

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
LABORATORIO DE CONTROLE E MICRO-INFORMÁTICA

**ABORDAGENS LMI PARA ANÁLISE DE  
UMA CLASSE DE SISTEMAS HÍBRIDOS**

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA À  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**SONIA ELENA PALOMINO CASTRO BEAN**

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 2002

# ABORDAGENS LMI PARA ANÁLISE DE UMA CLASSE DE SISTEMAS HÍBRIDOS

**Sonia Elena Palomino Castro Bean**

”Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Controle, Automação e Informática Industrial, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.”

---

Alexandre Trofino Neto, Dr.  
Orientador

---

Edson Roberto De Pieri, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Alexandre Trofino Neto, Dr.  
Presidente

---

José Eduardo Ribeiro Cury, Dr.

---

Edson Roberto De Pieri, Dr.

---

Daniel Juan Pagano, Dr.

---

José Claudio Geromel, Dr.

---

Romeu Reginatto, Dr.

*para meus amados Isabel, Paulo e Dale*

## Agradecimentos

Agradeço a Deus por mostrar sua luz e o seu caminho e colocar cada um dos meus passos até a conclusão deste trabalho.

Também agradeço aos meus orientadores, Alexandre e Cury, que souberam com o seu constante apoio e os seus conhecimentos traçar o horizonte desta pesquisa.

Agradeço a todos os colegas do DAS e a todas as pessoas que contribuíram com a sua palavra amiga.

Finalmente, gostaria também de agradecer ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, ao Governo e ao povo brasileiro por contribuir direta ou indiretamente para que eu pudesse estudar em tempo integral nesta universidade.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

## **ABORDAGENS LMI PARA ANÁLISE DE UMA CLASSE DE SISTEMAS HÍBRIDOS**

**Sonia Elena Palomino Castro Bean**

Setembro/2002

Orientador: Alexandre Trofino Neto, Dr

Área de Concentração: Sistemas Híbridos

Palavras-chave: sistemas chaveados; estabilidade; domínios de atração; inequações matriciais lineares

Número de páginas: 131

Este trabalho apresenta uma pesquisa na área de sistemas híbridos. Trabalha-se com uma classe desse tipo de sistemas: os sistemas chaveados de tipo linear, afim e bilinear. O objetivo principal do trabalho é a análise de estabilidade e o cálculo do domínio de atração desses sistemas. Para isso, apresentam-se duas abordagens baseadas na procura de uma função de Lyapunov comum dependente dos estados e de carácter polinomial usando os conceitos de estabilidade biquadrática e estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ . Com essas considerações, obtêm-se desigualdades matriciais lineares que, se satisfeitas, apresentam condições suficientes que garantem a factibilidade dos problemas apresentados.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

## **LMI APPROACHES FOR THE ANALYSIS OF A CLASS OF HYBRID SYSTEMS**

**Sonia Elena Palomino Castro Bean**

September/2002

Advisor: Alexandre Trofino Neto, Dr

Area of Concentration: Hybrid Systems

Keywords: switched systems; stability; domains of attraction; linear matrix inequalities

Number of pages: 131

This work presents research in the area of hybrid systems, involving a class of these systems: the switched systems. The main objective of this research is to analyze the stability and to determine the domain of attraction of these systems. Two approaches are presented based on the search for a common Lyapunov function that is dependent on the states and polynomial structure by using concepts of biquadratic stability and  $\mathcal{Q}_r$  stability. With these considerations, linear matrix inequalities are obtained that, if satisfied, provide sufficient conditions to guarantee the feasibility of the presented problems.

# Nomenclatura e Simbologia

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| <b>EDO</b>                      | Equação Diferencial Ordinária   |
| <b>FL</b>                       | Função de Lyapunov  |
| <b>FLQPP</b>                    | Função de Lyapunov Quadrática por Partes                              |
| <b>LMI</b>                      | Inequação Matricial Linear  |
| $\mathbb{R}$                    | Conjunto dos números reais  |
| $\mathbb{R}_+$                  | Conjunto dos números reais não negativos                              |
| $\mathcal{J}_n$                 | Conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$                                 |
| <b>Q</b>                        | Conjunto contável de números  |
| <b>I</b>                        | Conjunto de índices referidos ao número total de partições ou células |
| $\mathbb{I}^0$                  | Conjunto de índices referidos às células que contém $x = 0$           |
| $\mathbb{I}^1$                  | Conjunto de índices referidos às células que não contém $x = 0$       |
| $\mathbb{R}^n$                  | Conjunto de vetores reais de dimensão $n$                             |
| $\mathbb{R}^{m \times n}$       | Conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$                  |
| $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ | Matriz $A$ de ordem $m \times n$                                      |
| $A'$                            | Matriz transposta de $A$  |
| $A = A'$                        | Matriz $A$ simétrica  |
| $A > 0$                         | Matriz $A$ definida positiva  |
| $\text{tr}(A)$                  | Traço da matriz $A$   |
| $I_n$                           | Matriz identidade de ordem $n$  |
| $0_n$                           | Matriz de zeros de ordem $n$  |
| $0_{m \times n}$                | Matriz de zeros de ordem $m \times n$                                 |
| $\text{diag}\{s_i\}$            | Matriz diagonal com elementos $s_i$                                   |
| $n_x$                           | Dimensão do vetor $x$   |
| $\ x\ $                         | Norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^{n_x}$                          |
| $x \succeq 0$                   | Vetor $x$ cujos elementos são não negativos                           |
| $\mathcal{A}(x)$                | Matriz polinomial $A$ em $x$  |
| $v(x)$                          | Notação da função de Lyapunov   |
| $D_f$                           | Domínio da função $f$   |
| $S_{ij}$                        | Conjunto que chaveia o sistema $i$ com o sistema $j$                  |
| $\text{clos}(\Omega)$           | Fechamento do conjunto $\Omega$                                       |

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Sistemas híbridos</b>  | <b>4</b>  |
| 2.1      | Breve histórico . . . . .   | 5         |
| 2.2      | Definição de um sistema híbrido . . . . .   | 6         |
| 2.3      | Conceitos básicos e fenômenos híbridos . . . . .                                    | 13        |
| 2.4      | Sumário . . . . .   | 17        |
| <b>3</b> | <b>Sistemas chaveados, uma classe de sistemas híbridos: análise de estabilidade</b> | <b>18</b> |
| 3.1      | Motivação . . . . .   | 19        |
| 3.2      | Sistemas chaveados: uma classe de sistemas híbridos . . . . .                       | 21        |
| 3.3      | Exemplos de sistemas chaveados . . . . .  | 22        |
| 3.4      | Estabilidade de sistemas híbridos . . . . .   | 24        |
| 3.5      | Estabilidade de sistemas híbridos baseados em LMIs . . . . .                        | 28        |
| 3.5.1    | Caracterizações da função de Lyapunov . . . . .                                     | 29        |
| 3.5.2    | Caracterização segundo Johansson . . . . .  | 30        |
| 3.5.3    | Caracterização segundo Petersson . . . . .  | 33        |
| 3.5.4    | Comentários sobre essas caracterizações . . . . .                                   | 36        |
| 3.6      | Sumário . . . . .   | 37        |
| <b>4</b> | <b>Estabilidade biquadrática de sistemas chaveados</b>                              | <b>39</b> |
| 4.1      | O Problema . . . . .  | 40        |
| 4.2      | O Problema Linear . . . . .   | 44        |
| 4.3      | O Problema Afm . . . . .  | 53        |
| 4.4      | Sumário . . . . .   | 70        |
| <b>5</b> | <b>Estabilidade <math>\mathcal{Q}_r</math> de Sistemas Chaveados</b>                | <b>71</b> |
| 5.1      | Estabilidade $\mathcal{Q}_r$ . . . . .  | 71        |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.2      | O Problema Afim . . . . .                                     | 73         |
| 5.3      | O Problema Bilinear Chaveado . . . . .                        | 83         |
| 5.4      | Sumário . . . . .   | 92         |
| <b>6</b> | <b>Conclusões e Perspectivas</b>                              | <b>95</b>  |
| 6.1      | Visão geral do trabalho . . . . .                             | 95         |
| 6.2      | Contribuições da tese . . . . .                               | 96         |
| 6.3      | Trabalhos futuros . . . . .                                   | 98         |
| <b>A</b> | <b>Apresentação da Formulação LMI e Conceitos Matemáticos</b> | <b>100</b> |
| A.1      | Apresentação da Formulação LMI . . . . .                      | 100        |
| A.2      | Conceitos matemáticos . . . . .                               | 105        |

# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Elemento relé mecânico. . . . .  | 9  |
| 2.2 | Relação entrada-saída do relé. . . . .   | 9  |
| 2.3 | Diagrama de transição do elemento relé com histerese. . . . .  | 10 |
| 2.4 | O pêndulo invertido. . . . .   | 11 |
| 2.5 | Chaveamento dos conjuntos para o problema do pêndulo invertido. . .  | 13 |
| 2.6 | Evolução de um sistema híbrido. . . . .  | 14 |
| 2.7 | Colisão de uma bola. . . . .   | 16 |
| 3.1 | Trajectoria de um sistema chaveado. . . . .  | 25 |
| 3.2 | Sistema híbrido globalmente estável. . . . .   | 26 |
| 3.3 | Campo de sistemas estáveis: o sistema híbrido é instável. . . . .  | 27 |
| 3.4 | Sistema com saturação: sistema localmente estável. . . . .   | 28 |
| 3.5 | Curvas de nível e a trajetória do sistema (3.10). . . . .  | 32 |
| 3.6 | Regiões vizinhas, no espaço de estados contínuo. . . . .   | 34 |
| 3.7 | Campo de sistemas instáveis: o sistema híbrido é estável. . . . .  | 35 |
| 4.1 | Curva de nível não elíptica. . . . .   | 44 |
| 4.2 | Estimativas do domínio de atração para o exemplo 4.3.2: (a) critério do círculo, (b) critério de Popov, (c) metodologia proposta e (d) enfoque $PwQ$ . . . . .                 | 67 |
| 4.3 | Domínio de atração do sistema (4.62): a região exata e a região estimada. . . . .  | 68 |
| 5.1 | Estabilidade $Q_2$ e estabilidade biquadrática para o pêndulo invertido. . .   | 81 |
| 5.2 | Estabilidade $Q_4$ e $Q_2$ para o pêndulo invertido. . . . .   | 81 |
| 5.3 | Estabilidade $Q_4$ e biquadrática para o pêndulo invertido. . . . .  | 82 |
| 5.4 | Estimativas do domínio de atração para o exemplo 4.3.2:(a) enfoque $Pwq$ , (b) estab. biquadrática, (c) critério do círculo, (d) critério de Popov, (e) estab. $Q_2$ . . . . . | 83 |
| 5.5 | Domínio de atração exato e estimado para o sistema reator químico. . .   | 92 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 5.6 | Estabilidade $\mathcal{Q}_2$ e $\mathcal{Q}_4$ para o sistema reator químico. . . . . | 93  |
| A.1 | Politopo de vértices $P_{v_i}, i = 1, \dots, 8$ . . . . .                             | 106 |

# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas híbridos tornaram-se, nestes últimos anos, uma área de especial interesse no domínio das ciências da computação e da teoria de controle em função da crescente demanda da tecnologia moderna, e têm tido como resultado a síntese e implementação de sistemas na engenharia com melhor desempenho e maior complexidade.

O objetivo deste trabalho é fazer o estudo de análise de estabilidade para certa classe de sistemas híbridos, resolvendo-o como um problema de otimização convexa em termos de inequações matriciais lineares (LMIs).

É característica dos sistemas híbridos a incorporação de componentes contínuas e componentes discretas. A dinâmica das componentes contínuas, usualmente chamadas de plantas, é governada por equações diferenciais, e a dinâmica das componentes discretas é representada por programas. Esses programas estão projetados para selecionar, controlar e supervisionar a conduta das componentes contínuas.

Exemplos de sistemas híbridos no mundo real aparecem nos sistemas com relés, chaveamentos, motores de passo e outros controladores de movimento, nos sistemas de controladores com estrutura variável, nos veículos inteligentes, nos sistemas de controle de auto-estrada, nos sistemas atuais de manufatura flexível e nos sistemas de controle de vôos.

A indústria moderna usa os sistemas híbridos para vários propósitos, tais como controle na área de aviação, sincronização de computadores, manufatura, redes de comunicação, controle de tráfego, controle de processos, etc.

Trabalhos que tratam da estabilidade de sistemas híbridos datam dos anos 60 [Wit66, Pav67]. Na última década resultados gerais para sistemas híbridos têm sido apresentados por Peleties e DeCarlo [PD91] e, fazendo uso das funções de Lyapunov múltiplas, por Branicky [Bra94a]. Recentemente, graças ao advento de ferramentas computacionais, muitos algoritmos eficientes para otimização convexa em

termos de inequações matriciais lineares ajudaram a tratar esse tipo de problema [BGFB94, NG94, GNea96]. Essa técnica converteu-se numa ferramenta poderosa para o tratamento de problemas de análise e para o projeto de sistemas lineares e não lineares.

O controle não linear adquiriu maior importância com os trabalhos de controle baseados em chaveamentos, e com essa visão se fornece um entendimento claro e fundamentalmente mais potente que nas técnicas do controle suave. Esse fato é salientado no desenvolvimento da teoria do controle adaptativo. Isso sem comentar que vários outros tipos de chaveamentos têm sido tradicionalmente usados em métodos de controle e implementações, tais como escalonamento de ganho, controle dos modos deslizantes [Utk77, Utk92]. Mencionamos também trabalhos na linha de controle fuzzy [TS85, TIW96], tópicos que também são abordados em Pettersson [Pet99] e Johansson [Joh99].

Johansson [Joh99], trabalhando com sistemas lineares por partes, trata da análise de estabilidade propondo a procura de uma função de Lyapunov quadrática por partes e aplicando a metodologia numa classe particular de sistemas híbridos afins. Fazendo uma construção similar das funções de Lyapunov, foi desenvolvido em Pettersson [Pet99], de forma independente e na mesma época, o problema de análise e projeto de sistemas híbridos lineares e não lineares com uma metodologia mais geral.

Este trabalho aborda a análise de estabilidade e o cálculo do domínio de atração de uma classe particular de sistemas híbridos conhecida como sistemas chaveados. Na abordagem proposta supõe-se que os chaveamentos dependem da dinâmica da variável de estado contínua. O problema de análise de estabilidade aqui estudado é uma extensão, para sistemas chaveados, da formulação proposta em Trofino [Tro00a, Tro00b] para a construção de funções de Lyapunov dependentes do estado, desenvolvida para problemas de estabilidade robusta de sistemas incertos não lineares.

Esta pesquisa tem por objetivo estudar formulações LMIs para análise de sistemas chaveados, fazendo uso de uma função de Lyapunov com essa nova estrutura.

O conteúdo deste trabalho, considerando esta introdução, é distribuído em seis capítulos.

No Capítulo 2, apresentam-se um breve histórico, a definição de sistemas híbridos e exemplos que exibem a natureza híbrida de alguns sistemas mecânicos. Apresentam-se também alguns conceitos básicos, fenômenos híbridos e propriedades desses sistemas.

Já no Capítulo 3, é desenvolvido o ferramental teórico para o estudo dos sistemas chaveados, ilustrando as diversas representações existentes com exemplos. Conceitos de estabilidade e exemplos de sistemas estáveis e instáveis são introduzidos. Também

se apresentam os resultados de estabilidade de sistemas chaveados existentes na literatura, dando ênfase principal a dois enfoques que usam como técnica as LMIs, exibindo as caracterizações para a construção de funções de Lyapunov e colocando-se suas vantagens e respectivas limitações.

Nos capítulos seguintes, encontram-se os resultados desta pesquisa, com novas abordagens usando LMIs, para análise de estabilidade dos sistemas chaveados.

No Capítulo 4, a abordagem é baseada no conceito de estabilidade biquadrática [Tro00a], aplicada aqui a sistemas chaveados de tipo linear e de tipo afim. Determina-se uma função de Lyapunov que é polinomial nos estados, e sua estrutura é a mesma para todas as partições, isto é, ela não depende explicitamente das regiões e das regras de chaveamento definidas pelo problema. Quando a estabilidade é local, o domínio de atração também é calculado e ilustrado nos exemplos trabalhados.

Uma outra abordagem usando o conceito de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  [Tro00b], com resultados menos conservadores, é apresentada no Capítulo 5. Neste capítulo, também é usada uma função de Lyapunov polinomial e comum ao sistema com uma estrutura construída de forma mais geral à dada no capítulo anterior. Exemplos numéricos exibem o potencial dessa metodologia.

Por último, no Capítulo 6, apresentam-se as conclusões deste trabalho.

# Capítulo 2

## Sistemas híbridos

Tradicionalmente, as técnicas disponíveis em ciências e engenharia, para a modelagem, análise e síntese de controle de sistemas, bem como as ferramentas associadas a essas técnicas apenas lidavam com sistemas de natureza contínua ou discreta. Portanto, sistemas de natureza híbrida eram tratados por sua conversão, em entidades puramente discretas ou puramente contínuas [GNRR93, NK93]. A inadequação, em muitos casos, das soluções obtidas, levou aqueles que durante muitos anos trabalharam em sistemas concorrentes, computação distribuída e desenvolvimento e verificação de programas, bem como aqueles que trabalharam em engenharia de controle clássico (observabilidade, controlabilidade, estabilidade), a repensar e a reelaborar seus modelos e técnicas para lidar com sistemas híbridos.

O tratamento dos fenômenos de natureza híbrida requer familiaridade com teoria de controle, equações diferenciais, teoria de autômatos e topologia [Bra95]. São inúmeras as aplicações desse tipo de sistemas, por exemplo, na indústria automotiva e no controle de tráfego aéreo.

O conteúdo deste capítulo é dado por três seções. Na seção 2.1 é apresentado um breve histórico que mostra o desenvolvimento do estudo, assim como as aplicações dos sistemas híbridos nos últimos 40 anos. Na seção 2.2, faz-se uma definição do sistema híbrido conforme o interesse deste trabalho, assim como a classificação e exemplos desse tipo de sistemas. Por último, na seção 2.3, são apresentados alguns conceitos básicos sobre sistemas híbridos, assim como os fenômenos que aparecem quando se trabalha com esses sistemas.

## 2.1 Breve histórico

Uma questão de interesse dos pesquisadores na área de controle de sistemas dinâmicos, discutida nos últimos 50 anos, trata das interações que ocorrem entre a dinâmica contínua (devida ao comportamento das variáveis contínuas) e a dinâmica dos chaveamentos (que ocorrem devido às variáveis discretas). Essas interações entre variáveis contínuas e discretas deram origem a sistemas que foram denominados sistemas híbridos. Esses sistemas foram estudados pelo desenvolvimento da teoria de controle, por exemplo, a utilização de controladores “bang-bang” na teoria de controle ótimo [Bel87].

O trabalho de Hans Witsenhausen [Wit66] é conhecido como um dos primeiros trabalhos na área de sistemas híbridos. O autor formula uma classe de sistemas híbridos com dinâmica contínua no tempo examinando um problema de controle ótimo. Esse trabalho foi seguido por Pavlidis [Pav67], que estudou estabilidade de sistemas com impulsos usando funções de Lyapunov. Na seqüência, destacaram-se outros trabalhos com interesse nos controladores de estados finitos [Joh81, Tho82, Wim82]. Ezzine e Haddad [EH89] examinaram estabilidade, controlabilidade e observabilidade de uma classe restrita de sistemas lineares chaveados.

Motivado pelo problema de analisar sistemas com histerese, Tavernini [Tav87] produziu um modelo preciso para sistemas híbridos e apresentou soluções para problemas com valor inicial e suas aproximações numéricas.

Na ciência da computação, houve um contínuo desenvolvimento da verificação formal [BB91, dBHdRR91, Hal93, Jos88, MP91, WC94] no que se refere à verificação de sistemas que incluem ambas variáveis: contínuas e discretas [NK93, BG90, GNRR93, MMP91, PS95].

Recentemente, voltou-se a examinar os efeitos de quantificação [Del90, KS93, Ram90, Ser90] e passou-se a ter um grande interesse na área da computação analógica [BSS89, Bra94a, Bro91, Chu88, SS91].

Há trabalhos recentes na área de sistemas hierárquicos [WC94, CW95, JK99, HC99] e de sistemas de variável contínua controlados discretamente (controle supervisorio) [CCR93, KR95, Mor95, LSA93, CK99, CKN98].

No passado da teoria de controle, havia muitos trabalhos na área dos sistemas de estrutura variável, sistemas lineares com saltos, sistemas com impulsos, controle impulsivo e processos determinísticos por partes. Nos últimos anos, a comunidade que trabalha nessas áreas vem dirigindo seus trabalhos para a área dos sistemas híbridos [GNRR93, NK93, Bro93, Des94, Bra95, NK95, GV89, GLS94, Mal98]. O mesmo efeito



está surgindo entre pesquisadores das ciências da computação [GNRR93, NK93, PS95, TK96]<sup>1</sup>.

Nesse sentido, ocorreram progressos nas pesquisas feitas em sistemas híbridos pela comunidade que trabalhava na teoria de controle no que se refere à análise de sistemas chaveados com duas tendências: o uso de funções de Lyapunov múltiplas [Bra94b, Bra95, Bra98, LHM99b, LHM99a, DBP00, EFC02] e o método direto de Lyapunov usando a técnica das desigualdades matriciais lineares (LMIs) [BGFB94] para formular critérios de estabilidade e outras propriedades de análise [PD91, Laf94, WPD94, Mal98, Jir98, Pet99, JR98, Joh99, DBP00]. Para trabalhos nessa linha de pesquisa, dar-se-á destaque no próximo capítulo.

## 2.2 Definição de um sistema híbrido

Na literatura existem várias definições para sistemas híbridos. O uso de tais definições depende da abordagem a ser utilizada e do interesse do trabalho a ser estabelecido. Para esta proposta é interessante defini-los conforme Pettersson [Pet99], que considera o tempo definido em toda a reta real não negativa e  $\mathbb{Q}, \Sigma, \mathcal{O}$  conjuntos contáveis<sup>2</sup>.

**Definição 2.2.1 (Sistema híbrido)** *Um sistema híbrido  $\mathcal{H} = (\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{Q}, \mathbb{R}^{p_u} \times \Sigma, f, \phi)$  consiste em*

- *um conjunto não vazio  $H = \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{Q}$  chamado o espaço dos estados híbridos  $(x, q)$  de  $\mathcal{H}$ ;*
- *o conjunto  $E = \mathbb{R}^{p_u} \times \Sigma$  chamado espaço de entradas externas  $(u, \sigma)$  de  $\mathcal{H}$ ;*
- *funções de transição<sup>3</sup>  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  e  $\phi : D_\phi \rightarrow \mathbb{Q}$ , onde*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), q(t), u(t)), \\ q^+(t) &= \phi(x(t), q(t), u(t), \sigma(t)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{aligned} D_f &\subseteq \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{p_u} \\ D_\phi &\subseteq \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{p_u} \times \Sigma, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Entre outros autores.

<sup>2</sup>Conjunto contável é um conjunto enumerável finito.

<sup>3</sup>O campo vetorial  $f$  define a evolução do sistema. Este pode ser considerado, sem perda de generalidade, como uma função de transição.

$x$  é denominado estado contínuo e  $q$  é o estado discreto.

Também,  $u$  é chamada de entrada contínua e  $\sigma$  denota a entrada discreta ou evento discreto de entrada.

◇◇

**Definição 2.2.2 (Sistema híbrido com saídas)** *Um sistema híbrido com saídas é dado pelo sistema  $\mathcal{H}$  e as seguintes condições:*

- o conjunto  $\mathbb{R}^{m_y} \times \mathcal{O}$  chamado espaço de saídas de  $\mathcal{H}$ ;
- relações de saída  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}^{m_y}$  e  $\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathcal{O}$ , onde

$$\begin{aligned} y(t) &= g(x(t), q(t), u(t)), \\ o^+(t) &= \varphi(x(t), q(t), u(t), \sigma(t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

e

$$\begin{aligned} D_g &\subseteq \mathbb{R}^{n_x} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^{p_u} \\ D_\varphi &\subseteq \mathbb{R}^{n_x} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^{p_u} \times \Sigma, \end{aligned}$$

$y$  é denominado saída contínua e  $o$  é a saída discreta ou evento discreto de saída.

◇◇

Na notação definida anteriormente para  $q^+$  e  $o^+$ <sup>4</sup>, entende-se que as funções  $\phi$  e  $\varphi$ , respectivamente, são, no geral, funções multivalentes<sup>5</sup> nas quais é expresso o não-determinismo. Isso é usual em computação e em sistemas a eventos discretos [Tuc97, Cas92].

**Nota 2.2.1 (Sistemas amostrados)** *Seja  $\mathbb{T}$  um conjunto contável que define o tempo do modelo. É possível obter um sistema amostrado prefixando o tempo para identificá-lo com os valores  $k\bar{t} \in \mathbb{T}$ , onde  $k \in \mathbb{N}$  e  $\bar{t}$  é o período de amostragem. O sistema obtido tem a seguinte forma:*

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), q(t_k), u(t_k)), \quad t_k = k\bar{t}, \quad (2.3)$$

denominado também sistema híbrido sincronizado em tempo discreto.

<sup>4</sup>Embora na literatura a notação  $q^+$ ,  $o^+$  seja usada também ao se referir a sistemas com saltos.

<sup>5</sup>Um autômato é dito não-determinístico se lhe é associado mais de um evento a alguma das células dele; por isso, diz-se que as funções  $\phi, \varphi$  são multivalentes.

Nas definições, a função  $f$  é dita ser o **campo vetorial do sistema híbrido**. Quando o campo vetorial é apenas função do estado (contínuo e discreto), será dito que o sistema é **autônomo**. Assim, esses sistemas podem ser representados por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, q), \\ q^+ &= \phi(x, q),\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}y &= g(x, q), \\ o^+ &= \varphi(x, q).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Será dito que o sistema é **não autônomo** ou variante no tempo quando o campo estiver em função do tempo e do estado.

Como  $q$  é um evento discreto (ou variável discreta), nessas representações pode ocorrer que  $q \in \mathbf{Q}$  esteja definida no conjunto de índices  $\mathcal{J}_n$ , ou seja,  $\mathbf{Q} = \mathcal{J}_n$ . Este será o caso na notação de alguns sistemas chaveados<sup>6</sup>.

Os sistemas híbridos são ditos **sistemas híbridos lineares** se eles podem ser descritos na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_q x, \\ y &= C_q x\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde  $A_q, C_q$  são matrizes constantes.

Usando as matrizes acima e vetores constantes  $B_q, D_q$ , e, se a representação dos sistemas é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_q x + B_q, \\ y &= C_q x + D_q,\end{aligned}\tag{2.7}$$

dizemos que são **sistemas híbridos afins**.

Com o intuito de ilustrar como são esses sistemas, no que segue se colocam dois exemplos de sistemas híbridos encontrados em Pettersson [Pet99].

### Exemplo 2.2.1 (*Relé com histerese*)

*Existem muitos exemplos de sistemas físicos que contêm componentes trabalhando como elementos relé com histerese, os quais são naturalmente modelados como sistemas híbridos. Na Figura 2.1, ilustra-se um elemento relé mecânico simples (também existem outros tipos de sistemas físicos, diferentes dos mecânicos, que possuem característica equivalente, tais como os sistemas pneumáticos, eletromagnéticos e elétricos [Tsy84]).*

*A entrada desse sistema é o ângulo, denotado por  $x$ , e a saída, a tensão, denotada por  $q$ . A relação entre a entrada  $x$  e a saída  $q$  é mostrada na Figura 2.2. Toda vez que*

---

<sup>6</sup>Pode ocorrer também  $q \in \mathbf{Q} = \{q_i : i \in \mathcal{J}_n\}$ .

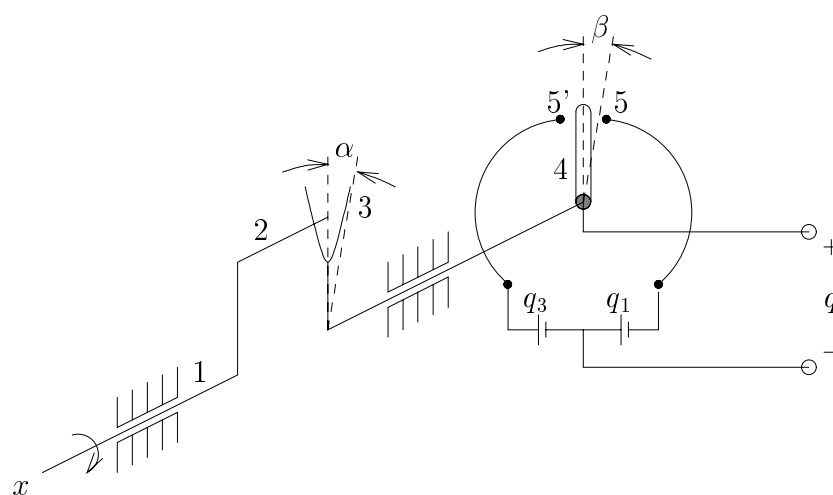


Figura 2.1: Elemento relé mecânico.

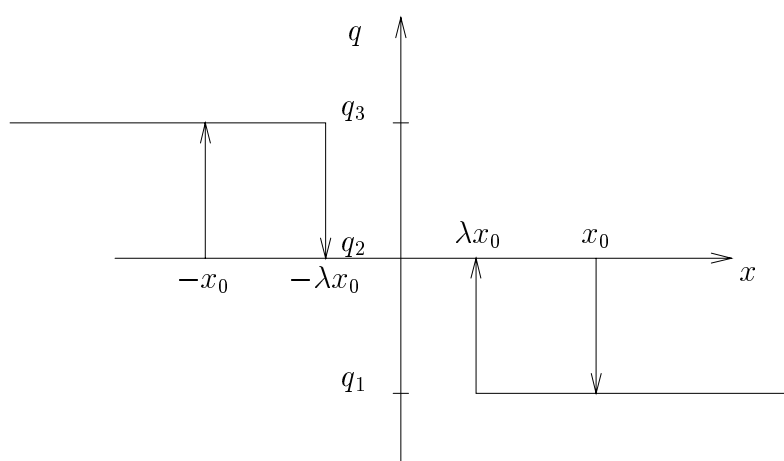


Figura 2.2: Relação entrada-saída do relé.

o sinal de entrada  $x$  se encontra entre os valores limites  $\pm\lambda x_0$  e  $\pm x_0$ , a saída  $q$  muda abruptamente e permanece constante. A mudança dos valores de  $q$  pode ser descrita determinando-se conjuntos chaveados  $S_{i,j}$  cujos elementos sejam estados contínuos<sup>7</sup>. Esses conjuntos de estados contínuos indicam as mudanças dos valores de  $q$ , ou seja,  $q$  muda do valor  $q_i$  ao valor  $q_j$  para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Isso pode ser mostrado definindo-se os conjuntos

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq \lambda x_0\} & S_{2,3} &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -x_0\} \\ S_{2,1} &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq x_0\} & S_{3,2} &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\lambda x_0\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O diagrama de transição de estados [Cas92] mostrado na Figura 2.3 descreve as mudanças de  $q$  (cada nó representa um valor possível do estado discreto  $q$ ).

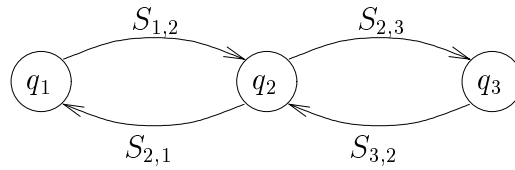


Figura 2.3: Diagrama de transição do elemento relé com histerese.

Existe uma mudança do valor  $q$  de  $q_i$  a  $q_j$  quando  $x$  assume um valor no conjunto  $S_{i,j}$ . Assim esse evento (arco dirigido de  $q_i$  a  $q_j$ ) é etiquetado por  $S_{i,j}$ .

Supõe-se que o relé mecânico da Figura 2.1 está conectado a um motor de corrente contínua  $i_f$ . Fazendo-se algumas considerações físicas do modelo<sup>8</sup> e considerando-se como variáveis de estado contínuo  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  e  $x_3 = i_f$ , o modelo do motor de corrente contínua pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{\beta}{J} & \frac{K_m}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} q. \quad (2.9)$$

A dinâmica discreta vem dada pelos conjuntos chaveados da relação (2.8). Então, a dinâmica desse sistema híbrido autônomo supervisionado<sup>9</sup> está descrita por (2.8) e (2.9).

<sup>7</sup> Este conceito será ampliado no Capítulo 3.

<sup>8</sup> Vide mais detalhes em Pettersson [Pet99].

<sup>9</sup> Um sistema está sob supervisão quando o valor da variável discreta  $q$  foi escolhido por algum processo de alto nível (controlador, computador ou operador humano).

**Exemplo 2.2.2** (*Controladores múltiplos: uma simplificação*)

É muito comum controlar uma planta contínua chaveando entre diferentes controladores ou leis de controle, em que o dispositivo de chaveamento depende dos estados contínuos e discretos. Para ilustrar isso, considera-se o pêndulo da Figura 2.4

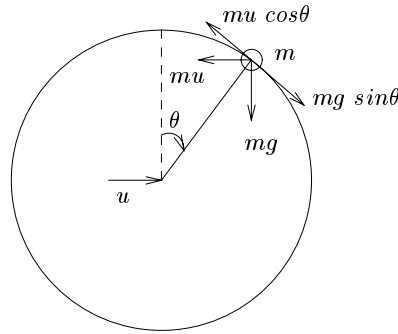


Figura 2.4: O pêndulo invertido.

