

MÁRIO DE NORONHA NETO

CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS
ESPÁCIO-TEMPORAIS SOBRE $GF(p)$ PARA
CANAIS COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH
PLANO QUASE-ESTÁTICO

FLORIANÓPOLIS

2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS
ESPÁCIO-TEMPORAIS SOBRE $GF(p)$ PARA
CANAIS COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH
PLANO QUASE-ESTÁTICO

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a obtenção do
grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

MÁRIO DE NORONHA NETO

Florianópolis, Novembro de 2002

CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS ESPÁCIO-TEMPORAIS SOBRE $GF(p)$ PARA CANAIS COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH PLANO QUASE-ESTÁTICO

Mário de Noronha Neto

“Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Comunicação e Processamento de Sinais, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina”

Prof. Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho, Ph.D.

Orientador

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Prof. Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho, Ph.D.

Presidente

Prof. Carlos Aurélio Faria da Rocha, D.Sc.

Prof. Leonardo Silva Resende, D.Sc.

Prof. Walter Pereira Carpes Junior, Dr.

Agradecimentos

Aos meus pais Lasaro e Maria Helena, pelo amor, carinho, incentivo e compreensão em todos os momentos de minha vida;

à Najara, pelo amor e companheirismo durante todos os momentos em que estivemos juntos;

às minhas irmãs Carla e Kelen, pelo constante apoio;

aos meus parentes, em particular meus tios Paulo e Selma, pela atenção que dispensaram em mim;

ao meu grande orientador Bartolomeu, pela orientação, paciência e atenção durante todo o mestrado;

aos professores Carlos Aurélio, Leonardo e Walter, pela seriedade com que participaram na banca examinadora;

aos grandes companheiros Richard e Vanio, pela contribuição e descontração durante esse período;

à toda a galera;

e à Deus, por estar sempre ao meu lado me dando força, inspiração e alegria em meus desafios.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS ESPÁCIO-TEMPORAIS SOBRE $GF(p)$ PARA CANAIS COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH PLANO QUASE-ESTÁTICO

Mário de Noronha Neto

Novembro/2002

Orientador: Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho, Ph.D.

Área de Concentração: Comunicações e Processamento de Sinais

Palavras-chaves: Diversidade, canais com desvanecimento, múltiplas antenas transmissoras, códigos convolucionais espácio-temporais, comunicações sem fio.

Número de páginas: 87

Nesta dissertação, consideraremos um sistema codificado espácio-temporal que consiste em um codificador convolucional linear de taxa $R = 1/n$ sobre $GF(p)$, onde p pode ser qualquer número primo, seguido de um conversor serial-paralelo, n mapeadores de $GF(p)$ em sinais de constelações p -árias (não necessariamente PSK) e um transmissor com n antenas transmissoras. Em cada instante de tempo, os n símbolos p -ários codificados são transmitidos simultaneamente por n antenas transmissoras. Os códigos convolucionais são projetados para se conseguir o melhor desempenho em canais com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático, de acordo com os critérios do posto e do determinante, derivados por Tarokh *et.al.* [10]. Uma eficiência espectral de $\log_2(p)$ b/s/Hz é obtida. Embora o caso de múltiplas antenas seja possível, nos concentraremos nesta dissertação no caso de duas antenas transmissoras. Restrições simples impostas à matriz geradora de um código convolucional de taxa $R = 1/2$ são apresentadas para garantir ganho de diversidade máximo. Sob essas restrições, e devido à estrutura linear dos códigos convolucionais, a busca computacional em relação ao critério do determinante é consideravelmente reduzida. Novos códigos espácio-temporais com duas antenas transmissoras são apresentados para as modulações 5-PSK e 7-PSK, com eficiências espectrais de 2.32 e 2.81 b/s/Hz, respectivamente.

Abstract of Dissertation presented to UFSC in partial fulfillment of the requirements
for the degree of Master in Electrical Engineering

SPACE-TIME CONVOLUTIONAL CODES OVER $GF(p)$ FOR THE QUASI-STATIC, FLAT RAYLEIGH FADING CHANNEL

Mário de Noronha Neto

November/2002

Advisor: Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho, Ph.D.

Area of Concentration: Communications and Signal Processing

Keywords: Diversity, fading channels, multiple transmit antennas, space-time convolutional codes, wireless communications.

Number of pages: 87

In this dissertation, we consider a space-time coded system consisting of a rate $R = 1/n$ linear convolutional encoder over $GF(p)$, where p can be any prime number, followed by a serial-to-parallel converter, n mappers from $GF(p)$ into a p -ary signal constellation (not necessarily PSK), and a transmitter with n transmit antennas. At each time, the n p -ary coded symbols are transmitted simultaneously from the n antennas. The convolutional codes are designed to provide the best error performance in the quasi-static, flat Rayleigh fading channel, according to the rank and the determinant criteria derived by Tarokh *et. al.* [10]. A spectral efficiency of $\log_2(p)$ b/s/Hz is achieved. Although the case of multiple transmit antennas can be considered, we specialize in this dissertation to the case of two transmit antennas. Simple conditions on the generator matrices of a rate $R = 1/2$ convolutional code are given so that maximum diversity advantage is guaranteed. Under these conditions, and due to the linear structure of the convolutional codes, the computer search effort with regard to the determinant criterion is dramatically reduced. New space-time codes with two transmit antennas are presented for the 5-PSK and 7-PSK modulations, with spectral efficiencies 2.32 and 2.81 b/s/Hz, respectively.

Sumário

Sumário	vii
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Conceitos Básicos	6
2.1 Sistema de Comunicação Digital	6
2.2 Códigos Corretores de Erros	8
2.2.1 Códigos Convolucionais Binários	10
2.2.2 Decodificação de Máxima Verossimilhança para Códigos Convolucionais: O Algoritmo de Viterbi	14
2.3 Álgebra Aplicada à Teoria de Codificação	17
2.3.1 Operadores Binários	18
2.3.2 Grupos	18
2.3.3 Corpos	21
3 O Canal para o Sistema de Comunicações Móveis	22
3.1 Características do Canal com Desvanecimento	23
3.1.1 Propagação por Multipercursos	23

3.1.2	Efeito Doppler	24
3.2	Resposta ao Impulso do Canal Rádio-Móvel	24
3.3	Parâmetros do Canal Rádio-Móvel	28
3.3.1	Espalhamento Temporal	28
3.3.2	Faixa de Coerência	29
3.3.3	Espalhamento Doppler e Tempo de Coerência	30
3.4	Classificação dos Canais para Comunicações Móveis: Tipos de Desvanecimento	31
3.4.1	Desvanecimento Plano	32
3.4.2	Desvanecimento Seletivo em Frequência	32
3.4.3	Desvanecimento Rápido	33
3.4.4	Desvanecimento Quase-Estático	33
3.4.5	Classificação dos Canais	34
3.5	Diversidade	35
3.5.1	Tipos de Diversidade	35
3.5.2	Desempenho da Técnica de Diversidade	36
3.6	Capacidade do Canal Rádio-Móvel: Múltiplas Antenas	37
4	Códigos Espaço-Temporais	38
4.1	Modelo do Sistema	39
4.2	Critérios de Projeto de Códigos Espaço-Temporal	40
4.2.1	Critérios de Projeto de Códigos Espaço-Temporais para Canais com Desvanecimento Rayleigh Plano Quase-Estático	41
4.3	Construção dos Códigos	45
5	Códigos Convolucionais Espaço-Temporais Sobre $GF(p)$	50
5.1	Modelo do Sistema	51

5.2	Códigos Convolucionais Espaço-Temporais sobre $GF(p)$	53
5.3	Resultados da Busca de Códigos	56
5.4	Resultados de Simulações	59
5.5	Conclusão e Considerações Práticas	61
6	Conclusão e Trabalhos Futuros	66
A	Capacidade de Canal para Canais com Múltiplas Antenas	68
A.1	Canal Determinístico	70
A.2	Canal Variante no Tempo	70
B	Artigo Apresentado no the SBrT/IEEE International Telecommuni- cations Symposium - ITS2002, Natal, Brazil	72
C	Artigo Aceito para Apresentação no the IEEE Wireless Communica- tions and Networking Conference - WCNC 2003, New Orleans, LA, USA	78
	Referências Bibliográficas	85

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de blocos de um sistema de comunicação digital.	7
2.2	Diagrama de blocos simplificado de um sistema de comunicação digital.	9
2.3	Codificador convolucional binário para $k = 1$, $n = 2$ e $K = 2$	10
2.4	Diagrama de estados para o codificador da Figura 2.3	13
2.5	Diagrama de treliça para o codificador da Figura 2.3.	14
2.6	Algoritmo de Viterbi para o canal simétrico binário.	17
3.1	Ambiente com multipercursos.	23
3.2	Efeito Doppler.	24
3.3	Resposta de um canal variante no tempo a um pulso extremamente pequeno.	25
3.4	Função densidade de probabilidade de Rayleigh.	27
3.5	Função densidade de probabilidade de Rice para vários R	28
3.6	Perfil de intensidade de multipercurso.	29
3.7	Função de correlação das diferenças de frequências.	30
3.8	Função de correlação das variações temporais e espectro de potência Doppler, respectivamente.	32
3.9	Classificação dos canais de comunicações móveis.	34
4.1	Modelo do sistema espaço-temporal.	40
4.2	Constelações 4-PSK (a) e 8-PSK (b).	45

4.3	2-código espaço-temporal, 4-PSK, 2 bits/s/Hz.	45
4.4	2-código espaço-temporal, 8-PSK, 3 bits/s/Hz.	46
4.5	Par de seqüências.	47
4.6	Probabilidade de erro de frame (FER) versus relação sinal-ruído (SNR) para 2-códigos espaço-temporais 4-PSK e 8-PSK com uma antena receptora.	48
5.1	Modelo do sistema espaço-temporal com codificador convolucional sobre $GF(p)$	52
5.2	Codificador convolucional sobre $GF(p)$	53
5.3	Constelações 5-PSK (a) e 7-PSK (b).	54
5.4	Treliça do 2-código espaço-temporal para 5-PSK, 2.32 b/s/Hz, (codificador convolucional: $GF(5)$, $R = 1/2$, $K = 1$).	57
5.5	Treliça do 2-código espaço-temporal para 7-PSK, 2.81 b/s/Hz, (codificador convolucional: $GF(7)$, $R = 1/2$, $K = 1$).	59
5.6	Treliça do 2-código espaço-temporal para 5-PSK, 2.32 b/s/Hz, (codificador convolucional: $GF(5)$, $R = 1/2$, $K = 2$).	60
5.7	Treliça do 2-código espaço-temporal para 7-PSK, 2.81 b/s/Hz, (codificador convolucional: $GF(7)$, $R = 1/2$, $K = 2$).	63
5.8	Taxa de erro de frame (FER) versus a relação sinal-ruído (SNR) para os 2-códigos espaço-temporais para 5-PSK com $K = 1, 2$ e $m = 1, 2, 3$ antenas receptoras.	64
5.9	Taxa de erro de frame (FER) versus a relação sinal-ruído (SNR) para os 2-códigos espaço-temporais para 7-PSK com $K = 1, 2$ e $m = 1, 2, 3$ antenas receptoras.	64
5.10	Taxa de erro de frame (FER) versus a relação sinal-ruído (SNR) para os 2-códigos espaço-temporais para 4-PSK com 4 estados, 5-PSK com $K = 1$, 7-PSK com $K = 1$, 8-PSK com 8 estados e $m = 1$ antena receptora.	65

Lista de Tabelas

2.1	Adição módulo-3	20
2.2	Multiplicação módulo-5	20

Capítulo 1

Introdução

Com a sempre crescente demanda pela sociedade por serviços de transmissão de dados e multimídia, a taxas cada vez mais altas, tem sido intensificada a pesquisa por sistemas e métodos eficientes para a transmissão confiável de informação. As restrições práticas que impõem limitações às faixas de frequências e à potência do transmissor impulsionam ainda mais essa pesquisa e exigem dos pesquisadores soluções cada vez mais geniais. Quando a transmissão dos sinais é feita por ondas de rádio, os desafios e as dificuldades para se obter tais soluções são ainda maiores, devido às intrincadas características dos canais de comunicações móveis, as quais serão estudadas nesta dissertação. Uma contribuição para o sucesso da transmissão confiável de informação a altas taxas em um canal de comunicações móveis que emprega múltiplas antenas no transmissor e opcionalmente múltiplas antenas no receptor é apresentada nesta dissertação de mestrado.

Podemos dizer que um sistema de comunicação digital é formado basicamente por três elementos: o transmissor, o receptor e o canal de comunicação. O canal de comunicação, que é o único elemento sobre o qual o projetista não tem nenhum controle, apresenta algumas imperfeições que dificultam a transmissão da informação. Cabe ao projetista, portanto, elaborar transmissores e receptores com a finalidade de minimizar os efeitos destas imperfeições. Exemplos de imperfeições são: ruído aditivo, interferência intersimbólica e desvanecimento. O ruído aditivo está presente em todos os canais de comunicações. A interferência intersimbólica é geralmente combatida através

de uma equalização, e não será tratada nesta dissertação. O desvanecimento, presente em canais de comunicações móveis, será descrito detalhadamente no Capítulo 3 e será considerado nos capítulos seguintes.

Para se conseguir uma comunicação confiável em canais com ruído aditivo, é necessário fazer uso de códigos corretores de erros que, através da adição controlada de redundância, possibilita a correção de erros no receptor. Em geral, a utilização destes códigos implica em uma expansão espectral e, por isso, uma comunicação confiável em canais com limitação de faixa de frequências, como por exemplo o canal telefônico, não era possível até o final da década de 70. Os códigos corretores de erros eram projetados segundo o critério de maximização da *distância de Hamming* mínima entre as seqüências codificadas, e não dependia da modulação digital utilizada. Ou seja, codificação e modulação eram vistos como dois processos independentes.

Em 1977, Ungerboeck [1] demonstrou uma técnica, denominada *modulação codificada em treliça*, ou TCM (do inglês: *Trellis Coded Modulation*), que combina eficientemente codificação e modulação em um único processo, capaz de obter um excelente desempenho em canais com ruído Gaussiano branco aditivo (AWGN, do inglês: *Additive White Gaussian Noise*) e com limitação de faixa de frequência. Uma consideração importante feita por Ungerboeck [2] foi que o melhor critério para o projeto de códigos para estes canais era a maximização da *distância Euclidiana* mínima entre seqüências de sinais produzidas na saída do modulador. Por isso, os códigos projetados segundo o critério baseado na distância de Hamming não seriam os mais apropriados para este canal, necessitando de uma busca por novos códigos. Esta técnica foi utilizada, por exemplo, em todos os MODEMS para canais telefônicos com taxas superiores ou iguais a 14400 bps.

A fim de que códigos eficientes possam ser projetados para sistemas de comunicações móveis, um novo modelo matemático de canal, que leve em consideração o AWGN e o desvanecimento, deve ser considerado. Os melhores códigos projetados para o canal contendo apenas o AWGN não se mostraram muito eficientes para este canal com desvanecimento. Isto motivou alguns pesquisadores a buscarem novos critérios de construção de códigos com a intenção de se obter uma transmissão mais eficiente nos canais com desvanecimento. Em 1988, Divsalar e Simon [3, 4] demonstraram

que quando a modulação codificada em treliça é usada no canal com desvanecimento, os critérios a serem adotados para a obtenção de códigos com um bom desempenho são: a maximização do *comprimento do menor evento de erro* e a maximização da *distância mínima de Hamming entre as seqüências deste evento*, claramente diferentes do critério apresentado por Ungerboeck uma década antes para o canal com AWGN apenas. Códigos baseados nos critérios de [3], que proporcionaram um excelente desempenho num canal com desvanecimento, foram construídos em [5], combinando-se a diversidade temporal dos códigos TCM com a diversidade espacial das múltiplas antenas receptoras. A diversidade é uma técnica também utilizada para melhorar o desempenho da transmissão de informação em canais de comunicações móveis, e será detalhada no Capítulo 3. Uma abordagem interessante que utiliza diversidade espacial na transmissão foi apresentada em [6], onde a mesma informação é transmitida através de várias antenas.

Em publicações recentes, na área de teoria de informação, Telatar [7], Foschini e Gans [8] e Marzetta e Hochwald [9] demonstraram que a capacidade de canal para sistemas de comunicações móveis que empregam múltiplas antenas transmissoras e receptoras é significativamente maior do que a de sistemas que utilizam apenas uma antena transmissora e uma receptora. Motivados por este importante resultado, Tarokh *et.al.* [10] inventaram os chamados códigos espaço-temporais (STC, do inglês: *Space-Time Codes*), onde a redundância da informação é colocada adequadamente no espaço (antenas transmissoras) e no tempo (modulação codificada em treliça), proporcionando um excelente desempenho nestes canais. Os códigos espaço-temporais foram rapidamente reconhecidos como a melhor técnica para se realizar uma comunicação confiável em canais com desvanecimento empregando múltiplas antenas transmissoras. Um dos resultados mais relevantes obtidos em [10] foi o de que para o canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático, um bom STC pode ser obtido maximizando-se dois novos critérios, chamados: *critério do posto* e *critério do determinante*, que estão relacionados com o *ganho de diversidade* e com o *ganho de codificação*, respectivamente. Os STC propostos em [10] e [11] foram projetados a mão ou através de uma busca computacional exaustiva. Em [11], Baro *et.al.* obtiveram, através de buscas exaustivas, alguns STC ótimos com relação aos critérios do posto e do determinante.

A principal dificuldade com relação ao projeto dos STC é que seus critérios são baseados em operações no domínio complexo das modulações em banda básica, e não numa estrutura algébrica finita, como por exemplo um corpo de Galois. Isto torna a busca de códigos bastante complicada. Em [12] e [13], com o propósito de reverter esta situação, foi desenvolvido um critério de posto binário para facilitar a busca de códigos e ainda garantir que os STC associados alcançassem ganho de diversidade máximo. Blum [14, 15] considerou os STC como códigos convolucionais, possibilitando uma construção de códigos sistemática e dando condições suficientes e necessárias para que os STC construídos desta maneira tivessem ganho de diversidade máximo. Em [16] e [17] novos critérios de projeto foram propostos para sistemas operando em baixa relação sinal-ruído e com um número elevado de antenas. Todos os STC propostos nos trabalhos citados anteriormente foram construídos sobre corpos binários ou sobre corpos binários estendidos, e possuem eficiências espectrais inteiras, como por exemplo 2 e 3 b/s/Hz.

O objetivo desta dissertação é apresentar um método alternativo para a busca de STC que atinja ganho máximo de diversidade e um bom ganho de codificação, ao custo de uma baixa complexidade computacional, no que se refere à busca dos códigos. Consideraremos o sistema codificado espaço-temporal que consiste num codificador convolucional linear de taxa $R = 1/n$ sobre $\text{GF}(p)$, onde $\text{GF}(p)$ é o corpo de Galois de ordem p , que poderá ser qualquer número primo. Algumas condições simples serão impostas às matrizes geradoras do codificador convolucional, de taxa $R = 1/2$, para que os códigos por elas gerados apresentem ganho de diversidade máximo. Sob essas condições, e devido à estrutura linear dos códigos convolucionais, o esforço computacional relativo ao critério do determinante será consideravelmente reduzido. Novos códigos espaço-temporais construídos sobre corpos finitos primos $\text{GF}(p)$ com uma eficiência espectral de $\log_2(p)$ serão apresentados.

No Capítulo 2 iniciaremos dando uma noção básica de um sistema de comunicação digital, comentando sobre cada componente do sistema. Em seguida falaremos sobre códigos corretores de erros, enfatizando os códigos convolucionais e a sua decodificação de máxima verossimilhança. Finalizando o capítulo mostraremos alguns conceitos de álgebra aplicada à teoria de codificação.

No Capítulo 3 será feita uma descrição geral do canal de comunicações móveis, que incluirá o desvanecimento, entre outros parâmetros, e algumas classificações deste canal. Nas duas últimas seções daremos uma breve noção sobre os conceitos de diversidade e de capacidade de canal para sistemas com múltiplas antenas.

O Capítulo 4 apresentará os códigos espaço-temporais e os critérios de projeto desses códigos para canais com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático. Será mostrado também o procedimento de construção de um STC.

No Capítulo 5 apresentaremos o conceito de códigos convolucionais espaço-temporais sobre $GF(p)$, e um novo método para a obtenção de STC. Em seguida mostraremos os resultados de buscas utilizando esse novo método. Encerraremos o capítulo mostrando o desempenho destes novos códigos encontrados através de simulações por computador realizadas para um modelo de canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático.

Finalmente, no Capítulo 6, faremos uma conclusão geral do trabalho e comentaremos sobre possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Este Capítulo tem como objetivo apresentar alguns conceitos básicos, os quais serão necessários para o acompanhamento dos próximos capítulos. Na Seção 2.1 será feita uma descrição geral de um sistema de comunicação digital. Na Seção 2.2 será feita uma abordagem sobre códigos corretores de erros e a sua decodificação de máxima verossimilhança. Finalmente, a Seção 2.3 dará uma noção da álgebra usada na teoria de codificação.

2.1 Sistema de Comunicação Digital

Um sistema de comunicação digital tem como objetivo transferir dados de uma fonte de informação para um determinado destino. O diagrama de blocos da Figura 2.1 mostra os principais componentes deste sistema.

