UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL UMA MUDANÇA DE FOCO:DO ALGEBRISMO ÀS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS, ATRAVÉS DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E AMBIENTES INFORMATIZADOS

Por

OSWALDO LUIZ COBRA GUIMARÃES

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina

para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

Orientador:

Prof. Dr. Rogério Cid Bastos

Florianópolis, fevereiro de 2002

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
UMA MUDANÇA DE FOCO: DO ALGEBRISMO ÀS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS, ATRAVÉS DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E AMBIENTES INFORMATIZADOS

Nome: OSWALDO LUIZ COBRA GUIMARÃES

Área de Concentração:Mídia e Conhecimento
Orientador:Prof. Dr. Rogério Cid Bastos

Florianópolis, fevereiro de 2002

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL UMA MUDANÇA DE FOCO: DO ALGEBRISMO ÀS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS, ATRAVÉS DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E AMBIENTES INFORMATIZADOS

Nome: OSWALDO LUIZ COBRA GUIMARÃES

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, especialidade em Engenharia de Produção, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina, em fevereiro de 2002.

____

Prof. Ricardo Miranda Barcia, Phd.D.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Banca Examinadora:

____

Prof. Orientador: Prof. Dr. Rogério Cid Bastos

____

Prof. Dr. Antonio Sérgio Cobianchi

____

Profª. Dra. Vera Lia Marcondes Criscuolo de Almeida

____

Profª. Dra. Ana Paula Soares Fernandes

DEDICATÓRIA:

À minha esposa Márcia e filha Ana Beatriz, fontes de amor para toda a vida.
Aos meus pais, pelo amor que sempre me dedicaram.
Ao grande amigo Sergio, que sempre me incentivou.
À grande amiga Cássia, por tudo que passamos.
Aos amigos Darcy e Iraídes, pela amizade sincera.

AGRADECIMENTOS

A meu orientador Prof. Dr. Rogério Cid Bastos, pelas idéias que nortearam este trabalho.

Aos alunos da Faculdade de Engenharia Química de Lorena, que em muito colaboraram para esta pesquisa.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

O objetivo desta dissertação é propor um procedimento de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral que não seja centrado somente em algebrismos e sim em atividades que permitam análises algébrica, numérica e gráfica. Ao mesmo tempo, propõe a criação de um ambiente de aula em que predominem as ações do aluno em atividades de investigação matemática. Para que tal proposta se efetivasse ocorreu a aplicação do método da Modelagem Matemática e de ambientes informatizados nas formas mutirepresentadas dos trabalhos desenvolvidos. Concluindo a pesquisa, os resultados obtidos pela aplicação do método em uma turma de Cálculo I da Faculdade de Engenharia Química de Lorena do ano de 2001 foram analisados de forma qualitativa e quantitativa.

Palavras-Chave: Cálculo Diferencial e Integral, Modelagem Matemática, Ambientes Informatizados, Formas Multirepresentadas.

ABSTRACT

The objective of this dissertation is to present a teaching/learning procedure for the discipline Differential and Integral Calculus centered not only in algebraical processes but also in activities comprising algebraical, numerical and graphical analysis. Simultaneously, it is proposed the establishment of a classroom environment where the actions of the student are predominantly in mathematical investigation activities. The practical application of such proposal to the performed work was possible using the Mathematical Modeling and Computational Environment in multirepresented forms. This research was carried out by the application os this method to the Calculus I class of the FAENQUIL – Faculdade de Engenharia Química de Lorena during the year 2001 and the obtained results were analyzed both qualitatively and quantitatively.

Key-Words: Differential and Integral Calculus, Mathematical Modeling, Computational Environment, Multirepresented Forms.

CAPÍTULO I

O PROBLEMA

1.INTRODUÇÃO

1.1- NATUREZA DO PROBLEMA

> “Não compreendendo os conceitos, o aluno não consegue transferi-los a outras situações práticas onde eles poderiam ser aplicados"
>
> Franchi(1993, p.36)

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral apresenta aos alunos a base matemática necessária para o desenvolvimento técnico da Engenharia. O Cálculo é uma das grandes realizações da humanidade, cujas idéias básicas foram desenvolvidas há cerca de 300 anos por Newton e Leibniz e, desde então, vem sendo utilizado nas mais diversas áreas das Ciências. É utilizado e ensinado em função de sua capacidade de reduzir problemas complexos das diversas áreas das Ciências a regras e procedimentos simples. Em função deste aspecto redutor, é possível abordá-lo como um conjunto de regras e procedimentos, aplicáveis mecanicamente em situações puramente algébricas, adequando-se a uma metodologia de ensino behaviorista, visto que o ensino através de regras e procedimentos, ditadas pelo professor, comportamentaliza o processo de ensino-aprendizagem e, nega aos alunos, possibilidades que escapem dos algoritmos algébricos, constituindo-se quase sempre em reprodução de informações ou situações algébricas.

Nesta linha de ação metodológica, freqüentemente utilizada no Cálculo, com enfoque algébrico, o aluno executa exercícios sobre limites, derivadas e integrais, na maioria das vezes, semelhantes e, portanto, repetitivos. Normalmente, o professor pede-lhes a resolução de listas de exercícios que apenas reforçam o estudo e a aprendizagem de um comportamento matemático algébrico. Estimula-se a aprendizagem pela repetição de procedimentos, levando o aluno a considerar que "domina a matéria" ao fazer e refazer longas seqüências de cálculos e que é incompetente quando simplesmente erra uma operação algébrica.

Na Faculdade de Engenharia Química de Lorena - FAENQUIL, o Cálculo Diferencial e Integral é dividido em quatro disciplinas semestrais: Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III e Cálculo IV, as quais apresentam, ao longo dos anos altos índices de reprovação e tornam-se, portanto, fonte de preocupação, pois o entendimento dos conceitos do Cálculo é primordial para a seqüência do curso de Engenharia. Em particular, o Cálculo I apresenta (ver anexo 01) uma situação bem crítica em relação aos índices de aproveitamento. Além do entendimento dos conceitos matemáticos da disciplina , sua importância para os alunos também é de ordem mais imediata, visto que a aprovação na disciplina é pré-requisito para a matrícula em grande parte das disciplinas subseqüentes.

Considera-se que os altos índices de reprovação devem-se a fatores de má formação prévia do aluno, classes numerosas e conseqüentemente pouco tempo de atendimento por parte do professor, aulas baseadas apenas em professor/quadro-negro/aluno, falta de aplicação prática em relação ao conteúdo ministrado, entre outros.

A má formação prévia do aluno é um fator externo às instituições de ensino superior, porém, os demais são estruturais ou metodológicos. Este trabalho não diz respeito aos fatores estruturais ou externos e sim, aos fatores metodológicos na questão ensino-aprendizagem, ou seja, processos pelos quais esta relação possa ser potencializada, prioritariamente, por ações do aluno.

Além dos fatores citados anteriormente, em relação ao Cálculo I, ocorre o problema da interface da Matemática anteriormente vista (baseada em operadores aritméticos) para a Matemática da Engenharia, baseada em limites, diferenciais e antidiferenciais, que além de apresentar uma complexidade algébrica maior, exige "conhecimentos acumulados" de Geometria, Trigonometria e Álgebra, interface esta que, segundo os alunos, em função da exigência de uma experiência algébrica, "provoca um choque!", visto que são exigidos conhecimentos imediatos de comportamento de funções e processos algébricos. Enfim, o que estaria “armazenado”, agora é exigido! O impacto das exigências algébricas da disciplina faz com que a mesma seja um obstáculo, para muitos, intransponível.

Quanto à mudança e acréscimo dos operadores aritméticos para os operadores baseados em limites realça-se, em relação a estes novos operadores, a ocorrência da inexistência de contextos próximos aos alunos. Somar, subtrair, dividir e multiplicar são operações efetuadas no dia-a-dia de todos, praticadas ao longo de anos nos bancos escolares e no cotidiano, enquanto que, as operações do Cálculo se enfatizam num campo bem mais abstrato, o do estudo dos fenômenos reais associados a valores abstratos e até mesmo questionáveis, como a noção de limites, valores infinitesimalmente pequenos ou infinitamente grandes, enfim, em situações não contextualizadas pela vivência dos alunos. No primeiro ano de Faculdade, o aluno é “alfabetizado” novamente, em relação a uma nova escrita, ou seja, a escrita dos limites.

A disciplina é apresentada em muitas instituições de ensino sob a forma clássica, nunca fugindo do modelo dado por definições, propriedades, exercícios puramente algébricos, aplicações "fechadas" ou poucas aplicações dos conceitos matemáticos ligados ao cotidiano ou à realidade profissional do aluno e com abordagens isoladas, visto que, ou se adota um método gráfico, ou um método algébrico, ou uma abordagem numérica, mas raramente ocorrem as três abordagens de maneira simultânea, método proposto neste trabalho.

Em sala de aula, de modo geral, a matéria é apresentada ao aluno, cabendo a ele a função de aplicar fórmulas, realizar algebrismos e quase nenhuma etapa de reflexão, de análise de resultados e de utilização do Cálculo em situações ligadas à sua futura realidade profissional ou no mínimo com aspectos interdisciplinares ou do cotidiano, o que eliminaria a visão que os alunos possuem da Matemática, em particular do Cálculo ser um conhecimento isolado, sem aplicação prática e não ligado ao cotidiano social ou profissional do aluno de Engenharia.

Na instituição pesquisada, em relação ao Cálculo I, o modelo didático apresenta-se normalmente centrado no professor, com exposição do conteúdo em quadro-negro e quase nenhum acesso a laboratórios de informática para uso de softwares matemáticos voltados à disciplina.

Realça-se, entretanto, que na instituição em questão, existem professores com grande preocupação em relação aos conceitos envolvidos na disciplina, desempenhando um sério trabalho quanto ao enfoque conceitual do curso.

Porém, é frustrante para o aluno ser colocado dentro de um modelo de aula em que ele é, quase na totalidade do curso, agente passivo do processo de ensino-aprendizagem, gerando em muitos, um total desinteresse pela disciplina, a não ser o interesse de "passar na matéria". Ao término do curso, objetiva-se que o aluno saiba executar uma série de procedimentos algébricos, complexos e longos, mas chega-se a uma situação na qual eles não sabem para que servem tantas contas, não percebendo a importância de todo o potencial conceitual do Cálculo para a sua formação de engenheiro.

Muita ênfase se dá aos procedimentos algébricos, mas não se valoriza as características de criatividade, reflexão e cooperação, as quais estão presentes nos processos de Modelagem Matemática e nas propostas de uso de ambientes computacionais utilizados deste trabalho e, que hoje, são exigidas dos profissionais de Engenharia.

D'Ambrosio (1996, p.95) afirma que a remoção do caráter experimental da Matemática do ensino é um dos fatores que mais contribuem para a queda do rendimento escolar.

Fainguelernt (1999, p.82) realça que resultados de diversas pesquisas nacionais e internacionais em Educação Matemática revelam que, de um modo geral, a maneira pela qual a Matemática vem sendo ensinada é automatizada e descontextualizada, e que o aluno executa ações rotineiras, sendo desvalorizado o desenvolvimento do raciocínio e da intuição matemática.

Segundo Moysés (1997, p.67):

> "Se professor e alunos defrontam-se com sentenças, regras e símbolos matemáticos sem que nenhum deles consiga dar sentido e significado a tal simbologia, então a escola continua a negar ao aluno, uma das formas essenciais de ler, interpretar e explicar o mundo. O importante é que o aluno, ao chegar a utilizar notações simbólicas, compreenda a sua razão de ser."

Comumente, os alunos são bombardeados unicamente com exercícios baseados em palavras-chave, tais como: calcule, determine, obtenha, resolva, derive, integre. Tal prática leva o aluno a uma preocupação única em obter números que pouco trazem de significados físicos ou matemático-conceituais.

A Modelagem Matemática apresenta-se como uma modalidade de Matemática experimental, como um método para resolução de problemas e como método para construção dos conhecimentos matemáticos do Cálculo, que parte inicialmente da intuição, e não de formalismos algébricos, valorizando portanto o raciocínio matemático. Em tal prática pedagógica as palavras-chave podem ser da forma: analise, conjecture, generalize, varie, experimente, reflita, dentre outras.

1.2-OBJETIVOS DA PESQUISA

1.2.1-OBJETIVO PRINCIPAL

Propor um procedimento de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, ou Cálculo I, que propicie a mudança do foco dos processos algébricos para o foco conceitual.

1.2.2-OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Propor o uso de representações múltiplas com abordagens, quando possível, dos assuntos através de formas numérica, gráfica e algébrica;
- Usar o computador e Modelagem Matemática como estratégias para transformar a sala de aula em ambiente de trabalho do aluno e do professor, transformando-a em local ativo de aprendizagem.

1.3- HIPÓTESES

O trabalho tem como base as seguintes hipóteses:

- O ensino de Cálculo usando um procedimento de ensino-aprendizagem através de Modelagem Matemática e situações de uso de ambientes informatizados propiciam um maior envolvimento e participação do aluno em seu processo de aprendizagem;
- A utilização da Modelagem Matemática, ambientes computacionais e representações múltiplas auxiliam no entendimento dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

1.4- JUSTIFICATIVA

Na final da década de 80, com o desenvolvimento dos computadores pessoais, o surgimento de sistemas computacionais numéricos e algébricos e ambientes gráficos, começou-se a definir, em muitas universidades dos Estados Unidos da América, uma corrente chamada Cálculo Reformado, que ainda hoje, possui as seguintes características:

- uso da tecnologia, tanto para aprendizado de conceitos e teoremas quanto para a resolução de problemas;
- Ensino-Aprendizagem com abordagens dos problemas, quando possível, de forma numérica, geométrica e algébrica;

- Grande preocupação em exemplificar e propor problemas ligados a exemplos reais;
- Tendência a exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos, suprindo esta etapa através dos sistemas computacionais algébricos.

Na opinião de Stewart (1999, p. vii) o ímpeto do movimento de reforma do Cálculo vem da Conferência de Tulane, realizada em 1986, que considerou como ação fundamental o foco na compreensão conceitual.

No modelo de curso proposto, os computadores serão utilizados em situações em que a complexidade dos cálculos é suficiente para a necessidade de seu uso, ou em atividades de exploração através, por exemplo, de simulações gráficas, variação de parâmetros e também internas ao processo de Modelagem Matemática como ferramental de soluções matemáticas. Realça-se que a utilização de ferramentas computacionais agiliza processos algébricos, de simplificação e proporciona visualização gráfica dos fenômenos estudados.

É necessário transformar a sala de aula em local de trabalho, de construção de habilidades e competências. Entende-se por habilidades e competências matemáticas, em relação ao Cálculo, os processos de investigação, de reflexão e de generalização a partir dos fenômenos estudados. Entretanto, aos invés de propiciar aos alunos situações nas quais podem ocorrer o estabelecimento de tais competências, Franchi (1993, p.4) constata que tem-se normalmente como prática docente em relação à disciplina Cálculo Diferencial e Integral as seguintes características:

- Ênfase à memorização de fórmulas em detrimento da compreensão;
- Transmissão aos alunos de códigos, símbolos e definições desligados do cotidiano do aluno;
- Apresentação dos conteúdos prontos;
- A falta de informação ao aluno de onde se aplica realmente o conceito aprendido;
- Valorização do individualismo, numa competição individualizada para ver quem obtém a maior nota;
- Atitude passiva do aluno em sala de aula.

Silva (1996, p.21) analisou um grupo de seis professores das instituições UNESP e UNICAMP que ministravam cursos de Cálculo Diferencial e Integral e esta análise envolveu aulas que abordavam o mesmo conteúdo de Cálculo, a saber, taxa de variação. Desta análise, resultou um estudo interpretativo que detectou algumas situações:

- a postura do professor é autoritária;
- a ação pedagógica fica subjacente a um fazer mecânico e acaba sendo identificada com esse fazer;
- a comunicação em sala de aula é fictícia;
- a relação não se faz em torno do objeto matemático, mas sim, em torno da aprovação/promoção;
- mecanicismo no tratamento do conteúdo explica a busca pelo "correto" em detrimento das situações motivadoras que ocorrem na sala de aula.

Neste trabalho, desde que, internas a atividades conceituais e aplicadas, as atividades algébricas não devem ser deixadas de lado, visto que ao ministrar disciplinas subseqüentes ao Cálculo I sente-se uma insegurança enorme nos alunos em relação aos pré-requisitos exigidos, tais como operações de diferenciação, limites e processos de integração, não tanto quanto à memorização de fórmulas, visto que normalmente são oferecidas como formulário, mas sim quanto à operacionalização algébrica das mesmas.

Sente-se uma carência algébrica, na manipulação dos símbolos matemáticos que gera tensão nos processos avaliativos nos quais tais conhecimentos são exigidos. Salienta-se que as disciplinas técnicas da Engenharia utilizam as operações básicas de Cálculo I, exigindo o conhecimento das técnicas algébricas e dos conceitos de Cálculo I e, portanto, a manipulação de tais técnicas deve fazer parte das exigências da disciplina, mas não em situações longas e complexas ou gratuitas, que podem ser resolvidas pelos ambientes computacionais, mas sim internas a situações-problema, de forma que o algebrismo seja um dos aspectos de interesse do problema, mas não o único e não o principal.

Este trabalho é baseado na experiência do autor em ministrar aulas de Cálculo Diferencial e Integral, Métodos Numéricos e Linguagens de Programação na Faculdade de Engenharia Química de Lorena, no conhecimento das dificuldades encontradas pelos alunos no processo de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, e nas dificuldades enfrentadas pelo professor em motivar os alunos a serem estudantes participativos. A vivência em outras disciplinas, que dão tratamento discreto aos problemas, tal como Métodos Numéricos, complementa o entendimento do tratamento contínuo oferecido pelo Cálculo e motivou a idéia da associação da Modelagem Matemática e da inclusão de ambientes computacionais, que notadamente trabalham com situações ou experimentos discretos (tabelares).

O que na maioria das vezes se presenciou, ao longo de vários cursos ministrados, foram alunos desinteressados, em sua maioria, cansados em sala de aula em função de aulas expositivas, de muitos cálculos, longos e complexos, e excessivamente preocupados quanto aos erros algébricos passíveis de serem cometidos nas atividades do Cálculo. Quanto às participações, os alunos normalmente agem quando são solicitados; participações expontâneas ocorrem mas sempre são em menor número. A maior parte das intervenções dos alunos diz respeito a “não entendi aquela passagem”, ou seja, o não entendimento e a preocupação em sala de aula é quanto à mecânica operacional do Cálculo.

Vive-se então uma situação na qual a sala de aula é transformada numa oficina de fazer contas. A preocupação e o medo dos alunos se direcionam para o algebrismo, sendo que tal aspecto algébrico, segundo os alunos veteranosé um dos fatores que prejudicaram seu rendimento na disciplina.

Hoje, o mercado exige um profissional que saiba "sair-se bem" de um grande número de situações, que saiba analisar, tomar decisões, trabalhar em grupo e, no processo de modelagem inicializa-se o desenvolvimento de um conjunto de habilidades neste sentido, como a capacidade de obter dados, informações, interpretar este conjunto de informações, interligar saberes, utilizar ferramentas (computacionais) que agilizem algumas etapas dos processos.

Neste quadro, a aprendizagem baseada em situações reais integrada à utilização da tecnologia, como elemento mediador do saber, aponta como uma solução para promover estas habilidades no aluno, na questão da aprendizagem do Cálculo. Ao mostrar para o aluno que aprender Matemática é também aprender a interpretar as situações que nos rodeiam, elimina-se a idéia por parte do aluno que "estou aprendendo coisas que nunca vou usar ou que nada se relacionam com a minha realidade". Através de aplicações do Cálculo em resolução de problemas práticos, do cotidiano pode-se persuadir um aluno a demonstrar um maior interesse pelo Cálculo.

Blum e Niss (apud Barbosa, 1999, p.77) a partir da literatura em educação matemática, destacam e usam a terminologia do argumento formativo, que torna benéfica a utilização de modelagem e problemas práticos, pois esta utilização permite estimular o interesse pela descoberta, estimula a criatividade e a autoconfiança nas capacidades e recursos do aluno.

Propõe-se, desta forma, um procedimento no qual a atenção dos alunos não seja direcionada apenas à representação algébrica, de forma que as atividades propostas possibilitem a escolha de estratégias algébrica, gráfica e ou numérica (tabelar) no tratamento dos problemas.

1.5- METODOLOGIA UTILIZADA

1.5.1- TIPO DE PESQUISA UTILIZADA NO TRABALHO

Será utilizado o método de pesquisa-ação, particularmente o estudo de casos. Fainguelernt (1999, p.107) menciona que a estratégia de estudo de casos é sugerida quando o objetivo da pesquisa é obter uma compreensão melhor da dinâmica de um programa, o que é particularmente útil para o estudo de inovações educacionais. No presente estudo, a inovação educacional trata da inclusão de um método de ensino, de um ambiente de trabalho e de formas conjuntas de análises de resultados via representações múltiplas, diferentes dos atuais métodos utilizados na instituição pesquisada.

Thiollent (1994, p.14) define a pesquisa-ação:

> "Entre as diversas definições possíveis, daremos a seguinte: a pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo".

Segundo Bicudo (1992, p.12) o pesquisador, no caso, o professor, que pesquisa de forma qualitativa pode realizar um tipo de pesquisa denominada pesquisa ação e que neste tipo de pesquisa o pesquisador participa diretamente da realidade, fazendo parte da mesma. Neste tipo de pesquisa o ponto relevante é que o problema a ser resolvido ou a pergunta formulada partam da própria situação vivida pelo professor com seus alunos. Também enfatiza:

> “O professor que pesquisa desse modo parte do seu real vivido: sala de aula, conhecimento da matemática, assuntos da educação, escola, sistema escolar. A interrogação é formada nessa realidade. É aí que é significativa. Os estudos ajudam a compreender essa realidade. Não explicam e não predizem. Mas fazem parte do modo de o professor conduzir o estar-com-os alunos”.

1.5.2 CARACTERIZAÇÃO DO UNIVERSO DE AMOSTRAGEM

O universo pesquisado será composto por uma turma de Cálculo I da FAENQUIL, totalizando 44 alunos.

Informações de sua página oficial na internet (http://www.faenquil.br/faenquil.html) caracterizam a FAENQUIL como:

> “É uma autarquia de regime especial, subordinada à Secretaria de Ciência, Tecnologia e Desenvolvimento Econômico do Governo do Estado de São Paulo. Está localizada na cidade de Lorena, Estado de São Paulo.

A FAENQUIL oferece cursos de graduação em Engenharia Bioquímica, Engenharia de Materiais, Engenharia Química, Engenharia Industrial Química e, oferece também curso de ensino médio e profissionalizante na área de química.

Objetivando formar novos pesquisadores e possibilitar a especialização aos profissionais de ensino superior, a FAENQUIL mantém programas de pós-graduação nas áreas de Biotecnologia Industrial (mestrado), Engenharia de Materiais (mestrado e doutorado), Engenharia da Qualidade (especialização), Matemática (especialização).

Desenvolve atividades de pesquisa em áreas estratégicas para o desenvolvimento nacional como Biotecnologia Industrial, Engenharia Química, Meio Ambiente, Materiais Especiais, Qualidade e Química Fina".

A caracterização específica da turma em relação a qual o experimento foi realizado ocorreu através de um questionário, distribuído para os alunos no início do semestre. Tal questionário encontra-se no anexo 03

1.5.3- PASSOS DO TRABALHO

- Montagem do conteúdo da disciplina utilizando método de ensino-aprendizagem baseado em Modelagem Matemática, empregando representações múltiplas, ou seja, onde for apropriado, os assuntos devem ser abordados sob as formas numérica, algébrica e ou geométrica, através de pesquisa bibliográfica para a escolha dos modelos matemáticos bases para o curso;

- Montagem das Aplicações nos softwares MatLab, Derive, Graphmatica ,e Modellus;
- Elaboração de questionários;
- Aplicação do modelo proposto em uma turma de Cálculo I;
- Aplicação dos métodos de coleta de dados;
- Análise e reflexões acerca do método de ensino-aprendizagem empregado.

1.5.4- INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Fainguelernt(1999, p.101) indica como procedimento para pesquisas qualitativas, a utilização de múltiplas fontes de evidências, de modo a construir validade para os dados. Desta forma, neste trabalho serão utilizados os seguintes instrumentos de pesquisa:

- Aplicação de questionário para caracterização da turma;
- Aplicação de questionários via Internet aos alunos que já cursaram a disciplina;
- Entrevistas com professores de Cálculo da FAENQUIL.
- Aplicação de questionário acerca do método utilizado (modelagem), bem como sobre o uso de ambientes informatizados e sobre o

enfoque geométrico, analítico e numérico em uma mesma situação-problema;

- Observação das aulas teóricas envolvendo processos algébricos;
- Observação das aulas em laboratório;
- Observação das aulas envolvendo modelagem;
- Entrevistas com alunos ;
- Brainstorming.

1.6- LIMITAÇÕES OCORRIDAS DURANTE A APLICAÇÃO DO MÉTODO

No planejamento inicial do curso, havia a idéia do desenvolvimento de atividades computacionais a serem desenvolvidas pelos alunos no ambiente MatLab, no tocante à escrita de programas. A idéia inicial consistia em que seriam desenvolvidas em algumas aulas, atividades de programação básica da linguagem, nas quais seriam abordadas a sintaxe da linguagem MatLab e as estruturas de controle. No entanto, a programação envolve a construção de uma lógica algorítmica que normalmente é "ensinada" ao aluno em um curso de estruturas algorítmicas e de lógica computacional. Embora os programas a serem elaborados no ambiente MatLab, em relação ao Cálculo, não possuíssem elevada complexidade algorítmica, optamos ao longo do curso, em função da demanda de tempo para as atividades conceituais e de sistematização destes conceitos, que as atividades de programação não seriam realizadas pelos alunos. Portanto, uma atividade inicial proposta no modelo de curso, não ocorreu.

A inserção de modelagem na Engenharia é fortalecida pelo levantamento de dados, seja por coleta física de dados através de experimentos ou por coleta de dados fornecidos em visitas técnicas, o que não ocorreu neste trabalho.

1.7- RESUMO DOS CAPÍTULOS

Esta dissertação encontra-se dividida em cinco capítulos, conforme breve resumo:

- segundo capítulo aborda uma revisão do princípio educacional utilizado no modelo de trabalho proposto, em particular, o construtivismo nos processos de modelagem e em ambientes computacionais. Esta revisão foi realizada com o objetivo de fundamentar as condições de criação do ambiente de aula e a própria dinâmica do curso.
- terceiro capítulo enfoca o uso de Modelagem Matemática como método de ensino-aprendizagem. É realizada neste capítulo uma conceituação dos termos utilizados no trabalho bem como uma abordagem da utilização dos computadores na Modelagem Matemática. Além disso, também enfoca a utilização ambientes informatizados no Cálculo, descrevendo formas de utilização e realizando uma descrição dos softwares utilizados no trabalho.

Finalizando este capítulo, ocorre a discussão do uso de representações múltiplas no Cálculo.

- quarto capítulo tem como objetivo principal a aplicação do método proposto, abordando o uso modelagem, dos ambientes informatizados e o uso de representações múltiplas no conteúdo do Cálculo ministrado na Faculdade de Engenharia Química de Lorena.
- quinto capítulo analisa os resultados obtidos, apresentando-se a conclusão e sugestões de futuros trabalhos.

CAPÍTULO II

PRINCÍPIOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS NO MODELO DE CURSO

2-INTRODUÇÃO

No behaviorismo, o modelo de aprendizagem é um processo mecânico, baseado em repetições, com estímulos externos chegando ao indivíduo, e este produzindo respostas , que se corretas, são recompensadas e, se erradas, são punidas e abandonadas, constituindo a base do ensino programado (no sentido do uso dos computadores no ensino) e de muitas instituições (no sentido programático de seus cursos). O behaviorismo enfatiza a dimensão quantitativa do saber, fraciona o conteúdo, lineariza a aquisição dos conhecimentos, de uma forma acumulativa, muitas vezes sem a visão geral do problema estudado, ou de maneira mais abrangente, sem a visão geral e interligada entre os tópicos de uma disciplina.

A teoria behaviorista popularizada por Skinner (1904-1990) continua conduzindo muitas das práticas educacionais em salas de aula tradicional e em muitos ambientes informatizados, particularmente em relação ao Cálculo Diferencial e Integral. Os currículos segundo esta teoria são organizados em uma seqüência rigorosa, acreditando que a melhor maneira de aprender é através da reunião de pequenos conteúdos de conhecimento e, então, integrá-los em conceitos gerais. As práticas de avaliação são focadas na medida, na quantidade do conhecimento adquirido, não se preocupando com a forma pela qual cada aluno aprende, com pequena ênfase no desempenho ou entendimento, negligenciando o fato de que pessoas aprendem de formas diferentes, isoladas ou em conjunto.

A teoria da acumulação dos saberes, do saber hereditário em mão única, conduzido na via professor-aluno, com aplicação de fórmulas, com a manipulação de símbolos sem significados para o aluno e sem a necessária conexão à prática profissional ou ao cotidiano, tornou-se a essência da pedagogia tradicional empregada no ensino das disciplinas básicas das "Matemáticas da Engenharia".

Paulo Freire (1981, p.66) constata a existência da "pedagogia bancária", onde a educação torna-se um saber bancário, onde os alunos são os depositários e o professor o depositante. Segundo esse autor, "ao invés de comunicar o professor faz comunicados”. Além disso, afirma "não pode haver conhecimento pois os educandos não são chamados a conhecer, mas a memorizar o conteúdo narrado pelo professor." (Freire, 1981, p.79)

O Cálculo é uma disciplina teórica com aplicações em muitos campos da Engenharia, com amplo espectro de atuação e, no entanto, não seduz o aluno devido à forma como é tradicionalmente lecionado. São alunos dispersos em sala de aula, com conversas paralelas, estudando para serem aprovados e, quando possível, aprender, interesse este evidenciado em poucos alunos, ou seja, naqueles que possuem o “dom da Matemática”, considerados pelo professor e pelos colegas como ótimos alunos. Mas e os outros? O que fazer ? Deixá-los à margem ou integrá-los ao ambiente de trabalho e pesquisa da Faculdade? Este trabalho aponta para a linha de conduta de integração dos alunos ao ambiente da faculdade, no sentido de pesquisar, de se interessar por um tema e de compartilhar ações.

O conteúdo da disciplina envolve uma série de operadores matemáticos que, normalmente, são apresentados sem nenhuma conexão com a realidade. Quando são ligados a problemas práticos, o são de maneira "fechada", ou seja, apresenta-se um problema já formulado, não cabendo ao aluno a discussão, de forma abrangente, da matemática envolvida no problema, desde a sua concepção até a sua etapa de finalização analítica, e sim apenas a aplicação de algum operador diferencial, num algebrismo ingênuo e estéril. Em algumas situações de ensino, o professor possibilita a análise do resultado, limitando-se à validade física do resultado, como por exemplo, "se o tempo for negativo, o valor é invalidado fisicamente".

Contrapondo este tipo de pedagogia, existem autores que defendem uma didática em que os estudos sejam baseados em atividades que desenvolvam o pensamento científico, os poderes de análise e reflexão, onde o saber é construído através de alguma situação problemática, quando possível, ligada à realidade profissional do aluno e com tais atividades desenvolvidas em grupo.

As salas de aula construtivistas devem proporcionar um ambiente onde os estudantes confrontam-se com problemas significativos, os quais devem possuir relação com sua realidade, ou proporcionar situações de ensino que envolvam os alunos, onde o conhecimento seja vivido a partir do aluno e não somente a partir do professor. Os ambientes construtivistas, informatizados ou não, devem propor problemas e situações, nas quais os estudantes são encorajados a explorar possibilidades, inventar soluções alternativas, colaborar com outros estudantes, formular hipóteses, aprender por reflexão, enfim estimular a criação e a autonomia do aluno.

A metodologia construtivista antagoniza com as salas de aula behavioristas, nas quais os estudantes aprendem inertes, passivos, recebendo toda a informação de seus professores, de livros ou ambientes informatizados, que burocratizam o conhecimento. Os estudantes no ambiente behaviorista são encorajados a aprender pela obtenção da resposta certa, não importando a análise, a reflexão de todo o processo intermediário à obtenção das respostas finais. O construtivismo assume fundamentalmente a idéia de que o indivíduo é agente ativo de seu próprio conhecimento, isto é, ele constrói significados e define o seu próprio sentido e representação da realidade de acordo com suas experiências e vivências em diferentes contextos.

2.1- AMBIENTES CONSTRUTIVISTAS

2.1.1-AMBIENTES INFORMATIZADOS CONSTRUTIVISTAS

Durante a história da humanidade, surgiram vários dispositivos utilizados no ensino: o lápis, a caneta, régua, ábaco, calculadoras, dentre outros, como instrumentos tecnológicos, mas na maioria das situações de ensino utilizados, ao longo da história, a partir do ponto de vista do professor, sendo utilizados pelos alunos apenas como elementos de reprodução de conhecimentos.

A primeira utilização dos computadores no ensino seguiu uma linha behaviorista, que possuía a visão dos computadores como uma máquina de ensinar, através de exercícios repetitivos, valorizando apenas a memorização e o número de questões corretas atingido pelos alunos.

Durante muitos anos, a linguagem de programação "Logo" foi uma das poucas ferramentas computacionais nas quais o conhecimento poderia ser construído pelas ações do aluno usuário. A maior parte dos ambientes computacionais seguia a linha instrucionista, apenas trocava o quadro-negro por uma tela de computador, que embora muito mais dinâmica, apenas se constituía em um instrumento de transmissão de conhecimento, com exercícios tipo certo ou errado, de múltiplas escolhas, constituindo-se num conjunto de atividades denominado instrução assistida por computador.

Nos dias de hoje, ainda existem muitos programas nesta linha, que visam a fixação do conhecimento através de exercícios rotineiros, extraídos dos livros para a tela do computador, avançando em grau de dificuldade à medida que o aluno executa suas etapas, conduzindo o aluno de forma mecânica, não lhe propiciando efetivamente a construção do conhecimento matemático, como por exemplo, através de atividades de modelamento, de simulação e reflexão.

Mesmo programas que possuem ferramentas que o tornam um ambiente construtivista ainda são utilizados de forma instrucionista, com todas as etapas sendo direcionadas linearmente pelo professor ou pelo próprio software. Na verdade, o que torna um ambiente construtivista ou não, não é o software e sim as ações de professores e alunos. Neste trabalho, em algumas situações, foi escolhido o uso do termo ambientes informatizados e não simplesmente softwares matemáticos, para evidenciar um significado de interação entre os alunos e os softwares, via atividades propostas.

A utilização de softwares matemáticos utilizados ao longo de um curso, por si só, não propicia a formação de um ambiente construtivista. A escolha deve ser feita na direção de ambientes que permitam ao aluno experimentar, modelar, investigar e concluir matematicamente em relação aos fenômenos estudados e, que estes ambientes façam parte de uma proposta metodológica na qual tais atividades sejam pilares. Em ambientes construtivistas, o princípio básico é de que o conhecimento se constrói através de ações do sujeito sobre o objeto, no caso os objetos matemáticos do Cálculo.

Em ambientes informatizados, esta construção do conhecimento se dá através de experimentações, de simulações, de tentativas, erros e acertos propiciando ao aluno, ao final destas etapas, a capacidade e a necessidade de concluir, de generalizar sobre a leitura conceitual do objeto matemático analisado. A proposta construtivista não deve se interessar pelo uso das ferramentas que privilegiem a transmissão do conhecimento e sim pela forma de utilização destas ferramentas para a geração de saberes, saberes estes gerados preferencialmente por ações decorrentes do aluno.

Nesta abordagem, o ambiente construtivista trabalha com o “fazer Matemática” e não com uma forma passiva, formal e discursiva na qual o aluno apenas aprende definições e propriedades, mas não vive situações que lhe proporcionem desafios; normalmente lhe é exigido apenas memorização e repetição.

Ao refletir, generalizar, tirar conclusões, demonstrar, o aluno está fazendo Matemática, é autor das construções, dos processos que dão sentido ao conhecimento matemático. Na Matemática, o conhecimento é construído a partir de investigação, de explorações acerca de situações empíricas ou totalmente abstratas, partindo para as reflexões sobre a natureza matemática do objeto, reflexões que atualmente podem ser potencializadas pelas características gráficas e numéricas dos ambientes informatizados, e depois formalizadas através da escrita matemática.

Segundo Arcavi (apud Fainguelernt, 1999, p.59) para “aprender Matemática” é preciso “fazer matemática progressivamente”. “Aprender e compreender Matemática significa ter a capacidade de trabalhar com diferentes representações de uma mesma idéia, realizando conexões entre elas e sabendo identificar bem as restrições”. Desta forma, ambientes informatizados ou métodos de ensino-aprendizagem que proporcionem aos alunos trabalharem com várias representações, sejam algébricas, numéricas, gráficas ou mesmo verbais, caracterizam condições para o “fazer Matemática”.

Hoje, ainda parte dos programas voltados ao Cálculo , como Rurc, pertencem ao grupo de programas de exercícios, colocando o aluno diante de situações algébricas, que avançam em grau de dificuldade à medida que as etapas do programa são cumpridas ou simplesmente constituindo-se num ambiente de obtenção de respostas, proporcionando apenas um feedback às entradas operacionais do aluno perante o software.

Existem também softwares, como o Microcalc, que são rotineiramente usados como ferramenta para validação de respostas do aluno. Desta forma, o usuário entra com a forma algébrica de uma função e o software produz a resposta de um determinado operador do Cálculo.

Não se pode usar a informática mantendo as mesmas relações de um ensino tradicional, centradas no professor, onde o aluno não constrói o seu conhecimento e apenas cumpre etapas de saída do processo, sendo as idéias do professor as entradas do processo de aprendizagem.

2.1.2- CONSTRUTIVISMO EM SITUAÇÕES ALGÉBRICAS E EM ATIVIDADES CONCEITUAIS DO CÁLCULO

Segundo Richard (apud Gravina e Santarosa,1998, p.6):

> "É necessário que o professor de matemática organize um trabalho estruturado através de atividades que propiciem o desenvolvimento de exploração informal e investigação reflexiva e que não privem os alunos nas suas iniciativas e controle de situação. O professor deve projetar desafios que estimulem o questionamento, a colocação de problemas e busca de soluções. Os alunos não se tornam ativos aprendizes por acaso, mas por

desafios projetados e estruturados, que visem a exploração e investigação".

Vergnaud (apud Gravina e Santarosa, 1986, p.6) destaca princípios para o estabelecimento de uma pedagogia construtivista:

"Um dos maiores problemas na educação decorre do fato que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que estes conceitos devem ser construídos pelos alunos. ...Solucionando problemas, discutindo conjecturas e métodos, tornando-se conscientes de suas concepções e dificuldades, os alunos sofrem importantes mudanças em suas idéias...".

Apresentam-se os teoremas de derivação como fórmulas finais, sem conotações gráficas, por exemplo, o que poderia ajudar a compreensão das razões pelas quais funções que fazem "bico" não são diferenciáveis, visto que, se apresentados os gráficos deste tipo de função, seria compreendido pelo aluno o fato de existirem infinitas tangentes diferentes no mesmo ponto, o que invalidaria o conceito de limites unilaterais iguais .

Como outro exemplo, cita-se a experiência da definição de limites, um conceito importantíssimo para o Cálculo. Normalmente, o conceito de limite é transmitido ao aluno, sob a forma clássica, dos números epsolon e delta. Tal definição pode ser dada por (Anton, p.141) :"O limite da função f(x), quando x tende ao valor a vale L, se dado qualquer número $\varepsilon>0$, pudermos encontrar um número $\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ se $0<|x-a|<\delta$".

A partir desta definição, deseja-se que o aluno entenda a idéia de números infinitesimalmente pequenos, sem lhes dar a chance de simular uma situação numérica ou gráfica.

É considerado nesta proposta, que o primeiro conhecimento a ser construído pelo aluno não é o conhecimento rigoroso da escrita matemática e sim a construção inicial de noções intuitivas dos operadores do Cálculo a serem estudados, no caso limites, para que após este conhecimento intuitivo, ocorra o formalismo matemático.

Salienta-se, entretanto, que a utilização de análises numéricas em algumas situações, como por exemplo $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$, não conduzem à realidade do problema de limites, visto que as evidências numéricas conduzem ao valor zero e no entanto a análise algébrica conduz ao valor correto dado por 1/6; porém, até mesmo nestas situações, o aluno pode comparar as diversas representações e refletir quanto aos aspectos do objeto matemático analisado que levam a tais divergências.

O Cálculo é apresentado de forma hermética, sem espaços para reflexão conceitual. Este trabalho aborda um modelo de curso seguindo uma abordagem construtivista, instrumentalizado através da Modelagem Matemática e vividos quando possível em ambientes informatizados que valorizem os processos de investigação matemática. Ao trabalharmos desta forma, integramos ao conjunto de ações do aluno, atividades algébricas, numéricas e gráficas, propiciando que os alunos obtenham os conceitos e resolvam as situações matemáticas, refletindo sob múltiplas representações, a partir das quais podem generalizar matematicamente, construindo, de forma efetiva, seus conhecimentos.

Freqüentemente, são propostas aos alunos questões, dentro de problemas, do tipo: determine o valor da derivada e interprete o resultado obtido. A interpretação de resultados é ligada à conceituação do problema, ou seja, não se consegue interpretar um resultado matemático se seu conceito matemático ou se sua aplicação não estiverem devidamente interiorizados pelos alunos. Ao contrário do instrucionismo, comumente aplicado nas aulas de Cálculo, ao optar-se por metodologias construtivistas, os conceitos não são transmitidos e sim criados ou recriados pelos alunos, interiorizados pela incorporação dos conceitos matemáticos vividos nas atividades propostas, desenvolvidos e ampliados na direção do social para o aluno, com as atividades de trabalhos em grupo.

Na prática do estudante de Engenharia, a determinação algébrica de uma derivada ou a resolução de uma integral é uma aplicação de fórmulas, onde o aluno recorre a algoritmos algébricos que já fazem parte de sua experiência. Chamamos de experiência ao conjunto de ações e operadores algébricos tais como processos aritméticos, fatoração, produtos notáveis e simplificações algébricas. Ao obter um resultado algébrico, o aluno aplica fórmulas de derivação que lhe são passadas como teoremas e cabe a ele conciliar estes teoremas à sua experiência algébrica. Porém, a análise dos resultados envolve uma leitura total do problema, desde conceituação até a aplicação física dos resultados.

O que se observa em problemas envolvendo análise ou interpretação de resultados e procedimentos algébricos, são respostas freqüentemente incorretas ou sem senso de realidade quanto à interpretação, sendo que alguns alunos acertam eventualmente os processos algébricos Desta forma, evidencia-se que o aluno prioriza a memorização das regras, prioriza os algoritmos de resolução de derivadas, limites e integrais, mas não consegue estabelecer conexão entre conceitos e aplicabilidade.

Exercícios algébricos podem ser memorizados, gerando uma base de conhecimentos nos alunos. Porém, Fainguelernt (1999, p. 205) cita Vygotsky: “Um conceito é mais do que uma soma de certas conexões associativas formadas pela memória, é mais do que um simples hábito mental, é um ato real e complexo de pensamento que não pode ser ensinado por meio de treinamento”.

O instrucionismo utilizado nos cursos de Cálculo enfatiza a memorização, o formalismo matemático de teoremas prontos e acabados que são transmitidos aos alunos, valendo a quantidade de técnicas do Cálculo que lhes são fornecidas. Ao memorizar situações, principalmente as algébricas, o aluno não consegue conceituar em situações diferentes da memorizada, muitos não conseguindo agir sequer por analogia.

Ao optar-se por atividades construtivistas em um curso, sejam elas mediadas por Modelagem Matemática e ou ambientes informatizados, abre-se um campo maior para o entendimento dos conceitos, pois eles passam a ser vivenciados pelos alunos em etapas, em processos mais diluídos ao longo do tempo, com exigências de respostas não imediatas, proporcionando tempo de reflexão quanto às características do objeto matemático em analise.

Anton (2000, p.xxvii) inicia o seu livro Cálculo Um Novo Horizonte com uma mensagem para os estudantes: "O Cálculo é uma compilação de idéias, que oferecem uma forma de ver e analisar o mundo físico. Como em todas as disciplinas matemáticas, o Cálculo envolve equações e fórmulas". Pela própria definição do autor, verifica-se a possibilidade de se trabalhar com a disciplina sob os dois enfoques: instrucionista e construtivista. Ao envolver procedimentos em relação à fórmulas e equações, o Cálculo pode ser abordado em sala de aula como um manipular de fórmulas , constituindo-se desta forma em um ensino onde conceitos não são criados pelos alunos, tendo como valor principal do curso os procedimentos algébricos e as fórmulas e teoremas sem demonstração, servindo apenas como ferramentas de cálculo algébrico.

Contrariando esta visão, temos o enfoque, segundo o autor citado anteriormente, de se utilizar o Cálculo como uma forma de ver e analisar o mundo físico. Esta visão adequa-se perfeitamente aos fundamentos do processo de Modelagem Matemática utilizados como método de ensino, visto que neste processo, as ferramentas do Cálculo são utilizadas para analisar fenômenos ligados à realidade.

Ao mesmo tempo, abre-se caminho para uma ação construtivista, pois a visão do mundo é particular a cada um, os caminhos de solução adotados em relação a um mesmo problema, as estratégias também podem ser particulares, constituindo-se em liberdade de escolha de métodos de análise e resolução de problemas. Alguns alunos podem fazer a opção por uma estratégia algébrica, outros por estratégias numéricas ou gráficas, ou por ações complementares. Desta forma, um ambiente construtivista, para o ensino de Cálculo, deve ser um ambiente de escolha, com graus de liberdade, definidos pelo professor, redefinidos, se necessário, por ações conjuntas de professores e alunos.

O Cálculo também é chamado de Matemática da variação e se preocupa em descrever a forma precisa na qual variações em uma variável se relacionam com variações em outras. Por exemplo, a velocidade de uma reação química relaciona-se com as concentrações dos reagentes. Sob um enfoque instrucionista, o professor apresenta ao aluno as concentrações dos reagentes e através de uma fórmula pronta, disponibilizada ao aluno, é feito o cálculo da taxa de variação. Sob um enfoque construtivista, o aluno pode ser, por exemplo, colocado diante de um experimento químico no qual os dados são levantados, o modelo de reação é construído matematicamente e os dados são analisados em tabelas, gráficos e de forma algébrica e analítica, sendo atividades constituídas essencialmente por ações dos alunos, não necessariamente experimentais, mas necessariamente reflexivas.