Seja  $m$  a massa do pêndulo (com roda de raio desprezível) e  $l$  o comprimento do centro de massa ao ponto pivô. O ângulo da vertical ao pêndulo é denotado por  $\theta$ , que é positivo na direção horária,  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $u$ , a aceleração do pivô na direção horizontal, é a lei de controle. Assume-se que o atrito na parte metálica e a resistência do ar para a massa são desprezíveis. Usando a Lei de Newton, a dinâmica do pêndulo se dá pela seguinte equação:

$$ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta - mucos\theta.$$

Sejam as variáveis contínuas  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ , então uma representação da dinâmica do pêndulo no espaço de estados é

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{u}{l}\cos x_1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sem controle, há dois pontos de equilíbrio:  $(0,0)$  e  $(-\pi,0)$ , que fisicamente correspondem ao pêndulo em repouso nas posições superior e inferior, respectivamente. O primeiro ponto é instável, enquanto o segundo é estável (sem perda de generalidade, considera-se apenas o ângulo percorrido pelo pêndulo no intervalo  $[0, 2\pi]$ ). Fora desse intervalo, há infinitos pontos de equilíbrio da forma  $(x_1, x_2)$ , com  $x_1 = 2\pi n$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_1 = -\pi(+2\pi n)$ ,  $x_2 = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ).

Assume-se que o objetivo é fazer oscilar o pêndulo na vizinhança da posição superior

por alguma lei de controle. Åström faz uma abordagem desse problema usando um controle considerando a energia e outro controle denominado controle estabilizante.

Considerando o conjunto de estados invariantes que zeram a energia  $E(x_1, x_2)$  e se alguns desses estados é alcançado, o pêndulo se moverá rumo à sua posição superior, permanecendo com velocidade angular zero. O objetivo é, considerando a variação dessa energia, pôr ou tirar energia a ponto de anulá-la. Assim, é obtido o controlador de energia

$$u_e = \text{sat}_{ng} K E(x_1, x_2) \text{sign}(x_2 \cos x_1), \quad (2.11)$$

onde  $ng$  é o valor limite da aceleração  $u$  de acordo com  $|u| \leq ng$  ( $n$  limitado). Nessa situação, o sistema será globalmente e assintoticamente estável. Mais detalhes podem ser lidos em Åström [ÅF96].

Usando o controlador de estabilização  $u_s$  numa região próxima ao ponto de equilíbrio  $(0,0)$

$$u_s = (g \sin x_1 + la_1 x_1 + la_2 x_2) / \cos x_1, \quad (2.12)$$

obtem-se a seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

implicando que o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  seja localmente e assintoticamente estável para todo  $a_1 > 0, a_2 > 0$ . Se o controlador é usado numa região tal que  $|u_s| \leq ng$ , a aceleração nunca excederá seu valor máximo  $ng$ .

Sejam  $q = q_1$  o estado discreto quando é usado o controlador de energia (2.11) e  $q = q_2$  para o controlador estabilizante (2.12). Assim, a dinâmica do pêndulo pode ser descrita por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{u(x,q)}{l} \cos x_1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde

$$u(x, q) = \begin{cases} u_e & \text{se } q = q_1 \\ u_s & \text{se } q = q_2 \end{cases}. \quad (2.15)$$

A mudança do controlador (dos estados discretos) ocorre ao se definirem os conjuntos chaveados  $S_{1,2}$  e  $S_{2,1}$ , cujo diagrama de transição de estados é dado pela Figura 2.5. Diversos métodos de projeto de como alocar tais conjuntos são propostos em Pettersson [Pet99].

Assim, a dinâmica híbrida não linear desse sistema de controle pode ser represen-

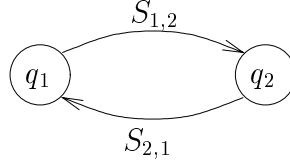


Figura 2.5: Chaveamento dos conjuntos para o problema do pêndulo invertido.

tada como se segue:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_q(x, u_e) & \text{se } q = q_1 \\ f_q(x, u_s) & \text{se } q = q_2 \end{cases},$$

$$\text{com } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, f_q(x, u_e) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \text{sen} x_1 - \frac{u_e}{l} \text{cos} x_1 \end{bmatrix} \text{ e } f_q(x, u_s) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \text{sen} x_1 - \frac{u_s}{l} \text{cos} x_1 \end{bmatrix}.$$

## 2.3 Conceitos básicos e fenômenos híbridos

Sistemas híbridos possuem uma série de conceitos básicos associados e fenômenos que são importantes para seu estudo. Alguns desses conceitos são: evolução híbrida, existência e unicidade de soluções, pontos de equilíbrio, modos deslizantes, soluções periódicas, e simulação e implementação de sistemas híbridos. Por ser de interesse para o melhor entendimento deste trabalho, no que segue, colocam-se apenas dois conceitos<sup>10</sup>.

- **Evolução híbrida**

Considera-se que o estado inicial do sistema é dado por  $(x_0, q_0) \in H$  no tempo  $t_0$  e evolui segundo  $\dot{x} = f(x, q_0, u)$ . O estado discreto permanece constante até que ou um evento correspondente a entrada externa ocorra em  $\Sigma$  mudando o estado discreto, ou o estado híbrido entre em um valor resultante da mudança do estado discreto. Em ambos os casos, o estado híbrido mudou para  $(x_1, q_1) \in H$  no tempo  $t_1$ , depois do qual o processo continua. O comportamento dinâmico é ilustrado na Figura 2.6, onde o estado discreto inicial é  $q_3$ , o próximo estado discreto será  $q_2$  e assim por diante.

- **Modos deslizantes**

Modos deslizantes podem ocorrer em sistemas híbridos quando o campo vetorial é

<sup>10</sup>Os outros conceitos estão dentro do contexto teórico de sistemas dinâmicos e detalhes deles podem ser lidos em Pettersson [Pet99].



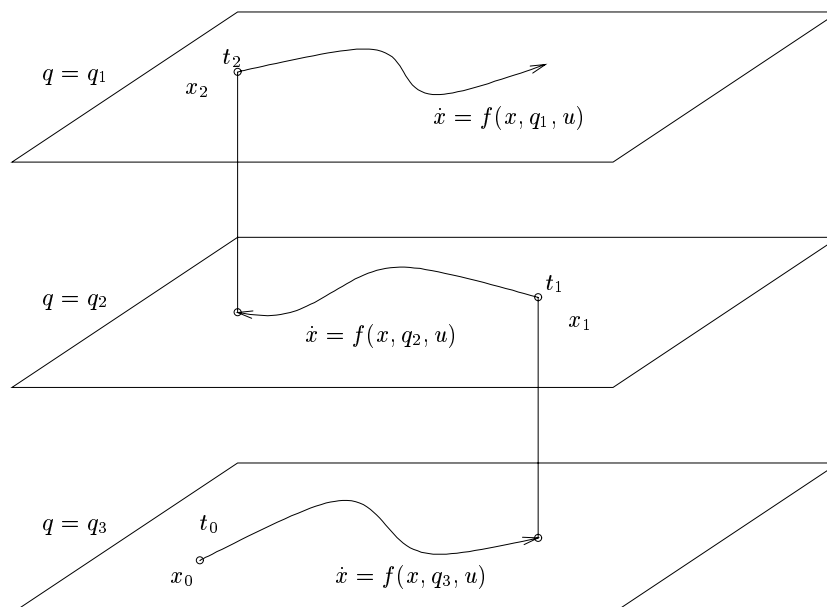


Figura 2.6: Evolução de um sistema híbrido.

descontínuo [Fil88, Utk92]. Nessa condição, um número infinito de chaveamentos no controle ocorre em um tempo finito, e a trajetória do sistema desliza sobre uma hipersuperfície denotada por  $s(x) = 0$ . Na ocorrência de modos deslizantes, a questão de solução da equação diferencial deve ser entendida no contexto de inclusões diferenciais. Detalhes adicionais desse comportamento podem ser encontrados em Pettersson [Pet99] e Malmberg [Mal98].

Neste trabalho, consideram-se sistemas híbridos onde modos deslizantes não ocorrem (apenas um número finito de chaveamentos ocorrem em tempo finito).

## Fenômenos híbridos

Um sistema híbrido é um sistema que envolve dinâmica dos estados contínuos assim como certos fenômenos discretos correspondentes à dinâmica dos estados discretos. Usando a dinâmica contínua dada pela primeira equação de (2.1), onde  $x(t)$  é a componente contínua dos estados tomando valores em algum espaço euclidiano,  $f(t)$  é um campo vetorial que geralmente depende de  $x(t)$  e do correspondente fenômeno discreto; identificam-se os fenômenos híbridos de quatro formas: chaveamentos autônomos, saltos autônomos, chaveamentos controlados e saltos controlados.

- **Chaveamentos autônomos**

O fenômeno de chaveamento autônomo se dá quando o campo vetorial muda descontinuamente, assim que o estado contínuo  $x(\cdot)$  atinja determinadas fronteiras [ASL93]; [Tav87]; [Wit66]. O exemplo mais simples disso é quando o sistema depende de um relógio, o qual pode ser modelado como uma variável de estado suplementar [Bro93].

**Exemplo 2.3.1** (*Um sistema com histerese*)

No exemplo 2.2.1 foi descrita a natureza híbrida do relé mecânico com histerese. A fronteira neste caso está dado pelos seus valores limites.

- **Saltos autônomos**

Nesse fenômeno, o estado contínuo  $x(\cdot)$  se desloca descontinuamente para atingir regiões prescritas do espaço de estado [BGM93]; [BS89]. Os exemplos mais simples que apresentam estes fenômenos são aqueles que envolvem colisões. Esse fenômeno pode ser denominado também de impulsos autônomos.

**Exemplo 2.3.2** (*Colisões [Bra95]*)

Considera-se o caso do movimento vertical e horizontal de uma bola de massa  $m$  em uma sala sujeita à gravidade constante igual a  $g$ . Nesse caso, a dinâmica é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{v}_x &= 0, \\ \dot{v}_y &= -mg.\end{aligned}$$

Também, depois de atingir as fronteiras  $\{(x, y) / y = 0 \text{ ou } y = C\}$ , instantaneamente muda-se de  $v_y$  para  $-\rho v_y$ , onde  $\rho \in [0, 1]$  é o coeficiente de restituição (ver Figura 2.7).

- **Chaveamentos controlados**

O chaveamento controlado é o fenômeno no qual o campo vetorial muda abruptamente em resposta a um comando de controle usualmente associado a um custo. Chaveamentos controlados aparecem, por exemplo, quando é necessário escolher entre campos vetoriais que podem ser da forma  $\dot{x} = f_i(x)$ ,  $i \in \mathcal{J}_n$ .

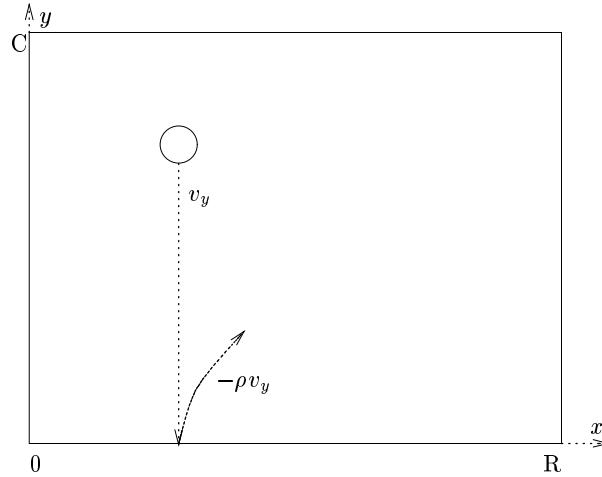


Figura 2.7: Colisão de uma bola.

**Exemplo 2.3.3** (Controle de Satélite [Bra95])

Um exemplo simples de controle de satélite pode ser considerado como:

$$\ddot{\theta} = \tau_{ef} f v,$$

onde  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  é a posição angular e a velocidade angular do satélite respectivamente. O controle está dado por  $v \in \{-1, 0, 1\}$ , dependendo dos jatos de reação adotarem os estados tudo para frente, ponto morto, e tudo para trás, respectivamente.

• **Saltos controlados**

Os saltos controlados são aqueles fenômenos em que o estado contínuo  $x(\cdot)$  muda descontinuamente em resposta a um comando de controle usualmente associado a um custo. Esses fenômenos podem também ser denominados impulsos controlados.

**Exemplo 2.3.4** (Controle de estoque [Bra95])

Em um modelo simples de controle de estoque, há um conjunto discreto do tempo de ressuprimento  $\theta_1, \theta_2, \dots$  e uma associada quantidade ordenada  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

A equação governando os estoques em um dado momento é:

$$\dot{y} = -\mu(t) + \sum_i \delta(t - \theta_i) \alpha_i,$$

onde  $\mu$  representa a dinâmica de degradação ou utilização, e  $\delta$  é a função delta de Dirac.

## 2.4 Sumário

Além da apresentação de um breve histórico sobre sistemas híbridos, foram apresentadas a definição e diversas representações desses sistemas. Também colocaram-se alguns conceitos teóricos para se trabalhar com tais sistemas, cuja característica principal é possuir variáveis de estado de tipo contínuo e discreto. Esses sistemas, que foram descritos com exemplos, apresentados neste conteúdo, possuem inúmeras aplicações.

## Capítulo 3

# Sistemas chaveados, uma classe de sistemas híbridos: análise de estabilidade

Estabilidade é uma propriedade fundamental na teoria de sistemas de controle. Do ponto de vista do controle, essa é a propriedade que um sistema em malha fechada deve apresentar para que trajetórias que se iniciem perto do ponto de operação permaneçam sempre perto no futuro. Para verificar a estabilidade de um sistema, existem vários métodos. Um deles é o método direto de Lyapunov [Kha96, SL91].

O intuito deste trabalho é fornecer conceitos para a análise de estabilidade de sistemas híbridos usando o método direto de Lyapunov. De forma similar à realizada com sistemas não lineares, a análise de estabilidade de sistemas híbridos consiste em se determinar uma função escalar, ou função de Lyapunov candidata, que satisfaça determinadas condições.

A dificuldade da análise de estabilidade de sistemas híbridos usando funções de Lyapunov reside no fato de termos chaveamentos dos estados discretos e dos campos vetoriais descrevendo a evolução contínua do sistema.

Quando é usado o método direto de Lyapunov, para análise de estabilidade, é freqüente que a procura dessa função seja feita com uma função  $v(x)$  de tipo quadrática. Se a procura de tal função candidata não é satisfatória, existe a possibilidade de se propor uma nova função de Lyapunov quadrática por partes da forma  $v(x) = \{v_i(x)\}$ , caracterizada por regiões do espaço de estados [Pet99, Joh99, HB98]. Nesse sentido, requer-se que a função de Lyapunov candidata decresça ao ocorrerem mudanças dos estados discretos.

O interesse deste texto é a análise de estabilidade de sistemas chaveados, uma classe

de sistemas híbridos. São fornecidos junto à representação desses sistemas alguns exemplos. Também relacionados com este trabalho, se formularão brevemente dois métodos recentes na literatura que usam técnicas LMI. Vários exemplos ilustram esses procedimentos. Por último, apresentam-se as vantagens e limitações dessas metodologias.

### 3.1 Motivação

A análise e a síntese de sistemas híbridos são normalmente abordadas de duas formas distintas. Há pesquisas em que se procura sintetizar supervisores para plantas híbridas tendo como principal ponto de vista o comportamento lógico (definido por seqüências de superfícies atingidas no espaço de estados contínuos) do sistema resultante. Podem-se citar os seguintes trabalhos nessa direção: Niinomi e Krogh [NK95], Cury et al. [CKN98], Cury e Krogh [CK99], Chutinan [Chu99] e Lemmon [LHM99a], entre outros.

Por outro lado, há pesquisas nas quais se procura estender métodos de análise de estabilidade de sistemas contínuos para sistemas híbridos. Muitos desses trabalhos baseiam-se fortemente nos conceitos da teoria de estabilidade de Lyapunov e no uso de métodos baseados em LMIs. Tais são os resultados de vários trabalhos [BGM93, Bro93, DO94, DO95, Bro96, Bra95, Mal98, YMH95, HM97]<sup>1</sup>.

Considerando essa segunda tendência, nos últimos quatro anos encontram-se resultados na literatura que mostram um grande desenvolvimento nessa área, tratando com diversas classes de sistemas híbridos: sistemas híbridos lineares, sistemas híbridos afins, sistemas com chaveamentos arbitrários e sistemas híbridos não lineares. Há diversos enfoques para a análise e síntese de cada uma dessas classes de sistemas híbridos, e essas abordagens dependem do interesse e do campo de ação dos pesquisadores. Na seqüência, referenciam-se algumas dessas pesquisas.

Avanços recentes no estudo de análise foram feitos por Hassibi [HB98], Hassibi e Boyd [HBH99], Zhivoglyadov e Middleton [ZM98], Johansson e Rantzer [JR98], Petersson e Lennartson [PL99], Ye e Hou [HYH98], Michel e Hu [MH99], Li et al. [LSX00]. Similarmente, no mesmo período se destacam como resultados de síntese e métodos de projeto para sistemas híbridos os trabalhos feitos por Malmberg [Mal98], Doná et al. [DMG99], Beldiman e Bushnell [BB99], Bishop [Bis99], Zhivoglyadov e Middleton [ZM99], McClamroch e Kolmanovsky [MK00], Altafini et al. [ASJ02]. Nesses trabalhos, os resultados principais são apresentados ou como condições necessárias e suficientes, ou apenas como condições suficientes.

---

<sup>1</sup>Entre muitos outros autores.

Para se determinar estabilidade de sistemas híbridos, existem diversas abordagens. Há trabalhos em que se usa uma função de Lyapunov quadrática comum ao sistema híbrido linear [HB98, SN97, SN98, AL99, LHM99b]. Outros trabalhos usam funções de Lyapunov quadráticas por partes conhecidas como funções de Lyapunov  $Pwq^2$  (abordagem  $Pwq$ ), as quais são adotadas para cada subsistema linear ou afim do sistema híbrido [HB98, Pet99, JR98, DBP00].

O interesse deste trabalho é estudar a análise e a síntese de uma classe de sistemas híbridos: os sistemas chaveados cujos subsistemas são do tipo linear, afim ou bilinear. Essa classe de sistemas possui inúmeras aplicações, tais como no controle de sistemas mecânicos, na indústria automotiva, chaveamento de conversores de potência, no controle de tráfego aéreo, entre outros.

Em nível de projeto, os métodos usando chaveamentos controlados se tornaram uma opção interessante, uma vez que um controlador chaveado (constante por partes, por exemplo) pode ser mais eficiente para melhorar alguma tarefa desejada do que outro controlador de caráter contínuo. Além disso, existem situações em que controles estabilizantes contínuos não existem [Mal98].

Serão citadas na seqüência as diversas abordagens que existem na literatura recente para analisar sistemas chaveados.

Liberzon e Morse [LM99] consideram uma única função de Lyapunov para analisar esse tipo de sistemas com chaveamentos arbitrários cujo fundamento teórico segue os princípios da Algebra de Lie.

Outra tendência para abordar análise e síntese de sistemas chaveados é fazendo-se uso da técnica LMI para construção da função de Lyapunov (comum ao sistema ou quadrática por partes). É importante destacar nessa linha de pesquisa os trabalhos desenvolvidos por Hassibi e Boyd [HB98], Petersson [Pet99], Johansson [Joh99], Beldiman e Bushnell [BB99] e DeCarlo et al. [DBP00]. Na seção 3.5 deste capítulo se comentarão apenas dois métodos relacionados com o uso dessa técnica.

No que se segue, serão fornecidos os fundamentos teóricos necessários para o estudo de sistemas chaveados.

---

<sup>2</sup>Do termo “Piecewise quadratic” e, nesse caso, o resultado dependerá muito de como se faz a partição do espaço de estados.

## 3.2 Sistemas chaveados: uma classe de sistemas híbridos

### Sistemas chaveados

Seja  $\mathcal{J}_n$  um conjunto contável de  $n$  índices. Pode-se encontrar na literatura sistemas chaveados autônomos representados de várias maneiras. As mais comuns são:

$$\dot{x} = f(x, q_i), \quad q_i \in \mathcal{Q}, \quad i \in \mathcal{J}_n \quad (3.1)$$

ou

$$\dot{x} = f_i(x), \quad i \in \mathcal{J}_n, \quad (3.2)$$

ou similar à equação (2.4):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, q) \\ q^+ &= \phi(x, q), \end{aligned}$$

com  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  e condição inicial  $x(0) = x_0$ . Essas representações são basicamente o mesmo modelo para o caso autônomo, cujas entradas discretas dependem das variáveis do estado híbrido, geralmente descritas pela função  $\phi$  dos conjuntos  $S_{i,j}$  dados na relação (3.4).

As hipóteses de chaveamento para esses sistemas são:

- cada função do campo vetorial  $f$  é globalmente Lipchitz contínua<sup>3</sup>,
- a seqüência de valores  $q$  determinam um número finito de chaveamentos em tempo finito.

As representações dadas acima, via equações diferenciais ordinárias, correspondem a sistemas em tempo contínuo. Esses sistemas podem ser representados também em tempo discreto por equações de diferenças na seguinte forma:

$$x[k+1] = f_i(x[k]), \quad i \in \mathcal{J}_n, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.3)$$

onde  $x[t] \in \mathbb{R}^{n_x}$  e  $x[0] = x_0$ .

Um sistema chaveado é descrito pelo seu campo vetorial, cuja evolução relata-se a seguir.

---

<sup>3</sup>Ver esse conceito no Apêndice A.



### Evolução do sistema

O campo vetorial  $f$  descrevendo a evolução da variável contínua  $x$  depende da variável discreta  $q$ . Para cada estado discreto  $q$ , o sistema contínuo dado na equação (3.1) evolui segundo  $\dot{x} = f(x, q_i)$  se o estado discreto é  $q_i$ . Quando  $q$  muda para  $q_j$ , tem-se um outro campo vetorial específico  $f(x, q_j)$  descrevendo a evolução contínua. Essas mudanças são normalmente chamadas de campos vetoriais chaveados. É usual que os chaveamentos no campo vetorial impliquem mudanças abruptas ou descontinuidades em  $f$ . Se o sistema chaveado for contínuo, tem-se que impor que os subsistemas coincidam no tempo do chaveamento<sup>4</sup>.

### Conjuntos chaveados

Denota-se por  $\mathcal{Q}$  o conjunto dos estados discretos,  $\Sigma$  o conjuntos dos eventos externos do sistema, e  $\phi : \mathcal{D}_\phi \rightarrow \mathcal{Q}$  a função que descreve a evolução dos estados discretos no domínio  $\mathcal{D}_\phi$ .

A mudança dos estados discretos se dá por dois motivos: quando um evento externo é gerado em  $\Sigma$  ou quando um evento interno é gerado do processo contínuo. Os eventos externos acontecem sem influência da dinâmica contínua. Já os eventos internos são gerados devido a certas condições pelo processo contínuo. Os eventos internos que provocam uma mudança no estado discreto quando  $x$  e  $q$  atingem certos valores podem ser expressos por conjuntos  $S_{i,j}$  denominados **conjuntos chaveados**, que estão relacionados a  $\phi^5$ , segundo

$$S_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} / q_j = \phi(x, q_i)\} \text{ para } i, j \in \mathcal{I}_n. \quad (3.4)$$

Exemplos desses conjuntos foram descritos junto aos exemplos de sistemas híbridos na seção 2.2.

Informações adicionais de sistemas chaveados podem ser encontradas nas referências [PD91, Bra95, Laf94, WPD94, Pet99, LM99, DBP00].

## 3.3 Exemplos de sistemas chaveados

Nesta seção apresentam-se três exemplos que exibem diversas classes de sistemas chaveados, assim como os campos vetoriais e os conjuntos chaveados descritos por eles.

<sup>4</sup>Se no tempo  $t_j$  acontece a mudança de  $q_{i_{j-1}}$  para  $q_{i_j}$  chaveando o campo de  $f$ , então é necessário que  $f(x(t_j), q_{i_{j-1}}) = f(x(t_j), q_{i_j})$ .

<sup>5</sup>A forma mais geral de expressar essa função é  $\phi = \phi(x, q_i, u, \sigma)$ .

**Exemplo 3.3.1** *No exemplo 2.2.2, fez-se a modelagem de controladores múltiplos para o pêndulo invertido, dado pela lei de controle  $u(x, q)$  na relação (2.15), que varia de acordo com a mudança da variável discreta  $q$ . Se  $q = q_1$ , a lei de controle é dada pelo controlador de energia  $u_e$  na equação (2.11) e, se  $q = q_2$ , pelo controlador estabilizante  $u_s$  na equação (2.12).*

*A descrição dos conjuntos chaveados respectivos  $S_{1,2}$  e  $S_{2,1}$ , nesse caso, depende do método de projeto. Petersson [Pet99] estabelece-os escolhendo o campo vetorial correspondente à menor projeção sobre  $x$  para todos os estados (“min-projection strategy”). Isso significa que a distância entre os estados e o ponto de equilíbrio decresce rapidamente. A aplicação desse método conduz à descrição do seguinte conjunto chaveado:*

$$S_{1,2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |u_s(x)| \leq ng, x^t f(x, u_s) \leq x^t f(x, u_e)\},$$

*até que o controlador de energia atinja o valor  $ng$ . Atingido esse valor, é feita a descrição do outro conjunto dado por*

$$S_{2,1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : u_s(x) \geq ng\}.$$

*As funções  $f(x, u_s)$  e  $f(x, u_e)$ , fornecidas anteriormente, são os campos vetoriais correspondentes a cada controlador.*

**Exemplo 3.3.2** *Considerando-se o sistema afim dado pelo sistema linear com saturação [PTB97] da forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + 5 \text{ sat}(u), \quad u = K^t \mathbf{x}, \end{cases} \quad (3.5)$$

*onde  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $K \in \mathbb{R}^2$  é o ganho aplicado ao sistema, e  $\text{sat}(\cdot) \in \mathbb{R}$  denota a função de saturação normalizada dada por*

$$\text{sat}(u) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } u > 1 \\ u & \text{se } |u| \leq 1 \\ -1 & \text{se } u < -1 \end{cases} .$$

Esse sistema, reescrito como um sistema afim chaveado, é representado na forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A\mathbf{x} - b & \text{se } K'\mathbf{x} < -1 \\ (A + bK')\mathbf{x} & \text{se } -1 \leq K'\mathbf{x} \leq 1 \\ A\mathbf{x} + b & \text{se } K'\mathbf{x} > 1 \end{cases} .$$

Nesse exemplo,  $n = 3$ ,  $\mathcal{J}_3 = \{1, 2, 3\}$  e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

As trajetórias desse sistema assim como os respectivos pontos de equilíbrio podem ser observados na Figura 3.4.

**Exemplo 3.3.3** Outro exemplo de sistema chaveado é dado pelo sistema híbrido linear e autônomo

$$\dot{x} = A_q x, \quad q \in \{1, 2\},$$

com

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -100 & 1 \end{bmatrix} .$$

Os conjuntos que definem os chaveamentos são:

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : s_{12}(x) = 0\} \text{ com } s_{12}(x) = x_2 - 2x_1, \\ S_{2,1} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : s_{21}(x) = 0\} \text{ com } s_{21}(x) = x_2 + 10x_1. \end{aligned}$$

As trajetórias do sistema são dadas na Figura 3.1. Nesse caso, os conjuntos chaveados são as fronteiras da partição do espaço de estados (da variável contínua) que eles determinam.

## 3.4 Estabilidade de sistemas híbridos

Nesta seção são colocadas as definições de estabilidade para sistemas híbridos autônomos da forma (2.4).

Sem perda de generalidade, considera-se a origem  $x = 0$  como o ponto de equilíbrio e denota-se com  $x_0$  o estado contínuo inicial, ou seja,  $x_0 = x(0)$ .

**Definição 3.4.1 (Estabilidade local)** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema dado por (2.4) é localmente

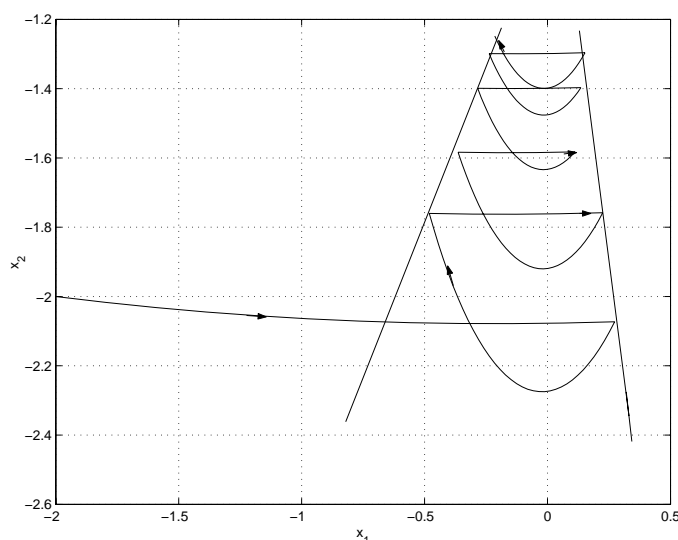


Figura 3.1: Trajetória de um sistema chaveado.

- estável se, dado  $R > 0$ , existe  $r = r(R) > 0$  tal que

$$\|x_0\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R, \forall t \geq 0;$$

- assintoticamente estável se é estável e  $r$  pode ser escolhido tal que

$$\|x_0\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R, \forall t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0;$$

- exponencialmente estável se, dado  $R > 0$ , existe  $r = r(R) > 0$  e dois valores positivos  $k_1 = k_1(R) > 0$  e  $k_2 = k_2(R) > 0$  tal que

$$\|x_0\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < k_1 e^{-k_2 t} \|x_0\|, \forall t \geq 0. \quad (3.6)$$

◇◇

**Definição 3.4.2 (Instabilidade)** É dito que o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (2.4) é instável se ele não é estável.

◇◇

**Nota 3.4.1 (Sistema híbrido estável (globalmente) )** Seja  $x = 0$  o único ponto de equilíbrio do sistema híbrido (2.4). Será dito que ele é

- global e assintoticamente estável se é local e assintoticamente estável para todo estado híbrido inicial;

- *global e exponencialmente estável se é local e exponencialmente estável para todo estado híbrido inicial.*

*Assim sendo, será dito que o sistema híbrido é estável (exponencial ou assintoticamente).*

As definições de estabilidade descritas acima são ilustradas com três exemplos. O primeiro exemplo foi encontrado em Johansson [Joh99]; o segundo em Petersson [Pet99]; e o último em Pittet [PTB97].

**Exemplo 3.4.1** *Seja o sistema dado por*

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1 x, & \text{se } x \in X_1 \\ A_2 x, & \text{se } x \in X_2 \end{cases}, \quad (3.7)$$

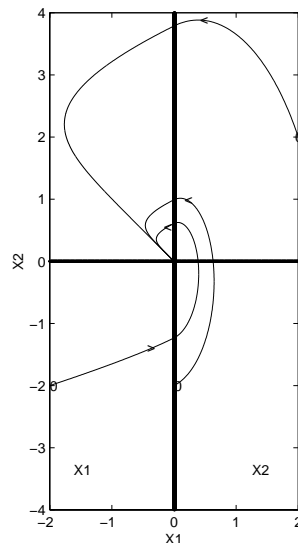
com

$$X_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0\}, \quad X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0\}$$

e

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}.$$

*Os autovalores das matrizes  $A_1$  e  $A_2$  são, respectivamente,  $\{-6, -1\}$  e  $\{-2 \pm 8.944i\}$ . O sistema (3.7) é um sistema híbrido globalmente estável. Observa-se na Figura 3.2 o comportamento assintótico da trajetória.*



*Figura 3.2: Sistema híbrido globalmente estável.*

**Exemplo 3.4.2** Dado o sistema chaveado

$$\dot{x}(t) = A_{i(t)}x(t),$$

com

$$i(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } i(t^-) = 1 \text{ e } s_{12}(x) = 0 \\ 1, & \text{se } i(t^-) = 2 \text{ e } s_{21}(x) = 0 \end{cases}, \quad i(0) = 1.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{bmatrix}.$$

e

$$s_{12}(x) = x_2 + 0.2x_1, \quad s_{21}(x) = 5x_1 - x_2.$$

Na Figura 3.3 exibe-se a trajetória desse sistema híbrido com campos estáveis (os autovalores são iguais a  $-1 \pm j\sqrt{1000}$ ), mas o sistema híbrido é instável. Isso mostra que não é suficiente que os campos sejam estáveis para que o sistema seja estável, pois os chaveamentos podem destruir a estabilidade [Pet99, Joh99, LM99].

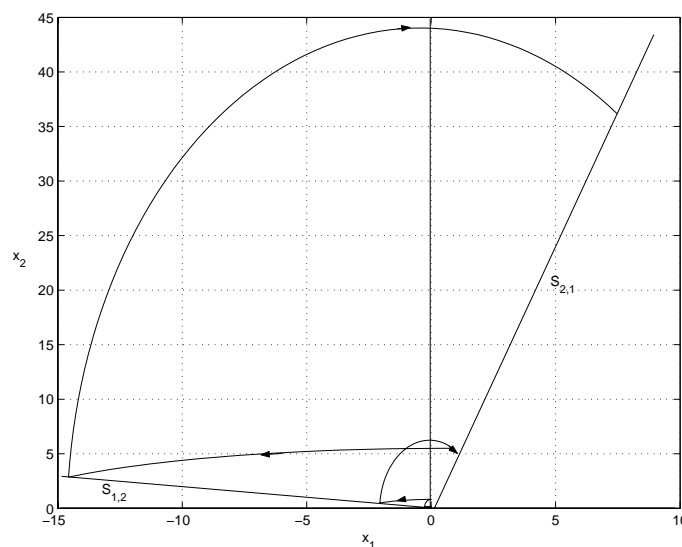


Figura 3.3: Campo de sistemas estáveis: o sistema híbrido é instável.