A fonte de informação gera os símbolos de informação a serem transmitidos, os quais pertencem a um alfabeto finito que na maioria dos casos é binário. Em algumas aplicações, a seqüência de informação gerada pode conter muita redundância, e com isso o uso de um codificador de fonte se torna necessário para melhorar a eficiência do sistema. A saída do codificador de fonte produz uma seqüência de informação com o mínimo de redundância possível. Esta seqüência passa por um codificador de canal que adiciona redundância controlada à esta informação com o objetivo de deixar a transmissão mais confiável. O codificador de canal transforma uma seqüência de k

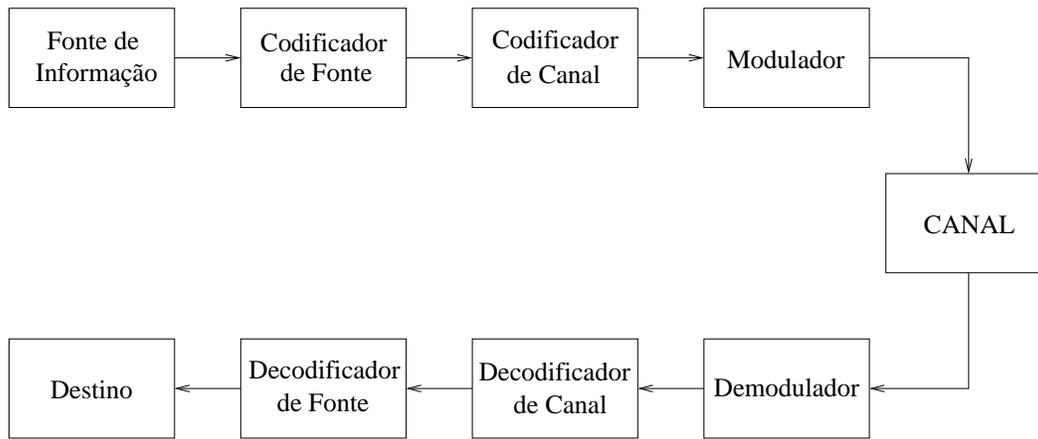


Figura 2.1: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação digital.

símbolos de informação em uma seqüência codificada de n símbolos, onde $n > k$. A quantidade de símbolos redundantes introduzida na seqüência de informação é portanto $n - k$. A taxa de codificação é definida como $R = k/n$. Em geral, esse processo provoca a diminuição da taxa de transmissão de dados ou o aumento da largura de faixa de freqüências do canal em relação ao sistema não codificado, uma vez que n símbolos devem ser transmitidos no mesmo intervalo de tempo em que antes, sem a codificação, k símbolos eram transmitidos.

Os símbolos digitais na saída do codificador entram em um modulador que tem a função de convertê-los em formas de onda analógicas para a transmissão. No caso da modulação binária, os bits 0 e 1 são mapeados diretamente em duas formas de onda diferentes; em geral uma forma de onda é o negativo da outra (modulação bipolar). Quando a modulação não é binária, os bits são agrupados e mapeados em símbolos complexos que variam a amplitude, fase ou freqüência de uma sinusóide.

O canal de comunicação é o meio usado para se enviar o sinal do transmissor ao receptor. Alguns exemplos de canais de comunicação são: o canal sem fio, o par trançado de fios telefônicos, a rede elétrica, a fibra ótica e o cabo coaxial. Uma limitação desses canais é que os sinais por eles transmitidos são corrompidos de uma maneira aleatória por alguns tipos de ruído, tais como o ruído aditivo térmico, gerado pela agitação de elétrons na linha e em componentes eletrônicos, e o desvanecimento, gerado pela propagação por multipercursos.

Quando o sinal chega ao receptor, o demodulador converte a seqüência de formas de onda corrompidas pelo ruído no canal em uma seqüência de símbolos, num processo chamado de detecção ou demodulação. O processo de detecção pode produzir símbolos errôneos, devido à perturbação ruidosa. Essa seqüência (possivelmente errônea) chega ao decodificador de canal e este, através do conhecimento da redundância introduzida pelo codificador no transmissor e das características estatísticas do canal, decodifica a seqüência recebida com a menor probabilidade de erro possível.

Baseado nas regras de codificação da fonte, o decodificador de fonte procura reproduzir, fielmente, os dados emitidos pela fonte de informação.

Finalmente, a informação transmitida chega ao destino, o qual pode ser um usuário final, um circuito de comando ou qualquer dispositivo que faça uso da informação transmitida.

Devido a alguns blocos do sistema de comunicação não serem de interesse específico deste trabalho, consideraremos daqui para frente um sistema simplificado mostrado na Figura 2.2.

A fonte de informação e o codificador de fonte passam a ser chamados apenas de fonte. O decodificador de fonte e o destino serão considerados em um bloco chamado destino. O codificador de canal será representado apenas por codificador, assim como o decodificador de canal será considerado apenas por decodificador. O modulador e o demodulador representarão apenas o mapeamento dos dígitos de saída do codificador em símbolos de uma constelação e vice-versa. A parte analógica do modulador e do demodulador ficam embutidas no canal e juntas compõem o bloco chamado canal discreto.

2.2 Códigos Corretores de Erros

Nos sistemas de comunicação digital é desejável que a informação transmitida chegue ao receptor sem falhas. Devido às imperfeições contidas nos canais de comunicações, a informação enviada poderá sofrer alterações e chegar corrompida ao seu destino.

O código corretor de erros tem a função de manter a integridade da informação

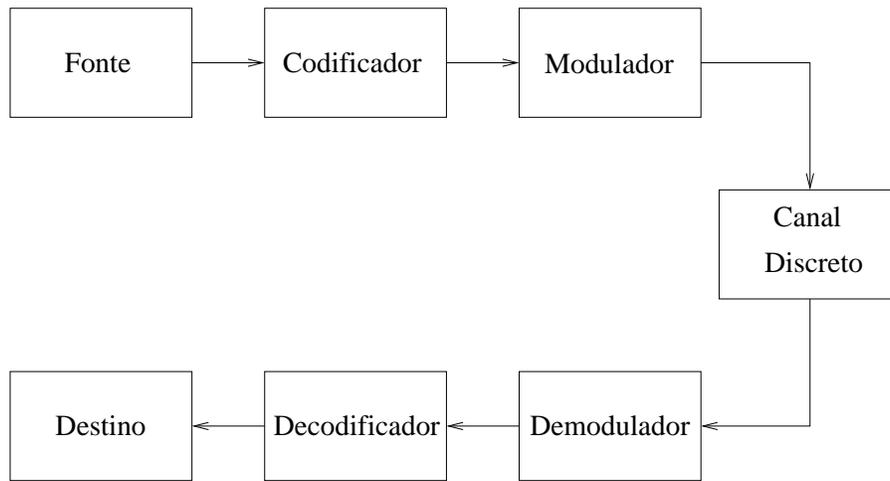


Figura 2.2: Diagrama de blocos simplificado de um sistema de comunicação digital.

transmitida. Esta técnica é realizada adicionando-se símbolos de redundância à informação a ser transmitida, de forma que no receptor, caso haja erros, se possa tentar corrigí-los.

Existem dois tipos de estratégia para o controle de erros que são: FEC (*Forward Error Correction*), onde o código corretor tenta corrigir o erro no receptor, e ARQ (*Automatic Repeat reQuest*), onde o código apenas detecta o erro no receptor e em seguida faz um pedido de retransmissão da mensagem.

Os códigos corretores de erros podem ser classificados em dois grupos que são: os *Códigos de Bloco* e os *Códigos Convolucionais*. O codificador para um código de bloco recebe seqüências contendo k símbolos de informação e as transforma em seqüências codificadas contendo n símbolos. O número de símbolos de redundância contidos na palavra é $n - k$. O código de bloco será denotado por $C(n, k)$, e sua taxa por $R = k/n$. Como os n símbolos de saída num dado instante dependem apenas dos k símbolos de entrada neste mesmo instante, o codificador é dito *sem memória*, e pode ser implementado por um circuito lógico combinacional. O codificador para um código convolucional também aceita seqüências contendo k símbolos de informação e as converte em seqüências codificadas de comprimento n . Contudo, cada bloco codificado não depende apenas dos símbolos de entrada atuais, mas também de símbolos de entrada em instantes anteriores. O código convolucional será denotado por $C(n, k, K)$, onde K é a ordem de memória do codificador. A taxa deste código também será $R = k/n$. Este

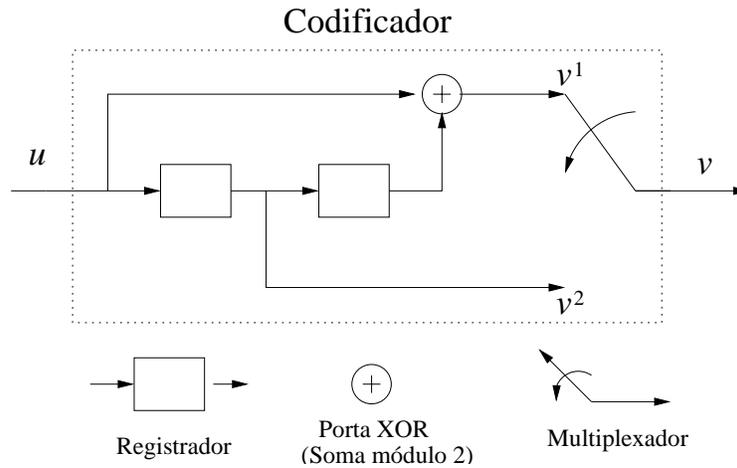


Figura 2.3: Codificador convolucional binário para $k = 1$, $n = 2$ e $K = 2$.

tipo de codificador pode ser implementado utilizando-se circuitos lógicos seqüenciais.

Nesta seção concentraremos nossa atenção apenas nos códigos convolucionais e na sua decodificação de máxima verossimilhança. O potencial do código será totalmente utilizado para a correção de erros no receptor.

2.2.1 Códigos Convolucionais Binários

Introduzido por Elias [18] em 1955, os códigos convolucionais surgiram como uma alternativa aos códigos de bloco. Devido à sua simples implementação e ao seu bom desempenho, esses códigos têm tido uma larga aplicação em sistemas de comunicação.

O codificador convolucional é definido como um circuito seqüencial linear, onde a saída depende das entradas atuais e das entradas em K instantes anteriores. Um codificador convolucional binário de taxa $R = 1/2$ e com ordem de memória $K = 2$ é mostrado na Figura 2.3.

Para simplificar a descrição dos códigos convolucionais, nos restringiremos a um código de taxa $R = 1/2$. Esta descrição particular pode ser facilmente estendida para k entradas e n saídas, ou seja, para $R = k/n$. Outra razão por termos optado pela descrição de um código de taxa $R = 1/2$ é que na parte principal desta dissertação, ou seja, no Capítulo 5, consideraremos apenas códigos convolucionais com esta taxa.

Considere uma seqüência binária $\mathbf{u} = u_0, u_1, u_2 \dots$ como sendo uma seqüência de

informação na entrada do codificador. As seqüências binárias $\mathbf{v}^1 = v_0^1, v_1^1, v_2^1, \dots$ e $\mathbf{v}^2 = v_0^2, v_1^2, v_2^2, \dots$ são as seqüências geradas pelo codificador da Figura 2.3. Essas seqüências são obtidas através da convolução discreta entre a informação \mathbf{u} e as respostas ao impulso \mathbf{g}^i , para $i = 1, 2, \dots, n$. As respostas ao impulso \mathbf{g}^i são obtidas fazendo-se $\mathbf{u} = 1\ 0\ 0\ \dots$ e observando-se as saídas do codificador. Por exemplo, as respostas ao impulso para o codificador da Figura 2.3 são:

$$\mathbf{g}^1 = (1\ 0\ 1)$$

$$\mathbf{g}^2 = (0\ 1\ 0)$$

Essas respostas \mathbf{g}^i também são chamadas de seqüências geradoras do código.

Após a codificação as saídas geradas são multiplexadas em uma única seqüência chamada *palavra código*, que possui o seguinte formato:

$$\mathbf{v} = (v_0^1 v_0^2, v_1^1 v_1^2, v_2^1 v_2^2, \dots). \quad (2.1)$$

Exemplo 1 Considere o codificador da Figura 2.3 e a seqüência de entrada $\mathbf{u} = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \dots)$. Então as duas seqüências de saída são

$$\mathbf{v}^1 = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \dots) * (1\ 0\ 1) = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ \dots)$$

$$\mathbf{v}^2 = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \dots) * (0\ 1\ 0) = (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ \dots)$$

A palavra código a ser transmitida será

$$\mathbf{v} = (10, 01, 00, 11, 11, \dots).$$

Se as seqüências geradoras \mathbf{g}^1 e \mathbf{g}^2 são entrelaçadas e colocadas na matriz

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_0^1 g_0^2 & g_1^1 g_1^2 & g_2^1 g_2^2 & 00 & 00 & \dots \\ 00 & g_0^1 g_0^2 & g_1^1 g_1^2 & g_2^1 g_2^2 & 00 & \dots \\ 00 & 00 & g_0^1 g_0^2 & g_1^1 g_1^2 & g_2^1 g_2^2 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 00 & 00 & \dots & g_0^1 g_0^2 & g_1^1 g_1^2 & g_2^1 g_2^2 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

a palavra codificada pode ser representada pela seguinte expressão

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}, \quad (2.3)$$

onde as operações de soma e multiplicação são realizadas módulo-2.

De acordo com [19], qualquer convolução de seqüências pode ser representada por uma multiplicação polinomial. Tomando-se mais uma vez como exemplo um código $C(2, 1, K)$, as seqüências codificadas podem ser representadas por

$$V^1(D) = U(D) \cdot G_1(D) \quad (2.4)$$

$$V^2(D) = U(D) \cdot G_2(D) \quad (2.5)$$

onde D representa um atraso unitário e $U(D) = u_0 + u_1D + u_2D^2 + \dots$ o polinômio de informação. Os polinômios $G_1(D) = g_{0,1} + g_{1,1}D + \dots + g_{K,1}D^K$ e $G_2(D) = g_{0,2} + g_{1,2}D + \dots + g_{K,2}D^K$ são denominados *polinômios geradores*. Após a multiplexação, o polinômio código toma o seguinte formato:

$$\mathbf{V}(D) = V^1(D^2) + DV^2(D^2). \quad (2.6)$$

Os polinômios geradores de um código convolucional podem ser arranados em uma matriz denominada de *matriz geradora polinomial*. A matriz geradora polinomial para um código $C(2, 1, K)$ pode ser representada como

$$\mathbf{G}(D) = [G_1(D)G_2(D)]. \quad (2.7)$$

Exemplo 2 *Considere novamente o codificador da Figura 2.3. Este codificador pode ser representado como uma realização da seguinte matriz geradora*

$$\mathbf{G}(D) = [1 + D^2 \ D].$$

Considere também que o polinômio de informação seja

$$U(D) = 1 + D^2 + D^3.$$

Os polinômios codificados serão

$$V^1(D) = (1 + D^2 + D^3)(1 + D^2) = 1 + 2D^2 + D^3 + D^4 + D^5 = 1 + D^3 + D^4 + D^5$$

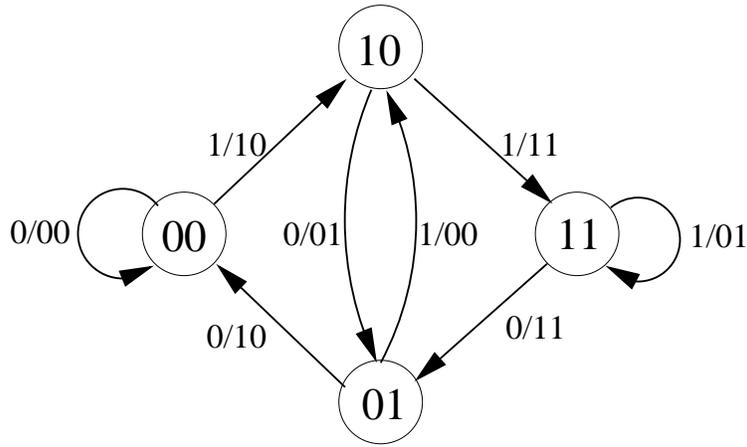


Figura 2.4: Diagrama de estados para o codificador da Figura 2.3 .

$$V^2(D) = (1 + D^2 + D^3)(D) = D + D^3 + D^4$$

e o polinômio código a ser transmitido será

$$\mathbf{V}(D) = V^1(D^2) + DV^2(D^2) = 1 + D^3 + D^6 + D^7 + D^8 + D^9 + D^{10}.$$

Note que as operações de soma e de multiplicação devem ser realizadas módulo-2, ou seja, $jD^i = 0$, onde i é qualquer inteiro, se j for par.

O codificador convolucional também pode ser descrito por um diagrama de estados, onde o estado do codificador é definido pelo conteúdo dos seus registradores. O número de estados possíveis para um codificador binário de taxa $R = 1/2$ é dado por $M = 2^K$. Por exemplo, o codificador da Figura 2.3 possui $2^2 = 4$ estados. O diagrama de estados que representa este codificador pode ser visto na Figura 2.4, onde os quatro estados são rotulados por: 00 01 10 11. Os ramos rotulados pelo par u/v^1v^2 (entrada/saída) representam as transições de estado do codificador.

A representação do codificador pelo diagrama de estados não nos permite observar a evolução temporal das seqüências codificadas. Este problema pode ser contornado representando-se o codificador convolucional por um diagrama de treliças. Este diagrama, visto na Figura 2.5, mostra as transições de estados relacionadas a cada instante de tempo. Nesta treliça, os nós representam os quatro estados em cada tempo discreto l , e os rótulos em cada ramo da treliça representam a entrada e a saída do codificador. Por

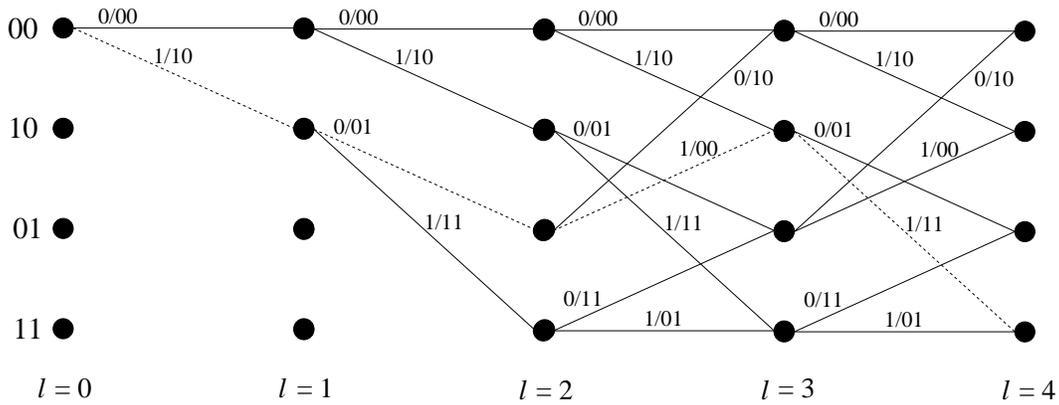


Figura 2.5: Diagrama de treliça para o codificador da Figura 2.3.

exemplo, o caminho representado pelos ramos tracejados correspondem à seqüência de entrada 1011.

2.2.2 Decodificação de Máxima Verossimilhança para Códigos Convolucionais: O Algoritmo de Viterbi

No processo de decodificação, o decodificador tenta fazer uma estimação $\hat{\mathbf{u}}$ da informação transmitida \mathbf{u} baseado na seqüência recebida \mathbf{r} . Como para cada informação \mathbf{u} se tem uma palavra código \mathbf{v} associada, o decodificador poderá equivalentemente fazer uma estimativa $\hat{\mathbf{v}}$ da palavra código \mathbf{v} . O papel da decodificação é associar uma estimativa $\hat{\mathbf{v}}$ a cada seqüência recebida \mathbf{r} . O erro na transmissão ocorrerá quando $\mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{v}}$, visto que \mathbf{v} é a palavra código transmitida, portanto correta. Assim, a probabilidade de erro condicionada do decodificador será:

$$P(E|\mathbf{r}) \triangleq P(\hat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{v}|\mathbf{r}). \quad (2.8)$$

A probabilidade de erro do decodificador é então dada por:

$$P(E) = \sum_{\mathbf{r}} P(E|\mathbf{r})P(\mathbf{r}), \quad (2.9)$$

onde $P(\mathbf{r})$ é independente do processo de decodificação. Portanto, uma regra de decodificação ótima deve ser minimizar $P(E|\mathbf{r}) \triangleq P(\hat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{v}|\mathbf{r})$. Como minimizar $P(\hat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{v}|\mathbf{r})$ é o mesmo que maximizar $P(\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}|\mathbf{r})$, $P(E|\mathbf{r})$ será minimizada para uma dada seqüência

recebida \mathbf{r} escolhendo-se $\hat{\mathbf{v}}$ como sendo a palavra código \mathbf{v} que maximiza

$$P(\mathbf{v}|\mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r}|\mathbf{v})P(\mathbf{v})}{P(\mathbf{r})}, \quad (2.10)$$

onde fizemos uso do teorema de Bayes. Supondo-se que as seqüências de informação sejam igualmente prováveis, ou seja, que $P(\mathbf{v})$ não dependa de \mathbf{v} , e como $P(\mathbf{r})$ também não depende de \mathbf{v} , maximizar a Equação (2.10) é equivalente a maximizar $P(\mathbf{r}|\mathbf{v})$. Para o caso do canal discreto sem memória:

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{v}) = \prod_i P(r_i|v_i). \quad (2.11)$$

O decodificador que seleciona uma estimativa pela maximização da Equação (2.11) é chamado de decodificador de máxima verossimilhança. Por simplicidade, a expressão anterior pode ser vista da seguinte forma:

$$\log P(\mathbf{r}|\mathbf{v}) = \sum_i \log P(r_i|v_i), \quad (2.12)$$

pois sendo o logaritmo uma função monotônica, maximizar $P(\mathbf{r}|\mathbf{v})$ é equivalente a maximizar $\log P(\mathbf{r}|\mathbf{v})$.

