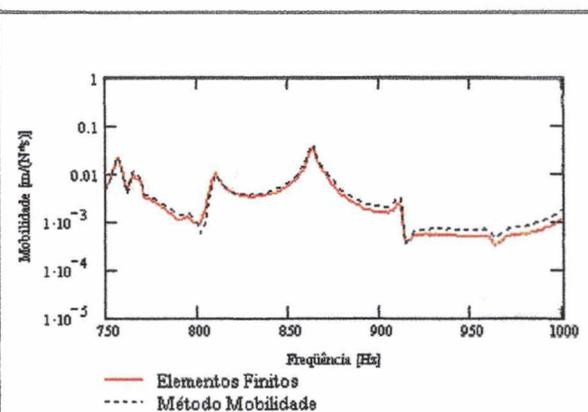


Figura 5.19 Mobilidade transferência numérica e analítica placa 0,8 m x 0,4 m faixa de freq. 750 a 1000 Hz.

Nota-se aqui, também, que a concordância entre as curvas obtidas pelo método da mobilidade e elementos finitos é boa.

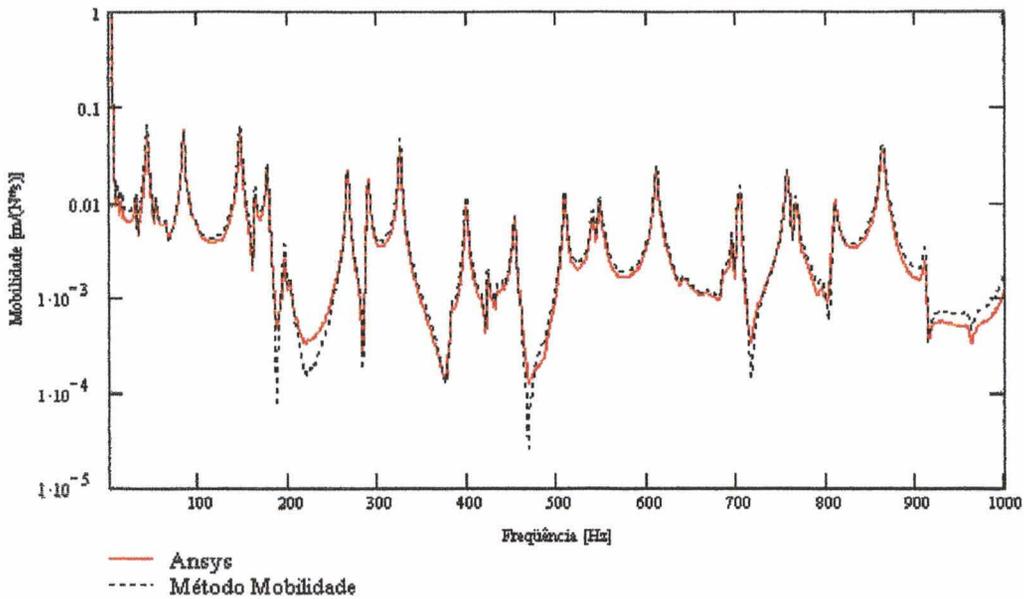


Figura 5.20 Mobilidade de transferência numérica e analítica - placa 0,8 m x 0,4 m - viga 19,05 mm, de 0 a 1000 Hz

As Figuras 4.21 a 4.25 mostram a mesma mobilidade de transferência porém acrescentada da resposta medida experimentalmente.

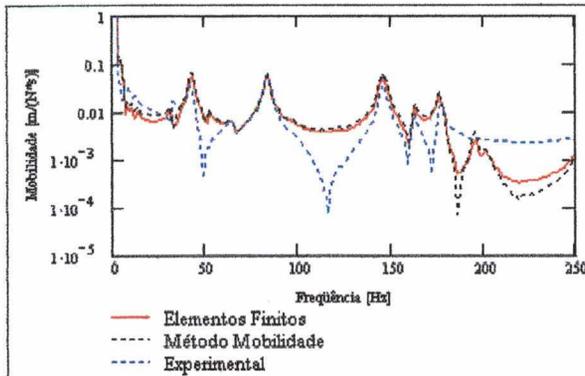


Figura 5.21 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm frequência 0 a 250 Hz.

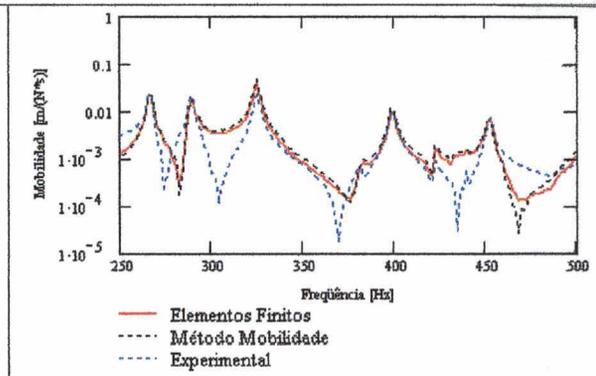


Figura 5.22 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm frequência 250 a 500 Hz.

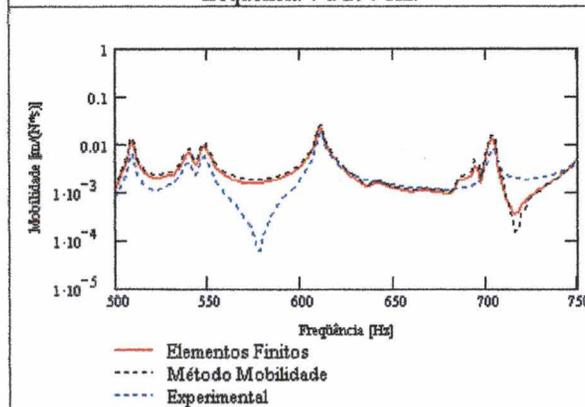


Figura 5.23 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm frequência 500 a 750 Hz.

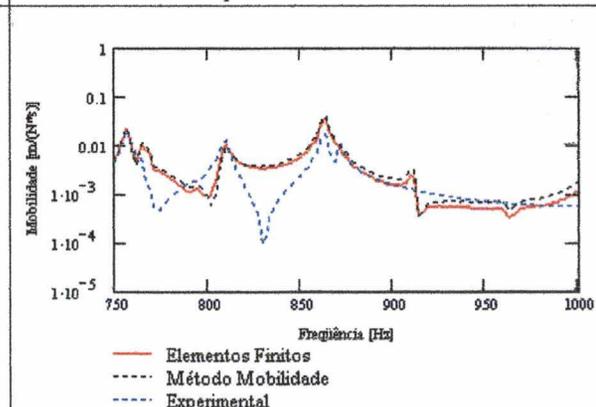


Figura 5.24 Mobilidade transferência numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm de frequência 750 a 1000 Hz.

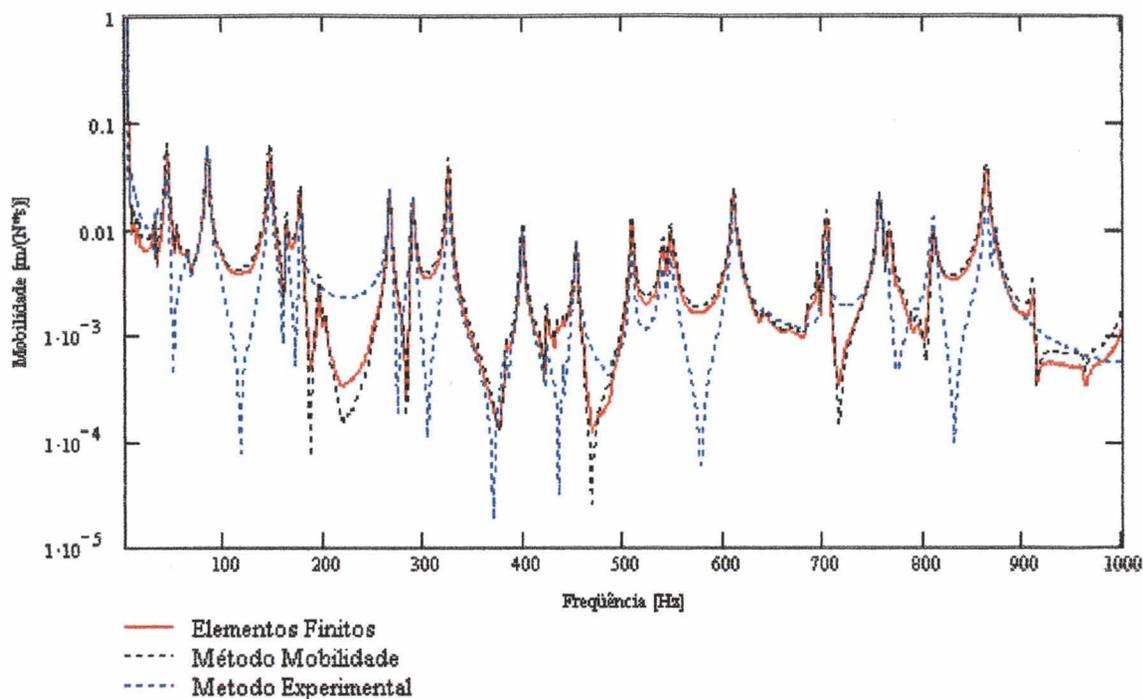


Figura 5.25 Mobilidade de transferência numérica, analítica e experimental - placa 0,8 m x 0,4 m - viga 19,05 mm faixa de frequência 0 a 1000 Hz.

Observa-se da Figura 5.25 que os valores das frequências de ressonância do sistema permanecem praticamente inalterados, e as amplitudes apresentam uma pequena variação. Essa concordância demonstra mais uma vez a importância e precisão do método proposto neste estudo na obtenção de repostas de placas livre-livre.

5.8) Análise dos Efeitos da Viga de Reforço

Após terem sido apresentadas diversas comparações de resposta em frequência entre os vários métodos, corroborando com os resultados obtidos pelo método da mobilidade, a seguir será usado este método para analisar a influência da inclusão de uma viga de reforço no acoplamento entre duas placas iguais, excitadas por uma força transversal unitária.

5.8.1) Comparação na Configuração I - com viga acoplada/sem viga acoplada

O efeito do acoplamento de uma viga de 50 mm de lado da seção transversal com um sistema formado de duas placas iguais de 1,0 m x 1,0 m, é apresentado nas Figuras 5.26 a 5.30, que mostram a mobilidade pontual calculada pelo Método da Mobilidade, do sistema com e sem a viga de reforço colada na linha central da placa. A localização da excitação é o

ponto $x = 50$ cm e $y = 20$ cm e a resposta foi medida no mesmo ponto. Por causa da grande quantidade de modos envolvidos, a curva será apresentada em faixas distintas e complementares de frequência.

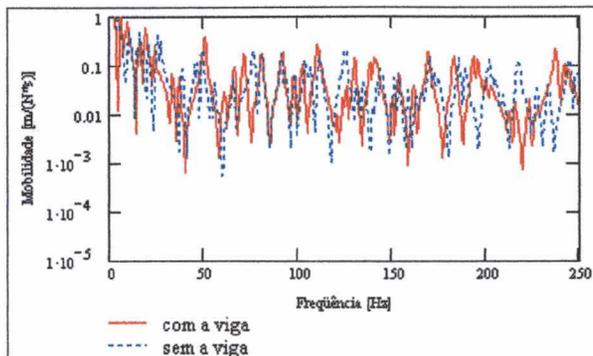


Figura 5.26 Mobilidade pontual - placa 2,0 m x 1,0 m viga 50 mm frequência 0 a 250 Hz.

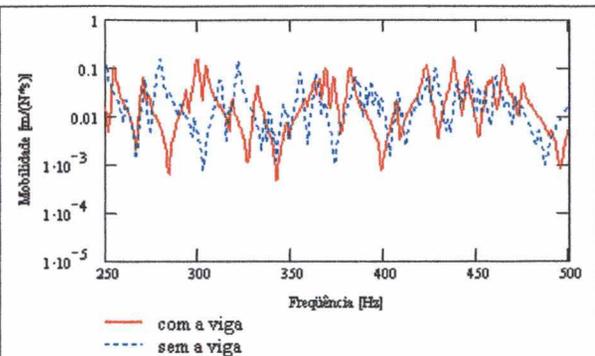


Figura 5.27 Mobilidade pontual - placa 2,0 m x 1,0 m viga 50 mm frequência 250 a 500 Hz.

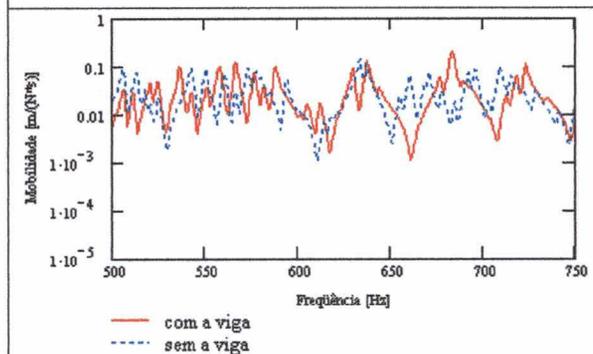


Figura 5.28 Mobilidade pontual - placa 2,0 m x 1,0 m viga 50 mm frequência 500 a 750 Hz.

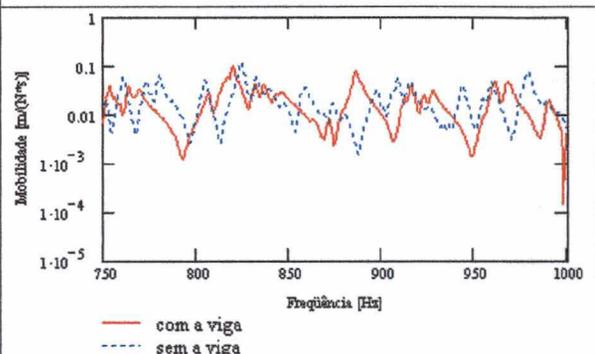


Figura 5.29 Mobilidade pontual - placa 2,0 m x 1,0 m viga 50 mm frequência 750 a 1000 Hz.