**Exemplo 3.4.3** O sistema (3.5) do Exemplo 3.3.2. é instável em malha aberta (os autovalores da matriz  $A$  são  $\{-1, 1\}$ ). Entretanto, a origem é um ponto de equilíbrio estável em malha fechada. Então, pode-se afirmar que o sistema é localmente estável. Nesse caso, a região de atração, cujo conceito será visto logo a seguir, está dada pela região ilimitada, onde todas as trajetórias da parte linear do sistema chaveado convergem à origem. Observa-se a região intermédia contendo a origem da Figura 3.4.

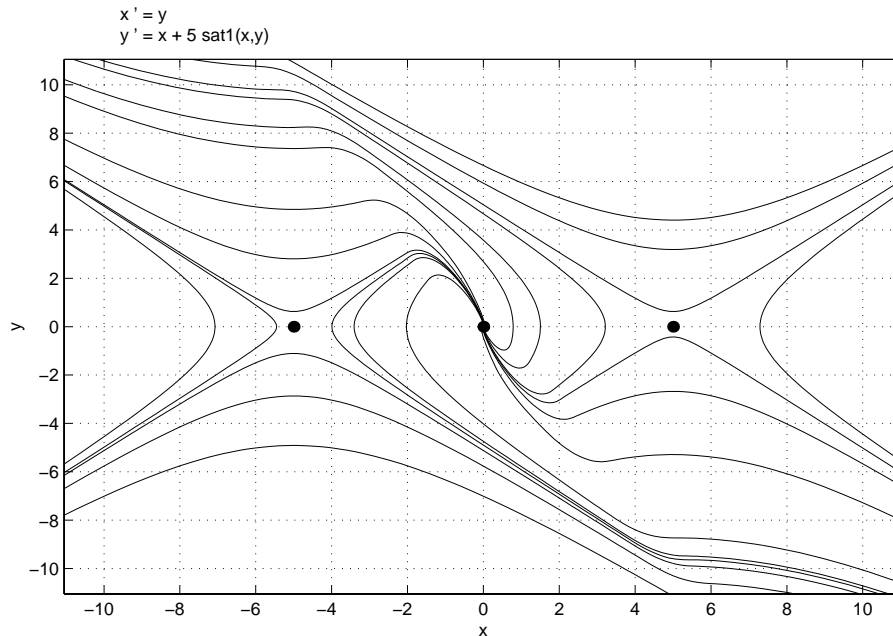


Figura 3.4: Sistema com saturação: sistema localmente estável.

## Região de atração ( $\Upsilon$ )

Se a origem de um sistema híbrido é local e assintoticamente estável, a região de atração  $\Upsilon$  é o conjunto de todos os estados híbridos iniciais tais que as trajetórias contínuas respectivas converjam à origem.

Determinar uma região de atração analiticamente não é tarefa fácil. Entretanto, pode-se fazer uso da teoria de Lyapunov [Kha96, SL91] para estimar regiões de atração. Trabalhos feitos por Jirstrand [Jir98], Coutinho [Cou00] e Trofino [Tro00a, Tro00b] mostram resultados de como estimar essas regiões para o caso de sistemas não lineares. Resultados similares são obtidos para o caso de sistemas híbridos [Joh99, Pet99, ASJ02]. Nos próximos capítulos deste trabalho, determinam-se estimativas dessas regiões.

## 3.5 Estabilidade de sistemas híbridos baseados em LMIs

Nesta seção é aplicado o método direto de Lyapunov para verificação da estabilidade de sistemas híbridos. São apresentados dois enfoques, recentes na literatura, propostos em termos de LMIs.

Recentemente, essa técnica tem sido aplicada a sistemas híbridos em que os campos vetoriais podem ser lineares ou não lineares [HB98, Pet99, Joh99, BB99, DBP00].

A descrição das ferramentas necessárias que acompanham o uso de LMIs encontra-se no apêndice deste trabalho, e detalhes dessa técnica podem ser lidos em Boyde et al [BGFB94].

No início deste capítulo foi colocada a motivação e necessidade de novas formas para a construção de funções de Lyapunov, devido ao fato de haver chaveamentos dos estados discretos e dos campos vetoriais no sistema híbrido. Nesta seção é discutido como são feitas essas caracterizações segundo dois pesquisadores nessa área.

### 3.5.1 Caracterizações da função de Lyapunov

A versão linear de problemas dados por (3.1) são da forma (2.6)

$$\dot{x} = A_i x, \quad x \in X_i,$$

pertencentes à classe de sistemas usados por Johansson [Joh99] e Pettersson [Pet99]. Esses sistemas pertencem, também, à classe de sistemas que é tratada nesta pesquisa.

O enfoque mais simples para a construção de funções de Lyapunov é conhecido como estabilidade quadrática. Consiste em procurar uma função de Lyapunov quadrática comum da forma  $v(x) = x'Px$  válida para todos os subsistemas.

A vantagem dessa metodologia, embora conservadora, é que a procura de tal matriz  $P$  requer a solução simultânea de inequações matriciais do tipo

$$\begin{aligned} P &> 0, \quad P = P' \\ A_i P + P A_i &< 0, \quad \forall i. \end{aligned}$$

Esse é um problema convexo possível de ser resolvido eficientemente com ferramentas disponíveis.

Outra vantagem dessa metodologia é que a estabilidade pode ser garantida independentemente das células da partição e dos esquemas de chaveamento.

Entretanto, existem sistemas estáveis<sup>6</sup> para os quais não é possível encontrar uma função de Lyapunov desse tipo. Nessa instância, os procedimentos a seguir são:

- abordar o problema usando a metodologia de procura de funções de Lyapunov quadrática por partes (FLQPP) para sistemas lineares por partes, isto é, procurar

---

<sup>6</sup>Alguns desses exemplos encontram-se em Johansson [Joh99].



uma função de Lyapunov para cada região da partição [Joh99] ou procurar uma FLQPP para sistemas dados na forma geral (3.1), como feito por Pettersson [Pet99];

- abordar o problema usando uma função de Lyapunov comum de caráter polinomial estabelecendo duas novas propostas que serão apresentadas nos Capítulos 4 e 5.

Na seqüência descrevem-se esses procedimentos.

### 3.5.2 Caracterização segundo Johansson

Johansson [Joh99] trata sistemas afins dados em (2.7), nos quais sistemas da forma (2.6) são um caso particular. Esses sistemas, reescritos da forma usada por esse autor, seguem a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i x(t) + a_i + B_i u(t), & x(t) &\in X_i, & i &\in \mathbb{I} \\ y(t) &= C_i x(t) + c_i + D_i u(t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $A_i, B_i, C_i, D_i, a_i, c_i$  são, respectivamente, matrizes e vetores constantes de dimensões apropriadas,  $\mathbb{I}$  é o conjunto de  $n$  índices, onde  $n$  é o número de partições a que o espaço de estados contínuos,  $\mathbb{X}$ , é submetido (particionamento dado por poliedros convexos fechados  $X_i \subset \mathbb{R}^{n_x}$  disjuntos dois a dois e possivelmente ilimitados<sup>7</sup>). As regiões  $X_i$  são colocadas na forma

$$X_i = \{x : G_i x + g_i \succeq 0\}, \quad i \in \mathbb{I},$$

para matrizes  $G_i$  e vetores  $g_i$  dados.

Considerando  $x = 0$  como o ponto de equilíbrio do sistema, o método é formulado de modo a conseguir uma proposta menos conservadora, onde é procurada uma FLQPP para o sistema (3.8). Esse método é descrito brevemente a seguir.

Considera-se a partição do conjunto de índices  $\mathbb{I} = \mathbb{I}^0 \cup \mathbb{I}^1$ , de modo que  $\mathbb{I}^0$  é o conjunto de índices cuja célula contém  $x = 0$ , e  $\mathbb{I}^1$  é o conjunto de índices cuja célula não contém  $x = 0$ .

Fazendo-se a transformação  $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ , o sistema (3.8) é tratado como um sistema

---

<sup>7</sup>Estes poliedros são denominados de células da partição.

linear (para o caso  $u(t) = 0$ ) da forma

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_i \bar{x} \quad \text{com} \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & a_i \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}.$$

O método é aplicado a sistemas afins definidos em regiões limitadas (com a finalidade de eliminar o excesso de conservadorismo).

Considera-se a função de Lyapunov quadrática por partes da forma

$$v(x) = \begin{cases} x' P_i x, & x \in X_i, i \in \mathbb{I}^0 \\ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}' \bar{P}_i \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, & x \in X_i, i \in \mathbb{I}^1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Com essa função de Lyapunov candidata e estabelecendo-se critérios de parametrização, utilizando matrizes  $E_i, F_i$  construídas por meio das partições  $X_i$  que garantem a continuidade dessa função, estabelecem-se condições suficientes para a procura das matrizes  $P_i$ , estabelecendo a estabilidade exponencial do sistema proposto e de caráter menos conservador<sup>8</sup> que o método convencional de procura de uma função de Lyapunov quadrática comum ao sistema.

**Nota 3.5.1** *Este autor também relaxa no requisito de continuidade da função de Lyapunov, considerando que essa função candidata possui dependência descontínua do estado discreto e que é decrescente nos instantes dos chaveamentos (como no caso das funções de Lyapunov múltiplas [Bra95]). Situações assim ocorrem quando as regras de chaveamento são da forma  $i(t) = \nu\{x(t), i(t^-)\}$ . Isso se observa no Exemplo 3.5.2. Assim, fazendo uso do S-procedure e considerando que as condições de transição são inequações afins do estado, são acrescentadas condições LMI no teorema de estabilidade<sup>9</sup>.*

Os exemplos seguintes, que não admitem a existência de uma função de Lyapunov quadrática comum ao sistema, exibem a metodologia da procura de uma FLQPP com essa caracterização.

**Exemplo 3.5.1** *Dado o sistema:*

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x, & \text{se } x_1 x_2 \geq 0 \\ A_2 x, & \text{se } x_1 x_2 < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

<sup>8</sup>Há sistemas estáveis nos quais não é possível encontrar uma matriz P comum ao sistema.

<sup>9</sup>Ver Lema 4.1 e o Teorema 7.1 em Johansson [Joh99].

com

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ -10 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 10 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0\} \quad e \quad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 < 0\}.$$

As matrizes  $E_i, F_i$ , obtidas através das partições  $X_i$ , são dadas por

$$E_1 = -E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = -E_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_i = \begin{bmatrix} E_i' & I_2 \end{bmatrix}'.$$

A função de Lyapunov quadrática por partes obtida é

$$v(x) = x' P_i x, \quad P_i = I, \quad i = 1, 2.$$

As curvas de nível e a trajetória do sistema são mostradas na Figura 3.5.

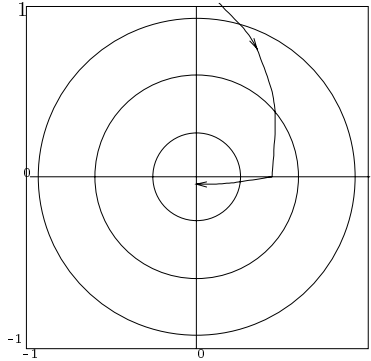


Figura 3.5: Curvas de nível e a trajetória do sistema (3.10).

**Exemplo 3.5.2** Considerando as matrizes  $A_1, A_2$  e os conjuntos chaveados  $S_{1,2}$  e  $S_{2,1}$  do Exemplo 3.3.3, e colocando a lei de chaveamento como sendo  $i = i(t)$ , propõe-se o seguinte sistema:

$$\dot{x}(t) = A_{i(t)} x(t) \tag{3.11}$$

$$i(t) = \begin{cases} 2, & i(t^-) = 1 \quad s_{12}(x) = 0 \\ 1, & i(t^-) = 2 \quad s_{21}(x) = 0, \end{cases}$$

com  $i(0) = 1$ .

A função de Lyapunov quadrática por partes obtida é  $v(x) = \{v_i(x)\}$ , com  $v_i = x'P_i x$ ,  $i \in \mathcal{J}_2$  e

$$P_1 = \begin{bmatrix} 17.9 & -0.89 \\ -0,89 & 179 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 739 & -38.1 \\ -38.1 & 91.8 \end{bmatrix}.$$

A estabilidade da trajetória respectiva é visualizada na Figura 3.1.

### 3.5.3 Caracterização segundo Petersson

Petersson [Pet99] trabalha com sistemas híbridos autônomos da forma geral (2.4), em que os estados híbridos são caracterizados pela dupla de estados contínuos e discretos  $(x, q) \in H = \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{Q}$ ,  $q \in \mathbb{Q} = \{q_1, \dots, q_n\}$ , onde  $n$  é o número de estados discretos.

As mudanças dos estados discretos são dadas pelos conjuntos chaveados

$$S_{k,j} = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : q_j = \phi(x, q_k)\} \text{ para } k, j \in \mathcal{J}_n.$$

Assumindo que a origem é o ponto de equilíbrio do sistema, independentemente do valor de  $q$ , e para fins de análise de estabilidade, considera-se para esses sistemas que o campo vetorial  $f(x, q)$ , satisfazendo a condição de Liptchitz, é contínuo em  $x$  para cada estado discreto  $q$ .

Após fazer o particionamento do espaço de estados híbridos  $\Omega = (\mathbb{X}, \mathbb{Q})$  na forma  $\Omega = \cup_{i=1}^l \Omega_i$ , esse autor considera o conjunto dos estados contínuos na forma  $\Omega^{x,q_i} = \{(x, q_i) \in \Omega, i \in \mathcal{J}_l\}$  e define as respectivas regiões de fronteira  $\Lambda_{i,r}$   $i, r \in \mathcal{J}_l (i \neq r)$ , determinadas pelo conjunto de pontos das trajetórias que passam de  $\Omega_i$  a  $\Omega_r$ . Também denota  $\Lambda_{i,r}^x$  como o conjunto de estados contínuos de  $\Lambda_{i,r}$ , como se observa na Figura 3.6.

Para descrever a função de Lyapunov, que, no geral, é de caráter descontínuo, e enunciar os critérios de estabilidade, esse autor faz uma descrição matemática mais detalhada, no sentido que será visto logo a seguir.

Considera a função de Lyapunov,  $v(x)$ , como uma função contínua por partes da forma

$$v(x) = v_i(x), \quad (x, q) \in \Omega_i, \quad i \in \mathcal{J}_l. \quad (3.12)$$

Essa função é, no geral, descontínua nas regiões de fronteira  $\Lambda_{i,r}$ , onde  $v_i : \mathbf{clos}(\Omega_i^x) \rightarrow$

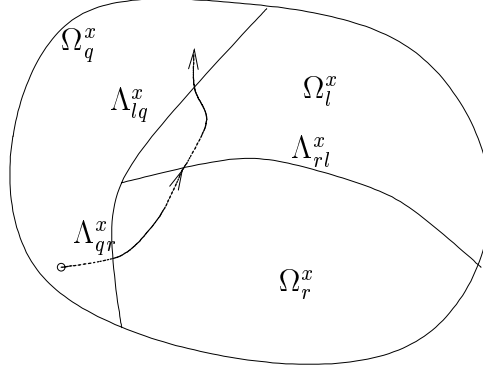


Figura 3.6: Regiões vizinhas, no espaço de estados contínuo.

$\mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{J}_l$ <sup>10</sup>,  $v_i(x)$  são funções continuamente diferenciáveis em  $\mathbf{clos}(\Omega_i^x)$ ,  $i \in \mathcal{J}_l$  e assim

$$\dot{v}_i(x) = \frac{\partial v_i(x)}{\partial x} f(x, q), \quad (x, q) \in \Omega_i, \quad i \in \mathcal{J}_l. \quad (3.13)$$

Também  $\exists(x, q) \in \Lambda_{i,r}$  tal que  $v_i(x)$  e  $v_r(x)$  estão definidas quando a trajetória vai de  $\Omega_i$  a  $\Omega_r$  em  $(x, q)$ . Assim, fazendo uso de funções de classe  $\mathcal{K}$  e fazendo extensão do contexto teórico de sistemas não lineares [Kha96, SL91] aplicada a sistemas híbridos, considera o método direto de Lyapunov para formular teoremas de estabilidade, estabilidade assintótica e estabilidade exponencial. Partindo desses teoremas, considerando as regiões do sistema híbrido e fazendo uso do *S-procedure*, podem ser formuladas condições suficientes em termos de LMIs para resolver o problema de estabilidade do sistema híbrido proposto.

Nesse sentido, a função de Lyapunov candidata  $v(x) = \{v_i(x)\}$  é tal que as funções quadráticas  $v_i(x)$  são da forma

$$v_i(x) = \pi_i + p_i'x + x'P_i x,$$

onde a matriz  $P_i$ , o vetor  $p_i$  e a constante  $\pi_i$  são as variáveis de decisão a serem procuradas para cada  $i \in \mathcal{J}_l$ .

O seguinte exemplo mostra os resultados após aplicação dessa metodologia.

**Exemplo 3.5.3** *Dado o sistema*

$$\dot{x}(t) = A_{q(t)}x(t)$$

<sup>10</sup> $\mathbf{clos}(\Omega)$  é o fecho do conjunto  $\Omega$ .

com

$$q(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } q(t^-) = 1 \text{ e } s_{12}(x) = 0 \\ 1, & \text{se } q(t^-) = 2 \text{ e } s_{21}(x) = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -100 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -100 & 1 \end{bmatrix}.$$

e

$$s_{12}(x) = x_2 + x_1, \quad s_{21}(x) = x_2.$$

A Figura 3.7 mostra a trajetória de um sistema híbrido com campos instáveis (os autovalores são iguais a  $1 \pm j\sqrt{1000}$ ). Segundo Petersson [Pet99] não é possível encontrar uma função de Lyapunov quadrática comum para esse sistema. No entanto, o sistema híbrido é globalmente e exponencialmente estável. Para mostrar isso, o autor procurou uma função de Lyapunov quadrática por partes, particionando o espaço de estados em oito regiões, todas contendo a origem. Em cada região se encontrou uma função quadrática satisfazendo as condições de estabilidade.

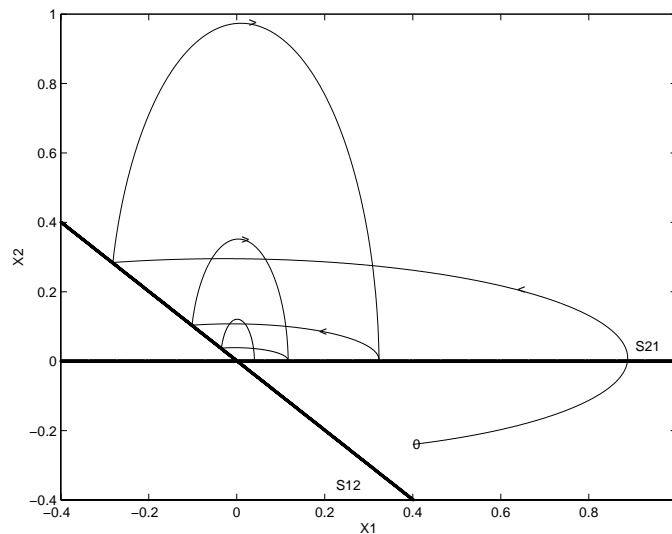


Figura 3.7: Campo de sistemas instáveis: o sistema híbrido é estável.

### Considerações para as regiões e o campo vetorial

Regiões do tipo hiperplanos, semiplanos ou elipsóides podem ser descritas por formas quadráticas. Já as regiões arbitrárias não são fáceis de ser determinadas como formas quadráticas, a menos que algum conservadorismo seja introduzido.

O campo vetorial do sistema híbrido é, no geral, do tipo não linear. Em forma particular, esse pode ser considerado como uma soma de sistemas afins, uma inclusão

de sistemas afins<sup>11</sup>, ou pode ser submetido à linearização. Mais detalhes podem ser lidos no Capítulo 3 de Petersson [Pet99].

### 3.5.4 Comentários sobre essas caracterizações

Após a apresentação das caracterizações da função de Lyapunov, segundo Johansson e Pettersson para sistemas híbridos, a seguir, colocam-se alguns comentários destacando as particularidades destas abordagens, assim como as suas vantagens e limitações.

## Resultados de estabilidade segundo Johansson

Johansson e Rantzer [JR98, Joh99] usam as técnicas LMIs para determinar a estabilidade de sistemas lineares por partes e as aplicam nos sistemas híbridos.

O enfoque está baseado no uso de uma função de Lyapunov quadrática por partes como função candidata para provar a estabilidade de sistemas lineares por partes usando parametrizações da forma  $P_i = F_i T F_i$ , onde  $F_i$  são matrizes conhecidas e  $T$  é uma matriz simétrica a ser determinada, isto é, a função de Lyapunov depende das partições e das regras de chaveamento.

A proposta de Johansson é menos conservadora quando comparada com o método tradicional de procura de uma função de Lyapunov comum em que os resultados são não factíveis. Também, é um método muito conveniente para os casos em que a estabilidade é de carácter global; entretanto, muito conservador no caso de estabilidade local quando se determinam os respectivos domínios de atração, como será mostrado nos próximos capítulos.

O método é usado apenas para sistemas híbridos afins. Nesse caso, as partições são poliedros convexos e os conjuntos chaveados são dados por hiperplanos, constituindo um resultado restritivo.

Mais uma vantagem, e ao mesmo tempo uma limitação, é que a factibilidade de um problema depende do número de partições, e, por conseguinte, resultados menos conservadores são obtidos com um maior número de partições.

A desvantagem dessa metodologia é o esforço computacional para se resolver um número elevado de LMIs associadas ao aumento do número de partições.

---

<sup>11</sup>Neste caso o autor trabalha com uma família de sistemas afins usando apenas os vértices do polítopo matricial que essa família define.

## Resultados de estabilidade segundo Petersson

Os resultados principais da pesquisa de Petersson [Pet99] são dados por teoremas que determinam condições suficientes para estabilidade, aplicáveis a uma classe maior de sistemas híbridos, isto é, com campos vetoriais não lineares e considerando diversos tipos de regiões. Esses resultados, propostos em termos de LMIs, são adaptações dos teoremas de estabilidade existentes para sistemas não lineares [Kha96, SL91], levando em consideração o comportamento da função de Lyapunov  $v(x) = \{v_i(x)\}$  quando os chaveamentos ocorrem.

A vantagem dos resultados de Petersson, encontrados em sua tese de doutorado [Pet99] e nas publicações [PL97, PL99], é que eles são aplicados a uma classe maior de sistemas híbridos em relação aos resultados de Johansson.

Nos trabalhos deste autor, a função de Lyapunov candidata, que pode ser descontínua, também é uma função quadrática por partes e de estrutura semelhante. Esses resultados foram formulados sem focar alguma estrutura específica para o particionamento das regiões, e daí a flexibilidade da metodologia quando comparada à outra (embora em alguns casos a substituição das regiões por inequações quadráticas possa ser feita com algum conservadorismo).

Também, nessa caracterização, a função  $v_i(x)$  da função de Lyapunov usada nas diversas regiões pode ser a mesma para vários estados discretos.

Nesse caso, é também um limitante da metodologia formular o problema com um número de variáveis de decisão nas LMIs que cresce conforme o número de partições, a ordem da dimensão do espaço das variáveis contínuas e o número das variáveis discretas ao ponto de que o problema se torne numericamente inviável. Dependendo dos casos, questões de simetria nas regiões podem reduzir o número de variáveis de decisão a se procurar.

## 3.6 Sumário

Neste capítulo, apresentou-se a motivação desta pesquisa para o estudo de sistemas híbridos chaveados. Esse tipo de sistemas foi ilustrado com exemplos. Após apresentar as definições de estabilidade para serem usadas na análise de sistemas híbridos, forneceram-se critérios com condições suficientes de duas abordagens similares propostas por pesquisas recentes. Usando o método direto de Lyapunov, a análise de estabilidade de sistemas híbridos consistiu em se determinar uma função escalar quadrática por partes, ou função de Lyapunov candidata, satisfazendo determinadas condições com



a dificuldade dos chaveamentos dos estados discretos, existentes no problema, e com campos vetoriais descrevendo a evolução contínua do sistema; ou seja, a função de Lyapunov proposta depende das partições e das regras de chaveamento.

As caracterizações apresentadas por Petersson e Johansson forneceram sempre abordagens menos conservadoras quando comparadas com o método tradicional de procura de uma função de Lyapunov quadrática comum ao sistema. Também são muito convenientes para determinar estabilidade de caráter global e com a limitante de fornecer resultados mais conservadores no caso local. Um enfoque foi mais inovador que o outro, ao abordar sistemas híbridos na sua forma geral e para qualquer tipo de partição, com a dificuldade de algum conservadorismo incluído, admitindo-se acrescentar o número de partições para resolver alguma possível não-facticidade do problema.

# Capítulo 4

## Estabilidade biquadrática de sistemas chaveados

O problema da análise de estabilidade de sistemas híbridos com chaveamento pode ser abordado através de diversos enfoques. Branicky [Bra95] apresenta uma solução para esse problema usando o conceito de funções de Lyapunov múltiplas associadas à partições do espaço de estados e assumindo chaveamentos de caráter autônomo. Nos trabalhos de Pettersson [PL97, Pet99], aborda-se esse problema fazendo a construção de uma função de Lyapunov quadrática para cada partição do espaço de estados (abordagem Pwq). A estabilidade global do sistema é mostrada a partir dessas funções quadráticas. Johansson e Rantzer [JR98] fazem uma abordagem similar, porém restritiva, considerando regiões particulares.

O objetivo deste capítulo é fazer a análise de estabilidade assim como calcular os respectivos domínios de atração de uma classe de sistemas híbridos usando a metodologia fornecida por Trofino [Tro00a]. Essa abordagem é uma nova proposta que usa a definição de estabilidade biquadrática originalmente apresentada por Trofino e De Souza [TS99] no contexto de sistemas lineares. Aplicamos esse conceito para sistemas chaveados, uma classe de sistemas híbridos, abordando dois tipos de problemas: o problema linear e o problema afim. Procuramos uma função de Lyapunov polinomial comum ao sistema, cuja estrutura é diferente das usadas nos trabalhos de Pettersson [Pet99] e Johansson [Joh99] e é independente das partições associadas aos chaveamentos no modelo do sistema.

Em cada caso, o problema a resolver é apresentado como um problema de otimização convexa baseado no uso de LMIs segundo um teorema que apresenta condições suficientes de estabilidade e determinação do domínio de atração. Resultados numéricos mostram a eficiência dessa metodologia.

## 4.1 O Problema

Nesta seção apresentamos aspectos de modelagem da classe estudada de sistemas chaveados autônomos. Representam-se esses sistemas num sentido geral, a partir do qual será construído um sistema equivalente que vai permitir estabelecer os resultados para o estudo de análise de estabilidade (e determinação do domínio de atração quando a análise for de carácter local). É fornecido o conceito de estabilidade biquadrática, que será aplicado para sistemas chaveados lineares e sistemas chaveados afins das próximas seções.

Dado o sistema autônomo chaveado<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_i(x(t)), \quad t > 0, \\ f_i(x(t)) &= A_i(x(t))x(t) + b_i(x(t)) \\ x(t) &\in X_i \subset \mathbb{R}^{n_x}, \quad \mathbb{R}^{n_x} = \cup X_i, \quad i \in \mathcal{J}_n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  é a componente contínua dos estados assumindo valores nas regiões  $X_i \subset \mathbb{R}^{n_x}$ , e  $i$  é a variável discreta assumindo valores no conjunto dos inteiros  $\mathcal{J}_n = \{1, \dots, n\}$ .

É conhecido que sistemas com campos vetoriais chaveados requerem um tratamento matemático especial na sua descrição [Utk92]. Com a finalidade de evitar comportamentos indesejáveis nos sistemas abordados, estabelecem-se as seguintes hipóteses:

**A 1** A origem,  $x = 0$ , é um ponto de equilíbrio do sistema (4.1) e considera-se  $\mathcal{B}_x$  um polítopo, vizinhança da origem no qual a estabilidade local será estudada;

**A 2**  $\mathbb{X} = X_1 \cup \dots \cup X_n \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ . Cada conjunto  $X_i$  possui interior não vazio e não há superposição entre as regiões do modelo, ou seja, os interiores desses conjuntos são disjuntos dois a dois;

**A 3** O lado direito de (4.1) é uma função limitada para cada  $i \in \mathcal{J}_n$ ;

**A 4** Num intervalo finito de tempo há um número finito de transições;

**A 5** Nas  $l_k$  fronteiras das regiões adjacentes a  $X_k$ , não há modos deslizantes, isto é, se  $x(t^-) \in X_i \cap X_j$ , então  $x(t) \notin X_i \cap X_j$ , onde  $x(t^-)$  denota a posição da trajetória imediatamente antes do tempo  $t$ .

---

<sup>1</sup>Por se tratar de sistemas autônomos, a variável  $t$  será omitida toda vez que necessário.

A hipótese **A3** será usada nas provas e é necessária para garantir que o lado direito de (4.1) seja localmente Lipschitz. Por outro lado, considerando a hipótese **A4**, evita-se que a trajetória do sistema chaveie em forma indefinida ao entrar na região de chaveamento. Se considerarmos a hipótese **A5**, não haverá os modos deslizantes no sistema.

Os conjuntos  $X_i$  são denotados na forma seguinte:

$$X_i = \{ x : \psi_{ik}(x) \geq 0, k = 1, \dots, m_i \}, i \in \mathcal{J}_n, \quad (4.2)$$

onde  $\psi_{ik}(x) \in \mathbb{R}$  são funções afins em  $x$ , e  $m_i$  é o número de funções  $\psi$  que descreve  $X_i$ .

Por conveniência, é associada a cada variável discreta  $i$  a função lógica  $\delta_i(x) = \delta_i, i \in \mathcal{J}_n$  com  $\delta_i \in \{0, 1\}$ . Define-se, então, a função vetorial lógica  $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{J}^n$ :

$$\delta(x) \triangleq \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = c_i \quad \text{se } x(t^-) \text{ e } x(t) \text{ pertence a } X_i, \quad (4.3)$$

onde  $c_i$  é a  $i$ -ésima coluna da matriz identidade  $I_n$ . Assim sendo, se o estado discreto assume um dado valor  $i \in \mathcal{J}_n$ , quando  $x \in X_i$ , a  $i$ -ésima componente da função vetorial lógica  $\delta$  assume o valor unitário e todos os valores restantes são iguais a zero.

A imagem da função vetorial lógica está definida pelo conjunto<sup>2</sup>

$$\Delta \triangleq \left\{ c_1, \dots, c_n \right\} \subset \mathbb{J}^n. \quad (4.4)$$

Observa-se que os elementos  $\delta_i$  de  $\delta$  satisfazem  $\sum_{i=1}^n \delta_i = 1$ . Sem perda de generalidade, neste trabalho, escolhe-se  $\delta_n$  como referência e, assim,  $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$ . Com essa escolha, o sistema (4.1) pode ser reescrito de forma a considerar todas as funções  $f_i$  numa única expressão que denominaremos como sistema associado. Isso será visto nas próximas seções.

Para apresentação da abordagem deste trabalho serão necessárias algumas definições e expressões auxiliares, como será exposto a seguir.

---

<sup>2</sup>Por simplicidade de notação, será considerado apenas  $\delta \in \Delta$  toda vez que  $\delta(x) = c_i \in \Delta$ .

## A função de Lyapunov

Seja  $v(x)$  uma função de Lyapunov candidata da forma

$$v(x) = x' \mathcal{P}(x) x, \quad (4.5)$$

com

$$\mathcal{P}(x) = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde a matriz  $P$ , de dimensão conveniente, deve ser determinada, e  $\Theta(x)$ , uma dada matriz afim em  $x$  que define a estrutura da função de Lyapunov.

$$\Theta(x) = \sum_{i=1}^{n_x} T_i x_i + U \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_x}, \quad (4.7)$$

onde  $T_i$ ,  $U$  são matrizes constantes da mesma dimensão de  $\Theta(x)$ , e  $x_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor  $x$ .

A partir da matriz  $\dot{\Theta}(x)$  e do vetor  $x$ , define-se a matriz denotada por  $\Theta_x(x)$  como se segue.

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(x)x &= \sum_{i=1}^{n_x} T_i \dot{x}_i x = \sum_{i=1}^{n_x} T_i x r_i \dot{x} = \Theta_x(x) \dot{x}, \\ \Theta_x(x) &= \sum_{i=1}^{n_x} T_i x r_i, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde  $r_i$  é a  $i$ -ésima linha da matriz identidade  $I_{n_x}$ .