Agora vamos considerar o caso de um canal simétrico binário. Neste tipo de canal, tanto a palavra transmitida quanto a palavra recebida são representadas por seqüências binárias. Devido ao ruído, a probabilidade $P(r_i = v_i|v_i) = 1 - p$ e a probabilidade $P(r_i \neq v_i|v_i) = p$. Suponha que seqüência recebida \mathbf{r} seja diferente da seqüência transmitida \mathbf{v} em d posições, onde d representa a *distância de Hamming* entre as duas seqüências, ou seja, o número de posições em que as duas seqüências diferem. A partir disto a equação (2.12) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \log P(\mathbf{r}|\mathbf{v}) &= d \log p + (n - d) \log(1 - p) \\ &= d \log \frac{p}{1 - p} + n \log(1 - p). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Considerando-se que $p < 1/2$ e $n \log(1-p)$ é constante para todo \mathbf{v} , pode-se concluir que a regra para a decodificação de máxima verossimilhança do canal simétrico binário é: *A palavra decodificada é aquela que minimiza a distância de Hamming entre a seqüência transmitida e a seqüência recebida, ou seja, escolha a palavra código que difere da seqüência recebida no menor número de posições.*

A decodificação de máxima verossimilhança para os códigos convolucionais é feita utilizando-se o *Algoritmo de Viterbi*, que foi originalmente proposto pelo próprio Viterbi [20] em 1967. Para explicar o funcionamento deste algoritmo, vamos definir dois conceitos: a *métrica de ramo*, ν_l^x , que é a distância de Hamming entre a seqüência recebida $r_l^1 r_l^2$ e a palavra código $v_l^1 v_l^2$ no ramo x e no instante de tempo l do diagrama de treliças; e a *métrica acumulada*, μ_l^x , como sendo $\nu_l^x + \mu_{l-1}^x$, onde μ_{l-1}^x é a métrica acumulada no instante de tempo $l - 1$. No caso do canal simétrico binário, a métrica é considerada como sendo a distância de Hamming entre a seqüência recebida e as palavras código.

O Algoritmo de Viterbi consiste em achar o caminho na treliça que tenha a menor métrica acumulada. O algoritmo é baseado na idéia de que apenas os caminhos mais prováveis precisam ser salvos para o processamento futuro, enquanto os outros caminhos podem ser eliminados sem prejudicar o desempenho da decodificação. Em cada nó poderá chegar apenas o caminho que contiver a menor métrica acumulada. Este caminho receberá o nome de *sobrevivente*. A escolha da palavra código decodificada será baseada no caminho que possuir a menor métrica acumulada no nó final da treliça. De acordo com [21], o algoritmo de Viterbi pode ser sintetizado nos seguintes passos:

1. Valores iniciais: $t = 0$; *Estado inicial* $S_0 = 0$; $\mu_0^x(S_0 = 0) = 0$; $\mu_0^x(S_0 \neq 0) = \infty$;
2. Incremento unitário do tempo:
 - Calcule a métrica de ramo para todos os ramos entrando em um nó no tempo l ;
 - Calcule a métrica acumulada para todos os caminhos entrando em um nó no tempo l , pela adição da métrica de ramo entrando no nó com a métrica acumulada do sobrevivente em um nó anterior no tempo $l - 1$;
 - Compare as métricas acumuladas para todos os caminhos entrando em um nó e ache o sobrevivente para cada nó. Para cada nó guarde o caminho sobrevivente e sua métrica;
 - Repita o passo 2 até o último instante de tempo;
3. O último sobrevivente é o caminho de máxima verossimilhança.

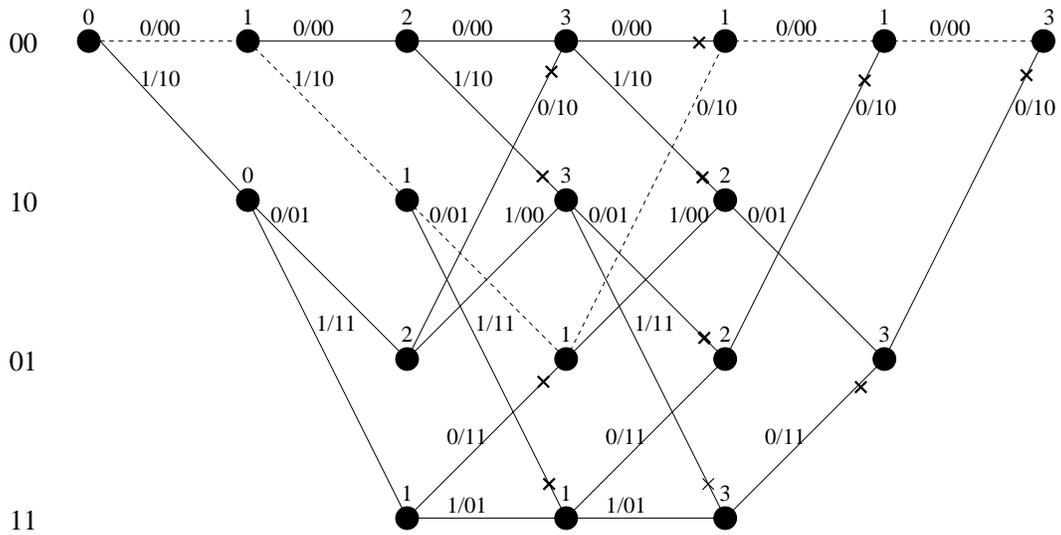


Figura 2.6: Algoritmo de Viterbi para o canal simétrico binário.

Exemplo 3 Considere o diagrama de treliça do código $C(2, 1, 2)$ mostrado na Figura 2.6. Suponha que uma palavra código tenha sido transmitida e que a seqüência recebida do decodificador seja:

$$r = (1\ 0, 1\ 0, 0\ 1, 1\ 0, 0\ 0, 1\ 1).$$

Aplicando o algoritmo de Viterbi na decodificação desta seqüência, obtemos a seguinte palavra código

$$\hat{v} = (0\ 0, 1\ 0, 0\ 1, 1\ 0, 0\ 0, 0\ 0)$$

Portanto, a seqüência de informação decodificada (ou estimada) será:

$$\hat{u} = (0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

2.3 Álgebra Aplicada à Teoria de Codificação

Esta seção tem como objetivo apresentar alguns conceitos de álgebra, tais como *operadores binários*, *grupos* e *corpos*, da maneira como eles se aplicam à teoria de codificação.

2.3.1 Operadores Binários

Seja S um conjunto de elementos. Um *operador binário* $*$ definido sobre S tem a função de mapear qualquer par de elementos $(a, b) \in S$ em um terceiro elemento $c = a * b$ também pertencente a S . Quando existir um operador binário $*$ definido sobre S dizemos que S é fechado com relação a este operador. Segundo [22], podemos definir um operador binário da seguinte maneira.

Definição 1 *Um operador binário $*$ definido sobre um conjunto S é uma função que mapeia $S \times S$ em S . Para cada $(a, b) \in S \times S$, denotaremos o elemento $*((a, b))$ de S por $a * b$.*

As operações de adição, $+$, e de multiplicação, \cdot , são diferentes operadores binários definidos sobre o conjunto dos inteiros \mathbf{Z} , pois quaisquer dois inteiros somados ou multiplicados produzirão também um número inteiro. Por outro lado, a operação de adição no conjunto \mathbf{Z}^* (inteiros não nulos) não é um operador binário porque a operação $2 + (-2)$, onde $2 \in \mathbf{Z}^*$ e $-2 \in \mathbf{Z}^*$, produz o elemento 0 , e $0 \notin \mathbf{Z}^*$. Desta maneira, o conjunto \mathbf{Z}^* não é fechado com relação ao operador binário $+$.

2.3.2 Grupos

Um *grupo* é um conjunto de elementos que pode ser definido da seguinte maneira.

Definição 2 *Seja G um conjunto de elementos. Seja $*$ um operador binário definido sobre G . Então, o conjunto G fechado sobre o operador $*$ será um grupo $\langle G, * \rangle$ se satisfizer as seguintes condições:*

- *O operador binário $*$ tem que ser associativo, ou seja, para $a, b, c \in G$, teremos*

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

- *Existe um elemento e em G tal que, para todo $x \in G$,*

$$e * x = x * e = x.$$

Este elemento é chamado de elemento identidade de G .

- *Correspondente a cada $a \in G$, existe um elemento a' em G tal que*

$$a * a' = a' * a = e.$$

Este elemento é chamado de inverso de \mathbf{a} .

Um grupo é dito comutativo se seus operadores binários também satisfizerem a seguinte condição:

$$a * b = b * a,$$

para quaisquer $a, b \in G$.

O conjunto de todos os inteiros é um grupo comutativo com relação à adição real, onde o inteiro 0 é o elemento identidade e o inteiro $-a$ é o elemento inverso de a . O conjunto \mathbf{Z}^+ (inteiros não negativos) tem como elemento identidade o número 0, mas não é um grupo com relação à adição, porque não contém, por exemplo, o inverso de 3.

Os exemplos de grupos mostrados anteriormente possuem um número infinito de elementos. Grupos com um número finito de elementos também existem, como mostraremos nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 4 *Considere um grupo $G = \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$, onde m é um inteiro positivo. Considere também a adição real $+$ e um operador binário \oplus definido sobre G de modo que, para quaisquer inteiro i e j pertencentes a G ,*

$$i \oplus j = r,$$

onde r é o resto da divisão de $(i + j)$ por m . O resto r é portanto um inteiro e está entre 0 e $m - 1$, logo pertence a G . Com isso concluímos que G é fechado sobre a operação \oplus , a qual é chamada de adição módulo- m . A Tabela 2.1 mostra para todos os possíveis pares de elementos de G o resultado da operação de adição módulo-3. Pode-se verificar facilmente que $\langle G, \oplus \rangle$ é um grupo comutativo.

Exemplo 5 *Agora vamos considerar \cdot como sendo a operação real de multiplicação. Seja $G^* = \{1, 2, 3, \dots, p - 1\}$, onde p é um número primo. Considere \odot como sendo*

Tabela 2.1: Adição módulo-3

\oplus	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabela 2.2: Multiplicação módulo-5

\odot	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

o operador binário definido sobre G^* da seguinte maneira: para quaisquer elementos $i, j \in G$,

$$i \odot j = r,$$

onde r é o resto da divisão de $(i \cdot j)$ por p . Como p é primo, e é maior do que i e maior do que j , então $i \cdot j$ não é divisível por p , logo o resto r ficará no intervalo $0 < r < p$, e portanto pertence a G^* . Com isso, o conjunto G é fechado sobre a operação binária \odot . Este tipo de operação é conhecida como multiplicação módulo- p . A Tabela 2.2 mostra, para todos os possíveis pares de elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$, o resultado da operação \odot . Pode-se verificar facilmente que $\langle G^*, \odot \rangle$ é um grupo comutativo.

No exemplo anterior é importante notar que se p não for primo, alguns elementos de G^* não terão o inverso, fazendo com que G^* não seja fechado com relação ao operador \odot . Por exemplo, para $p = 4$, o elemento 2 não possui inversa multiplicativa, pois $2 \odot 1 = 2$, $2 \odot 2 = 0 \notin \{1, 2, 3\}$, $2 \odot 3 = 2$. Ou seja, não existe $a \in \{1, 2, 3\}$ tal que $a \odot 2 = 2 \odot a = 1$.

2.3.3 Corpos

Baseado na definição de grupos, apresentaremos agora uma estrutura algébrica muito importante para a teoria de codificação, chamada *corpo*. Um *corpo* é um conjunto onde se pode realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão sem resultar num elemento fora do conjunto. A adição e a multiplicação devem satisfazer as leis da comutação, distribuição e associação. Formalmente, um corpo pode ser definido da seguinte maneira.

Definição 3 *Seja F um conjunto de elementos. Seja $+$ e \cdot os operadores binários de adição e multiplicação. O conjunto F será um corpo $\langle F, +, \cdot \rangle$ se satisfizer as seguintes condições:*

- $\langle F, + \rangle$ é um grupo comutativo cujo elemento identidade é denotado por 0.
- $\langle F^*, \cdot \rangle$ é um grupo comutativo cujo elemento identidade é denotado por 1.
- A multiplicação é distributiva com relação à adição, isto é, para qualquer tripla a, b e c pertencentes a F

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Um corpo cujo número de elementos é finito é chamado de *corpo de Galois* ($\text{GF}(q)$, do inglês: *Galois Field*) em homenagem ao matemático francês Evariste Galois. Quando q for um número primo p , chamaremos este corpo de corpo finito primo ou $\text{GF}(p)$. Quando $q = p^m$, onde m é um inteiro positivo, os corpos são chamados de extensões do corpo finito primo, e será denotado por $\text{GF}(p^m)$. Os códigos convolucionais mostrados na Seção 2.2 têm suas operações realizadas sobre $\text{GF}(2)$.

Capítulo 3

O Canal para o Sistema de Comunicações Móveis

Um sistema de comunicação móvel é aquele em que há um deslocamento relativo entre transmissor e receptor. Alguns exemplos desses sistemas são a telefonia celular, a telefonia fixa sem fio, a comunicação entre uma aeronave e uma torre, etc. O canal que caracteriza a maioria desses sistemas é o canal com desvanecimento. O desvanecimento pode ser classificado como *desvanecimento em larga escala*, relacionado a grandes distâncias, e o *desvanecimento em pequena escala*, relacionado a pequenas distâncias. Um fator que contribui para o desvanecimento em larga escala é o chamado sombreamento, que está relacionado a obstáculos como edifícios, montanhas, etc., os quais colocam o móvel sob uma sombra eletromagnética, fazendo com que o sinal transmitido chegue ao receptor através de difrações e espalhamentos. A descrição do desvanecimento em pequena escala, a partir de agora chamado apenas de desvanecimento, será um pouco mais detalha nas próximas seções por ser um dos focos deste trabalho. Associada ainda a estes dois tipos de desvanecimentos, existe uma perda na potência do sinal devido à distância, entre transmissor e receptor, que varia conforme o ambiente de comunicação. As próximas quatro seções serão dedicadas a conceitos relativos ao desvanecimento e nas duas últimas seções deste capítulo falaremos sobre diversidade e sobre capacidade de canal para sistemas de comunicações móveis com múltiplas entradas e múltiplas saídas, isto é, múltiplas antenas.

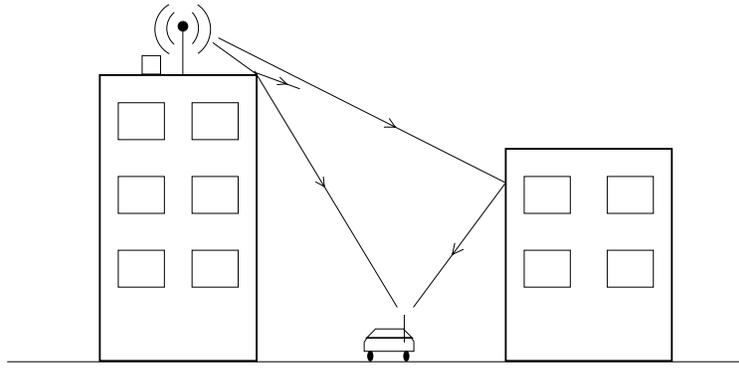


Figura 3.1: Ambiente com multipercursos.

3.1 Características do Canal com Desvanecimento

Para se estudar o canal com desvanecimento de pequena escala deve-se considerar dois fenômenos que são: a propagação por multipercursos e o efeito Doppler. Esses dois fenômenos serão discutidos a seguir.

3.1.1 Propagação por Multipercursos

A propagação por multipercursos ocorre quando um sinal transmitido se propaga por mais de um caminho até chegar ao receptor. O surgimento desses caminhos se dá através da reflexão, difração e espalhamento do sinal transmitido, em obstáculos como postes, árvores, construções, etc. Devido a esses fenômenos, os sinais dos multipercursos chegam ao receptor com diferentes intensidades e diferentes atrasos, resultando numa diferença de fase entre esses sinais. Na antena receptora, os sinais dos multipercursos somam-se fasorialmente, e com isso o sinal resultante poderá ser fortemente atenuado. Com as alterações do ambiente, tais como o movimento do transmissor ou do receptor e de objetos situados nos arredores do canal rádio-móvel, a amplitude do sinal oscilará consideravelmente. Quanto maior a velocidade de movimentação, mais rápidas serão as variações do sinal recebido. A essas variações se dá o nome de *desvanecimento por multipercursos*. Um ambiente contendo multipercursos pode ser visto na Figura 3.1.

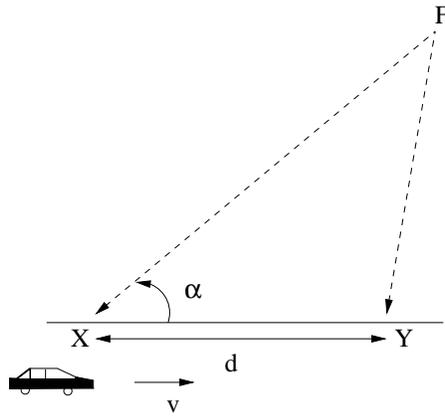


Figura 3.2: Efeito Doppler.

3.1.2 Efeito Doppler

Devido ao movimento relativo entre o transmissor e o receptor, os multipercursos estão sujeitos à percepção de um desvio na frequência. Esse desvio no receptor é chamado de *efeito Doppler* e é proporcional à velocidade de deslocamento relativa entre o transmissor e o receptor. Imagine um terminal móvel percorrendo uma distância d a uma velocidade constante v e recebendo um único sinal com frequência f_c hertz de uma fonte fixa F , como mostra a Figura 3.2. Seja α o ângulo formado entre a direção de movimento do terminal e a direção de incidência do sinal recebido. O desvio Doppler do sinal recebido será dado pela seguinte expressão

$$f_d = \frac{v \cdot f_c}{c} \cdot \cos \alpha \quad (3.1)$$

onde c é a velocidade da luz. Na prática, como os sinais percorrem diferentes caminhos, formando diferentes ângulos de incidência, cada componente de multipercurso sofrerá um desvio diferente na frequência, fazendo com que a largura de faixa do sinal aumente. Esse conceito será um pouco mais detalhado na Seção 3.3.3.

3.2 Resposta ao Impulso do Canal Rádio-Móvel

As variações da amplitude do sinal num ambiente rádio-móvel podem ser analisadas observando-se a resposta ao impulso do canal rádio-móvel. Com essa informação, pode-se analisar e caracterizar os tipos de desvanecimentos existentes neste canal. Duas são

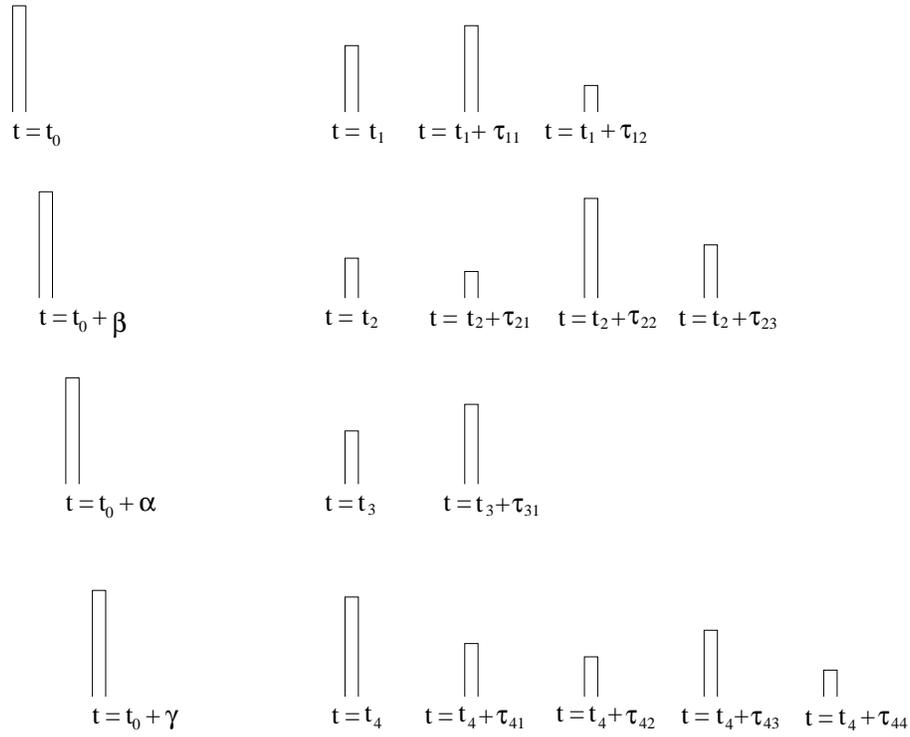


Figura 3.3: Resposta de um canal variante no tempo a um pulso extremamente pequeno.

as características a serem analisadas: a primeira é o espalhamento temporal introduzido no sinal transmitido devido à propagação por multipercursos e a segunda é a variação desta resposta no tempo devido às variações do próprio ambiente rádio-móvel.