A Figura 5.30 mostra a mesma curva de 0 a 1000 Hz.

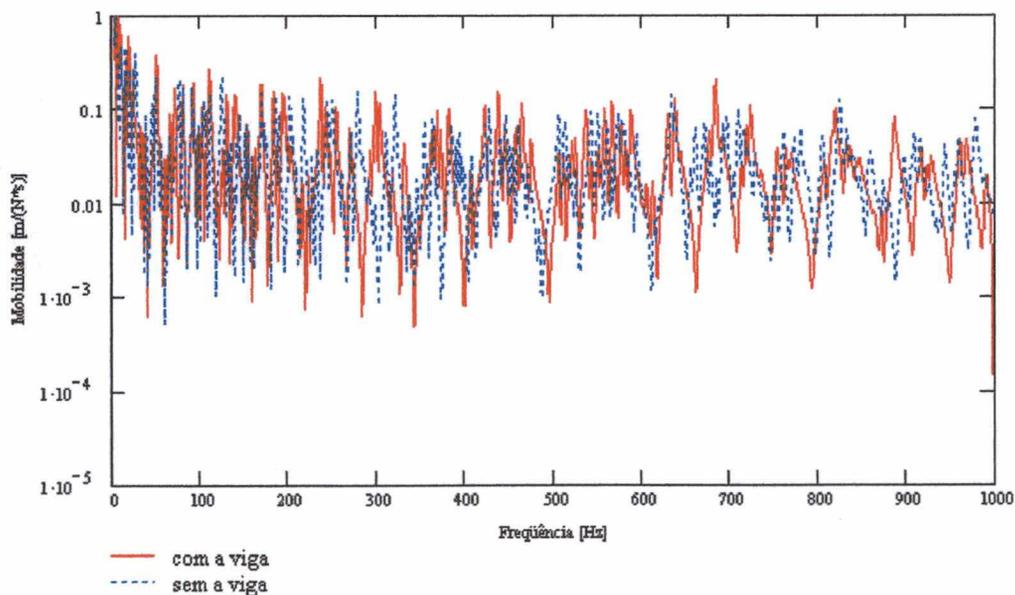


Figura 5.30 Mobilidade pontual - Configuração I- com e sem a viga de 50 mm acoplada

Evidencia-se que, com a introdução da viga todo o sistema é alterado, tanto nos valores das freqüências de ressonância, como de amplitude.

A função resposta em freqüência de transferência, para a placa II, produz efeitos significativos nas amplitudes, como mostra a Figura 5.31. Esta figura mostra a mobilidade de transferência, sendo que os pontos, em que as funções resposta em freqüência foram medidas, encontram-se exatamente na linha em que a viga foi colada, ou seja, a figura mostra a diferença entre funções resposta em freqüência medidas nos pontos da linha de união respectivamente antes e depois do acoplamento da viga nas placas, evidenciando, mais uma vez, a influência da viga na transmissão de energia entre as placas, que não somente atua na mudança das ressonâncias do sistema acoplado mas, também, na própria amplitude das mesmas, diminuindo consideravelmente a transmissão de energia.

Corroboram com o que foi exposto acima, as respostas em freqüência tipo mobilidade, obtidas em diversos pontos da estrutura, inclusive na placa II, ou seja, no lado da estrutura após a linha de união entre as placas e a viga. Nas figuras seguintes, a conclusão tomada no exemplo anterior é a mesma para todas as respostas mostradas. A influência da viga na diminuição da energia transmitida entre as placas se faz notar, obviamente tanto nas amplitudes das respostas, quanto na mudança das freqüências de ressonância do sistema.

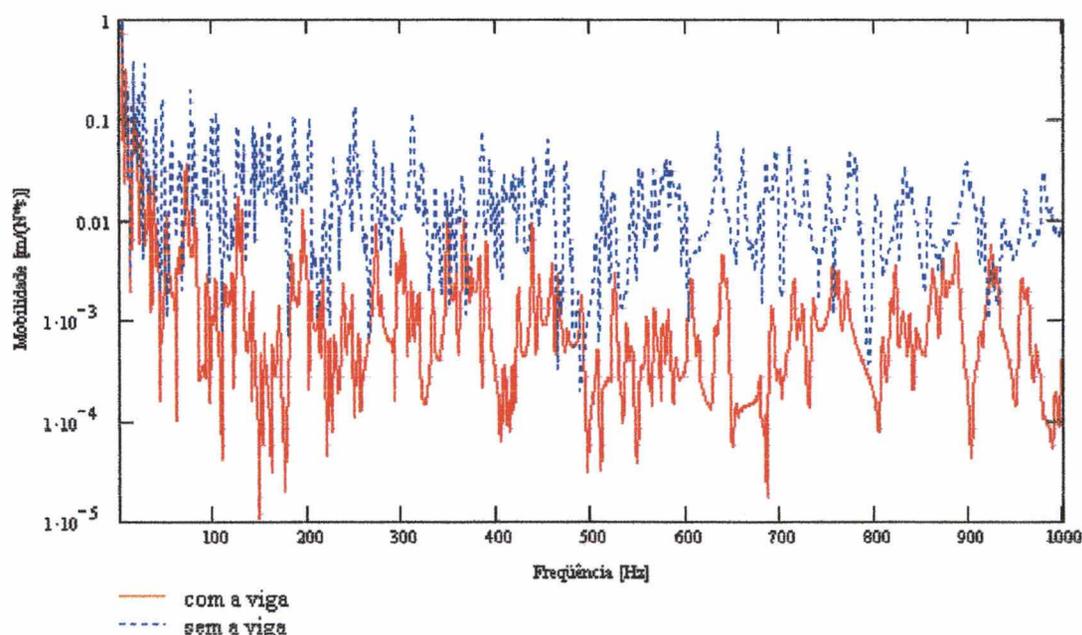


Figura 5.31 Mobilidade de transferência - Configuração I- com e sem a viga de 50 mm acoplada

Tomando como exemplo o ponto $x = 170$ cm e $y = 30$ cm, pertencente à placa II, a Figura 5.32, mostra resultados de resposta em freqüência obtidos neste ponto, antes e depois da viga ser acoplada, evidenciando de forma inequívoca a atuação da viga na

diminuição da transmissão de energia vibratória da placa I para a placa II. Um outro exemplo são as curvas obtidas no ponto $x = 130$ cm e $y = 70$ cm, na placa II, mostrada pela Figura 5.33.

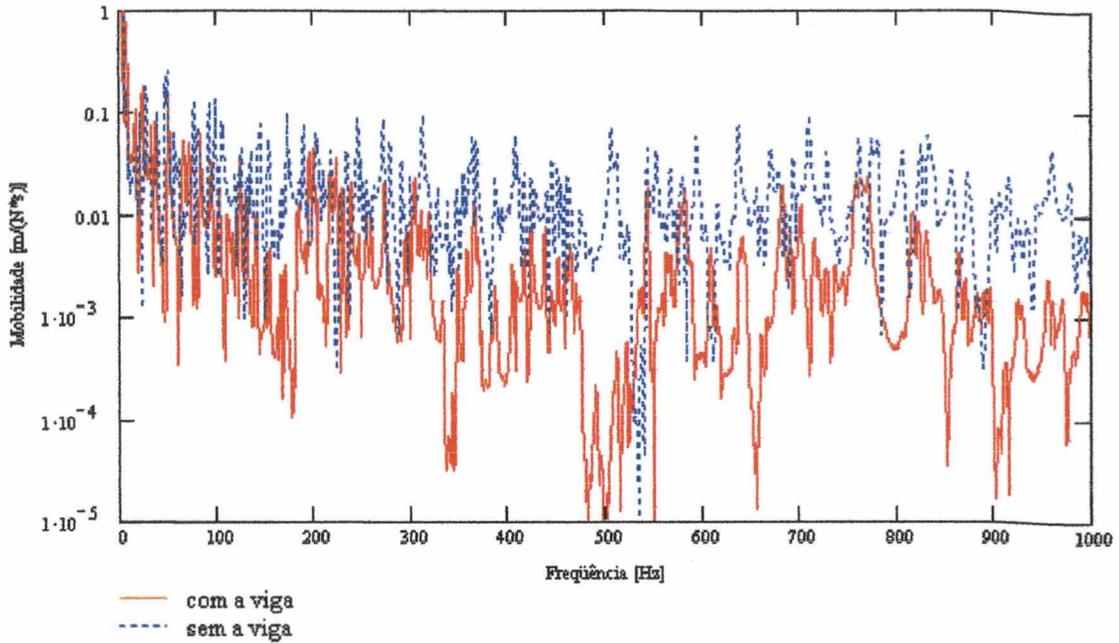


Figura 5.32 Mobilidade de transferência – Configuração I - com e sem a viga acoplada

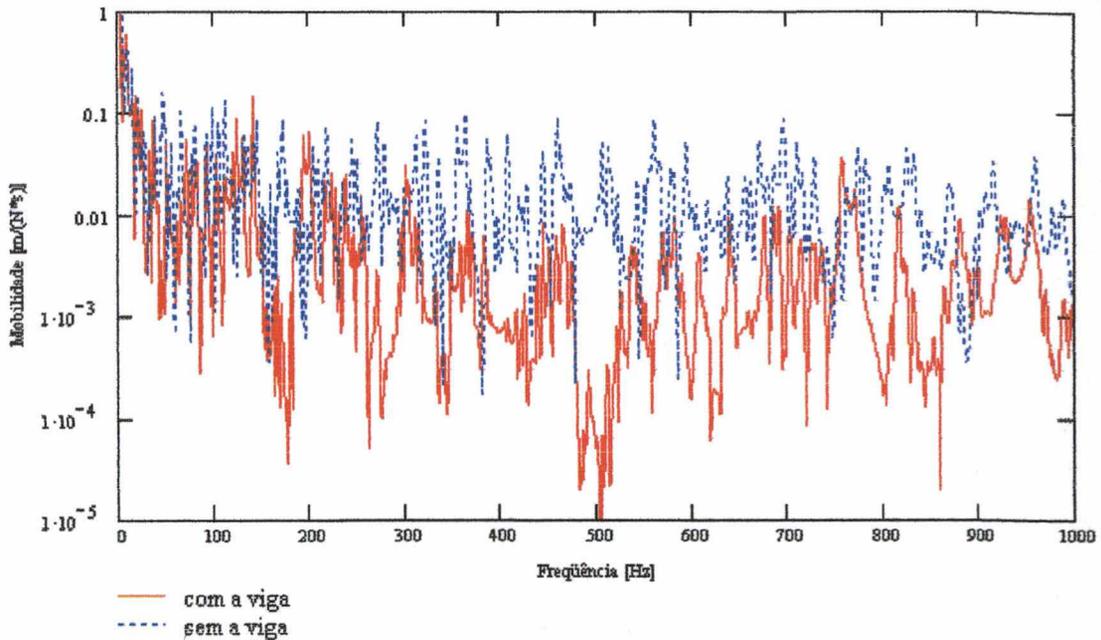


Figura 5.33 Mobilidade de transferência – Configuração I - com e sem a viga acoplada

5.8.2) Comparação na Configuração II - com viga acoplada/sem viga acoplada

Optou-se por mostrar somente a mobilidade de transferência da configuração II, com a viga de 19,05 mm acoplada na união entre as placas e a força de excitação localizada no ponto $x = 30$ cm e $y = 10$ cm, sendo a resposta sendo medida no ponto $x = 40$ cm e

$y = 30$ cm, portanto medido na viga, exatamente no meio das placas. A Figura 5.34 ilustra a curva obtida.

Aqui, nota-se também que, a viga atua na propagação de energia na placa, diminuindo a amplitude como também a forma da curva ou seja, a viga atua aumentando a rigidez do sistema, impedindo a transmissão de energia entre as placas.

Observa-se que o número de ressonâncias não é alterado de forma significativa, conforme esperado de sistemas estruturais formados por chapas. Tem-se observado que a quantidade de modos está muito relacionado às áreas das placas, já que são estas quem proporcionam as ressonâncias. As vigas possuem um efeito maior de reduzir as amplitudes das respostas, principalmente nas altas frequências, através dos efeitos de inércia e de enriquecimento.

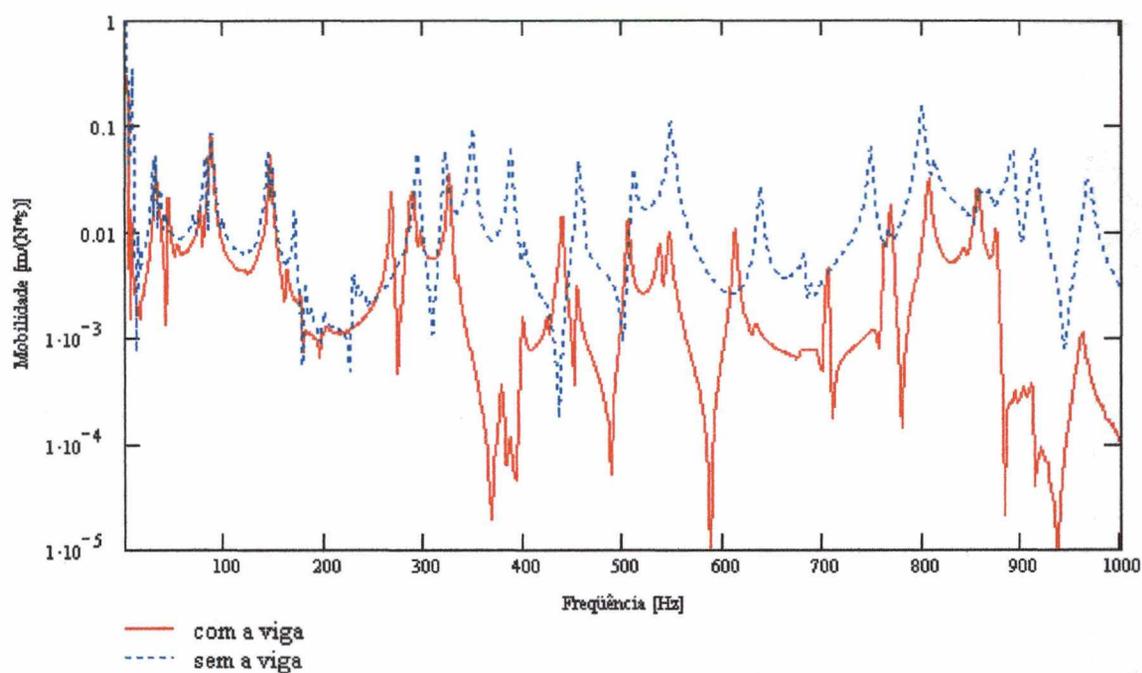


Figura 5.34 Mobilidade de transferência - configuração II - com e sem a viga acoplada

Após todos estes resultados comparativos, nota-se que a amplitude das respostas obtidas em pontos localizados, tanto na linha onde a viga está acoplada quanto na placa II (placa após a viga), é bem menor do que as obtidas com a placa sem o acoplamento da viga. Ocorre também uma mudança das frequências de ressonância da estrutura, ou seja, o formato da curva obtida com a viga acoplada é perceptivelmente diferente do formato da curva obtida sem o acoplamento da viga. Pode-se concluir, então, que a viga impede consideravelmente a transmissão de energia de uma placa para a outra. Isso se deve pelo fato

da viga introduzir um aumento de rigidez e de inércia ao sistema. A viga possui grande inércia à rotação e à flexão.