**Definição 4.1.1 (Estabilidade biquadrática)** *Dada a função  $v(x)$  como em (4.5) e um politopo  $\mathcal{B}$ , diz-se que origem do sistema (4.1) é localmente e biquadraticamente estável se existir  $\mathcal{P}(x)$  da forma (4.6) e funções  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x)$ ,  $\alpha_3(x)$  de classe  $\mathcal{K}$  tais que sejam satisfeitas as seguintes condições para todo  $x \in \mathcal{B}$ :*

- $\alpha_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$
- $\dot{v}(x) = x' \dot{\mathcal{P}}(x) x + f_i(x)' \mathcal{P}(x) x + x' \mathcal{P}(x) f_i(x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$

◇◇

Vê-se que, segundo a teoria de Lyapunov [Kha96], é conhecido que o sistema (4.1)

é dito ser local e assintoticamente estável se, dada uma função de Lyapunov candidata  $v(x)$  qualquer e escalares positivos  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  e  $\varepsilon_c$ , podem ser satisfeitas as seguintes desigualdades:

$$\varepsilon_a x'x \leq v(x) \leq \varepsilon_b x'x \quad (4.9)$$

$$\dot{v}(x) \leq -\varepsilon_c x'x \quad (4.10)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ .

Então, no desenvolvimento do presente trabalho, as funções de classe  $\mathcal{K}$  que serão consideradas na Definição 4.1.1 terão a estrutura  $\alpha_1(x) = \varepsilon_a x'x$ ,  $\alpha_2(x) = \varepsilon_b x'x$ , e  $\alpha_3(x) = \varepsilon_c x'x$ .

Observa-se também que é possível obter com (4.5), (4.6) e (4.8) uma expressão mais conveniente para o termo  $x'\dot{\mathcal{P}}(x)x$ . Essa expressão é fornecida a seguir:

$$x'\dot{\mathcal{P}}(x)x = x' \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_x(x) \end{bmatrix} \dot{x} + \dot{x}' \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_x(x) \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix} x.$$

Quando são satisfeitos os termos da Definição 4.1.1, a função  $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$  é dita ser uma função de Lyapunov para a origem do sistema (4.1).

Como  $\mathcal{P}(x)$  depende quadraticamente do estado  $x$ , então a função de Lyapunov é dependente do estado na forma de um polinômio de ordem 4. Observa-se também que, dado um escalar  $c$ , as curvas de nível da função  $x'\mathcal{P}(x)x = c$  não são necessariamente elipses. Isso se observa no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.1.1** (*Curva de nível não elíptica*) Dado  $n_x = 2$  e seja a matriz  $\Theta(x)$  com  $n_1 = 4$  dada por

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ x_2 I_2 \end{bmatrix}.$$

Considera-se a função  $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$  com  $\mathcal{P}(x)$  dado por (4.6) e matriz  $P$  dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0252894 & -0.0004145 & 0.0000081 & -62.562049 & 62.563939 & -0.0019457 \\ -0.0004145 & 0.0169103 & -0.0018837 & -977.60176 & 977.60379 & 0.0002288 \\ 0.0000081 & -0.0018837 & 2.919D - 07 & -266.31517 & 266.31516 & -0.0000392 \\ -62.562049 & -977.60176 & -266.31517 & 520.2216 & 0 & -309.08865 \\ 62.563939 & 977.60379 & 266.31516 & 0 & -520.22151 & 309.0886 \\ -0.0019457 & 0.0002288 & -0.0000392 & -309.08865 & 309.0886 & 0.0000526 \end{bmatrix}.$$

O respectivo gráfico da curva de nível  $v(x) = 1$  é dado pela Figura 4.1.

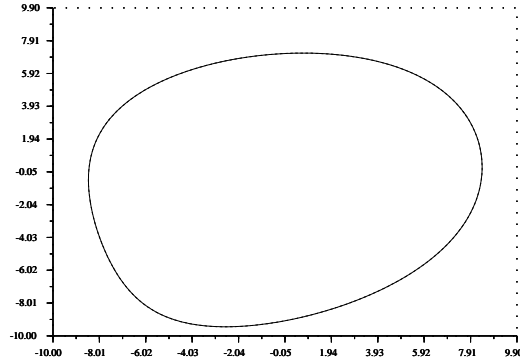


Figura 4.1: Curva de nível não elíptica.

Também, a definição de estabilidade quadrática usual,  $v(x) = x'P_Qx$ , pode ser determinada a partir da Definição 4.1.1, zerando alguns blocos da matriz  $P$ , isto é,

$$P = \begin{bmatrix} P_Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com o sistema geral formulado, as hipóteses fornecidas acima e as matrizes auxiliares  $\Theta(x)$  e  $\Theta_x(x)$ , nas seguintes seções é feita a análise de estabilidade para sistemas chaveados lineares e afins usando o conceito de estabilidade biquadrática.

## 4.2 O Problema Linear

Seja o sistema chaveado linear da forma

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad i \in \mathcal{J}_n, \quad t > 0. \quad (4.11)$$

Considere as hipóteses **A1-A5** acima apresentadas.

A dinâmica do chaveamento aqui estudada é como em (4.2):

$$X_i = \{x : \psi_{ik}(x) \geq 0, k = 1, \dots, m_i\}, \quad i \in \mathcal{J}_n,$$

onde  $\psi_{ik}(x) \in \mathbb{R}$  são funções afins em  $x$  utilizadas para caracterizar as partições  $X_i$ .

Fazendo uso da função  $\delta$  definida em (4.3), reescreve-se (4.11) na forma:

$$\dot{x} = \left( \sum_{i=1}^n A_i \delta_i \right) x, \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \Delta.$$

Em termos da variável de referência,  $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$ , o sistema anterior pode ser reescrito por um sistema que será denominado como sistema associado. Este sistema

associado é dado por

$$\dot{x} = A_n x + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i - A_n) \delta_i x, \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad (4.12)$$

onde  $\mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^{n_x}$  é um polítopo convexo que contém a origem e representa os valores de interesse da variável de estado  $x(t)$  para fins de análise de estabilidade do sistema (4.12), associado ao sistema chaveado (4.11). Observa-se que  $\mathcal{B}_x$  pode ser interpretado como a região de atração<sup>3</sup> desejada do ponto de equilíbrio.

Considera-se também o polítopo  $\mathcal{B}_\delta$  determinado a partir de  $\Delta$ , como se segue

$$\mathcal{B}_\delta = \mathbf{Co}(\Delta) \triangleq \left\{ \delta : \delta = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad c_i \in \Delta \right\}, \quad (4.13)$$

cujos vértices são os elementos de  $\Delta$ . Pode-se, então, estabelecer a seguinte relação:

$$\delta \in \Delta \quad \text{sse} \quad \delta \in \mathcal{B}_\delta \quad \text{e} \quad \delta \delta' = \text{diag}(\delta_i), \quad (4.14)$$

onde  $\delta' = [\delta_1, \dots, \delta_n]$ .

No que se segue, apresentam-se os resultados principais referentes à análise de estabilidade de sistemas modelados por (4.11) representado pelo respectivo sistema associado dado pela equação (4.12). Esse estudo é feito com o auxílio da Definição 4.1.1, de estabilidade biquadrática.

Neste ponto, faz-se necessária a introdução de variáveis e notações auxiliares, assim como algumas construções matriciais. Essa informação será utilizada na formulação e na prova do teorema de estabilidade biquadrática do sistema chaveado linear.

Introduzimos o vetor auxiliar  $\pi \in \mathbb{R}^{n_\pi}$  com  $n_\pi = (n-1)n_x$ .

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \pi_i = \delta_i x, \quad i \in \mathcal{J}_{n-1}. \quad (4.15)$$

A partir de (4.14), obtém-se diretamente que  $\delta \delta' - \text{diag}(\delta_i) = 0$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \delta_i (\delta_i - 1) &= 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_n, \\ \delta_i \delta_j &= 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \mathcal{J}_n. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Este conceito será apresentado posteriormente.



Considerando (4.15) e lembrando que  $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$ , pode-se reescrever as condições acima na forma:

$$\begin{aligned} (\delta_i - 1)\delta_i x &= (\delta_i - 1)\pi_i = 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_{n-1}, \\ \delta_i \delta_j x &= \delta_i \pi_j = 0, \quad \forall x \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \mathcal{J}_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nota-se que a relação entre os vetores  $x$  e  $\pi$ , dada por (4.15), e as expressões (4.16) (que são afins em  $\delta$  e  $\pi$ ) podem ser reescritas de uma forma mais compacta, do tipo  $(x, \pi) \in \mathcal{D}$ , com  $\mathcal{D}$  definido por

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, \pi) : \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} = 0 \right\} \quad (4.17)$$

e as matrizes  $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_x}$  e  $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_\pi}$  são funções afins em  $(x, \delta_1, \dots, \delta_{n-1})$ ,  $\forall x \in \mathcal{B}_x$ .

Com a definição das variáveis auxiliares prévias e o conjunto  $\mathcal{D}$ , o sistema (4.12) é representado como

$$\dot{x} = A_n x + \mathbf{A}\pi, \quad (x, \pi) \in \mathcal{D}, \quad (4.18)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (A_1 - A_n) & \cdots & (A_{n-1} - A_n) \end{bmatrix}.$$

Com as funções  $\psi_{ik}$  de (4.2) constroem-se  $\phi_{ik}(x) = \psi_{ik} I_{n_x}$  e a matriz diagonal por blocos  $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\pi}$  tal que:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \text{diag}\{0_{n_x}, 0_{n_1}, \tilde{\Phi}\} + E' \Phi_n E, \\ E &= [I_{n_x}, 0_{n_x \times n_1}, -I_{n_x}, \dots, -I_{n_x}] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_\pi}, \\ \tilde{\Phi} &= \text{diag}\{\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}\} \in \mathbb{R}^{(n-1)n_x \times (n-1)n_x}, \\ \Phi_i &= \sum_{k=1}^{m_i} \sigma_{ik} \phi_{ik} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad i \in \mathcal{J}_n, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde  $\sigma_{ik}$  são escalares positivos a serem determinados posteriormente.

Define-se

$$B = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$$

como sendo o meta-politopo formado pela combinação dos vértices de  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  e usa-se a notação  $(x, \delta) \in B$  para indicar que  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \mathcal{B}_\delta$ .

$\Theta(x)$  e  $\Theta_x(x)$ , matrizes afins em  $x$  definidas em (4.7) e (4.8), respectivamente.

Considera-se também a seguinte notação auxiliar:

$$A_{a1} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) + \Theta_x(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & 0_{n_x \times n_1} \end{bmatrix}, \quad A_{a2} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) + \Theta_x(x) \end{bmatrix} \mathbf{A}, \quad (4.20)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ \Theta(x) & -I_{n_1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0_{n_\Omega \times n_1} \\ C & 0 \end{bmatrix} & \Omega_2 \end{bmatrix},$$

onde a matriz  $C_x$  é dada por<sup>4</sup>:

$$C_x = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n_x} & -x_{n_x-1} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

O seguinte exemplo ilustra a utilização dessa notação auxiliar para um sistema com duas regiões de chaveamento.

**Exemplo 4.2.1** (*Sistema chaveado*)

*Dado o sistema*

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x, & \text{se } x \in X_1 \\ A_2 x, & \text{se } x \in X_2 \end{cases}. \quad (4.22)$$

Nesse exemplo têm-se  $n_x = 2$ ,  $n = 2$ ,  $\mathcal{J}_2 = \{1, 2\}$  e se consideram  $\delta_1$  e  $\delta_2$  como as variáveis lógicas com  $\delta_2 = 1 - \delta_1$ . Assim, o sistema (4.22), reescrito como na representação (4.12), é dado por:

$$\dot{x} = A_2 x + (A_2 - A_1)\delta_1 x. \quad (4.23)$$

Para  $n_1 = 4$ , as matrizes (4.7) e (4.8) são consideradas como:

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ x_2 I_2 \end{bmatrix}, \quad \Theta_x(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

O vetor auxiliar  $\pi = \pi_1 = \delta_1 x$  e

---

<sup>4</sup>Detalhes a respeito dessa matriz se encontram no Apêndice deste trabalho e no Lema 2.1 em Trofino [Tro00a].

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0_2 & 0_{2 \times 4} & (\delta_1 - 1)I_2 \\ \delta_1 I_2 & 0_{2 \times 4} & -I_2 \\ C_x & 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 2} \\ \Theta(x) & [-I_2 \ 0_2] & 0_2 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$C_x = [x_2 \quad -x_1].$$

Nota-se ainda que

$$A_{a1} = \begin{bmatrix} I_2 \\ \Theta(x) + \Theta_x(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & 0_{2 \times 4} \end{bmatrix} \text{ e } A_{a2} = \begin{bmatrix} I_2 \\ \Theta(x) + \Theta_x(x) \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (A_1 - A_2) \end{bmatrix}$$

A seguir, apresenta-se o teorema de estabilidade para sistemas chaveados lineares.

**Teorema 4.2.1** (*Estabilidade biquadrática do sistema chaveado linear*)

Considera-se o sistema (4.11) com as hipóteses **A1- A5**, o sistema associado dado por (4.12) e as matrizes definidas em (4.7), (4.8), (4.19), (4.20). Seja  $\mathcal{B}_x \subset R^{n_x}$  um dado politopo que define uma vizinhança da origem, e  $\mathcal{B}_\delta$ , o politopo definido em (4.13). O sistema (4.12) é localmente e biquadraticamente estável se existem matrizes  $P, L, M$  com as mesmas dimensões de  $A_{a1}, C', \tilde{\Omega}'$ , respectivamente, e escalares positivos  $\sigma_{ik}$  de (4.19) tais que sejam satisfeitas as seguintes LMIs nos vértices do politopo  $B = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ :

$$P + LC + C'L' > 0, \quad P = P' \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} A'_{a1}P + PA_{a1} & PA_{a2} \\ A'_{a2}P & 0 \end{bmatrix} + M\tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}'M' + \Phi < 0. \quad (4.27)$$

No caso afirmativo, a função  $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$  com  $\mathcal{P}(x)$  dado por (4.6) é uma função de Lyapunov para o sistema (4.11).

## Prova

Supõe-se que as condições (4.26) e (4.27) do Teorema 4.2.1 são satisfeitas para todos os vértices de  $B = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ , ( $\mathcal{B}_\delta = \text{Co}(\Delta)$ ). Então, por convexidade, essas condições ainda são satisfeitas para todo  $x \in B$ , isto é, para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \Delta$ .

Seja o sistema dado por (4.12) e o vetor  $\pi$  definido por (4.15). Considera-se o vetor  $\zeta$  e a seguinte partição:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \pi \end{bmatrix}, \quad \zeta_1 = \begin{bmatrix} x \\ \Theta x \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Agora, a matriz  $D = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x \times n_\pi} \end{bmatrix}$  é tal que  $D\zeta_1 = x$ . Como a LMI (4.26) é estrita, então existe um escalar positivo  $\epsilon_1$  suficientemente pequeno tal que  $P + LC + C'L' - \epsilon_1 D'D \geq 0$ .

Similarmente, definindo  $Q = \begin{bmatrix} D & 0_{n_x \times n_\pi} \end{bmatrix}$  tal que  $Q\zeta = x$  e considerando que a LMI (4.27) também é estrita, então existe um escalar positivo  $\epsilon_2$  suficientemente pequeno tal que  $\epsilon_2 Q'Q$  pode ser adicionado no lado esquerdo dessa LMI sem alterar o sentido da desigualdade.

O que foi descrito acima pode ser expresso como se segue:

$$P + LC + C'L' - \epsilon_1 D'D \geq 0, \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} (A'_{a_1}P + PA_{a_1}) & PA_{a_2} \\ A'_{a_2}P & 0 \end{bmatrix} + M\tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}'M' + \Phi + \epsilon_2 Q'Q \leq 0 \quad (4.30)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e para todo  $\delta \in \Delta$ .

Agora, pré e pós-multiplica-se a primeira LMI, (4.29), por  $\zeta_1'$  e  $\zeta_1$ , respectivamente, e a segunda LMI, (4.30), por  $\zeta'$  e  $\zeta$ , respectivamente. Obtêm-se as seguintes relações:

$$\zeta_1' P \zeta_1 \geq \epsilon_1 x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \quad (4.31)$$

$$\zeta_1' (A'_{a_1} P + P A_{a_1}) \zeta_1 + \zeta_1' P A_{a_2} \pi + \pi' A'_{a_2} P \zeta_1 + \zeta' \Phi \zeta \leq -\epsilon_2 x' x, \quad (4.32)$$

$$\forall \zeta : \tilde{\Omega} \zeta = 0, \quad x \in \mathcal{B}_x \quad \delta \in \Delta.$$

Nota-se que, por construção,  $C_x x = 0$  e também  $C \zeta_1 = 0$ . De forma similar,  $\tilde{\Omega} \zeta = 0$ , pois  $\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} = 0$  e  $C \zeta_1 = 0$ .

Com a notação em (4.28) e (4.6), a desigualdade (4.31) torna-se

$$v(x) = \zeta_1' P \zeta_1 = x' \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} x = x' \mathcal{P}(x) x \geq \epsilon_1 x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x. \quad (4.33)$$

Como  $x$  pertence ao politopo  $\mathcal{B}_x$ , os elementos da matriz  $C$  em (4.26) são limitados. Então, existe um escalar positivo,  $\epsilon_3$ , suficientemente grande tal que  $\epsilon_3 I_{n_x} \geq (P +$

$LC + C'L'$ ). Isto é,  $\epsilon_3 \zeta_1' \zeta_1 = \epsilon_3 (x'x + x'\Theta' \Theta x) \geq \zeta_1 P \zeta_1 = x' \mathcal{P}(x)x$ . Como a matriz  $\Theta$  depende de  $x$ , então existe um outro escalar positivo,  $\epsilon_4$ , suficientemente grande tal que  $\epsilon_4 I_{n_x} \geq \Theta' \Theta$ . Assim,  $x' \mathcal{P}(x)x \leq \epsilon_3(1 + \epsilon_4)x'x$  e com (4.31) tem-se:

$$\epsilon_1 x'x \leq v(x) = x' \mathcal{P}(x)x \leq \epsilon_3(1 + \epsilon_4)x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x. \quad (4.34)$$

Nota-se que  $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$ , então, para o termo  $\zeta' \Phi \zeta$  de (4.32), tem-se que

$$\begin{aligned} \zeta' \Phi \zeta &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i' \Phi_i \pi_i + (x - \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i)' \Phi_n (x - \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^2 x' \Phi_i x + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i) x' \Phi_n (1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i) x \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^2 x' \Phi_i x + \delta_n^2 x' \Phi_n x \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \Delta. \end{aligned}$$

Como  $\zeta' \Phi \zeta \geq 0$ , a relação (4.32) resulta ser:

$$\zeta_1' (A_{a_1}' P + P A_{a_1}) \zeta_1 + \zeta_1' P A_{a_2} \pi + \pi' A_{a_2}' P \zeta_1 \leq -\epsilon_2 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \Delta. \quad (4.35)$$

Agora, usam-se as igualdades

$$\begin{aligned} \Theta_x &= \dot{\Theta} x \\ \zeta_1' P A_{a_1} \zeta_1 &= x' \mathcal{P}(x) [A_n \ 0] \zeta_1 + x' \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} x \\ \zeta_1' P A_{a_2} \zeta_2 &= x' \mathcal{P}(x) \mathbf{A} \zeta_2 \end{aligned}$$

para mostrar que ocorre

$$\begin{aligned} \zeta_1' (A_{a_1}' P + P A_{a_1}) \zeta_1 + \zeta_1' P A_{a_2} \zeta_2 + \zeta_2' A_{a_2}' P \zeta_1 &= \\ x' \dot{\mathcal{P}}(x)x + x' \mathcal{P}(x) (A_n x + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i - A_n) \pi_i) + & \\ (A_n x + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i - A_n) \pi_i)' \mathcal{P}(x)x < 0 & \end{aligned}$$

e como

$$\dot{x} = A_n x + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i - A_n) \pi_i,$$

então

$$x' \dot{\mathcal{P}}(x)x + \dot{x}' \mathcal{P}(x)x + x' \mathcal{P}(x) \dot{x} = \dot{v}(x) \leq -\epsilon_2 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \Delta. \quad (4.36)$$

As expressões (4.34) e (4.36) mostram que  $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$  é uma função de Lyapunov para o sistema (4.12), e, assim, a origem de (4.11) é local e biquadraticamente estável.

□

**Nota 4.2.1** *O Teorema 4.2.1 garante estabilidade local para uma vizinhança suficientemente pequena da origem contida no politopo  $\mathcal{B}_x$ . Assim, a maior região de atração que o método pode estimar é o próprio  $\mathcal{B}_x$ . Quando o problema é estimar uma região de atração a estabilidade analisada é considerada de carácter regional. Se a região de atração estimada é finita, porém arbitrariamente grande, será dito que a estabilidade é de carácter semiglobal [Kha96].*

**Nota 4.2.2** *Note da prova do Teorema 4.2.1 que a LMI (4.26) está associada à condição (4.9), enquanto (4.27) implica (4.10). Também as matrizes  $L$  e  $M$  são variáveis de escalonamento que aparecem após aplicação do Lema de Finsler às condições  $C\zeta_1 = 0$  e  $\tilde{\Omega}\zeta = 0$ , respectivamente. Por outro lado as variáveis  $\sigma_{ik}$  em  $\Phi$  são oriundas da aplicação do  $S$ -procedure nas condições (4.2) que definem as regiões  $X_i$ .*

O exemplo seguinte, encontrado em Johansson [Joh99], ilustra o interesse do Teorema acima apresentado. Nesse caso, tentar uma função de Lyapunov quadrática como candidata leva a um resultado não factível. Com isso, a aplicação do teorema resulta numa abordagem menos conservadora [PTC00], como será visto a seguir.

**Exemplo 4.2.2** *Para o sistema (3.7), dado no Exemplo 3.4.1, consideram-se o sistema associado (4.23) e a notação auxiliar desenvolvida para o caso geral linear do Exemplo 4.2.1, que define os valores das matrizes  $\Theta$ ,  $\Theta_x$ ,  $\tilde{\Omega}$ ,  $C_x$ .*

*As partições  $X_i$  que definem o chaveamento do modelo, como indicado em (4.2), são dadas por:*

$$x'\phi_{11}(x)x \geq 0 : \phi_{11}(x) = \begin{bmatrix} -x_1 & 0 \\ 0 & -x_1 \end{bmatrix}, \psi_{11} = -x_1, m_1 = 1$$

e

$$x'\phi_{21}(x)x \geq 0 : \phi_{21}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}, \psi_{21} = x_1, m_2 = 1.$$

*Assim,*

$$\Phi_1 = \sigma_{11}\phi_{11}(x), \quad \Phi_2 = \sigma_{21}\phi_{21}(x), \quad e \quad \tilde{\Phi} = \Phi_1.$$

Com isso, tem-se:

$$\Phi = \text{diag}\{0_2, 0_4, \tilde{\Phi}\} + E'\Phi_2E$$

com

$$\text{diag}\{0_2, 0_4, \tilde{\Phi}\} = \sigma_{11} \begin{bmatrix} 0_6 & 0_{6 \times 2} \\ 0_{2 \times 6} & -x_1 I_2 \end{bmatrix}$$

e

$$E'\Phi_2E = \sigma_{21} \begin{bmatrix} x_1 I_2 & 0_{2 \times 4} & -x_1 I_2 \\ 0_{4 \times 2} & 0_4 & 0_{4 \times 2} \\ -x_1 I_2 & 0_{2 \times 4} & x_1 I_2 \end{bmatrix}.$$

Considera-se o politopo  $\mathcal{B}_x$  de vértices  $V_i = \begin{bmatrix} \pm\alpha \\ \pm\alpha \end{bmatrix}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ :

$$\mathcal{B}_x = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : |x_i| \leq \alpha \right\},$$

onde  $\alpha > 0$  é um escalar a ser determinado de tal forma que  $\mathcal{B}_x$  seja uma região tão grande quanto possível.

Também, o politopo  $\mathcal{B}_\delta$  é dado por:

$$\mathcal{B}_\delta = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dessa forma, o politopo  $B = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$  possui  $4 \times 2 = 8$  vértices.

Com o Teorema 4.2.1, pode-se mostrar que o sistema (3.7) é localmente e biquadraticamente estável para valores de  $\alpha \geq 1$ . Quando o valor de  $\alpha$  é estendido até  $\alpha = 100$ , a função de Lyapunov obtida é  $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$ , com  $\mathcal{P}(x)$  dado por (4.6) e matriz  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 7279067.9 & 434435.48 & 22280.18 & 657.259 & 7500.484 & -554.009 \\ 434435.48 & 1506838.5 & 6199.410 & 5120.643 & 1763.322 & 3005.408 \\ 22280.18 & 6199.410 & 781.2508 & 414.7109 & -562.9214 & 24.38704 \\ 657.2597 & 5120.643 & 414.7109 & 1. & -98.67125 & 25.63713 \\ 7500.484 & 1763.322 & -562.9214 & -98.67125 & 367.0776 & -56.06310 \\ -554.009 & 3005.408 & 24.38704 & 25.63713 & -56.06310 & 30.42994 \end{bmatrix}.$$

As trajetórias do sistema (3.7) foram mostradas na Figura 3.2.

No exemplo anterior não é possível encontrar uma função de Lyapunov quadrática

comum que garanta estabilidade. Usando o enfoque Pwq [Joh99], é possível mostrar estabilidade assintótica global desse problema.

### 4.3 O Problema Afim

Dado o sistema chaveado afim da forma

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad x \in X_i, \quad i \in \mathcal{J}_n, \quad t \geq 0, \quad (4.37)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  denota a componente contínua do estado assumindo valores no conjunto  $X_i \subset \mathbb{R}^{n_x}$  e  $i \in \mathcal{J}_n$  denotando a variável discreta. Assume-se que  $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  são matrizes constantes, e  $b_i \in \mathbb{R}^{n_x}$  são vetores constantes.

Conforme foi considerado, no caso de sistemas chaveados lineares, para evitar comportamentos indesejáveis nos sistemas tratados, assume-se que o sistema (4.37) satisfaz as hipóteses **A1-A5**, enunciados na seção 4.1.

Os conjuntos  $X_i$  são representados como na equação (4.2). Fazendo uso da função  $\delta$  e do conjunto  $\Delta$  definidos em (4.3) e (4.4), respectivamente, reescreve-se (4.37) na forma:

$$\dot{x} = \left( \sum_{i=1}^n A_i \delta_i \right) x + \left( \sum_{i=1}^n b_i \delta_i \right), \quad x \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \delta \in \Delta.$$

Considerando o  $n$ -ésimo termo de  $\delta$  como variável de referência, ou seja,  $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$ , o sistema anterior pode ser reescrito como se segue:

$$\dot{x} = A_n x + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i - A_n) \delta_i x + b_n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - b_n) \delta_i, \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \Delta, \quad (4.38)$$

onde  $\mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^{n_x}$  é um politopo convexo, vizinhança da origem, que representa os valores de interesse da variável de estado  $x(t)$  para fins de análise de estabilidade do sistema (4.38).

Considera-se também o politopo, determinado a partir de  $\Delta$ , como em (4.13),

$$\mathcal{B}_\delta = \mathbf{Co}(\Delta),$$

cujos vértices são os elementos de  $\Delta$ .



Introduz-se o seguinte vetor auxiliar  $\pi \in \mathbb{R}^{n_\pi}$ , onde  $n_\pi = (n-1)n_x + n + 1$ .

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{n-1} \\ \pi_n \\ \pi_{n+1} \\ \vdots \\ \pi_{2n} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} \pi_i = \delta_i x, \quad \forall i \in \mathcal{J}_{n-1} \\ \pi_n = 1 \\ \pi_{n+i} = \delta_i, \quad \forall i \in \mathcal{J}_n \end{array}. \quad (4.39)$$

As relações  $\pi_n = 1$  e  $\pi_{n+i} = \delta_i$  são alternativamente representadas por  $\pi_n x - x = 0$  e  $\pi_{n+i} - \delta_i \pi_n = 0$ , respectivamente.

Por simplicidade de notação, as relações entre  $x$  e o vetor auxiliar  $\pi$ , dados acima, são representadas numa forma mais compacta pela notação  $(x, \pi) \in \mathcal{D}$ , como indicado em (4.17). Com essa notação, o sistema (4.38) pode ser expresso como se segue:

$$\dot{x} = A_n x + \mathbf{A} \pi, \quad x \in \mathcal{B}_x, \quad (x, \pi) \in \mathcal{D}, \quad (4.40)$$

com  $\mathbf{A} = [ (A_1 - A_n) \quad \cdots \quad (A_{n-1} - A_n) \quad b_n \quad (b_1 - b_n) \quad \cdots \quad (b_{n-1} - b_n) \quad 0_{n_x \times 1} ]$ .

Nesse caso, as matrizes  $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_x}$  e  $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_\pi}$ , que definem o conjunto  $\mathcal{D}$ , também são funções afins de  $(x, \delta_1, \dots, \delta_n)$  representadas pelas relações dadas em (4.39). Nota-se que  $\delta$  definida em (4.3) satisfaz  $\delta \delta' = \text{diag}(\delta_i)$ , ou, de maneira equivalente:

$$\delta_i \delta_j = 0, \quad \delta_i (\delta_i - 1) = 0, \quad \forall i \neq j \in \mathcal{J}_n. \quad (4.41)$$

De (4.39), (4.41) e expressando as relações entre as variáveis  $\delta_i$ ,  $x$  e as componentes  $\pi$ , surgem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} (\delta_i - 1) \delta_i x &= & (\delta_i - 1) \pi_i &= 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_{n-1}, \\ (\delta_i - 1) \delta_i &= & (\delta_i - 1) \pi_{n+i} &= 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_n, \\ \delta_i \delta_j x &= & \delta_i \pi_j &= 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{J}_{n-1}, \quad i \neq j, \\ \delta_i \delta_j &= & \delta_i \pi_{j+n} &= 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{J}_n, \quad i \neq j, \\ & & \pi_n - \sum_{i=1}^{i=n} \pi_{n+i} &= 0, \\ x - \pi_{2n} x - \sum_{i=1}^{i=n-1} \pi_i &= & &= 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Também, as seguintes identidades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \delta_i x - x \pi_{n+i} &= 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_{n-1}, \\ \pi_i - x \pi_{n+i} &= 0, \quad \forall i \in \mathcal{J}_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

As identidades (4.42) e (4.43) são incorporadas às relações (4.39) reescrevendo-as como novas linhas das matrizes  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  dadas em (4.17). Assim sendo, essas matrizes cumpriram o objetivo de capturar todas as relações possíveis entre as variáveis  $\delta_i$ ,  $x$  e as componentes de  $\pi$ . Elas terão um papel fundamental na aplicação do Lema de Finsler para a obtenção das LMIs a serem descritas no teorema principal desta seção<sup>5</sup>.

O seguinte exemplo explica esse procedimento.

**Exemplo 4.3.1** (*Um sistema afim*)

*Considera-se o sistema afim dado pelo sistema linear com saturação da forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b \operatorname{sat}(u) \\ u = K'x \end{cases}, \quad (4.44)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , e  $\operatorname{sat}(\cdot)$  denota a função de saturação normalizada dada por

$$\operatorname{sat}(u) \triangleq \begin{cases} 1 & u > 1 \\ u & \text{for } |u| \leq 1 \\ -1 & u < -1 \end{cases}. \quad (4.45)$$

O sistema (4.44), reescrito como um sistema afim chaveado, é representado na forma:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax - b & x \in X_1 := \{x : K'x < -1\} \\ (A + bK')x & x \in X_2 := \{x : |K'x| \leq 1\} \\ Ax + b & x \in X_3 := \{x : K'x > 1\} \end{cases}.$$

Nesse exemplo têm-se  $n_x = 2$ ,  $n = 3$  e  $\mathcal{J}_3 = \{1, 2, 3\}$ .

O correspondente sistema associado (4.38) é dado por:

$$\dot{x} = A_3 x + \sum_{i=1}^2 (A_i - A_3) \delta_i x + b_3 + \sum_{i=1}^2 (b_i - b_2) \delta_i, \quad x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \Delta, \quad (4.46)$$

---

<sup>5</sup>Detalhes sobre isso são apresentados na Nota 4.3.2.

e o sistema equivalente em termos de  $x$  e  $\pi$ , (4.40), é o seguinte:

$$\dot{x} = A_3x + \mathbf{A}\pi, \quad (x, \pi) \in \mathcal{D},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (A_1 - A_3) & (A_2 - A_3) & b_3 & (b_1 - b_3) & (b_2 - b_3) & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = A_3 = A, \quad A_2 = A + bK', \quad b_1 = -b, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = b,$$

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_6 \end{bmatrix}, \quad \pi_1 = \delta_1x, \quad \pi_2 = \delta_2x, \quad \pi_3 = 1, \quad \pi_4 = \delta_1, \quad \pi_5 = \delta_2 \quad e \quad \pi_6 = \delta_3.$$

Por último, do conjunto de identidades dadas por (4.39), (4.42) e (4.43), obtêm-se as seguintes matrizes  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ :

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ 0_2 \\ 0_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_2 \\ 0_2 \\ 0_2 \\ \delta_1 I_2 \\ \delta_2 I_2 \\ \delta_1 I_2 \\ \delta_2 I_2 \\ 0_2 \\ \delta_3 I_2 \\ 0_2 \\ 0_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \Omega_2 = \begin{bmatrix} (\delta_1 - 1)I_2 & 0_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_2 & (\delta_2 - 1)I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_2 I_2 & 0_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_2 & \delta_1 I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\delta_1 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta_2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0_2 & 0_2 & -x & 0 & 0 & 0 \\ I_2 & 0_2 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0_2 & I_2 & 0 & 0 & -x & 0 \\ -I_2 & 0_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_2 & -I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 1} & -x & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ 0_2 & 0_2 & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & -x & 0_{2 \times 1} \\ 0_2 & 0_2 & \begin{bmatrix} \delta_3 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 3} & 0 & 0 & 0 & -x \\ 0_2 & 0_2 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0_2 & 0_2 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \delta_3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 - 1 \\ I_2 & I_2 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Observa-se que  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  contêm todas as relações entre os elementos de  $x$  e  $\pi$  para esse exemplo.