Para iniciar essa análise, considere que um pulso extremamente curto, idealmente um impulso, seja transmitido através de um canal com multipercursos variante no tempo. Através da Figura 3.3, pode-se notar que o sinal recebido relativo ao pulso transmitido no instante t_0 é uma composição de vários pulsos com atrasos e amplitudes diferentes. Considere agora que a transmissão deste pulso seja repetida várias vezes. Observando-se novamente a Figura 3.3 pode-se notar que para o mesmo pulso transmitido em instantes diferentes de tempo, o canal responde de forma diferente, ou seja, o tamanho individual de cada pulso, o atraso relativo entre eles e até mesmo o número de pulsos mudam a cada nova transmissão através do canal. Essas mudanças são imprevisíveis, portanto é bem razoável se adotar um modelo estatístico para este tipo de canal. Com este propósito, veremos a análise feita em [23] sobre os efeitos de

um canal com multipercursos em um sinal representado por:

$$x(t) = \text{Re}[u(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (3.2)$$

onde $u(t)$ é a envoltória complexa de $x(t)$ e f_c é a frequência da portadora. Como associado a cada caminho existe um atraso e um fator de atenuação, e ambos são variantes no tempo, o sinal recebido pode ser expresso da seguinte forma

$$y(t) = \sum_n \alpha_n(t)x[t - \tau_n(t)] \quad (3.3)$$

onde $\alpha_n(t)$ é o fator de atenuação do sinal relativo ao n -ésimo caminho e $\tau_n(t)$ é o atraso de propagação do n -ésimo caminho, ambos no instante de tempo t . Substituindo o sinal $x(t)$ da Equação (3.2) na Equação (3.3), teremos

$$y(t) = \text{Re} \left(\sum_n \alpha_n(t)e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} u[t - \tau_n(t)]e^{j2\pi f_c t} \right). \quad (3.4)$$

Fazendo a representação do sinal $y(t)$ em banda básica, teremos

$$r(t) = \sum_n \alpha_n(t)e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} u[t - \tau_n(t)] \quad (3.5)$$

onde $\theta_n(t) = 2\pi f_c \tau_n(t)$ é a fase do sinal $r(t)$. Portanto, a resposta ao impulso do canal banda básica equivalente pode ser descrita por

$$h(\tau, t) = \sum_n \alpha_n(t)e^{-j2\pi f_c \tau_n(t)} \delta[\tau - \tau_n(t)]. \quad (3.6)$$

Como discutido anteriormente, a propagação por multipercursos causa um atraso, τ_n , nos sinais recebidos. Observando-se a Equação (3.5), esses atrasos, de natureza aleatória, causam uma variação aleatória na fase do sinal que resulta no já citado fenômeno de desvanecimento. Existem dois tipos de distribuições que podem descrever a aleatoriedade de boa parte das comunicações por ondas de rádio. Uma delas é a distribuição de Rayleigh, que caracteriza os ambientes onde a comunicação é feita praticamente apenas pelas componentes de multipercursos. Para este caso, a resposta ao impulso $h(\tau, t)$ é modelada por um processo Gaussiano complexo de média nula cuja envoltória $|h(\tau, t)|$ segue uma distribuição de Rayleigh. A função densidade de probabilidade Rayleigh de uma variável aleatória x , mostrada na Figura 3.4, é dada por:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & \text{para } 0 \leq x < \infty \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

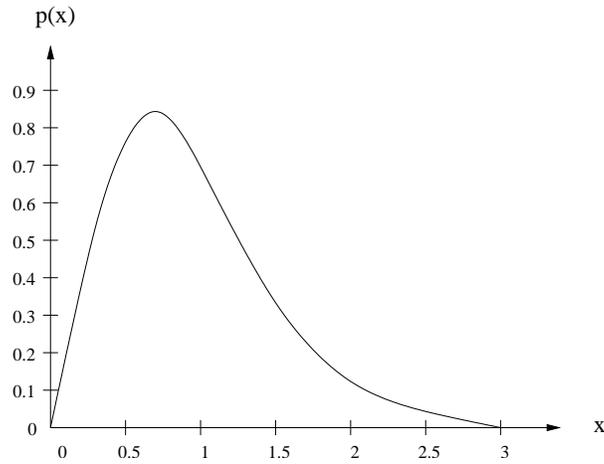


Figura 3.4: Função densidade de probabilidade de Rayleigh.

onde σ é o desvio padrão e σ^2 é a variância. Neste caso o canal é chamado de *canal com desvanecimento de Rayleigh*. Em alguns ambientes de comunicações móveis, tais como a comunicação via satélite, existe uma predominância de uma componente direta do sinal. Para esses casos, o sinal recebido será uma composição da componente direta do sinal com as componentes de multipercursos. A envoltória das componentes de multipercursos segue uma distribuição do tipo Rayleigh, e quando somadas a uma componente de linha de visada direta constante, produzem um sinal cuja envoltória segue uma distribuição de Rice. Esses tipos de canais são chamados de *canais com desvanecimento de Rice*. A função densidade de probabilidade Rician de uma variável aleatória x , mostrada na Figura 3.5, é:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) J_0\left(\frac{A \cdot x}{\sigma^2}\right), & \text{para } A \geq 0, x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

onde A é a amplitude do sinal dominante e $J_0(\bullet)$ é a função Bessel de primeiro tipo e ordem zero. A variável R , mostrada na Figura 3.5, é chamada de fator Riciano e é dado por $R = A^2/2\sigma^2$. Note que quando não há linha de visada direta entre o transmissor e o receptor, ou seja, $A = 0 \Rightarrow J_0(0) = 1$, a função densidade de probabilidade em (3.8) se reduz à função densidade de probabilidade de Rayleigh da Equação (3.7).

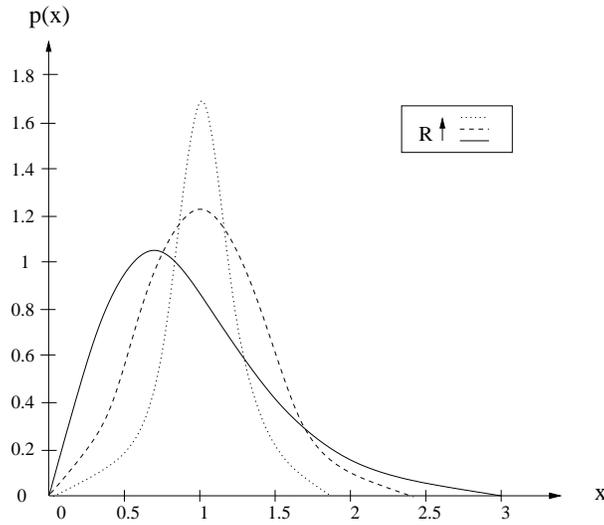


Figura 3.5: Função densidade de probabilidade de Rice para vários R .

3.3 Parâmetros do Canal Rádio-Móvel

Os parâmetros do canal rádio-móvel têm uma fundamental importância no projeto de sistemas de comunicações, pois através da relação destes com as características do sinal transmitido, pode-se classificar o canal de acordo com suas distorções.

3.3.1 Espalhamento Temporal

Supondo-se que a resposta ao impulso do canal em banda básica equivalente, $h(\tau, t)$, seja um processo estacionário no sentido amplo, pode-se definir a função de autocorrelação de $h(\tau, t)$ como:

$$S_h(\tau_1, \tau_2; \Delta t) = \frac{1}{2} E[h^*(\tau_1; t)h(\tau_2; t + \Delta t)], \quad (3.9)$$

onde $*$ denota o conjugado complexo. Como na maioria dos canais de rádio a amplitude e a fase dos sinais recebidos, oriundos de caminhos diferentes, são descorrelacionadas, a equação (3.9) pode ser expressa por

$$\frac{1}{2} E[h^*(\tau_1; t)h(\tau_2; t + \Delta t)] = S_h(\tau_1; \Delta t)\delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (3.10)$$

Fazendo $\Delta t = 0$, a função de autocorrelação $S_h(\tau; 0) \equiv S_h(\tau)$ representa a potência média na saída do canal em função do tempo de atraso τ . Δt representa a diferença

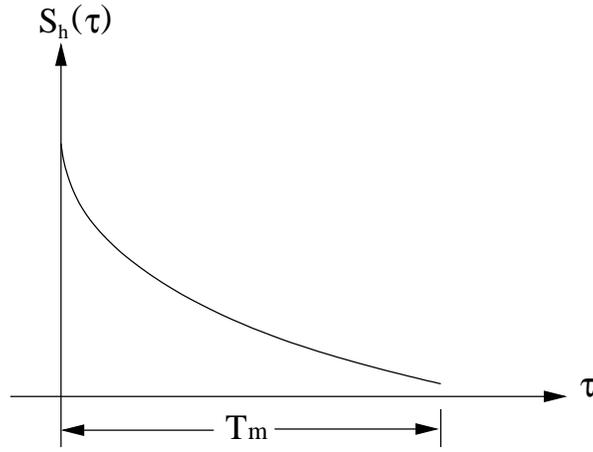


Figura 3.6: Perfil de intensidade de multipercurso.

entre duas observações do canal (ver Figura 3.3). A função $S_h(\tau)$ é mais conhecida como *perfil de intensidade de multipercurso* ou *espectro de potência de atraso*. A Figura 3.6 mostra o comportamento típico desta função, onde o tempo T_m entre a primeira e a última componente significativa de multipercurso é chamado de *espalhamento temporal*.

3.3.2 Faixa de Coerência

De maneira similar, pode-se analisar o espalhamento temporal no domínio da frequência [23] tomando-se a seguinte transformada bidimensional de (3.10):

$$\begin{aligned}
 S_H(f_1, f_2; \Delta t) &\triangleq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[h^*(\tau_1; t)h(\tau_2; t + \Delta t)]e^{j2\pi(f_1\tau_1 - f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\tau_1; \Delta t)\delta(\tau_1 - \tau_2)e^{j2\pi(f_1\tau_1 - f_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\tau_1; \Delta t)e^{j2\pi(f_1 - f_2)\tau_1} d\tau_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\tau_1; \Delta t)e^{-j2\pi\Delta f\tau_1} d\tau_1 \equiv S_H(\Delta f; \Delta t)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $\Delta f = f_2 - f_1$. A função $S_H(\Delta f; \Delta t)$ em (3.11) é denotada *função de correlação com espaçamento freqüencial e temporal* e representa a correlação das respostas do canal a duas componentes de freqüências espaçadas de Δf e transmitidas com um atraso relativo no tempo Δt . Considerando que $\Delta t = 0$, as funções $S_H(\Delta f; 0) \equiv S_H(\Delta f)$ e

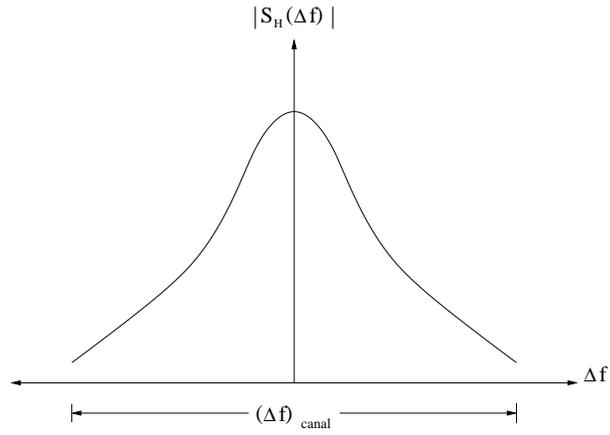


Figura 3.7: Função de correlação das diferenças de frequências.

$S_h(\tau; 0) \equiv S_h(\tau)$ podem ser relacionadas por:

$$S_H(\Delta f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_h(\tau) e^{-j2\pi\Delta f\tau} d\tau. \quad (3.12)$$

A faixa de frequência $(\Delta f)_{canal}$, mostrada na Figura 3.7, é denominada de *faixa de coerência do canal* e representa a faixa de frequência sobre a qual as componentes espectrais de um sinal têm o mesmo ganho, ou seja, é a faixa na qual essas componentes são fortemente correlacionadas. Se um sinal transmitido tiver a largura de faixa menor que a banda de coerência do canal, este não sofrerá distorções e o canal será considerado *não seletivo em frequência*. Por outro lado, se a largura de faixa do sinal for maior que $(\Delta f)_{canal}$, o canal é dito *seletivo em frequência* e o sinal sofrerá distorções, mais conhecidas como *interferência intersimbólica*. A faixa de coerência do canal é inversamente proporcional ao espalhamento temporal como mostra a Equação (3.13):

$$(\Delta f)_{canal} \approx \frac{1}{T_m}. \quad (3.13)$$

3.3.3 Espalhamento Doppler e Tempo de Coerência

Nesta sub-seção, trataremos de parâmetros que estão relacionados com a variabilidade temporal do ambiente rádio-móvel. Essas variações são oriundas do movimento relativo entre transmissor e receptor e/ou do movimento de objetos situados em torno destes. Devido aos vários caminhos existentes entre transmissor e receptor cada multipercorso

sofre um efeito Doppler diferente, fazendo com que o espectro do sinal recebido se espalhe por uma faixa de frequência maior do que a faixa original do sinal. Uma maneira de relacionar o efeito Doppler com as variações temporais do canal é através da transformada de Fourier da função $S_H(\Delta f; \Delta t)$ em relação à variável Δt . Ou seja,

$$D_H(\Delta f; f_D) = \int_{-\infty}^{\infty} S_H(\Delta f; \Delta t) e^{-j2\pi f_D \Delta t} d\Delta t. \quad (3.14)$$

Fazendo $\Delta f = 0$, teremos $D_H(0; f_D) \equiv D_H(f_D)$ e a relação anterior se torna:

$$D_H(f_D) = \int_{-\infty}^{\infty} S_H(\Delta t) e^{-j2\pi f_D \Delta t} d\Delta t. \quad (3.15)$$

A função $D_H(f_D)$ é conhecida como *espectro de potência doppler do canal* e fornece a intensidade do sinal em função da frequência Doppler f_D . Esse espectro pode ser visto na Figura 3.8 (b), onde B_D é chamado de *espalhamento Doppler do canal*. Através do espalhamento Doppler podemos retirar um parâmetro que informa a variabilidade temporal do canal. Esse parâmetro é conhecido como *tempo de coerência*, $(\Delta t)_{canal}$, e pode ser determinado através da *função de correlação das variações temporais*, mostrada na Figura 3.8 (a), a qual é obtida pela transformada inversa de Fourier do espectro de potência Doppler. O tempo de coerência é inversamente proporcional ao espalhamento Doppler, ou seja,

$$(\Delta t)_{canal} \approx \frac{1}{B_D}. \quad (3.16)$$

Durante este tempo, a resposta ao impulso do canal permanece invariante fazendo com que os sinais transmitidos dentro deste intervalo de tempo tenham um desvanecimento fortemente correlacionado. Caso o intervalo de tempo que separa dois sinais seja maior que o tempo de coerência, esse sinais serão afetados independentemente pelo canal.

3.4 Classificação dos Canais para Comunicações Móveis: Tipos de Desvanecimento

Nesta seção faremos uma classificação dos canais para comunicações móveis de acordo com a relação entre as características do sinal transmitido e os parâmetros do canal rádio-móvel. Os modelos que serão apresentados nesta seção estão relacionados com os desvanecimentos devidos ao espalhamento temporal e ao espalhamento Doppler. Para fazer esta classificação faremos uma breve definição dos tipos de desvanecimento [24].

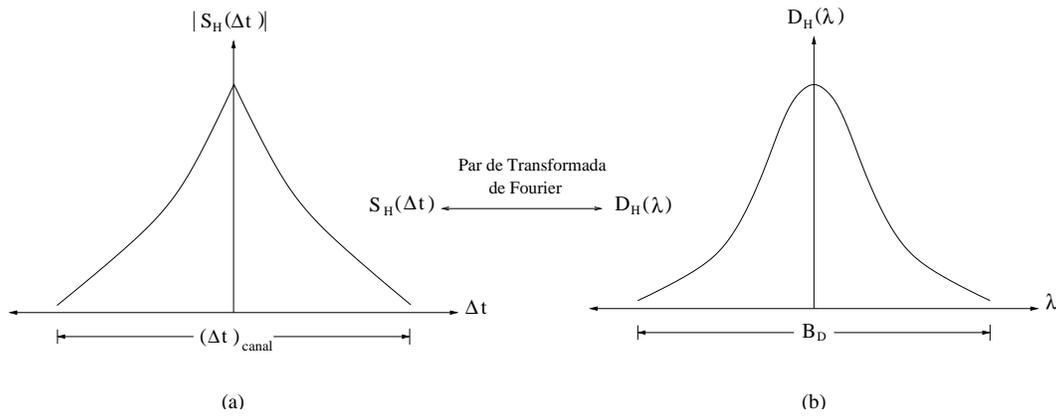


Figura 3.8: Função de correlação das variações temporais e espectro de potência Doppler, respectivamente.

3.4.1 Desvanecimento Plano

Neste tipo de desvanecimento a largura de faixa de frequência na qual se tem um ganho constante e uma resposta de fase linear é maior do que a largura de faixa do sinal transmitido. Nesta situação todas as componentes espectrais do sinal transmitido estarão sob um desvanecimento “plano”, e assim as características espectrais do sinal transmitido chegam ao receptor inalteradas.

Para que um ambiente rádio-móvel esteja sob um desvanecimento plano, o sinal transmitido tem que possuir as seguintes características:

$$B_{sinal} \ll (\Delta f)_{canal} \quad (3.17)$$

e

$$T_{sinal} \gg T_m. \quad (3.18)$$

onde B_{sinal} e T_{sinal} são a largura de faixa e a duração de um símbolo do sinal, respectivamente.

3.4.2 Desvanecimento Seletivo em Frequência

Para este desvanecimento a faixa de frequência na qual o canal tem um ganho constante e uma resposta de fase linear é menor do que a largura de faixa do sinal transmitido. Por este motivo, o espalhamento temporal do sinal torna-se maior do que a duração

de um símbolo do sinal transmitido, e com isso o sinal recebido em um determinado instante terá uma interferência de sinais transmitidos em instantes de tempo anteriores, causando neste sistema uma interferência intersimbólica. Este tipo de interferência faz com que o espectro do sinal recebido seja distorcido em relação ao sinal enviado. Este canal apresenta desvanecimento seletivo em frequência.

Para que um ambiente rádio-móvel esteja sob um desvanecimento seletivo em frequência, o sinal transmitido deve apresentar as seguintes características:

$$B_{\text{sinal}} > (\Delta f)_{\text{canal}} \quad (3.19)$$

e

$$T_{\text{sinal}} < T_m. \quad (3.20)$$

3.4.3 Desvanecimento Rápido

O desvanecimento rápido ocorre quando o intervalo de tempo em que ocorre uma variação significativa das características do canal é menor do que o período de símbolo. Esta variação está associada a uma dispersão na frequência que induz uma distorção no sinal recebido.

Para que o canal apresente desvanecimento rápido, o sinal transmitido deve apresentar as seguintes características:

$$T_{\text{sinal}} > (\Delta t)_{\text{canal}} \quad (3.21)$$

e

$$B_{\text{sinal}} < B_D. \quad (3.22)$$

3.4.4 Desvanecimento Quase-Estático

Um canal possui um desvanecimento quase-estático quando suas características variam muito lentamente em relação à duração de um símbolo, ou seja, durante a transmissão de um bloco contendo um certo número de símbolos o canal pode ser considerado estático.

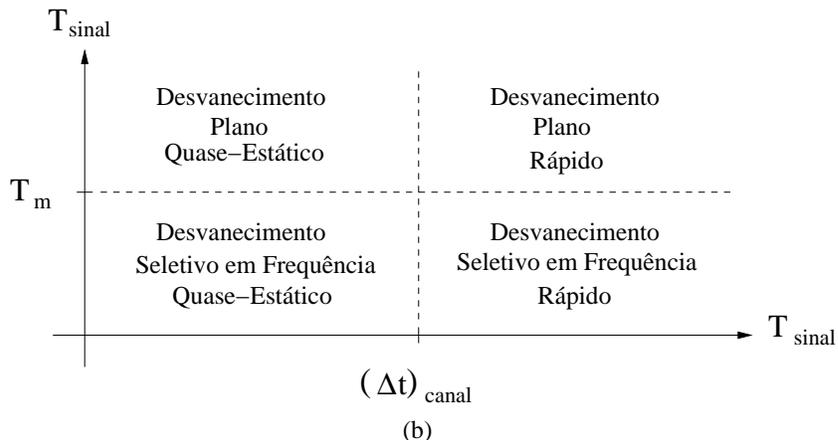
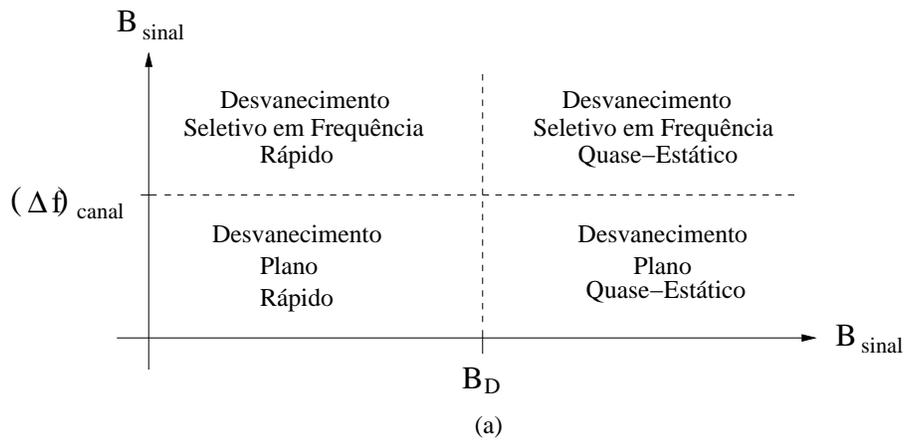


Figura 3.9: Classificação dos canais de comunicações móveis.

Um canal é modelado pelo desvanecimento quase-estático se o sinal transmitido apresentar as seguintes características:

$$T_{sinal} \ll (\Delta t)_{canal} \quad (3.23)$$

e

$$B_{sinal} \gg B_D. \quad (3.24)$$

3.4.5 Classificação dos Canais

Com a definição dos tipos de desvanecimento presentes no canal rádio-móvel, podemos classificar os canais de comunicações móveis de acordo com a Figura 3.9. Na Figura 3.9 (a) os canais são classificados comparando-se os parâmetros do canal com a largura de

faixa do sinal transmitido, e na Figura 3.9 (b) a classificação é feita pela comparação entre os parâmetros do canal e a duração de um símbolo do sinal. Devemos chamar a atenção para o *canal com desvanecimento plano, quase-estático*, que será o modelo de canal considerado para o projeto dos códigos no Capítulo 5. Neste canal a duração de um símbolo tem que ser ao mesmo tempo maior do que o espalhamento temporal e menor do que o tempo de coerência do canal.