Estes resultados mostram de forma clara, a grande influência de uma viga na resposta de um sistema composto de placas e vigas acopladas, mesmo que esse sistema seja repleto de ressonâncias, como é o caso do sistema sendo analisado.

5.9) Resultados de Densidade Modal

Conforme já evidenciado no Capítulo 4, neste trabalho o resultado de densidade modal, pelo método da mobilidade, segue o proposto por Clarkson [32], através da Equação 2.32. Como as curvas de mobilidade foram obtidas em banda estreita, 0,5 Hz de discretização, os dados também foram posteriormente convertidos em banda 1/3 oitava, para apresentação dos resultados.

A seguir, são mostrados resultados obtidos da densidade modal, pelo Método da Mobilidade, das configurações I e II, com e sem viga de reforço, na faixa de frequência de 1/3 oitava, tomados através da mobilidade pontual de 15 pontos da estrutura analisada e, somente para efeitos de comparação, obteve-se o resultado da densidade modal para as mesmas configurações de placa, porém plana, na condição de contorno simples apoio, obtida através da Equação 2.30 [31, 25].

A Figura 5.35 mostra a comparação da densidade modal da configuração I, com e sem reforço de uma viga quadrada de 19,05 mm.

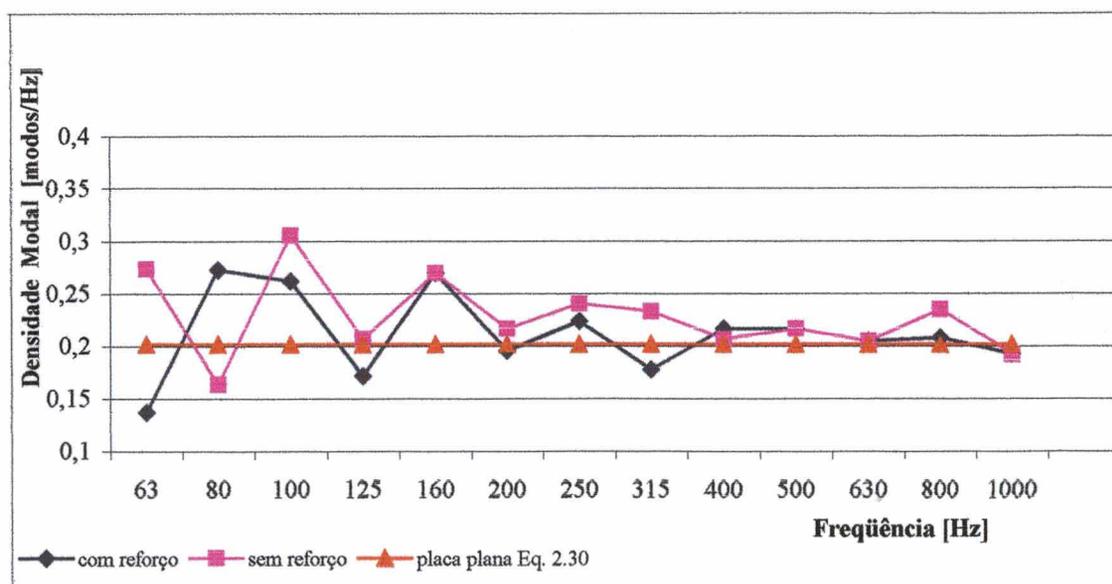


Figura 5.35 Gráficos comparativos entre densidades modais da configuração I, com e sem reforço de uma viga de 19,05 mm, calculadas pelo Método da Mobilidade e de uma placa plana apoiada calculada pela Equação 2.30.

A Figura 5.36 mostra o mesmo sistema de placas acopladas, mas com o reforço de uma viga quadrada de 50 mm.

A Figura 5.37 mostra a diferença da influência da viga de 50 mm e da viga de 19,05 mm, no sistema composto de duas placas iguais de 1,0 m x 1,0 m, quando acopladas ao longo de uma linha comum.

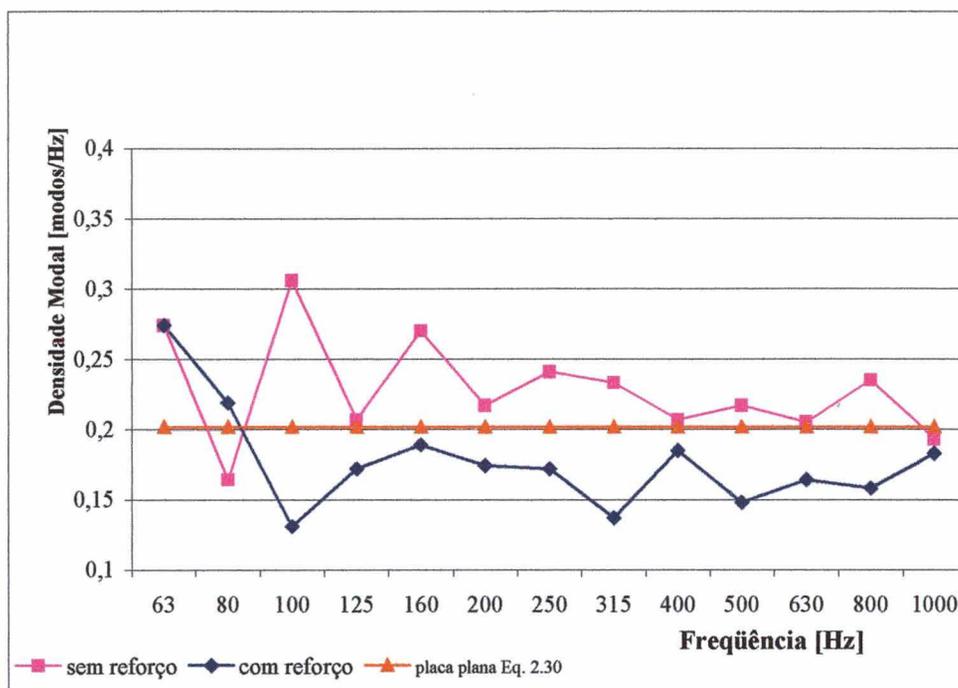


Figura 5.36 Gráficos comparativos entre densidades modais da configuração I, com e sem reforço de uma viga de 50 mm, calculadas pelo Método da Mobilidade e de uma placa plana apoiada calculada pela Equação 2.30.

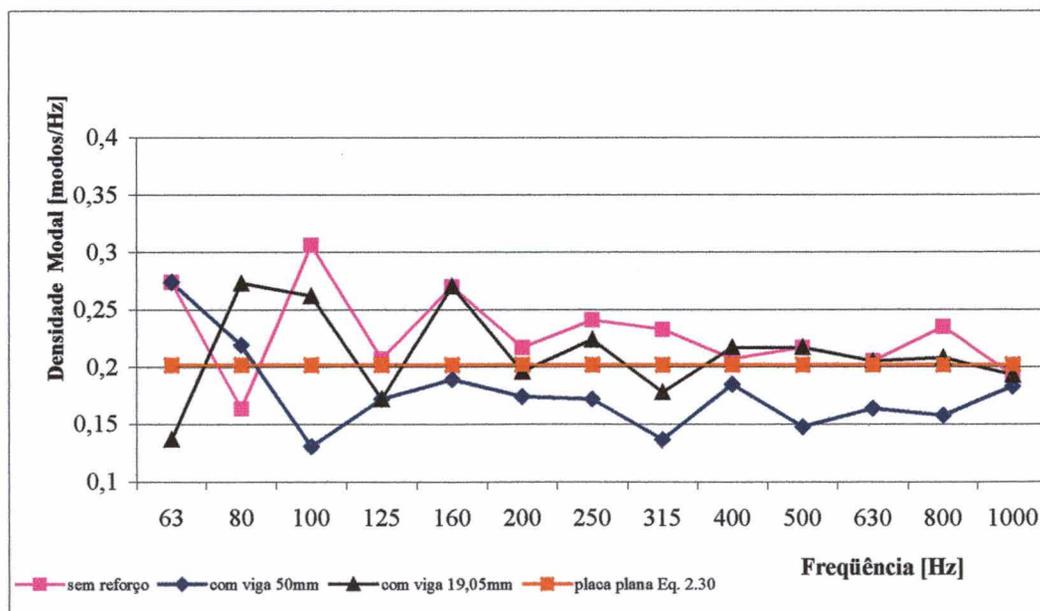


Figura 5.37 Gráficos comparativos entre densidades modais da configuração I, com e sem reforço da viga de 19,05 mm e da viga de 50 mm, calculadas pelo Mét. da Mobilidade e de uma placa lisa apoiada calculada pela Equação 2.30.

A Figura 5.38 apresenta a comparação da densidade modal do sistema da configuração II, com e sem o reforço de uma viga quadrada de 19,05 mm na linha de união, e da mesma configuração, porém simplesmente apoiada, calculada pela Equação 2.30.

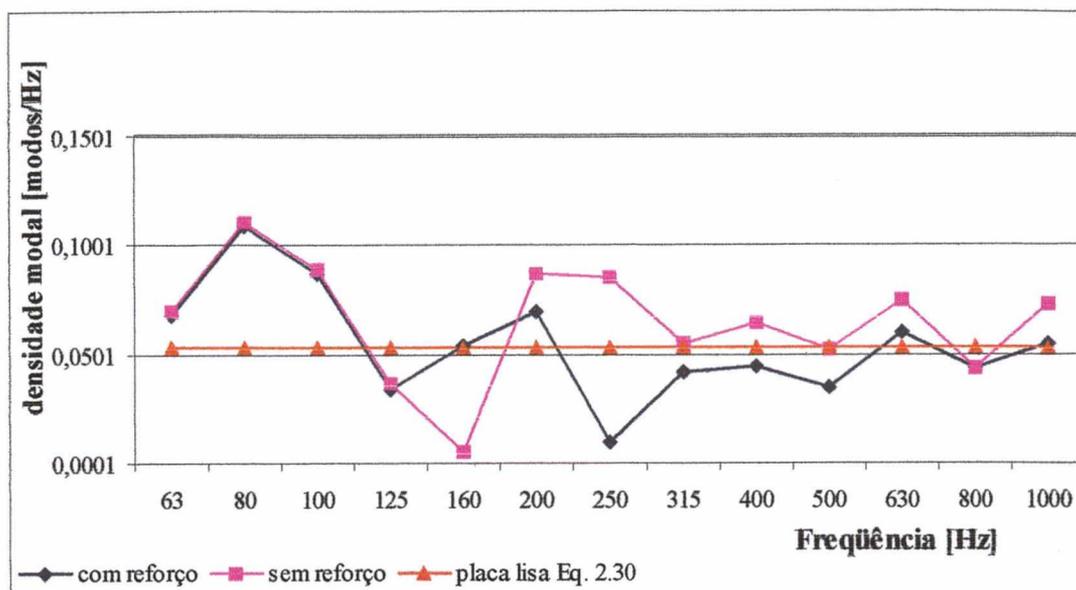


Figura 5.38 Gráficos comparativos entre densidades modais da configuração II, com e sem reforço de uma viga de 19,05 mm, calculadas pelo Método da Mobilidade e de uma placa lisa apoiada calculada pela Equação 2.30.

Pode-se verificar que as curvas da densidade modal das configurações após a inclusão das vigas apresentam valores menores em relação aos de placas sem vigas, mostrando a influência destas na quantidade de modos presente numa banda de frequência e, portanto, na energia da placa.

5.10 Resultados da Potência de Entrada e Transmitida

A principal razão da obtenção das curvas de potência de entrada e transmitida é entender o fluxo de energia na linha de união do acoplamento entre as duas placas e a viga.

Para a obtenção das curvas de fatores de acoplamento, foram usadas as mesmas configurações de placas acopladas, que consistem em duas placas planas iguais com uma borda comum, e uma viga de reforço nesta união. Para o cálculo dos fatores de acoplamento, utilizou-se a Equação 2.47.

Assim, as Figuras 5.39 e 5.40 apresentam, respectivamente, as potências de entrada e transmitida, da configuração I com uma viga quadrada de 50 mm, obtida através do método da mobilidade e elementos finitos.