O interesse desta seção é fazer o estudo de análise de estabilidade local para sistemas da classe (4.37) e estimar o seu domínio de atração fazendo uso de LMIs como procedimento numérico. O procedimento para o cálculo dessa região é feito a seguir.

## Domínio de atração

Para esta classe de sistemas, considera-se a função de Lyapunov candidata  $v(x) = x' \mathcal{P}(x)x$  comum a todos os conjuntos  $X_i$ . A estrutura dessa função candidata é dada em (4.6). Conforme estabelecido na definição de estabilidade, se as desigualdades (4.9) e (4.10) são satisfeitas, garante-se a estabilidade biquadrática do sistema associado (4.38) e, em conseqüência, a estabilidade do sistema (4.37). Pode-se, então, obter uma estimativa da região de atração para a origem desse sistema.

Se um sistema é localmente estável, o domínio de atração do sistema é uma região invariante do espaço de estados, tal que toda trajetória que se inicia em algum ponto dessa região converge assintoticamente para a origem do sistema. Mais detalhes podem ser encontrados em Khalil [Kha96]. É claro que, se um sistema é globalmente estável, então o domínio de atração é dado por todo o espaço de estados. Na literatura, é comum encontrar nomes tais como região de estabilidade ou domínio de estabilidade como sinônimos de domínio de atração. Diversas abordagens foram apresentadas em El Ghaoui e Scorletti [ES96], Jirstrand [Jir98] e Ito [Ito98], entre muitos outros.

Com relação a sistemas chaveados, estimativas da região de atração foram desenvolvidas usando o critério do círculo e o critério de Popov [PTB97]; e em Johansson [Joh99] são usadas as funções de Lyapunov quadráticas por partes para obter essas estimativas.

O intuito desta seção é determinar a região de estabilidade para sistemas chaveados localmente estáveis usando a noção de estabilidade biquadrática [PCTC, Tro00b].

A estimativa do domínio de atração é feita calculando-se a maior superfície de nível da função de Lyapunov dentro do politopo  $\mathcal{B}_x$ . Com essa finalidade, define-se o seguinte conjunto como estimativa dessa região:

$$\Upsilon = \{ x : v(x) = x' \mathcal{P}(x)x \leq 1 \}. \quad (4.48)$$

Nota-se que  $\Upsilon$  não é necessariamente um elipsóide, dado que  $v(x)$  é uma função polinomial em  $x$ . Veja-se a figura no Exemplo 4.3.3.

O politopo  $\mathcal{B}_x$  pode ser descrito pelo seguinte conjunto de  $n_e$  desigualdades:

$$\mathcal{B}_x = \left\{ x : a_l' x \leq 1, l = 1, \dots, n_e \right\},$$

onde  $a_l \in \mathbb{R}^{n_x}$  são vetores dados associados às faces do politopo. Também,  $\mathcal{B}_x$  pode ser representado de forma equivalente pelos seus vértices.

A estimativa  $\Upsilon$  deve estar incluída em  $\mathcal{B}_x$ , então a condição  $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$  é satisfeita se:

$$\begin{bmatrix} a'_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Theta(x)x \end{bmatrix} \leq 1, \forall \begin{bmatrix} x \\ \Theta(x)x \end{bmatrix} : x' \mathcal{P}(x)x \leq 1.$$

Usando os fundamentos teóricos em Trofino [Tro00a] e Boyd et al. [BGFB94], a condição acima pode ser colocada em termos de LMIs, como se segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} a'_l & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_l \\ 0 \end{bmatrix} & (P + LC + C' L') \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, \dots, n_e,$$

com  $C = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ \Theta(x) & -I_{n_1} \end{bmatrix}$  e  $L$  é uma matriz livre a ser determinada<sup>6</sup>.

Como feito em Trofino [Tro00a], a região de atração estimada  $\Upsilon$  será otimizada pela minimização do traço da matriz  $P + LC + C' L'$  ( $\text{tr}(P + LC + C' L')$ ).

Nota-se que todas as variáveis auxiliares necessárias para a representação do sistema na forma (4.40) estão definidas pela relação de igualdade em (4.17). Além disso, as regras de chaveamento são definidas pelas relações de desigualdades em (4.2). Assim, para obterem-se as condições de estabilidade, deve-se levar em consideração o conjunto de igualdades e desigualdades:

$$\psi_{ik}(x) \geq 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, m_i \text{ e } i \in \mathcal{J}_n \quad (4.49)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} = 0 \quad (4.50)$$

Associada à definição da função de Laypunov candidata, é ainda de interesse<sup>7</sup> a seguinte restrição de igualdade:

$$\begin{bmatrix} \Theta(x) & -I_{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Theta(x)x \end{bmatrix} = 0. \quad (4.51)$$

No intuito de se obterem as condições de estabilidade, as relações acima serão levadas em consideração fazendo-se uso do  $\mathcal{S}$ -*procedure* [Yak71] e do lema de Finsler [Fin37], respectivamente. Quando essas técnicas são aplicadas, é introduzido um conjunto de

<sup>6</sup>Mais detalhes a respeito dessas matrizes serão fornecidos na prova do Teorema 4.3.1.

<sup>7</sup>Ao se considerar a matriz  $\Theta(x)$ , estamos inserindo não-linearidades no sistema, que serão tiradas ao se considerar a restrição (4.51).

variáveis de escalonamento a serem determinadas com o objetivo de reduzir o conservadorismo das condições obtidas.

No que se segue, são colocadas algumas notações auxiliares que permitirão a formulação do teorema de estabilidade regional de sistemas chaveados e determinação do domínio de atração enunciado como um problema convexo, usando LMIs.

### Notações auxiliares

A partir das funções  $\psi_{ik}$  que definem as regras de chaveamento, constroem-se as matrizes  $\phi_i, \Phi$ :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{2n} E_i' \phi_i E_i \text{ com } \begin{cases} \phi_i = \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \psi_{ik}, & R_{ik} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad i = 1, \dots, n \\ \phi_i = \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \psi_{(i-n)k}, & R_{ik} \in \mathbb{R}, \quad i = n+1, \dots, 2n \end{cases}, \quad (4.52)$$

onde  $E_i$  são matrizes constantes e serão dadas logo a seguir; e  $R_{ik} > 0$  são variáveis de escalonamento a serem determinadas, que surgem após a aplicação do  $\mathcal{S}$ -procedure em (4.49).

Sejam as matrizes constantes  $\tilde{E}_i$  e  $\tilde{E}_n$  tais que  $\tilde{E}_i \pi = \pi_i$  ( $i \neq n$ ) e  $\tilde{E}_n \pi = \sum_{i=1}^n \pi_i$ . As matrizes  $E_i$  são dadas por:

$$\begin{aligned} E_i &= \begin{bmatrix} 0_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} & \tilde{E}_i \end{bmatrix}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1, \\ E_n &= \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} & -\tilde{E}_n \end{bmatrix}, \\ E_i &= \begin{bmatrix} 0_{1 \times n_x} & 0_{1 \times n_1} & \tilde{E}_i \end{bmatrix}, \text{ para } i = n+1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Para aplicar o lema de Finsler em (4.50) e (4.51), introduz-se a seguinte notação:

$$\begin{aligned} A_{a1} &= \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ (\Theta + \Theta_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & 0_{n_x \times n_1} \end{bmatrix}, & A_{a2} &= \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ (\Theta + \Theta_x) \end{bmatrix} \mathbf{A}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ \Theta(x) & -I_{n_1} \end{bmatrix}, & \tilde{\Omega} &= \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0_{n_\Omega \times n_1} & \Omega_2 \\ & C & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde a matriz  $C_x$  é dada como em (4.21).

A seguir, apresenta-se o teorema de estabilidade regional para sistemas chaveados afins.

**Teorema 4.3.1** (*Estabilidade regional biquadrática do sistema chaveado afim*)

Considera-se o sistema (4.37) com as hipóteses dadas por **A1-A5**, o sistema associado (4.38) e a notação auxiliar (4.52) e (4.53). Dada a função matricial  $\Theta(x)$ , afim em  $x$ , consideram-se a matriz  $\Theta_x(x)$  dada por (4.8) e os politopos  $\mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^{n_x}$ , contendo a origem, e  $\mathcal{B}_\delta = \mathbf{Co}\{\Delta\}$ , com  $\Delta$  definida em (4.4).

Supondo-se que existam matrizes  $P, L, M$  com as mesmas dimensões de  $A_{a_1}$ ,  $C'$ ,  $\tilde{\Omega}'$ , respectivamente, e escalares e matrizes  $R_{ik}$  que determinam  $\Phi$ , como indicado em (4.52), que resolvam o seguinte problema de otimização nos vértices do meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr} (P + LC + C'L') \\ \text{sujeito à:} \\ & P = P', \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\left[ \begin{array}{c} 1 \\ \left[ \begin{array}{c} a_l \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cc} a'_l & 0 \end{array} \right] \quad (P + LC + C'L') \right] > 0, \quad l = 1, \dots, n_e, \tag{4.55}$$

$$\left[ \begin{array}{cc} (A'_{a_1}P + PA_{a_1}) & PA_{a_2} \\ A'_{a_2}P & 0 \end{array} \right] + M\tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}'M' + \Phi < 0. \tag{4.56}$$

Então, o sistema (4.37) é biquadraticamente estável, e  $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$ , com  $\mathcal{P}(x)$  dado por (4.6), é uma função de Lyapunov para este sistema. Também, a região  $\Upsilon$ , definida pelo conjunto  $\{x : v(x) = x'\mathcal{P}(x)x \leq 1\}$  em (4.48), é positivamente invariante, e, para todo  $x(0) \in \Upsilon$ , a trajetória  $x(t) \in \Upsilon \forall t \geq 0$  tende à origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

## Prova

Suponha-se que o Teorema 4.3.1 possui solução em todos os vértices de  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ . Então, por convexidade, existe solução para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \Delta$ .

Para simplificar a notação, definem-se os seguintes vetores:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ \Theta(x)x \end{bmatrix}. \tag{4.57}$$

Demonstra-se o teorema provando que, então, as condições (4.9) e (4.10) são satisfeitas e que  $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$ . Isso será feito em três passos, respectivamente.



**Passo 1:** (4.9) é satisfeita.

Seja  $D \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x + n_1)}$  uma matriz tal que  $D\xi = x$ , ou seja,

$$D = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Aplicando o complemento de Schur na LMI (4.55), tem-se a LMI estrita:  $P + LC + C'L' > 0$ ; então, existe um escalar positivo  $\epsilon_a$  suficientemente pequeno tal que a seguinte LMI é satisfeita:

$$P + LC + C'L' - \epsilon_a D'D \geq 0.$$

Pré- e pós-multiplicando a LMI acima por  $\xi'$  e  $\xi$ , respectivamente, obtém-se:

$$v(x) = x' \mathcal{P}(x)x = \xi' P \xi \geq \epsilon_a x' x \quad (4.59)$$

Nota-se que, por construção,  $C\xi$  implica o seguinte:

$$C\xi = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ \Theta(x) & -I_{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Theta(x)x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x x \\ \Theta(x)x - \Theta(x)x \end{bmatrix} = 0. \quad (4.60)$$

Considerando que  $x$  pertence ao politopo  $\mathcal{B}_x$ , então os elementos da matriz  $C$  em (4.55) são limitados. Isto é, existe um escalar positivo  $\epsilon_{b1}$  suficientemente grande tal que

$$\epsilon_{b1} I_{(n_x + n_1)} \geq (P + LC + C'L'),$$

Pré- e pós-multiplicando a expressão acima por  $\xi'$  e  $\xi$ , respectivamente, obtém-se  $\epsilon_{b1} \xi' \xi \geq \xi' P \xi = v(x)$ .

Observa-se que  $\xi' \xi = x' (I_{n_x} + \Theta(x)' \Theta(x))x$ . Usando o mesmo argumento anterior, existe um escalar positivo  $\epsilon_{b2}$  suficientemente grande tal que

$$\epsilon_{b2} I_{n_x} \geq \Theta(x)' \Theta(x).$$

Assim sendo, tem-se que

$$\epsilon_b x' x = \epsilon_{b1} (1 + \epsilon_{b2}) x' x \geq \epsilon_{b1} \xi' \xi \geq \xi' P \xi = x' \mathcal{P}(x)x = v(x). \quad (4.61)$$

De (4.59) e (4.61), conclui-se que existem escalares positivos  $\epsilon_a$  e  $\epsilon_b$  tais que:

$$\epsilon_a x' x \leq v(x) \leq \epsilon_b x' x, \quad x \in \mathcal{B}_x.$$

**Passo 2:** (4.10) é satisfeita.

Definindo  $Q = \begin{bmatrix} D & 0_{n_x \times n_\pi} \end{bmatrix}$ , considere-se (4.56). Como a LMI (4.56) é estrita, existe um escalar positivo  $\epsilon_c$  suficientemente pequeno tal que, acrescentando o termo  $\epsilon_c Q'Q$  no lado esquerdo de (4.56), se satisfaz

$$\begin{bmatrix} (A'_{a1}P + PA_{a1}) & PA_{a2} \\ A'_{a2}P & 0 \end{bmatrix} + M\tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}'M' + \Phi + \epsilon_c Q'Q \leq 0.$$

Pré- e pós-multiplicando essa desigualdade por  $\zeta'$  e  $\zeta$ , respectivamente, obtém-se o seguinte:

$$\xi'(A'_{a1}P + PA_{a1})\xi + 2\xi'PA_{a2}\pi + 2\zeta'M \begin{bmatrix} C\xi \\ \Omega_1x + \Omega_2\pi \end{bmatrix} + \zeta'\Phi\zeta + \epsilon_c x'x \leq 0.$$

Da expressão acima, nota-se que:

1.  $\tilde{\Omega}\zeta = \begin{bmatrix} \Omega_1x + \Omega_2\pi \\ C\xi \end{bmatrix} = 0$  diretamente de (4.17) e (4.60).
2.  $\zeta'\Phi\zeta \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{B}_x$ ,  $\delta \in \Delta$ . Isso será visto a seguir.

Nota-se que:

- $E_i\zeta = \pi_i = \delta_i x$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ ,
- $E_n\zeta = x - \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i = (1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i)x = \delta_n x$ ,
- $E_{n+i}\zeta = \pi_{n+i} = \delta_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Então, o termo  $\zeta'\Phi\zeta$  é igual a:

$$\zeta'\Phi\zeta = \sum_{i=1}^{n-1} \left( x' \phi_i x \delta_i^2 + \phi_{n+i} \delta_i^2 \right) + \phi_{2n} \delta_n^2 + x' \phi_n x \delta_n^2.$$

De (4.52) e (4.2) segue que  $x' \phi_i x \geq 0$  quando  $x \in X_i$ . Ainda mais, com (4.3) tem-se que  $\delta_i = 1$  e  $\delta_j = 0$  ( $i \neq j$ ), isto é,  $\zeta'\Phi\zeta \geq 0$ , para todo  $x \in X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Como  $\mathcal{B}_x \subseteq \bigcup X_i$  deduz-se que  $\zeta'\Phi\zeta \geq 0$  para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \Delta$ .

3.  $\dot{v}(x) = \xi'P\xi + \xi'P\dot{\xi} = \xi'(A'_{a1}P + PA_{a1})\xi + 2\xi'PA_{a2}\pi$ . Isso segue das definições

para  $A_{a_1}$ ,  $A_{a_2}$  e  $\xi$ , como indicado abaixo.

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x) &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ (\Theta(x) + \Theta_x(x))\dot{x} \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} x \\ \Theta(x)x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ \Theta(x)x \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} \dot{x} \\ (\Theta(x) + \Theta_x(x))\dot{x} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_n x + \mathbf{A}\pi \\ (\Theta(x) + \Theta_x(x))(A_n x + \mathbf{A}\pi) \end{bmatrix}' P \xi + \xi' P \begin{bmatrix} A_n x + \mathbf{A}\pi \\ (\Theta(x) + \Theta_x(x))(A_n x + \mathbf{A}\pi) \end{bmatrix} \\
&= \left( \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ (\Theta(x) + \Theta_x(x))A_n & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ (\Theta(x) + \Theta_x(x))\mathbf{A} \end{bmatrix} \pi \right)' P \xi + \\
&+ \xi' P \left( \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ (\Theta(x) + \Theta_x(x))A_n & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ (\Theta(x) + \Theta_x(x))\mathbf{A} \end{bmatrix} \pi \right) \\
&= \xi' (A'_{a_1} P + P A_{a_1}) \xi + \xi' P A_{a_2} \pi + \pi' A'_{a_2} P \xi.
\end{aligned}$$

Considerando (1), (2) e (3), pode-se concluir que:

$$\dot{v}(x) \leq -\varepsilon_c x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \Delta.$$

**Passo 3:**  $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$  é satisfeita.

Considere-se o conjunto de LMIs em (4.55). Das referências Trofino [Tro00a] e Boyd et al. [BGFB94], pode-se inferir que estas desigualdades implicam  $\Upsilon = \{x : x' \mathcal{P}(x)x \leq 1\} \subset \mathcal{B}_x$ . Assim, o conjunto  $\Upsilon$  é positivamente invariante e com isso se completa a prova. □

**Nota 4.3.1** *Nota-se que as dimensões do vetor  $\pi$  e da matriz  $\Theta(x)$ , dada respectivamente pelas equações (4.39) e (4.7), possuem um papel importante no conservadorismo do método, pois elas determinam as dimensões das variáveis de decisão  $P, L, M$ , que precisam ser determinadas.*

**Nota 4.3.2** *O problema formulado no Teorema 4.3.1 é de caráter convexo e por tal, ao ser resolvido nos vértices do politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ , o resultado é válido para qualquer ponto pertencente ao politopo. Isto é conservador, pois apenas os vértices de  $\mathcal{B}_\delta$  são de interesse, dado que  $\delta \in \Delta$  são os únicos valores possíveis de  $\delta$ . Para diminuir o conservadorismo do método, a condição  $\delta \in \Delta$  é representada na forma  $\tilde{\Omega} \zeta = 0$ , e a variável de folga  $M$  de (4.56) é introduzida com o auxílio do Lema de Finsler.*

**Nota 4.3.3** *Note da prova do Teorema 4.3.1 que a LMI (4.56) está associada à condição (4.10) e ainda a matriz  $M$  aparece na expressão como variável de escalonamento através da aplicação do Lema de Finsler associado à condição  $\tilde{\Omega}\zeta = 0$ . A LMI (4.55) está associada à condição  $\Gamma \subset \mathcal{B}_x$  e também implica (4.9). A variável  $L$  é uma matriz de escalonamento oriunda da aplicação do Lema de Finsler à condição  $C\xi = 0$  em (4.60). Já as variáveis  $R_{ik}$  são matrizes de escalonamento oriundas da aplicação do  $S$ -procedure nas condições  $\psi_{ik}$  em (4.2) que definem as regiões  $X_i$ .*

**Nota 4.3.4** (*Sliding Modes*) *Neste trabalho assume-se que modos deslizantes não ocorrem. No entanto, a abordagem proposta pode ser modificada para lidar com este tipo de comportamento. A idéia é usar o enfoque segundo Filippov [Fil88] para estabilidade e o lema de Finsler para se levar em consideração esse tipo de dinâmica.*

Na continuação, um exemplo mostrará a estabilidade regional de um sistema com saturação, instável em malha aberta, e o cálculo do seu respectivo domínio de atração. Esse exemplo se encontra em Pittet et al. [PTB97]. Compara-se o resultado desse exemplo com o resultado de outras metodologias.

**Exemplo 4.3.2** (*Estabilidade regional de um sistema com saturação*)

*Considere-se o sistema com saturação dado no exemplo 4.3.1, onde*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

*A análise do sistema será feita considerando a seguinte matriz  $\Theta(x)$ :*

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ x_2 I_2 \end{bmatrix}.$$

*De (4.7) e (4.8), tem-se respectivamente que*

$$n_1 = 4 \quad \text{and} \quad \Theta_x(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$

*Da definição de  $\Delta$  em (4.4), tem-se o seguinte conjunto de vértices:*

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

Assim,

$$\mathcal{B}_\delta = \text{Co} \{ \Delta \}.$$

O politopo  $\mathcal{B}_x$  é definido como se segue:

$$\mathcal{B}_x = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 3\beta \\ -5\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\beta \\ -\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\beta \\ 4\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3\beta \\ 5\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2\beta \\ \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta \\ -4\beta \end{bmatrix} \right\},$$

onde  $\beta > 0$  é um escalar tão grande quanto possível. Também, o meta-politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$  possui  $6 \times 3 = 18$  vértices.

Como feito em Pittet et al. [PTB97], os estados do sistema estão restritos nos seguintes conjuntos:

$$X_1 = \{x : -5 \leq K'x < -1\}, \quad X_2 = \{x : |K'x| \leq 1\} \quad \text{and} \quad X_3 = \{x : 5 \geq K'x > 1\}.$$

Representando os conjuntos  $X_i$  em termos de (4.2):

- $X_1 = \{x : K'x + 5 \geq 0, -1 - K'x > 0\},$
- $X_2 = \{x : 1 - K'x \geq 0, 1 + K'x \geq 0\}$  e
- $X_3 = \{x : 5 - K'x \geq 0, K'x - 1 > 0\}.$

Agora, resolvendo o Teorema 4.3.1 para  $\beta = 2.2$ , obtém-se a seguinte matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0.0783169 & 0.0168630 & -0.0001555 & 1.0359117 & 0.6245926 & -2.1148732 \\ 0.0168630 & 0.0577530 & -1.6629436 & -0.2997316 & 2.4139138 & -0.0001247 \\ -0.0001555 & -1.6629436 & 0.0482625 & -190.77941 & 190.78248 & 0.0002436 \\ 1.0359117 & -0.2997316 & -190.77941 & 199.961 & 149.84189 & -154.2378 \\ 0.6245926 & 2.4139138 & 190.78248 & 149.84189 & -499.55608 & 154.23985 \\ -2.1148732 & -0.0001247 & 0.0002436 & -154.23781 & 154.23985 & 0.0419091 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 4.2, mostram-se os resultados obtidos com as seguintes técnicas (a) e (b), os critérios do círculo e Popov, respectivamente [PTB97]. Em (d), o enfoque via funções de Lyapunov por partes (Pwq) [Joh99]. Por último, em (c), a metodologia apresentada nesta seção.

Os resultados demonstram que o enfoque proposto neste trabalho, para este exemplo, é apenas uma estimativa do domínio de atração e que os critérios tradicionais do círculo e de Popov fornecem as melhores estimativas. Também, o enfoque via funções de Lyapunov quadráticas por partes ilustra a menor estimativa considerando as áreas das regiões obtidas.

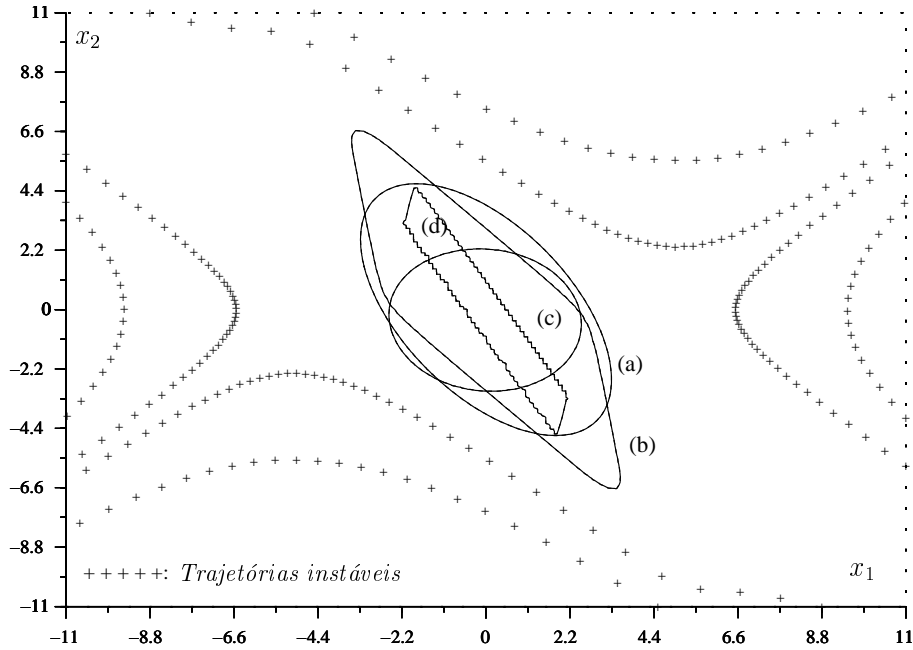


Figura 4.2: Estimativas do domínio de atração para o exemplo 4.3.2: (a) critério do círculo, (b) critério de Popov, (c) metodologia proposta e (d) enfoque  $PwQ$ .

O seguinte exemplo ilustra, para um sistema com domínio de atração limitado, que a metodologia aqui apresentada fornece uma boa estimativa não elipsoidal. O fato de ser não elipsoidal é devido ao uso de funções de Lyapunov de tipo não quadrático. Esse comportamento já foi considerado em Trofino [Tro00a], no contexto de sistemas não lineares incertos.

**Exemplo 4.3.3** Considere-se o sistema com saturação dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.01x_2 \\ \dot{x}_2 = -20x_1 + 3x_2 + 2\text{sat}(-4x_2) \end{cases} \quad (4.62)$$

Esse sistema pode ser reescrito em termos da notação do exemplo anterior com

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ -20 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Conseqüentemente, o sistema associado (4.38), as regiões  $X_i$ , as matrizes  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  assim como as notações auxiliares foram obtidos diretamente do Exemplo 4.3.2.

Definem-se os polítopos  $\mathcal{B}_x$  e  $\mathcal{B}_\delta$  como se segue:

$$\mathcal{B}_x = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} -0.06\beta \\ -0.8\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.06\beta \\ 0.2\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.04\beta \\ 0.4\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.06\beta \\ 0.8\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.06\beta \\ -0.2\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.04\beta \\ -0.4\beta \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_\delta = \text{Co} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

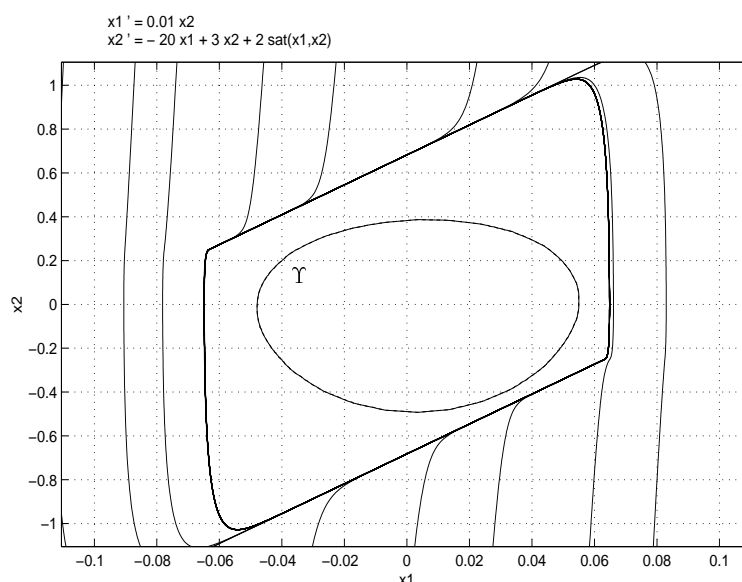


Figura 4.3: Domínio de atração do sistema (4.62): a região exata e a região estimada.

Aplicando o Teorema 4.3.1, obtém-se para  $\beta = 0.85$  uma estimativa para o domínio de atração dado pela região não elipsoidal  $\Upsilon$ , como ilustra a Figura 4.3. Para fins de estudo comparativo, o domínio de atração teórico obtido pelo plano de fase do sistema é mostrado na mesma figura. Nota-se que essa estimativa pode ser melhorada aumentando o número de vértices de  $\mathcal{B}_x$ , e, com isso, o esforço computacional também será aumentado.

**Nota 4.3.5** Observa-se que no Exemplo 4.3.2 a região de atração exata é ilimitada. Para obter a estimativa de uma região desse tipo, podem-se aplicar alguns métodos específicos para esse fim, como é o caso do “backward integration” [Kha96]. Com o enfoque aqui apresentado, ainda que a região de atração exata seja ilimitada, sempre se obterá um domínio de atração limitado. Também, nota-se que na Figura 4.3 o

domínio de atração estimado é não elipsoidal, o que não é usual quando as funções de Lyapunov são de tipo quadrático.

### Abordagem biquadrática: número de LMIs, ordem do sistema, número de regiões de chaveamento e vértices do politopo $\mathcal{B}_x$

O número de LMIs a ser testado num dado teorema depende do número de vértices do politopo  $\mathcal{B}_x$  (igual a  $n_e$ ) e do número de regiões de chaveamentos<sup>8</sup> (igual a  $n$ ), e independe da ordem do sistema (no caso  $n_x$ ).

As dimensões (ou ordens das matrizes) dessas LMIs dependem da ordem do sistema,  $n_x$ , do número de regiões de chaveamentos e do valor  $n_1$  correspondente ao número de linhas da matriz escolhida  $\Theta(x)$ .

Por exemplo, no caso do Teorema 4.2.1, apresentado para um sistema de ordem dois ( $n_x = 2$ ), com duas regiões de chaveamento ( $n=2$ ) e usando um politopo de  $n_e = 4$  vértices, foi necessário usar 12 LMIs na procura da matriz  $P$  de ordem  $6 \times 6$  e das matrizes  $L$ ,  $M$  e  $\Phi^9$ . A ordem da matriz  $P$  e da matriz de escalonamento  $L$  depende dos valores de  $n_x$  e  $n_1$  e independe tanto do número de regiões de chaveamentos como do número de vértices do politopo  $\mathcal{B}_x$ .

A Tabela 4.1 indica o número de LMIs e as ordens das variáveis procuradas nos casos linear e afim com abordagem biquadrática.

|                 | Abordagem Biquadrática |                  |
|-----------------|------------------------|------------------|
|                 | Teorema 4.2.1          | Teorema 4.3.1    |
|                 | $n_e = 4, n = 2$       | $n_e = 6, n = 3$ |
| número de LMIs  | 12                     | 44               |
| ordem de $P$    | $6 \times 6$           | $6 \times 6$     |
| ordem de $L$    | $6 \times 5$           | $6 \times 5$     |
| ordem de $M$    | $8 \times 9$           | $14 \times 44$   |
| ordem de $\Phi$ | $8 \times 8$           | $14 \times 14$   |

Tabela 4.1: Abordagem Biquadrática: número de LMIs e ordens das matrizes.

<sup>8</sup>Este número é igual ao número de elementos do conjunto  $\Delta$  que determina o politopo  $\mathcal{B}_\delta$

<sup>9</sup>Aqui foram quatro valores escalares  $\sigma_{ik}$  procurados.



## 4.4 Sumário

Neste capítulo, apresentou-se a análise de estabilidade para sistemas chaveados lineares e sistemas afins, assim como a determinação dos respectivos domínios de atração. A estabilidade analisada foi feita usando-se a definição de estabilidade biquadrática que não depende das partições  $X_i$  do espaço de estados do sistema.

Diferentemente de Branicky [Bra95], Johansson [Joh99] e Pettersson [Pet99], a noção de estabilidade aqui considerada utiliza uma função de Lyapunov candidata da forma  $v(x) = x'P(x)x$ , onde  $P(x)$  é quadrática em  $x$ . Isto é,  $v(x)$  é uma função polinomial (grau 4) do estado.

São apresentados exemplos que exibem a metodologia proposta para os casos linear e afim. Para sistemas afins foram apresentados dois exemplos, um exemplo em que o domínio de atração é limitado, obtendo-se uma boa estimativa deste domínio, e outro em que essa região é ilimitada. Neste último caso, a metodologia fornece um resultado melhor quando comparado com a metodologia que usa funções de Lyapunov quadráticas por partes (Pwq). No próximo capítulo será mostrado que essa estimativa pode ser melhorada, comparativamente ao critério do círculo e ao método de Popov.

O enfoque aqui proposto fornece a vantagem de fazer análise de caráter não global, estabelecendo-se uma alternativa diferente diante de métodos tradicionais e do enfoque Pwq.

Com os resultados dos teoremas propostos, pode-se concluir estabilidade semiglobal [PTC00]. A análise global pode ser feita com a extensão da metodologia, na qual os polítopos a serem considerados na formulação são ilimitados [Tro01].

O enfoque apresentado é muito apropriado para sistemas com estabilidade regional cujas regiões de atração são limitadas.

Como obter estimativas ilimitadas de domínios de atração faz parte de estudos em andamento.

# Capítulo 5

## Estabilidade $\mathcal{Q}_r$ de Sistemas Chaveados

Este capítulo fornece uma nova proposta para análise de estabilidade de sistemas chaveados, com o objetivo de se obterem resultados menos conservadores. Nesse sentido, é apresentada a definição de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  proposta por Trofino [Tro00b]. Esse conceito é aplicado para análise de estabilidade e determinação do domínio de atração de sistemas chaveados afins e sistemas chaveados bilineares. Ilustra-se essa metodologia com alguns exemplos.