3.5 Diversidade

Em um canal com desvanecimento, para se obter a mesma probabilidade de erro conseguida em um canal com ruído Gaussiano branco aditivo (AWGN), o transmissor teria que proporcionar muito mais potência de transmissão, e isto em alguns casos não é uma alternativa prática devido às limitações principalmente no peso e no tamanho do aparelho. Uma alternativa mais simples para se combater o desvanecimento é utilizar a técnica de diversidade. Esta técnica geralmente fornece ao receptor réplicas da informação transmitida que experimentam desvanecimentos descorrelacionados. Neste caso, se uma componente do sinal estiver sob um desvanecimento profundo, algumas das outras componentes terão uma grande probabilidade de sofrer uma atenuação mais leve. Em sistemas de comunicações móveis esta técnica pode ser explorada de diversas maneiras. Alguns exemplos de diversidade serão citados a seguir.

3.5.1 Tipos de Diversidade

- *Diversidade Temporal*: Na diversidade temporal réplicas do sinal são enviadas ao receptor de tal forma que o tempo de separação entre estas seja maior do que o tempo de coerência do canal, fazendo com que os desvanecimentos que atuem nos sinais sejam descorrelacionados. Um exemplo simples desta técnica é obtido com a utilização de um código de repetição, onde a mesma informação pode ser transmitida repetidamente em instantes de tempo diferentes.
- *Diversidade Espacial*: Na diversidade espacial réplicas do sinal são transmitidas de locais diferentes de tal forma que haja uma descorrelação entre os caminhos

percorridos pelo sinal. Essa técnica geralmente é implementada utilizando-se diferentes antenas na transmissão. Para que haja uma descorrelação, estas antenas devem estar separadas de pelo menos 0.5 comprimento de onda.

- *Diversidade em Frequência*: A diversidade em frequência segue o mesmo princípio das outras técnicas, ou seja, réplicas do sinal são enviadas ao receptor por portadoras distintas de tal forma que a separação em frequência destas réplicas seja maior do que a faixa de coerência, para que no receptor os sinais cheguem afetados por desvanecimentos descorrelacionados.

3.5.2 Desempenho da Técnica de Diversidade

Agora mostraremos quantitativamente a melhora no desempenho de um sistema que utiliza uma técnica de diversidade na transmissão de um sinal. Neste método, transmitiremos L réplicas de um sinal as quais estarão experimentando L desvanecimentos independentes.

Para começar esta análise, considere que a potência do ruído Gaussiano seja a mesma nos L “ramos” de diversidade. Considere também que cada ramo tem a mesma relação sinal-ruído média dada por [25]:

$$SNR = E[\alpha^2] \frac{E_s}{N_0}, \quad (3.25)$$

onde α é o ganho em cada aresta. Seja SNR_i , para $i = 1, 2, \dots, L$, a relação sinal-ruído instantânea medida no i -ésimo ramo de diversidade, então

$$SNR_i = \alpha_i^2 \frac{E_s}{N_0}. \quad (3.26)$$

A probabilidade de uma SNR_i estar abaixo de um limiar γ é dada por:

$$P(SNR_i \leq \gamma) = \int_0^\gamma p_i(x) dx \quad (3.27)$$

onde $p_i(x)$ é a função densidade de probabilidade (pdf) de SNR_i . Essa função é supostamente a mesma para todos os L ramos. Como os ramos são independentes, $p_i(x)$ não depende de i , a probabilidade de todos eles estarem abaixo do limiar γ será:

$$P(SNR_1 \leq \gamma, SNR_2 \leq \gamma, \dots, SNR_L \leq \gamma) = [P(SNR_i \leq \gamma)]^L. \quad (3.28)$$

Como $P(SNR_i \leq \gamma) < 1$, quanto mais aumentarmos L menor será a probabilidade de todas as réplicas do sinal estarem abaixo do limiar γ . Portanto, com alta probabilidade, haverá pelo menos uma réplica do sinal que não será significativamente afetada pelo desvanecimento.

3.6 Capacidade do Canal Rádio-Móvel: Múltiplas Antenas

Nesta seção analisaremos um resultado importante da teoria da informação: canais com múltiplas antenas transmissoras e receptoras (MIMO) possuem uma capacidade de canal muito maior do que a dos canais que utilizam apenas uma antena transmissora e uma receptora (SISO).

A capacidade de canal de um canal está relacionada com a máxima quantidade de informação que se pode transmitir em cada uso do canal. A partir da análise mostrada no Apêndice A, podemos concluir que quando o canal é caracterizado por um ambiente do tipo Rayleigh com múltiplas antenas, com desvanecimentos independentes, capacidades de canal muito superiores ao caso de sistemas com uma única antena transmissora e receptora podem ser obtidas. Isto justifica o estudo de técnicas de codificação específicas para sistemas MIMO com o objetivo de se atingir, ou de aproximar-se desta capacidade. No próximo capítulo estudaremos uma nova categoria de códigos onde seus critérios de projetos levam em conta o número de antenas transmissoras empregadas no sistema.

Capítulo 4

Códigos Espaço-Temporais

Em um sistema de comunicações empregando n antenas transmissoras e m antenas receptoras, os códigos espaço-temporais proporcionam um excelente desempenho com altas eficiências espectrais, combinando as vantagens da diversidade espacial (através do uso de múltiplas antenas) e da diversidade temporal (através do uso de códigos de treliça) em canais com desvanecimento. Os STC, que foram propostos por Tarokh *et.al.* [10] em 1998, quando transmitidos através de canais com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático, devem ser construídos com base em dois critérios, os quais buscam maximizar o ganho de diversidade e o ganho de codificação do sistema. Esses ganhos estão relacionados a parâmetros associados a matrizes formadas pelas diferenças de possíveis pares de seqüências transmitidas. Uma das principais dificuldades em se obter esses códigos vem do fato de que seus critérios de projeto são baseados na estrutura algébrica do domínio complexo de sinais em banda base, e não numa estrutura algébrica finita, como um corpo de Galois, o que torna difícil a sistematização da busca computacional de bons códigos. Alguns resultados recentes [14], [12] e [29] têm apresentado procedimentos sistemáticos interessantes para a busca de bons STC.

A Seção 4.1 apresentará o modelo do sistema espaço-temporal com múltiplas antenas, em seguida a Seção 4.2 mostrará o desenvolvimento feito em [10] para se chegar aos critérios de projeto de códigos espaço-temporais. Finalmente, na Seção 4.3, apresentaremos dois exemplos de STC para as constelações PSK retirados de [10], e através de simulações mostraremos o excelente desempenho destes códigos em canais

com desvanecimento, enquanto sua complexidade pode ser comparada à complexidade dos códigos usados em canais Gaussianos.

4.1 Modelo do Sistema

Considere um sistema de comunicação móvel com desvanecimento de Rayleigh plano quase-estático empregando n antenas transmissoras e m antenas receptoras como mostrado na Figura 4.1. No transmissor a seqüência de informação é codificada pelo codificador de canal. Em seguida os dados codificados entram em um conversor serial/paralelo e são divididos em n subseqüências. Essas subseqüências são então mapeadas em n seqüências de símbolos de uma constelação. Em cada instante de tempo t , um símbolo de cada seqüência é enviado por uma antena, resultando em n transmissões simultâneas. No receptor cada antena recebe em cada instante de tempo t uma superposição dos n sinais transmitidos no instante de tempo t . Desta maneira o sinal d_t^j recebido pela j -ésima antena no instante t é dado por:

$$d_t^j = \sum_{i=1}^n h_{i,j} c_t^i \sqrt{E_s} + \eta_t^j \quad (4.1)$$

onde c_t^i é o sinal transmitido pela i -ésima antena no instante t , E_s é a energia média do sinal transmitido, η_t^j é um ruído Gaussiano branco complexo de média zero e variância $N_0/2$ por dimensão e $h_{i,j}$ denota o desvanecimento presente no caminho da i -ésima antena transmissora para a j -ésima antena receptora. Nesta dissertação consideraremos que os desvanecimentos são amostras independentes de um processo aleatório Gaussiano complexo de média zero e variância 0.5 por dimensão. Na prática, para que os desvanecimentos sejam independentes, as antenas têm que estar separadas de pelo menos algumas unidades de comprimento de onda. Além disso, vamos supor que o receptor conheça perfeitamente o canal e que o algoritmo de Viterbi com métrica Euclideana seja usado no decodificador.

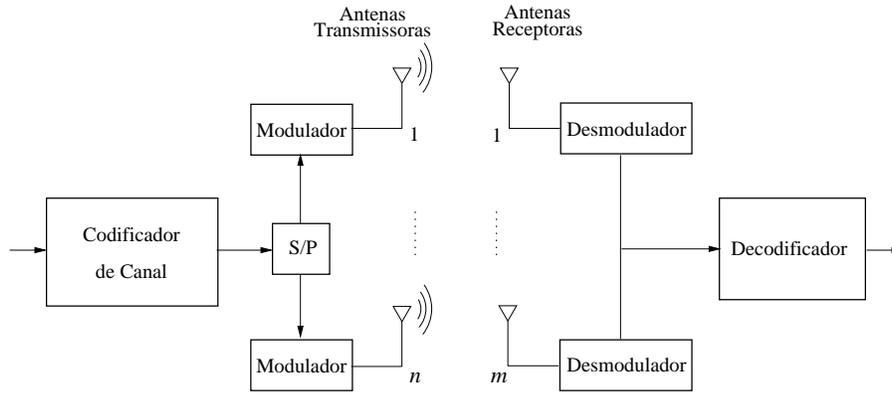


Figura 4.1: Modelo do sistema espaço-temporal.

4.2 Critérios de Projeto de Códigos Espaço-Temporal

Nesta seção mostraremos a análise feita por Tarokh [10] para se chegar aos critérios de projeto de STC para o canal de comunicações móveis com desvanecimento de Rayleigh plano quase-estático. Os critérios de projeto para sistemas de comunicações que são modelados pelo desvanecimento rápido, assim como os que são modelados por uma mistura dos desvanecimento lento e rápido, são diferentes dos que serão apresentados neste trabalho e podem ser encontrados em [10]. Antes de começar o desenvolvimento dos critérios de projeto, definiremos algumas notações e algumas propriedades de álgebra linear, as quais serão utilizadas no decorrer desta seção. Considere os vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ pertencentes aos complexos \mathcal{C}^k . O produto interno entre \mathbf{x} e \mathbf{y} é dado por:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k x_i \bar{y}_i \quad (4.2)$$

onde \bar{y}_i denota o complexo conjugado de y_i . Se $A = A^*$, onde A^* denota o conjugado transposto de A , então A é uma matriz Hermitiana. Para qualquer vetor complexo $\mathbf{x}_{1 \times n}$, a matriz A será definida não negativa se $\mathbf{x}A\mathbf{x}^* \geq 0$. Uma matriz $V_{n \times n}$ é unitária se $VV^* = I$, onde I é a matriz identidade. Uma matriz $B_{n \times 1}$ é raiz quadrada de A se $BB^* = A$. A seguir mostraremos as propriedades de álgebra utilizadas nesta seção [26].

- Um autovetor \mathbf{v} de uma matriz $A_{n \times n}$ correspondente a um autovalor λ é um vetor $1 \times n$ de comprimento unitário tal que $\mathbf{v}A = \lambda\mathbf{v}$. O espaço vetorial criado

pelos autovetores de A correspondente ao autovalor zero, tem dimensão $n - r$, onde r é o posto da matriz A .

- Qualquer matriz A com raiz quadrada B é definida não negativa.
- Para qualquer matriz Hermitiana A definida não negativa, existe uma matriz triangular inferior quadrada B tal que $BB^* = A$.
- Dada uma matriz Hermitiana A , os autovetores de A geram um espaço complexo n -dimensional. Além disso, existe uma matriz unitária V e uma matriz diagonal D tal que $VAV^* = D$. As linhas de V formam uma base ortonormal de \mathcal{C}^n , dada pelos autovetores de A . Os elementos da diagonal de D são os autovalores λ_i de A incluindo os autovalores múltiplos.
- Os autovalores de uma matriz Hermitiana definida não negativa são reais e não negativos.

4.2.1 Critérios de Projeto de Códigos Espaço-Temporais para Canais com Desvanecimento Rayleigh Plano Quase-Estático

Neste canal o desvanecimento contido no caminho entre a i -ésima antena transmissora e a j -ésima antena receptora permanece constante durante um *frame*, isto é, durante l transmissões, e muda independentemente de um frame para o outro.

Para o sistema descrito na Seção 4.1, a probabilidade de erro com relação ao par (do inglês: *pairwise error probability*), denotada por $P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e})$, é definida como a probabilidade de um decodificador de máxima verossimilhança decidir-se erroneamente pela palavra

$$\mathbf{e} = e_1^1 e_1^2 \cdots e_1^n e_2^1 e_2^2 \cdots e_2^n \cdots e_l^1 e_l^2 \cdots e_l^n$$

quando a palavra código transmitida foi

$$\mathbf{c} = c_1^1 c_1^2 \cdots c_1^n c_2^1 c_2^2 \cdots c_2^n \cdots c_l^1 c_l^2 \cdots c_l^n,$$

dado que os parâmetros do desvanecimento do canal, $h_{i,j}$, são conhecidos. Esta probabilidade pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e} | h_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m) \\ \leq \exp(-d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e})E_s/4N_0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $N_0/2$ é a variância do ruído por dimensão e

$$d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^l \left| \sum_{i=1}^n h_{i,j}(c_t^i - e_t^i) \right|^2. \quad (4.4)$$

Após algumas manipulações a Equação (4.4) pode ser reescrita como:

$$d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n h_{i,j} \overline{h_{i',j}} \sum_{t=1}^l (c_t^i - e_t^i) \overline{(c_t^{i'} - e_t^{i'})} \quad (4.5)$$

Definindo-se $\Omega_j = (h_{1,j}, h_{2,j}, \dots, h_{n,j})$ e $A(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{t=1}^l (c_t^p - e_t^p) \overline{(c_t^q - e_t^q)}$, para $1 \leq p, q \leq n$, a Equação (4.5) se torna:

$$d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{j=1}^m \Omega_j A \Omega_j^*. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.3) obtemos a seguinte expressão para a probabilidade de erro com relação ao par

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e} | h_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m) \\ \leq \prod_{j=1}^m \exp(-\Omega_j A(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \Omega_j^* E_s / 4N_0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ é Hermitiana, e

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \triangleq \begin{pmatrix} e_1^1 - c_1^1 & e_2^1 - c_2^1 & \dots & e_l^1 - c_l^1 \\ e_1^2 - c_1^2 & e_2^2 - c_2^2 & \dots & e_l^2 - c_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^n - c_1^n & e_2^n - c_2^n & \dots & e_l^n - c_l^n \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

é a raiz quadrada de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, então os autovalores de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ são números reais e não negativos.

O próximo passo é expressar $d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ em termos dos autovalores da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$. Como já mencionado, para cada matriz Hermitiana $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ existe uma matriz unitária V e uma matriz diagonal real D tal que $VAV^* = D$. Se a matriz V for unitária, então $VV^* = I$ e portanto

$$\begin{aligned} VA(\mathbf{c}, \mathbf{e})V^* &= D \Rightarrow \\ A(\mathbf{c}, \mathbf{e}) &= V^*DV \Rightarrow \\ \Omega_j A(\mathbf{c}, \mathbf{e})\Omega_j^* &= (\Omega_j V^*)D(V\Omega_j^*). \end{aligned}$$

Definindo $(\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \dots, \beta_{n,j}) = \Omega_j V^*$, podemos chegar à seguinte expressão:

$$\Omega_j A(\mathbf{c}, \mathbf{e})\Omega_j^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\beta_{i,j}|^2. \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) em (4.7) teremos a seguinte expressão para o limitante superior dado em (4.3):

$$\prod_{j=1}^m \exp\left(-\frac{E_s}{4N_0} \sum_{i=1}^n \lambda_i |\beta_{i,j}|^2\right). \quad (4.10)$$

Como $h_{i,j}$ são modelados como amostras independentes de um processo aleatório Gaussiana complexo de média zero e variância 0.5 por dimensão, e V é unitária, então $\beta_{i,j}$ também serão variáveis aleatórias Gaussianas complexas com média zero e variância 0.5 por dimensão. Portanto podemos tirar o valor médio da Equação (4.10) e obter um limitante superior para probabilidade média de erro com relação ao par dado por:

$$P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e}) \leq \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i (E_s/4N_0))} \right)^m. \quad (4.11)$$

Seja r o posto da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, então o espaço vetorial gerado pelos autovetores de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ correspondentes aos autovalores zero tem dimensão $n - r$. Portanto os autovalores não nulos de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ são, digamos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, e com isso a Equação (4.11) pode ser aproximada por:

$$P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e}) \leq \left(\prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{-m} \left(\frac{E_s}{4N_0} \right)^{-rm}. \quad (4.12)$$

Com base na Equação (4.12) podemos observar os ganhos de diversidade e de codificação do sistema. O ganho de diversidade rm é o expoente da relação sinal ruído E_s/N_0 e determina a inclinação na curva da probabilidade de erro. O ganho de codificação, $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)^{1/r}$, é uma medida aproximada do ganho sobre o sistema não codificado e representa um deslocamento horizontal na curva da probabilidade de erro. Através desta análise Tarokh *et.al.* [10] chegou a dois critérios de projeto para o canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático, a saber:

- *O Critério do Posto:* Neste critério o parâmetro a ser maximizado é o posto mínimo r da matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ com relação a todos os pares distintos de palavras códigos \mathbf{c} e \mathbf{e} . O ganho de diversidade é $rm \leq nm$, com igualdade se o posto for completo, ou seja, $r = n$.
- *O Critério do Determinante:* Para um dado ganho de diversidade rm , a meta deste critério é maximizar a média geométrica mínima dos autovalores não nulos da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)^{1/r}$, com relação a todos os pares distintos de palavras códigos \mathbf{c} e \mathbf{e} . Este representa o ganho de codificação.

Um ponto interessante a ser analisado deste resultado é que o projeto desses códigos independem do número de antenas receptoras. Por isso um código que proporciona uma diversidade r na transmissão pode ser chamado de um *r-código espaço-temporal*.

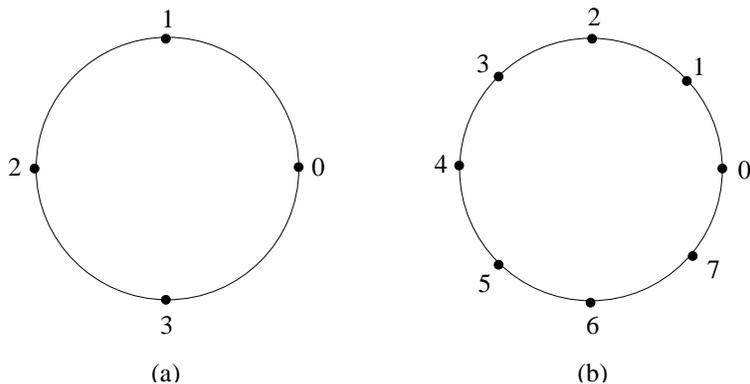


Figura 4.2: Constelações 4-PSK (a) e 8-PSK (b).

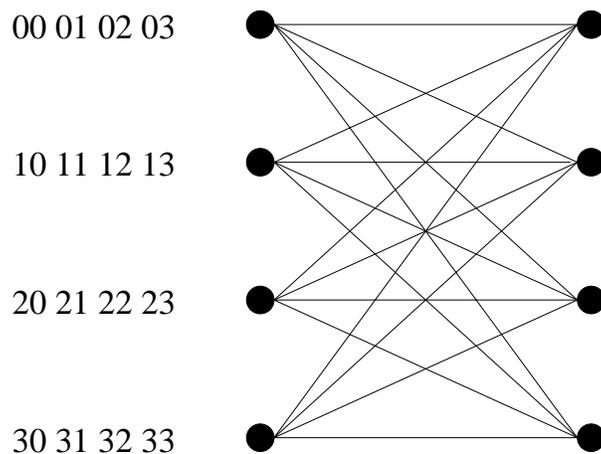


Figura 4.3: 2-código espaço-temporal, 4-PSK, 2 bits/s/Hz.

4.3 Construção dos Códigos

Nesta seção mostraremos dois exemplos de STC obtidos por Tarokh *et.al.*, construídos com base nos critérios do *posto* e do *determinante*. Mostraremos também o procedimento para se determinar estes ganhos, e, em seguida, observaremos seus desempenhos em um canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático, através de suas curvas de probabilidade de erro.

Considere a constelação 4-PSK mostrada na Figura 4.2 (a). A treliça da Figura 4.3 descreve um STC para o 4-PSK com duas antenas transmissoras. O ganho de diversidade é $rm = 2$ e o ganho de codificação é $(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} = 2$. A eficiência espectral para este código é de $\log_2(4) = 2$ b/s/Hz. A treliça mostrada na Figura 4.4 refere-

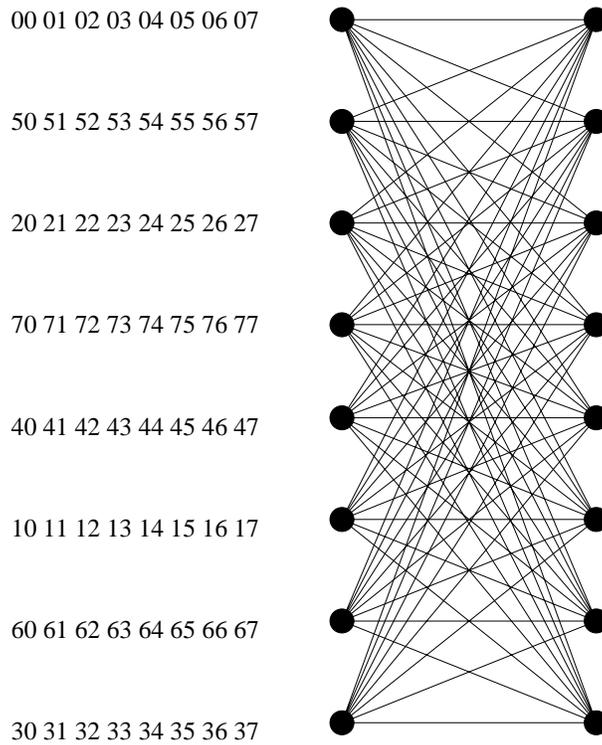


Figura 4.4: 2-código espaço-temporal, 8-PSK, 3 bits/s/Hz.

se a um STC que usa duas antenas transmissoras para transmitir símbolos de uma constelação 8-PSK, vista na Figura 4.2 (b), através do canal. O receptor é equipado com uma antena. Este código proporciona um ganho de diversidade de 2 e um ganho de codificação de 1.4, com uma eficiência espectral de 3 b/s/Hz. Nestas treliças cada par de símbolos no canto esquerdo da treliça representa, respectivamente, o sinal transmitido pela primeira e segunda antenas. Ao lado esquerdo de cada estado, no canto esquerdo da treliça, o número de pares de símbolos é igual ao número de ramos saindo deste estado. O par de símbolos mais à esquerda rotula o ramo mais acima; o par de símbolos seguinte rotula o ramo imediatamente abaixo, e assim por diante.