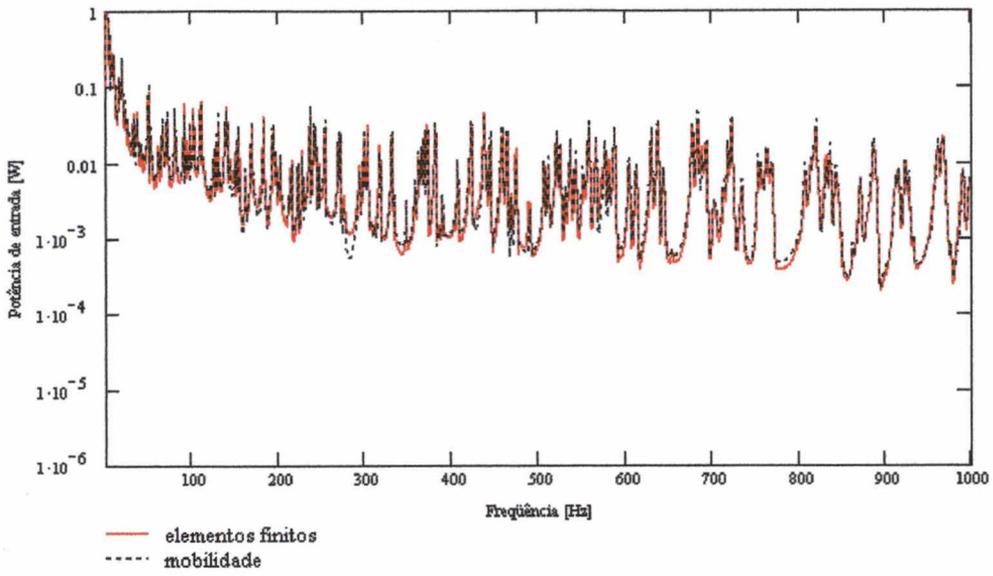


Figura 5.39 Potência de entrada – configuração I – com a viga 50 mm.

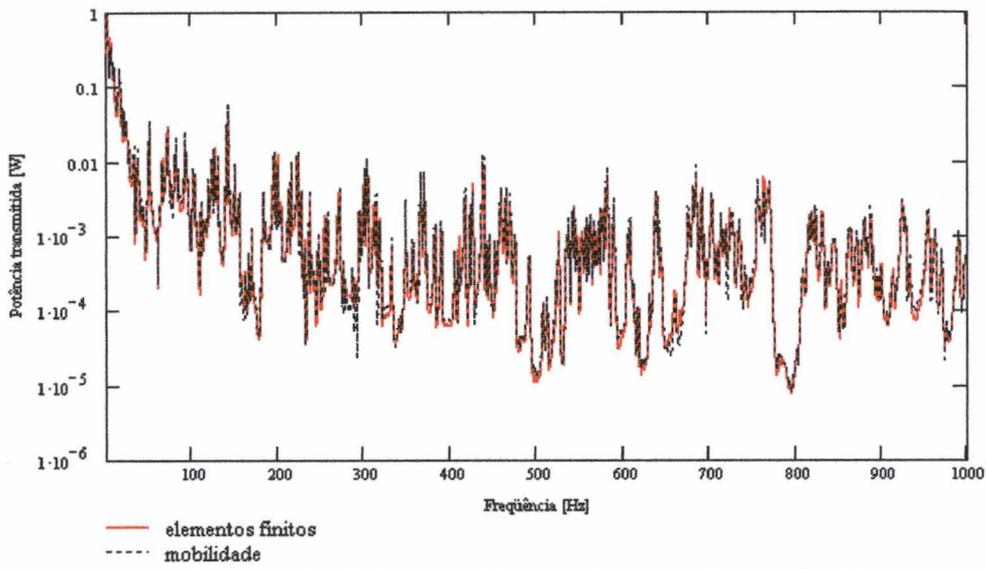


Figura 5.40 Potência transmitida – configuração I - com viga 50 mm

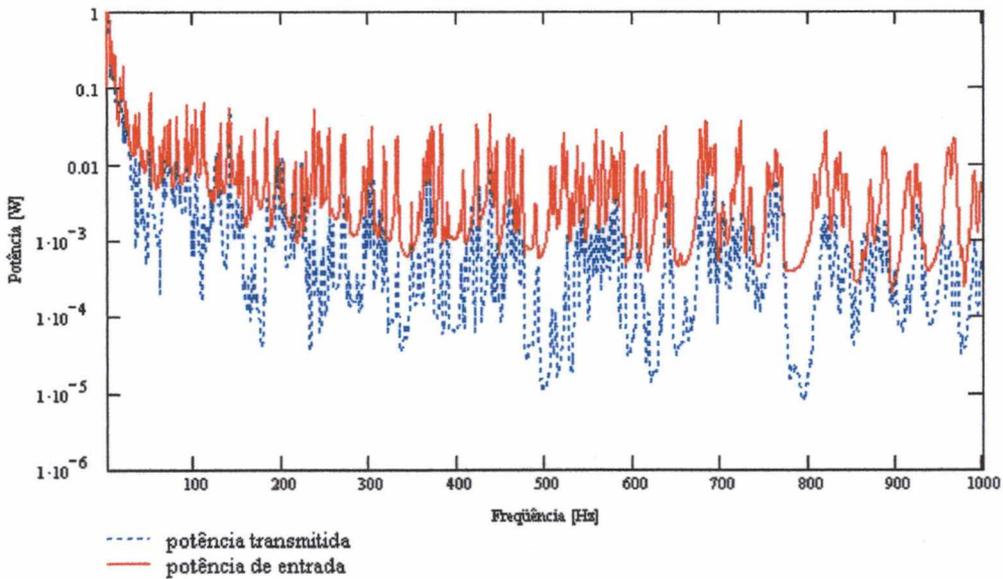


Figura 5.41 Potência de entrada e transmitida – configuração I – com viga 50 mm

A Figura 5.41 apresenta a comparação entre as potências de entrada e transmitida, da configuração I com a viga de 50 mm, obtidas através método da mobilidade.

A Figura 5.42 apresenta o resultado da razão entre as potências transmitida e de entrada.

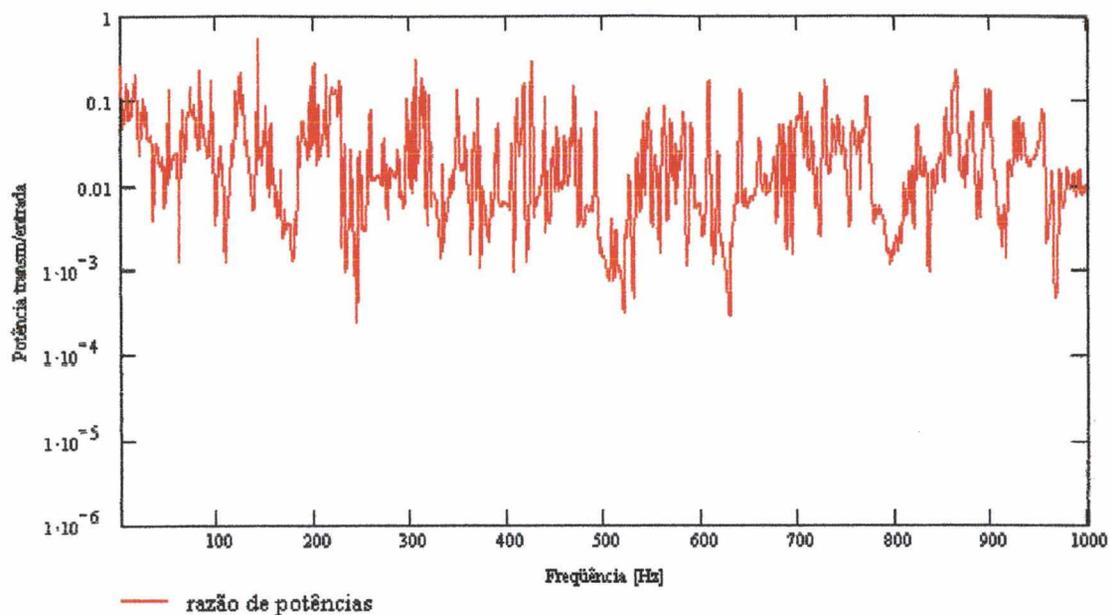


Figura 5.42 Razão entre Potência transmitida/entrada – configuração I - com viga 50 mm

As Figuras 5.43 e 5.44, a seguir, apresentam, respectivamente, as potências de entrada e transmitida, da configuração II com uma viga quadrada de 19,05 mm, obtida via método da mobilidade e elementos finitos.

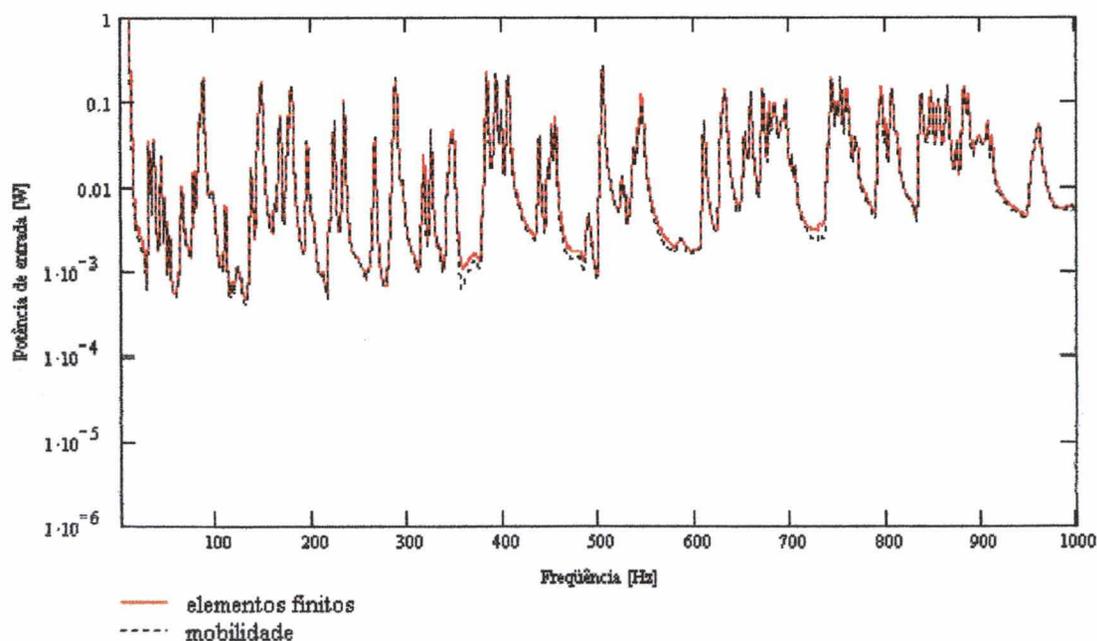


Figura 5.43 Potência de entrada – configuração II – com viga 19,05 mm

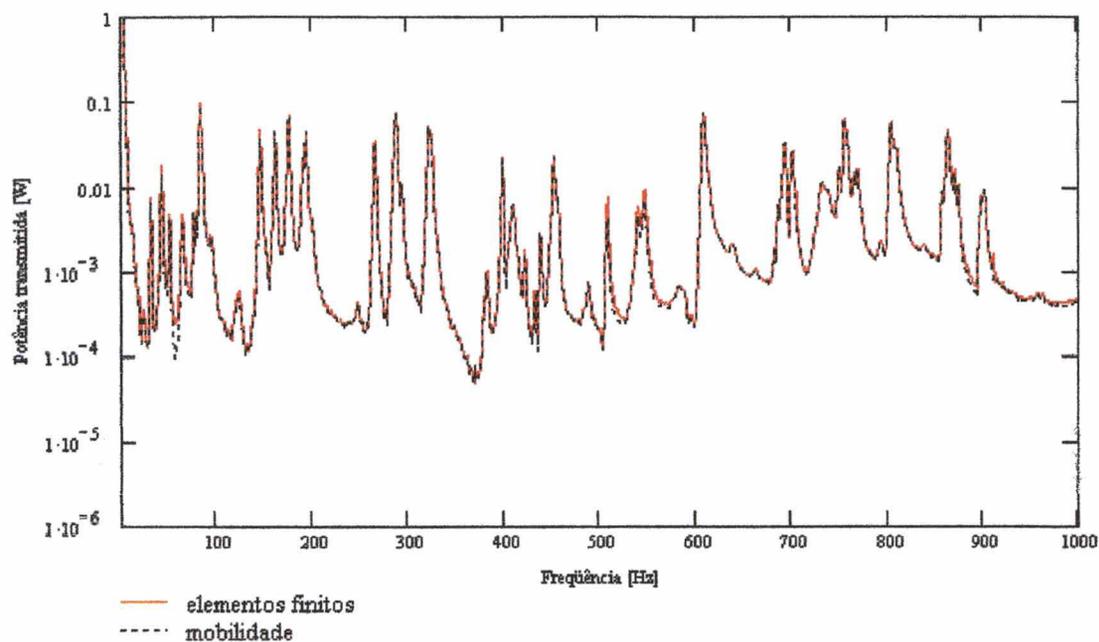


Figura 5.44 Potência transmitida – configuração II – com viga 19,05 mm.

A Figura 5.45 apresenta a comparação entre as potências de entrada e transmitida, da configuração II com a viga de 19,05 mm, obtida através método da mobilidade.