Nesta forma de procedimento, os conceitos não são simplesmente passados aos alunos através de exercícios ou teoremas prontos, são sim, efetivamente construídos pelos alunos através de suas análises e estratégias particulares e compartilhadas por grupos e, então aplicados em atividades de sistematização.

No Cálculo, numa visão algébrica, a reprodução da notação complexa torna-se objeto do estudo e caráter avaliativo da aprendizagem dos conteúdos, priorizando-se exercícios com riqueza algébrica, mas por muitas vezes, pobres conceitualmente e sem aplicação prática.

Um exercício clássico, exemplo de uma abordagem instrucionista, linear, algoritmizada, comumente avaliado em provas de Cálculo, são os exercícios de técnicas de integração, constituindo-se em longos procedimentos algébricos, um verdadeiro labirinto de fórmulas. Ministrando-se o Cálculo com prioridades ligadas ao algebrismo, como podemos esperar que os alunos entendam-no como uma linguagem e não somente como uma ferramenta?

Porém, mesmo exercícios algébricos podem conter importantes conceitos se construídos corretamente de forma que envolvam reflexão matemática. Ou seja, procedimentos algébricos não necessariamente são puramente instrucionistas, no sentido do fazer apenas para memorizar o conteúdo matemático e, mesmo não contendo ligação com a realidade, sendo puramente conceituais e abstratos, podem apresentar a riqueza de interligar conceitos puramente matemáticos e levar a um nível de abstração superior à empírica (normalmente presente no início dos processos de modelagem), conduzindo a uma abstração reflexiva (abstração sobre as próprias idéias incorporadas às informações do próprio objeto, no caso os operadores do Cálculo).

Analisemos duas situações nas quais estejam envolvidos procedimentos algébricos com visões instrucionistas e construtivistas do cálculo. A primeira situação envolve a utilização de técnicas de integração para se calcular a integral $\int \sec^5(x)dx$.

Segue a solução desta questão:

$\int \sec^5(x)dx = \int \sec^2(x)\sec^3(x)dx$

Utilizando integração por partes:

$u = \sec^3(x)$

$du = 3\sec^2(x)\sec x)tg(x)dx$

$dv = \sec^2(x)dx$

$\int dv = \int \sec^2(x)dx$

$I = \sec^3(x)tg(x) - 3\int tg^2(x)\sec^3(x)dx$

$I = \sec^3(x)tg(x) - 3\int [\sec^2(x) - 1]\sec^3(x)dx$

$I = \sec^3(x)tg(x) - 3\int \sec^5(x)dx + 3\int \sec^3(x)dx$

A integral $\int \sec^3(x)dx$ que aparece no último termo é resolvida, por partes também e chegamos à seqüência algébrica:

$I_1 = \sec^3 xdx$

$I_1 = \sec^2 x \sec xdx$

$u = \sec x$

$du = \sec xtgxdx$

$dv = \sec^2 xdx \quad v = tgx$

$I_1 = \sec(x)tg(x) - \int tg^2(x)\sec(x)dx$

$I_1 = \sec(x)tg(x) - \int [\sec^2(x) - 1]\sec(x)dx = \sec(x)tg(x) - \int \sec^3(x)dx + \int \sec(x)dx$

$I_1 = \frac{1}{2}[\sec(x)tg(x) + \ln|tg(x) + \sec(x)|]$

$I = \sec^3(x)tg(x) - 3\int \sec^5(x)dx + 3\int \sec^3(x)dx$

$I = \sec^3(x)tg(x) - 3I + \frac{3}{2}[\sec(x)tg(x) + \ln|tg(x) + \sec(x)|$

$I = \frac{1}{4}\{\sec^3(x)tg(x) + \frac{3}{2}[\sec(x)tg(x) + \ln|tg(x) + \sec(x)|\} + c$

Este, como muitos outros, é um exercício puramente algébrico, um algorítmo de regras, onde o que importa é o manipular de fórmulas e a única decisão do aluno é sobre qual fórmula, simplificação ou caminho algébrico deve ser tomado.

Procedimentos algébricos longos levam, consideravelmente, a uma margem maior de erros por parte dos alunos e, se sabemos que eles errarão, por que "cobramos" tais atividades em nossas avaliações e por que priorizamos uma metodologia baseada numa cultura de erros, sem reflexão conceitual, que não proporciona ganhos nos conceitos e nas aplicações, conduzindo a ações que hoje, as máquinas fazem melhor e sem a margem de erros efetuada pelos alunos.

Algebrismos ingênuos, sem significado algum para o aluno, proporcionam a visão da matemática somente como um conjunto de símbolos. As regras são importantes, elas estruturam a exposição do pensamento matemático, mas não podem ser um fim em si mesmas. Atividades desprovidas de contexto, ou de aplicação, ou de conceitos matemáticos, como longos exercícios de integração, não trazem significados para o aluno, sejam significados matemáticos-conceituais ou físicos.

Contrastando com este algebrismo sem sentido, a segunda situação algébrica tomada como exemplo envolve o cálculo da expressão $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right)$. Aparentemente um exercício puramente algébrico, porém de uma grande riqueza conceitual, como a análise mostrará. Stewart (1999, p. 429) demonstra a resolução deste exercício, como se segue integralmente.

Solução: Vamos começar por uma análise preliminar dos ingredientes da função. O que acontece com o primeiro fator, x/(x-3), quando x tende a 3? O numerador tende a 3 e o denominador tende a 0, portanto temos:

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \text{ quando } x \to 3^{+} \text{ e } \frac{x}{x-3} \to -\infty \text{ quando } x \to 3^{-}$$

O segundo fator tende a $\int_{3}^{3} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$, que é 0. Não está claro o que acontece com a função como um todo. (Um fator torna-se grande enquanto o outro torna-se pequeno). Como devemos proceder?

Um dos princípios dos problemas-soluções é reconhecer alguma coisa familiar. Haverá uma parte da função que nos lembre alguma coisa vista antes?

Bem, a integral $\int_{3}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ tem x como seu limite superior de integração, e esse tipo de integral ocorre na parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x)$$

Isso sugere que a diferenciação pode estar envolvida. Uma vez que começamos a pensar sobre diferenciação, o denominador em questão, (x-3) lembra-nos de alguma coisa que pode ser familiar: uma das formas de definição de derivada:

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

e com a=3 isso fica

$$F'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3}$$

Logo, qual é a função F em nossa situação? Note que se definirmos

$$F(x) = \int_{3}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$$

Então F(3)=0. E o que acontece com o fator x no numerador? Ele é apenas uma pista falsa, portanto vamos fatorá-lo e colocar junto o cálculo:

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_{3}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right) = (\lim_{x \to 3}) \cdot \lim_{x \to 3} \frac{\int_{3}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt}{x-3}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \\
&= 3F'(3) \\
&= 3 \frac{\operatorname{sen} 3}{3} \\
&= \operatorname{sen} 3
\end{aligned}$$

Este tipo de exercício, embora constituído de parte algébrica, interliga conceitos importantes, como limites, derivadas e o Teorema Fundamental do Cálculo, que relaciona o Cálculo Diferencial ao Cálculo Integral, não se constituindo num fazer contas e manipular de fórmulas sem enfoque conceitual, constituindo-se num processo que envolve reflexão sobre os operadores do Cálculo. Este exercício foi aplicado como uma proposta de trabalho com os alunos chegando a um resultado conceitual importante, pois muitos (43%) chegaram a usar o Teorema Fundamental do Cálculo enquanto o restante dedicou-se à resolução do exercício através da resolução da integral, priorizando portanto o algoritmo algébrico e não o entendimento dos conceitos do Cálculo, como o Teorema Fundamental do Cálculo e a definição da derivada de uma função.

Não se pode desprezar o rigor, o formalismo, a riqueza da notação e dos conceitos puramente matemáticos, os quais em algumas situações interessam realmente somente aos matemáticos e não a engenheiros, mas que em muitas situações, utilizados em cursos de Engenharia, são cruciais para a construção dos conceitos matemáticos e principalmente para a interligação destes conceitos. O que se coloca é sobre o não uso da gratuidade dos algebrismos nos cursos de Engenharia e sim, a inclusão de algebrismos e formalismos, quando o fortalecimento e a interligação dos conceitos matemáticos estiverem envolvidos, ou como parte de integrante das atividades do Cálculo.

Historicamente, o ensino do Cálculo vem se baseando na exposição excessiva das ações do professor, na repetição e memorização de fórmulas, em procedimentos algébricos e conseqüentemente, em muito tempo dedicado a estas atividades. Esta forma de ensinar a disciplina a faz parecer apenas um manipular de símbolos matemáticos, ou seja, o operador diferencial, a antiderivada, os limites e as funções, muitas vezes com significados e objetivos apenas algébricos, distanciando-se de aplicações práticas do engenheiro ou de aplicações do cotidiano. Perde-se tempo em atividades não tão nobres comparados à modelagem de fenômenos, à análise dos resultados, à discussão dos métodos de resolução dos modelos e à troca de informações.

Porém, como já citado, não se deve desprezar a importância do manuseio das fórmulas e de suas ferramentas, visto que as disciplinas do ciclo técnico da Engenharia as utilizam em seus processos de resolução. O que se coloca é que os procedimentos mais simples podem ser realizados pelo aluno, mas existem situações tão complexas, longas, cansativas, excessivamente algébricas, nas quais poderiam ser utilizados os softwares matemáticos.

Como ponto fundamental de utilização de uma abordagem construtivista, através de processos de modelagem e ambientes computacionais, realça-se portanto, a passagem por etapas reflexivas que envolvam conceitos e ou aplicações do Cálculo através de abstrações empíricas (relacionadas ao fenômeno estudado em si) como ponto de partida para a resolução do problema e as abstrações reflexivas como fechamento do problema (relacionadas ao objeto matemático em estudo). Porém, mesmo processos algébricos, desconectados de realidade, podem ser utilizados como instrumentos de construção de conhecimentos do Cálculo, se devidamente envolverem a construção de uma estrutura matemática conceitual.

A proposta metodológica fundamentada em processos algébricos, ou nos aspectos instrumentais do Cálculo supervaloriza o algebrismo como objetivo final do processo do ensino-aprendizagem. A proposta deste trabalho valoriza as ações dos alunos em processos nos quais ocorram situações conceituais passíveis de serem multirepresentados, sem focos instrumentais algébricos. Na valorização de tais ações, buscou-se por um método de ensino-aprendizagem no qual o algebrismo não fosse a linha norteadora do curso. Além disso, a procura deu-se em relação a um ambiente no qual a ação do aluno fosse prioritária em relação à condução do processo de aprendizagem. O ambiente escolhido para este propósito foi composto pelo método da Modelagem Matemática, pelo uso de ambientes informatizados e pela análise das situações através das representações algébrica, numérica e gráfica.

CAPÍTULO III

INFORMÁTICA APLICADA AO ENSINO

3 – COMPUTADORES E EDUCAÇÃO

3.1 - O ENSINO AUXILIADO POR COMPUTADOR

A utilização do computador como veículo mediador do processo ensino-aprendizagem vem se tornando cada vez mais freqüente na instituições de ensino superior, seja através de softwares estatísticos, algébricos, numéricos, matemáticos, ambientes virtuais ou sistemas baseados em técnicas de inteligência artificial.

Dentre as possíveis formas de sua utilização, destacam-se abordagens que condizem com Valente (1993, p. 5), e que convergem para a linha adotada nas propostas de ensino objeto do presente estudo:

> "......., as novas modalidades de uso do computador na educação apontam para uma nova direção: o uso desta tecnologia não como máquina de ensinar, mas como uma nova mídia educacional: o computador passa a ser ferramenta educacional, uma ferramenta de complementação, de aperfeiçoamento e de possível mudança na qualidade de ensino".

Araújo (1993. p.1) cita Lacampagne, o qual "propõe mudanças fundamentais no processo ensino-aprendizagem, ressaltando a importância dos estudantes construírem a sua própria compreensão dos conceitos matemáticos, indicando que calculadoras, computadores e outras tecnologias podem ser ferramentas efetivas para esta construção”.

Continua afirmando que:

> “Professores da Associação Australiana de Matemática (1996) apresentam considerações acerca do acesso apropriado à tecnologia educacional, apontando que os estudantes, ao utilizarem calculadoras e computadores, demonstram melhores atitudes em relação ao aprendizado de Matemática e maior confiança em sua capacidade de resolver problemas, recomendando a importância de se suscitar atividades cooperativas em ambientes tecnológicos. Sugerem, finalmente, a utilização de tecnologias educacionais como suporte ao ensino da Matemática nos diversos níveis de ensino, ressaltando o seu enorme potencial”.

Serpa (apud Paldês, 1999, p. 13) identifica algumas vantagens da inserção da computadores resultando em benefícios acadêmicos. Em relação ao ensino tradicional, os estudos concluíram que ensino assistido pelo computador:

- melhorou a aprendizagem, ou pelo menos, não piorou;
- reduziu o tempo de aprendizagem;
- melhorou as atividades dos estudantes para com o computador no processo de ensino aprendizagem.

Reinhardat (apud Paldês, 1999, p. 14) considera que a inserção da informática no ambiente escolar possui aspectos de:

- aumentar a taxa de retenção dos conhecimentos adquiridos e colaborar com a melhor qualidade do rendimento escolar;
- reduzir o tédio e, em conseqüência, os casos de mau comportamento dos alunos;
- apoiar uma seqüência progressiva de exercícios práticos, individualizados ou em projetos específicos.

3.2 - TIPOS DE SOFTWARES UTILIZADOS NA EDUCAÇÃO

Dentre as diferentes classificações quanto ao uso dos softwares na educação, apresenta-se uma estruturação sugerida por Martiniano (2001, p.11), na qual identifica as modalidades de sua utilização como o computador-tutor, o computador-aprendiz e o computador-ferramenta.

Inicialmente, a utilização dos computadores na educação constituiu-se na forma de exercícios e prática. Desta forma, o software apresenta uma questão ao aluno-usuário, e sob a resposta do aluno, o software fornece um feedback sob a validade da resposta, funcionando como um processo de estímulo-resposta. Eventualmente, pode ser fornecido um reforço após a resposta do aluno. Em relação ao Cálculo, um exemplo de programa do tipo tutor, é o software RURC, que apresenta questões sobre tópicos do Cálculo e fornece alternativas a serem selecionadas pelo aluno. Embora este tipo de software é atualmente muito criticado por sua abordagem instrucionista, reservando ao aluno um papel passivo, sem características construtivistas, possui aspectos relevantes, notadamente a sistematização de conceitos e verificação de competências algébricas.

Na modalidade de computador-aprendiz, encontram-se as linguagens de programação, nas quais os alunos estruturam um algoritmo para a resolução de determinado problema e depois codificam em linguagens como FORTRAN, PASCAL, C ou linguagens mais atuais como Delphi ou Visual C. Nesta modalidade, o computador é o aprendiz e o aluno o "professor" atuando como programador. A programação de computadores apresenta alguns aspectos interessantes (Freitas, 1990, p.110):

1. a definição do algoritmo;
2. a estimulação da capacidade de identificar erros e de os resolver;
3. a reflexão sobre a comunicação, na questão da interface do programa.

A definição do algoritmo está ligada à questões de estruturas lógicas do pensamento na resolução de problemas e, também, em relação à própria Matemática, já que considerável parte do tempo dos alunos é dedicado à lógica-proposicional. Além disso, o algoritmo permite a construção do conhecimento matemático em si, como por exemplo, ao se criar um algoritmo para o cálculo de raízes de uma equação do segundo grau. Nesta situação, o aluno identifica as condições matemáticas do discriminante delta da equação de Baskara, relacionando-as aos conjuntos dos números reais ou complexos. Em relação ao Cálculo, podem ser representantes deste tipo de modalidade, softwares como Maple ou MatLab.

Como computador-ferramenta, existem softwares como Microcalc, Derive, e Graphmatica, nos quais a filosofia é, a princípio, proporcionar aos alunos a resolução de determinadas tarefas, e não atuar como ambiente de ensino-aprendizagem. Porém, possuem recursos gráficos e numéricos que permitem a criação de situações nas quais os alunos podem ser submetidos a atividades de conceituação matemática.

A tecnologia possui atrativos como obtenção de rápidas respostas, atrativos visuais, sonoros, de simulação, porém, a inserção dos recursos tecnológicos, notamente na Matemática e no Cálculo, não deve ser sob o prisma ferramental e sim sob o aspecto de ambiente de aprendizagem, nos quais a autonomia do aluno seja valorizada.

"O reencantamento, enfim, não reside principalmente nas tecnologias, cada vez mais sedutoras, mas em nós mesmos, na capacidade em tornarmo-nos pessoas plenas, num mundo de grandes mudanças. É maravilhoso crescer, evoluir, comunicar-se plenamente com tantas tecnologias de apoio. É frustrante, por outro lado, constatar que muitos só utilizam essas tecnologias nas suas dimensões mais superficiais, alienantes ou autoritárias. O reecantamento, em grande parte, vai depender de nós." (Moran, 1996)

3.3 - POSSÍVEIS PROBLEMAS

A utilização de ambientes informatizados em contextos educativos pode apresentar algumas situações problemáticas:

- ausência de softwares adequados à proposta metodológica;
- falta de treinamento dos professores quanto ao uso dos recursos dos softwares;
- número insuficiente de computadores
- falta de investimentos em softwares e novos recursos computacionais;
- ausência de bibliografias construtivistas em relação ao uso do software na conceituação matemática.

Assim, a implementação dos computadores no ensino e, especificamente em relação ao Cálculo, passa pelo desenvolvimento de competências da informática dos professores, onde os mesmo aprendam a criar situações conceituais nos ambientes informatizados, além da exploração dos recursos do software.

Na FAENQUIL, por exemplo, este é um dos grandes problemas para a implementação de métodos de ensino-aprendizagem que utilizem computadores, sendo que dos quatro professores que normalmente ministram a disciplina Cálculo I, apenas um professor possui conhecimentos de informática que possibilitem a plena utilização do binômio Informática-Cálculo Diferencial e Integral.

Borba & Penteado (2001, p. 55) indicam a existência de uma zona de risco quanto ao uso de ambientes informatizados. Segundo os autores, dentre diversas características, podem ocorrer problemas ligados à perda de controle e obsolescência. A perda de controle pode surgir em função de problemas técnicos e da diversidade de situações didáticas que podem ocorrer quando os alunos utilizam computadores. Na verdade, a aula previamente preparada, com todas as situações sob o controle do professor, desaparece em algumas ocasiões, podendo surgir perguntas imprevisíveis.

Os autores também afirmam que um problema técnico, como mudança de configuração das máquinas, pode alterar ou obstruir completamente uma atividade de aula.

Muitos professores desistem da utilização dos recursos computacionais, continuam Borba & Penteado, quando percebem a dimensão da zona de risco, evitando qualquer tentativa de mudança de ambiente de aula, justificando-se com perguntas do tipo: “Se meu aluno utilizar a calculadora, como ele aprenderá a fazer contas?”, “Se o estudante do ensino médio aperta uma tecla do computador e o gráfico da função já aparece, como ele conseguirá, de fato, aprender a traçá-lo?”. Estas manifestações, segundo Borba e Penteado (2001, p.12) desde os anos 80, continuam a estar presentes em discussões sobre educação.

Na verdade, argumentam e defendem o uso do lápis e papel nas representações dos conteúdos educativos e se esquecem que os mesmos também são recursos tecnológicos e ferramentas de representação de idéias e conceitos. A concepção de que ambientes informatizados não são contextos passíveis de representação de idéias matemáticas ainda permeia a mente de muitos professores do ensino superior, que consideram o seu uso como mero ferramental.

O problema é que grande parte dos professores sempre utilizou o lápis e o papel como ambiente de representação de suas idéias, e vê o computador como ambiente de obtenção de repostas a problemas já formulados com lápis e papel, desconhecendo a possibilidade de ambientes como a linguagem "Logo" ou ambientes algébricos.

3.4- A INFORMÁTICA NA GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA:

A aplicação da Informática dentro dos cursos de graduação e em especial nas Engenharias, sempre esteve ligada ao ensino de programação de computadores utilizando linguagens como "BASIC", "FORTRAN ", "PASCAL" e "C". O objetivo inicial de tal inclusão, nos curso de Engenharia, é a fundamentação teórica para o desenvolvimento de disciplinas onde métodos aproximados de solução dos problemas possam ser utilizados. Desta forma, em relação à graduação a utilização de computadores ou de ambientes informatizados durante muitos anos possuiu o aspecto de ferramental para solução de problemas que não apresentavam solução analítica e, portanto, soluções numéricas aproximadas eram encontradas. Em muitas instituições de graduação em Engenharia, a utilização teórica dos computadores encontra-se presente em disciplinas como Introdução à Programação dos Computadores e possui o aspecto de inserção da lógica matemática e da lógica operacional da linguagem a ser estudada.

A utilização dos computadores como ambientes algébricos data da década de 80 com o surgimento dos sistemas algébico-computacionais como por exemplo Maple, MatLab. MathCad, dentre outros. Nestes ambientes, além de obterem resultados numéricos, também podem ser obtidos resultados algébricos, proporcionando respostas analíticas.

A grande utilização de softwares na graduação em Engenharia refere-se a ambientes de resolução de sistemas lineares de equações ou programas para solução de equações diferenciais, sendo portanto utilizados na modalidade de computador e softwares ferramentas. Os professores normalmente não usam e não estão preparados à sua utilização como ambientes de conceituação matemática, o que será proposto por este trabalho.

A utilização de computadores em Matemática e em especial no Cálculo Diferencial e Integral, propicia diferentes ambientes de ensino-aprendizagem, alguns reproduzindo o modelo de aula tradicional, quando utilizados como tutoriais ou como ambientes de verificação de respostas, outros, oferecendo ambientes de investigação, propiciando a construção do conhecimento a partir de ações e reflexões do aluno.

O computador pode ser utilizado como auxilio ao aprendizado através de softwares MicroCalc, Derive, Graphmatica, planilhas, dentre outros, em tópicos específicos da Matemática, em especial o Cálculo Diferencial. Na abordagem instrucionista, é crucial a conceituação dos tópicos a serem desenvolvidos no laboratório de informática, anteriormente em aulas teóricas.

Desta maneira, o computador serve como verificador da aprendizagem, como feedback de respostas de exercícios para os alunos, não sendo possível o aprendizado dos conceitos matemáticos a partir dos ambientes computacionais e somente a verificação de um determinado conceito, que é claro, necessário também. Constitui-se na primeira forma de uso dos computadores no aprendizado da Matemática, sendo basicamente uma mudança de interfaces, do quadro-negro para a tela do computador, continuando o processo de ensino centrado nas ações do professor.

Mesmo não sendo construídos inicialmente como ambientes pedagógicos, alguns softwares, como por exemplo o Graphmatica, podem ser utilizados pedagogicamente sob a perspectiva construtivista, proporcionando através de suas ferramentas os processos de investigação e conclusão e conseqüentemente a construção de alguns dos conceitos matemáticos do Cálculo.

Tal linha de ação está intimamente ligada às propostas criadas pelo professor que utilize tais softwares, constituindo-se, novamente, em ambiente auxiliar de ensino-aprendizagem, porém, com a descentralização das ações do professor, gerando um ambiente de autonomia e de investigação por parte do aluno, mediados pelo professor.

Ambientes de programação, como por exemplo o MatLab, podem ser utilizados no aprendizado da Matemática, pois incorporam em sua construção a linguagem dos algoritmos, da estrutura lógica, necessária aos processos de dedução e generalização matemática, podendo também ser utilizados como ambientes de consolidação dos conhecimentos matemáticos de aulas teóricas.

Em relação ao Cálculo, por exemplo, a integração numérica envolve o conceito da construção de estruturas lógicas para o correto cálculo da área abaixo de uma função matemática, interligando aspectos geométricos e numéricos.

Quando o aluno envolve-se na resolução de um problema, através de um ambiente de programação, observa-se que o processo de achar e corrigir erros constitui-se em oportunidade única para que o aluno aprenda ou reaprenda sobre um determinado conceito matemático envolvido na solução do problema, ou sobre estratégias de resolução de problemas. Ao se utilizar um ambiente de programação para a determinação de área abaixo de uma curva, através de processos aproximados de integração, obtêm-se valores com erros consideráveis que dependem do incremento da variável independente. Portanto, ao tender este valor do incremento a zero, ou o que equivale a tender o número de incrementos ao infinito, o aluno reaprende sobre o conceito da Soma de Riemann, que é a definição da integral como processo de soma, só que de uma forma participativa.

Ao obter, por exemplo, um determinado valor aproximado da integral, através de uma aproximação polinomial, o aluno compara com os resultados analíticos e pode mudar sua estratégia na resolução do problema, ao optar por uma outra aproximação polinomial ou outro tipo de função que se aproxime mais da função em questão. Nestas situações, o aluno começa a pensar sobre suas próprias idéias, e reflete sobre os conceitos envolvidos no comportamento de funções.

Em relação a ambientes informatizados voltados para o Cálculo, existem ainda hoje, ambientes algorítmicos e ambientes heurísticos. Os ambientes algorítmicos utilizam basicamente tutoriais, seqüências de exercícios que aumentam em grau de complexidade à medida que o aluno avança por etapas do software, valorizando acertos e não os processos de resolução de um dado problema, enfocando uma avaliação quantitativa dos conhecimentos matemáticos do aluno. Um dos mais conhecidos neste nível de software matemático voltado ao Cálculo é o software Rurc. O Rurc é um software de exercício-e-prática, que apresenta várias questões de múltipla escolha, com fornecimento de respostas. Ao término de um tópico, o programa apresenta um relatório quantitativo dos erros e acertos. No enfoque algorítmico, o computador é visto com uma máquina de informar e, o aluno, como receptor das informações.

Os ambientes heurísticos caracterizam-se por serem ambientes que proporcionam simulação, linguagens de programação, jogos ou ambientes que permitem a programação sem grandes conhecimentos de programação. Não é fornecido ao aluno um formulário, um questionário, e sim um ambiente, onde o aluno cria suas hipóteses matemáticas e prova a validade de suas propostas através de análises gráficas, tabelares ou através de animações. Os ambientes heurísticos dão ênfase à descoberta, valorizam os processos de tomada de decisão pelos alunos. Num ambiente heurístico o computador é utilizado como um instrumento, um meio para aprender.

Importante salientar que, mesmo um programa de características heurísticas, pode ser utilizado com uma abordagem de exercício e prática, privilegiando portanto a transmissão do conhecimento, e não, a construção do mesmo.

No início da década de 80, surgiram os primeiros sistemas computacionais algébricos, permitindo ao usuário manipular símbolos e operadores matemáticos, construir seqüências analíticas, ou desenvolvimentos algébricos, proporcionando um grande progresso em relação a computação numérica. Através destes ambientes computacionais, funções podem ser trabalhadas em conceitos matemáticos de limites, diferenciação e integração produzindo respostas sob a forma de funções, gráficos e números. Isto possibilitou a inclusão de tais softwares como recursos didáticos nos laboratórios de várias instituições. Vários softwares disputam a preferência dos usuários, tais como Maple, Mathematica, MatLab e Derive, dentre outros. Oferecem diversos recursos como manipulação algébrica, gráfica e numérica e alta portabilidade, na maior parte dos casos.

Os softwares a seguir resumidamente descritos podem ser considerados como representativos da modalidade de softwares matemáticos para o Cálculo:

a) MatLab: Ambiente de computação baseado em vetores e matrizes. Um dos softwares mais utilizados no meio acadêmico pelas ferramentas que incorpora. O software MatLab, pode ser visto como uma área de trabalho, análoga a uma folha de papel, onde o aluno trabalha com a Matemática numérica, simbólica e gráfica. Possui pacotes de programas, os chamados toolboxes que permitem trabalhar com Matemática simbólica (por exemplo diferenciar e integrar analiticamente uma função), além de ser um ambiente de programação com sintaxe específica do software. Em termos gráficos, representa comportamentos bi e tridimensionais, com diversas ferramentas gráficas (plotagem de diversas funções no mesmo gráfico, plotagem de vários gráficos na mesma tela, possibilidade de mudança de características do gráfico tais como marcadores, cores de linha, dentre outras).

b)Derive: Software Matemático com aspectos gráficos, algébricos e numéricos. Possui uma interface amigável, com barra de menus e barra de ferramentas com os operadores do Cálculo Diferencial. Exporta arquivos no formato das linguagens de programação C, Fortran e Pascal. Possui ferramentas de gráficos bi e tridimensionais.

c)Modellus: permite que o usuário explore modelos matemáticos, físicos, etc, já conhecidos, e permite construir modelos matemáticos para o estudo de diversos tipos de sistemas. Os alunos podem modificar os parâmetros de modelos já construídos, e de forma simples construir gráficos e tabelas dos fenômenos estudados. Permite também a criação de janelas de simulação dos modelos construídos. O aluno através de suas ferramentas pode realizar experimentos conceituais usando modelos dados por funções, taxas de variação, derivadas e integração. Os fenômenos estudados poderão ser vistos sob múltiplas formas de representação gráfica, tabelar e animações, com possibilidade de manipulação dos parâmetros, permitindo interatividade com o ambiente em questão. Pode ser utilizado sob a forma de atividades de expressão e manipulação. Modellus é uma ferramenta de modelação, simulação e de cálculo. Pode funcionar como uma ferramenta de autoria, permitindo ao professor preparar a representação de um fenômeno complexo que poderá ser utilizado pelos alunos que ainda não possuam uma bagagem matemática adequada para a construção de tal modelo, mas cujo modelo possua aspectos de análise, de relação entre as variáveis, que possam ser interessantes para o aluno.

d)Graphmatica: software matemático com aspectos bidimensionais, plota gráficos em coordenadas cartesianas ou polares. Fornecendo a função possui as seguintes ferramentas:

- desenha a função derivada e a tangente num ponto escolhido da curva.
- gera tabela dos pontos formadores da função.
- calcula os pontos críticos da função.
- Calcula derivadas de funções numericamente e graficamente, calcula integral, com representação gráfica e numérica. Permite a exploração de comportamentos de famílias de funções através da variação dos parâmetros da função. Para uma função do segundo grau, por exemplo, a família de funções pode ser escrita como $y=a(x+b)^2+c$. Através da variação dos parâmetros a, b e c, ocorre o estudo do comportamento gráfico da função, como concavidade, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximo e mínimo, proporcionando um trabalho de reflexão por parte do aluno.

Além destes softwares, hoje nas instituições de ensino superior, são muito utilizados, dentre vários outros, os ambientes Maple e MathCad, com nível de potencialidade ferramental e de possibilidades pedagógicas similares ao MatLab. A escolha do MatLab deu-se em função deste software estar licenciado legalmente pela FAENQUIL.

CAPÍTULO IV

MODELAGEM MATEMÁTICA, AMBIENTES INFORMATIZADOS E MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

"A Natureza e suas leis na Noite jaziam ocultas.
Deus disse: Faça-se Newton! E Tudo tornou-se Luz"

Alexander Pope

4- MODELAGEM MATEMÁTICA: DEFINIÇÕES

A resolução de um problema requer uma formulação matemática que pode ser simples ou complexa, dependendo da natureza do problema e de algumas simplificações possíveis de serem feitas no estudo de determinados fenômenos. Estes fenômenos são representados através de uma linguagem matemática que envolve um conjunto de símbolos e relações que é chamado de modelo matemático. Na Engenharia, a compreensão dos modelos que regem os fenômenos físicos e químicos é de fundamental importância para o engenheiro, visto que, através da construção e compreensão dos modelos, tais processos podem ser quantificados e qualificados, através de processos de análise e simulação.

Um modelo pode ser formulado através de expressões numéricas, fórmulas, gráficos, tabelas, programas computacionais, etc (Biembengut,2000, p.12).

Matos e Carreira (1994, p.7) consideram que um modelo matemático usualmente inclui o uso de variáveis e relações entre estas variáveis, ou seja, muitas vezes um modelo matemático é concretizado através de funções.

A Modelagem Matemática pode ser um método de trabalho para o matemático e, por outro lado, um caminho para o ensino e aprendizagem da Matemática.

No tocante à utilização como método de ensino-aprendizagem, a modelagem pode ser utilizada para o desenvolvimento de temas por parte dos alunos, sistematizando .os conceitos matemáticos a partir dos modelos desenvolvidos. Biembengut (2000, p.18) define o termo modelação matemática quando da utilização da modelagem como método de ensino-aprendizagem.

Para Scheffer & Campagnollo (1998, p. 36):

> "A Modelagem Matemática é uma alternativa de ensino-aprendizagem a qual a Matemática trabalhada com os alunos parte de seus próprios interesses, e o conteúdo desenvolvido tem origem no tema a ser problematizado, nas dificuldades do dia-a-dia, nas situações da vida. Valoriza o aluno no contexto social em que o mesmo está inserido, proporcionando-lhes

condições para ser uma pessoa crítica, criativa e capaz de superar suas dificuldades”.

Para Biembengut (2000, p.12) Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Neste trabalho, não será feita esta distinção e, portanto, será utilizado o termo Modelagem Matemática, no sentido da utilização da mesma, como meio para a aquisição de conhecimentos do Cálculo e não somente como um processo matemático de resolução de problemas reais. A Modelagem Matemática pode ser entendida como a tradução de ocorrências do mundo real para a linguagem matemática, sendo um processo que exige observação, análise quanto às características físicas do fenômeno e quanto às características abstratas dos objetos matemáticos associados , bem como análise em relação aos parâmetros físicos e matemáticos que exercem influência no fenômeno e a conseqüente associação destes parâmetros.

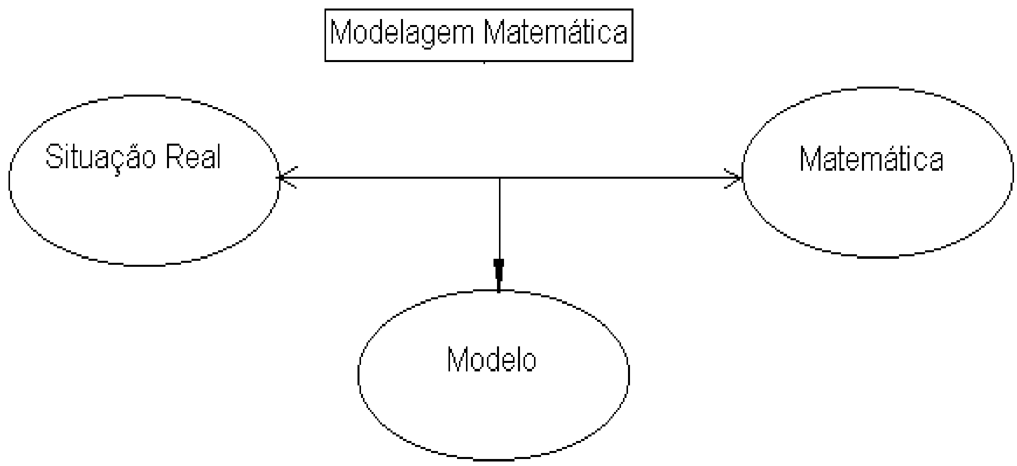
Neste processo de observação, análise e associação, deve-se valorizar a intuição, a maneira pela qual o aluno vê o objeto em análise e, desta forma, possibilitar graus de liberdade na escolha dos processos ou métodos de representação desta realidade.

Através desta tradução de ocorrências, do mundo real para o mundo matematizado, surge o ambiente no qual os conceitos matemáticos, necessários para esta tradução são, a princípio, contextualizados em função de sua aplicabilidade, e sendo, a posterior, visualizados e analisados a partir de representações funcionais múltiplas, ou seja, representações numéricas, gráficas e algébricas.

Neste trabalho, o interesse é pelo estudo e aplicação de modelos quantitativos, os quais são fortemente baseados em descrições matemáticas das variáveis e de suas relações funcionais. Num modelo quantitativo, o aluno deve identificar as variáveis relevantes no processo investigado e estabelecer as relações entre elas. Deste modo, por exemplo, ao se estudar o deslocamento de um objeto ao durante um intervalo de tempo, no modelo quantitativo, o aluno deve descobrir as relações de espaço em função do tempo bem como suas funções derivadas, tais como velocidade e aceleração.

Biembengut (2000, p.13) apresenta o seguinte esquema para o processo de modelagem:

Figura 1: Esquema para Processo de Modelagem sugerido por Biembengut



Através desta representação, Biembengut considera que Matemática e realidade são dois conjuntos distintos, e que a modelagem é um meio de fazê-los interagir, através de uma série de procedimentos, os quais podem ser agrupados em três etapas:

a) Interação

- Reconhecimento da situação-problema
- Familiarização com o assunto a ser modelado → referencial teórico

b) Matematização

- Formulação do problema →hipótese
- Resolução do problema em termos do modelo

c) Modelo Matemático

- Interpretação da solução
- Validação do modelo → avaliação.

a)A etapa de Interação envolve a descrição da situação problema, ou seja, o que se tem, o que se deseja obter, estudando-se o assunto, buscando pesquisar em livros, revistas e outras fontes que contenham informações relevantes.

b) Na etapa de matematização a situação-problema é traduzida para a linguagem matemática, através de símbolos e relações, obtendo-se o modelo matemático.

Na sub-etapa de formulação do problema o aluno:

- Classifica as informações (quais parâmetros são relevantes ou não), levando a um grau maior ou menor de complexidade do modelo;
- Decide quais fatores devem ser estudados, levantando hipóteses;

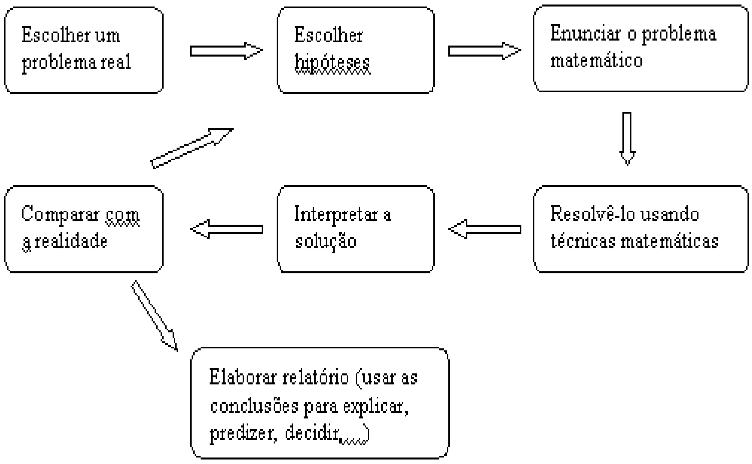
- Seleciona variáveis relevantes e constantes envolvidas;
- Seleciona símbolos para as variáveis;
- Descreve as relações que envolvem os símbolos matemáticos do modelo em termos matemáticos;
- Chega ao conjunto de fórmulas, expressões, gráficos, tabelas ou programas que levam à solução do problema;

Na sub-etapa de resolução do problema, em termos do modelo, ocorre a utilização do ferramental matemático teórico do aluno, algébrico, gráfico ou numérico, em algumas situações, com a utilização do computador.

c) A etapa do Modelo Matemático envolve uma avaliação a fim de se verificar o grau de aproximação do modelo da situação-real, verificando o grau de confiança de sua utilização. Nesta fase, interpreta-se o modelo verificando-se as implicações da solução obtida por este modelo e retorna-se à situação-problema para a verificação de sua relevância. Caso o modelo não condiga com a situação-problema o processo deve ser retomado em suas etapas.

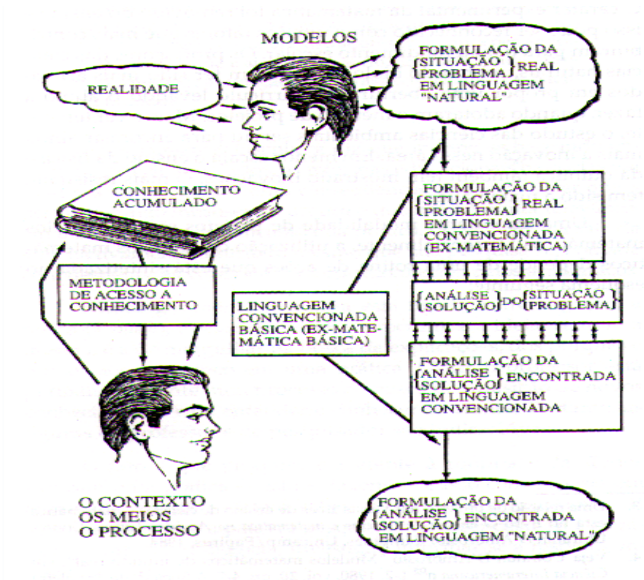
Silva (apud Delgado, 2000, p. 2) afirma que ”o modo como a teoria e as aplicações da Matemática se relacionam é normalmente designado por matematização ou modelação matemática”. O autor apresenta o esquema da figura número 02 para descrever o processo de modelação matemática:

Figura 02: Processo de Modelação Matemática



D'Ambrosio (1996, p.47) apresenta também um possível esquema para o processo de Modelagem Matemática.

Figura 03: Esquema proposto por D'Ambrosio



Seja qual for o esquema proposto, os autores citados se referem à modelagem como um processo descritivo e de resolução de um problema real, descrevendo os dados, conceitos, relações e condições para a situação estudada.

Criar e explorar um modelo é uma atividade de grande importância no processo de aprendizagem. Ogborn (apud Gravina & Santarosa, 1998, p.10):

> "Quando se constróem modelos começa-se a pensar matematicamente. A análise de um modelo matemático pode levar à compreensão de conceitos profundos, como por exemplo a noção fundamental de taxa de variação. A criação de modelos é o início do pensamento puramente teórico sobre o funcionamento das coisas."

Biembengut (2000, p.18) salienta que os objetivos da modelagem como método de ensino-aprendizagem são:

- Aproximar outras áreas do conhecimento com a matemática;
- Enfatizar a importância da matemática na formação do aluno;
- Despertar o interesse pela matemática ante a aplicabilidade;
- Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
- Desenvolver a habilidade para resolver problemas; e
- Estimular a criatividade.

Além destes aspectos citados, discussões entre os grupos participantes de um projeto, seminários sobre os projetos, discussões entre os grupos e o professor são aspectos pedagógicos desenvolvidos que favorecem o processo ensino-aprendizagem.

4.1- O PAPEL DO COMPUTADOR NA MODELAGEM MATEMÁTICA

O estudo de situações ligadas aos processos envolvidos na Engenharia, freqüentemente está associado a um grande volume de dados dos experimentos e, portanto, com uma complexidade numérica e gráfica consistente.

A não utilização de tais situações em relação ao Cálculo Diferencial e Integral teve como principal obstáculo, durante décadas, a inexistência de ambientes informatizados que proporcionassem tratamento gráfico-numérico a estas informações.

Nos fenômenos modelados podemos chegar a descrições matemáticas longas, compostas puramente por seqüências de manipulação de fórmulas que, quando possível, podem ser solucionadas por softwares matemáticos.

Quanto tempo perde-se durante uma aula na resolução de questões matemáticas puramente algébricas? Quanto tempo poderia ser destinado ao estudo do fenômeno em si e da própria estrutura conceitual da Matemática envolvida?

O uso dos softwares matemáticos agiliza processos algébricos, e por exemplo, pode proporcionar atividades de reflexão, como mudanças de parâmetros das funções, além de permitir visualização gráfica. Podem proporcionar um ambiente de investigação por parte dos alunos, e não simplesmente uma forma ágil de obter respostas.

O uso de softwares como Derive e Graphmatica possui a característica pela qual, através de manipulação de parâmetros, os alunos podem experimentar, ter a sensação de interação com o problema estudado. O software matemático utilizado nas etapas de Modelagem Matemática amplia e abre novas vias de exploração através da representação da informação sob muitas formas (gráficos, tabelas e expressões algébricas). Esta importância ocorre sobretudo nas fases de aperfeiçoamento e validação dos modelos, pela facilidade da variação de parâmetros e na generalização de comportamento funcional.

Softwares como MatLab ou Maple são mais abrangentes, pois além de possuírem ferramentas do Cálculo, também são ambientes de programação. Ao manipularem linguagens de programação, os alunos também trabalham com o pensamento lógico, através da estruturação dos algoritmos e fortalecem os conceitos teóricos da disciplina envolvidos em tais algoritmos. Ao escrever programas no ambiente informatizado, ressalta-se que uma das etapas mais produtivas do processo é a análise dos erros, que podem ocorrer no levantamento dos dados, no modelo matemático construído, na estrutura lógica do programa ou até mesmo nos conceitos matemáticos envolvidos, conduzindo o aluno a um contínuo processo de análise das etapas que compõem o processo de resolução de um dado exercício ou modelo.

Ressalta-se hoje, a importância de tais programas nas pesquisas científicas aplicadas ou mesmo puras, quanto ao seu domínio por parte do futuro profissional, não somente quanto a sua operacionalidade quanto à sua potencialidade de abrangência conceitual e aplicada.

Os computadores quando utilizados de modo correto podem trazer muitos benefícios para o processo ensino/aprendizagem através da modelagem:

- A utilização de simulações em computadores aproxima a matemática da realidade e os exemplos dados em aula não são mais artificiais ou tão abstratos;
- A ênfase no ensino pode ser centrada na modelagem e na exploração dos conceitos, os algebrismos são efetuados pelas máquinas;
- Computador proporciona fácil visualização geométrica dos modelos através de softwares com interfaces gráficas;
- Podem ser utilizadas para conferir resultados e quando se tratar de programação ainda são um reforço para o conteúdo estudado;
- Também desenvolvem a capacidade lógica do aluno para estruturar algoritmos;
- Integram a parte numérica e gráfica à teoria da disciplina;
- aluno terá uma formação mais abrangente.

Segundo Gravina e Santarosa (1998, p.12):

> "Em programas com recursos de modelagem os alunos constróem modelos a partir da representação dada por expressões quantitativas (funções, taxas de variação, equações diferenciais) e de relações entre as variáveis que descrevem o processo ou fenômeno. A característica dominante da modelagem é a explicitação, manipulação e compreensão das relações entre

as variáveis que controlam o fenômeno, sendo o feedback visual oferecido pela máquina um recurso fundamental para o ajuste das idéias".

A utilização da modelagem como método de ensino pode ser enriquecida e facilitada quando o aluno utiliza ambientes adequados para isto, como, por exemplo, é o caso do Modellus, o qual proporciona que os modelos sofram uma animação, caracterizando um ambiente dinâmico, além de permitir visualização simultânea de gráficos e tabelas.