Para se chegar aos ganhos de diversidade dos códigos citados anteriormente foi necessário verificar se todas as matrizes $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, referentes aos possíveis pares distintos de seqüências que iniciam em estados iguais e terminam em estados iguais, tivessem posto completo. Após essa verificação, foi preciso calcular a média geométrica dos autovalores referente a cada matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, para finalmente escolher a menor média dentre elas. Como exemplo, mostraremos o cálculo do posto e da média geométrica dos

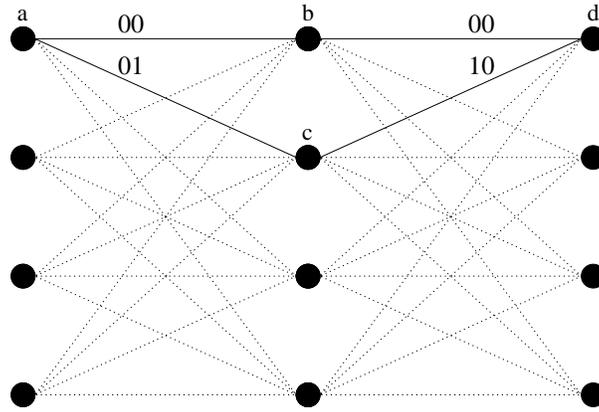


Figura 4.5: Par de seqüências.

autovalores de uma matriz A referente ao par de seqüências mostrados na treliça da Figura 4.5. Considere que as seqüências têm comprimento $l = 2$. A Figura 4.5 mostra os caminhos percorridos pela seqüência correta, abd , e pela seqüência errada, acd .

Através da Equação (4.8) e dos símbolos complexos da constelação 4-PSK, obtemos a seguinte matriz:

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 0 & j - 1 \\ j - 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

A partir de B podemos facilmente determinar a matriz A como sendo

$$A(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

A matriz A tem posto $r = 2$ e autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, com uma média geométrica de seus autovalores igual a 2. É bom lembrar que para se determinar os ganhos de diversidade e codificação, este procedimento deve ser feito para todos os possíveis pares distintos de seqüências na treliça.

Com o objetivo de analisar o desempenho destes códigos em um canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático, nós reproduzimos as simulações feitas em [10] para os dois exemplos citados nesta seção. As simulações, que podem ser vistas na Figura 4.6, foram feitas transmitindo-se frames de 130 símbolos sob um desvanecimento constante, independente de canal para canal, e que muda independentemente de um frame para o outro. Nesta simulação pode-se observar o desempenho dos códigos

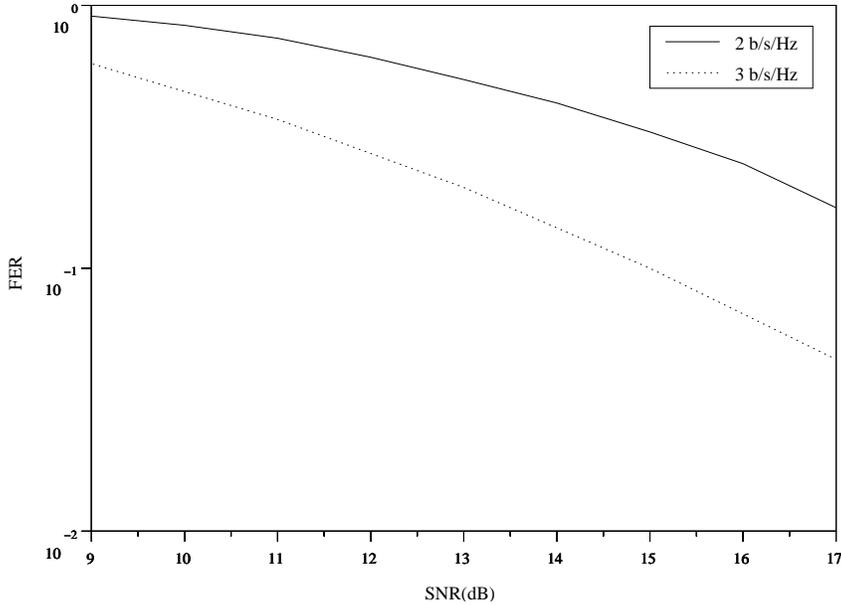


Figura 4.6: Probabilidade de erro de frame (FER) versus relação sinal-ruído (SNR) para 2-códigos espácio-temporais 4-PSK e 8-PSK com uma antena receptora.

através da curva traçada pela probabilidade de erro de frame (FER, do inglês: *Frame Error Rate*) versus relação sinal ruído (SNR). Vale ressaltar que, para estes valores de SNR e para estas probabilidades de erro, os sistemas codificados (e que faziam uso da diversidade) que antecederam os que adotam códigos espácio-temporais só conseguiam eficiências espectrais menores do que 1 b/s/Hz em canais com desvanecimento. Dizendo de outra maneira, os códigos espácio-temporais apresentam ganhos de algumas ordens de magnitude comparados aos seus antecessores.

Devemos chamar a atenção para o fato de que os códigos apresentados nesta seção não são ótimos. Para se obter um código ótimo é necessário investigar por $S^{(M \cdot 2S)}$ códigos, onde S é o número de símbolos da constelação e M é o número de estados da treliça. Por exemplo, para achar o código ótimo de uma treliça com 4 estados que utiliza símbolos de uma constelação 4-PSK, através de uma busca não sistemática, teríamos que procurá-lo em um universo de 4^{32} códigos. Esta procura se torna impraticável mesmo quando o número de estados da treliça e/ou o número de símbolos da constelação são modestos. Daí a relevância desta dissertação, pois nela

serão apresentadas maneiras sistemáticas de se obter, se não o código ótimo, um bom código.

Capítulo 5

Códigos Convolucionais

Espácio-Temporais Sobre $GF(p)$

Desde o surgimento dos STC, muitos pesquisadores têm se envolvido com o projeto de STC ótimos, isto é, códigos que proporcionam os máximos ganhos de diversidade e codificação. Alguns códigos propostos em [10] e [11] foram projetados à mão ou achados através de uma busca computacional exaustiva. Como já visto, a principal dificuldade para o projeto de STC é que seus critérios de construção são baseados no plano complexo de sinais modulados em banda base, ao invés de num domínio discreto como os códigos tradicionais costumavam ser projetados. Recentemente, resultados importantes foram publicados por Hammons e El Gamal [12] e [13], Blum [14] e [15] e por Grimm *et.al.* [29]. Em [12] e [13], outros critérios de posto binário (substituindo o critério do posto baseado nos complexos) foram desenvolvidos tornando a busca de códigos mais simples e dando uma condição suficiente para garantir que o STC associado atinja o máximo ganho de diversidade para qualquer número de antenas transmissoras com modulações BPSK e QPSK. Os trabalhos realizados por Blum [14] e [15] consideram códigos convolucionais binários como STC e apresentam condições necessárias e suficientes para garantir que os STC alcancem um ganho de diversidade máximo. Nestes trabalhos, Blum desenvolveu métodos para se calcular um limitante para o ganho de codificação. Em [29], outras regras de projeto que garantem o máximo ganho de diversidade são propostas para qualquer número de antenas transmissoras. Em todos os trabalhos mencionados acima, os códigos foram construídos ou sobre

corpos binários ou sobre corpos binários estendidos.

Neste capítulo, que contém as contribuições desta dissertação, apresentaremos um procedimento de projeto alternativo para se obter ganhos de diversidade e codificação. Consideraremos um sistema codificado espaço-temporal constituído de um codificador convolucional linear de taxa $R = 1/2$ sobre $\text{GF}(p)$, onde p pode ser qualquer número primo, seguido por um conversor serial/paralelo, n mapeadores de $\text{GF}(p)$ em sinais de uma constelação p -ária, e n antenas transmissoras. Esses códigos possibilitam uma eficiência espectral de $\log_2(p)$ b/s/Hz. O projeto dos STC será restrito para duas antenas transmissoras. Restrições simples serão impostas à matriz geradora de um código convolucional de taxa $R = 1/2$ para garantir ganho de diversidade máximo dos STC. Sob estas restrições, e devido à estrutura linear dos códigos convolucionais, o esforço computacional em relação ao critério do determinante é consideravelmente reduzido.

Na Seção 5.1 apresentaremos o modelo para o sistema espaço-temporal utilizando um codificador convolucional de taxa $R = 1/2$ sobre $\text{GF}(p)$. Na Seção 5.2 consideraremos os códigos convolucionais espaço-temporais sobre $\text{GF}(p)$ (STCC, do inglês: *Space-Time Convolutional Codes*) e apresentaremos as restrições a serem impostas à matriz geradora de um código convolucional de taxa $R = 1/2$, as quais serão suficientes para garantir ganho de diversidade máximo. Apresentaremos na Seção 5.3 alguns exemplos de STCC sobre $\text{GF}(5)$ e $\text{GF}(7)$ com ordens de memória 1 e 2. Alguns resultados de simulação serão mostrados e analisados na Seção 5.4, através de curvas traçadas pela taxa de erro de frame versus relação sinal ruído para $m = 1, 2, 3$ antenas receptoras. Finalmente, na Seção 5.5, faremos uma breve conclusão deste capítulo.

5.1 Modelo do Sistema

Considere um sistema de comunicações que emprega n antenas transmissoras e m antenas receptoras como foi mostrado na Figura 4.1. Neste sistema nós substituiremos o codificador de canal geral por um codificador convolucional de taxa $R = 1/n$ sobre $\text{GF}(p)$, onde p é primo. As n saídas desse codificador serão mapeadas em sinais de uma constelação p -ária e transmitidas simultaneamente pelas n antenas. O novo modelo do

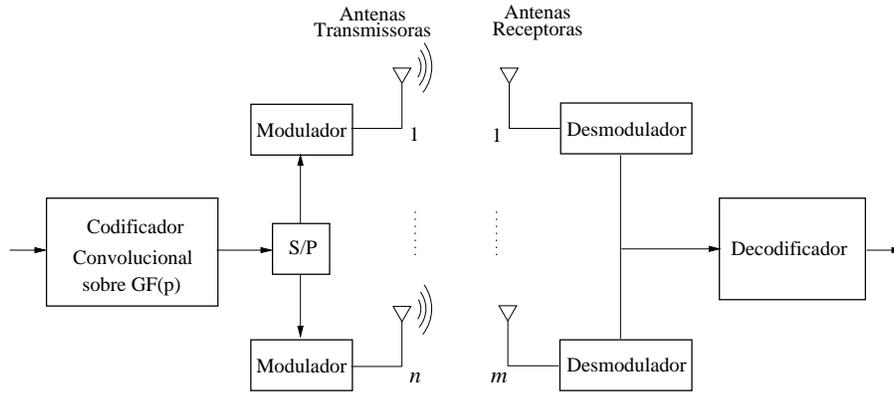


Figura 5.1: Modelo do sistema espaço-temporal com codificador convolucional sobre $GF(p)$.

o sistema é mostrado na Figura 5.1. A expressão para o sinal recebido pela j -ésima antena no tempo t é a mesma da Equação (4.1), dada por:

$$d_t^j = \sum_{i=1}^n h_{i,j} c_t^i \sqrt{E_s} + \eta_t^j$$

onde c_t^i é o sinal transmitido pela i -ésima antena no tempo t , E_s é a energia média do sinal transmitido, η_t^j é um ruído Gaussiano branco complexo de média zero e variância $N_0/2$ por dimensão e $h_{i,j}$ denota o desvanecimento presente no caminho da i -ésima antena transmissora para a j -ésima antena receptora. Para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, esses desvanecimentos são modelados como amostras independentes de um processo aleatório Gaussiano complexo de média zero e variância 0.5 por dimensão. Esses desvanecimentos permanecem constantes durante um frame e mudam independentemente de frame para frame, caracterizando um desvanecimento quase-estático. Também iremos supor que o receptor conheça perfeitamente o canal e que o algoritmo de Viterbi com métrica Euclidiana seja usado no decodificador. Sob essas condições podemos utilizar os critérios do *posto* e do *determinante*, mostrados no capítulo anterior, para a construção dos códigos que serão apresentados nesta seção.

Na próxima seção, considerando o sistema mostrado na Figura 5.1, apresentaremos o desenvolvimento matemático que resultará em algumas restrições a serem impostas à matriz geradora de um codificador convolucional de taxa $R = 1/2$, de forma a garantir que os STCC gerados por ela tenham ganho de diversidade máximo.

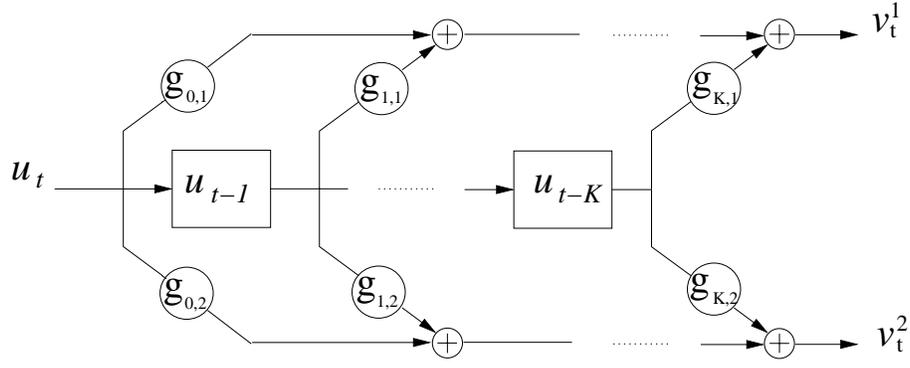


Figura 5.2: Codificador convolucional sobre $\text{GF}(p)$.

5.2 Códigos Convolucionais Espaço-Temporais sobre $\text{GF}(p)$

Seja $U(D) = u_0 + u_1D + u_2D^2 + \dots$ o polinômio de informação sobre $\text{GF}(p)$ representando uma seqüência de informação. Esta seqüência é codificada por um codificador convolucional sobre $\text{GF}(p)$ de taxa $R = 1/n$, o qual é uma realização direta de um vetor gerador polinomial:

$$\mathbf{G}(D) = [G_1(D), G_2(D), \dots, G_n(D)],$$

produzindo um vetor codificado

$$\mathbf{V}(D) = U(D)\mathbf{G}(D) = [V^1(D), V^2(D), \dots, V^n(D)],$$

onde $V^i(D) = v_0^i + v_1^iD + v_2^iD^2 + \dots + v_t^iD^t + \dots$, para $i = 1, 2, \dots, n$, são as n seqüências codificadas. Os geradores do código são $G_i(D) = g_{0,i} + g_{1,i}D + g_{2,i}D^2 + \dots + g_{K,i}D^K$, para $i = 1, 2, \dots, n$, onde K é a memória do codificador. Um exemplo genérico de um codificador convolucional sobre $\text{GF}(p)$ de taxa $R = 1/2$ pode ser visto na Figura 5.2.

A cada instante t um símbolo de informação em $\text{GF}(p)$ produz um bloco de n símbolos codificados em $\text{GF}(p)$ denotado por $(v_t^1, v_t^2, \dots, v_t^n)$. Considerando o sistema mostrado na Figura 5.1, esses símbolos são mapeados em uma constelação p -ária, como as mostradas na Figura 5.3. Os n símbolos complexos $(c_t^1, c_t^2, \dots, c_t^n)$ são então transmitidos pelas n antenas. Uma seqüência de blocos $(c_t^1, c_t^2, \dots, c_t^n)$, para $t = 1, 2, \dots, l$ forma uma palavra código \mathbf{c} do código espaço-temporal.

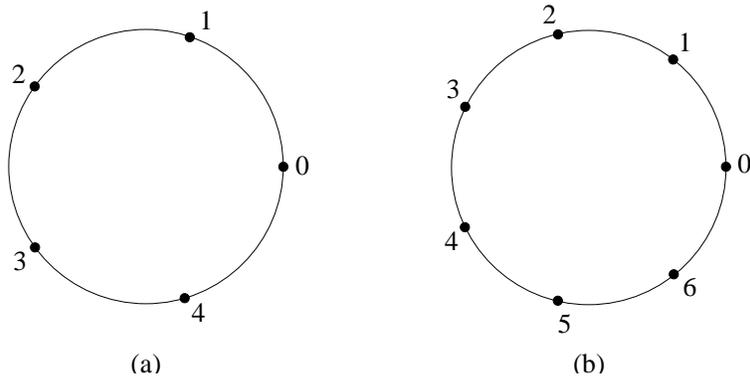


Figura 5.3: Constelações 5-PSK (a) e 7-PSK (b).

A partir de agora, concentraremos nossa atenção em sistemas com duas antenas transmissoras. De acordo com os critérios do *posto* e do *determinante*, devemos procurar um código \mathcal{C} que tenha, acima de tudo, ganho de diversidade máximo e que, como um critério secundário, maximize o mínimo determinante

$$\det \left(\sum_{i=1}^l (e_i^1 - c_i^1, e_i^2 - c_i^2)^* (e_i^1 - c_i^1, e_i^2 - c_i^2) \right), \quad (5.1)$$

com relação a todos os pares de palavras código \mathbf{c} e \mathbf{e} , onde $*$ denota o conjugado complexo. Continuando, exploraremos a estrutura algébrica dos códigos convolucionais e apresentaremos algumas regras de projeto para garantir a condição de posto completo e a redução na complexidade da busca de bons códigos.

Lema 1 *Considere um código convolucional espaço-temporal de taxa $R = 1/2$ sobre $GF(p)$, onde p é primo, com matriz geradora*

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} g_{1,1}D + \dots + g_{K,1}D^K \\ g_{0,2} + \dots + g_{K-1,2}D^{K-1} \end{bmatrix}^T,$$

onde $g_{K,1} \neq 0$, $g_{0,2} \neq 0$ e $g_{0,1} = g_{K,2} = 0$. Então, 1) Os rótulos de todos os ramos que partem de um mesmo estado na treliça do código coincidem no primeiro símbolo e diferem no segundo símbolo, e 2) Os rótulos de todas as transições chegando ao mesmo estado coincidem no segundo símbolo e diferem no primeiro símbolo.

Prova: Usaremos o fato de que, para quaisquer elementos u, u' e g de um corpo de Galois teremos que:

$$u \cdot g = u' \cdot g \Rightarrow u = u', \quad (5.2)$$

e

$$u \cdot g \neq u' \cdot g \Rightarrow u \neq u'. \quad (5.3)$$

Para provar 1), vamos considerar o estado atual do codificador como sendo $\sigma_s = [u_1, \dots, u_K]^1$. Quando $u_0(f)$ for o símbolo de entrada, a transição de estado será $\sigma_s \rightarrow \sigma_f = [u_0(f), u_1, \dots, u_{K-1}]$. Como por suposição $g_{0,1} = 0$, o símbolo codificado correspondente à primeira antena será dado por (ver Equação (2.4)):

$$v^1 = \sum_{\mu=1}^{K-1} u_\mu \cdot g_{\mu,1} + u_K \cdot g_{K,1}, \quad (5.4)$$

o qual é uma constante em $\text{GF}(p)$ que não depende de $u_0(f)$, mas depende de σ_s . Isto mostra que o primeiro símbolo de todos os ramos partindo do mesmo estado são iguais. Agora, para a mesma transição de estado $\sigma_s \rightarrow \sigma_f$, como por suposição $g_{K,2} = 0$, o símbolo correspondente à segunda antena será dado por (ver Equação (2.5)):

$$v^2 = u_0(f) \cdot g_{0,2} + \sum_{\mu=1}^{K-1} u_\mu \cdot g_{\mu,2} = u_0(f) \cdot g_{0,2} + V_2, \quad (5.5)$$

onde V_2 é uma constante em $\text{GF}(p)$. Desta maneira, em $\text{GF}(p)$, v^2 será diferente para diferentes valores de $u_0(f)$.

Para provar 2), vamos considerar o estado final do codificador como sendo $\sigma_f = [u_0, u_1, \dots, u_{K-1}]$. Então, para a transição de estado $\sigma_s = [u_1, \dots, u_{K-1}, u_K(s)] \rightarrow \sigma_f$, o símbolo correspondente à primeira antena será dado por:

$$v^1 = \sum_{\mu=1}^{K-1} u_\mu \cdot g_{\mu,1} + u_K(s) \cdot g_{K,1} = V_1 + u_K(s) \cdot g_{K,1}, \quad (5.6)$$

onde V_1 é uma constante em $\text{GF}(p)$. Portanto, em $\text{GF}(p)$, v^1 será diferente para diferentes valores de $u_K(s)$. Para a mesma transição $\sigma_s \rightarrow \sigma_f$, o símbolo correspondente à segunda antena será dado por:

$$v^2 = u_0 \cdot g_{0,2} + \sum_{\mu=1}^{K-1} u_\mu \cdot g_{\mu,2}, \quad (5.7)$$

o qual é uma constante em $\text{GF}(p)$ que não depende de $u_K(s)$, dependendo apenas de σ_f . □

¹Note que aqui nós omitimos a variável t usada na Figura 5.2 por motivos de simplicidade.