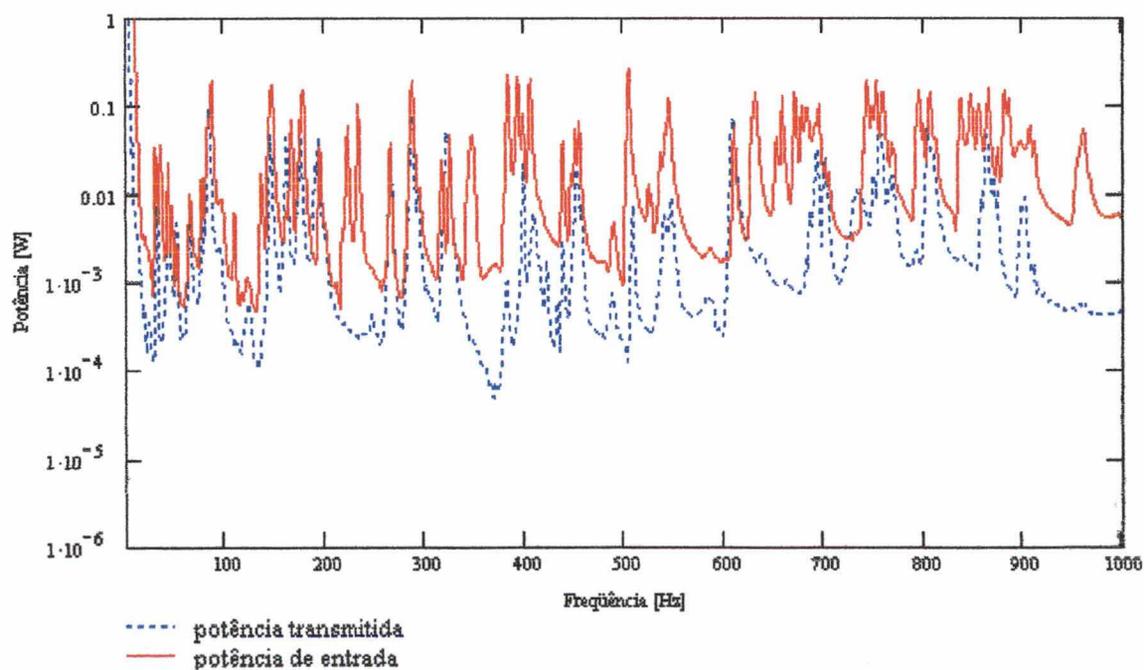


Figura 5.45 Potência de entrada e transmitida - placa 0,8 m x 0,4 m viga 19,05 mm.

A Figura 5.46 apresenta o resultado da razão entre a potência transmitida e a potência de entrada.

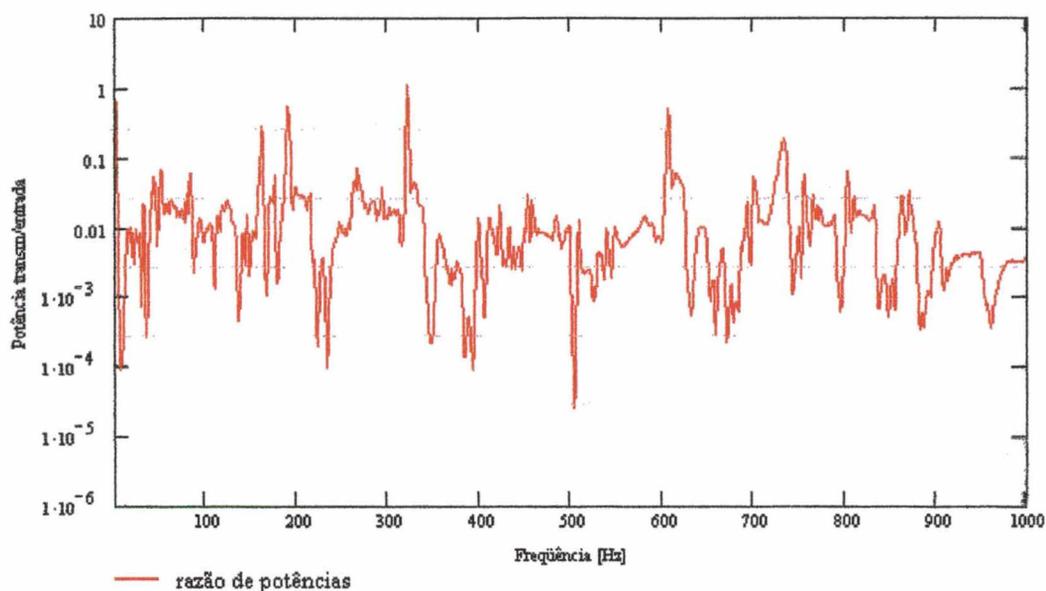


Figura 5.46 Razão entre potência transmitida e potência de entrada – configuração II- com viga 19,05 mm

Nas Figuras 5.42 e 5.46, as frequências onde a maior parte da energia é transmitida são aquelas em que o valor da razão se aproxima da unidade, ou seja, nessas frequências a maior parte da potência de entrada é quase que toda transferida da placa I para a placa II.

As Figuras 5.41 e 5.45 mostram que, no acoplamento entre placas e viga, a energia transmitida de uma placa para outra depende fortemente da viga de reforço que está acoplada na união entre as placas. Comprova-se, em relação à viga, que quanto mais robusta menor a quantidade de energia transferida entre as placas. Em ambientes ruidosos tais como plataforma offshore, onde máquinas possantes transferem grandes quantidades de energia nas placas onde estão instaladas, esse detalhe pode ser usado para controle de ruído de uma determinada máquina, diminuindo sua influência no ruído irradiado por todo o sistema da plataforma.

5.11 Resultados de Fatores de Acoplamento

Como já foi mencionado anteriormente, o fator de acoplamento é um elemento fundamental para a aplicação de SEA e, um dos propósitos deste trabalho, era a sua obtenção através do método proposto. Para os cálculos dos fatores de acoplamento, utilizou-se a Equação 2.47, pelo Método da Mobilidade.

A Figura 5.47 mostra os fatores de acoplamento da placa I para a placa II, para a configuração I estudada, acrescida do fator de acoplamento obtido antes da inclusão das vigas.

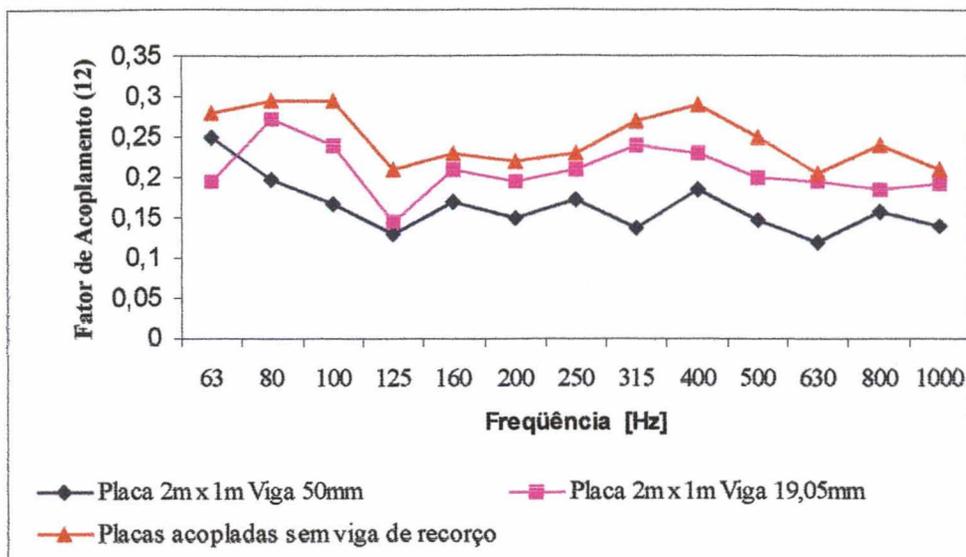


Figura 5.47 Fator de acoplamento – configuração I – sem viga, viga 50 mm e viga 19,05 mm.

Pode-se notar que, em relação ao acoplamento com a viga quadrada de 50 mm, seus valores são notadamente menores que os obtidos em relação à outra viga de 19,05 mm. Essa diferença de valores fortalece ainda mais as conclusões sobre a influência da viga num acoplamento entre placas.

A Figura 5.48, abaixo, está relacionada à placa da configuração II deste capítulo.

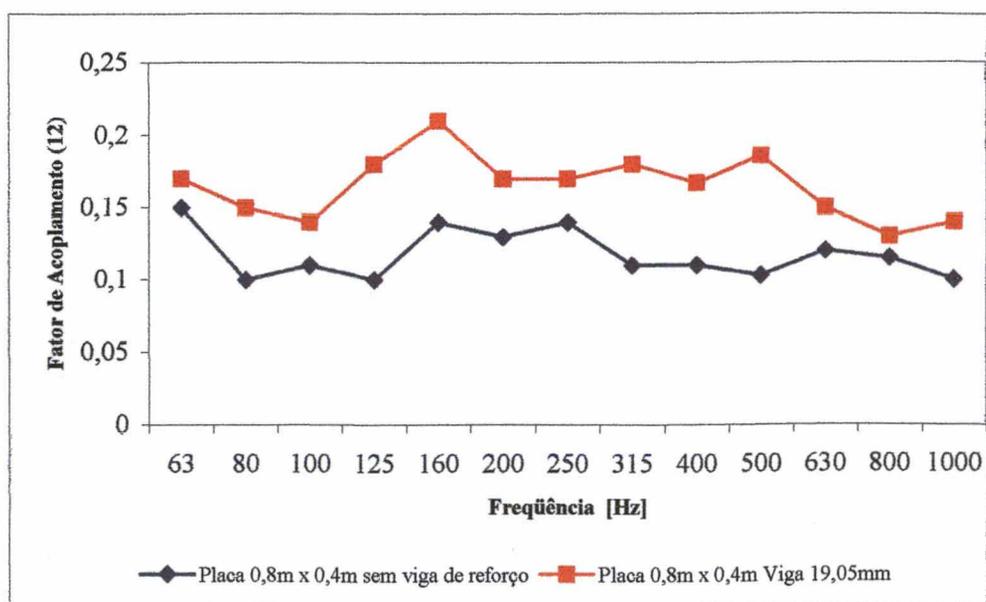


Figura 5.48 Fator de acoplamento – configuração II – sem viga e com viga 19,05 mm

Também, aqui, a influência da viga, alterando o comportamento da transmissão de energia entre os subsistemas acoplados, é demonstrada através da diferença de valores entre os fatores de acoplamento. A viga quadrada de 19,05 mm proporciona uma grande redução da energia transferida da placa I para a placa II, como demonstrada pela diferença entre os fatores de acoplamento presentes na Figura 5.48.

Estes resultados mostraram novamente a boa concordância com os obtidos numérica e experimentalmente, indicando sua viabilidade de implementação em estudos de placas tendo vigas acopladas nas quatro bordas, simulando segmentos de placas reforçadas conforme tipicamente usadas em plataformas “offshore”.

5.12) Esforços e Deslocamentos ao Longo da Linha de União

Novamente, todos os esforços ao longo da linha de união, usando-se uma discretização de 25 intervalos ao longo do acoplamento foram calculados. As figuras a seguir mostram alguns desses resultados. Deve-se frisar que os resultados foram obtidos nas frequências de ressonância do sistema e comparados com resultados obtidos por elementos finitos.

5.12.1) Resultados dos Esforços de Flexão

A Figura 5.49 apresenta os gráficos dos momentos fletores que atuam na união entre as placas, os momentos torçores ao longo da viga e as forças cortantes ao longo da viga e também nas placas I e II, obtidas de forma idêntica aos apresentados no Capítulo IV.

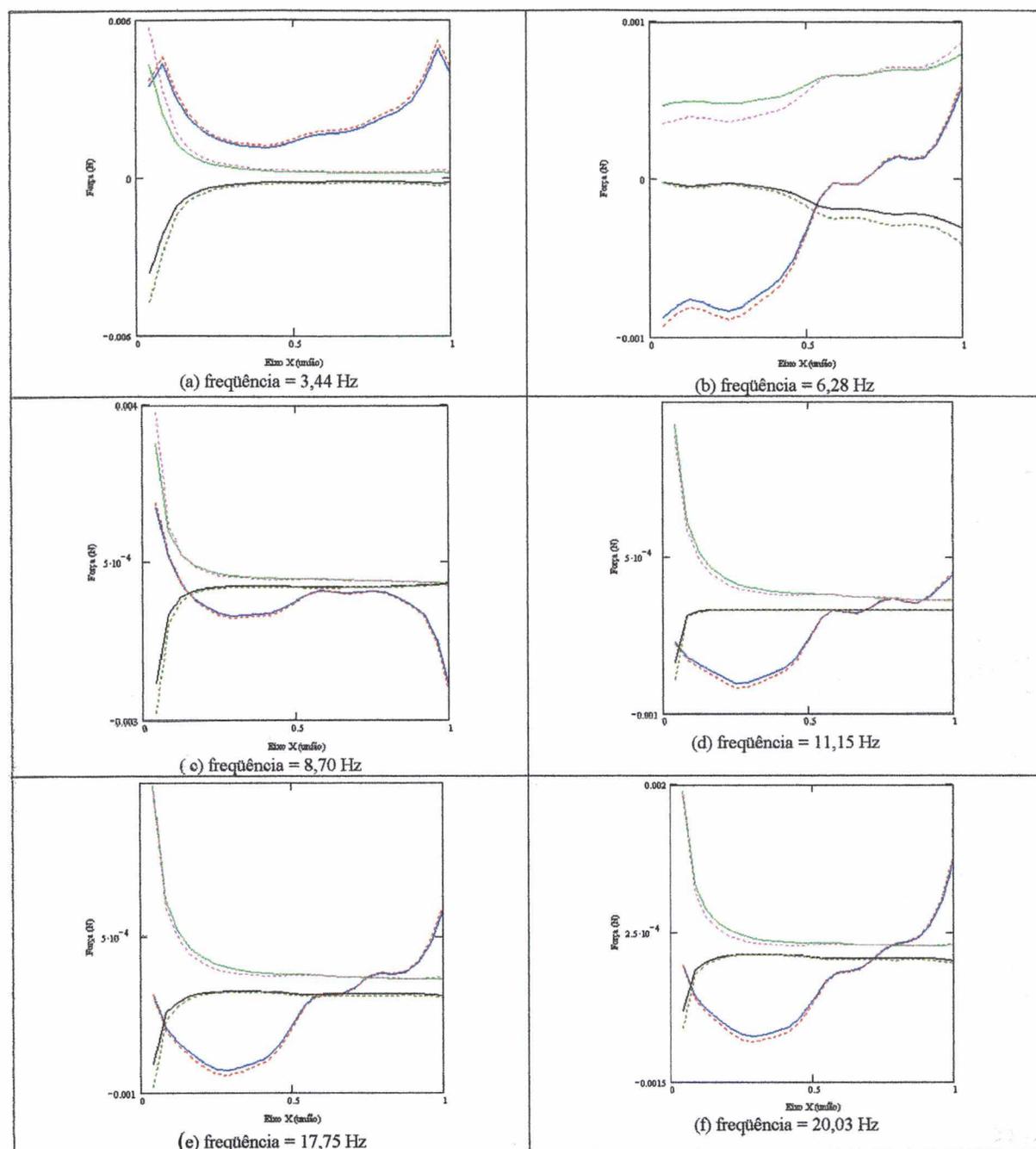


Figura 5.49 Distribuições da força cortante, com uma viga quadrada na união ($b_v = h_v = 50 \text{ mm}$)