### 5.1 Estabilidade $\mathcal{Q}_r$

Em Trofino [Tro00b] apresentou-se um estudo de estabilidade, denominada de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ , no contexto de sistemas não lineares incertos, onde é usada uma função de Lyapunov de tipo polinomial. Esse conceito fornece, quando aplicado a sistemas chaveados, um método alternativo à noção de estabilidade biquadrática estudada no capítulo anterior, que pode ser vista como um caso particular.

Nesta seção, apresenta-se um estudo de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  para sistemas chaveados. Nesse sentido, algumas definições e expressões auxiliares são necessárias na apresentação dessa abordagem.

Seja  $\Theta_i(x) \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i}$  uma matriz afim para cada  $i = 0, \dots, d - 1$ , onde  $d$  é um inteiro positivo.

Definem-se as matrizes  $\Theta(x)$  e  $\mathcal{P}(x)$  da forma seguinte:

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} \Theta_0 \\ \Theta_1\Theta_0 \\ \vdots \\ \Theta_{d-1}\Theta_{d-2}\cdots\Theta_0 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{P}(x) = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix},$$

onde  $P$  é uma matriz simétrica de dimensão conveniente a ser determinada. Nota-se que a matriz  $\mathcal{P}(x)$  é uma forma geral de representar uma matriz polinomial em  $x$  de grau  $r \leq 2d$ . Para que o grau dos elementos polinomiais dessa matriz seja menor que  $2d$ , basta zerar alguns blocos que compõem a matriz  $P$ .

**Definição 5.1.1 (Estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ )** *Dado um politopo  $\mathcal{B}$ , diz-se que a origem do sistema (4.1) é localmente  $\mathcal{Q}_r$  estável se existir uma função  $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$  com  $\mathcal{P}(x)$  da forma (5.1) e funções  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x)$ ,  $\alpha_3(x)$  de classe  $\mathcal{K}$  tais que sejam satisfeitas as seguintes condições para todo  $x \in \mathcal{B}$ :*

- $\alpha_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$
- $\dot{v}(x) = x'\dot{\mathcal{P}}(x)x + f_i(x)'\mathcal{P}(x)x + x'\mathcal{P}(x)f_i(x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$

◇◇

Essa definição estende, para o caso de sistemas chaveados, a noção de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  apresentada em Trofino [Tro00b] no contexto de sistemas não lineares incertos e implica estabilidade assintótica da origem do sistema chaveado. Quando são satisfeitos os itens da Definição 5.1.1, a função  $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$  é dita ser uma função de Lyapunov para o sistema chaveado e é comum a todas as partições  $X_i$ . Esse fato diferencia a metodologia aqui apresentada em relação à abordagem Pwq usada por Johansson [Joh99] e Petterson [Pet99], onde se adotam funções de Lyapunov diferentes (e de tipo quadrático) para cada partição.

Como  $\mathcal{P}(x)$  é uma matriz polinomial, o conceito de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  resulta ser mais geral que o conceito usual de estabilidade quadrática e que o conceito de estabilidade biquadrática, os quais podem ser recuperados fazendo a partição por blocos da matriz  $P = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1' & P_2 \end{bmatrix}$ , com  $P_1$  da mesma dimensão que  $\Theta(x)'$ ; então, dar-se-á:

- estabilidade quadrática se  $P_1 = 0$  e  $P_2 = 0$ , assim  $\mathcal{P}(x) = P_0$  é uma matriz fixa,
- estabilidade biquadrática se  $d = 1$ , isto é,  $\Theta$  afim em  $x$ .

Nota-se também que estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  implica estabilidade assintótica na origem.

Com o intuito de se obterem resultados menos conservadores, nas seguintes seções é usada essa definição para abordar sistemas chaveados de tipo afim e bilinear.

## 5.2 O Problema Afim

Nesta seção, estuda-se o problema de estabilidade regional e de determinação do domínio de atração para sistemas chaveados da forma afim, usando o conceito de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ . Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a metodologia.

Na formulação desse problema se aproveitarão as representações, matrizes e notações auxiliares desenvolvidas no Capítulo 4. Consideram-se aqui sistemas da forma (4.37):

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad x \in X_i, \quad i \in \mathcal{J}_n, \quad t \geq 0,$$

que satisfazem as hipóteses **A1-A5** da seção 4.3.

Consideram-se os conjuntos  $\mathcal{B}_x$ ,  $\Delta$ ,  $\mathcal{B}_\delta$ , o vetor auxiliar  $\pi$  e as notações  $\mathbf{A}$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\mathcal{D}$  da seção 4.1 e a representação do sistema como indicado em (4.40).

Usando a função de Lyapunov candidata da forma  $v(x) = x' \mathcal{P}(x) x$  com  $\mathcal{P}(x)$  como em (5.1), considera-se o conjunto  $\Upsilon$  em (4.48) como estimativa para o domínio de atração.

A seguir, faz-se necessário detalhar algumas das notações já colocadas, e, de forma similar a como foi desenvolvido no Capítulo 4, considerando o conceito de estabilidade biquadrática, serão adicionadas algumas notações auxiliares que servirão na formulação e prova do teorema de estabilidade regional usando o conceito de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ .

### Notações auxiliares

Dadas as matrizes constantes  $U_i, T_{ij} \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i}$  para  $i = 0, \dots, (d-1)$ , define-se  $\Theta_i$  como sendo matrizes da mesma ordem que  $T_{ij}$  para cada  $i$ , como se segue:

$$\Theta_i(x) = \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} x_j + U_i \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i} \quad i = 0, \dots, (d-1), \quad n_0 = n_x, \quad (5.2)$$

onde  $x_j$  é a  $j$ -ésima componente do vetor  $x$ .

Para  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ , consideram-se os vetores  $w_i$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w_0 &= x, \\ w_1 &= \Theta_0 x, \\ w_2 &= \Theta_1 \Theta_0 x, \\ &\vdots \\ w_d &= \Theta_{d-1} \cdots \Theta_1 \Theta_0 x. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Consideram-se as matrizes  $\tilde{\Theta}_i(x)$  como se segue:

$$\tilde{\Theta}_i(x) = \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} w_i r_j \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_x} \quad i = 0, \dots, d-1, \tag{5.4}$$

onde  $r_j$  é a  $j$ -ésima linha da matriz identidade  $I_{n_x}$ .

Seja  $\mathcal{B}_w$  um politopo tal que

$$\mathcal{B}_w = \left\{ w : w = \Theta(x)x = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix}, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \right\}.$$

O politopo  $\mathcal{B}_w$  representa um conjunto de não-linearidades como definido em (5.3) e está associado ao grau da função de Lyapunov. Quando  $\Theta(x)$  é afim em  $x$ , isto é,  $\Theta(x) = \Theta_0(x)$  e  $d = 1$ , o politopo  $\mathcal{B}_w$  não mais se faz necessário pois  $\tilde{\Theta}_0$  obtida de (5.4) é afim<sup>1</sup> em  $x$ .

---

<sup>1</sup>Isto será observado nos exemplos a serem apresentados com abordagem  $\mathcal{Q}_2$ .

Considerando  $n_\pi$ ,  $n_\Omega$ ,  $m_a = \sum_{i=0}^d n_i$  e as seguintes matrizes

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(\tilde{\Theta}_0(x) + \Theta_0(x)) & I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\tilde{\Theta}_1(x) & -\Theta_1(x) & I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{\Theta}_{d-1}(x) & 0 & \cdots & \Theta_{d-1}(x) & I_{n_d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_a \times m_a}, \\
 F &= \begin{bmatrix} A_n & 0_{n_x \times n_1} & 0_{n_x \times n_2} & \cdots & 0_{n_x \times n_d} & \mathbf{A} \\ 0_{n_1 \times n_x} & & & \cdots & & 0_{n_1 \times n_\pi} \\ 0_{n_2 \times n_x} & & & \cdots & & 0_{n_2 \times n_\pi} \\ \vdots & & & \cdots & & \vdots \\ 0_{n_d \times n_x} & & & \cdots & & 0_{n_d \times n_\pi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_a \times (m_a + n_\pi)}, \\
 C &= \begin{bmatrix} -\Theta_0(x) & I_{n_1} & \cdots & 0 \\ 0 & -\Theta_1(x) & I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & -\Theta_{d-1}(x) & I_{n_d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_a - n_x) \times m_a}, \Psi = \begin{bmatrix} C \\ C_x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_a - 1) \times m_a}, \\
 \Omega &= \begin{bmatrix} -D & F \\ 0 & C & 0 \\ 0 & C_{\pi_\Theta} \\ 0 & \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(3m_a - n_x + n_\Omega + n_\pi - 1) \times (2m_a + n_\pi)}, \\
 N &= \begin{bmatrix} I_{m_a} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_a) \times (m_a + n_\pi)},
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

com  $\pi_\Theta = \begin{bmatrix} x & \Theta(x) & x & \pi \end{bmatrix}'$ .

A partir das funções  $\psi_{ik}$  que definem as regras de chaveamento, nos conjuntos  $X_i$  em (4.2), constroem-se os escalares e as matrizes  $\phi_i$  e a matriz  $\Phi$  como se segue:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{2n} E_i' \phi_i E_i \text{ com } \begin{cases} \phi_i = \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \psi_{ik}, & R_{ik} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad i = 1, \dots, n \\ \phi_i = \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \psi_{(i-n)k}, & R_{ik} \in \mathbb{R}, \quad i = n + 1, \dots, 2n \end{cases}, \tag{5.6}$$

onde  $R_{ik} > 0$  são variáveis de escalonamento, a serem determinadas, que surgem após

a aplicação do  $\mathcal{S}$ -procedure em (4.49).

Dadas as matrizes constantes  $\tilde{E}_i$  e  $\tilde{E}_n$  tais que  $\tilde{E}_i\pi = \pi_i$  ( $i \neq n$ ) e  $\tilde{E}_n\pi = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i$ , então as matrizes constantes  $E_i$  são dadas por:

$$\begin{aligned} E_i &= \begin{bmatrix} 0_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} & 0_{n_x \times n_2} & \cdots & 0_{n_x \times n_d} & \tilde{E}_i \end{bmatrix}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1, \\ E_n &= \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} & 0_{n_x \times n_2} & \cdots & 0_{n_x \times n_d} & -\tilde{E}_n \end{bmatrix}, \\ E_i &= \begin{bmatrix} 0_{1 \times n_x} & 0_{1 \times n_1} & 0_{1 \times n_2} & \cdots & 0_{1 \times n_d} & \tilde{E}_i \end{bmatrix}, \text{ para } i = n+1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Com as notações auxiliares colocadas acima, enuncia-se o teorema principal desta seção.

**Teorema 5.2.1** (*Estabilidade regional  $\mathcal{Q}_r$  do Sistema Chaveado Afim*)

Considere o sistema (4.37), as hipóteses **A1-A5** e seu respectivo sistema associado (4.38). Seja  $\Theta(x)$ , definida em (5.1), uma dada função matricial em  $x$ . Considerem-se as notações auxiliares (5.5) e (5.6).

Se  $P$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $R_{ik}$  para  $i = 1, \dots, 2n$ ,  $k = 1, \dots, m_i$  resolvem o seguinte problema de otimização, onde as LMIs são construídas em todos os vértices do meta-politopo  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \times \mathcal{B}_w$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr} (P + L\Psi + \Psi' L') \\ \text{sujeito à:} \\ & P = P' \\ & \begin{bmatrix} 1 & & \begin{bmatrix} a'_l & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_l \\ 0 \end{bmatrix} & & (P + L\Psi + \Psi' L') \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, \dots, n_e, \quad (5.7) \\ & \begin{bmatrix} 0 & PN \\ N'P & 0 \end{bmatrix} + M\Omega + \Omega' M' + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} < 0 \quad (5.8) \end{aligned}$$

Então, o sistema (4.37) é assintoticamente e localmente estável e  $v(x) = x' \mathcal{P}(x)x$ , com  $\mathcal{P}(x)$  como em (5.1), é uma função de Lyapunov para esse sistema. Também, a região  $\Upsilon$ , definida pelo conjunto  $\{x : v(x) = x' \mathcal{P}(x)x \leq 1\}$  em (4.48), é positivamente invariante, e, para qualquer  $x(0) \in \Upsilon$ , a trajetória  $x(t) \in \Upsilon \forall t \geq 0$  e se aproxima da origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

## Prova

Considere-se o sistema (4.38) e vetor  $\pi$  como em (4.39). Definem-se os seguintes vetores auxiliares:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} x \\ \Theta x \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \pi, \quad (5.9)$$

onde  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n_x+m_a}$ ,  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n_\pi}$ .

Sejam as matrizes  $D_1 = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x \times m_a} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+m_a)}$  e  $D_2 = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times (n_x+m_a)} & I_{n_x} & 0_{n_x \times (m_a+n_\pi)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (2(n_x+m_a)+n_\pi)}$  tais que  $D_1 \xi_1 = x$  e  $D_2 \xi = x$ .

Assume-se que as condições do Teorema 5.2.1 são satisfeitas.

Aplicando o complemento de Schur em (5.7) tem-se a LMI

$$P + L\Psi + \Psi' L' > 0. \quad (5.10)$$

Desde que as desigualdades (5.10) e (5.8) são estritas, então existem escalares positivos suficientemente pequenos,  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , tal que é possível acrescentar os termos  $-\epsilon_1 D_1' D_1$  e  $\epsilon_2 D_2' D_2$  nas relações (5.10) e (5.8), respectivamente. Ou seja, as seguintes condições são satisfeitas para todos os vértices do meta-politopo  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \times \mathcal{B}_w$ .

$$P + L\Psi + \Psi' L' - \epsilon_1 D_1' D_1 \geq 0, \quad (5.11)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & PN \\ N'P & 0 \end{bmatrix} + M\Omega + \Omega' M' + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} + \epsilon_2 D_2' D_2 \leq 0. \quad (5.12)$$

Por convexidade, as desigualdades (5.11) e (5.12) também são satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$ ,  $\delta \in \Delta$ . Pré- e pós-multiplica-se a relação (5.11) por  $\xi_1'$  e por sua transposta, respectivamente, e a relação (5.12) por  $\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}'$  e por sua transposta, respectivamente.

Nota-se que, por construção, na primeira relação  $C_x x = 0$  e  $C \xi_1 = 0^2$ , então  $\Psi \xi_1 = 0$ .

Similarmente, na segunda relação, pela construção das matrizes  $D$  e  $F$ ,  $-D\dot{\xi}_1 + F\xi = 0$ .

Também,  $\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \xi = 0$ ,  $C_{\pi_\ominus} \xi = 0$  e, considerando que a notação  $(x, \pi) \in \mathcal{D}$  representa o conjunto de igualdades (4.39), (4.42) e (4.43), então  $\begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \xi = 0$ .

Assim,  $\Omega \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} = 0$ .

<sup>2</sup>Aqui foi aplicada a condição  $C_z z = 0$  e foi usada a definição do vetor auxiliar  $\xi = \pi_\ominus$ .



Então, o seguinte é satisfeito:

$$\xi_1' P \xi_1 \geq \epsilon_1 x' x, \quad \forall \xi_1 : \Psi \xi_1 = 0 \text{ e } x \in \mathcal{B}_x \quad (5.13)$$

$$\xi_1' P \xi_1 + \xi_1' P \dot{\xi}_1 + \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} \leq -\epsilon_2 x' x, \quad (5.14)$$

$$\forall \xi : \Omega \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \mathcal{B}_x \text{ e } \delta \in \Delta.$$

Também,  $\xi_1' = [x' \quad x' \Theta']$  e, pela definição da função de Lyapunov candidata, a desigualdade (5.13) se torna

$$v(x) = \xi_1' P \xi_1 = x' \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} x = x' \mathcal{P}(x) x \geq \epsilon_1 x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x. \quad (5.15)$$

Desde que  $x$  pertence ao politopo  $\mathcal{B}_x$ , os elementos da matriz  $\Psi$  de (5.5) são limitados. Então, existe um escalar positivo suficientemente grande,  $\epsilon_3$ , tal que  $\epsilon_3 I_{n_x} \geq (P + L\Psi + \Psi'L')$ . Isto é,  $\epsilon_3 \xi_1' \xi_1 = \epsilon_3 (x' x + x' \Theta' \Theta x) \geq \xi_1' P \xi_1 = x' \mathcal{P}(x) x$ .

Também, como  $x$  pertence a  $\mathcal{B}_x$ , existe outro escalar positivo suficientemente grande,  $\epsilon_4$ , tal que  $\epsilon_4 I_{n_x} \geq \Theta' \Theta$ . Assim,  $x' \mathcal{P}(x) x \leq \epsilon_3 (1 + \epsilon_4) x' x$ , e, com a relação (5.15):

$$\epsilon_1 x' x \leq v(x) = x' \mathcal{P} x \leq \epsilon_3 (1 + \epsilon_4) x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x. \quad (5.16)$$

De (5.6) e considerando a variável de referência  $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$ , obtém-se

$$\xi' \Phi \xi = \sum_{i=1}^{2n} (E_i \xi)' \phi_i (E_i \xi), \quad \text{onde } E_i \xi = \begin{cases} \pi_i, & i \neq n \\ \delta_n x, & i = n \end{cases}.$$

Então, pode-se reescrever o último termo da desigualdade (5.14), como se segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i' \phi_i \pi_i + (\delta_n x)' \phi_n (\delta_n x) + \sum_{i=1}^n \pi_{n+i}' \phi_{n+i} \pi_{n+i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\delta_i^2 x' \phi_i x + \delta_i^2 \phi_{n+i}) + \delta_n^2 x' \phi_n x + \delta_n^2 \phi_{2n}. \end{aligned}$$

Considerando as definições de  $X_i$ ,  $\delta \in \Delta$  e (4.52), têm-se que  $\phi_i \geq 0$  e que  $x' \phi_i x \geq 0, \forall i$ ;

assim, conclui-se o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \Delta.$$

Com isso, a desigualdade (5.14) implica:

$$\dot{\xi}_1' P \xi_1 + \xi_1' P \dot{\xi}_1 \leq -\epsilon_2 x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \Delta; \quad (5.17)$$

além disso,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix} x \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0_{n_x} \\ \dot{\Theta}(x) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix} \dot{x}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Então, ao substituir (5.18) e  $\xi_1$  em (5.17), obtém-se

$$\dot{v}(x) = \dot{x}' \mathcal{P}(x) x + x' \dot{\mathcal{P}}(x) x + x' \mathcal{P}(x) \dot{x} \quad (5.19)$$

Da referência Khalil [Kha96] e das relações (5.16) e (5.19), conclui-se que a origem do sistema (4.38) é localmente e assintoticamente estável. Assim,  $v(x) = x' \mathcal{P}(x) x$  é uma função de Lyapunov para o sistema (4.37).

Por último, pré- e pós-multiplicando (5.7) por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix} \end{bmatrix}'$$

e sua transposta, respectivamente, consegue-se (4.48). Da referência Boyd et al. [BGFB94], (4.48) implica  $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$ . Assim,  $\Upsilon$  é um conjunto invariante, e, para todo  $x(0) \in \Upsilon$ , a trajetória  $x(t) \in \Upsilon \forall t \geq 0$  se aproxima da origem do sistema quando  $t \rightarrow \infty$ .

□

**Nota 5.2.1** *Note da prova do Teorema 5.2.1 que a LMI (5.8) está associada à condição (4.10) e ainda a matriz  $M$  aparece na expressão como variável de escalonamento através*

da aplicação do Lema de Finsler associado à condição  $\Omega \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} = 0$ . A LMI (5.7) está associada à condição  $\Gamma \subset \mathcal{B}_x$  e também implica (4.9). A variável  $L$  é uma matriz de escalonamento oriunda da aplicação do Lema de Finsler à condição  $\Psi\xi_1 = 0$ . Já as variáveis  $R_{ik}$  são matrizes de escalonamento oriundas da aplicação do  $S$ -procedure nas condições  $\psi_{ik}$  em (4.2) que definem as regiões  $X_i$ .

O exemplo seguinte, encontrado em Ponce et al. [PPA00], ilustra o potencial dessa metodologia. Nele, apresentam-se os domínios de atração do sistema quando usados os conceitos de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ , para  $r = 2$  e  $r = 4$ .

**Exemplo 5.2.1** (*Domínio de Atração do Pêndulo Invertido*<sup>3</sup>)

Considere-se o problema do pêndulo rotatório invertido dado pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + \text{sat}(-2x_1). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Nesse caso,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para  $\beta = 1.2$ , o politopo  $\mathcal{B}_x$  está definido pelo conjunto de vértices

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.2\beta \\ -1.2\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.5\beta \\ -1.2\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\beta \\ \beta \end{bmatrix} \right\},$$

Satisfeitas as condições do Teorema 5.2.1, a Figura 5.1 ilustra o domínio de atração desse sistema dado pela região  $\Upsilon_{\mathcal{Q}_2}$ . Observa-se o resultado obtido quando usado o conceito de estabilidade biquadrática na região  $\Upsilon_{\text{biq}}$ .

Já o resultado quando  $r = 4$  é dado na Figura 5.2 pela região  $\Upsilon_{\mathcal{Q}_4}$ . Nesta figura, pode-se observar uma região maior que a obtida na Figura 5.1, onde foi usada a estabilidade  $\mathcal{Q}_2$ .

A fim de comparação, são colocadas na Figura 5.3 as duas regiões obtidas com os conceitos de estabilidade biquadrática e  $\mathcal{Q}_4$ , respectivamente.

---

<sup>3</sup>Sistema linearizado.

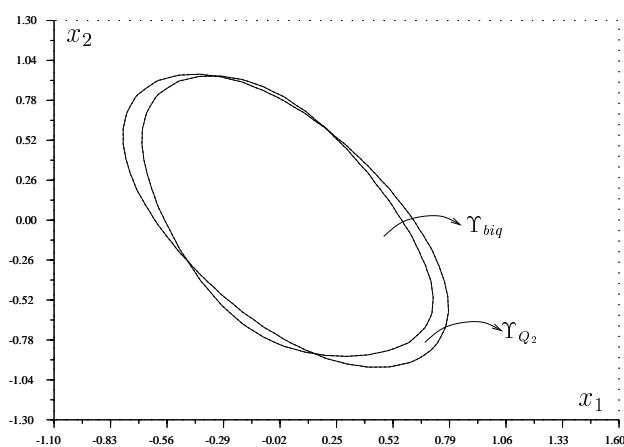


Figura 5.1: Estabilidade  $Q_2$  e estabilidade biquadrática para o pêndulo invertido.

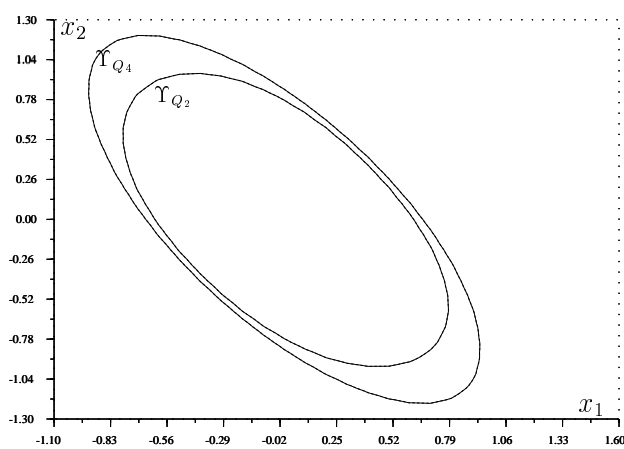


Figura 5.2: Estabilidade  $Q_4$  e  $Q_2$  para o pêndulo invertido.

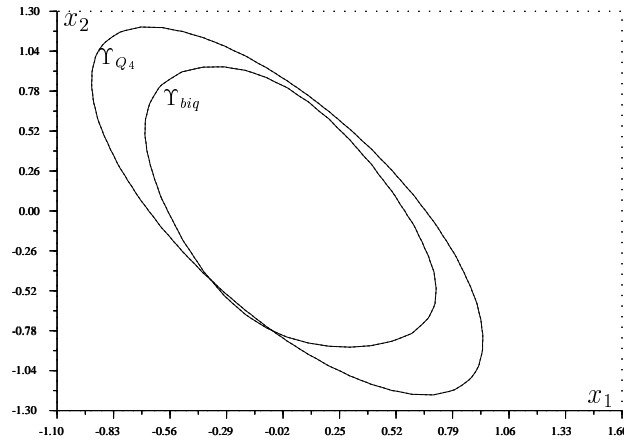


Figura 5.3: Estabilidade  $\mathcal{Q}_4$  e biquadrática para o pêndulo invertido.

**Exemplo 5.2.2** Neste exemplo, mostra-se a eficácia do método estudado nesta seção ao comparar as estimativas das regiões de atração obtidas com a abordagem biquadrática e outras metodologias para o sistema do Exemplo 4.3.2. Observem-se os resultados na Figura 5.4.

Nota-se que a região obtida usando estabilidade  $\mathcal{Q}_2$  é maior que a obtida no caso biquadrático. Neste último caso, o resultado é menos conservador; menos conservador ainda que as metodologias usadas com os critérios do círculo e Popov [PTB97] e o enfoque Pwq [Joh99].

A eficácia do conceito de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  nesta seção é mostrada nos gráficos já ilustrados. Quanto maior é a ordem da função de Lyapunov, maior será a região de estabilidade obtida para o exemplo trabalhado. A inconveniência de melhores resultados, para valores de  $r$  maiores que 4, é devida ao excessivo custo computacional envolvido.

**Nota 5.2.2** Com as Figuras 5.1, 5.3 e 5.4 dos exemplos dados acima, em que são comparados os resultados obtidos pelas metodologias usando os conceitos de estabilidade biquadrática e o de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ , pode-se concluir que os resultados obtidos com a segunda metodologia são menos conservadores (as regiões de estabilidade obtidas são maiores que no caso biquadrático). Essas abordagens são diferentes: é suficiente observar a estrutura da função de Lyapunov nesses casos. Quando  $r = 2$ , embora a estrutura da função de Lyapunov seja a mesma, a matriz  $P$  a ser obtida será diferente. Isto é devido às condições LMIs dadas por (4.56) e (5.8) serem diferentes. Com isso, a abordagem  $\mathcal{Q}_2$  mostra ser uma abordagem alternativa nos casos em que a abordagem biquadrática não possa ser aplicada.

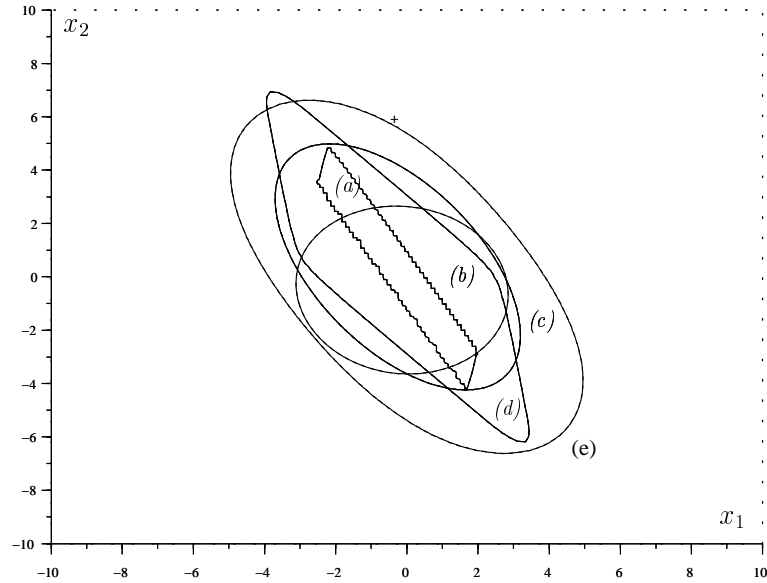


Figura 5.4: Estimativas do domínio de atração para o exemplo 4.3.2: (a) enfoque  $Pwq$ , (b) estab. biquadrática, (c) critério do círculo, (d) critério de Popov, (e) estab.  $\mathcal{Q}_2$ .

### 5.3 O Problema Bilinear Chaveado

Como uma extensão do trabalho feito em Palomino Bean [PCTC] e o apresentado na seção 5.2, nesta seção é abordado o problema de estabilidade regional e estimado o domínio de atração de uma classe de sistemas chaveados não lineares cujas matrizes são funções afins do estado.

Seja o sistema dado por

$$\dot{x}(t) = A_i(x(t))x(t) + b_i(x(t)), \quad x(t) \in X_i, \quad i \in \mathcal{J}_n, \quad t \geq 0, \quad (5.21)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  denota o estado contínuo assumindo valores nos conjuntos  $X_i \subset \mathbb{R}^{n_x}$ ;  $i \in \mathcal{J}_n$  denota o estado discreto;  $A_i(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $b_i(x) \in \mathbb{R}^{n_x}$ , para  $i = 1, \dots, n$ , são funções de  $x(t)$  dadas para  $t \geq 0$ . O sistema representado dessa forma é denominado sistema bilinear chaveado.

Para esse tipo de sistema, a hipótese **A3**, do Capítulo 4, será considerada como se segue:

**A3** As matrizes  $A_i(x)$  e os vetores  $b_i(x)$  são funções afins limitadas em  $x$  para todo  $i \in \mathcal{J}_n$ .

Assim, o problema desta seção é analisar a estabilidade local e estimar o domínio de atração do sistema (5.21) usando uma única função de Lyapunov de tipo  $v(x) = x' \mathcal{P}(x)x$ , com  $\mathcal{P}(x)$  como em (5.1), e usando o conceito de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  fornecido na

Definição 5.1.1. A matriz polinomial  $\mathcal{P}(x)$  será determinada resolvendo um problema de otimização usando LMIs.

Considerem-se o sistema (5.21), a definição da função vetorial de componentes lógicas  $\delta$  e o seu respectivo conjunto de valores admissíveis  $\Delta$ . Considerando a  $n$ -ésima componente de  $\delta$ ,  $\delta_n$ , como variável de referência, obtém-se o seguinte sistema não linear associado ao sistema (5.21):

$$\dot{x} = A_n(x)x + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i(x) - A_n(x))\delta_i x + b_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (b_i(x) - b_n(x))\delta_i, \quad x \in \mathcal{B}_x, \delta \in \Delta. \quad (5.22)$$

Agora, define-se o seguinte vetor auxiliar  $\pi \in \mathbb{R}^{n_\pi}$  com  $n_\pi = (n-1)n_x + n + 1$ .

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{n-1} \\ \pi_n \\ \pi_{n+1} \\ \vdots \\ \pi_{2n} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} \pi_i = \delta_i x, \quad \forall i \in \mathcal{J}_{n-1} \\ \pi_n = 1 \\ \pi_{n+i} = \delta_i, \quad \forall i \in \mathcal{J}_n \end{array}. \quad (5.23)$$

Considera-se o politopo  $\mathcal{B}_\delta = \mathbf{Co}\{\Delta\}$ . De forma similar ao visto na seção anterior, as relações entre as variáveis  $\pi$ ,  $x$  e  $\delta$  podem ser representadas de uma forma mais compacta com  $(x, \pi) \in \mathcal{D}$  como em (4.17), onde as matrizes  $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_x}$  e  $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_\pi}$  possuem as mesmas características detalhadas naquela seção (ou seja, incluem-se nessa matriz as relações fornecidas por (4.42) e (4.43)).

Com as notações acima, o sistema (5.22) pode ser colocado como se segue:

$$\dot{x} = A_n(x)x + \mathbf{A}(x)\pi, \quad (x, \pi) \in \mathcal{D}, \quad (5.24)$$

onde a matriz  $\mathbf{A}(x)$  é dada por

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} (A_1(x) - A_n(x)) & \cdots & (A_{n-1}(x) - A_n(x)) & b_n(x) & (b_1(x) - b_n(x)) & \cdots \\ \cdots & & (b_{n-1}(x) - b_n(x)) & 0_{n_x \times 1} \end{bmatrix}$$

## Domínio de atração

Considere-se a função de Lyapunov candidata  $v(x) = x' \mathcal{P}(x)x$  com  $\mathcal{P}(x)$  como em (5.1) com  $d = 1$ , isto é,  $\mathcal{P}(x)$  é quadrática em  $x$ . Se são satisfeitas as duas condições da definição de estabilidade  $\mathcal{Q}_2$ , então essa função é uma função de Lyapunov para o sistema associado (5.22) e, como consequência, garante-se estabilidade para o sistema (5.21). Podemos, então, estimar a região de estabilidade para o problema bilinear chaveado.

O polítopo  $\mathcal{B}_x$  é descrito como

$$\mathcal{B}_x = \left\{ x : a_l' x \leq 1, l = 1, \dots, n_e \right\}$$

e considera-se a estimativa da região de estabilidade como em (4.48):

$$\Upsilon = \{ x : v(x) = x' \mathcal{P}(x)x \leq 1 \} \subset \mathcal{B}_x.$$

Isto é<sup>4</sup>,

$$\begin{bmatrix} a_l' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Theta_0(x)x \end{bmatrix} \leq 1, \forall \begin{bmatrix} x \\ \Theta_0(x)x \end{bmatrix} : x' \mathcal{P}(x)x \leq 1,$$

o que, em termos de LMIs [Tro00a, BGFB94], pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} a_l' & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_l \\ 0 \end{bmatrix} & (P + LC + C' L') \end{bmatrix} \geq 0, l = 1, \dots, n_e.$$

## Notações Auxiliares

Em associação com os conjuntos  $X_i$  de (4.2), define-se a matriz  $\Phi$  como dada na relação (5.6). Nesse caso, as matrizes  $E_i$  são dadas por:

$$\begin{aligned} E_i &= \begin{bmatrix} 0_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} & \tilde{E}_i \end{bmatrix}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1, \\ E_n &= \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} & -\tilde{E}_n \end{bmatrix}, \\ E_i &= \begin{bmatrix} 0_{1 \times n_x} & 0_{1 \times n_1} & \tilde{E}_i \end{bmatrix}, \text{ para } i = n+1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

As matrizes constantes  $\tilde{E}_i$  e  $\tilde{E}_n$  são tais que  $\tilde{E}_i \pi = \pi_i$  ( $i \neq n$ ) e  $\tilde{E}_n \pi = \sum_{i=1}^n \pi_i$ .