4.2- MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Particularmente, em relação ao Cálculo, podem ser estabelecidos os seguintes passos na obtenção de um modelo:

- O primeiro passo é a definição exata do problema, devendo-se definir as questões e dados fundamentais do problema;
- Escolhe-se uma estrutura matemática para a representação deste modelo, selecionando as variáveis aparentemente fundamentais, as quais podem ser futuramente redefinidas;
- Os modelos a serem desenvolvidos no Cálculo são quantitativos, em função de que envolvem o estudos de grandezas e de suas variações;

- Utilizam-se as ferramentas do Cálculo para resolver o problema: limites, operadores diferenciais e anti-diferenciais;
- Utilizam-se os ambientes informatizados e analisa-se o problema sobre a forma gráfica, algébrica e numérica e, se o ambiente permitir, utilizam-se animações para o modelo com a interação do usuário no modelo;
- Interpreta-se a solução obtida em relação ao problema proposto, avaliando-se se o modelo proposto é adequado ou não, eventualmente redefinindo o problema, considerando novas variáveis, estabelecendo novas relações entre as variáveis.;
- Eventualmente as etapas anteriores podem repetir-se até que o modelo seja validado.

Em que ponto o método de ensino-aprendizagem baseado em modelagem difere dos métodos tradicionais de ensino-aprendizagem? A modelagem permite a abordagem do Cálculo de uma maneira mais intuitiva e aplicada, visto que a abordagem tradicional baseia-se na exposição de teorias prontas, acabadas e, normalmente, não aplicadas à prática, ou no máximo com problemas já formulados. A utilização da modelagem permite uma ligação entre teoria e prática, pois os conceitos podem ser sistematizados ou estudados a partir das situações-problema a serem modeladas.

Franchi (1993, p.57) considera que a sistematização dos conceitos a partir de modelos tem como objetivo mostrar ao aluno a importância dos conceitos e a variedade de situações onde os mesmos podem ser aplicados.

Ao iniciar-se um curso de Cálculo, utilizando modelagem como método de ensino-aprendizagem, o professor deve estar atento às dificuldades que poderão surgir ao longo do curso, como por exemplo, a não linearidade do curso em relação ao seu plano de atividades, visto que o método conduz necessariamente a uma aula dinâmica, onde temas diversos podem ser desenvolvidos, onde situações que não foram pré-definidas pelo professor poderão surgir. Isto pode ocasionar um conflito em relação ao aspecto quantitativo da ementa do curso de Cálculo.

No sentido da não linearidade da abordagem dos conteúdos, em cursos que adotam a Modelagem Matemática citamos:

> "Outro ponto a ser considerado no trabalho com a Modelagem, é relativo à seqüência dos conteúdos. Diferentemente da forma tradicional, na modelagem não existe uma seqüência rígida, pois os conteúdos são determinados pelo problema ou interesse de cada grupo. O método da modelagem também propicia a oportunidade de um mesmo conteúdo repetir-se vária vezes no transcorrer das múltiplas atividades e em momentos distintos..." (Burak, 1994, p.53).

Ao iniciar-se o curso, deve-se fazer uma exposição bem definida das metas e atitudes para que os objetivos do curso sejam alcançados. Nesta forma de contratar situações de aprendizagem, inicialmente deve-se apresentar o processo de modelagem aos alunos, realçando sua importância, sua utilidade, qualidades e exigências que este método impõe. É fundamental para o bom andamento do curso a descrição detalhada das etapas que compõe o método da modelagem e é aconselhável a exemplificação de um problema completo de modelagem para o perfeito entendimento das etapas componentes do método.

É um método no qual necessariamente o aluno torna-se o centro da aula, com suas idéias, suas reflexões matemáticas, suas análises de resultados e no qual o professor passa a ser um componente a mais com o objetivo de ajudar a resolver determinado problema. Visto que podem e devem ocorrer situações nas quais o professor não possui respostas para as questões levantadas, ele passa a desempenhar também um papel de aprendiz, junto com os alunos, mostrando ao aluno que o professor não é um ser supremo, que tudo sabe, que nada erra, visão esta existente no ensino tradicional. Nesta situação de cooperação entre alunos e professor, o professor não prepara somente aulas, ele prepara-se para a aula, o professor não tira dúvidas, ele as cria, junto com os alunos.

Ao iniciar um curso o professor pode optar por:

- Modelos onde a coleta de dados já tenha sido feita. Em tal situação, o modelo é freqüentemente extraído de livros de disciplinas técnicas de Engenharia ou visitas a empresas onde tais dados possam ser coletados. A atuação do aluno dá-se a partir de uma tabela ou gráfico pré-definidos;
- Modelos onde a coleta de dados seja efetuada pelo aluno. Neste caso o aluno realiza pequenos experimentos de coleta de dados, participando de todas as etapas do processo.

Após a exemplificação do que é o processo de modelagem, o professor deve escolher a forma do desenvolvimento do curso. Pode-se disponibilizar uma gama de modelos para que os alunos escolham os temas de trabalho ou pode-se fazer com que os temas sejam de escolha total dos alunos.

Como a livre escolha pode levar a modelos que não envolvam os conceitos do Cálculo, o desenvolvimento do presente trabalho baseou-se numa gama de modelos pré-definidos pelo autor, sendo que os temas trabalhados, foram escolhidos em comum acordo com os alunos.

Mesmo nesta situação, que não é a ideal, existe a possibilidade de ocorrência de situações positivas, caracterizando a potencialidade do método quando a sua dinâmica. Ou seja, mesmo a princípio, tendo-se um preparo antecipado das possibilidades conteudistas dos modelos, poderão ocorrer situações não pré-definidas levando a novas estratégias por parte de professor e alunos. Realça-se que a situação ideal no processo de Modelagem Matemática, como metodologia de ensino-aprendizagem, é a escolha dos temas por parte dos alunos, para que situações de seus interesses sejam abordadas.

O curso pode ser desenvolvido também utilizando-se um modelo que envolva todos os conceitos do curso de Cálculo, sendo que, tal escolha é normalmente adequada a um professor que não esteja familiarizado com o processo de modelagem e em função das dificuldades de coordenação dos trabalhos com vários grupos atuando em modelos diferentes.

Desta forma, são muitas as possibilidades de uso da Modelagem Matemática, dependendo das características do ambiente composto por professor e alunos.

A utilização da Modelagem Matemática no Cálculo favorece e exige a utilização de gráficos e tabelas, conseqüentemente o uso de ambientes informatizados, pois, em muitos casos, a obtenção dos dados e análise dos resultados são feitos utilizando-se estas formas de leitura dos fenômenos estudados. Neste sentido, a relevância da aplicação do método é evidenciada, pois contrasta com os métodos tradicionais que não utilizam gráficos ou tabelas, pois tal necessidade quase não ocorre, e quando ocorre é em situações nas quais o problema já é disponibilizado de forma modelada ao aluno, cabendo-lhe apenas aplicar fórmulas e obter resultados.

Especificamente em relação ao Cálculo Diferencial e Integral, Franchi(1993, p. 49) coloca que a modelação matemática possibilita:

- Aplicação do Cálculo em situações práticas;
- Compreensão dos conceitos, vistos que eles não são apresentados prontos, mas construídos pelos alunos a partir das situações-problema;
- Ligação com as demais disciplinas do curso.

Além dos aspectos citados, a utilização do método de Modelagem Matemática deve estar aplicado a problemas do cotidiano do aluno, acadêmico ou social, em função de desenvolvimento de projetos, proporcionando ao aluno:

- Não depender das escolhas dos métodos de solução do professor;

- Comprometimento e decisão em função de suas próprias escolhas;
- Torna-se agente de sua aprendizagem, produzindo algo que tem um sentido e uma utilidade.

O que se realça e se objetiva com o uso da Modelagem Matemática aplicada ao Cálculo é a mudança de foco de prioridades estabelecidas pelo modelo tradicional do ensino baseado no binômio teoria-exercício, pois ocorre a inserção do aluno em um problema, onde o que se prioriza não é somente a obtenção de um resultado, e sim os caminhos, as etapas intermediárias e os conceitos matemáticos envolvidos nestas etapas.

A Modelagem Matemática como método de ensino-aprendizagem diminui o grau da dualidade da Matemática dos métodos tradicionais, visto que, não existe mais a valorização única do certo ou errado algébrico, existindo sim, a visão particular do aluno em relação ao problema estudado, que deve ser valorizada e redefinida quando distante das possibilidades reais da situação estudada.

Baldino (1995, p.10) cita trechos de um artigo “Uma mudança de ponto de vista sobre o ensino da integral” (CI2U, 1990) que realça a necessidade de que o aluno entre em uma certa problemática científica de modelização do real:

> “Pensamos que, enquanto o estudante não entrar em uma certa problemática científica de modelização do real, de controle da adequação e da validade dos procedimentos empregados, o ensino de conceitos sofisticados, como este da integral só pode apresentar a ele como uma espécie de mistificação; desde o começo ele vai muito provavelmente, reduzir o conceito ao

primeiro algoritmo de cálculo que lhe favoreça, porque apenas o cálculo terá alguma significação enquanto meio de ação.”

Baldino (1995, p.9) considera que a maioria dos alunos reduzem os conceitos aos algoritmos, quando por exemplo se lhes pede para que seja calculada a derivada de $\int_a^x \sqrt[4]{t^2+1}\,dt$, a maioria deles, primeiro, se empenha em longos esforços para calcular uma primitiva. Isto mostra que o foco do aluno está para desenvolvimentos algébricos e não para o entendimento dos conceitos e aplicações.

A modelagem prioriza conceitos e envolve os alunos em matematizações de problemas reais e interdisciplinares, desfocando dos algoritmos de solução algébrica para foco em conceitos e aplicações.

Barros (1988, p.52) considera que devemos utilizar alguma metodologia que leve os alunos a pensarem intuitivamente, valorizando seus palpites a respeito da melhor abordagem para uma determinada situação problema e que ao agirmos, como professores, desta forma, podemos produzir um ambiente de cooperação e de entusiasmo por parte dos alunos, que tenderão a se desfazer da apatia, tão presente nas escolas.

Outros educadores, principalmente atuando em cursos de ciências exatas aplicadas, valorizam as situações práticas, como por exemplo Baldino (1995, p.16):

"O objetivo de qualquer curso de Cálculo não é ensinar, nem a teoria dos limites, nem a dos infinitésimos. O Cálculo poderá ter como objetivo aplicá-las, investi-las em situações didáticas. No cálculo o aluno tem de aprender processos básicos de equacionar e resolver problemas com os conceitos de derivada e integral. A justificativa matemática, "científica" e os limites dos modelos usados devem ser objeto da análise matemática."

A afirmação do autor se confirma na prática de muitos docentes que abordam o curso de Cálculo através de uma Matemática “pura”, mais formal, visto que ao ensinarem, por exemplo, técnicas de integração recorrem ao processo de frações parciais, expõem os métodos de frações parciais aos alunos e ao serem questionados sobre a dedução de tais métodos, afirmam que a mesma é objeto de cursos de Análise Matemática e não do Cálculo.

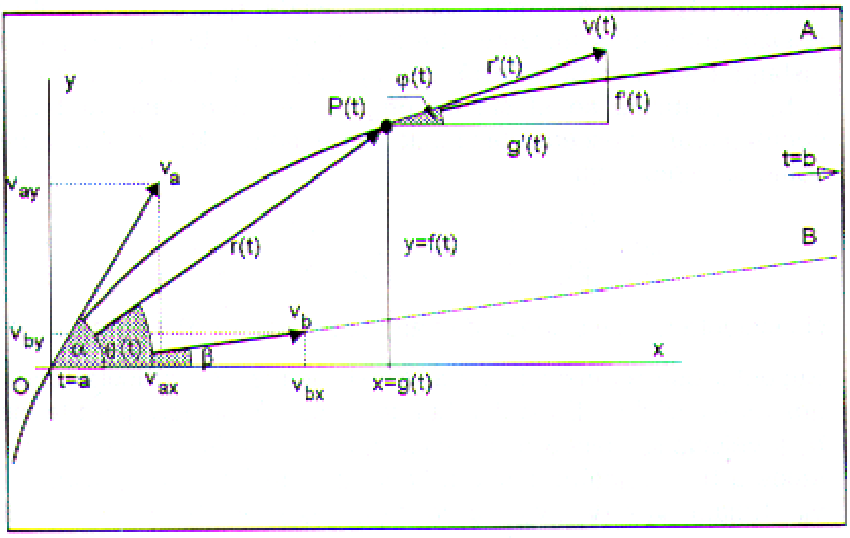
Sabemos que não se pode estudar, ensinar e aprender tudo em um curso de Cálculo Diferencial e Integral, e muitos resultados e teoremas são justificados sob a alegação que poderão serem vistos em cursos de Análise Matemática.

Fazemos isto em nossa prática diária de professores. Outro exemplo: a regra de L'Hôpital é utilizada pelos alunos de todos os cursos de Cálculo na Engenharia e não é demonstrada. Mas e se fosse formalmente demonstrada, geraria interesse? Talvez não! Mas até mesmo em demonstrações matemáticas pode dar-se um sentido físico aplicado e, principalmente, o estudante de Engenharia quer saber onde aplicar.

No tocante à regra de L’Hôpital, porque não dar-se um sentido de velocidade, de taxas de variação aos termos que compõem a fração geradora da regra? Observa-se que esta explicação foi utilizada durante o curso de Cálculo ministrado para a turma de amostragem deste trabalho. Desta forma, como a regra é aplicada a funções racionais, sob condições de resultados de limites do tipo 0/0 ou ∝/∝, podería-se, através do conceito de velocidades, estipular-se qual dos termos, numerador ou denominador, predomina no comportamento da função e valida ou não a existência do limite.

Neste sentido, Baldino (1998, p.120) propõe uma explicação da regra como citado anteriormente, através da figura abaixo. Tal figura e a conseqüente explicação da situação físico-geométrica apresentaria aos alunos a essência da regra, associando um conceito físico de velocidade aos termos que compõem a regra, que poderia ser rigorosamente formulada a posterior, caso fosse o interesse e o objetivo do curso.

Fig. 04: Regra de L"Hôpital, figura sugerida por Baldino



A situação gráfica acima pode ser representada por:

$$\frac{0}{0} = \lim_{t\to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{V_{ay}}{V_{ax}} = \lim_{t\to a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

e

$$\frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{V_{by}}{V_{bx}} = \lim_{t\to b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Não deve-se pautar um curso de Cálculo somente com deduções e formalismos matemáticos, mas por outro lado, não se deve ter como metodologia um curso de Cálculo onde somente aplicações sejam o objetivo do curso.

O que se observa é que radicalismos incorrem em erros freqüentes. Vale neste sentido a observação de Palis (1995, p.25):

> “Deve-se estar atento para que as atividades de generalização e demonstração não sejam negligenciadas ou omitidas, resvalando-se para a situação de "experiência sem forma" em oposição à de "forma sem experiência", esta última, às vezes, relacionada à prática "definição, teorema, aplicação". É preciso que se encontre um equilíbrio entre a experimentação e o formalismo matemático adequado ao nível de ensino em questão”.

Um curso de Cálculo que utiliza a Modelagem Matemática e ambientes informatizados não deve direcionar-se somente a experimentos, simulações e intuições. Quando possível, deve sempre partir de intuições a partir das atividades e serem formalizadas matematicamente com a ajuda do professor. O que se coloca é que no ensino tradicional, behaviorista, a intuição do aluno não é o ponto de partida para a formalização matemática!

O que se pretende é que, através de problemas modelados pelos alunos, e que ao serem colocados em contato com ambientes informatizados, sejam criadas as situações que agucem esta intuição e seja gerado um fator adicional de motivação para o aprendizado do Cálculo. Desta maneira, o formular é o ponto de partida e a formalização matemática uma das etapas do processo matemático.

4.3- MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

O tratamento algébrico dado ao longo dos anos nos cursos de Cálculo em muitas situações não priorizou tratamentos gráficos e ou numéricos (tabelares) em função das dificuldades que estes métodos gerariam em sala de aula, visto a ausência de equipamentos e programas adequados a este estudo e, portanto, a conseqüente dificuldade no tratamento dos problemas que envolvessem tal análise.

Porém, atualmente, o computador com programas com interfaces "amigáveis" e possuidor de inúmeros recursos gráficos, numéricos e algébricos, assume o papel de facilitador de tarefas, trazendo uma flexibilidade no tratamento de dados aos alunos e professores e proporcionando a possibilidade de representações múltiplas de um mesmo problema.

Borba (1994, p. 83) afirma "talvez usar representações múltiplas em educação matemática não seja novidade " mas que, de maneira geral, essas representações auxiliares, gráficos e tabelas, são normalmente colocadas de lado para que se concentre em expressões algébricas. Confrey, Smith e Dennis (apud Borba, 1994, p.83) argumentam que:

"O papel predominantemente e "isolacionista" da Álgebra na educação matemática ajuda a afastar vários estudantes da

> matemática à medida que eles não conseguem associar significados desenvolvidos por eles em outros contextos a essas expressões algébricas”.

Borba (1994, p.83) considera também que alguns softwares, citando como exemplo o aplicativo Function Probe, possibilitam a utilização de representações múltiplas com facilidades iguais, e dão a chance de tanto estudante, como professor desenvolverem atividades onde a Álgebra não seja predominante.

Borba & Penteado (2001, p.30) concluem que o conhecimento sobre funções matemáticas significa coordenar múltiplas representações e que esta abordagem “ganha força” em ambientes gráficos que geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas. Tal opinião em relação ao conhecimento sobre funções matemáticas é fundamental para o Cálculo, visto que o mesmo aborda estudo quantitativo de funções matemáticas.

Em relação à Modelagem Matemática, o trabalho desenvolvido em suas etapas internas, em muito se assemelha às atividades desenvolvidas por um engenheiro em um projeto, através de etapas de levantamento de dados (leitura de dados sob forma gráfica, tabelar), estabelecimento das bases do projeto (hipóteses), desenvolvimento do projeto (matematização) e análise dos resultados (validação do modelo, via gráfico, tabelas e formas algébricas). É crucial para o engenheiro o entendimentos e familiaridade com os processos de leitura, de interpretação de dados coletados, enfim, de resultados obtidos via forma gráfica ou tabelar.

Ao longo da experiência do autor deste trabalho, como professor nas disciplinas ligadas à Matemática foi observado que:

- Os alunos não sabem interpretar comportamentos gráficos;
- Não estão acostumados a comparar resultados obtidos via gráfico, tabelas ou algébricos e portanto completar informações de uma dado problema.

Desta forma, em relação à disciplina Cálculo Diferencial e Integral, ocorreu, ao longo dos anos, uma supervalorização do desenvolvimento algébrico em detrimento de outros desenvolvimentos matemáticos (gráfico e numérico).

Interessante citar a trecho da portaria ministerial nº 19890, de 30 de Junho de 1931, em que são apresentados os programas do curso fundamental e do ensino secundário (Miorim, 1998, p. 97):

> "A representação gráfica e a discussão numérica devem acompanhar, constantemente, o estudo de funções e permitir assim, uma estreita conexão entre os diversos ramos das matemáticas elementares".

Tal visão metodológica foi quase que completamente abandonada nos cursos anteriores à graduação e na própria graduação.

Em outro trecho, na mesma página, encontramos,

> "Como recursos indispensáveis à resolução dos problemas da vida prática, é necessário que o estudante perceba serem tabelas, gráficos e fórmulas algébricas representações da mesma espécie de conexão entre quantidades e verifique a possibilidade de se

tomar qualquer destes meios como ponto de partida, conforme as circunstâncias".

Não é objetivo deste trabalho o estudo da evolução da Educação Matemática, mas sim observar que muitas ações já tomadas e que são consideradas como movimentos de reforma, já eram observadas (e, no entanto, não utilizadas) em outros níveis de ensino e na própria graduação, ao longo de anos anteriores.

Em relação ao método de ensino baseado em Modelagem Matemática é vital que as análises gráficas, numéricas e analítica sejam entendidas, visto que:

- É importante saber comportamentos gráficos de funções para a correta determinação da família de funções que modelam os problemas;
- Em relação ao estudo numérico, ou tabelas de dados, estabelece-se a importância de que a partir delas podem ser verificados comportamentos como limites, taxas de variação e outros comportamentos matemáticos da função;
- As etapas constituintes da Modelagem Matemática exigem ações de análise matemática, tanto na decisão quanto ao rumo do processo e quanto à validação de resultados.

Portanto, ao desenvolver uma proposta baseada em modelagem, deve-se solicitar aos alunos que, nas atividades desenvolvidas, sejam, sempre que possível, efetuadas análises algébricas, gráficas e numéricas. Tal atitude tende a levar o aluno a explorar o mesmo problema através de várias representações e, a saber interpretar limites, taxas de variação médias, derivadas e integrais em vários contextos.

O objetivo é desfocar do caráter puramente algébrico os processos de ensino e aprendizagem , pois a análise gráfica prioriza reflexão matemática acerca do entendimento dos conceitos do Cálculo através da representação de funções, bem como a análise numérica leva a um ensino mais focado nas observações do comportamento discreto das funções e de seus operadores.

Desta forma, através de uma tabela de valores “x” por “f(x)”, os alunos podem calcular as variações infinitesimais “dx” e “dy” e relacionar estas duas infinitesimais ao conceito de derivada dada como “dy/dx”, proporcionando um tratamento puramente numérico, por exemplo, a este operador e desviando-se momentaneamente do conceito de limite como elemento definidor do operador derivada.

O tratamento numérico pode proporcionar ao Cálculo, por exemplo em relação ao problema de áreas abaixo de uma curva, um caráter geométrico, mais acessível ao entendimento do aluno, pois não envolve conceitos abstratos de limites e sim conceitos reais, mais próximos aos alunos, de áreas de figuras geométricas conhecidas. O uso de limites para a abordagem do problema sob a forma de uma Integral, ou soma de Riemann, pode, a partir desta introdução ao problema, através de uma forma geométrica ou gráfica, ser posteriormente abordado, agora com um sentimento geométrico e numérico muito mais familiar ao aluno.

O tratamento “tabelar” dos assuntos do Cálculo proporciona um referencial ao aluno das soluções aproximadas, muito próximas da disciplina

Métodos Numéricos que é vista no terceiro e no quarto semestre dos cursos de Engenharia. Neste sentido Biembengut (1995, p.57) possui uma proposta de integrar as duas disciplinas, na qual sugere a utilização da calculadora gráfica durante todo o processo. A idéia pode ser ampliada também para o uso de computadores em função das potencialidades gráfica, numérica e algébrica de ambientes informatizados como Modellus, Graphmatic, Derive e MatLab, entre outros.

A proposta é válida, principalmente, quando se utilizam sistemas computacionais numéricos e métodos de modelagem, que em muitas situações analisadas, passam necessariamente por métodos aproximados de resolução, como por exemplo Métodos dos Mínimos Quadrados para ajuste de curvas, proporcionando uma análise conjunta sob o ponto de vista discreto (relativos aos Métodos Numéricos) e contínuos (relativos ao Cálculo).

É importante observar ao aluno que representações numéricas, algébricas e gráficas se complementam, que são formas diferentes de análise de uma mesma situação. Como exemplo, citamos a análise da função $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{x})$. Tal atividade pode levar o aluno a associar o conceito da inexistência de limites em pontos com comportamentos indefinidamente oscilatórios, sem convergência a um valor "final", neste exemplo, na tendência de valores de "x" ao ponto zero. As conjecturas numéricas freqüentemente efetuadas pelos alunos levam a crer que, no entanto, este comportamento numérico tende a zero.

A tendência natural do aluno é "se aproximar" numéricamente do "zero" por valores do tipo:

f(0,1)=sen(10π)=0

f(0,01)=sen(100π)=0

f(0,001)=sen(1000π)=0

Esta tendência numérica levaria o aluno a uma análise pela qual o valor do limite seria zero, de forma errônea, como podem mostrar as análises algébrica, numérica e gráfica.

A análise algébrica-trigonométrica também revela que sen(π/x)=1 para infinitos valores de x que tendem a zero, ou seja, $\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. Para valores de x dados por $x=\frac{2}{4n+1}$.

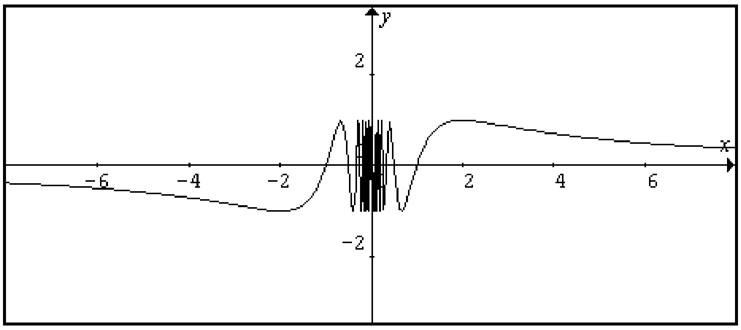
Portanto, a função, nas proximidades da origem do sistema de coordenadas, adquire valores, por infinitas vezes o valor f(x)=1.

A mesma análise pode ser feita para valores $\frac{\pi}{x}=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, o que levaria a valores de função f(x)= -1 para $x=\frac{2}{4n+3}$.

Através desta análise, o aluno verificaria as infinitas oscilações e associaria ao objeto matemático, limite, a imagem de sua inexistência matemático-comportamental em valores próximos à origem, para esta função.

Esta análise pode ser complementada através de uma ambiente gráfico, fornecendo o aspecto visual ao comportamento da função:

Fig. 05: Comportamento da função y=seno(π/x)



Nesta situação o comportamento oscilatório visualizado pelo gráfico mostra a não existência do limite, não ocorrendo a tendência a um comportamento "final" da função quando a variável independente tende a um valor específico.

Na teoria de limites (Stewart, 1999, p. 108) freqüentemente é utilizado o Teorema do Confronto que afirma: "Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de *a* (exceto possivelmente em *a*) e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ então $\lim_{x \to a} g(x) = L$".

A análise gráfica em conjunto com a algébrica pode proporcionar um perfeito entendimento de algumas situações. Para exemplificar, seja a determinação do limite da função g(x)=xsin(1/x) quando a variável independente tende a zero, e uma possível estratégia adotada pelos alunos para resolução deste problema.

A seqüência algébrica conduziria o aluno a aplicar as leis de limites e desta forma $\lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = [0.\infty]$, o que levaria a um produto indeterminado.

A partir de um ambiente informatizado pode ser obtido o gráfico de w(x)= sin(1/x), que é parte da função original f(x) e visualizado que w(x) oscila indefinidamente entre -1 e 1. quando x tende a zero. Portanto a função f(x)= xsin(1/x) oscila indefinidamente entre -x e x e pelo Teorema do Confronto $-x \le x\text{sen}\frac{1}{x} \le x$. Como, por analogia com o Teorema do Confronto f(x)=-x e h(x)=x, temos que f(x) e h(x) tendem a zero quando x tende a zero, e portanto , $\lim_{x \to 0} x\,\text{sen}\frac{1}{x} = 0$, o que pode ser confirmado pelas análises gráficas:

Figura 06 Comportamento de f(x)=seno(1/x)

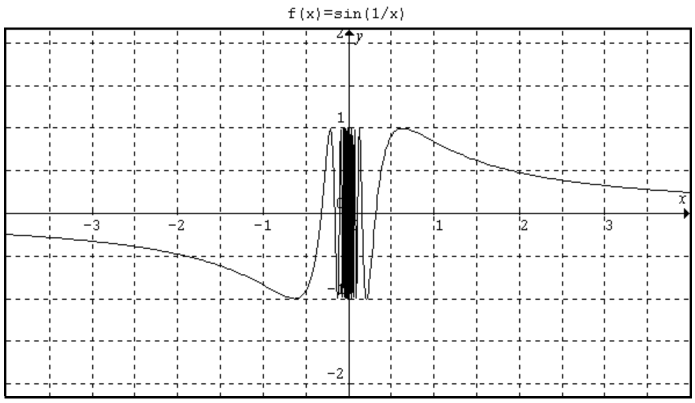


Figura 07: Visualização do Teorema do Confronto para f(x)=xsen(1/x)

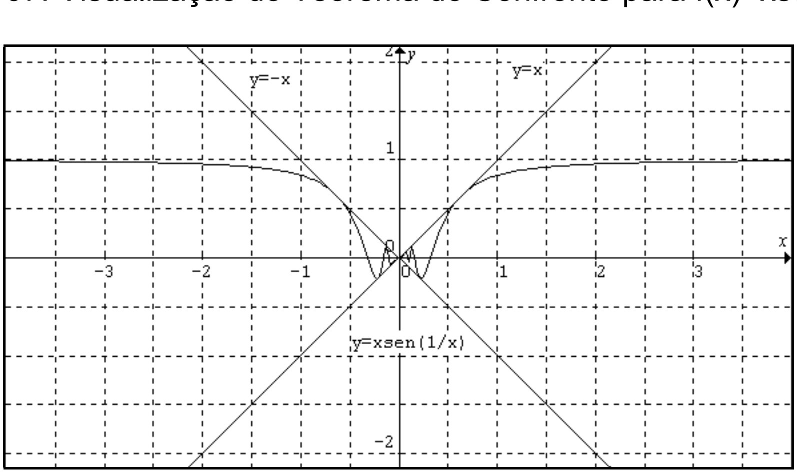


Figura 08: "Zoom" demonstrando o comportamento da função f(x)=xsen(1/x)

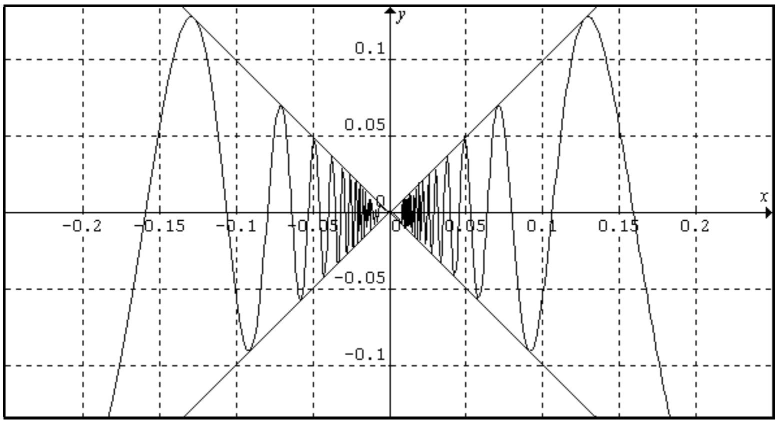


Tabela 01: Graphmatica ver. 1.6W (c) 1999 kSoft, Inc.

Equation(s): y=x*sin(1/x) (1);y=x (2);y=-x (3)

x	y1	y2	y3
-0.2	-0.19178	-0.2	0.2
-0.15	0.05612	-0.15	0.15
-0.1	-0.0544	-0.1	0.1
-0.05	0.04565	-0.05	0.05
0	Error	0	0
0.05	0.04565	0.05	-0.05
0.1	-0.0544	0.1	-0.1
0.15	0.05612	0.15	-0.15
0.2	-0.19178	0.2	-0.2

Estas atividades mostram o poder de análises multirepresentadas, para um importante objeto do Cálculo, a saber, o conceito de limite. Nesta situação, o surgimento e a solução do problema surgiu de um comportamento numérico, foi visualizado por um tratamento gráfico, de forma correta, e conceitualmente resolvido no tratamento algébrico. Um ambiente que possibilite, simultâneamente, a exploração destas representações, é potencialmente um ambiente de exploração muito rico.

CAPÍTULO V

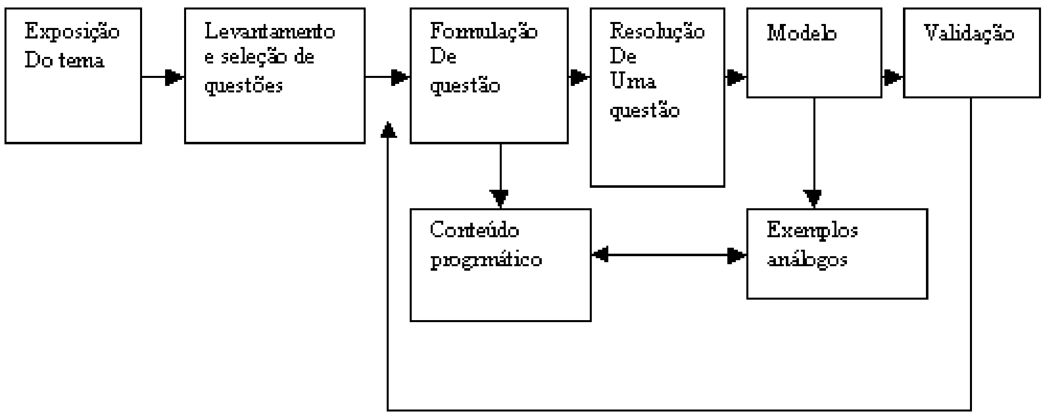
DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO PROPOSTO

5.- DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Durante o desenvolvimento do conteúdo programático do curso, foram seguidas, quando possível, as mesmas etapas e subetapas do processo de modelagem, ou seja, interação, matematização e validação.

Em relação a este desenvolvimento, Biembengut (2000, p.22) sugere o esquema:

Figura 09: Desenvolvimento do conteúdo programático



a) Interação: Foram introduzidas as situações e, na seqüência, abriu-se espaço para o levantamento das questões, tomando-se o cuidado para que ocorresse a inserção de questões relacionadas com os conteúdos matemáticos do Cálculo.

b) Matematização: Nesta etapa, surgiu a necessidade de conhecimento dos operadores e das técnicas do Cálculo para a resolução dos modelos propostos.

A Modelagem pode ser considerada como uma abordagem em sentido inverso à metodologia tradicionalmente utilizada nos cursos de Cálculo, na qual ensina-se a técnica para somente depois aplica-las em problemas algébricos.

Porém, Franchi (1993, p.9) considera que a teoria pode ser abordada pelo professor e, a posterior, tal teoria é aplicada ao modelos a serem desenvolvidos.

c) Modelo: Foram obtidos os modelos matemáticos das diversas situações, que quando possível, em função de dados experimentais ou bibliográficos foram avaliados. Nesta etapa, foram utilizados os ambientes computacionais para uma análise gráfica, tabelar ou animação do modelo proposto.

Biembengut (2000, p.27) relata, a partir de sua experiência, que em cursos baseados na metodologia de Modelagem Matemática, observa-se uma tendência de elaboração, por parte dos alunos, de modelos que seguem a linha dos modelos utilizados pelo professor, ou seja, se o professor apresenta modelos que envolvam geometria, a maior parte dos modelos elaborados pelos alunos é realizada com geometria.

Em função deste fato, a situação ideal para cursos de Engenharia, é que estes modelos estejam relacionados ao contexto técnico do curso, porém, neste aspecto, a utilização da modelagem apresenta um fator de dificuldade, visto que a disciplina é ministrada na fase inicial dos cursos de Engenharia e, neste período, os conhecimentos de outras disciplinas técnicas quase que inexistem.

Existe a opção, é claro, por trabalhos de pesquisa a respeito da teoria envolvida no modelo. Mas, a importância da Modelagem ainda se torna presente em situações que não estejam ligadas à Engenharia. Franchi (1993, p.50) realça que mesmo em situações nas quais o problema escolhido não se relacione à Engenharia, o método de investigação se justifica, pois o desafio de um problema a ser resolvido exige postura crítica em relação à realidade investigada, conduz a hábitos de rigor, precisão, raciocínio dedutivo, manifestação de capacidade criadora e julgamento pessoal, que não apenas levam à aplicação dos conteúdos do Cálculo, mas que podem ser úteis como forma de estudo e abordagem científica em outras situações acadêmicas e futuramente, em situações profissionais da Engenharia.

Os modelos utilizados durante o curso foram desenvolvidos em conjunto, por professor e alunos, de forma que as propostas eram discutidas em sala de aula e desenvolvidas pelos alunos com prazos definidos. A partir de cada etapa atingida pelos alunos, dentro dos modelos, os conceitos foram sistematizados, em algumas situações, a partir dos ambientes informatizados.

Após as etapas desenvolvidas nos modelos e nos ambientes informatizados, foram efetuados exercícios para a fixação do algebrismo básico e fixação dos conceitos matemáticos.

Durante o curso, a utilização das representações múltiplas ocorreu, internamente, ao processo de modelagem, nas atividades desenvolvidas nos ambientes informatizados utilizados, e nas etapas de sistematização dos conceitos.

5.1- DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO PROGRAMÁTICO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA FAENQUIL

O método de Modelagem Matemática pode ser aplicado a partir de um modelo diretor que contenha a maior parte do conteúdo didático da disciplina ou, a partir de vários modelos matemáticos que contenham parte dos tópicos a serem estudados no curso.

O modelo diretor discutido ao longo do curso, durante as aulas, e, a partir das etapas de discussão, os alunos caminharam em relação às respostas das perguntas norteadoras das situações a serem modeladas.

É apresentada, na tabela 02, a ementa do curso de Cálculo, em função da qual os modelos e atividades foram, a princípio, definidos.

Tabela 02: Descrição da ementa de Cálculo I na Faenquil

Item	Unidade Didática	Horas
01	Introdução: • Introdução e Definição da Disciplina	2
02	Limite e Continuidade	16
03	Derivada: • Notas Históricas • Definição • Continuidade de funções deriváveis • Derivadas laterais • Regras de Derivação • Aplicações geométricas • Regra da Cadeia • Derivação Implícita	22
04	Aplicações da Derivada: • Diferenciais • Taxa de Variação • Máximos e mínimos • Teorema de Rolle e do valor médio • Crescimento e decrescimento • Teste da 1ª e da 2ª derivada • Concavidade e Inflexão • Problemas de Maximização e minimização • Regra de L'Hospital	25
04	Integração: • Definição • Integrais Imediatas • Métodos de Integração • Integral definida • Teorema Fundamental do Cálculo	25

5.2- MODELOS E AMBIENTES INFORMATIZADOS

Neste item , são apresentados os modelos desenvolvidos bem como as principais atividades desenvolvidas nos ambientes informatizados. Realça-se a presença das representações múltiplas, quando possível, na análise e solução dos modelos e nas atividades desenvolvidas nos ambientes informatizados.

Foram desenvolvidos os seguintes modelos:

a) atividades desenvolvidas em aula:

- Modelo observação de imagens através de tubos ;
- Modelo da purga.
- Modelo diretor do curso: o problema das embalagens.
- Modelo do gráfico de consumo de energia;

b) Atividade desenvolvida pelos alunos

- Modelo de aquecimento e resfriamento;

As principais atividades desenvolvidas através dos ambientes informatizados foram:

- A utilização de ambientes informatizados: comportamento de funções;
- Erros em ambientes informatizados: utilizados como atividade conceitual;
- Ambientes Informatizados: estudo da derivada
- Ambientes Informatizados: campos-direção.

5.3- MODELOS DESENVOLVIDOS

5.3.1- MODELO: OBSERVAÇÃO DE IMAGENS ATRAVÉS DE TUBOS

O entendimento de funções, de suas operações, propriedades e comportamentos é de fundamental importância no Cálculo, visto que os operadores existentes na disciplina, ou seja, limites, diferenciais e antidiferenciais são aplicados em relação às funções.

Em relação à Engenharia Química, este entendimento é fundamental, visto que as grandezas envolvidas nos diversos fenômenos estudados podem ser representadas por funções, denominadas de ponto, quando representam comportamentos tais como pressão, temperatura, volume, dentre outras, ou funções que representam fenômenos que dependem do caminho, tal como o trabalho.

Embora não conste na ementa do curso de Cálculo I da FAENQUIL, é comum iniciar-se o curso com uma revisão sobre o estudo de funções, abordando a teoria de funções lineares, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

A cada ano, os alunos chegam desconhecedores destes assuntos. Muitos sequer trabalharam com funções exponenciais ou logarítmicas, desconhecendo seus comportamentos e propriedades. O número "e", notação escolhida pelo matemático Leonarhd Euler em 1727, chega a ser uma verdadeira descoberta para muitos alunos.

A opção pessoal, ao longo dos anos, sempre foi a abordagem inicial e de forma tradicional, através de teorias e exercícios nos quais é dada a função e o aluno faz o esboço do gráfico e estuda suas propriedades a partir das propostas do professor. Desta forma, define-se a seqüência pela qual o professor elenca as famílias de funções e enuncia suas propriedades.

Na proposta deste trabalho, as características de cada tipo de família de funções foram sistematizadas, numericamente, graficamente, ou algebricamente a partir das situações modeladas que as envolviam, ou a partir das atividades dos ambientes informatizados, e, portanto, caminhando no sentido experimentação-generalização.

Na fase de modelos aplicados às funções, os objetivos a serem atingidos eram a conceituação de dependência funcional e o comportamento de famílias de funções, como as polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, racionais e funções potências.

Iniciou-se o trabalho através de situações com grau de dificuldade mínimo, nas quais os alunos participassem de todas as etapas de um problema, desde a coleta de dados, passando pela modelagem, até a análise, através de ambientes computacionais. Desta forma, a partir de ações do aluno e através das necessidades do problema, ocorreu o envolvimento do aluno em todas as etapas do processo. Na verdade, adotando este esquema, a teoria é discutida em todas as etapas, somente que numa linguagem natural do aluno, numa troca de informações, de "vivências", de posturas individuais, de posturas dos grupos, cabendo ao professor ajudar a fortalecer e formalizar os conceitos matemáticos.

Quando se fala em modelagem, quer como método para resolução de um problema ou como método de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos, deve-se partir da análise intuitiva. Neste aspecto, afirma Barros (1988, p. 53):

> “Quanto ao pensamento intuitivo, embora não se tenha grande conhecimento sistemático como se dá ou sobre as variáveis que o influenciam, sabe-se que ele é mais eficiente quando apoiado em sólidos conhecimentos e boa familiaridade com um dado assunto. Com efeito, observa-se que um indivíduo que, tendo trabalhado durante algum tempo em um problema, de repente encontra uma solução, sua tarefa seguinte será procurar uma demonstração formal para esta solução, o que caracteriza a utilização do pensamento analítico, seja ele de natureza indutiva ou dedutiva”.

Pensamentos intuitivos e analíticos são complementares e, no entanto, tal complemento pouco ocorre no ensino do Cálculo, freqüentemente ocorrendo a desvalorização da intuição do aluno, com a supervalorização do formalismo matemático algébrico.

O modelo apresentado em relação ao comportamento de funções já havia sido utilizado em um curso voltado a professores com o título "Funções e Gráficos: um curso Introdutório", pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelas professoras Maria Alice Gravina, Luciana Peixoto e Márcia

Rodrigues Notare, em página na internet com o endereço http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/cfuncao/fun_graf.htm.

A atividade foi dividida em duas etapas: na primeira o processo foi conduzido pelo professor e alunos e, na segunda etapa, foi realizada uma variação na situação-problema e, então, os problemas foram solucionados pelos alunos.

O objetivo central destes experimentos era a identificação nas diversas situações, das relações de dependência, onde o aluno identificasse as variáveis do problema.

Mesmo em função da simplicidade da situação, o interesse dos alunos na obtenção dos dados e construção dos modelos foi observado pelos questionamentos em sala de aula e nas consultas ao professor nos períodos de atendimento.

Normalmente um curso de Cálculo que se inicia pelo tópico funções, enfoca este assunto de uma maneira tradicional, ou seja, a partir da definição clássica de função. "Função é toda relação que associa a cada valor da variável x um único valor da variável y". O aluno leva esta definição por toda a sua vida acadêmica e para muitos é uma definição sem significado prático, sem entendimento real de importantes conceitos que fundamentam todo o Cálculo, como por exemplo, os conceitos de dependência funcional.

Através deste modelo, foi proposta uma mudança importante na maneira de abordar o estudo de funções, ou seja, que o aluno não memorize um conceito estático de função e, portanto, adquira um conceito dinâmico de que “função expressa uma lei, que a todo valor de entrada, resulta num valor de saída". Nesta definição, o aluno fornece a "entrada" do problema a ser descrito por uma função e a estrutura matemática da função fornece o resultado, que será analisado pelo aluno. Além de tudo, quem alimenta e controla a "caixa-preta" formadora da função é o aluno, através por exemplo, dos ambientes informatizados com a variação de parâmetros e em alguns ambientes, como Modelllus, com o controle interativo desta lei formadora.

Após os procedimentos de coleta dos dados, os alunos participaram de atividades na sala de computadores para estudo gráfico dos pontos formadores da função.

No experimento, os alunos observaram que a medida da imagem visualizada é função da distância da qual se encontra da parede e verificaram que deveria ser considerada como variável independente a distância do observador à parede e, como variável dependente, a medida da imagem observada.

Após os alunos terem sido organizados em grupos, foi fixada uma trena na parede para cada grupo. Um observador de cada grupo posicionou-se a uma distância da parede onde estava a trena e visualizou um tamanho da mesma. O observador aproximava-se ou afastava-se da parede, e as distâncias de observação e tamanhos do objeto observados eram anotados.

Foram definidas as etapas do processo de modelagem:

a)Interação: Nesta etapa, como já citado, deve-se buscar informações, junto a especialistas, livros ou outras referências bibliográficas que ajudem a entender o problema. Esta etapa é importante, visto que muitos problemas podem ser resolvidos por analogia. Porém, observou-se aos alunos que este problema era simples, e que, não seria necessária uma pesquisa, visto que a situação era bem intuitiva e, a posterior, portadora de características geométricas.

Nesta etapa, também delinea-se a situação a ser estudada, ou seja, definimos o que se deseja obter em relação à situação. Neste caso, o problema consistia em encontrar uma lei matemática que descrevesse a variação do tamanho observado com a distância do observador à parede.

Para exemplificar esta atividade escolhemos os dados sugeridos pelas professoras Maria Alice Gravina, Luciana Peixoto e Márcia Rodrigues Notare.