- Força cortante na viga - Mobilidade
- - - Força cortante na viga - Elementos Finitos
- Força cortante na placa I - Mobilidade
- - - Força cortante na placa I - Elementos Finitos
- Força cortante na placa I - Mobilidade
- - - Força cortante na placa I - Elementos Finitos

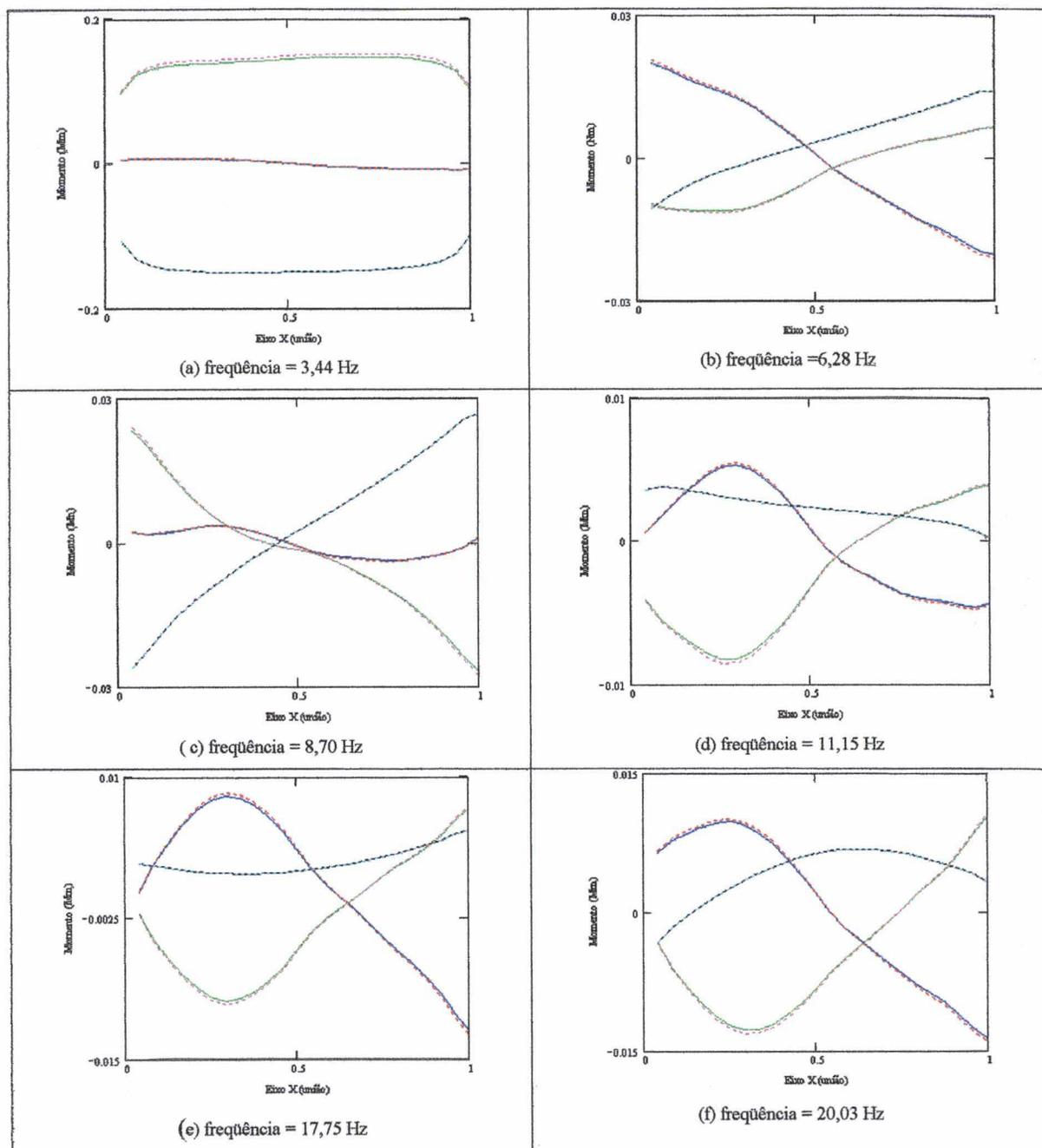


Figura 5.50 Distribuições dos momentos torçores e fletores, uma viga quadrada na união ($b_v = h_v = 50 \text{ mm}$)

- Mom. torsor na viga-Mobilidade
- - - Mom. torsor na viga-Elementos Finitos
- Mom. fletor na placa I-Mobilidade
- - - Mom. fletor na placa I-Elementos Finitos
- Mom. fletor na placa II-Mobilidade
- - - Mom. fletor na placa II-Elementos Finitos

4.12.2) Resultados das Velocidades Transversal e Angular

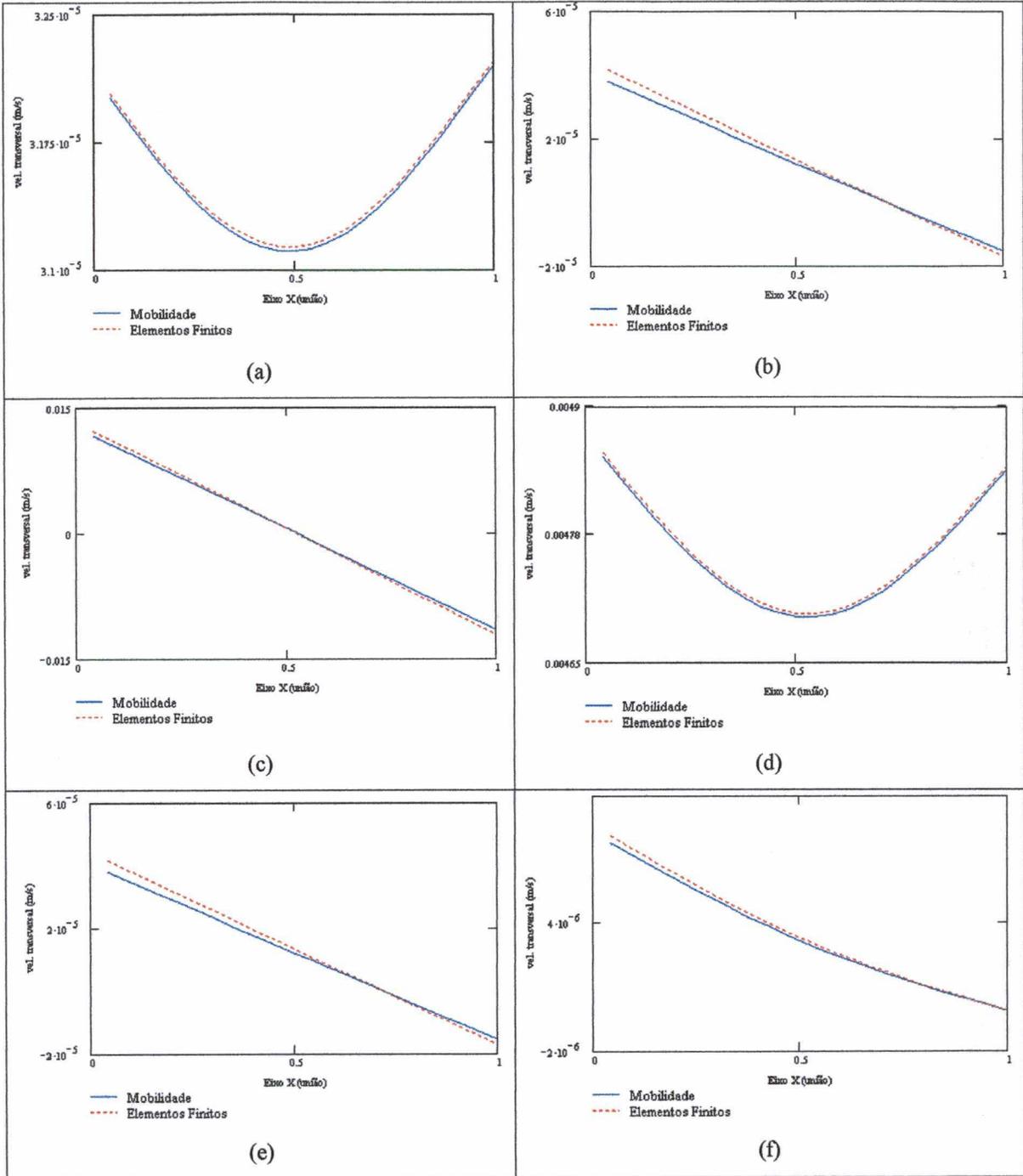


Figura 5.51 Distribuições do velocidade transversal

(a) frequência = 3,44 Hz (d) frequência = 11,15 Hz

(b) frequência = 6,28 Hz (e) frequência = 17,75 Hz

(c) frequência = 8,70 Hz (f) frequência = 20,03 Hz

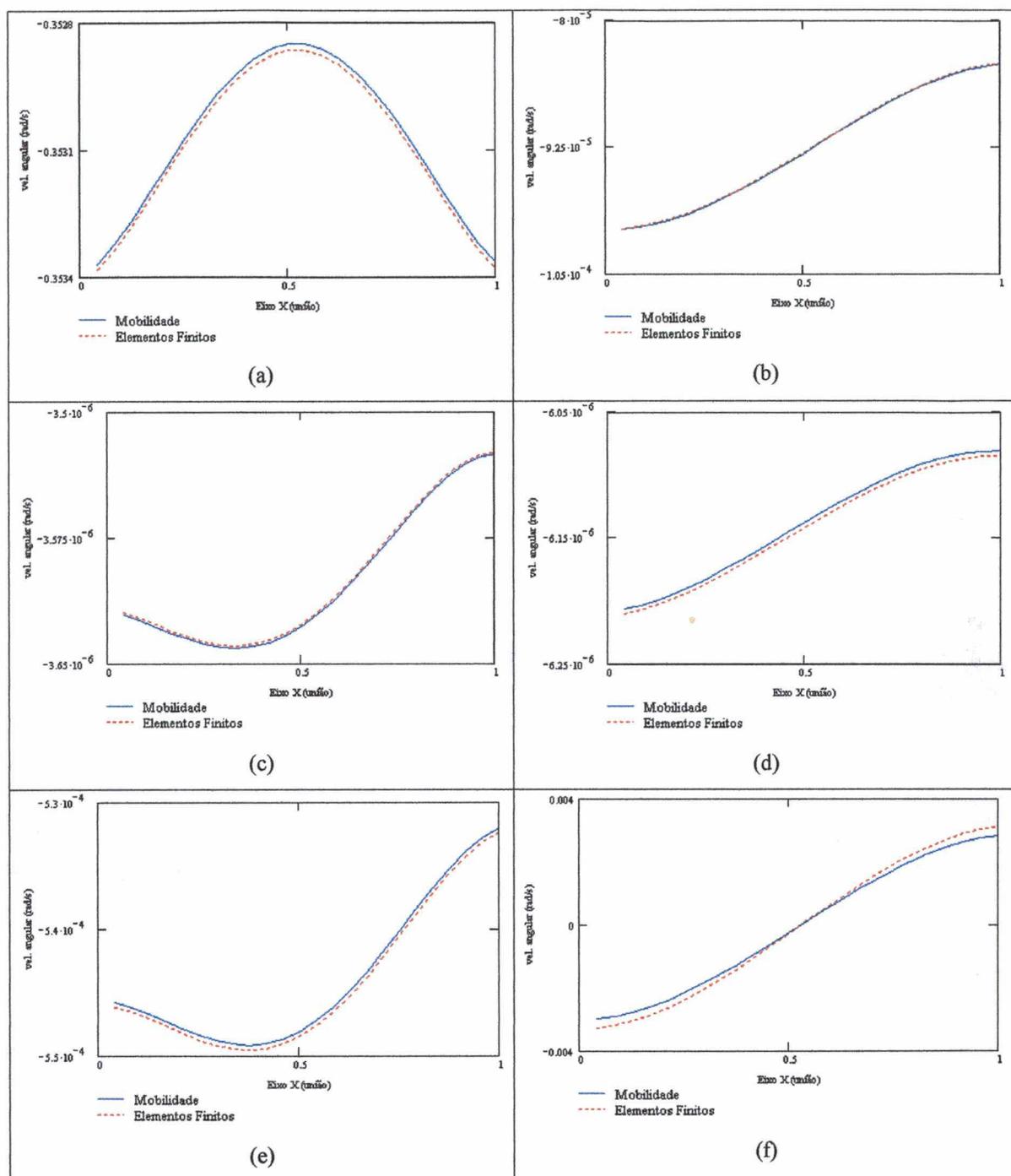


Figura 5.52 Distribuições do velocidade angular

- (a) frequência = 3,44 Hz (d) frequência = 11,15 Hz
 (b) frequência = 6,28 Hz (e) frequência = 17,75 Hz
 (c) frequência = 8,70 Hz (f) frequência = 20,03 Hz

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

6.1) Conclusões

Ao longo de todo o trabalho, várias conclusões foram tiradas, sendo principais as resumidas neste capítulo.