Teorema 1 *Considere um código convolucional espaço-temporal de taxa $R = 1/2$ sobre $GF(p)$, onde p é primo. Se a matriz geradora \mathbf{G} estiver de acordo com o Lema 1, então a condição de posto completo é garantida.*

Prova: Supondo-se que a matriz geradora \mathbf{G} esteja de acordo com o Lema 1 e considerando-se um par arbitrário de palavras códigos \mathbf{c} e \mathbf{e} de comprimento $2l$ símbolos, então a Equação (5.1) resultará em:

$$\det_l \triangleq \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |a_1|^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & d \\ d^* & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} |b_l|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \quad (5.8)$$

onde

$$a_i = (e_i^2 - c_i^2), \quad b_i = (e_i^1 - c_i^1), \quad f = \sum_{i=2}^{l-1} |b_i|^2, \quad (5.9)$$

$$h = \sum_{i=2}^{l-1} |a_i|^2, \quad e \quad d = \sum_{i=2}^{l-1} a_i b_i^*.$$

Do Lema 1, temos que $|a_1|^2 > 0$ e $|b_l|^2 > 0$. Pela desigualdade de Schwarz,

$$\sum_i |a_i|^2 \times \sum_i |b_i|^2 \geq \left| \sum_i a_i b_i^* \right|^2, \quad (5.10)$$

e desta maneira $fh \geq |d|^2$. Como $f \geq 0$ e $h \geq 0$, devemos ter que

$$\det_l = \underbrace{|a_1|^2 |b_l|^2}_{>0} + \underbrace{|a_1|^2 f}_{\geq 0} + \underbrace{|b_l|^2 h}_{\geq 0} + \underbrace{fh - |d|^2}_{\geq 0} > 0, \quad (5.11)$$

o que garante a condição de posto completo. \square

5.3 Resultados da Busca de Códigos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de 2-códigos espaço-temporais gerados por codificadores convolucionais lineares de taxa $R = 1/2$ sobre $GF(5)$ e $GF(7)$. As restrições desenvolvidas na seção anterior serão aplicadas ao codificador convolucional (isto é, $g_{K,1} \neq 0$, $g_{0,2} \neq 0$ e $g_{0,1} = g_{K,2} = 0$) para garantir a condição de posto completo. Após garantida esta condição, o mínimo determinante será então maximizado. Começaremos nossos exemplos com codificadores de memória unitária.

Exemplo 6 Considere a constelação 5-PSK mostrada na Figura 5.3(a). Seguindo as restrições da Seção 5.2, o codificador convolucional sobre $GF(5)$ terá uma matriz geradora $\mathbf{G}(D) = [g_{1,1}D, g_{0,2}]$. Esses códigos têm ganho de diversidade 2, com eficiência espectral 2.32 b/s/Hz. Em relação à busca dos códigos, variamos $g_{1,1}$ e $g_{0,2}$ por todos os elementos não nulos de $GF(5)$, resultando em 16 diferentes códigos. O determinante mínimo de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ para cada código é listado na matriz $D(g_{1,1}, g_{0,2})$ a seguir.

$$D(g_{1,1}, g_{0,2}) = \begin{pmatrix} 1, 38 & 2, 23 & 2, 23 & 1, 38 \\ 2, 23 & 1, 38 & 1, 38 & 2, 23 \\ 2, 23 & 1, 38 & 1, 38 & 2, 23 \\ 1, 38 & 2, 23 & 2, 23 & 1, 38 \end{pmatrix},$$

onde o elemento (i, j) desta matriz corresponde ao determinante mínimo para o STCC obtido quando fazemos $g_{1,1} = i$ e $g_{0,2} = j$. Claramente, um dos melhores códigos é obtido, por exemplo, para $g_{1,1} = 1$ e $g_{0,2} = 2$. Este código tem um ganho de codificação de 2.23. A treliça deste código é mostrada na Figura 5.4.

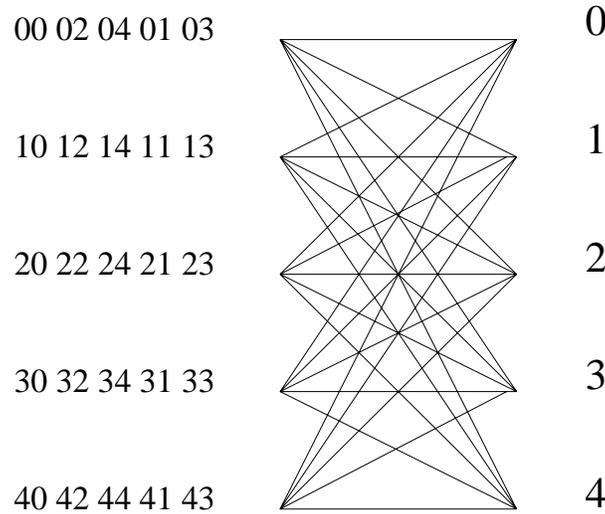


Figura 5.4: Treliça do 2-código espaço-temporal para 5-PSK, 2.32 b/s/Hz, (codificador convolucional: $GF(5)$, $R = 1/2$, $K = 1$).

Nesta e nas treliças seguintes, cada par de símbolos no canto esquerdo da treliça representa o sinal transmitido pela primeira e pela segunda antenas, respectivamente,

como explicado no Capítulo 4. O rótulo do lado direito da treliça indica o estado do codificador.

Note que a matriz $D(g_{1,1}, g_{0,2})$ é simétrica, possibilitando reduzir ainda mais o procedimento de busca. Esta simetria também pode ser obtida para códigos com ordem de memória mais alta.

Exemplo 7 *Considere agora a constelação de sinais 7-PSK da Figura 5.3(b). Novamente vamos considerar um codificador convolucional de memória unitária satisfazendo as condições da Seção 5.2. Portanto, obteremos um ganho de diversidade de 2 com eficiência espectral de 2.82 b/s/Hz. Similarmente ao Exemplo 6, obtemos a matriz $D(g_{1,1}, g_{0,2})$ como*

$$D(g_{1,1}, g_{0,2}) = \begin{pmatrix} 0,75 & 1,35 & 1,35 & 1,35 & 1,35 & 0,75 \\ 1,35 & 0,75 & 1,35 & 1,35 & 0,75 & 1,35 \\ 1,35 & 1,35 & 0,75 & 0,75 & 1,35 & 1,35 \\ 1,35 & 1,35 & 0,75 & 0,75 & 1,35 & 1,35 \\ 1,35 & 0,75 & 1,35 & 1,35 & 0,75 & 1,35 \\ 0,75 & 1,35 & 1,35 & 1,35 & 1,35 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

O melhor código é obtido com, por exemplo, $g_{1,1} = 6$ e $g_{0,2} = 5$. Este código tem um ganho de codificação de 1.35. Sua treliça é mostrada na Figura 5.5.

Exemplo 8 *Aqui nós estenderemos os exemplos anteriores utilizando codificadores convolucionais sobre $GF(5)$ e $GF(7)$ com ordem de memória $K = 2$. A matriz geradora para este caso é $\mathbf{G}(D) = [g_{1,1}D + g_{2,1}D^2, g_{0,2} + g_{1,2}D]$. Para o codificador sobre $GF(5)$, pesquisamos 300 códigos e um dos melhores encontrados foi gerado por $g_{1,1} = 2$, $g_{2,1} = 1$, $g_{0,2} = 2$ e $g_{1,2} = 4$ (veja treliça na Figura 5.6). O ganho de codificação deste código é 4.47. O ganho de diversidade e a eficiência espectral são os mesmos do Exemplo 6. Para o codificador sobre $GF(7)$, foram gerados 1081 códigos e para os multiplicadores $g_{1,1} = 3$, $g_{2,1} = 2$, $g_{0,2} = 1$ e $g_{1,2} = 3$, obtivemos um dos melhores códigos. Este código possui um ganho de codificação de 3.74, enquanto o ganho de diversidade e a eficiência espectral são os mesmos do Exemplo 7. A treliça que descreve este código é mostrada na Figura 5.7.*

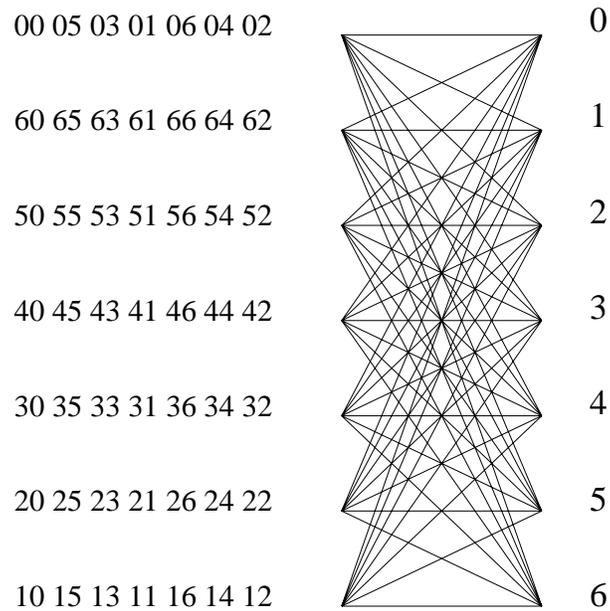


Figura 5.5: Treliça do 2-código espaço-temporal para 7-PSK, 2.81 b/s/Hz, (codificador convolucional: GF(7), $R = 1/2$, $K = 1$).

Os novos códigos espaço-temporais apresentados neste capítulo podem ser encontrados com um esforço computacional reduzido devido à linearidade dos códigos convolucionais, às restrições na matriz geradora e à simetria da matriz D . Uma busca de códigos exaustiva pode chegar a analisar um número da ordem de $(p^{p^K 2p})$ códigos, enquanto que aqui nós necessitamos analisar apenas 10 códigos para nosso exemplo mais simples e 735 para o exemplo mais complexo. Estas vantagens se tornam ainda mais significativas à medida que a ordem do codificador aumenta, permitindo que bons códigos possam ser encontrados com uma complexidade computacional relativamente baixa.

5.4 Resultados de Simulações

Nesta seção apresentaremos os resultados das simulações feitas para os quatro 2-códigos espaço-temporais projetados na Seção 5.3 e para os dois 2-STC citados na Seção 4.3. Consideraremos um frame com comprimento de 130 símbolos. Nas Figuras 5.8 e 5.9 as simulações foram feitas para $m = 1, 2, 3$ antenas receptoras, e na Figura 5.10 para $m = 1$ antena receptora.

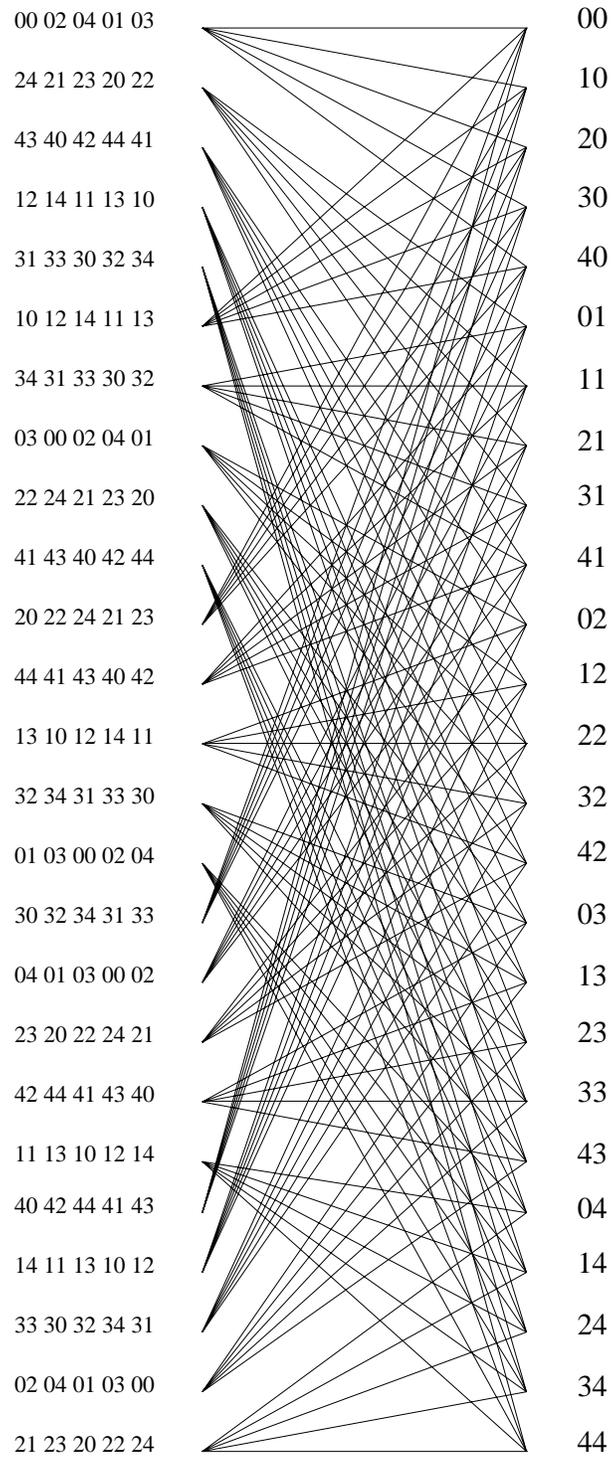


Figura 5.6: Treliça do 2-código espaço-temporal para 5-PSK, 2.32 b/s/Hz, (codificador convolucional: $\text{GF}(5)$, $R = 1/2$, $K = 2$).

A Figura 5.8 mostra a taxa de erro de frame (FER) versus a relação sinal-ruído (SNR), em decibéis, para os códigos construídos sobre GF(5), com $K = 1, 2$. Como previsto pela Equação (4.12), para o mesmo número de antenas receptoras, o código com ordem de memória $K = 2$ e ganho de codificação 4.47 tem um desempenho melhor do que o do código de memória unitária e ganho de codificação 2.23. Com o aumento do número de antenas receptoras, o desempenho é melhorado para ambos os casos, $K = 1, 2$, enquanto que o ganho de codificação relativo entre o caso $K = 1$ e o caso $K = 2$ é mais acentuado à medida em que o número de antenas receptoras aumenta. Novamente, isto também pode ser previsto pela Equação (4.12).

Na Figura 5.9 teremos as mesmas comparações feitas na Figura 5.8, porém com relação aos códigos construídos sobre GF(7). Os ganhos de codificação para $K = 1, 2$ são respectivamente 1.35 e 3.74. Como na Figura 5.8, os resultados da Figura 5.9 estão de acordo com a Equação (4.12), validando nosso método de construção de códigos e os resultados das buscas.

A Figura 5.10 mostra o desempenho de alguns 2-códigos espaço-temporais com diferentes eficiências espectrais. Os códigos com eficiências espectrais de 2 e 3 b/s/Hz são os códigos da Seção 4.3 com ganhos de codificação de 2 e 1.4, respectivamente. Os códigos com eficiências espectrais 2.32 e 2.81 b/s/Hz são os códigos achados na Seção 4.3, construídos sobre GF(5) e GF(7), com $K = 1, m = 1$ e ganhos de codificação 2.23 e 1.35, respectivamente.

5.5 Conclusão e Considerações Práticas

Nesta seção consideramos códigos convolucionais espaço-temporais sobre GF(p) para o canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático. Os códigos foram projetados de acordo com os critérios do posto e do determinante derivados por Tarokh *et.al*. Restrições simples a serem impostas à matriz geradora de um código convolucional de taxa $R = 1/2$ foram apresentadas garantindo ganho de diversidade máximo para 2 antenas transmissoras. Novos códigos convolucionais espaço-temporais para as constelações 5-PSK e 7-PSK com duas antenas transmissoras foram apresentados. Foram alcançadas eficiências espectrais de 2.32 e 2.81 b/s/Hz, respectivamente. Simulações da taxa de er-

ro de frame versus relação sinal-ruído foram feitas para os casos de $m = 1, 2, 3$ antenas receptoras. Os correspondentes ganhos de diversidade e codificação foram verificados de acordo com os resultados teóricos apresentados na Seção 4.2.

O fato de p na modulação p -ária não ser uma potência de 2 pode ser um problema se a transmissão requerida for binária. Nós tratamos deste problema associando uma palavra de n_p símbolos p -ários diferente a cada palavra de n_2 bits, onde $p^{n_p} > 2^{n_2}$. A eficiência espectral será $n_2/n_p < \log_2(p)$ b/s/Hz, isto é, há uma perda de

$$1 - \left(\frac{n_2}{n_p \log_2(p)} \right).$$

Esta perda pode ser minimizada se maximizarmos a relação $\frac{n_2}{n_p \log_2(p)}$, onde $p^{n_p} > 2^{n_2}$. Por exemplo, considere o caso de uma constelação 5-PSK onde cada palavra de $n_2 = 9$ bits deverá ser associada a uma palavra diferente de $n_p = 4$ símbolos. Com isso a eficiência espectral cairá de 2.32 para 2.25 b/s/Hz, produzindo uma perda de apenas 3%.

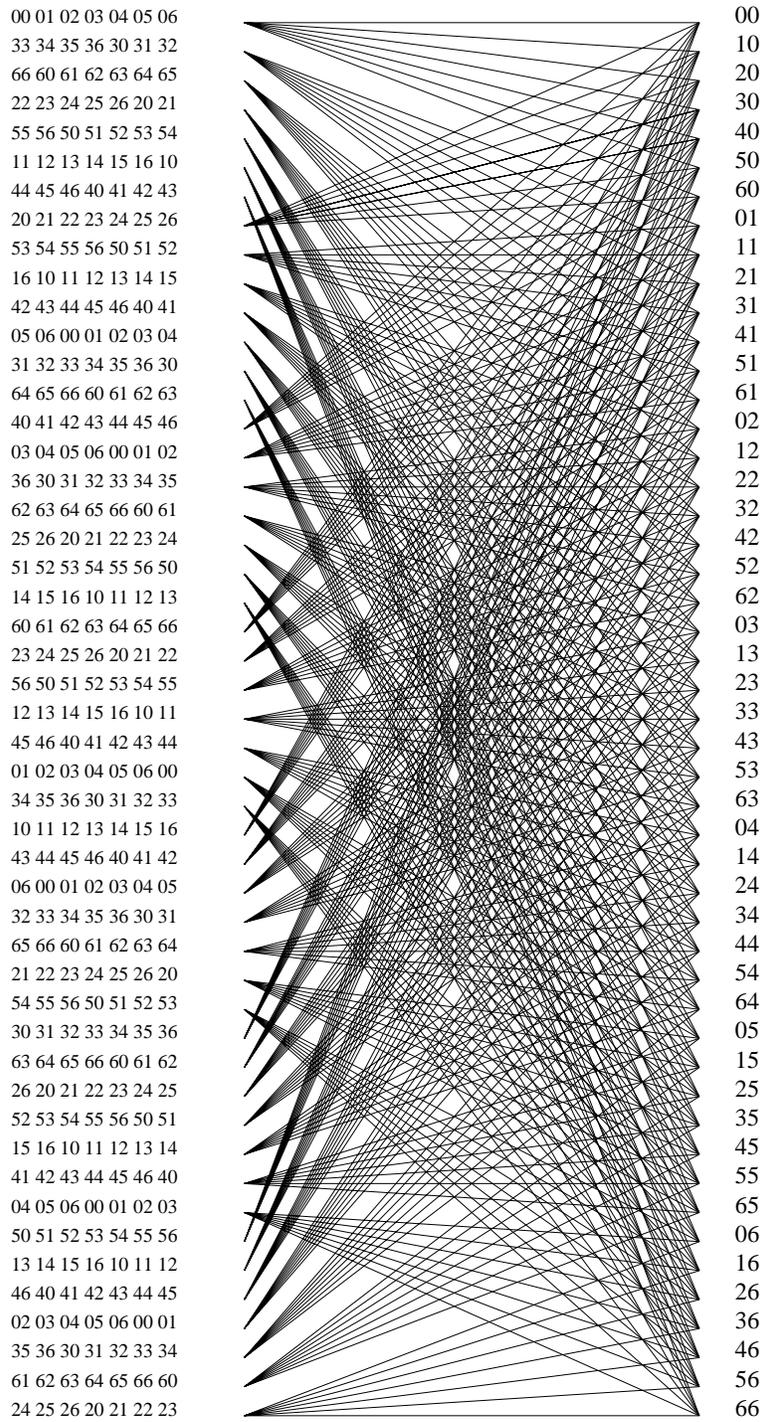


Figura 5.7: Treliça do 2-código espaço-temporal para 7-PSK, 2.81 b/s/Hz, (codificador convolucional: $GF(7)$, $R = 1/2$, $K = 2$).