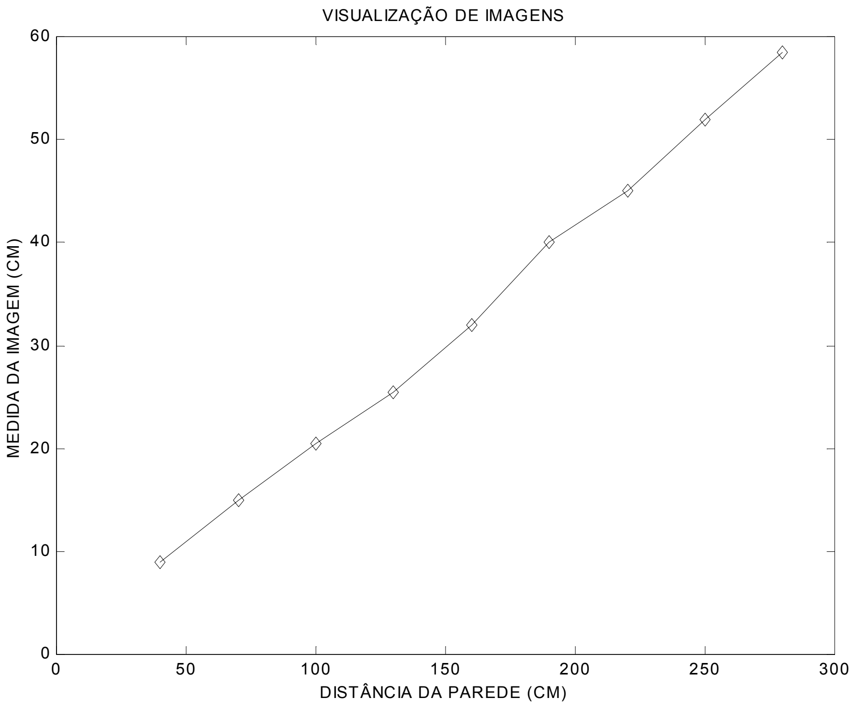
Tabela 03: Dados do Modelo nº1

Distância da parede (cm)	**Medida da Imagem visualizada (cm)**
40	9
70	15
100	20,5
130	25,5
160	32
190	40
220	45
250	52
280	58,5

b) Etapa de Matematização: Deve-se encontrar a descrição matemática da situação. Durante esta etapa, foram identificados fatos ou variáveis envolvidas no problema.

A variável x foi escolhida como sendo a distância de observação e a variável y como sendo o tamanho observado do objeto (a trena), por analogia com os eixos coordenados. Deve ser realizada a descrição matemática da situação. Foi utilizado o ambiente MatLab para a obtenção da representação gráfico-funcional como mostra a figura número 10.

Figura 10: Observação de Imagens através de tubos



Era conhecido um conjunto discreto de pontos, e era necessário encontrar uma descrição sob a forma contínua para esta representação discreta. A observação gráfica mostrou o comportamento de uma reta como função aproximadora do problema. Deveria-se então provar que a função modeladora do problema era uma função linear.

Outra análise a ser feita foi a do comportamento tabelar. Complementou-se a tabela, com informações a respeito da variação da variável independente "x", da variável dependente "y", a saber Δx e Δy, introduzindo neste ponto o conceito de taxa de variação.

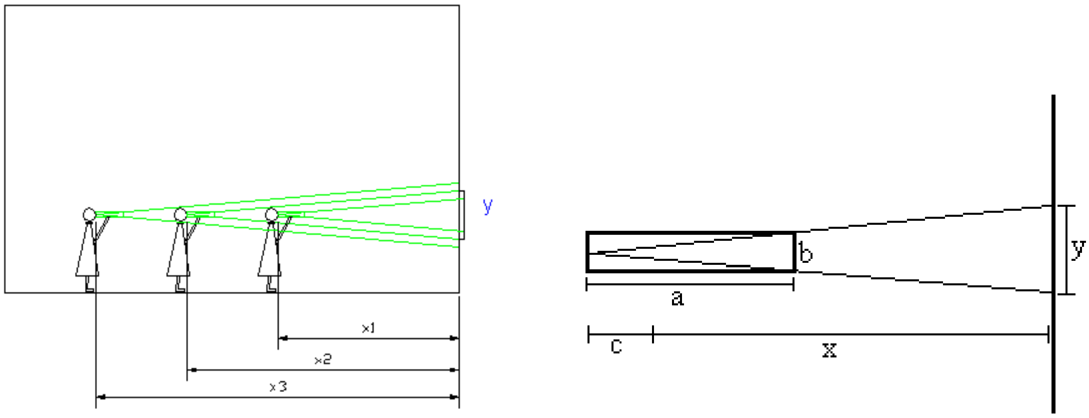
Tabela 04: Medidas Coletadas e Taxas de Variação

X	y	Δx	Δy
40	9	30	6
70	15	30	5,5
100	20,5	30	5
130	25,5	30	6,5
160	32	30	8
190	40	30	5
220	45	30	7
250	52	30	6,5
280	58,5		

A variação em "x" permaneceu constante e igual a 30, enquanto a variação em "y" aproximou-se de 6. Embora não faça parte da disciplina, foi abordado superficialmente o conceito de ajuste de curvas, ou seja, a função de aproximação é uma reta que deve passar o mais perto possível de todos os pontos.

Neste ponto, poderia ter sido utilizado um software matemático que realizasse ajuste de curvas, porém, com o intuito de matematizar a situação através da formulação de uma situação que se aproximasse do modelo físico, real do problema e que utilizasse um conhecimento matemático dos alunos foi utilizada a abordagem, através da situação geométrica.

Figura 11: Esquema Representativo do Modelo



Onde:

- x é a distância do aluno à parede, medida a partir da ponta dos pés
- y é a medida da imagem vista pelo aluno
- a é a medida do comprimento do tubo
- b é a medida do diâmetro do tubo
- c é a medida do que falta do tubo, que se encontra antes da ponta dos pés

Desta forma por semelhança de triângulos:

$$\frac{y}{b} = \frac{x+c}{a}$$

$$y = \frac{bx+bc}{a}$$

$$com\ \mathrm{a, b, c\ sendo\ constantes}$$

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{n} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$$

Foi obtida como função modeladora $y=mx+n$, ou seja, a equação de uma reta, como já observado no comportamento do gráfico obtido a partir dos dados do experimento.

c) Modelo Matemático: a obtenção de um modelo matemático tem o poder da predizer valores, sendo um dos objetivos práticos para a utilização da Modelagem Matemática, não somente como método de ensino-aprendizagem, mas também como ferramenta matemática para a resolução de um problema real.

Na Engenharia, a obtenção de modelos é muito importante, visto que a partir desta predição, resultados podem ser obtidos a partir de simulações dos modelos, sem a necessidade de realizar os experimentos em todas as situações, desta forma evitando, por exemplo, situações de risco humano e otimização de custos.

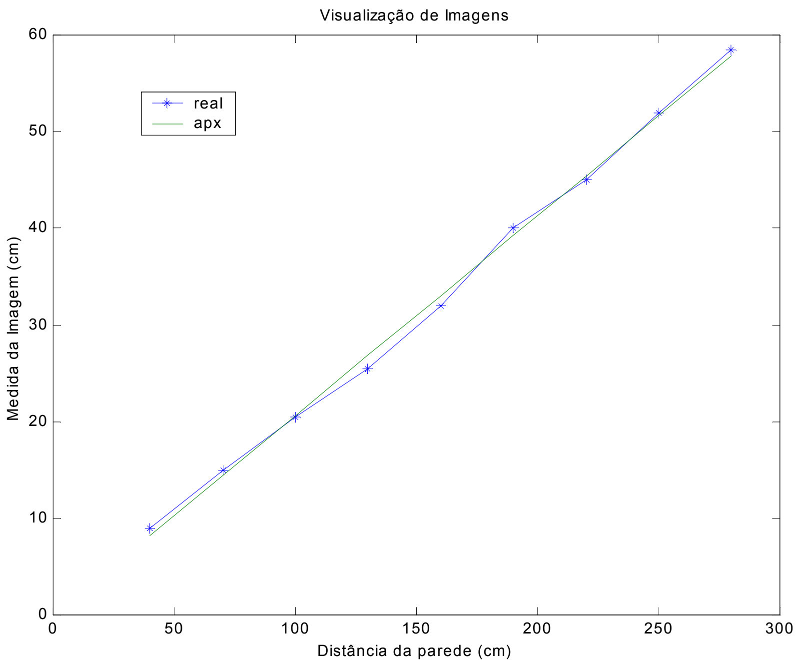
Cita-se como exemplo, a concentração de uma substância ao longo do tempo. Caso tenha-se o modelo matemático que descreva tal comportamento, valores de concentração podem ser obtidos sem a necessidade da execução do experimento.

A validação do modelo em questão exigia a obtenção dos parâmetros "m" e "n". Um método para a obtenção dos valores "m" e "n", possível de ser utilizado, era o método do ajuste de curvas por Mínimos Quadrados, o qual faz parte do conteúdo da disciplina Métodos Numéricos.

Foi então feito um breve comentário sobre a base conceitual do método dos Mínimos Quadrados e os resultados foram obtidos através do ambiente MatLab:

```
x=40:30:280;

y=[9 15 20.5 25.5 32 40 45 52 58.5];

p=polyfit(x,y,1)

p = 0.2069   -0.0556

yapx=0.2069*x-0.0556;

plot(x,y,x,yapx)
```

Figura 12: Modelo da Visualização de Imagens



Neste ponto, ocorreu o aspecto de validação sob um aspecto gráfico, o que não é totalmente correto, porém, seria necessária a introdução de teoria de erros, ou desvios, o que foi julgado, em função da complexidade do assunto, inconveniente no momento.

5.3.2- MODELO DA PURGA

Uma forma alternativa de se trabalhar os conceitos do Cálculo utilizando-se Modelagem Matemática, é a construção de gráficos a partir de dados tabelados, coletados por alunos ou professor, de bibliografias ligadas ao curso de Engenharia, embora, desta forma, o aluno não participe efetivamente de todas as etapas do processo.

Neste caso, o problema consistia de que, a partir de uma tabela, fossem obtidos alguns parâmetros da Lei de Arrenhnius. Ou seja, a partir dos dados tabelados fosse obtida a Energia de Ativação e o fator pré-exponencial de uma reação-química. Os alunos tiveram acesso à seguinte tabela (Borba & Bizelli, 1999, p. 51).

Tabela 05: Dados Temperatura x Constante de Reação Química

K(min^{-1})	**Temperatura (ºC)**	**Temperatura(K)**
16,01	20	293
24,80	30	303
36,09	40	313
53,5	50	323

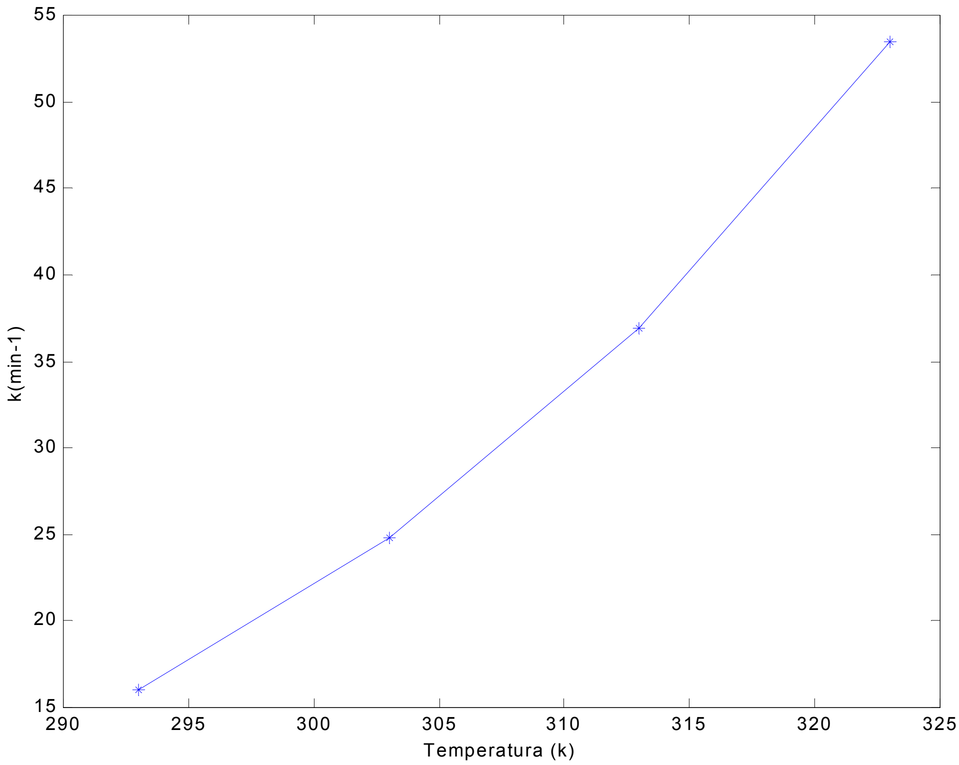
Na resolução deste problema foi pesquisada pelos alunos a lei de Arrenhius e que a temperatura e a constante de velocidade (k) da reação podem ser por essa lei relacionados. Desta forma, a lei é dada por:

$$K = Ae^{\frac{-E_a}{RT}}$$

Na fórmula acima foi pesquisado o valor da constante R e obtido o valor 8,314 $JK^{-1}mol^{-1}$

Em laboratório de informática, através do ambiente MatLab os alunos chegaram ao gráfico:

Figura 13:Temperatura x Constante de Reação Química



Linearizando a curva os alunos executaram o seguinte procedimento:

$$\ln K = \ln A - \frac{E_a}{RT}$$

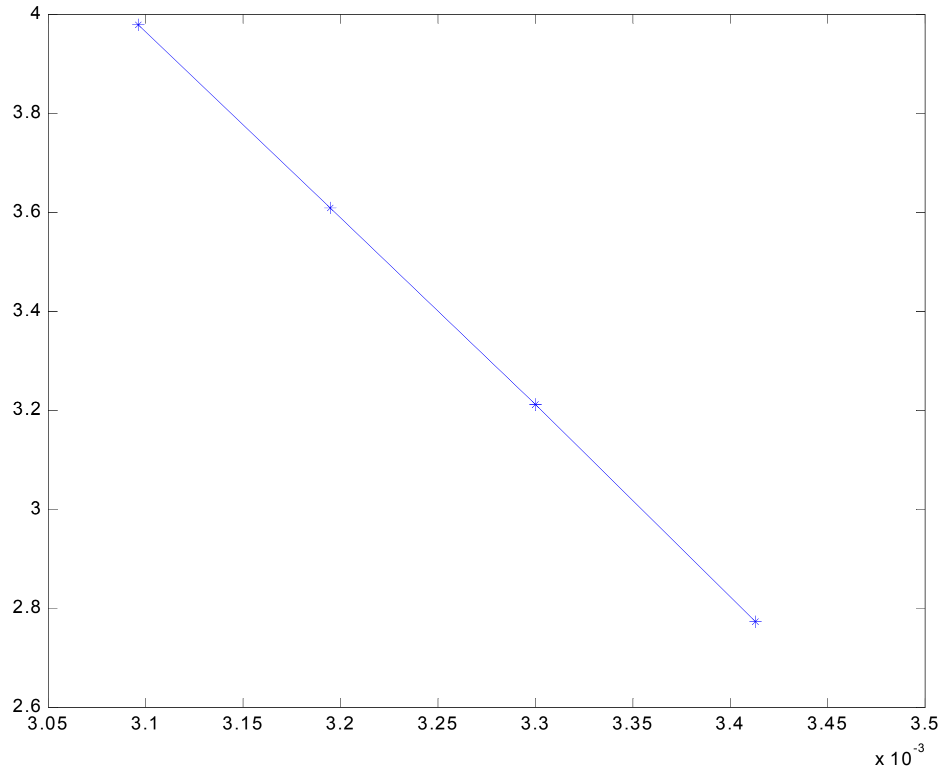
Através de troca de variáveis a equação foi reduzida a:

y=a+mx, onde:

y=lnk;a=lnA; $m = -\frac{E_a}{R}$; x=1/T

A partir desta linearização, técnica desconhecida por muitos alunos, uma nova curva foi obtida:

Figura 14: Linearização (Temperatura x Constante de Reação Química)



Nesta ponto, o objetivo do modelo era a conceituação de coeficiente linear e coeficiente angular. Através da linearização das funções havíamos proporcionado uma forma gráfica de análise destes conceitos.

Observação feita pelo aluno Paulo: "O coeficiente angular eu sei que é dado pela inclinação da reta. Mas e o coeficiente linear?".

Aluno Roberto: "Eu acho que o coeficiente angular e o linear poderiam ser fornecidos pelo software. Já utilizei o programa Origin em Física I e lá obtivemos estes valores através do software".

Professor: "E se você estivesse utilizando um software que não possibilitasse a obtenção destes valores? O que você faria?".

Aluna Mércia: "Eu poderia montar um triângulo retângulo e obteria o valor do coeficiente angular".

Novamente tal aluna comentou: "Mas espera aí, além disso nós poderíamos montar uma tabela com os valores de "delta y" e "delta x" e relacioná-los e assim seria obtido o valor de "m" ".

Professor: Mas e o coeficiente linear?

Aluna Mércia: “Pelo que eu me lembro é o ponto em que a reta toca o eixo y”.

Professor: “Sim, mas este gráfico apresenta o problema de deslocamento da origem do sistema de coordenadas e se você tirar o valor deste intercepto, da forma como o gráfico se apresenta, você chegará num valor errado.”

Após esta discussão, cientes dos problemas que o gráfico apresentava e de possíveis soluções, salientou-se e explicou-se novamente o conceito de ajuste de curvas, proporcionando um caráter numérico ao problema e através deste ajuste chegou-se aos valores:

coeficiente linear aproximadamente igual a 15,7

coeficiente angular aproximadamente igual -3780,8

A partir destes valores foram obtidos:

Energia de Ativação=31433,5712 $Jmol^{-1}$

Fator pré-exponencial=6582992,58 min^{-1}

Este problema em si, embora muito importante, pela análise de escalas de gráficos, aplicação de funções inversas, linearização de funções ainda não envolvia a obtenção de um modelo, visto que a lei havia sido pesquisada pelos alunos.

Com o objetivo de inserir neste problema, uma situação que pudesse ser realmente modelada pelos alunos foi submetida aos alunos a seguinte situação: "O gás, cuja constante de reação foi relacionada como da forma acima, está num tanque de armazenamento. Este gás, nomeado como Gás "A", ocupa um volume V. O tanque deve ser purgado de seu conteúdo de modo que não haja mais do que duas ppm (parte por milhão) de gás "A". A purga será executada através de uma injeção de nitrogênio para diluir o gás "A" ligeiramente e, então, drena-se x unidades de volume da mistura, reestabelecendo a pressão anterior do tanque.

A pergunta norteadora do problema foi: "qual a função matemática que relataria a concentração de gás "A" restante no tanque após "n" infusões de nitrogênio e quantas infusões seriam necessárias para que a quantidade de gás "A" não fosse superior a duas ppm.

Passou-se então à discussão das etapas de Modelagem Matemática:

a) Interação com o problema:

Nesta etapa, a principal discussão foi quanto à composição da mistura, ou seja, como o objetivo era se determinar a concentração de gás "A" restante no tanque após cada infusão, como seria a influência da quantidade x de mistura que sairia na drenagem?

Foi considerado que pelos alunos que a drenagem seria feita após o equilíbrio termodinâmico da mistura e seria assumido que a composição seria a mesma, tanto do volume drenado quanto do volume da mistura ainda restante no tanque. Realizada esta hipótese simplificadora, o raciocínio sobre o problema voltava à quantidade remanescente no tanque e à sua composição.

Foi discutido também que, dentre possíveis formas de concentração, como, massa da substância em relação à volume da mistura, ou massa da substância em relação à massa da mistura, os dados do problema forneciam a possibilidade de se trabalhar numa relação volume da substância dividido pelo volume da mistura. Desta forma a concentração, nomeada como “C” foi dada por $C=V_{gás\ "A"}/V_{mistura}$.

V seria o.Volume inicial do gás "A".

X representaria o volume de Nitrogênio injetado e também Volume drenado da mistura.

X+V representaria o volume da mistura presente no tanque.

A etapa de matematização ocorreu, da seguinte forma, resumida, na tabela abaixo (tabela proposta por um grupo de alunos)

Tabela 06- Modelo 02: Purga do Gás "A"

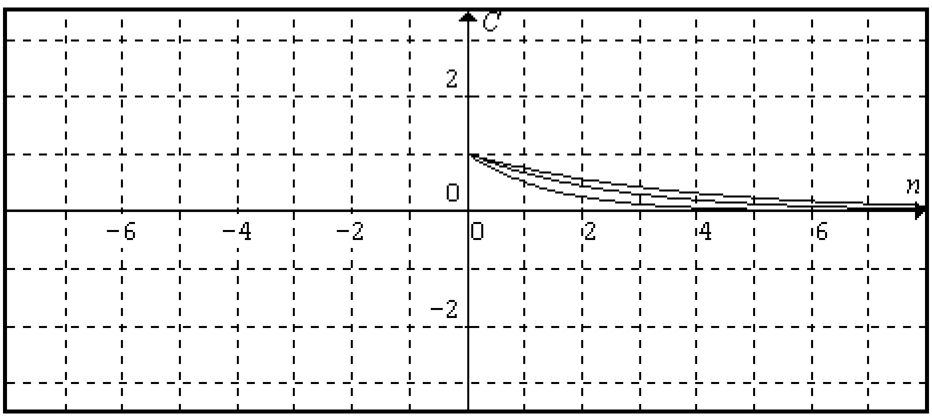
Número de Injeções	Volume do Gás "A"	Volume da Mistura	Concentração: $C=V_{gás\ "A"}/V_{mistura}$.
0	V	V	1
1	1V	V+x	C=V/(V+x)
2	$[V-XV/(V+x)]=V^2/(V+x)$	V+x	$C=[V^2/(V+x)]/(V+x)$ $C=[V/(v+x)]^2$

Foi considerado que o volume da mistura a partir da primeira injeção permanecia inalterado, visto que a mesma quantidade x que era injetada, também era drenada.

O volume remanescente do gás "A" foi obtido pelo aluno Nair da seguinte forma:

"A concentração após a primeira injeção e primeira drenagem era V/(V+x). Desta forma, o volume de gás "A" remanescente no tanque era igual ao volume presente antes da primeira drenagem, V, menos o volume X multiplicado por um fator de concentração do gás "A" na mistura". Portanto, $V_{gás\ "A"}$=V- xV/(V+X)=$V^2/(V+x)^2$.A concentração após a segunda drenagem seria C=$[V(V+x)]^2$.Desta forma, após “n” injeções e “n” drenagens seria obtida a formula de recorrência C=$[V/(V+x)]^{n.}$ Foi realizada no ambiente graphmatica a descrição gráfica de curvas do tipo C=$[V/(V+x)]^n$ e discutiu-se a mesma análise por limites $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{V}{V+x}\right)^n = 0$. A análise deste limite também foi realizada de forma tabelar através do graphmatica.

Figura 15: Comportamento da Concentração do Gás "A"



O comportamento da curva mostrava o decréscimo da concentração em função do aumento do número de drenagens do gás "A".

As demais etapas do processo de modelagem, como comparação com dados experimentais e conseqüente validação, foram apenas discutidas, visto que não foram fornecidos dados experimentais do problema.

Com o objeto de trabalhar-se com dados numéricos e gráficos, foi questionado aos alunos: “a partir do modelo obtido, qual seria o número de injeções de nitrogênio necessário para que a quantidade de gás "A" não fosse superior a duas ppm?”. Salienta-se que Hoffmann e Bradley (1999, p. 248) sugere tal questão quando aborda o assunto derivadas.

Para este cálculo foi considerado que o volume do tanque era de 500 m^3 e que a injeção x equivalia a $1m^3$. Portanto a função concentração se reduzia a $C= [500/(500+1)]^n <=2.10^{-6}$

Linearizando a função teríamos:

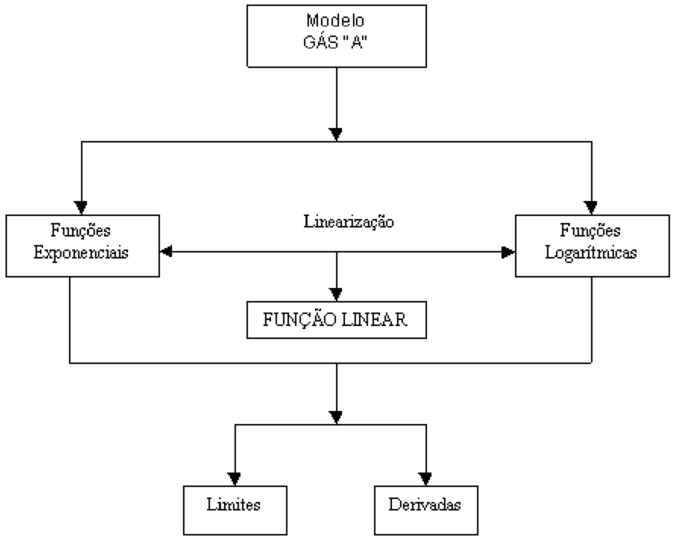
$N \ln(500/501)<=\ln(2.10^{-6})$

N (-0,001998)<=-12,12336

n>=6068 infusões

Desta forma, novamente, durante o curso, o processo de linearização era realizado pelo aluno, agora interno a uma inequação matemática, representativa de um modelo real de problema de Engenharia e foram, a partir do modelo, sistematizados alguns conceitos, conforme esquema:

Figura 16: Sistematização dos Conceitos- Modelo Purga



5.3.3- MODELO DIRETOR DO CURSO

Um dos problemas clássicos contidos nos livros de Cálculo Diferencial e Integral é o da otimização do custo das embalagens dos produtos, sejam eles latas ou caixas. Mas, mesmo um problema clássico, estático, pode ser revestido de uma dinâmica construtivista. O objetivo era trabalhar esta situação incorporando-lhe estudos que seriam sugeridos pelo professor e pelos alunos ao longo do curso. Observa-se também que esta proposta foi escolhida pelos alunos como tema de trabalho no início do curso.

Segue a descrição como este modelo foi abordado ao longo das aulas e das discussões com os grupos de alunos.

Inicialmente, foi discutida a importância das embalagens, no tocante à aspectos de propaganda, durabilidade, manuseio e resistência e, principalmente, em relação ao custo, de tal forma que, em sua construção, se utilizasse a menor quantidade de material possível, sem perder a funcionalidade e a estética.

O problema em questão abordava um estudo de embalagens, quanto ao custo e forma, mas tais questões poderiam ser extrapoladas às formas dos tanques de armazenamento de produtos, por exemplo.

Primeira etapa de formulação: nesta etapa foi discutido o problema em si e foram levantadas, por professor e alunos, algumas perguntas:

- Qual a forma ideal para uma embalagem? A que levasse ao menor custo?
- Escolhida a melhor forma, quais seriam as dimensões que otimizariam o custo da embalagem?
- Como o processo de fabricação influencia o custo da embalagem?
- Qual a melhor forma de armazenar estas embalagens numa caixa?

Foi decidido que seriam escolhidas duas formas iniciais de embalagens a serem trabalhadas: uma de forma cilíndrica e outra sob a forma de um prisma de base retangular, para início da discussão sobre a melhor forma da embalagem. Uma embalagem de leite, tipo longa vida, possui a forma de um prisma de base retangular. E se esta mesma embalagem tivesse a forma cilíndrica?

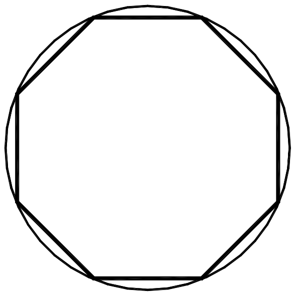
Abriu-se então um campo para a discussão de formas geométricas das embalagens. As duas formas geométricas que norteariam as discussões seriam duas formas bem conhecidas dos alunos: a “lata” cilíndrica e o tetraedro de base retangular.

Através de duas embalagens das formas citadas, planificadas, as discussões tiveram início. Como seria provado matematicamente, a área total do cilindro era menor que a área total da forma tetraédrica de base retangular.

Um aluno perguntou : “E então porque se usa esta forma para o leite ?”. Surgiram várias respostas a esta pergunta, dentre elas maior facilidade para armazenar, maior facilidade para estoque, dentre outras. As idéias foram anotadas para posterior conferência.

Um curso apoiado na método da Modelagem possui a característica de que as discussões e os tópicos do curso são provenientes da situação-problema e muitas situações não são pré-definidas pelo professor. No caso em questão, já havia sido definida a seguinte pergunta para iniciar-se as discussões e abordarmos um dos assuntos mais importantes do Cálculo, o limite: “A área do círculo é o limite da área do polígono nele inscrito!”. A afirmação que iniciaria os trabalhos era dada em função de que uma das formas geométricas que compunham a lata cilíndrica (topo e a base) era justamente um disco. E também, devido ao fato que os alunos deveriam a posterior, fazer a opção por uma base circular ou tetraédrica, passando portanto pela análise das áreas de material gasto nestas respectivas bases. Abria-se com esta pergunta uma possibilidade de discussão, a posterior, do cálculo de áreas através de ferramentas do Cálculo.

Figura 17: Polígono Inscrito



Através das pesquisas iniciais, haviam sido encontrados trabalhos interessantes abordando o entendimento do conceito de limites, Anton (2000, p.7) que fundamentaram matematicamente e historicamente o estudo deste problema. Montou-se uma planilha com os alunos no laboratório de informática:

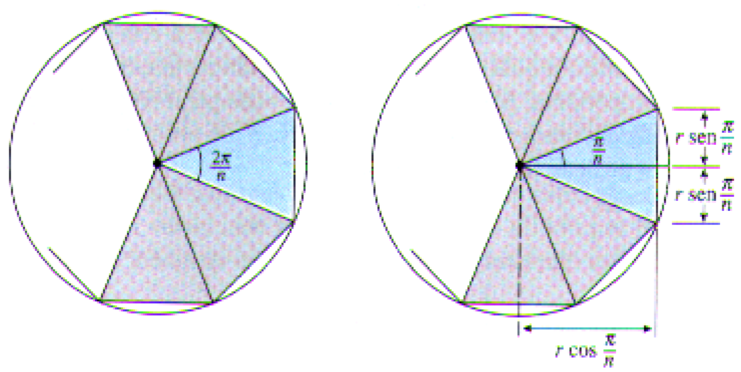
Tabela 07: Método da Exaustão

Número de lados	Área
10	2,938864247r^2
100	3,139449474r^2
1000	3,141495331r^2
10000	3,141515793r^2

Na planilha obteve-se o valor de área como sendo πr^2 e em sua montagem foi utilizado o método da exaustão. Uma idéia para a determinação da área do círculo foi sugerida pelo matemático grego Antiphon (cerca de 430 A.C.) e posteriormente algoritmizado por Eudoxo através de um método denominado método da exaustão. Este método consiste, quando aplicado a um círculo de raio r, em inscrever-se uma sucessão de polígonos regulares no círculo fazendo com que o número de lados cresça e, desta forma, os polígonos tendem a exaurir a região interna ao círculo, tornando as áreas dos polígonos cada vez mais próximas da área exata do círculo.

A demonstração da fórmula segue a inserção de um polígono à circunferência e então subdividindo este polígono em n triângulos congruentes.

Figura 18: Polígonos Inscritos



Os triângulos são isósceles, sendo dois de seus lados igual ao raio do círculo e o ângulo no vértice ápice de cada triângulo dado por $2\pi n$, visto que os triângulos dividem o ângulo central em n partes iguais. Então, junto aos alunos, seguimos a dedução:

A área do triângulo é dada por:

$$A_{triangulo} = \frac{basexaltura}{2}$$

$$= \frac{2(r\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{n}))(r\cos(\frac{\pi}{n}))}{2} = r^2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})$$

Portanto para os n triângulos inscritos:

$$A_{total} = nr^2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})$$

Onde n é o número de triângulos inscritos ao polígono. À medida que n cresce, tendendo ao infinito, a fórmula tende à área do círculo πr^2.

Esta “prova” numérica da tendência das áreas dos polígonos inscritos tenderem à área do círculo mais tarde durante o curso foi também realizada mais tarde, pelos alunos, durante o curso utilizando L’Hôpital, e novamente o método proporcionava a inserção de tópicos da disciplina, sob formas diversas.

$$\lim_{n\to\infty} nr^2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r^2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})}{\frac{1}{n}} = r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})}{\frac{1}{n}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando L’Hôpital:

$$r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})(-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})).(\frac{-\pi}{n^2}) + \cos(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n}).(\frac{-\pi}{n^2})}{\frac{-1}{n^2}}$$

$$= r^2\pi$$

Mostrando que a área do polígono inscrito converge para a área do círculo e incorporou-se Trigonometria e Geometria novamente ao modelo além de limites e regra de L’Hôpital, além do aspecto numérico dado pela tabela.

Na seqüência do curso, voltou-se a atenção à forma da embalagem. Para iniciar-se esta discussão foi suposto que o volume para as duas formas seja o mesmo e que possuam a mesma altura.

Apresenta-se, agora, como esta parte da situação-problema foi resolvida ao longo do curso. O que é exposto na seqüência ocorreu ao longo das discussões em sala de aula e em atendimentos efetuados pelo professor aos grupos, ao longo do semestre letivo.

Foi observado aos alunos que o volume de um sólido é a medida do espaço por ele ocupado e que o volume de um cilindro pode ser obtido por $V_{cilindro}=A_{base}$ x altura. Por simplicidade de escrita a formula deve ser escrita como $V_c=A_b$ x h onde:

V_c=volume do cilindro

A_b=área da base

H=altura

Em sala de aula, foi considerado pelos alunos que a base do cilindro era circular e então $A_b=\pi\ r^2h$, onde r é o raio do cilindro.

Para a forma de prisma retangular o volume é dado por $V_{prisma}=a \times b \times c$, onde a, b e c são as arestas do prisma de base retangular (. Para simplicidade o volume do prisma será indicado por V_p.

Os alunos consideraram que as embalagens tenham o mesmo volume e a mesma altura e chegaram à seguinte relação:

$V_p=V_c$

$a \times b \times c= \pi \times r^2 \times h$

Como a aresta c é a altura do prisma de base retangular chegou-se a:

$ab=\pi\ r^2$ que foi chamada de equação (1).

A área total de um prisma de base retangular é dada por:

$2ab+2ah+2bh=2[ab+h(a+b)]$ chamada de expressão (2)

A área total de um cilindro é dada por:

$2\pi rh+2\pi r^2$ chamada de expressão (3)

Como o objetivo era tentar responder a pergunta que definiria qual a melhor embalagem, foi analisado que a melhor forma seria aquela que utilizasse a menor quantidade de material em sua confecção. Seguiu-se uma sugestão de Biembengut (2000, p.42):

Visto que a expressão (2) possui o termo ab, ocorreu a substituição da equação (1) na equação (2) e pela equação (1) chegamos a outras duas relações:

$a=\pi r^2/b$ e $b=\pi r^2/a$

Comparando as duas áreas chegamos a:

Área do prisma= $2\left[\pi r^2 + h(\frac{\pi r^2}{b} + \frac{\pi r^2}{a})\right] = 2\pi r^2 + 2\pi rh(\frac{r}{b} + \frac{r}{a})$

Área do cilindro=$2\pi r^2+2\pi rh$

Área do prisma> área do cilindro.

Os alunos chegaram à conclusão de que a melhor forma para recipientes de mesma altura e mesmo volume seria a embalagem cilíndrica, desde que o único fator de escolha fosse o custo em função da área para manufatura do recipiente.

A proxima etapa seria tentar responder a pergunta: quais seriam as dimensões ótimas da embalagem, que na etapa anterior havia sido definida como cilíndrica. Este era um problema clássico de otimização e foi resolvido pelos alunos como se segue:

$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Foi analisado que a área era função de duas variáveis e como o Cálculo I estuda apenas funções que variam com apenas uma variável, chegou-se à conclusão de que uma equação auxiliar seria necessária. A equação auxiliar utilizada foi a equação do volume do cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$

Isolando-se h e substituindo-se a expressão obtida na expressão da área do cilindro:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}$$

Portanto a função a ser minimizada seria:

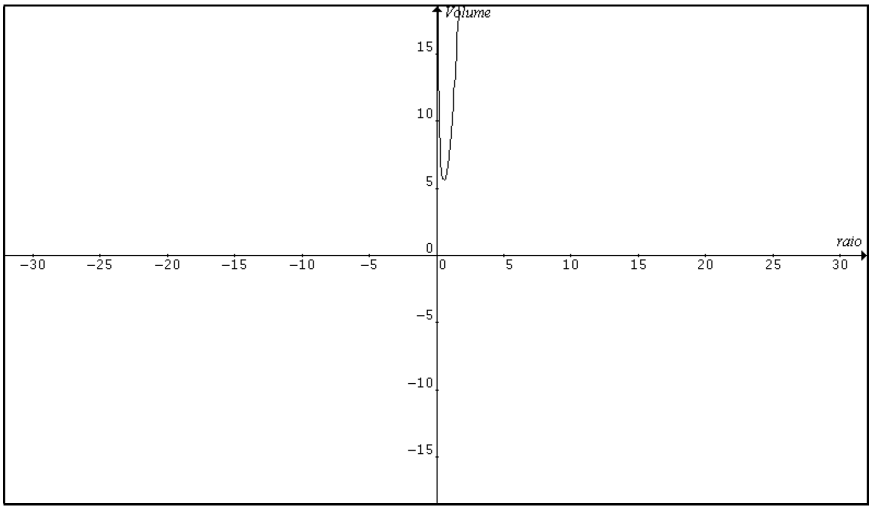
$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \ \mathrm{r} > 0$$

Neste ponto foi introduzido o conceito de pontos críticos da função e a fim de que estes pontos críticos fossem definidos, a função A(r) foi diferenciada:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - \frac{V}{2})}{r^2}$$

Para um ponto de máximo ou mínimo a primeira derivada da função vale zero e portanto a expressão acima foi igualada a zero e chegando-se ao número crítico: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Figura 19:Função Área $A = 2\pi r^2 + 2\pi r \dfrac{V}{\pi r^2}$



O gráfico acima representa y=A(r) para um valor fixo de volume.

Através do gráfico os alunos observaram que as tangentes são negativas durante um certo intervalo e passam a ser positivas a partir de um determinado valor de r, portanto passando por um valor de tangente ou de primeira derivada igual a zero, que é o ponto crítico da função e como mostrado pelo gráfico um ponto de mínimo. O análise gráfica possibilitava visualmente a equivalência entre tangentes e o comportamento da função. A seguinte análise foi realizada em conjunto com os alunos:

A'(r) <0 para r<$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ e A' (r)>0 para r>$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, logo A está decrescendo para todo r à esquerda do valor $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ e crescendo para todo r à direita de $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Logo r=$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Este comportamento também é visualizado na tabela abaixo, onde a função decresce até um determinado valor de r e depois passa novamente a ter um valor crescente.

Foram estudados diversos valores de volume, confirmando o comportamento numérico da função A(R), porém na tabela 08, apresentamos apenas uma das situações.

Tabela 08: Função A(r)

r	A(R)
0,001	2000,000006
0,01	200,0006283
0,1	20,06283
1	8,283
2	26,132
3	57,21366667
5	157,475
7	308,1527143
8	402,362
10	628,5
12	904,9186667
23	3323,793957
33	6842,247606
43	11617,31351
53	17648,98474

V=1 unidade de volume

O teste da segunda derivada foi então aplicado para se confirmar a análise gráfica e tabelar:

$A''(r) = 4\pi + \frac{V}{r^3} > 0$, caracterizando ponto de mínimo na situação de $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Um valor de h correspondente a r=$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ foi obtido da equação do volume do cilindro:

$$V = \pi r^2 h$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$
$$h = 2r$$

Desta forma, foi concluído que para minimizar o custo da embalagem cilíndrica a altura deve ser igual a duas vezes o raio.

Passou-se então à terceira fase do modelo, ou seja, a obtenção da resposta à pergunta: "Como o processo de fabricação influencia o custo da embalagem?". Esta pergunta foi sugerida pelo professor, visto que introduziria novamente no modelo, o estudo dos pontos críticos de uma função, além de aspectos de trigonometria, o que seria o ponto de partida para o estudo de derivadas de funções trigonométricas.

Foi observado aos alunos que o modelo adotado desprezava qualquer perda de material durante a confecção da lata. O aluno Mario observou que no "nosso modelo estudado, a lata não tem bordas...mas no supermercado as latas possuem bordas!".

A partir da observação do aluno, pedimos que os alunos coletassem em supermercados uma relação real entre raio e altura de embalagens cilíndricas. Foi analisado pelos alunos que a relação h=2r não aparece na prática, e que esta relação não é constante para diversos produtos. Para três produtos foram encontradas as seguintes relações r/h:

Tabela 09: Relações R/H coletadas pelos alunos

LATA	R/H
1	2,58
2	2,30
3	2,39

Livros de Cálculo, como por exemplo Stewart, 1999, p. 339, mencionam que esta razão pode variar de 2 até 3,8, confirmando os valores obtidos na pesquisa nos supermercados e o valor encontrado pelo modelo. Observamos que de certa forma, o modelo estaria validado.

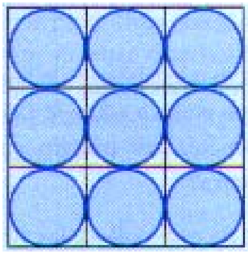
O objetivo agora era a explicação desta diferença. Será que as empresas não utilizam matemática para confeccionar suas embalagens?

Foi discutido então com os alunos a seguinte situação: O material para a confecção das latas pode ser cortado a partir de lâminas de metal. Os lados do cilindro são montados dobrando-se estas lâminas. A base e o topo da lata, que são circulares, também são cortados a partir de lâminas de metal. Como formar estes círculos para a base e o topo da lata.

Como mostra o desenho abaixo a primeira idéia é que os discos sejam cortados de quadrados de lado 2r. Como o esquema abaixo demonstra haveria uma perda considerável de material, que até poderia ser reciclado. A partir desta consideração foi encontrada a relação h/r que otimizaria o custo de confecção da embalagem cilíndrica, como se segue:

Figura 20: Corte circular do material

(Stewart, 2001, p.340)



A área lateral do cilindro permaneceria sendo dada por $A_{lateral} = 2\pi rh$.

A mudança seria em função das áreas dos discos que formariam a base e o topo da embalagem cilíndrica.

$$A_{base} = 4\pi r^2$$

Desta forma a área total seria dada por:

$$A_{total} = 2\pi rh + 8r^2$$

Sabemos que volume do cilindro : $V = \pi r^2 h$

$$A = 2\pi\, r \frac{V}{\pi r^2} + 8r^2 = \frac{2V}{r} + 8r^2$$

Obtendo a derivada :

$$\frac{dA}{dr} = A'(r) = \frac{2V}{r^2} + 16r$$

Igualando-se a zero para obter o ponto de mínimo:

com $r > 0$

$$-\ 2V + 16r^3 = 0$$

$$r^3 = \frac{V}{8}$$

$$V = 8r^3$$

Igualando-se a expressão obtida do volume com a fórmula do volume do cilindro:

$$8r^3 = \pi r^2 h$$

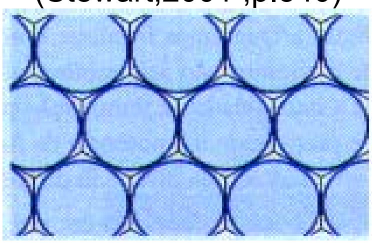
$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2{,}55$$

Foi discutido com os alunos um outro esquema de corte mais eficiente, com uma perda menor de material através da divisão da lâmina de metal em hexágonos.

O objetivo agora seria encontrar outra relação h/r em função deste novo tipo de corte para formar a base e o topo da lata. Foi então observado que o hexágono é formado por seis triângulos equiláteros com altura igual ao raio do disco. O desenho abaixo iniciou a seqüência de cálculos:

Figura 21: Corte hexagonal do material

(Stewart,2001 ,p.340)



$$tg30^{o} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{r}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} r$$

A base do triângulo equilátero é dada por $2\frac{\sqrt{3}r}{3}$.

Portanto a área do triângulo equilátero será dada por:

$$A_{\text{triângulo equilátero}} = 2\frac{\sqrt{3}r}{3}.\frac{r}{2} = \frac{\sqrt{3}r^2}{3}$$

A área do hexágono será dada por seis vezes a área do triângulo equilátero:

$$A_{hexagono} = 6\frac{\sqrt{3}r^2}{3} = 2\sqrt{3}r^2$$

A área total portanto utilizada para fabricar a embalagem cilíndrica será a área lateral mais duas vezes a área do hexágono (base e topo):

$$Atotal = \frac{2V}{r} + 4\sqrt{3}r^2$$

Foi obtida então a derivada da função A(r) e a expressão obtida igualada a zero para obtenção do ponto de mínimo:

$$\frac{dA}{dr} = A'(r) = \frac{-2V}{r^2} + 8\sqrt{3}r$$
$$V = 4\sqrt{3}r^3$$

Foi então igualada a expressão do volume obtido com o volume do cilindro:

$$4\sqrt{3}r^3 = \pi r^2 h$$
$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2,21$$

No modelo inicial, portanto, não foi considerada pelos alunos a área gasta para juntar o topo e a base das embalagens cilíndricas, o que afetaria a relação h/r realmente existente nos produtos. O valor obtido agora, estava mais próximo dos valores obtidos na coleta de dados.

Na seqüência de análise da influência do processo de fabricação da lata, incorporou-se ao modelo, após o corte, um custo de manufatura da lata. Stewart(1999, p.340) sugeriu uma idéia para a definição desta atividade com os alunos. A discussão deu-se portanto da seguinte forma:

Professor: "As laminas de metal são cortadas a partir de um determinado comprimento para a confecção da superfície lateral da lata. Poderíamos incorporar algum tipo de custo nesta atividade?".

Aluno Mario: "Bem, para que se forme a lata devemos ter uma máquina que forme o formato da lata, ou seja, que dobre a lâmina".

Professor: "Correto. Este custo existe. Está associado a energia elétrica de consumo da máquina, operadores para a máquina, desgaste da máquina, além de outros".

Aluna Miriam: " Mas assim teríamos que levantar estes dados e acho difícil uma empresa fornecer estes custos".

Alguns alunos componentes da equipe de coleta de dados tentaram levantar dados com empresas da região, mas não obtiveram sucesso em seus objetivos, visto que tais dados não foram fornecidos.

Considerou-se que o maior custo estaria na junção para "fechar" a superfície lateral. Este custo seria proporcional à altura da lata. Além deste custo, os alunos consideraram o custo relativo à junção da base e do topo, de formas circulares, da lata.