- I) O Método da Mobilidade, que faz uso de funções de resposta em frequência tipo mobilidade, é um método eficiente e como não requer o mapeamento de toda a estrutura acoplada, mas somente a discretização na linha de união entre os sistemas acoplados, demonstrou, nos casos estudados, ser mais rápido que o Método de Elementos Finitos, que necessita de muitos elementos de discretização de todo o domínio. Nos casos estudados neste trabalho, a diferença entre os tempos gastos pelos dois métodos é significativa. Tomando como exemplo, a placa de 2 m x 1 m acoplada com uma viga de 19,05 mm, usando uma discretização de frequência de 0,5 Hz, pelo Método de Elementos Finitos consumiu aproximadamente 7 horas, somente para calcular as velocidades em um nó e, usando o Método da Mobilidade, calculando-se a velocidade em 15 pontos distintos, o tempo gasto cai para menos da metade, ou seja,

próximo de 2 horas. O sistema computacional utilizado neste trabalho foi um microcomputador Pentium III, 1 GHz, com 512 Mb memória RAM e, um disco rígido de 40 Gb. Os arquivos gerados pelo método de elementos finitos eram da ordem de mais de 6 Gb de dimensão, obrigando, algumas vezes, a realização de mais de uma operação, dividindo a faixa de frequência em partes menores para que o programa pudesse realizar os cálculos necessários. Este fato é de grande relevância a favor do método proposto.

- II) As respostas de placas completamente livres nas bordas foi estudada e os resultados, tanto experimentais quanto numéricos mostram que o algoritmo usado satisfaz tanto às condições de contorno quanto a equação diferencial governante do sistema.
- III) Foram obtidas funções de resposta em frequência, tipo mobilidade, de placas completamente livres, acopladas ou não com vigas quadradas, como também foram obtidas curvas de densidade modal e fatores de acoplamento das estruturas estudadas. A comparação dos valores obtidos com os obtidos via MEF ou experimentalmente mostrou que o método produz resultados confiáveis.
- IV) O trabalho analisou a influência de uma viga de seção quadrada, na determinação da energia transferida de uma placa para outra, quando acopladas. Verificou-se que vigas mais robustas modificam significativamente a curva de resposta em frequência de placas acopladas com vigas, conforme esperado, pelo fato de estar localizada na linha de fluxo de energia da primeira para a segunda placa. Mesmo vigas de menor dimensão apresentam a característica de mudar a resposta de uma placa não somente em amplitude, mas também na quantidade de modos e mesmo nas frequências de ressonância do sistema.
- V) A inclusão de viga de reforço em acoplamento entre placas ocasiona uma diminuição da densidade modal do sistema, devido aos efeitos de rigidez adicionada.
- VI) A diferença entre curvas de fatores de acoplamento de placas com e sem viga de reforço é bastante expressiva, tanto em baixas como em médias e altas frequências.

6.2) Sugestões para Trabalhos Futuros

Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se enumerar:

- a) Estudo de placas acopladas com vigas usando o método da mobilidade, sendo as vigas dispostas nas quatro bordas da placa e unidas entre si. Estender a análise para duas placas ou mais, acopladas, com vigas de apoio em todas as bordas. Analisar os esforços externos responsáveis pelo fluxo de energia entre estes componentes.
- b) Elaboração e otimização de um programa computacional que forneça opções para obtenção de respostas de todas as configurações de placas, com as diversas condições de contorno.
- c) Analisar um modelo completo de um vão típico de estruturas de plataformas, constituído de uma placa contendo várias vigas de reforço dispostas ortogonalmente entre si. Analisar a densidade modal e fatores de acoplamento entre tais placas. Tais análises são limitadas atualmente, tendo em vista o elevado custo computacional.
- d) Desenvolver modelos de otimização da geometria e da disposição das vigas de reforço visando minimizar o fluxo de energia vibratória e as respostas de tais placas.
- e) Desenvolver modelos estocásticos de respostas de sistemas compostos por placas e vigas acopladas com o objetivo de obter-se somente valores médios espaciais e por faixas de frequência. Isto deverá reduzir os tempos computacionais.
- f) Construção de um modelo de alojamento típico de uma plataforma considerando uma excitação típica, por forças concentradas (simulando pontos de fixação de máquinas). Modelos de respostas e placas, fluxo de energia vibratória, irradiação sonora e eficiência de revestimentos internos podem ser validados e os resultados analisados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Lenzi, A, "Análise Estatística Energética - SEA", Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Eng. Mecânica da UFSC, 1996.
- [2] Wah, Thein, "Vibration of Stiffened Plates", The Aeronautical Quartely, 1964, 285-298.
- [3] Olson, M. D. e Hazell, C. R., "Vibration Studies on Some Integral Rib-Stiffened Plates", Journal of Sound and Vibration, 1977, vol. 50(1), 43-61.
- [4] Balendra, T. e Shanmugam, N. E., "Free Vibration of Plated Structures by Grillage Method", Journal of Sound and Vibration, 1985, vol. 99(3), 333-350.
- [5] Clarkson, B. L., "Estimation of the Coupling Loss Factor of Structural Joints", Journal of Mechanical Engineering Science, 1991, vol. 205, 17-22.
- [6] Koko, T. S. e Olson, M. D., "Vibration Analysis of Stiffened Plates by Super Elements", Journal of Sound and Vibration, 1992, vol. 158(1), 149-167.

- [7] Sheikh, A. H. e Mukhopadhyay, M., "Free Vibration Analysis of Stiffened Plates with Arbitrary Planform by the General Spline Finite Strip Method", *Journal of Sound and Vibration*, 1993, vol. 162(1), 147-164.
- [8] Ding Zhou, "Natural Frequencies of Rectangular Plates Using a Set of Static Beam Functions in Rayleigh-Ritz Method", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 189(1), 81-87.
- [9] Gorman, D. J., "A Comprehensive Approach To the Free Vibration Analysis of the Rectangular Plates by use of the Method of Superposition", *Journal of Sound and Vibration*, 1976, vol. 47(1), 126-128.
- [10] Orrenius, U. e Finnveden, S., "Calculation of Wave Propagation in Rib-Stiffened Plate Structures", *Journal of Sound and Vibration*, 1996, vol. 198(2), 203-224.
- [11] Grice, R. M., Pinnington, R. J., "A Method for the Vibration Analysis of Built-up Structures, Part I: Introduction and Analytical Analysis of the Plate-Stiffened Beam", *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol. 230(4), 825-849.
- [12] Mace, B. R., "On the Statistical Energy Analysis Hypothesis of Coupling Power Proportionality and Some Implications of its Failure", *Journal of Sound and Vibration*, 1994, vol. 178(1), 95-112.
- [13] Leissa, A W., "the Free Vibration of Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 1973, vol. 31 (3), 257-293.
- [14] Farag, N. H. e Pan, J., "Dynamic Response and Power Flow in Two-Dimensional Coupled Beam Structures Under In-Plane Loading", *The Journal of Acoustical Society of America*, 1996, vol. 99(5), 2930-2937.
- [15] Cuschieri, J. M., "Power Flow as a Complement to Statistical Energy Analysis and Finite Element Analysis", *ASME Publication NCA*, 1987, vol 3, 55-61.

- [16] Cuschieri, J. M., "Vibration Transmission Through Periodic Structures Using a Mobility Power Flow Approach", *Journal of Sound and Vibration*, 1990, vol. 143(1), 65-74.
- [17] Cuschieri, J. M., "Structural Power-Flow Analysis Using a Mobility Approach of an L-Shaped Plate", *The Journal of Acoustical Society of America*, 1990, vol. 87(3), 1159-1165.
- [18] Gorman, D. J., "Free Vibration Analysis of the Completely Free Rectangular Plate by the Method of Superposition", *Journal of Sound and Vibration*, 1978, vol. 69(1), 437-447
- [19] Barbosa, W. A., "Fluxo de Energia Vibratória do Bloco para a Carcaça de um Compressor Hermético por Análise Estatística Energética", dissertação de Mestrado pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, 1989.
- [20] Cuschieri, J. M. e McCollum, M. D., "In-Plane and Out-of-Plane Waves' Power Transmission Through an L-Plate Junction Using The Mobility Power Flow Approach", *The Journal of Acoustical Society of America*, 1996, vol. 100(2), 857-870.
- [21] Cuschieri, J. M., "Parametric Analysis of the Power Flow on an L-Shaped Plate Using a Mobility Power Flow Approach", *The Journal of Acoustical Society of America*, 1992, vol. 91(5), 2686-2695.
- [22] Baars, E., "Fluxo de Potência Vibratória em Componentes Estruturais Tipo Barras e Vigas", dissertação de Mestrado pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, 1996.
- [23] Fiates, F., "Análise de Vibrações de Componentes Estruturais Tipo Vigas Acopladas Pelo Método da Mobilidade", dissertação de Mestrado pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, 1996.
- [24] Ozelame, A. E., "Análise de Densidade Modal e de Fatores de Acoplamento para Placas Reforçadas por Vigas", dissertação de Mestrado pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, 1997.

- [25] Lyon, R.H., e De Jong, R.G., "Theory and Application of Statistical Energy Analysis", Butterworth-Heine Mann, Newton MA-USA, 1995.
- [26] Gorman, D. J., "Free Vibration Analysis of Beam and Shafts", John & Wiley, Inc, 1975
- [27] Juang, T. B., "Vibrational and Acoustic Response of Ribbed Plates", Ph.D. Dissertation, Iowa State University, Ames- Iowa, 1993.
- [28] Lenzi. A., et all, "Medição dos Níveis de Ruído e de Vibração das Principais Máquinas e Equipamentos de Plataformas Offshore", Relatório Interno, contrato FEESC (UFSC)/PETROBRÁS, 1994.
- [29] Bonilha, M. W., "Estudo da Resposta em Altas Frequências de Uma Estrutura Tipo Caixa a Um Campo Acústico Difuso por Análise Estatística Energética", dissertação de Mestrado pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, 1991.
- [30] Bonifácio, P. R. O., "Análise do Fluxo de Energia Vibratória entre Placas Retangulares Simplesmente Apoiadas pelo Método da Mobilidade", dissertação de Mestrado pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, 1998.
- [31] Cremer, L., Heckl, M. e Ungar, E. E., "Structure-Borne Sound", Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [32] Clarkson, B. L. e Pope, R. J., "Experimental Determination of Vibration Parameters Required in the Statistical Energy Analysis Method", Journal of Mechanical Design, Transactions of ASME, September 1981, Paper 81-DET19.
- [33] Clarkson, B. L., "The Derivation of Modal Densities From point Impedances", Journal of Sound and Vibration, 1981, 77(4), 583-584.
- [34] Shankar, K., Keane, A. J., "Vibrational Energy Flow Analysis Using a Substructure Approach: The Application of Receptance Theory to FEA and SEA", Journal of Sound and Vibration, 1997, 201(4), 491-513.

- [35] Liu, W. H., Huang, C. C., "Vibration Analysis of Folded Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 147(1), 123-137.
- [36] Lenzi, A. Reinas, J., "Medições dos Níveis de Vibração e Ruído nas Áreas de Operação e Alojamento da Plataforma SS-44 (Marlim)", Relatório Interno, contrato FEESC (UFSC)/PETROBRÁS, 1995.
- [37] Lenzi, A., et all, "Aplicação da Análise Estatística Energética para a Predição dos Níveis de Vibração Estrutural e de Ruído em Plataformas Offshore", COBEM 1997.
- [38] Souza, L. C., "Respostas e Fluxo de Energia Vibratória em Estruturas Copmpostas por Vigas pelo Método da Mobilidade", dissertação de Mestrado pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, 2000.
- [39] Sardá, A. P., "Análise por Elementos Finitos do Fluxo de Energia Vibratória entre Placas Planas Apoiadas em Vigas", dissertação de Mestrado pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, 1999.
- [40] Barrete, M., Berry, A, Beslin, O, "Vibration of Stiffened Plates Using Hierarchical Trigonometric Functions", *Journal of Sound and Vibration*, 2000, vol. 235(5), 727-747.
- [41] Shuyu, L., "Study on then Flexural Vibration of Rectangular Thin Plates With Free Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol. 239(5), 1063-1071.
- [42] Hurlebaus, S. et all, "An Exact Series Solution for Calculating the Eigenfrequencies of Orthotropic Plates with Completely Free Boundary", *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol. 244(5), 747-759.
- [43] Wang, J. T. S., Lin, C. C., "A Method for Exact Series Solution in Structural Mechanics", *Jornal of Applied Mechanics*, 1999, vol 66, 380-387.
- [44] Keane, A J., Price, W. G., "Statistical Energy Analysis – An Overview with Applications in Structural Dynamics", Cambridge University Press, 1997

- [45] Hagedorn, P., Kelkel, K., Wallaschek, J., "Vibrations and Impedances of Rectangular Plates with Free Boundaries", Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [46] Gorman, D. J., "Vibration Analysis of Plates by the Superposition Method", Word Scientific Publishing, London, 1999.
- [47] ANSYS User's Manual for Revision 5.3 – Theory, Swanson Analysis, Inc, 1995.
- [48] Kerstens, J. G. M., "Vibration of a Rectangular Plate Supported at an Arbitrary Number of Points", Journal of Sound and Vibration, 1979, vol. 65(4), 493-504.
- [49] Tse, F. S., Morse, I. E., Hinkle, R. T., "Mechanical Vibrations – Theory and Applications", Allyn and Bacon, Boston, 1978.
- [50] Meirovitch, L., "Analytical Methods in Vibrations", Fred Landis, 1964.
- [51] Rao, S. S., "Mechanical Vibrations", Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1995
- [52] Webster, A G., "Acoustical Impedance and Theory of Horns and of the Phonograph", Proceedings of the National Academy of Sciences (Washington), 1919, vol 5, 275-282
- [53] Firestone, F. A., "A New Analogy Between mechanical and Electrical Systems", Journal of the Acoustical Society of America, 1933, vol 4, 249-267.
- [54] Langley, R. S. Bremner, P., "A Hybrid Method for Vibration Analysis of Complex Structural-Acoustical Systems", Journal of the Acoustical Society of America, 1999, vol 105, 1657-1671.
- [55] Bonifácio, P. R. O., "Análise não Determinística de Vibrações de Placas Reforçadas por Vigas em Banda de Freqüência", Tese de doutorado em andamento pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, 2002.