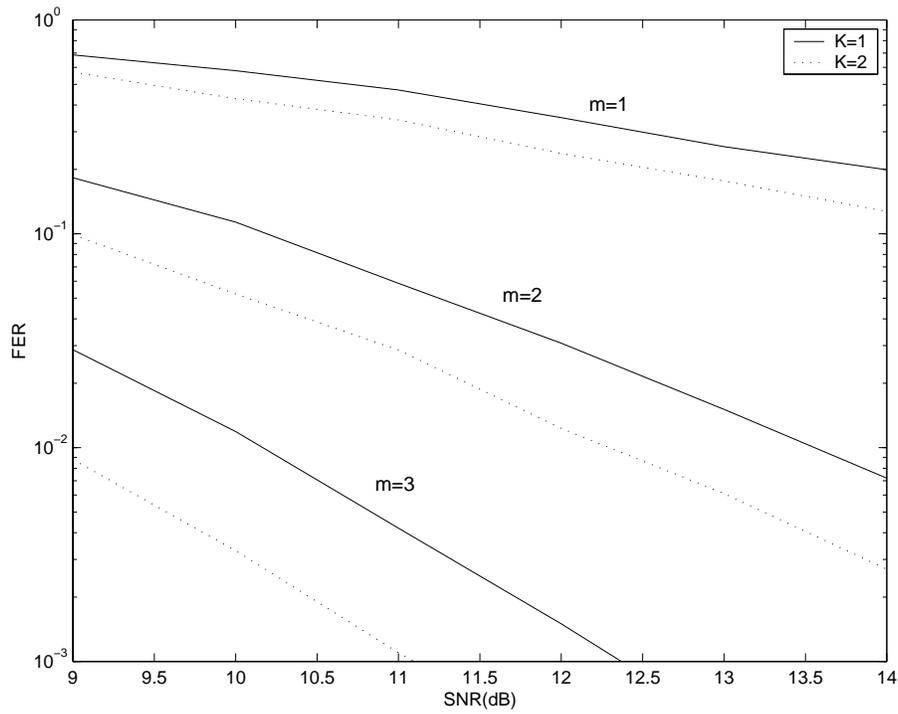


Figura 5.8: Taxa de erro de frame (FER) versus a relação sinal-ruído (SNR) para os 2-códigos espaço-temporais para 5-PSK com $K = 1, 2$ e $m = 1, 2, 3$ antenas receptoras.

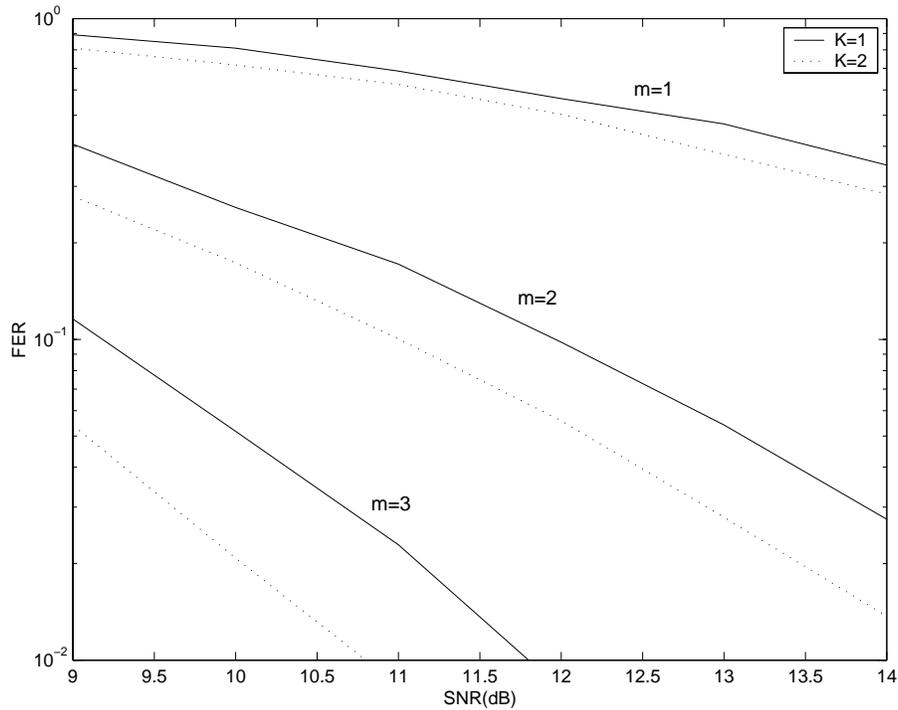


Figura 5.9: Taxa de erro de frame (FER) versus a relação sinal-ruído (SNR) para os 2-códigos espaço-temporais para 7-PSK com $K = 1, 2$ e $m = 1, 2, 3$ antenas receptoras.

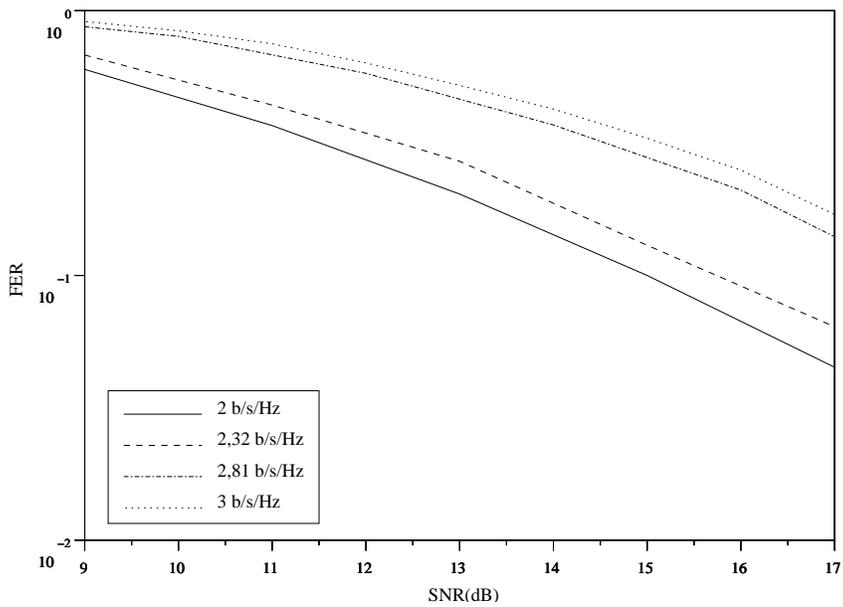


Figura 5.10: Taxa de erro de frame (FER) versus a relação sinal-ruído (SNR) para os 2-códigos espaço-temporais para 4-PSK com 4 estados, 5-PSK com $K = 1$, 7-PSK com $K = 1$, 8-PSK com 8 estados e $m = 1$ antena receptora.

Capítulo 6

Conclusão e Trabalhos Futuros

Este trabalho foi iniciado com o estudo de alguns componentes básicos de um sistema de comunicação digital, códigos corretores de erros e conceitos de álgebra aplicada à teoria de codificação. Na seqüência, fizemos um estudo geral sobre o canal para o sistema de comunicações móveis e sobre diversidade. Estes estudos foram fundamentais para o entendimento dos códigos espaço-temporais e de seus critérios de projeto para canais com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático. Estes códigos foram apresentados com detalhes no Capítulo 4. Após a compreensão desta técnica, reproduzimos as simulações feitas por Tarokh *et.al.* em [10] para demonstrar o desempenho destes códigos.

No Capítulo 5 foram apresentados os códigos convolucionais espaço-temporais sobre $GF(p)$, propostos nesta dissertação. Algumas regras de projeto que garantem ganho de diversidade máximo foram obtidas a partir de simples restrições impostas às matrizes geradoras de um código convolucional de taxa $R = 1/2$. Através destas restrições, e da estrutura linear dos códigos convolucionais, foi conseguido uma drástica redução na complexidade computacional da busca de bons STCC. Novos STCC para constelações p -árias e com eficiência espectral de $\log_2(p)$ foram propostos. Finalizamos este trabalho com as simulações destes códigos no canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático para $n = 2$ antenas transmissoras, $m = 1, 2, 3$ antenas receptoras, e para codificadores com ordem de memória $K = 1, 2$. Os resultados destas simulações são muito satisfatórios, pois através deles podemos observar as influências dos ganhos

de diversidade e de codificação na curva de desempenho dos códigos.

As conseqüências práticas mais eminentes dos resultados obtidos nesta dissertação se referem à transmissão de informação a altas taxas (eficiências espectrais) em sistemas de comunicações móveis, explorando-se de maneira inteligente a alta capacidade destes sistemas quando múltiplas antenas transmissoras e receptoras são empregadas. Os códigos espaço-temporais apresentados poderão ser adotados como ingredientes de um sistema de comunicação móvel de terceira geração, através do qual dados e multimídia possam ser veiculados com excelente desempenho de erro a taxas bastante elevadas. Também, as eficiências espectrais fracionárias, próprias dos códigos espaço-temporais obtidos nesta dissertação, são uma alternativa às eficiências espectrais inteiras, que poderão servir aos propósitos de atender diferentes aplicações com diferentes qualidades de serviço.

Como um futuro trabalho pretendemos estender nosso método de busca para um número maior de antenas transmissoras. Um ponto de partida para esta extensão é a referência [29], onde uma generalização para a busca de códigos que utilizam múltiplas antenas transmissoras foi realizada em códigos sobre corpos binários estendidos.

Também pode ser um outro objeto de pesquisa realizar uma busca de códigos um pouco mais detalhada, levando em consideração o número de caminhos que resultam no mínimo determinante, bem como o número de caminhos com determinantes um pouco maiores do que o mínimo. Esta técnica foi utilizada em [30] e mostrou que as vezes o código com o maior mínimo determinante tem um desempenho pior que um código com o mínimo determinante um pouco menor.

Apêndice A

Capacidade de Canal para Canais com Múltiplas Antenas

Neste apêndice mostraremos que a capacidade de canal para canais com múltiplas antenas é superior à capacidade de canal para canais que utilizam apenas uma antena transmissora e uma receptora. Antes de iniciarmos, apresentaremos algumas definições que serão usadas neste apêndice.

- Um vetor $\mathbf{x} \in C^n$ é dito Gaussiano se o vetor real $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \text{Re}(x) \\ \text{Im}(x) \end{bmatrix}$ for Gaussiano [7].
- Um vetor \mathbf{x} complexo é dito Circularmente Simétrico se a matriz de covariância de $\hat{\mathbf{x}}$ tiver a estrutura:

$$E[(\hat{\mathbf{x}} - E[\hat{\mathbf{x}}])(\hat{\mathbf{x}} - E[\hat{\mathbf{x}}])^*] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{Re}(Q) & -\text{Im}(Q) \\ \text{Im}(Q) & \text{Re}(Q) \end{bmatrix}$$

onde $Q \in C^{n \times n}$ é definida não negativa [7].

- *Entropia diferencial:* Seja Y uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $p(y)$. A entropia diferencial $\mathcal{H}(Y)$ segundo [27] é definida por:

$$\mathcal{H}(Y) = - \int_S p(y) \log p(y) dy \tag{A.1}$$

onde S é o espaço amostral de Y tal que $p(y) > 0$.

- *Entropia Diferencial Condicionada:* De acordo com [27] a entropia diferencial condicionada $\mathcal{H}(Y|X)$ mede, em termos médio, a incerteza sobre a variável Y após se observar X , e é definida como:

$$\mathcal{H}(Y|X) = - \int p(x, y) \log p(y|x) dy dx. \quad (\text{A.2})$$

- *Informação mútua:* Conforme [27], a informação mútua entre duas variáveis aleatórias $\mathcal{I}(X;Y)$ é a quantidade de informação que a variável X carrega a respeito da variável Y , ou seja:

$$\mathcal{I}(X;Y) = \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(Y|X) = \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X|Y). \quad (\text{A.3})$$

Em [27] a capacidade de canal foi definida como a máxima quantidade de informação que se pode transmitir de forma confiável a cada uso do canal. Com isso, pode-se definir a capacidade de canal para um canal com restrição de potência P como:

$$C = \max_{p(x): E[xx^*] \leq P} \mathcal{I}(X;Y) = \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(Y|X). \quad (\text{A.4})$$

O máximo desta capacidade é obtido escolhendo-se a distribuição de probabilidade de x , $p(x)$, que maximize a Expressão (A.4) sob a restrição de potência $E[xx^*] \leq P$.

Considere um canal rádio móvel contendo n antenas transmissoras e m antenas receptoras cuja saída é dada pela expressão

$$\mathbf{y} = H\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (\text{A.5})$$

onde $\mathbf{y} = [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{m-1}]^T$ é o vetor de sinais recebidos, $[\bullet]^T$ denota o vetor transposto, $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1}]^T$ é o vetor de sinais transmitidos, $H_{m \times n}$ é a matriz de transferência do canal e $\mathbf{n} = [n_0 \ n_1 \ \dots \ n_{m-1}]^T$ é um vetor de ruído Gaussiano com média zero e partes reais e imaginárias independentes com mesma variância, onde $E[nn^*] = I_m$.

Neste apêndice analisaremos apenas dois casos do ponto de vista da matriz H . No primeiro faremos uma análise onde H é determinística, e no segundo caso consideraremos que H varia aleatoriamente a cada uso do canal.

A.1 Canal Determinístico

Segundo [7], relacionando as Equações (A.5) e (A.4) e considerando que \mathbf{x} e \mathbf{n} são independentes, a informação mútua pode ser escrita por:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) &= \mathcal{H}(\mathbf{y}) - \mathcal{H}(\mathbf{x} + \mathbf{n}|\mathbf{x}) \\ &= \mathcal{H}(\mathbf{y}) - \mathcal{H}(\mathbf{n}|\mathbf{x}) \\ &= \mathcal{H}(\mathbf{y}) - \mathcal{H}(\mathbf{n})\end{aligned}\tag{A.6}$$

Nesta expressão, maximizar a informação mútua corresponde a maximizar $\mathcal{H}(\mathbf{y})$ que, por sua vez, é máxima quando \mathbf{y} é um vetor Gaussiano complexo circulamente simétrico (GCCS), o que ocorre se \mathbf{x} for um vetor GCCS. Neste caso:

$$C = \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y})_{\max(Q)} = \log[\det(I_m + HQH^*)]\tag{A.7}$$

onde Q é a matriz de covariâncias de \mathbf{x} e $[\bullet]^*$ denota o conjugado transposto. Note que na Equação (A.7) fizemos uso do fato de que se \mathbf{x} for um vetor aleatório Gaussiano, então $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \log[\det(R_x)]$, onde R_x é a matriz de covariâncias. Por fim, para encontrar a capacidade de canal, basta escolher Q que maximize $\mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ sob a restrição de potência imposta.

A.2 Canal Variante no Tempo

Aqui consideraremos que a matriz H varia a cada uso do canal, e que os elementos $h_{i,j}$ desta matriz são variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas, com média zero, parte real e imaginária independentes e com variância 0.5 por dimensão, caracterizando um canal com desvanecimento do tipo Rayleigh. Além disso iremos supor que H seja conhecida no receptor, e que a distribuição de H seja conhecida no transmissor. Como H varia a cada uso do canal, podemos representar a “saída” deste canal por:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \mathbf{H}).\tag{A.8}$$

Portanto, a informação mútua entre a entrada e a saída é escrita por:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\mathbf{x}; (\mathbf{y}, \mathbf{H})) &= \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{H}) + \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y}|\mathbf{H}); \\ &= \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y}|\mathbf{H}); \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{H}}[\mathcal{I}((\mathbf{x}; \mathbf{y})|\mathbf{H} = H)],\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que, como \mathbf{x} e \mathbf{H} são independentes, então $\mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{H}) = 0$. Como \mathbf{x} é GCCS com matriz de covariância Q , a máxima informação mútua para cada H será $\log[\det(I_m + HQH^*)]$. Portanto, é preciso maximizar:

$$\mathcal{I}(X; Y)_{max(Q)} = E_{\mathbf{H}}[\log \det(I_m + \mathbf{H}Q\mathbf{H}^*)]. \quad (\text{A.9})$$

Segundo [7], a capacidade de canal é alcançada quando \mathbf{x} for GCCS com média zero e covariância $Q = (P/n)I_n$. Assim podemos escrever a expressão da capacidade de canal como

$$C = E_{\mathbf{H}}[\log \det(I_m + (P/n)\mathbf{H}\mathbf{H}^*)]. \quad (\text{A.10})$$

O cálculo desta capacidade é um pouco complicado e pode ser encontrado em [7]. Aqui apresentaremos apenas o resultado final desta capacidade, encontrado em [28], dado por

$$C = \frac{(M-1)!}{(N-1)!} \int_0^\infty \log(1 + (P/t)x)e^{-x}x^{N-M} \times \left[(L_{N-M+1}^{M-1}(x))^2 - L_{N-M+1}^M(x)L_{N-M+1}^{M-2}(x) \right] dx \quad (\text{A.11})$$

onde L_K^α é o polinômio generalizado de Laguerre de ordem K , $M = \min\{m, n\}$, e $N = \max\{m, n\}$. Agora faremos uma análise particularizada variando a relação assintótica entre o número de antenas transmissoras e receptoras. Considere os três casos a seguir:

a) n fixo, e $m \rightarrow \infty$:

$$C \approx n \log \frac{P}{n} + \log \frac{m!}{(m-n)!} \rightarrow n \log \frac{P}{n} + n \log m$$

A capacidade de canal C aumenta logaritmicamente com o aumento do número de antenas receptoras m .

b) m fixo e $n \rightarrow \infty$:

$$C \rightarrow m \log \frac{P}{n} + m \log n = m \log P$$

Aumentar o número de antenas transmissoras, n , não produz nenhum ganho em C .

c) n/m fixo e $n, m \rightarrow \infty$, onde $\beta = n/m \leq 1$:

$$\frac{1}{n}C \rightarrow \log P + \log \beta^{-1}$$

Se n e m aumentam na mesma proporção, ocorre um crescimento linear em C . Se $\beta = n/m > 1$, $\frac{C}{m} \rightarrow \log P$, que é independente de β . Assim, não há benefício em se aumentar, assintoticamente, n além de m .

Apêndice B

Artigo Apresentado no the
SBrT/IEEE International
Telecommunications Symposium -
ITS2002, Natal, Brazil

Apêndice C

Artigo Aceito para Apresentação

no the IEEE Wireless

Communications and Networking

Conference - WCNC 2003, New

Orleans, LA, USA

Referências Bibliográficas

- [1] G. Ungerboeck, "Channel coding and multilevel/phase signals." May 10th, 1977.
- [2] G. Ungerboeck, "Channel coding with multilevel phase signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 55-67, Jan. 1982.
- [3] D. Divsalar and M. K. Simon, "The design of trellis coded MPSK for fading channels: Performance criteria," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 36, pp. 1004-1012, 1988.
- [4] D. Divsalar and M. K. Simon, "The design of trellis coded MPSK for fading channels: Set partition for optimum code design," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 36, pp. 1013-1021, 1988.
- [5] L. F. Wei, "Coded M-DPSK with built-in time diversity for fading channels," *IEEE Trans. on Inf. Theory*, vol.39, pp. 1820-1839, Sep 1993.
- [6] A. Wittneben, "A new bandwidth efficient transmit antenna modulation diversity scheme for linear digital modulation," in *Proc. IEEE'ICC*, 1993, pp.1630-1634.
- [7] I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna gaussian channels," *Tech. Report AT&T Bell Laboratories*, 1995.
- [8] G. J. Foschini and M. J. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas," *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 311-335, 1998.
- [9] T. Marzetta and B. Hochwald, "Capacity of a mobile multiple antenna communication link in Rayleigh flat fading," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, pp. 139-158, Jan. 1999.

- [10] V. Tarokh, N. Seshadri and A. R. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communications: performance criterion and code construction," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, No. 2, pp. 744-765, Mar. 1998.
- [11] S. Baro, G. Bauch and A. Hansmann, "Improved codes for space-time trellis coded modulation," *IEEE Commun. Letters*, pp. 20-22, Jan. 2000.
- [12] A. R. Hammons, Jr. and H. El Gamal, "On the theory of space-time codes for PSK modulation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, no. 2, pp. 524-542, Mar. 2000.
- [13] H. El Gamal and A. R. Hammons, Jr., "On the design and performance of algebraic space-time codes for BPSK and QPSK modulation," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 50, No. 6, pp. 907-913, June 2002.
- [14] R. S. Blum, "New analytical tools for designing space-time convolutional codes," in *Conf. Inform. Sci. Systm.*, Princeton, NJ, Mar. 2000.
- [15] R. S. Blum, "Analytical tools for the design of space-time convolutional codes," submetido a *IEEE Trans. Inform. Theory*.
- [16] M. Tao and R. S. Cheng, "Improved design criteria and new trellis codes for space-time coded modulation in slow flat fading channels," *IEEE Commun. Letters*, pp. 67-69, July 2001.
- [17] Z. Chen, J. Yuan and B. Vucetic, "An improved space-time trellis coded modulation scheme on slow rayleigh fading channels," *IEEE ICC'01*, pp. 1110-1116, 2001.
- [18] P. Elias, "Coding for Noisy Channels", *IRE Conv. Rec.*, Part 4, pp. 37-47, 1955.
- [19] S. Lin and D. J. Costello Jr. *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*. Prentice-Hall, 1983.
- [20] A. J. Viterbi, "Error Bounds for Convolutional Codes and Asymptotically Optimum Decoding Algorithm," *IEEE Trns. Inf. Theory*, IT-13, pp.260-269, April 1967.

- [21] B. Vucetic and J. Yuan. *Turbo Codes: Principles and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [22] J. B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra*. Sixth Edition, Addison-Wesley, 1998.
- [23] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, Third Edition, 1995.
- [24] T. S. Rappaport. *Wireless Communications - Principles and Practice* N. J. USA: Prentice-Hall PTR, 1996.
- [25] S. Benedetto and E. Biglieri. *Principles of Digital Transmission with Wireless Applications*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999
- [26] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. New York: Cambridge Univ. Press, 1988.
- [27] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley and Sons, 1991.
- [28] A. Grant, "Rayleigh fading multi-antenna channels," *EURASIP Journal on Applied Signal Process.*, vol. 3, pp. 316-329, 2002.
- [29] J. Grimm, M. P. Fitz, and J. V. Krogmeier, "Further results in space-time coding for Rayleigh fading," in *Proc. 36th Allerton Conf. on Communications, Control and Computing*, Sept. 1998.
- [30] Q. Yan and R. S. Blum, "Optimum space-time convolutional codes," *IEEE WCNC'00*, pp. 1351-1355, 2000.