Portanto, na função custo total, estaria sendo considerada uma constante C_j que denotaria o custo de junção por unidade de comprimento. A função custo obtida pelos alunos, a partir do corte hexagonal foi:

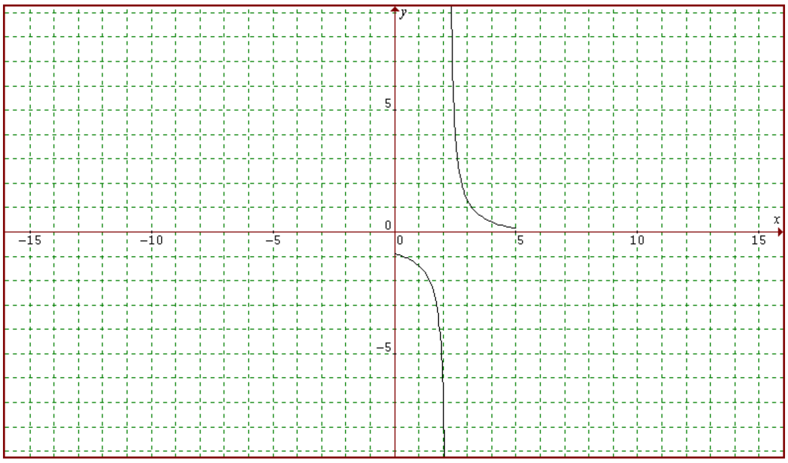
$$C_{total} = 2\pi rh + 4\sqrt{3}r^2 + C_l(h + 4\pi r)\ .$$

Foi obtida então a derivada da função custo em relação ao raio da lata. Após algumas manipulações algébricas chegamos à função dada por

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}}\,\frac{2\pi - \frac{h}{r}}{\pi\frac{h}{r} - 4\sqrt[3]{3}}$$

Através do Graphmatica esta função foi plotada:

Figura 22: Comportamento de $\frac{h}{r}$ por $\frac{\sqrt[3]{V}}{k}$



Através do gráfico os alunos, em conjunto com o professor, analisaram as condições pelas quais:

a) para uma lata volumétricamente grande ou quando a junção é barata, considera-se como valores de h/r, valores próximos a 2,21.

b) para latas volumétricamente pequenas ou quando a junção é cara, considera-se valores de h/r maiores..

A análise gráfica foi fundamental nesta etapa pela visualização da assíntota em h/r=2,21 e para a análise da tendência do comportamento da função quando a relação h/r aumentava substancialmente.

Durante a discussão das propostas do trabalho, foi decidido que os alunos de toda a sala formariam uma empresa fictícia que seria responsável pelo projeto. O projeto recebeu de parte dos alunos, sem a interferência do professor, o título Confecção de uma lata de base cilíndrica utilizando Modelagem Matemática. A sala foi então dividida em equipes:

Tabela 10: Atividades da Equipes formadas por alunos

Equipes	Atividades
Gerência	• Supervisionar o andamento do projeto e coordenar o fluxo de informações entre os grupos. • Elaborar relatório final sobre o projeto
Projeto Técnico	• Elaborar o projeto • Avaliar o projeto em função das informações da equipe de coleta de dados • Enviar projeto à equipe gerente
Informática	• Expor os dados através de gráficos e utilizar os ambientes informatizados para a resolução de etapas de resolução do modelo
Coleta de dados	• Obter os dados necessários ao projeto
Equipe de Apresentação	• Expor o projeto técnico em um seminário

Esta empresa seria responsável pelo projeto, com cada equipe executando suas ações. A fim de que todos os alunos participassem do principal objetivo do trabalho, que era a modelagem do problema e a conseqüente abordagem conceitual dos assuntos ligados ao Cálculo, a equipe responsável pelo projeto técnico (composta por todos os alunos da turma) foi dividida em sub-equipes de 5 alunos.

Cada uma destas sub-equipes tentaria uma solução do problema e após discussões chegariam à forma final de conclusão do projeto. As outras equipes, também compostas na média por 5 alunos, possuíram atividades distintas.

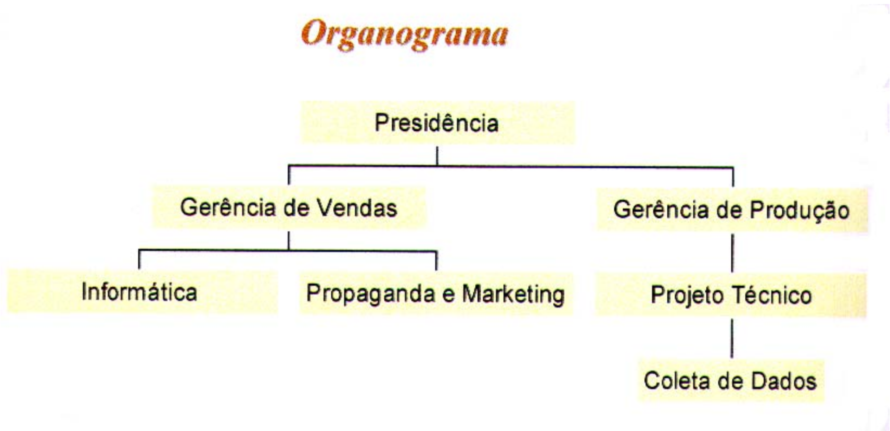
À medida que o projeto avançava, os assuntos do curso eram sistematizados a partir das necessidades do projeto. Esta seqüência do modelo discutida neste trabalho foi a apresentada pelos alunos em um seminário na última semana do curso.

Interessante observar que através desta “empresa” foi gerada a necessidade de cooperação para que os objetivos fossem atingidos, além de uma organização funcional da mesma, através do organograma montado pelos alunos.

Uma alteração foi sugerida em relação a este organograma, de modo que a equipe de informática estivesse associada à Gerência de Produção, visto que suas atividades envolviam, além da montagem da apresentação do produto, as atividades relativas aos softwares no processo de resolução dos problemas.

Figura 23: Organograma de Empresa dos alunos

(Figura extraída de relatório dos alunos)



É certo que muitos desencontros ocorreram, com alguns alunos dedicando-se mais que outros, mas as características necessárias a um profissional de Engenharia, como participação, poder de análise, formulação e crítica estavam presentes no modelo de atividade proposto.

Voltando ao detalhamento do projeto, a próxima fase foi a definição das dimensões de uma caixa retangular para estocagem de 48 latas do produto, de forma que o material para sua confecção seja o menor possível, como se segue abaixo:

Sabendo que a altura das latas é fixa, os alunos minimizaram o perímetro da área da base.

a=nº de latas no lado x

b=nº de latas no lado y

ab=48

A área da base é dada por: A=xy

Mas também sabemos que $A=adbd=abd^2=48d^2$

Igualando-se as expressões das áreas:

$48d^2=xy$

$y=48d^2/x$

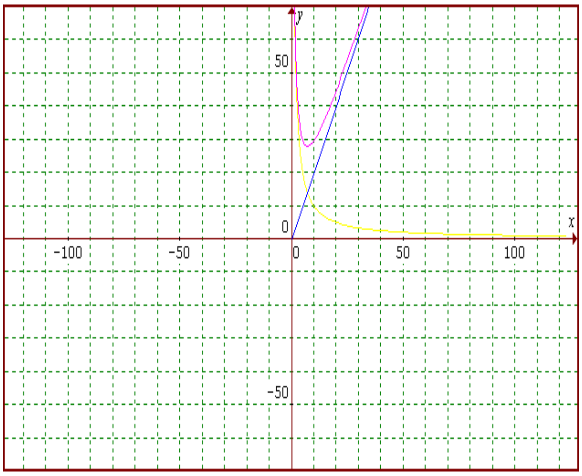
O Cálculo do perímetro de um retângulo será dado por:

$P=2x+2y$

$P(x)=2x+2(48d^2/x)$

$P(x)=2x+96d^2/x$

Figura 24:Função Perímetro - Composição Total e Parcial



$$P(x) = 2x + \frac{96d^2}{x}$$

$$P'(x) = 2 - \frac{96d^2}{x^2}$$

$$2x^2 - 96d^2 = 0$$
$$x = d\sqrt{48}$$

Quantas latas serão colocadas no lado x?

$$ad = x$$
$$ad = \sqrt{48}d$$
$$a = \sqrt{48}$$
$$a \cong 6{,}92$$

Os alunos observaram que foi encontrado um valor irracional para "a" e que na situação física do problema este valor tem que ser inteiro e que "a" deveria ser um múltiplo de 48, e então escolheram trabalhar com a=6. Portanto:

x=6d

e

y=8d

Ao término do seminário foi realizado um brainstorming sobre o curso em si, sobre a metodologia utilizada e sobre o projeto realizado pela sala em conjunto, ou seja, a simulação de uma empresa de embalagens. Este brainstorming será apresentado no capítulo de análise dos resultados.

Até este ponto o modelo em questão havia envolvido vários aspectos:

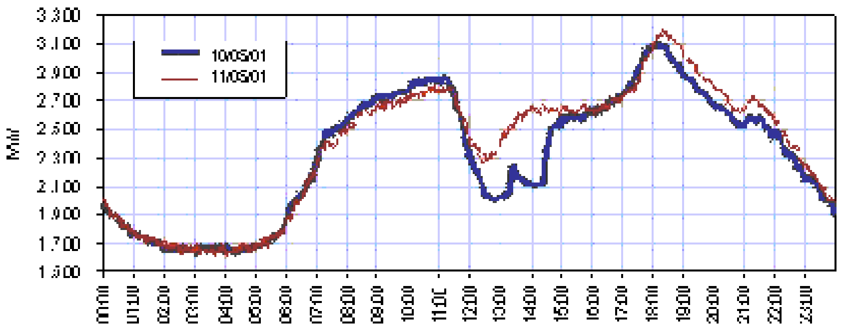
- Pontos críticos da função
- Derivadas
- Geometria
- Trigonometria
- Análise gráfica
- Análise tabelar (numérica)
- Utilização de software matemático (Graphmatica) e planilha (Excel)

Além dos aspectos conteudistas da Matemática citados anteriormente, a idéia da criação da empresa, com as dificuldades inerentes a um trabalho que envolve um número considerável de pessoas, proporcionou um trabalho efetivo de equipe, com cooperação e coordenação exigidos, para que o projeto chegasse ao seu término, e com as dificuldades inerentes a um trabalho em equipe.

5.3.4- MODELO GRÁFICO DO CONSUMO DE ENERGIA

Em sala de aula, ocorreu uma discussão com alguns alunos acerca do assunto “apagão” provocado pela crise energética do ano de 2001. Através da televisão, as empresas responsáveis pelo setor, apresentavam gráficos de consumo diário, ao longo de horas, da quantidade de energia gasta pelo Estado de São Paulo. Foi solicitado aos alunos que procurassem por gráficos de consumo de energia, sendo que um dos alunos apresentou o gráfico abaixo:

Figura 25: Utilização de Energia



O reconhecimento e familiarização com o problema em função dos aspectos social, econômico e político da situação foi também discutido em sala de aula.

A pergunta norteadora dos trabalhos foi: “qual a quantidade de energia elétrica gasta nos dois dias representados pelas curvas do gráfico”. Foi decidido que as estratégias para a obtenção de possíveis respostas para a pergunta seriam independentes do dia. Então ocorreu a primeira simplificação em relação ao problema, por parte dos alunos: o interesse seria pelos dados do dia 10/05/01, a curva “azul” do gráfico.

A primeira discussão deu-se quanto aos aspectos físicos das grandezas representadas no gráfico. Os alunos observaram que o eixo das abscissas era dado em horas, portanto tempo. O eixo das ordenadas representava a potência.

Duas variáveis haviam portanto sido identificadas no problema:

- A variável “t” representaria a grandeza tempo.
- A variável “P” representaria a grandeza potência.

A pergunta referia-se ao consumo de energia, enquanto o gráfico representava potência. A aluna Márcia observou que “a potência era a variação da energia com o tempo”.

Desta forma uma nova variável denotada por “E” representando a grandeza energia incorporavasse ao problema. Neste ponto, foram discutidos, novamente, os conceitos de variável dependente e independente.

Na discussão, foi observado que a aluna Márcia se referia a uma taxa relacionada, ou que a potência, pontualmente, discretamente, em cada unidade de tempo, nada mais era do que uma derivada, dada por $P(t)=E'(t)=dE/dt$. Novamente, um dos aspectos positivos do método realça-se, ou seja, a sua não linearidade, proporcionava o enfoque em conceitos vistos no início do curso. Os objetivos, contratados, por professor e alunos, desde o início do curso, não eram somente o de resolução de problemas. Os objetivos envolviam análise conceitual de todos os aspectos do Cálculo. Nesta análise conceitos eram portanto vistos e revistos, a cada momento sob um prisma e "maturidade conceitual" típicas de cada aluno e de cada momento do curso. Desta forma, uma análise que possuía apenas aspecto gráfico, passava a possuir aspectos físicos.

A discussão prosseguiu em termos de unidades dimensionais, senão vejamos: o eixo das ordenadas dimensionalmente era dado por megawatts e o eixo das abscissas dimensionalmente dado por horas. Foi discutido que Potência=$\Delta E/\Delta t$, onde E era a energia e t o tempo.

Neste ponto, o aluno Ricardo observou que "se multiplicássemos as dimensões dos dois eixos teríamos a dimensão de energia, megawatts-hora". O objetivo inicial da proposta, a análise gráfica de uma situação física havia ocorrido. A partir desta idéia, formulamos a hipótese: o problema poderia ser resolvido pelo cálculo de áreas conhecidas e como o "gráfico era quadriculado", como observou a aluna Maria, "facilitaria este cálculo".

Apresentava-se o momento de um tratamento numérico a um dos assuntos do Cálculo, ou seja, a área abaixo de uma curva.

Incorporou-se ao modelo a variável "i", que representava a quantidade de retângulos cujas áreas seriam calculadas e somadas. Para esta aproximação o ponto amostral t_i^* foi escolhido como o sendo o ponto médio do subintervalo $[t_{i-1},t_i]$. Para este caso, foram escolhidos 12 subintervalos, ou seja, os sub-intervalos possuíam acréscimo de $\Delta t=2$ horas no eixo das abscissas.

Dentre os vários valores levantados pelos alunos, apresentaremos:

Energia=[P(1) + P(3) + P(5) +...+P(23)]Δt

Energia=[1750+1700+1700+2300+2700+2800+2000+2600+2700+2900+ 2500+1900] x 2=55100 Megawatts-hora, proporcionando um tratamento numérico-discreto a um problema de Cálculo.

A partir desta situação-problema foi feita a pergunta: “como melhorar este valor de aproximação para a energia consumida?”.

Foi observado por um grupo de alunos que se “fizéssemos a soma com 24 retângulos o resultado seria melhor, pois o lado superior do retângulo se aproximaria da curva e uma quantidade menor de erro ocorreria e que quanto mais retângulos fossem colocados no cálculo, melhor seria o resultado”.

Além disso, mesmo não fazendo parte da ementa do curso, foi discutido com os alunos a aproximação da função, pela aresta de um trapézio (Método dos Trapézios) e por segmentos de parábolas (Método de Simpson). Caso existisse tempo, este problema seria implementado através de programas escritos no ambiente MatLab ou Modellus, através das Regras de Trapézio e Regra de Simpson, o que efetivamente não ocorreu em função da exigência do conhecimento de estruturas de controle dos programas, e em função de conhecimento de aproximações por séries de potências para entendimento destes métodos numéricos, por parte dos alunos, bem como o aspecto que se tornou restritivo: o tempo em função das atividades propostas. Observamos que estes métodos são analisados na disciplina Métodos Numéricos.

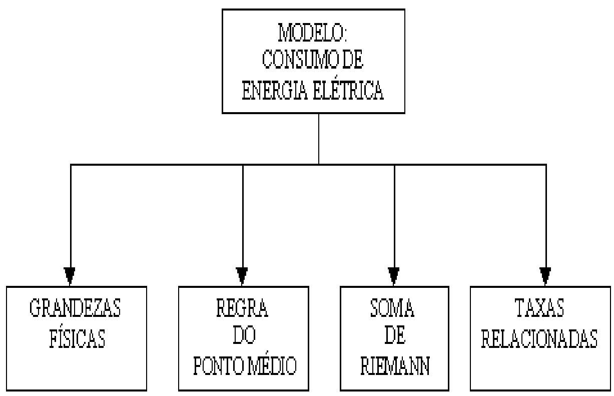
O momento era propício para a introdução do coneceito de área abaixo da curva, sob a forma da Soma de Riemann e, com a conseqüente definição da integral como símbolo para esta soma:

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}$$

Para validação numérica dos resultados deveríamos possuir os dados reais da Companhia de Energia Elétrica, os quais não dispúnhamos. Porém, a idéia fundamental do modelo era a aproximação da área abaixo da curva por áreas de retângulos e a prova geométrica deste fato foi feito pela Soma de Riemann.

Figura 26: Conceitos abordados a partir do modelo Energia Elétrica



5.3.5- MODELO DO AQUECIMENTO E RESFRIAMENTO DA ÁGUA

Durante o curso, os alunos foram divididos em equipes e um modelo foi escolhido pelos alunos para ser trabalhado por todas as equipes. Novamente, observa-se que, embora o modelo estivesse revestido de considerável simplicidade, o objetivo da pesquisa, do trabalho em grupo, com a conseqüente geração de discussões, a tomada de decisão e autonomia dos alunos esteve presente.

As atividades mostradas na seqüência reproduzem, de forma fiel, o desenvolvimento dostrabalhos, por parte dos alunos.

Observa-se que a escolha da atividade (modelo de resfriamento) ocorreu em função de que a mesma é normalmente executada na disciplina Física Experimental, ministrada no mesmo semestre. Porém, em tal disciplina, o enfoque é para a obtenção dos dados e não em relação à análise dos problemas em relação às ferramentas do Cálculo.

Segue o desenvolvimento, na íntegra, efetuado por um grupo de alunos:

"AQUECIMENTO E RESFRIAMENTO DA ÁGUA

Este estudo foi dividido em duas frentes: a primeira do Aquecimento e a outra do resfriamento, para que haja uma melhor análise do problema, sem que se perca a sua direção.

AQUECIMENTO

1. Coleta de Dados

Foram utilizados 250 ml de água em um béquer, com temperatura inicial de água de 27ºC (temperatura do ambiente), e colocamos o sistema para ser aquecido, medindo sua temperatura a cada minuto e obteve-se a seguinte tabela:

Tabela 11: Aquecimento da Água

TEMPO(MINUTO)	TEMPERATURA (ºC)
0	27
1	33
2	40
3	46
4	52
5	58
6	64
7	69
8	74
9	78
10	83
11	87
14	98
15	98
16	98

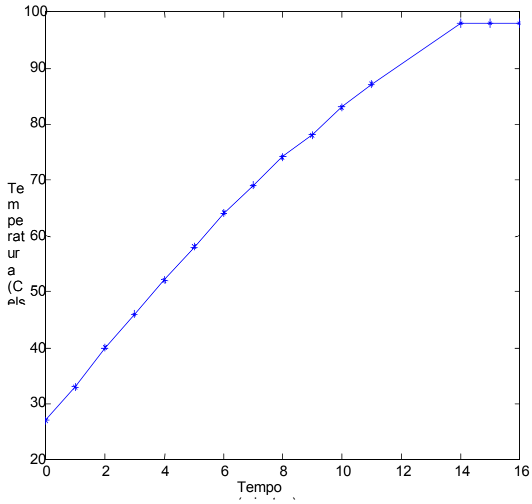
2- HIPÓTESE

Ao observamos este problema imaginávamos como sendo um problema de 1º Grau, dando assim uma reta, pois ao recolher todos os dados, percebemos que a variação da temperatura é pequena, até o tempo igual a 14 minutos, porque após este tempo, ela se tornará uma constante. São consideradas também o descarte de impurezas e outros parâmetros como variação de temperatura e pressão.

3-COMPROVAÇÃO E CONCLUSÃO

Foram feitos gráficos no programa Origin, que através dos pontos mostrados na tabela 1, poderíamos chegar à função que o sistema está obedecendo. Primeiramente, fizemos o gráfico da temperatura versus tempo, como sendo uma função do primeiro grau, conforme gráfico abaixo:

Figura 27: Aquecimento da Água



Pela análise da relação qualitativa entre erros experimentais e o coeficiente de correlação observou-se o valor R=0,99, e foi verificado que o nível de erro seria na faixa de 10%, ou seja, uma situação experimental ruim ou que esta função será imprópria para reger o sistema. Então, com os mesmos pontos da tabela, fizemos outro gráfico, mas considerando como uma equação do segundo grau, e a relação qualitativa do "corr" (coeficiente de correlação), melhorou para R=0,999, e com isso, caiu para 1% o nível provável de erro, ou seja, uma situação experimental boa.

Pelo estudo através de softwares, foi concluído que este sistema é regido pelas seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}13x^2 + 6{,}96x + 26{,}57 & \text{se } 0 \leq \text{x} < 14 \\ 98 & \text{se x} \geq 14 \end{cases}$$

Ao analisarmos a função, matematicamente, percebemos que no ponto em que o tempo é igual a 14, será um ponto crítico da equação pois sua derivada foi igual a zero, o que caracteriza fisicamente como uma mudança de estado da água, neste caso, de líquido para gás.

Executando o limite:

$$\lim_{x \to 14^-} f(x) = -0{,}13x^2 + 6{,}96x + 26{,}57 = 98{,}5$$

1

$$\lim_{x \to 14^+} f(x) = \lim_{x \to 14^+} 98 = 98$$

Pela primeira derivada, observamos que se trata de uma função crescente, pois se pegarmos qualquer valor entre os pontos **,** $0 \le x < 14$**,** seus valores serão sempre maiores que zero.

Ao derivarmos pela segunda vez, observamos a concavidade da função original, como f"(x) é menor que zero, comprovamos que a sua concavidade será voltada para baixo".

Algumas observações devem ser feitas em relação a este trabalho desenvolvido por um grupo de alunos. A primeira observação é quanto à composição do grupo. Dos seis alunos, cinco eram dependentes em Cálculo I. O interesse demonstrado evidenciou-se nas consultas ao professor em sua sala de atendimento. Outra observação é quanto a alguns pontos analisados pelos alunos durante o trabalho nesta fase inicial. Observamos que os trabalhos eram enviados aos alunos para as eventuais correções. A classificação dos alunos em relação à função modeladora, como sendo de segundo grau é incorreta, visto que, a curva de aquecimento da água é uma função linear . A etapa de validação não foi devidamente realizada pelo grupo, com pesquisas relativas ao fenômeno. Erros de medida, variações no fluxo de calor podem provocar erros na etapa de coleta de dados. Porém, aspectos de interligação de uso de softwares matemáticos, física experimental e Cálculo foram verificados nesta atividade. Os alunos utilizaram conceitos de limites, aplicação de primeira e segunda derivada para estudo do comportamento da função modeladora.

Outro aspecto a ser analisado e que resultou em discussão durante a apresentação dos trabalhos foi: Ao analisarmos a função, matematicamente, percebemos que no ponto em que o tempo é igual a 14, será um ponto crítico da equação pois sua derivada foi igual a zero, o que caracteriza fisicamente como uma mudança de estado da água, neste caso, de líquido para gás

Em aula, os alunos observaram que no ponto t=14 minutos a derivada não existia, ao contrário do que afirmou o grupo, visto que as derivadas à esquerda e à direita do ponto não eram iguais.

Para o mesma atividade outro grupo desenvolveu a seqüência que se segue.

"a) Hipótese:

Sabe-se que através de consultas na literatura que a curva de ebulição da água é uma função linear.

Partindo da equação geral da reta: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{T_8 - T_6}{8-6} = \dfrac{70-60}{8-6} = 5$

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y-29=5(x-0)$

$y=5t+29$, fazendo $x=t$, onde t é a temperatura.

Pela equação observa-se que à medida que o tempo aumenta, a temperatura aumenta também. Assim, quando o tempo tende ao infinito, a temperatura deveria tender ao infinito, no entanto, não é isso que acontece na prática. Quando a temperatura atinge 96º C, por uma lei físico-química de mudança de estado da matéria, a temperatura se estabiliza. A partir daí, a reta que representa a função muda: coeficiente angular igual a zero.

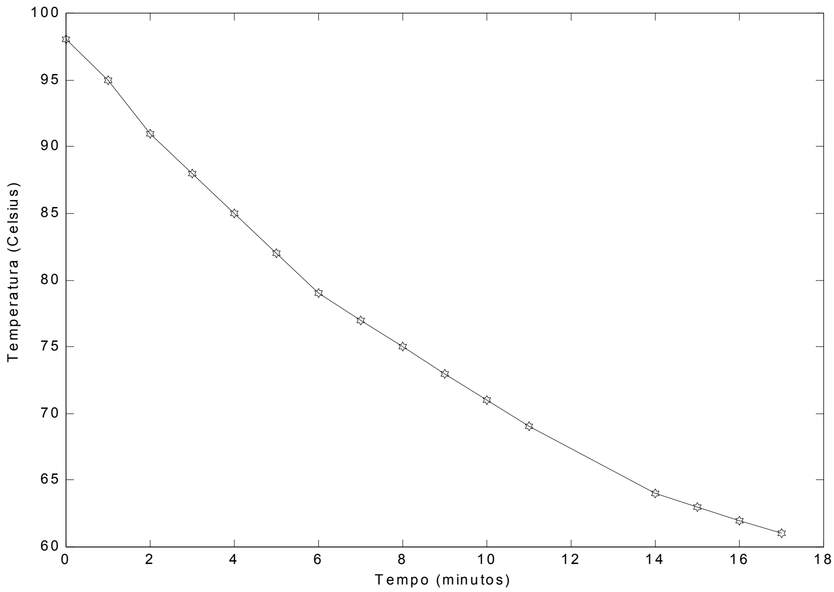
Desta forma: $T = \begin{cases} 5t + 96, \text{se t} \leq 14 \\ 96 \;\; se \;\; \text{t} > 14 \end{cases}$

Foram utilizados 250 ml de água em um béquer, com temperatura inicial da água de 98º C, e colocamos o sistema para ser resfriado com gelo, medindo sua temperatura a cada minuto e obteve-se a tabela:

Tabela 12: Resfriamento da água

TEMPO (MINUTOS)	TEMPERATURA (ºc)
0	98
1	95
2	91
3	88
4	85
5	82
6	79
7	77
8	75
9	73
10	71
11	69
14	64
15	63
16	62
17	61

Figura 28: Resfriamento da água



A partir desta tabela, através de ambientes informatizados, chegamos a uma função do tipo T(t)=46,01+52,32 exp(-t/13,41)" .

Observa-se que a obtenção desta curva foi realizada em ambiente informatizado, mostrando um dos "perigos" do uso dos softwares matemáticos, a obtenção de um resultado sem reflexão matemática. Mas, mesmo neste ambiente, em muitas situações a gama de modelos de ajustes disponíveis no software é limitada, e em muitas situações, o aluno terá que montar a função de ajuste, fato que exige conhecimentos teóricos de comportamento de funções.

5.4- A UTILIZAÇÃO DE AMBIENTES INFORMATIZADOS

Em relação ao uso de ambientes informatizados, não deve-se buscar em nossos alunos apenas a capacidade de realizar tarefas, que sem dúvida nenhuma seriam resolvidas mais rapidamente e, acertadamente, pelos computadores. Ao se basear o ensino na exposição de longos algebrismos, não perde-se um tempo precioso que poderia ser destinado à teoria e à aplicação?

A proposta de trabalho não deve-se reduzir a uma proposta tecnicista de que apenas deve ser utilizada a informática no Cálculo, porque os computadores estão por toda a parte e por certo deveriam estar no ensino de Cálculo. Seria apenas a mudança de um instrumento, do quadro-negro para a tela de um computador, do lápis para um teclado ou mouse.

Palis (1995, p.25) cita a opinião de Hughes-Hallet, quando afirma que:

> “ Os problemas fundamentais em nossos cursos de Cálculo não são de tecnologia(...) são mais profundos e amplos do que estar defasados em relação à tecnologia(...) uma conspiração não explicitada entre nós e os alunos removeu a maior parte, se não de todo, do pensamento matemático de nossos cursos de Cálculo.”

Não trata-se apenas de se implantar a informática nos cursos de Cálculo. O problema é estabelecer uma metodologia de ensino-aprendizagem baseada neste ambiente. O que se discute e que deve ser realçado, é a diversidade de possibilidades que o computador oferece em relação a um ambiente de aprendizagem de Cálculo.

O processo de inserção dos ambientes informatizados em relação ao Cálculo é de dificuldade acentuada, visto que, os professores não criam situações onde o Cálculo poderia ser conceituado em tais ambientes. Não é apenas uma questão de fazer e sim como fazer. Como utilizar a informática de modo que o aluno reflita e conceitue?

Durante a etapa inicial deste trabalho, ocorreu a procura por referências de artigos sobre a utilização de softwares em Cálculo Diferencial e Integral, sob uma perspectiva construtivista, mas não são muitos os trabalhos que enfocam este aspecto.

Em relação à utilização de softwares matemáticos é quase inexpressiva a produção de livros de Cálculo que valorizem situações de aprendizagem que envolvam ambientes informatizados. Livros clássicos utilizados em cursos de Cálculo como Guidorizzi, Leithold, Swokowsky não abrangem situações de uso de ambientes informatizados. Em particular, nesta proposta de trabalho, como fonte bibliográfica foram utilizados os livros Cálculo e Aplicações de Hughes-Hallet, Cálculo de James Stewart, Calculo-Um novo horizonte de Howard, os quais já apresentam muitas situações de uso de ambientes informatizados, constituindo-se em excelente referência para professores que queiram associar softwares matemáticos ao Cálculo.

5.4.1- A UTILIZAÇÃO DE AMBIENTES INFORMATIZADOS-COMPORTAMENTO DE FUNÇÕES

Palis (1995, p.27) em artigo publicado na revista "Temas e Debates" que apresentava uma coletânea de artigos com o título Ensino de Cálculo, cita dois autores Davis & Andersen que defendem que o aluno deveria ser exposto a uma visão mais ampla da Matemática, integrada por diversos elementos espaciais, aritméticos, algébricos, verbais, programáticos, lógicos, intuitivos, relacionados ao mundo exterior, auto-gerados, qualitativos, quantitativos, etc...

No mesmo artigo, cita outro autor, Artigue, que defende um melhor equilíbrio entre as diferentes representações para os conceitos, em particular, a preocupação com um melhor uso do contexto gráfico.

A autora constata que a utilização de novas tecnologias computacionais pode facilitar a exploração de pontos de vista complementares no estudo de equações diferenciais o que a levou a um estudo das necessidades e possibilidades da incorporação das tecnologias computacionais em cursos básicos universitários de Matemática, os quais abrangem o estudo de funções.

Em nossa pesquisa, a utilização de ambientes computacionais ocorreu, prioritariamente, no estudo de funções e dos operadores do Cálculo aplicados à estas funções. O objetivo é que a partir de situações gráficas e tabelares, os alunos conseguissem generalizar sobre o comportamento das famílias de funções estudadas no Cálculo, ou seja, funções polinomiais, racionais, exponenciais, algébricas, logarítmicas e trigonométricas, ou de uma forma geral, funções transcendentes. Além disso, os ambientes foram utilizados para uma melhor visualização dos operadores diferencial e antidiferencial.

A primeira visão que o aluno possui do software matemático é que ele irá resolver todos os seus problemas ou simplesmente ser um instrumento para conferência de resultados. Em muitos alunos esta visão pragmática permanece durante todo o curso. Neste sentido, existe a grande responsabilidade do professor em criar situações de uso dos softwares que levem os alunos a investigar, refletir e tirar suas conclusões e principalmente situações em que somente o programa computacional não resolva tais situações matemáticas.

No tocante à funções, pode-se simplesmente através do software, digitar a forma da função e rapidamente seu gráfico será obtido. É claro que tal atitude possui o atrativo da simplicidade e rapidez. Softwares matemáticos com potencialidades gráficas são, é claro, facilitadores do desenvolvimento dos sub-conceitos de função.

Em cursos de Cálculo, o esboço de funções (sem uso de softwares) é uma atividade, um exercício freqüentemente utilizado. Esta atividade é importante não como um fim em si, mas sim pelo uso dos conceitos do Cálculo Diferencial envolvidos no traçado de um gráfico, visto que são abordados limites, associação de derivadas ao comportamento crescente ou decrescente de funções, assíntotas horizontais e verticais, concavidades, continuidade, descontinuidade e diferenciabilidade.

Quando se fala que softwares gráficos facilitam o desenvolvimento de funções, isto não se refere somente à rapidez do traçado e sim ao universo, à gama de funções que podem ser estudadas e que, se traçadas a mão, geraria uma dificuldade considerável. Pode-se estudar, portanto, o comportamento de funções polinomiais de grau mais elevado ou funções transcendentes de difícil fatoração.

A utilização de ambientes gráficos no tratamento de funções permite facilmente a variação de parâmetros e a conseqüente possibilidade de análise e generalização do comportamento matemático de famílias de funções. Observa-se que o conhecimento do comportamento de funções é fundamental para o engenheiro que trabalha com dados obtidos experimentalmente em laboratórios, e que através de um software matemático de ajuste de curvas, tenta encontrar a melhor função de ajuste ao fenômeno estudado.

O aluno obtém os dados, plota-os através de um software e depara-se com um problema conceitual, de comportamento de famílias de funções. Não sabe que tipo de função escolher ou até mesmo formar a família da função para que o ambiente computacional especifique a função.

Freqüentemente o que se observa é que o aluno fica "chutando" vários tipos de funções disponíveis no ambiente e escolhe através de um processo de tentativas, aquela que possui a melhor correlação. Desta forma, observa-se a importância da criação de situações onde, através de variações de parâmetros, o aluno entenda as alterações de comportamento que ocorrem em cada tipo de função e que saibam generalizar comportamentos funcionais.

Por exemplo, na família de funções de grau dois, a família de funções é constituída por y=a*(x+b)^2+c. Através do ambiente computacional, o aluno varia os parâmetros a, b ,c e investiga o efeito geométrico resultante. Durante a própria escolha de estratégia de exploração é exigido do aluno um trabalho de reflexão (Gravina,1998; Santarosa,1998).

Paulatinamente, o aluno constrói as relações que vão permitir que ele concretize mentalmente o gráfico de qualquer curva da família de funções investigadas, simplesmente porque já fundamentou a construção de curvas a partir de movimentos geométricos, aplicados à função básica ou original, no caso $y=x^2$, como movimentos de: translação vertical ou horizontal, dilatação ou contração nas direções horizontal e vertical. Através dos recursos computacionais, o aluno plota vários elementos da família de funções e explora o tipo de movimento aplicado ao gráfico da função básica.

Após a elaboração dos modelos matemáticos e experimentação nos ambientes informatizados, os conceitos do Cálculo envolvendo funções polinomiais, exponenciais, trigonométricas, entre outras, podem e foram sistematizados.

Para a manipulação de parâmetros de funções foi proposto que os alunos trabalhassem a função $y=x^2+4$. Esta etapa sugeria que o aluno escrevesse a função na forma $y=f(x)+c$ e $y=f(x+c)$, variando valores positivos e negativos de c, e depois plotava através de um ambiente gráfico e analisava as saídas da função . Para esta situação-problema foi utilizado o Graphmatica.

A função original $y=f(x)$, de uma família de funções, pode ser denominada como "função prototípica". Borba, Meneghetti & Hemini (1997, p.69) citam Confrey & Smith sobre a definição de funções prototípicas, como sendo funções do tipo $y=ax$, $y=a^x$, $y=\log(x)$, entre outras. Através de variação nos parâmetros da função original, as várias construções geométricas da família de funções podem ser obtidas, através de movimentos de geométricos como translação e reflexão . Para esta atividade, sugere-se o uso de um quadro, aqui denominado, Quadro de Movimentos Geométricos. Na seqüência, são apresentados os resultados gráficos, obtidos pelos alunos, da função $y=x^2$ e a tabela de análise dos resultados obtidos. Na mesma linha de trabalho, foi solicitado aos alunos, o estudo de outras famílias de funções, com as atividades matemáticas listadas na tabela 13.

Tabela 13:Quadro de Movimentos Geométricos

Operação Algébrica efetuada na função	Acréscimo de constante c>0 à f(x)	Subtração de constante c>0 à f(x)	Acréscimo de uma constante c>0 à variável independente x	Subtração de uma constante c>0 à variável independente x
Função Original	$F(x)=x^2$	$F(x)=x^2$	$F(x)=x^2$	$F(x)=x^2$
Função resultante	$Y=F(x)+c$ $Y=x^2+4$	$Y=F(x)-c$ $Y=x^2-4$	$Y=F(x+c)$ $Y=(x+4)^2$	$Y=F(x-c)$ $Y=(x-4)^2$
Exemplos Gráficos	Gráfico a	Gráfico b	Gráfico c	Gráfico d
Efeitos Geométricos Obtidos	Translação do Gráfico c unidades para cima	Translação do Gráfico c unidades para baixo	Translação do Gráfico c unidades para esquerda	Translação do Gráfico c unidades para direita

Figura 29: Movimentos Geométricos

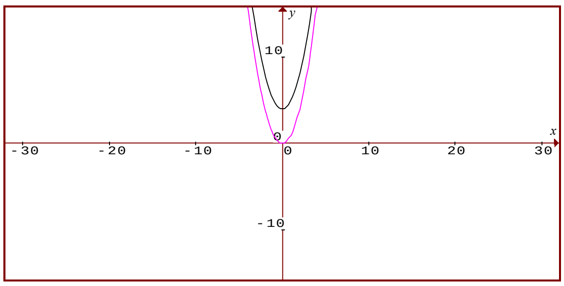


gráfico a)

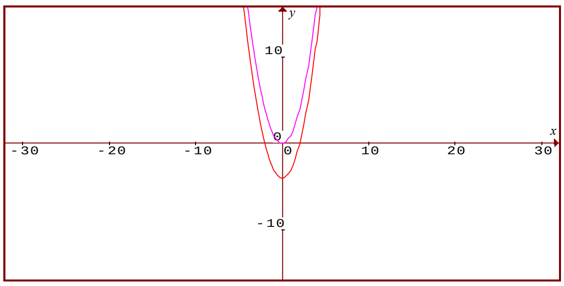


gráfico b)

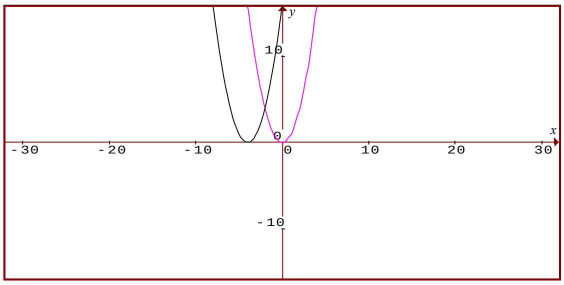


gráfico c)

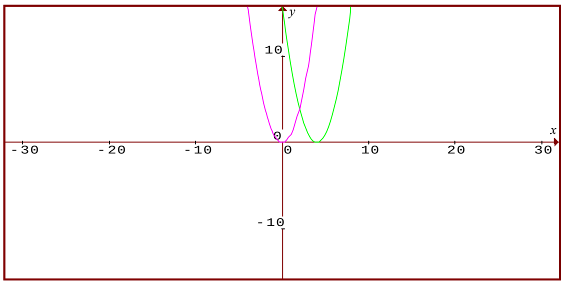


gráfico d)

Durante o curso, outras situações de construções de funções a partir de funções originais foram abordadas, e desta forma, comportamentos de funções logarítmicas, exponenciais e racionais foram sistematizados também, a partir de mudanças geométricas provocadas por movimentos de translação e reflexão. Em função do tempo e do número de atividades propostas o estudo do comportamento de funções trigonométricas e suas inversas não esteve presente no curso de Cálculo proposto.

Mas, a utilização de softwares pode levar a resultados desastrosos, caso o aluno não possua os conhecimentos matemáticos necessários ao estudo de uma determinada função.

Os alunos podem fazer inferências incorretas baseados em alguns objetos em telas de computador mais facilmente do que apoiados nos objetos análogos produzidos à mão, pois o ato de gerar os objetos e operar com eles com lápis e papel pode ajudar a evitar certos erros. Neste sentido, pode ser esboçado no papel o comportamento total de uma função, com raízes, pontos críticos, intervalos de crescimento, assíntotas, etc, sem a necessidade do uso de uma escala. O software necessariamente trabalha com uma escala padrão (que pode ser alterada) e freqüentemente precisa-se de várias janelas de visualização para se ter uma visão completa do comportamento da função.

O próximo item aborda situações em que as respostas dos softwares podem levar à análises errôneas por parte dos alunos.

5.4.2- ERROS EM AMBIENTES INFORMATIZADOS

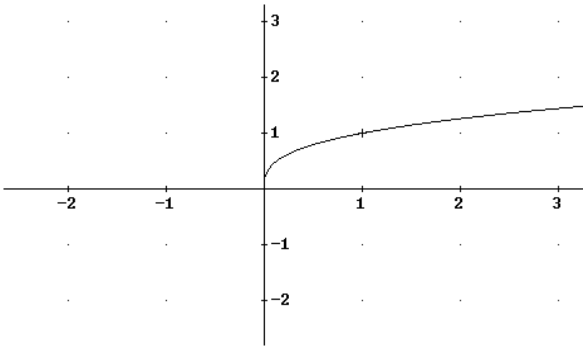
Os alunos são possuidores de uma noção errônea: “computadores não cometem erros!”. Ao ministrar aulas em ambientes informatizados deve-se alertar o aluno quanto a esta consideração e possibilitar situações que incorram em erros, de tal forma que os alunos possam refletir sobre os resultados obtidos.

Foi proposto aos alunos que utilizassem os programas Derive e Graphmatica e que plotassem o gráfico da função $y = \sqrt[3]{x}$.

A idéia era provocar um “erro gráfico” e que este erro provocasse processos de reflexão quanto a conjuntos domínio e imagem da função.

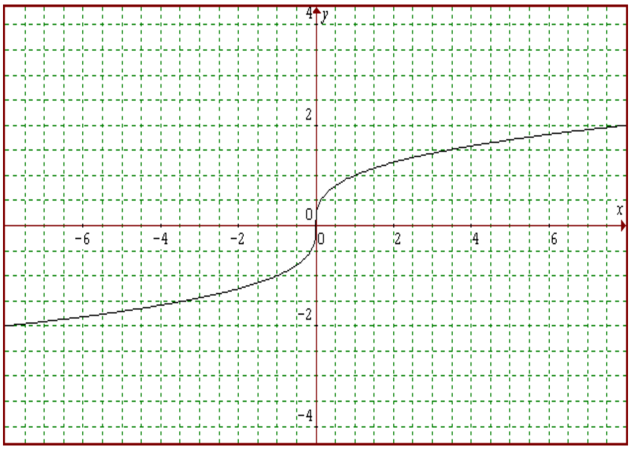
Alguns softwares matemáticos (neste caso, foi utilizado o ambiente algébrico-gráfico Derive) dispõem a imagem abaixo:

Figura 30:Comportamento de $y = \sqrt[3]{x}$ no software Derive



Outros (utilizado, neste caso, o Graphmatica) dispõem a imagem correta:

Figura 31: Comportamento de $y = \sqrt[3]{x}$ no Graphmatica



Foi solicitado aos alunos que comparassem os dois gráficos e que verificassem qual gráfico era o "correto". Nesta etapa, estariam refletindo sobre campos de validade da função e como disse o aluno Ederson "o segundo gráfico é o correto, visto que não há valores negativos de x que invalidam a existência da função". Observaram a possibilidade de que os dois gráficos estivessem corretos e que a diferença observada era devido a um problema do software.

Alguns alunos executaram operações algébricas com a função no campo negativo e concluíram que "não havia problema nenhum, nenhum problema que invalidasse a função em relação à valores à esquerda do zero". Nesta etapa, evidenciou-se o poder do ambiente gráfico quanto à variação de parâmetros e à facilidade de escrever a mesma função sob formas algébricas diferentes.

O aluno Mauro, que fazia novamente a disciplina, criou uma nova forma para a função, a saber: $f(x)=(x . |x|^{(1/3)})/ |x|)$., chegando ao gráfico completo da função original. Outro aluno escreveu a função original como $y=e^{\ln(x)}$, mesmo antes que o assunto funções inversas fosse efetivamente abordado em aula, já demonstrando este conhecimento.

Uma das possibilidades de uso de ambientes informatizados é a utilização dos erros, de comparações entre os resultados de vários softwares, em atitudes de reflexão com conceitos já adquiridos pelos alunos e, portanto, reconstruídos e aplicados em situações abstratas, porém, reais na tela de um computador.

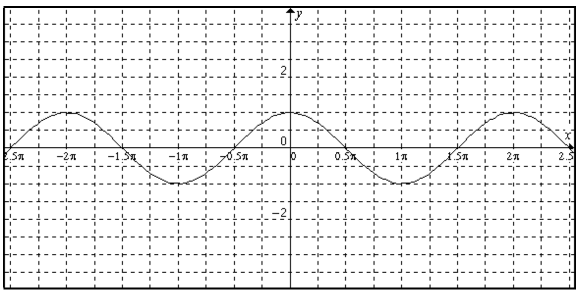
Foi discutido com os alunos o fato de que em alguns ambientes a função é computada como $e^{(1/3)\ln x}$, e ln x não está definido para x<0. Logo, somente a metade do gráfico é produzida.

O aluno deve estar atento aos resultados obtidos através dos softwares, aliando seu conhecimento matemático à praticidade e potencialidade do programa computacional. No caso em questão, a reflexão deveria ser em relação ao domínio da função, de tal forma analisada a questão seria verificado que para valores de x negativos não existiria nenhuma restrição para raízes cúbicas.

O software pode proporcionar um resultado matemático, mas isso lhe é uma ação direta, podendo não ter nenhuma relação com o aluno que opera o software, a não ser o fato de operar o programa. O seu verdadeiro poder dá-se sentido da interiorização de um conhecimento, proporcionando a abstração matemática em função de suas potencialidades gráficas e numéricas.

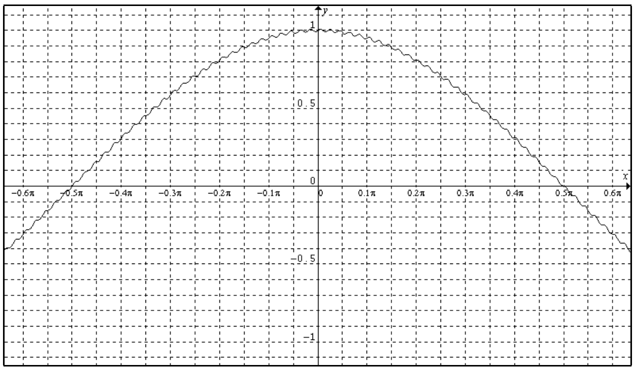
Outro exemplo de visualização incorreta do comportamento de uma função foi estudado a partir do gráfico de f(x)=cos(x) +(1/100)sen(100x) e foi solicitado aos alunos a discussão do comportamento da função.