---

<sup>4</sup>No conceito de estabilidade  $\mathcal{Q}_2$ , usa-se  $\Theta(x) = \Theta_0(x)$ .



Considere-se a função matricial  $z \in \mathbb{R}^{n_z} \mapsto C_z \in \mathbb{R}^{(n_z-1) \times n_z}$ ,  $C_z$  como em (4.21).

E a seguinte notação auxiliar:

$$D = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0 \\ -(\Theta_0(x) + \tilde{\Theta}_0(x)) & I_{n_1} \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} A_n(x) & 0 & \mathbf{A}(x) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -\Theta_0(x) & I_{n_1} \end{bmatrix};$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} C \\ C_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Omega = \begin{bmatrix} -D & F \\ 0 & [\Psi \ 0] \\ 0 & [\Omega_1 \ 0 \ \Omega_2] \end{bmatrix}.$$
(5.25)

As notações fornecidas acima permitem estabelecer o resultado principal desta seção: o teorema de estabilidade regional e estimativa do domínio de atração para sistemas bilineares chaveados.

**Teorema 5.3.1** (*Estabilidade regional  $\mathcal{Q}_2$  do sistema bilinear chaveado*)

Considerem-se o sistema (5.21), as hipóteses **A1-A5** e o sistema associado (5.22). Sejam  $\Theta_0(x)$  e  $\tilde{\Theta}_0(x)$  funções matriciais afins em  $x$  definidas em (5.2) e (5.4), respectivamente. Considerem-se a notação auxiliar (5.6), (5.25) e  $N$  a matriz dada por  $N = \begin{bmatrix} I_{n_x+n_1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_1) \times (n_x+n_1+n_\pi)}$ .

Se  $P$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $R_{ik}$  para  $i = 1, \dots, 2n$ ,  $k = 1, \dots, m_i$  resolvem o seguinte problema de otimização, onde as LMIs são construídas em todos os vértices do meta-politopo  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr} (P + L\Psi + \Psi' L') \\ \text{sujeito à:} \quad & \\ & P = P', \\ & \begin{bmatrix} 1 & [a'_l \ 0] \\ [a_l] & (P + L\Psi + \Psi' L') \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, \dots, n_e, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & PN \\ N'P & 0 \end{bmatrix} + M\Omega + \Omega' M' + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} < 0. \quad (5.27)$$

Então, o sistema (5.21) é local e assintoticamente estável, e  $v(x) = x' \mathcal{P}(x)x$ , com  $\mathcal{P}(x)$  como em (5.1), é uma função de Lyapunov para esse sistema. Também, a região  $\Upsilon$ , definida pelo conjunto  $\{x : v(x) = x' \mathcal{P}(x)x \leq 1\}$  em (4.48), é positivamente invariante, e, para qualquer  $x(0) \in \Upsilon$ , a trajetória  $x(t) \in \Upsilon \forall t \geq 0$  e se aproxima da origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

## Prova

Considerem-se o sistema (5.22) e o vetor  $\pi$  como em (5.23). Definem-se os seguintes vetores auxiliares:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} x \\ \Theta x \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \pi, \quad (5.28)$$

onde  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n_x+n_1}$ ,  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n_\pi}$ .

Sejam as matrizes  $D_1 = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+n_1)}$  e  $D_2 = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times (n_x+n_1)} & I_{n_x} & 0_{n_x \times (n_1+n_\pi)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (2(n_x+n_1)+n_\pi)}$  e note-se que  $D_1 \xi_1 = x$  e  $D_2 \xi = x$ .

Assume-se que as condições do Teorema 5.3.1 são satisfeitas. Aplicando o complemento de Schur em (5.26), tem-se a LMI

$$P + L\Psi + \Psi' L' > 0. \quad (5.29)$$

Desde que as desigualdades (5.29) e (5.27) são estritas, então existem escalares positivos suficientemente pequenos,  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , tal que é possível acrescentar os termos  $-\epsilon_1 D_1' D_1$  e  $\epsilon_2 D_2' D_2$  nas relações (5.29) e (5.27), respectivamente. Ou seja, as seguintes condições são satisfeitas para todos os vértices do meta-politopo  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ .

$$P + L\Psi + \Psi' L' - \epsilon_1 D_1' D_1 \geq 0, \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & PN \\ N'P & 0 \end{bmatrix} + M\Omega + \Omega' M' + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} + \epsilon_2 D_2' D_2 \leq 0 \quad (5.31)$$

Por convexidade, as desigualdades (5.30) e (5.31) também são satisfeitas para todo  $x \in \mathcal{B}_x$  e  $\delta \in \Delta$ .

Pré- e pós-multiplique-se (5.30) por  $\xi_1'$  e por sua transposta, respectivamente, e (5.31) por  $\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}'$  e por sua transposta, respectivamente. Note-se que, por construção, nessas relações, temos na primeira relação  $C_x x = 0$  e  $C \xi_1 = 0$ , então  $\Psi \xi_1 = 0$ .

Similarmente, na segunda relação, pela construção das matrizes  $D$  e  $F$ ,  $-D\dot{\xi}_1 + F\xi = 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{B}_x$ . Também,  $\begin{bmatrix} \Psi & 0 \end{bmatrix} \xi = 0$  e  $\begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \xi = 0$  (considerando que a notação  $(x, \pi) \in \mathcal{D}$  representa o conjunto de igualdades (5.23), (4.42) e (4.43)). Assim,  $\Omega \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} = 0$ .

Então, o seguinte é satisfeito:

$$\xi_1' P \xi_1 \geq \epsilon_1 x' x, \quad \forall \xi_1 : \Psi \xi_1 = 0 \text{ e } x \in \mathcal{B}_x \quad (5.32)$$

$$\xi_1' P \xi_1 + \xi_1' P \dot{\xi}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \leq -\epsilon_2 x' x, \quad (5.33)$$

$$\forall \xi : \Omega \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} = 0, \quad x \in \mathcal{B}_x \text{ and } \delta \in \Delta.$$

Também,  $\xi_1' = [x' \quad x' \Theta_0']$  e pela definição da função de Lyapunov candidata, a desigualdade (5.32) se torna em

$$v(x) = \xi_1' P \xi_1 = x' \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_0 \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_0 \end{bmatrix} x = x' \mathcal{P}(x) x \geq \epsilon_1 x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x. \quad (5.34)$$

Desde que  $x$  pertence ao politopo  $\mathcal{B}_x$ , os elementos da matriz  $\Psi$  de (5.25) são limitados. Então, existe um escalar positivo suficientemente grande,  $\epsilon_3$ , tal que  $\epsilon_3 I_{n_x} \geq (P + L\Psi + \Psi'L')$ . Isto é,  $\epsilon_3 \xi_1' \xi_1 = \epsilon_3 (x' x + x' \Theta_0' \Theta_0 x) \geq \xi_1' P \xi_1 = x' \mathcal{P}(x) x$ .

Também, como  $x$  pertence a  $\mathcal{B}_x$ , existe outro escalar positivo suficientemente grande,  $\epsilon_4$ , tal que  $\epsilon_4 I_{n_x} \geq \Theta_0' \Theta_0$ . Assim,  $x' \mathcal{P}(x) x \leq \epsilon_3 (1 + \epsilon_4) x' x$ , e, com a relação (5.34):

$$\epsilon_1 x' x \leq v(x) = x' \mathcal{P} x \leq \epsilon_3 (1 + \epsilon_4) x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x. \quad (5.35)$$

Considere a matriz de elementos nulos no último termo da desigualdade (5.33) com dimensões convenientes, então o termo  $\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}$  é igual a  $\xi' \Phi \xi$ .

De (5.6) e a identidade  $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$ , obtém-se

$$\xi' \Phi \xi = \sum_{i=1}^{2n} (E_i \xi)' \phi_i (E_i \xi),$$

$$E_i \xi = \begin{cases} \pi_i, & i \neq n \\ \delta_n x, & i = n \end{cases}.$$

Pode-se reescrever o último termo do lado esquerdo da relação (5.33) como se segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i' \phi_i \pi_i + (\delta_n x)' \phi_n (\delta_n x) + \sum_{i=1}^n \pi_{n+i}' \phi_{n+i} \pi_{n+i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^2 x' \phi_i x + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^2 \phi_{n+i} + \delta_n^2 x' \phi_n x + \delta_n^2 \phi_{2n} x \end{aligned}$$

Considerando as definições de  $X_i$ ,  $\delta \in \Delta$  e (5.6), tem-se que  $\phi_i \geq 0$  e  $x' \phi x > 0, \forall i$ . Assim, conclui-se o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \Delta.$$

Então, a desigualdade (5.33) implica:

$$\dot{\xi}_1' P \xi_1 + \xi_1' P \dot{\xi}_1 \leq -\epsilon_2 x' x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad \delta \in \Delta. \quad (5.36)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_0(x) \end{bmatrix} x \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0_{n_x} \\ \dot{\Theta}_0(x) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta_0(x) \end{bmatrix} \dot{x}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Então, ao substituir (5.37) e  $\xi_1$  em (5.36), obtém-se

$$\dot{v}(x) = \dot{x}' \mathcal{P}(x) x + x' \dot{\mathcal{P}}(x) x + x' \mathcal{P}(x) \dot{x}. \quad (5.38)$$

Da referência Khalil [Kha96] e das relações (5.35) e (5.38), conclui-se que a origem do sistema (5.22) é local e exponencialmente estável. Assim,  $v(x) = x' \mathcal{P}(x) x$  é uma função de Lyapunov para o sistema (5.21).

Por último, pré- e pós-multiplicando (5.26) por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix} \end{bmatrix}'$$

e por sua transposta, respectivamente, consegue-se (4.48). Da referência Boyd et al.

[BGFB94], (4.48) implica  $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$ . Assim,  $\Upsilon$  é um conjunto invariante, e, para todo  $x(0) \in \Upsilon$ , a trajetória  $x(t) \in \Upsilon, \forall t \geq 0$  e se aproxima da origem do sistema quando  $t \rightarrow \infty$ .

□

A seguir, apresenta-se um exemplo numérico que ilustra os resultados dessa metodologia, usando-se estabilidade  $\mathcal{Q}_2$  e obtendo-se o domínio de atração para o sistema reator químico com saturação [HT88].

**Exemplo 5.3.1** *Considere-se o sistema bilinear com saturação:*

$$\dot{x} = A(x)x + b(x) \text{sat}(u), \quad (5.39)$$

$$\text{onde } A(x) = A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{12} \\ -\frac{50}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + \frac{x_1}{8} \end{bmatrix}, \quad u = K'x \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

O ganho aplicado é dado por  $K = [0.3133 \quad -3.5561]'$ , e  $\text{sat}(\cdot)$  é a função de saturação unitária.

Esse sistema pode ser equivalentemente apresentado pelo seguinte sistema bilinear chaveado:

$$\dot{x} = A_i(x)x + b_i(x), \quad x \in X_i, \quad i \in \mathcal{J}_3,$$

onde as matrizes  $A_i$  e os vetores  $b_i$  são dados por

$$A_1(x) = A_3(x) = A, \quad A_2(x) = A + b(x)K',$$

$$b_1(x) = -b(x), \quad b_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e } b_3(x) = b(x).$$

Os conjuntos  $X_1, X_2$  e  $X_3$  são as respectivas partições do espaço de estado definidas por:

$$\psi_1(x) = -(1 + K'x), \quad \psi_{21}(x) = 1 + K'x, \quad \psi_{22}(x) = 1 - K'x, \quad \text{e } \psi_3(x) = -1 + K'x.$$

Para  $n_1 = 4$ , considera-se  $\Theta(x) = \Theta_0(x)$ . Assim  $\Theta_0(x), \tilde{\Theta}_0(x)$  e  $w = \Theta_0(x)(x)$  são dadas por

$$\Theta_0(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ x_2 I_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Theta}_0(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}.$$

O politopo  $\mathcal{B}_x$  está definido por

$$\mathcal{B}_x = \mathbf{Co}\left(\left\{\begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.15 \\ -0.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.9 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

o conjunto de vértices  $\Delta$  e o politopo  $\mathcal{B}_\delta$

$$\Delta = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \quad \mathcal{B}_\delta = \mathbf{Co}(\Delta).$$

Aplicando o Teorema 5.3.1, obtém-se a matriz  $P$  para a função de Lyapunov:

$$P = \begin{bmatrix} 45.914841 & -1.4425266 & 3.6159794 & -4.3357262 & -0.6931610 & 0.0402386 \\ -1.4425266 & 3.953933 & -0.0012222 & -1.0068573 & -2.1225902 & 0.8815627 \\ 3.6159794 & -0.0012222 & 0.0009914 & 1.0361101 & -0.9974491 & -0.0610815 \\ -4.3357262 & -1.0068573 & 1.0361101 & 1. & -0.1350293 & -4.9460089 \\ -0.6931610 & -2.1225902 & -0.9974491 & -0.1350293 & 0.0010322 & -0.3264573 \\ 0.0402386 & 0.8815627 & -0.0610815 & -4.9460089 & -0.3264573 & -0.0949453 \end{bmatrix}.$$

Então, como definido em (4.48), para  $x(0) \in \Upsilon = \Upsilon_{\mathcal{Q}_2}$ , a trajetória do sistema  $x(t) \in \Upsilon_{\mathcal{Q}_2} \forall t \geq 0$  e se aproxima da origem quando  $t \rightarrow \infty$ .

A Figura 5.5 ilustra o domínio de atração estimado,  $\Upsilon_{\mathcal{Q}_2}$ , assim como o plano de fase do sistema (5.39).

A eficiência e o potencial da nossa metodologia são exibidos ao comparar a região obtida,  $\Upsilon_{\mathcal{Q}_2}$ , com a região exata, dada pelo seu ciclo limite<sup>5</sup>.

**Nota 5.3.1** Ao aplicar o conceito de estabilidade  $\mathcal{Q}_A$  para o exemplo<sup>6</sup> anterior, usa-se

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ x_2 I_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \Theta_1 = \begin{bmatrix} x_1 I_2 & x_2 I_2 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} \Theta_0 \\ \Theta_1 \Theta_0 \end{bmatrix},$$

<sup>5</sup>Na Figura 5.5 a fronteira da região exata é o ciclo limite (onde as trajetórias convergem) dado pela curva em negrito.

<sup>6</sup>As matrizes fornecidas são as mesmas que as utilizadas no Exemplo 5.2.1, da seção anterior.

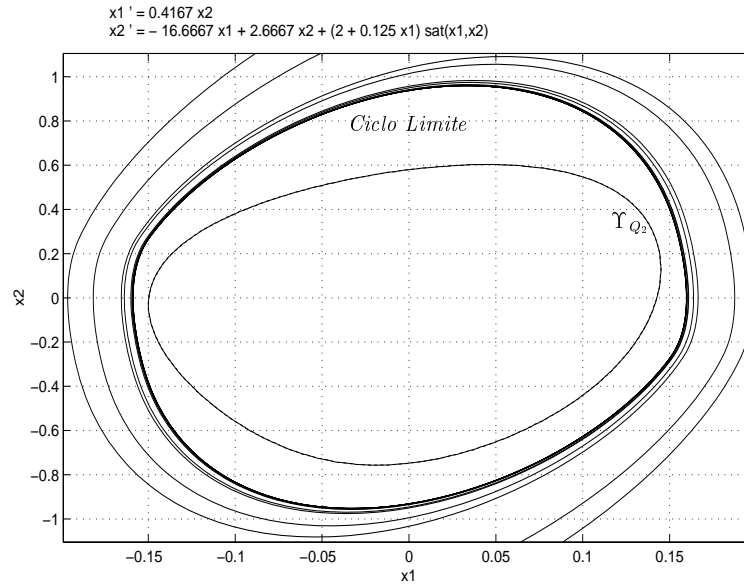


Figura 5.5: Domínio de atração exato e estimado para o sistema reator químico.

com  $\mathcal{P}_x$  dado por (5.1). A região de estabilidade obtida,  $\Upsilon_{Q_4}$ , é dada na Figura 5.6 junto com a estimativa anterior  $\Upsilon_{Q_2}$ .

## Abordagens biquadrática e $\mathcal{Q}_r$ : número de LMIs, ordem do sistema e número de regiões de chaveamento

A Tabela 5.1 mostra o número de LMIs e as dimensões das variáveis de decisão a serem determinadas em cada teorema das abordagens afim biquadrática,  $\mathcal{Q}_r$  e bilinear  $\mathcal{Q}_2$ . Os sistemas considerados possuem  $n_x = 2, n = 3, n_e = 6$  com  $n_1 = 4$  ( $\Theta = \Theta_0$  como no Exemplo 5.3.1) em todos os casos, exceto no caso onde  $r = 4$ , no qual  $n_1 = 6$  (veja Nota 5.3.1).

Observe no caso do Teorema 5.2.1 com  $r = 4$  que um maior número de LMIs é obtido, pois o politopo  $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \times \mathcal{B}_w$  possui um maior número de vértices. Além disso, a função de Lyapunov possui um maior grau, implicando uma matriz  $P$  de maior dimensão<sup>7</sup>.

## 5.4 Sumário

Neste capítulo foram abordados o problema de estabilidade regional e a determinação do domínio de atração de sistemas afins e sistemas bilineares chaveados usando

<sup>7</sup>O significado dado quando se fala em dimensão ou ordem de uma matriz é o mesmo.

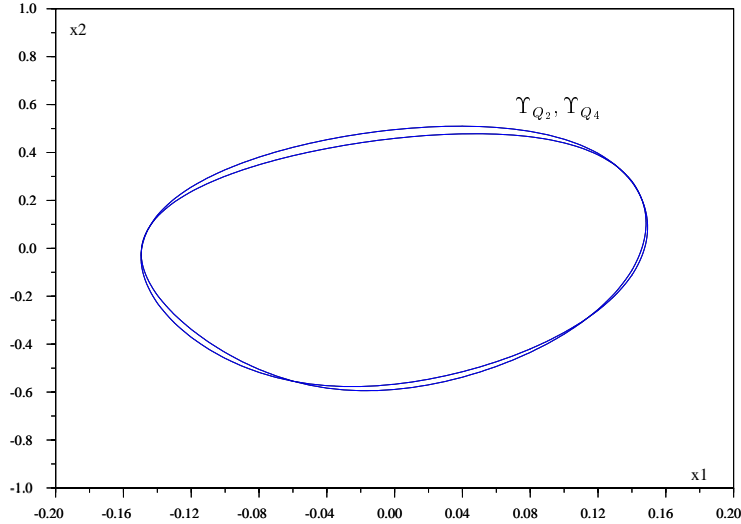


Figura 5.6: Estabilidade  $\mathcal{Q}_2$  e  $\mathcal{Q}_4$  para o sistema reator químico.

o conceito de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ . A abordagem aqui apresentada fornece uma metodologia eficiente para a análise dessa classe de sistemas, obtendo-se resultados menos conservadores.

O conceito aqui usado é uma extensão para sistemas chaveados da definição de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  proposta por Trofino [Tro00b] no contexto de sistemas não lineares incertos.

Para fazer a análise regional e estimar o domínio de atração desses sistemas, é usada uma função de Lyapunov de tipo polinomial,  $v(x) = x' \mathcal{P}(x)x$ , comum a todos os subsistemas do sistema chaveado e independente das partições do estado, onde a matriz  $\mathcal{P}(x)$  é obtida resolvendo um problema de otimização usando LMIs.

|                 | Teoremas       |                   |                   |                |
|-----------------|----------------|-------------------|-------------------|----------------|
|                 | 4.3.1          | 5.2.1 ( $r = 2$ ) | 5.2.1 ( $r = 4$ ) | 5.3.1          |
| número de LMIs  | 44             | 44                | 74                | 44             |
| ordem de $P$    | $6 \times 6$   | $6 \times 6$      | $8 \times 8$      | $6 \times 6$   |
| ordem de $L$    | $6 \times 5$   | $6 \times 5$      | $8 \times 7$      | $6 \times 5$   |
| ordem de $M$    | $14 \times 44$ | $20 \times 50$    | $24 \times 56$    | $20 \times 50$ |
| ordem de $\Phi$ | $14 \times 14$ | $20 \times 20$    | $24 \times 24$    | $20 \times 20$ |

Tabela 5.1: Número de LMIs e ordens das matrizes.



O fato de se trabalhar com uma função de Lyapunov comum e polinomial diferencia a metodologia aqui apresentada de outras metodologias [Joh99, Pet99] que são convenientes para a análise global desses sistemas e utilizam funções de Lyapunov quadráticas diferentes para cada subsistema, porém muito restritivas para a determinação de domínios de atração.

No desenvolvimento deste capítulo, foram abordadas duas classes de sistemas chaveados: sistemas afins e sistemas bilineares.

No exemplo numérico apresentado na abordagem  $\mathcal{Q}_r$  para um sistema afim, e no caso  $r = 4$ , obtiveram-se resultados menos conservadores quando comparados com os da abordagem biquadrática, desenvolvida no Capítulo 4. Ainda mais, obteve-se um resultado menos conservador no exemplo do sistema afim que compara a abordagem  $\mathcal{Q}_2$  com a abordagem biquadrática e os resultados de outras metodologias.

A abordagem aqui proposta também foi útil e eficiente ao ser aplicada em sistemas bilineares chaveados, uma classe de sistemas híbridos não lineares, fornecendo bons resultados e mostrando que essa metodologia se torna muito eficiente para estimar regiões de estabilidade limitadas, como foi mostrado no Exemplo 5.3.1, extraído de Palomino Bean [PCTC02].

Os resultados da abordagem  $\mathcal{Q}_r$  tendem a ser menos conservadores quanto maiores forem o valor de  $r$  e o número de variáveis de decisão.

Pelos resultados obtidos, a formulação  $\mathcal{Q}_r$  apresenta ser uma abordagem menos conservadora, com a limitante de se considerar, nos programas desenvolvidos, matrizes de maior ordem e muito esparsas (veja esses valores na Tabela 5.1), acarretando um maior esforço computacional em decorrência do tempo de execução nos programas. As mesmas limitantes serão encontradas ao se trabalhar com valores de  $r$  maiores que 4. Essas dificuldades poderão ser reduzidas ao se considerar a estrutura esparsa das matrizes na elaboração dos programas. Isso constitui uma perspectiva para continuidade desta pesquisa.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

### 6.1 Visão geral do trabalho

O presente trabalho teve como principal objetivo obter formulações convexas usando inequações matriciais lineares para a análise de estabilidade e o cálculo dos domínios de atração de sistemas chaveados, uma classe de sistemas híbridos.

Fazendo-se uso de duas noções, a de estabilidade biquadrática e a de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ , apresentaram-se resultados promissores através de teoremas que forneceram condições suficientes para a análise de estabilidade desses sistemas. Essas condições foram expressas em termos de LMIs, que, quando satisfeitas, garantem a estabilidade assintótica da origem. Essas duas noções de estabilidade foram aplicadas para sistemas de tipo linear, afim e bilinear, obtendo-se uma estimativa do domínio de atração, ou região de estabilidade, em cada caso.

As abordagens apresentadas no conteúdo desta tese são diferentes das tradicionais e constituem-se métodos alternativos àqueles que foram mostrados na literatura e aos métodos tradicionais como o critério do círculo e o método de Popov. Observe que as regiões de estabilidade estimadas, em alguns dos casos, são regiões muito próximas das exatas.

Com o intuito de testar a eficiência de cada uma das metodologias, as escolhas das regiões politópicas  $\mathcal{B}_x$ , nos exemplos ilustrados, foram feitas considerando o formato da região de estabilidade exata (região conhecida) e incluída nela. Na prática, essas regiões são desconhecidas e nestes casos será feito um procedimento iterativo. O procedimento a ser usado será considerar uma seqüência de regiões politópicas  $\mathcal{B}_x^k$ , onde a forma e o tamanho do politopo na próxima iteração é modificado de acordo com a proximidade da estimativa obtida em relação às faces do politopo na iteração  $k$ . Este procedimento

é repetido até que não seja mais possível aumentar a região estimada.

Todos os resultados foram obtidos usando-se SCILAB [Gom99]. Esse software utiliza processamento seqüencial o que o torna sensível na solução de problemas com mau condicionamento numérico. O excessivo tempo de processamento encontrado em muitos dos casos e o fato de se tratar de matrizes muito esparsas na sua forma densa, como foram mostradas nas Tabelas 4.1 e 5.1, nos motiva a pensar num outro tratamento numérico que, além de fornecer um resultado menos demorado, possa levar a resultados ainda menos conservadores, diminuindo assim as limitações e dificuldades numéricas encontradas. Essa nova proposta, junto à consideração de estimativas ilimitadas nas regiões de atração para sistemas com saturação, fará parte das possibilidades de continuidade deste trabalho.

## 6.2 Contribuições da tese

Este trabalho visou investigar e propor técnicas com formulações LMI com o objetivo de analisar a estabilidade e determinar os respectivos domínios de atração de sistemas chaveados. Nesse sentido, foram usados os conceitos de estabilidade biquadrática e estabilidade  $\mathcal{Q}_r$  para diversos tipos de sistemas.

As contribuições deste trabalho foram as seguintes:

- 1) análise usando estabilidade biquadrática e estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ : enfocou-se o problema de análise de sistemas chaveados com abordagens menos conservadoras e diferentes das tradicionais. Nesses casos, o problema de análise visou usar funções de Lyapunov da forma  $x'P(x)x$ , com  $P(x)$  uma matriz dependente do estado e de carácter polinomial. Observe que a abordagem  $\mathcal{Q}_2$  pode ser considerada como um enfoque alternativo para análise de sistemas chaveados em que a abordagem biquadrática não seja factível;
- 2) cálculo dos domínios de atração: foram desenvolvidas estimativas limitadas dessas regiões fornecendo informação a respeito do comportamento do sistema perto da região de operação. Determinaram-se essas regiões usando os conceitos de estabilidade biquadrática e de estabilidade  $\mathcal{Q}_r$ . Neste ponto, fez-se a comparação da aplicação dos métodos nos exemplos abordados, medindo as vantagens e desvantagens em cada caso [PCTC01, PGTC01];
- 3) aplicação a sistemas sujeitos à saturação: estes sistemas determinam de forma natural três regiões de operação e podem ser vistos como sistemas chaveados.

Nestes tipos de sistemas foram aplicadas as metodologias propostas. Os resultados numéricos exibidos foram exemplos vindos de aplicações tais como o pêndulo invertido linearizado [PCTC01] e uma simplificação do problema do reator químico [PCTC02], mostrando em ambos os casos estimativas limitadas<sup>1</sup> das regiões de estabilidade. Este último trabalho é o nosso primeiro aporte na linha de sistemas híbridos não lineares;

- 4) aplicações em Biomatemática: o estudo do comportamento das populações de determinados sistemas biológicos pode ser modelado com chaveamentos. Isso acontece, por exemplo, em sistemas do tipo presa-predador. Nesse sentido, obtiveram-se resultados iniciais [VPFB01] que foram apresentados em congresso; e
- 5) o problema de controle de sistemas chaveados: neste sentido, foram obtidos resultados usando abordagem Pwq e ferramentas de programação não linear. Nesta nova abordagem, usando funções de Lyapunov por partes, foram determinados controladores para sistemas chaveados. A elaboração de um artigo em que se ilustram esses resultados se encontra em andamento.

Essas contribuições foram publicadas nos seguintes artigos:

- 1) Análise de estabilidade aplicada a uma classe de sistemas híbridos [PTC00].
- 2) Computation of stability regions using LMIs for dynamical systems with saturation [PCTC01].
- 3) Comparative methods for computation of stability regions of a class of nonlinear systems [PGTC01].
- 4) Switching behaviour and stability in predator-preys systems [VPFB01].
- 5) Stability analysis and guaranteed domain of attraction for a class of hybrid systems: an LMI approach [PCTC].
- 6) Regional stability of a class of nonlinear hybrid systems: an LMI approach [PCTC02].

---

<sup>1</sup>No sentido de serem regiões fechadas.

### 6.3 Trabalhos futuros

O desenvolvimento deste trabalho visa á continuidade nesta linha de pesquisa com o objetivo de abordar os seguintes tópicos:

- 1) extensões para o caso discreto;
- 2) extensões para sistemas híbridos não lineares: dar-se-á continuidade na aplicação das abordagens estudadas para sistemas chaveados com não-linearidades, por exemplo quando as não-linearidades são de caráter trigonométrico, obtendo-se, assim, uma abordagem algébrico-diferencial;
- 3) outras extensões: todas as estimativas dos domínios de atração obtidas foram limitadas. É uma perspectiva futura estender, para sistemas chaveados, a formulação dada em Trofino [Tro01] para obter estimativas ilimitadas de domínios de atração. Também, estuda-se a possibilidade de estender a abordagem desta tese para problemas em que a dinâmica de chaveamento dependa das variáveis contínuas e lógicas do sistema. Nesse sentido, poder-se-ão estudar, por exemplo, sistemas com histerese;
- 4) o problema de síntese: estudar este problema com o objetivo de aplicar a abordagem estudada neste trabalho. Nessa direção, puderam ser abordadas as extensões acima mencionadas;
- 5) outras aplicações em Biomatemática: num primeiro estágio e com os resultados iniciais obtidos se dará continuidade a esta pesquisa estudando fenômenos biológicos e/ou ecológicos cujas modelagens determinísticas ou estocásticas sejam descritas com sistemas chaveados;
- 6) sistemas não lineares, caos e bifurcações: existem linhas de pesquisa que tratam dos sistemas chaveados com a teoria de caos e bifurcações aplicando-os a problemas de sistemas elétricos de potência, sistemas de estrutura variável, assim como a problemas em Biomatemática. Nesse sentido, a continuidade desta pesquisa visa estudar essas áreas em conjunto com professores do departamento de Automação e Sistemas desta universidade; e
- 7) considerar a esparsidade das matrizes: matrizes na sua forma esparsa são tratadas mais eficientemente ao invés da sua forma densa; então, propõe-se aproveitar os recursos que o SCILAB fornece para fazer este tipo de tratamento, com o objetivo de se obterem resultados menos conservadores, assim como reduzir o tempo

de execução nos programas. Não se conseguindo melhorar os resultados, uma alternativa será fazer uso de outras ferramentas que lidam com LMIs [dOdFG97] e aceitam o armazenamento de matrizes dessa forma [AHN<sup>+</sup>97].

Ao se trabalhar com sistemas híbridos, procura-se contribuir para o avanço científico da área de sistemas não lineares através da formulação e solução de problemas de análise, para depois abordar o problema de desempenho, assim como as propriedades de robustez envolvidas.

A principal preocupação desta tese foi mostrar como as abordagens apresentadas podem contribuir para obter soluções alternativas ou menos conservadoras diante daquelas que estão sendo convencionalmente tratadas. Para isso, novas funções de Lyapunov foram propostas para análise de estabilidade de sistemas chaveados e cálculo do domínio de atração.

Espera-se que este trabalho tenha contribuído para o melhor entendimento dos sistemas híbridos ao mostrar as possibilidades de estudo desta classe de sistemas dentro de uma filosofia de otimização convexa.

# Apêndice A

## Apresentação da Formulação LMI e Conceitos Matemáticos

### A.1 Apresentação da Formulação LMI

Dentro da evolução da teoria de controle, a utilização das inequações matriciais lineares (LMIs) tem se apresentado como uma ferramenta eficiente na busca de soluções de problemas de análise e síntese que se apresentam nesta área.

O surgimento de métodos computacionais eficientes para a solução de LMIs, fez com que estas se tornassem amplamente utilizadas na teoria de controle. Nesse sentido, pacotes computacionais como o MATLAB ou SCILAB contêm as ferramentas específicas para solução de LMIs. A ferramenta do SCILAB utiliza o método primal-dual [VB94], e a do MATLAB utiliza o método projetivo [NG94].

A formulação LMI de um problema de controle é bastante flexível e pode, em muitos casos, ser modificada com a incorporação de novas restrições impostas ao problema.

### Inequações Matriciais Lineares (LMI)

A representação para uma LMI é dada pela seguinte forma:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i > 0, \quad (\text{A.1})$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é a variável a ser sintonizada e  $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes constantes. A LMI (A.1) é uma restrição convexa sobre  $x$ , isto é, o conjunto  $\{x : F(x) > 0\}$  é convexo. A formulação LMI permite que vários problemas possam ser resolvidos

simultaneamente. Nesse caso, se possuímos  $k$  restrições na forma LMI, a representação

$$F(x) = \text{diag}\{F_0(x), F_1(x), \dots, F_k(x)\} > 0 \quad (\text{A.2})$$

é também um problema na forma de uma LMI.

As propriedades de linearidade e convexidade, que são atribuídas a uma formulação LMI estão relacionadas a noções de funções e conjuntos convexos. O fato de o conjunto solução de uma formulação LMI ser convexo é fundamental no desenvolvimento de algoritmos eficientes para solução de uma LMI. Essas propriedades são detalhadas a seguir.