APÊNDICE I

UM SUMÁRIO DAS SOLUÇÕES DE LÉVY UTILIZADAS NA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES

São quatro as soluções de Lévy utilizadas neste trabalho. As condições de contorno nas extremidades da faixa das funções trigonométricas são e devem ser satisfeitas de forma exata. Nas figuras abaixo, em relação a um par de bordas, uma linha fina com um pequeno “s” a ela adjacente, implica condição de contorno tipo apoio simples nesta extremidade. A outra condição de contorno é uma linha fina com dois pequenos círculos adjacentes ao seu redor, o que indica condição de contorno do tipo “slip-shear”, isto é, a rotação e também a reação vertical na mesma borda são sempre nulas. O outro par de bordas é livre para ser imposto qualquer outra condição de contorno.

CASO 1

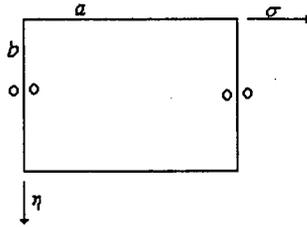


Figura AI - 1 Representação esquemática de um bloco.

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=0,1,2}^{\infty} Y_m(\eta) \cos m\pi\xi \quad \text{AI.1}$$

Para $\lambda^2 > (m\pi)^2$

$$Y_m(\eta) = A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta + C_m \cos \gamma_m \eta + D_m \sin \gamma_m \eta \quad \text{AI-2}$$

e para $\lambda^2 < (m\pi)^2$

$$Y_m(\eta) = A_m \cosh \beta_m \eta + B_m \sinh \beta_m \eta + C_m \cosh \gamma_m \eta + D_m \sinh \gamma_m \eta \quad \text{AI-3}$$

onde

$$\beta_m^2 = \Phi^2[\lambda^2 + (m\pi)^2] \quad \text{AI-4}$$

$$\gamma_m^2 = \Phi^2[\lambda^2 - (m\pi)^2], \quad \text{ou} \quad \gamma_m^2 = \Phi^2[(m\pi)^2 - \lambda^2] \quad (\text{sempre positivo}) \quad \text{AI-5}$$

A_m, B_m, C_m e D_m são coeficientes a serem estabelecidos baseados na condição de contorno nas extremidades da variável η .

CASO 2

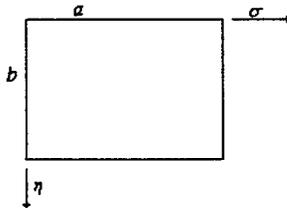


Figura AI - 2 Representação esquemática de um bloco.

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1,2}^{\infty} Y_m(\eta) \sen m\pi\xi \quad \text{AI-6}$$

e as soluções para $Y_m(\eta)$ são as mesmas das usadas no CASO 1.

CASO 3

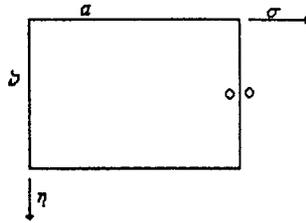


Figura AI - 3 Representação esquemática de um bloco.

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y_m(\eta) \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{2} \quad \text{AI-7}$$

Aqui, as soluções para as funções $Y_m(\eta)$ serão idênticas às usadas no CASO 1, exceto que os parâmetros β_m^2 e γ_m^2 envolvem os valores de $(\frac{m\pi}{2})^2$.

CASO 4

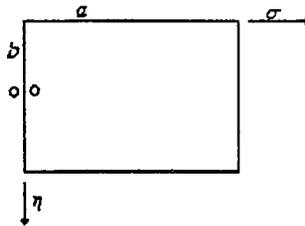


Figura AI - 4 Representação esquemática de um bloco.

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1,2}^{\infty} Y_m(\eta) \operatorname{cos} \frac{m\pi\xi}{2} \quad \text{AI-8}$$

E as soluções para as funções $Y_m(\eta)$ serão idênticas à forma do CASO 3.

APÊNDICE II

BREVE RESUMO DAS SÉRIES DE FOURIER UTILIZADAS E O USO DA FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Expansões de Fourier

Considere a função $f(\xi)$ mostrada na Figura AII 1 abaixo.

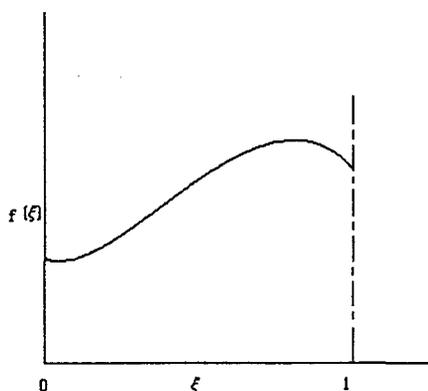


Figura AII -1 Função $f(\xi)$ sobre o intervalo $\xi = 0$ até $\xi = 1$.

Pode-se representar esta função sobre o intervalo $0 \leq \xi \leq 1$ por uma série de Fourier. Quatro diferentes tipos de séries foram utilizadas neste trabalho e cada uma delas é usada separadamente para representar a função.

$$1) \quad f(\xi) = \sum_{m=0,1}^{\infty} A_m \cos m\pi\xi \quad \text{AII.1}$$

$$\text{onde, } A_m = \frac{2}{\delta_m} \int_0^1 f(\xi) \cos m\pi\xi \, d\xi \quad \text{AII.2}$$

$$\delta_m = 2, \quad m = 0$$

$$\delta_m = 1, \quad m \neq 0$$

$$2) \quad f(\xi) = \sum_{m=1,2}^{\infty} A_m \text{sen } m\pi\xi \quad \text{AII.3}$$

$$\text{onde, } A_m = 2 \int_0^1 f(\xi) \text{sen } m\pi\xi \, d\xi \quad \text{AII.4}$$

$$3) \quad f(\xi) = \sum_{m=1,3,4}^{\infty} A_m \text{sen } \frac{m\pi\xi}{2} \quad \text{AII.5}$$

$$\text{onde, } A_m = 2 \int_0^1 f(\xi) \text{sen } \frac{m\pi\xi}{2} \, d\xi \quad \text{AII.6}$$

$$4) \quad f(\xi) = \sum_{m=1,3,4}^{\infty} A_m \cos \frac{m\pi\xi}{2} \quad \text{AII.7}$$

$$\text{onde, } A_m = 2 \int_0^1 f(\xi) \cos \frac{m\pi\xi}{2} \, d\xi \quad \text{AII.8}$$

Uso da Função Delta de Dirac

A função Delta de Dirac é usada freqüentemente para representar a amplitude de forças harmônicas localmente concentradas. Considere uma força de amplitude P , atuando para baixo, na borda $y = b$, da placa retangular da Figura AII 2, que está localmente concentrada numa distância ζ do eixo y .

Considere esta força como sendo equivalente à uma reação vertical na borda, distribuída ao longo da borda, onde a reação é altamente concentrada no ponto de aplicação da força e essencialmente zero em qualquer outro lugar. A reação na borda é representada por um retângulo bem fino, como mostrado na figura, de largura ε e altura P/ε . O interesse da situação, é quando ε aproxima-se de zero. É altamente vantajoso representar a distribuição da reação vertical na borda por uma série de Fourier, como discutido anteriormente.

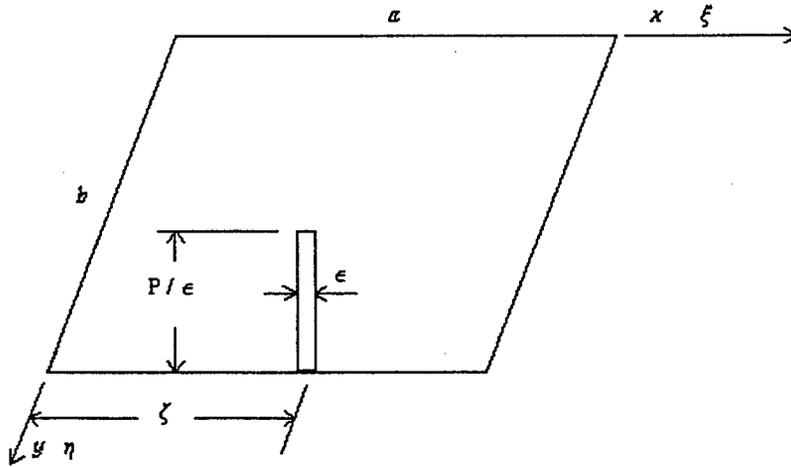


Figura AII -2 Representação esquemática do função Delta de Dirac usada para representar forças concentradas.

Suponha que se deseje representar numa série de senos. Pode-se, então, escrever, de forma dimensional, assim:

$$V(x) = \sum_{m=1,2}^{\infty} A_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad \text{AII.9}$$

$$\text{onde, } A_m = \frac{2P}{a} \int_0^a \delta(x - \zeta) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} dx \quad \text{AII.10}$$

Aqui, $\delta(x - \zeta)$ representa a função de Dirac, isto é, a função da Figura AII-2, exceto a função de Dirac inserida do retângulo. Como se quer ϵ aproximando-se de zero, pode-se escrever a Equação AII.10, assim:

$$A_m = \frac{2P}{a} \operatorname{sen} m\pi \zeta \quad \text{AII.11}$$

em que, ζ é igual a distância da força concentrada até o eixo y , dividido pela borda a .

Agora introduzindo o parâmetro ξ , com $\xi = \frac{x}{a}$, e refazendo a expressão AII.9, tem-se:

$$\frac{V(\xi) b^3}{aD} = P^* \sum_{m=1,2}^{\infty} \operatorname{sen} m\pi \zeta \operatorname{sen} m\pi \xi \quad \text{AII.12}$$

$$\text{onde, o carregamento adimensional } P^* = \frac{2Pb^3}{a^2D} \quad \text{AII.13}$$

Expressões similares à Equação AII.12, podem ser desenvolvidas para outras séries de Fourier.

APÊNDICE III

Algoritmo Computacional

Duas Placas Planas Livres Acopladas Numa Linha

- Dados de entrada:

$$L_x, L_y, \rho, v, x_0, y_0, \eta, h_p, NI,$$

n e m (número de modos nas duas direções da placa)

- Construção dos vetores que formam a discretização na linha de união:

$$\Delta x = \frac{L_x}{NI}$$

$$x_i = \Delta x (i - 1) + \frac{\Delta x}{2} \text{ (em relação ao comprimento } L_x \text{ discretizado na união)}$$

$$x_j = \Delta x (j - 1) + \frac{\Delta x}{2} \text{ (em relação ao momento } M_i \text{ discretizado na união)}$$

- Construção da matriz mobilidade (início do laço de frequência):

Entrada de dados na sub-rotina: x_i, x_j

Saída: $Y_{22}(x_i, x_j)$ e $Y_{33}(x_i, x_j)$

- Construção do vetor mobilidade:

Entrada de dados na sub-rotina: x_i

Saída: $Y_{12}(x_i)$

- Resolução do sistema de equação usando rotina numérica (Decomposição LU):

Entrada: Matrizes $Y_{22}(x_i, x_j)$, $Y_{33}(x_i, x_j)$ e o vetor $Y_{12}(x_j)$

Saída: $M(x_i)$ (momento discretizado na união das placas)

$Q(x_i)$ (força cortante discretizada na união das placas)

- Cálculo da velocidade angular na união das placas:

Entrada: x_i, x_j, M_i

Saída: $\dot{\theta}(x_i, x_j, M_i)$ (velocidade angular na união)

- Cálculo da velocidade transversal na união das placas:

Entrada: x_i, x_j, Q_i

Saída: $\dot{W}(x_i, x_j, Q_i)$ (velocidade transversal na união)

- Cálculo da potência transferida:

Entrada: $\dot{\theta}, M_i, \dot{W}, Q$

Saída: Potência

Duas Placas Planas Livres Acopladas Com Uma Viga na União

- Dados de entrada:

$L_x, L_y, L_v, \rho, v, x_0, y_0, \eta, h_p, NI, I, J,$
n e m (número de modos nas duas direções da placa)

- Construção dos vetores que formam a discretização na linha de união:

$$\Delta x = \frac{L_x}{NI}$$

$$x_i = \Delta x (i - 1) + \frac{\Delta x}{2} \text{ (em relação ao comprimento } L_x \text{ discretizado na união)}$$

$$x_j = \Delta x (j - 1) + \frac{\Delta x}{2} \text{ (em relação ao momento } M_i \text{ discretizado na união)}$$

- Construção da matriz mobilidade em relação à placa (início do laço de frequência):

Entrada de dados na sub-rotina: x_i, x_j

Saída: $Y_{22}(x_i, x_j), Y_{33}(x_i, x_j)$

- Construção da matriz mobilidade em relação à viga

Entrada de dados na sub-rotina: x_i, x_j

Saída: $Y_v(x_i, x_j)$

- Construção do vetor mobilidade:

Entrada de dados na sub-rotina: x_i

Saída: $Y_{12}(x_i)$

- Resolução do sistema de equação usando rotina numérica (Decomposição LU):

Entrada: Matrizes $Y_{22}(x_i, x_j)$, $Y_{33}(x_i, x_j)$, $Y_v(x_i, x_j)$ e o vetor $Y_{12}(x_j)$

Saída: $M(x_i)$ (momento discretizado na união das placas)

$Q(x_i)$ (força cortante discretizada na união das placas)

$Q_v(x_i)$ (força cortante discretizada na viga)

$T_v(x_i)$ (torque discretizado na viga)

- Cálculo da velocidade angular na união das placas:

Entrada: x_i, x_j, M_i

Saída: $\dot{\theta}(x_i, x_j, M_i)$ (velocidade angular na união)

- Cálculo da velocidade transversal na união das placas:

Entrada: x_i, x_j, Q_i

Saída: $\dot{W}(x_i, x_j, Q_i)$ (velocidade transversal na união)

- Cálculo da potência transferida:

Entrada: $\dot{\theta}, M_i, \dot{W}, Q$

Saída: Potência