Figura 32: f(x)=cos(x) +(1/100)sen(100x)



O aluno Marcio observou que o gráfico deveria parecer-se muito com o gráfico da função seno, talvez acrescido de algumas oscilações, mas outro aluno observou que este comportamento não é resultado apresentado pelo software. Para vermos mais claramente a forma das oscilações acrescidas na função utilizamos o recurso do “zoom”.

Figura 33: "zoom" em f(x)=cos(x) +(1/100)sen(100x)



A reflexão feita pelo aluno deveria ser da ordem: a razão para este comportamento está no fato de que o segundo termo (1/100)sen(100x) , é muito pequeno em comparação com o primeiro cos(x). Desta forma, precisávamos de outra janela visualizando a função mais de perto, para vermos a verdadeira natureza da função. Ao fazer tal análise os alunos refletiram sobre amplitudes e freqüências de funções trigonométricas, podendo alterar os parâmetros que influenciam a amplitude e freqüência, bem como criar ângulos de fase em suas funções trigonométricas.

A ação do aluno em relação à mudança de escalas e outros parâmetros das funções através dos softwares matemáticos viabiliza uma incorporação mais ampla do ponto de vista gráfico ao tratamento algébrico e numérico das funções.

Ao proporcionar uma atividade desta natureza o professor faz com que o aluno reflita em relação a valores máximos e mínimos de uma função, aos valores de amplitude de funções e proporciona a ele um visão de comportamentos predominantes sobre partes de funções e sobre família de funções. Pode-se proporcionar aos alunos, análises tabelares e gráficos, por exemplo, do comportamento intervalar de predominância de funções exponenciais e polinomiais, ou funções logarítmicas e polinomiais.

Em muitas situações, a clareza de detalhes é exigida e o trabalho para se conseguir esta clareza é grande e devemos recorrer ao uso de softwares. Neste sentido, Pimenta & Oliveira (2000, p.4) citam Brum :

> “Como se sabe, as disciplinas que compõem o ensino de exatas e também quaisquer outras que se utilizem recursos matemáticos em seus arcabouços explanatórios carregam consigo dificuldades de elaboração em loco de gráficos, figuras, tabelas, etc – pois nem sempre são elaboradas com a clareza de detalhes e com a qualidade necessárias para sua compreensão – o desperdício de tempo na elaboração do quadro negro com inscrições, figuras, etc. Os processadores matemáticos são capazes de suprir estas deficiências, transformando o ambiente de ensino incorporando a ele qualidade e produtividade.”

Outra situação interessante e realizada no curso de Cálculo foi o estudo em ambientes informatizados de funções não diferenciáveis num dado ponto, como a função y=|x|, que não admite derivada em x=0.

Exercícios de diferenciabilidade dados em aula normalmente seguem a seqüência:

- nomea-se a função
- pede-se para fazer um esboço do gráfico
- verifica-se através de limites se a função é contínua ou não num dado ponto.

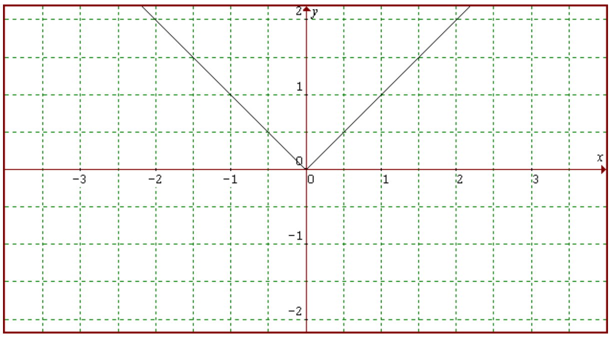
- Verifica-se através de limites também a diferenciabilidade.

Mas como foi realizado este exercício no laboratório de informática?

Foram utilizados dois ambientes para este fim: o Derive e o Graphmatica, visto que o objeto era obtermos o gráfico e a resposta da derivada no ponto x=0.

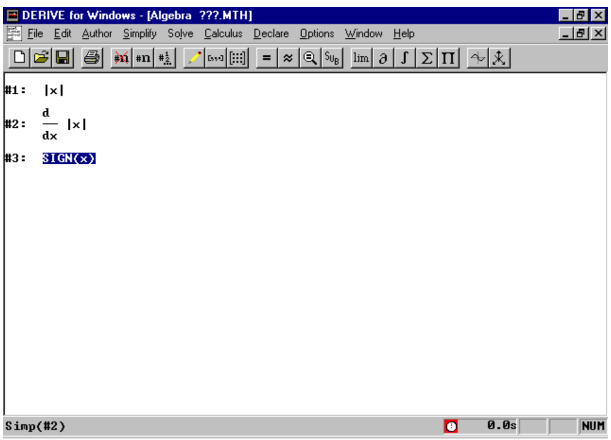
O uso do software para a função y=|x| produziu o gráfico da figura 34:

Figura 34: y=|x| no software Graphmatica



A utilização do software Derive, em termos algébricos, acerca da derivada para x=0 produziu:

Figura 35: Utilização do software Derive para y=|x|



Durante a utilização do software Graphmatica, para o cálculo desta derivada, surgiu a resposta que a função não é diferenciável, como realmente não o é. Neste ponto, a discussão iniciou-se. Foi questionado por um aluno: “Como dois softwares apresentam respostas finais totalmente diferentes a respeito de uma mesma função?”.

A função sgn(x), lê-se sinal de x, é definida da seguinte forma:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

A função modular y=|x|, unilateral à esquerda de de x=0 vale –1 e a derivada unilateral à direita de x=0 vale 1, confundindo-se com o comportamento da função sgn(x) armazenado na biblioteca de funções do programa e desta forma o software Derive apresenta um resultado “incorreto”.

Em ambientes informatizados ou não, o que acontece é que, quando os alunos encontram dificuldades para analisar este problema da diferenciabilidade em um ponto, verifica-se que o conceito imagem do objeto matemático derivada não foi obtido pelo aluno, ou obtido de forma incompleta. Caso o conceito da diferenciabilidade tivesse sido construído pelo aluno, a sua reflexão levaria às condições que torna uma função diferenciável num ponto, levaria à noção de derivadas como limites e, o próprio comportamento gráfico da função no ponto x=0, com inclinações de retas diferentes à esquerda e à direita do ponto x=0, levaria ao resultado correto de que a função não é diferenciável para x=0.

Apresentava-se uma situação em que a análise dos resultados dos softwares levava a processos de reflexão sobre os objetos matemáticos envolvidos.

Em relação ao exemplo da função modular, o aluno pôde encontrar diversas tangentes, portanto criou objetos “concretos”, com inúmeras inclinações, no mesmo ponto zero de abscissa. Visualmente, ele experimentou que estas tangentes tinham inclinações diferentes e, portanto, limites definidores da derivada diferentes, à esquerda e à direita do mesmo ponto zero de abscissa, invalidando o conceito de limite bilateral, visto que a derivada é um limite bilateral.

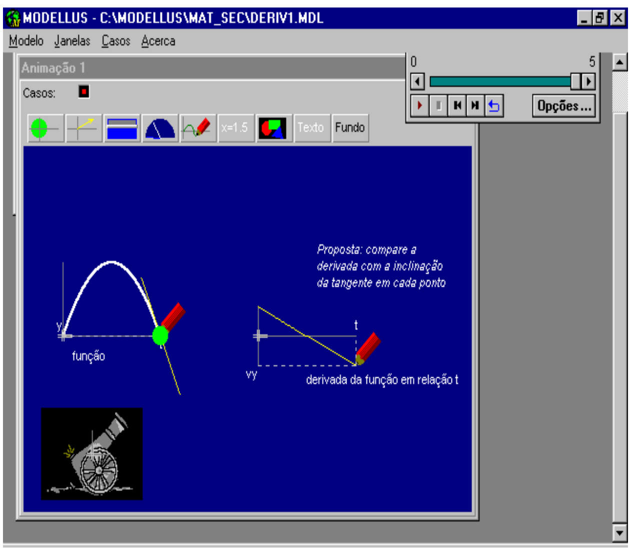
As situações descritas acima mostram um método de ensino-aprendizagem no qual o erro provoca os processos de reflexão matemática, fortalecendo os conceitos na tentativa de encontrar o porquê da incompatibilidade entre os resultados apresentados pelo ambiente informatizado e os resultados esperados. Mesmo em função da praticidade de obtenção de rápidas respostas evidenciou-se a necessidade de conhecimentos matemáticos necessários à análise dos problemas.

5.4.3- AMBIENTES INFORMATIZADOS NO ESTUDO DA DERIVADA

O conceito de derivada possui dupla interpretação: a inclinação da reta tangente e taxa de variação de uma função. O software Modellus utilizado em aula, permite múltiplas representações na mesma janela de animação: o aluno identifica e associa as variações da inclinação com o comportamento do gráfico da função derivada.

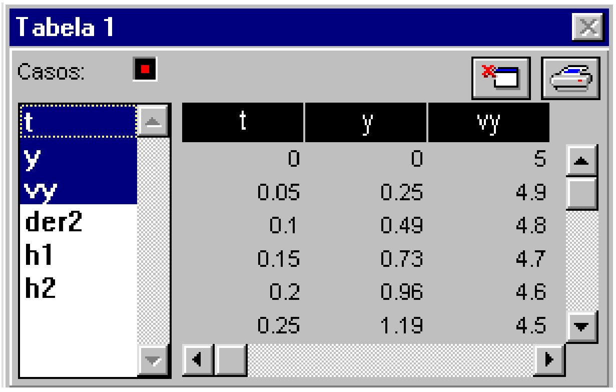
Na figura 36, tem-se o lançamento de um projétil com as representações de sua trajetória parabólica e o traçado da função linear que representa a sua derivada ou fisicamente sua velocidade. É um problema simples, estudado pelo aluno no mesmo semestre em Física I, no módulo cinemática, mas apesar de simples possibilita a observação visual e a conseqüente relação entre conceitos do Cálculo. Os alunos tiveram acesso à manipulação da equação que governa o movimento e pode associar que quando as tangentes são positivas os valores da derivada, ou seja, a velocidade possuem ordenada positiva e que quando as tangentes são negativas, as ordenadas são negativas e associar o conceito de ponto de máximo no exato momento em que a inclinação da reta tangente torna-se zero a velocidade cruza o eixo das abscissas.

Figura 36: Modelo Elaborado por um grupo de alunos



No modelo utilizado no ambiente Modellus o aluno variou a equação da trajetória do projétil, visualizando a influência destas alterações, simultaneamente, no gráfico da trajetória (gráfico acima à esquerda) e no comportamento da tangente, ou seja, gráfico da função velocidade (acima, à direita). Ao mesmo tempo, o software possibilitava a análise numérica através de uma tabela de dados mostrando os valores abaixo:

Figura 37: Tabela de dados- Modellus



t	y	vy
0	0	5
0.05	0.25	4.9
0.1	0.49	4.8
0.15	0.73	4.7
0.2	0.96	4.6
0.25	1.19	4.5

Segue um trecho de discussão no laboratório de informática:

Prof: "Notem que a função trajetória durante a primeira parte do movimento possui comportamento crescente e na segunda parte do movimento o comportamento passa a ser decrescente".

Aluna Mércia: "Mas professor, se a função possui este comportamento, crescente e decrescente, por que o gráfico da derivada é decrescente?".

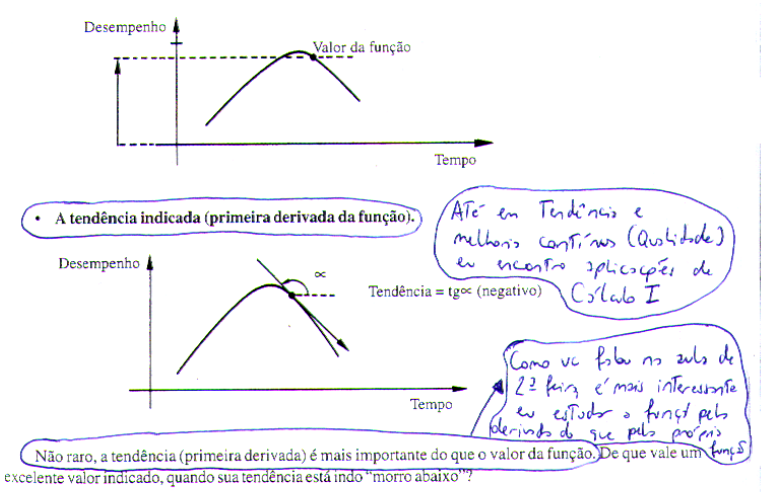
Neste ponto, a aluna se referia ao fato do gráfico das velocidades ser uma reta decrescente.

Aluno Mauro: "Eu acho que sei...olha o gráfico da velocidade realmente apresenta um comportamento de reta decrescente. Mas em termos de valor de tangente, ou de velocidades, ou seja taxa de crescimento, ele possui valores positivos e negativos, portanto, intervalos de crescimento e decrescimento."

A aluna Nelly observou, erroneamente: "Para mim, o valor máximo da derivada deveria ser no ponto de maior valor da função!".

Em aula posterior, o aluno Paulo que sempre demonstrou interesse durante todo o curso , que trabalha em uma empresa, em controle de qualidade trouxe dois gráficos utilizados por ele. As anotações na figura são do próprio aluno.

Figura 38: Tempo x Desempenho (gráfico exemplo sugerido por aluno)



A possibilidade de visualização simultânea dos gráficos da função original (inclusive com "traçado" de retas tangentes) e o gráfico da função derivada proporcionou uma discussão interessante sobre inclinações e valores relativos da derivada e seus significados.

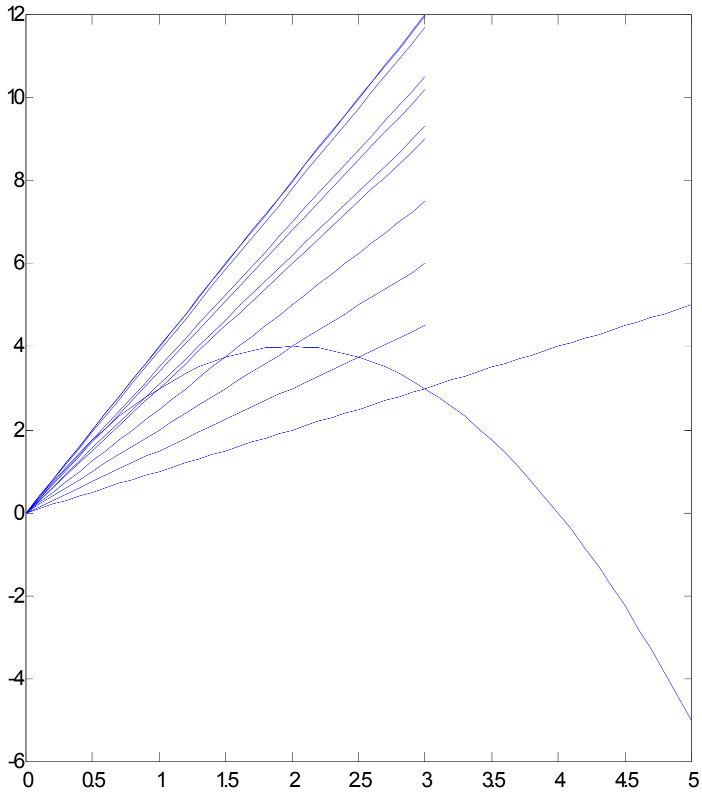
Ao apresentar o conceito da derivada como inclinação da reta tangente, a demonstração rotineiramente realizada em sala de aula é o desenho do esboço de uma curva qualquer no plano xy, posteriormente, o "traçado" de uma reta secante e a rotação desta reta, fixa em um ponto P, no sentido anti-horário de modo que o fator Δx tenda a zero e a secante tenda à reta tangente no ponto P. Esta explicação clássica, passada normalmente aos alunos através da cópia de informações do quadro-negro foi mudada. Através de um ambiente informatizado, foi feita a seguinte proposta de trabalho: “dada uma curva trace a tangente a esta curva num ponto P a partir de uma reta secante conhecida ou como fazer com que uma reta secante torne-se uma tangente?”.

É apresentada na seqüência uma resposta de um grupo de alunos que envolveu uma programação básica no ambiente MatLab. Realça-se, entretanto, que a maior parte dos alunos alterou os parâmetros "manualmente" gerando individualmente as retas secantes, no ambiente Graphmatica.

```
    x=0:.1:5;
    y=-x.^2+4*x;
    plot(x,y)
    hold on;
    y1=x;
    plot(x,y1);
n=input('entre com o número de retas secantes');
    for i=1:n
xf=input('entre com o valor de x final cada vez mais próximo de x inicial');
xi=0;
m=((-xf.^2+4*xf)-(-xi.^2+4*xi))/(xf-xi);
x=0:.1:3;
y1=m*x;
```

```
plot(x,y1)
    end
```

Figura 39:Visualização de retas secantes no MatLab



Neste ponto foi observado que poderia ser aplicada uma proposta semelhante a de Borba & Villarreal (1999, p.121) incluída no artigo Calculadoras Gráficas e Reoorganização do pensamento: "A transição de funções para derivadas", no qual a noção de derivada era introduzida a partir da seguinte questão: é possível fazer o gráfico de $y = x^2$ utilizando apenas retas?

Em função da etapa que nos encontrávamos na situação proposta, foi elaborada uma questão. “Como trata-se de uma reta tangente, a reta toca a curva em apenas um ponto.

Mas como relacionar este fato com a afirmação que para traçar uma reta são necessários dois pontos? E o segundo ponto para a determinação do coeficiente angular da tangente, não pertenceria à curva em questão?”

A resposta de alguns alunos foi que os pontos estavam muito próximos uns dos outros e mesmo fora da curva, o erro seria desprezível.

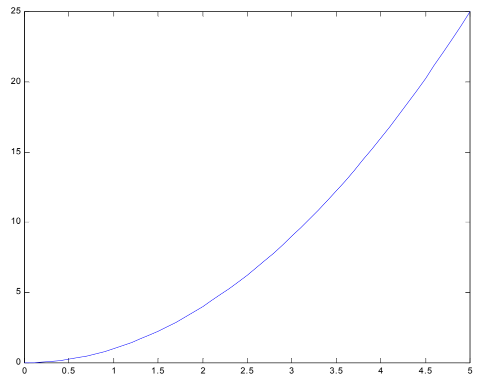
A introdução do termo erro abriu campo para a discussão de valores reais e valores aproximados para a variação da função, ou seja Δy e dy.

Mas, como ponto principal, estava em discussão o conceito de taxa de variação instantânea de uma função em um ponto, que foi dita ser a inclinação do gráfico num determinado ponto. Foi observado que esta definição incluía um fator de linearidade local.

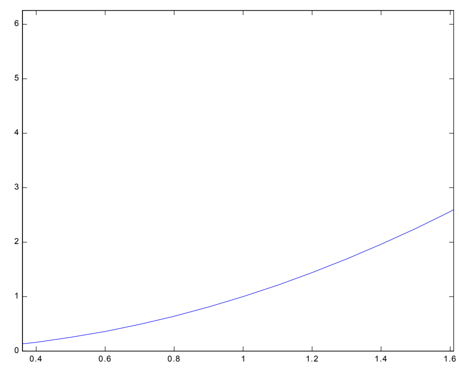
Mas como visualizar a taxa de variação num ponto? O aspecto principal é que em uma escala muito pequena os gráficos das funções parecem-se com retas como foi verificado pelos alunos selecionando uma determinada região do gráfico da parábola $y=x^2$, utilizando para isso o ambiente MatLab, que oferece um controle de zoom.

O objetivo de gerar discussão sobre um dos conceitos do Cálculo, a derivada e sua representação como taxa de variação e inclinação de reta tangente foi substancialmente potencializado pelo uso de softwares matemáticos.

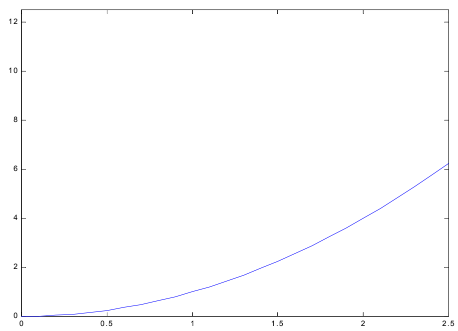
Figura 40: Aplicação de "Zoom" para verificar linearidade local



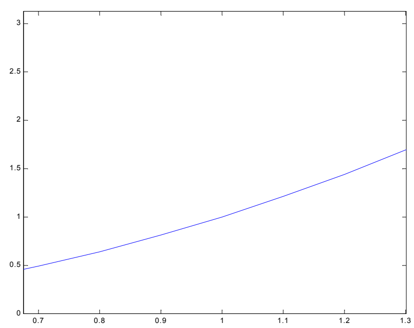
zoom ausente



2º zoom no ponto x=1



1º zoom no ponto x=1



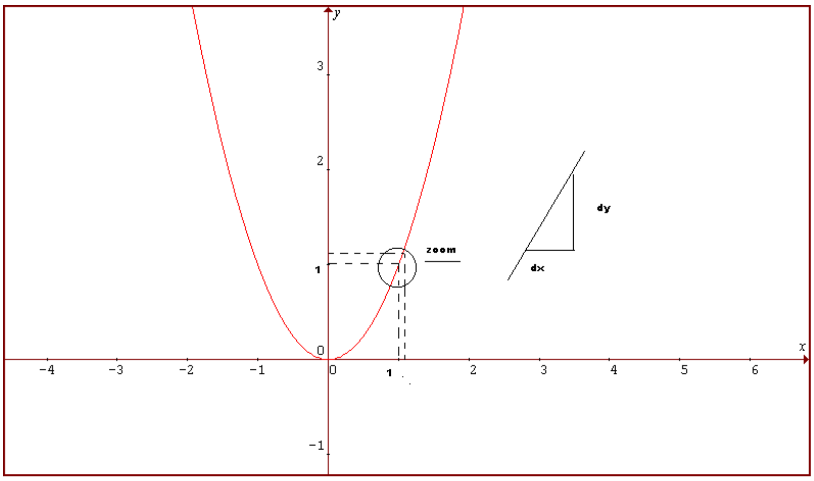
3º zoom no ponto x=1

Ao incorporar-se esta visão de linearidade à curva pode-se também introduzir a noção de aproximação linear para a função através da inclinação da reta tangente, bem como seria possível incluir o conceito de aproximação por séries de potência, caso estivesse dentro dos objetivos do curso de Cálculo.

A figura 41 apresenta a associação da inclinação da reta tangente, num dado ponto, através do zoom em um ponto do gráfico com a definição da derivada, visto que a partir de considerações matemáticas, a variação da distância no eixo x, em torno do ponto em estudo, equivale a um infinitésimo de distância dx, correspondendo à produção de uma variação aproximada dy na função, através da projeção geométrica de x+dx na reta tangente.

Novamente, um dos objetivos do trabalho estava sendo atingido. O uso de representações múltiplas, possibilitada pelos ambientes informatizados, gera um ambiente de discussão dos conceitos matemáticos, sob uma nova abordagem, na qual o aluno pode experimentar e tirar conclusões, errar e refletir, executar processos de tentativas, que a forma padrão de abordagem do Cálculo não permite.

FIGURA 41: EXPLICATIVA DO ZOOM EM UM PONTO DO GRÁFICO



5.4.4- AMBIENTES INFORMATIZADOS E CAMPOS DIREÇÃO

O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a derivação e a integração como operações inversas. Também, ao se determinar o valor de $\int f(x)dx$, simplesmente por um processo de substituição dos valores extremos da função primitiva, encontra-se o valor da área abaixo de uma curva. Ao executar-se algebricamente tal operação é determinada a função primitiva, a qual se derivada uma vez seria igual à função f(x) interna ao integrando.

Mas, a derivada equivale numericamente à inclinação da reta tangente à função primitiva e, como função de ponto, seria composta pontualmente através de uma série de retas tangentes a estes pontos contínuos. Este sentido, de conjunto de retas tangentes, raramente é abordado no Cálculo, em função das dificuldades de representação gráfica. No entanto, com o ambiente computacional gráfico, o entendimento é ampliado:

Foi então proposto aos alunos que relacionassem graficamente a derivada à sua função geradora. Para isso utilizou-se o ambiente Graphmatica e a função derivada era dada por $dy/dx=e^x$. A função geradora ou primitiva desta derivada seria a própria função e^x. A questão aberta aos alunos foi: “qual a função que gerou tal derivada?”.

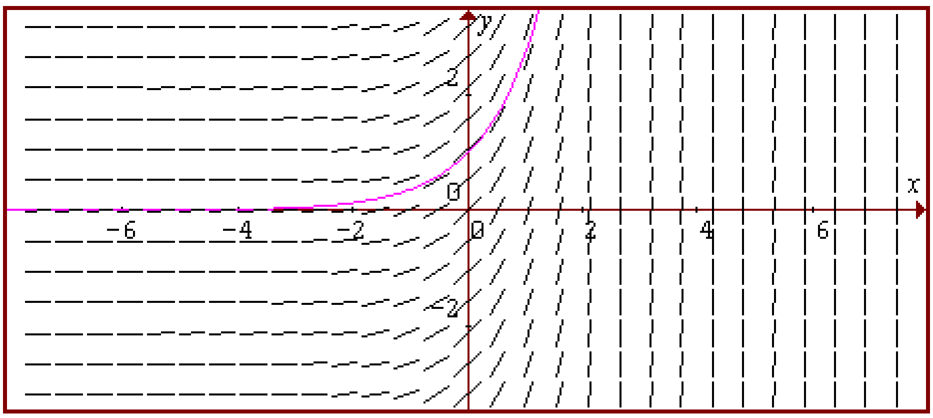
No gráfico, os alunos visualizaram o chamado “campo direção” formado pelas retas tangentes e a função em vermelho sendo a função exponencial primitiva, a chamada curva integral. Esta forma de visualização gráfica do Teorema Fundamental do Cálculo, permite dar-lhe um sentido físico-gráfico, pois como foi dito aos alunos, o gráfico do campo-direção poderia, por exemplo, ser a representação de um campo de velocidades de um fluido em escoamento. Desta forma, a curva em vermelho seria a função trajetória do movimento das partículas deste movimento, geradora da família de derivadas, ou da função interna ao integrando.

A utilização de um ambiente que permite o traçado de campos-direção proporciona um caráter geométrico ao Teorema Fundamental do Cálculo, visto que o aluno consegue relacionar a função primitiva à derivada da função, através de um conjunto de retas tangentes.

O aluno observa, desta forma, inclusive a atuação da constante de integração junto à família de funções primitivas. Na figura 42, a curva indicada pela linha vermelha, constitui-se numa solução primitiva particular, e sob determinadas condições iniciais.

Mudando-se estas condições inicias, ou os extremos de integração abrangeríamos a família de soluções ou a solução geral do problema, ou em relação ao Teorema Fundamental do Cálculo a integral indefinida.

Figura 42: Exemplo de Campo Direção



O gráfico anterior representa a interpretação de dy/dx como a inclinação de uma reta tangente, sobre pontos (x,y) pertencentes a uma curva integral da equação dy/dx=f(x).

A inclusão da representação gráfica aos processos de integração e derivação é substancialmente facilitada pelo uso de softwares que “tracem” campos-direção, como o Graphmatica, por exemplo. Ao mesmo tempo, obtemos a possibilidade de associação de um comportamento gráfico a uma família de funções. Esta abordagem gráfica também permite com que características de comportamento de funções, como inclinações de tangentes, sejam associados a intervalos de crescimento e decrescimento.

CAPÍTULO VI

“A verdade é filha do silêncio e da meditação ininterrupta”

ISAAC NEWTON

REFLEXÕES, ANÁLISES E CONCLUSÕES

6.- REFLEXÕES: O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA COMO MÉTODO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

A aplicação da Modelagem Matemática revelou aspectos que devem ser analisados. Uma nova abordagem na disciplina Cálculo Diferencial e Integral aplicada em uma turma composta por 44 alunos da Faculdade de Engenharia Química de Lorena não tornou a disciplina mais fácil e, segundo os alunos que já haviam cursado a disciplina, pelo contrário, a disciplina ficou mais exigente e mais complexa. Ao mesmo tempo, tal aplicação indicou como fatores positivos:

I. o aspecto cooperativo das atividades propostas;

II. a aplicação dos conceitos;

III. aprender a equacionar totalmente os problemas;

IV. discussão aberta em sala de aula sobre as atividades propostas.

As atividades propostas não envolveram aplicações científicas de complexidade considerável, mas, mesmo assim, evidenciou-se grande interesse e participação nas perguntas em sala e nos questionamentos feitos pelos alunos ao professor nos períodos de atendimento aos alunos. Como se trata de uma proposta nova, não somente aos alunos, bem como para o autor do trabalho, exigiu-se, por parte do professor, uma busca contínua de situações novas, seja na bibliografia de Cálculo, disciplinas técnicas da Engenharia, revistas e outras mídias, nas quais o método da modelagem possa ser aplicado.

A reação dos alunos foi positiva quanto à potencialidade do método e apreensiva quanto às exigências do método, no qual o raciocínio matemático-físico é exigido. Sente-se que a maior parte dos alunos não está preparada para essa nova situação do "fazer Matemática" e muitos encaram a Matemática apenas como fazer contas, conforme respondeu um aluno sobre a sua relação com a disciplina: “sempre me dei bem em Matemática...pois sempre fui bom em fazer contas”.

Outro fator que preocupa os alunos é que as atividades propostas demandam um grande tempo e que o número de disciplinas realizadas por eles conflita com as atividades a serem desenvolvidas no curso de Cálculo. Realmente esta observação é real, visto que quando se utiliza o Cálculo apenas como ferramenta, os exercícios são mais evidentes, repetitivos e portanto o esforço para fazer o primeiro exercício de uma série, é superior ao fazer os próximos exercícios, visto que são algoritmizados algebricamente.

Os alunos apresentam grande dificuldade para iniciar a formulação do problema, até mesmo porque não estão acostumados a esta Matemática experimental. Outros, como por exemplo, Fabrício, demonstram grande facilidade em equacionar problemas. Tal aluno apresentou a característica de que em aula, raramente copiava as informações colocadas no quadro-negro, principalmente as algébricas e demonstrava um grande interesse em raciocinar matematicamente em relação aos modelos e atividades propostas.

Alguns alunos preferem o método tradicional, com o professor repassando os conhecimentos, e afirmam "que não estão acostumados a pensar". O problema é que quando o horizonte matemático se amplia, evidencia-se que a maior parte dos alunos apresenta uma miopia matemática, não conseguindo interligar conceitos matemáticos em diferentes representações e utilizando a Matemática apenas como ferramenta operatória, raramente utilizando-a de maneira interpretativa.

Mas o que devemos fazer? Continuar a massificar nossos alunos? Devemos propor maneiras, métodos, que mesmo com dificuldades, façam com que tenham uma visão dinâmica do aprendizado de uma disciplina, que esteja integrada à tecnologia e às exigências de tomada de decisão, de cooperação, de incorporação de conhecimentos, que se exige atualmente de todos os profissionais. Ë claro que não se pode pensar que somente a adoção de novas tecnologias ou métodos em uma disciplina propicie todas estas características desejáveis em nossos alunos. A exigência que se faz é de um projeto pedagógico para toda a instituição, de forma a incorporar estas características aos métodos pedagógicos do curso.

A visão pessoal do autor deste trabalho ampliou-se com a aplicação do método proposto, gerando um interesse em aplicações dos conteúdos da disciplina em situações mais próximas de processos da Engenharia , interligando futuramente, situações termodinâmicas, de Mecânica dos Fluidos, Transmissão de Calor, dentre outras. É evidente que tal inclusão não pode ser a nível mais avançado de conteúdos técnicos da Engenharia, visto que tais conteúdos serão vistos nas disciplinas posteriores, mas a incorporação de tais aspectos, reveste o Cálculo de um atrativo para o aluno, o qual não pode ser desconsiderado por nenhum educador de cursos de Engenharia.

Qual a atitude a ser tomada quanto à passividade do aluno na questão da aprendizagem? Certamente as respostas passam por métodos que coloquem o professor junto aos alunos e não acima deles, e encontram-se em atitudes ativas do professor em fornecer a seus alunos, meios e atividades nas quais os alunos não respondam a notas ou avaliações e sim, respondam aos seus próprios impulsos, o de superar desafios e não submeterem-se somente à padrões.

6.1- REFLEXÕES QUANTO AO USO DE AMBIENTES INFORMATIZADOS NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Basicamente existem duas vertentes na utilização do computador em relação a softwares voltados para Cálculo Diferencial e Integral. A primeira voltada apenas a um processo de resposta e a segunda vertente, além de proporcionar um ambiente de resolução de exercícios, permite que os alunos simulem graficamente e a partir de animações, ou gráficos, ou tabelas, possam matematizar; ou seja, a partir de estudo de um problema específico, possam generalizar e deduzir as leis matemáticas que governam determinada situação-problema.

Não se pode descartar a importância do apelo visual e de animação no aprendizado de um conceito. Questões como: o que é o limite, ou o que é descontinuidade de uma função podem ser melhor conceituadas se forem proporcionadas aos alunos simulações de tais situações com analogias do mundo real. Assim, pode-se mostrar que a famosa definição de salto de uma função, na questão da descontinuidade, pode ser exemplificada por uma ponte elevadiça. Em sua posição de "passagem de veículos" a função é contínua e quando se eleva, é descontínua e neste sentido, ambientes informatizados podem gerar estas simulações proporcionando ao aluno atividades de analogia e reflexão.

Quando é iniciado nosso aprendizado da Matemática, a visão da Matemática que nos é proporcionada é em relação a um mundo físico, do nosso dia-a-dia e, as situações são de simplicidade considerável. Em relação ao Cálculo, observa-se uma abstração maior em relação aos conceitos envolvidos na disciplina. Estudam-se as funções matemáticas sob as formas polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, racionais, entre outras; estudam-se limites, derivadas, diferenciais, processos de integração, os quais possuem significados geométricos e físicos, mas não se trabalha com tais conceitos em situações próximas aos alunos.

O Cálculo ensinado de forma tradicional nos afasta da Matemática real e atual. Levando-se em consideração que o engenheiro, em situações reais, trabalha com um grande volume de dados, conseguimos entender o distanciamento do Cálculo em relação a estas situações reais, pelo menos há 20 anos atrás. Hoje, a existência de softwares de tratamento gráfico, numérico ou algébrico elimina esta restrição. Acúmulo e tratamento de dados não representam um grave problema.

Mas outras restrições são impostas! É importante mencionar que a maioria dos livros-texto dos cursos de Cálculo Integral e Diferencial possui em seu conteúdo, atividades que não se adaptam facilmente ao uso de ambientes informatizados, visto que são atividades cujo objetivo é o algoritmo algébrico, ou então atividades já formuladas, fechadas, que proporcionam ao aluno a aplicação do Cálculo como ferramenta e não como linguagem interpretativa, que não proporcionam atividades de exploração, de forma que levem ao aluno a formular conjecturas e estabelecer estratégias para a resolução dos problemas.

Palis (1995) afirma que se forem utilizadas as facilidades computacionais, uma percentagem significativa dos exercícios dos livros de Cálculo transforma-se no exercício do uso das ferramentas tecnológicas em si, não envolvendo nenhum raciocínio matemático. A autora (1995, p.36) considera também que é preciso que o professor proponha, quando do uso de ambientes informatizados, atividades que contemplem situações nas quais:

- as qualidades e as deficiências da tecnologia como ferramentas matemáticas apareçam;
- se desenvolva a habilidade para discriminar entre o uso apropriado e não-apropriado da tecnologia.

Neste sentido, foram propostas atividades que proporcionaram aos alunos a evidenciação dos erros de determinados programas matemáticos e a partir destas análises, conceitos foram trabalhados.

O emprego dos ambientes informatizados matemáticos requer delimitação de suas vantagens e desvantagens no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos do Cálculo. Podemos usar um sistema algébrico como Maple ou MatLab para a resolução de uma integral ou para o cálculo de uma derivada e isso certamente representa um aumento de produtividade, mas somente alcançamos um aumento qualitativo se usarmos os sistemas algébricos em situações criadas pelo professor, de forma a valorizar o pensar matemático do Cálculo Diferencial e Integral. Podemos, por exemplo, através de um ambiente gráfico, visualizar a função original, a derivada primeira, a derivada segunda e as relações entre os comportamentos destas funções.

As facilidades gráficas oferecidas pelos softwares são um forte atrativo visual para os alunos. Digita-se a função e rapidamente temos um traçado com qualidade. Deve-se, entretanto, explorar situações em que somente seu uso não leve à resolução final do exercício. Ligada ao uso de ambientes informatizados encontra-se a ação de análise e interpretação matemática por parte do aluno. As atividades ligadas ao uso de softwares devem estar ligadas à atividades de análises dos comportamentos observados, sendo que esta análise de comportamento deve levar à generalização dos comportamentos matemáticos.

É preciso saber Matemática, ou Cálculo, diante da potencialidade que os softwares atuais oferecem? Deve-se expor os alunos à atividades que levem a constatação afirmativa a esta pergunta! Devem ser proporcionadas atividades que os levem ao uso das ferramentas, não como um simples clique em objetos que levam à eventos computacionais. É necessário criar atividades em ambientes informatizados, nos quais mudanças de escalas, zoom, análises numéricas de tabelas, simulações funcionem não como eventos mecanizados, mas como eventos em que a exploração e a reflexão matemática estejam presentes.

Neste sentido, Carraher (apud Eicher e Del Pino, 1998, p. 5) afirma:

> "um software não funciona automaticamente como estímulo à aprendizagem. O sucesso de um software em promover a aprendizagem depende da integração do mesmo no currículo e nas atividades de sala de aula".

O uso dos ambientes informatizados deve ter como objetivo principal a mediação da construção dos processos de conceituação matemática. Não devem ser usados como máquinas de ensino, mas como um ambiente ferramental pedagógico de forma a promover interação entre o aluno e os objetos matemáticos, através de etapas de abstrações.

Através de uma simples mudança de parâmetro, na composição das funções, o aluno primeiro conclui a respeito de características simples, fruto de visualização. Quando se muda o parâmetro "a" de uma curva do segundo grau ou quando muda-se a base de uma função exponencial, o aluno submete-se a processos de análises de concavidade e de comportamentos gráficos das funções. Estas abstrações sobre o comportamento em primeira estância são visuais e já representam um ganho qualitativo em função das facilidades de "traçado" dos ambientes computacionais.

Porém, em relação ao Cálculo, o principal ganho ocorre quando o aluno abstrai-se em relação aos conceitos do Cálculo que podem levar a tais variações ou quais conceitos tais variações podem produzir. Desta forma, por exemplo, o ambiente pode permitir a associação do conceito geométrico de inclinação de reta tangente à primeira derivada e conseqüentemente ao comportamento visual e numérico (tabelar) de funções crescentes ou decrescentes, de uma maneira geral, construindo as relações entre os diversos significados dos objetos matemáticos do Cálculo.

6.2- REFLEXÃO QUANTO AO USO DE REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Nas atividades profissionais de um engenheiro químico, freqüentemente estão envolvidos gráficos e tabelas de dados obtidos a partir de diversos experimentos físicos, químicos ou de análises de situações econômicas ou de controle de qualidade, entre outros.

Entretanto, em relação às disciplinas matemáticas da Engenharia, freqüentemente, os alunos são envolvidos em situações algébricas, fazendo com que análises numéricas e gráficas estejam em segundo plano, se é que se encontram presentes.

O aspecto numérico, de obtenção de respostas numéricas é proporcionado ao aluno na disciplina Métodos Numéricos. Entretanto, o aspecto gráfico é quase que inexistente nas disciplinas ligadas à Matemática da Engenharia.

Ao longo deste curso, os alunos vivenciaram situações em que problemas do Cálculo foram abordados sob múltiplas visões representativas e analisados pela composição destas visões. O processo de integração, por exemplo, freqüentemente abordado sob uma análise algébrica, foi relacionado também a gráficos de área, de situações físicas ou campos direção.

Simultaneamente, em função destas análises, o aluno esteve diante de situações em que somente o processo algébrico não respondia a seus questionamentos. Desta forma, seu objetivo não era somente processar algoritmos algébricos. A composição de situações em que o algebrismo não é a única possibilidade de resolução proporciona ao aluno a decisão sobre qual estratégia usará.

A resistência dos alunos em efetuar outros tipos de análise é natural, visto que o algebrismo também é prioridade nos anos anteriores de sua formação. A escolha também deve ser natural. Cada aluno adeqüa-se melhor a uma estratégia de análise e, portanto, as múltiplas representações no Cálculo proporcionam este aspecto de liberdade de escolha.

É necessário criar situações de ensino-aprendizagem que proporcionem leituras gráficas, numéricas e algébricas de um mesmo problema, sejam elas em sala de aula tradicional ou em ambientes informatizados. O Cálculo não é só instrumento de fazer, é instrumento para ler e interpretar a realidade.

6.3- QUESTIONÁRIOS E ENTREVISTAS

6.3.1-QUESTIONÁRIO: DIAGNÓSTICO DA TURMA

Com o objetivo de se levantar o perfil da turma, na qual seria implementado o método proposto, foi disponibilizado aos alunos o questionário (anexo 3) cujos resultados são apresentados na seqüência. Este foi o primeiro questionário respondido pelos alunos. Alguns aspectos são relevantes em relação à proposta de trabalho utilizada na turma:

- Uma turma jovem com a média de idade de 23 anos, com 73% dos alunos trabalhando com Cálculo pela primeira vez e, portanto, não influenciados por outro método de ensino-aprendizagem;
- A grande maioria é solteira e não trabalha, dedicando-se exclusivamente à Faculdade, dado importante para a adoção de uma metodologia que exige grande tempo de dedicação dos alunos, embora além deste fator, existam as atividades acadêmicas, em grande número, no primeiro semestre letivo;
- Ocorre um equilíbrio entre homens (52%) e mulheres (48%) entre os alunos da turma;
- Durante o primeiro grau 38% dos alunos freqüentaram a escola pública, 44% escolas particulares e 18% ambas as escolas;
- Durante o segundo grau a grande maioria freqüentou a escola privada (81%), 13% freqüentaram a escola pública e 6% ambas;
- A escolha pelo curso de Engenharia Química foi motivada por: 41% expectativa de ingressar no mercado de trabalho; 30% afinidade com Química; 21% afinidade com cálculos e raciocínio. São citados os fatores mais destacados na pesquisa; destaca-se que 21% enfatizam a escolha quanto ao aspecto matemático e que na verdade a maior parte desconhece as funções de um engenheiro químico, antes de ingressar na Faculdade. Desconhecem que cerca dez por cento da carga horária do curso é destinada exclusivamente a disciplinas da

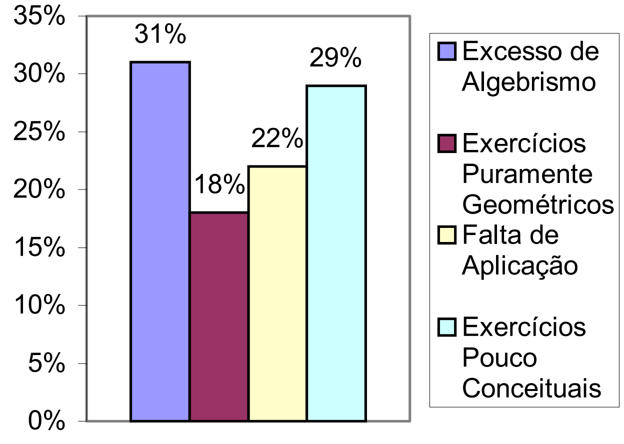
área da Matemática e muitos ligam a Engenharia Química exclusivamente à Química laboratorial;

- 52% dos alunos ingressaram na faculdade após mais de dois vestibulares para Engenharia química; 37% realizaram apenas um vestibular e 11% realizaram dois vestibulares para o ingresso em Engenharia Química, resultado percentual que demonstra ser o curso a opção realmente escolhida pelo aluno;
- Apenas 8 % dos estudantes trabalham (8 horas por dia).
- 92% dos estudantes são portanto dependentes financeiramente da família quanto aos seus estudos e manutenção.
- Apenas 19 % residem com suas famílias em Lorena.
- A grande maioria dos alunos (73%) dos alunos está fazendo Cálculo pela primeira vez;

6.3.2- QUESTIONÁRIO: INTERNET

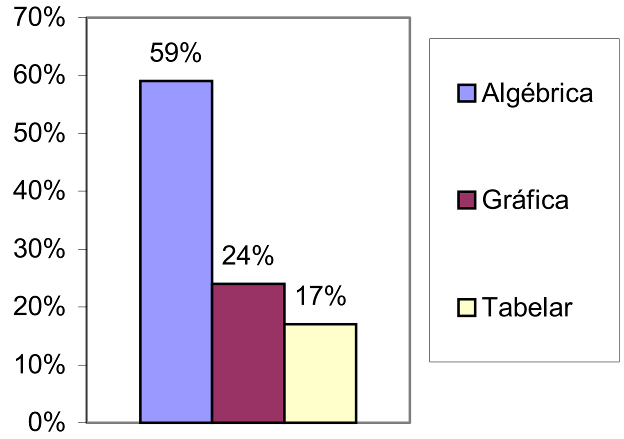
Como o objetivo de obter uma visão do Cálculo dos alunos que já realizaram a disciplina, foi colocado, na internet, um questionário para os alunos que já cursaram Cálculo I (anexo 02). Na seqüência, são apresentados os gráficos das perguntas componentes do questionário, que envolviam respostas quantitativas.

Figura 43: Fatores prejudiciais ao rendimento em Cálculo I



De uma maneira geral o que prejudicou seu rendimento em Cálculo I?

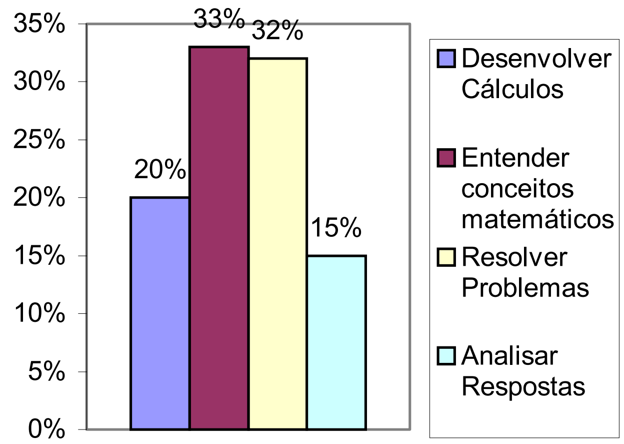
Figura 44: Formas de Respostas



Durante seu curso você obtinha as respostas de que forma?