## Linearidade

A representação (A.1) dada para uma LMI não é linear em  $x$ , pois  $F(0) = F_0 \neq 0$ . Na realidade a equação (A.1) é afim em  $x$ , isto é, uma relação que mapeia retas paralelas em retas paralelas e pontos finitos em pontos finitos. Mas pode-se observar que (A.1) pode ser equivalentemente dada por

$$\mathcal{F}(\tilde{x}) \triangleq F_0 x_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i > 0, x_0 > 0,$$

onde  $\mathcal{F}$  é linear em  $\tilde{x} = [x_0 \ x']'$ .

## Convexidade

Diz-se que um conjunto é convexo quando o segmento de reta que une quaisquer dois pontos do conjunto também pertence ao conjunto. Também todo conjunto afim é convexo.

O conjunto solução de uma LMI é convexo (quando não é vazio), isto é, para qualquer  $y, z \in \{x : F(x) > 0\}$ , a combinação  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z \in \{x : F(x) > 0\}$ , com  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Isso é simples de provar, pois, substituindo em (A.1), temos

$$\begin{aligned} F_0 + \sum_{i=1}^m F_i x_i &= F_0 + \sum_{i=1}^m F_i (\alpha y_i + (1 - \alpha)z_i) = \\ &= F_0 + \sum_{i=1}^m F_i z_i + \alpha \sum_{i=1}^m F_i (y_i - z_i) = \\ &= \alpha (F_0 + \sum_{i=1}^m F_i y_i) + (1 - \alpha) (F_0 + \sum_{i=1}^m F_i z_i) > 0. \end{aligned}$$

No que se segue são enunciados alguns resultados importantes que permitem a obtenção de formulações LMI. Grande parte desses resultados pode ser encontrada em



Boyde et al. [BGFB94] e de forma resumida em Barbosa [Bar99] e Coutinho [Cou00].

## Complemento de Schur

Um conjunto de inequações não lineares pode ser colocado na forma LMI através do Complemento de Schur. Pelo interesse contido no texto, será enunciado somente o caso de desigualdades estritas. O caso não estrito se encontra em Boyde et al. [BGFB94].

### Lema A.1.1 (*Complemento de Schur*)

*Sejam  $Q, R, S$  matrizes de dimensões apropriadas tais que  $Q, R$  são simétricas.*

*As seguintes condições são equivalentes:*

$$a) \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0$$

$$b) R > 0 \text{ e } Q - SR^{-1}S' > 0.$$

## Lema de Finsler

O Lema de Finsler [Fin37, BGFB94] é bastante utilizado na eliminação de variáveis em inequações matriciais. A seguir enunciam-se particularidades deste lema.

### Lema A.1.2 (*LC-Scaling*)

*Dados uma matriz simétrica  $P$  e uma matriz  $C$  de dimensões apropriadas. Seja  $X$  uma matriz tal que  $CX = 0$ .*

*Então, tem-se que*

$$X'PX > 0 \tag{A.3}$$

*se e somente se existe  $L$  tal que*

$$P + LC + C'L' > 0. \tag{A.4}$$

Se as matrizes  $P$  e  $C$  são incertas, então a condição (A.4) é apenas suficiente.

No conteúdo deste trabalho foi usado, na demonstração de vários teoremas, o lema a seguir.

**Lema A.1.3** (*LC-Scaling não linear*)

Seja  $H(z)$  uma matriz cujos termos são funções afins de  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  e  $\mathcal{B}_z$  um dado politopo. Considerando a função escalar  $z'H(z)z$  e a seguinte função matricial  $C_z : \mathbb{R}^{n_z} \mapsto \mathbb{R}^{(n_z-1) \times n_z}$ ,

$$C_z = \begin{bmatrix} z_2 & -z_1 & \cdots & 0 \\ 0 & z_3 & -z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_{n_z} & -z_{n_z-1} \end{bmatrix},$$

onde  $z = [z_1 \ \cdots \ z_n]'$ .

Então, a condição

$$z'H(z)z > 0 \quad \forall z \in \mathcal{B}_z, \ z \neq 0$$

está satisfeita se existe uma matriz  $L$  tal que

$$H(z) + LC_z + C_z'L' > 0, \quad \forall z \in \mathcal{B}_z.$$

Esse lema é um importante resultado na área de sistemas não lineares, pois diminui a conservatividade de se testar a condição  $x'\mathcal{P}(x)x > 0$  para usar apenas  $\mathcal{P}(x) > 0$ . Mais detalhes, assim como a prova deste lema, podem ser encontrados em Trofino [TdS01].

**S-Procedure**

O S-procedure é empregado para se obterem formulações LMI para problemas do tipo

$$v_1(x) > 0 \quad \forall x \quad : \quad v_2(x) > 0$$

com  $v_1, v_2$  duas funções quadráticas em  $x$ .

A seguir apresentamos alguns resultados importantes. Mais detalhes são encontrados em Boyde [BGFB94] e nas referências nele apresentadas.

**S-procedure para inequações não estritas**

Sejam  $F_0, \dots, F_p$  funções quadráticas da variável  $\xi \in \mathbb{R}^n$ :

$$F_i(\xi) \triangleq \xi'T_i\xi + 2u_i'\xi + v_i, \quad i = 0, \dots, p, \quad (\text{A.5})$$

onde  $T_i = T_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^n$  e escalares  $v_i \in \mathbb{R}$ .

Considere as seguintes restrições sobre  $F_0$ :

$$F_0(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \quad : \quad F_i(\xi) \geq 0 \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.6})$$

Essa restrição será satisfeita se existirem escalares  $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$  tais que, para todo  $\xi$ ,

$$F_0(\xi) - \sum_{i=1}^p \tau_i F_i(\xi) \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

Note que (A.7) é uma condição suficiente para (A.6), que pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0' & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i' & v_i \end{bmatrix} \geq 0. \quad (\text{A.8})$$

No caso particular de  $p = 1$ , a condição de necessidade é obtida, isto é, (A.6) também implica (A.7).

### S-procedure para inequações estritas

Sejam  $T_0, \dots, T_p$  matrizes simétricas de ordem  $n \times n$ . Para  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , consideremos as seguintes condições sobre  $T_0$ :

$$\xi' T_0 \xi > 0 \quad \forall \xi \neq 0 \quad : \quad \xi' T_i \xi > 0 \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.9})$$

$\xi' T_0 \xi > 0$  será satisfeita se existirem escalares  $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$  tal que

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0. \quad (\text{A.10})$$

Para o caso de  $p = 1$ , a condição de necessidade é obtida e (A.9) garante (A.10). Note que (A.10), (A.8) e (A.7) são LMIs nas variáveis  $\tau_1, \dots, \tau_p$ .

### Exemplo de aplicação do S-procedure

Consideremos o problema de encontrar  $P > 0$  tal que a condição

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA & PB \\ B'P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.11})$$

seja satisfeita para todo  $\xi$  e  $\pi$  satisfazendo  $\pi' \pi \leq \xi' C' C \xi$ .

Aplicando a segunda versão do S-procedure, (A.11) é equivalente à existência de  $\tau \geq 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + \tau C'C & PB \\ B'P & \tau I \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{A.12})$$

Assim, o problema de encontrar  $P > 0$  tal que (A.11) seja garantida pode ser expresso como uma LMI buscando-se  $P$  e o escalar  $\tau$  em (A.12).

## A.2 Conceitos matemáticos

### Politopo

Seja  $\mathbb{R}^n$  o espaço euclidiano e  $V$  um conjunto dado por um número finito de pontos neste espaço.

Um politopo é genericamente definido como sendo todas as combinações convexas dos pontos de  $V$ . Os pontos extremos da região politópica serão chamados de vértices [BSS93].

### Exemplo

Seja  $V \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $V = \{v_i, i = 1, \dots, n\}$ . O politopo  $\mathcal{P}$  de vértices  $v_i$ , está definido pelos elementos  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ,  $\alpha_i \geq 0$ . Este será denotado por

$$\mathcal{P} = \mathbf{Co}(v_i)_{i=1, \dots, n} \triangleq \left\{ v : v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}. \quad (\text{A.13})$$

No caso de  $n = 3$ , um politopo coincide com um cubo quando gerado pelos oito vértices deste. A figura A.1 exhibe esta região politópica.

É importante ressaltar que a definição de politopo corresponde a um caso particular do que é chamado de “*convex hull*” de um conjunto  $V$  ou  $\mathbf{Co}(V)$ . Nesse caso,  $V$  é um conjunto qualquer, e a região convexa  $\mathbf{Co}(V)$  é a combinação convexa de todos os pontos de  $V$ , porém não é necessariamente uma região poliédrica.

### Função de classe $\mathcal{K}$

Uma função de classe  $\mathcal{K}$  é uma função real de variável real  $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  que satisfaz as seguintes condições:

- $\alpha$  é contínua;

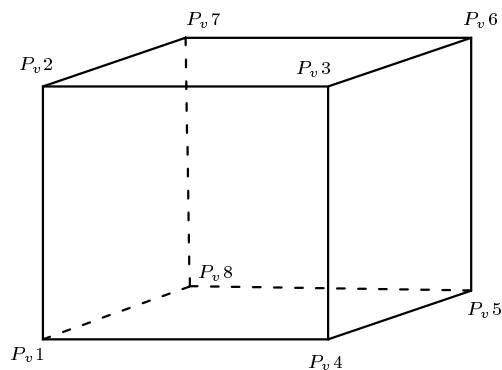


Figura A.1: Politopo de vértices  $P_{v_i}, i = 1, \dots, 8$ .

- $\alpha$  se anula na origem:  $\alpha(0) = 0$ ;
- é uma função positiva:  $\alpha(s) > 0$  se  $s > 0$ ;
- é uma função injetiva:  $\alpha(s_1) \leq \alpha(s_2)$  se  $s_1 < s_2$ .

## Sistemas Dinâmicos

Seja  $\mathcal{S}$  um espaço. Esse espaço, por exemplo, pode ser o espaço de estados de um sistema físico. Em termos matemáticos,  $\mathcal{S}$  pode ser um espaço euclidiano ou um subconjunto aberto dele.

Um **sistema dinâmico** é uma forma de descrever a passagem, no tempo, de todos os pontos no espaço  $\mathcal{S}$ .

Se consideramos  $t \in \mathbb{R}_+$  como a variável tempo e  $x$  um ponto de  $\mathcal{S}$ , o sistema dinâmico pode ser descrito pelo mapeamento  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{S}$  que envia  $t$  em  $x_t$ . A trajetória assim descrita é uma curva em  $\mathcal{S}$  que representa a história de  $x$  ao longo do tempo  $t$ .

Seja  $t_0$  o instante em que se inicia o movimento dessa curva e  $x_0$  o estado inicial respectivo. É comum representar a **trajetória** que se inicia em  $x_0$  por

$$\phi(x_0, t) = x_t.$$

## EDOs

Num sentido geral, este trabalho trata com soluções da **equação diferencial ordinária (EDO)** dada por:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (\text{A.14})$$

onde  $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ . A função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o **campo vetorial** sobre  $\mathbb{R}^n$ . A trajetória está definida por  $\dot{\phi}(x_0, t) = x(t)$  onde  $x(\cdot)$  é a solução da equação (A.14) com condição inicial  $x(0) = x_0$ .

Uma condição para a existência e unicidade da solução de (A.14) é que o campo vetorial seja Lipchitz contínuo [HS74].

### Função Lipchitziana

Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é Lipchitz contínua se existe  $L > 0$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Um sistema de EDOs é dito **autônomo** ou **invariante no tempo** se o seu campo vetorial não depende explicitamente do tempo. Diremos que as EDOs são contínuas (ou Lipchitz) se os campos vetoriais forem contínuos (ou Lipchitz).

Uma EDO com entradas e saídas é dita ser **uma planta**. Esta é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde  $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$ ,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . As funções  $u(\cdot)$  e  $y(\cdot)$  são as **entradas** e **saídas**, respectivamente.

Diremos que  $f$  é um **campo vetorial controlado** sempre que o sistema possuir entradas.

## Inclusão Diferencial

Uma inclusão diferencial é descrita por

$$\dot{x}(t) \in F(x(t), t), \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.16})$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Toda função  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfaz a equação (A.16) é dita uma solução ou trajetória da inclusão diferencial.

## Exemplo

Dada a inclusão diferencial linear

$$\dot{x}(t) \in \Omega x, \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.17})$$

com  $\Omega$  um subconjunto de  $R^{n \times n}$ . Se  $\Omega = \{A : A = A(t), t \in R_+\}$ , então a inclusão diferencial (A.17) pode ser interpretada como descrevendo uma família de sistemas lineares variantes no tempo. Assim, se  $x(t)$  é uma trajetória desta família, esta satisfaz

$$\dot{x}(t) = A(t)x, \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.18})$$

onde  $A : R_+ \rightarrow \Omega$ . Reciprocamente, para qualquer  $A : R_+ \rightarrow \Omega$ , a solução de (A.18) é uma trajetória da inclusão diferencial (A.17). Essa inclusão diferencial é dita ser de caráter linear.

Na teoria de controle, a inclusão diferencial (A.17) pode ser descrita como um sistema linear incerto variante no tempo, onde  $\Omega$  descreve as incertezas da matriz  $A(t)$ . Detalhes sobre isso se encontram em Boyde et al. [BGFB94].

# Referências Bibliográficas

- [ÅF96] K. Åström e K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. Em *IFAC World Congress*, San Francisco, 1996.
- [AHN<sup>+</sup>97] F. Alizadeh, J. P. A. Haeberly, M. V. Nayakkankuppam, M. L. Overton, e S. Schmieta. SDPpack User Guide (Version 0.9 Beta). Technical Report 737. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, June 1997.
- [AKNS95] Panos Antsaklis, Wolf Kohn, Anil Nerode, e Shankar Sastry, editors. *Hybrid Systems II*. LNCS, Vol. 999, Springer Verlag, New York, 1995.
- [AL99] Andrei Agrachev e Daniel Liberzon. Lie-algebra conditions for exponential stability of switching systems. Em *Proc. of the 38th Conference on Decision and Control*, Arizona, 1999.
- [ASJ02] C. Altafini, A. Speranzon, e K. H. Johansson. *Hybrid Control of a Truck and Trailer Vehicle*. Em [TG02], pages 21-34. Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [ASL93] P. Antsaklis, J.A. Stiver, e M. D. Lemmon. *Hybrid Systems Modeling and Autonomous Control Systems*. Em [GNRR93], pages 366-392. Springer Verlag, New York, 1993.
- [Bar99] Karina Acosta Barbosa. *Técnicas LMI para Sistemas com Restrições Algébricas no Estado*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 1999.
- [BB91] Albert Benveniste e Gerard Berry. The synchronous approach to reactive and real-time systems. Em *Proceedings of the IEEE, Special Issue on Reactive and Real-Time Systems*, 79(9), 1991.



- [BB99] Octavian Beldiman e Linda Bushnell. Stability, linearization and control of switched systems. Em *Proc. of the American Control Conference*, Arizona, 1999.
- [Bel87] Edward Beltrami. *Mathematics for Dynamic Modeling*. Academic Press, California, 1987.
- [BG90] Albert Benveniste e Paul Le Guernic. Hybrid dynamical systems theory and the signal language. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(5):535–546, 1990.
- [BGFB94] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. SIAM Books, Philadelphia, 1994.
- [BGM93] Allen Back, John Guckenheimer, e Mark Myers. *A dynamical simulation facility for hybrid systems*. Em [GNRR93], pages 255-267. Springer Verlag, New York, 1993.
- [Bis99] Bradley E. Bishop. Lyapunov function normalization for controlled switching of hybrid systems. Em *Proc. of the American Control Conference*, Arizona, 1999.
- [Bra94a] Michael S. Branicky. Analog computation with continuous ODE's. Em *Proc. IEEE Workshops Physics and Computation*, pages 265–274, Dallas, 1994.
- [Bra94b] Michael S. Branicky. Stability of switched and hybrid systems. Em *Proc. of the 33th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3498–3503, Florida, 1994.
- [Bra95] M. Branicky. *Studies in Hybrid Systems: Modeling, Analysis and Control*. Ph.D. thesis, LIDS, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1995.
- [Bra98] M. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:475–482, 1998.
- [Bro91] R. Brockett. Dynamical systems that sort lists, diagonalize matrices and solve linear programming problems machines. *Linear Algebra and its Applications*, 146:79–91, 1991.

- [Bro93] R. Brockett. *Hybrid models for motion model control systems*. Em *Essays in Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, pages 29-53. Birkhauser, Boston, 1993.
- [Bro96] R. Brockett. Hybrid systems in classical mechanics. Em *Proc. of the 13th IFAC*, volume c, pages 473-476, Boston, 1996.
- [BS89] Dimitur D. Bainov e Pavel S. Simeonov. *Systems with Impulse Effect*. Ellis Horwood, Chichester, England, 1989.
- [BSS89] Lenore Blum, Mike Shub, e Steve Smale. On a theory of computation and complexity over the real number: Np-completeness, recursive functions and universal machines. *Bulletin of American Mathematical Society*, 21(1):1-46, 1989.
- [BSS93] M. Bazaraa, H. Sherali, e C. Shetty. *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*. John Wiley, New York, 1993.
- [Cas92] C.G. Cassandras. *Discret Event Systems, Modeling and Performance Analysis*. Aksen Associates and Irwin, New York, 1992.
- [CCR93] Joseph Serrano Christopher Chase e Peter Ramadge. Periodicity and chaos from switched flow systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(1):70-83, 1993.
- [Chu88] Moody T. Chu. On the continuous realization on iterative processes. *SIAM Review*, 30(3):375-387, 1988.
- [Chu99] Alongkrit Chutinan. *Hybrid System Verification Using Discrete Model Approximations*. PhD thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1999.
- [CK99] J. E. R. Cury e B. H. Krogh. Synthesizing supervisory controllers for hybrid systems. *Journal of the Sity of Instrument and Control Engineers (SICE)*, 38(3):161-168, 1999.
- [CKN98] J. E. R. Cury, B. H. Krogh, e T. Niinomi. Synthesis of supervisory controllers for hybrid systems based on approximating automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):564-568, 1998.
- [Cou00] Daniel Coutinho. Análise de Sistemas não lineares incertos: uma abordagem LMI. Exame de Qualificação. DAS, UFSC, Maio 2000.

- [CW95] Peter E. Caines e Yuan-Jun Wei. The hierarchical lattices of a finite machine. *Systems and Control Letters*, 25(4):275–263, 1995.
- [dBHdRR91] J. W. de Bakker, C. Huizing, W.P. de Roever, e G. Rozenberg. *Real-Time: Theory in Practice*,. LNCS, Vol. 600. Springer Verlag, New York, 1991.
- [DBP00] R. A. DeCarlo, M. Branicky, e S. Pettersson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88:1069–1082, 2000.
- [Del90] David F. Delchamps. Stabilizing a linear systems with quantized state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(80):916–924, 1990.
- [Des94] Akash Desphande. *Control of Hybrid Systems*. Ph.D. thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, 1994.
- [DMG99] José A. De Doná, S. O. R. Moheimani, e Graham C. Goodwin. Allowing for over-saturation in robust switching control of a class of uncertain systems. Em *Proc. of the 38th Conference on Decision and Control*, pages 3053–3058, Arizona, 1999.
- [DO94] M. Doğruel e Ü. Özgüner. Stability of hybrid systems. Em *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 129–134, 1994.
- [DO95] M. Doğruel e Ü. Özgüner. *Modeling and stability issues in hybrid systems*. Em [AKNS95], pages 148-165. Springer Verlag, New York, 1995.
- [dOdFG97] Maurício C. de Oliveira, Daniela P. de Farias, e José C. Geromel. LMISol (Version 1.0). School of Electrical and Computer Engineering, University of Campinas, Campinas, April 1997.
- [EFC02] N. H. El-Farra e P. D. Christofides. *Switched and Feedback laws for Control of Constrained Switched Nonlinear Systems*. Em [TG02], pages 164-178. Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [EH89] Jelel Ezzine e A. H. Haddad. Controllability and observability of hybrid systems. *International Journal of Control Proceedings*, 49(6):2045–2055, 1989.

- [ES96] L. El Ghaoui e G. Scorletti. Control of rational systems using linear-fractional representations and LMIs. *Automatica*, 32(9):1273–1284, 1996.
- [Fil88] A. F. Filippov. *Differential Equation with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [Fin37] P. Finsler. Über das Vorkommen definiten und semi-definiten Formen in Scharen quadratischer Formen. *Comentarii Mathematici Helvetici*, 9:188–192, 1937.
- [GLS94] Datta N. Godbole, John Ligeros, e Shankar Sastry. Hierarchical hybrid control: A case study. Em *Proc. of the 33th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3492–3497, Florida, 1994.
- [GNea96] P. Gahinet, A. Nemirovski, e et al. *LMI Control Toolbox: for use with MATLAB*. The Mathworks Inc., Natick, MA, 1996.
- [GNRR93] R. Grossman, A. Nerode, A. P. Ravn, e H. Rischel, editors. *Hybrid Systems*. LNCS, Vol. 736. Springer Verlag, New York, 1993.
- [Gom99] E. Gomez. *Engineering and Scientific Computing with Scilab*. Birkhauser, Boston, 1999.
- [GV89] A. Göllü e P. Varaiya. Hybrid dynamical systems. Em *Proc. of the 28th Conference on Decision and Control*, pages 2708–2712, 1989.
- [Hal93] Nicolas Halbwachs. *Synchronous Programming of Reactive Systems*. Kluwer Academic, Boston, 1993.
- [HB98] Arash Hassibi e Stephen Boyd. Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems. Em *Proc. of the American Control Conference*, Philadelphia, 1998.
- [HBH99] Arash Hassibi, Stephen Boyd, e Jonathan P. How. A class of Lyapunov functional for analyzing hybrid dynamical systems. Em *Proc. of the American Control Conference*, Arizona, 1999.
- [HC99] Paul Hubbard e Peter Caines. Initial investigations of hierarchical supervisory control for multi-agent systems. Em *Proc. of the 38th Conference on Decision and Control*, pages 2218–2223, Arizona, 1999.

- [HM97] Ling Hou e Anthony N. Michel. Stability analysis for a general class of hybrid dynamical systems. Em *Proc. of the American Control Conference*, Albuquerque, 1997.
- [HS74] Morris W. Hirsch e Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [HT88] E. P. Hofer e B. Tibken. An Iterative Method for the Finite-Time Bilinear-Quadratic Control Problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 57(3):411–427, 1988.
- [HYH98] N. Michel H. Ye e L. Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):461–474, 1998.
- [Ito98] Hiroshi Ito. State-Dependent Scaling for Robust Nonlinear Control: Techniques and Effectiveness. Em *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, pages 4111–4114, Tampa, 1998.
- [Jir98] Mats Jirstrand. *Constructive Methods for Inequality Constraints in Control Hybrid*. Ph.D. thesis, Linköping University, Linköping, Sweden, 1998.
- [JK99] S. Jiang e R. Kumar. Supervisory control of nondeterministic discrete event systems with driven events via masked prioritized synchronization. Em *Proc. of the 38th Conference on Decision and Control*, pages 2212–2217, Arizona, 1999.
- [Joh81] Timothy L. Johnson. Analytic models of multistage processes. Em *Proc. of the 20th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, California, 1981.
- [Joh99] Mikael Johansson. *Piecewise Linear Control Systems*. Ph.D. thesis, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1999.
- [Jos88] M. Joseph. *Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerance Systems*. LNCS, Vol. 331. Springer Verlag, New York, 1988.
- [JR98] M. Johansson e A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:555–559, 1998.
- [Kha96] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

- [KR95] Sanjeev R. Kulkarni e Peter Ramadge. On the existence and complexity of convergent on-line decision rules. Em *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, Louisiana, 1995.
- [KS93] René Koplon e Eduardo Sontag. Sign-linear systems as cascades of automata and continuous variable systems. Em *Proc. of the 32th IEEE Conference on Decision and Control, LNCS, Vol. 199*, pages 2290–2291, San Antonio, 1993.
- [Laf94] G. A. Lafferiere. Discontinuous stabilizing feedback using partially defined lyapunov functions,. Em *Proc. IEEE of the 33th Conference on Decision and Control*, pages 3487–3491, Florida, 1994.
- [LHM99a] M. D. Lemmon, K. H. X. He, e I. Markovskiy. Supervisory hybrid systems. *IEEE Control Systems*, August:42–55, 1999.
- [LHM99b] Daniel Liberzon, João Hespanha, e A. Morse. Stability of switched systems: a lie-algebraic condition. *Systems Control Letters*, 37(3):117–122, 1999.
- [LM99] D. Liberzon e A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 59–69, October 1999.
- [LSA93] M.D. Lemmon, J. A. Stiver, e P.J. Antsaklis. *Event identification and intelligent hybrid control*. Em [GNRR93], pages 268–296. Springer Verlag, New York, 1993.
- [LSX00] Zhengguo Li, Cheong Boon Soh, e Xinhe Xu. Lyapunov stability of a class of hybrid dynamic systems. *Automatica*, 36:297–302, 2000.
- [Mal98] Jorgen Malmberg. *Analysis and Design of Hybrid Systems*. Ph.D. thesis, Lund Institute, Lund, Sweden, 1998.
- [MH99] Anthony N. Michel e Bo Hu. Towards a stability theory of general hybrid dynamical systems. *Automatica*, 35:371–384, 1999.
- [MK00] N. H. McClamroch e I. Kolmanovskiy. Performance benefits of hybrid control design for linear and nonlinear systems. *Proceedings of the IEEE*, 88:1083–1096, 2000.

- [MMP91] Oded Maler, Zohar Manna, e Amir Pnueli. *From timed to hybrid Systems*. Em [dBHdRR91], pages 447-484. Springer Verlag, New York, 3rd edition, 1991.
- [Mor95] A. S. Morse. *Control using logic based switching*. Em Trends in Control, pages 69-113, Berlin, 1995.
- [MP91] Zohar Manna e Amir Pnueli. *The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [NG94] A. Nemirovskii e P. Gahinet. The projective method for solving linear matrix inequalities. Em *Proc. of the American Control Conference*, pages 840–844, 1994.
- [NK93] A. Nerode e W. Khon. *Models for hybrid systems: Automatas, topologies, controllability, observability*. Em [GNRR93], pages 317-356. Springer Verlag, New York, 1993.
- [NK95] T. Niinomi e B. Krogh. *Modeling and Analysis of switched-mode hybrid systems driven by treshold events*. Em Proc. of Workshop on Advances in Control Systems and its Applications, pages 155-172. Springer Verlag, New York, 1995.
- [Pav67] Theodosios Pavlidis. Stability of systems described by differential equations containing impulses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(1):43–57, 1967.
- [PCTC] S. Palomino Bean, D. Coutinho, A. Trofino, e J. E. R. Cury. Stability Analysis and Guaranteed Domain of Attraction for a class of Hybrid Systems: an LMI Approach. Aceito no Int. Journ. of Robust and Nonlinear Control.
- [PCTC01] S. Palomino, D. Coutinho, A. Trofino, e J. E. R. Cury. Computation of stability regions using lmis for dynamical systems with saturation. Em *IX International Symposium on Dynamics Problems on Mechanics, IX DINAME*, pages 21–26, Florianópolis, SC, 2001.
- [PCTC02] S. Palomino Bean, D. Coutinho, A. Trofino, e J. E. R. Cury. Regional stability of a class of nonlinear hybrid systems: an lmi approach. Aceito no IEEE Conference on Decision and Control, 2002.

- [PD91] Philippos Peleties e Raymond DeCarlo. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like function. Em *Proc. of the American Control conference*, pages 1679–1684, Boston, 1991.
- [Pet99] Stevan Pettersson. *Analysis and Design of Hybrid Systems*. Ph.D. thesis, Chalmers University, Gotemburgh, Sweden, 1999.
- [PGTC01] S. Palomino, J. C. Geromel, A. Trofino, e J. E. R. Cury. Comparative methods for computation of stability regions of a class of nonlinear systems. Em *Anais 1ª Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle*, pages 164–169, São Carlos, SP, 2001.
- [PL97] Stevan Pettersson e B. Lennartson. An lmi approach for stability analysis of nonlinear systems. Em *Proc. of the American Control Conference*, Albuquerque, 1997.
- [PL99] Stevan Pettersson e B. Lennartson. Exponential estabily of hybrid systems using piecewise quadratic lyapunov functions resulting in an lmi problem. Em *Proc. of the 14th IFAC*, Beijing, China, 1999.
- [PPA00] Enrique Ponce, Daniel Pagano, e Javier Aracil. Bifurcaciones en un Péndulo Invertido Controlado por Realimentación de Estados. Em *Proc. of the XIII Automation Brazilian Congress*, Florianópolis, Brazil, 2000.
- [PS95] A. Pnueli e J. Sifakis. Theoretical computer science. *Special Issue on Hybrid Systems*, 138(1), 1995.
- [PTB97] C. Pittet, S. Tarbouriech, e C. Burgat. Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and popov criteria. Em *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, 1997.
- [PTC00] S. Palomino, A. Trofino, e J. E. R. Cury. Análise de estabilidade de uma classe de Sistemas Híbridos. Em *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, Florianópolis, SC., 2000.
- [Ram90] Peter J. Ramadge. On the periodicity of symbolic observations of piecewise smooth discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(7):807–813, 1990.



- [Ser90] L. Joseph Serrano. *The effects of Time Sampling and Quantization in the Discrete Control of Continuous Systems*. Ph.D. thesis, Princeton University, Princeton, 1990.
- [SL91] J. J. Slotine e Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [SN97] Robert Shorten e Kumpati Narendra. An sufficient conditions for the existence of a common Lyapunov function for second order linear systems. Em *Proc. of the 36th Conference on Decision and Control*, San Diego, California, 1997.
- [SN98] Robert Shorten e Kumpati Narendra. On the stabilization and existence of common lyapunov function for stable linear switching systems. Em *Proc. of the 37th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, 1998.
- [SS91] Hava T. Siegelman e Eduardo D. Sontag. Turing computation with neural nets. *Applied Mathematical Letters*, 4:77–80, 1991.
- [Tav87] L. Tavernini. Differential automata and their discrete simulators. *Non-linear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 11(6):665–683, 1987.
- [TdS01] A. Trofino e C. E. de Souza. Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1303–1307, 2001.
- [TG02] Claire J. Tomlin e Mark R. Greenstreet. *Hybrid Systems: Computational and Control, Proc. of 5th International Workshop, HSCC 2002*. Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [Tho82] Peter Murray Thompson. *Conic Sector Analysis of Hybrid Control Systems*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1982.
- [TIW96] K. Tanaka, T. Ikeda, e H.O. Wang. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability,  $H_\infty$  control theory and linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):1–13, 1996.

- [TK96] James Taylor e Dawit Kebede. Modeling and simulation of hybrid systems in Matlab. Em *13th Triennial World Congress, IFAC*, San Francisco, 1996.
- [Tro00a] A. Trofino. Bi-quadratic stability for nonlinear systems. Em *IFAC Symposium on Robust Control Design 2000*, Prague, 2000.
- [Tro00b] A. Trofino. Robust Stability and domain of attraction of uncertain Nonlinear Systems. Em *Proc. of the American Control Conference*, Chicago, 2000.
- [Tro01] A. Trofino. Local, Regional and Global stability: an LMI Approach for uncertain nonlinear systems. Submetido:Automatica, 2001.
- [TS85] T. Takagi e M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1):116–132, 1985.
- [TS99] A. Trofino e C. E. Souza. Bi-quadratic stability of uncertain linear systems. Em *IEEE Conference on Decision and Control*, Arizona, 1999.
- [Tsy84] Y. Z. Tsytkin. *Relay Control Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [Tuc97] A. B. Tucker. *The Computer Science and Engineering Handbook*. CRC Press, 1997.
- [Utk77] V.I. Utkin. Variable structure systems with sliding modes: A survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2):212–222, 1977.
- [Utk92] V.I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer Verlag, New York, 1992.
- [VB94] L. Vanderberghe e S. Boyd. A primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities. *Mathematical Programming*, 13, 1994.
- [VPFB01] A. C. S. Vilcarromero, S. Palomino Bean, J. Fernandes, e O. Bonato. Switching behaviour and stability in predator-preys systems. Em *Anais do X Congresso Latinoamericano de Biomatemática, X CLABIO*, pages 81–90, Campinas, SP, 2001.

- [WC94] Yuan-Jun Wei e Peter E. Caines. Hierarchical cocolog for finite machines. Em *Proc. 11th INRIA International Conference on the Analysis and Optimization of Systems*, pages 29–38, New York, 1994.
- [Wim82] David George Wimpey. *Finite-State Control of Discrete-Time Continuous Processes: An Automata Motivated Approach*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1982.
- [Wit66] Hans S. Witsenhausen. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2):161–167, 1966.
- [WPD94] Mark A. Wicks, Philippos Peleties, e Raymond DeCarlo. Construction of Piecewise Lyapunov Functions for stabilizing switched systems. Em *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3492–3497, Florida, 1994.
- [Yak71] V. A. Yakubovich.  $\mathcal{S}$ -procedure in Nonlinear Control Theory. *Vestnik Leningradskogo Universiteta, Ser. Matematika*, pages 62–77, 1971.
- [YMH95] H. Ye, N. Michel, e L. Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. Em *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2679–2684, New Orleans, 1995.
- [ZM98] Peter V. Zhivoglyadov e Richard Middleton. On stability in hibrid systems. Em *Proc. of the 37th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, 1998.
- [ZM99] Peter V. Zhivoglyadov e Richard Middleton. A novel approach to systematic switching control design for a class of hibrid systems. Em *Proc. of the 38th Conference on Decision and Control*, pages 3396–4001, Arizona, 1999.