□ Algébrica
□ Gráfica
□ Tabelar (numérica)

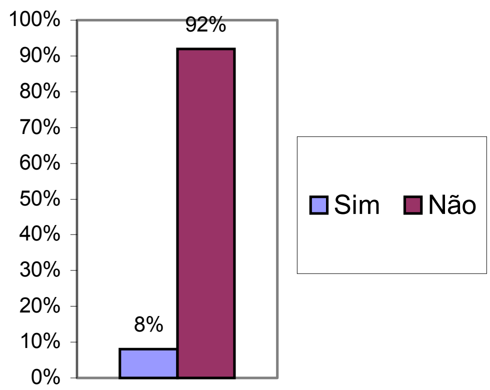
Figura 45: Aspectos Importantes no Cálculo



O que foi importante para você no Cálculo I?

□ Desenvolver cálculos
□ Entender os conceitos matemáticos envolvidos
□ Resolver problemas
□ Analisar respostas

Figura 46: Utilização de softwares em Cálculo I



Você utilizou algum software matemático em seu curso de Cálculo I?
- Sim
- Não

No mesmo questionário, os alunos fizeram comentários relacionados à proposta: “Faça algum comentário sobre a disciplina Cálculo I, seja sobre o conteúdo da disciplina, quantidade de aulas, metodologia adotada pelo professor, nível das provas, formas de avaliação e outros aspectos que queira analisar”.

As respostas colocadas neste trabalho são relativas apenas àquelas que envolvam o aspecto de metodologia. Observa-se a forte crítica por parte dos alunos em relação ao algebrismo exigido e à falta de aplicações da disciplina.

- “Na primeira vez, eu tive aula com um “matemático” que voltou o curso de Cálculo mais para a área dele, o que tornava o Cálculo muito complicado e as vezes incompreensível. Já na segunda vez, eu tive aula com uma “engenheira” que nos ensinava só o que era necessário para um engenheiro aprender, deixando de lado muitos teoremas e muitos "proves", que não fazem parte do cotidiano do engenheiro. Com relação ao conteúdo, eu acho muito bom, mas tem professores que nos dão provas que não condizem com sua metodologia de aula, pedindo em prova cálculos extremamente complicados e difíceis para um aluno do primeiro ano de Engenharia".

- "Sobre o conteúdo e o tempo: são de intensidades opostas, é muita coisa para se aprender em tão pouco tempo, são muitos tópicos e quando você estava começando a aprender já vem outra matéria. No curso que fiz, gostei muito da didática do professor. Existem professores que ficam apenas na teoria e apenas exercícios algébricos. O professor que tive passava a teoria dentro dos exercícios e acho que dessa maneira se aprende mais".
- "Tirando a dificuldade normal de se aprender Cálculo, os exercícios deveriam ser mais aplicáveis em situações reais, as provas deveriam ser com consulta pois são métodos de resolução e os professores que aplicam a disciplina deveriam ser engenheiros, pois os matemáticos se preocupam mais com o desenvolvimento do que com a aplicação. Depois de um tempo, você não usa aquelas integrais gigantescas, nem limites infinitos e vários outros conceitos difíceis".
- "Para quem chega à faculdade, a disciplina é muito difícil, já que o conteúdo é visto pela primeira vez, alguns professores deviam mudar sua metodologia, fazer o Cálculo Diferencial e Integral, voltado para a Engenharia, não voltado para o algebrismo".
- "O Cálculo está sendo aplicado para uma Faculdade de Engenharia, onde pressupõe-se que todos gostam de Cálculo, assim como eu, talvez, mas a metodologia enfocada leva as bandas do desânimo e do desinteresse. O primeiro comentário que ouvi aqui foi: P1 dia tal, P2 dia tal, PO tal e exame tal... não estou aqui para me limitar a

provas; e outra coisa: era cada aula um terrorismo. "Pelas estatísticas tantos alunos reprovam em Calculo..."

- “A disciplina é a base para muitos cursos aqui na faculdade, é de extrema importância que seu conteúdo seja bem administrado e que ferramentas matemáticas, como softwares, ou qualquer meio utilizado para um melhor aproveitamento dos resultados em relação ao aprendizado sejam utilizados”.
- “Até o presente momento, achei a disciplina a mais difícil do curso de Engenharia; provas muito difíceis; gostaria que as provas fossem mais divididas ,como por assunto, (P1, P2, P3, P4,...),e mais trabalhos de aplicação do Cálculo em Engenharia”.
- “Para o calouro é um choque chegar e despejarem matéria de um conteúdo complexo e as vezes ferramentas que nunca tinham visto (Hiperbólicos, neperianos, Arcsen). Levando ele a “engolir” tudo sem que tenha prazer em descobrir todo esse material”.
- “Meu professor de Cálculo é muito bom, tem uma ótima didática, inclusive com aplicações práticas da utilização do Cálculo principalmente na Engenharia Química, as provas condizeram com o perfil do professor, e até certo ponto, foram equivalentes à aula apresentada. Particularmente, creio que eu tenho um bloqueio com Cálculo”.
- “Infelizmente, creio eu que, por preguiça, os professores gostam de ensinar a matéria resolvendo exercícios muito simples no quadro, o que nos leva a pensar que a matéria é simples e que estudar pelo caderno basta. Mas na hora das avaliações, são cobradas derivadas

e integrais cujas resoluções ocupam duas páginas, sendo que o conceito real de integração e da derivação é utilizado apenas nas duas primeiras linhas. De resto sobra um algebrismo caótico que acaba levando os alunos à um erro que em 90% dos causas é por distração ou confusão com tantas simplificações ao mesmo tempo. As provas são sempre muito complexas, e nunca são do mesmo nível das aulas dos professores, afinal, professor que só mostra exercícios simples nas aulas, que não contém "pegadinhas" tem o péssimo habito de colocar exercícios com diversos macetes e pegadinhas nas provas. O conteúdo da disciplina parece ok, quantidade de aulas também. A metodologia peca justamente por utilizar exercícios com muitas "manhas" nas provas".

- "Eu achei o curso muito bom, só acho que a matéria deveria ser menos concentrada, e as provas eram muito difíceis. O professor deveria considerar nas provas o raciocínio do exercício e não só ver se a resposta está certa".
- "Quando fiz pela primeira vez, acho que faltou um pouco de coerência aula-prova, e também o uso de muita matemática e pouca Engenharia".
- "Eu acho que é muito pouco falado sobre a importância de cada tópico no curso de Engenharia Química, não só em Cálculo I, como nas outras disciplinas ligadas à Matemática".
- "Há uma grande quantidade de informações para serem assimiladas em uma pequena quantidade de tempo, acrescenta-se o nível de

dificuldade muito elevado das provas, com exercícios muito extensos".

- "Eu adorei o meu curso de Cálculo I. Foi o que eu mais estudei, mas o que eu mais aprendi. O Professor é excelente, extremamente atencioso e sabe muito. A metodologia dele é ótima. A quantidade de aulas é ideal, pois é o Cálculo a disciplina na qual a gente mais precisa de tempo. As provas eram bastante difíceis, mas eram muito coerentes com a aula dada".
- "Acho que o Cálculo I deveria dar mais ênfase a parte de que o engenheiro realmente precisa, as provas deveriam avaliar se o aluno sabe a matéria ensinada e não cálculos bobos, que na hora da prova muitos alunos erram por puro nervosismo".

6.3.3- ENTREVISTA COM ALUNOS

Foi solicitado ao alunos que falassem sobre o método de ensino-aprendizagem de Cálculo através de Modelagem Matemática. Também perguntamos aos alunos se eles sentem necessidade de uma abordagem tradicional e se preferem um método centrado no aluno ou no professor. Apresentamos abaixo um resumo das opiniões dos alunos:

- ".. no ensino médio os professores dão a matéria mastigada... ."
- "... as idéias devem partir dos alunos, mas sinto necessidade aulas formais em que primeiro se dá a teoria e ela é explicada e discutida

em classe para que depois sejam dados os problemas-trabalho para que se possa treinar o que foi aprendido."

- "...quem decora fica preso ao mecanismo de uma linguagem..."
- "...ninguém jamais conseguirá modelar um problema sem ter noções dos conceitos da matemática elementar..."
- "... a respeito de modelagem gostaria que o professor desse uma luz, um ponto de partida..."
- "prefiro uma abordagem em que as idéias partam de nós, assim podemos tirar conclusões, ter uma visão melhor sobre o assunto...".
- "...deste modo temos idéia sobre onde os conceitos serão aplicados..."
- "...ficar fazendo exercícios que nem uma máquina não leva a nada...."
- "... a aula formal é necessária para uma maior fixação da matéria..."
- "...o método é inovador, mas deixa os estudantes apreensivos e temerosos em relação ao novo..."
- "... esta nova forma de ministrar a aula é uma boa idéia, mas há desvantagens como: o aluno fica perdido, sem saber por onde começar o problema... preferia que se abordasse o assunto e depois os problemas de modelagem..."
- "...sei e reconheço a importância de nós lançarmos soluções que partam de nós mesmos, mas é extremamente frustrante quando não sai nada."
- "...não me entra a idéia de que eu tenho que adivinhar método ou maneira a ser abordado para um problema para chegar a conceitos,

se estes é que são necessários para que o problema seja resolvido..."

- "...como eu só tive aulas de Cálculo da maneira tradicional, estou achando este método bem legal...este método faz com que as idéias fiquem mais claras na hora de estudar, pois já experimentamos na prática e fora isso há um maior interesse maior da aula, em querer aprender e entender o que está acontecendo..."
- "...acharia melhor se pudesse haver uma abordagem clássica da matéria antes da modelagem...".
- "...o fato do trabalho ser em equipe ajuda muito..."
- "...uma abordagem mais moderna, em que as idéias partam dos alunos, é bem mais interessante para o momento em que vivemos, em que os indivíduos devem ser dinâmicos, ter agilidade para solucionar problemas, pois desta forma o aluno desenvolverá suas próprias habilidades, seu raciocínio e passará a entender problemas com clareza e objetividade."
- "...no meu caso, a dificuldade em modelar um problema surge logo no princípio, no saber de onde partir. Logo depois que já se tem o caminho, só é preciso saber lidar com a trabalheira, que vem em cima das contas..."
- "...este método é descontraído e não deixa a aula monótona e cansativa..."
- "...as dificuldades mais intensas estão no fato de sair de uma situação-problema, pois no colegial já existiam fórmulas prontas para resolver os problemas".

A maior dificuldade dos alunos em relação ao método de se modelar um problema é o "ponto de partida". Como foi colocado por um aluno: "por onde eu começo...sinto-me perdido...". Considera-se que este é o principal obstáculo à utilização da Modelagem na disciplina Cálculo Diferencial e Integral (porém não intransponível):

- durante todos os anos anteriores no ensino secundário ocorreu um afastamento da Matemática em relação a situações reais. Quando entramos na escola a Matemática que nos é apresentada é relativa ao nosso dia-a-dia. São problemas em que ocorrem situações compras, vendas, passeios, etc. Atividades ligadas ao nosso cotidiano ou a um contexto familiar. Porém, durante os anos do ciclo secundário ocorre um afastamento quase que total da matemática da realidade do aluno. São abordados tópicos de determinantes, matrizes, números complexos, trigonometria, geometria, álgebra com abordagem formal da Matemática, mas com uma quase que total ausência de contextos. São ensinados, por exemplo, determinantes e matrizes e nenhum estudante sabe definir onde aplicar estes conhecimentos.
- Os teoremas e problemas são apresentados de forma fechada, matematizados com um rigor excessivo, que torna o manipular de símbolos mais importante que a leitura matemática das situações-problema. O aluno não é habituado a formular (principalmente) e a analisar, ou seja, ele não inicia e nem finaliza o processo de resolução de um problema, apenas fica com a parte mecanizada, com os cálculos.

- O raciocínio não é valorizado, sendo premiado aquele aluno que chega ao resultado correto, não se valorizando as etapas intermediárias, ou seja, o caminho pelo qual se chegou a uma determinada solução.
- O ensino tradicional padroniza as soluções ao invés de valorizar a individualização das soluções. O professor tenta passar a sua maneira de raciocinar, transmite informações ao invés de propor atividades criadoras, reflexivas, que desequilibrem as estruturas mentais dos alunos.

6.3.4- CORRESPONDÊNCIA DO CURSO EM RELAÇÃO ÀS EXPECTATIVAS DOS ALUNOS

Ao término do curso, entrevistamos os alunos quanto às suas expectativas. São apresentados abaixo alguns comentários.

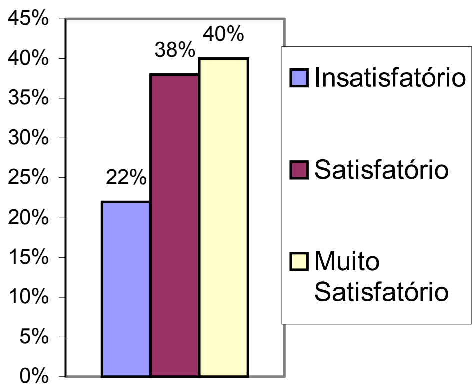
- “Foi além de minhas expectativas, pena que estudo em período integral; estou me adaptando em assumir responsabilidades...não tive o tempo que gostaria para me dedicar, especialmente em relação ao projeto das latas”.
- “Minhas expectativas eram outras, mas eu gostei porque consegui entender o Cálculo raciocinando.”
- “Sim, meu raciocínio matemático evoluiu muito com os obstáculos que o Cálculo apresenta, conseguindo superá-los e sinto-me apto a prosseguir meu curso de Engenharia Química.”

- “Sim, apesar de algumas dificuldades, assimilei bem a matéria.”
- “Sim, aprendi novos métodos, sem aquela monotonia de algebrismos, etc.”
- “Expectativas racionais, sim, o curso foi muito interessante. Emocionais não, pois acho que não vou passar.”
- “Sim, pois eu pude entender o quanto o Cálculo é importante para a área da Engenharia.”
- “Achei interessante o curso de Cálculo com aplicações...mas achei difícil”.
- “Sim e um pouco mais por causa dos softwares. Poderia ter aprendido mais se tivesse mais tempo.”
- “Ainda não sei, pois minha meta era passar sem exame.”
- “Não, pois esperava que o curso fosse igual aos outros (derivada, limite e integral) que já me falaram, contudo sempre é bom estar aprendendo de novas maneiras.”
- “Sim, sinceramente não esperava aprender tanto e trabalhar tanto com conceitos em tão pouco tempo.”
- “Principalmente a parte de derivadas, na qual tivemos uma grande noção de sua aplicação.”
- “Realmente eu não sabia o que esperar, só ouvia falar que era um dos mais difíceis e quanto a isso correspondeu.”
- “Em partes. Gostei muito da interação que ocorreu na sala devido a esse curso, porém, achei que foi dada num curto intervalo de tempo”.
- “Sim e o mais interessante foi trabalhar Matemática com Informática”.
- “Sim eu gostei do curso. Só não gostei das provas”.

6.3.5- QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

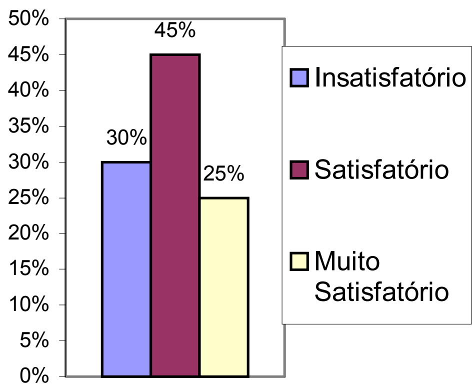
São apresentados, neste momento, os resultados quantitativos da avaliação dos alunos em relação ao entendimento dos conceitos abordados no curso bem como a influência da Modelagem Matemática, dos ambientes informatizados e das representações múltiplas em relação a este entendimento.

Figura 47: Compreensão sobre Funções



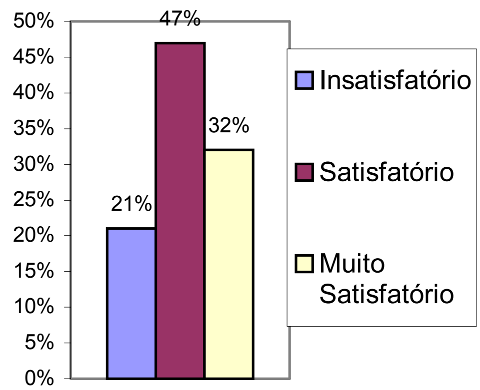
Compreensão sobre o assunto funções?

Figura 48: Compreensão sobre Limites



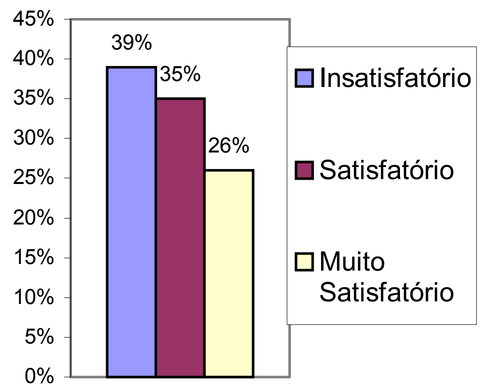
Compreensão sobre o assunto limites?

Figura 49: Compreensão sobre Derivação



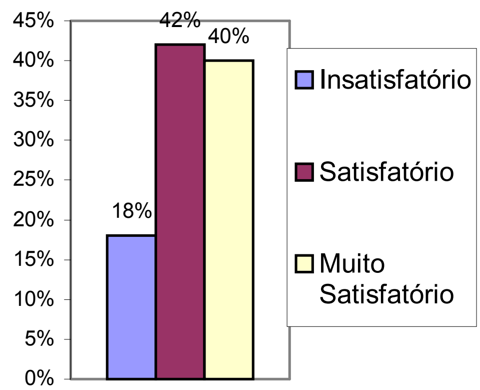
Compreensão sobre o assunto derivação?

Figura 50: Compreensão sobre Integração



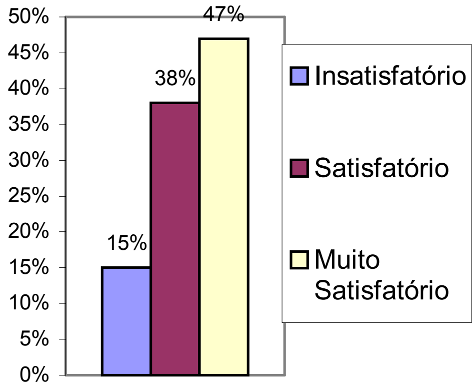
Compreensão sobre o assunto integração?

Figura 51: Contribuição da Modelagem Matemática



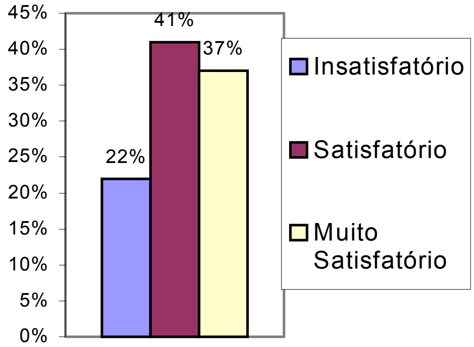
Contribuição do método da modelação matemática para o entendimento dos conceitos do cálculo?

Figura 52: Contribuição das Representações Múltiplas



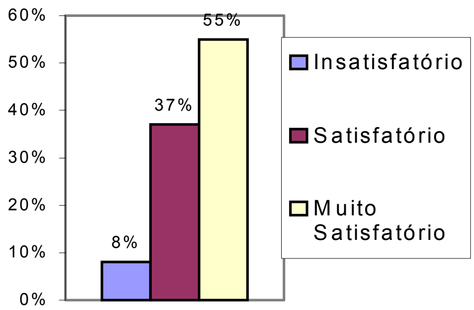
Contribuição das representações múltiplas no entendimento dos conceitos do Cálculo?

Figura 53: Contribuição do Método de Trabalho em relação ao envolvimento com a disciplina



Como você avalia a contribuição do método de trabalho proposto durante o curso em relação ao envolvimento com a disciplina?

Figura 54: Contribuição do Método de Trabalho em relação à interação entre os alunos



Como você avalia a contribuição do método de trabalho desenvolvido durante o curso quanto à interação com os colegas?

□ muito satisfatória

6.3.6 - PRINCIPAIS ASPECTOS DO BRAINSTORMING

Na última semana do curso, foi realizado um debate livre sobre o curso de Cálculo I.

Segue na tabela 14 um resumo dos aspectos levantados:

Tabela 14: Brainstorming Realizado com alunos

ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS
• Maior interação com a matéria • Interação entre os alunos • Diminuição das cobranças algébricas • Uso da informática aplicada ao Cálculo • Vantagem do método ter sido utilizado no primeiro semestre proporcionando uma visão abrangente do Cálculo • Método diferente e interessante • Aplicabilidade • Menor quantidade de erros nas passagens algébricas • Exige autonomia por parte do aluno • Menos tensão quanto ao medo de errar as contas, visto que elas não são o único critério de avaliação.	• Pouco tempo para a realização dos trabalhos • Comodidade de alguns alunos • Falta de interesse de alguns alunos • Quantidade excessiva de trabalhos • Modelagem não deveria ser cobrada em provas • Tempo pequeno para estudo em função das outras disciplinas • Exige autonomia por parte do aluno

Interessante observar que o aspecto autonomia por parte dos alunos aparece como aspecto positivo e negativo em relação às propostas do curso. Provavelmente em função que a maior parte dos alunos estejam acostumados a um modelo tradicional, no qual seguem as instruções do professor, sem questionamentos, sem responsabilidades na condução do curso.

6.4- OBSERVAÇÃO DAS AULAS

6.4.1- EXPOSITIVAS

Na sala de aula, nos momentos onde a teoria era formalmente abordada, através dos teoremas e exercícios padrão de fixação, a fala foi dominada pelo professor. Os alunos basicamente acompanharam o desenvolvimento da matéria escrevendo as informações passadas pelo professor em seu caderno ou apostilas.

Embora o entendimento dos conceitos envolvidos no Cálculo fosse mais palpável, familiar em função do método da modelação e ambientes informatizados, sente-se uma desmotivação, uma impaciência com o rigor matemático das passagens desenvolvidas na demonstração dos teoremas e, quando o exercício torna-se longo, observa-se que alunos conversam entre si, aumenta a freqüência de saída dos alunos da sala de aula, alguns ficam apenas observando o professor em suas demonstrações de fórmulas, teoremas e exemplos e sequer copiam as informações ditadas ou escritas no quadro-negro.

6.4.2- AULAS ENVOLVENDO MODELAGEM MATEMÁTICA

Observou-se uma diminuição na saída dos alunos da sala de aula e a grande maioria que fica permanentemente em sala de aula discute entre si (conversas paralelas sobre o problema em discussão) e participando quando solicitados ou participando por iniciativa própria. Alguns alunos sequer fazem o intervalo para descanso, dedicando-se neste período às atividades em sala de aula. Observa-se a preocupação, em relação às perguntas dos alunos, no saber onde aplicar o conceito e como aplicar o conceito, ou seja, o foco das questões é deslocado para o entendimento dos conceitos. A discussão das idéias supostamente norteadoras dos modelos é intensa, com alunos emitindo suas opiniões, que são listadas no quadro-negro.

6.4.3-AULAS UTILIZANDO AMBIENTES COMPUTACIONAIS

Os alunos trabalharam em dois laboratórios de informática com 12 computadores cada, sendo que cada computador era utilizado basicamente por dois alunos. O conteúdo das aulas não era apresentado sob a forma de teoria. Foram disponibilizadas aos alunos, situações de ensino que envolviam análise gráfica e numérica, através dos softwares Graphmatica, Derive e Modellus. Em relação aos softwares utilizados não foram observadas grandes dificuldades no uso por parte dos alunos, visto que as interfaces eram de fácil utilização e entendimento e devido ao fato de que as atividades propostas não exigiam necessariamente o conhecimento profundo de linguagem de programação, embora alguns já tivessem tal conhecimento através de cursos realizados anteriormente.

De uma maneira geral, as equipes eram formadas pelos mesmos alunos nas aulas de laboratório e observou-se grande interação nas discussões sobre as atividades propostas. Alguns alunos, poucos na verdade, faziam intervenções quanto ao uso dos softwares, mas a grande parte das intervenções eram em relação ao entendimento dos conceitos das atividades propostas. A variação de parâmetros, a construção de novas funções a partir de funções “antigas” foi um ponto de valorização do uso de ambientes informatizados.

A comparação entre resultados numéricos, através das planilhas, e dos ambientes gráficos apresentou também grande poder para a formação de situações de debate dos temas da aula.

A permanência no laboratório é um fator positivo, com poucas saídas dos alunos e o ambiente computacional parece atrair a atenção dos alunos, devido à qualidade dos gráficos e facilidade de analisar os problemas através de processos de tentativa e erro.

O laboratório em si é apenas um ambiente mais dinâmico e motivador da presença e do interesse dos alunos em função do uso de uma tecnologia que para muitos é nova. Com o decorrer do curso, este fator motivacional da tecnologia tende a diminuir consideravelmente. Quando deste ponto, atinge-se realmente os objetivos da proposta, qual seja, as atividades conceituais é que são importantes, de tal forma que o ambiente informatizado propicie agilidade, clareza, facilidade, que seja instrumento da linguagem matemática, que seja uma forma de proporcionar a leitura de um problema, gráfico, numérico ou através de simulações, gerando autonomia de ações, gerando reflexões e abstrações matemáticas dos alunos.

A riqueza das potencialidades dos softwares em conjunto com atividades conceituais e reflexivas torna acessível aos alunos análises matemáticas mais significativas. Podemos afirmar que os ambientes informatizados apresentam-se simplesmente como uma ferramenta auxiliar do professor no processo de ensino-aprendizagem e o que realmente importa é a metodologia adequada no seu uso, ou seja, as propostas devem proporcionar ações dos alunos sobre os objetos matemáticos.

6.5- REFLEXÕES SOBRE O MODELO DE ENSINO-APRENDIZAGEM PROPOSTO

Ao longo de todo o semestre no qual foi aplicado o método proposto, particularmente, ocorreu apreensão quanto ao cumprimento da ementa do curso, prioritariamente quanto à qualidade do conteúdo e de forma secundária quanto ao aspecto quantitativo da ementa. Embora tenha sido elaborada um plano pedagógico do curso, havia aspectos inovadores, visto que era a primeira vez que tal proposta era efetivada. Dentre estes aspectos, a não linearidade do curso, embora com aspectos didáticos efetivos, é um fator a ser constantemente analisado, em relação à abrangência dos tópicos em termos quantitativos e qualitativos.

O curso de Cálculo I, na Faculdade de Engenharia Química de Lorena é composto de 90 horas-aula, sendo que destas, 12 horas-aula foram destinadas a três avaliações escritas. Portanto, sobraram 78 horas-aula para a abordagem do conteúdo do curso. A ementa do curso é composta por muitos tópicos, e em função de todos aspectos quantitativos e das propostas do trabalho, foram necessárias mais 12 horas-aula para que os objetivos traçados fossem atingidos.

Além disso, no decorrer de algumas aulas, onde determinadas informações tivessem que ser escritas pelos alunos, foram disponibilizadas apostilas sobre o conteúdo a ser abordado em tais aulas.

O caráter dinâmico da Modelagem Matemática, como método de ensino-aprendizagem, sempre leva a que conteúdos a serem sistematizados nem sempre façam parte do material didático pré-elaborado. Este aspecto exige muito mais do professor.

Na fala de um aluno: “O curso é muito interessante...mas exige muito dos alunos! E do professor também!”. Esta reflexão do aluno é correta, visto que o número de atendimentos aos alunos acerca das atividades propostas foi substancialmente aumentado em relação a anos anteriores, nos quais a procura era sempre às vésperas das avaliações.

A experiência constitui-se num aprendizado novo para o autor deste trabalho, gerou apreensão de que os objetivos não fossem atingidos. Mas ao mesmo tempo, proporcionou motivação em relação a uma disciplina que já não requeria grande preocupação no preparo das aulas.

Como professor e educador, ocorria a estagnação em relação ao Cálculo Diferencial, de forma que também não ocorria mais as situações de proporcionar aos alunos formas de adaptação do ser individual ao coletivo, à sociedade. Como professor ocorria o exercício apenas de atividades informativas. Esta experiência possibilitou exercer atividades formativas.

É possível utilizar-se Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem num curso regular, onde temos uma carga horária, uma ementa a cumprir? Ao longo do curso, preocupações desta ordem, em sua maior parte, foram diminuindo de intensidade e finalmente desapareceram.

Tal objetivo só efetivamente cumprido em função da utilização de ambientes informatizados e da adoção de uma linha de conduta que não privilegie a ênfase em longos processos algébricos. Repetir, memorizar, decorar..., para conceituar, investigar, cooperar e criar apresenta-se como uma grande possibilidade de fazer Cálculo e não de fazer cálculos.

O método é perfeitamente utilizável como estratégia de ensino-aprendizagem, conforme os instrumentos de coleta de dados evidenciaram. Envolvimento e aquisição de conceitos foram potencializados!

Realmente, a demanda de tempo, tanto quanto do professor, em relação a atendimentos de dúvidas em aula e fora dela, quanto do aluno, em relação ao tempo para elaboração dos trabalhos, pesquisas, utilização de laboratórios para análise e confecção de resultados é substancialmente maior que o modelo tradicional, onde praticamente se estudam métodos repetitivos de solução e praticamente às vésperas das avaliações.

Quanto às restrições de tempo útil do curso para a realização da disciplina e cumprimento dos conteúdos de forma qualitativa e quantitativa, é necessário fazermos considerações a respeito do método de Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem. Um considerável tempo de aula, cerca de 25% (no curso, tentou-se a cada quatro aulas destinar-se uma para a discussão dos modelos) foi destinado à abordagem das situações-problema. A utilização do laboratório de informática esteve em torno de 15% da carga horária de 90 aulas. Ou seja, aproximadamente 40% das aulas foram destinadas ao método proposto, percentual que nos moldes tradicionais seriam dedicados exclusivamente ao cumprimento metódico da ementa.

O método somente é aplicável realmente quando ocorre uma mudança total do objetivos do curso, com a execução de exercícios algébricos rotineiros em sala de aula sendo substancialmente diminuídos. A sistematização dos conceitos é favorecida pelo método, visto que os conceitos principais foram "vivenciados" ao longo das atividades propostas e envolvidos diretamente no método de ensino-aprendizagem proposto.

A proposta de modelagem no Cálculo, como método de ensino-aprendizagem é válida se as múltiplas representações de funções foram utilizadas, levando o professor e alunos a não mais possuirem visões únicas e distorcidas do Cálculo. Conceitos e algebrismos não devem ser adversários entre si e, em relação aos alunos, não devem ser obstáculos.

Ao longo do curso, em função dos vícios de aprendizagem, adquiridos ao longo de anos de escola tradicional, que enfatiza a memorização e exercícios de repetição e que também despreza as atividades de formulação e análise, existe uma resistência por parte dos alunos quanto a métodos que os façam raciocinar, quanto a métodos que os façam participar e como os próprios alunos falam, "correr atrás".

Mas esta resistência tende a ser vencida, desde que as atividades propostas ao longo dos cursos envolvam participação, cooperação, mudança de foco quanto às prioridades de repetição em direção à reflexão, do algebrismo barato à riqueza conceitual da Matemática, do fazer sem saber o motivo, sem saber "onde", para o saber "como", "onde" e "porque".

Durante a análise do trabalho identificamos uma discrepância da ementa em relação às propostas do modelo de curso. No item 05 são destinadas 25 aulas (aproximadamente 28%) do curso à técnicas de integração e nenhum conteúdo de aplicação dos conceitos de integral.

Na grade curricular da Faenquil, algumas aplicações são vistas em Cálculo II, mas acredito ser um erro em relação à utilização da Modelagem Matemática, que depende essencialmente de aplicações. Tal situação será discutida em âmbito do Departamento com os professores envolvidos nas disciplinas matemáticas.

O Cálculo Diferencial e Integral iniciou-se com Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) em um movimento que buscava a explicação de fenômenos da natureza, que possuía e ainda possui como ponto central o conceito de lei quantitativa, de função matemática e que valoriza a ligação entre os diversos campos da Matemática, a Geometria, a Trigonometria, a Álgebra, e às aplicações das Ciências.

Como uma disciplina que se originou da interligação entre diversos campos de saber, da tentativa de explicar fenômenos naturais, pode ser ministrada sem uma ênfase à aplicação, à interdisciplinaridade ? Focando apenas o algebrismo!

Felix Klein foi um dos maiores matemáticos que possibilitaram a visão da importância das aplicações em relação à matemática e é citado por Miorim (1998, p.106):

> “Desgraçadamente essa maneira de pensar ainda bastante difundida, e até hoje existem professores da universidade que não concedem bastante importância às aplicações, considerando-as coisa acessória. Contra tão orgulhosa opinião deve-se lutar sem trégua[...]. Os maiores matemáticos, como Arquimedes, Newton e Gauss, abarcaram igualmente a teoria e a prática”.

Durante a segunda semana do curso um aluno fez a seguinte consideração: “agora eu sei para que servem as funções matemáticas”. O poder da modelagem, como método de ensino-aprendizagem, reside exatamente na ligação entre a teoria e a prática.

As funções são objetos abstratos, as quais podem ser representadas na Matemática por tabelas, gráficos ou formas algébricas. Na Física podem representar movimentos de corpos; pontos de máximo podem representar alturas máximas, inclinação da reta tangente à equação dos espaços representa velocidade.

A modelagem como método de ensino-aprendizagem favorece a ligação entre disciplinas e o fortalecimento dos conceitos nas áreas que se interligam. Os recursos computacionais, internos aos processos de modelagem, ou em atividades isolados, com objetivos de conceituação e generalização, favorecem o aspecto experimental da Matemática.

Em função destas análises, é proposto um plano de curso para a disciplina Cálculo I, conforme anexo número 05.

6.6- ENTREVISTA ESCRITA COM PROFESSORES

Com o objetivo de caracterizar a forma ou formas pelas quais eram abordados os conteúdos do Cálculo na FAENQUIL, os professores que ministraram o curso no primeiro semestre de 2001 foram entrevistados. Salienta-se que um dos professores não foi entrevistado visto que encontrava-se afastado da instituição.

1) Que dificuldades você enfrenta em relação ao processo de ensino de Cálculo?

PROFESSOR ALMEIDA: "Falta de pré-requisitos para o entendimento do Cálculo e fazer com que os alunos, nos momentos em que estão resolvendo exercícios de Cálculo, estejam em sintonia com os elementos conceituais dos mesmos. Dificuldades em tornar realmente efetiva a definição de limite para os alunos".

Professor Erasmo: A principal dificuldade que enfrento no processo de ensino do Cálculo esta na objeção em tentar "mudar", de encarar o novo, de encarar uma nova metodologia de ensino, de sair do tradicional. Hoje, é necessário motivar o aluno, mostrar novas técnicas de ensino do cálculo, informatizar a aula.

2) Que dificuldades você acredita terem os alunos no processo de Aprendizagem de Cálculo?

PROFESSOR ALMEIDA: Dificuldades no entendimento da continuidade, que é decorrência da dificuldade em assimilar o infinito. Dificuldades na incorporação do pensamento diferencial, dificuldades entre grandezas discretas e contínuas. Dificuldades em fazer as transposições da teoria para a prática.

PROFESSOR ERASMO: Acredito que a grande dificuldade dos alunos está na falta de motivação, falta de motivação esta oriunda da não observação da aplicabilidade dos conceitos do Cálculo Diferencial na resolução dos problemas, não só da Engenharia, como da vida cotidiana.

3) Caso suas respostas sejam neste sentido, o que você acredita poder fazer para melhorar o quadro das duas perguntas anteriores.

PROFESSOR ALMEIDA: Procurar fazer com que o ensino do Cálculo seja uma junção dos aspectos teóricos dessa disciplina, com aspectos históricos da mesma, e também com o uso de laboratórios de informática. Procurar criar nas aulas de Cálculo situações em que sejam discutidos elementos filosóficos importantes inerentes ao seu ensino, como o infinito potencial e atual.

PROFESSOR ERASMO: No meu caso preciso informatizar as minhas aulas, sair do ensino tradicional, a meu ver, obsoleto e cansativo.

4) O ensino de Matemática para Licenciatura e Bacharelado deve ser diferente aos das Ciências Aplicadas? Em que sentido?

PROFESSOR ALMEIDA: Eu não julgo que deva existir muitas diferenças nessas abordagens, mas penso que o ensino de Cálculo nos cursos de Engenharia deve ser direcionado para esta área, em que situações e problemas da Engenharia devam ser tratados; mas sem desprezar o aspecto teórico, que julgo muito importante para a criatividade e desempenho do futuro profissional. Para os cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática, considero que o aspecto teórico deva ser relevante, mas sem o abandono também. do aspecto prático, pois o futuro profissional dessa área está inserido em um mundo e situações em que o aspecto prático não pode ser relegado.

PROFESSOR ERASMO: No meu modo de ver o ensino da matemática nos cursos de Ciências Aplicadas como é o caso da Engenharia, deve ser diferenciado .Acredito que deva ser importante para os alunos de Engenharia a utilização de aplicações nos problemas do Cálculo.

5) Atualmente, diversos autores, enfatizam o uso de aplicações nos problemas do Cálculo. Expresse sua opinião quanto a este fato.

PROFESSOR ALMEIDA: Considero isso muito importante, mais para os cursos de Engenharia do que para os cursos de Matemática. Mas é uma abordagem que deve estar em ambos.

PROFESSOR ERASMO: Concordo, plenamente com esta linha de atuação, para os cursos de Ciências Aplicadas, devemos nos preocupar em ensinar o Cálculo Diferencial de modo que, os alunos possam observar de maneira transparente , 'onde' e "como" aplicar os conceitos adquiridos; sem no entanto perder de vista os conceitos teóricos.

6) Que ênfase você dá ao seu curso de Cálculo? Um enfoque algébrico? Um enfoque aplicado? Teórico? Cite outros, caso seja necessário.

PROFESSOR ERASMO: Atualmente nos meus cursos de Cálculo I e Cálculo II estou dando um enfoque algébrico, mas tenho consciência que é necessário mudar rapidamente para um enfoque do Cálculo aplicado . Toda mudança acarreta um sentimento de medo , de receio do novo, de objeção a uma nova metodologia. Mas, é preciso mudar, é uma questão de sobrevivência. Hoje ministramos o Cálculo com a mesma metodologia de meados do século passado. È preciso mudar.

PROFESSOR ALMEIDA: Atualmente eu enfatiso mais o aspecto teórico e algébrico, mas sinto a necessidade de uma mudança. Sinto que o meu curso está defasado em relação ao aspecto prático que considero fundamental.

7) Fale um pouco sobre os tipos de erros cometidos pelos alunos em suas avaliações.

PROFESSOR ALMEIDA: Erros em cálculos algébricos como produtos notáveis, fatoração, soma de frações algébricas, construção e interpretação de gráficos. Os alunos não mostram uma habilidade para trabalharem com a Matemática. Observo também que certos erros são ocasionados pela falta da noção de estimativa que os alunos apresentam.

PROFESSOR ERASMO: Eu me preocupo muito com os erros conceituais dos meus alunos. É fácil encontrar alunos com conceitos dos mais esdrúxulos com respeito a funções, limites, derivadas e integrais. Os alunos encaram cada um destes tópicos, como se fossem conceitos estanques, sem nenhuma interligação entre si. Isto me preocupa muito.

8) Para você qual a importância da contextualização no ensino-aprendizagem do Cálculo? Para você o que quer dizer esta contextualização?

PROFESSOR ALMEIDA: Considero muito importante a contextualização no ensino-aprendizagem do Cálculo. Para mim, contextualização significa transportar para o Cálculo, através da Modelagem, Projetos e Problemas relacionados com a Física e outras disciplinas afins. Problemas que representam situações de cotidiano e acadêmicas.

PROFESSOR ERASMO: O ensino do Cálculo deve estar próximo ao aluno. De que adianta somente falar de situações geométricas se o aluno não se interessa por isso. Noto que quando usamos temas ligados à Química ou Física, o interesse é muito maior.

9) Fale um pouco da necessidade ou não do uso de ambientes informatizados no Cálculo. Você utiliza algum ambiente informatizado nas atividades de aula?

PROFESSOR ALMEIDA: Como já declarei anteriormente, julgo fundamental a junção da teoria, prática e o uso de ambientes informatizados. O uso de computadores agiliza a realização de experimentos e exercícios, direcionando o tempo que seria empregado para a realização dos mesmos, para discussões, estudos e aprofundamentos de situações teóricas e práticas desses exercícios e experimentos.

PROFESSOR ERASMO: Creio que seja um fator primordial a necessidade do uso de ambientes informatizados no ensino – aprendizagem do Cálculo. Ao mesmo tempo em que a utilização de computadores acarreta a motivação do aluno leva a observação imediata do uso dos conceitos na resolução de problemas.

10) Você utiliza representações múltiplas em seu curso de Cálculo? Para você qual a importância ou não destas representações algébricas, numéricas e gráficas?

PROFESSOR ERASMO: Como já disse, infelizmente dou um enfoque algébrico ao meu curso, mas a meu ver o uso de representações gráficas e numéricas é de fundamental importância nos cursos de Cálculo, por tudo que já foi falado no intuito de motivar e visualizar a aplicabilidade dos conceitos do Cálculo.

PROFESSOR ALMEIDA: Considero muito importantes todas as representações elencadas. Mas, atualmente, por desconhecimento das outras, utilizo somente representações algébricas e gráficas. Mas em um futuro muito próximo, vou me interar sobre as representações numéricas.

11) Você utiliza Modelagem Matemática em suas aulas? Mesmo sendo negativa a resposta, tem algum conhecimento sobre o uso de Modelagem Matemática em cursos de Cálculo? O que acha deste recurso?

PROFESSOR ALMEIDA: não utilizo Modelagem Matemática em meus cursos de Cálculo, por desconhecimento da mesma. Considero fundamental o uso de Modelagem Matemática nos cursos de Cálculo. Futuramente, e já atualmente, não consigo imaginar um curso de Cálculo sem esse tratamento.

PROFESSOR ERASMO: Não utilizo modelagem em meus cursos e tenho conhecimentos de modelagem apenas como técnica de resolução de problemas ligados à Engenharia, visto minha formação de engenheiro. Nunca a utilizei como técnica de ensino.

6.6.1- REFLEXÕES RELATIVAS ÀS ENTREVISTAS COM PROFESSORES

Em relação às respostas, alguns aspectos são de interesse em relação a este trabalho. Observamos a preocupação do professor Almeida quanto ao entendimento e assimilação do pensamento diferencial. Mas o que seria este pensamento diferencial? O pensamento diferencial tem como base a noção e a definição do pensamento matemático do contínuo, da representação das grandezas no campo dos números reais. O Cálculo tem como objeto matemático básico o conceito de limite, cuja idealização deu-se com Newton, passando por matemáticos do porte de Cauchy, até a sua formalização rigorosamente matemática por Karl Weierstrass.

O "limite" é um objeto matemático que normalmente não é assimilado pelo aluno corretamente e normalmente de forma incompleta. A definição formal do limite é passada ao aluno sem que o mesmo entenda a essência de seu conteúdo matemático, o da caracterização de um conjunto numérico: o conjunto dos reais. São colocadas como dificuldades as grandezas contínuas e discretas. Esta opinião é refletida pela realidade da discretização dos fenômenos estudados na Engenharia ou dos fenômenos naturais que nos cercam. Grandezas como o tempo, ou medidas de quantidade são valores discretos e, no entanto, estudados como contínuos no Cálculo. Portanto, o aluno vê como discreta uma variável e analisa tal variável como possuindo um comportamento contínuo. A utilização das representações múltiplas proporciona a ligação entre o discreto e o contínuo e portanto, interliga estes dois contextos, a partir das estratégias dos alunos.

A importância dos limites ou dos infinitésimos para o Cálculo, no sentido de formalização de seus operadores como integrais e diferenciais, apresenta-se na mesma proporção para o estudo da Física, em função da possibilidade de descrição quantitativa de diversos fenômenos.

A fala do professor reflete sua preocupação com o tratamento numérico. Mas o Cálculo, por si só, como é atualmente ensinado não possui o enfoque numérico, que somente ocorrerá, a posterior, dissociado, em uma outra disciplina, cerca de dois semestres letivos depois. O professor também, enfatiza sua preocupação com o aspecto prático da disciplina.

Ambos realçam sua preocupação com o aspecto conceitual do curso e relaciona este aspecto à ausência da ligação entre os assuntos abordados. Para o professor Erasmo, o aluno vê os conteúdos como independentes.

Ainda coloca, em suas respostas, a ocorrência de erros algébricos por parte dos alunos e ausência de noções de estimativas.

As noções de estimativas, por certo, não podem ser encontradas em processos algébricos, visto que, tais processos não admitem estimativas, são estruturalmente baseados em regras, dualmente certos ou errados. A noção de estimativa abre campo para a ação do aluno sobre o objeto matemático do Cálculo, mas certamente não passa somente pela análise algébrica do problema estudado. As inferências dos alunos somente poderão ocorrer em ambientes multirepresentados nos quais as ações dos alunos, sejam o fator diferencial do Cálculo. Em ambientes gráficos e numéricos, informatizados ou não, as inferências dos alunos conduzem à generalização conceitual de uma situação.

As noções do uso de estimativas conduzem a um ambiente gráfico ou numérico, complementando o ambiente algébrico. Mas o que devemos utilizar dentro destes ambientes para que o poder de "estimar", matematicamente ou fisicamente esteja presente? A resposta a esta pergunta passa pela palavra proposta de ensino-aprendizagem que privilegie tratamentos numéricos, gráficos, algébricos ou interdisciplinares e nos quais a tecnologia esteja presente como instrumento de auxilio no processo de ensino-aprendizagem, mas que, além de auxilio, possa ser ambiente de criação do aluno no tocante às atividades do Cálculo que fundamentem os conceitos e proporcionem a interligação dos mesmos em diferentes contextos..

6.7- ANÁLISE DOS OBJETIVOS E HIPÓTESES DA PESQUISA

Durante a etapa inicial desta proposta, consideramos a dificuldade que seria enfrentada quanto à proposta de mudança de atividades algébricas para atividades conceituais. Todo a atenção dos alunos é direcionada em relação a processos algébricos. Preocupam-se em fazer e refazer exercícios pois foram educados, em sua maior parte, através de métodos que privilegiaram a repetição e a memorização de algoritmos algébricos.

Para que tais objetivos fossem atingidos foi necessária a construção de um caminho pedagógico cuidadosamente construÍdo pelo professor e percorrido por alunos e professores com atitudes e situações que proporcionassem o ganho conceitual em detrimento do algebrismo gratuito.

Este caminho pedagógico foi mapeado de tal forma que os elos da cadeia de ensino-aprendizagem não estivessem desvinculados. Motivação e avaliação deveriam ser calcados na mesma base. Motivação e avaliação tiveram como cerne as atividades de modelagem, as trocas de informação e compartilhamento de idéias entre os alunos, a liberdade de escolha de métodos de solução dos problemas.

A participação efetiva dos alunos em uma atividade acadêmica passa pela descentralização do poder supremo do professor. Desta forma, foram desenvolvidas atividades, sejam elas de modelagem ou em ambientes informatizados, nas quais o aluno era o principal responsável pelo sucesso pessoal, de sua equipe, do curso e do próprio método.

A fim de que esta participação ocorresse, a seqüência do curso foi estabelecida em função de um modelo diretor, no qual os tópicos seguintes seriam abordados somente a partir da resolução de determinada etapa do modelo. Desta forma ocorreu a exigência do comprometimento dos alunos para a seqüência do curso.

O estabelecimento de uma empresa fictícia na condução do modelo diretor proporcionou a realização de um trabalho coletivo no qual exigência, participação, cobrança, responsabilidade eram exigidos a partir de ações dos próprios alunos.

O comprometimento dos alunos é de uma certa forma influenciado pelo evento dos seminários, com a apresentação de seus trabalhos para a sala e outros professores convidados.

O caráter quantitativo e qualitativo das consultas ao professor e o comparecimento efetivo e eficaz dos alunos às aulas foram observados durante o curso, conforme mostram as observações nos ambientes propostos.

O brainstorming realizado na última semana do curso revelou aspectos favoráveis à escolha do método e ao alcance dos objetivos. São pertinentes ao método as opiniões dos alunos: o método proporciona maior interação com a matéria e entre os alunos; diminuição das cobranças algébricas, menor quantidade de erros algébricos e menos tensão quanto ao medo de errar contas, visto que não são o único critério de avaliação.

Desta forma, as preocupações iniciais quanto ao algebrismo se revelaram na fala dos alunos e o método proposto, através das atividades modeladoras e informatizadas proporcionaram este novo rumo ao ensino e aprendizagem do Cálculo.

A abordagem multirepresentada dos problemas foi crucial para que o objetivo conceitual do curso fosse atingido. As atividades sistematizadoras caminharam na mesma linha das propostos norteadoras do curso: o fortalecimento dos conceitos através de análises não somente algébricas, mas sim complementadas, nos ambientes informatizados, pela análise gráfica e numérica. Tais atividades foram descritas no capítulo IV, tanto em relação aos modelos, quanto em relação ao uso dos ambientes informatizados.

O objetivo de uma proposta desta ordem, que muda radicalmente, a maneira pela qual os alunos encaram a Matemática e, em particular, o Cálculo, só é realmente atingido, e o foi, se a dinâmica total do curso esteja baseada na visão multirepresentada dos problemas. Modelos, atividades informatizadas, exercícios de sistematização e avaliação devem ser multirepresentados. A mudança do foco algébrico passa pela criação de um ambiente de aula construído pelo aluno, de modo que, ele veja a potencialidade da Álgebra como corpo do Cálculo, mas que também consiga agir, de forma complementar, em contextos diferentes.

Os gráficos apresentados no item 5.3.5 nos mostram que 55% dos alunos consideram o método muito satisfatório quanto ao aspecto interação com os colegas. Interessante observar que os alunos que faziam a disciplina pela segunda vez ou mais, em sua maior parte, classificaram o método como insatisfatório quanto ao aspecto interação, provavelmente devido ao fato que só faziam aquela disciplina com a turma, não convivendo por mais tempo a não ser no tempo de aula e muito raramente nos trabalhos, pelo conflito de horário entre a turma que cursava as mesmas disciplinas e eles que cursavam disciplinas de semestres posteriores.

A ordem de grandeza do percentual que avalia o método como positivo, com a margem de erro embutida em função de aspectos como alunos que respondem para agradar o professor em sua pesquisa, nos dá a certeza que o método apresenta um potencial para que aspectos de interatividade entre professor e alunos e entre os próprios alunos, tornando-se um fator de socialização de conhecimentos.

Quanto à contribuição do modelo proposto em relação ao envolvimento do aluno com a disciplina, 41% classifica como satisfatório e 37% como muito satisfatório. Setenta e oito por cento da turma indicam portanto, a utilização de ambientes informatizados, Modelagem Matemática e representações múltiplas como elementos de metodologia de ensino-aprendizagem capazes de provocarem um envolvimento efetivo do aluno com a disciplina.

Em relação à importância do método quanto ao auxílio no entendimento dos conceitos do Cálculo, os resultados "negativos" apresentados no gráficos podem ser resumidos na tabela abaixo:

Tabela 15: Resumo de resultados "negativos"

Compreensão sobre o assunto funções	22% consideram insatisfatória a contribuição do método
Compreensão sobre o assunto limites	30% consideram insatisfatória a contribuição do método
Compreensão sobre o assunto derivada	21% consideram insatisfatória a contribuição do método
Compreensão sobre o assunto Integrais	39% consideram insatisfatória a contribuição do método

O assunto aplicação de integrais não consta da ementa do curso de Cálculo I e devido a este fator, ocorreu um pouco tempo destinado ao assunto aplicação de integral. Tal assunto só foi abordado no último bimestre do curso, sob a forma de discussões provocadas pelo modelos (no caso o modelo das embalagens e o modelo do consumo de energia). Portanto, enquanto os assuntos limites, derivadas e funções eram abordados, discutidos durante todo o curso, o mesmo não ocorreu em relação ao assunto Integração. Desta forma, o percentual de 39% que considera insatisfatória a contribuição do método ao assunto integral se justifica.

Em termos de utilização dos modelos quanto ao assunto limites, 30% dos alunos consideram como insatisfatória a contribuição do método. Percentual considerado elevado, visto que o assunto limites, regra de L'Hôpital foi debatido ao longo do curso e não somente no último bimestre como foi o assunto integral. Este percentual pode ser devido ao fato que a avaliação do assunto limites envolve pela sua própria natureza, um tratamento fortemente algébrico, com muitos conhecimentos de simplificações algébricas e trigonométricas. Embora, o método propiciasse a análise numérica e gráfica dos limites através dos ambientes informatizados, o ferramental algébrico dos limites é exigido nas análises, visto que análises numéricas eventualmente constituem-se em erros de análises de limites e o fator gráfico só pode ser executado com facilidade em ambientes informatizados, ambiente presente apenas em algumas aulas nas atividades do curso.

Quanto aos assuntos funções e derivadas o percentual de insatisfação esteve em torno de 20%. Esse percentual relativamente menor em relação aos demais conteúdos do curso podem ser explicados pelo número de aulas, discussões e propostas envolvidas nos modelos quanto a estes conteúdos.

Tabela 16: Resumo de percentuais de insatisfação quanto às propostas do trabalho

Contribuição do método da modelação matemática para o entendimento dos conceitos do Cálculo.	18% consideram insatisfatória
Contribuição das representações múltiplas no entendimento dos conceitos do Cálculo.	15% consideram insatisfatória
Contribuição dos ambientes informatizados no entendimento dos conceitos o Cálculo.	17% consideram insatisfatória

Os percentuais mais baixos de desaprovação do método foram colhidos nas etapas de representações e ambientes informatizados, visto que se confundiam, pois a maior parte destas representações múltiplas foram realizadas no laboratório de informática. Este número era esperado pelo caráter motivacional, de dinâmica que o computador e softwares “atraentes” proporcionam ao aluno. É característica desta geração que a informática está presente em todos os setores da sociedade e porque não estariam no Cálculo? Então proporciona-se o que eles desejam. Usar o computador (de uma forma simplista) como facilitador dos seus trabalhos. A utilização dos ambientes informatizados proporciona muito mais do que isso, mas nas entrevistas, um fator sempre citado é a facilidade de obtenção das respostas. Um comentário, até certo ponto curioso, de um aluno: “agora posso saber a resposta dos pares!”, referenciando-se ao fato de que os livros normalmente apresentam a resposta dos exercícios impares somente. É a tendência natural do aluno ao lado prático de toda ferramenta tecnológica-pedagógica, a busca pelo caminho mais fácil, que nem sempre é o melhor, pelo menos em termos conceituais.

6.8- ANÁLISE ESTATÍSTICA

A análise estatística, em relação ao modelo de ensino-aprendizagem proposto ocorreu sob quatro modalidades:

- Modalidade A): Os alunos foram divididos em dois grupos amostrais, sendo que o primeiro constitui-se de alunos que não foram submetidos ao modelo de ensino-aprendizagem proposto e o segundo grupo foi formado pelos alunos submetidos ao método proposto. O grupo nº 1 foi composto por cinco turmas e três professores diferentes; numa tentativa de minimizar as diferenças quanto aos estilos dos professores, de níveis de exigência, formas de avaliação, dentre outros aspectos. Desta forma, escolheu-se ao invés de comparar individualmente cada turma não submetida ao método com a turma objeto de estudo, formar-se um grupo único, o qual foi submetido aos critérios estatísticos de comparação.
- Modalidade B: Foi realizada uma comparação entre cinco turmas que não utilizaram o método e a turma objeto de estudo, desta forma levando-se em conta as diferenças inerentes aos professores.
- Modalidade C: Foram analisados os resultados obtidos pela turma objeto de estudo em relação a três avaliações realizadas pelos alunos

ao longo do semestre. As avaliações abrangeram o entendimento dos seguintes conceitos:

P1: funções, limites e derivadas

P2: integrais

T: trabalhos envolvendo modelagem e ambientes computacionais.

- Modalidade D: Foi realizado também um estudo comparativo em relação aos resultados obtidos na disciplina Cálculo II em relação a alunos pertencentes à turma de amostragem e demais alunos que cursaram Cálculo I sem a utilização das propostas deste trabalho.

Nas análises estatísticas foi utilizado o software GraphPad InStat, e será utilizado o teste das hipóteses, baseado na probabilidade de significância (p-valor) da estatística de teste observada, que mede a força da evidência contra a hipótese nula H_0. A hipótese nula (Werkema, 1996, p.88) "é uma afirmação sobre um parâmetro populacional que será considerada verdadeira até que seja obtida alguma prova em contrário."

Werkema (1996, p.119) define o p-valor como sendo "a probabilidade de ocorrência do valor observado para a estatística de teste ou de valores mais extremos, na direção da região crítica, quando a hipótese nula H_0 é verdadeira."

O p-valor é desta forma utilizado no teste de hipóteses, para a tomada de decisão em relação à hipótese H_0, rejeitando-a ou não. A regra de decisão baseada no p-valor é dada por:

Se p-valor $< \alpha$ então Rejeitar H_0.

Se p-valor $\geq \alpha$ então não rejeitar H_0.

Nos testes do p-valor, α representa o coeficiente de confiança, o qual determina a região na qual os valores, no caso, das notas dos alunos, estarem mais provavelmente localizados em torno da média, adotado como 0,05.

Tabela 17: Resultados (Modalidade A) através do software Graphpad InStat

	Grupo nº 1	***Grupo nº 2***
Tamanho da Amostra	195	44
Média	4,14	5,3
Desvio Padrão	2,67	1,73

Nesta modalidade, os alunos foram divididos em dois grupos amostrais, sendo que o primeiro grupo constitui-se de alunos que não foram submetidos ao método proposto e o segundo grupo foi formado pelos alunos submetidos ao modelo de ensino-aprendizagem proposto. O primeiro grupo foi composto por alunos provenientes de cinco turmas e três professores diferentes. O objetivo desta formação, a de união de todas as cinco turmas, foi a tentativa de minimizar possíveis diferenças de níveis de avaliação de professores, características pessoais dos professores, dentre outros fatores. Desta forma, a variável de interesse foi o método de ensino, quanto ao fato de usar ou não modelagem e ambientes informatizados. Observa-se que, numa abordagem posterior, tais diferenças seriam abordadas, visto que os cinco grupos seriam estudados individualmente e comparados com o grupo de interesse (grupo 2).

Observa-se que o grupo número 2 possui um desvio padrão menor que o apresentado pelo grupo número 1, indicando uma distribuição das notas mais próximas do valor médio. Tal distribuição parece indicar que o método proposto consegue influenciar significativamente uma quantidade maior de alunos, em relação às notas de avaliação por eles obtidas.

A dispersão dos dados também foi caracterizada em termos relativos ao seu valor médio, levando-se em conta a ordem de grandeza dos valores obtidos. A vantagem da caracterização dos dados em relação ao valor médio evidencia-se no fato de que uma pequena dispersão absoluta pode ser considerável quando comparada com a ordem de grandeza dos valores da variável. Esta medida é dada pelo coeficiente de variação que é dado por (Neto, 1977, p. 29) :

$$Cv(x) = \frac{s(x)}{\bar{x}}$$

Para os dois grupos amostrais foram encontrados:

Tabela 18: Coeficiente de Variação, Modalidade A

Grupo nº 1	Grupo nº 2
0,64	0,33

O grupo nº 2 apresenta um percentual (33%) de dispersão, estando mais concentrado em torno da média que o grupo nº 1.

A aplicação do software estatístico GraphPad InStat, utilizando o método de Mann-Whitney, a estes dados, fornece um valor de probabilidade de significância dado por $P=0,0110<0,05$, considerado significativo, sendo descartada a hipótese nula de que as médias das notas dos dois grupos fossem iguais. Portanto, as populações diferem a um nível de significância de 5% e o método de ensino-aprendizagem infuencia a média das notas dos alunos. Observa-se que a média obtida pelo grupo nº 2 é 28% superior ao do grupo nº 1.

Modalidade B:

São apresentados os resultados das notas finais de todas as turmas de Cálculo I, no primeiro semestre de 2001, sendo que o grupo F constitui-se no grupo objeto de análise. Os demais grupos (no total de %) foram submetidos ao método tradicional de ensino de Cálculo. Observa-se que estes cinco grupos formavam o grupo nº 1 da modalidade A. Nesta análise, estariam portanto, consideradas as diferenças entre os professores, os critérios de avaliação de cada professor, dentre outras características, além do método proposto e o tradicional, embora não fosssem particularizadas as diferenças inerentes aos professores.

Tabela 19: Resultados (Modalidade B) através do software Graphpad InStat

Grupos	A	B	C	D	E	F
Tamanho da amostra	48	33	38	46	30	44
Média	4,05	4,3	4,61	4,33	3,55	5,3
Desvio Padrão	2,67	2,86	2,69	2,52	2,44	1,73

Os coeficientes de variação são dados por:

Tabela 20: Coeficiente de Variação, Modalidade B

GRUPOS	A	B	C	D	E	F
Coeficientes de Variação	0,66	0,67	0,58	0,58	0,69	0,33

Novamente, o percentual de dispersão em torno da média para o grupo objeto de análise foi o menor de todos (0,33) caracterizando uma melhor distribuição das notas da turma F em torno da média das notas da população amostral, evidenciando-se, provavelmente, um método no qual uma parte maior dos alunos consegue médias mais próximas da média da sala e desta forma o método de ensino-aprendizagem possui uma eficácia maior.

Aliado a esta análise da média comparativa das turmas, foram levantados os percentuais de aprovação:

Tabela 21: Resultados (Modalidade B)- Percentuais de Aprovação

Grupos	A	B	C	D	E	F
% Aprovação	46,8	50	54	52,2	44,8	61,4

Os dados indicam um percentual de 61,4% de aprovação em relação à turma de interesse (F), o que pode ser creditado ao método proposto ou às características do professor. Uma validação melhor poderia ser obtida se duas ou mais turmas, nas quais os diferentes métodos de ensino-aprendizagem fossem aplicados, fossem pertencentes ao mesmo professor. Desta forma, poderia-se eliminar das análises as variáveis relativas ao professor que influenciariam as médias. Tal análise foi realizada

MODALIDADE C:

Em relação ao grupo F, as avaliações ao longo do semestre foram divididas em três, designadas como:

P1= prova sobre os assuntos funções, limites e derivadas

P2=prova sobre o assunto integração

T= trabalhos envolvendo atividades de modelagem, ambientes informatizados e exercícios de sistematização.

As médias finais dos alunos do grupo F foram avaliadas pelo software GraphPad InStat:

Tabela 22: Resultados (Modalidade C) através do software GraphPad InStat

	P1	P2	T
Tamanho da Amostra	44	44	44
Média	5,92	4,79	6,92
Desvio Padrão	1,84	2,08	1,34

Em relação aos dados das tabela acima, observa-se:

- a média obtida pelos alunos na P1 foi aproximadamente 24% acima da média obtida na P2, o que pode indicar a validade da eficácia do método proposto no tocante aos conceitos avaliados, visto que foram desenvolvidas, ao longo do curso, um número consideravelmente maior de atividades ligadas à modelagem e ambientes informatizados, no tocante aos assuntos da P1 do que em relação à P2. A maior contribuição do método ocorreu em relação aos conteúdos do Cálculo Diferencial e não aos conteúdos do Cálculo Integral. Observando-se a influência destas atividades no entendimento dos conceitos do Cálculo.

- A média de 6,92 obtida em relação aos trabalhos certamente possui a influência dos trabalhos, em sua maior parte, terem sido realizados em grupo e com prazo em torno de uma semana para a entrega, e , portanto, ocorrendo a troca de informações entre os alunos.

MODALIDADE D:

O Cálculo I tem por objetivo o estudo de funções de uma variável e o Cálculo II aborda os mesmos conceitos, porém, em relação a duas ou mais variáveis. Com o objetivo de se verificar a influência do método em relação aos fundamentos do Cálculo, necessários aos Cálculo II, foram formados dois grupos amostrais. O primeiro grupo sendo formado por alunos que não cursaram Cálculo I utilizando o método proposto, e o segundo, utilizando tal método.

A aplicação do software Graphpad inStat em conjunto com o cálculo do coeficiente de variação mostrou:

Tabela 23: Resultados (Modalidade D) através do software GraphPad InStat

	Grupo 1	Grupo 2
Tamanho da amostra	103	25
Média	5,83	6,31
Desvio Padrão	2,45	2,31
Coeficiente de Variação	0,42	0,37

Novamente, o coeficiente de variação mostrou que os dados estavam muito mais dispersos, em relação à média, no tocante ao grupo número 1, evidenciando-se que o método tradicional não proporcionou aos alunos a base necessária ao Cálculo II.

A aplicação do teste de Mann-Whitney, revelou um valor de probabilidade de significância dado por $p=0,4311>0,05$ e portanto, considerado não significativo. Desta forma, por esta análise a hipótese nula não pode ser desprezada, de modo que, o método não influencia significativamente os resultados de uma turma de alunos em função do método de ensino-aprendizagem proposto. Observa-se, contudo, que a média do grupo 2 foi superior a do grupo 1.

Uma análise interessante seria o estudo do rendimento de alunos de Cálculo II trabalhando com modelagem, ambientes computacionais e formas multirpresentadas, porém, provenientes de um modelo tradicional de ensino-aprendizagem de Cálculo I, com ênfase no algebrismo.

Embora, estas análises estatísticas não levem à consideração totalmente positiva do método proposto, nada a contraria. De uma forma geral, todas as modalidades estudadas conduziram à potencialidade do método como uma forma positiva para a obtenção de resultados por parte dos alunos, reforçando a análise qualitativa das respostas dos questionários e observações realizadas nas atividades de aula.

6.9 -PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

Como uma extensão, com objetivos de uma inclusão, no mínimo, nas matemáticas, existe a necessidade de um trabalho na mesma linha de conduta em relação às outras disciplinas exatas do ciclo básico da Engenharia. Esta extensão, exige a criação de um conjunto de situações a serem modeladas e uma pesquisa bibliográfica de situações envolvendo funções de duas ou mais variáveis. Desta forma, uma proposta para futuros trabalhos constitui-se na extensão deste método para todo o ciclo da matemática da Engenharia Química, notadamente, em situações que envolvam aspectos da Termodinâmica, de Transmissão de Calor, de Mecânica dos Fluidos e Cinética Química. Uma atualização e melhoria de qualidade do ensino-aprendizagem das matemáticas da Engenharia é um trabalho de considerada importância.

Recomenda-se para futuros trabalhos a inserção do uso de calculadoras gráficas conectadas a sensores e coletores de dados, de forma que realmente, em sala de aula, os alunos passem por todos os processos da modelagem.

6.10-CONCLUSÕES

A abordagem de um curso de Cálculo Diferencial e Integral utilizando Modelagem Matemática, ambientes computacionais e representações múltiplas apresenta-se como uma forma de mudança na direção dos rumos dos métodos de ensino-aprendizagem utilizados na Faculdade de Engenharia Química de Lorena e em outras instituições nas quais se estudam as chamadas aplicações da Matemática.

No sentido da junção de modelagem, ambientes computacionais e representações múltiplas, vale realçar algumas considerações de Borba e Penteado (2001, p.43):

> “O enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido feedback das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas. Por outro lado, essa prática pedagógica estimula a utilização de problemas abertos, de formulação de conjecturas em que a sistematização só se dá como coroamento de um processo de investigação por parte de estudantes (e, muitas vezes do próprio professor)”.

E seguem afirmando que:

> “...tal prática está também em harmonia com uma visão de construção de conhecimento que privilegia o processo e não o produto-resultado em sala de aula, e com uma postura epistemológica que entende o conhecimento como tendo sempre um componente que depende do sujeito”. Finalmente concluem: “Para nós, uma tal prática é a modelagem”.

Este trabalho enfatiza como um dos problemas metodológicos do ensino do Cálculo Diferencial e Integral a abordagem isolada, ou seja, a algébrica. Como proposta de mudança de foco, em relação a como o aluno vê a disciplina, o trabalho desfocaliza por completo as ações algébricas, gráficas ou tabelares. Não há prioridades em relação a métodos de resolução ou de análise, visto que todos são passíveis de serem usados nos trabalhos propostos, e de maneira complementar, através das atividades de modelagem e ambientes computacionais.

Assim, uma tabela de dados, complementa a análise de um gráfico, proporcionando análise discreta ao problema, em conjunto com a visão total, gráfica do problema. Desta forma, a análise algébrica, funcional é complementada e potencializada por representações numéricas ou gráficas. A utilização de problemas modeladores porém, leva o foco da aula, do próprio curso, em relação ao debate dos temas, à cooperação, de forma que idéias diferentes, de vários alunos se completem, trocando informações, socializando o conhecimento.

Que tipo de engenheiro desejamos formar? Caso a resposta seja em direção a um profissional que mais do que ser ensinado, saiba aprender, então, a metodologia proposta neste trabalho, com a transformação da sala de aula num local de discussão, de participação, de investigar, de reflexão, de construção de conhecimentos, aponta para processos centrados nos alunos, nos quais ocorram um efetivo envolvimento do aluno com a disciplina. Caso seja em direção a um profissional puramente metódico, sem criatividade, sem poder de decisão, a direção aponta para métodos tradicionais, centrados no professor e com abordagens lineares e visões microscópicas dos problemas, sem poder de investigação e sem autonomia no processo de aprendizagem.

Não devemos formar máquinas, que somente devem cumprir ordens! Devemos formar profissionais que devem estar adaptados e saberem adaptar-se a situações nas quais muitas vezes ele não é apenas ouvinte, apenas passivo, apenas recebedor de ordens. Formamos profissionais que devem ser participativos, cooperantes e com poder de decisão, de busca de caminhos, portadores da palavra-chave envolvimento.

Em relação ao Cálculo Diferencial e Integral a direção é no sentido das aplicações do Cálculo; saber porque fazer Cálculo é uma resposta fundamental ao alunos dos cursos de Engenharia. Mas sem desprezar o rigor matemático! A notação formal, correta, ou o formalismo dos teoremas deve existir nos cursos de Engenharia. Não de forma gratuita, mas fazendo parte de um processo.

No Cálculo está a ligação da Matemática ao mundo real, em sua origem ao buscar soluções de problemas de tangentes, importante no século XVI a XVII no estudo da lentes, ou séculos antes de Cristo, na solução do cálculo de áreas com contornos curvilíneos, ou no seu brilho de unir estes dois problemas. É muito mais vivo do que fazer contas ou aprender teoremas de forma acabada! Sem ligações históricas! Sem significados!

O Cálculo fundamentou as possibilidades do estudo do contínuo, proporcionando desta forma o estudo dos movimentos e posteriormente sua associação a processos físicos, como estudo de movimentos dos corpos celestes, dentre outros estudos. Sua grandiosidade e respeito adquirido por quem o estuda passam pela visão da disciplina como uma linguagem e não apenas como um método de resolver problemas. Resolver problemas requer metodologias, que se treinadas, podem ajudar a resolver os problemas até mesmo por analogias.

A disciplina é um conjunto de métodos de resolução de problemas. E métodos podem ser memorizados!. Instruídos e não construídos!

Como linguagem, ele é universal! É mais do que um método. É mais do que resolução de problemas! Muitos problemas são resolvidos por alunos e quando perguntados sobre algum tipo de análise, o desastre é total. O Cálculo está associado à leitura, à interpretação de fenômenos das Ciências. A leitura deve estar associada à reflexão da natureza dos problemas. Sabendo ler, interpretar, não importa ao aluno particularizar qual seja a situação matemática! A leitura matemática, como poder interpretativo, só é possível quando os conceitos foram realmente fundamentados e não simplesmente memorizados.

Devem ser proporcionadas aos alunos atividades nas quais o envolvimento esteja na direção de atividades conceituais, em visões múltiplas do mesmo problema, em atividades nas quais a valorização do aluno seja em direção ao seu interior, de como ele vê um problema a ser resolvido, e caso necessário seja, redirecioná-los, ou após seus erros, levá-los a processos de reflexão de análises conceituais. Estas características estiveram presentes na proposta de trabalho, visto que são inerentes ao método da Modelagem Matemática e propositalmente construídas nas etapas de uso dos ambientes informatizados e nas atividades de múltiplas representações.

É pertinente uma citação de Einstein:

> "Em verdade, é pouco menos que um milagre que os métodos modernos de educação não tenham ainda estrangulado inteiramente a sagrada semente da inquirição, pois esta delicada planta, além do estímulo, necessita principalmente de liberdade; sem esta, ela é inevitavelmente levada à destruição e à ruína".

Referências e Obras Consultadas

- Almeida, C. R. O., A qualidade do ensino em uma faculdade de Engenharia química, dissertação de mestrado, Centro Universitário Salesiano de São Paulo, 1998.
- Abbagnano, N., Dicionário de Filosofia, São Paulo, Editora , Editora martins Fontes, 1999.
- Anton, H..Cálculo Um novo horizonte, Volume 1, Editora Bookman, 2000.
- Araújo, C.S., Representação dinâmica de Variância e da Covariância no contexto de um novo paradigma, Pedagogia da Teoria da Medida, Universidade Gama Filho, Rio de Janeiro, 1998.
- Baldino, R. R., Desenvolvimento de Essências de Cálculo Infinitesimal, volume 4, Série Reflexão em Educação Matemática, MEM/USU, 1998.
- ________., Cálculo Infinitesimal: Passado ou Futuro, Revista Temas e Debates, Ano VIII- nº6, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1995.
- Barbosa, J. C., O que pensam os professores sobre a Modelagem Matemática?, Zetetiké, v.7, nº 11, CEMPEM-UNICAMP, Jan./jun. de 1999.
- Barros, M.T., Motivando a construção do saber matemático, Boletim da Educação Matemática, ano 3 nº 4 ,pg. 51-54, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" UNESP – Rio Claro, 1988.

- Bassanezi, R. C., Modelagem Matemática – Experiências no Cálculo, Boletim da Educação Matemática, ano 3 nº 4, pg. 41-49, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Unesp-Rio Claro, 1989.
- Bean, D., O que é Modelagem Matemática?, Revista Educação Matemática em Revista, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 8 nº 9/10, p. 49-57, Abril 2001.
- Bicudo, M. A V., Relação entre a pesquisa em educação matemática e a prática pedagógica, Boletim de Educação Matemática, ano 7, nº 8, p. 7-14, 1992.
- Biembengut, M. S., Modelagem Matemática no Ensino, Editora Contexto, 2000.
- ________, Modelagem Matemática e Implicações no ensino-aprendizagem de Matemática, Editora da Furb, 1999.
- _________, Uma proposta para o ensino de Cálculo, Revista Temas e Debates, Ano VIII- nº6, p. 44-59, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1995.
- Bizelli, M. H. S. S., Borba, M.C., O conhecimento matemático e o uso de softwares gráficos, pag 45-54; Educação Matemática em Revista, Ano 6, nº7, Julho 99.
- Borba, M. C., Informática trará mudanças na educação brasileira?, Zetetiké, V.4, p. 123-134, jul/dez 1996.
- ______ e outros, Calculadoras Gráficas e educação matemática, Editora Arte Bureau, 1999.

- _______, Computadores, Representações Múltiplas e a Construção de Idéias Matemáticas, Boletim da Educação Matemática, ano 9- Especial nº 3, pag. 83-102, 1994.
- ________, Penteado,M.G., Informática e educação matemática, Coleção tendências em educação matemática, Autêntica Editora, 2001.
- ________, Meneghetti, R. C. G., Hermini, H. A., Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de Ciências Biológicas, Revista da Educação Matemática, Ano 5, nº 3, p. 63-69, janeiro de 1997
- Brun, A. G. V., Utilizando o Mathemática e o Mathcad nas aulas de Exatas, Revisa Interciências – volume 1, nº 4, 1997.
- Burak, D., Critérios norteadores para adoção da Modelagem Matemática no ensino fundamental e secundário, Zetetiké, ano 2, nº 2, p. 47-60, CEMPEM-UNICAMP, 1994.
- Charnet, R. e outros, Análise de Modelos de Regressão Linear Com Aplicações, Editora da UNICAMP, 1999.
- D'Ambrosio, U., Educação Matemática da Teoria à Prática, Editora Papirus, 1996.
- Dolis, M., Ensino de Cálculo e o processo de modelagem, Rio Claro, UNESP, 1989. Dissertação de Mestrado.
- Duarte, M. G. º, Eger, R. C. S. Cálculo e Álgebra Linear com Derive, Editora da UFSC, 1995.

- Eicher, M.L., Pino, J.C., Modelagem e implementação de ambientes virtuais de aprendizagem em ciências, IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.
- Fainguelernt, E.K., Educação Matemática Representação e Construção em Geometria, Editora Artes Médicas, 1999.
- Felder, R.M.; Bretn, R., Ensino Efetivo: Uma Oficina; Universidade Federal de Viçosa, 1999.
- Fernandes, A. P. S., Ambiente Educacional via WEB para Odontologia, Um estudo de caso em periodontia, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001, tese de doutorado.
- Figueiredo, V. L. X. , Santos, S. A., O computador no ensino de Cálculo; O problema do lixo na UNICAMP e outras aplicações, Zetetikê, vol. 5, n.7, p. 111-128, jan./jun. 1997.
- Foulin, J. N, Mouchon S., Psicologia da Educação, Editora Artmed, 2000.
- Franchi, R.H.O.L., A Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia, Rio Claro, UNESP, 1993. Dissertação de Mestrado.
- Freire, P.,Pedagogia do Oprimido, Editora Paz e Terra, 1981.
- Freitas, J.C., Breve Síntese sobre o uso de Computadores na Escola, In Análise Psicológica, série VIII, nº 1, p. 109-116, 1990.
- Gracias, T. S..;Borba, M.C.; Calculadoras Gráficas e Funções quadráticas, Revista de Educação e Matemática, ano 6, nº4, pag 27-32, Jul 98.

- Graham, E., Mathematical Modelling in a Extended Engineering Couse. In Trygve Breitig, Ian Huntley e Gabriele Kaiser – Messmer (Ed.). Teaching and Learning Mathematics in Context. London. Elles Horwood. 173-183, Jul 98.
- Gravina, M.A., Santarosa M. L., A Aprendizagem da matemática em ambientes informatizados IV Congresso RIBIE, Brasília, Jul 1998.
- ________, M. A., Peixoto L., Notare, M. R. Funções e Gráficos: um curso Introdutório pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, página http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/cfuncao/fun_graf.htm acessada em 03/01/2001.
- Guidorizzi, L. H., Um Curso de Cálculo Volume 1 Editora Livros Técnicos e Científicos, Jul 98.
- Guiness, I. G., O que foi e o que deveria ser o Cálculo. Zetetikê, vol. 5, n.7, p. 69-94, jan./jun. 1997.
- Hanselman, D.; Littlefield, B., MatLab 5 Guia do Usuário, Makron Books 1999.
- Hoffmann, L. D., Bradley, G. L., Cálculo Um curso moderno e suas aplicações, Editora LTC, 1996.
- Hughes-Hallett, D. et all, Cálculo e Aplicações, Editora Edgard Blucher Ltda, 1999.
- Leal, S., Modelação Matemática Uma Proposta Metodológica para o Curso de Economia, 1999, dissertação de mestrado.
- Martiniano, J. As novas Tecnologias de Informação e Comunicação no ensino aprendizagem, Universidade de Algarve, Unidade de Ciências

Exatas e Humanas, acessado na internet em 03/03/02 no endereço http://www.ualg.pt/uceh/ceduc/cadeiras/met1.

- Matos, J., Modelação Matemática: o papel das tecnologias de informação, Revista Educação e matemática: APM, 1997.
- ________, Carreira, S. P., Projecto Modelação no Ensino da Matemática, Relatório Final, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Educação, 1994, acessado na internet em 19/12/00 no endereço http://correio.cc.fc.pt/~jflm/mem.html .
- Miorim, M. A., Introdução à história da educação matemática, Atual Editora, 1998.
- Moran, José M., A Escola do futuro: um novo educador para uma nova era. In: Anais do 1º Congresso Paranaense de Instituições de Ensino. Curitiba: Sindicato dos Estabelecimentos de Ensino do Estado do Paraná, jul. 1996.
- Moysés, L.; Aplicações de Vygotsky à educação matemática, Editora Papirus,1997.
- Neto, P.L.O.C., Estatística, Editoa Edgard Blücher Ltda, 1977.
- Paldês, R. A., O uso da Internet no Ensino Superior de Graduação: estudo de caso de uma Universidade Brasileira, Universidade Católica de Brasília, dissertação de mestrado, 1999.
- Palis, G. L. R., Computadores em Cálculo Uma alternativa que não se justifica por si mesma, Temas e Debates Ano VII, p.,22-37, nº 6, Sociedade Brasileira de Educação Matemática- O Ensino de Cálculo, 1995.

- Pimenta, A., Oliveira, C. O., Função do primeiro grau: uma proposta de um novo padrão com vistas a exploração dos conteúdos mediante a utilização de softwares como ferramenta de ensino na matemática, RIBIE 2000, http://www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie2000/posters/290 acessado em 04/03/2001
- Schefler, N. F., Campagnollo, A. J., Modelagem Matemática uma alternativa para o ensino-aprendizagem da matemática no meio rural, Zetetiké-CEMPEM-FE/UNICAMP, vol. 6. Nº 10, Jul./Dez, 1998.
- Silva, E. L.; Menezes, Muszkat E., Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação. UFSC 2000.
- Silva, J.C., Princípios de Matemática Aplicada, Lisboa, McGraw Hill, 1994
- Silva, M. R. G. S., Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática, Boletim da Educação Matemática, ano 11, nº 12, pag.13-27, Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"- UNESP-Rio Claro, 1996.
- Stewart, J. , Cálculo Volume I, Editora Pioneira, 1999.
- The Role of Technology in the Mathematics Classroom, Proceedings of Working Group 16 at ICME-8, the 8th International Congress on Mathematics Education, Seville, Spain, 1996.
- Thiollent, Michel; Metodologia da Pesquisa-Ação; Editora Cortez ,1994.
- Valente, J. A., Computadores e Conhecimento: repensando a educação, Editora da Unicamp, 1993.

- Werkema, M.C.C., Ferramentas Estatísticas Básicas para o Gerenciamento de Processos, Fundação Christiano Ottoni, Universidade Federal de Minas Gerais, 1995
- White, Michael, Isaac Newton O último feiticeiro-Uma biografia, editora Record, 1997.

ANEXO 01
PERCENTUAL DE APROVAÇÃO DA DISCIPLINA CÁLCULO I

TURMA	ANO	APROVADOS	TOTAL	% APROVADOS
A	1S/98	13	34	38,24
B		13	31	41,94
C		26	37	70,27
EQA	1S/99	17	44	38,64
EQB		40	55	72,73
EQC		17	51	33,33
EBE	1S/00	13	51	25,49
EMD		13	40	32,50
EQA		20	47	42,55
L	1S/98	24	46	52,17
M		24	41	58,54
N		13	35	37,14
EIA	1S/99	29	49	59,18
EIB		21	37	56,76
EIA	1S/00	31	62	50,00
EIB		8	36	22,22

*1S significa primeiro semestre.
* Na coluna 1 apresentam-se os códigos de cada turma.

ANEXO 02

1) Qual a importância dos conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral para o Engenheiro?

2) Qual tópico do Cálculo foi mais difícil para você? O que você acha que poderia ser feito para melhorar o entendimento deste tópico? Foi derivadas? Limites? Funções? Aplicações de Derivadas? Integrais? Técnicas de Integração?

3) De maneira geral, o que prejudicou o seu rendimento em Cálculo?

□ exercícios muito longos, muitas contas, muito algebrismo.

□ exercícios puramente geométricos

□ exercícios sem aplicação prática da Engenharia

□ exercícios sem ligação com o dia-a-dia (seu cotidiano)

□ outros

Qual?

4) Durante seu curso você obtinha e analisava as respostas dos exercícios de que forma?

□ resposta analítica (desenvolvimento das fórmulas e algebrismo)
□ através de gráficos
□ através de tabela de dados
□ softwares matemáticos
□ outros

Qual?

5) O que acha que ajudou o seu entendimento em relação aos conceitos do Cálculo I?

6) O que é importante para você em relação ao Cálculo I?
□ desenvolver cálculos
□ analisar a resposta
□ entender os conceitos matemáticos envolvidos
□ resolver problemas
□ outros

Qual?

7) Você acha importante a utilização de ambientes computacionais (softwares matemáticos) para um Curso de Cálculo I?
 sim
 não

8) Em relação à pergunta anterior, como você descreveria esta importância? Que softwares conhece? Já usou algum software matemático. Qual? Em qual disciplina?

9) O que você acha dos livros que você usou em Cálculo I?

10) Estudava somente o Caderno? Consultava outros livros?

11) Quantas vezes fez a disciplina Cálculo I?

 1
 2
 3

12) Faça algum comentário sobre a disciplina Cálculo I, seja sobre o conteúdo da disciplina, quantidade de aulas, metodologia adotada pelo professor, nível das provas, formas de avaliação, etc.

ANEXO 03

1- Nome:____

2- Data de Nascimento:_____/_____/_____

3- Em que rede de ensino estudou?

1º grau ( ) pública ( ) privada ( )ambas

2º grau ( ) pública ( ) privada ( )ambas

4- Estado Civil: ( ) solteiro ( )casado

5- O que motivou sua escolha pela Engenharia química?

( ) influência de amigos

( ) influência dos pais

( ) influência dos professores

( ) necessidades relativas ao seu trabalho

( ) afinidade com química

( ) afinidade com matemática, ou seja, cálculos e raciocínio

( ) expectativa de ingressar no mercado de trabalho

6- Quantos vestibulares para Engenharia química, estabelecendo como primeira opção, você realizou?

( ) um

( ) dois

( ) mais de dois

7- Você trabalha? Sim ( ) Não( )

Caso sim, quantas horas por dia ________________

Caso não, quem financia seus estudos?___________

8- Onde fica sua residência?__________________________________

ANEXO 04 (NOTAS FINAIS DE CÁLCULO I) Turmas 1º Semestre 2001

ALUNO\GRUPOS	A	B	C	D	E	F
1	5,0	5,0	6,8	1,0	1,3	6,9
2	5,0	8,2	5,1	2,3	5,2	3,8
3	6,7	5,6	2,8	7,3	5,0	3,6
4	1,7	1,1	6,5	1,5	1,5	7,3
5	7,6	1,3	1,8	5,0	2,3	7,1
6	1,4	1,8	6,5	1,8	1,5	6,5
7	3,9	1,0	7,7	7,3	7,5	3,8
8	0,0	8,8	0,3	0,5	5,0	5,0
9	1,8	7,0	0,5	1,7	1,0	3,3
10	0,4	0,0	6,8	3,0	9,3	7,7
11	5,7	6,6	5,0	1,8	1,5	6,5
12	5,5	8,9	9,6	5,0	1,5	2,1
13	0,3	7,0	5,6	8,5	1,5	6,5
14	6,8	6,6	1,0	5,0	5,2	6,9
15	5,1	8,8	5,0	6,5	5,0	6,5
16	4,4	2,3	1,6	6,5	5,0	6,5
17	0,0	2,1	7,7	6,5	1,3	6,5
18	6,9	5,2	6,4	3,8	5,7	5,7
19	8,5	2,8	7,7	6,8	1,5	5,8
20	4,5	6,5	2,0	3,6	4,0	4,6
21	3,1	2,8	0,3	6,5	5,0	5,0
22	2,1	0,0	1,5	0,5	1,0	1,9
23	8,6	0,6	2,5	2,0	2,8	2,0
24	0,0	2,3	6,6	6,5	1,7	6,7
25	2,1	3,8	2,4	5,2	6,5	3,7
26	3,0	2,3	1,9	2,4	7,0	5,0
27	5,0	6,0	5,0	7,5	1,5	6,5
28	0,0	2,5	6,6	2,3	7,0	6,6
29	7,2	5,0	2,4	6,5	2,2	8,2
30	6,7	0,0	2,5	5,5	0,0	7,9
31	4,3	7,2	7,8	8,0		4,1
32	0,0	5,9	7,0	2,0		3,3
33	4,0	7,0	3,4	1,3		4,3
34	1,0		7,1	6,0		6,5
35	7,2		1,8	2,1		4,4
36	3,6		8,8	6,8		5,5
37	5,3		6,9	6,5		3,6
38	6,1		4,1	0,0		6,5
39	2,2			6,6		5,1
40	5,0			2,0		7,6
41	6,9			1,3		2,6
42	6,9			2,0		6,6
43	7,4			3,9		3,6
44	6,5			8,3		3,3
45	2,2			5,0		5,3
46	6,1			7,1		
47	0,8					
48	0,0					

ANEXO 05
PLANO DE CURSO - ANO DE 2002

DEPARTAMENTO: BÁSICO
CÓD.MA 111 DISCIPLINA: CÁLCULO I **CARGA HORÁRIA:** 90
COORDENADOR DA DISCIPLINA:
PROFESSORES QUE MINISTRAM A DISCIPLINA
OBJETIVOS: Proporcionar ao aluno a conceituação dos operações fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral: determinação de limites, diferenciação e antidiferenciação, em contextos algébricos, gráficos e numéricos.
METODOLOGIA: O curso adotará como métodos de ensino-aprendizagem a modelação matemática ou a aprendizagem baseada em projetos. Deverá ser destinado 16 horas para utilização de softwares matemáticos em ambiente computacional.
CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO: O aluno deverá ser submetido a três avaliações, constituindo-se de duas provas provas e um projeto (a ser desenvolvido em grupo). Anota final será a média aritmética das duas provas e do projeto. O projeto deverá ser apresentado sob a forma de seminário.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:

ITEM 01- Apresentação de Tópicos Históricos: O problema do cálculo de áreas. O problema das tangentes. Os paradoxos de Zenon: noções de seqüência e séries.
Número de aulas: 6 aulas
ITEM 02: Funções e Modelos: A representação de funções sob as formas: numérica, gráfica e algébrica. Funções definidas por partes. Funções crescentes e Decrescentes. Modelos Lineares, polinomiais, logarítmicos, exponenciais e trigonométricos. Uso de ambientes computacionais.
Número de aulas: 6 aulas.
ITEM 03: Limite e Continuidade de uma função: Definição. Abordagem Numérica, Gráfica (através de ambientes computacionais). Limites Unilaterais, bilaterais, limites infinitos. Cálculo de limites utilizando teoremas. Assíntotas verticais e horizontais. Definição precisa de limite. Continuidade. Aplicações.
Número de aulas: 18 aulas
ITEM 04: Derivação. Definição. O operador Diferencial. Derivadas de funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas. Regras de diferenciação. Regra da Cadeia. Aplicações. Diferenciação Implícita.
Número de aulas: 18 aulas
ITEM 05: Aplicações da Derivada. Diferenciais. Taxas de Variação: análise numérica e gráfica. Máximos e Mínimos. Teorema de Rolle e do valor médio. Crescimento e descrescimento. Teste da 1ª e 2ª derivada. Concavidade e inflexão.
Problemas de Otimização. Regra de L'Hôpital.
Número de aulas: 18 aulas
ITEM 06: Integração. O operador antidiferencial. Definição de Integral. Integrais Imediatas. A regra do ponto médio. Métodos de Integração: Substituição de variáveis, substituição trigonométrica, por partes, frações parciais, funções racionais de seno e cosseno. Integração de funções trigonométricas. Integral Definida. Teorema Fundamental do Cálculo. Modelos envolvendo integrais.
Número de aulas: 24 aulas

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1-Cálculo- Volume I. James Stewart.
2-Cálculo com Geometria Analítica. Louis Leithold. Volume I
3-Cálculo Avançado- Wilfred Kaplan. Volumes 1 e 2.
4-Cálculo com Geometria Analítica. Swokowsky. Volume 1 e 2.
5-Cálculo- Um Novo Horizonte - Vol 1. Howard Anton

SEMANA	ASSUNTO	BIBLIOG.
01ª	Apresentação de Tópicos Históricos	1,2,3,4,5
02	Funções e Modelos	1,2,3,4,5
03	Limite e Continuidade de uma função.	1,2,3,4,5
04	Limite e Continuidade de uma função.	1,2,3,4,5
05	Limite e Continuidade de uma função.	1,2,3,4,5
06	Derivação	1,2,3,4,5
07	Derivação	1,2,3,4,5
08	Derivação	1,2,3,4,5
09	Aplicações da Derivada	1,2,3,4,5
10	Aplicações da Derivada	1,2,3,4,5
11	Aplicações da Derivada	1,2,3,4,5
12	Integração	1,2,3,4,5
13	Integração	1,2,3,4,5
14	Integração	1,2,3,4,5
15	Integração	1,2,3,4,5

COORDENADOR DA DISCIPLINA

CHEFE DO DEPARTAMENTO

COORDENADOR DE GRADUAÇÃO